

Câu 1 (2 điểm). Cho phương trình $x^2 - 2(m + 1)x + 2m = 0$ (m là tham số).

- Chứng minh rằng với mọi m phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- Chứng minh $x_1^4 + x_2^4 > \frac{9}{2}$.
- Chứng minh $(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1})(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}) = 1$ khi và chỉ khi $m = -1$.

Lời giải.

- (0.5 điểm) Ta có: $\Delta' = (m + 1)^2 - 2m = m^2 + 1 > 0$. Do đó, phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .
- (0.75 điểm) Áp dụng định lý Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2(m + 1), x_1x_2 = 2m$.
Ta có: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4(m + 1)^2 - 4m = (2m + 1)^2 + 3 \geq 3$.
Áp dụng BĐT BCS: $2(x_1^4 + x_2^4) \geq (x_1^2 + x_2^2)^2 \geq 9$. Suy ra $x_1^4 + x_2^4 \geq \frac{9}{2}$.
Dấu bằng chỉ xảy ra khi $m = -\frac{1}{2}$ và $x_1^2 = x_2^2$. Điều kiện thứ hai tương đương với $x_1 = x_2$ (do $x_1 + x_2 = 2m \neq 0$) – không thể xảy ra do hai nghiệm phân biệt.

- (0.5 điểm) Khi $(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1})(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1}) = 1$ thì

$$(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 1}) = \frac{1}{(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1})} = (-x_2 + \sqrt{x_2^2 + 1})$$

Cách 1: Suy ra $x_1 + x_2 + \frac{x_1^2 - x_2^2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} = (x_1 + x_2) \left(1 + \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} \right) = 0$.

Đề ý rằng $\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1} > |x_1| + |x_2| \geq x_2 - x_1$ nên $1 + \frac{x_1 - x_2}{\sqrt{x_1^2 + 1} + \sqrt{x_2^2 + 1}} > 0$. Ta suy ra

$x_1 + x_2 = 0$, nói cách khác, $m = -1$.

Cách 2: Suy ra $x_1 + x_2 = \sqrt{x_2^2 + 1} - \sqrt{x_1^2 + 1}$

Do vai trò của x_1 và x_2 tương tự nhau nên tương tự ta có $x_1 + x_2 = \sqrt{x_1^2 + 1} - \sqrt{x_2^2 + 1}$
Cộng hai vế lại ta thu được $x_1 + x_2 = 0$, nói cách khác, $m = -1$.

(0.25 điểm) Ngược lại, khi $m = -1$ phương trình có hai nghiệm $\sqrt{2}$ và $-\sqrt{2}$. Thử lại ta thấy hai nghiệm thỏa mãn đẳng thức đã cho.

Câu 2 (1.5 điểm). Người ta muốn ghi bốn số thực ở bốn đỉnh của hình vuông $ABCD$ (mỗi đỉnh một số) thỏa mãn:

- i) Bốn số được ghi là đôi một phân biệt;
 - ii) Tổng hai số được ghi ở hai đầu của cạnh AB là 0;
 - iii) Tổng hai số được ghi ở hai đầu của ba cạnh còn lại là ba giá trị phân biệt: 1, 2, 3.
- a) Hãy chỉ ra một cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên.
 - b) Trong các cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên, tìm cách ghi có tổng bình phương của các số ở bốn đỉnh là nhỏ nhất.

Lời giải.

- a) (0.5 điểm) Một cách ghi thỏa mãn ở các đỉnh A, B, C, D theo thứ tự đó là $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}, \frac{2}{3}$.
- b) (1 điểm) Giả sử ta có một cách ghi thỏa mãn các điều kiện trên. Do tổng hai số ở đỉnh A và B bằng 0 nên chúng có dạng x và $-x$. Đặt y và z lần lượt là hai số ghi ở đỉnh C và D . Ta có $(x + y) + (-x + z) = (y + z)$ và $1 + 2 = 3$. Suy ra $y + z = 3$. Do vai trò của x và $-x$ là như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử $x + y = 1$ và $-x + z = 2$. Từ đây ta suy ra một cách ghi bốn số ở các đỉnh A, B, C, D thỏa mãn điều kiện là $x, -x, 2 + x, 1 - x$ (chẳng hạn, để bốn giá trị này đôi một phân biệt, ta có thể chọn $x = \frac{1}{3}$ và thu được cách ghi ở a)).
 Từ lập luận ở trên, ta suy ra được bốn giá trị ở trên bốn đỉnh phải có dạng $x, -x, 2 + x, 1 - x$.
 Tổng bình phương bốn số có dạng $4x^2 + 2x + 5 = \left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4}$, nhỏ nhất là $\frac{19}{4}$ khi $x = -\frac{1}{4}$.
Lưu ý: Nếu không chỉ ra vai trò tương tự giữa x và $-x$ thì sẽ có hai bộ số thỏa mãn và dẫn đến cùng một giá trị nhỏ nhất

Câu 3 (2 điểm). Cho các số nguyên dương m, n thỏa mãn: $m^2 + m + n^2$ chia hết cho tích mn (1).

- a) Chứng minh không tồn tại m, n thỏa mãn (1) khi $n = 3$.
- b) Tìm m, n thỏa mãn (1) biết m chia hết cho n .
- c) Ký hiệu d là ước chung lớn nhất của m và n . Chứng minh nếu m, n thỏa mãn (1) thì $m = d^2$.

Lời giải.

- a) (0.75 điểm) Khi $n = 3$, điều kiện (1) trở thành $m^2 + m + 9 : 3m$.
 Do $m^2 + m : m$ và $3m : m$, ta suy ra $9 : m$. Suy ra $m = 9, 3$ hoặc 1 . Thử lại ta thấy cả ba giá trị trên đều không thỏa mãn yêu cầu.
 Vậy không tồn tại m thỏa mãn (1) khi $n = 3$.
- b) (0.75 điểm) Do $m : n$, tồn tại số nguyên dương k sao cho $m = kn$.
 Điều kiện (1) trở thành $k^2n^2 + kn + n^2 : kn^2$.
 Vì $k^2n^2 + n^2 : n^2$ và $kn^2 : n^2$, ta suy ra $kn : n^2$, từ đó suy ra $k : n$ (2).
 Mặt khác, từ $k^2n^2 + kn : kn$ và $kn^2 : kn$, ta suy ra $n^2 : kn$, từ đó suy ra $n : k$ (3).
 Từ (2), (3) suy ra $n = k$ hay $m = n^2$. Thế vào (1) thu được $n^4 + n^2 + n^2 : n^3$, suy ra $2n^2 : n^3$ hay $n = 2$ hoặc 1 . Thử lại ta thấy $m = 4, n = 2$ hoặc $m = n = 1$ thỏa mãn (1).
- c) (0.5 điểm) Do d là ước chung lớn nhất của m và n nên tồn tại a, b nguyên tố cùng nhau và $m = ad, n = bd$. Điều kiện (1) trở thành $a^2d^2 + ad + b^2d^2 : abd^2$.
 Do $a^2d^2 + b^2d^2$ và abd^2 đều $: d^2$, ta suy ra $ad : d^2$, từ đây suy ra $a : d$ (4).
 Do $a^2d^2 + ad$ và abd^2 đều $: ad$, ta suy ra $b^2d^2 : ad$, từ đây suy ra $b^2d : a$. Mà a và b nguyên tố cùng nhau nên $d : a$ (5).
 Từ (4), (5) suy ra $a = d$ hay $m = ad = d^2$.

Câu 4 (3 điểm). Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $\hat{A} > \hat{B} > \hat{C}$ và điểm D trên cung nhỏ AC sao cho $CD > AB$. Đường trung trực của DB cắt AB tại E ; đường trung trực của DC cắt AC tại F .

- Chứng minh các điểm A, D, E, F thuộc một đường tròn và đường tròn này đi qua tâm O của (O) .
- Chứng minh rằng tam giác DBE và tam giác DCF đồng dạng. Chứng minh rằng đường cao qua D của tam giác DEF và đường cao qua A của tam giác ABC cắt nhau trên (O) .
- Ký hiệu (I) là đường tròn tâm I , đi qua các điểm A, D, E, F . Tiếp tuyến của (I) tại O cắt tiếp tuyến của (O) tại D ở S . Gọi R là trung điểm OD và K là giao điểm của SI với đường tròn ngoại tiếp tam giác SDO ($K \neq S$). Chứng minh $\widehat{RKD} = 90^\circ$ và DK đi qua trung điểm của IR .

Lời giải.

- (1 điểm) Do E thuộc trung trực của DB nên $EB = ED$, suy ra tam giác BED cân ở E , suy ra $\widehat{AED} = 2\widehat{ABD}$. Tương tự với F ta có $\widehat{AFD} = 2\widehat{ACD}$. Do $\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$, ta có $\widehat{AED} = \widehat{AFD}$, suy ra tứ giác $AEDF$ nội tiếp.
Ta có $\widehat{AOD} = 2\widehat{ACD} = \widehat{AFD}$, suy ra tứ giác $AOFD$ nội tiếp. Từ đây ta suy ra năm điểm A, D, E, F, O cùng nằm trên một đường tròn.
- (1 điểm) Hai tam giác cân DBE và DCF có góc ở đáy $\widehat{DBE} = \widehat{DCF}$ nên chúng đồng dạng. Gọi T là giao điểm của EF và BC . Do $\widehat{DEF} = \widehat{DBC}$, tứ giác $DEBT$ nội tiếp, suy ra $\widehat{BTE} = \widehat{BDE} = \widehat{ABD}$.
Để ý rằng góc tạo bởi đường cao kẻ từ A của tam giác ABC và đường cao kẻ từ D của tam giác DEF bằng góc tạo bởi EF và BC , góc \widehat{BTE} , và góc này bằng \widehat{ABD} . Từ đây ta suy ra giao điểm của hai đường cao này nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD , là (O) .
- (1 điểm) Gọi M là trung điểm OS . Do tam giác SDO vuông tại D nên đường tròn ngoại tiếp tam giác SDO chính là đường tròn đường kính OS – cũng là đường tròn tâm M bán kính $MO = MD$. Từ đây suy ra tam giác MOI bằng tam giác MDI , suy ra MI là trung trực của OD và MD là tiếp tuyến của (I) tại D .
Do MI là trung trực của OD nên M, R, I thẳng hàng và $\widehat{IRO} = 90^\circ$. Mặt khác, $\widehat{IKO} = 90^\circ$ do K thuộc đường tròn đường kính OS . Vậy tứ giác $IKRO$ nội tiếp đường tròn đường kính IO , suy ra $\widehat{RKS} = \widehat{IOR}$. Tứ giác $OKDS$ nội tiếp đường tròn đường kính OS nên $\widehat{DKS} = \widehat{DOS}$.
Từ đây suy ra $\widehat{RKD} = \widehat{RKS} + \widehat{DKS} = \widehat{IOR} + \widehat{DOS} = \widehat{IOS} = 90^\circ$.
Gọi N là giao điểm của DK với IR .
Tam giác DRN vuông ở R có RK là đường cao nên $NR^2 = NK \cdot ND$ (2).
Ta có $\widehat{IKN} = \widehat{DKS} = \widehat{DOS} = \widehat{DIN}$ (đấu bằng thứ ba là do tứ giác $DIOM$ nội tiếp đường tròn đường kính IM). Từ đây, tam giác NKI đồng dạng với tam giác NID theo trường hợp góc-góc, suy ra $\frac{NK}{NI} = \frac{NI}{ND}$ hay $NI^2 = NK \cdot ND$ (3).
Từ (2), (3) suy ra $NI = NR$ hay DK đi qua trung điểm N của IR .

Câu 5 (1.5 điểm). Cho bảng ô vuông kích thước 2×9 và số nguyên dương $k \leq 18$. Hai ô của bảng được gọi là *kề bên* nếu chúng có một cạnh chung. Hai bạn An và Bình chơi trò "Truy Tìm Tàu Ngầm" như sau: Trước khi trò chơi bắt đầu, An chọn một ô trên bảng và không cho Bình biết. Ở mỗi lượt chơi:

- An phải chọn một ô mới, kề bên với ô đã chọn trước đó, và không cho Bình biết;
- Sau khi An chọn xong, Bình chọn k ô của bảng và hỏi An: trong k ô này có ô An vừa chọn hay không? Nếu có thì Bình thắng, nếu không thì hai bạn lại chơi lượt tiếp theo.

a) Xét $k = 4$. Chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 8 lượt chơi.

b) Xét $k = 2$. Chứng minh rằng Bình có thể thắng sau không quá 16 lượt chơi.

Lời giải. Đánh số các ô của bảng từ dưới lên trên là: 1, 2, và từ trái qua phải là: 1, 2, ..., 9.

a) (1 điểm) Với $k = 4$. Xét cách chơi của Bình như sau:

Ở lượt thứ $i, i = 1, 2, \dots, 8$, Bình kiểm tra bốn ô $\{(i, 1), (i, 2), (i + 1, 1), (i + 1, 2)\}$.

Giả sử Bình vẫn chưa thắng, nghĩa là ô của An chọn không nằm trong số các ô Bình chọn trong 8 lượt đã qua – nói cách khác, trong lượt i , ô An chọn không đổi qua các cột i và $i + 1$.

Trong lượt 1, ô của An không nằm trong các cột 1, 2. Vậy sau lượt 1, ô của An chọn chỉ có thể nằm trong các cột từ 3 đến 9. Do đó, trong lượt 2, ô của An chỉ có thể đổi sang một trong các cột từ 2 đến 9. Sau lượt 2, ô của An chỉ có thể nằm trong các cột từ 4 đến 9. Cứ tiếp tục như vậy bằng quy nạp ta suy ra được sau lượt 8, ô của An chỉ có thể nằm ở cột 9. Như vậy, ở lượt 8, ô của An chuyển qua sẽ nằm ở cột 8 hoặc 9 mà Bình chọn – mâu thuẫn với giả sử. Nói cách khác, Bình sẽ thắng sau không quá 8 lượt.

b) (0.5 điểm) Với $k = 2$. Gọi một ô của bảng là *chẵn* nếu tổng tọa độ của nó là chẵn và *lẻ* nếu tổng tọa độ là lẻ. Để ý rằng mỗi lượt chơi thì An phải thay đổi tính chẵn-lẻ của ô mình chọn.

Xét cách chơi của Bình như sau:

- 8 lượt đầu: lượt thứ $i, i = 1, 2, \dots, 8$, Bình kiểm tra hai ô $\{(i, 1), (i + 1, 2)\}$.

- 8 lượt sau: lượt thứ $17 - j, j = 8, 7, \dots, 1$, Bình kiểm tra hai ô $\{(j, 1), (j + 1, 2)\}$.

Giả sử Bình chưa thắng sau 18 lượt chơi như trên.

Ta xét hai trường hợp:

- Trường hợp 1: Trong lượt 1 An chọn một ô chẵn. Do cách chọn của Bình, sau lượt 1, ô của An chọn chỉ có thể nằm trong một ô chẵn trong các cột từ 3 đến 9. Do đó, trong lượt 2, ô của An chỉ có thể đổi sang một trong số các ô lẻ từ cột 2 đến 9. Sau lượt 2, ô của An chỉ có thể nằm trong số các ô lẻ từ cột 4 đến cột 9. Cứ tiếp tục như vậy, bằng quy nạp, ta suy ra được ở lượt thứ 8, Bình chọn được ô của An – mâu thuẫn với giả sử.

- Trường hợp 2: Trong lượt 1 An chọn một ô lẻ. Như vậy ở lượt 9, An đang ở một ô lẻ và từ lượt 9, Bình và An chọn ô có cùng tính lẻ. Từ đây, ta có thể đưa về chứng minh tương tự như Trường hợp 1 với Bình duyệt các ô từ phải qua trái.

Lưu ý: Có thể cho 0.5 điểm ở ý a) và 0.25 điểm ở ý b) nếu chiến thuật đúng nhưng không chứng minh chặt chẽ được.

-----HẾT-----