TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

CHƯƠNG 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Tính đơn điệu của hàm số

Nhắc lại về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

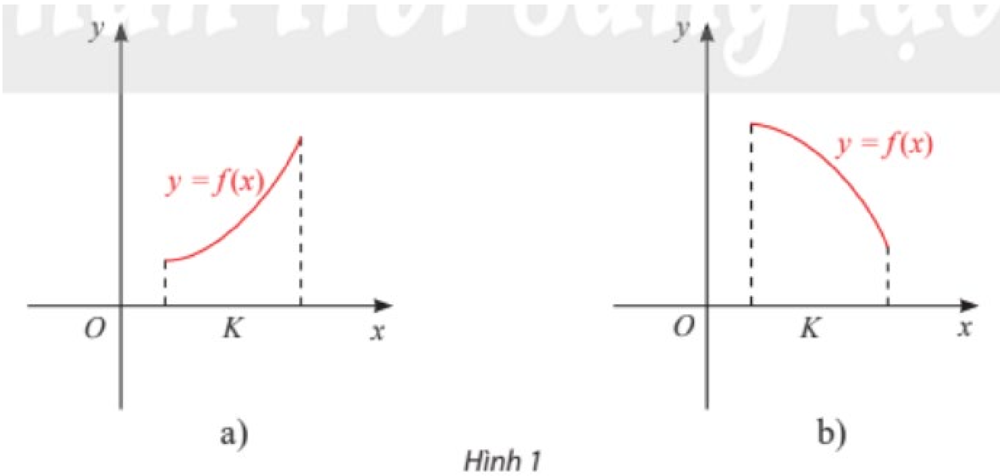
Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên K.

Hàm số $y=f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu với mọi x_1,x_2 thuộc K mà $x_1<x_2$ thì $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$.

Hàm số $y=f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu với mọi x_1,x_2 thuộc K mà $x_1<x_2$ thì $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$.

Nếu hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải (Hình 1a).

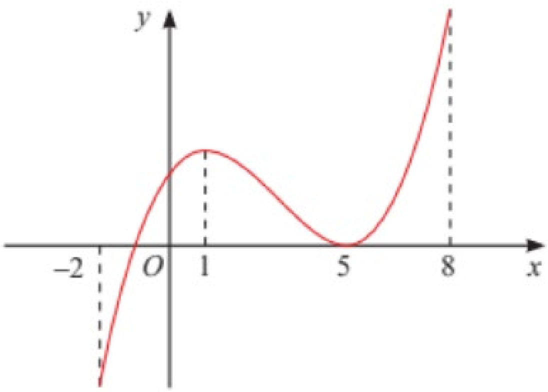
Nếu hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải (Hình 1 b).



Hình 1

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K.

Ví dụ 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị cho ở Hình 2.



Hình 2

Lời giải

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(5;8)$, nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

Tính đơn điệu của hàm số

Tổng quát, ta có kết quả sau đây:

Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên K.

Nếu $f'(x)>0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu $f'(x)<0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $g(x)=\dfrac{x}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $(1;+\infty)$. Ta có $g'(x)=-\dfrac{1}{(x-1)^2}<0$ với mọi $x\in(1;+\infty)$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chú ý: Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà chưa cho khoảng K, ta hiểu xét tính đơn điệu của hàm số đó trên tập xác định của nó.

Từ kết quả trên, để xét tính đơn điệu của hàm số $y=f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm x thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x)=-x^3+3x^2$ b) $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$ c) $h(x)=x^3$.

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x)=-x^3+3x^2$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $f'(x)=-3x^2+6x; f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $f(x)=-x^3+3x^2$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

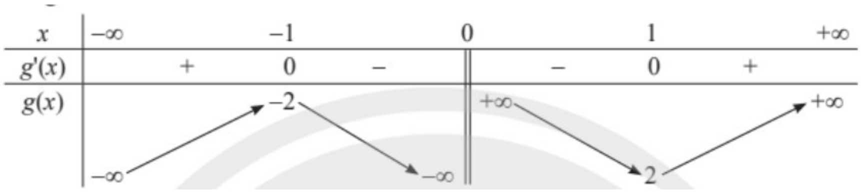
b) Xét hàm số $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Ta có $g'(x)=1-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$. Vì $x^2>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ nên $g'(x)$ cùng dấu với x^2-1.

Ta có $g'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=1$.

Bảng biến thiên:

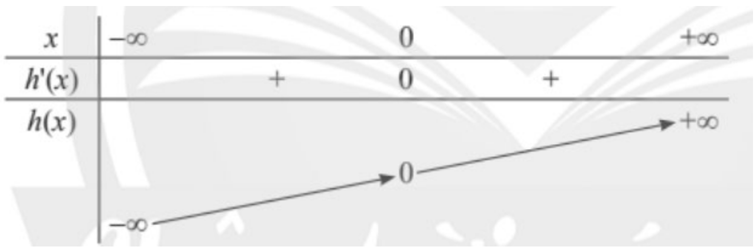


Vậy hàm số $g(x)=x+\dfrac{1}{x}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$.

c) Xét hàm số $h(x)=x^3$.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $h'(x)=3x^2; h'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số $h(x)=x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chú ý:

a) Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $K, f'(x)\geq 0$ với mọi $x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K.

b) Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $K, f'(x)\leq 0$ với mọi $x\in K$ và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K.

c) Nếu $f'(x)=0$ với mọi $x\in K$ thì hàm số không đổi trên K.

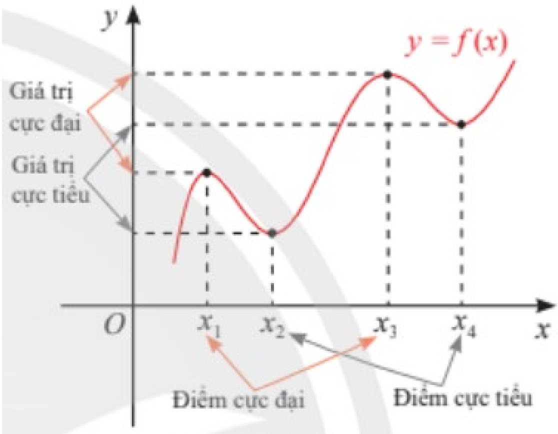
2. Cực trị của hàm số

Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp D và $x_0\in D$.

- Nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $(a;b)\subset D$ sao cho $f(x)<f\left(x_0\right)$ với mọi $x\in(a;b)\setminus\left\{x_0\right\}$ thì x_0 được gọi là một điểm cực đại, $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $y=f(x)$, kí hiệu y_{CD}.

- Nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $(a;b)\subset D$ sao cho $f(x)>f\left(x_0\right)$ với mọi $x\in(a;b)\setminus\left\{x_0\right\}$, thì x_0 được gọi là một điểm cưc tiểu, $f\left(x_0\right)$ được gọi là giá trị cực tiểu của hàm số $y=f(x)$, kí hiệu y_{CT}.



Hình 6

Chú ý:

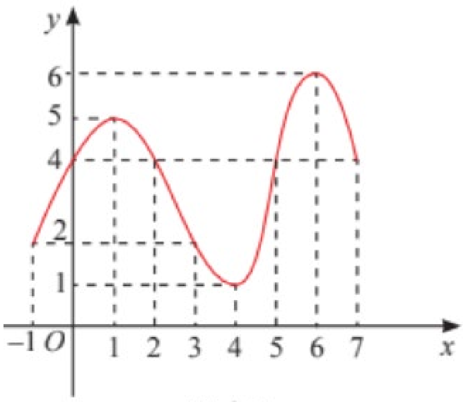
a) Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị của hàm số. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cưc trị (còn gọi là cưc trị) của hàm số.

b) Nếu x_0 là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ thì ta cũng nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại x_0.

c) Hàm số có thể đạt cực đại và cực tiểu tại nhiều điểm trên D.

d) Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho ở Hình 7.



Hình 7

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ có:

- $x = 1$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(1)$ với mọi $x \in (0;2) \setminus \{1\}, y_{CĐ} = f(1) = 5$;

- $x = 6$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(6)$ với mọi $x \in (5;7) \setminus \{6\}, y_{CD} = f(6) = 6$;

- $x = 4$ là điểm cực tiểu vì $f(x) > f(4)$ với mọi $x \in (3;5) \setminus \{4\}, y_{CT} = f(4) = 1$.

Tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $\left(a; x_0\right)$ và $\left(x_0; b\right)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0;

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

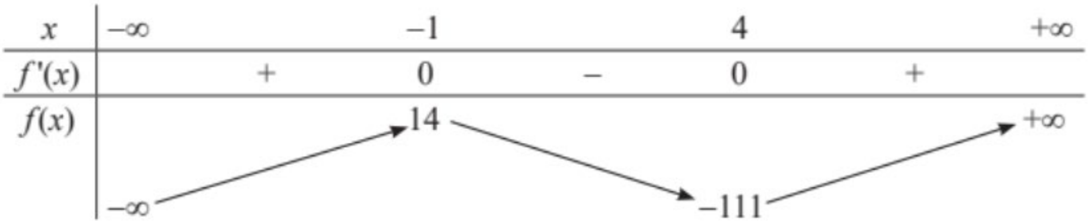
Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = 2x^3 - 9x^2 - 24x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 6x^2 - 18x - 24$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 4$.

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, giá trị cực đại là $f(-1) = 14$; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$, giá trị cực tiểu là $f(4) = -111$.

Nhận xét: Từ kết quả trên, để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm x thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 4. Từ bảng biến thiên kết luận về cực trị của hàm số.

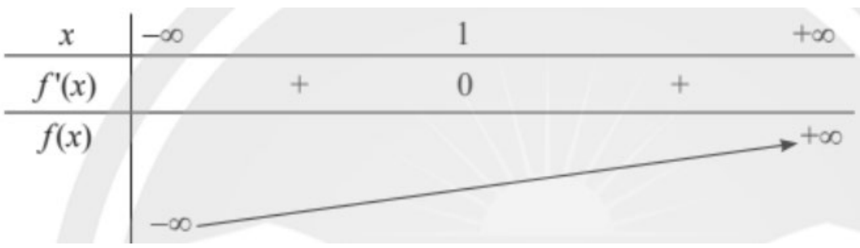
Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 4$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x + 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số không có cực trị.

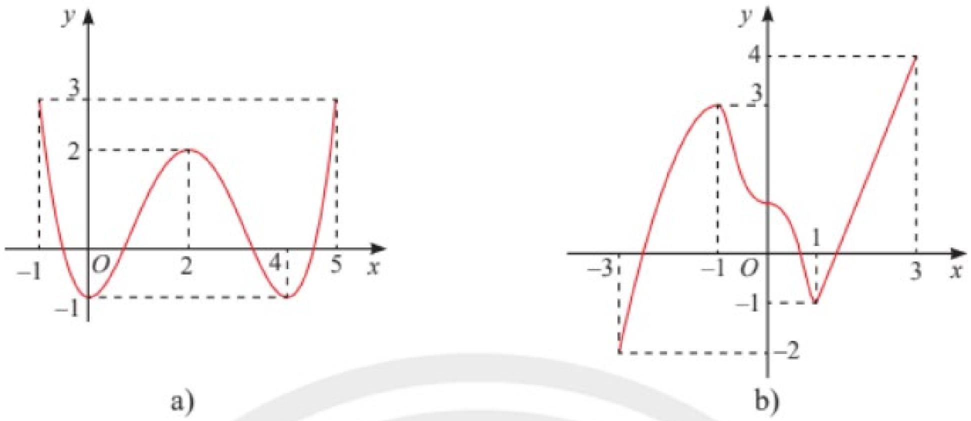
Chú ý:

a) Nếu $f'(x_0) = 0$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số không có cực trị tại x_0.

b) Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng K thì $f(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số có đồ thị cho ở Hình 11.



Hình 11

2. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=4x^3+3x^2-36x+6$;

b) $y=\dfrac{x^2-2x-7}{x-4}$.

3. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=2x^3+3x^2-36x+1$;

b) $y=\dfrac{x^2-8x+10}{x-2}$;

c) $y=\sqrt{-x^2+4}$.

4. Chứng minh rằng hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

5. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x)=0,01x^3-0,04x^2+0,25x+0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến 2017$(0\le x\le 7)$.

(Theo: https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-quadu-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna)

a) Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$.

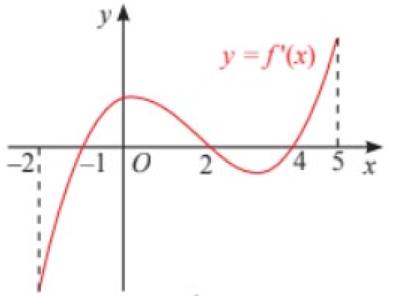
b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

6. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\ge 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t)$; $v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

7. Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như Hình 12. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $y=f(x)$.



Hình 12

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Xét định đơn điệu của hàm số cho bởi công thức

1.1 Phương pháp

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3: Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4: Lập bảng biến thiên.

Bước 5: Kết luận.

1.2 Ví dụ minh họa

Câu 1. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 2. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Câu 3. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$.

Câu 4. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \dfrac{-x^2+2x-1}{x+2}$.

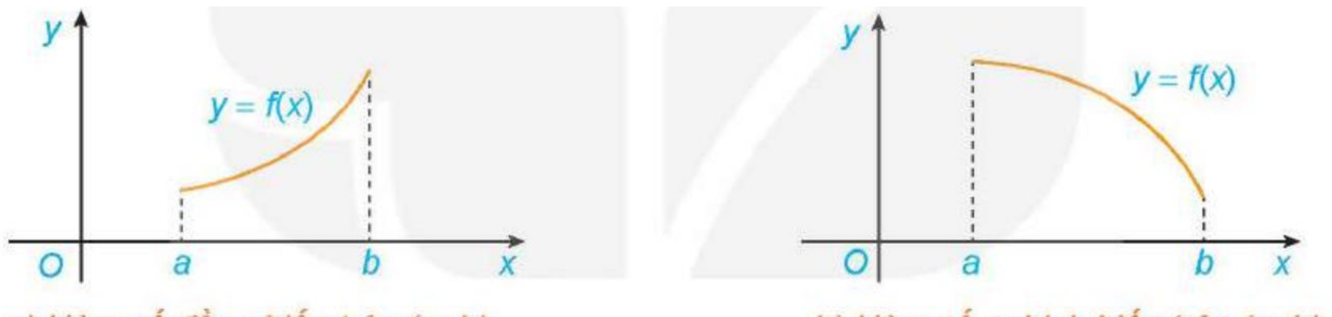
Câu 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$.

Dạng 2: Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị

2.1 Phương pháp

Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.1.3a).

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.1.3b).

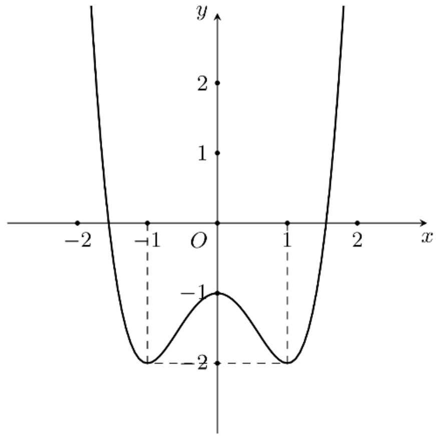


a) Hàm số đồng biến trên (a; b). b) Hàm số nghịch biến trên (a; b).

Hình 1.3

2.2 Ví dụ minh họa

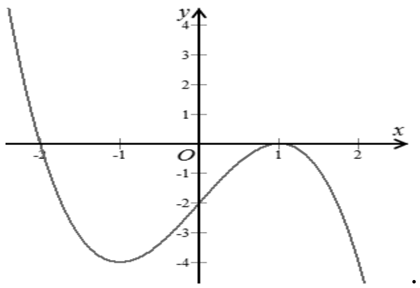
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



a) Từ đồ thị hàm số trên hãy vẽ bảng biến thiên

b) Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến.

Câu 2. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(2x+1)$.

Dạng 3: Tìm tham số m để hàm số đơn điệu

3.1. Phương pháp

Xét hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \; y' = f'(x) \geq 0,\; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m\;?$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \leq 0,\; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m\;?$

Lưu ý: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c.$

- Để $f(x) \geq 0,\; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. • $f(x) \leq 0,\; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Xét hàm số nhất biến $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{d}{c} \right\}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = \dfrac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) > 0,\; \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m\;?$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) < 0,\; \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m\;?$

Cô lập tham số m, tức là biến đổi $f'(x,m) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow g(x) \geq m (\leq m)$.

Bước 1. Xác định tham số để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.

Bước 2. Tính $f'(x,m)$.

Bước 3. Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.

Nếu hàm số đồng biến trên $(a;b)$ thì

$f'(x) \geq 0, \forall x \in [a;b] \rightarrow g(x) \geq h(m), \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow \min_{[a;b]} g(x) \geq h(m)$.

Nếu hàm số đồng biến trên $(a;b)$ thì

$f'(x) \leq 0, \forall x \in [a;b] \rightarrow g(x) \leq h(m), \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow \min_{[a;b]} g(x) \leq h(m)$.

3.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Tìm m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

$m \in \left[-\dfrac{1}{2}; 1 \right]$

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số. Tìm m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

Dạng 4: Ứng dụng tính đơn điệu để chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình

4.1. Phương pháp

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đơn điệu trên D thì $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

2. Nếu hàm số $f(x), g(x)$ liên tục và đơn điệu trên D thì $f(x) = g(x)$ có ít nhất một nghiệm.

3. Nếu $f(x)$ liên tục và đơn điệu trên D và $u, v \in D$ thì phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

4.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Giải phương trình $x^{2017} + x^3 - 6x^2 + 13x - 9 = 0$.

Câu 2. Giải phương trình sau $\sqrt{2x-1} - \sqrt{5x-2} = (5x-2)^5 - (2x-1)^5$.

Câu 3. Giải phương trình $x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = (4x+6)\sqrt{4x+5}$.

Dạng 5: Tìm cực trị hàm số cho bởi công thức

5.1. Phương pháp

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

5.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Câu 2. Tìm cực trị của hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Câu 3. Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

Câu 4. Tìm cực trị của hàm số $y = (1-x)^3 (3x-8)^2$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 (x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là.

Dạng 6: Tìm cực trị dựa vào bảng biến thiên, đồ thị

6.1. Phương pháp

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu qua $x_0 \in D$ thì x_0 là cực trị. Cụ thể:

+Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + sang – thì x_0 là điểm cực đại.

+Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + thì x_0 là điểm cực tiểu.

- *Chú ý:*

+ Hàm số đạt cực trị tại: $x =$

+ Điểm cực trị của hàm số là: $x =$

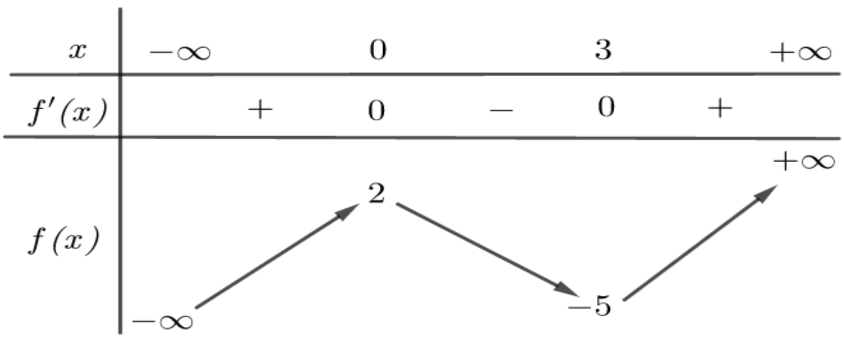
+ Giá trị cực trị của hàm số là: $y =$

+ Cực trị của hàm số là: $y =$

+ Điểm cực trị của đồ thị hàm số: $(x; y)$

6.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



a) Giá trị cực tiểu của hàm số.

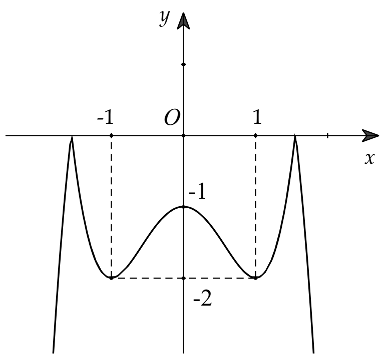
b) Điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ với bảng xét dấu đạo hàm như sau:

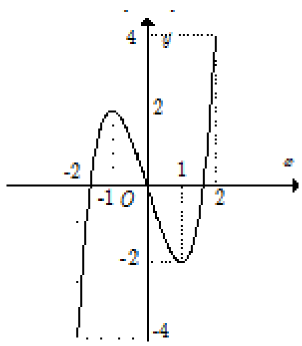
x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hỏi hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên. Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

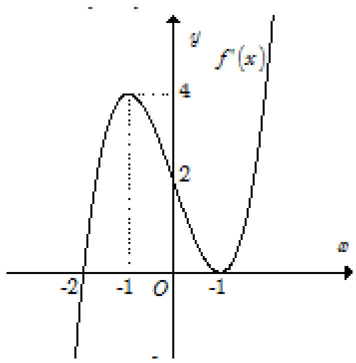


Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



Câu 5: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x(x-1)^2(x-2)^3(x-3)^5$. Hỏi hàm số $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Tìm điểm cực tiểu của hàm số

Dạng 7: Tìm m để hàm số đạt cực trị tại một điểm x_0 cho trước

7.1. Phương pháp

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0)=0 \Rightarrow m?$

Bước 3. Thay m vào thử lại

7.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Tìm m để hàm số $y=x^3-2mx^2+mx+1$ đạt cực tiểu tại $x=1$

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đạt cực đại tại $x=-2$

Câu 3. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Dạng 8: Toán thực tế

Câu 1. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$N(t)=\frac{25t+10}{t+5}, t\geq 0$ trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim_{t \to +\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Câu 2. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số $f(t) = \dfrac{5000}{1+5e^{-t}}, t \geq 0$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?.

Câu 3. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến $2017 (0 \leq x \leq 7)$.

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Câu 4. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t); v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?.

Câu 5. Thể tích V (đơn vị: centimét khối) của $1\,\text{kg}$ nước tại nhiệt độ $T\left(0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}\right)$ được tính bởi công thức sau: $V(T) = 999,87 - 0,06426T + 0,0085043T^2 - 0,0000679T^3$.

Hỏi thể tích $V(T), 0^\circ\text{C} \leq T \leq 30^\circ\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?.

Câu 6. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lủa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(\text{s})$, cho bởi hàm số sau:

$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$

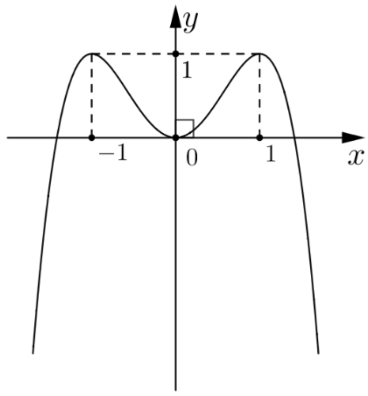
(v được tính bằng $\text{ft}/s, 1$ feet $= 0,3048\,\text{m}$)

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

PHẦN 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;0)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \; \| \; +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Câu 4: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên

A. $(-1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 5: Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 6: Hàm số $y=\frac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

A. $\mathbb{R}\backslash\{-3\}$. **B.** R. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-12x-1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^3$, với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;\,3)$. **B.** $(-1;\,0)$. **C.** $(0;\,1)$. **D.** $(-2;\,0)$.

Câu 12: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $y'=x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)=(1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Câu 14: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ **B.** $y=x^3+x$ **C.** $y=-x^3-3x$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Câu 18: Hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $(-\infty;0)$

Câu 19: Trong các hàm số sau, hàm số nào vừa có khoảng đồng biến vừa có khoảng nghịch biến trên tập xác định của nó. $(\mathrm{I}).\ y=\dfrac{2x+1}{x+1}$, $(\mathrm{II}).\ y=-x^4+x^2-2$, $(\mathrm{III}).\ y=x^3+3x-4$.

A. $(\mathrm{I});(\mathrm{III})$. **B.** $(\mathrm{I})\ \&\ (II)$. **C.** $(\mathrm{II});(\mathrm{III})$. **D.** (II).

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=-2f'(x)=-2x^2+4x>0\Leftrightarrow x\in(0;2)$.

Suy ra: Hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 21: Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2-1$. Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Câu 22: Hàm số $y=-x^4+4x^2+1$ nghịch biến trên mỗi khoảng nào sau đây?

A. $(\sqrt{2};+\infty)$.
B. $(-\sqrt{3};0);(\sqrt{2};+\infty)$.
C. $(-\sqrt{2};0);(\sqrt{2};+\infty)$.
D. $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Câu 23: Cho hàm $y=\sqrt{x^2-6x+5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 24: Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y=\sqrt{9-x^2}$.

A. $(0;+\infty)$.
B. $(-\infty;0)$.
C. $(-3;0)$.
D. $(0;3)$.

Câu 25: Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y=-x+\sin x$.

A. $\varnothing$.
B. $(-\infty;2)$.
C. $\mathbb{R}$.
D. $(1;2)$.

Câu 26: Cho hàm số $y=x\ln x$. Chọn khẳng định sai trong số các khẳng định sau:

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{e};+\infty\right)$.
C. Hàm số có đạo hàm $y'=1+\ln x$.
D. Hàm số có tập xác định là $D=(0;+\infty)$.

Câu 27: Cho hàm số $y=\sin x+\cos x-\sqrt{3}x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.
C. Hàm số có điểm cực trị.
D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3+mx^2+4x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5 .
B. 4 .
C. 3 .
D. 2 .

Câu 29: Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+(4m+9)x+5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. 5
B. 4
C. 6
D. 7

Câu 30: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$

là

A. $[-4;2]$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

Câu 31: Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq -1 \\ m\leq -2 \end{array}\right.$. **B.** $-2\leq m\leq -1$. **C.** $-2<m<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Câu 32: Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=(m^2-1)x^3+(m-1)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 33: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số hàm số $y=\frac{1}{3}(m^2-m)x^3+2mx^2+3x-2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 34: Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 200. **B.** 99. **C.** 100. **D.** 201.

Câu 35: Giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-(3m+2)x+2$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4 là

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=\frac{1}{3}$.

Câu 36: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+2017$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

A. $m<0$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>6 \end{array}\right.$. **C.** $m>6$. **D.** $m=9$.

Câu 37: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+(m+1)x^2+4x+7$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Tính tổng tất cả phần tử của S.

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 4.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+2mx-3m+4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m=9$. **B.** $m=1;m=-9$. **C.** $m=-1;m=9$. **D.** $m=-1$.

Câu 39: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$..

A. $m>1$. **B.** $m\le -\frac{1}{2}$. **C.** $m<-\frac{1}{2}$. **D.** $m=0$.

Câu 40: Biết rằng hàm số $y=\frac{x^3}{3}+3(m-1)x^2+9x+1$ nghịch biến trên $(x_1;x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định. Nếu $|x_1-x_2|=6$ thì giá trị m là:

A. -4 và 2. **B.** $1+\sqrt{2}$ và $1-\sqrt{2}$. **C.** -4. **D.** 2.

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị thực m để $f(x)=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1.

A. $-\frac{5}{4}<m<0$. **B.** $m>-\frac{5}{4}$. **C.** $m\ge 0$. **D.** $m\le 0$.

Câu 42: Hàm số $y=(x+m)^3+(x+n)^3-x^3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4(m^2+n^2)-m-n$ bằng

A. -16. **B.** 4. **C.** $\frac{-1}{16}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Câu 43: Cho hàm số $y=\frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Câu 44: Cho hàm số $y=\frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 4 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 5

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Câu 47: Hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi các giá trị của m là:

A. $m \ge 1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m \le -\dfrac{5}{2}$. **D.** $-1<m<1$.

Câu 48: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 50: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

Câu 51: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=\dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$?

A. 2020. **B.** 2026. **C.** 2018. **D.** 2023.

Câu 52: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m+3}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 53: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

A. 5. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 7.

Câu 54: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1]$ **B.** $(-\infty;4]$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;4)$

Câu 55: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $\left(-\infty;-\frac{3}{4}\right]$ **B.** $[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $\left[-\frac{3}{4};+\infty\right)$

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+2$ tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m<3$. **B.** $m\geq 3$. **C.** $m\neq 3$. **D.** $m\leq 3$.

Câu 57: Tìm tất cả các giá thực của tham số m sao cho hàm số $y=2x^3-3x^2-6mx+m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $m\leq -\frac{1}{4}$. **B.** $m\geq \frac{1}{4}$. **C.** $m\geq 2$. **D.** $m\geq 0$.

Câu 58: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-mx^2-(m-6)x+1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

A. $(-\infty;6]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;3]$. **D.** $[3;6]$.

Câu 59: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\leq 0$ hoặc $1\leq m<2$ **B.** $m\leq 0$ **C.** $1\leq m<2$ **D.** $m\geq 2$

Câu 60: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y=\frac{\cos x-3}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

A. $\left[\begin{array}{l}0\leq m<3\\ m\leq -1\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-1\end{array}\right.$. **C.** $m\leq 3$. **D.** $m<3$.

Câu 61: Cho hàm số $y=\frac{\ln x-4}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Câu 62: Tìm m để hàm số $y=\frac{\cos x-2}{\cos x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

A. $\left[\begin{array}{l}m\geq 2\\ m\leq -2\end{array}\right.$ **B.** $m>2$ **C.** $\left[\begin{array}{l}m\leq 0\\ 1\leq m<2\end{array}\right.$ **D.** $-1<m<1$

Câu 63: Cho hàm số $y=\frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

Câu 64: Cho hàm số $y=\dfrac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(17;37)$.

A. $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ -4\le m<-1 \\ m\le -6 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m\le -4 \end{array}\right.$ **C.** $-1<m<2$. **D.** $-4\le m<2$

Câu 65: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương và nhỏ hơn 2018 của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;9)$. Tính số phần tử của tập hợp S.

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2016. **D.** 2017.

Câu 66: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $(e^2;+\infty)$.

A. $m\le -2$ hoặc $m=1$. **B.** $m<-2$ hoặc $m=1$.
C. $m<-2$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Câu 67: Hàm số $y=\dfrac{x^2-4x}{x+m}$ đồng biến trên $[1;+\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m\in(-1;2]\setminus\{-1\}$. **B.** $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right)$.

C. $m\in\left(-1;\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $m\in\left(-\dfrac{1}{2};2\right]\setminus\{-1\}$.

Câu 68: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{2x^2-3x+m}{x-2}$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $m\ge -2$. **B.** $m\le -2$. **C.** $m<-2$. **D.** $m>-2$.

Câu 69: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{2x^2+(1-m)x+1+m}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 70: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Câu 71: Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $m=0$. **B.** $m=-1$. **C.** $m<0$. **D.** $m\le 0$.

Câu 72: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-3;-2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Câu 73: Tìm m để hàm số $y=mx-\sin x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\ge 1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\ge -1$.

Câu 74: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(2m-1)x-(3m+2)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-3\le m\le -\dfrac{1}{5}$. **B.** $-3<m<-\dfrac{1}{5}$. **C.** $m<-3$. **D.** $m\ge -\dfrac{1}{5}$.

Câu 75: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=(2m+3)\sin x+(2-m)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Câu 76: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=x+m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m|\le 1$. **B.** $m>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $|m|\ge 1$. **D.** $m<\dfrac{1}{2}$.

Câu 77: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

A. $m\le -3$. **B.** $m>0$. **C.** $m>-3$. **D.** $m\le 0$.

Câu 78: Tìm m để hàm số $y=\sin^3 x+3\sin^2 x-m\sin x-4$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. $m\ge 0$. **B.** $m\le 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m>0$.

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=\dfrac{\cot^2 x-2m\cot x+2m^2-1}{\cot x-m}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right)$.

A. 0. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

Câu 80: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x+m(\sin x+\cos x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $|m|\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m\ge \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $|m|\le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 81: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\ln(x^2+1)-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $[-1;1]$. **B.** $B(5;\ 6;\ 2)$. **C.** $(-\infty;-1]$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Câu 82: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\frac{x^2}{2}-mx+\ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 83: Tìm m để hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$: $y=\frac{2}{3}e^{3x}-me^x+4x-2018$.

A. $m\geq -6$ **B.** $m\leq 6$ **C.** $m\leq -5$ **D.** $m\geq 6$

Câu 84: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y=f(x)=(x+1)\ln x+(2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(0;e^2)$.

A. 2016. **B.** 2022. **C.** 2014. **D.** 2023.

Câu 85: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=2019^{x^3-x^2-mx+1}$ nghịch biến trên $[-1;2]$

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2010. **D.** 2011.

Câu 86: Tập các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\frac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. $\left[\frac{2}{9};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\frac{4}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[-\frac{7}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 87: Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2-2x+3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 88: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $[-1;1]$.

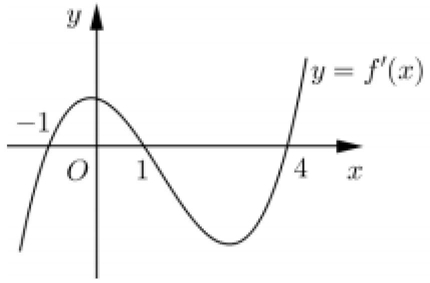
Câu 89: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 90: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8;8)$ sao cho hàm số $y=\left|-2x^3+3mx-2\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 91: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(2;+\infty)$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(-\infty;-2)$ **D.** $(1;3)$

Câu 92: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(5-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(3;4)$. **B.** $(1;3)$. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(4;5)$.

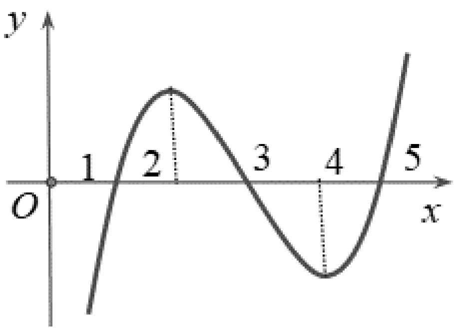
Câu 93: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(2;4)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x+1)$. Kết luận nào sau đây đúng?



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.

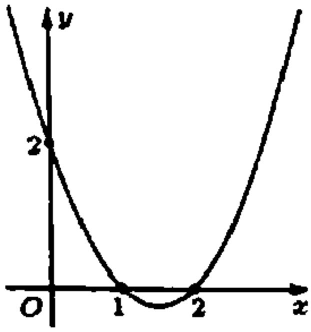
Câu 95: Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

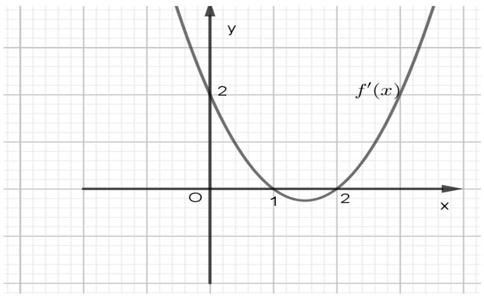
A. $(-2;1)$.　　**B.** $(-4;-3)$.　　**C.** $(0;1)$.　　**D.** $(-2;-1)$.

Câu 96: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'(x)$. Hàm số $g(x)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



A. $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.　　**B.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$.　　**C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.　　**D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

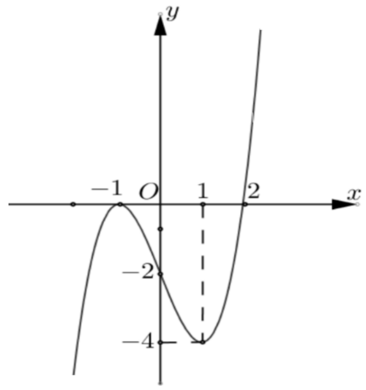
Câu 97: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f\left(2-x^2\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;0)$.　　**B.** $(0;1)$.　　**C.** $(1;2)$.　　**D.** $(0;+\infty)$.

Câu 98: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f\left(x^2-2\right)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$. **B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$. **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

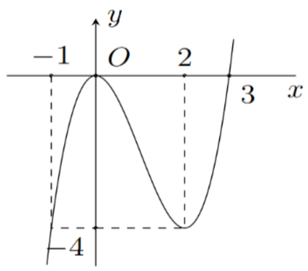
Câu 99: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f\left(3-2^x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

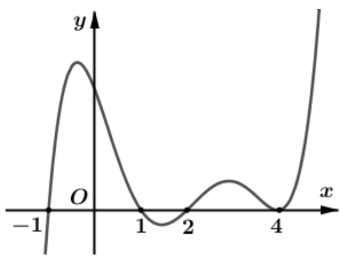
A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-5)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;7)$.

Câu 100: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f\left(2+e^x\right)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-1;\ 3)$. **B.** $(-2;\ 1)$. **C.** $(-\infty;\ 0)$. **D.** $(0;\ +\infty)$.

Câu 101: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

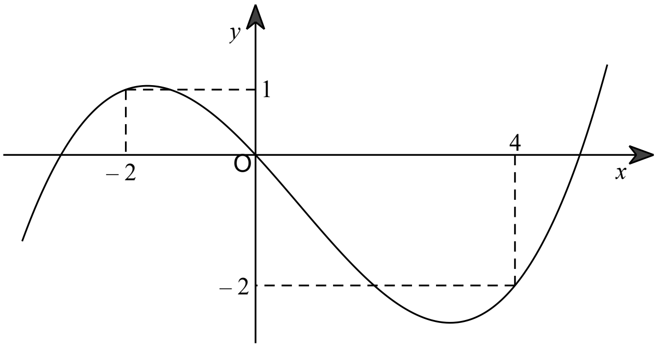
Câu 102: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 103: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

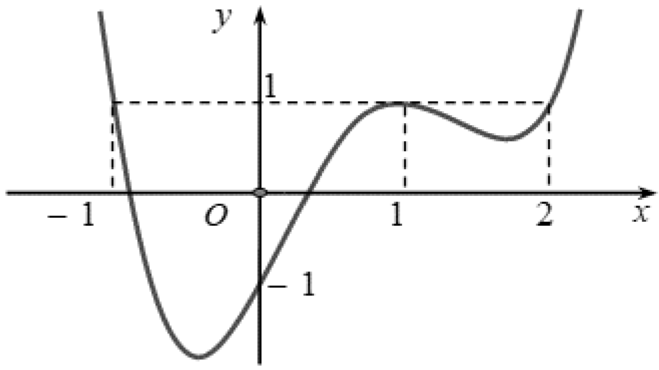
Câu 104: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y=f(x-1)+x^3-12x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

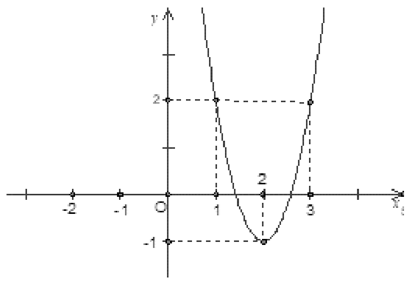
A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

Câu 105: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x)=f(x-1)+\frac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



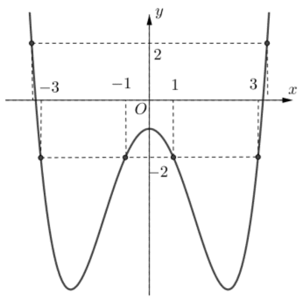
A. $(2\ ;\ 3)$. **B.** $(0\ ;\ 1)$. **C.** $(-1\ ;\ 0)$. **D.** $(1\ ;\ 2)$.

Câu 106: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?



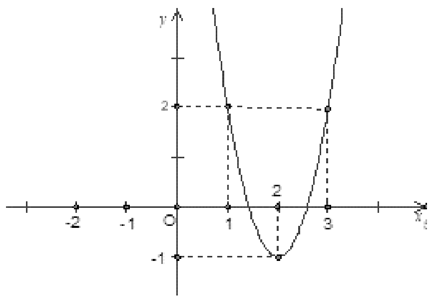
A. $(-\infty;3)$, $(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;5)$.

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x+2)-2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-3;-1)$, $(1;3)$. **B.** $(-1;1)$, $(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2)$, $(0;2)$. **D.** $(-5;-3)$, $(-1;1)$.

Câu 108: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

PHẦN 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -4.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

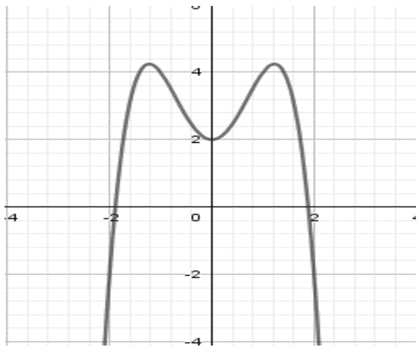
Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Câu 4: Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

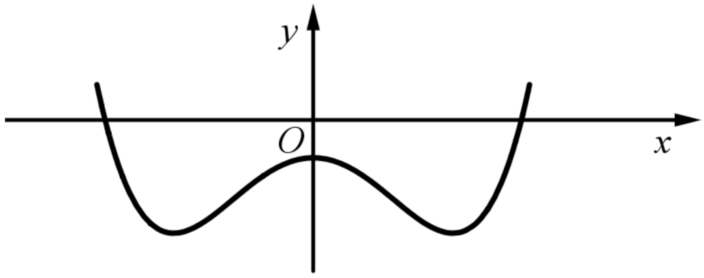
x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CĐ} = 2$ và $y_{CT} = 0$ **B.** $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = 0$

C. $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = -2$ **D.** $y_{CĐ} = -2$ và $y_{CT} = 2$

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ $(a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	2	↘	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

A. $x = -2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=3$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x=3$. **B.** $x=2$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 13: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x-1\right)\left(x+4\right)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x\in R$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-2)^2$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 16: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(1-x\right)^2\left(3-x\right)^3\left(x-2\right)^4$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x=2$. **B.** $x=3$. **C.** $x=0$. **D.** $x=1$.

Câu 17: Hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)...\left(x-2019\right)$, $\forall x\in R$. Hàm số $y=f\left(x\right)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1008 **B.** 1010 **C.** 1009 **D.** 1011

Câu 18: Hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x^2\left(x+1\right)\left(x-2\right)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi $f\left(x\right)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2\left(x-3\right)^3\left(x-4\right)^4$, $\forall \mathrm{x}\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x^2-3\right)\left(x^4-9\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 21: Nếu hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm là $f'\left(x\right)=x^2\left(x-2\right)\left(x^2-x-2\right)\left(x+1\right)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f\left(x\right)$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 22: Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. $y_{CĐ}=-1$ **B.** $y_{CĐ}=4$ **C.** $y_{CĐ}=1$ **D.** $y_{CĐ}=0$

Câu 23: Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

Câu 24: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3
B. Cực tiểu của hàm số bằng 1
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6
D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Câu 25: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Câu 26: Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=-x^3+3x-4$.

A. $y_{CT}=-6$ **B.** $y_{CT}=-1$ **C.** $y_{CT}=-2$ **D.** $y_{CT}=1$

Câu 27: Đồ thị hàm số $y=x^4-x^2+1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 28: Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y=\dfrac{x^2+1}{x}$ **B.** $y=\dfrac{2x-2}{x+1}$ **C.** $y=x^2-2x+1$ **D.** $y=-x^3+x+1$

Câu 29: Hàm số $y=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2-3x+2019m\ (m\in\mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại điểm:

A. $x=3$. **B.** $x=-3$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Câu 30: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=-x^3+3x+1$ là:

A. $M(-1;-1)$. **B.** $N(0;1)$. **C.** $P(2;-1)$. **D.** $Q(1;3)$.

Câu 31: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=-x^3+x^2+5x-5$ là

A. $(-1;-8)$ **B.** $(0;-5)$ **C.** $\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{40}{27}\right)$ **D.** $(1;0)$

Câu 32: Hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-3x+1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=-1$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-3$. **D.** $x=3$.

Câu 33: Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$.

A. -6. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

Câu 34: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=3$.
B. Hàm số có hai cực trị $y_{CĐ}<y_{CT}$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.
D. Giá trị cực tiểu bằng -2.

Câu 35: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng 2.
B. Cực tiểu của hàm số bằng -1.

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6. **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 3.

Câu 36: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Giá trị cực đại của hàm số là 2. **B.** Điểm cực tiểu của hàm số là $x=4$.
C. Giá trị cực tiểu của hàm số là -4. **D.** Điểm cực đại của hàm số $x=2$.

Câu 37: Cho hàm số $y=x\ln x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=e$. **B.** Hàm đạt cực đại tại $x=e$.

C. Hàm đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{1}{e}$. **D.** Hàm đạt cực đại tại $x=\dfrac{1}{e}$.

Câu 38: Tìm hoành độ các điểm cực đại của hàm số $y=e^{x^3-\frac{5}{2}x^2+2x-1}$.

A. $x_{CĐ}=1$. **B.** Không có cực đại. **C.** $x_{CĐ}=\dfrac{2}{3}$. **D.** $x_{CĐ}=0$.

Câu 39: Giá trị cực tiểu của hàm số $y=x^2\ln x$ là?

A. $y_{CT}=-\dfrac{1}{e}$. **B.** $y_{CT}=-\dfrac{1}{2e}$. **C.** $y_{CT}=\dfrac{1}{2e}$. **D.** $y_{CT}=\dfrac{1}{e}$.

Câu 40: Cho hàm số $y=x^2.e^{-x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=2$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ và đạt cực đại tại $x=2$.
D. Hàm số không có điểm cực trị.

Câu 41: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x}{x-1}$. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là.

A. $(-3;0)$. **B.** $(2;10)$. **C.** $(3;9)$. **D.** $(-1;1)$.

Câu 42: Biết rằng hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3-x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab\le 0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ab\ge 0$.

Câu 43: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+1$ có hai cực trị là:

A. $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $[-1;2]$

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(m+1)x+2$ có hai điểm cực trị.

A. $m>2$. **B.** $m<-4$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m<2$.

Câu 45: Để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x$ đạt cực đại và cực tiểu thì:

A. Không có giá trị nào của m. **B.** $\forall m$.
C. $m=3$. **D.** $m\ne 3$.

Câu 46: Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 6mx + m$ có hai điểm cực trị khi giá trị của m là:

A. $0 < m < 2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 2 \end{array}\right.$. **C.** $0 < m < 8$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 8 \end{array}\right.$.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m < \frac{3}{2}$. **B.** $m < -\frac{3}{2}$. **C.** $m \le \frac{3}{2}$. **D.** $m > \frac{3}{2}$.

Câu 48: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + \left(2m^2 - 3m - 3\right)x + 2016$ có 2 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 49: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị

A. $m \in (-\infty; 6) \cup (0; +\infty)$. **B.** $m \in \left(-6; 0\right)$.

C. $m \in \left[-6; 0\right)$. **D.** $m \in \left[-6; 0\right]$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số

$y = x^3 - 3mx^2 + \left(2m+1\right)x - m + 5$ có cực đại và cực tiểu.

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right) \cup \left(1; +\infty\right)$. **B.** $m \in \left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

C. $m \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$. **D.** $m \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right] \cup \left[1; +\infty\right)$.

Câu 51: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 - \left(m+1\right)x^2 + \left(2m - \frac{2}{3}\right)x + 1$ có cực trị.

A. $\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{5} < m < 1 \\ m \ne 0 \end{array}\right.$. **B.** $-\frac{1}{5} < m < 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{5} \\ m > 1 \end{array}\right.$. **D.** $-\frac{1}{5} \le m \le 1$.

Câu 52: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + \left(m+2\right)x + 2018$ không có cực trị.

A. $-1 \le m \le 2$. **B.** $m \le -1$.
C. $m \ge 2$. **D.** $m \le -1$ hoặc $m \ge 2$.

Câu 53: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + \left(2m+3\right)x^2 + m^2x - 2m + 1$ không có cực trị khi và chỉ khi.

A. $m \le -3 \vee m \ge -1$. **B.** $-3 \le m \le -1$. **C.** $m \ge -3$. **D.** $m \ge -1$.

Câu 54: Tìm tất cả tham số thực của m để hàm số $y = \frac{1}{3}\left(m+2\right)x^3 + x^2 + \frac{1}{3}mx - 2$ có cực đại, cực tiểu.

A. $m\in(-\infty;-3)\cup(1;+\infty)$.
B. $m\in(-2;1)$.
C. $m\in(-3;-2)\cup(-2;1)$.
D. $m\in(-3;1)$.

Câu 55: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m-1)x^4-2(m-3)x^2+1$ không có cực đại?

A. $1<m\le 3$ **B.** $m\le 1$ **C.** $m\ge 1$ **D.** $1\le m\le 3$

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}(m+1)x^3-x^2+(2m+1)x+3$ có cực trị

A. $m\in\left(-\frac{3}{2};0\right)$.
B. $m\in\left(-\frac{3}{2};0\right)\setminus\{-1\}$.
C. $m\in\left[-\frac{3}{2};0\right]\setminus\{-1\}$.
D. $m\in\left[-\frac{3}{2};0\right]$.

Câu 57: Để đồ thị hàm số $y=-x^4-(m-3)x^2+m+1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

A. $m\ge 3$. **B.** $m>3$. **C.** $m<3$. **D.** $m\le 3$.

Câu 58: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m+1)x^4-mx^2+\frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m>1$. **B.** $-1\le m<0$. **C.** $m<-1$. **D.** $-1\le m\le 0$.

Câu 59: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

A. $m>0$. **B.** $m\ge 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\le 0$.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=m^2x^4-(m^2-2019m)x^2-1$ có đúng một cực trị?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Câu 61: Cho hàm số $y=mx^4+(m^2-6)x^2+4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Câu 62: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $[-10;10]$ để hàm số $y=x^4-2(2m+1)x^2+7$ có ba điểm cực trị?

A. 20 **B.** 10 **C.** Vô số **D.** 11

Câu 63: Cho hàm số $y=mx^4+(m^2-6)x^2+4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Câu 64: Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m = \frac{3}{2}$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = \frac{1}{2}$. **D.** $m = \frac{5}{2}$.

Câu 65: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 66: Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$

A. $m = -3$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Câu 67: Giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 3$ là

A. $m = 1$. **B.** $m = \frac{3}{2}$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = -\frac{3}{2}$.

Câu 68: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho ${x_1}^2 + {x_2}^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0 \in \left(-1;7\right)$. **B.** $m_0 \in \left(7;10\right)$. **C.** $m_0 \in \left(-15;-7\right)$. **D.** $m_0 \in \left(-7;-1\right)$.

Câu 69: Giả sử hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - \frac{1}{3}mx$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = 0$. Giá trị của m là

A. $m = -3$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = \frac{4}{3}$.

Câu 70: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - \left(m - 1\right)x^2 + 3\left(m - 2\right)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ bằng

A. $\frac{73}{16}$. **B.** $\frac{52}{9}$. **C.** $\frac{34}{9}$. **D.** $\frac{10}{9}$.

Câu 71: Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và a, $b \in \mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$. Tính giá trị biểu thức $S = a^2 + b^2$.

A. $S = 34$. **B.** $S = 13$. **C.** $S = 25$. **D.** $S = 10$.

Câu 72: Biết rằng đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m?

A. 3. **B.** 1. **C.** Không có m. **D.** 2.

Câu 73: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f\left(x\right)=2x^3-6x^2-m+1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 74: Cho hàm số $y=2x^3+3\left(m-1\right)x^2+6\left(m-2\right)x-1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $\left(-2;3\right)$.

A. $m\in\left(-1;4\right)\setminus\left\{3\right\}$. **B.** $m\in\left(3;4\right)$. **C.** $m\in\left(1;3\right)$. **D.** $m\in\left(-1;4\right)$.

Câu 75: Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3mx^2+27x+3m-2$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $\left|x_1-x_2\right|\le 5$. Biết $S=\left(a;b\right]$. Tính $T=2b-a$.

A. $T=\sqrt{51}+6$ **B.** $T=\sqrt{61}+3$ **C.** $T=\sqrt{61}-3$ **D.** $T=\sqrt{51}-6$

Câu 76: Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2-4x-10$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\left(x_1^2-1\right)\left(x_2^2-1\right)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 9.

Câu 77: Cho hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\left(m+1\right)x^2-\left(2m-1\right)x+m+2$, m là tham số. Biết hàm số có hai điểm cực trị x_1,x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x_1^2+x_2^2-10\left(x_1+x_2\right)$.

A. -22. **B.** 1. **C.** -18. **D.** 78.

Câu 78: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ}<x_{CT}$.

A. $-2<m<0$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $0<m<2$. **D.** $m<2$.

Câu 79: Với tham số m, đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0<m<1$. **B.** $1<m<2$. **C.** $m<0$. **D.** $m>2$.

Câu 80: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d:y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 3 **B.** 6 **C.** -6 **D.** 0

Câu 81: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 82: Cho hàm số $y=x^3-(m+6)x^2+(2m+9)x-2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq -2 \\ m\leq -6 \end{array}\right.$. **B.** $m\geq -2$. **C.** $m\leq -6$. **D.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}$.

Câu 83: Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Câu 84: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4

Câu 85: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3(m^2-1)x-3m^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Câu 86: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Câu 87: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Câu 88: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (trong đó O là gốc tọa độ)

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 89: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

A. $S=3$. **B.** $S=\dfrac{1}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Câu 90: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;\ 1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 91: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=-1$.

Câu 92: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $0<m<1$ **B.** $m>0$ **C.** $0<m<\sqrt[3]{4}$ **D.** $m<1$

Câu 93: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0;-1)$ **B.** $N(1;-10)$ **C.** $P(1;0)$ **D.** $Q(-1;10)$

Câu 94: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\frac{3}{2}$ **B.** $m=\frac{3}{4}$ **C.** $m=-\frac{1}{2}$ **D.** $m=\frac{1}{4}$

Câu 95: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(2m-1)x+m+3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$

A. $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-\frac{3}{4}$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

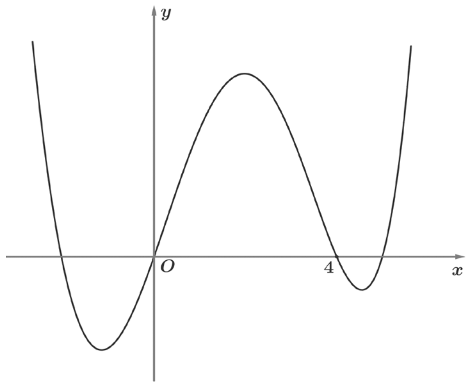
Câu 96: Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y=-4x$.

A. $m=-\frac{1}{3}$. **B.** $m=\frac{2}{3}$. **C.** $m=-\frac{2}{3}$. **D.** $m=1$.

Câu 97: Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=-2x+1$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x-2$.

Câu 98: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(x^2 - 2x\right)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

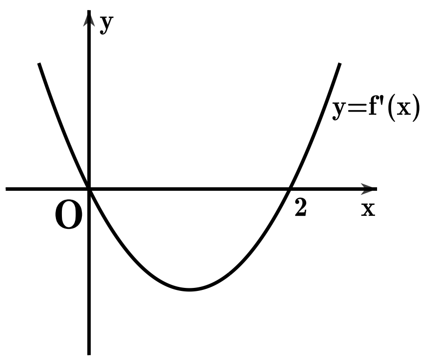
Câu 100: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(4x^2 + 4x\right)$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



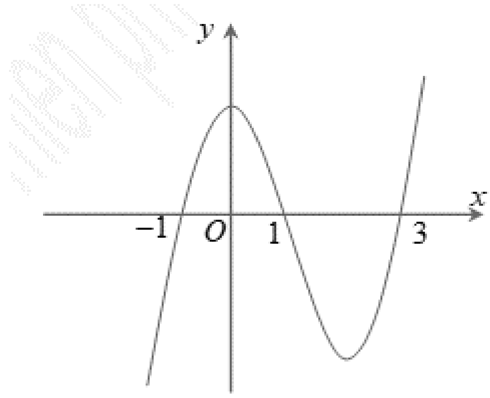
Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f\left(-x^2 + x\right)$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 102: Cho hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

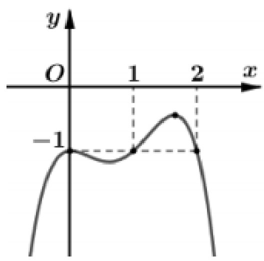
A. 3. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Câu 103: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Câu 104: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1$. **B.** $x=2$.
C. Không có điểm cực tiểu. **D.** $x=0$.

E. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

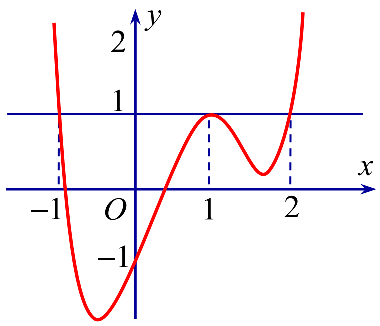
Câu 2: Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+1$.

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+2}$.

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.
B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-4;-3)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1)<g(-1)<g(2)$.
B. $g(-1)<g(1)<g(2)$.
C. $g(2)<g(1)<g(-1)$.
D. $g(2)<g(-1)<g(1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x-3}{x+1}$.

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;4)$.
B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

Câu 6: Cho hàm số $y=x^3-bx^2-cx+2016$ với $b,c\in\mathbb{R}$.

A. Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c\in\mathbb{R}$.
B. Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c\in(-\infty;0)$.
C. Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c\in(0;+\infty)$.

D. Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c \in \mathbb{Z}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$
B. Hàm số có bốn điểm cực trị
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$
D. Hàm số không có cực đại

Câu 8: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3
B. Cực tiểu của hàm số bằng 1
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6
D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Câu 9: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Xét các mệnh đề sau đây

A. Hàm số có 3 điểm cực trị.
B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1;0\right)$; $\left(1;+\infty\right)$.
C. Hàm số có 1 điểm cực trị.
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty;-1\right)$; $\left(0;1\right)$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3
B. Hàm số có hai điểm cực tiểu
C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0
D. Hàm số có ba điểm cực trị

Câu 11: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right) = \left(x+1\right)^2\left(1-x\right)\left(x+3\right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

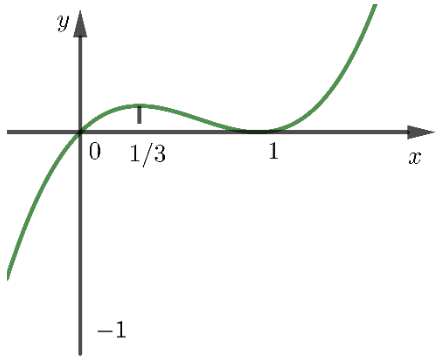
A. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$

B. Giá trị cực tiểu của hàm số là $f\left(-3\right)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-3;1\right)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-3;1\right)$

Câu 12: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$

B. Giá trị cực đại của hàm số là $f\left(1\right)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;1\right)$

Câu 13: Cho hàm số $y=\sqrt{8+2x-x^2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. Tập xác định của hàm số là $D=\left[-2;4\right]$

B. Hàm số có $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(1;4\right)$

D. Giá trị cực đại của hàm số là 0

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m}{x-1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề

A. Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$

B. Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $x=1$

C. Khi $m=-1$ thì $y'=\dfrac{-3}{\left(x-1\right)^2}$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi $m>2$

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. Đồ thị hàm số đã cho không cắt trục Ox.

B. Đặt $t=\cos x$ thì $0<t<1$

C. Khi $y=1$ thì $m=2$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $m>2$

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-2mx^2+(m+3)x-5+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{-mx+3m+4}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

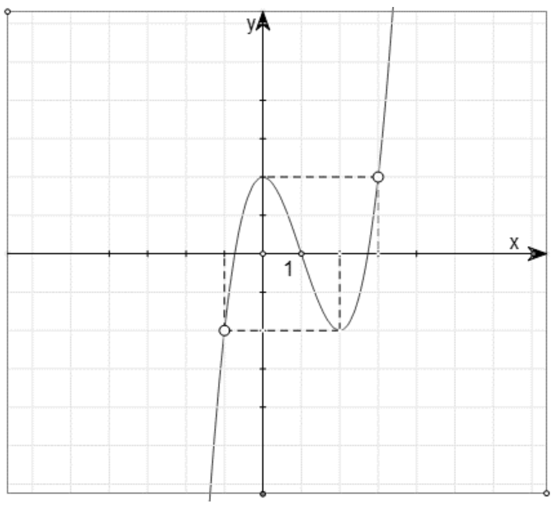
Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm m để hàm số $y=\frac{1}{3}\cos^3 x-4\cot x-(m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	+	0	−	0	−	0	+	

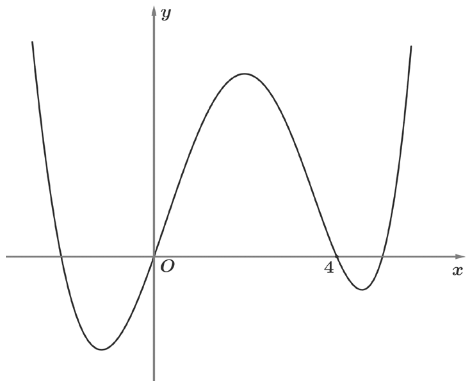
Tìm m để hàm số $y=f(x^3+4x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y=f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x)=f(x-m)-\frac{1}{2}(x-m-1)^2+2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tính tổng tất cả các phần tử trong S bằng

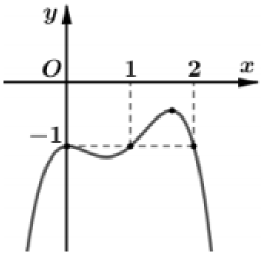


Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

Câu 7: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ là



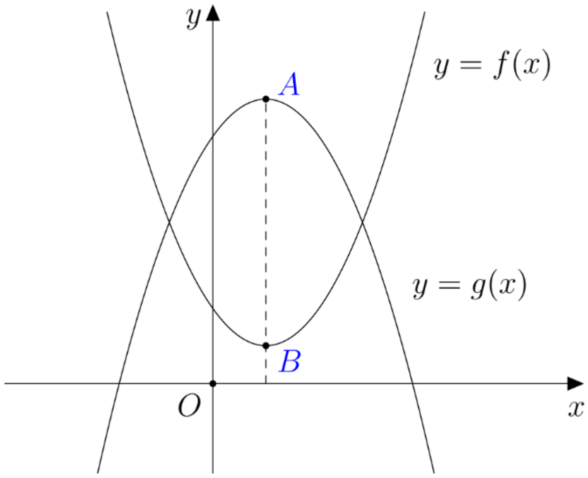
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm tại điểm nào x bằng bao nhiêu?

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Câu 10: Cho hai hàm đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ.



Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB = \frac{7}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y = \left| |f(x) - g(x)| + m \right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

Câu 11: Tìm giá trị thực m lớn nhất sao cho phương trình $2\sqrt{x+1} = x + m$ có nghiệm thực?

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6mx + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Câu 14: Gọi S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m+1)x^2+(m^2+2m)x-3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. Số phần tử của tập S là

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=(2m-3)x-(3m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 18: Cho hàm số $y=|x^3-mx+1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty]$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

Câu 19: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

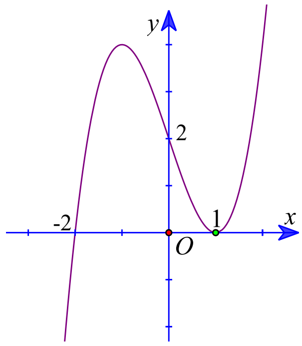
Câu 20: Tìm giá trị m lớn nhất để hàm số $y=8^{\cot x}+(m-3).2^{\cot x}+3m-2$ đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

Câu 21: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2015m+2016}{-x-m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Tính số phần tử của S.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2-2x+3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

Câu 23: Cho $y=(m-3)x^3+2(m^2-m-1)x^2+(m+4)x-1$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy. S có bao nhiêu phần tử?

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-3)$.



Câu 25: Biết rằng đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m?

Câu 26: Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $\left(1;0\right)$ và có điểm cực trị $\left(-2;0\right)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$.

Câu 27: Gọi A và B là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-1$. Tính diện tích S của tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

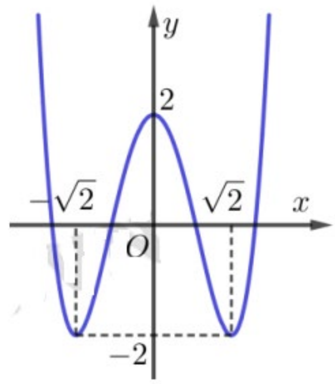
Câu 28: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+ax+b$, $\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị $\left(C\right)$. Biết đồ thị $\left(C\right)$ có điểm cực trị là $A\left(1;3\right)$. Tính giá trị của $P=4a-b$.

Câu 29: Cho hàm số $y=\left|x+3\right|+\frac{1}{x+1}$, gọi S là tổng tất cả các giá trị cực trị của hàm số. Giá trị của S bằng

Câu 30: Biết $\frac{a}{b}$ là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Tính giá trị biểu thức $S=a^2+b^2$.

Câu 31: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp $\left(-5;6\right)\cap S$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f'\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=3^{f(x)}+2^{f(x)}$.

Câu 33: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\frac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A, B. Khi $\angle AOB = 90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

CHƯƠNG 1: ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

BÀI 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Tính đơn điệu của hàm số

Nhắc lại về tính đồng biến, nghịch biến của hàm số

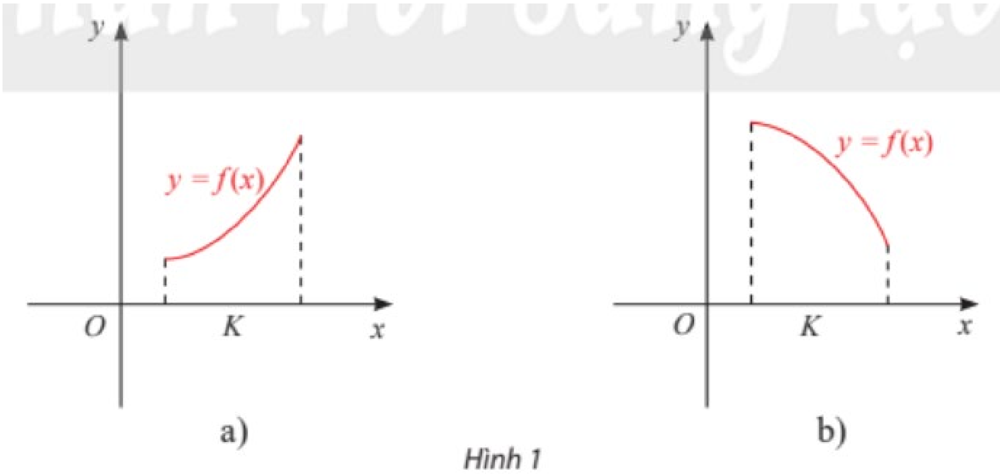
Kí hiệu K là khoảng hoặc đoạn hoặc nửa khoảng. Giả sử hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (tăng) trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) < f(x_2)$.

Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (giảm) trên K nếu với mọi x_1, x_2 thuộc K mà $x_1 < x_2$ thì $f(x_1) > f(x_2)$.

Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị của nó đi lên từ trái sang phải (Hình 1a).

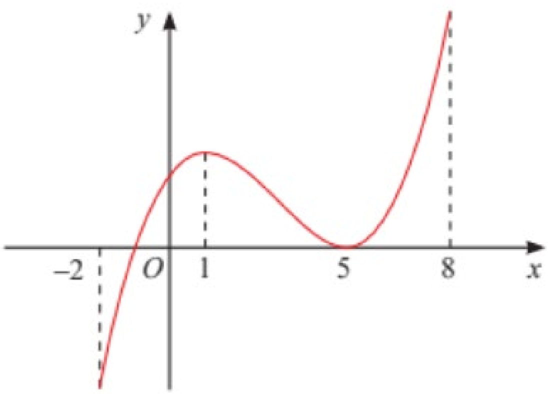
Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị của nó đi xuống từ trái sang phải (Hình 1 b).



Hình 1

Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K.

Ví dụ 1. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị cho ở Hình 2.



Hình 2

Lời giải

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(5;8)$, nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

Tính đơn điệu của hàm số

Tổng quát, ta có kết quả sau đây:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên K.

Nếu $f'(x) > 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K.

Nếu $f'(x) < 0$ với mọi x thuộc K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K.

Ví dụ 2. Chứng minh rằng hàm số $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $(1;+\infty)$. Ta có $g'(x) = -\dfrac{1}{(x-1)^2} < 0$ với mọi $x \in (1;+\infty)$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Chú ý: Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà chưa cho khoảng K, ta hiểu xét tính đơn điệu của hàm số đó trên tập xác định của nó.

Từ kết quả trên, để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm x thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Xét dấu $f'(x)$ và lập bảng biến thiên.

Bước 4. Nêu kết luận về các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số.

Ví dụ 3. Xét tính đơn điệu của các hàm số sau:

a) $f(x) = -x^3 + 3x^2$ b) $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ c) $h(x) = x^3$.

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $f'(x) = -3x^2 + 6x; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $f(x) = -x^3 + 3x^2$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

b) Xét hàm số $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ta có $g'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$. Vì $x^2 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nên $g'(x)$ cùng dấu với $x^2 - 1$.

Ta có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = x + \dfrac{1}{x}$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(0; 1)$.

c) Xét hàm số $h(x) = x^3$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $h'(x) = 3x^2; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $h(x) = x^3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Chú ý:

a) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K, f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K.

b) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K, f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số nghịch biến trên K.

c) Nếu $f'(x) = 0$ với mọi $x \in K$ thì hàm số không đổi trên K.

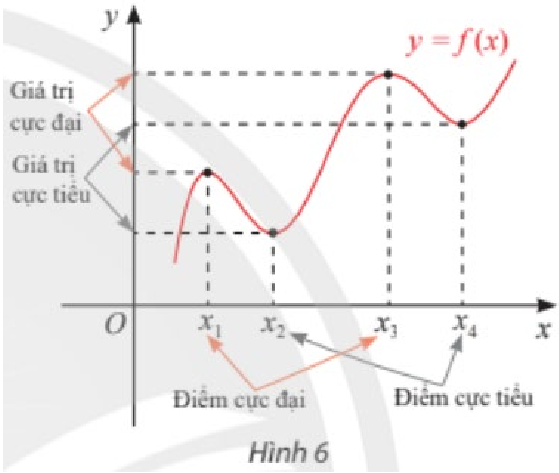
2. Cực trị của hàm số

Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D và $x_0 \in D$.

- Nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $(a;b) \subset D$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$ thì x_0 được gọi là một điểm cực đại, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu y_{CD}.

- Nếu tồn tại một khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và $(a;b) \subset D$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (a;b) \setminus \{x_0\}$, thì x_0 được gọi là một điểm cưc tiểu, $f(x_0)$ được gọi là giá trị cục tiểu của hàm số $y = f(x)$, kí hiệu y_{CT}.



Hình 6

Chú ý:

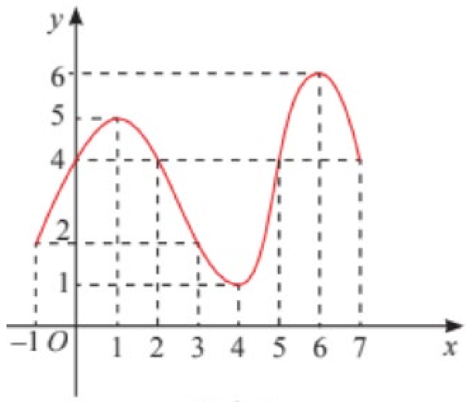
a) Điểm cực đại và điểm cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị của hàm số. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu được gọi chung là giá trị cưc trị (còn gọi là cưc trị) của hàm số.

b) Nếu x_0 là một điểm cực trị (điểm cực đại, điểm cực tiểu) của hàm số $y = f(x)$ thì ta cũng nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị (cực đại, cực tiểu) tại x_0.

c) Hàm số có thể đạt cực đại và cực tiểu tại nhiều điểm trên D.

d) Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ thì điểm $M\left(x_0; f\left(x_0\right)\right)$ là một điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Ví dụ 4. Tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị được cho ở Hình 7.



Hình 7

Lời giải

Hàm số $y = f(x)$ có:

- $x = 1$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(1)$ với mọi $x \in (0;2) \setminus \{1\}, y_{CĐ} = f(1) = 5$;

- $x = 6$ là điểm cực đại vì $f(x) < f(6)$ với mọi $x \in (5;7) \setminus \{6\}, y_{CD} = f(6) = 6$;

- $x = 4$ là điểm cực tiểu vì $f(x) > f(4)$ với mọi $x \in (3;5) \setminus \{4\}, y_{CT} = f(4) = 1$.

Tìm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $\left(a;x_0\right)$ và $\left(x_0;b\right)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0;

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x\in(a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x\in(x_0;b)$ thì hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0.

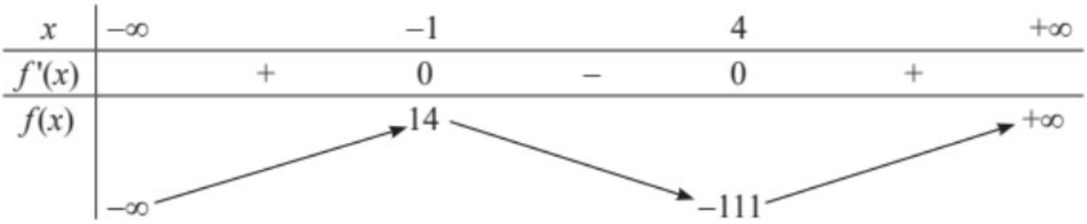
Ví dụ 5. Tìm cực trị của hàm số $f(x)=2x^3-9x^2-24x+1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=6x^2-18x-24$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=4$.

Bảng biến thiên:



Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$, giá trị cực đại là $f(-1)=14$; hàm số đạt cực tiểu tại $x=4$, giá trị cực tiểu là $f(4)=-111$.

Nhận xét: Từ kết quả trên, để tìm cực trị của hàm số $y=f(x)$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Tính đạo hàm $f'(x)$ của hàm số. Tìm các điểm x thuộc D mà tại đó đạo hàm $f'(x)$ bằng 0 hoặc đạo hàm không tồn tại.

Bước 3. Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 4. Từ bảng biến thiên kết luận về cực trị của hàm số.

Ví dụ 6. Tìm cực trị của hàm số $f(x)=x^3-3x^2+3x-4$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $f'(x)=3x^2-6x+3$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

Vậy hàm số không có cực trị.

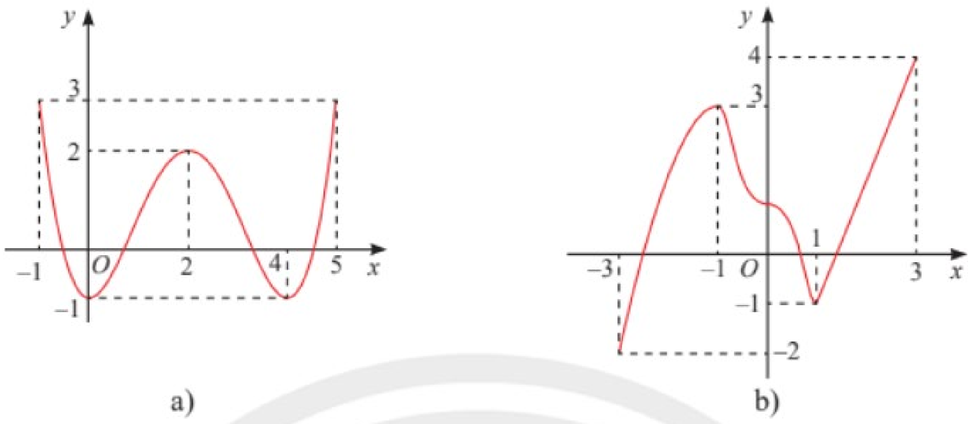
Chú ý:

a) Nếu $f'(x_0)=0$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số không có cực trị tại x_0.

b) Nếu $f'(x)$ không đổi dấu trên khoảng K thì $f(x)$ không có cực trị trên khoảng đó.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Tìm các khoảng đơn điệu và cực trị của các hàm số có đồ thị cho ở Hình 11.



Hình 11

Lời giải

a) Dựa vào đồ thị ta có:

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;2)$ và $(4;5)$, nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(2;4)$

Hàm số đạt cực đại tại $\mathrm{x}=2, y_{cd}=f(2)=2$, đạt cực tiểu tại $\mathrm{x}=0, y_{ct}=f(0)=-1$ và $\mathrm{x}=4, y_{ct}=f(4)=-1$

b) Dựa vào đồ thị ta có:

Hàm số đồng biến trên khoảng (-3;-1) và (1;3), nghịch biến trên khoảng (-1;1)

Hàm số đạt cực đại tại $x=-1, y_{cd}=f(-1)=3$, đạt cực tiểu tại $x=1, y_{ct}=f(1)=-1$

2. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=4x^3+3x^2-36x+6$;

b) $y=\dfrac{x^2-2x-7}{x-4}$.

Lời giải

a) Tập xác định: D = R.

Ta có $y'=12x^2+6x-36; y'=0 \Leftrightarrow 12x^2+6x-36=0 \Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=\dfrac{3}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	58	↘	$\frac{-111}{4}$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-2;\frac{3}{2}\right)$

Hàm số đạt cực đại tại $x=-2$ và $y_{CD}=58$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=\frac{3}{2}$ và $y_{CT}=-\frac{111}{4}$

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{4\}$.

Có $y'=\frac{(2x-2)(x-4)-\left(x^2-2x-7\right)}{(x-4)^2}=\frac{x^2-8x+15}{(x-4)^2}$

Có $y'=0\Leftrightarrow x^2-8x+15=0\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=5$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ +\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;3)$ và $(5;+\infty)$. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(3;4)$ và $(4;5)$.

Hàm số đạt cực đại tại $x=3$ và $y_{CD}=4$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=5$ và $y_{CT}=8$.

3. Tìm cực trị của các hàm số sau:

a) $y=2x^3+3x^2-36x+1$; b) $y=\frac{x^2-8x+10}{x-2}$; c) $y=\sqrt{-x^2+4}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Có $y'=6x^2+6x-36; y'=0\Leftrightarrow 6x^2+6x-36=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=2$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	82	$\searrow$	-43	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x=-3$ và $y_{CD}=82$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và $y_{CT}=-43$.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Có $y' = \dfrac{(2x-8)(x-2)-\left(x^2-8x+10\right)}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2-4x+6}{(x-2)^2} = \dfrac{(x-2)^2+2}{(x-2)^2} > 0, \forall x \neq 2.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

c) Tập xác định: $D = [-2;2]$.

Có $y' = \dfrac{\left(-x^2+4\right)'}{2\sqrt{-x^2+4}} = \dfrac{-x}{\sqrt{-x^2+4}}$; TXĐ mới là $D = \left(-2;2\right)$. $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (t/m)

Bảng biến thiên

x	-2		0		2
y'	||	+	0	-	||
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CĐ} = 2$. Hàm số không có cực tiểu.

4. Chứng minh rằng hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Có $y' = \dfrac{2(x-3)-(2x+1)}{(x-3)^2} = \dfrac{-7}{(x-3)^2} < 0, \forall x \neq 3.$ Do đó hàm số nghịch biến trên $(-\infty;3)$ và $(3;+\infty)$.

Vậy hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x-3}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

5. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x) = 0,01x^3 - 0,04x^2 + 0,25x + 0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến $2017 (0 \leq x \leq 7)$.

(Theo: https://infographics.vn/interactive-xuat-khau-rau-quadu-bao-bung-no-dat-4-ty-usd-trong-nam-2023/116220.vna)

a) Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Lời giải

a) $y' = f'(x) = 0,03x^2 - 0,08x + 0,25$

b) Tập xác định: $D = [0;7]$

Ta có: $y' = f'(x) > 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $y = f(x)$ luôn đồng biến $\forall x \in [0;7]$

Vậy kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

6. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$ với $t \geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t); v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?

Lời giải

a) Ta có $v(t) = x'(t) = 3t^2 - 12t + 9$; $a(t) = v'(t) = 6t - 12$.

b) Để tìm khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm ta đi xét sự biến thiên của hàm v(t).

Có $v'(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

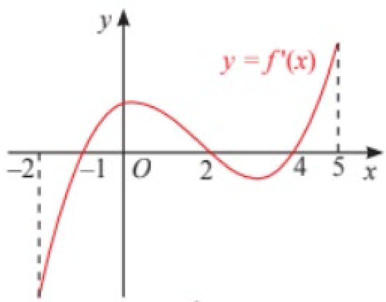
Bảng biến thiên:

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	9	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Vận tốc của chất điểm tăng khi $t > 2$ và vận tốc của chất điểm giảm khi $0 < t < 2$.

7. Đạo hàm $f'(x)$ của hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 12. Xét tính đơn điệu và tìm điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.



Hình 12

Lời giải

Dựa vào đồ thị của hàm $y = f'(x)$, ta có bảng biến thiên

x	-2		-1		2		4		5
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-1;2)$ và $(4;5)$.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-2;-1)$ và $(2;4)$.

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 4$. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Xét định đơn điệu của hàm số cho bởi công thức

1.1 Phương pháp

Bước 1: Tìm tập xác định D.

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$.

Bước 3: Tìm nghiệm của $f'(x)$ hoặc những giá trị x làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 4: Lập bảng biến thiên.

Bước 5: Kết luận.

1.2 Ví dụ minh họa

Câu 1. Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 2. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 3. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \dfrac{3x+1}{1-x}$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có $y' = \dfrac{3.1 - (-1).1}{(1-x)^2} = \dfrac{4}{(1-x)^2} > 0,\ \forall x \in D$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 4. Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x+2}$.

Lời giải

Tập xác định: $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta có: $y' = \dfrac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = 1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	12	$\nearrow$	$+\infty \ \Vert \ -\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 5. Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$.

Lời giải

Tập xác định $D = [-2;2]$.

$y' = \sqrt{4-x^2} - \dfrac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y':

x	-2		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		2
y'	$\parallel$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$

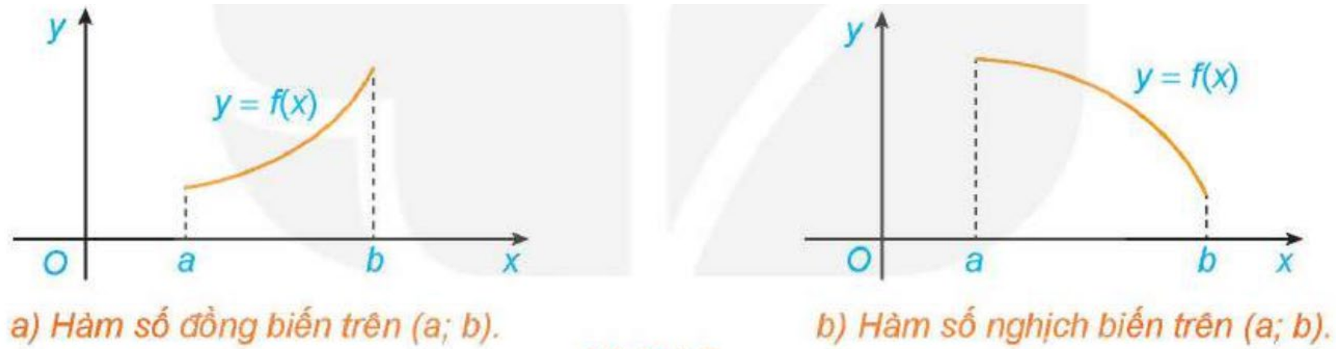
Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$, nghịch biến trên các khoảng $\left(-2;-\sqrt{2}\right)$ và $\left(\sqrt{2};2\right)$.

Dạng 2: Xét tính đơn điệu dựa vào bảng biến thiên, đồ thị

2.1 Phương pháp

Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (H.1.3a).

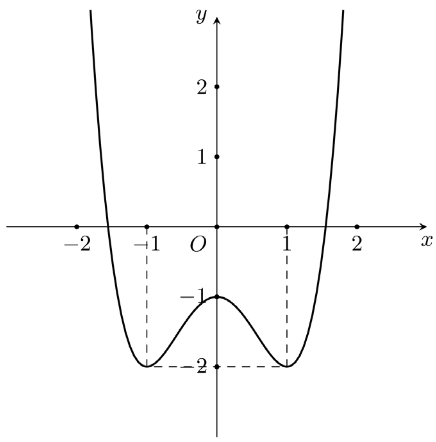
Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (H.1.3b).



Hình 1.3

2.2 Ví dụ minh họa

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



a) Từ đồ thị hàm số trên hãy vẽ bảng biến thiên

b) Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến.

Lời giải

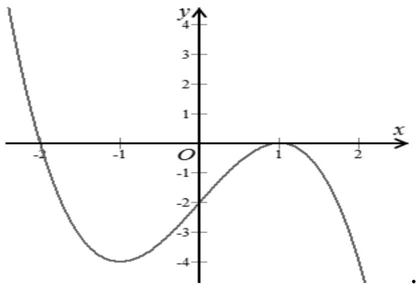
a) Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	-1	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
			-2				-2		

b) Hàm số đồng biến $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 2. Cho hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



Lời giải

Ta nhận thấy $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (-\infty;-2)$ (nghĩa là đồ thị $y = f'(x)$ nằm trên trục hoành) nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$.

Ta nhận thấy $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-2;+\infty)$ (nghĩa là đồ thị $y = f'(x)$ nằm dưới trục hoành) nên hàm số nghịch biến trên $(-2;+\infty)$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(2x+1)$.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(2x+1)$. Ta có $g'(x) = 2.f'(2x+1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=-1 \\ 2x+1=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Vậy hàm số $y = f(2x+1)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

Dạng 3: Tìm tham số m để hàm số đơn điệu

3.1. Phương pháp

Xét hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \; y' = f'(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m\ ?$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m\ ?$

Lưu ý: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Để $f(x) \geq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. • $f(x) \leq 0,\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Xét hàm số nhất biến $y = f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = \dfrac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) > 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m\ ?$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) < 0,\ \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m\ ?$

Cô lập tham số m, tức là biến đổi $f'(x,m) \geq 0 (\leq 0) \Leftrightarrow g(x) \geq m (\leq m)$.

Bước 1. Xác định tham số để hàm số f xác định trên khoảng đã cho.

Bước 2. Tính $f'(x,m)$.

Bước 3. Để giải bài toán dạng này, ta thường sử dụng các tính chất sau.

Nếu hàm số đồng biến trên $(a;b)$ thì

$f'(x) \geq 0, \forall x \in [a;b] \rightarrow g(x) \geq h(m), \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow \min_{[a;b]} g(x) \geq h(m)$.

Nếu hàm số đồng biến trên $(a;b)$ thì

$f'(x) \le 0, \forall x \in [a;b] \to g(x) \le h(m), \forall x \in [a;b] \Leftrightarrow \min_{[a;b]} g(x) \le h(m)$.

3.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Tìm m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(m+1)x + 3$.

Hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 9 \le 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m \le 2.$

Vậy $m \in [-4;2]$.

Câu 2. Tìm điều kiện của m để hàm số $y = (m^2-1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

TH1: $m = 1$. Ta có: $y = -x + 4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m = 1$.

TH2: $m = -1$. Ta có: $y = -2x^2 - x + 4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = -1$.

TH3: $m \ne \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty) \Leftrightarrow y' \le 0\ \forall x \in \mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3(m^2-1)x^2 + 2(m-1)x - 1 \le 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)^2 + 3(m^2-1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m-1)(4m+2) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \le m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \le m < 1$$

Vậy $m \in \left[-\frac{1}{2};1\right]$

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Tìm m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định.

Lời giải

$D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$; $y' = \dfrac{m^2-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$.

Câu 4. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.

Lời giải.

Hàm số đồng biến trên $(1;3)$

$\Leftrightarrow \quad y' = 4x^3 - 4(m-1)x \geq 0, \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - m + 1 \geq 0, \forall x \in (1;3)$ (vì trong khoang $(1;3)$ ta có $x > 0$.

$\Leftrightarrow \quad x^2 + 1 \geq m, \forall x \in (1;3)$

$\Leftrightarrow \quad \min\limits_{(1;3)}\left(x^2+1\right) \geq m$

$\Leftrightarrow \quad m \leq 2$

Dạng 4: Ứng dụng tính đơn điệu để chứng minh bất đẳng thức, giải phương trình, bất phương trình, hệ bất phương trình

4.1. Phương pháp

1. Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và đơn điệu trên D thì $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm.

2. Nếu hàm số $f(x), g(x)$ liên tục và đơn điệu trên D thì $f(x) = g(x)$ có ít nhất một nghiệm.

3. Nếu $f(x)$ liên tục và đơn điệu trên D và $u, v \in D$ thì phương trình $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

4.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Giải phương trình $x^{2017} + x^3 - 6x^2 + 13x - 9 = 0$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đặt: $y = x^{2017} + x^3 - 6x^2 + 13x - 9$

Ta có: $y' = 2017x^{2016} + 3x^2 - 12x + 13$

$= 2017x^{2016} + 3\left(x^2 - 4x + 4\right) + 1$

$= 2017x^{2016} + 3(x-2)^2 + 1 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra, y đồng biến

$\Rightarrow$ phương trình $y = 0$ có nhiều nhất 1 nghiệm.

Ta thấy, $x = 1$ thỏa phương trình.

Câu 2. Giải phương trình sau $\sqrt{2x-1} - \sqrt{5x-2} = (5x-2)^5 - (2x-1)^5$.

Lời giải

TXĐ: $D = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$

Ta có: $\sqrt{2x-1} - \sqrt{5x-2} = (5x-2)^5 - (2x-1)^5$

$\Leftrightarrow \sqrt{2x-1} + (2x-1)^5 = \sqrt{5x-2} + (5x-2)^5$

Đặt: $f(t)=\sqrt{t}+t^5\ \ \forall t\in[0,+\infty)$

Xét $\begin{matrix} u=2x-1 \\ v=5x-2 \end{matrix}$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t}}+5t^4>0\ \forall t\in[0,+\infty)$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến.

$\Rightarrow f(2x-1)=f(5x-2)$
$\Leftrightarrow 2x-1=5x-2$.
$\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}(l)$

Câu 3. Giải phương trình $x^3+3x^2+4x+2=(4x+6)\sqrt{4x+5}$.

Lời giải

TXĐ: $D=\left[\dfrac{-5}{4},+\infty\right)$

Ta có: $x^3+3x^2+4x+2=(4x+6)\sqrt{4x+5}$

$\Leftrightarrow (x+1)^3+(x+1)=\sqrt{(4x+5)}^3+\sqrt{4x+5}$

Đặt: $f(t)=t^3+t\ \ \forall t\in\mathbb{R}$

Xét: $\begin{matrix} u=x+1 \\ v=\sqrt{4x+5} \end{matrix}$

Ta có: $f'(t)=3t^2+1>0\ \ \forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến

$\Rightarrow f(x+1)=f\left(\sqrt{4x+5}\right)$
$\Leftrightarrow x+1=\sqrt{4x+5}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ (x+1)^2=4x+5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1+\sqrt{5} \\ x=1-\sqrt{5}\,(l) \end{array}\right. \end{cases}$

Dạng 5: Tìm cực trị hàm số cho bởi công thức

5.1. Phương pháp

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số.

Bước 2. Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

Bước 3. Lập bảng biến thiên.

Bước 4. Từ bảng biến thiên suy ra các điểm cực trị.

5.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			6				$+\infty$
	$-\infty$	↗		↘	-26	↗	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 6$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Câu 2. Tìm cực trị của hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -6x^2 - 6x - 6 = -6\left[\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 3. Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 8x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				$+\infty$
		↘	1	↗	

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 1$.

Câu 4. Tìm cực trị của hàm số $y=(1-x)^3(3x-8)^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=15(1-x)^2(3x-8)(2-x)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{8}{3} \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right. .$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		2		$\frac{8}{3}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$			-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x=\dfrac{8}{3}$, $y_{CĐ}=0$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$, $y_{CT}=-4$.

Câu 5. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^3(x-1)(x-2), \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3(x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu nhận thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Dạng 6: Tìm cực trị dựa vào bảng biến thiên, đồ thị

6.1. Phương pháp

- Nếu $f'(x)$ đổi dấu qua $x_0\in D$ thì x_0 là cực trị. Cụ thể:

+Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ + sang – thì x_0 là điểm cực đại.

+Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ - sang + thì x_0 là điểm cực tiểu.

- *Chú ý:*

+ Hàm số đạt cực trị tại: $x =$

+ Điểm cực trị của hàm số là: $x =$

+ Giá trị cực trị của hàm số là: $y =$

+ Cực trị của hàm số là: $y =$

+ Điểm cực trị của đồ thị hàm số: $(x; y)$

6.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

a) Giá trị cực tiểu của hàm số.

b) Điểm cực đại của đồ thị hàm số.

Lời giải

a) Từ BBT ta có hàm số đạt giá trị cực tiểu $f(3) = -5$ tại $x = 3$

b) Điểm cực đại của đồ thị hàm số $(0;2)$.

Dạng 7: Tìm m để hàm số đạt cực trị tại một điểm x_0 cho trước

7.1. Phương pháp

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0) = 0 \Rightarrow m$?

Bước 3. Thay m vào thử lại

7.2. Ví dụ minh họa

Câu 1. Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

Lời giải

Để $x = 1$ là điểm cực tiểu của hàm số $\Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$

Thử lại với $m=1$, ta có $y=x^3-2x^2+x+1$; $y'=3x^2-4x+1$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-4x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m=1$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 2. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+1)x-1$ đạt cực đại tại $x=-2$

Lời giải

Ta có $y'=x^2-2mx+m+1$.

Giả sử $x=-2$ là điểm cực đại của hàm số đã cho, khi đó $y'(-2)=0 \Leftrightarrow (-2)^2-2m(-2)+m+1=0 \Leftrightarrow 5m+5=0 \Leftrightarrow m=-1$.

Với $m=-1$, ta có $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-1$.

$$y'=x^2+2x;\ y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $m=-1$ là giá trị cần tìm.

Câu 3. Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y'=4(m-1)x^3-2(m^2-2)x$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1 \Rightarrow y'(-1)=0 \Leftrightarrow -4(m-1)+2(m^2-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=2 \end{array}\right.$.

Với $m=0$, hàm số trở thành $y=-x^4+2x^2+2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Với $m=2$, hàm số trở thành $y=x^4-2x^2+2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Vậy $m=2$ thì hàm số $y=(m-1)x^4-(m^2-2)x^2+2019$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

Dạng 8: Toán thực tế

Câu 1. Giả sử số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 2000 được mô tả bởi hàm số

$$N(t)=\frac{25t+10}{t+5}, t\geq 0$$

trong đó $N(t)$ được tính bằng nghìn người.

a) Tính số dân của thị trấn đó vào các năm 2000 và 2015.

b) Tính đạo hàm $N'(t)$ và $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)$. Từ đó, giải thích tại sao số dân của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt quá một ngưỡng nào đó.

Lời giải

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2000 là: $N(0)=\frac{25.0+10}{0+5}=\frac{10}{5}=2$ (nghìn người) Dân số của thị trấn đó vào năm 2015 là: $N(15)=\frac{25.15+10}{15+5}=19,25$ (nghìn người)

b) Ta có: $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{25t+10}{t+5}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{25+\frac{10}{t}}{1+\frac{5}{t}}=25$

Vì $\lim\limits_{t\to+\infty} N(t)=25$ và nên dân số của thị trấn đó luôn tăng nhưng sẽ không vượt qua ngưỡng 25 nghìn người.

Câu 2. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t)=\frac{5000}{1+5e^{-t}}, t\geq 0$$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?.

Lời giải

Ta có: $f'(t)=\frac{-5000\left(1+5e^{-t}\right)'}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}=\frac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

Đặt $h(t)=\dfrac{25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^2}$.

$$h'(t)=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)^2-2\cdot\left(-5e^{-t}\right)\cdot\left(1+5e^{-t}\right)\cdot 25000e^{-t}}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}$$

$$=\frac{-25000e^{-t}\left(1+5e^{-t}\right)\left(1+5e^{-t}-10e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^4}=\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}$$

$$h'(t)=0\Leftrightarrow\frac{-25000e^{-t}\left(1-5e^{-t}\right)}{\left(1+5e^{-t}\right)^3}=0\ \Leftrightarrow 1-5e^{-t}=0\Leftrightarrow e^{-t}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow t=\ln 5(\text{tm})$$

Ta có bảng biến thiên với $t\in[0;+\infty)$:

t	0		ln5		$+\infty$
h'(t)		+	0	−	
h(t)	$\frac{6\,250}{9}$	↗	1250	↘	0

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5\approx 1,6$ năm thì thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 3. Kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam trong các năm từ 2010 đến 2017 có thể được tính xấp xỉ bằng công thức $f(x)=0,01x^3-0,04x^2+0,25x+0,44$ (tỉ USD) với x là số năm tính từ 2010 đến $2017(0\le x\le 7)$.

a) Tính đạo hàm của hàm số $y=f(x)$.

b) Chứng minh rằng kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Lời giải

a) Đạo hàm

$$f'(x)=\left(0.01x^3-0.04x^2+0.25x+0.44\right)'$$

$$=0.03x^2-0.08x+0.25$$

b) $f'(x)=0.03x^2-0.08x+0.25=0$ (Phương trình vô nghiệm)

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$+\infty$
y'		+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, kim ngạch xuất khẩu rau quả của Việt Nam tăng liên tục trong các năm từ 2010 đến 2017.

Câu 4. Xét một chất điểm chuyển động dọc theo trục Ox. Toạ độ của chất điểm tại thời điểm t được xác định bởi hàm số $x(t)=t^3-6t^2+9t$ với $t\geq 0$. Khi đó $x'(t)$ là vận tốc của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $v(t); v'(t)$ là gia tốc chuyển động của chất điểm tại thời điểm t, kí hiệu $a(t)$.

a) Tìm các hàm $v(t)$ và $a(t)$.

b) Trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm tăng, trong khoảng thời gian nào vận tốc của chất điểm giảm?.

Lời giải

a) $v(t)=x'(t)=3t^2-12t+9$

$a(t)=v'(t)=6t-12$

b) Xét $v(t)=3t^2-12t+9$

$\Rightarrow v'(t)=6t-12=0 \Leftrightarrow t=2$

Bảng biến thiên

x	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	9		-3		$+\infty$

Vận tốc tăng từ $(2;+\infty)$ và giảm từ $(0;2)$.

Câu 5. Thể tích V (đơn vị: centimét khối) của $1\,\text{kg}$ nước tại nhiệt độ $T\left(0°\text{C}\leq T\leq 30°\text{C}\right)$ được tính bởi công thức sau:

$V(T)=999,87-0,06426T+0,0085043T^2-0,0000679T^3$.

Hỏi thể tích $V(T), 0°\text{C}\leq T\leq 30°\text{C}$, giảm trong khoảng nhiệt độ nào?.

Lời giải

$$V'(T)=-2,037.10^{-4}T^2+0.017086T-0,06426=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} T\approx 79,53(l) \\ T\approx 3,97(n)\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

T	0		3.97		30
V'		$-$	0	$+$	

Thể tích giảm khi $T\in(0;3,97)$.

Câu 6. Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t=0(s)$ cho đến khi tên lủa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t=126(\mathrm{s})$, cho bởi hàm số sau:

$v(t)=0,001302t^3-0,09029t^2+23$

(v được tính bằng $\mathrm{ft}/s, 1\ \text{feet}=0,3048\,\mathrm{m}$)

Hỏi gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian nào tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi?.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $v'(t)=3\times 0,001320t^2-2\times 0,09029t$.

Nhận xét $a(t)=v'(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t\approx 45,6 \end{array}\right.$.

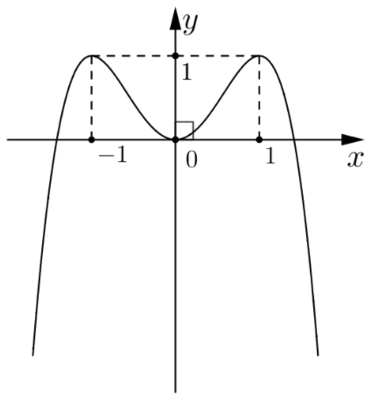
x	$-\infty$		0		45,6		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	↘	23	↗	v(45,6)	↘	$-\infty$

Vậy gia tốc tàu con thoi tăng trong khoảng $45,6$ s đầu tiên.

D. BÀI TÂP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

PHẦN 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(-1;0\right)$. **B.** $\left(-\infty;-1\right)$. **C.** $\left(0;1\right)$. **D.** $\left(0;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta có:

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

A. $(-1;1)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(4;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 4: Hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên

A. $(-1;3)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2-2x-3$.

Cho $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Ta có bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Vậy hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1;3)$.

Câu 5: Hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng

A. $(0;2)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;4)$. **D.** $(4;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-3x^2+6x$.

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Vậy hàm số $y=-x^3+3x^2-2$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 6: Hàm số $y=\frac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

A. R$\backslash\{-3\}$. **B.** R. **C.** $(-\infty;-3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\frac{5-2x}{x+3}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\backslash\{-3\}$.

$y'=\frac{-11}{(x+3)^2}<0$, với $x\in D$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-3;+\infty)$.

Câu 7: Cho hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Ta có $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2x-3}{x+1}$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=R\backslash\{-1\}$.

$y'=\dfrac{x^2+2x+5}{(x+1)^2}>0$, $\forall x\neq -1$.

Suy ra Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Do đó đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+1$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2+1>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 10: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-12x-1$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$y' = x^2 - x - 12$

$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(4;+\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;\ 3)$. **B.** $(-1;\ 0)$. **C.** $(0;\ 1)$. **D.** $(-2;\ 0)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Đồng thời $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0;2)$ nên ta chọn đáp án theo đề bài là $(0;\ 1)$.

Câu 12: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;0)$ và đồng biến trên $(0;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$+$	
y	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x)=0 \Leftrightarrow (1-x)^2(x+1)^3(3-x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;3)$.

Câu 14: Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x-2}$ **B.** $y=x^3+x$ **C.** $y=-x^3-3x$ **D.** $y=\dfrac{x+1}{x+3}$

Lời giải

Chọn B

Vì $y=x^3+x \Rightarrow y'=3x^2+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Lời giải

Chọn D

Theo bảng xét dấu thì $y'<0$ khi $x\in(0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;1)$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Câu 17: Cho hàm số $y=\sqrt{x^2-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$. **D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số có tập xác định $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$ nên loại A,B, D.

Câu 18: Hàm số $y=2x^4+1$ đồng biến trên khoảng

A. $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ **C.** $(0;+\infty)$ **D.** $(-\infty;0)$

Lời giải

Chọn C

$y'=8x^3 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y'>0 \Leftrightarrow x>0\,;\, y'<0 \Leftrightarrow x<0$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Câu 19: Trong các hàm số sau, hàm số nào vừa có khoảng đồng biến vừa có khoảng nghịch biến trên tập xác định của nó. $(\mathrm{I}).\ y=\frac{2x+1}{x+1}$, $(\mathrm{II}).\ y=-x^4+x^2-2$, $(\mathrm{III}).\ y=x^3+3x-4$.

A. $(\mathrm{I});(\mathrm{III})$. **B.** $(\mathrm{I})\ \&\ (II)$. **C.** $(\mathrm{II});(\mathrm{III})$. **D.** (II).

Lời giải

Chọn D

(I): TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. $y'=\frac{1}{(x+1)^2}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Vậy (I) không thỏa.

(Nhận xét: đây là hàm nhất biến nên không thỏa).

(II): TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $y'=-4x^3+2x$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\frac{\sqrt{2}}{2} \\ x=-\frac{\sqrt{2}}{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu.

x	$-\infty$		$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

.

Vậy (II) thỏa.

(Nhận xét, $y'=0$ là phương trình bậc ba có đủ 3 nghiệm nên luôn đổi dấu trên $\mathbb{R}$ nên (II) thỏa).

(III): TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $y'=3x^2+3>0\,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy (III) không thỏa.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2-2x$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=-2f'(x)=-2x^2+4x>0 \Leftrightarrow x\in(0;2)$.

Suy ra: Hàm số $y=-2f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$

Câu 21: Cho hàm số $y=\frac{1}{4}x^4-2x^2-1$. Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

B. Hàm đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-2)$ và $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Phân tích: Xét phương trình $y'=0 \Leftrightarrow x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$.

Theo dạng đồ thị hàm bậc bốn trùng phương có hệ số $a=\frac{1}{4}>0$ nên ở đây ta có thể xác định nhanh hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$, hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;2)$.

Câu 22: Hàm số $y=-x^4+4x^2+1$ nghịch biến trên mỗi khoảng nào sau đây?

A. $(\sqrt{2};+\infty)$. **B.** $(-\sqrt{3};0);(\sqrt{2};+\infty)$.

C. $(-\sqrt{2};0);(\sqrt{2};+\infty)$. **D.** $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$.

Lời giải

Chọn C

$y' = -4x^3 + 8x = 4x\left(-x^2 + 2\right) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{2}$.

Câu 23: Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = (-\infty;1] \cup [5;+\infty)$.

Ta có $y' = \dfrac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} > 0$, $\forall x \in (5;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5;+\infty)$.

Câu 24: Tìm tất cả các khoảng đồng biến của hàm số $y = \sqrt{9 - x^2}$.

A. $(0;+\infty)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(-3;0)$. **D.** $(0;3)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = [-3;3]$.

Ta có $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$; $y' < 0$ $\forall x \in (0;3)$, suy ra hàm số đã cho đồng biến trên $(-3;0)$.

Câu 25: Tìm khoảng đồng biến của hàm số $y = -x + \sin x$.

A. $\varnothing$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $\mathbb{R}$. **D.** $(1;2)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = -x + \sin x$ tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = -1 + \cos x \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 26: Cho hàm số $y = x\ln x$. Chọn khẳng định sai trong số các khẳng định sau:

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{e};+\infty\right)$.
C. Hàm số có đạo hàm $y' = 1 + \ln x$.
D. Hàm số có tập xác định là $D = (0;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

$y = x\ln x$. TXĐ: $D = (0;+\infty)$.

$y' = \ln x + 1 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{1}{e}$.

Ta có BBT:

x	0		$\dfrac{1}{e}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào BBT suy ra đáp án A sai.

Câu 27: Cho hàm số $y = \sin x + \cos x - \sqrt{3}x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
B. Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ.
C. Hàm số có điểm cực trị.
D. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = \cos x - \sin x - \sqrt{3} = \sqrt{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) - \sqrt{3} \le \sqrt{2} - \sqrt{3} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$.
Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).
Ta có $f'(x) \ge 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \le 0$

$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \le 0$

$\Leftrightarrow -2 \le m \le 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2;-1;0;1;2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 29: Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

A. 5 **B.** 4 **C.** 6 **D.** 7

Lời giải

Chọn D

Ta có:

+) TXĐ: $D=\mathbb{R}$

+) $y'=-3x^2-2mx+4m+9$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $y'\le 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} a=-3<0 \\ \Delta'=m^2+3(4m+9)\le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow m\in[-9;-3]$ $\Rightarrow$ có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 30: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[-4;2]$. **B.** $(-4;2)$. **C.** $(-\infty;-4]\cup[2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-4)\cup(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2+2(m+1)x+3$.

Hàm số $y=x^3+(m+1)x^2+3x+2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow \Delta'=(m+1)^2-9\le 0 \Leftrightarrow m^2+2m-8\le 0 \Leftrightarrow -4\le m\le 2$.

Vậy $m\in[-4;2]$.

Câu 31: Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+(3m+2)x+1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\ge -1 \\ m\le -2 \end{array}\right.$. **B.** $-2\le m\le -1$. **C.** $-2<m<-1$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m>-1 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}$, $y'=-x^2+2mx+3m+2$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=-1<0 \\ \Delta'=m^2+3m+2\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le m\le -1$.

Câu 32: Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=\left(m^2-1\right)x^3+\left(m-1\right)x^2-x+4$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

A. 0 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn C

TH1: $m=1$. Ta có: $y=-x+4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m=1$.

TH2: $m=-1$. Ta có: $y=-2x^2-x+4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m=-1$.

TH3: $m\neq\pm1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}$, dấu "=" chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow 3\left(m^2-1\right)x^2+2\left(m-1\right)x-1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1<0\\ \left(m-1\right)^2+3\left(m^2-1\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-1<0\\ \left(m-1\right)\left(4m+2\right)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\ -\dfrac{1}{2}\le m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}\le m<1.$$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=0$.

Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m=0$ hoặc $m=1$.

Câu 33: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số hàm số $y=\dfrac{1}{3}\left(m^2-m\right)x^3+2mx^2+3x-2$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$y'=\left(m^2-m\right)x^2+4mx+3$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)\Leftrightarrow y'\ge 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$.

+ Với $m=0$ ta có $y'=3>0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;+\infty\right)$.

+ Với $m=1$ ta có $y'=4x+3>0\Leftrightarrow x>-\dfrac{3}{4}$ $\Rightarrow m=1$ không thảo mãn.

+ Với $\begin{cases}m\neq 1\\ m\neq 0\end{cases}$ ta có $y'\ge 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m>0\\ \Delta'=m^2+3m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>1\\ m<0\end{array}\right.\\ -3\le m\le 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le m<0$.

Tổng hợp các trường hợp ta được $-3\le m\le 0$.

$m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m\in\left\{-3;-2;-1;0\right\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 34: Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số $y=mx^3+mx^2+(m+1)x-3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 200. **B.** 99. **C.** 100. **D.** 201.

Lời giải

Chọn B

Trường hợp 1: $m=0$. Ta có:

$y=x-3$ có $y'=1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên trên $\mathbb{R}$.

Do đó loại $m=0$.

Trường hợp 2: $m\neq 0$. Ta có: $y'=3mx^2+2mx+m+1$, $\Delta'=-2m^2-3m=m(-2m-3)$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\le 0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ \Delta'\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ m(-2m-3)\le 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\ -2m-3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow m\le -\frac{3}{2}.$$

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-100;100]$ nên $m\in\{-2;-3;...;-99;-100\}$.

Vậy có 99 giá trị m.

Câu 35: Giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-(3m+2)x+2$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4 là

A. $m=1$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=4$. **D.** $m=\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=x^2-2x-(3m+2)$. Để hàm số nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 4 thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $|x_1-x_2|=4$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ |x_1-x_2|=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1+3m+2>0\\ (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ 2^2+4(3m+2)=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-1\\ 12m=4\end{cases}\Rightarrow m=\frac{1}{3}.$$

Vậy $m=\frac{1}{3}$.

Câu 36: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x+2017$ nghịch biến trên khoảng $(a;b)$ sao cho $b-a>3$ là

A. $m<0$. **B.** $\left[\begin{array}{l}m<0\\ m>6\end{array}\right.$. **C.** $m>6$. **D.** $m=9$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$

Hàm số nghịch biến trên $(a;b) \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) \le 0 \, \forall x \in (a;b)$

$\Delta = m^2 - 6m + 9$

TH1: $\Delta \le 0 \Rightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) \ge 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Vô lí

TH2: $\Delta > 0 \Leftrightarrow m \ne 3 \Rightarrow y'$ có hai nghiệm $x_1, x_2 \, (x_2 > x_1)$

$\Rightarrow$ Hàm số luôn nghịch biến trên $(x_1; x_2)$.

Yêu cầu đề bài:

$\Leftrightarrow x_2 - x_1 > 3 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 > 9 \Leftrightarrow S^2 - 4P > 9$

$\Leftrightarrow (m-1)^2 - 4(m-2) > 9 \Leftrightarrow m^2 - 6m > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 6 \\ m < 0 \end{array}\right.$

Câu 37: Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+1)x^2 + 4x + 7$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{5}$. Tính tổng tất cả phần tử của S.

A. -2. **B.** 2. **C.** -1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = x^2 + 2(m+1)x + 4$

Hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{5}$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 - 4 > 0 \\ |x_1 - x_2| = 2\sqrt{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ 4(m+1)^2 - 16 = 20 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -3 \\ m > 1 \end{array}\right. \\ m^2 + 2m - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = 2 \end{array}\right.$

Vậy tổng cần tìm là $-4 + 2 = -2$.

Câu 38: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 3m + 4$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3?

A. $m = 9$. **B.** $m = 1; m = -9$. **C.** $m = -1; m = 9$. **D.** $m = -1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=x^2-mx+2m$

Ta không xét trường hợp $y'\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ vì $a=1>0$

Hàm số nghịch biến trên một đoạn có độ dài là 3 $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$|x_1-x_2|=3\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\Leftrightarrow m^2-8m>0\\(x_1-x_2)^2=9\Leftrightarrow S^2-4P=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>8\ hay\ m<0\\m^2-8m=9\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=9\end{array}\right.$$

Câu 39: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(2m-1)x-m+2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$..

A. $m>1$. **B.** $m\le-\frac{1}{2}$. **C.** $m<-\frac{1}{2}$. **D.** $m=0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=x^2-2mx+2m-1$. Cho $y'=0\Leftrightarrow x^2-2mx+2m-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2m-1\end{array}\right.$.

Nếu $1\le 2m-1$ thì ta có biến đổi $y'\le 0\Leftrightarrow 1\le x\le 2m-1$.

(trường hợp này hàm số không thể nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$).

Xét $2m-1<1$ ta có biến đổi $y'\le 0\Leftrightarrow x\in[2m-1;1]$.

x	$-\infty$		$2m-1$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ thì $(-2;0)\subset[2m-1;1]$.

$$\Leftrightarrow 2m-1\le-2\Leftrightarrow m\le-\frac{1}{2}..$$

Câu 40: Biết rằng hàm số $y=\frac{x^3}{3}+3(m-1)x^2+9x+1$ nghịch biến trên $(x_1;x_2)$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định. Nếu $|x_1-x_2|=6$ thì giá trị m là:

A. -4 và 2. **B.** $1+\sqrt{2}$ và $1-\sqrt{2}$. **C.** -4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=\frac{x^3}{3}+3(m-1)x^2+9x+1$. Tập xác định $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=x^2-6(m-1)x+9$; $\Delta'=9(m-1)^2-9$.

Theo đề: Hàm số nghịch biến trên $(x_1;x_2)$ với $|x_1-x_2|=6$ và đồng biến trên các khoảng còn lại của tập xác định khi và chỉ khi $y'=0$ có hai nghiệm $x_{1,2}$ thỏa mãn $|x_1-x_2|=6$.

$$\begin{cases} a=1\neq 0 \\ \Delta'=9(m-1)^2-9>0 \\ |x_1-x_2|=\frac{2\sqrt{\Delta'}}{|a|}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right. \\ 9(m-1)^2-9=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right. \\ m=1\pm\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow m=1\pm\sqrt{2}..$$

Câu 41: Tìm tất cả các giá trị thực m để $f(x)=-x^3+3x^2+(m-1)x+2m-3$ đồng biến trên một khoảng có độ dài lớn hơn 1.

A. $-\frac{5}{4}<m<0$. **B.** $m>-\frac{5}{4}$. **C.** $m\geq 0$. **D.** $m\leq 0$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x)=-3x^2+6x+m-1$.

Để hàm số đồng biến trên một khoảng có đọ dài lớn hơn 1 khi và chỉ khi $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biêt x_1,x_2 $(x_1<x_2)$ thỏa mãn $|x_2-x_1|>1$.

Với $\Delta'>0\Leftrightarrow 3m+6>0\Leftrightarrow m>-2$ theo viet thì $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1x_2=\frac{1-m}{3} \end{cases}$ thay vào

$|x_2-x_1|>1\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2-1>0\Leftrightarrow 4m+5>0\Leftrightarrow m>\frac{-5}{4}$ kết hợp điều kiện chọn D.

Câu 42: Hàm số $y=(x+m)^3+(x+n)^3-x^3$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=4(m^2+n^2)-m-n$ bằng

A. -16. **B.** 4. **C.** $\frac{-1}{16}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3(x+m)^2+3(x+n)^2-3x^2=3\left[x^2+2(m+n)x+m^2+n^2\right]$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}\Leftrightarrow mn\leq 0$.

TH1: $mn=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\n=0\end{array}\right.$.

Do vai trò của m,n là như nhau nên ta chỉ cần xét trường hợp $m=0$.

$\Rightarrow P=4n^2-n=\left(2n-\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{16}\geq-\frac{1}{16}(1)$.

TH2: $mn<0\Leftrightarrow m>0;n<0$.

Ta có $P=\left(2m-\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}+4n^2+(-n)>-\frac{1}{16}(2)$.

Từ $(1),(2)$ ta có $P_{\min}=-\frac{1}{16}$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=\frac{1}{8};n=0$ hoặc $m=0;n=\frac{1}{8}$.

Câu 43: Cho hàm số $y=\frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. Vô số **B.** 3 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

$y'=\frac{-m^2+2m+3}{(x-m)^2}$ hàm số đồng biến trên khoảng xác định khi $-1<m<3$ nên có 3 giá trị của m nguyên

Câu 44: Cho hàm số $y=\frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S.

A. 4 **B.** Vô số **C.** 3 **D.** 5

Lời giải

Chọn D

$D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$; $y'=\frac{m^2-4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y'<0,\forall x\in D\Leftrightarrow m^2-4m<0\Leftrightarrow 0<m<4$.

Mà $m\in\mathbb{Z}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 45: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-4\}$, $y'=\dfrac{4-m^2}{(x+4)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó thì $4-m^2>0 \Leftrightarrow -2<m<2$.
Do đó có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le -2 \\ m\ge 2 \end{array}\right.$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$. **D.** $-2\le m\le 2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=(-\infty;m)\cup(m;+\infty)$.

Ta có $y=\dfrac{mx-4}{x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$. Vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó

nên $-m^2+4<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Câu 47: Hàm số $y=\dfrac{x^2+(m+1)x-1}{2-x}$ (m là tham số) nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi các giá trị của m là:

A. $m\ge 1$. **B.** $m=-1$. **C.** $m\le -\dfrac{5}{2}$. **D.** $-1<m<1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Đạo hàm: $y'=\dfrac{-x^2+4x+2m+1}{(2-x)^2}=\dfrac{g(x)}{(2-x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y'\le 0,\ \forall x\in D$

(Dấu $'='$ chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên D)

$\Leftrightarrow\ g(x)=-x^2+4x+2m+1\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

Điều kiện: $\Delta'\le 0$ (vì $a=-1<0$) $\Leftrightarrow\ 4-(-1).(2m+1)\le 0\ \Leftrightarrow\ 2m+5\le 0\ \Leftrightarrow\ m\le -\dfrac{5}{2}$.

Câu 48: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Ta có $y'=3-\dfrac{m^2+3m}{(x+1)^2}=\dfrac{3x^2+6x+3-m^2-3m}{(x+1)^2}$

Hàm số đồng biết trên từng khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'\geq 0\quad \forall x\neq -1 \Leftrightarrow 3x^2+6x+3-m^2-3m\geq 0\ \ \forall x\neq -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=9+3\left(m^2+3m\right)-9\leq 0\\ m^2+3m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow -3<m<0$

Mà m nguyên nên $m\in\{-2,-1\}$.

Câu 49: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

A. 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Đạo hàm $f'(x)=\dfrac{-m^2+4}{(x-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x)>0\,\forall x\in(0;+\infty)\Leftrightarrow\begin{cases}-m^2+4>0\\ m\notin(0;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2<m<2\\ m\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow -2<m\leq 0.$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-1;0\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 50: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ là

A. $(5;+\infty)$. **B.** $(5;8]$. **C.** $[5;8)$. **D.** $(5;8)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x\neq -m$.

Ta có $y'=\dfrac{m-5}{(x+m)^2}$

Để hàm số $y=\dfrac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-8)$ thì

$\begin{cases} y'>0 \\ -m\notin(-\infty;-8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-5>0 \\ -m\geq -8 \end{cases} \Rightarrow 5<m\leq 8$.

Câu 51: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y=\dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$?

A. 2020. **B.** 2026. **C.** 2018. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x\neq m$ nên $m\notin(-\infty;-3)$

$y=\dfrac{3x+18}{x-m}\Rightarrow y'=\dfrac{-3m-18}{(x-m)^2}$

Để hàm số $y=\dfrac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ thì $-3m-18<0\Leftrightarrow m>-6$

Vì $m\in(-2020;2020)$ và $m\notin(-\infty;-3)$ nên $m\in[-2;2020]$

Vậy có 2023 giá trị m nguyên thoả mãn.

Câu 52: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-2m+3}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$. Tìm số phần tử của S.

A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x\neq -m$.

Ta có: $y'=\dfrac{m^2+2m-3}{(x+m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ thì:

$\begin{cases} y'<0;\forall x\in(2;+\infty) \\ x\neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2+2m-3<0 \\ -m\leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3<m<1 \\ m\geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq m<1$.

Vậy giá trị nguyên của m là $S=\{-2;-1;0\}$.

Câu 53: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\dfrac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0;4)$?

A. 5. **B.** 11. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \neq -\dfrac{m}{4}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m^2 - 36}{(4x+m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;4) \Leftrightarrow y' < 0,\ \forall x \in (0;4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 < 0 \\ -\dfrac{m}{4} \notin (0;4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} -\dfrac{m}{4} \leq 0 \\ -\dfrac{m}{4} \geq 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \left[\begin{array}{l} m \geq 0 \\ m \leq -16 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 6.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

Vậy có 6 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 54: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ là

A. $(-\infty;1]$ **B.** $(-\infty;4]$ **C.** $(-\infty;1)$ **D.** $(-\infty;4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có.

$y' = 3x^2 - 6x + 4 - m$. $ycbt \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2;+\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2;+\infty)$

$\Leftrightarrow m \leq \min\limits_{(2;+\infty)} g(x)$ với $g(x) = 3x^2 - 6x + 4$

Ta có.

$g'(x) = 6x - 6$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

x	$-\infty$	1	2		$+\infty$
$g'(x)$		0		$+$	
$g(x)$			4	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty;4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 55: Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=-x^3-6x^2+(4m-9)x+4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ là

A. $\left(-\infty;-\dfrac{3}{4}\right]$ **B.** $[0;+\infty)$ **C.** $(-\infty;0]$ **D.** $\left[-\dfrac{3}{4};+\infty\right)$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=-3x^2-12x+4m-9$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ thì $y'=-3x^2-6x+4m-9\le 0 \quad \forall x\in(-\infty;-1)$

$\Leftrightarrow 4m\le 3x^2+12x+9 \quad \forall x\in(-\infty;-1) \Leftrightarrow 4m\le \min\limits_{(-\infty;-1]} f(x),\quad f(x)=3x^2+12x+9$

Ta có $f'(x)=6x+12;\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=-2$.

Khi đó, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra $\min\limits_{(-\infty;0]} f(x)=-3\Rightarrow 4m\le -3\Leftrightarrow m\le \dfrac{-3}{4}$.

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx+2$ tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m<3$. **B.** $m\ge 3$. **C.** $m\ne 3$. **D.** $m\le 3$.

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm : $y'=3x^2-6x+m$

YCBT $\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)$.

$\Leftrightarrow 3x^2-6x+m\ge 0,\forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m\ge -3x^2+6x,\forall x\in(1;+\infty)$

Xét hàm số: $f(x)=-3x^2+6x,\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow f'(x)=-6x+6\Rightarrow f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$, $f(1)=3$. Do đó : $m\ge f(x),x\in(1;+\infty)\Rightarrow m\ge 3$.

Câu 57: Tìm tất cả các giá thực của tham số m sao cho hàm số $y=2x^3-3x^2-6mx+m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $m\le -\dfrac{1}{4}$. **B.** $m\ge \dfrac{1}{4}$. **C.** $m\ge 2$. **D.** $m\ge 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 6m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ khi và chỉ khi $y' \le 0$ với $\forall x \in (-1;1)$ hay $m \ge x^2 - x$ với $\forall x \in (-1;1)$.

Xét $f(x) = x^2 - x$ trên khoảng $(-1;1)$ ta có $f'(x) = 2x - 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \ge f(x)$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow m \ge 2$.

* Có thể sử dụng $y' \le 0$ với $\forall x \in (-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-1) \le 0 \\ y'(1) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m \le 0 \\ 12 - 6m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2$.

Câu 58: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

A. $(-\infty;6]$. **B.** $(-\infty;3)$. **C.** $(-\infty;3]$. **D.** $[3;6]$.

Lời giải

Chọn C

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì: $y' \ge 0, \forall x \in (0;4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \ge 0 \ \forall x \in (0;4) \Leftrightarrow \frac{3x^2+6}{2x+1} \ge m \ \forall x \in (0;4)$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2+6}{2x+1}$ trên $(0;4)$.

$g'(x) = \frac{6x^2+6x-12}{(2x+1)^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \in (0;4) \\ x = -2 \notin (0;4) \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên:

x	0		1		4
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	6	$\searrow$	3	$\nearrow$	$\dfrac{54}{13}$

Vậy để $g(x)=\dfrac{3x^2+6}{2x+1}\ge m\ \forall x\in(0;4)$ thì $m\le 3$.

Câu 59: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

A. $m\le 0$ hoặc $1\le m<2$ **B.** $m\le 0$ **C.** $1\le m<2$ **D.** $m\ge 2$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t=\tan x$, vì $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow t\in(0;1)$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t-2}{t-m}\forall t\in(0;1)$. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$

Ta có $f'(t)=\dfrac{2-m}{(t-m)^2}$.

Ta thấy hàm số $t(x)=\tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$. Nên để hàm số $y=\dfrac{\tan x-2}{\tan x-m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t)>0\,\forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2}>0\,\forall t\in(0;1)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m>0\\ m\notin(0;1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<2\\ \left[\begin{array}{l}m\le 0\\ m\ge 1\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-\infty;0]\cup[1;2)$$

Câu 60: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y=\dfrac{\cos x-3}{\cos x-m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{\pi}{2};\pi\right)$

A. $\left[\begin{array}{l}0\le m<3\\ m\le -1\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}0<m<3\\ m<-1\end{array}\right.$. **C.** $m\le 3$. **D.** $m<3$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện: $\cos x \ne m$. Ta có: $y' = \frac{(-m+3)}{(\cos x - m)^2}.(-\sin x) = \frac{(m-3)}{(\cos x - m)^2}.\sin x$

Vì $x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Rightarrow \sin x > 0$, $(\cos x - m)^2 > 0,\ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right): \cos x \ne m$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \Leftrightarrow y' < 0\ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0 \\ \cos x \ne m\ \ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0 \\ m \notin (-1;0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ \left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le m < 3 \\ m \le -1 \end{array}\right..$$

Chú ý : Tập giá trị của hàm số $y = \cos x,\ \forall x \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$ là $(-1;0)$.

Câu 61: Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;\mathrm{e})$. Tìm số phần tử của S.

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

$y = f(x) = \frac{\ln x - 4}{\ln x - 2m}$

Đặt $t = \ln x$, điều kiện $t \in (0;1)$

$g(t) = \frac{t-4}{t-2m}$; $g'(t) = \frac{-2m+4}{(t-2m)^2}$

Để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;e)$ thì hàm số $g(t)$ đồng biến trên $(0;1)$

$\Leftrightarrow g'(t) > 0,\ \mathrm{t} \in (0;1) \Leftrightarrow \frac{-2m+4}{(t-2m)^2} > 0, t \in (0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+4>0 \\ 2m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} < m < 2 \\ m < 0 \end{array}\right.$$

S là tập hợp các giá trị nguyên dương $\Rightarrow S = \{1\}$.

Vậy số phần tử của tập S là 1.

Câu 62: Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

A. $\left[\begin{array}{l} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{array}\right.$ **B.** $m > 2$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right.$ **D.** $-1 < m < 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \dfrac{2-m}{(\cos x - m)^2}.(-\sin x), \sin x > 0\, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Do đó: Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2-m > 0 \\ \cos x - m \neq 0\, \forall x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{array}\right..$$

Câu 63: Cho hàm số $y = \dfrac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?

A. 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = -\sqrt{6-x}$ vì $x \in (-8;5) \Rightarrow t \in \left(-\sqrt{14};-1\right)$ và $t = -\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8;5)$.

Hàm số trở thành $y = \dfrac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\} \Rightarrow y' = \dfrac{m^2-4m+3}{(-t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\sqrt{14};-1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3 > 0 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq -\sqrt{14} \\ m \geq -1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \leq -\sqrt{14} \\ -1 \leq m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right..$

$\Rightarrow m = \{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-1,0,4,5,6,7,8,9\}$ có 14 giá trị.

Câu 64: Cho hàm số $y = \dfrac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(17;37)$.

A. $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ -4 \leq m < -1 \\ m \leq -6 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m \leq -4 \end{array}\right.$ **C.** $-1 < m < 2$. **D.** $-4 \leq m < 2$

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{x-1}$

Hàm số $y=\dfrac{(m-1)\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+m}$ đồng biến trên khoảng $(17;37)$ khi $f(t)=\dfrac{(m-1)t+2}{t+m}$ đồng biến trên khoảng $(4;6)$

$$f'(t)=\frac{m^2-m-2}{(t+m)^2}$$

Hàm số $f(t)=\dfrac{(m-1)t+2}{t+m}$ đồng biến trên khoảng $(4;6)$

$$f'(t)>0\ \forall t\in(4;6)\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-m-2>0\\-m\notin(4;6)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1;2<m\\m\le-6;-4\le m\end{cases}\Leftrightarrow m\le-6;-4\le m<-1;2<m$$

Câu 65: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương và nhỏ hơn 2018 của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;9)$. Tính số phần tử của tập hợp S.

A. 2014. **B.** 2015. **C.** 2016. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=\sqrt{x}$, ta có $x\in(1;9)\Leftrightarrow t\in(1;3)$ và khi x càng tăng thì t càng tăng.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t-2}{t-m}$. Khi $m>0$, ta có điều kiện xác định của hàm số $g(t)=\dfrac{t-2}{t-m}$ là $t\neq m$
.

$$g'(t)=\frac{2-m}{(t-m)^2}.$$

Hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;9)$.

$\Leftrightarrow$ Hàm số $g(t)$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)\Leftrightarrow\begin{cases}2-m<0\\\left[\begin{array}{l}m\le1\\m\ge3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow m\ge3$.

Vì m nguyên dương và nhỏ hơn 2018 nên ta có $3\le m\le2017$ hay S có 2015 phần tử.

Câu 66: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\dfrac{m\ln x-2}{\ln x-m-1}$ nghịch biến trên $(e^2;+\infty)$.

A. $m\le-2$ hoặc $m=1$. **B.** $m<-2$ hoặc $m=1$.
C. $m<-2$. **D.** $m<-2$ hoặc $m>1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=(0;+\infty)\setminus\{e^{m+1}\}$.

Cách 1: $y' = \dfrac{-m^2 - m + 2}{x(\ln x - m - 1)^2}$

Vậy yêu cầu bài toán tương đương $\begin{cases} -m^2 - m + 2 < 0 \\ e^{m+1} \notin (e^2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 1 \\ m < -2 \end{array}\right. \\ m + 1 \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$

Cách 2: Đặt $t = \ln x$, ta biết rằng hàm số $f(x) = \ln x$ đồng biến trên $(e^2; +\infty)$.

Xét hàm số $g(t) = \dfrac{mt - 2}{t - m - 1}$ với $t \in (2; +\infty)$, ta có $g'(t) = \dfrac{-m^2 - m + 2}{(t - m - 1)^2}$.

Câu 67: Hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x}{x + m}$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì giá trị của m là:

A. $m \in (-1; 2] \setminus \{-1\}$.

B. $m \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right)$.

C. $m \in \left(-1; \dfrac{1}{2}\right]$.

D. $m \in \left(-\dfrac{1}{2}; 2\right] \setminus \{-1\}$.

Lời giải

Chọn C

$y = \dfrac{x^2 - 4x}{x + m}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y' = \dfrac{x^2 + 2mx - 4m}{(x + m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 1 \\ x^2 + 2mx - 4m \ge 0, \forall x \in [1; +\infty) \end{cases}$

$x^2 + 2mx - 4m \ge 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow 2m(x - 2) \ge -x^2, \forall x \in [1; +\infty)$ (1)

Do $x = 2$ thỏa bất phương trình $2m(x - 2) \ge -x^2$ với mọi m nên ta chỉ cần xét $x \ne 2$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m \le \dfrac{-x^2}{x - 2}, \forall x \in [1; 2) \\ 2m \ge \dfrac{-x^2}{x - 2}, \forall x \in (2; +\infty) \end{cases}$ (2)

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{-x^2}{x - 2}$ trên $[1; +\infty) \setminus \{2\}$ có $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x}{(x - 2)^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	1		2		4		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-8	$\searrow$	$-\infty$

$$YCBT \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ 2m \le 1 \\ 2m \ge -8 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le \frac{1}{2}.$$

Cách khác

$y = \dfrac{x^2 - 4x}{x+m}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$ và $y' = \dfrac{x^2 + 2mx - 4m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $[1;+\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m < 1 \\ x^2 + 2mx - 4m \ge 0, \forall x \in [1;+\infty) \end{cases}$

$$x^2 + 2mx - 4m \ge 0, \forall x \in [1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta \le 0 \\ \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 < x_2 \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 + 4m \le 0 \\ \begin{cases} m^2 + 4m > 0 \\ -m + \sqrt{m^2 + 4m} \le 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 \le m \le 0 \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m > 0 \\ m < -4 \end{array}\right. \\ m \ge -1 \\ m \le \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Kết hợp với đk $m > -1$ ta được $-1 < m \le \dfrac{1}{2}$.

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + m}{x-2}$.

Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

A. $m \ge -2$. **B.** $m \le -2$. **C.** $m < -2$. **D.** $m > -2$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8x + 6 - m}{(x-2)^2}$. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng xác định.

$\Leftrightarrow f'(x) \ge 0 \, (\forall x \in D) \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 6 - m \ge 0 \, (\forall x \in D) \Leftrightarrow 2(x-2)^2 \ge m + 2 \, (\forall x \in D)$.

Suy ra $m + 2 \le 0 \Leftrightarrow m \le -2$.

Câu 69: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \dfrac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$. Ta có $y'=\dfrac{2x^2-4mx+m^2-2m-1}{(x-m)^2}=\dfrac{g(x)}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $g(x)\ge 0,\forall x>1$ và $m\le 1$ (1)

Vì $\Delta_g{}'=2(m+1)^2\ge 0,\forall m$ nên (1) $\Leftrightarrow g(x)=0$ có hai nghiệm thỏa $x_1\le x_2\le 1$

Điều kiện tương đương là $\begin{cases}2g(1)=2(m^2-6m+1)\ge 0\\ \dfrac{S}{2}=m\le 1\end{cases}\Leftrightarrow m\le 3-2\sqrt{2}\approx 0,2$.

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 70: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$?

A. 11. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Đạo hàm: $y'=1+\dfrac{m-1}{(x-2)^2}=\dfrac{x^2-4x+m+3}{(x-2)^2}$.

Xét hàm số $f(x)=x^2-4x+3$ trên $[5;+\infty)$.

Đạo hàm: $f'(x)=2x-4$. Xét $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2\Rightarrow y=-1$. Ta có: $f(5)=8$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Do $(x-2)^2>0$ với mọi $x\in[5;+\infty)$ nên $y'\ge 0$, $\forall x\in[5;+\infty)$ khi và chỉ khi $f(x)\ge -m$, $\forall x\in[5;+\infty)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m\le 8\Leftrightarrow m\ge -8$.

Mà m nguyên âm nên ta có: $m\in\{-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y=x+5+\dfrac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5;+\infty)$.

Câu 71: Với giá trị nào của m thì hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

A. $m=0$. **B.** $m=-1$. **C.** $m<0$. **D.** $m\le 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$f(x)=\dfrac{2x^2+3x+m+1}{x+1}$.

$f'(x)=\dfrac{2x^2+4x+2-m}{(x+1)^2}$.

Để $f(x)$ đồng biến trên từng khoảng xác định $\Rightarrow f'(x)>0,\forall x\in D$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x+2-m>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2m\le 0 \Leftrightarrow m\le 0$.

Câu 72: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-3;-2]$. **C.** $(-\infty;0]$. **D.** $(-\infty;-2]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=\dfrac{m-(x+1)^2}{(x^2+x+m)^2}$.

ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} y'\le 0 \\ x^2+x+m\ne 0 \end{cases}, \forall x\in(-1;1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{m-(x+1)^2}{(x^2+x+m)^2}\le 0 \\ x^2+x+m\ne 0 \end{cases}, \forall x\in(-1;1)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\le (x+1)^2 \\ m\ne -x^2-x \end{cases}, \forall x\in(-1;1)$.

□ $m\le (x+1)^2, \forall x\in(-1;1) \Leftrightarrow m\le 0$ (*).

□Đặt $f(x)=-x^2-x$, $x\in(-1;1)$.

$\Rightarrow f'(x)=-2x-1 \Leftrightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{2}$		1	$+\infty$
$f'(x)$			$+$	0	$-$		
$f(x)$		0		$\frac{1}{4}$		-2	

Vậy $m\in(-\infty;-2]\cup\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$ (**).

Từ $(*)$, $(**)$ $\Rightarrow$ $m\in(-\infty;-2]$.

Câu 73: Tìm m để hàm số $y=mx-\sin x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m\geq 1$. **B.** $m=1$. **C.** $m<1$. **D.** $m\geq -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=m-\cos x$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\geq 0\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \cos x\leq m,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\geq 1$.

Câu 74: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(2m-1)x-(3m+2)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $-3\leq m\leq -\frac{1}{5}$. **B.** $-3<m<-\frac{1}{5}$. **C.** $m<-3$. **D.** $m\geq -\frac{1}{5}$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=(2m-1)+(3m+2)\sin x$

Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\leq 0,\forall x$ tức là: $(2m-1)+(3m+2)\sin x\leq 0$ (1) $,\forall x$

+) $m=-\frac{2}{3}$ thì (1) thành $-\frac{7}{3}\leq 0,\forall x$

+) $m>-\frac{2}{3}$ thì (1) thành $\sin x\leq\frac{1-2m}{3m+2}\Rightarrow\frac{1-2m}{3m+2}\geq 1\Leftrightarrow\frac{5m+1}{3m+2}\leq 0\Leftrightarrow -\frac{2}{3}<m\leq -\frac{1}{5}$

+) $m<-\frac{2}{3}$ thì (1) thành $\sin x\geq\frac{1-2m}{3m+2}\Rightarrow\frac{1-2m}{3m+2}\leq -1\Leftrightarrow\frac{m+3}{3m+2}\leq 0\Leftrightarrow -3\leq m<-\frac{2}{3}$

Kết hợp được: $-3\leq m\leq -\frac{1}{5}$

Câu 75: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=(2m+3)\sin x+(2-m)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 6.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=(2m+3)\cos x+2-m$.

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow(2m+3)\cos x+2-m\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$

Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $2m+3\neq 0$ do đó ta có hai trường hợp sau:

TH1: $2m+3>0\Leftrightarrow m>-\frac{3}{2}$ thì: $\cos x\geq\frac{m-2}{2m+3},\forall x\in\mathbb{R}$ mà $-1\leq\cos x\leq 1$ do đó: $\frac{m-2}{2m+3}\leq -1$

$\Leftrightarrow\frac{3m+1}{2m+3}\leq 0\Leftrightarrow -\frac{3}{2}<m\leq -\frac{1}{3}$, do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m=-1$.

TH2: $2m+3<0\Leftrightarrow m<-\frac{3}{2}$ thì: $\cos x\leq\frac{m-2}{2m+3},\forall x\in\mathbb{R}$ mà $-1\leq\cos x\leq 1$ do đó: $\frac{m-2}{2m+3}\geq 1$

$\Leftrightarrow\frac{-m-5}{2m+3}\geq 0\Leftrightarrow -5\leq m<-\frac{3}{2}$ do $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-5;-4;-3;-2\}$.

Vậy $m\in\{-5;-4;-3;-2;-1\}$.

Câu 76: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y=f(x)=x+m\cos x$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $|m|\leq 1$. **B.** $m>\frac{\sqrt{3}}{2}$. **C.** $|m|\geq 1$. **D.** $m<\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=1-m\sin x$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\sin x\leq 1,\forall x\in\mathbb{R}$

Trường hợp 1: $m=0$ ta có $0\leq 1,\forall x\in\mathbb{R}$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$

Trường hợp 2: $m>0$ ta có $\sin x\leq\frac{1}{m},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1}{m}\geq 1\Leftrightarrow m\leq 1$

Trường hợp 3: $m<0$ ta có $\sin x\geq\frac{1}{m},\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\frac{1}{m}\leq -1\Leftrightarrow m\geq -1$

Vậy $|m|\leq 1$

Câu 77: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\sin^3 x-3\cos^2 x-m\sin x-1$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

A. $m\leq -3$. **B.** $m>0$. **C.** $m>-3$. **D.** $m\leq 0$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $\sin x=t, x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow t\in[0;1]$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t^2-mt-4$

Ta có $f'(t)=3t^2+6t-m$

Để hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$ cần:

$f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t - m \geq 0 \quad \forall t \in [0;1] \Leftrightarrow 3t^2 + 6t \geq m \quad \forall t \in [0;1]$

Xét hàm số $g(t) = 3t^2 + 6t$

$g'(t) = 6t + 6$

$g'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -1$

Bảng biến thiên

t	0		1
$g'(t)$		$+$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	9

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy với $m \leq 0$ thì hàm số $f(t)$ đồng biến trên $[0;1]$, hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 78: Tìm m để hàm số $y = \sin^3 x + 3\sin^2 x - m\sin x - 4$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

A. $m \geq 0$. **B.** $m \leq 0$. **C.** $m < 0$. **D.** $m > 0$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \sin x, x \in (0;\frac{\pi}{2}) \Rightarrow t \in (0;1)$.

$f(t) = t^3 + 3t^2 - mt - 4, f'(t) = 3t^2 + 6t - m = g(t), g'(t) = 6t + 6, g'(t) = -1$.

$f(t)$ đồng biến trên $(0;1) \Leftrightarrow g(t) \geq 0, \forall t \in (0;1)$.

Dựa vào BBT của $g(t)$, ta có $g(0) = -m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$.

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-2018;2018]$ để hàm số $y = \dfrac{\cot^2 x - 2m\cot x + 2m^2 - 1}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$.

A. 0. **B.** 2020. **C.** 2019. **D.** 2018.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = \cot x$. Vì $x \in \left(\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right)$ nên $t \in (0;1)$.

Khi đó bài toán trở thành tìm giá trị của m để $y = \dfrac{t^2 - 2mt + 2m^2 - 1}{t - m}$ đồng biến trên $(0;1)$.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{t^2-2mt+1}{(t-m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0, \forall t\in(0;1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2-2mt+1\ge 0 \\ m\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t}\ge m \quad (1) \\ m\le 0 \;\; hoac\; m\ge 1 \quad (2) \end{cases}.$$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t}{2}+\dfrac{1}{2t}$ trên khoảng $(0;1)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2t^2}=\dfrac{t^2-1}{2t^2}$. Cho $f'(t)=0\Leftrightarrow t^2-1=0\Leftrightarrow t=\pm 1$.

Bảng biến thiên

t	0		1
$f'(t)$	||	$-$	
$f(t)$	|| $+\infty$	$\searrow$	1

).

Từ $(1)\Leftrightarrow m\le 1$ (3).

Từ (2) và $(3)\Rightarrow m\le 0$ hoặc $m=1$.

Mà m nguyên và $m\in[-2018;2018]$ nên có 2020 giá trị thỏa mãn.

Câu 80: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=x+m(\sin x+\cos x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $|m|\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $m\ge\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $m\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **D.** $|m|\le\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$y=x+m(\sin x+\cos x)=x+\sqrt{2}m\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

$$y'=1+\sqrt{2}m\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).$$

Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow 1+\sqrt{2}m\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left|\sqrt{2}m\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)\right|\le 1$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}|m|\le 1\Leftrightarrow|m|\le\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 81: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=\ln\left(x^2+1\right)-mx+1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $[-1;1]$. **B.** $B(5;\ 6;\ 2)$. **C.** $(-\infty;-1]$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=\dfrac{x}{x^2+1}-m$.

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)\Leftrightarrow y'(x)\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}\ \Leftrightarrow m\leq\dfrac{x}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}$.

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ có $f'(x)=\dfrac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}$.

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Dựa vào BBT $m\leq\dfrac{x}{x^2+1}, \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow m\leq -1$.

Câu 82: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}-mx+\ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x-m+\dfrac{1}{x-1}$.

Để hàm số $y=\dfrac{x^2}{2}-mx+\ln(x-1)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y'\geq 0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$

$\Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x-1}\geq m$ với $\forall x\in(1;+\infty)\Rightarrow m\leq\min\limits_{(1;+\infty)} f(x)$.

Xét hàm số $f(x)=x+\dfrac{1}{x-1}$ trên khoảng $(1;+\infty)$ ta có

$f(x)=x-1+\dfrac{1}{x-1}+1\geq 2\sqrt{(x-1)\dfrac{1}{(x-1)}}+1\geq 3\Rightarrow\min\limits_{(1;+\infty)} f(x)=3$. Do $m\in\mathbb{Z}^+$ nên $m\in\{1;2;3\}$.

Câu 83: Tìm m để hàm số sau đồng biến trên $\mathbb{R}$: $y=\frac{2}{3}e^{3x}-me^{x}+4x-2018$.

A. $m\ge -6$ **B.** $m\le 6$ **C.** $m\le -5$ **D.** $m\ge 6$

Lời giải

Chọn B

Đặt $t=e^{x},t>0\Rightarrow y=\frac{2}{3}t^{3}-mt+4\ln t-2018,\ t>0\Rightarrow y'=2t^{2}-m+\frac{4}{t},\ t>0$.

YCBT $\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall t>0\Leftrightarrow 2t^{2}+\frac{4}{t}\ge m,\ \forall t>0$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=2t^{2}+\frac{4}{t},\ \forall t>0\Rightarrow f'\left(t\right)=4t-\frac{4}{t^{2}}$.

$f'\left(t\right)=0\Leftrightarrow 4t-\frac{4}{t^{2}}=0\Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Theo BBT có $m\le 6$ thoả yêu cầu.

Câu 84: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m thuộc đoạn $\left[-2018;2018\right]$ để hàm số $y=f\left(x\right)=\left(x+1\right)\ln x+\left(2-m\right)x$ đồng biến trên khoảng $\left(0;e^{2}\right)$.

A. 2016. **B.** 2022. **C.** 2014. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=f'\left(x\right)=\ln x+\frac{x+1}{x}+2-m$

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'\left(x\right)=\ln x+\frac{1}{x}+3-m\ge 0\Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}+3\ge m\,;\forall x\in\left(0;e^{2}\right)$.

Xét hàm số: $g\left(x\right)=\ln x+\frac{1}{x}+3$ với $x\in\left(0;e^{2}\right)$.

Ta có: $g'\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{2}}=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên:

x	0		1		e^2
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$5+\dfrac{1}{e^2}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $g(x)\ge 4$ với mọi $x\in(0;e^2)$.

Từ đó suy ra $-2018\le m\le 4$.

Vậy có 2023 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 85: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019;2019)$ để hàm số $y=2019^{x^3-x^2-mx+1}$ nghịch biến trên $[-1;2]$

A. 2020. **B.** 2019. **C.** 2010. **D.** 2011.

Lời giải

Chọn D

$y'=(3x^2-2x-m).2019^{x^3-x^2-mx+1}.\ln 2019$

Hàm số nghịch biến trên $[-1;2]\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in[-1;2]$ $\Leftrightarrow 3x^2-2x-m\le 0\ \forall x\in[-1;2]$

$\Leftrightarrow 3x^2-2x\le m\ \forall x\in[-1;2]$

Đặt $f(x)=3x^2-2x$; $f'(x)=6x-2$.

Bảng biến thiên:

x	-1		$\frac{1}{3}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	$-\frac{1}{3}$	$\nearrow$	8

Từ bảng biến thiên suy ra $f(x)\le 8\ \forall x\in[-1;2]$.

Do đó ycbt $\Leftrightarrow$ $m\ge 8$.

Vì m nguyên thuộc khoảng $(-2019;2019)$ nên có 2011 giá trị m thỏa mãn.

Câu 86: Tập các giá trị của tham số m để hàm số $y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2$ đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ là

A. $\left[\dfrac{2}{9};+\infty\right)$. **B.** $\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$. **C.** $\left[-\dfrac{7}{3};+\infty\right)$. **D.** $\left[-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn B

$y=\ln(3x-1)-\dfrac{m}{x}+2 \Rightarrow y'=\dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}$.

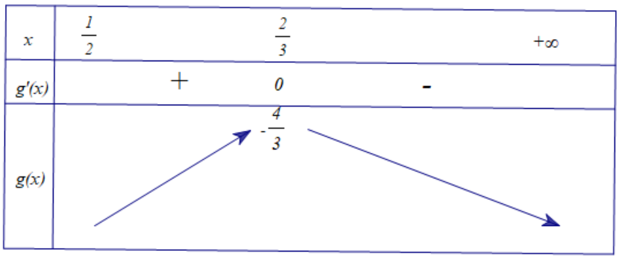
Để hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow y'\ge 0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \Leftrightarrow \dfrac{3}{3x-1}+\dfrac{m}{x^2}\ge 0,\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

$\Leftrightarrow m\ge \dfrac{3x^2}{1-3x}=g(x),\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$

Xét $g(x)=\dfrac{3x^2}{1-3x},\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right) \Rightarrow g'(x)=\dfrac{6x-9x^2}{(1-3x)^2} \Rightarrow g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=\dfrac{2}{3}$.

Bảng biến thiên.



Vậy $m\ge -\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow m\in\left[-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Câu 87: Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y=x+m\sqrt{x^2-2x+3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

A. 4. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=1+m\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $y'\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow 1+m\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\ge 0,\forall x\in(-\infty;+\infty)\ (1)$.

Nếu $x=1$ thì (1) luôn thỏa $\forall m$.

Nếu $x>1$ thì $(1)\Leftrightarrow m\ge -\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1} \Leftrightarrow m\ge -\sqrt{1+\dfrac{2}{(x-1)^2}} \Leftrightarrow m\ge -1$.

Nếu $x<1$ thì $(1)\Leftrightarrow m\le -\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1} \Leftrightarrow m\le \sqrt{1+\dfrac{2}{(x-1)^2}} \Leftrightarrow m\le 1$.

Vậy $-1\le m\le 1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-1;0;1\}$.

Do đó có 3 giá trị nguyên m cần tìm.

Câu 88: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y=\sqrt{x^2+1}-mx-1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

A. $[1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1]$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $[-1;1]$.

Lời giải

Chọn B

$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-m$.

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\ge m,\forall x\in\mathbb{R}$. (1).

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, ta có $f'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^3}>0,\forall\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-1,\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$ nên $-1<f(x)<1,\forall x\in\mathbb{R}$.

Từ đó, (1) $\Leftrightarrow m\le -1$.

Câu 89: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x)=x^3-mx^2+12x+2m$. Ta có $f'(x)=3x^2-2mx+12$ và $f(1)=13+m$.

Để hàm số $y=\left|x^3-mx^2+12x+2m\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì có hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1)\le 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3-mx^2+12x+2m\right)=+\infty$.

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1;+\infty)$ và $f(1)\ge 0$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2-2mx+12\ge 0,\forall x>1\\13+m\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le\dfrac{3}{2}x+\dfrac{6}{x},\forall x>1\\m\ge -13\qquad (*)\end{cases}.$$

Xét $g(x)=\frac{3}{2}x+\frac{6}{x}$ trên khoảng $(1;+\infty)$: $g'(x)=\frac{3}{2}-\frac{6}{x^2}$; $g'(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}-\frac{6}{x^2}=0\Rightarrow x=2$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$\frac{15}{2}$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra $m\le\frac{3}{2}x+\frac{6}{x},\forall x>1 \Leftrightarrow m\le 6$.

Kết hợp $(*)$ suy ra $-13\le m\le 6$. Vì m nguyên nên $m\in\{-13;-12;-11;...;5;6\}$. Vậy có 20 giá trị nguyên của m.

Câu 90: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8;8)$ sao cho hàm số $y=\left|-2x^3+3mx-2\right|$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$?

A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

$f(x)=-2x^3+3mx-2$

$f'(x)=-6x^2+3m$

Nếu $m\le 0$: $f'(x)\le 0,\forall x\Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(1;+\infty)\Leftrightarrow f(1)\le 0\Leftrightarrow m\le\frac{4}{3}\Rightarrow m\le 0.$

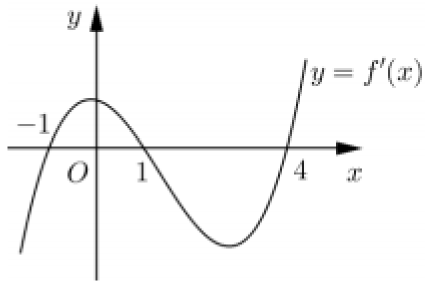
Nếu $m>0$: $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{m}{2}}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{m}{2}}$		$\sqrt{\frac{m}{2}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$	$\nearrow$	$2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số $y=|f(x)|$ đồng biến trên $(1;+\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}}>1 \\ f\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\right)=0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}}=1 \\ f\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\right)\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}}<1 \\ f(1)\le 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}}>1 \\ m=\sqrt[3]{2} \quad (L) \end{cases} \\ \begin{cases} m=2 \quad (L) \\ 2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2\le 0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<2 \\ m\le \frac{4}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow 0<m\le \frac{4}{3}.$

$m\in\mathbb{Z},\ m\in(-8;8)\Rightarrow m\in\{-7;-6;...;-1;0;1\}$.

Câu 91: Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(2;+\infty)$ **B.** $(-2;1)$ **C.** $(-\infty;-2)$ **D.** $(1;3)$

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

Ta thấy $f'(x)<0$ với $\left[\begin{array}{l} x\in(1;4) \\ x<-1 \end{array}\right.$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $(1;4)$ và $(-\infty;-1)$ suy ra $g(x)=f(-x)$ đồng biến trên $(-4;-1)$ và $(1;+\infty)$. Khi đó $f(2-x)$ đồng biến biến trên khoảng $(-2;1)$ và $(3;+\infty)$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x<-1 \\ 1<x<4 \end{array}\right.$.

Ta có $\left(f(2-x)\right)'=(2-x)'.f'(2-x)=-f'(2-x)$.

Để hàm số $y=f(2-x)$ đồng biến thì $\left(f(2-x)\right)'>0\Leftrightarrow f'(2-x)<0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} 2-x<-1 \\ 1<2-x<4 \end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x>3 \\ -2<x<1 \end{array}\right.$.

Câu 92: Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'\left(x\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(5-2x\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(3;4\right)$. **B.** $\left(1;3\right)$. **C.** $\left(-\infty;-3\right)$. **D.** $\left(4;5\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=f'\left(5-2x\right)=-2f'\left(5-2x\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow -2f'\left(5-2x\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x=-3\\5-2x=-1\\5-2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=3\\x=2\end{array}\right..$$

$f'\left(5-2x\right)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x<-3\\-1<5-2x<1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\2<x<3\end{array}\right.$; $f'\left(5-2x\right)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}5-2x>1\\-3<5-2x<-1\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<2\\3<x<4\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên hàm số $y=f\left(5-2x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(4;5\right)$.

Câu 93: Cho hàm số $f\left(x\right)$, bảng xét dấu của $f'\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=f\left(3-2x\right)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(-2;1\right)$. **B.** $\left(2;4\right)$. **C.** $\left(1;2\right)$. **D.** $\left(4;+\infty\right)$.

Lời giải

Chọn A

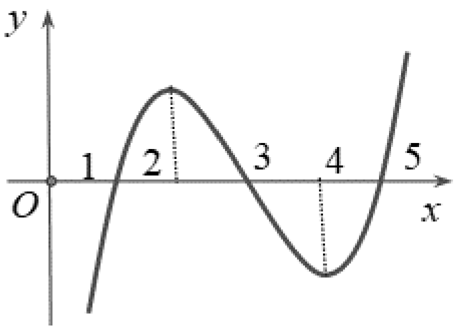
$y'=-2.f'\left(3-2x\right)$.

Hàm số nghịch biến khi $y' \le 0 \Leftrightarrow -2.f'(3-2x) \le 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3 \le 3-2x \le -1 \\ 3-2x \ge 1 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \le x \le 3 \\ x \le 1 \end{array}\right.$.

Vậy chọn đáp án **B.**

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ biết hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x+1)$. Kết luận nào sau đây đúng?



A. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;4)$.

B. Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

D. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(4;6)$.

Lời giải

Chọn B

$g(x) = f(x+1)$.

Ta có: $g'(x) = f'(x+1)$

Hàm số $g(x)$ đồng biến $\Leftrightarrow g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1 > 5 \\ 1 < x+1 < 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4 \\ 0 < x < 2 \end{array}\right.$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Leftrightarrow g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3 < x+1 < 5 \\ x+1 < 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 < x < 4 \\ x < 0 \end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$; $(4;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;4)$; $(-\infty;0)$.

Câu 95: Cho hàm số $f'(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số $y = f(x^2+2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-2;1)$. **B.** $(-4;-3)$. **C.** $(0;1)$. **D.** $(-2;-1)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: Đặt: $y = g(x) = f\left(x^2+2x\right)$; $g'(x) = \left[f(x^2+2x)\right]' = \left(2x+2\right).f'(x^2+2x)$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(2x+2\right).f'(x^2+2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+2=0 \\ f'(x^2+2x)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x^2+2x=-2(VN) \\ x^2+2x=1 \\ x^2+2x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1-\sqrt{2} \\ x=-1+\sqrt{2} \\ x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

(Trong đó: $x=-1-\sqrt{2}; x=-1+\sqrt{2}$ là các nghiệm bội chẵn của PT: $x^2+2x=1$)

+ Ta có bảng biến thiên

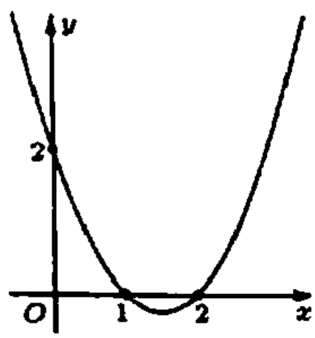
x	$-\infty$		-3		$-1-\sqrt{2}$		-1		$-1+\sqrt{2}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow$			$\searrow$				$\nearrow$			$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra hàm số $y = f\left(x^2+2x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(-2;-1\right)$.

Chú ý: Cách xét dấu $g'(x)$:

Chọn giá trị $x=0 \in \left(-1;-1+\sqrt{2}\right) \Rightarrow x^2+2x=0 \Rightarrow g'(0)=f'(0)>0$ (dựa theo bảng xét dấu của hàm $f'(x)$). Suy ra $g'(x)>0\ \forall x \in \left(-1;-1+\sqrt{2}\right)$, sử dụng quy tắc xét dấu đa thức " lẻ đổi, chẵn không" suy ra dấu của $g'(x)$ trên các khoảng còn lại

Câu 96: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x-x^2\right)$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng dưới đây?



A. $\left(-\dfrac{3}{2};+\infty\right)$.   **B.** $\left(-\infty;\dfrac{3}{2}\right)$.   **C.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.   **D.** $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

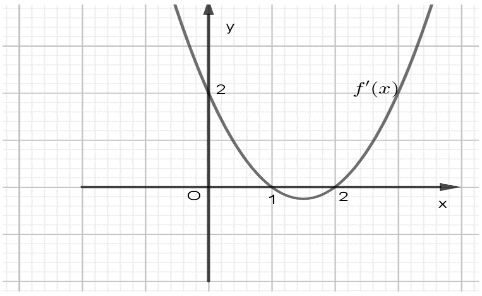
Chọn C

Ta có: $g'(x)=(1-2x)f'(x-x^2)$.

Hàm số $y=g(x)$ nghịch biến trên $(a;b)\Leftrightarrow g'(x)\le 0\ \forall x\in(a;b)$ và bằng 0 tại hữu hạn điểm.

Ta có $g'(-1)=3f'(-2)>0\Rightarrow$ Loại đáp án A, B và D

Câu 97: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y=f(2-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-\infty;0)$.   **B.** $(0;1)$.   **C.** $(1;2)$.   **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

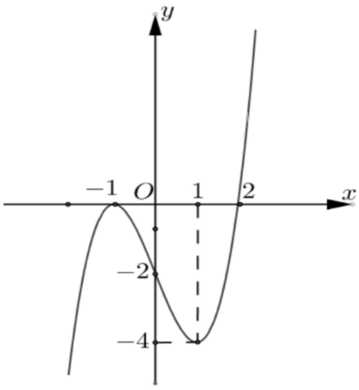
Chọn B

Hàm số $y=f(2-x^2)$ có $y'=-2x.f'(2-x^2)$

$$y'=-2x.f'(2-x^2)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\1<2-x^2<2\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}2-x^2<1\\2-x^2>2\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>0\\-1<x<1\end{cases}\\ \begin{cases}x<0\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\x>1\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x<-1\end{array}\right.$$

Do đó hàm số đồng biến trên $(0;1)$.

Câu 98: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ. Xét hàm số $g(x)=f(x^2-2)$. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?



A. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$. **B.** Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.

C. Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-1;0)$. **D.** Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x)=\left(x^2-2\right)'.f'\left(x^2-2\right)=2x.f'\left(x^2-2\right)$.

Hàm số nghịch biến khi $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow x.f'\left(x^2-2\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-2\right)\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-2\right)\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

Từ đồ thị hình của hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ, ta thấy

$$f'(x)\le 0 \Leftrightarrow x\le 2 \text{ và } f'(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2.$$

+ Với $\begin{cases}x\le 0\\ f'\left(x^2-2\right)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ x^2-2\ge 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ x^2\ge 4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ x\le -2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow x\le -2$.

+ Với $\begin{cases}x\ge 0\\ f'\left(x^2-2\right)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2-2\le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2\le 4\end{cases} \Leftrightarrow 0\le x\le 2$.

Như vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$, $(0;2)$; suy ra hàm số đồng biến trên $(-2;0)$ và $(2;+\infty)$.

Do $(-1;0)\subset(-2;0)$ nên hàm số đồng biến trên $(-1;0)$. Vậy C sai.

Câu 99: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-5		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $g(x)=f\left(3-2^x\right)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây

A. $(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-5)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(2;7)$.

Lời giải

Chọn C

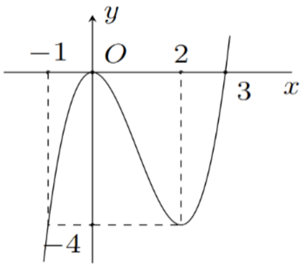
Ta có $g'(x) = -2^x \ln 2.f'(3-2^x)$.

Để $g(x) = f(3-2^x)$ đồng biến thì

$g'(x) = -2^x \ln 2.f'(3-2^x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-2^x) \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq 3-2^x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(1;2)$.

Câu 100: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(2+e^x)$ nghịch biến trên khoảng



A. $(-1;\ 3)$. **B.** $(-2;\ 1)$. **C.** $(-\infty;\ 0)$. **D.** $(0;\ +\infty)$.

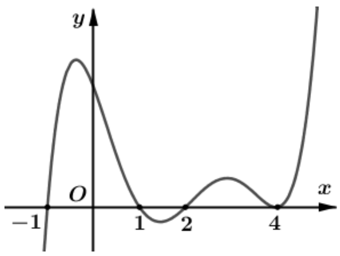
Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = e^x f'(2+e^x)$. Hàm số $y = f(2+e^x)$ nghịch biến khi và chỉ khi

$y' \leq 0 \Leftrightarrow e^x f'(2+e^x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(2+e^x) \leq 0 \Leftrightarrow 2+e^x \leq 3 \Leftrightarrow e^x \leq 1 \Leftrightarrow x \leq 0.$

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào đồ thị, suy ra $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1 \\ 1 < x < 2 \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{f(1-2x)} f'(1-2x).(-2).\ln\frac{1}{2}$.

Xét $g'(x)<0 \Leftrightarrow f'(1-2x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-2x<-1\\1<1-2x<2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\-\frac{1}{2}<x<0\end{array}\right.$.

Vậy $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $\left(-\frac{1}{2};0\right)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 102: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;0)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3\left[f'(x+2)-\left(x^2-3\right)\right]$

Với $x\in(-1;0)\Rightarrow x+2\in(1;2)\Rightarrow f'(x+2)>0$, lại có $x^2-3<0\Rightarrow y'>0;\forall x\in(-1;0)$

Vậy hàm số $y=3f(x+2)-x^3+3x$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Chú ý:

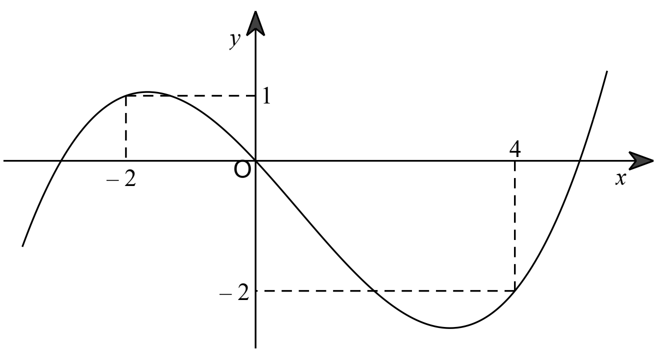
+) Ta xét $x\in(1;2)\subset(1;+\infty)\Rightarrow x+2\in(3;4)\Rightarrow f'(x+2)<0;x^2-3>0$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ nên loại hai phương án A,D.

+) Tương tự ta xét
$x\in(-\infty;-2)\Rightarrow x+2\in(-\infty;0)\Rightarrow f'(x+2)<0;x^2-3>0\Rightarrow y'<0;\forall x\in(-\infty;-2)$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ nên loại hai phương án B.

Câu 103: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **C.** $(-2;-1)$. **D.** $(2;3)$.

Lời giải

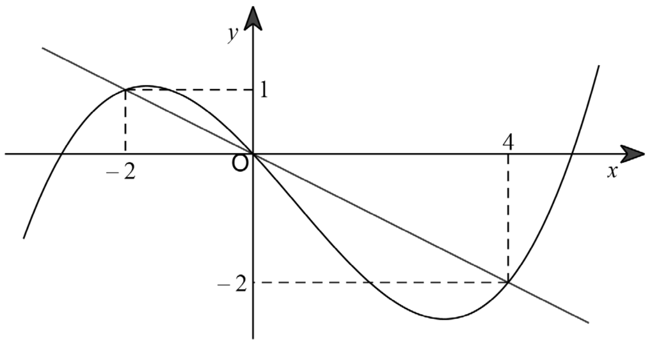
Chọn A

Ta có : $g(x)=f(1-2x)+x^2-x \Rightarrow g'(x)=-2f'(1-2x)+2x-1$

Đặt $t=1-2x \Rightarrow g'(x)=-2f'(t)-t$

$g'(x)=0 \Rightarrow f'(t)=-\frac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y=-\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



Hàm số $g(x)$ nghịch biến $\Rightarrow g'(x)\le 0 \Rightarrow f'(t)\ge -\frac{t}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le t\le 0\\ t\ge 4\end{array}\right.$

Như vậy $f'(1-2x)\ge \frac{1-2x}{-2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}-2\le 1-2x\le 0\\ 4\le 1-2x\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\le x\le \frac{3}{2}\\ x\le -\frac{3}{2}\end{array}\right.$.

Vậy hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1;\frac{3}{2}\right)\subset\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x)=f(1-2x)+x^2-x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1;\frac{3}{2}\right)$

Câu 104: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	0	−	

Hàm số $y=f(x-1)+x^3-12x+2019$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(1;2)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(3;4)$.

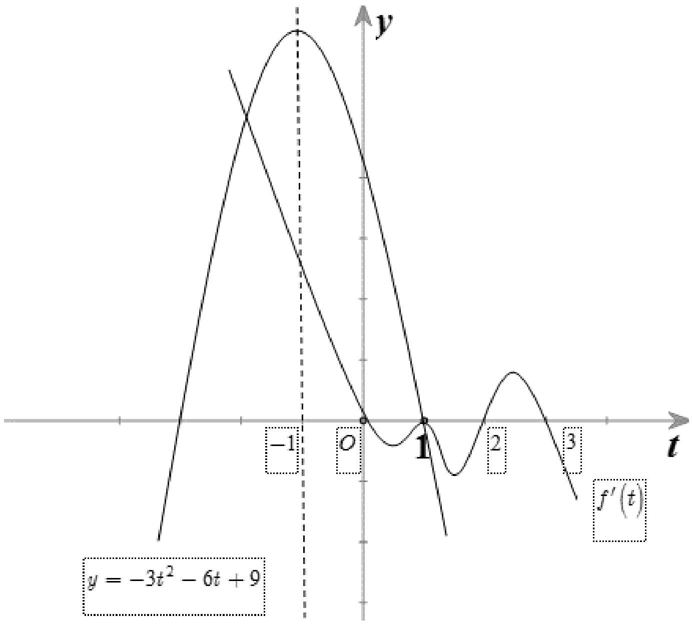
Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = f'(x-1)+3x^2-12 = f'(t)+3t^2+6t-9 = f'(t)-\left(-3t^2-6t+9\right)$, với $t = x-1$

Nghiệm của phương trình $y' = 0$ là hoành độ giao điểm của các đồ thị hàm số $y = f'(t); y = -3t^2-6t+9$.

Vẽ đồ thị của các hàm số $y = f'(t); y = -3t^2-6t+9$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ sau:

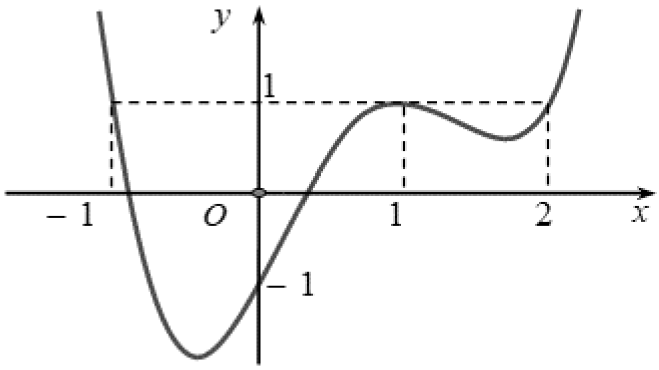


Dựa vào đồ thị trên, ta có BXD của hàm số $y' = f'(t)-\left(-3t^2-6t+9\right)$ như sau: $\left(t_0 < -1\right)$

t	$-\infty$		t_0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $t \in \left(t_0;1\right)$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $x \in (1;2) \subset \left(t_0+1;1\right)$.

Câu 105: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(2\,;3)$. **B.** $(0\,;1)$. **C.** $(-1\,;0)$. **D.** $(1\,;2)$.

Lời giải

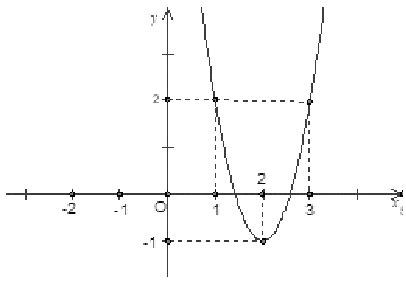
Chọn C

Ta có $g'(x)=f'(x-1)-1$.

$g'(x)\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-1)-1\ge 0 \Leftrightarrow f'(x-1)\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1\le -1 \\ x-1\ge 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 0 \\ x\ge 3 \end{array}\right.$.

Từ đó suy ra hàm số $g(x)=f(x-1)+\dfrac{2019-2018x}{2018}$ đồng biến trên khoảng $(-1\,;0)$.

Câu 106: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng nào?

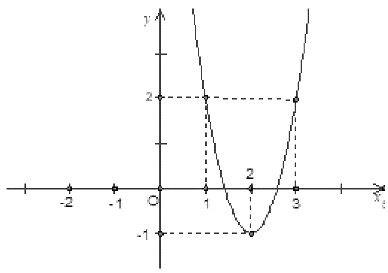


A. $(-\infty;3)$, $(5;+\infty)$. **B.** $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(3;5)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị (C) như sau:



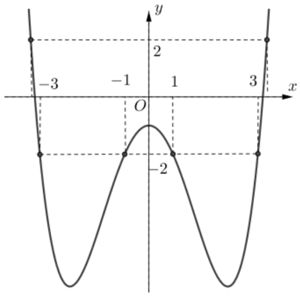
Dựa vào đồ thị (C) ta có:

$f'(x-2)+2>2, \forall x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty) \Leftrightarrow f'(x-2)>0, \forall x\in(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$.

Đặt $x^* = x - 2$ suy ra: $f'(x^*) > 0, \forall x^* \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$, $(1;+\infty)$.

Câu 107: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x+2) - 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

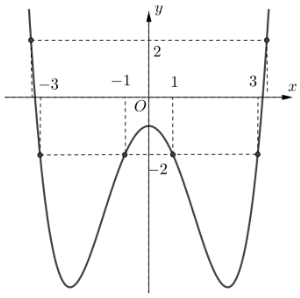


A. $(-3;-1)$, $(1;3)$. **B.** $(-1;1)$, $(3;5)$. **C.** $(-\infty;-2)$, $(0;2)$. **D.** $(-5;-3)$, $(-1;1)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f'(x+2) - 2$ có đồ thị (C) như sau:



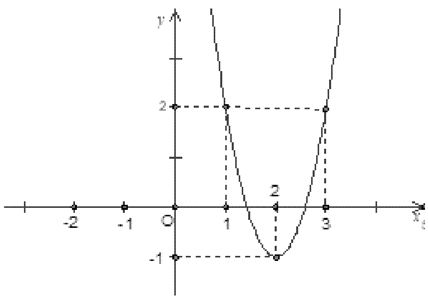
Dựa vào đồ thị (C) ta có:

$f'(x+2) - 2 < -2, \forall x \in (-3;-1) \cup (1;3) \Leftrightarrow f'(x+2) < 0, \forall x \in (-3;-1) \cup (1;3)$.

Đặt $x^* = x + 2$ suy ra: $f'(x^*) < 0, \forall x^* \in (-1;1) \cup (3;5)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$, $(3;5)$.

Câu 108: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Biết rằng hàm số $y = f'(x-2) + 2$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào?

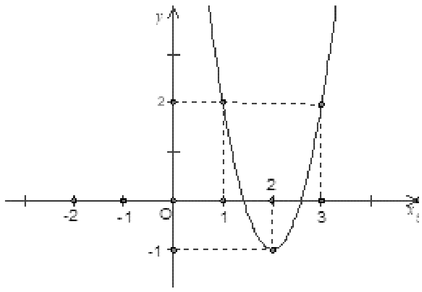


A. $(-\infty;2)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $\left(\frac{3}{2};\frac{5}{2}\right)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y=f'(x-2)+2$ có đồ thị (C) như sau:



Dựa vào đồ thị (C) ta có: $f'(x-2)+2<2, \forall x\in(1;3) \Leftrightarrow f'(x-2)<0, \forall x\in(1;3)$.

Đặt $x^*=x-2$ thì $f'(x^*)<0, \forall x^*\in(-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Cách khác:

Tịnh tiến sang trái hai đơn vị và xuống dưới 2 đơn vị thì từ đồ thị (C) sẽ thành đồ thị của hàm $y=f'(x)$. Khi đó: $f'(x)<0, \forall x\in(-1;1)$.

Vậy: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

PHẦN 2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

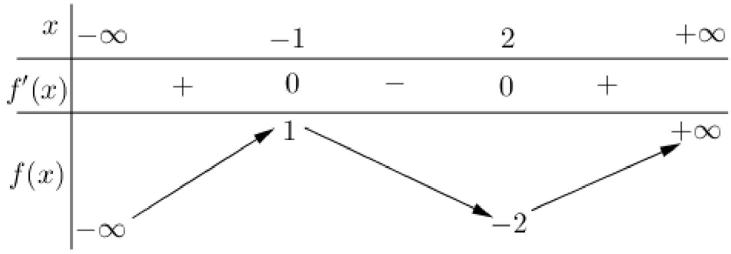
A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** -4.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -4.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số đã cho đạt cực đại tại

A. $x=-2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

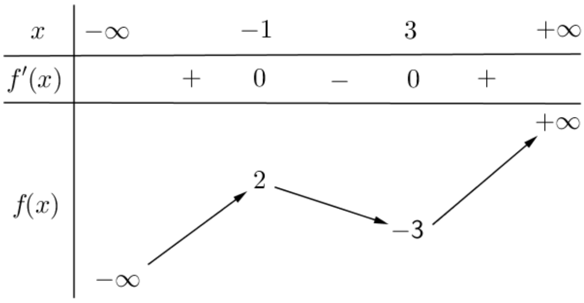
Lời giải

Chọn D

Hàm số đạt cực đại tại điểm mà đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm.

Từ bảng biến thiên hàm số đạt cực đại tại $x=-1$.

Câu 3: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

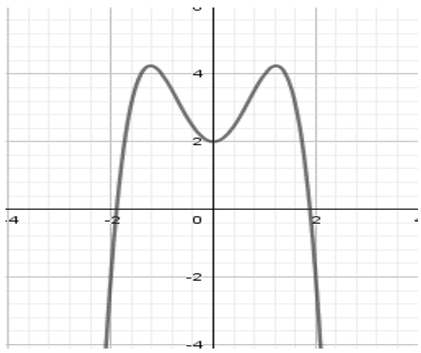
A. 3. **B.** -3. **C.** -1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2.

Câu 4: Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



A. 3 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

A. $y_{CĐ} = 2$ và $y_{CT} = 0$ **B.** $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = 0$

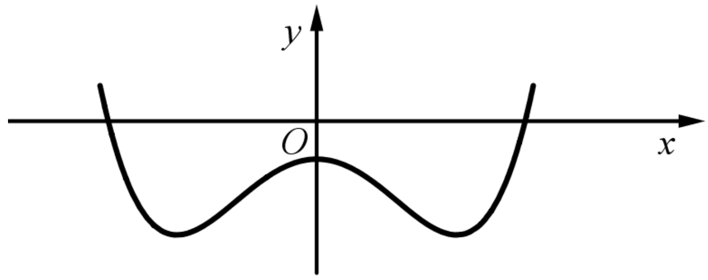
C. $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = -2$ **D.** $y_{CĐ} = -2$ và $y_{CT} = 2$

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có $y_{CĐ} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ (a, b, $c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2

Lời giải

Chọn A

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại

A. $x = -2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn B

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = 2$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. $x = 3$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Chọn D

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Từ bảng biến thiên ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi x qua nghiệm -1 và nghiệm 1; không đổi dấu khi x qua nghiệm 0 nên hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(-1)=0$,

$f'(1)$ không xác định nhưng do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $f(1)$

và $f'(x)$ đổi dấu từ "$+$" sang "$-$" khi đi qua các điểm $x=-1$, $x=1$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại 2 điểm này.

Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 2.

Câu 12: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$+$	

Số điểm cực tiểu của hàm số là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua các điểm $x=-1; x=1$ nên hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f'(x)$:

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu suy ra hàm số có đúng 1 điểm cực đại.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in R$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn B

Phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x+2)^3 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

Do $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt và $f'(x)$ đổi dấu qua ba nghiệm này nên hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$+$	
y		↘		↗		↗	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có 1 điểm cực trị $x = 0$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$f'(x)=x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4 \Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$		0		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$

Câu 17: Hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)(x-2)...(x-2019)$, $\forall x\in R$. Hàm số $y=f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

A. 1008 **B.** 1010 **C.** 1009 **D.** 1011

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=(x-1)(x-2)...(x-2019)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ ...... \\ x=2019 \end{array}\right.$

$f'(x)=0$ có 2019 nghiệm bội lẻ và hệ số a dương nên có 1010 cực tiểu

Câu 18: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=x^2(x+1)(x-2)^3$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2=0 \\ x-1=0 \\ (x-2)^3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 1 điểm cực đại.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-1\right)\left(x-2\right)^2\left(x-3\right)^3\left(x-4\right)^4$, $\forall x\in\mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\\x=4\end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	−	0	+	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↘		↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x^2-3\right)\left(x^4-9\right)$. Số điểm cực trị của hàm số $y=f\left(x\right)$ là

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$$f'\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(x^2-3\right)^2\left(x^2+3\right)=\left(x-2\right)\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x+\sqrt{3}\right)^2\left(x^2+3\right)$$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(x-2\right)\left(x+\sqrt{3}\right)^2\left(x-\sqrt{3}\right)^2\left(x^2+3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\sqrt{3}\\x=\sqrt{3}\\x=2\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		$\sqrt{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	−	0	−	0	+	
$f(x)$		↘	$f(-\sqrt{3})$	↘	$f(\sqrt{3})$	↘	$f(2)$	↗	

Từ bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$, ta thấy hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng 1 điểm cực trị.

Câu 21: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)=x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x)=x^2(x-2)^2(x+1)^5$. Ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x=-1$ nên hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị là $x=-1$.

Vậy tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng -1.

Câu 22: Tìm giá trị cực đại $y_{CĐ}$ của hàm số $y=x^3-3x+2$.

A. $y_{CĐ}=-1$ **B.** $y_{CĐ}=4$ **C.** $y_{CĐ}=1$ **D.** $y_{CĐ}=0$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-3 \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \ \Rightarrow y(1)=0 \\ x=-1 \ \Rightarrow y(-1)=4 \end{array}\right.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3-3x+2)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x^2}+\frac{2}{x^3}\right)=+\infty$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số bằng 4

Câu 23: Hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 1 **B.** 3 **C.** 0 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Có $y'=\dfrac{-1}{(x+1)^2}>0, \forall x\neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 24: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

Chọn D

□ ***Cách 1.***

Ta có: $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

□ ***Cách 2.***

Ta có $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

$y'' = \dfrac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1)=\dfrac{1}{2}>0$; $y''(-3)=-\dfrac{1}{2}<0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Câu 25: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y'=3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Khi đó: $x_{CD}=1 \Rightarrow y_{CD}=4 \Rightarrow x_{CD}+y_{CD}=5.$

Câu 26: Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y=-x^3+3x-4$.

A. $y_{CT}=-6$ **B.** $y_{CT}=-1$ **C.** $y_{CT}=-2$ **D.** $y_{CT}=1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$; $y'=-3x^2+3$; $y'=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$

Vậy $y_{CD} = y(1) = -2$; $y_{CT} = y(-1) = -6$.

Câu 27: Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 2x;\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \dfrac{3}{4} \end{array}\right..$$

Suy ra đồ thị có hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị có tung độ là số dương.

Câu 28: Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ **B.** $y = \dfrac{2x - 2}{x + 1}$ **C.** $y = x^2 - 2x + 1$ **D.** $y = -x^3 + x + 1$

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = \dfrac{2x - 2}{x + 1}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y' = \dfrac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Do đó hàm số $y = \dfrac{2x - 2}{x + 1}$ không có cực trị.

Câu 29: Hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{5}{2}x^2 - 3x + 2019m$ $(m \in \mathbb{R})$ đạt cực tiểu tại điểm:

A. $x = 3$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = x^3 - x^2 - 5x - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y		$\searrow$		$\searrow$	$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 30: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ là:

A. $M(-1;-1)$. **B.** $N(0;1)$. **C.** $P(2;-1)$. **D.** $Q(1;3)$.

Lời giải

Chọn D

$y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

$y'' = -6x$; $y''(1) = -6 < 0$; $y''(-1) = 6 > 0$

Do đó hàm số đạt cực đại tại $x = 1; y(1) = 3$. Vậy chọn đáp án $Q(1;3)$.

Câu 31: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ là

A. $(-1;-8)$ **B.** $(0;-5)$ **C.** $\left(\frac{5}{3};\frac{40}{27}\right)$ **D.** $(1;0)$

Lời giải

Chọn A

$y' = -3x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \frac{5}{3} \end{array}\right.$.

$y'' = -6x + 2$.

Ta có: $y''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$; $y_{CT} = y(-1) = -8$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1;-8)$.

Câu 32: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = x^2 + 2x - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$.

$y'' = 2x + 2$; $y''(-3) = -4 < 0$; $y''(1) = 4 > 0$.

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 33: Tìm giá trị cực tiểu của hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.

A. -6. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -3.

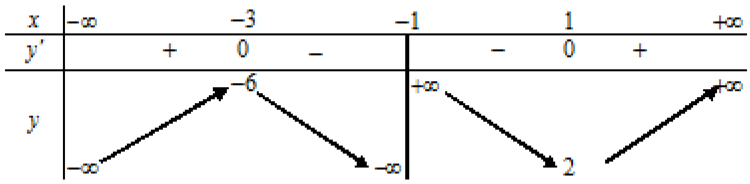
Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$y' = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -3 \end{array}\right.$



Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Vậy giá trị cực tiểu bằng 2.

Câu 34: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x - 1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$. **B.** Hàm số có hai cực trị $y_{CĐ} < y_{CT}$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$. **D.** Giá trị cực tiểu bằng -2.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$. Cho $y' = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y		$\nearrow$	-2	$\searrow$	$\|\|$	$\searrow$	6	$\nearrow$	

.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và đạt cực tiểu tại $x=3$, giá trị cực tiểu bằng 6 và giá trị cực đại bằng -2.

Câu 35: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-4x+7}{x-1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng 2.
B. Cực tiểu của hàm số bằng -1.
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6.
D. Cực tiểu của hàm số bằng 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có.

$$y'=\frac{(2x-4)(x-1)-\left(x^2-4x+7\right)}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}..$$

$$y'=0\Rightarrow x^2-2x-3=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1(y=-6) \\ x=3(y=2). \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu đạo hàm:

x	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$

.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và $y_{CT}=2$..

Câu 36: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2+8}$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. Giá trị cực đại của hàm số là 2.
B. Điểm cực tiểu của hàm số là $x=4$.
C. Giá trị cực tiểu của hàm số là -4.
D. Điểm cực đại của hàm số $x=2$.

Lời giải

Chọn D

Có $y'(x)=\dfrac{-x^2-2x+8}{\left(x^2+8\right)^2}$, $y'(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Dễ thấy $y'(x)$ cùng dấu với $-x^2-2x+8$.

Khi đó $x=2$ là điểm cực đại của hàm số.

Câu 37: Cho hàm số $y = x\ln x$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = e$. **B.** Hàm đạt cực đại tại $x = e$.

C. Hàm đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{e}$. **D.** Hàm đạt cực đại tại $x = \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = (0;+\infty)$.

$y' = \ln x + x.\frac{1}{x} = \ln x + 1$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$.

Bảng biến thiên.

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
y'	‖	$-$	0	$+$	
y	‖	↘		↗	

.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{e}$.

Câu 38: Tìm hoành độ các điểm cực đại của hàm số $y = e^{x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 1}$.

A. $x_{CĐ} = 1$. **B.** Không có cực đại. **C.** $x_{CĐ} = \frac{2}{3}$. **D.** $x_{CĐ} = 0$.

Lời giải

Chọn C

□Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

□Đạo hàm: $y' = (3x^2 - 5x + 2)e^{x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x - 1}$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{2}{3} \end{array}\right.$.

□Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$2/3$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↗		↘		↗	

.

□Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{2}{3}$.

Câu 39: Giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^2 \ln x$ là?

A. $y_{CT} = -\frac{1}{e}$. **B.** $y_{CT} = -\frac{1}{2e}$. **C.** $y_{CT} = \frac{1}{2e}$. **D.** $y_{CT} = \frac{1}{e}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = (0; +\infty)$; $y' = x(2\ln x + 1)$, $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

Xét bảng sau:

x	0		$1/\sqrt{e}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$-\frac{1}{2e}$	$\nearrow$	

Từ bảng trên ta được $y_{CT} = -\frac{1}{2e}$.

Câu 40: Cho hàm số $y = x^2.e^{-x}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số chỉ có điểm cực tiểu, không có điểm cực đại.
B. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 2$.
D. Hàm số không có điểm cực trị.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $\mathbb{R}$.

$$y' = xe^{-x}(2 - x);\ y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{e^2}$	$\searrow$	

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ và đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x}{x - 1}$. Tọa độ điểm cực đại của đồ thị hàm số là.

A. $(-3; 0)$. **B.** $(2; 10)$. **C.** $(3; 9)$. **D.** $(-1; 1)$.

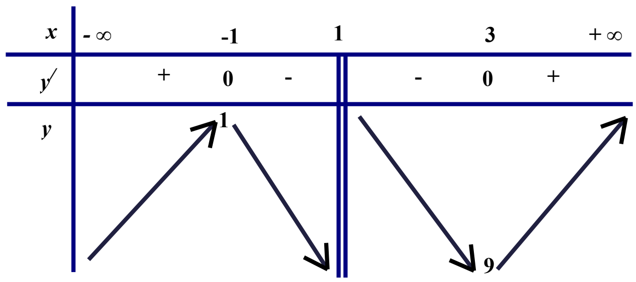
Lời giải

Chọn D

☑ Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

☑ Đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$; $y'=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

☑ Bảng biến thiên:



Câu 42: Biết rằng hàm số $y=(x+a)^3+(x+b)^3-x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab\le 0$. **B.** $ab<0$. **C.** $ab>0$. **D.** $ab\ge 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y=x^3+3(a+b)x^2+3(a^2+b^2)x+a^3+b^3$.

$y'=3x^2+6(a+b)x+3(a^2+b^2)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow\Delta'=18ab>0$ $\Leftrightarrow ab>0$.

Câu 43: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-mx^2+(m+2)x+1$ có hai cực trị là:

A. $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$ **C.** $(-1;2)$ **D.** $[-1;2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2mx+m+2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$y'>0\Leftrightarrow\Delta'>0\Leftrightarrow m^2-m-2>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>2\end{array}\right.$

Câu 44: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+(m+1)x+2$ có hai điểm cực trị.

A. $m>2$. **B.** $m<-4$. **C.** $m\le 2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3x^2-6x+m+1$. Hàm số có hai điểm cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Delta'>0 \Leftrightarrow 9-3(m+1)>0 \Leftrightarrow m<2$.

Câu 45: Để hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6(m-2)x$ đạt cực đại và cực tiểu thì:

A. Không có giá trị nào của m. **B.** $\forall m$.
C. $m=3$. **D.** $m\neq 3$.

Lời giải

Chọn D

$y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta=(m-3)^2>0 \Leftrightarrow m\neq 3$.

Câu 46: Hàm số $y=x^3-3mx^2+6mx+m$ có hai điểm cực trị khi giá trị của m là:

A. $0<m<2$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>2 \end{array}\right.$. **C.** $0<m<8$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>8 \end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-6mx+6m;\ y'=0 \Leftrightarrow x^2-2mx+2m=0$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta>0 \Leftrightarrow m^2-2m>0$.

Câu 47: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+2mx+m$ có cực đại và cực tiểu?

A. $m<\frac{3}{2}$. **B.** $m<-\frac{3}{2}$. **C.** $m\leq\frac{3}{2}$. **D.** $m>\frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn A

+ TXĐ: $D=\mathbb{R}$

+ $y'=3x^2-6x+2m$

+ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta=36-24m>0 \Leftrightarrow m<\frac{3}{2}$.

Câu 48: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(2m^2-3m-3\right)x+2016$ có 2 điểm cực trị?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y=\frac{1}{3}x^3+mx^2+\left(2m^2-3m-3\right)x+2016$.

$\Rightarrow y'=x^2+2mx+2m^2-3m-3,\ \Delta'=-m^2+3m+3$.

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'=-m^2+3m+3>0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{21}}{2}<m<\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

Vậy có tất cả 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán là $m\in S=\{0;1;2;3\}$.

Câu 49: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y=mx^3-2mx^2+(m-2)x+1$ không có cực trị

A. $m\in(-\infty;6)\cup(0;+\infty)$. **B.** $m\in(-6;0)$.

C. $m\in[-6;0)$. **D.** $m\in[-6;0]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y'=3mx^2-4mx+(m-2)$.
+ Nếu $m=0$.
$\Rightarrow y'=-2<0\ (\forall x\in\mathbb{R})$. Nên hàm số không có cực trị.
Do đó $m=0$ (chọn) (1).
+ Nếu $m\neq 0$.
Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'$không đổi dấu
$\Leftrightarrow \Delta'\le 0 \Leftrightarrow 4m^2-3m(m-2)\le 0 \Leftrightarrow m^2+6m\le 0 \Rightarrow -6\le m<0$ (do $m\neq 0$) (2).
Kết hợp (1) và (2) ta được $-6\le m\le 0$.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số

$y=x^3-3mx^2+\left(2m+1\right)x-m+5$ có cực đại và cực tiểu.

A. $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$. **B.** $m\in\left(-\frac{1}{3};1\right)$.

C. $m\in\left[-\frac{1}{3};1\right]$. **D.** $m\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y=x^3-3mx^2+\left(2m+1\right)x-m+5 \Rightarrow y'=3x^2-6mx+2m+1$, $\Delta'=9m^2-6m-3$.

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow 9m^2-6m-3>0 \Leftrightarrow m\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

Câu 51: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = mx^3 - (m+1)x^2 + \left(2m - \frac{2}{3}\right)x + 1$ có cực trị.

A. $\begin{cases} -\frac{1}{5} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$. **B.** $-\frac{1}{5} < m < 1$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{5} \\ m > 1 \end{array}\right.$. **D.** $-\frac{1}{5} \leq m \leq 1$.

Lời giải

Chọn B

* Nếu $m = 0 \Rightarrow y = -x^2 - \frac{2}{3}x + 1$ là hàm số bậc hai nên luôn có cực trị.

* Nếu $m \neq 0$, ta có $y' = 3mx^2 - 2(m+1)x + 2m - \frac{2}{3}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3mx^2 - 2(m+1)x + 2m - \frac{2}{3} = 0$; $\Delta' = (m+1)^2 - 3m\left(2m - \frac{2}{3}\right) = -5m^2 + 4m + 1$.

Do đó, hàm số có cực trị khi và chỉ khi $-5m^2 + 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} < m < 1$. Suy ra: $\begin{cases} -\frac{1}{5} < m < 1 \\ m \neq 0 \end{cases}$.

* Kết hợp với trường hợp $m = 0$ suy ra $-\frac{1}{5} < m < 1$ là các giá trị cần tìm.

Câu 52: Tìm tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 2018$ không có cực trị.

A. $-1 \leq m \leq 2$. **B.** $m \leq -1$.

C. $m \geq 2$. **D.** $m \leq -1$ hoặc $m \geq 2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m + 2$

Để hàm số đã cho không có cực trị khi phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép hay $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - (m+2) \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2$.

Câu 53: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + (2m+3)x^2 + m^2x - 2m + 1$ không có cực trị khi và chỉ khi.

A. $m \leq -3 \vee m \geq -1$. **B.** $-3 \leq m \leq -1$. **C.** $m \geq -3$. **D.** $m \geq -1$.

Lời giải

Chọn B

$y' = x^2 + 2(2m+3)x + m^2$.

Hàm số không có cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' \le 0 \Leftrightarrow 3m^2 + 12m + 9 \le 0 \Leftrightarrow -3 \le m \le -1$.

Câu 54: Tìm tất cả tham số thực của m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m+2)x^3 + x^2 + \frac{1}{3}mx - 2$ có cực đại, cực tiểu.

A. $m \in (-\infty;-3) \cup (1;+\infty)$. **B.** $m \in (-2;1)$.

C. $m \in (-3;-2) \cup (-2;1)$. **D.** $m \in (-3;1)$.

Lời giải

Chọn C

$y' = (m+2)x^2 + 2x + \frac{1}{3}m$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ m+2 \ne 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}m^2 - \frac{2}{3}m > 0 \\ m \ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m \ne -2 \end{cases} \Leftrightarrow -3 < m < -2$ hoặc $-2 < m < 1$.

Câu 55: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại?

A. $1 < m \le 3$ **B.** $m \le 1$ **C.** $m \ge 1$ **D.** $1 \le m \le 3$

Lời giải

Chọn D

TH1: Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 4x^2 + 1$. Suy ra hàm số không có cực đại.

TH2: Nếu $m > 1$.

Để hàm số không có cực đại thì $-2(m-3) \ge 0 \Leftrightarrow m \le 3$. Suy ra $1 < m \le 3$.

Vậy $1 \le m \le 3$.

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m+1)x^3 - x^2 + (2m+1)x + 3$ có cực trị

A. $m \in \left(-\frac{3}{2};0\right)$. **B.** $m \in \left(-\frac{3}{2};0\right) \backslash \{-1\}$.

C. $m \in \left[-\frac{3}{2};0\right] \backslash \{-1\}$. **D.** $m \in \left[-\frac{3}{2};0\right]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = (m+1)x^2 - 2x + 2m + 1$

Để hàm số có cực trị ta xét hai trường hợp:

✎ Trường hợp 1: $m=-1$ ta có $y'=-2x-1$; $y'=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy khi $m=-1$ thì hàm số đạt cực đại tại $x=-\frac{1}{2}$.

Vậy $m=-1$ thoả mãn.

✎ Trường hợp 2: $m \neq -1$ để hàm số có cực trị thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow -2m^2-3m>0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}<m<0$ và $m \neq -1$.

Kết hợp hai trường hợp trên ta được $m \in \left(-\frac{3}{2};0\right)$.

Câu 57: Để đồ thị hàm số $y=-x^4-(m-3)x^2+m+1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

A. $m \geq 3$. **B.** $m>3$. **C.** $m<3$. **D.** $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

$y'=-4x^3-2(m-3)x=-2x\left(2x^2+m-3\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=\frac{3-m}{2} \end{array}\right.$$

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương với $a=-1<0$ nên hàm số có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu $\Leftrightarrow$ $y'=0$ có đúng 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \frac{3-m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 58: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=(m+1)x^4-mx^2+\frac{3}{2}$ chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m>1$. **B.** $-1 \leq m<0$. **C.** $m<-1$. **D.** $-1 \leq m \leq 0$.

Lời giải

Chọn D

Ta xét hai trường hợp sau đây:

TH1: $m+1=0 \Leftrightarrow m=-1$. Khi đó $y=x^2+\dfrac{3}{2} \Rightarrow$ hàm số chỉ có cực tiểu ($x=0$) mà không có cực đại $\Rightarrow m=-1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

TH2: $m+1\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -1$. Khi đó hàm số đã cho là hàm số trùng phương ta có:

$$y'=4(m+1)x^3-2mx=4(m+1)x\left[x^2-\frac{m}{2(m+1)}\right].$$

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại $\Leftrightarrow y'$ có đúng một nghiệm và đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua nghiệm này $\Leftrightarrow \begin{cases}4(m+1)>0\\ \dfrac{m}{2(m+1)}\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow -1<m\leq 0$.

Kết hợp những giá trị m tìm được, ta có $-1\leq m\leq 0$.

Câu 59: Cho hàm số $y=x^4-2mx^2+m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

A. $m>0$. **B.** $m\geq 0$. **C.** $m<0$. **D.** $m\leq 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4mx=4x\left(x^2-m\right)$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2-m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\ x^2=m \quad (*)\end{array}\right.$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt $x\neq 0 \Leftrightarrow m>0$.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2019m\right)x^2-1$ có đúng một cực trị?

A. 2019. **B.** 2020. **C.** 2018. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m=0 \Rightarrow y=-1$ nên hàm số không có cực trị.

$\Rightarrow m=0$ (loại).

Trường hợp 2: $m\neq 0 \Rightarrow m^2>0$.

Hàm số $y=m^2x^4-\left(m^2-2019m\right)x^2-1$ có đúng một cực trị

$\Leftrightarrow -m^2.\left(m^2-2019m\right)\geq 0 \Leftrightarrow m^2-2019m\leq 0 \Leftrightarrow 0\leq m\leq 2019$.

Vì $m \neq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2019$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Câu 61: Cho hàm số $y = mx^4 + \left(m^2 - 6\right)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2\left(m^2 - 6\right)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases} 4m > 0 \\ m\left(m^2 - 6\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{6}$.

Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m.

Câu 62: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên miền $\left[-10;10\right]$ để hàm số $y = x^4 - 2\left(2m+1\right)x^2 + 7$ có ba điểm cực trị?

A. 20 **B.** 10 **C.** Vô số **D.** 11

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 4x\left[x^2 - \left(2m+1\right)\right] \quad \forall x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x^2 = 2m+1 \quad (*) \end{array}\right.$$

Hàm số đã cho có ba cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt, hay (*) có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow 2m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

Do $m \in \left[-10;10\right]$ nên có 11 giá trị thỏa mãn.

Câu 63: Cho hàm số $y = mx^4 + \left(m^2 - 6\right)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2\left(m^2 - 6\right)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi và chỉ khi $\begin{cases} 4m > 0 \\ m\left(m^2 - 6\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{6}$.

Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m.

Câu 64: Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m = \dfrac{3}{2}$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = \dfrac{1}{2}$. **D.** $m = \dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0;m)$ và $B(2;-4+m)$.

Ta có $OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4-m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4-m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{2}$.

Câu 65: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2\left(3m^2 - 1\right)x + \dfrac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2\left(x_1 + x_2\right) = 1$.

A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2\left(3m^2 - 1\right) = 2\left(x^2 - mx - 3m^2 + 1\right)$,

$g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1$; $\Delta = 13m^2 - 4$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ $g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > \dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.. (*)$$

x_1, x_2 là các nghiệm của $g(x)$ nên theo định lý Vi-ét, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}$.

Do đó $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m+1=1 \Leftrightarrow -3m^2+2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$.

Đối chiếu với điều kiện (*), ta thấy chỉ $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 66: Tìm tất cả cả các giá trị của tham số m để $y=x^3-3x^2+mx-1$ đạt cực trị tại x_1,x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=6$

A. $m=-3$ **B.** $m=3$ **C.** $m=-1$ **D.** $m=1$

Lời giải

Chọn A

$y'=3x^2-6x+m$. Hàm số đạt cực trị tại x_1,x_2.Vậy x_1,x_2 là nghiệm của phương trình $y'=0$

Theo viet ta có $\begin{cases} x_1+x_2=2 \\ x_1.x_2=\dfrac{m}{3} \end{cases}$

$x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$

$=4-\dfrac{2m}{3} \Rightarrow 4-\dfrac{2m}{3}=6 \Rightarrow m=-3$

Câu 67: Giá trị của tham số m sao cho hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2+x_2^2=3$ là

A. $m=1$. **B.** $m=\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=3$. **D.** $m=-\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f'\left(x\right)=3x^2-6x+m$. Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 khi $\Delta'=9-12m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{3}{4}$.

Khi đó $3=x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=2^2-2.\dfrac{m}{3} \Leftrightarrow m=\dfrac{3}{2}$.

Câu 68: Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y=x^3-3x^2+mx-1$ có hai điểm cực trị x_1,x_2 sao cho $x_1{}^2+x_2{}^2-x_1x_2=13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m_0\in\left(-1;7\right)$. **B.** $m_0\in\left(7;10\right)$. **C.** $m_0\in\left(-15;-7\right)$. **D.** $m_0\in\left(-7;-1\right)$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-6x+m$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+m=0$; $\Delta'=9-3m$.

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m<3$.

Hai điểm cực trị $x_1;x_2$ là nghiệm của $y'=0$ nên: $x_1+x_2=2; x_1.x_2=\dfrac{m}{3}$.

Để ${x_1}^2+{x_2}^2-x_1x_2=13 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-3x_1.x_1=13$

$\Leftrightarrow 4-m=13 \Leftrightarrow m=-9$. Vậy $m_0=-9\in(-15;-7)$.

Câu 69: Giả sử hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-\dfrac{1}{3}mx$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $x_1+x_2+2x_1x_2=0$. Giá trị của m là

A. $m=-3$. **B.** $m=3$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\dfrac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=x^2-2x-\dfrac{1}{3}m$; $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x-m=0\ (1)$.

Hàm số có hai cực trị $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 9+3m>0 \Leftrightarrow m>-3$.

Theo giả thiết, ta có $x_1+x_2+2x_1x_2=0 \Leftrightarrow 2-\dfrac{2m}{3}=0 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn).

Câu 70: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}mx^3-(m-1)x^2+3(m-2)x+2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1+x_2=2$ bằng

A. $\dfrac{73}{16}$. **B.** $\dfrac{52}{9}$. **C.** $\dfrac{34}{9}$. **D.** $\dfrac{10}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=mx^2-2(m-1)x+3(m-2)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1+x_2=2$ thì $\begin{cases}\Delta'>0 & (1)\\ 2x_1+x_2=2 & (2)\end{cases}$.

Ta có $(1) \Leftrightarrow -2m^2+4m+1>0 \Leftrightarrow \dfrac{2-\sqrt{6}}{2}<m<\dfrac{2+\sqrt{6}}{2}\ (*)$.

Mặt khác ta có $x_1+x_2=\dfrac{2(m-1)}{2}\quad (3)$.

Từ (2) và (3) ta có $x_1=\dfrac{2}{m}$.

Vì $y'(x_1)=0 \Leftrightarrow m\left(\frac{2}{m}\right)^2-2(m-1).\frac{2}{m}+3m-6=0 \Leftrightarrow 3m^2-10m+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=\frac{4}{3} \end{array}\right.$ (thỏa $(*)$).

Vậy $2^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2=\frac{52}{9}$.

Câu 71: Biết $\frac{a}{b}$ (trong đó $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và a, $b \in \mathbb{N}^*$) là giá trị của tham số m để hàm số $y=\frac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\frac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Tính giá trị biểu thức $S=a^2+b^2$.

A. $S=34$. **B.** $S=13$. **C.** $S=25$. **D.** $S=10$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=2x^2-2mx-6m^2+2$.

Hàm số có hai điểm cực trị

$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-2\left(-6m^2+2\right)>0 \Leftrightarrow 13m^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$

Theo định lý Viet thì $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1 \end{cases}$

Ta có $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Leftrightarrow -3m^2+1+2m=1 \Leftrightarrow 3m^2-2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\frac{2}{3} \end{array}\right.$

Chỉ có giá trị $m=\frac{2}{3}$ thỏa điều kiện, khi đó $S=a^2+b^2=2^2+3^2=13$.

Câu 72: Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m?

A. 3. **B.** 1. **C.** Không có m. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Có $y'(x)=x^2-mx+1$, $y'=0 \Leftrightarrow x^2-mx+1=0$ (1).

•Để hàm số có cực trị thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt.

Điều này tương đương với $\Delta>0$ $\Leftrightarrow m^2-4>0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

•Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2. Khi đó, ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = 1 \end{cases}$.

Độ dài hai cạnh của tam giác vuông đó là $|x_1|$, $|x_2|$. Theo bài ra ta có phương trình:

$x_1^2 + x_2^2 = 7 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 73: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?

A. 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x) = 6x^2 - 12x$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -m + 1$

$x = 2 \Rightarrow f(2) = -m - 7$

Hàm số có các giá trị cực trị trái dấu

$\Leftrightarrow (-m+1)(-m-7) < 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+7) < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1$.

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 74: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m \in (-1;4) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in (3;4)$. **C.** $m \in (1;3)$. **D.** $m \in (-1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -m + 2 \end{array}\right.$.

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2;3)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 2 \neq -1 \\ -2 < -m + 2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$.

Câu 75: Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \le 5$. Biết $S = (a;b]$. Tính $T = 2b - a$.

A. $T = \sqrt{51} + 6$ **B.** $T = \sqrt{61} + 3$ **C.** $T = \sqrt{61} - 3$ **D.** $T = \sqrt{51} - 6$

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0$ (1)

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 3 \\ m < -3 \end{array}\right.$ (*)

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2, theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \le 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \le 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 25 \le 0$

$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \le 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{61}}{2} \le m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$ (**)

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \le \dfrac{\sqrt{61}}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \dfrac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3$.

Câu 76: Cho hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}mx^2 - 4x - 10$, với m là tham số; gọi x_1, x_2 là các điểm cực trị của hàm số đã cho. Giá trị lớn nhất của biểu thức $P = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)$ bằng

A. 4. **B.** 1. **C.** 0. **D.** 9.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = x^2 - mx - 4$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$.

Ta có $\Delta = m^2 + 16 > 0$, $\forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $\forall m \in \mathbb{R}$ hay hàm số luôn có hai điểm cực trị x_1, x_2 $\forall m \in \mathbb{R}$.

Do x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của $y' = 0$ nên theo định lý Viet ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1.x_2 = -4 \end{cases}$.

$P = (x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1) = (x_1x_2)^2 - (x_1^2 + x_2^2) + 1 = (x_1x_2)^2 - (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 + 1$

$= 16 - m^2 - 8 + 1 = -m^2 + 9 \le 9, \forall m \in \mathbb{R}$.

Do đó giá trị lớn nhất của biểu thức P bằng $9 \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 77: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-(m+1)x^2-(2m-1)x+m+2$, m là tham số. Biết hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x_1^2+x_2^2-10(x_1+x_2)$.

A. -22. **B.** 1. **C.** -18. **D.** 78.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x)=x^2-2(m+1)x-2m+1$.

Hàm số có hai điểm cực trị $x_1,\ x_2$ khi và chỉ khi phương trình $f'(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2$.

$\Leftrightarrow\ \Delta'=m^2+4m>0\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>0 \\ m<-4 \end{array}\right.$.

Theo Vi-et ta có $x_1+x_2=2(m+1), x_1x_2=1-2m$.

$T=x_1^2+x_2^2-10(x_1+x_2)=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2-10(x_1+x_2)$.

$\Rightarrow\ T=4m^2-8m-18=4(m-1)^2-22\geq -22$.

Câu 78: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=\frac{m}{3}x^3+2x^2+mx+1$ có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ}<x_{CT}$.

A. $-2<m<0$. **B.** $-2<m<2$. **C.** $0<m<2$. **D.** $m<2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=mx^2+4x+m$.

Hàm số có 2 điểm cực trị $\Leftrightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ 4-m^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ -2<m<2 \end{cases}$ (1).

Căn cứ vào dạng của đồ thị hàm số bậc 3, để hàm số có 2 điểm cực trị thỏa mãn $x_{CĐ}<x_{CT}$ thì $m>0$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra giá trị m cần tìm là $0<m<2$.

Câu 79: Với tham số m, đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2-mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB=5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $0<m<1$. **B.** $1<m<2$. **C.** $m<0$. **D.** $m>2$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ và có đạo hàm là $y'=\dfrac{x^2+2x-m}{(x+1)^2}$.

Để hàm số có hai điểm cực trị ta phải có $\begin{cases}1+m>0\\1-2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m>-1$.

Gọi hai hoành độ cực trị là x_1 và x_2 ta có $\begin{cases}x_1+x_2=-2\\x_1x_2=-m\end{cases}$.

Khi đó điểm $A(x_1,2x_1-m)$ và $B(x_2,2x_2-m)$.

$AB=\sqrt{4+4m}.\sqrt{5}=5\Leftrightarrow 4+4m=5\Leftrightarrow m=\dfrac{1}{4}$.

Câu 80: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-mx^2+\left(m^2-1\right)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A,B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d:y=5x-9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

A. 3 **B.** 6 **C.** -6 **D.** 0

Lời giải

Chọn D

Cách 1: Ta có $y'=x^2-2mx+\left(m^2-1\right)$

$\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m-1\\x=m+1\end{array}\right.\Rightarrow A\left(m-1;\dfrac{m^3-3m+2}{3}\right)$ và $B\left(m+1;\dfrac{m^3-3m-2}{3}\right)$

Dễ thấy phương trình đường thẳng $AB:y=-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{m\left(m^2-1\right)}{3}$ nên AB không thể song song hoặc trùng với $d\Rightarrow A,B$ cách đều đường thẳng $d:y=5x-9$ nếu trung điểm I của AB nằm trên d

$I\left(m;\dfrac{m^3-3m}{3}\right)\in d\Rightarrow\dfrac{m^3-3m}{3}=5m-9\Leftrightarrow m^3-18m+27=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=3\\m=\dfrac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$

Với $m=3\Rightarrow A,B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Với $m=\dfrac{-3\pm3\sqrt{5}}{2}\Rightarrow A,B$ thỏa điều kiện nằm khác phía so với d.

Tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 81: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3-(2m-1)x^2+2mx-m-1=0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có (1) $\Leftrightarrow (x-1)\left[mx^2-(m-1)x+m+1\right]=0$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt $mx^2-(m-1)x+m+1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m-(m-1)+m+1\neq 0 \\ (m-1)^2-4m(m+1)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m+2\neq 0 \\ -3m^2-6m+1>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -2 \\ \dfrac{-3-2\sqrt{3}}{3}<m<\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Do $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=-1$.

Câu 82: Cho hàm số $y=x^3-(m+6)x^2+(2m+9)x-2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\left[\begin{array}{l} m\geq -2 \\ m\leq -6 \end{array}\right.$.

B. $m\geq -2$.

C. $m\leq -6$.

D. $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{-3}{2} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn D

$y'=3x^2-2(m+6)x+2m+9$.

$y'=3x^2-2(m+6)x+2m+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\dfrac{2m+9}{3} \end{array}\right.$.

Hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow \dfrac{2m+9}{3}\neq 1 \Leftrightarrow m\neq -3$. (1)

$y(1)=m+2$.

$y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right)=-m\dfrac{(2m+9)^2}{27}-2$.

Ycbt $\Leftrightarrow y(1).y\left(\dfrac{2m+9}{3}\right)<0$

$\Leftrightarrow (m+2).\left[-m\dfrac{(2m+9)^2}{27}-2\right]<0 \Leftrightarrow (m+2).(4m^3+36m^2+81m+54)>0 \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m<-6 \\ m>-2 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{-3}{2}\end{cases}$. (2)

Từ (1), (2) ta có ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m>-2 \\ m<-6 \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{-3}{2}\end{cases}$.

Câu 83: Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(m+1)x+m-1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m<20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.

Lời giải

Chọn B

+ Ta có: $y=(x-1)(x^2-2mx+1-m)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y=(x-1)(x^2-2mx+1-m)=0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2-2mx+1-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2+m-1>0 \\ 2-3m\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} m<\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ m>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \\ m\neq \dfrac{2}{3}\end{cases}$.

+ Do $m\in N, m<20$ nên $1\le m<20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 84: Cho hàm số $y=x^3-3mx^2+4m^2-2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4

Lời giải

Chọn C

Ta có $y'=3x^2-6mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2m \end{array}\right.$

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m\neq 0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

Khi đó $A(0;4m^2-2), B(2m;-4m^3+4m^2-2)$ $\Rightarrow AB=\sqrt{4m^2+16m^6}=2|m|\sqrt{4m^4+1}$

Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-0}{2m-0}=\dfrac{y-\left(4m^2-2\right)}{-4m^3}\Leftrightarrow 2m^2x+y-4m^2+2=0$

$$d\left(C,AB\right)=\frac{\left|2m^2+4-4m^2+2\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=\frac{2\left|m^2-3\right|}{\sqrt{4m^4+1}}$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S=\frac{1}{2}.AB.d\left(C,AB\right)=4\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2|m|.\sqrt{4m^4+1}.\frac{2\left|m^2-3\right|}{\sqrt{4m^4+1}}=4$$

$$\Leftrightarrow\left|m\left(m^2-3\right)\right|=2\Leftrightarrow m^6-6m^4+9m^2-4=0\Leftrightarrow\left(m^2-1\right)^2\left(m^2-4\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\pm1\\m=\pm2\end{array}\right.$$

Do m nguyên dương nên ta được $m=1,m=2$, tổng thu được là 3.

Câu 85: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$?

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn D

$$y=-x^3+3x^2+3\left(m^2-1\right)x-3m^2-1\Rightarrow y'=-3x^2+6x+3\left(m^2-1\right).$$

$$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1-m\\x=1+m\end{array}\right..$$

Để đồ thị hàm số có điểm cực đại, cực tiểu nằm bên trái đường thẳng $x=2$ thì

$$\begin{cases}m\neq0\\1+m<2\\1-m<2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq0\\m<1\\m>-1\end{cases}.$$

Vậy không có giá trị nguyên nào của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 86: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=x^3-3mx^2+2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M\left(1;-2\right)$ thẳng hàng.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=-\sqrt{2}$. **C.** $m=2$. **D.** $m=-\sqrt{2}$; $m=\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y'=3x^2-6mx$; $y'=0$ $\Leftrightarrow$ $3x^2-6mx=0$ $\Leftrightarrow$ $x=0$, $x=2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ $2m\neq0$ $\Leftrightarrow$ $m\neq0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A\left(0;2\right)$, $B\left(2m;2-4m^3\right)$.

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-1;4)$, $\overrightarrow{MB}=(2m-1;4-4m^3)$.

Ba điểm A, B và $M(1;-2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ cùng phương

$\Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \dfrac{2m-1}{-1}=\dfrac{1-m^3}{1} \Leftrightarrow 2m-1=m^3-1 \Leftrightarrow m^3=2m$

$\Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$ (do $m\neq 0$).

Câu 87: Cho hàm số $y=2x^3-3(m+1)x^2+6mx+m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B sao cho độ dài $AB=\sqrt{2}$.

A. $m=0$. **B.** $m=0$ hoặc $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=6x^2-6(m+1)x+6m$. $y'=0\Leftrightarrow x^2-(m+1)x+m=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=m\end{array}\right.$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m\neq 1$.

Khi đó ta có $A(1;m^3+3m-1),B(m;3m^2)$.

Có $AB=\sqrt{2}\Leftrightarrow (m-1)^2+(m^3-3m^2+3m-1)^2=2\Leftrightarrow (m-1)^2+(m-1)^6=2$.

$\Leftrightarrow (m-1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\m=2\end{array}\right.$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

Câu 88: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=mx^3-3mx^2+3m-3$ có hai điểm cực trị A,B sao cho $2AB^2-(OA^2+OB^2)=20$ (trong đó O là gốc tọa độ)

A. $m=-1$. **B.** $m=1$. **C.** $\left[\begin{array}{l}m=-1\\m=-\dfrac{17}{11}\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\dfrac{17}{11}\end{array}\right.$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D=R$

Ta có: $y'=3mx^2-6mx$

Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow m\neq 0$

Khi đó $\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Tọa độ điểm cực trị: $A(0;3m-3),B(2;-m-3)$

Theo giả thiết $2AB^2-\left(OA^2+OB^2\right)=20 \Leftrightarrow 22m^2+12m-34=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{17}{11} \end{array}\right.$.

Câu 89: Cho hàm số $y=x^4-2x^2+2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

A. $S=3$. **B.** $S=\dfrac{1}{2}$. **C.** $S=1$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \to y=2 \\ x=\pm 1 \to y=1 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0;2)$, $B(-1;1)$, $C(1;1)$.

Nhận xét ΔABC cân tại A. Vì vậy $S=\dfrac{1}{2}|y_A-y_B|.|x_C-x_B|=\dfrac{1}{2}.1.2=1$.

Câu 90: Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2mx^2+1$ có ba điểm cực trị $A(0;\ 1)$, B, C thỏa mãn $BC=4$?

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=4$. **C.** $m=\pm 4$. **D.** $m=\pm\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

$y'=4x^3-4mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m>0$.

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A(0;1)$, $B\left(\sqrt{m};\ -m^2+1\right)$, $C\left(-\sqrt{m};\ -m^2+1\right)$.

$BC=4 \Leftrightarrow 4m=16 \Leftrightarrow m=4$.

Câu 91: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân

A. $m=\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=x^4+2mx^2+1$ có tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y'=4x^3+4mx; y'=0 \Leftrightarrow 4x^3+4mx=0 \Leftrightarrow 4x\left(x^2+m\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=-m\ (*) \end{array}\right.$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0

$\Leftrightarrow -m>0 \Leftrightarrow m<0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0;1); B\left(-\sqrt{-m};1-m^2\right); C\left(\sqrt{-m};1-m^2\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-m};-m^2\right); \overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-m};-m^2\right)$

Vì ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \Leftrightarrow -\sqrt{m^2}+m^2.m^2=0 \Leftrightarrow -|m|+m^4=0 \Leftrightarrow m+m^4=0$

$\Leftrightarrow m=-1$ (vì $m<0$)

Vậy với $m=-1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

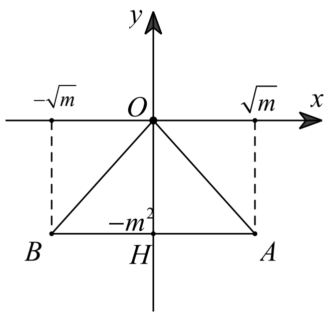
Câu 92: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y=x^4-2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

A. $0<m<1$ **B.** $m>0$ **C.** $0<m<\sqrt[3]{4}$ **D.** $m<1$

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D=\mathbb{R}$



Ta có $y'=4x^3-4mx$. $y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-4mx=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2=m \end{array}\right.$.

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $m>0$. Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là

$O(0;0)$, $A\left(\sqrt{m};-m^2\right)$, $B\left(-\sqrt{m};-m^2\right)$.

Do đó $S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OH.AB=\frac{1}{2}m^2.2\sqrt{m}=m^2\sqrt{m}<1\Leftrightarrow 0<m<1$.

Câu 93: Đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2-9x+1$ có hai cực trị A và B. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB?

A. $M(0;-1)$ **B.** $N(1;-10)$ **C.** $P(1;0)$ **D.** $Q(-1;10)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y'=3x^2-6x-9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y=-8x-2$.

Như thế điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng AB.

Câu 94: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y=(2m-1)x+3+m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$.

A. $m=\frac{3}{2}$ **B.** $m=\frac{3}{4}$ **C.** $m=-\frac{1}{2}$ **D.** $m=\frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y'=3x^2-6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1)$, $B(2;-3)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y=-2x+1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y=(2m-1)x+3+m$ khi và chỉ khi $(2m-1)(-2)=-1\Leftrightarrow m=\frac{3}{4}$.

Câu 95: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y=(2m-1)x+m+3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=x^3-3x^2+1$

A. $m=\frac{3}{4}$. **B.** $m=\frac{1}{2}$. **C.** $m=-\frac{3}{4}$. **D.** $m=-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y=x^3-3x^2+1$ có TXĐ: $\mathbb{R}$; $y'=3x^2-6x$; $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;1)$, $B(2;-3)\Rightarrow\overrightarrow{AB}=(2;-4)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A, B có phương trình: $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-4}\Leftrightarrow y=-2x+1$.

Đường thẳng $y=(2m-1)x+m+3$ song song với đường thẳng $d\Leftrightarrow\begin{cases}2m-1=-2\\m+3\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{2}$.

Câu 96: Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=2x^3+3(m-1)x^2+6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y=-4x$.

A. $m=-\frac{1}{3}$. **B.** $m=\frac{2}{3}$. **C.** $m=-\frac{2}{3}$. **D.** $m=1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y'=6x^2+6(m-1)x+6m(1-2m)$, $y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=m\\x=1-2m\end{array}\right.$.

Để hàm số có hai cực trị thì $m\neq 1-2m\Leftrightarrow m\neq\frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A\left(m;-7m^3+3m^2\right)$, $B\left(1-2m;20m^3-24m^2+9m-1\right)$. Do đó $\overrightarrow{AB}=\left(1-3m;(3m-1)^3\right)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left((3m-1)^2;1\right)$.

Do đó $AB:(3m-1)^2x+y-2m^3+3m^2-m=0\Leftrightarrow y=-(3m-1)^2x+2m^3-3m^2+m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y=-4x$ thì:

$$\begin{cases}-(3m-1)^2=-4\\2m^3-3m^2+m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-\frac{1}{3}\end{array}\right.\\\begin{cases}m\neq 0\\m\neq\frac{1}{2}\\m\neq 1\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}.$$

Câu 97: Biết đồ thị hàm số $y=x^3-3x+1$ có hai điểm cực trị A, B. Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y=2x-1$. **B.** $y=-2x+1$. **C.** $y=-x+2$. **D.** $y=x-2$.

Lời giải

Chọn B

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y=y'.\left(\frac{1}{3}x\right)+(-2x+1)$.

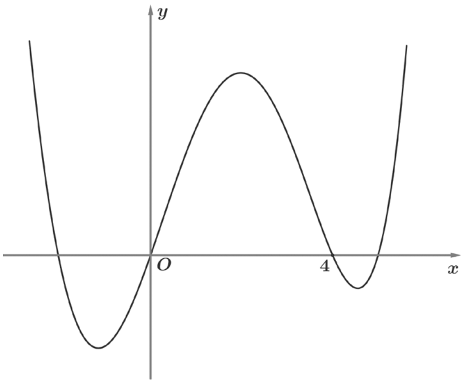
Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1;y_1)$ và $B(x_2;y_2)$.

Ta có: $$\begin{cases}y_1=y(x_1)=y'(x_1).\left(\frac{1}{3}x_1\right)+(-2x_1+1)=-2x_1+1\\y_2=y(x_2)=y'(x_2).\left(\frac{1}{3}x_2\right)+(-2x_2+1)=-2x_2+1\end{cases}.$$

Ta thấy, toạ độ hai điểm cực trị A và B thoả mãn phương trình $y=-2x+1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y=-2x+1$.

Câu 98: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ là



A. 5. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 11.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g(x)=f(x^3+3x^2) \Rightarrow g'(x)=(3x^2+6x).f'(x^3+3x^2)$

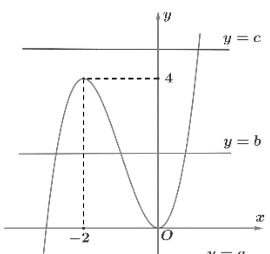
Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'(x^3+3x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x^3+3x^2=a;\ a<0 \\ x^3+3x^2=b;\ 0<b<4 \\ x^3+3x^2=c;\ c>4 \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow h'(x)=3x^2+6x$. Cho $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có đồ thị của hàm $h(x)=x^3+3x^2$ như sau



Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

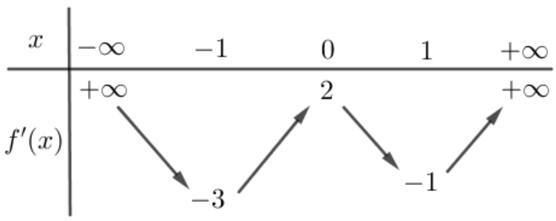
Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

Câu 99: Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là

A. 9. **B.** 3. **C.** 7. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

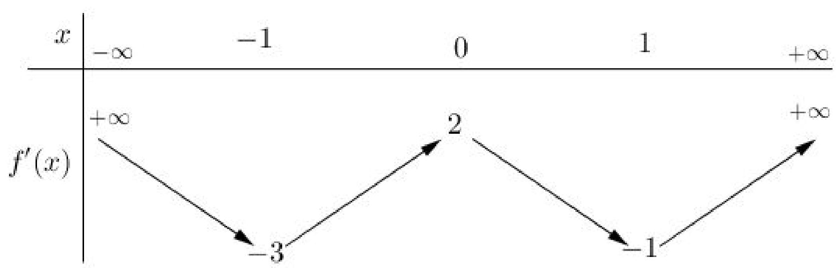
Ta có $y' = 2(x-1).f'(x^2 - 2x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \in (-\infty; -1) \\ x^2 - 2x = b \in (-1; 0) \\ x^2 - 2x = c \in (0; 1) \\ x^2 - 2x = d \in (1; +\infty) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = 1 & \\ x^2 - 2x - a = 0, a \in (-\infty; -1) & (1) \\ x^2 - 2x - b = 0, b \in (-1; 0) & (2) \\ x^2 - 2x - c = 0, c \in (0; 1) & (3) \\ x^2 - 2x - d = 0, d \in (1; +\infty) & (4) \end{array}\right..$$

Phương trình (1) vô nghiệm, các phương trình $(2), (3), (4)$ đều có hai nghiệm phân biệt khác 1 và do b, c, d đôi một khác nhau nên các nghiệm của phương trình $(2), (3), (4)$ cũng đôi một khác nhau. Do đó $f'(x^2 - 2x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt, do đó số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ là 7.

Câu 100: Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



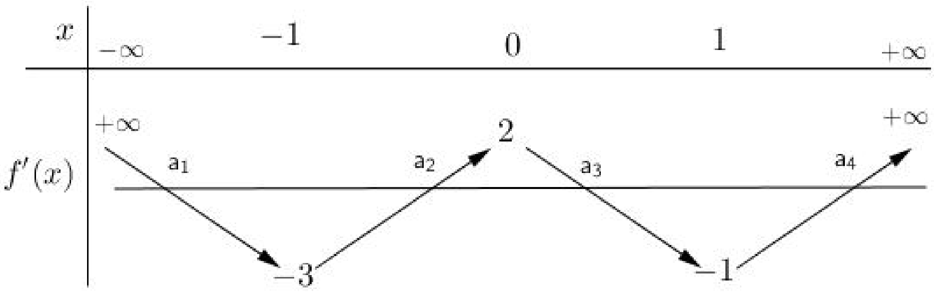
Số điểm cực trị của hàm số $y = f\left(4x^2 + 4x\right)$ là

A. 5. **B.** 9. **C.** 7. **D.** 3.

Lời giải

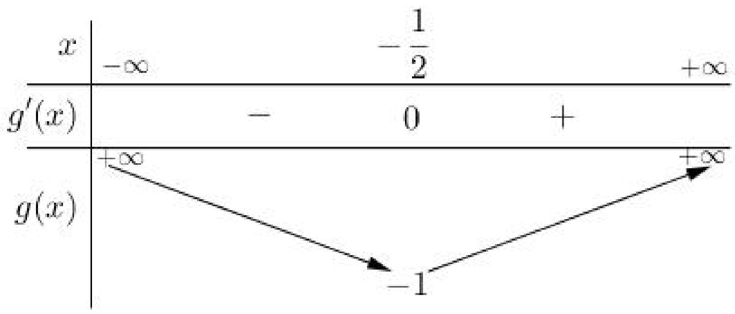
Chọn C

Có $\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)' = (8x+4)f'\left(4x^2+4x\right)$, $\left(f\left(4x^2+4x\right)\right)' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ f'\left(4x^2+4x\right) = 0 \end{array}\right.$.



Từ bảng biến thiên trên ta có $f'\left(4x^2+4x\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x^2+4x = a_1 \in (-\infty;-1) \\ 4x^2+4x = a_2 \in (-1;0) \\ 4x^2+4x = a_3 \in (0;1) \\ 4x^2+4x = a_4 \in (1;+\infty) \end{array}\right.$. (1)

Xét $g(x) = 4x^2+4x$, $g'(x) = 8x+4$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ ta có bảng biến thiên



Kết hợp bảng biến thiên của $g(x)$ và hệ (1) ta thấy:

Phương trình $4x^2+4x = a_1 \in (-\infty;-1)$ vô nghiệm.

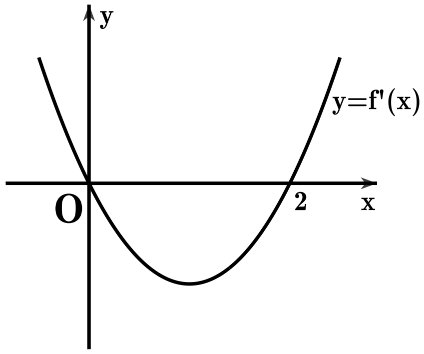
Phương trình $4x^2+4x = a_2 \in (-1;0)$ tìm được hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x = a_2 \in (0;1)$ tìm được thêm hai nghiệm mới phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Phương trình $4x^2+4x = a_2 \in (1;+\infty)$ tìm được thêm hai nghiệm phân biệt khác $-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hàm số $y = f\left(4x^2+4x\right)$ có tất cả 7 điểm cực trị.

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g\left(x\right)=f\left(-x^2+x\right)$ là

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g\left(x\right)=f\left(-x^2+x\right)\Rightarrow g'\left(x\right)=\left(-2x+1\right)f'\left(-x^2+x\right)$.

$$\Rightarrow g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left(-2x+1\right)f'\left(-x^2+x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-2x+1=0\\ f'\left(-x^2+x\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ -x^2+x=0\\ -x^2+x=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=1\\ x=0\end{array}\right..$$

Do đó $g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow\left(-2x+1\right)f'\left(-x^2+x\right)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}-2x+1>0\\ f'\left(-x^2+x\right)>0\end{cases}\\ \begin{cases}-2x+1<0\\ f'\left(-x^2+x\right)<0\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}-x^2+x>2\\ -x^2+x<0\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ 0<-x^2+x<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<\dfrac{1}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x>1\\ x<0\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}x>\dfrac{1}{2}\\ 0<x<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<0\\ \dfrac{1}{2}<x<1\end{array}\right..$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$g'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g\left(x\right)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 102: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3. **B.** 8. **C.** 10. **D.** 7.

Lời giải

Chọn A

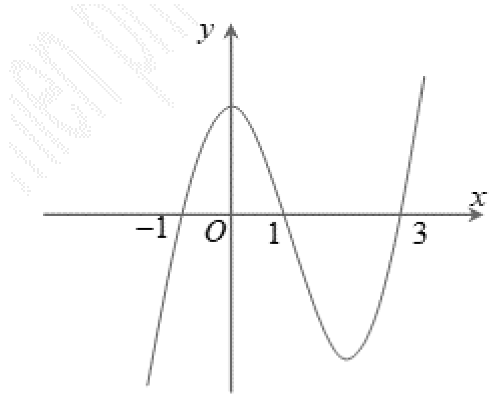
Vì hàm số $y=f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2;-1;0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x)=0$ có ba nghiệm là $-2;-1;0$ (ba nghiệm bội lẻ).

Xét hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ có $y'=(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)$; $y'=0\Leftrightarrow(2x-2).f'\left(x^2-2x\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-2x=-2\\x^2-2x=-1\\x^2-2x=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=0\\x=2\end{array}\right..$$

Do $y'=0$ có một nghiệm bội lẻ ($x=1$) và hai nghiệm đơn ($x=0$; $x=2$) nên hàm số $y=f\left(x^2-2x\right)$ chỉ có ba điểm cực trị.

Câu 103: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y=f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)$ là



A. 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị của $y=f'(x)$ ta chọn $f'(x)=(x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y=\left[f(u)\right]'=u'f'(u)$ với $u=\sqrt{x^2+2x+2}$

Ta có

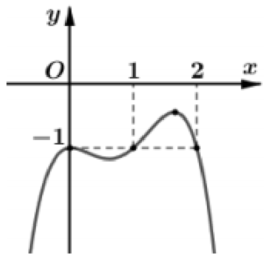
$$y'=\left[f\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)\right]'=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}.\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}-3\right)$$

$$=\frac{(x+1)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)(x+1)^2\left(x^2+2x-7\right)}{\sqrt{x^2+2x+2}\left(\sqrt{x^2+2x+2}+1\right)\left(\sqrt{x^2+2x+2}+3\right)} \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

x	$-\infty$		$-1-2\sqrt{2}$		-1		$-1+2\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y		↘		↗		↘		↗	

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

Câu 104: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm

A. $x=1$.

B. $x=2$.

C. Không có điểm cực tiểu.

D. $x=0$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $g(x)=f(x)+x$ có $g'(x)=f'(x)+1$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		↘		↘	CT	↗	CĐ	↘	

Từ đó suy ra hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

E. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$

Lời giải

A. S	**B.** S	**C.** S	**D.** Đ

Theo bảng xét dấu thì $y'<0$ khi $x\in(0;2)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

Câu 2: Cho hàm số $y=-\frac{1}{3}x^3+x^2-x+1$.

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
C. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;1)$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên $(1;+\infty)$.

Lời giải

A. Đ	**B.** S	**C.** S	**D.** S

$y'=-x^2+2x-1=-(x-1)^2\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Cho hàm số $y=\frac{x+3}{x+2}$.

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số đồng biến trên $(-4;-3)$.

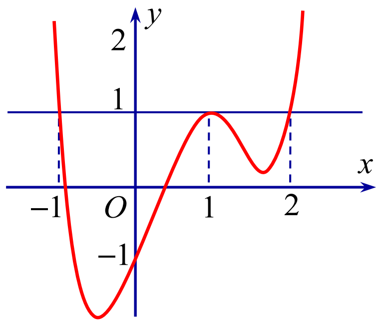
Lời giải

A. S	**B.** Đ	**C.** S	**D.** Đ

$$y'=\frac{-1}{(x+2)^2}$$

$$y'=\frac{-1}{(x+2)^2}<0\ \forall x\in(-\infty;-2)\text{ và } y'=\frac{-1}{(x+2)^2}<0\ \forall x\in(-2;+\infty)$$

Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Đặt $g(x)=f(x)-x$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $g(1) < g(-1) < g(2)$.

B. $g(-1) < g(1) < g(2)$.

C. $g(2) < g(1) < g(-1)$.

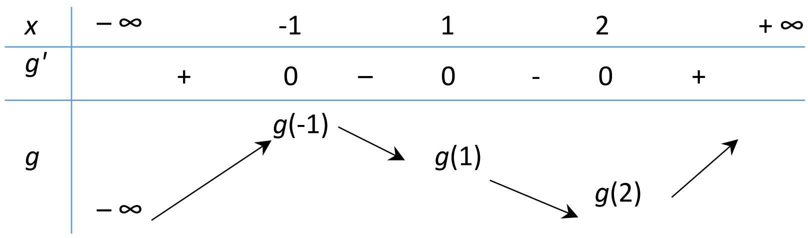
D. $g(2) < g(-1) < g(1)$.

Lời giải

A. S	**B.** S	**C.** Đ	**D.** S

Xét hàm số $g(x) = f(x) - x$, $\Rightarrow g'(x) = f'(x) - 1$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên



Vậy $g(2) < g(1) < g(-1)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x + 1}$.

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$

Lời giải

A. Đ	**B.** S	**C.** S	**D.** Đ

TXĐ: $D = R \setminus \{-1\}$.

$$y' = \frac{x^2 + 2x + 5}{(x+1)^2} > 0, \ \forall x \neq -1.$$

Suy ra Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Do đó đồng biến trên khoảng $(2;4)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = x^3 - bx^2 - cx + 2016$ với $b, c \in \mathbb{R}$.

A. Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c \in \mathbb{R}$.
B. Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c \in (-\infty; 0)$.
C. Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c \in (0; +\infty)$.
D. Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

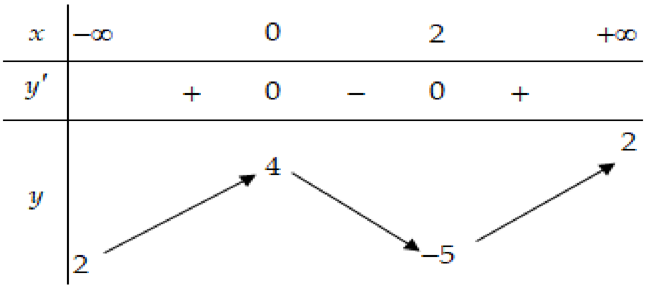
A. S	**B.** S	**C.** Đ	**D.** S

$y = x^3 - x^2 - cx + 2016$ có tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 2bx - c$; $\Delta' = b^2 + 3c$.

Đối với các trường hợp ở đáp án Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c \in \mathbb{R}$, Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c \in (-\infty; 0)$,Hàm số luôn có 2 điểm cực trị $\forall c \in \mathbb{Z}$. Chọn $c = -10, b = 1$, khi đó $\Delta' < 0$, suy ra phương trình $y' = 0$ vô nghiệm, suy ra hàm số không có cực trị $\Rightarrow$ Loại 3 đáp án trên.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau



A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$
B. Hàm số có bốn điểm cực trị
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$
D. Hàm số không có cực đại

Lời giải

A. Đ	**B.** S	**C.** Đ	**D.** S

Dựa vào bảng biến thiên. Hàm số có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $y'(2) = 0; y'$ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua $x = 2$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 8: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 3}{x + 1}$.

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3
B. Cực tiểu của hàm số bằng 1
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6
D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

A. S	**B.** S	**C.** S	**D.** Đ

□ ***Cách 1.***

Ta có: $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

□ ***Cách 2.***

Ta có $y' = \dfrac{x^2+2x-3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=1 \end{array}\right.$

$y'' = \dfrac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1) = \dfrac{1}{2} > 0$; $y''(-3) = -\dfrac{1}{2} < 0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ và giá trị cực tiểu bằng 2.

Câu 9: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$. Xét các mệnh đề sau đây

A. Hàm số có 3 điểm cực trị.

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$.

C. Hàm số có 1 điểm cực trị.

D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$.

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C.** S	**D.** Đ

$y' = 4x^3 - 4x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \quad \Rightarrow y=1 \\ x=1 \quad \Rightarrow y=0 \\ x=-1 \Rightarrow y=0 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$		$+$		$-$		$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số có 3 điểm cực trị, đồng biến trên khoảng $(-1;0)$; $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$; $(0;1)$. Vậy mệnh đề 1, 2, 4 đúng.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	↘	0	↗	3	↘	0	↗	$+\infty$

A. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3
B. Hàm số có hai điểm cực tiểu
C. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0
D. Hàm số có ba điểm cực trị

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. S**	**D.** Đ

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=\left(x+1\right)^2\left(1-x\right)\left(x+3\right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$
B. Giá trị cực tiểu của hàm số là $f\left(-3\right)$
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-3;1\right)$
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-3;1\right)$

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. S**	**D.** Đ

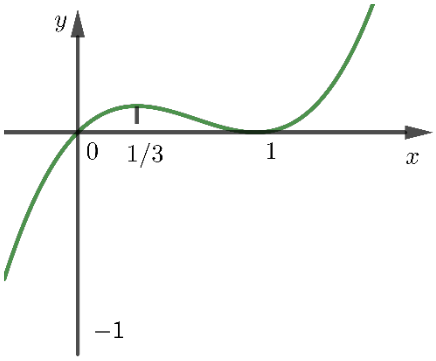
Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$			0	$-$	
y	$+\infty$	↘	$f\left(-3\right)$	↗			$f\left(1\right)$	↘	$-\infty$

Do đó:

A. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ là mệnh đề đúng
B. Giá trị cực tiểu của hàm số là $f\left(-3\right)$ là mệnh đề đúng
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-3;1\right)$ là mệnh đề sai
D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-3;1\right)$ là mệnh đề đúng

Câu 12: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là hàm số $f'(x)$. Biết đồ thị hàm số $f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$

B. Giá trị cực đại của hàm số là $f(1)$

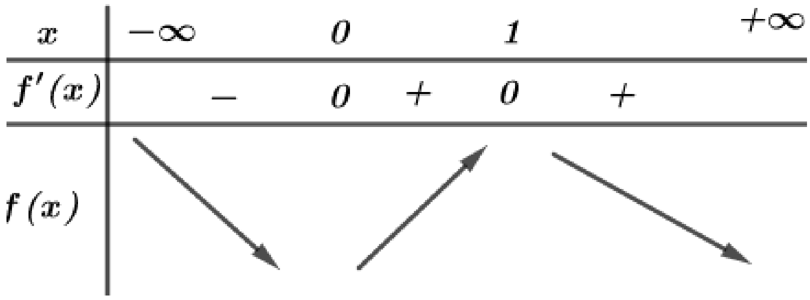
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. S**	**D. S**

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:



Từ bảng biến thiên ta thấy

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x=0$ là mệnh đề đúng

B. Giá trị cực đại của hàm số là $f(1)$ là mệnh đề đúng

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ là mệnh đề sai

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ là mệnh đề sai

Câu 13: Cho hàm số $y=\sqrt{8+2x-x^2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. Tập xác định của hàm số là $D=[-2;4]$

B. Hàm số có $y'=\dfrac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$

D. Giá trị cực đại của hàm số là 0

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. Đ**	**D. S**

Xét hàm số: $y=\sqrt{8+2x-x^2}$ có:

A. TXĐ: $D=[-2;4]$ là mệnh đề đúng

B. Ta có $y'=\dfrac{\left(8+2x-x^2\right)'}{2\sqrt{8+2x-x^2}}=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{8+2x-x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$ là mệnh đề đúng

C. Ta có $y'=0\Leftrightarrow x=1$.

Ta có bảng biến thiên:

x	-2		1		4
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;4)$ là mệnh đề đúng

D. Giá trị cực đại của hàm số là 0 là mệnh đề sai

Câu 14: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-m}{x-1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề

A. Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

B. Khi $m=0$ thì đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $x=1$

C. Khi $m=-1$ thì $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$

D. Hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó khi $m>2$

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S

A. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ là mệnh đề đúng

B. Khi $m=0$ thì $y=\dfrac{2x}{x-1}$. Do đó đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $x=0$.

Do đó mệnh đề B là sai

C. Khi $m=-1$ thì $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$. Khi đó $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$ là mệnh đề đúng

D. Ta có: $y'=\dfrac{m-2}{(x-1)^2}$. Để hàm số đồng biến trên khoảng xác định của nó thì

$y'>0\Leftrightarrow\dfrac{m-2}{(x-1)^2}>0\quad\forall x\in D\Leftrightarrow m>2$ suy ra $m\in(2;+\infty)$.

Do đó Mệnh đề D đúng.

Câu 11: Cho hàm số $y=\dfrac{\cos x-2}{\cos x-m}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. Đồ thị hàm số đã cho không cắt trục Ox.

B. Đặt $t=\cos x$ thì $0<t<1$

C. Khi $y=1$ thì $m=2$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $m>2$

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. S**	**D. S**

A. Đồ thị hàm số đã cho không cắt trục Ox là mệnh đề đúng

Vì $\cos x - 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

B. Đặt $t=\cos x$, với $x \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \; 0<t<1$ là mệnh đề đúng

C. Khi $y=1$ thì $m=1$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ khi $m>2$

Đặt $t=\cos x, 0<t<1$ ta có hàm số: $y=\dfrac{t-2}{t-m}(2), 0<t<1 \Rightarrow y'=\dfrac{-m+2}{(t-m)^2}$.

Để hàm số ban đầu nghịch biến trên khoảng $\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì hàm số (2) phải nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ do đó: $\begin{cases} -m+2<0 \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m\leq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>2 \\ \left[\begin{array}{l} m\geq 1 \\ m\leq 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m>2$.

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-2mx^2+(m+3)x-5+m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Trả lời : 2

Ta có tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=x^2-4mx+(m+3)$.

$y'=0 \Leftrightarrow x^2-4mx+(m+3)=0$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y'\geq 0, \forall x\in\mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow \Delta'\leq 0 \Leftrightarrow (-2m)^2-1.(m+3)\leq 0 \Leftrightarrow 4m^2-m-3\leq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4}\leq m\leq 1$.

Vậy $-\dfrac{3}{4}\leq m\leq 1$.

Vậy có 2 giá trị

Câu 2: Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $y=\dfrac{-mx+3m+4}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Lời giải

Trả lời : 2

$$y' = \frac{m^2 - 3m - 4}{(x-m)^2}$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$ thì $y' < 0, \forall x \in (1;+\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \notin (1;+\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1;4) \\ m \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \le 1.$$

Vậy có 2 giá trị

Câu 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm m để hàm số $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - 4\cot x - (m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0;\pi)$.

Lời giải

Trả lời : 5

- Ta có: $y' = -\cos^2 x.\sin x + \frac{4}{\sin^2 x} + (m+1).\sin x = \sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m.\sin x$.

- Hàm số đồng biến trên $(0;\pi)$ khi và chỉ khi $y' \ge 0$, $\forall x \in (0;\pi)$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m.\sin x \ge 0, \ \forall x \in (0;\pi)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{4}{\sin^3 x} \ge -m, \ \forall x \in (0;\pi) \ (1).$$

- Xét hàm số: $g(x) = \sin^2 x + \frac{4}{\sin^3 x}$, trên $(0;\pi)$.

Có $g'(x) = 2\sin x.\cos x - \frac{12\cos x}{\sin^4 x} = 2\cos x.\left(\sin x - \frac{6}{\sin^4 x}\right) = 2\cos x.\frac{\sin^5 x - 6}{\sin^4 x}$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (0;\pi).$$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$+\infty$

- Do đó: $(1) \Leftrightarrow -m \le \min\limits_{x\in(0;\pi)} g(x) \Leftrightarrow -m \le 5 \Leftrightarrow m \ge -5$.

M là giá trị nguyên âm nên $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1\}$

Vậy có 5 giá trị

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm như hình vẽ sau:

x	$-\infty$		-10		-2		3		8		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Tìm m để hàm số $y = f(x^3 + 4x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$?

Lời giải

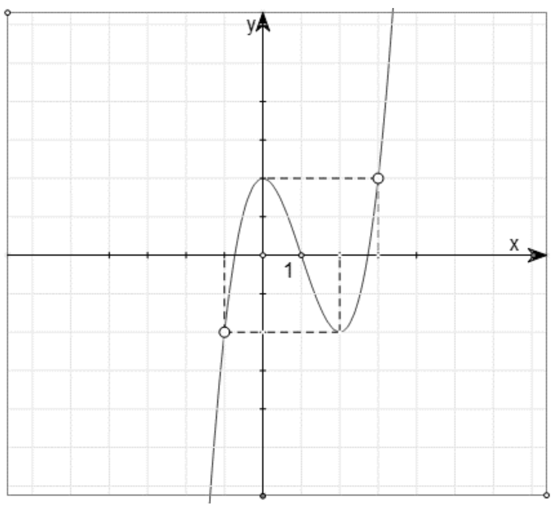
Trả lời : 3

Đặt $t = x^3 + 4x + m \Rightarrow t' = 3x^2 + 4$ nên t đồng biến trên $(-1;1)$ và $t \in (m-5; m+5)$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để hàm số $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(m-5; m+5)$.

Dựa vào bảng biến thiên ta được $\begin{cases} m-5 \ge -2 \\ m+5 \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 3 \\ m \le 3 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3$

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tính tổng tất cả các phần tử trong S bằng



Lời giải

Trả lời : 14

Xét hàm số $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$

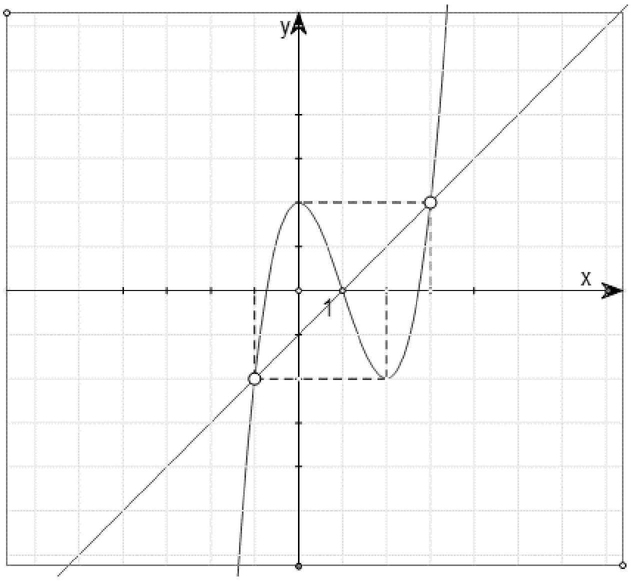
$g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Xét phương trình $g'(x)=0(1)$

Đặt $x-m=t$, phương trình (1) trở thành $f'(t)-(t-1)=0 \Leftrightarrow f'(t)=t-1(2)$

Nghiệm của phương trình (2) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=f'(t)$ và $y=t-1$

Ta có đồ thị các hàm số $y=f'(t)$ và $y=t-1$ như sau:



Căn cứ đồ thị các hàm số ta có phương trình (2) có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=1 \\ t=3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=m-1 \\ x=m+1 \\ x=m+3 \end{array}\right.$

Ta có bảng biến thiên của $y=g(x)$

x	$-\infty$		$m-1$		$m+1$		$m+3$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘		↗		↘		↗	$+\infty$

Để hàm số $y=g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ cần $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m-1\le 5 \\ m+1\ge 6 \end{cases} \\ m+3\le 5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5\le m\le 6 \\ m\le 2 \end{array}\right.$

Vì $m\in\mathbb{N}^* \Rightarrow m$ nhận các giá trị $1;2;5;6 \Rightarrow S=14$.

Câu 6: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

Lời giải

Trả lời : 6

Xét hàm số $f(x)=3x^4-4x^3-12x^2+m^2$; $f'(x)=12x^3-12x^2-24x$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x_1=0; x_2=-1; x_3=2$. Suy ra, hàm số $y=f(x)$ có 3 điểm cực trị.

$\Rightarrow$ Hàm số $y=\left|3x^4-4x^3-12x^2+m^2\right|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow 3x^4-4x^3-12x^2+m^2=0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Phương trình $3x^4-4x^3-12x^2+m^2=0 \Leftrightarrow -3x^4+4x^3+12x^2=m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x)=-3x^4+4x^3+12x^2$; $g'(x)=-12x^3+12x^2+24x$.

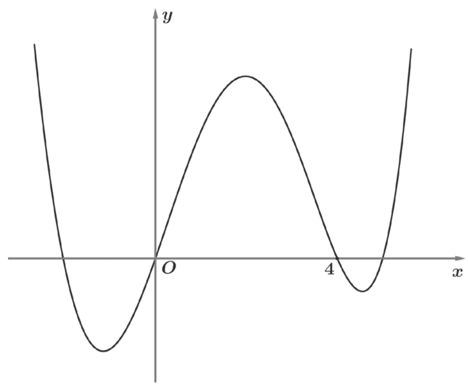
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	32	$\searrow$	$-\infty$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2<0 \\ 5<m^2<32 \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{5}<|m|<\sqrt{32}$.

Vậy $m \in \{3;4;5;-3;-4;-5\}$.

Câu 7: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right)$ là



Lời giải

Trả lời : 7

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau

x	$-\infty$		a		b		c		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Ta có $g(x)=f\left(x^3+3x^2\right) \Rightarrow g'(x)=\left(3x^2+6x\right).f'\left(x^3+3x^2\right)$

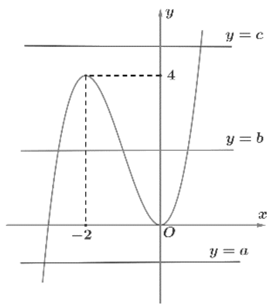
Cho $g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x^2+6x=0 \\ f'(x^3+3x^2)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \\ x^3+3x^2=a;\ a<0 \\ x^3+3x^2=b;\ 0<b<4 \\ x^3+3x^2=c;\ c>4 \end{array}\right.$

Xét hàm số $h(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow h'(x)=3x^2+6x$. Cho $h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Ta có đồ thị của hàm $h(x)=x^3+3x^2$ như sau



Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y=a$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

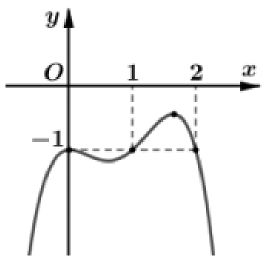
Đường thẳng $y=b$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y=c$ cắt đồ thị hàm số $y=h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x)=0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x)=f(x^3+3x^2)$ có 7 cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x)+x$ đạt cực tiểu tại điểm tại điểm nào x bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời : 1

Xét hàm số $g(x)=f(x)+x$ có $g'(x)=f'(x)+1$

Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ có:

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\searrow$				CT	$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	

Từ đó suy ra hàm số $y=g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x=1$.

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm $f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x)$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Tìm tất cả giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2-8x+m)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Trả lời : 15

Đặt $g(x)=f(x^2-8x+m)$

$$f'(x)=(x-1)^2(x^2-2x) \Rightarrow g'(x)=(2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m)(x^2-8x+m-2)$$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=4 & \\ x^2-8x+m-1=0 & (1) \\ x^2-8x+m=0 & (2) \\ x^2-8x+m-2=0 & (3) \end{array}\right.$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2-8x+m-1)^2\ge 0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

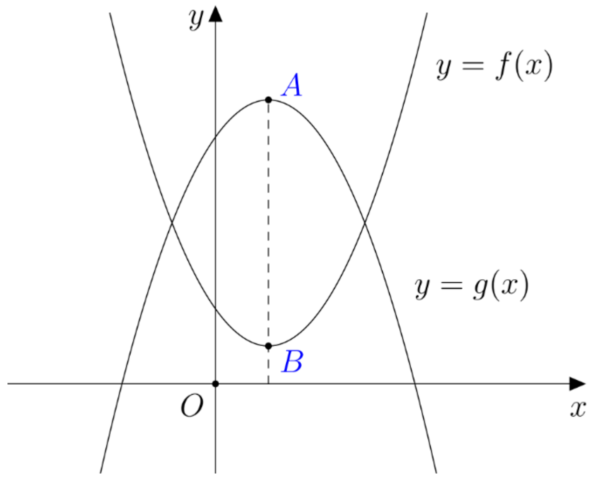
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16-m>0 \\ 16-m+2>0 \\ 16-32+m\ne 0 \\ 16-32+m-2\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<16 \\ m<18 \\ m\ne 16 \\ m\ne 18 \end{cases} \Leftrightarrow m<16.$$

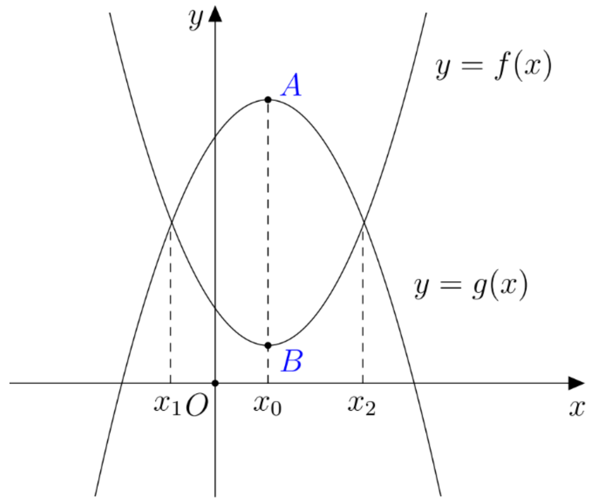
Do m nguyên dương nên $0<m<16$. Vậy cos15 giá trị

Câu 10: Cho hai hàm đa thức $y=f(x)$, $y=g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A, đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB=\frac{7}{4}$. Tìm giá trị lớn nhất của tham số m để hàm số $y=\left|\left|f(x)-g(x)\right|+m\right|$ có đúng 5 điểm cực trị?

Lời giải

Trả lời : $-\dfrac{7}{4}$





Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$, ta có: $h'(x) = f'(x) - g'(x)$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$;

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2$ $(x_1 < x_0 < x_2)$;

$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = -\dfrac{7}{4}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ là:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{7}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = k(x) = \left|f(x) - g(x)\right|$ là:

x	$-\infty$		x_1		x_0		x_2		$+\infty$
$k'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
$k(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{7}{4}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó, hàm số $y = k(x) + m$ cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số $y=|k(x)+m|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y=k(x)+m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $k(x)+m=0$, mà hàm số $y=k(x)+m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y=\left||f(x)-g(x)|+m\right|$ có đúng năm điểm cực trị khi phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y=k(x)$, phương trình $k(x)+m=0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi $-m\geq\frac{7}{4}\Leftrightarrow m\leq-\frac{7}{4}$.

Vậy $m=-\frac{7}{4}$

Câu 11: Tìm giá trị thực m lớn nhất sao cho phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm thực?

Lời giải

Trả lời: 2

Điều kiện: $x\geq-1$.

Ta có $2\sqrt{x+1}=x+m\Leftrightarrow 2\sqrt{x+1}-x=m\ \ (*)$.

Số nghiệm của phương trình $(*)$ bằng số giao điểm của hai đồ thị $y=2\sqrt{x+1}-x\ \ (C)$ và $y=m$.

Xét hàm số $y=\sqrt{x+1}-x$ với $x\geq-1$ ta có $y'=\frac{1}{\sqrt{x+1}}-1$.

Giải phương trình $y'=0\Leftrightarrow\sqrt{x+1}=1\ \Leftrightarrow x=-1$.

Lập bảng biến thiên

x	-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y'		$\nearrow$	2	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có phương trình $2\sqrt{x+1}=x+m$ có nghiệm khi $m\leq 2$.

Câu 12: Tìm giá trị nhỏ nhất của m sao cho hàm số $y=2x^3-3x^2-6mx+m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có $y'=6x^2-6x-6m$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$ khi và chỉ khi $y' \le 0$ với $\forall x \in \left(-1;1\right)$ hay $m \ge x^2 - x$ với $\forall x \in \left(-1;1\right)$.

Xét $f\left(x\right) = x^2 - x$ trên khoảng $\left(-1;1\right)$ ta có $f'\left(x\right) = 2x - 1$; $f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	-1		$\frac{1}{2}$		1
y'		$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m \ge f\left(x\right)$ với $\forall x \in \left(-1;1\right) \Leftrightarrow m \ge 2$.

* Có thể sử dụng $y' \le 0$ với $\forall x \in \left(-1;1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} y'\left(-1\right) \le 0 \\ y'\left(1\right) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m \le 0 \\ 12 - 6m \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge 0 \\ m \ge 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \ge 2$.

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của m để hàm số $y = \dfrac{x^2 + \left(m+1\right)x - 1}{2 - x}$ (m là tham số) nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

Lời giải

Trả lời: $-2,5$

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{2\right\}$. Đạo hàm: $y' = \dfrac{-x^2 + 4x + 2m + 1}{\left(2-x\right)^2} = \dfrac{g\left(x\right)}{\left(2-x\right)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $y' \le 0$, $\forall x \in D$

$\Leftrightarrow\ g\left(x\right) = -x^2 + 4x + 2m + 1 \le 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$

Điều kiện: $\Delta' \le 0 \Leftrightarrow 4 - \left(-1\right).\left(2m+1\right) \le 0 \Leftrightarrow 2m + 5 \le 0 \Leftrightarrow m \le -\dfrac{5}{2}$.

Câu 14: Gọi S tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \dfrac{1}{3}x^3 - \left(m+1\right)x^2 + \left(m^2 + 2m\right)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $\left(-1;1\right)$. Số phần tử của tập S là

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có $y' = x^2 - 2\left(m+1\right)x + \left(m^2 + 2m\right)$

Xét $y'=0 \Leftrightarrow x^2-2(m+1)x+(m^2+2m)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m \\ x=m+2 \end{array}\right. \forall m$

Hàm số luôn nghịch biến trong khoảng $(m;m+2)$ $\forall m$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ thì $(-1;1)\subset(m;m+2)$.

Nghĩa là: $m\le -1<1\le m+2 \Leftrightarrow \begin{cases} m\le -1 \\ -1<1 \\ 1\le m+2 \end{cases} \Leftrightarrow m=-1$.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{2x+m}$, m là tham số thực. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$. Tìm số phần tử của S.

Lời giải

Trả lời: 2

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$

$y'=\dfrac{m^2-4}{(2x+m)^2}$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4<0 \\ \dfrac{-m}{2}\notin(0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} \dfrac{-m}{2}\le 0 \\ \dfrac{-m}{2}\ge 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2<m<2 \\ \left[\begin{array}{l} m\ge 0 \\ m\le -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow 0\le m<2$.

Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{\ln x-6}{\ln x-2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e)$. Tìm số phần tử của S.

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Trả lời: 2

Xét $x\in(1;e)\Rightarrow \ln x\in(0;1)$.

Ta có:

$$y'=\frac{(\ln x-6)'(\ln x-2m)-(\ln x-2m)'(\ln x-6)}{(\ln x-2m)^2}=\frac{-2m+6}{(\ln x-2m)^2}\cdot\frac{1}{x}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;e) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (1;e) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m+6>0 \\ 2m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ m \le 0 \vee m \ge \frac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow m \le 0 \vee \frac{1}{2} \le m < 3$.

Vậy $S = \{1;2\}$.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (2m-3)x - (3m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Trả lời: 5

$y = (2m-3)x - (3m+1)\cos x \Rightarrow y' = 2m-3+(3m+1)\sin x$.

Hàm số $y = (2m-3)x - (3m+1)\cos x$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y \ge 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow (3m+1)\sin x \ge 3-2m$ (1) với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m = -\frac{1}{3}$ ta có $(1) \Leftrightarrow 0.\sin x \ge 3+\frac{2}{3}$. Do đó $m = -\frac{1}{3}$ không thỏa mãn.

+ Với $m > -\frac{1}{3}$ ta có $(1) \Leftrightarrow \sin x \ge \frac{3-2m}{1+3m}$ luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-2m}{1+3m} \le -1 \Leftrightarrow \frac{4+m}{1+3m} \le 0$.

$\Leftrightarrow \frac{4+m}{1+3m} \le 0 \Leftrightarrow -4 \le m < -\frac{1}{3}$.

+ Với $m < -\frac{1}{3}$ ta có $(1) \Leftrightarrow \sin x \le \frac{3-2m}{1+3m}$ luôn đúng với $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{3-2m}{1+3m} \ge 1$.

$\Leftrightarrow \frac{2-5m}{1+3m} \ge 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < m \le \frac{2}{5}$.

Mặt khác $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0;-1;-2;-3;-4\}$

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn bài ra.

Câu 18: Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1;+\infty]$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

Lời giải

Trả lời: 3

$y' = \frac{x^3 - mx + 1}{|x^3 - mx + 1|}.(3x^2 - m)$

Để hàm số đồng biến trên $[1;+\infty]$ thì $g(x) = (x^3 - mx + 1)(3x^2 - m) \ge 0$ $(*)$, $\forall x \ge 1$.

Với $m = 0$ ta có $g(0) = (x^3+1).3x^2 > 0, \forall x \ge 1$.

Với $m > 0$. Do $m \in \mathrm{N} \Rightarrow (*)$ luôn có 1 nghiệm là $\sqrt{\frac{m}{3}}$. Ta chú ý $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

Do vậy, điều kiện cần để $g(x) \ge 0, \forall x \ge 1$ là $\sqrt{\frac{m}{3}} \le 1 \Rightarrow m \le 3$.

Với $m=1$, $m=2$ thay vào kiểm tra BXD thấy đúng $\Rightarrow$ nhận $m=1;m=2$.

Với $m=3$ thì $g(x)=(x^3-3x+1)(3x^2-3)$ có một nghiệm $x_0>1$ $\Rightarrow$ do vậy trên miền $[1;x_0]$ thì $g(x)<0$ $\Rightarrow$ trái yêu cầu bài toán.

Vậy $S=\{0;1;2\}$. Tổng các phần tử của S là 3.

Câu 19: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=3x+\dfrac{m^2+3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Trả lời: 2

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Ta có $y'=3-\dfrac{m^2+3m}{(x+1)^2}=\dfrac{3x^2+6x+3-m^2-3m}{(x+1)^2}$

Hàm số đồng biết trên từng khoảng xác định

$\Leftrightarrow y'\ge 0\quad \forall x\ne -1 \Leftrightarrow 3x^2+6x+3-m^2-3m\ge 0\ \ \forall x\ne -1$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=9+3(m^2+3m)-9\le 0\\ m^2+3m\ne 0\end{cases} \Leftrightarrow -3<m<0$

Mà m nguyên nên $m\in\{-2,-1\}$.

Câu 20: Tìm giá trị m lớn nhất để hàm số $y=8^{\cot x}+(m-3).2^{\cot x}+3m-2$ đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$.

Lời giải

Trả lời: -9

Đặt $2^{\cot x}=t$ vì $x\in\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ nên $0<t\le 2$. Khi đó ta có hàm số: $y=t^3+(m-3)t+3m-2$.

$\Rightarrow y'=3t^2+m-3$.

Để hàm số đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ thì hàm số phải nghịch biến trên $(0;2]$ hay $3t^2+m-3\le 0,\forall t\in(0;2]\Leftrightarrow m\le 3-3t^2,\forall t\in(0;2]$.

Xét hàm số: $f(t)=3-3t^2$, $\forall t\in(0;2]\Rightarrow f'(t)=-6t$.

$f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$.

Ta có bảng biến thiên:

t	0		2
$f'(t)$	0	$-$	
$f(t)$	3	$\searrow$	-9

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $-9 \le f(t) < 3, \forall t \in (0;2]$.

Vậy hàm số đồng biến trên $\left[\dfrac{\pi}{4};\pi\right)$ khi $m \le -9$.

Câu 21: Cho hàm số $y = \dfrac{mx + 2015m + 2016}{-x - m}$ với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định. Tính số phần tử của S.

Lời giải

Trả lời: 2016

Ta có $y' = \dfrac{-m^2 + 2015m + 2016}{(x+m)^2}, \forall x \ne -m$.

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y' > 0, \forall x \ne -m$

$\Leftrightarrow -m^2 + 2015m + 2016 > 0 \Leftrightarrow -1 < m < 2016$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $S = \{0;1;...;2015\}$.

Vậy số phần tử của tập S là 2016.

Câu 22: Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $y = x + m\sqrt{x^2 - 2x + 3}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$?

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có $y' = 1 + m\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$ thì $y' \ge 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$

$\Leftrightarrow 1 + m\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \ge 0, \forall x \in (-\infty;+\infty) \ (1)$.

Nếu $x = 1$ thì (1) luôn thỏa $\forall m$.

Nếu $x > 1$ thì $(1) \Leftrightarrow m \ge -\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1} \Leftrightarrow m \ge -\sqrt{1 + \dfrac{2}{(x-1)^2}} \Leftrightarrow m \ge -1$.

Nếu $x<1$ thì $(1) \Leftrightarrow m \le -\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x-1} \Leftrightarrow m \le \sqrt{1+\dfrac{2}{(x-1)^2}} \Leftrightarrow m \le 1$.

Vậy $-1 \le m \le 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1;0;1\}$.

Do đó có 3 giá trị nguyên m cần tìm.

Câu 23: Cho $y=(m-3)x^3+2(m^2-m-1)x^2+(m+4)x-1$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy. S có bao nhiêu phần tử?

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $y'=3(m-3)x^2+4(m^2-m-1)x+m+4$

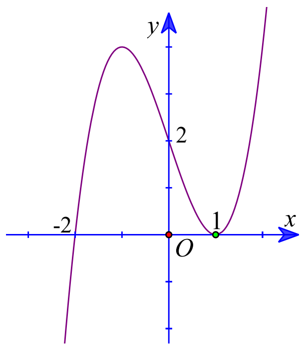
$y'=0 \Leftrightarrow 3(m-3)x^2+4(m^2-m-1)x+m+4=0$.

Để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Oy thì phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

Suy ra $\begin{cases} 3(m-3) \ne 0 \\ 3(m-3).(m+4)<0 \end{cases} \Leftrightarrow -4<m<3$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m=\{-3;-2;-1;0;1;2\}$. Vậy S có 6 phần tử.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=f(x^2-3)$.



Lời giải

Trả lời: 3

Quan sát đồ thị ta có $y=f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x=-2$ nên hàm số $y=f(x)$ có một điểm cực trị là $x=-2$.

Ta có $y'=\left[f(x^2-3)\right]'=2x.f'(x^2-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$.

Do đó hàm số $y=f(x^2-3)$ có ba cực trị.

Câu 25: Biết rằng đồ thị hàm số $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}mx^2+x-2$ có giá trị tuyệt đối của hoành độ hai điểm cực trị là độ dài hai cạnh của tam giác vuông có cạnh huyền là $\sqrt{7}$. Hỏi có mấy giá trị của m ?

Lời giải

Trả lời: 3

Có $y'(x)=x^2-mx+1$, $y'=0 \Leftrightarrow x^2-mx+1=0 \ (1)$.

• Để hàm số có cực trị thì (1) phải có hai nghiệm phân biệt.

Điều này tương đương với $\Delta>0 \Leftrightarrow m^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$.

• Gọi hai nghiệm của (1) là x_1, x_2. Khi đó, ta có $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1.x_2=1 \end{cases}$.

Độ dài hai cạnh của tam giác vuông đó là $|x_1|$, $|x_2|$. Theo bài ra ta có phương trình:

$x_1^2+x_2^2=7 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=7 \Leftrightarrow m^2-2=7 \Leftrightarrow m^2=9 \Leftrightarrow m=\pm 3$.

Vậy có hai giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 26: Ta xác định được các số a, b, c để đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $(1;0)$ và có điểm cực trị $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

Trả lời: 25

Ta có: $y'=3x^2+2ax+b$.

Đồ thị hàm số $y=x^3+ax^2+bx+c$ đi qua điểm $(1;0)$ nên ta có: $a+b+c=-1$.

Đồ thị hàm số có điểm cực trị $(-2;0)$ nên $\begin{cases} 4a-2b+c=8 \\ y'(-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a-2b+c=8 \\ -4a+b=-12 \end{cases}$.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} a+b+c=-1 \\ 4a-2b+c=8 \\ -4a+b=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=0 \\ c=-4 \end{cases}$.

Vậy $T=a^2+b^2+c^2=25$.

Câu 27: Gọi A và B là các điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-1$. Tính diện tích S của tam giác OAB (O là gốc tọa độ)

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có $y=x^4-2x^2-1 \Rightarrow y'=4x^3-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \end{array}\right.$

Lại có $y''=12x^2-4 \Rightarrow \begin{cases} y''(0)<0 \\ y''(\pm 1)>0 \end{cases}$

Do đó $x=0$ là điểm cực đại và $x=\pm 1$ là điểm cực tiểu.

Với $x=\pm 1 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow A(1;-2),\ B(-1;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-2;0) \Rightarrow AB=|-2|=2.$

Đường thẳng $AB: y=-2 \Rightarrow d(O;AB)=2 \Rightarrow S_{OAB}=\frac{1}{2}AB.d(O;AB)=2.$

Câu 28: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+ax+b$, $(a,b\in\mathbb{R})$ có đồ thị (C). Biết đồ thị (C) có điểm cực trị là $A(1;3)$. Tính giá trị của $P=4a-b$.

Lời giải

Trả lời: 1

Để đồ thị (C) có điểm cực trị $A(1;3)$ điều kiện là:

$$\begin{cases} y'(1)=0 \\ y(1)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.1^2-4.1+a=0 \\ 1^3-2.1^2+a.1+b=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=3 \end{cases} \Rightarrow P=4a-b=1.$$

Câu 29: Cho hàm số $y=|x+3|+\frac{1}{x+1}$, gọi S là tổng tất cả các giá trị cực trị của hàm số. Giá trị của S bằng

Lời giải

Trả lời: 3,5

Tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có: $y=|x+3|+\frac{1}{x+1}=\begin{cases} x+3+\frac{1}{x+1} & \text{nếu } -3\le x\ne -1 \\ -x-3+\frac{1}{x+1} & \text{nếu } x<-3 \end{cases}$.

$$y'=\begin{cases} 1-\frac{1}{(x+1)^2} & \text{nếu } -3<x\ne -1 \\ -1-\frac{1}{(x+1)^2} & \text{nếu } x<-3 \end{cases};\ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \end{array}\right..$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-3		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$-$	$\vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra tổng tất cả các giá trị cực trị của hàm số là $S=-\dfrac{1}{2}+0+4=\dfrac{7}{2}$.

Câu 30: Biết $\dfrac{a}{b}$ là giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{2}{3}x^3-mx^2-2\left(3m^2-1\right)x+\dfrac{2}{3}$ có 2 điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1$. Tính giá trị biểu thức $S=a^2+b^2$.

Lời giải

Trả lời: 13

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Đạo hàm $y'=2x^2-2mx-6m^2+2$.

Hàm số có hai điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \Delta'>0 \Leftrightarrow m^2-2\left(-6m^2+2\right)>0 \Leftrightarrow 13m^2-4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \\ m<-\dfrac{2\sqrt{13}}{13} \end{array}\right.$$

Theo định lý Viet thì $\begin{cases} x_1+x_2=m \\ x_1x_2=-3m^2+1 \end{cases}$

Ta có $x_1x_2+2\left(x_1+x_2\right)=1 \Leftrightarrow -3m^2+1+2m=1 \Leftrightarrow 3m^2-2m=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=0 \\ m=\dfrac{2}{3} \end{array}\right.$

Chỉ có giá trị $m=\dfrac{2}{3}$ thỏa điều kiện, khi đó $S=a^2+b^2=2^2+3^2=13$.

Câu 31: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2+mx-1$ nằm bên phải trục tung. Tìm số phần tử của tập hợp $\left(-5;6\right)\cap S$.

Lời giải

Trả lời: 4

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$; $y'=3x^2+2x+m$.

Hàm bậc ba có cực trị khi $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta'=1-3m>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{1}{3}$ $\left(1\right)$.

Khi đó $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1-\sqrt{1-3m} \\ x=-1+\sqrt{1-3m} \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{1-3m}$		$-1+\sqrt{1-3m}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$y_{CĐ}$	$\searrow$	y_{CT}	$\nearrow$	$+\infty$

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số nằm về phía bên phải trục tung khi

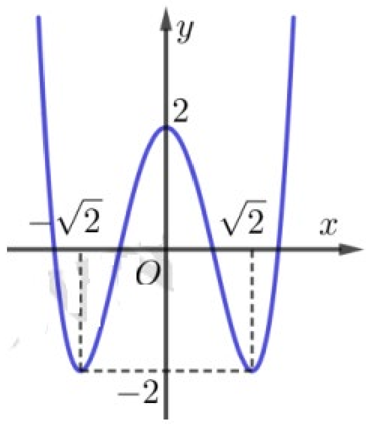
$$-1+\sqrt{1-3m}>0 \Leftrightarrow \sqrt{1-3m}>1 \Leftrightarrow m<0.$$

Kết hợp với (1) ta có $m<0$ thì điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho nằm bên phải trục tung.

Khi đó S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên âm.

Vậy $(-5;6)\cap S=\{-4;-3;-2;-1\} \Rightarrow (-5;6)\cap S$ có 4 phần tử.

Câu 32: Cho hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên:



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y=3^{f(x)}+2^{f(x)}$.

Hướng dẫn giải

Trả lời: 4

Ta thấy $f'(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ nên $f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=f'(x).3^{f(x)}+f'(x).2^{f(x)}=f'(x)\left[3^{f(x)}+2^{f(x)}\right]$.

Xét $y'=0 \Leftrightarrow f'(x)=0$.

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $f'(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt. Vậy $y'=0$ có 4 điểm cực trị.

Câu 33: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A,B. Khi $\angle AOB=90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

Lời giải

Trả lời: 0,06

$$y' = \frac{(2x+m)(x-1)-x^2-mx-m^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-(m+m^2)}{(x-1)^2}$$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A,B thì $y'=0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1+m+m^2 > 0 \\ -1-m-m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}$.

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y_A = 2x+m$.

Gọi x_A; x_B là hoành độ của A, B khi đó x_A; x_B là nghiệm của $x^2-2x-(m+m^2)$.

Theo định lí Viet ta có $x_A + x_B = 2$; $x_A.x_B = -m^2-m$.

$y_A = 2x_A + m$; $y_B = 2x_B + m$.

$\angle AOB = 90° \Rightarrow x_A.x_B + y_A.y_B = 0 \Leftrightarrow x_Ax_B + 4x_Ax_B + 2m(x_A+x_B) + m^2 = 0$

$\Leftrightarrow 5(-m^2-m) + 4m + m^2 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -\frac{1}{4}$.

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} \approx 0,06$.

BÀI 2: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập hợp D.

Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \le M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f\left(x_0\right) = M$. Kí hiệu $M = \max\limits_D f(x)$.

Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $f(x) \ge m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f\left(x_0\right) = m$. Kí hiệu $m = \min\limits_D f(x)$.

Chú ý: Ta quy ước khi chỉ nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ (mà không cho rõ tập hợp D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập xác định của nó.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3;1]$; b) $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3;1]$.

Với mọi $x \in [-3;1]$, ta có $f(x) = 2x + 3 \ge -3$. Mặt khác $f(-3) = -3$. Do đó $\min\limits_{[-3;1]} f(x) = -3$.

Với mọi $x \in [-3;1]$, ta có $f(x) = 2x + 3 \le 5$. Mặt khác $f(1) = 5$. Do đó $\max\limits_{[-3;1]} f(x) = 5$.

b) Xét hàm số $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$.

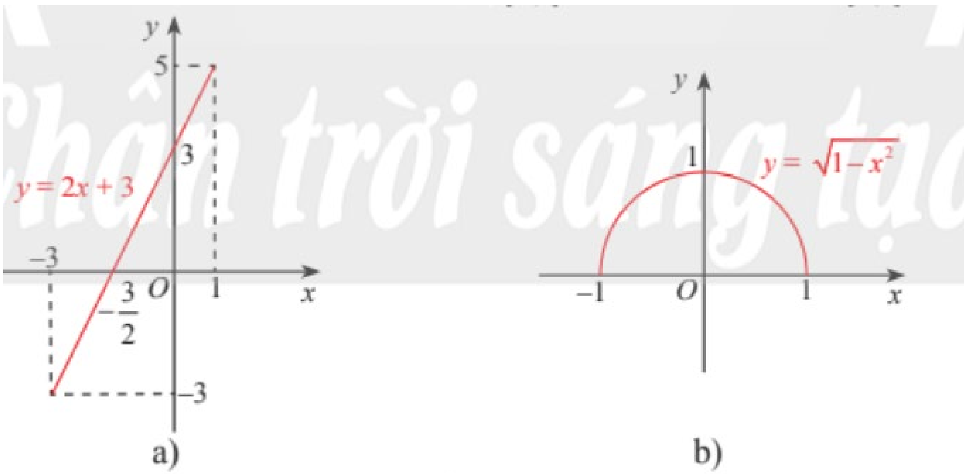
Tập xác định: $D = [-1;1]$. Ta có $0 \le g(x) \le 1$ với mọi $x \in [-1;1]$. Mặt khác $g(0) = 1$ và $g(1) = 0$.

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} g(x) = 0$ và $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = 1$.

Nhận xét: Nếu biết đồ thị của hàm số trên tập hợp D, ta có thể xác định được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D. Chẳng hạn:

- Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = 2x + 3$ trên đoạn $[-3;1]$ (Hình 2a), ta thấy với mọi $x \in [-3;1], f(x) \ge f(-3)$ và $f(x) \le f(1)$ nên $\min\limits_{[-3;1]} f(x) = f(-3) = -3$ và $\max\limits_{[-3;1]} f(x) = f(1) = 5$.

- Dựa vào đồ thị của hàm số $y = g(x) = \sqrt{1 - x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$ (Hình $2b$), ta thấy với mọi $x \in [-1;1], g(x) \ge g(1)$ và $g(x) \le g(0)$ nên $\min\limits_{[-1;1]} g(x) = g(1) = 0$ và $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = g(0) = 1$.



Hình 2

Chú ý: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số thường được tìm bằng cách sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = 3$.

Bảng biến thiên của hàm số trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$:

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{[-1;+\infty)} f(x) = f(-1) = -17$ và hàm số không có giá trị lớn nhất trên $[-1;+\infty)$.

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Một cách tổng quát, cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn [a ; b] và có đạo hàm trên $(a;b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a;b)$, ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn [a ; b] theo các bước nhu sau:

Bước 1. Tìm các điểm $x_1; x_2; \ldots; x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2. Tính $f(a); f(x_1); f(x_2); \ldots; f(x_n); f(b)$.

Bước 3. Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở Bước 2.

Khi đó: $M = \max\limits_{[a;b]} f(x), m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

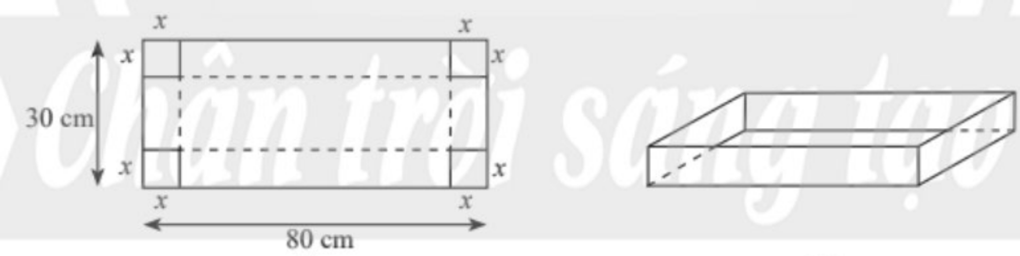
Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$ trên đoạn $[-1;3]$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 16x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \\ x = -2 \text{ (không } \in [-1;3] \text{)} \end{array}\right.$

$f(-1) = 2; f(0) = 9; f(2) = -7; f(3) = 18$. Vậy $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = f(3) = 18$ và $\min\limits_{[-1;3]} f(x) = f(2) = -7$.

Ví dụ 4. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng 30cm và chiều dài 80cm (Hình 4a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5 \le x \le 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình 4b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



a) b)

Hình 4

Lời giải

Thể tích chiếc hộp là: $V(x) = x(30-2x)(80-2x) = 2400x - 220x^2 + 4x^3$ với $5 \le x \le 10$.

Ta có: $V'(x) = 12x^2 - 440x + 2400$

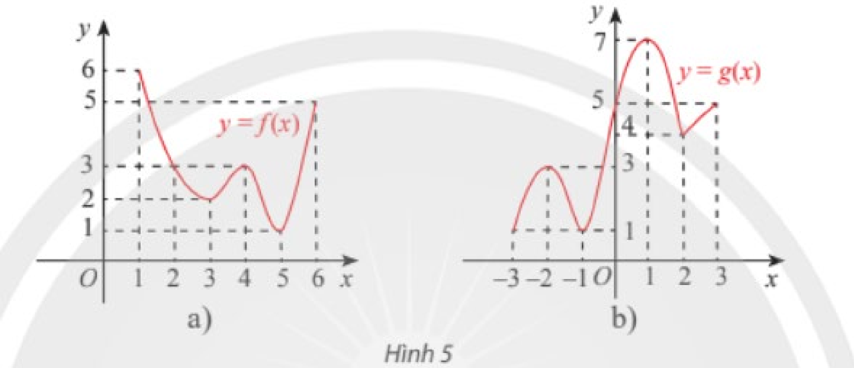
$V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{3}$ hoặc $x = 30$ (loại vì không thuộc $[5;10]$);

$V(5) = 7000; V\left(\dfrac{20}{3}\right) = \dfrac{200000}{27}; V(10) = 6000.$

Do đó $\max\limits_{[5;10]} V(x) = \dfrac{200000}{27}$ khi $x = \dfrac{20}{3}$. Vậy để thể tích chiếc hộp là lớn nhất thì $x = \dfrac{20}{3}\text{cm}$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho ở Hình 5 .



a) b)

Hình 5

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y=x^3-12x+1$ trên đoạn $[-1;3]$;

b) $y=-x^3+24x^2-180x+400$ trên đoạn $[3\ ;\ 11]$;

c) $y=\dfrac{2x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3\ ;\ 7]$;

d) $y=\sin 2x$ trên đoạn $\left[0;\dfrac{7\pi}{12}\right]$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y=x^3-3x-4$ trên nửa khoảng $[-3;2)$;

b) $y=\dfrac{3x^2-4x}{x^2-1}$ trên khoảng $(-1;+\infty)$.

4. Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng $4\,\text{m}$ (Hình 6). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

Hình 6

5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2\sqrt{1-x^2}+x^2$.

6. Khối lượng $q(\text{kg})$ của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng /kg) theo công thức $p=15-\dfrac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R=pq$.

a) Viết công thức biểu diễn R theo p.

b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

7. Hộp sữa $1l$ được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh $x\,\text{cm}$. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG TOÁN 1. TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN

1. BÀI TẬP MẪU

Câu 1: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1;3]$ như hình. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tìm giá trị của M?

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

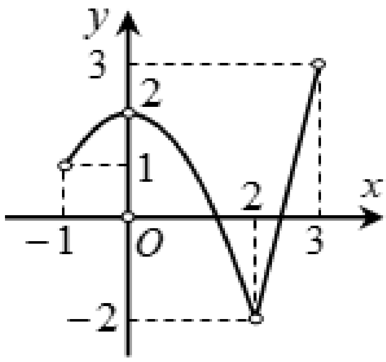
Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;3]$ có bảng biến thiên như hình bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Tính tổng $M+m$?

x	-2		0		1		3
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y			2				3
		↗		↘		↗	
	-2				1		

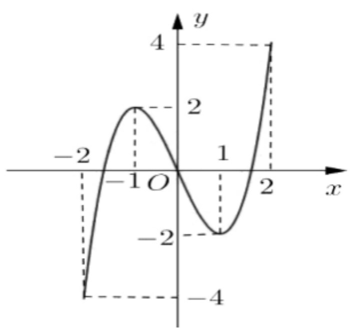
Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;4]$ như hình dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;4]$. Tính giá trị của $M+m$?

x	-1		1		3		4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			-4				-4
		↗		↘		↗	
	-24				-8		

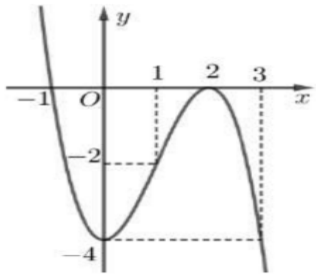
Câu 4: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M-m$ bằng bao nhiêu?



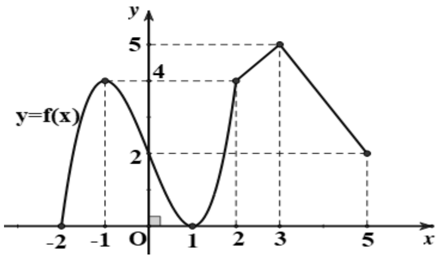
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị của $M-m$ bằng:



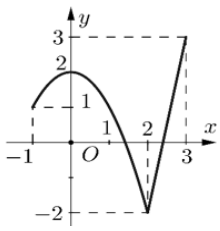
Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng:



Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(2\cos 5x + 1)$. Giá trị của $M - 2m$ bằng bao nhiêu?



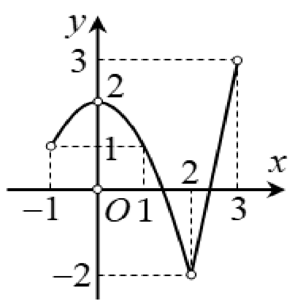
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$?



Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên bên dưới. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3|\cos x| - 1)$?

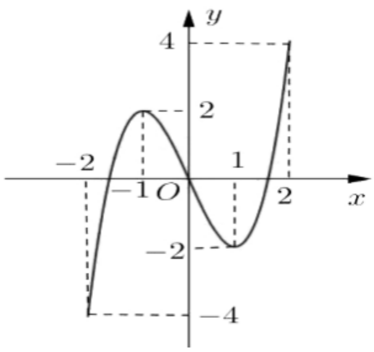
x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình.



Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1;0]$. Giá trị $M - m$ bằng?

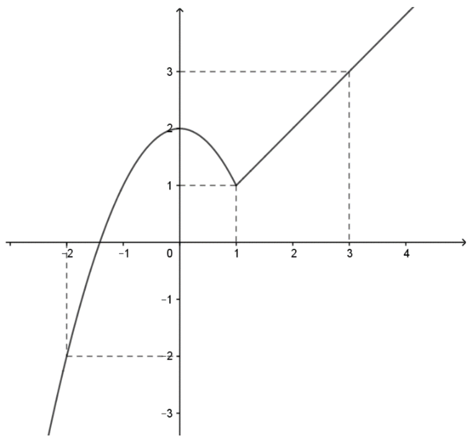
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1;1]$. Tính giá trị của $M - m$?

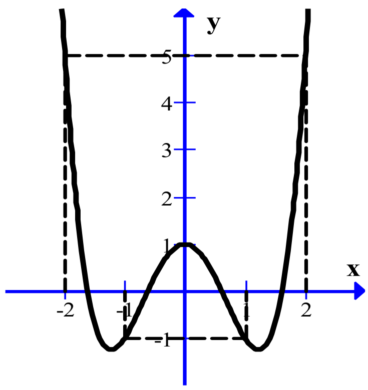
2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:

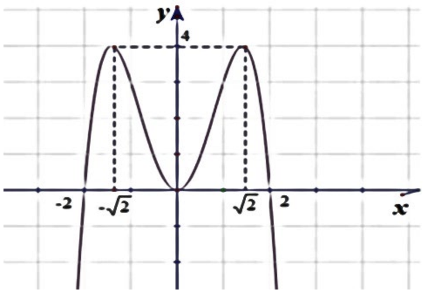


Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2,3]$?

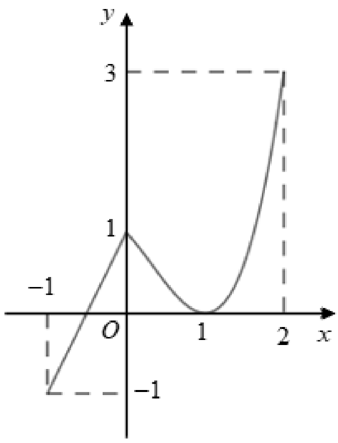
Bài 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $[-1;2]$?



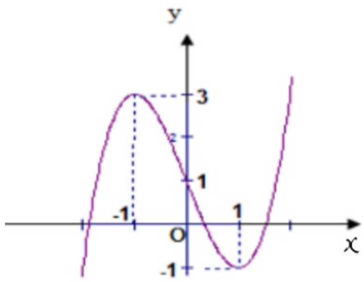
Bài 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$?



Bài 4. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$. Hãy tính giá trị của $M.m$?



Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Từ đồ thị, hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$?

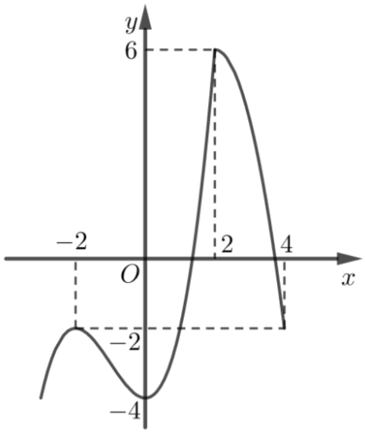


Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

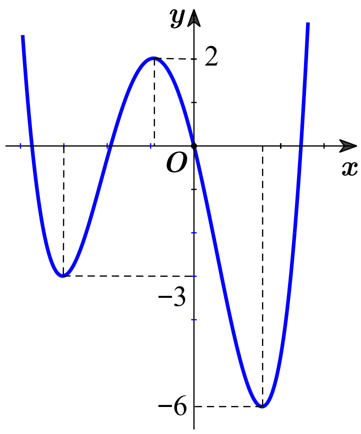
x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Cho biết giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$ là bao nhiêu?

Bài 7. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-2;4]$. Hãy tìm giá trị của $m+M$?



Bài 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên?

Bài 9. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên nửa khoảng $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ và có bảng biến thiên dưới đây:

x	$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\frac{2}{7}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

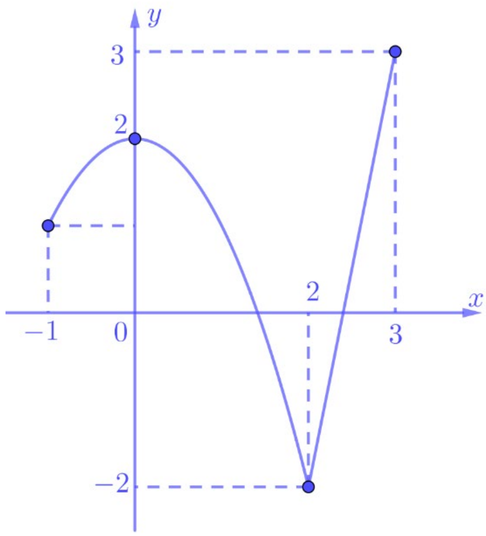
Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên:

Bài 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

Bài 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình bên



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của M bằng:

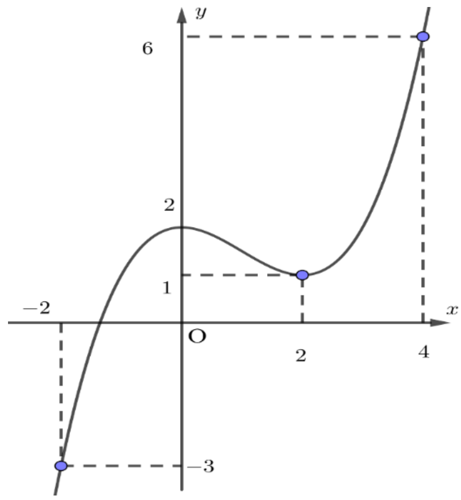
$x=3$.

Bài 12. Hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong $[-1;3]$ cho bởi hình dưới đây.

x	-1		0		2		3
y'		+	0	-	0	+	
y	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên?

Bài 13. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ sau:



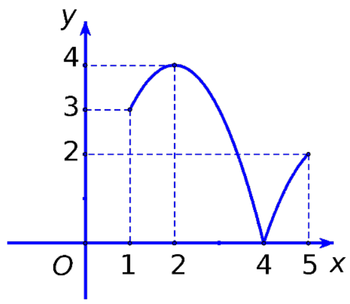
Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$ bằng bao nhiêu?

Bài 14. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	||	$-$	
y	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

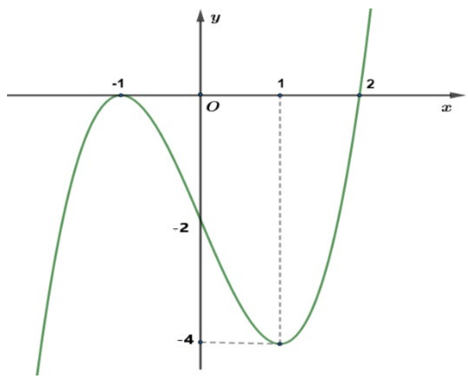
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

Bài 15. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;5]$?

Bài 16. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



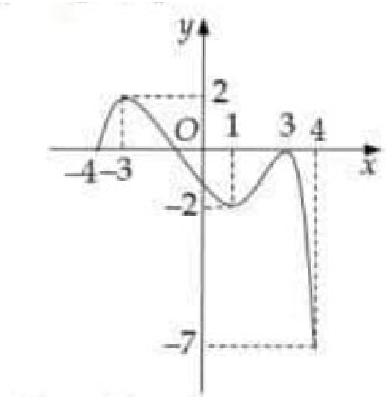
Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$ bằng bao nhiêu?

Bài 17. Một hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	
y	1	$\nearrow$	4	$\searrow$	2	$\nearrow$	5	$\searrow$	0

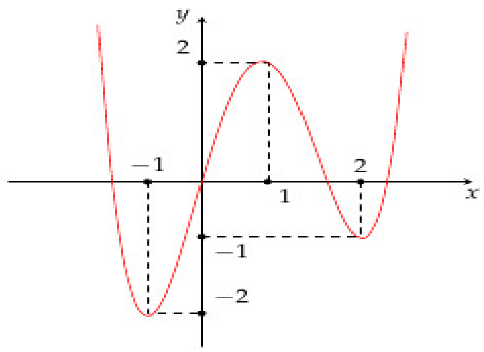
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên?

Bài 18. Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4;4]$.



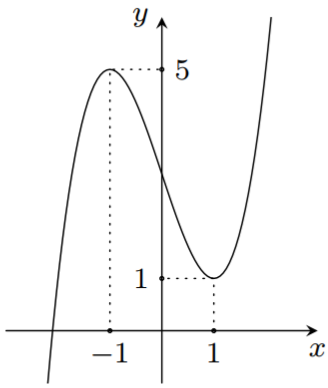
Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-4;4]$tại điểm nào?

Bài 19. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau



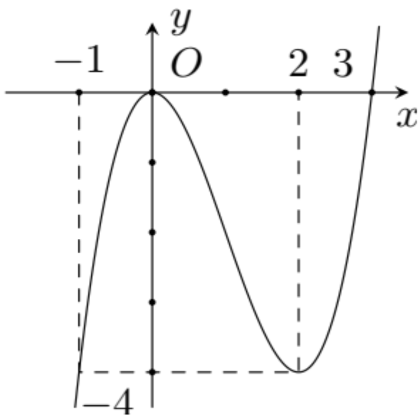
Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$?

Bài 20. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình sau:



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$?

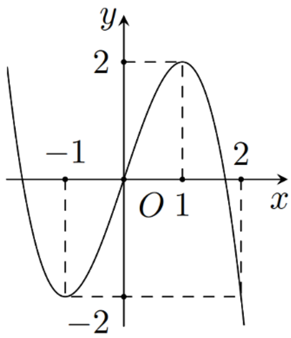
Bài 21. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$?

.

Bài 22. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình bên.



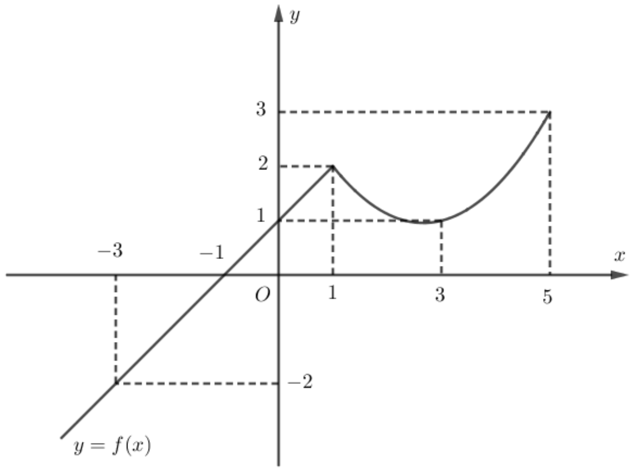
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $[0;2]$?

Bài 23. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $\left[-1;3\right]$ như hình vẽ.

x	-1		0		2		3
$f'\left(x\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f\left(x\right)$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

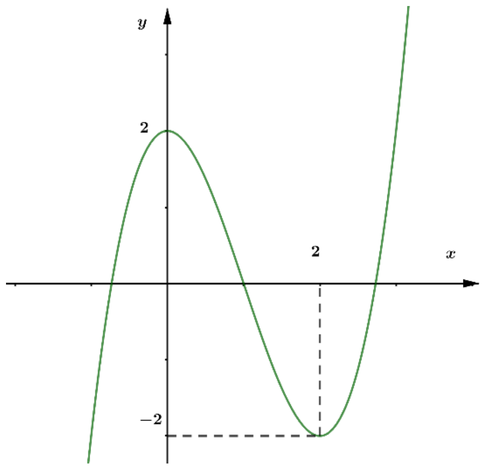
Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$?

Bài 24. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-3;5\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;5\right]$?

Bài 25. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$.



Hãy tìm giá trị của $M+n$?

Bài 26. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-3;2\right]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên $\left[-3;2\right]$.

x	-3		0		1		2
$f(x)$	-4	↗	2	↘	0	↗	1

Tính $M.m$?

Bài 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đạt giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1;+\infty)$ tại điểm nào?

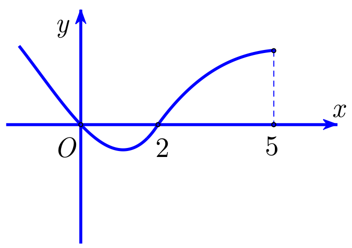
Bài 28. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0

x	0		4		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	16	↘	0

.

Hãy cho biết $x_0.f(x_0)$ bằng bao nhiêu ?

Bài 29. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ tại mọi $x\in\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ dưới đây.



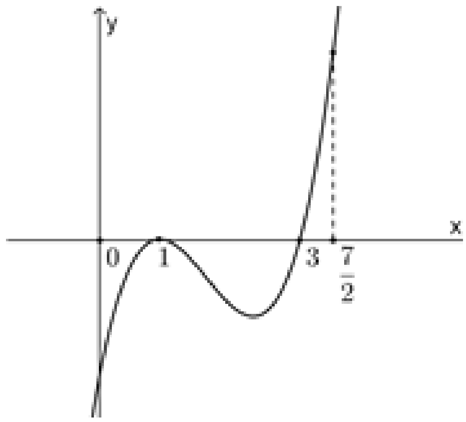
Biết rằng $f\left(0\right)+f\left(3\right)=f\left(2\right)+f\left(5\right)$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;5\right]$?

Bài 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	||	$+$	0	$-$	
y	5	↘	-2	↗	4	↘	-1

Tìm điểm cực đại và điểm tiểu của đồ thị hàm số trên?

Bài 31. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



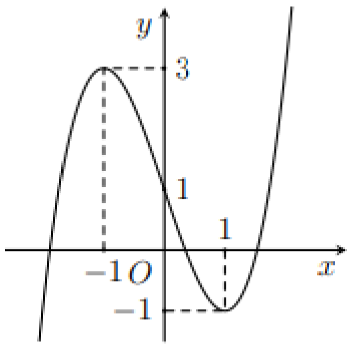
Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\frac{7}{2}\right]$ tại điểm nào?

Bài 32. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

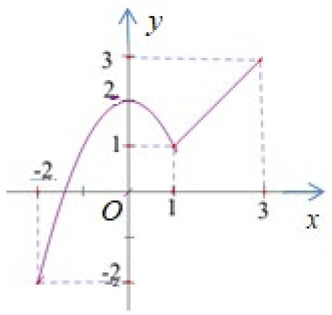
Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-\infty;1)$ là bao nhiêu?

Bài 33. Đồ thị của hàm số $f(x)$ có dạng đường cong trong hình vẽ bên.



Gọi M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;1]$.
Tính $P = M - 2m$?

Bài 34. Cho hàm số $y = f(x)$, $x \in [-2;3]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-2;3]$.



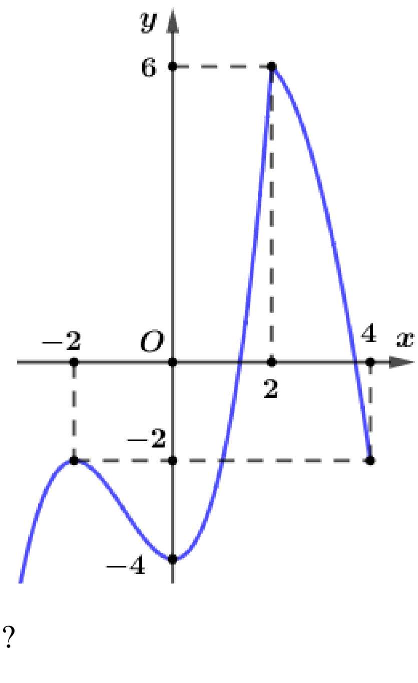
Tính giá trị $M+m$?

Bài 35. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2022	$\searrow$	m

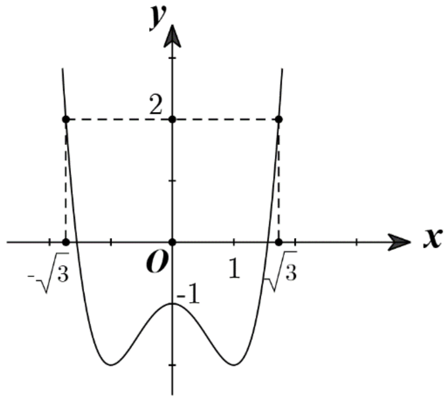
Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất?

Bài 36. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2;4\right]$.



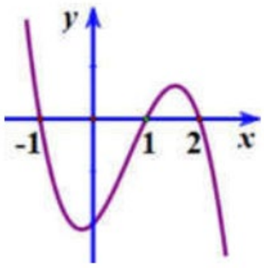
Tính giá trị của M^2+m^2?

Bài 37. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên.



Đặt $h(x)=3f(x)-x^3+3x$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)$ trên $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$?

Bài 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$?

Bài 39. Cho hàm số $y=f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

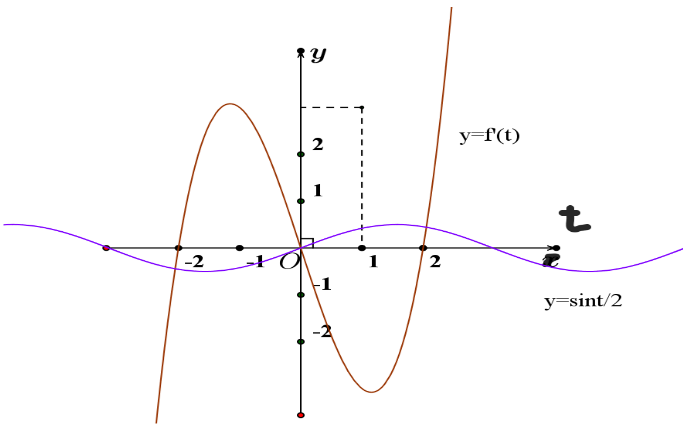
x	$-\infty$	-2	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0		0		0	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(2x)-\sin^2 x$ trền đoạn $[-1;1]$?

Lời giải

$g'(x)=2f'(2x)-2\sin x.\cos x=2f'(2x)-\sin 2x$. Đặt $t=2x \Rightarrow t\in[-2;2]$.

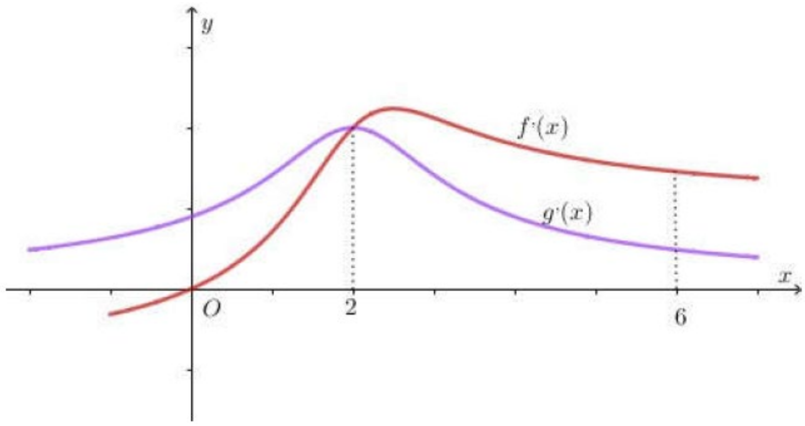
$g'(t)=0 \Leftrightarrow 2f'(t)-\sin t=0 \Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{\sin t}{2}, \forall t\in[-2;2]$.



t	-2		-1		0		1		2
$g'(t)$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$g(t)$	$g(-2)$	$\nearrow$			$g(0)$	$\searrow$			$g(2)$

Vậy giá trị lớn nhất là $g(0) = f(0)$.

Bài 40. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0) - f(6) < g(0) - g(6)$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ trên đoạn $[0;6]$?

Bài 41. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f\left(4x - x^2\right) + \dfrac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + \dfrac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$?

DẠNG TOÁN 2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN

☆☆☆

Tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Phương pháp:

Bước 1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tính $f'(x)$ và tìm những điểm x_i sao cho tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 2. Tính $f(a),\ f(b),\ f(x_i)$.

Bước 3. Kết luận: $\begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f(x) = \max\left\{f(a);\ f(b);\ f(x_i)\right\} \\ \min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\left\{f(a);\ f(b);\ f(x_i)\right\} \end{cases}$.

:

- Nếu $y = f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$.
- Nếu $y = f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$.

1. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. Giá trị nhỏ hàm số $y = x^3 - 24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng bao nhiêu?

Ví dụ 2. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm ?

Ví dụ 3. Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm ?

Ví dụ 4. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng ?

Ví dụ 5. Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số ?

Ví dụ 6. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng:

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = \dfrac{3x-1}{x+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$. Tính giá trị của $4M - 2m$ bằng

Ví dụ 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{-2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ bằng bao nhiêu?

Ví dụ 9. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

Ví dụ 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Ví dụ 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 10}$ trên đoạn $[-4;1]$.

Ví dụ 12. Hàm số $y = \sqrt{4 - x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x bằng bao nhiêu?

Ví dụ 13. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = 2x + \sqrt{8 - 2x^2}$ trên tập xác định của nó?

Ví dụ 14. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^3 x - \cos 2x + \sin x + 2$. Khi đó giá trị của biểu thức $M + m$ bằng:

Ví dụ 15. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;2]$ bằng -2.

Ví dụ 16. Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị thực của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$.

Ví dụ 17. Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng?

Ví dụ 18. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + 2m - 1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng?

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

Bài 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng?

Bài 3. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x + 2$ trên đoạn $[-3;3]$ bằng?

Bài 4. Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = -x^3 + 3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm?

Bài 5. Trên đoạn $[-2;1]$, hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

Bài 6. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[0;4]$. Tính tổng $m + 2M$?

Bài 7. Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Bài 8. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng?

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 + (m^2+1)x + m + 1$. Tìm tham số m sao cho $\min\limits_{[0;1]} y = 5$.

Bài 10. Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thoả mãn $\underset{[1;2]}{Min}\, y + \underset{[1;2]}{Max}\, y = \dfrac{16}{3}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m?

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng?

Bài 12. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{11-2x}$ trên đoạn $[1;5]$ bằng

Bài 13. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 2x + 5}$ trên đoạn$[-1;3]$ bằng

Bài 14. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x + \sqrt{4-x^2}$ lần lượt là?

Bài 15. Gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \sqrt{4-x^2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T = M^2 + 6m$ tương ứng bằng?

Bài 16. Cho hàm số $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên?

Bài 17. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$.

Bài 18. Cho hàm số $y = e^x(x^2-3)$, gọi $M = \dfrac{a}{e^b}(a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N})$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5;-2]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$?

Bài 19. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \dfrac{2\sin x + 3}{\sin x + 1}$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là?

Bài 20. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \dfrac{2\sin x - 1}{\sin x + 2}$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$ là?

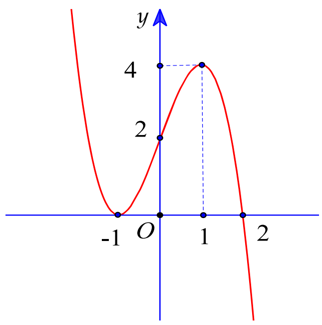
Bài 21. Cho hàm số $f(x) = (a+3)x^4 - 2ax^2 + 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\min\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng?

Bài 22. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + x + m|$ xét trên đoạn $[2;4]$, m_0 là giá trị của tham số m để M đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tất cả các giá trị của m_0?

Bài 23. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ không vượt quá 30. Tổng các phần tử của S bằng?

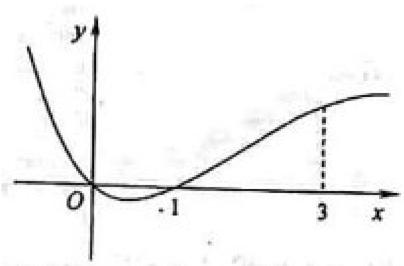
Bài 24. Tìm m để hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ có giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{2}$.

Bài 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



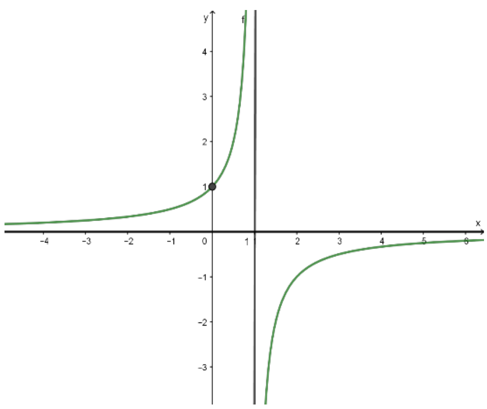
Biết $f\left(-1\right)=\frac{13}{4}, f\left(2\right)=6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=f^3\left(x\right)-3f\left(x\right)$ trên $\left[-1;2\right]$ bằng bao nhiêu?

Bài 26. Cho hàm số $f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$. Đồ thị $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết $f\left(0\right)+f\left(2\right)=f\left(1\right)+f\left(3\right)$. Giá trị lớn nhất của $f\left(x\right)$ trên $\left[0;3\right]$ là?

Bài 27. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $f\left(x\right)=\frac{ax+b}{cx+d}$ và $g\left(x\right)=f\left(f\left(x\right)\right)$.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;-1\right]$.

DẠNG TOÁN 3. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG

Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(a;b)$.

háp:

Bước 1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$. Cho $f'(x) = 0$ tìm nghiệm.

Bước 2. Xét dấu biểu thức $y' = f'(x)$ và lập bảng biến thiên (có tính giới hạn).

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để kết luận GTLN (GTNN nếu có).

ong một số trường hợp, có thể giải nhanh bằng bất đẳng thức:

① Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM):

- $\forall a_1, a_2, \ldots, a_n \geq 0$, ta luôn có: $\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1.a_2.\ldots.a_n}$.

  Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \cdots = a_n \geq 0$.

- $\forall a \geq 0;\ b \geq 0$ thì ta có: $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a = b$.

- $\forall a \geq 0;\ b \geq 0;\ c \geq 0$ thì ta có: $\dfrac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$. Dấu $"=" \Leftrightarrow a = b = c$.

Một số kỹ năng cơ bản về ghép Cauchy:

- $mX + \dfrac{n}{X} \geq 2\sqrt{mX\dfrac{n}{X}} = 2\sqrt{mn},\ \forall X > 0$ (khi $x \geq a$, cần dự đoán tại điểm biên $x = a$).

- $mX + \dfrac{n}{X^2} = \dfrac{mX}{2} + \dfrac{mX}{2} + \dfrac{n}{X^2} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{m^2.n}{4}}\cdot$

- $mX^2 + \dfrac{n}{X} = mX^2 + \dfrac{n}{2X} + \dfrac{n}{2X} \geq 3\sqrt[3]{\dfrac{mn^2}{4}}\cdot$

(Kỹ thuật tách cặp nghịch đảo là kỹ thuật tách phần nguyên theo mẫu số để sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauhcy, biến số triệt tiêu, chỉ còn lại hằng số, dựa vào điểm rơi của bài toán).

- $X.(a - mX) = \dfrac{1}{m}\cdot(mX).(a - mX) \leq \dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{(mX + a - mX)^2}{4} = \dfrac{a^2}{4m}\cdot$

- $X^2.(a - X) = 4\cdot\dfrac{X}{2}\cdot\dfrac{X}{2}\cdot(a - X) \leq 4\cdot\dfrac{\left(\dfrac{X}{2} + \dfrac{X}{2} + a - X\right)^3}{27} = \dfrac{4a^3}{27}\cdot$

② Bất đẳng thức Cauchy Schwarz

- $\forall a,\ b,\ x,\ y,$ ta có: $-\sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)} \leq a.x + b.y \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}$.

  Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{a} = \dfrac{y}{b}\cdot$

- $\forall a,\ b>0,\ x,\ y\in\mathbb{R}$, ta có: $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}\ge\dfrac{(x+y)^2}{a+b}\cdot$ Dấu $"="$ xảy ra khi $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}\cdot$

1. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ví dụ 2. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x+3-\dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$?

Ta có $y=-x+3-\dfrac{1}{x+2}\Rightarrow y'=\dfrac{-x^2-4x-3}{(x+2)^2}, y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$

Vẽ bảng biến thiên ta tính được : $Min_{[-4;2)}y=7$.

Ví dụ 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x-\dfrac{1}{x}$ trên $(0;3]$ bằng bao nhiêu ?

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;+\infty)$ bằng?

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ bằng?

Lời giải

Điều kiện $x>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, có $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ge 3\sqrt[3]{x.\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}=3$.

Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=1$.

Bài 2. (Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng?

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{16}{x^2}$

Bài 4. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ với x thuộc $D=(-\infty;-1]\cup\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên D ?

Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	
y	6	$\searrow$	2	$\nearrow$	9

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên nữa khoảng $[-5;7)$?

DẠNG 4. BÀI TOÁN TỐI ƯU, CÓ YẾU TỐ THỰC TẾ

Phương pháp

Đưa yêu cầu bài toán về mối quan hệ hàm số, lập bảng biến thiên để tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của hàm số với điều kiện ràng buộc cho trước.

Chú ý:

Ta cũng có thể sử dụng các bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

1. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}\,(mg/L)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Ví dụ 2. Một công ty sữa cần sản xuất các hộp đựng sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, chứa được thể tích thực là $180ml$. Chiều cao của hình hộp bằng bao nhiêu để nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất?

Ví dụ 3. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t)=45t^2-t^3$. Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s=t^3-6t^2+42t+1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Bài 2. Một vật chuyển động theo quy luật $S=-\dfrac{1}{2}t^3+9t^2$, với $t(giây)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(meùt)$ là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng:

Bài 3. Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^3-3x+m\right)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S

Bài 4. Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Để bán được số tivi đó, cửa hàng đặt hàng từ Nhà máy sản xuất thành nhiều lần trong năm, số tivi đặt cho nhà máy là như nhau cho các lần đặt hàng. Mỗi lần lấy hàng từ nhà máy về cửa hàng chỉ để trưng bày được một nửa, một nửa số hàng còn lại phải lưu kho. Chi phí gửi trong kho là $10\$$ một cái. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là $20\$$ cộng thêm $9\$$ mỗi cái. Cửa hàng đặt bao nhiêu lần trong một năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí mà cửa hàng phải trả là nhỏ nhất?

DẠNG 5. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P=x^3+3x^2+3y^2-3x-5$ là?

Ví dụ 2. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=x^2+y^2+2(x+1)(y+1)+8\sqrt{4-x-y}$. Tính $M+m$?

Ví dụ 3. Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\frac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1$.

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

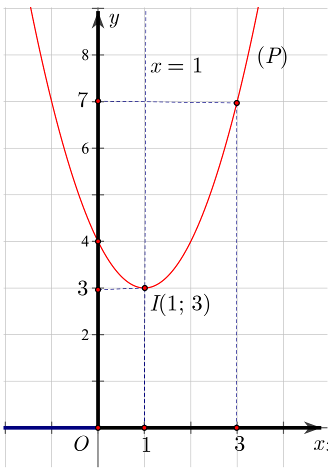
Bài 1. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5(x^2+y^2+z^2)=9(xy+2yz+zx)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T=\frac{x}{y^2+z^2}-\frac{1}{(x+y+z)^3}$.

Bài 2. Cho các số thực không âm x, y thỏa mãn $x+y=1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S=(4x^2+3y)(4y^2+3x)+25xy$?

Bài 3. Cho hai số thực x, y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\geq 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=5(x^4+y^4+x^2y^2)-4(x^2+y^2)+2$ bằng bao nhiêu?

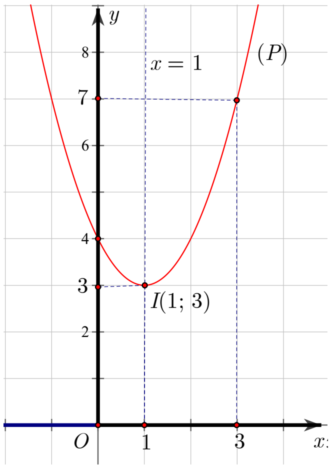
D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Cho đồ thị hàm số y, tìm GTNN của hàm số trên $[0;3]$.



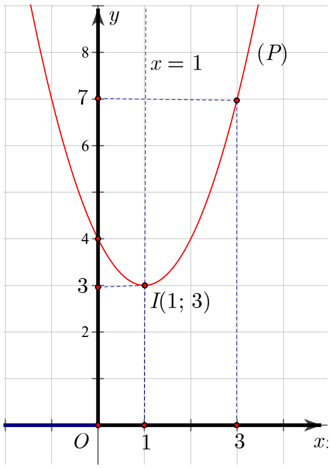
A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Câu 2: Cho đồ thị hàm số y, tìm GTLN của hàm số trên $[0;3]$.



A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số y, tìm GTLN của hàm số trên $[0;1]$.



A. 4. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 4: Cho bảng biến thiên của hàm số y, tìm GTNN của hàm số trên $[0;9]$.

t	0	$\frac{7}{2}$	9
y	$3 \searrow$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow 21$

A. 3. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $-\frac{37}{4}$. **D.** 21.

Câu 5: Cho bảng biến thiên của hàm số y, tìm GTLN của hàm số trên $[0;9]$.

t	0	$\frac{7}{2}$	9
y	$3 \searrow$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow 21$

A. 3. **B.** $\frac{7}{2}$. **C.** $-\frac{37}{4}$. **D.** 21.

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $-\dfrac{9}{4}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** 5.

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $-\dfrac{9}{4}$. **B.** $-\dfrac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** 5.

Câu 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 7x + 3$ trên đoạn $[0;9]$.

A. 3. **B.** $-\dfrac{37}{4}$. **C.** 21. **D.** $\dfrac{-37}{2}$.

Câu 9: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 7x + 3$ trên đoạn $[0;9]$.

A. 3. **B.** $-\dfrac{37}{4}$. **C.** 21. **D.** $\dfrac{-37}{2}$.

Câu 10: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = -x^2 - 4x + 3$ trên đoạn $[0;4]$.

A. 3. **B.** $-\dfrac{37}{4}$. **C.** 21. **D.** $\dfrac{-37}{2}$.

Câu 11: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x(30-2x)(80-2x)$ trên đoạn $[5;10]$

A. $\dfrac{200000}{27}$. **B.** $\dfrac{20000}{27}$. **C.** 6000. **D.** 7000.

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 8x^2 + 9$ trên đoạn $[-1;3]$

A. 2. **B.** 9. **C.** 18. **D.** 7.

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(n) = -20n^2 + 480n$ trên nửa khoảng $(0;+\infty)$

A. 2870. **B.** 2880. **C.** 2800. **D.** 2000.

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \dfrac{1}{40}x^2(30-x)$ trên nửa khoảng $(0;+\infty)$

A. 20. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 30.

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$

A. 1. **B.** -17. **C.** 3. **D.** 11.

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên nửa khoảng $(0;+\infty)$

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{2000}{x}$ trên khoảng $(0;10\sqrt{5})$

A. 310. **B.** 250. **C.** 320. **D.** 300.

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^2 + \dfrac{500}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

A. 130. **B.** 160. **C.** 120. **D.** 150.

Câu 19: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^3}{x-4}$ trên khoảng $(0;8)$

A. 102. **B.** 108. **C.** 120. **D.** 110.

Câu 20: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$ trên nửa khoảng $(0;+\infty)$

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 4.

Câu 21: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=3000.(4-x)+5000.\sqrt{x^2+1}$ trên đoạn $[0;4]$

A. 16000. **B.** 15000. **C.** 12000. **D.** 13000.

Câu 22: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{6}\sqrt{16+(7-x)^2}+\dfrac{1}{10}x$ trên đoạn $[0;7]$

A. $\dfrac{13}{5}$. **B.** $\dfrac{14}{15}$. **C.** $\dfrac{17}{15}$. **D.** $\dfrac{16}{15}$.

Câu 23: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}$ trên $\left(0;\dfrac{a}{2}\right)$, a là hằng số khác 0

A. $\dfrac{2a^2}{9}$. **B.** $\dfrac{a^2}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$. **D.** $\dfrac{a^2}{9}$.

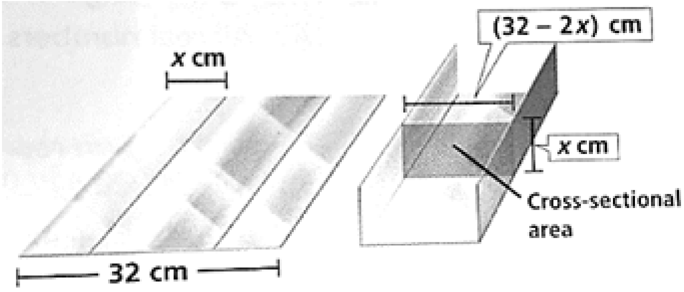
Câu 24: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=360-10n$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lương cá sau một vụ thu được nhiều nhất?

A. 17. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 18.

Câu 25: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

A. 80 USD. **B.** 160 USD. **C.** 40 USD. **D.** 240 USD.

Câu 26: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?

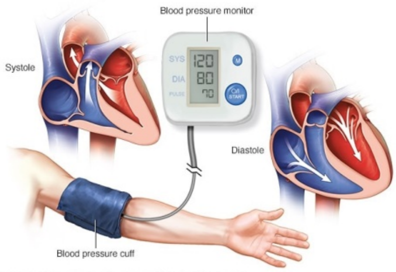


A. 7 cm. **B.** 8 cm. **C.** 9 cm. **D.** 10 cm.

Câu 27: Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $5\sqrt{2}$ thì diện tích của nó lớn nhất là:

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{25}{2}$. **C.** 25. **D.** $\frac{25}{8}$.

Câu 28: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x)=0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=15$. **D.** $x=7$.

Câu 29: Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức: $f(t)=1000+30t^2-t^3$ với $0\le t\le 30$. Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất?

A. 10 phút. **B.** 20 phút. **C.** 30 phút. **D.** 25 phút.

Câu 30: Mỗi chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $\left(3-\frac{x}{40}\right)^2$ (USD). Khẳng định nào sau đây đúng.

A. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng $160\ (USD)$.

B. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.

C. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.

D. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng $135\ (USD)$.

Câu 31: Sức chứa tối đa mỗi phòng học là 200 em HS. Nếu một phòng học có x HS thì học phí cho mỗi HS là $\left(9-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất khi có 200 HS.

B. Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất bằng 4.320 (nghìn đồng).

C. Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất khi có 360 HS.

D. Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất bằng 3.200 (nghìn đồng).

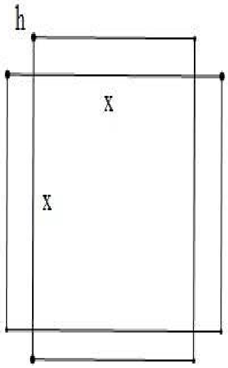
Câu 32: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất?

A. $8\sqrt{3}\ cm.$ **B.** $4\sqrt{3}\ cm.$ **C.** $24\ cm.$ **D.** $16\sqrt{3}\ cm.$

Câu 33: Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi \mathrm{m}^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất?

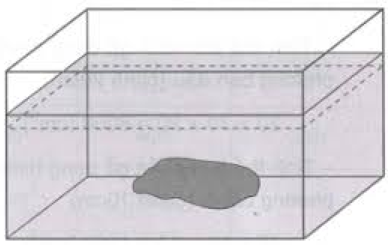
A. $R=\frac{1}{2}\,\mathrm{m},\ h=8\,\mathrm{m}.$ **B.** $R=1\,\mathrm{m},\ h=2\,\mathrm{m}.$ **C.** $R=2\,\mathrm{m},\ h=\frac{1}{2}\,\mathrm{m}.$ **D.** $R=4\,\mathrm{m},\ h=\frac{1}{5}\,\mathrm{m}.$

Câu 34: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình mẫu. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(cm)$, chiều cao $h(cm)$ và có thể tích là $500(cm^3)$. Hãy tìm độ dài cạnh của hình vuông sao cho chiếc hộp được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất.



A. 5 cm. **B.** 10 cm. **C.** 2 cm. **D.** 3 cm.

Câu 35: Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3}\ \text{m}^3$. Biết đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100.000 đồng/ m^2. Tìm kích thước của hồ để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công?



A. 13 triệu đồng. **B.** 17 triệu đồng. **C.** 15 triệu đồng. **D.** 11 triệu đồng.

Câu 36: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiế**c.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 39.000 đồng. **B.** 42.000 đồng. **C.** 43.000 đồng. **D.** 40.000 đồng.

Câu 37: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c\left(t\right)=\dfrac{t}{t^2+1}$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B.** 1 giờ. **C.** 3 giờ. **D.** 2 giờ.

Câu 38: Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng, trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là

A. 15 ngày. **B.** 4 ngày. **C.** 10 ngày. **D.** 20 ngày.

Câu 39: Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích $96000cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VNĐ/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VNĐ/m^2. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

A. 83200 VNĐ. **B.** 320000 VNĐ. **C.** 832000 VNĐ. **D.** 32000 VNĐ.

Câu 40: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

A. 30 triệu đồng. **B.** 29 triệu đồng. **C.** 30,5 triệu đồng. **D.** 29,5 triệu đồng.

Câu 41: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để của hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

A. 39000 đồng. **B.** 42000 đồng. **C.** 42000 đồng. **D.** 40000 đồng.

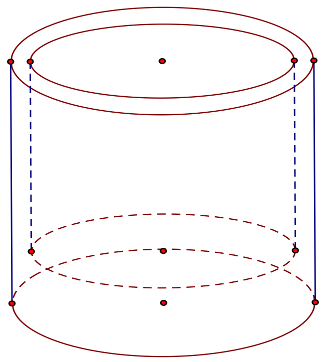
Câu 42: Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy $A4$ trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50000 đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20(3n+5)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 bản in khổ giấy $A4$ thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được nhiều lãi nhất?

A. 6 máy. **B.** 5 máy. **C.** 4 máy. **D.** 7 máy.

Câu 43: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách $300km$ (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước là $6km/h$. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v\ km/h$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v)=cv^3t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng:

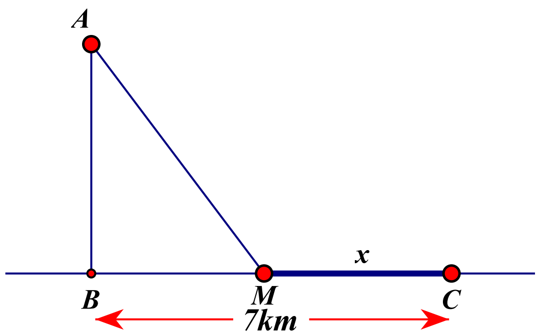
A. $12\ km/h$. **B.** $8\ km/h$. **C.** $10\ km/h$. **D.** $9\ km/h$.

Câu 44: Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày $1,5$ cm, thành xung quanh cốc dày $0,2$ cm và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là 480π cm^3 thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh?



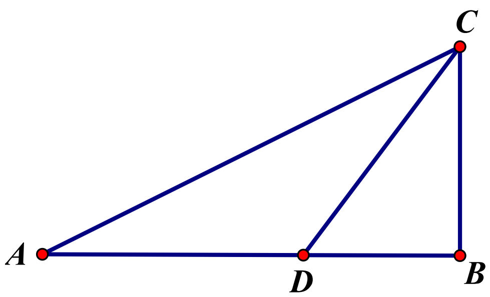
A. $70,16\pi\ \text{cm}^3$. **B.** $80,16\pi\ \text{cm}^3$. **C.** $85,66\pi\ \text{cm}^3$. **D.** $75,66\pi\ \text{cm}^3$.

Câu 45: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 4(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC = 7(km)$. Người canh hải đăng phải chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc $6(km/h)$ rồi đi xe đạp từ M đến C với vận tốc $10(km/h)$ (hình vẽ bên). Xác định khoảng cách từ M đến C để người đó đi từ A đến C là nhanh nhất.



A. $9km$. **B.** $6km$. **C.** $3km$. **D.** $4km$.

Câu 46: Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là $10\,\text{km}$, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là $40\,\text{km}$. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40\,\text{km}$, $BC = 10\,\text{km}$)

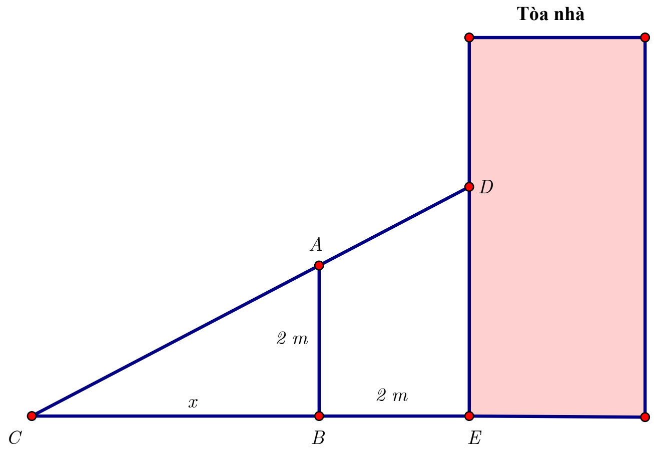


A. $\dfrac{15}{2}\,\text{km}$. **B.** $10\,\text{km}$. **C.** $\dfrac{65}{2}\,\text{km}$. **D.** $40\,\text{km}$.

Câu 47: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ $5km$, trên bờ biển có một kho hàng ở vị trí C cách B một khoảng $7km$. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4km/h$ rồi đi bộ từ M đến C với vận tốc $6km/h$. Xác định độ dài đoạn BM để người đó đi từ A đến C nhanh nhất.

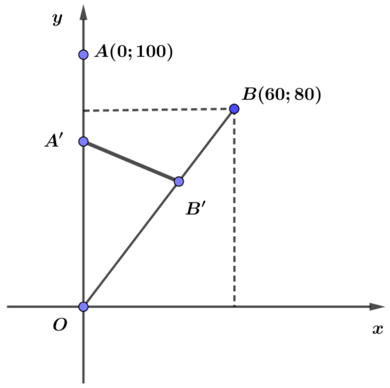
A. $2\sqrt{5}$ km. **B.** $\frac{7}{3}km$. **C.** $\frac{7}{2}km$. **D.** $3\sqrt{2}\,km$.

Câu 48: Một bức tường cao 2m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét?



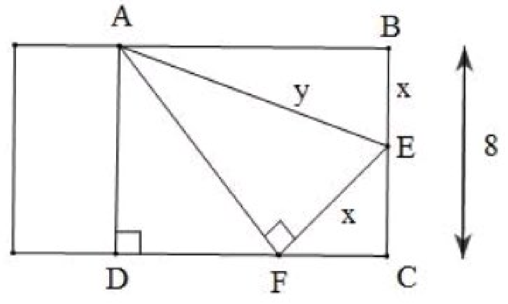
A. $4\sqrt{2}m$. **B.** $6m$. **C.** $3\sqrt{5}m$. **D.** $4\sqrt{2}cm$.

Câu 49: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quĩ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s .Con còn lại bay trên quĩ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s. Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?



A. $10\sqrt{5}$ m. **B.** $20\sqrt{5}$ m. **C.** $20\sqrt{3}$ m. **D.** $10\sqrt{3}$ m.

Câu 50: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài $12\ cm$ và chiều rộng $8\ cm$. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



A. $6\sqrt{3}$ cm. **B.** $6\sqrt{2}$ cm. **C.** $6\sqrt{5}$ cm. **D.** 6 cm.

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hàm số hàm số $y=f\left(x\right)=-x^3+mx^2-\left(m^2+m+1\right)x$,

a) Khi $m=1$ thì $\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)$ đạt được tại $x=1$

b) Khi $m=1$ thì $\min\limits_{[1;3]} f\left(x\right)=-3$

c) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\min\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=-6$

d) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)<5$

Câu 2: Cho hàm số hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$

a) $\max\limits_{[3;5]} f\left(x\right)=f\left(3\right)$

b) $\min\limits_{[2;3]} f\left(x\right)=m^2+m+2$

c) $\max\limits_{[2;3]} f\left(x\right)=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$

d) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $\max\limits_{[2;3]} f\left(x\right)+\min\limits_{[2;3]} f\left(x\right)=\dfrac{13}{2}$ bằng 1.

Câu 3: Cho hàm số $y=x^4-2x^2-2$.

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -2.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -3.

c) Tập giá trị của hàm số là $\left[-3;+\infty\right)$.

d) Trên đoạn $\left[0;1\right]$, $\max y=f\left(x_A\right)=y_A$; $\min y=f\left(x_B\right)=y_B$. Độ dài $AB=\sqrt{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3+m^2x-2m^2+2m-9$ với m là tham số.

a) Khi $m=1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\left[0;3\right]$ là -9.

b) Khi $m=1$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[0;3\right]$ là 3.

c) Khi $m=1$ thì tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng 1.

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không vượt quá 3. Số phần tử của S bằng 3.

Câu 5: Cho hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$.

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x=-1$.

c) Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó $M+m=4\sqrt{2}$.

d) Bất phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-m\geq 0,\forall x\in[-1;3]$ (m là tham số) khi $m\in(-\infty;2]$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)=(x^2-3x+1).\mathrm{e}^x$

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là $5\mathrm{e}^4$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là $-\mathrm{e}$.

c) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[3;5]$ lần lượt là $\mathrm{e}^3;11\mathrm{e}^5$.

d) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;0]$ lần lượt là $\dfrac{11}{\mathrm{e}^2};1$.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+m.$

a) Khi $m=2$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)$ đạt được tại $x=0.$

b) Khi $m=2$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)=1.$

c) Khi $m>1,$ nếu $\min\limits_{[0;2]} f(x)+\max\limits_{[0;2]} f(x)=9$ thì $m=3.$

d) Khi $m>1,$ nếu $2\min\limits_{[0;2]}|f(x)|-3\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-20$ thì $m=2.$

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-2x+m+5.$

a) Khi $m=0$ thì $\min\limits_{[-1;3]} f(x)$ đạt được tại $x=1.$

b) Khi $m=0$ thì $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=8.$

c) Khi $m>2,$ nếu $\min\limits_{[-1;3]} f(x)+\max\limits_{[-1;3]} f(x)=22$ thì $m=7.$

d) Có 5 giá trị nguyên của $m\in(-20;-13)$ để $\min\limits_{[-1;3]}|f(x)|+\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|>-6.$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+m$ với tham số m.

a. Với $m=-3$ thì $\min\limits_{[-1;1]} y=-8$ khi $x=-1$.

b. Với $m=-3$ thì $\max\limits_{[-1;1]} y=-3$ khi $x=1$.

c. Với mọi giá trị của m thì $\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)-\min\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=5$.

d. $4\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)+3\min\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=-1$ khi $m=2$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=mx+1+\dfrac{4}{x-3}$ với tham số m.

a. Với $m=1$ thì $\max\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=0$ khi $x=1$.

b. Với $m=1$ thì $\min\limits_{[0;2]} f\left(x\right)=-\dfrac{1}{3}$ khi $x=0$.

c. Với $m<0$ thì $\min\limits_{[-2;0]} f\left(x\right)=-\dfrac{1}{3}$.

d. Với mọi $m<0$ thì $\max\limits_{[-2;0]} f\left(x\right)+\min\limits_{[-2;0]} f\left(x\right)<0$.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3x+m$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

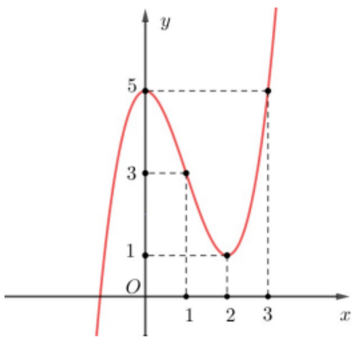
a) Với $m=3$, giá trị lớn nhất của hàm số trên $\left[-2;1\right]$ là 5.

b) Với $m=1$, tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y=f(\sin x)$ bằng 0

c) Có hai giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất $y=\left|f(x)\right|$ trên $\left[-1;3\right]$ bằng 8.

d) Khi $m=m_0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|f(x)\right|$ trên $\left[-1;3\right]$ đạt nhỏ nhất, $m_0\in\left(-1;4\right)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ sau:



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f\left(1\right)$.

b) $2\min\limits_{[0;3]} f(x)+\max\limits_{[0;3]} f\left(x\right)=7$.

c) Đặt $g(x)=f(x)-\sqrt{2x}-\sqrt{8-2x}$, $\min\limits_{[0;4]} g(x)>0$.

d) Đặt $h(x)=f\left(x^3-x^2+x+2\right)+3m$, m là tham số. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=m^2+3.\max\limits_{[0;1]} h(x)+4.\min\limits_{[0;1]} h(x)-3m$ bằng -62.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-4mx+m^2+2024$ với m là tham số.

a) Khi $m=1$ thì $\max\limits_{[1;3]} f(x)$ đạt được tại $x=2$.

b) Khi $m=-1$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)=2025$.

c) Với m là số nguyên dương, đặt $T=\min\limits_{[-2;1]} f(x)+\max\limits_{[-2;1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4051.

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(12;2024)$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng 511036.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-6mx^2+m^2+2025$ với m là tham số.

a) Khi $m=2$ thì $\max\limits_{[-3;1]} f(x)$ đạt được tại $x=0$.

b) Khi $m=-1$ thì $\min\limits_{[-4;2]} f(x)=2058$.

c) Với m là số nguyên âm, đặt $T=\min\limits_{[-3;-1]} f(x)+\max\limits_{[-3;-1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4084

.

d) Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị lớn nhất trên khoảng $(-24;-2)$. Biết $S=(a;b)$, với $a,b\in\mathbb{R};a<b$. Giá trị của biểu thức $T=2024b-2025a=11138$

Câu 15: Cho hàm số: $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-3;2)$, $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=-5$, $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)=3$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3		-1		1		2
y'		+	0	$-$	0	+	
y	-5	↗	0	↘	-2	↗	3

Khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-3;2)$ bằng 0.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1;2)$ bằng -2.

c) Có 1 giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để bất phương trình $f(x)>m$ luôn đúng với mọi $x\in(-3;2)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x^2+1\right)$ trên $(-1;1)$ bằng -2.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$ có đồ thị (C)
Khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;2]$ bằng 2

c) Với $m\in[-1;+\infty)$ thì trên $[-1;+\infty)$ phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm trái dấu.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f^2(x)-4f(x)$ trên $[-2;1]$ bằng -4.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\left(m^2-6m\right)x^4+(2m-1)x^2+2m^3-1$ với m là tham số

a) Khi $m=6$ thì $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=431$.

b) Khi $m=0$ thì $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$.

c) Khi $m<0$ hoặc $m>6$ thì hàm số có giá trị nhỏ nhất.

d) Khi $m\in(1;3)$ thì hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+m+6}{x-m}$ với m là tham số

a) Khi $m=1$ thì $\max\limits_{[2;3]} y+\min\limits_{[2;3]} y=14$.

b) Khi $m=0$ thì $\min\limits_{[1;3]} y=2$.

c) Khi $m<-3$ và $\max\limits_{[1;3]} y>0$ thì $-9<m<-3$.

d) Khi $m>-3$ và $\max\limits_{[1;3]} y>0$ thì $-7<m<1$.

Câu 19: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m+6}{x-m}$ (m là tham số).

a) Khi $m=3$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[1;2\right]$ đạt tại $x=2$.

b) Khi $m=3$ thì $\max\limits_{[1;2]} f(x)=-5$.

c) Khi $m=3$ thì $\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right)+\min\limits_{[1;2]} f\left(x\right)=-2.$

d) Có hai giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng m^2.

Câu 20: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;3]$.

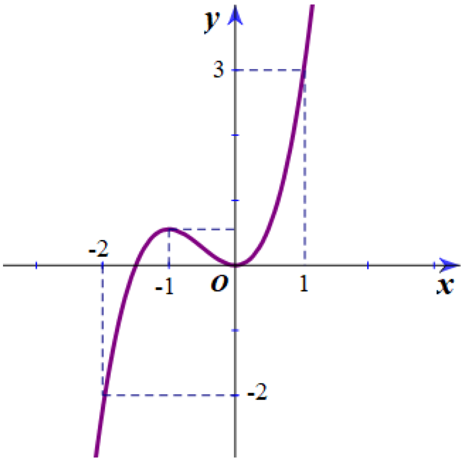
a) Khi $m=-3$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;3]$ bằng $\dfrac{3}{2}$.

b) Khi $m=-2$ thì $\max\limits_{[2;3]} f(x)=\min\limits_{[2;3]} f(x)=2.$

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$ khi $m>-2$.

d) Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$ là 4.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới.



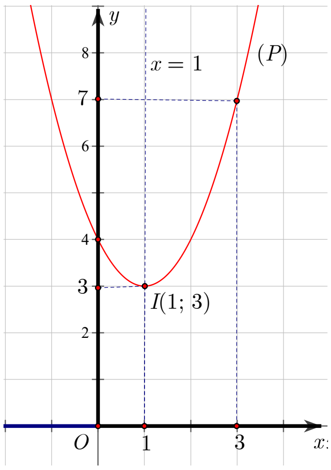
a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là 3.

b) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 0.

c) Tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x)\geq m$ có nghiệm $x\in[-2;1]$ là $m\leq -2$.

d) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x+1)$ trên đoạn $[-1;0]$ bằng 4.

Câu 22: Cho đồ thị hàm số. Hàm số đạt ……………………………



A. Giá trị lớn nhất là 7 trên $[0;+\infty)$

B. Giá trị nhỏ nhất là 3 trên $[0;+\infty)$

C. Giá trị lớn nhất là 4 trên $[0;1]$

D. Giá trị nhỏ nhất là 3 trên $[0;3]$

Câu 23: Cho bảng biến thiên của hàm số. Hàm số đạt ....

t	0	$\frac{7}{2}$	9
y	3 ↘	$-\frac{37}{4}$	↗ 21

A. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{-37}{4}$ trên $[0;9]$

B. Giá trị lớn nhất là 21 trên $[0;+\infty)$

C. Giá trị lớn nhất là 21 trên $[0;9]$

D. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{-37}{4}$ trên $(0;+\infty)$

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=-x^2-4x+3$. Hàm số đạt ....

A. Giá trị lớn nhất là 3 trên $[0;4]$

B. Giá trị nhỏ nhất là -29 trên $[0;4]$

C. Giá trị lớn nhất là 7 trên $[0;4]$

D. Giá trị lớn nhất là 7 trên $[-3;4]$

Câu 25: Cho hàm số $f(x)=\frac{1}{40}x^2(30-x)$. Hàm số đạt ....

A. Giá trị lớn nhất là 25 trên $[3;+\infty)$

B. Giá trị lớn nhất là 25 trên $(0;+\infty)$

C. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{14}{5}$ trên $[0;2]$

D. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{52}{5}$ trên $[2;+\infty)$

Câu 26: Cho hàm số $f\left(x\right)=2x^2+\dfrac{500}{x}$. Hàm số đạt ....

A. Giá trị nhỏ nhất là 150 trên $\left[0;+\infty\right)$

B. Giá trị nhỏ nhất là 150 trên $\left(0;+\infty\right)$

C. Giá trị lớn nhất là 502 trên $\left(0;5\right]$

D. Giá trị lớn nhất là 502 trên $\left(0;+\infty\right)$

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{6}\sqrt{16+(7-x)^2}+\dfrac{1}{10}x$. Hàm số đạt ....

A. Giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{17}{15}$ trên $\left[0;7\right]$

B. Giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{17}{15}$ trên $\left[0;3\right]$

C. Giá trị lớn nhất tại $x=0$ trên $\left[0;7\right]$

D. Giá trị lớn nhất là $\dfrac{41}{30}$ trên $\left[4;7\right]$

Câu 28: Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $5\sqrt{2}$ thì:.

A. Diện tích tam giác lớn nhất khi tam giác đó vuông cân

B. Diện tích tam giác lớn nhất là $\dfrac{25}{2}\ cm^2$

C. Diện tích tam giác lớn nhất khi độ dài hai cạnh góc vuông có tỉ lệ $1:2$

D. Diện tích tam giác lớn nhất thì $5\left(2+\sqrt{2}\right)\ cm$

Câu 29: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiế**c.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi.

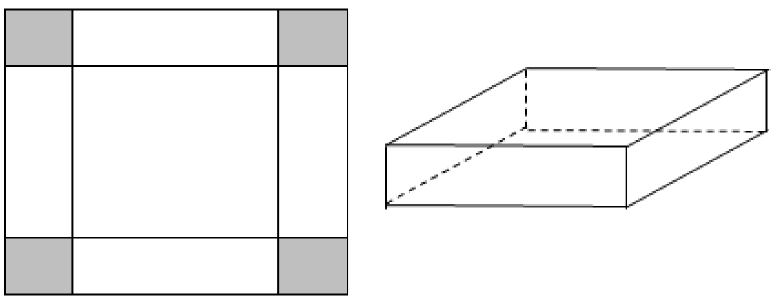
A. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần tăng thêm 10000 đồng?

B. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng?

C. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 21000 đồng?

D. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc?

Câu 30: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $2016\left(cm\right)$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x\left(cm\right)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Hỏi.........................



A. Để hộp nhận được có thể tích lớn nhất thì $x = 250(cm)$

B. Để hộp nhận được có thể tích lớn nhất thì $x = 336(cm)$

C. Hộp nhận được có thể tích lớn nhất là $606928896\left(cm^3\right)$

D. Hộp nhận được có thể tích lớn nhất là $606928000\left(cm^3\right)$

Câu 31: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 50000 đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi…………………

A. Thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là 101250000 đồng?

B. Thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là 105250000 đồng?

C. Có 5 căn hộ bị bỏ trống thì công ty có thu nhập cao nhất ?

D. Để công ty có thu nhập cao nhất trong 1 tháng thì giá cho thuê là 2500000 đồng?

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + m$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Với m=1 thì $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{67}{27}$.

b) Với m=1 thì $\min\limits_{[1;3]} x\, f(x) = -7$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên đoạn $[1;3]$ khi $m = 8$.

d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[1;3]$ khi $m = 12$.

Câu 33: Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

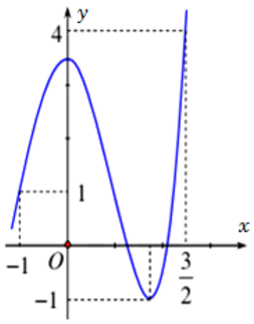
a) Với m=1 thì $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{5}{3}$

b) Với m=1 thì $\max\limits_{[2;4]} y = 4$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên đoạn $[2;4]$ khi $m = \dfrac{4}{3}$.

d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[2;4]$ khi $m = 11$.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau



a) $\mathop{\mathrm{Min}}\limits_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y = 0$.

b) $\underset{\left[-1;\frac{3}{2}\right]}{\text{Max}}\, y = 4.$

c) Số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x) = m$ có nghiệm với mọi $x \in \left[-1;\frac{3}{2}\right)$ là 5.

d) Số giá trị nguyên âm của m để bất phương trình $f(x) \le m+7$ có nghiệm với mọi $x \in \left[-1;\frac{3}{2}\right]$

là 4.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn khẳng định đúng, sai?

a) Hàm số có đúng một cực trị.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

c) Trên $[0;1]$ hàm số đạt nhỏ nhất là -1 tại $x=1$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 36: Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$.

Chọn khẳng định đúng, sai?

a) $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

b) $\min\limits_{[2;4]} y = 3 \Rightarrow m = 5$.

d) $\max\limits_{[2;4]} y = 3 \Rightarrow m = 5$.

d) $\min\limits_{[2;4]} y + \max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{16}{3} \Rightarrow m = 5$.

Câu 37: Xét tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3.

Chọn khẳng định đúng, sai?

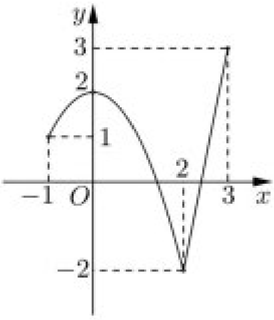
a) Tồn tại giá trị $m < -2$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Tồn tại giá trị $-2 < m < 0$ thỏa yêu cầu bài toán.

c) Tồn tại giá trị $0 < m < 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

d) Tồn tại giá trị $m > 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau



a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$ là 3.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;3]$ đạt được tại $x=-2$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1;3)$ là -2.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-1;3)$ là 3.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

x	$-\infty$	-4		-3		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	
y'		-8				$+\infty$
			$\searrow$	-9	$\nearrow$	

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -8.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -9.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là -9.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là $+\infty$.

Câu 40: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Khi $m=1$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 1.

b) Khi $m=1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -3.

c) Nếu giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -1 thì $m=3$.

d) Nếu giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 2 thì $m=2$.

Câu 41: Cho hàm số $y=\dfrac{x-m^2+m}{x+1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;\ 1]$ là -2 khi $m=-1$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;\ 1]$ là -2 khi $m=2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-3;\ -2]$ là 2 khi $m=1$

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;\ -2]$ là 2 khi $m=1$

Câu 42: Cho hàm số $y=\dfrac{x+m^2}{x-1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[2;\ 3]$ là 2 khi $m=0$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;\ 0]$ là -2 khi $m=2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;\ 2]$ là 2 khi $m=0$

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;\ -2]$ là -1 khi $m=7$

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1 khi $m=\sqrt{2}$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0 khi $m=-4$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-3x^2-m$ trên $[-1;1]$ là -1 khi $m=-4$

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3ax^2+a-1$ trên đoạn $[-1;a]$ với $(a>0)$ bằng 10, khi $a=11$

Câu 44: Cho hàm số $y=f(x)=-x^3-3x^2+m$ (m là tham số).

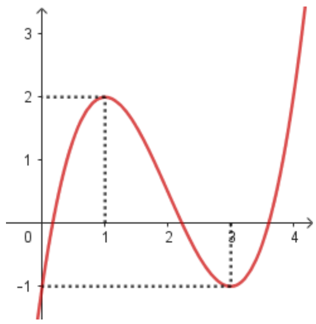
a) Khi $m=3$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$ là 3.

b) Khi $m=3$ thì $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=-18$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0 khi $m=1$.

d) Có hai giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng m^2.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ là đa thức bậc 3 có đồ thị hàm số như hình vẽ.



a. GTNN của hàm số $y=f(x)+m$ trên đoạn $[1,3]$ với $m=0$ bằng -1

b. GTLN của hàm số $y=f(x)+m\,(m>0)$ trên đoạn $[1,3]$ bằng $2-m$

c. GTLN của hàm số $y=\left|f(x+2m)+1\right|\ (m>0)$ trên đoạn $[1-2m,3-2m]$ bằng 3

d. Hàm số $g(x)=f\left(2x^3+2x-1\right)+m$ đạt GTLN trên đoạn $[0;1]$ bằng 2020 khi $m=2022$

Câu 46: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m-1$.

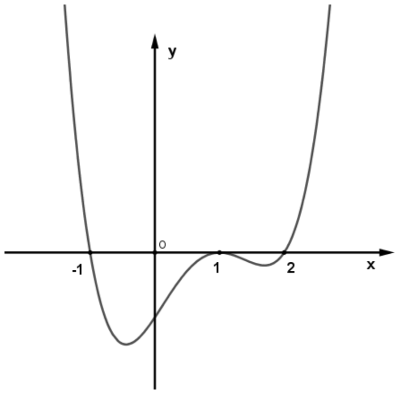
a. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x)=3x^2+6x+m$.

b. Hàm số đồng biến trên $(0;2)$

c. $\max\limits_{[0;2]} g(x)\ge 9$.

d. Để giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=\left|x^3+3x^2+m-1\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $m=-9$.

Câu 47: Cho $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng $f\left(2\right)$.

b. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[1;3\right]$ bằng $f\left(1\right)$.

c. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)-x^3$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng $f\left(-1\right)+1$.

d. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g\left(x\right)=f\left(x\right)+\dfrac{1}{3}x^3-x$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng $f\left(1\right)-\dfrac{2}{3}$.

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-6$ trên khoảng $(-1:1)$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{x}{4+x^2}$ trên $\mathbb{R}$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{x+\dfrac{1}{x}}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

A. $m=\sqrt{2}$. **B.** $m=0$. **C.** $m=2$. **D.** $m=1$.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f\left(x\right)=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

A. $m=1$. **B.** $m=2$. **C.** $m=3$. **D.** $m=4$.

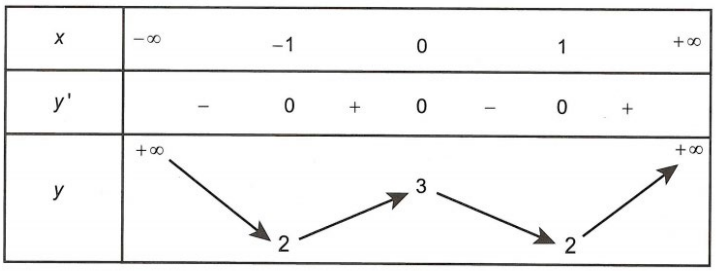
Câu 5: Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{x+m}$ (với m là số thực). Tìm m để hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;4]$ bằng 1.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1,m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x)+\max\limits_{[2;5]} f(x)=m^2-10$. Tính m_1+m_2

Câu 7: Cho hàm số $f\left(x\right)=x^3+\left(m^2+1\right)x+m^2-2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực dương m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;2\right]$ bằng 7.

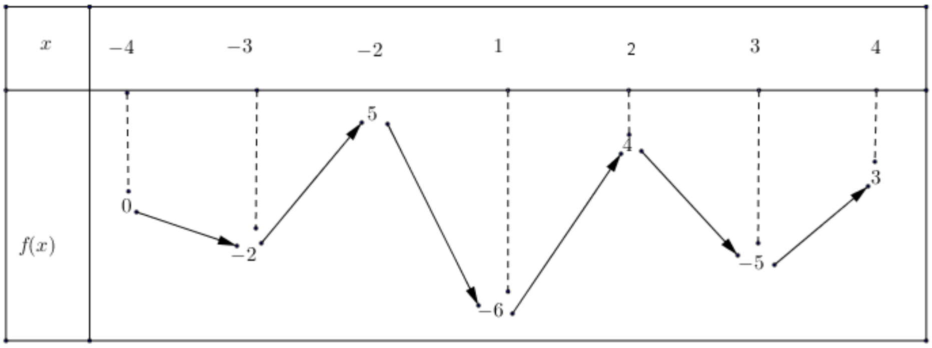
A. $m=\pm1$. **B.** $m=\pm\sqrt{7}$. **C.** $m=\pm\sqrt{2}$. **D.** $m=\pm3$.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+3)$ trên đoạn $[0;2]$ là

Câu 9: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x) = \left|f\left(x^3 + 2x\right) + 3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

Câu 10: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $F(x) = \frac{1}{40}x^2(30 - x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là ?.

Câu 11: Sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Zika, các chuyên gia sở y tế TP.HCM ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 15t^2 - t^3$. Ta xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?.

Câu 12: Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng $8\ \text{m}^3$, thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $100000/\text{m}^2$, giá tôn làm thành xung quanh thùng là $50000/\text{m}^2$. Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy là bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?.

Câu 13: Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy hình vuông không nắp có thể tích là 4 lít. Tìm kích thước của hộp đó để lượng vàng dùng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau

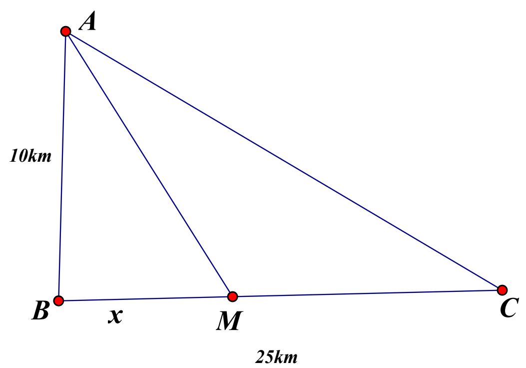
Câu 14: Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000

người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình.Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất?

Câu 15: Một người bán buôn Thanh Long Đỏ ở Lập Thạch – Vĩnh Phúc nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 nghìn/kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 nghìn /kg thì khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2000 nghìn /kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó khách lại mua nhiều hơnmức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 nghìn /kg. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)

Câu 16: Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ và hai cạnh bên đều bằng 1 mét. Khi đó hình thang đã cho có diện tích lớn nhất bằng?.

Câu 17: Nhà của ba bạn A, B, C nằm ở ba vị trí tạo thành một tam giác vuông tại B như hình vẽ, biết $AB = 10$ km, $BC = 25$ km và ba bạn tổ chức họp mặt tại nhà bạn C. Bạn B hẹn chở bạn A tại vị trí M trên đoạn đường BC. Giả sử luôn có xe buýt đi thẳng từ A đến M. Từ nhà bạn A đi xe buýt thẳng đến điểm hẹn M với tốc độ 30 km/h và từ M hai bạn A, B di chuyển đến nhà bạn C theo đoạn đường MC bằng xe máy với vận tốc 50 km/h. Hỏi $5MB + 3MC$ bằng bao nhiêu km để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất?.



Câu 18: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một ví trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là $100.000.000$ đồng và dưới nước là $260.000.000$ đồng

Câu 19: Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn đường kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ là?

BÀI 2: GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập hợp D.

Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu $f(x)\le M$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f\left(x_0\right)=M$. Kí hiệu $M=\max\limits_{D} f(x)$.

Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu $f(x)\ge m$ với mọi x thuộc D và tồn tại x_0 thuộc D sao cho $f\left(x_0\right)=m$. Kí hiệu $m=\min\limits_{D} f(x)$.

Chú ý: Ta quy ước khi chỉ nói giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ (mà không cho rõ tập hợp D) thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên tập xác định của nó.

Ví dụ 1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y=f(x)=2x+3$ trên đoạn $[-3;1]$;

b) $y=g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Lời giải

a) Xét hàm số $f(x)=2x+3$ trên đoạn $[-3;1]$.

Với mọi $x\in[-3;1]$, ta có $f(x)=2x+3\ge -3$. Mặt khác $f(-3)=-3$. Do đó $\min\limits_{[-3;1]} f(x)=-3$.

Với mọi $x\in[-3;1]$, ta có $f(x)=2x+3\le 5$. Mặt khác $f(1)=5$. Do đó $\max\limits_{[-3;1]} f(x)=5$.

b) Xét hàm số $g(x)=\sqrt{1-x^2}$.

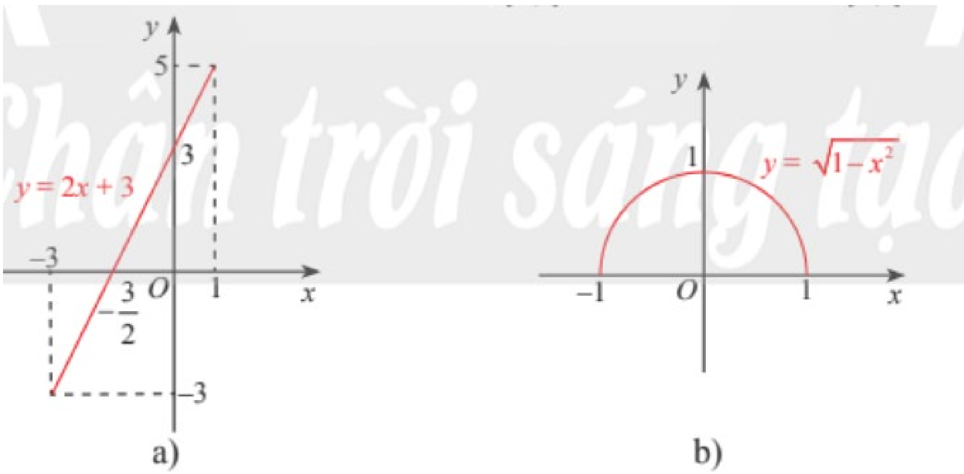
Tập xác định: $D=[-1;1]$. Ta có $0\le g(x)\le 1$ với mọi $x\in[-1;1]$. Mặt khác $g(0)=1$ và $g(1)=0$.

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} g(x)=0$ và $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=1$.

Nhận xét: Nếu biết đồ thị của hàm số trên tập hợp D, ta có thể xác định được giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên D. Chẳng hạn:

- Dựa vào đồ thị hàm số $y=f(x)=2x+3$ trên đoạn $[-3;1]$ (Hình 2a), ta thấy với mọi $x\in[-3;1], f(x)\ge f(-3)$ và $f(x)\le f(1)$ nên $\min\limits_{[-3;1]} f(x)=f(-3)=-3$ và $\max\limits_{[-3;1]} f(x)=f(1)=5$.

- Dựa vào đồ thị của hàm số $y=g(x)=\sqrt{1-x^2}$ trên đoạn $[-1;1]$ (Hình $2b$), ta thấy với mọi $x\in[-1;1], g(x)\ge g(1)$ và $g(x)\le g(0)$ nên $\min\limits_{[-1;1]} g(x)=g(1)=0$ và $\max\limits_{[-1;1]} g(x)=g(0)=1$.



Hình 2

Chú ý: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số thường được tìm bằng cách sử dụng đạo hàm và bảng biến thiên.

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^3-6x^2+9x-1$ trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=3x^2-12x+9$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=3$.

Bảng biến thiên của hàm số trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$:

x	-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-17	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{[-1;+\infty)} f(x)=f(-1)=-17$ và hàm số không có giá trị lớn nhất trên $[-1;+\infty)$.

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Một cách tổng quát, cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn [a ; b] và có đạo hàm trên $(a;b)$ (có thể trừ một số hữu hạn các điểm) và $f'(x)=0$ chỉ tại một số hữu hạn các điểm trong $(a;b)$, ta có thể tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên đoạn [a ; b] theo các bước nhu sau:

Bước 1. Tìm các điểm $x_1;x_2;\ldots;x_n$ thuộc khoảng $(a;b)$ mà tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.

Bước 2. Tính $f(a);f(x_1);f(x_2);\ldots;f(x_n);f(b)$.

Bước 3. Gọi M là số lớn nhất và m là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được ở Bước 2.

Khi đó: $M=\max\limits_{[a;b]} f(x), m=\min\limits_{[a;b]} f(x)$.

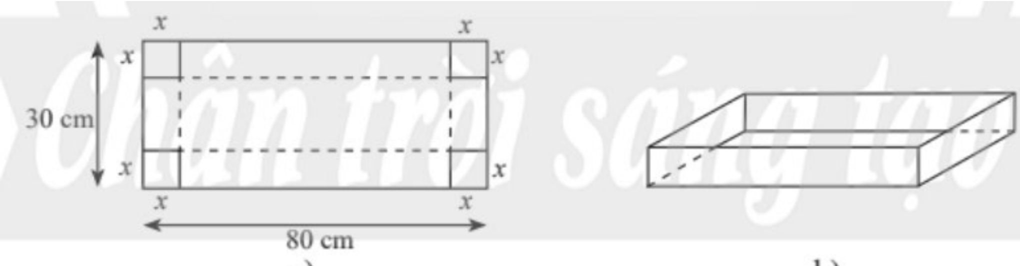
Ví dụ 3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^4-8x^2+9$ trên đoạn $[-1;3]$.

Lời giải

Ta có: $f'(x)=4x^3-16x$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \text{ (không } \in [-1;3] \text{)} \end{array}\right.$

$f(-1)=2; f(0)=9; f(2)=-7; f(3)=18$. Vậy $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=f(3)=18$ và $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=f(2)=-7$.

Ví dụ 4. Từ một tấm bìa hình chữ nhật có chiều rộng $30\,\text{cm}$ và chiều dài $80\,\text{cm}$ (Hình 4a), người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x(\text{cm})$ với $5 \le x \le 10$ và gấp lại để tạo thành chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không nắp như Hình 4b. Tìm x để thể tích chiếc hộp là lớn nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Hình 4

Lời giải

Thể tích chiếc hộp là: $V(x)=x(30-2x)(80-2x)=2400x-220x^2+4x^3$ với $5 \le x \le 10$.

Ta có: $V'(x)=12x^2-440x+2400$

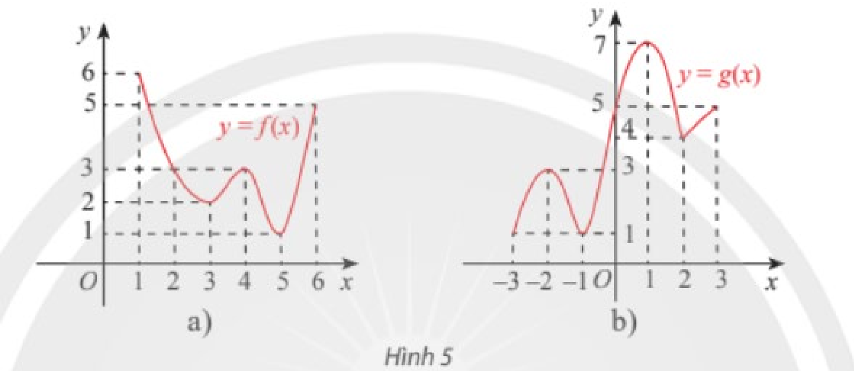
$V'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{20}{3}$ hoặc $x=30$ (loại vì không thuộc $[5;10]$);

$V(5)=7000; V\left(\dfrac{20}{3}\right)=\dfrac{200000}{27}; V(10)=6000.$

Do đó $\max\limits_{[5;10]} V(x)=\dfrac{200000}{27}$ khi $x=\dfrac{20}{3}$. Vậy để thể tích chiếc hộp là lớn nhất thì $x=\dfrac{20}{3}\,\text{cm}$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số có đồ thị được cho ở Hình 5.



Hình 5

Lời giải

a) Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{[1;6]} f(x)=f(1)=6; \min\limits_{[1;6]} f(x)=f(5)=1$

b) Dựa vào đồ thị ta thấy $\max\limits_{[-3;3]} g(x) = g(1) = 7; \min\limits_{[-3;3]} g(x) = g(-3) = g(-1) = 1$

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 12x + 1$ trên đoạn $[-1;3]$; b) $y = -x^3 + 24x^2 - 180x + 400$ trên đoạn $[3\ ;\ 11]$;

c) $y = \dfrac{2x+1}{x-2}$ trên đoạn $[3\ ;\ 7]$; d) $y = \sin 2x$ trên đoạn $\left[0; \dfrac{7\pi}{12}\right]$.

Lời giải

a) Có $y' = 3x^2 - 12;\quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$ hoặc $x = -2$ (loại vì $x \in [-1;3]$). Có $y(-1) = 12; y(2) = -15; y(3) = -8$.

Vậy $\min\limits_{[-1;3]} y = y(2) = -15; \max\limits_{[-1;3]} y = y(-1) = 12$.

b) Có $y' = -3x^2 + 48x - 180; y' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ hoặc $x = 10$. Có $y(3) = 49; y(6) = -32; y(10) = 0; y(11) = -7$.

Vậy $\min\limits_{[3;11]} y = y(6) = -32; \max\limits_{[3;11]} y = y(3) = 49$.

c) Có $y' = \dfrac{2(x-2) - (2x+1)}{(x-2)^2} = -\dfrac{5}{(x-2)^2} < 0, \forall x \in [3;7]$. Có $y(3) = 7; \mathrm{y}(7) = 3$.

Vậy $\min\limits_{[3;7]} y = y(7) = 3; \max\limits_{[3;7]} y = y(3) = 7$.

d) Có $\mathrm{y}' = 2\cos 2\mathrm{x}; \mathrm{y}' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$ vì $\mathrm{x} \in \left[0; \dfrac{7\pi}{12}\right]$. Có $\mathrm{y}(0) = 0; y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0; y\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{1}{2}$

Vậy $\min\limits_{\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]} y = y\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{1}{2}; \max\limits_{\left[0;\frac{7\pi}{12}\right]} y = y(0) = y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$.

3. Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x - 4$ trên nửa khoảng $[-3;2)$; b) $y = \dfrac{3x^2 - 4x}{x^2 - 1}$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải

a) Có $y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 1$.

Bảng biến thiên

x	-3		-1		1		2
y'	0	+	0	-	0	+	
y	-22	↗	-2	↘	-6	↗	-2

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{[-3;2)} y = y(-1) = -2; \min\limits_{[-3;2)} y = y(-2) = -22$

b) Trên khoảng $(-1;+\infty)$ hàm số không xác định tại $x = 1$.

Ta có: $y' = \dfrac{(6x-4)\left(x^2-1\right)-2x\left(3x^2-4x\right)}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{4x^2-6x+4}{\left(x^2-1\right)^2} = \dfrac{4\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{7}{4}}{\left(x^2-1\right)^2} > 0$

Bảng biến thiên

x	-1		1		+∞
y'	‖		‖		
y	‖ -∞	↗	+∞ ‖ -∞	↗	3

Hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(-1;+\infty)$.

4. Khi làm nhà kho, bác An muốn cửa sổ có dạng hình chữ nhật với chu vi bằng $4\,\text{m}$ (Hình 6). Tìm kích thước khung cửa sổ sao cho diện tích cửa sổ lớn nhất (để hứng được nhiều ánh sáng nhất)?

Hình 6

Lời giải

Nửa chu vi khung cửa sổ là $4:2 = 2(\text{m})$.

Gọi chiều dài khung cửa sổ là $x(m)(0 < x < 2)$.

Chiều rộng khung cửa sổ là 2 - x (m).

Diện tích khung cửa số là $\text{S(x)} = \text{x}(2-\text{x}) = 2\text{x} - \text{x}^2\left(\text{m}^2\right)$.

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số S(x).

Ta có $S'(x) = 2 - 2x; S'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0		1		2
S'(x)		+	0	-	
S(x)	0	↗	1	↘	0

Diện tích của cửa sổ lớn nhất là 1 m² khi đó khung cửa số có dạng hình vuông cạnh 1m.

5. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sqrt{1-x^2} + x^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = [-1;1]$

$$y' = \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}} + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Tập xác định mới: $D_1 = (-1;1)$

Bảng biến thiên:

x	-1		0		1
y'	||	+	0	-	||
y	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{D} y = y(0) = 2$ và $\min\limits_{D} y = y(-1) = y(1) = 1$

6. Khối lượng $q(\text{kg})$ của một mặt hàng mà cửa tiệm bán được trong một ngày phụ thuộc vào giá bán p (nghìn đồng /kg) theo công thức $p = 15 - \frac{1}{2}q$. Doanh thu từ việc bán mặt hàng trên của cửa tiệm được tính theo công thức $R = pq$.

a) Viết công thức biểu diễn R theo p.

b) Tìm giá bán mỗi kilôgam sản phẩm để đạt được doanh thu cao nhất và xác định doanh thu cao nhất đó.

Lời giải

a) Từ $p = 15 - \frac{1}{2}q \Leftrightarrow q = 30 - 2p$. Khi đó $R = pq = p(30-2p) = -2p^2 + 30p$.

b) Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $\text{R} = -2p^2 + 30p$

Tập xác định: $D = (0;+\infty)$

Có $R' = -4p + 30; R' = 0 \Leftrightarrow -4p + 30 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{15}{2}$.

Bảng biến thiên

p	0		$\frac{15}{2}$		$+\infty$
R'		$+$	0	$-$	
R	0	$\nearrow$	$\frac{225}{2}$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max\limits_{D} y = R(7,5) = 112,5$

Vậy bán mỗi sản phẩm giá 7,5 nghìn đồng thì đạt doanh thu cao nhất là 112,5 nghìn đồng.

7. Hộp sữa $1l$ được thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh $x$cm. Tìm x để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

Lời giải

Gọi chiều cao của hộp là h (cm)

Thể tích của hộp là: $V = h \cdot x^2 = 1 \Leftrightarrow h = \dfrac{1}{x^2}$

Diện tích toàn phần của hộp là: $y = S_{tp} = S_{xq} + S_{day} = 4hx + 2x^2 = 4 \cdot \dfrac{1}{x^2} \cdot x + 2x^2 = 2x^2 + \dfrac{4}{x}$

Tập xác định: $D = (0; +\infty)$

$y' = 4x - \dfrac{4}{x^2}; y' = 4x - \dfrac{4}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	0		1		$+\infty$
y'	$\Vert$	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	6	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\min\limits_{D} y = y(1) = 6$

Vậy x = 1cm thì diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất và bằng $6cm^2$

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG TOÁN 1. TÌM GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT, LỚN NHẤT CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN

1. BÀI TẬP MẪU

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1;3]$ như hình. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tìm giá trị của M?

x	-1		0		2		3
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $M = f\left(0\right)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $[-2;3]$ có bảng biến thiên như hình bên. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;3]$. Tính tổng $M + m$?

x	-2		0		1		3
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	
y	-2	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	3

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\begin{cases} M = 3 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow M + m = 1$.

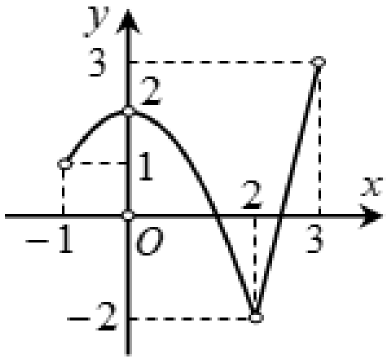
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên trên đoạn $[-1;4]$ như hình dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;4]$. Tính giá trị của $M + m$?

x	-1		1		3		4
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-24	$\nearrow$	-4	$\searrow$	-8	$\nearrow$	-4

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\begin{cases} M = -4 \\ m = -24 \end{cases} \Rightarrow M - m = -28$.

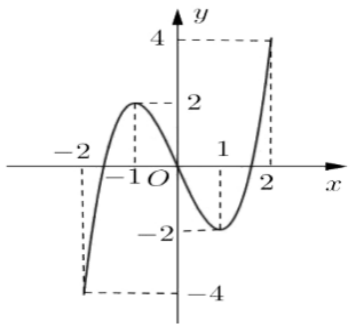
Câu 4: **(Đề thi tham khảo 2019 – Câu 16)** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của $M - m$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta được: $\begin{cases} M=3 \\ m=-2 \end{cases} \Rightarrow M-m=5.$

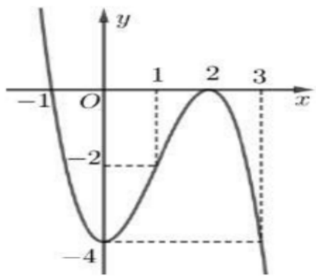
Câu 5: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;2]$. Giá trị của $M-m$ bằng:



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta được: $\begin{cases} M=4 \\ m=-4 \end{cases} \Rightarrow M-m=8.$

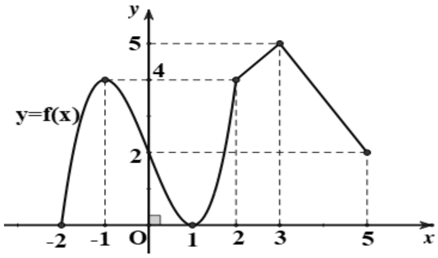
Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;3]$. Giá trị của $M+m$ bằng:



Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta được: $\begin{cases} M=0 \\ m=-4 \end{cases} \Rightarrow M+m=-4.$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2;3]$ và có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(2\cos 5x + 1)$. Giá trị của $M - 2m$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

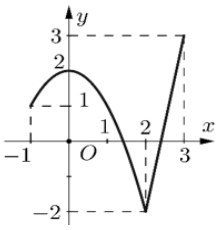
Ta có $-1 \le \cos 5x \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\cos 5x \le 2 \Leftrightarrow -1 \le 2\cos 5x + 1 \le 3$.

Đặt $t = 2\cos 5x + 1$ với $x \in [-2;3]$ thì $t \in [-1;3]$.

Khi đó, $y = f\left(2\cos 5x + 1\right) = f\left(t\right)$ với $t \in [-1;3]$.

Suy ra: $\begin{cases} M = 5 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow M - 2m = 5.$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3\sin^2 x - 1)$?



Lời giải

Ta có $0 \le \sin^2 x \le 1 \Rightarrow 0 \le 3\sin^2 x \le 3 \Rightarrow -1 \le 3\sin^2 x - 1 \le 2$.

Đặt $t = 3\sin^2 x - 1$ với $x \in [-1;3]$ thì $t \in [-1;2]$.

Khi đó, $y = f\left(3\sin^2 x - 1\right) = f\left(t\right)$ với $t \in [-1;2]$.

Suy ra: $\underset{[-1;3]}{Max} f(x) = 2.$

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có bảng biến thiên bên dưới. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(3|\cos x| - 1)$?

x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Lời giải

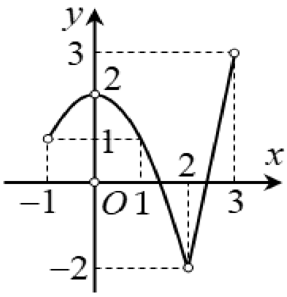
Ta có $0 \le |\cos x| \le 1 \Rightarrow 0 \le 3|\cos x| \le 3 \Rightarrow -1 \le 3|\cos x| - 1 \le 2$.

Đặt $t = 3|\cos x| - 1$ với $x \in [-1;3]$ thì $t \in [-1;2]$.

Khi đó, $y = f(3|\cos x| - 1) = f(t)$ với $t \in [-1;2]$.

Suy ra: $\underset{[-1;3]}{Max} f(x) = 2.$

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;3]$ và có đồ thị như hình. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1;0]$. Giá trị $M - m$ bằng?



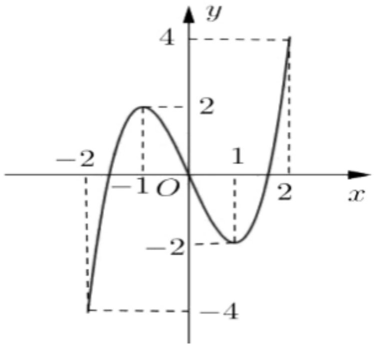
Lời giải

Đặt $t = f(x)$ với $x \in [-1;0]$ thì $f(x) \in [1;2]$.

Khi đó, $y = f(f(x)) = f(t)$ với $t \in [1;2]$.

Suy ra: $\begin{cases} M = 1 \\ m = -2 \end{cases} \Rightarrow M - m = 3$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2;2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(f(x))$ trên đoạn $[-1;1]$. Tính giá trị của $M - m$?



Lời giải

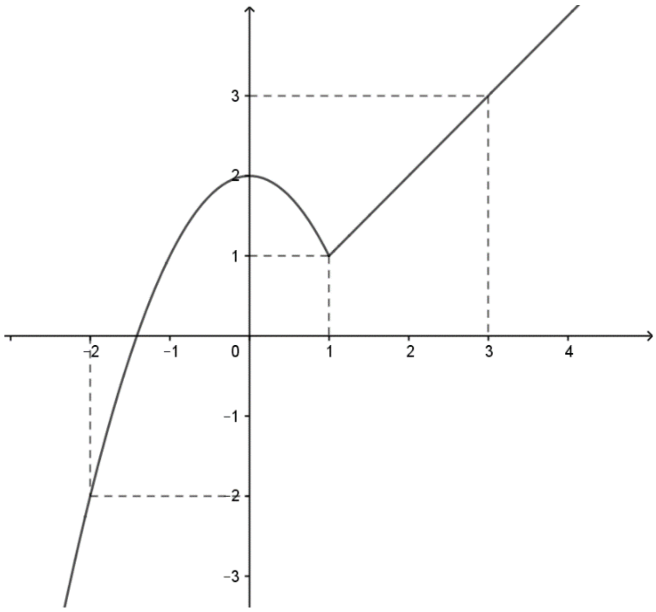
Đặt $t = f(x)$ với $x \in [-1;1]$ thì $f(x) \in [-2;2]$.

Khi đó, $y = f(f(x)) = f(t)$ với $t \in [-2;2]$.

Suy ra: $\begin{cases} M = 4 \\ m = -4 \end{cases} \Rightarrow M - m = 8$.

2. BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:

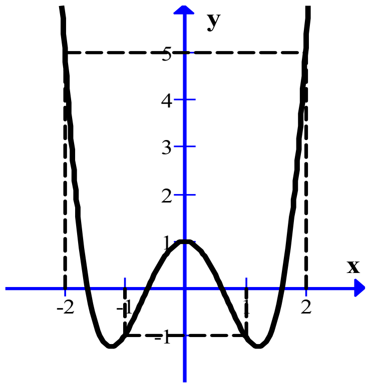


Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2,3\right]$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có $\min\limits_{[-2,3]} f\left(x\right)=-2$ và $\max\limits_{[-2,3]} f\left(x\right)=3$.

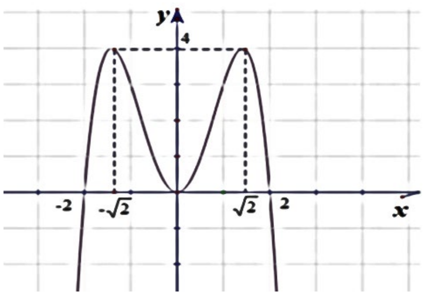
Bài 2. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số này trên đoạn $\left[-1;2\right]$?



Lời giải

Từ đồ thị ta có $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(2)=5$

Bài 3. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;2\right]$?

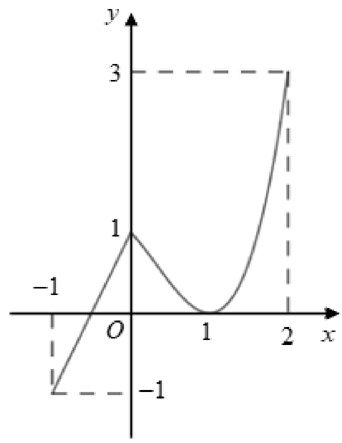


Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn $[0;2]$ hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất bằng 4 khi $x=\sqrt{2}$

Suy ra $\underset{[0;2]}{Max}\, f(x)=4$.

Bài 4. (Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - Lần 1 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$. Hãy tính giá trị của $M.m$?

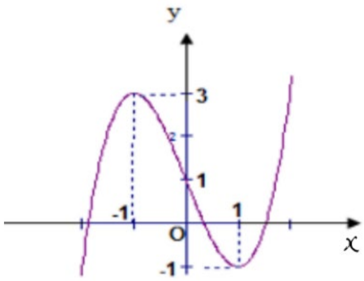


Lời giải

Từ đồ thị ta có $M=3$ và $m=-1$.

Vậy $M.m=-3$.

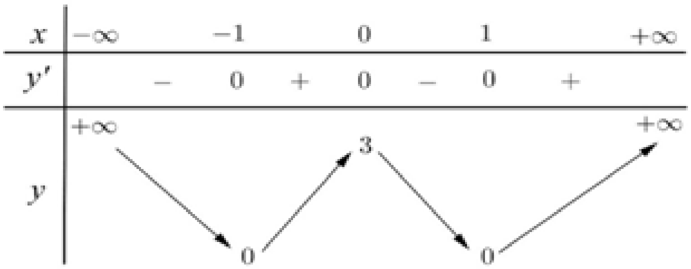
Bài 5. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Từ đồ thị, hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$?



Lời giải

Từ đồ thị suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=3$ tại $x=-1$.

Bài 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

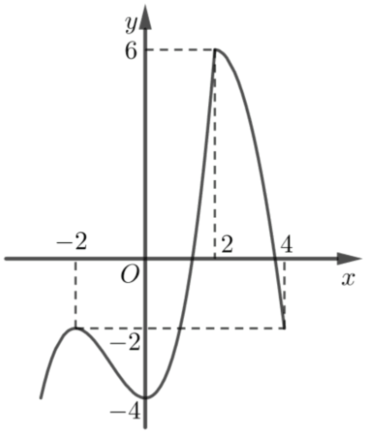


Cho biết giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-1;1\right]$ là bao nhiêu?

Lời giải

Từ BBT suy ra $\min\limits_{[-1;1]} f\left(x\right)=0$ tại $x=\pm 1$.

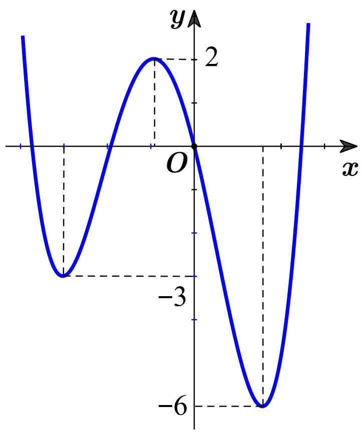
Bài 7. (THPT Chu Văn An - Hà Nội - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[-2;4\right]$. Hãy tìm giá trị của $m+M$?



Lời giải

Trên đoạn $\left[-2;4\right]$, hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -4 tại $x=0$, giá trị lớn nhất bằng 6 tại $x=2$ nên $m+M=-4+6=2$.

Bài 8. (THPT Chu Văn An - Hà Nội - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ:



Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên?

Lời giải

Dựa vào đồ thị, hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất bằng -6.

Bài 9. (Chuyên Vĩnh Phúc - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên nửa khoảng $\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ và có bảng biến thiên dưới đây:

x	$\frac{3}{2}$		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y	$\frac{2}{7}$	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên:

Lời giải

Dựa vào BBT ta thấy $\max\limits_{\left[\frac{3}{2};+\infty\right)} y=\frac{1}{3}$.

Bài 10. (THPT Đoàn Thượng - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

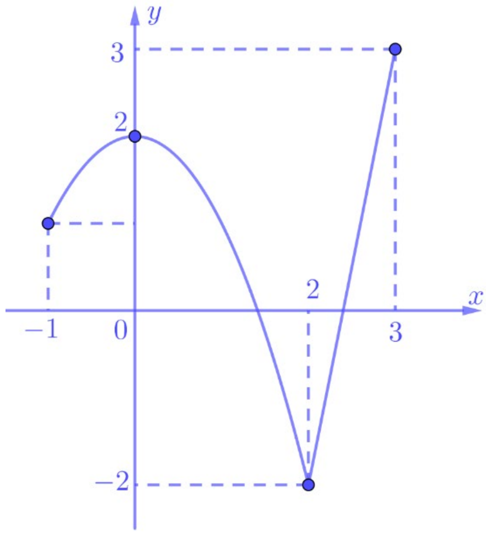
Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là bao nhiêu?

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty$.

Do đó hàm số đã cho không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$.

Bài 11. (THPT Đoàn Thượng - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-1;3\right]$ và có đồ thị như hình bên



Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[-1;3]$. Giá trị của M bằng:

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất là $M=3$ khi $x=3$.

Bài 12. (THPT Nghĩa Hưng A - Nam Định) Hàm số $y=f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong $[-1;3]$ cho bởi hình dưới đây.

x	-1		0		2		3
y'		+	0	-	0	+	
y		↗	5	↘		↗	4
	0				1		

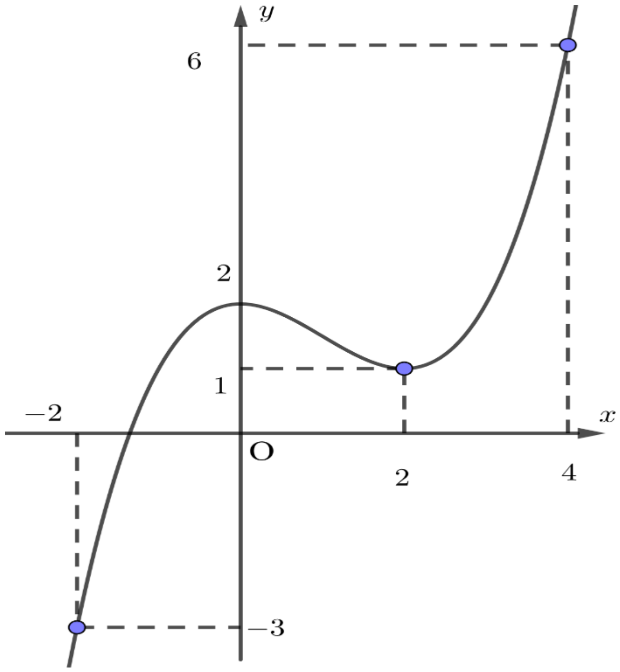
Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên?

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng 5.

Vậy $M=5$.

Bài 13. (THPT Thuận Thành - Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị hàm số như hình vẽ sau:



Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0;4]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Xét đồ thị hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[0;4]$ như hình vẽ.

Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2 \Rightarrow y_{\min}=f(2)=1$.

Bài 14. (THPT Thuận Thành - Bắc Ninh) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

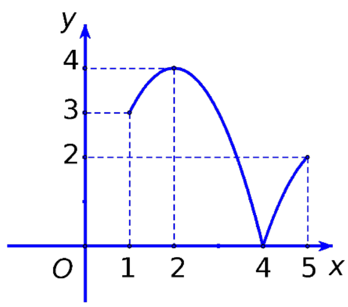
x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	|	$+$	|	$-$	
y	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-4	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ bằng 3 đạt tại $x=2$.

Bài 15. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên đoạn $[1;5]$ và có đồ thị như hình vẽ.

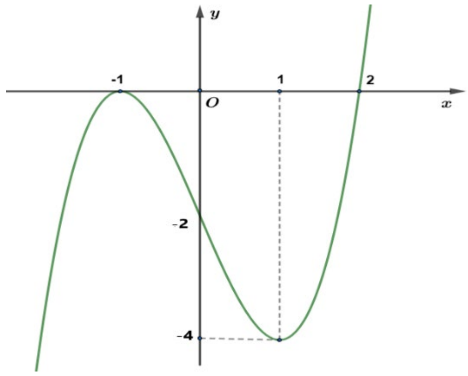


Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;5]$?

Lời giải

Từ đồ thị giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[1;5]$ bằng $f(2)=4$.

Bài 16. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[0;2]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $[0;2]$ bằng -4 tại $x=1$.

Bài 17. (THPT Lê Thánh Tông - Hà Nội - Năm 2021 - 2022) Một hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	
y			4				5		
	1	$\nearrow$		$\searrow$	2	$\nearrow$		$\searrow$	0

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên?

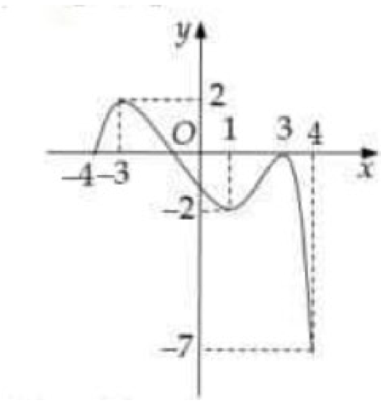
Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$; $y(-2)=4$; $y(0)=2$; $y(1)=5$.

Vậy $\max\limits_{\mathbb{R}} y=5$.

Bài 18. (THPT MARICURIE - Hà Nội - Năm 2021 - 2022) Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị trên đoạn $[-4;4]$.

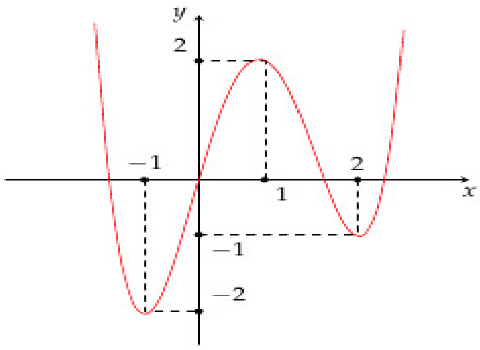


Hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-4;4]$ tại điểm nào?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[-4;4]$ tại $x=-3$.

Bài 19. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình sau

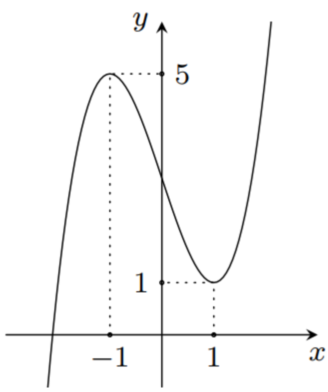


Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$?

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ bằng -2.

Bài 20. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình sau:

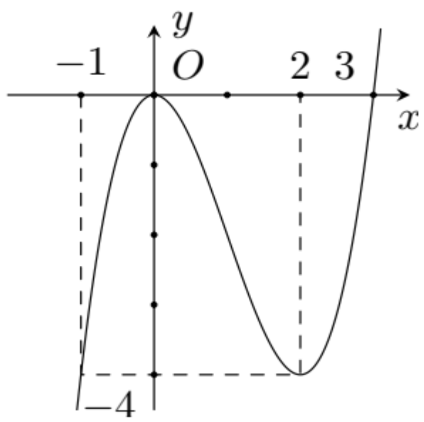


Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-1;1]$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất là 5 trên đoạn $[-1;1]$.

Bài 21. (SGD Hà Tĩnh – KSCL Lần 3 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

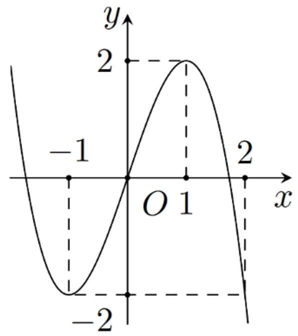


Hãy tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất là 0 trên đoạn $[-1;2]$.

Bài 22. (SGD Hà Tĩnh – KSCL Lần 4 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[0;2]$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;2]$ là 2.

Bài 23. (SGD Hà Tĩnh – KSCL Lần 05 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có bảng biến thiên trong đoạn $[-1;3]$ như hình vẽ.

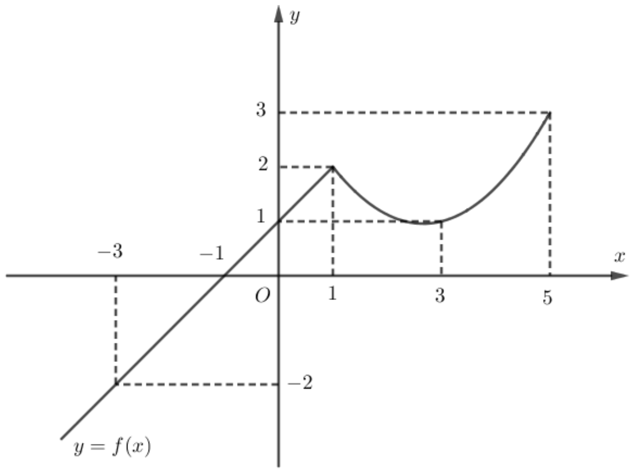
x	-1		0		2		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{[-1;3]} f\left(x\right) = 5$ đạt tại $x = 0$.

Bài 24. (SGD Thanh Hóa – KSCL Lần 01 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[-3;5\right]$ và có đồ thị như hình vẽ.

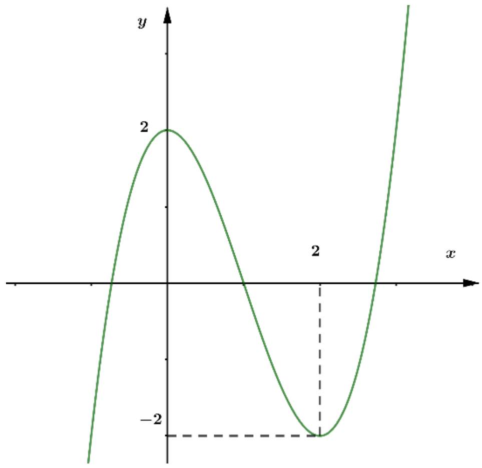


Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;5\right]$?

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-3;5\right]$ bằng 3 đạt được tại $x = 5$.

Bài 25. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi m và M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[0;2]$.



Hãy tìm giá trị của $M + n$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị, $m = -2; M = 2; M + m = 0$.

Bài 26. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ liên tục trên $\left[-3;2\right]$ và có bảng biến thiên như hình dưới. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f\left(x\right)$ trên $\left[-3;2\right]$.

x	-3		0		1		2
$f(x)$	-4	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	1

Tính $M.m$?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta xác định được $M = 2$ và $m = -4$.

Từ đó suy ra $M.m = 2.\left(-4\right) = -8$.

Bài 27. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đạt giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1;+\infty)$ tại điểm nào?

Lời giải

Từ bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(1;+\infty)$:

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	0	$+$	0	-	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1;+\infty)$ đạt được tại $x = 2$.

Bài 28. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau. Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f(x_0)$ tại x_0

x	0		4		8
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

.

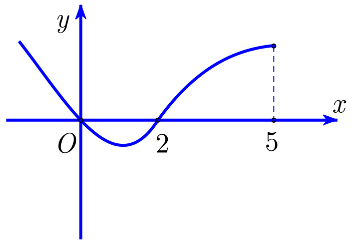
Hãy cho biết $x_0.f(x_0)$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đạt giá trị lớn nhất là $f\left(x_0\right) = 16$ tại $x_0 = 4$.

Nên $x_0.f(x_0)=16.4=64$.

Bài 29. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$ tại mọi $x\in\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y=f'\left(x\right)$ được cho như hình vẽ dưới đây.



Biết rằng $f\left(0\right)+f\left(3\right)=f\left(2\right)+f\left(5\right)$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;5\right]$?

Lời giải

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[0;5\right]$

x	0		2		5
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$f(0)$	↘	$f(2)$	↗	$f(5)$

Từ bảng biến thiên ta thấy $\underset{[0;5]}{Min}\, f\left(x\right)=f\left(2\right);f\left(2\right)<f\left(3\right)$

Mà $f\left(0\right)+f\left(3\right)=f\left(2\right)+f\left(5\right)$ nên $f\left(5\right)>f\left(0\right)$

Vậy $\underset{[0;5]}{Max}\, f\left(x\right)=f\left(5\right)$.

Bài 30. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

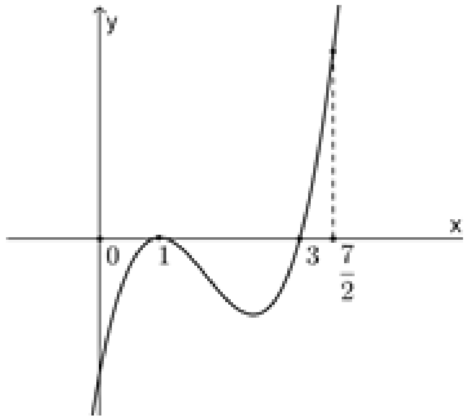
x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$+$	0	$-$	
y	5	↘	-2	↗	4	↘	-1

Tìm điểm cực đại và điểm tiểu của đồ thị hàm số trên?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có điểm cực đại của đồ thị hàm số là $\left(2;4\right)$, điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $\left(-1;-2\right)$.

Bài 31. (SGD Nam Định - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[0;\dfrac{7}{2}\right]$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $\left[0;\dfrac{7}{2}\right]$ tại điểm nào?

Lời giải

Ta có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$			$f(3)$	$\nearrow$	$+\infty$

Quan sát BBT ta thấy hàm số đạt GTNN tại $x = 3$.

Bài 32. (SGD Gia Lai – KSCL Lần 1 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau.

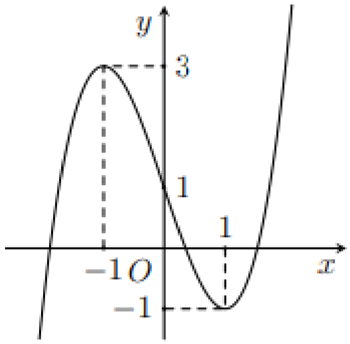
x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(-\infty;1)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Nhìn vào bảng biến thiên suy ra $\max\limits_{(-\infty;1)} f(x) = f(0) = 1$.

Bài 33. (SGD Hà Tĩnh – KSCL Lần 4 - Năm 2021 - 2022) Đồ thị của hàm số $f(x)$ có dạng đường cong trong hình vẽ bên.



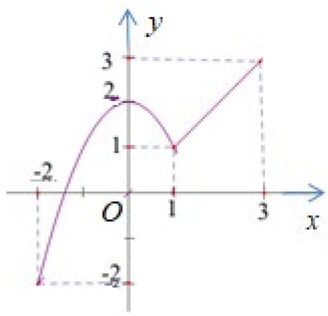
Gọi M là giá trị lớn nhất, m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;1\right]$. Tính $P=M-2m$?

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có: $M=3, m=-1$

Vậy $P=M-2m=3-2.\left(-1\right)=5$.

Bài 34. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$, $x\in\left[-2;3\right]$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-2;3\right]$.



Tính giá trị $M+m$?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có: $\max\limits_{[-2;3]} f\left(x\right)=3$ đạt tại $x=3 \Rightarrow M=3$.

$\min\limits_{[-2;3]} f\left(x\right)=-2$ đạt tại $x=-2 \Rightarrow m=-2$.

Vậy $M+m=3+\left(-2\right)=1$.

Bài 35. (THPT Lương Thế Vinh - Hà Nội - Lần 01 - năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

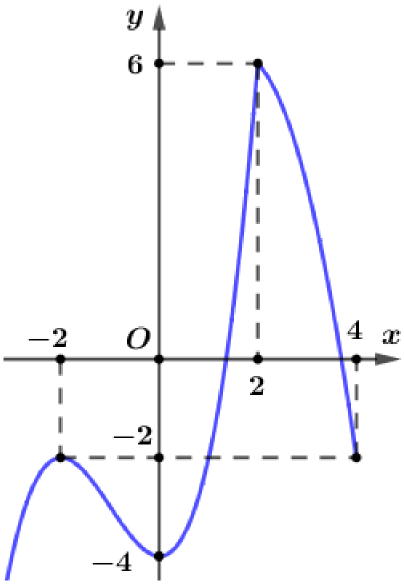
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2022	$\searrow$	m

Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y=f\left(x\right)$ có giá trị nhỏ nhất?

Lời giải

Để hàm số có giá trị nhỏ nhất cần $0\le m<2022$. Suy ra có 2022 giá trị.

Bài 36. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2;4\right]$.



Tính giá trị của M^2+m^2?

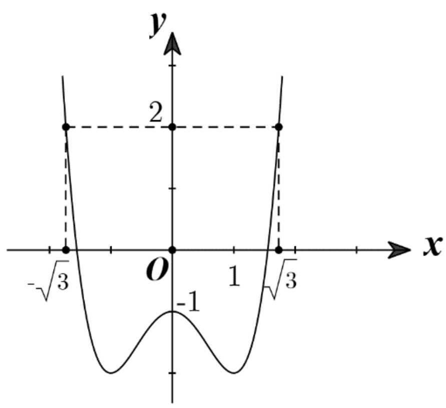
Lời giải

Từ đồ thị của hàm số $y=f\left(x\right)$ ta thấy $-4\le y\le 6$ khi $-2\le x\le 4$.

Do đó $M=\max\limits_{[-2;4]} f\left(x\right)=6$ tại $x=2$ và $m=\min\limits_{[-2;4]} f\left(x\right)=-4$ tại $x=0$.

$\Rightarrow M^2+m^2=6^2+\left(-4\right)^2=52$.

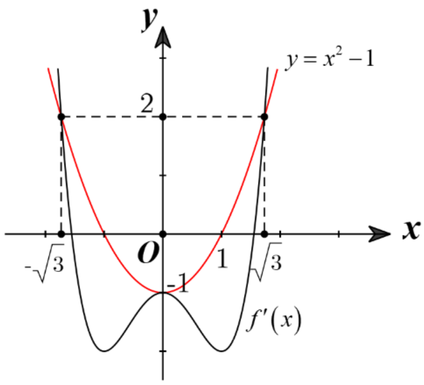
Bài 37. (SGD Thanh Hóa – KSCL Lần 01 - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y=f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số đạo hàm $y=f'\left(x\right)$ như hình vẽ bên.



Đặt $h(x)=3f(x)-x^3+3x$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $h(x)$ trên $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$?

Lời giải

Ta có: $h'(x)=3f'(x)-3x^2+3$; $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=x^2-1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\sqrt{3} \\ x=-\sqrt{3} \end{array}\right.$.

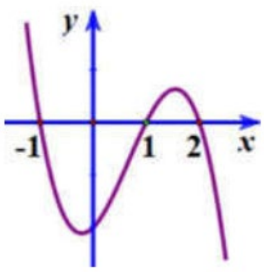


Dựa vào đồ thị suy ra $f'(x)\le x^2-1, \forall x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right] \Leftrightarrow h'(x)\le 0, \forall x\in\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

Suy ra hàm số $h(x)$ đồng biến trên $\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]$.

Vậy $\max\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{3}\right]} h(x)=h\left(-\sqrt{3}\right)=3f\left(-\sqrt{3}\right)$.

Bài 38. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình vẽ bên.



Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$?

Lời giải

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ $\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f(-1)$	$\searrow$	$f(1)$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-1;2]$ là $f(1)$

.

Bài 39. (Chuyên Lương Văn Tụy - Ninh Bình - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

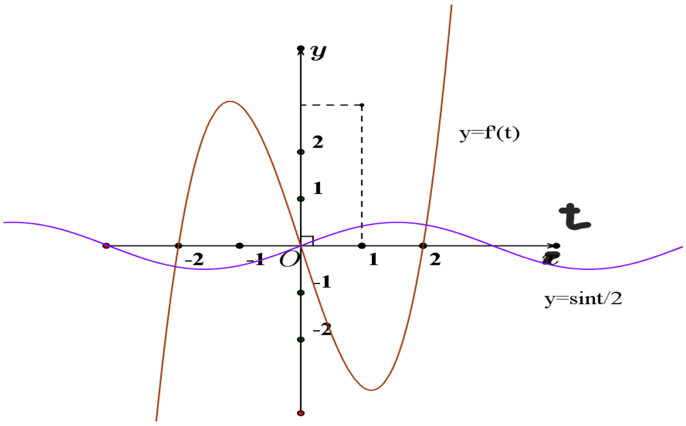
x	$-\infty$		-2		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	↗	0	↗		↘	0	↘		↗	0	↗	$+\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = f(2x) - \sin^2 x$ trền đoạn $[-1;1]$?

Lời giải

$g'(x) = 2f'(2x) - 2\sin x.\cos x = 2f'(2x) - \sin 2x$. Đặt $t = 2x \Rightarrow t \in [-2;2]$.

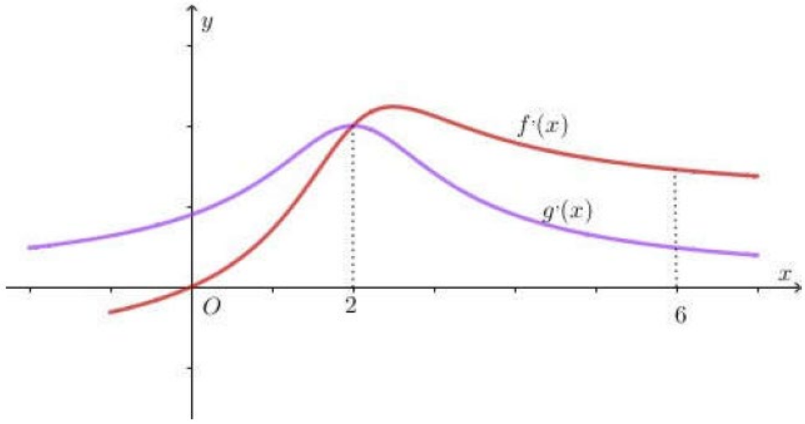
$g'(t) = 0 \Leftrightarrow 2f'(t) - \sin t = 0 \Leftrightarrow f'(t) = \dfrac{\sin t}{2}, \forall t \in [-2;2]$.



t	-2		-1		0		1		2
$g'(t)$		+	|	+	0	-	|	-	
$g(t)$	$g(-2)$	↗		↗	$g(0)$	↘		↘	$g(2)$

Vậy giá trị lớn nhất là $g(0) = f(0)$.

Bài 40. Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$, $g'(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $g'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết rằng $f(0)-f(6)<g(0)-g(6)$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x)=f(x)-g(x)$ trên đoạn $[0;6]$?

Lời giải

Ta có: $h'(x)=f'(x)-g'(x)$. Do đó $h'(x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=g'(x) \Leftrightarrow x=2$.

x	0		2		6
h'		$-$	0	$+$	
h	$h(0)$	$\searrow$	$h(2)$	$\nearrow$	$h(6)$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min\limits_{[0;6]} h(x)=h(2)$.

Mặt khác: $f(0)-f(6)<g(0)-g(6) \Leftrightarrow f(0)-g(0)<f(6)-g(6) \Leftrightarrow h(0)<h(6)$.

Vậy $\max\limits_{[0;6]} h(x)=h(6)$.

Bài 41. (SGD Nam Định - Năm 2020 - 2021) Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$		0		4		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)=f(4x-x^2)+\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+\frac{1}{3}$ trên đoạn $[1;3]$?

Lời giải

Ta có: $g'(x)=(4-2x)f'(4x-x^2)+x^2-6x+8$

$=2(2-x)f'(4x-x^2)+(x-4)(x-2)$

$=(2-x)\left[2f'(4x-x^2)+4-x\right]$.

Ta thấy $3 \le 4x-x^2 \le 4$, $\forall x \in [1;3] \Rightarrow f'(4x-x^2)>0$.

Hơn nữa, $4-x>0, \forall x \in [1;3]$.

Suy ra $2f'(4x-x^2)+4-x>0$.

Do đó, $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=2$

Bảng biến thiên

x	1		2		3
g'		$+$	0	$-$	
g	$g(1)$	$\nearrow$	$g(2)$	$\searrow$	$g(3)$

Vậy $\max\limits_{[1;3]} g(x) = g(2) = f(4)+7 = 0+7 = 7$.

DẠNG TOÁN 2. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN ĐOẠN

☆☆☆

Tìm giá trị lớn nhất & giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

Phương pháp:

Bước 1. Hàm số đã cho xác định và liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Tính $f'(x)$ và tìm những điểm x_i sao cho tại đó có đạo hàm bằng 0 hoặc liên tục nhưng không có đạo hàm.

Bước 2. Tính $f(a),\ f(b),\ f(x_i)$.

Bước 3. Kết luận: $\begin{cases} \max\limits_{[a;b]} f(x) = \max\left\{f(a);\ f(b);\ f(x_i)\right\} \\ \min\limits_{[a;b]} f(x) = \min\left\{f(a);\ f(b);\ f(x_i)\right\} \end{cases}$.

:

- Nếu $y=f(x)$ đồng biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$.
- Nếu $y=f(x)$ nghịch biến trên $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$ và $\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$.

1. BÀI TẬP MẪU

Ví dụ 1. **(Đề thi THPT 2020 – Mã đề 101 – Câu 36)** Giá trị nhỏ hàm số $y=x^3-24x$ trên đoạn $[2;19]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=2\sqrt{2} & \in[2;19] \\ x=-2\sqrt{2} & \notin[2;19] \end{array}\right.$

$y(2)=-40,\ y(19)=6403,\ y(2\sqrt{2})=-32\sqrt{2}$.

Suy ra: $\min\limits_{[2;19]} y = -32\sqrt{2}$ khi $x=2\sqrt{2}$.

Ví dụ 2. **(Đề thi THPT 2021 – Mã đề 103 – Câu 36)** Trên đoạn $[0;3]$, hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm ?

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \notin [0;3] \end{array}\right.$.

Ta có: $y(0) = 4, y(3) = 22, y(1) = 2$

Vậy hàm số $y = x^3 - 3x + 4$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;3]$ tại điểm $x = 1$.

Ví dụ 3. **(Đề thi THPT 2021 – Mã đề 104 – Câu 37)** Trên đoạn $[-1;2]$, hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 1$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm ?

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \notin [-1;2] \end{array}\right.$.

$y(-1) = 3; y(0) = 1; y(2) = 21$.

Vậy GTNN trên đoạn $[-1;2]$ của hàm số bằng 1 tại $x = 0$.

Ví dụ 4. **(Đề thi THPT 2022 – Mã đề 101 – Câu 30)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng ?

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$, ta có:

$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in [-2;2] \\ x = 3 \notin [-2;2] \end{array}\right.$.

$f(-2) = 8$; $f(-1) = 15$; $f(2) = -12$.

Suy ra $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = 15$.

Ví dụ 5. **(Lương Tài 2 - Bắc Ninh - Lần 1 - 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên đoạn $\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{5}$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$2\sqrt{5}$

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số ?

Lời giải

Dựa vào BBTta thấy $\min\limits_{\left[-\sqrt{3};\sqrt{5}\right)} y=-2$ khi $x=1$ là đúng.

Ví dụ 6. **(Đề thi THPT 2018 – Mã đề 101 – Câu 23)** Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-4x^2+9$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng:

Lời giải

Xét hàm số $y=x^4-4x^2+9$ trên đoạn $[-2;3]$.

Ta có: $y'=4x^3-8x$.

$$y'=0 \Leftrightarrow 4x^3-8x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in\left[-2;3\right] \\ x=\sqrt{2}\in\left[-2;3\right] \\ x=-\sqrt{2}\in\left[-2;3\right] \end{array}\right.$$

Ta có: $y\left(-2\right)=9; y\left(3\right)=54; y\left(0\right)=9; y\left(\sqrt{2}\right)=5; y\left(-\sqrt{2}\right)=5$.

Vậy $\underset{\left[-2;3\right]}{Max}y=y\left(3\right)=54$. Chọn D.

Ví dụ 7. **(Chuyên Bắc Giang - Tháng 11- 2019)** Cho hàm số $y=\dfrac{3x-1}{x+2}$. Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $\left[0;2\right]$. Tính giá trị của $4M-2m$ bằng

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{7}{\left(x+2\right)^2}>0, \forall x\in\left[0;2\right]$ nên hàm số đồng biến trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Suy ra $M=\max\limits_{\left[0;2\right]}y=f\left(2\right)=\dfrac{5}{4}$ và $m=\min\limits_{\left[0;2\right]}y=f\left(0\right)=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy $4M-2m=4.\dfrac{5}{4}-2.\left(-\dfrac{1}{2}\right)=6$.

Ví dụ 8. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{-2x+3}{x+1}$ trên đoạn $[1;4]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $y'=\dfrac{-5}{\left(x+1\right)^2}<0, \forall x\in\left[1;4\right]$ nên hàm số nghịch biến trên đoạn $\left[1;4\right]$.

Suy ra $M=\max\limits_{[1;4]} y=f(1)=\dfrac{1}{2}$ và $m=\min\limits_{[1;4]} y=f(4)=-1$.

Ví dụ 9. **(Đề thi THPT 2017 – Mã đề 101)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Lời giải

Đặt $y=f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$.

Ta có $y'=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2x^3-2}{x^2}$, $y'=0\Rightarrow x=1\in\left[\dfrac{1}{2};2\right]$

Khi đó $f(1)=3, f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{17}{4}, f(2)=5$

Vậy $m=\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} f(x)=f(1)=3$.

Ví dụ 10. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ trên đoạn $[2;4]$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Hàm số $y=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;4]$

Ta có $y'=\dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}; y'=0\Leftrightarrow x^2-2x-3=0\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=-1$ (loại)

Suy ra $y(2)=7; y(3)=6; y(4)=\dfrac{19}{3}$. Vậy $\min\limits_{[2;4]} y=6$ tại $x=3$.

Ví dụ 11. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\sqrt{x^2-4x+10}$ trên đoạn $[-4;1]$.

Lời giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+10}}<0$ với mọi $x\in[-4;1]$. Suy ra hàm số nghịch biến trên $[-4;1]$

.

Vậy $f_{\min}=f(1)=\sqrt{7}$.

Ví dụ 12. Hàm số $y=\sqrt{4-x^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất tại điểm x bằng bao nhiêu?

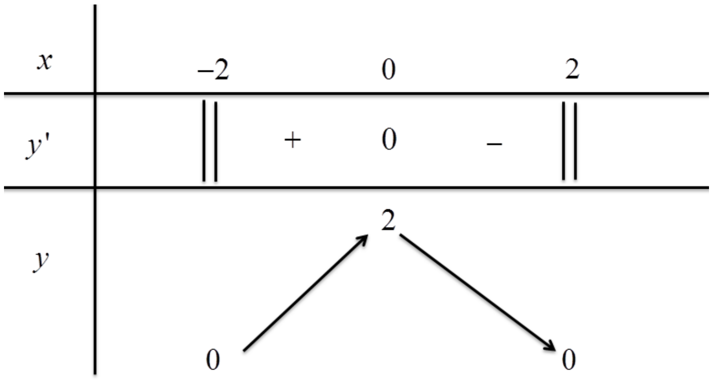
Lời giải

TXĐ: $D=[-2;2]$

Ta có $y'=\dfrac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{-x}{\sqrt{4-x^2}}$, $\forall x\in(-2;2)$

$y'=0\Leftrightarrow x=0$

Bảng xét dấu



Dựa vào bảng xét dấu ta thấy, hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=\pm 2$.

Ví dụ 13. Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y=2x+\sqrt{8-2x^2}$ trên tập xác định của nó?

Lời giải

Hàm số có tập xác định là $D=[-2;2]$.

Ta có $y'=2-\dfrac{2x}{\sqrt{8-2x^2}}$

$$y'=0\Leftrightarrow \sqrt{8-2x^2}=x\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ 8-2x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ 3x^2=8\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x=\pm\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\in[-2;2]$$

.

$y(2)=4$; $y(-2)=-4$; $y\left(\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)=2\sqrt{6}$.

Vậy $M=\max\limits_{[-2;2]} y=2\sqrt{6}$.

Ví dụ 14. Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin^3 x-\cos 2x+\sin x+2$. Khi đó giá trị của biểu thức $M+m$ bằng:

Lời giải

Ta có: $y=\sin^3 x-\cos 2x+\sin x+2=\sin^3 x+2\sin^2 x+\sin x+1$.

∗ Đặt $t=\sin x$. Suy ra $y=t^3+2t^2+t+1$, $t\in[-1;1]$

∗ $y'=3t^2+4t+1$

* $y' = 0 \Leftrightarrow t = -1 \vee t = -\frac{1}{3}$

* Ta có $y(-1) = 1; y\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{23}{27}; y(1) = 5$

Suy ra: $M = 5$ và $m = \frac{23}{27} \Rightarrow M + m = \frac{158}{27}$.

Ví dụ 15. (THPT Hoằng Hóa 2 - Thanh Hóa - Lần 1 - 2019) Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = f(x) = \frac{mx+1}{x-m}$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[1;2]$ bằng -2.

Lời giải

Ta có $f'(x) = \frac{-m^2-1}{(x-m)^2} < 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Nếu $m \in [1;2]$ thì hàm số không thể đạt giá trị lớn nhất bằng -2.

Xét $m \notin [1;2]$ suy ra $\max\limits_{[1;2]} f(x) = f(1) = \frac{m+1}{1-m} = -2 \Leftrightarrow m = 3$.

Ví dụ 16. (Đề thi THPT 2017 – Mã đề 101 – Câu 33) Cho hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực). Tìm tất cả các giá trị thực của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y = 3$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(2) = \frac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại)

* TH 2. $-1-m < 0 \Leftrightarrow m > -1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra

$\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(4) = \frac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ suy ra $m > 4$.

Ví dụ 17. (Đề thi THPT 2022 – Mã đề 103 – Câu 40) Cho hàm số $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)$ bằng?

Lời giải

Ta có $f(x) = ax^4 + 2(a+4)x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4ax^3 + 4(a+4)x = 4x\left[ax^2 + (a+4)\right]$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ ax^2 + (a+4) = 0 \, (*) \end{array}\right.$.

Điều kiện cần để $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1)$ là PT $(*)$ có nghiệm $x=1$

$\Leftrightarrow a + (a+4) = 0 \Leftrightarrow a = -2$.

Khi đó $f(x) = -2x^4 + 4x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = -8x^3 + 8x$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;2] \\ x = 1 \in [0;2] \\ x = -1 \notin [0;2] \end{array}\right.$$

Ta có $f(0) = -1; f(2) = -17; f(1) = 1$.

Vậy $\max\limits_{[0;2]} f(x) = f(1) = 1$ và $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -17$ khi $x = 2$.

Ví dụ 18. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + 2m - 1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất. Giá trị của m thuộc khoảng?

Lời giải

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 2m - 1$, $g'(x) = 3x^2 - 3$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$.

Trên $[0;2]$ ta có $g(0) = 2m - 1$; $g(1) = 2m - 3$; $g(2) = 1 + 2m$.

Khi đó $\max\limits_{[0;2]} y = \max\left\{|2m-3|;|2m+1|\right\} = \dfrac{|2m-3+2m+1|}{2} + \dfrac{|2m-3-(2m+1)|}{2}$ $= |2m-1| + 1 \geq 1$

Suy ra để GTLN của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + 2m - 1\right|$ trên đoạn $[0;2]$ là nhỏ nhất thì $\Leftrightarrow m = \dfrac{1}{2}$.

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. (Đề thi THPT 2017 – Mã đề 105) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ trên đoạn $[-2;3]$ bằng

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 4x^3 - 8x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-2;3] \\ x = \pm\sqrt{2} \in [-2;3] \end{array}\right.$

$f(-2) = 5; f(0) = 5; f\left(-\sqrt{2}\right) = 1; f\left(-\sqrt{2}\right) = 1; f(3) = 50.$

Vậy $\max\limits_{[-2;3]} f(x) = 50$.

Bài 2. (Đề thi THPT 2019 – Mã đề 101 – Câu 20) Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x+2$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$ bằng?

Lời giải

Ta có: $f'\left(x\right)=3x^2-3$; $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=\pm1\in\left[-3;3\right]$

$f\left(-3\right)=-16; f\left(3\right)=20; f\left(-1\right)=4; f\left(1\right)=0$

Vậy $\max\limits_{[-3;3]} f\left(x\right)=20$.

Bài 3. (Đề thi THPT 2019 – Mã đề 102 – Câu 17) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f\left(x\right)=x^3-3x+2$ trên đoạn $\left[-3;3\right]$ bằng?

Lời giải

$f'\left(x\right)=3x^2-3$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\in\left[-3;3\right]\\x=-1\in\left[-3;3\right]\end{array}\right.$

$f\left(-3\right)=-16$; $f\left(3\right)=20$; $f\left(-1\right)=4$; $f\left(1\right)=0$.

Vậy $\min\limits_{[-3;3]} f\left(x\right)=-16$.

Bài 4. (Đề thi THPT 2021 – Mã đề 101 – Câu 31) Trên đoạn $\left[0;3\right]$, hàm số $y=-x^3+3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm?

Lời giải

Ta có: $y=f\left(x\right)=-x^3+3x\Rightarrow f'(x)=-3x^2+3$

$y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\notin\left[0;3\right]\end{array}\right.$.

Ta có $f\left(0\right)=0;\ f\left(1\right)=2;\ f\left(3\right)=-18$.

Vậy hàm số $y=-x^3+3x$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=1$.

Bài 5. (Đề thi THPT 2021 – Mã đề 102 – Câu 35) Trên đoạn $\left[-2;1\right]$, hàm số $y=x^3-3x^2-1$ đạt giá trị lớn nhất tại điểm

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

$y'=3x^2-6x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\notin\left[-2;1\right]\end{array}\right.$

Ta có $y\left(-2\right)=-21,\ y\left(0\right)=-1,\ y\left(1\right)=-3$.

Vậy $\max\limits_{[-2;1]} y = -1$ tại $x = 0$.

Bài 6. **(Chuyên ĐH Vinh - Giữa HK1 - 2019)** Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ trên đoạn $[0;4]$. Tính tổng $m + 2M$?

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -1 \notin [0;4] \end{array}\right.$

Tính: $y(0) = 1$; $y(3) = -26$; $y(4) = -19$

$\Rightarrow m + 2M = -24$.

Bài 7. **(Đề thi THPT 2017 – Mã đề 104 – Câu 20)** Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Lời giải

Ta có $y' = 2x - \dfrac{2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in \left[\dfrac{1}{2};2\right]$.

Lại có $y\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{17}{4}$; $y(1) = 3$ và $y(2) = 5$.

Vậy $\min\limits_{\left[\frac{1}{2};2\right]} y = y(1) = 3$.

Bài 8. **(Đề thi THPT 2022 – Mã đề 102 – Câu 31)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 10$ trên đoạn $[-2;2]$ bằng?

Lời giải

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \in (-2;2) \\ x = 3 \notin (-2;2) \end{array}\right.$.

Lại có $f(-2) = 8$; $f(-1) = 15$ và $f(2) = -12$.

Vậy $\max\limits_{[-2;2]} f(x) = f(-1) = 15$.

Bài 9. Cho hàm số $y = x^3 + (m^2 + 1)x + m + 1$. Tìm tham số m sao cho $\min\limits_{[0;1]} y = 5$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 + m^2 + 1 > 0$.

Do đó hàm số đã cho luôn đồng biến trên $[0;1]$. $\Rightarrow \min\limits_{[0;1]} y = y(0) \Leftrightarrow 5 = m+1 \Leftrightarrow m = 4$.

Bài 10. (Đề thi THPT 2017 – Mã đề 118 – Câu 36) Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x+1}$ (m là tham số thực) thoả mãn $\mathop{Min}\limits_{[1;2]} y + \mathop{Max}\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3}$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m?

Lời giải

Ta có $y' = \dfrac{1-m}{(x+1)^2}$.

$*$Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

$*$Nếu $m < 1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;2]$,

suy ra $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{m+1}{2} + \dfrac{m+2}{3} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$ (loại).

$*$Nếu $m > 1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$,

suy ra $\min\limits_{[1;2]} y + \max\limits_{[1;2]} y = y(2) + y(1) \Leftrightarrow \dfrac{2+m}{3} + \dfrac{1+m}{2} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m = 5$.

Bài 11. (Đề thi THPT 2022 – Mã đề 101 – Câu 40) Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1$ với m là tham số thực. Nếu $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2)$ thì $\max\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng?

Lời giải

Ta có $f(x) = (m-1)x^4 - 2mx^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4(m-1)x^3 - 4mx = 4x\left[(m-1)x^2 - m\right]$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (m-1)x^2 - m = 0\,(*) \end{array}\right..$$

Điều kiện cần để $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2)$ là PT $(*)$ có nghiệm $x = 2$

$\Leftrightarrow 4(m-1) - m = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{4}{3}$.

Khi đó $f(x) = \dfrac{1}{3}x^4 - \dfrac{8}{3}x^2 + 1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - \dfrac{16}{3}x$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [0;3] \\ x = 2 \in [0;3] \\ x = -2 \notin [0;3] \end{array}\right.$$

Ta có $f(0) = 1; f(3) = 4; f(2) = -\dfrac{13}{3}$.

Vậy $\min\limits_{[0;3]} f(x) = f(2) = -\dfrac{13}{3}$ và $\max\limits_{[0;3]} f(x) = 4$ khi $x = 3$.

Bài 12. **(GK1 - K12 - THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - Năm 2021 - 2022)** Giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{11-2x}$ trên đoạn $\left[1;5\right]$ bằng

Lời giải

Hàm số $f\left(x\right)=\sqrt{11-2x}$ liên tục và xác định trên đoạn $\left[1;5\right]$.

$f'\left(x\right)=\dfrac{-1}{\sqrt{11-2x}}$, $f'\left(x\right)<0\ \forall x\in\left[1;5\right]\Rightarrow \underset{[1;5]}{Max}\, f\left(x\right)=f\left(1\right)=3$.

Bài 13. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sqrt{x^2-2x+5}$ trên đoạn $[-1;3]$ bằng

Lời giải

Xét hàm số trên $[-1;3]$.

Ta có: $y'=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+5}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}$

$y'=0\Leftrightarrow x=1\in\left[-1;3\right]$.

Ta có: $y\left(-1\right)=2\sqrt{5};y\left(3\right)=2\sqrt{2};y\left(1\right)=2\Rightarrow \underset{[-1;3]}{Min}\, f\left(x\right)=f\left(1\right)=2$.

Bài 14. **(Sở GD Bình Dương - HK1 - 2019)** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$ lần lượt là?

Lời giải

Hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}$ xác định khi và chỉ khi $-2\le x\le 2$.

Ta có $y'=1-\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$

$y'=0\Leftrightarrow \sqrt{4-x^2}-x=0\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ 4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x=\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$

Ta có: $y\left(-2\right)=-2,\ y\left(2\right)=2,\ y\left(2\right)=2\sqrt{2}$.

Vậy $\underset{[-2;2]}{Max}\, y=2\sqrt{2};\underset{[-2;2]}{Min}\, y=-2.$

Bài 15. Gọi giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\sqrt{4-x^2}$ lần lượt là M và m. Giá trị của biểu thức $T=M^2+6m$ tương ứng bằng?

Lời giải

Tập xác định: $D=\left[-2;2\right]$.

Đạo hàm của hàm số: $y' = 3 - \dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}} = \dfrac{3\sqrt{4-x^2} - x}{\sqrt{4-x^2}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 2 \\ x = 3\sqrt{4-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 2 \\ x^2 = 9\left(4-x^2\right) \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

Giá trị hàm số tại các điểm đặc biệt: $y\left(\dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right) = 2\sqrt{10}$; $y(-2) = -6$; $y(2) = 6$.

Vì hàm số liên tục trên $[-2;2]$ nên $M = 2\sqrt{10}$; $m = -6$.

Vậy $T = M^2 + 6m = 4$.

Bài 16. Cho hàm số $y = \sqrt{4+x} + \sqrt{4-x}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số trên?

Lời giải

TXĐ $D = [-4;4]$.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{4+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{4+x}} - \dfrac{1}{2\sqrt{4-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{4+x} = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow x = 0(n)$.

Ta có $y(-4) = 2\sqrt{2}$; $y(4) = 2\sqrt{2}$; $y(0) = 4$.

Vậy $\max\limits_{[-4;4]} y = 4$.

Bài 17. (Chu Văn An - Hà Nội - Giữa HK1 - 2019) Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$.

Lời giải

Ta có TXĐ: $D = [-1;3]$

Ta thấy $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}} = \dfrac{\sqrt{3-x} - \sqrt{x+1}}{2\sqrt{(x+1)(3-x)}}$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in [-1;3]$

Ta có $f(-1) = 2; f(1) = 2\sqrt{2}; f(3) = 2.$

Vậy $\max\limits_{[-1;3]} f(x) = 2\sqrt{2}$.

Bài 18. (THPT Trần Phú - Hồ Chí Minh - Năm 2021 - 2022) Cho hàm số $y = e^x\left(x^2 - 3\right)$, gọi $M = \dfrac{a}{e^b}\left(a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{N}\right)$ là giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[-5;-2]$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$?

Lời giải

Ta có $y'=e^x\left(x^2+2x-3\right)$

$y'=0 \Leftrightarrow x^2+2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\notin[-5;-2] \\ x=-3\in[-5;2] \end{array}\right.$.

Ta có $y(-5)=\dfrac{22}{e^5}; y(-3)=\dfrac{6}{e^3}; y(-2)=\dfrac{1}{e^2}$.

Vậy $\max\limits_{[-5;-2]} y=\dfrac{6}{e^3} \Rightarrow a=6; b=3 \Rightarrow a+b=9$.

Bài 19. (Chuyên Vĩnh Phúc - Lần 2 - 2019) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{2\sin x+3}{\sin x+1}$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$ là?

Lời giải

Đặt $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t\in[0;1]$

Hàm số đã cho trở thành $f(t)=\dfrac{2t+3}{t+1} \Rightarrow f'(t)=\dfrac{-1}{(t+1)^2}<0, \forall \mathrm{t}\in[0;1]$.

Vậy $\min\limits_{[0;1]} f(t)=f(1)=\dfrac{5}{2}$.

Bài 20. (THPT Lê Thánh Tông - Hà Nội - Năm 2021 - 2022) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=\dfrac{2\sin x-1}{\sin x+2}$ trên $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$ là?

Lời giải

Đặt $t=\sin x$.

Ta có: $x\in\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right] \Rightarrow t\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$. Khi đó $y=\dfrac{2t-1}{t+2}=f(t)$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{5}{(t+2)^2}>0,\ \forall t\in\left[0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Ta có: $f(0)=-\dfrac{1}{2};\ f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$.

Vậy $\max\limits_{\left[0;\frac{\pi}{6}\right]} y=\max\limits_{\left[0;\frac{1}{2}\right]} f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ khi $t=\dfrac{1}{2}$ hay $x=\dfrac{\pi}{6}$.

Bài 21. (Đề thi THPT 2022 – Mã đề 103 – Câu 40) Cho hàm số $f(x)=(a+3)x^4-2ax^2+1$ với a là tham số thực. Nếu $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$ thì $\min\limits_{[0;3]} f(x)$ bằng?

Lời giải

$f'(x)=4(a+3)x^3-4ax$

Ta có: $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(2)$

$\Rightarrow a<-3$ và $x=2$ là điểm cực trị của hàm số

$\Rightarrow f'(2)=0 \Rightarrow a=-4$ (Nhận)

$\Rightarrow f(x)=-x^4+8x^2+1 \Rightarrow f'(x)=-4x^3+16x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2\notin[0;3] \\ x=0\in[0;3] \\ x=2\in[0;3] \end{array}\right.$$

$f(0)=1;\ f(2)=17;\ f(3)=-8$.

Suy ra: $\min\limits_{[0;3]} f(x)=-8$.

Bài 22. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y=|x^3-3x^2+x+m|$ xét trên đoạn $[2;4]$, m_0 là giá trị của tham số m để M đạt giá trị nhỏ nhất. Tìm tất cả các giá trị của m_0?

Lời giải

Xét hàm số $f(x)=x^3-3x^2+x+m$ trên $[2;4]$, hàm số liên tục trên R.

Có $f'(x)=3x^2-6x+1=0$ (VN) $\Rightarrow f'(x)>0$ $(\forall x\in[2;4])$.

$\Rightarrow f(x)=x^3-3x^2+x+m$ đồng biến trên $[2;4]$.

$f(2)=m-2$; $f(4)=m+20$.

Nên $\max\limits_{[2;4]} f(x)=m+20; \min\limits_{[2;4]} f(x)=m-2$.

Do đó $M=\max\limits_{[2;4]} y=\max\limits_{[2;4]}|f(x)|=\max\{|m-2|;|m+20|\}$.

Ta có $2.M\ge|m-2|+|m+20|\ge|m-2-m-20|=22, \forall m$.

$\Rightarrow M\ge 11, \forall m$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}|m-2|=|m+20| \\ (m-2)(m+20)\le 0\end{cases} \Leftrightarrow m=-9$.

Vậy $M_{\min}=11 \Leftrightarrow m=-9$.

Do đó ta có $m_0=-9$.

Bài 23. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\left|\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ không vượt quá 30. Tổng các phần tử của S bằng?

Lời giải

Xét hàm số $g\left(x\right)=\frac{1}{4}x^4-14x^2+48x+m-30$ trên đoạn $\left[0;2\right]$.

Ta có $g'\left(x\right)=x^3-28x+48$; $g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-6\notin\left[0;2\right]\\x=2\\x=4\notin\left[0;2\right]\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:

x	0		2
g'		$+$	0
g	$g(0)$	$\nearrow$	$g(2)$

Dựa vào BBT, để $\max\limits_{[0;2]}\left|g\left(x\right)\right|\le 30\Rightarrow\begin{cases}g\left(0\right)\ge -30\\g\left(2\right)\le 30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m-30\ge -30\\m+14\le 30\end{cases}\Leftrightarrow 0\le m\le 16$.

$\xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m\in\left\{0;1;2;...;15;16\right\}\longrightarrow$ tổng các phần tử của S là 136.

Bài 24. Tìm m để hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ có giá trị lớn nhất bằng $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số $y=x+\sqrt{4-x^2}+m$ là $D=\left[-2;2\right]$.

Ta có $y'=\dfrac{\sqrt{4-x^2}-x}{\sqrt{4-x^2}}$;

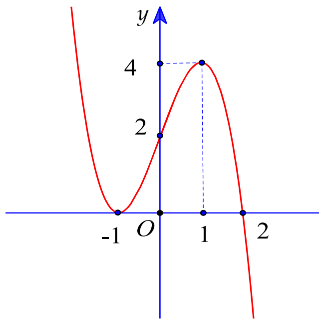
$y'=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}-x=0\Leftrightarrow\sqrt{4-x^2}=x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Tính được $y\left(\sqrt{2}\right)=m+2\sqrt{2}$, $y\left(-2\right)=m-2$ và $y\left(2\right)=m+2$.

Để ý rằng $m-2<m+2<m+2\sqrt{2}$ nên $\max\limits_{[-2;2]}y=m+2\sqrt{2}\Leftrightarrow m+2\sqrt{2}=3\sqrt{2}\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$

.

Bài 25. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đạo hàm $f'\left(x\right)$. Hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1)=\dfrac{13}{4}, f(2)=6$. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f^3(x)-3f(x)$ trên $[-1;2]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(2)$	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta có: $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=6$ và $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=\dfrac{13}{4}$

Đặt $t=f(x)$, $t\in\left[\dfrac{13}{4};6\right]$.

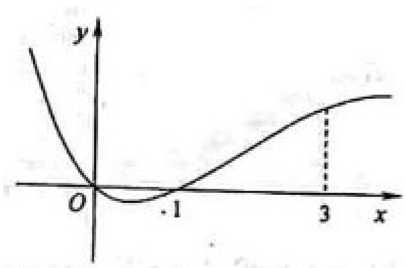
Ta có : $g(x)=t^3-3t=h(t)$, $t\in\left[\dfrac{13}{4};6\right]$.

$h'(t)=3t^2-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-1 \end{array}\right.$ $h(1)=-2$; $h(6)=198$; $h\left(\dfrac{13}{4}\right)=\dfrac{1573}{64}$.

Suy ra : $\max\limits_{[-1;2]} g(x)=198$ và $\min\limits_{[-1;2]} g(x)=-2$.

Vậy $\max\limits_{[-1;2]} g(x)+\min\limits_{[-1;2]} g(x)=\dfrac{1445}{64}$.

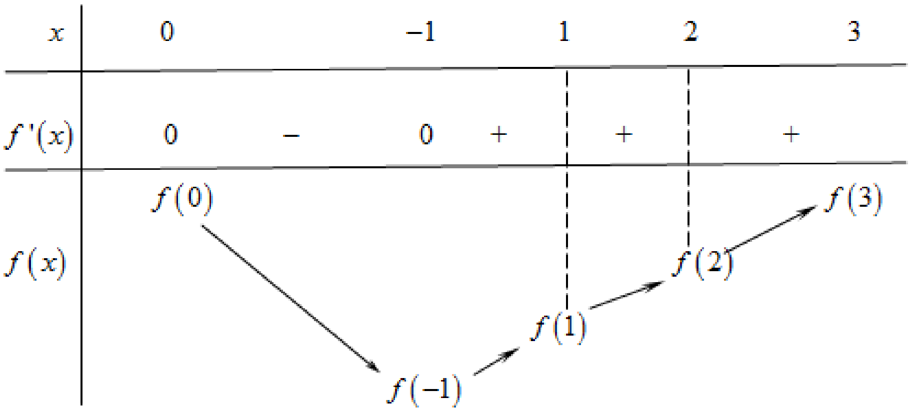
Bài 26. Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị $y=f'(x)$ được cho như hình vẽ bên dưới.



Biết $f(0)+f(2)=f(1)+f(3)$. Giá trị lớn nhất của $f(x)$ trên $[0;3]$ là?

Lời giải

Dựa vào đồ thị $y=f'(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm $f(x)$

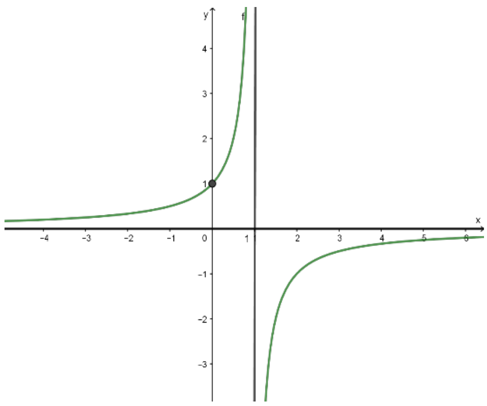


Suy ra $\max\limits_{[0;3]} f(x)=\max\left\{f(0);f(3)\right\}$.

Mặt khác $f(0)+f(2)=f(1)+f(3)\Leftrightarrow f(0)-f(3)=f(1)-f(2)<0\Leftrightarrow f(0)<f(3)$

Vậy $\max\limits_{[0;3]} f(x)=f(3)$.

Bài 27. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ và $g(x)=f(f(x))$.



Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ trên đoạn $[-3;-1]$.

Lời giải

- Dựa vào đồ thị ta thấy:

$$\begin{cases} ad-bc>0 \\ -c=d \\ b=d \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-c=d\neq 0 \end{cases} \Rightarrow f(x)=\dfrac{-1}{x-1}$$

$$\Rightarrow g(x)=f\left(f(x)\right)=\frac{-1}{f(x)-1}=\frac{-1}{\frac{-1}{x-1}-1}=\frac{x-1}{x}$$

$$\Rightarrow g'(x)=\frac{1}{(x-1)^2}>0,\ \forall x\in[-3;-1]\ \Rightarrow g(x) \text{ đồng biến trên đoạn } [-3;-1]$$

$$\Rightarrow \max_{[-3;-1]} g(x)=g(-1)=2.$$

DẠNG TOÁN 3. TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ TRÊN KHOẢNG

Tìm GTLN & GTNN của hàm số $y=f(x)$ **trên khoảng** $(a;b)$.

háp:

Bước 1. Tìm tập xác định. Tính $f'(x)$. Cho $f'(x)=0$ tìm nghiệm.

Bước 2. Xét dấu biểu thức $y'=f'(x)$ và lập bảng biến thiên (có tính giới hạn).

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên để kết luận GTLN (GTNN nếu có).

ong một số trường hợp, có thể giải nhanh bằng bất đẳng thức:

① **Bất đẳng thức Cauchy (AM – GM)**:

- $\forall a_1,a_2,\ldots,a_n\ge 0,$ ta luôn có: $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1.a_2\ldots a_n}.$

  Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=\cdots=a_n\ge 0.$
- $\forall a\ge 0;\ b\ge 0$ thì ta có: $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}.$ Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a=b.$
- $\forall a\ge 0;\ b\ge 0;\ c\ge 0$ thì ta có: $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}.$ Dấu $"=" \Leftrightarrow a=b=c.$

Một số kỹ năng cơ bản về ghép Cauchy:

- $mX+\dfrac{n}{X}\ge 2\sqrt{mX\dfrac{n}{X}}=2\sqrt{mn},\ \forall X>0$ (khi $x\ge a,$ cần dự đoán tại điểm biên $x=a$).
- $mX+\dfrac{n}{X^2}=\dfrac{mX}{2}+\dfrac{mX}{2}+\dfrac{n}{X^2}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{m^2.n}{4}}.$
- $mX^2+\dfrac{n}{X}=mX^2+\dfrac{n}{2X}+\dfrac{n}{2X}\ge 3\sqrt[3]{\dfrac{mn^2}{4}}.$

(Kỹ thuật tách cặp nghịch đảo là kỹ thuật tách phần nguyên theo mẫu số để sau khi áp dụng bất đẳng thức Cauhcy, biến số triệt tiêu, chỉ còn lại hằng số, dựa vào điểm rơi của bài toán).

- $X.(a-mX)=\dfrac{1}{m}\cdot(mX).(a-mX)\le\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{(mX+a-mX)^2}{4}=\dfrac{a^2}{4m}.$

- $X^2.(a-X) = 4\cdot\frac{X}{2}\cdot\frac{X}{2}\cdot(a-X) \le 4\cdot\frac{\left(\frac{X}{2}+\frac{X}{2}+a-X\right)^3}{27} = \frac{4a^3}{27}\cdot$

② **Bất đẳng thức Cauchy Schwarz**

- $\forall a,\ b,\ x,\ y,$ ta có: $-\sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)} \le a.x+b.y \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}.$

  Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\cdot$

- $\forall a,\ b>0,\ x,\ y\in\mathbb{R},$ ta có: $\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \ge \frac{(x+y)^2}{a+b}\cdot$ Dấu " $=$ " xảy ra khi $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}\cdot$

1. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. **(Đề tham khảo BGD 2017)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

Cách 1: (Dùng bất đẳng thức CauChy)

$$y=3x+\frac{4}{x^2}=\frac{3x}{2}+\frac{3x}{2}+\frac{4}{x^2}\ge 3\sqrt[3]{\frac{3x}{2}.\frac{3x}{2}.\frac{4}{x^2}}=3\sqrt[3]{9}\ \text{(do } x>0\text{)}$$

Dấu "$=$" xảy ra khi $\frac{3x}{2}=\frac{4}{x^2}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$.

Vậy $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$

Cách 2: (Dùng đạo hàm)

Xét hàm số $y=3x+\frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có $y=3x+\frac{4}{x^2}\Rightarrow y'=3-\frac{8}{x^3}$

Cho $y'=0\Leftrightarrow\frac{8}{x^3}=3\Leftrightarrow x^3=\frac{8}{3}\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\frac{8}{3}}$

x		0		$\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	
y			$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	

$\Rightarrow \min\limits_{(0;+\infty)} y = y\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}\right) = 3\sqrt[3]{9}$.

Ví dụ 2. **(Chu Văn An - Hà Nội - Giữa HK1 - 2019)** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x + 3 - \dfrac{1}{x+2}$ trên nửa khoảng $[-4;-2)$?

Lời giải

Ta có $y = -x + 3 - \dfrac{1}{x+2} \Rightarrow y' = \dfrac{-x^2 - 4x - 3}{(x+2)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -3 \end{array}\right.$

Vẽ bảng biến thiên ta tính được : $Min_{[-4;2)} y = 7$.

Ví dụ 3. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = x - \dfrac{1}{x}$ trên $(0;3]$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Hàm số xác định và liên tục trên nửa khoảng $(0;3]$.

Ta có $y' = 1 + \dfrac{1}{x^2} > 0, \forall x \in (0;3]$ $\Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên nửa khoảng $(0;3]$.

Khi đó $\max\limits_{(0;3]} y = y(3) = \dfrac{8}{3}$.

Ví dụ 4. **(Trần Hưng Đạo - Vĩnh Phúc - Lần 1 - 2019)** Cho hàm số $y = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;+\infty)$ bằng?

Lời giải

TXĐ $D = (0;+\infty)$.

Ta có: $y' = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{x + \dfrac{1}{x}}}$.

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

BBT

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(0;+\infty)$ là $\sqrt{2}$.

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. **(THPT Trần Phú - Hồ Chí Minh - Năm 2021 - 2022)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$ bằng?

Lời giải

Điều kiện $x>0$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si, có $y=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}=x+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\ge 3\sqrt[3]{x.\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2}=3$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow x=1$.

Bài 2. **(Chuyên Hùng Vương - Phú Thọ - Lần 02 - Năm 2021 - 2022)** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$ bằng?

Lời giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{x+1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$; $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-1$.

Lập bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	1

Giá trị nhỏ nhất của hàm số $-\sqrt{2}$ tại $x=-1$.

Bài 3. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{16}{x^2}$

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $y = x^2 + \dfrac{16}{x^2} \ge 2\sqrt{x^2.\dfrac{16}{x^2}} = 8$.

Dấu "=" xảy ra khi $x^2 = \dfrac{16}{x^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \dfrac{16}{x^2}$ là 8.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x-2}$ với x thuộc $D = (-\infty;-1] \cup \left[1;\dfrac{3}{2}\right]$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên D?

Lời giải

Ta có $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}(x-2) - \sqrt{x^2-1}}{(x-2)^2} = \dfrac{x(x-2)-(x^2-1)}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{1-2x}{(x-2)^2\sqrt{x^2-1}}$.

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-2x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{1}{2}$		2		$\frac{3}{2}$
$f'(x)$		$+$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	$\vert$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0		0	↗	$\Vert$	↘	$\Vert$	↘	$-\sqrt{5}$

Vậy $\max\limits_{D} f(x) = 0$; $\min\limits_{D} f(x) = -\sqrt{5}$.

Bài 5. **(Sở GD Hà Nội - Lần 1 - 2019)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên $[-5;7)$ như sau

x	-5		1		7
y'		$-$	0	$+$	$\Vert$
y	6	↘	2	↗	9

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số trên nửa khoảng $[-5;7)$?

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to 7} f(x) = 9$ suy ra hàm số không có GTLN trên $[-5;7)$.

Vậy $\min\limits_{[-5;7)} f(x) = 2$.

DẠNG 4. BÀI TOÁN TỐI ƯU, CÓ YẾU TỐ THỰC TẾ

Phương pháp

Đưa yêu cầu bài toán về mối quan hệ hàm số, lập bảng biến thiên để tìm giá trị lớn nhất , giá trị nhỏ nhất của hàm số với điều kiện ràng buộc cho trước.

Chú ý:

Ta cũng có thể sử dụng các bất đẳng thức để tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

1. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. **(Báo TH&TT - Số 4 -2019)** Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c\left(t\right)=\dfrac{t}{t^2+1}\left(mg/L\right)$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Ta có $c\left(t\right)=\dfrac{t}{t^2+1}$, $t\in\left(0;24\right)$.

$c'\left(t\right)=\dfrac{1-t^2}{\left(t^2+1\right)^2}$, $c'\left(t\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\left(TM\right)\\t=-1\left(KTM\right)\end{array}\right.$.

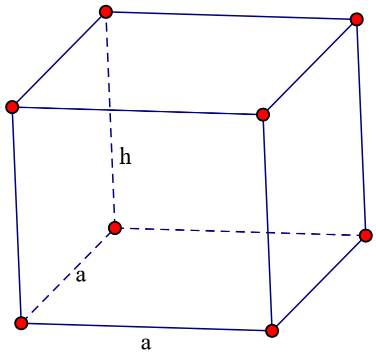
Bảng biến thiên:

t	0		1		24
$c'(t)$		+	0	−	
$c(t)$			$\frac{1}{2}$		
	0	↗		↘	$\frac{24}{577}$

Từ bảng biến thiên ta thấy 1 giờ sau khi tiêm thuốc thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Ví dụ 2. **(Lý Nhân Tông - Bắc Ninh - Lần 1 - 2019)** Một công ty sữa cần sản xuất các hộp đựng sữa dạng hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, chứa được thể tích thực là $180ml$. Chiều cao của hình hộp bằng bao nhiêu để nguyên liệu sản xuất vỏ hộp là ít nhất?

Lời giải



Gọi cạnh của hình vuông là a và chiều cao hộp sữa là h.

Theo bài ra $a^2.h = 180 \Leftrightarrow h = \dfrac{180}{a^2}$

Diện tích toàn phần của hộp sữa là

$$S = 2a^2 + 4ah = 2a^2 + 4a.\frac{180}{a^2} = 2a^2 + \frac{360}{a} + \frac{360}{a} \geq 3\sqrt[3]{2.360^2}$$

Suy ra diện tích toàn phần nhỏ nhất bằng $3\sqrt[3]{2.360^2}$

khi $2a^2 = \dfrac{360}{a} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{180} \Rightarrow h = \dfrac{180}{\left(\sqrt[3]{180}\right)^2} = \sqrt[3]{180}$.

Ví dụ 3. **(Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hoà Bình)** Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 45t^2 - t^3$. Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $f'(t) = -3t^2 + 90t = -3(t-15)^2 + 675 \leq 675$.

Tốc độ truyền bệnh lớn nhất là 675 (người/ngày) vào ngày thứ 15.

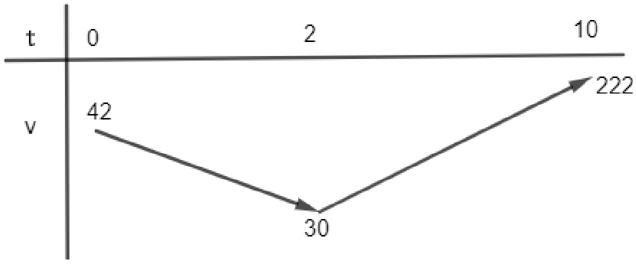
2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. **(THPT Nguyễn Huệ - BRVT)** Một vật chuyển động theo quy luật $s = t^3 - 6t^2 + 42t + 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $s = t^3 - 6t^2 + 42t + 1 \Rightarrow v = s' = 3t^2 - 12t + 42$

Theo đề, ta cần tìm GTNN của v, với $t \in [0;10]$



Dựa vào BBT, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được là $30(m/s)$.

Bài 2. **(THPT Thuận Thành - Bắc Ninh - Năm 2021 - 2022)** Một vật chuyển động theo quy luật $S=-\frac{1}{2}t^3+9t^2$, với $t(giây)$ là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và $S(meùt)$ là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng:

Lời giải

Ta có $v(t)=S'(t)=-\frac{3}{2}t^2+18t$.

$v'(t)=-3t+18$

$v'(t)=0 \Leftrightarrow t=6\in[0;10]$

Mặt khác $v(0)=0$.

$v(6)=54$.

$v(10)=30$.

Do $\max\limits_{t\in[0;10]} v(t)=\max\{v(0);v(6);v(10)\}=\max\{0;54;30\}=54(m/s)$.

Vậy trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển đông, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $54(m/s)$.

Bài 3. Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m sao cho giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=(x^3-3x+m)^2$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 4. Tính tổng các phần tử của S

Lời giải

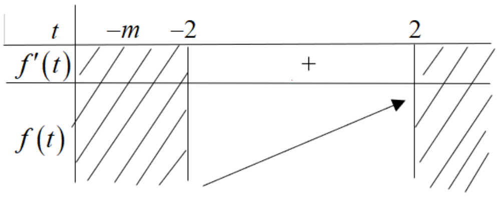
Đặt $t=x^3-3x$. Với $\forall x\in[-1;1] \Rightarrow t\in[-2;2]$.

Ta được hàm số: $f(t)=(t+m)^2$, xét trên đoạn $[-2;2]$.

Ta có: $f'(t)=2(t+m)$; $f'(t)=0 \Leftrightarrow t=-m$.

+) Trường hợp 1: Nếu $-m\le-2 \Leftrightarrow m\ge2$.

Ta có BBT:



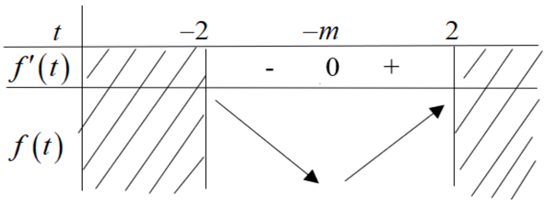
Từ BBT suy ra: $\min\limits_{[-1;1]} y = \min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-2) = (m-2)^2$

Theo giả thiết: $\min\limits_{[-1;1]} y = 4$

$$\Rightarrow (m-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \quad (l) \\ m = 4 \quad (t/m) \end{array}\right.$$

+) Trường hợp 2: Nếu $-2 < -m < 2 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

Ta có BBT:

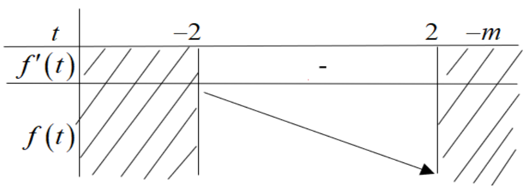


Từ BBT suy ra: $\min\limits_{[-1;1]} y = \min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(-m) = 0$

Theo giả thiết: $\min\limits_{[-1;1]} y = 4 \Rightarrow$ không có m thỏa mãn.

+) Trường hợp 3: Nếu $-m \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -2$

Ta có BBT:



Từ BBT suy ra: $\min\limits_{[-1;1]} y = \min\limits_{[-2;2]} f(t) = f(2) = (m+2)^2$

Theo giả thiết: $\min\limits_{[-1;1]} y = 4$

$$\Rightarrow (m+2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \quad (l) \\ m = -4 \quad (t/m) \end{array}\right.$$

Vậy $S = \{-4; 4\}$. Tổng các phần tử của S bằng 0.

Bài 4. Một cửa hàng bán lẻ bán 2500 cái tivi mỗi năm. Để bán được số tivi đó, cửa hàng đặt hàng từ Nhà máy sản xuất thành nhiều lần trong năm, số tivi đặt cho nhà máy là như nhau cho các lần đặt hàng. Mỗi lần lấy hàng từ nhà máy về cửa hàng chỉ để trưng bày được một nửa, một nửa số hàng còn lại phải lưu kho. Chi phí gửi trong kho là $10\$$ một cái. Để đặt hàng chi phí cố định cho mỗi lần đặt là $20\$$ cộng thêm $9\$$ mỗi cái. Cửa hàng đặt bao nhiêu lần trong một năm và mỗi lần bao nhiêu cái để chi phí mà cửa hàng phải trả là nhỏ nhất?

Lời giải

Gọi x là số tivi mà cửa hàng đặt mỗi lần $\left(x \in \mathbb{Z}, 1 \le x \le 2500\right)$.

Số tivi trung bình lưu kho là $\frac{x}{2}$ nên chi phí lưu kho là $10.\frac{x}{2} = 5x$ \$.

Số lần đặt hàng trong năm là $\frac{2500}{x}$ và chi phí đặt hàng là: $\frac{2500}{x}\left(20+9x\right)$ \$.

Tổng số chi phí mà cửa hàng phải trả là: $\frac{2500}{x}\left(20+9x\right)+5x = 5x+\frac{50000}{x}+22500$.

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có: $5x+\frac{50000}{x} \ge 1000$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 100$. Vậy cửa hàng cần đặt hàng 25 lần, mỗi lần 100 cái.

DẠNG 5. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT NHỎ NHẤT CỦA HÀM NHIỀU BIẾN

1. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1. **(Chuyên Hà Nội – AMSTERDAM-2019)** Cho x, y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Giá trị nhỏ nhất của $P = x^3+3x^2+3y^2-3x-5$ là?

Lời giải

Ta có: $x+y=2 \Leftrightarrow y=2-x$. Do x, y không âm nên $x \in \left[0;2\right]$.

Với $y=2-x$ thì $P = x^3+3x^2+3y^2-3x-5 = x^3+3x^2+3\left(2-x\right)^2-3x-5$

$= x^3+6x^2-15x+7$.

Xét $P = x^3+6x^2-15x+7$ với $x \in \left[0;2\right]$

Ta có: $P' = 3x^2+12x-15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \in \left(0;2\right) \\ x=-5 \notin \left(0;2\right) \end{array}\right.$.

$P\left(0\right)=7$, $P\left(1\right)=-1$, $P\left(2\right)=9$.

$\Rightarrow P_{\min} = -1$.

Ví dụ 2. Cho $x, y \in \mathbb{R}$ thỏa mãn $x+y = \sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2+y^2+2\left(x+1\right)\left(y+1\right)+8\sqrt{4-x-y}$. Tính $M+m$?

Lời giải

Từ $x+y=\sqrt{x-1}+\sqrt{2y+2}$ suy ra $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge -1 \end{cases} \Rightarrow x+y\ge 0$ (1).

Mặt khác

$$2\left(x+y\right)=2\sqrt{x-1}+2\sqrt{2y+2}\le \frac{2\left(1+x-1\right)}{2}+\frac{2y+2+4}{2}$$

$\Leftrightarrow 2\left(x+y\right)\le x+y+3 \Leftrightarrow x+y\le 3$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $0\le x+y\le 3$.

Ta có $P=x^2+y^2+2\left(x+1\right)\left(y+1\right)+8\sqrt{4-x-y}=\left(x+y\right)^2+2\left(x+y\right)+2+8\sqrt{4-x-y}$.

Đặt $t=x+y,\ t\in\left[0;3\right]$.

Ta có $P=t^2+2t+2+8\sqrt{4-t}$, $P'=2t+2-\dfrac{4}{\sqrt{4-t}}$, $P'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=1\pm 2\sqrt{2}\notin\left(0;3\right) \end{array}\right.$.

t	0		3
P'		$+$	
P	18	$\nearrow$	25

Vậy $M+m=43$.

Ví dụ 3. **(Vĩnh Yên - Vĩnh Phúc)** Cho x,y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+y^2-x+1$.

Lời giải

Theo giả thiết x,y là hai số không âm thỏa mãn $x+y=2\Leftrightarrow y=2-x$, $0<x<2$. Thay $y=2-x$ vào P ta được $P=\dfrac{1}{3}x^3+x^2+\left(2-x\right)^2-x+1=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$.

Xét hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3}x^3+2x^2-5x+5$ với $0<x<2$, ta có

$f'\left(x\right)=x^2+4x-5$; giải phương trình $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^2+4x-5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in\left(0;2\right) \\ x=-5\in\left(0;2\right) \end{array}\right.$.

Ta có bảng biến thiên

x	0		1		2
y'		$-$	0	$+$	
y	5	$\searrow$	$\frac{7}{3}$	$\nearrow$	$\frac{17}{3}$

Từ bảng biến thiên ta có $\min\limits_{(0;2)} f(x) = f(1) = \frac{7}{3}$.

Vậy $\min P = \frac{7}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

2. BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1. **(Lý Thái Tổ - Bắc Ninh - KSGV - 2019)** Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx)$. Giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x + y + z)^3}$.

Lời giải

Ta có $y^2 + z^2 \geq \frac{(y+z)^2}{2}$ và $yz \leq \frac{(y+z)^2}{4}$.

Và theo giả thiết $5(x^2 + y^2 + z^2) = 9(xy + 2yz + zx) \Leftrightarrow 5x^2 + 5(y+z)^2 - 9x(y+z) = 28yz$

$\Leftrightarrow 5x^2 + 5(y+z)^2 - 9x(y+z) \leq 7(y+z)^2 \Leftrightarrow (5x + y + z)(x - 2y - 2z) \leq 0$

$\Leftrightarrow x \leq 2(y+z)$.

Vậy $T = \frac{x}{y^2 + z^2} - \frac{1}{(x+y+z)^3} \leq \frac{4(y+z)}{(y+z)^2} - \frac{1}{27(y+z)^3} = \frac{4}{y+z} - \frac{1}{27(y+z)^3}$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{4}{t} - \frac{1}{27t^3}$ với $t > 0$, có $f'(t) = -\frac{4}{t^2} + \frac{1}{9t^4} = \frac{1 - 36t^2}{9t^4}$, $f'(t) = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{6}$.

Bảng biến thiên:

t	0		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	16	$\searrow$	0

Dựa vào BBT suy ra giá trị lớn nhất của $T=16$ đạt được tại $\begin{cases} x=2(y+z) \\ y=z \\ y+z=\dfrac{1}{6} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{3} \\ y=z=\dfrac{1}{12} \end{cases}$.

Bài 2. Cho các số thực không âm $x,\ y$ thỏa mãn $x+y=1$. Hãy tìm giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của biểu thức $S=\left(4x^2+3y\right)\left(4y^2+3x\right)+25xy$?

Lời giải

Do $\begin{cases} x\ge 0,\ y\ge 0 \\ x+y=1 \end{cases}$ nên $\begin{cases} 0\le x,y\le 1 \\ y=1-x \end{cases}$.

Thay $y=1-x$ vào biểu thức S ta được:

$S=\left(4x^2+3(1-x)\right)\left(4(1-x)^2+3x\right)+25x(1-x)$

$=\left(4x^2-3x+3\right)\left(4x^2-5x+4\right)+25x-25x^2$

$=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$

Đặt $S=S(x)=16x^4-32x^3+18x^2-2x+12$ với $0\le x\le 1$.

Ta có $S'(x)=64x^3-96x^2+36x-2$.

Xét phương trình

$S'(x)=0\Leftrightarrow 64x^3-96x^2+36x-2=0\Leftrightarrow (2x-1)\left(32x^2-32x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{2}\in(0;1) \\ x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\in(0;1) \\ x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\in(0;1) \end{array}\right.$.

Ta có $S(0)=12;\ S(1)=12;\ S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{25}{2};\ S\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{191}{16};\ S\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{191}{16}$.

Do đó $\max\limits_{[0;1]} S(x)=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$ và $\min\limits_{[0;1]} S(x)=S\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{4}\right)=S\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4}\right)=\dfrac{191}{16}$.

Vậy $M=\dfrac{25}{2}$ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Và $m=\dfrac{191}{16}$ khi $\begin{cases} x=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \\ y=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\dfrac{2+\sqrt{3}}{4} \\ y=\dfrac{2-\sqrt{3}}{4} \end{cases}$.

Bài 3. **(SGD Vĩnh Phúc - Lần 01 - Năm 2021 - 2022)** Cho hai số thực x,y thay đổi và thỏa mãn $(x+y)^3+4xy\ge 2$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A=5\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)+2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có, $(x+y)^2\ge 4xy,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$, kết hợp với giả thiết $(x+y)^3+4xy\ge 2$ suy ra $(x+y)^3+(x+y)^2\ge 2\Rightarrow x+y\ge 1$.

$$A=5\left(x^4+y^4+x^2y^2\right)-4\left(x^2+y^2\right)+2$$

$$=\frac{5}{2}\left[\left(x^2+y^2\right)^2+x^4+y^4\right]-4\left(x^2+y^2\right)+2$$

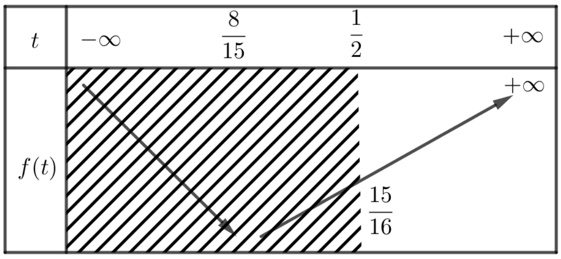
$$\ge\frac{5}{2}\left[\left(x^2+y^2\right)^2+\frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{2}\right]-4\left(x^2+y^2\right)+2$$

$$=\frac{15}{4}\left(x^2+y^2\right)^2-4\left(x^2+y^2\right)+2.$$

Đặt $t=x^2+y^2\ge\dfrac{(x+y)^2}{2}\ge\dfrac{1}{2}$.

Do đó, $A\ge\dfrac{15}{4}t^2-4t+2$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $f(t)=\dfrac{15}{4}t^2-4t+2$ trên $\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)$ như sau



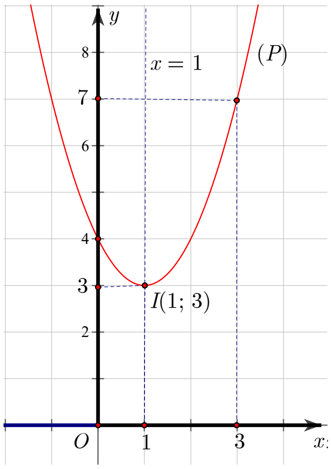
Qua bảng biến thiên ta có $\min\limits_{t\in\left[\frac{1}{2};+\infty\right)} f(t)=f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{15}{16}$.

Tức là, $A \geq \dfrac{15}{16}$, dấu "=" xảy ra khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A bằng $\dfrac{15}{16}$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Cho đồ thị hàm số y, tìm GTNN của hàm số trên $[0;3]$.

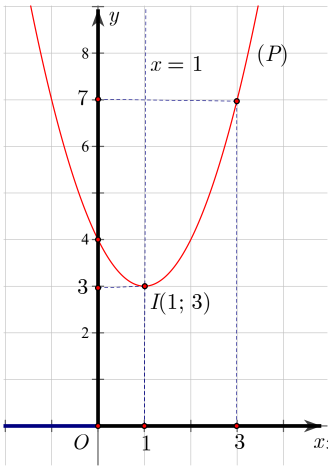


A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Câu 2: Cho đồ thị hàm số y, tìm GTLN của hàm số trên $[0;3]$.

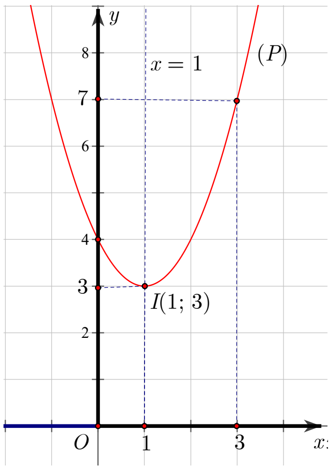


A. 4. **B.** 6. **C.** 3. **D.** 7.

Lời giải

Chọn D

Câu 3: Cho đồ thị hàm số y, tìm GTLN của hàm số trên $[0;1]$.



A. 4.　　**B.** 3.　　**C.** 5.　　**D.** 6.

Lời giải

Chọn A

Câu 4: Cho bảng biến thiên của hàm số y, tìm GTNN của hàm số trên $[0;9]$.

t	0		$\frac{7}{2}$		9
y	3	$\searrow$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow$	21

A. 3.　　**B.** $\frac{7}{2}$.　　**C.** $-\frac{37}{4}$.　　**D.** 21.

Lời giải

Chọn C

Câu 5: Cho bảng biến thiên của hàm số y, tìm GTLN của hàm số trên $[0;9]$.

t	0		$\frac{7}{2}$		9
y	3	$\searrow$	$-\frac{37}{4}$	$\nearrow$	21

A. 3.　　**B.** $\frac{7}{2}$.　　**C.** $-\frac{37}{4}$.　　**D.** 21.

Lời giải

Chọn D

Câu 6: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $-\frac{9}{4}$.　　**B.** $-\frac{3}{2}$.　　**C.** 0.　　**D.** 5.

Lời giải

Chọn A

$f'(x) = 2x - 3$

$f'(\text{x}) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$f(0) = 0; f(2) = -2; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-9}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\frac{-9}{4}$ khi $x = \frac{3}{2}$

Câu 7: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên đoạn $[0;2]$.

A. $-\frac{9}{4}$. **B.** $-\frac{3}{2}$. **C.** 0. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$f'(\text{x}) = 2x - 3$

$f'(\text{x}) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$f(0) = 0; f(2) = -2; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{-9}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 0 khi $x = 0$

Câu 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 7x + 3$ trên đoạn $[0;9]$.

A. 3. **B.** $-\frac{37}{4}$. **C.** 21. **D.** $\frac{-37}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = 2x - 7$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$

$f(0) = 3; f(9) = 21; f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{-37}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{-37}{4}0$ khi $x = \frac{7}{4}$

Câu 9: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = x^2 - 7x + 3$ trên đoạn $[0;9]$.

A. 3. **B.** $-\frac{37}{4}$. **C.** 21. **D.** $\frac{-37}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f'(x) = 2x - 7$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 7 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}$

$f(0)=3; f(9)=21; f\left(\frac{7}{4}\right)=\frac{-37}{4}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 21 0 khi $x=9$

Câu 10: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)=-x^2-4x+3$ trên đoạn $\left[0;4\right]$.

A. 3. **B.** $-\frac{37}{4}$. **C.** 21. **D.** $\frac{-37}{2}$.

Lời giải

Chọn B

$f'\left(x\right)=-2x-4$

$f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow -2x-4=0 \Leftrightarrow x=-2$ (loại vì $x\notin\left[0;4\right]$.)

$f(0)=3; f(4)=-29$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 3 khi $x=0$

Câu 11: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x\left(30-2x\right)\left(80-2x\right)$ trên đoạn $\left[5;10\right]$

A. $\frac{200000}{27}$. **B.** $\frac{20000}{27}$. **C.** 6000. **D.** 7000.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f\left(x\right)=4x^3-220x^2+2400x$

$f'\left(x\right)=12x^2-440x+2400$

$$f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow 12x^2-440x+2400=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{20}{3}(n) \\ x=30(l) \end{array}\right.$$

$f\left(5\right)=7000; f\left(10\right)=6000; f\left(\frac{20}{3}\right)=\frac{200000}{27}$

Vậy giá trị lớn nhất là $\frac{200000}{27}$ 18 khi $x=\frac{20}{3}$

Câu 12: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^4-8x^2+9$ trên đoạn $\left[-1;3\right]$

A. 2. **B.** 9. **C.** 18. **D.** 7.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'\left(x\right)=4x^3-16x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 4x^3-16x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

$f(-1)=2; f(0)=9; f(2)=-7; f(3)=18$

Vậy giá trị lớn nhất là 18 khi $x=3$

Câu 13: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(n)=-20n^2+480n$ trên nửa khoảng $(0;+\infty)$

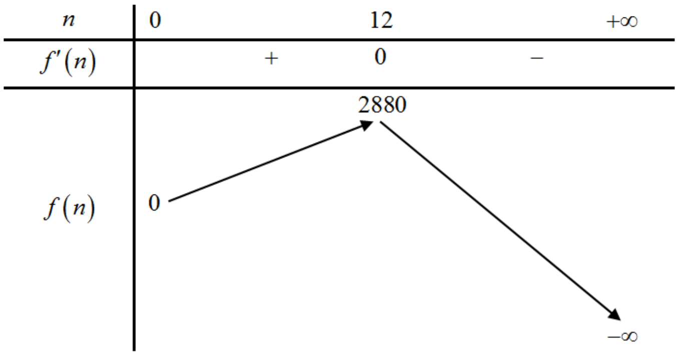
A. 2870. **B.** 2880. **C.** 2800. **D.** 2000.

Lời giải

Chọn B

$f'(n)=-40n+480=0 \Leftrightarrow n=12$.

Lập bảng biến thiên:



Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 2880 khi $n=12$

Câu 14: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=\dfrac{1}{40}x^2(30-x)$ trên nửa khoảng $(0;+\infty)$

A. 20. **B.** 24. **C.** 25. **D.** 30.

Lời giải

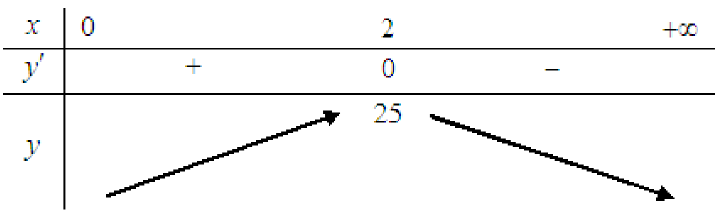
Chọn C

$f(x)=-\dfrac{1}{40}x^3+\dfrac{3}{4}x^2$

$f'(x)=-\dfrac{3}{40}x^2+\dfrac{3}{2}x$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{40}x^2+\frac{3}{2}x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(l) \\ x=20(n) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên.



.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 25 khi $x=20$

Câu 15: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^3-6x^2+9x-1$ trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$

A. 1. **B.** -17. **C.** 3. **D.** 11.

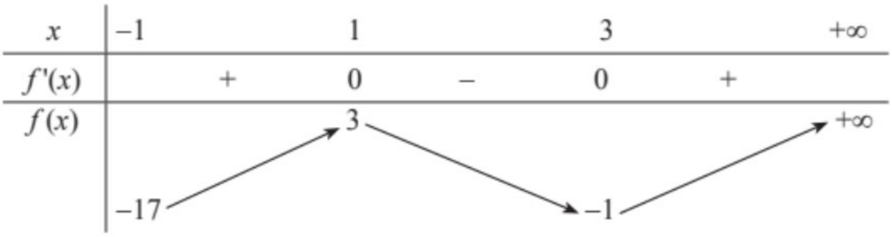
Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x)=3x^2-12x+9$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên của hàm số trên nửa khoảng $[-1;+\infty)$



Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;+\infty)$ là -17 khi $x=-1$

Câu 16: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2+\dfrac{2}{x}$ trên nửa khoảng $(0;+\infty)$

A. 2. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4.

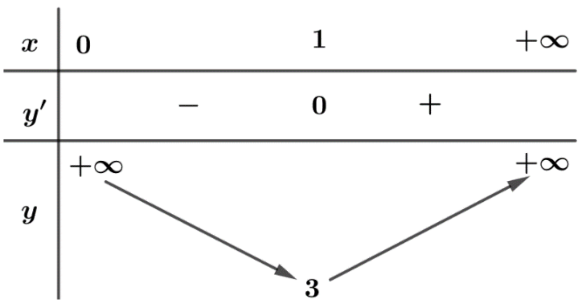
Lời giải

Chọn C

$y'=2x-\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}$

$y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{2\left(x^3-1\right)}{x^2}=0 \Rightarrow x=1$

Bảng biến thiên



Vậy giá trị nhỏ nhất là 3 khi $x=1$.

Câu 17: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=x^2+\dfrac{2000}{x}$ trên khoảng $\left(0;10\sqrt{5}\right)$

A. 310. **B.** 250. **C.** 320. **D.** 300.

Lời giải

Chọn D

$f(x) = x^2 + \dfrac{2000}{x}$.

$f'(x) = 2x - \dfrac{2000}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \dfrac{2000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 2000 = 0 \Rightarrow x = 10$

Bảng biến thiên

x	0		10		$10\sqrt{5}$
$f(x)$	‖	↘	300	↗	589

Vậy giá trị nhỏ nhất là 300 khi $x = 10$.

Câu 18: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2x^2 + \dfrac{500}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

A. 130. **B.** 160. **C.** 120. **D.** 150.

Lời giải

Chọn D

$f'(x) = 4x - \dfrac{500}{x^2} = \dfrac{4x^3 - 500}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 500 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Bảng biến thiên.

x	0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	150	↗	$+\infty$

`Vậy giá trị nhỏ nhất là 150 khi $x = 5$.

Câu 19: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \dfrac{x^3}{x-4}$ trên khoảng $(0;8)$

A. 102. **B.** 108. **C.** 120. **D.** 110.

Lời giải

Chọn B

$f(x) = \dfrac{x^3}{x-4}$.

$f'(x) = \dfrac{3x^2(x-4) - x^3}{(x-4)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 - 12x^2 - x^3 = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Bảng biến thiên

x	0		6		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	108	$\nearrow$	

Vậy $y_{\min} = 108$ khi $x = 6$

Câu 20: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ trên nửa khoảng $(0;+\infty)$

A. 2. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $\dfrac{1}{4}$. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Bảng biến thiên

t		0		1		$+\infty$
$c'(t)$			$+$	0	$-$	
$c(t)$			$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	

Vậy giá trị lớn nhất là $\dfrac{1}{2}$ khi $x = 1$.

Câu 21: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 3000.(4-x) + 5000.\sqrt{x^2+1}$ trên đoạn $[0;4]$

A. 16000. **B.** 15000. **C.** 12000. **D.** 13000.

Lời giải

Chọn A

$$f'(x) = -3000 + 5000.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3000 + 5000.\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow -3000\sqrt{x^2+1} + 5000x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+1} = 5x \Leftrightarrow \begin{cases} 16x^2 = 9 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\dfrac{3}{4} \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}.$$

$f(0)=17000,\ f\left(\frac{3}{4}\right)=16000,\ f(4)=20615,52813.$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ là 16000 và tại $x=\frac{3}{4}$.

Câu 22: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)=\frac{1}{6}\sqrt{16+(7-x)^2}+\frac{1}{10}x$ trên đoạn $[0;7]$

A. $\frac{13}{5}$. **B.** $\frac{14}{15}$. **C.** $\frac{17}{15}$. **D.** $\frac{16}{15}$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=\frac{1}{6}.\frac{x-7}{\sqrt{16+(7-x)^2}}+\frac{1}{10}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6\sqrt{16+(7-x)^2}=10(7-x)\Leftrightarrow x=4\ \Leftrightarrow x=4$.

$f(0)=\frac{1}{6}\sqrt{65},\ f(7)=\frac{41}{30},\ f(4)=\frac{17}{15}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $\frac{17}{15}$ khi $x=4$

Câu 23: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-2ax}$ trên $\left(0;\frac{a}{2}\right)$, a là hằng số khác 0

A. $\frac{2a^2}{9}$. **B.** $\frac{a^2}{3\sqrt{3}}$. **C.** $\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$. **D.** $\frac{a^2}{9}$.

Lời giải

Chọn C

$f'(x)=\frac{a(a-3x)}{2\left(\sqrt{a^2-2ax}\right)}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{a(a-3x)}{2\left(\sqrt{a^2-2ax}\right)}=0\Leftrightarrow x=\frac{a}{3}$

Bảng biến thiên:

x	0		$\frac{a}{3}$		$\frac{a}{2}$
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$		$\nearrow$	$\frac{a^2}{6\sqrt{3}}$	$\searrow$	

Vậy giá trị nhỏ nhất là $\dfrac{a^2}{6\sqrt{3}}$ khi $x=\dfrac{a}{3}$

Câu 24: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà sinh học thấy rằng: Nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng $P(n)=360-10n$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lương cá sau một vụ thu được nhiều nhất?

A. 17. **B.** 20. **C.** 15. **D.** 18.

Lời giải

Chọn D

Trọng lượng cá trên đơn vị diện tích là :

$T=(360-10n)n=360n-10n^2 \quad =-10\left(n^2-36n+324-324\right)$

$\quad =-10(n-18)^2+3240\le 3240$

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow n=18$.

Vậy phải thả 18 con cá trên một đơn vị diện tích để trọng lương cá sau một vụ thu được nhiều nhất

Câu 25: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi với giá là 40 đôla. Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x đôla thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi của hàng bán một đôi giày giá bao nhiêu thì thu được nhiều lãi nhất?

A. $80\,\text{USD}$. **B.** $160\,\text{USD}$. **C.** $40\,\text{USD}$. **D.** $240\,\text{USD}$.

Lời giải

Chọn A

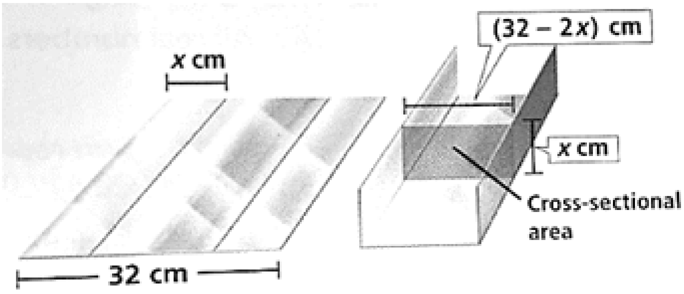
Gọi y (USD) là số tiền lãi của cửa hàng bán giày.

Ta có $y=(120-x)(x-40)=-x^2+160x-4800=-(x-80)^2+1600\le 1600$.

Dấu $"="$ xảy ra $\Leftrightarrow x = 80$.

Vậy cửa hàng lãi nhiều nhất khi bán đôi giày với giá 80 USD**D.**

Câu 26: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành máng dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông như hình vẽ dưới. Hỏi x bằng bao nhiêu để tạo ra máng có có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất?



A. 7 cm. **B.** 8 cm. **C.** 9 cm. **D.** 10 cm.

Lời giải

Chọn B

Gọi $S(x)$ là diện tích mặt ngang ứng với bề ngang x (cm) của phần gấp hai bên, ta có:

$S(x) = x(32-2x)$, với $0 < x < 16$.

Diện tích mặt ngang lớn nhất khi hàm số $S(x)$ đạt giá trị lớn nhất trên $(0;16)$.

Ta có: $S(x) = -2x^2 + 32x = -2(x-8)^2 + 128 \le 128,\ \forall x \in (0;16)$.

$\Rightarrow \max S(x) = S(8) = 128$.

Vậy $x = 8$ cm thì diện tích mặt ngang lớn nhất.

Câu 27: Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $5\sqrt{2}$ thì diện tích của nó lớn nhất là:

A. $\frac{25}{4}$. **B.** $\frac{25}{2}$. **C.** 25. **D.** $\frac{25}{8}$.

Lời giải

Chọn B

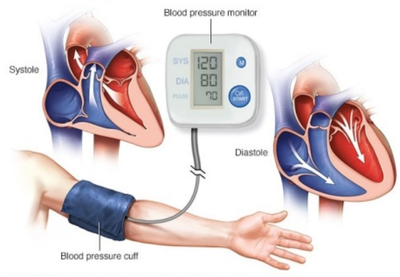
Gọi một cạnh góc vuông là x $\left(0 < x < 5\sqrt{2}\right)$ nên cạnh còn lại $\sqrt{50-x^2}$.

Diện tích tam giác vuông là: $S = \frac{1}{2}x\sqrt{50-x^2}$.

Ta có $S = \frac{1}{2}x\sqrt{50-x^2} \le \frac{1}{2}\frac{x^2+50-x^2}{2} = \frac{25}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{50-x^2} \Leftrightarrow x = 5$.

Diện tích lớn nhất khi: $x = 5 \Rightarrow S = \frac{25}{2}$.

Câu 28: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



A. $x=8$. **B.** $x=10$. **C.** $x=15$. **D.** $x=7$.

Lời giải

Chọn B

Đk: $x\in[0;15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

Có $G'(x)=0,035\left[2x(15-x)-x^2\right]=0,105x(10-x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=10\end{array}\right.$.

$G(0)=0$; $G(10)=\dfrac{35}{2}$; $G(15)=0$.

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x=10$ miligam.

Câu 29: Người ta giới thiệu một loại thuốc kích thích sự sinh sản của một loại vi khuẩn. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức: $f(t)=1000+30t^2-t^3$ với $0\le t\le 30$. Hỏi sau bao nhiêu phút thì số vi khuẩn lớn nhất?

A. 10 phút. **B.** 20 phút. **C.** 30 phút. **D.** 25 phút.

Lời giải

Chọn B

$f(t)=-3t^2+60t$

$f'(t)=0\Leftrightarrow -3t^2+60t=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\t=20\end{array}\right.$

$f(0)=f(30)=1000, f(20)=5000$

Vậy giá trị lớn nhất là 5000 khi $t=20$ (phút)

Câu 30: Mỗi chuyến xe buýt có sức chứa tối đa là 60 hành khách. Một chuyến xe buýt chở x hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách là $\left(3-\dfrac{x}{40}\right)^2$ (USD). Khẳng định nào sau đây đúng.

A. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng 160 (USD).

B. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 45 hành khách.
C. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất khi có 60 hành khách.
D. Một chuyến xe buýt thu được lợi nhuận cao nhất bằng $135\ (USD)$.

Lời giải

Chọn A

Số tiền thu được là: $y = x\left(3-\frac{x}{40}\right)^2 \Rightarrow y' = 9-\frac{3}{10}x+\frac{3x^2}{1600}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=40 \\ x=120 \end{array}\right.$ $0 \le x \le 60$.

$\Rightarrow y_{\max} = 160 \Leftrightarrow x = 40$.

Câu 31: Sức chứa tối đa mỗi phòng học là 200 em HS. Nếu một phòng học có x HS thì học phí cho mỗi HS là $\left(9-\frac{x}{40}\right)^2$ (nghìn đồng). Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất khi có 200 HS.
B. Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất bằng 4.320 (nghìn đồng).
C. Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất khi có 360 HS.
D. Một buổi học thu được số tiền học phí cao nhất bằng 3.200 (nghìn đồng).

Lời giải

Chọn B

Số tiền thu được khi có x HS là :

$f(x) = x\left(9-\frac{x}{40}\right)^2$.

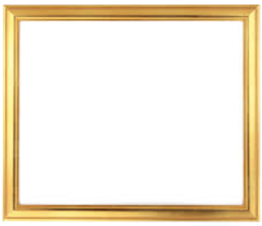
Ta có $f'(x) = \left(9-\frac{x}{40}\right)^2 - 2.\frac{1}{40}\left(9-\frac{x}{40}\right)x = \left(9-\frac{x}{40}\right)\left(9-\frac{x}{40}-\frac{x}{20}\right) = \left(9-\frac{x}{40}\right)\left(9-\frac{3x}{40}\right)$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left(9-\frac{x}{40}\right)\left(9-\frac{3x}{40}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=360 \\ x=120 \end{array}\right.$.

$f(120) = 4.320; f(200) = 3.200$.

Vậy $\max\limits_{x\in[0;200]} f(x) = f(120) = 4.320$.

Câu 32: Trong tất cả các hình chữ nhật có cùng diện tích 48 cm^2, hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất?



A. $8\sqrt{3}\ cm.$ **B.** $4\sqrt{3}\ cm.$ **C.** $24\ \ cm.$ **D.** $16\sqrt{3}\ cm.$

Lời giải

Chọn D

Gọi cạnh của hình chữ nhật: $a,\ b;\ 0 < a,b \le 48$

Ta có: $ab = 48 \Leftrightarrow b = \frac{48}{a}$. Chu vi: $P(a) = 2\left(a + \frac{48}{a}\right)$

$P'(a) = 2\left(1 - \frac{48}{a^2}\right)$; $P'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 4\sqrt{3}$

Bảng biến thiên:

a	0		$4\sqrt{3}$		48
$P'(a)$		$-$	0	$+$	
$P(a)$		$\searrow$	$16\sqrt{3}$	$\nearrow$	

Vậy hình chữ nhật có chu vi nhỏ nhất bằng $16\sqrt{3}$ khi cạnh bằng $4\sqrt{3}$.

Câu 33: Người ta làm chiếc thùng phi dạng hình trụ, kín hai đáy, với thể tích theo yêu cầu là $2\pi \text{m}^3$. Hỏi bán kính đáy R và chiều cao h của thùng phi bằng bao nhiêu để khi làm thì tiết kiệm vật liệu nhất?

A. $R = \frac{1}{2}\text{m},\ h = 8\text{m}.$ **B.** $R = 1\text{m},\ h = 2\text{m}.$ **C.** $R = 2\text{m},\ h = \frac{1}{2}\text{m}.$ **D.** $R = 4\text{m},\ h = \frac{1}{5}\text{m}.$

Lời giải

Chọn B

Từ giả thiết ta có: $V = \pi R^2 h = 2\pi \Rightarrow h = \frac{2}{R^2}$.

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2 = 2\pi\left(R^2 + \dfrac{2}{R}\right)$.

Xét hàm số $f(R) = R^2 + \dfrac{2}{R}$ với $R \in (0;+\infty)$. Ta có:

$f'(R) = 2R - \dfrac{2}{R^2} = \dfrac{2(R^3-1)}{R^2}$

$f'(R) = 0 \Leftrightarrow R = 1$

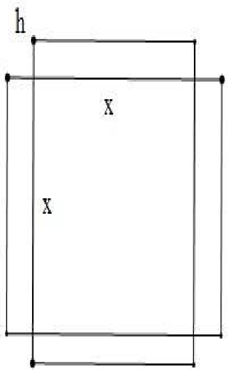
Bảng biến thiên

x	0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất khi $R = 1 \Rightarrow h = 2$.

Vậy để tiết kiệm vật liệu nhất khi làm thùng phi thì $R = 1\text{m}, h = 2\text{m}$.

Câu 34: Một hộp không nắp được làm từ một mảnh các tông theo hình mẫu. Hộp có đáy là một hình vuông cạnh $x(cm)$, chiều cao $h(cm)$ và có thể tích là $500(cm^3)$. Hãy tìm độ dài cạnh của hình vuông sao cho chiếc hộp được làm ra tốn ít nhiên liệu nhất.



A. 5 cm. **B.** 10 cm. **C.** 2 cm. **D.** 3 cm.

Lời giải

Chọn B

Để tốn ít nhiên liệu nhất thì diện tích toàn phần phải nhỏ nhất.

$V = x^2.h = 500 \Rightarrow h = \dfrac{500}{x^2}$.

$S = x^2 + 4xh = x^2 + \dfrac{2000}{x}$ với $x \in \left(0;10\sqrt{5}\right)$

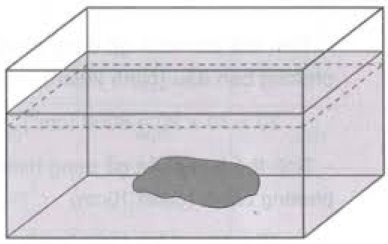
$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-\dfrac{2000}{x^2}=0 \Rightarrow x=10$ (thỏa mãn).

Bảng biến thiên:

x	0	10	$10\sqrt{5}$
$f(x)$	|| $\searrow$	300	$\nearrow$ 589

Suy ra diện tích toàn phần đạt giá trị nhỏ nhất 300 khi $x=10$.

Câu 35: Người ta muốn xây một chiếc bể chứa nước có hình dạng là một khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\dfrac{500}{3}\ \mathrm{m}^3$. Biết đáy hồ là một hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng và giá thuê thợ xây là 100.000 đồng/m^2. Tìm kích thước của hồ để chi phí thuê nhân công ít nhất. Khi đó chi phí thuê nhân công?



A. 13 triệu đồng. **B.** 17 triệu đồng. **C.** 15 triệu đồng. **D.** 11 triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi $x\,(x>0)$ là chiều rộng của đáy suy ra thể tích bể nước bằng

$V=2x^2.h=\dfrac{500}{3} \Leftrightarrow h=\dfrac{250}{3x^2}$

Diện tích xung quanh hồ và đáy bể là $S=6x.h+2x^2=\dfrac{500}{x}+2x^2\ (x>0)$

Xét hàm số $f(x)=\dfrac{500}{x}+2x^2$ với $x\in(0;+\infty)$

$f'(x)=-\dfrac{500}{x^2}+4x=0 \Leftrightarrow x=5$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;+\infty)$ ta thấy hàm số đạy giá trị nhỏ nhất khi

$x=5$

Vậy chi phí thuê nhân công là: $150.100000=15000000$ (đồng)

Câu 36: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiế**c.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi cơ sở sản xuất phải bán với giá mới là bao nhiêu để đạt lợi nhuận lớn nhất.

A. 39.000 đồng. **B.** 42.000 đồng. **C.** 43.000 đồng. **D.** 40.000 đồng.

Lời giải

Chọn A

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).
Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiế**c.**
Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000-100x$ chiế**c.**
Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12+x$ (nghìn đồng).
Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:
$f\left(x\right)=\left(3000-100x\right)\left(12+x\right)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f\left(x\right)=\left(3000-100x\right)\left(12+x\right)$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $f\left(x\right)=-100x^2+1800x+36000$.

$f'\left(x\right)=-200x+1800$

$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -200x+1800=0\Leftrightarrow x=9$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f\left(x\right)$ trên $\left(0;+\infty\right)$ ta thấy hàm số đạy giá trị lớn nhất khi
$x=9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 37: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được tính theo công thức $c\left(t\right)=\dfrac{t}{t^2+1}$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

A. 4 giờ. **B.** 1 giờ. **C.** 3 giờ. **D.** 2 giờ.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $c(t)=\dfrac{t}{t^2+1}$ với $t\in(0;+\infty)$

$c'(t)=\dfrac{-t^2+1}{\left(t^2+1\right)^2}$.

$c'(t)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-t^2+1}{\left(t^2+1\right)^2}=0 \Leftrightarrow t=1$.

Bảng biến thiên

t		0		1		$+\infty$
$c'(t)$			$+$	0	$-$	
$c(t)$			$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\searrow$	

Vậy $\max\limits_{(0;+\infty)} c(t)=\dfrac{1}{2}$ khi $t=1$.

Câu 38: Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng, trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là

A. 15 ngày. **B.** 4 ngày. **C.** 10 ngày. **D.** 20 ngày.

Lời giải

Chọn D

Gọi x (lít) $(0<x<10)$ là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10-x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra $f(x)=\dfrac{32}{x}+\dfrac{72}{10-x}$, $x\in(0;10)$ là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Ta có: $f(x)=\dfrac{32}{x}+\dfrac{72}{10-x} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{32}{x^2}+\dfrac{72}{(10-x)^2}$.

Cho $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{32}{x^2}+\dfrac{72}{(10-x)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-20\notin(0;10) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	0		4		10
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	20	$\nearrow$	$+\infty$

Theo bảng biến thiên ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Câu 39: Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích $96000cm^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70000 VNĐ/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành 100000 VNĐ/m^2. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

A. 83200 VNĐ. **B.** 320000 VNĐ. **C.** 832000 VNĐ. **D.** 32000 VNĐ.

Lời giải

Chọn A

Gọi $x, y\left(m\right)\left(x>0, y>0\right)$ là chiều dài và chiều rộng của đáy bể, khi đó theo đề ta suy ra

$0,6xy=0,096 \Leftrightarrow y=\dfrac{0,16}{x}$. Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f\left(x\right)=2.0,6\left(x+\frac{0,16}{x}\right).70000+100000x\frac{0,16}{x} \Leftrightarrow f\left(x\right)=84000\left(x+\frac{0,16}{x}\right)+16000$$

(VNĐ).

$$f'\left(x\right)=84000\left(1-\frac{0,16}{x^2}\right), f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow x=0,4.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

x	0		$0,4$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	$f(0,4)$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f\left(0,4\right)=83200$ VNĐ.

Câu 40: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm

200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

A. 30 triệu đồng. **B.** 29 triệu đồng. **C.** $30,5$ triệu đồng. **D.** $29,5$ triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi x (triệu đồng) là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $\left(0 \le x \le 4\right)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

$f\left(x\right) = \left(4 - x\right)\left(600 + 200x\right) = -200x^2 + 200x + 2400$.

Xét hàm số $f\left(x\right) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $\left[0;4\right]$

Ta có: $f'\left(x\right) = -400x + 200$

$$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow -400x + 200 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$f\left(0\right) = 2400; f\left(4\right) = -1600; f\left(\frac{1}{2}\right) = 2450$$

$$\max_{[0;4]} f\left(x\right) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá mới của chiếc xe là $30,5$ triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 41: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50000 đồng. Với giá bán này thì mỗi ngày cửa hàng chỉ bán được 40 quả. Cửa hàng dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 1000 đồng thì số bưởi bán tăng thêm được là 10 quả. Xác định giá bán để của hàng thu được lợi nhuận cao nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu cho mỗi quả là 30000 đồng.

A. 39000 đồng. **B.** 42000 đồng. **C.** 42000 đồng. **D.** 40000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng (x : đồng, $30000 \le x \le 50000$).

Tương ứng với giá bán là x thì số quả bán được là: $40+\frac{10}{1000}\left(50000-x\right)=-\frac{1}{100}x+540$

.

Gọi $f\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được ($f(x)$: đồng), ta có:

$$f\left(x\right)=\left(-\frac{1}{100}x+540\right).\left(x-30000\right)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16200000$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16200000$ trên đoạn $\left[30000;50000\right]$

Ta có: $f'\left(x\right)=-\frac{1}{50}x+840$

$$f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{50}x+840=0\Leftrightarrow x=42000$$

$$f\left(30000\right)=;f\left(50000\right)=;f\left(42000\right)=1440000$$

$$\Rightarrow\max_{x\in[30000;50000]}f\left(x\right)=1440000\text{ khi }x=42000$$

Vậy với giá bán 42000 đồng mỗi quả bưởi thì cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất.

Câu 42: Một xưởng in có 8 máy in, mỗi máy in được 4000 bản in khổ giấy $A4$ trong một giờ. Chi phí để bảo trì, vận hành một máy trong mỗi lần in là 50000 đồng. Chi phí in ấn của n máy chạy trong một giờ là $20\left(3n+5\right)$ nghìn đồng. Hỏi nếu in 50000 bản in khổ giấy $A4$ thì phải sử dụng bao nhiêu máy để thu được nhiều lãi nhất?

A. 6 máy. **B.** 5 máy. **C.** 4 máy. **D.** 7 máy.

Lời giải

Chọn B

Gọi số giờ cần in là x thì n máy in được $4000.n.x$ bản in trong x giờ.

Ta có $4000.n.x=50000\Rightarrow nx=\frac{25}{2}$

Chi phí của n máy chạy trong x giờ là $20x\left(3n+5\right)$ nghìn đồng.

Chi phí để bảo trì n máy là $50n$ nghìn đồng.

Tổng chi phí là $f(n) = 20x(3n+5) + 50n = 60xn + 100x + 50n = 750 + \dfrac{1250}{n} + 50n$

$f'(n) = -\dfrac{1250}{n^2} + 50$, $f'(n) = 0 \Leftrightarrow n = 5$.

Bảng biến thiên

n	1		5		8
$f'(n)$		$-$	0	$+$	
$f(n)$		$\searrow$	$f(5)$	$\nearrow$	

Để thu được tiền lãi cao nhất cần chi phí thấp nhất, vậy $n = 5$

Câu 43: Một con cá hồi bơi ngược dòng (từ nơi sinh sống) để vượt khoảng cách $300km$ (tới nơi sinh sản). Vận tốc dòng nước là $6km/h$. Giả sử vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là $v\ km/h$ thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ trong đó c là hằng số cho trước. E tính bằng Jun. Vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên để năng lượng của cá tiêu hao ít nhất bằng:

A. $12\ km/h$. **B.** $8\ km/h$. **C.** $10\ km/h$. **D.** $9\ km/h$.

Lời giải

Chọn D

Thời gian cá bơi: $t = \dfrac{300}{v-6} \Rightarrow E = cv^3t = cv^3.\dfrac{300}{v-6}$.

Xét hàm số $E(v) = cv^3.\dfrac{300}{v-6}$ với $v \in (6; +\infty)$.

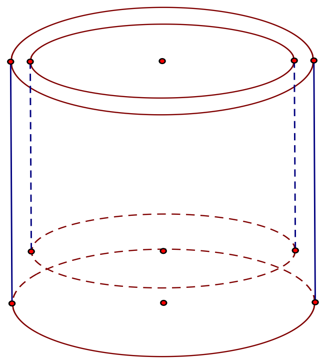
$E'(v) = \dfrac{-300.c.v^3}{(v-6)^2} + \dfrac{900cv^2}{v-6} = 0 \Rightarrow v = 9$.

Dựa vào bảng biến thiên:

v	6		9		$+\infty$
$E'(v)$		$-$	0	$+$	
$E(v)$		$\searrow$	$E(9)$	$\nearrow$	

$\Rightarrow E_{\min} \Leftrightarrow v = 9$.

Câu 44: Để làm một chiếc cốc bằng thủy tinh dạng hình trụ với đáy cốc dày $1,5$ cm, thành xung quanh cốc dày $0,2$ cm và có thể tích thật (thể tích nó đựng được) là 480π cm^3 thì người ta cần ít nhất bao nhiêu cm^3 thủy tinh?



A. $70,16\pi\ \text{cm}^3$. **B.** $80,16\pi\ \text{cm}^3$. **C.** $85,66\pi\ \text{cm}^3$. **D.** $75,66\pi\ \text{cm}^3$.

Lời giải

Chọn D

Gọi bán kính và chiều cao hình trụ bên trong lần lượt là $\Rightarrow$, h ta có: $y \Rightarrow h = \dfrac{480}{r^2}$.

Thể tích hình trụ bên ngoài là: $V = \pi(r+0,2)^2.(h+1,5) = \pi(r+0,2)^2.\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right)$.

Thể tích thủy tinh là: $\pi(r+0,2)^2.\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right) - 480\pi$.

Xét $f(r) = \pi(r+0,2)^2.\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right)$, $r>0$.

$\Rightarrow f'(r) = 2\pi(r+0,2)\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right) + \pi(r+0,2)^2.\left(-\dfrac{960}{r^3}\right)$

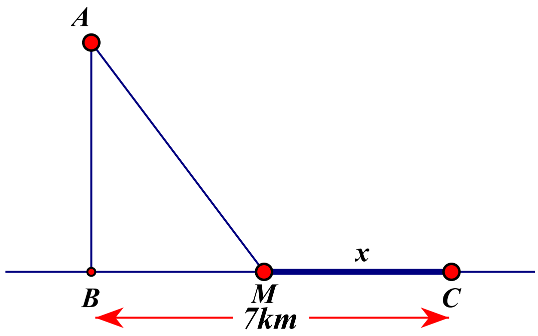
$f'(r)=0 \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{480}{r^2}+1,5\right) = (r+0,2).\dfrac{960}{r^3} \Leftrightarrow 3 = \dfrac{192}{r^3} \Leftrightarrow r=4$.

Bảng biến thiên

r	0		4		$+\infty$
$f'(r)$		$-$	0	$+$	
$f(r)$	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{27783}{50}\pi$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy thể tích thủy tinh người ta cần ít nhất là $\dfrac{27783}{50}\pi - 480\pi \approx 75,66\pi\ (\text{cm}^3)$.

Câu 45: Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 4(km)$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng $BC = 7(km)$. Người canh hải đăng phải chèo đò từ vị trí A đến vị trí M trên bờ biển với vận tốc $6(km/h)$ rồi đi xe đạp từ M đến C với vận tốc $10(km/h)$ (hình vẽ bên). Xác định khoảng cách từ M đến C để người đó đi từ A đến C là nhanh nhất.



A. $9km$. **B.** $6km$. **C.** $3km$. **D.** $4km$.

Lời giải

Chọn D

Quãng đường $AM=\sqrt{AB^2+BM^2}=\sqrt{16+(7-x)^2}$

Thời gian đi quãng đường AM là $\dfrac{\sqrt{16+(7-x)^2}}{6}$ (giờ).

Quãng đường $MC=x\Rightarrow$ thời gian đi quãng đường MC là $\dfrac{x}{10}$ (giờ).

Tổng thời gian đi từ A đến C là $y=\dfrac{1}{6}\sqrt{16+(7-x)^2}+\dfrac{1}{10}x$ (với $0\le x\le 7$).

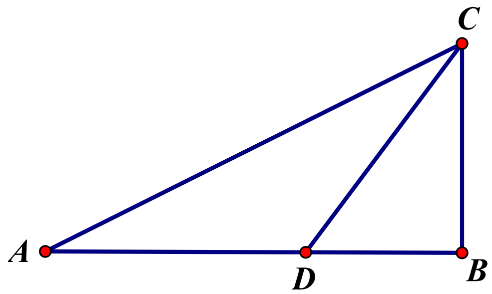
$y'=\dfrac{1}{6}.\dfrac{x-7}{\sqrt{16+(7-x)^2}}+\dfrac{1}{10}$

$y'=0\Leftrightarrow 6\sqrt{16+(7-x)^2}=10(7-x)\Leftrightarrow x=4$.

$y(0)=\dfrac{1}{6}\sqrt{65}$, $y(7)=\dfrac{41}{30}$, $y(4)=\dfrac{17}{15}$.

Vậy GTNN là $y(4)=\dfrac{17}{15}$, tức là khoảng cách $x=4\ (km)$.

Câu 46: Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C. Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là $10\,\text{km}$, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là $40\,\text{km}$. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy (như hình vẽ bên). Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB=40\,\text{km}$, $BC=10\,\text{km}$)



A. $\dfrac{15}{2}\text{km}$. **B.** $10\,\text{km}$. **C.** $\dfrac{65}{2}\text{km}$. **D.** $40\,\text{km}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt $AD = x\,\text{km}$, $x \in [0;40] \Rightarrow BD = 40 - x \Rightarrow CD = \sqrt{(40-x)^2 + 10^2}$.

Tổng kinh phí đi từ A đến C là $f(x) = x.3 + \sqrt{(40-x)^2 + 10^2}.5$.

$f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 1700}$.

$f'(x) = 3 + 5\dfrac{2x-80}{2\sqrt{x^2-80x+1700}} \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x^2-80x+1700} + 5x - 200}{\sqrt{x^2-80x+1700}}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2-80x+1700} = 200 - 5x \Leftrightarrow x = \dfrac{65}{2}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{65}{2}$		40
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Câu 47: Một ngọn hải đăng đặt ở vị trí A cách bờ $5km$, trên bờ biển có một kho hàng ở vị trí C cách B một khoảng $7km$. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến M trên bờ biển với vận tốc $4km/h$ rồi đi bộ từ M đến C với vận tốc $6km/h$. Xác định độ dài đoạn BM để người đó đi từ A đến C nhanh nhất.

A. $2\sqrt{5}\,\text{km}$. **B.** $\dfrac{7}{3}km$. **C.** $\dfrac{7}{2}km$. **D.** $3\sqrt{2}\,km$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $BM = x\ (km)$, $0 \le x \le 7$. Khi đó: $AM = \sqrt{25 + x^2}$ và $MC = 7 - x$.

Theo đề bài ta có: $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$.

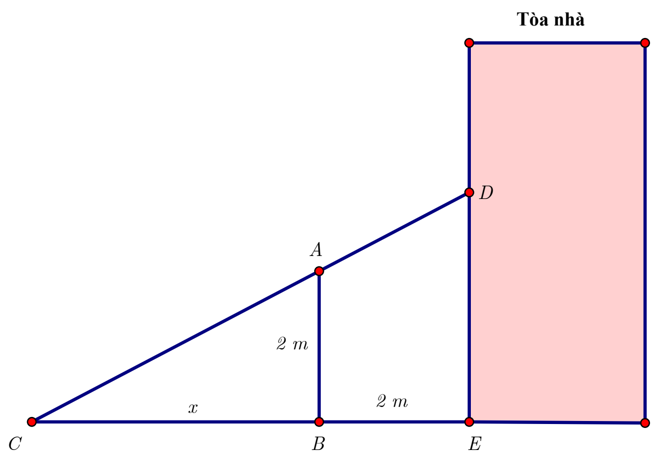
$f'(x)=\dfrac{3x-2\sqrt{25+x^2}}{4\sqrt{25+x^2}}$.

Cho $f'(x)=0\Leftrightarrow 2\sqrt{25+x^2}=3x\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x^2=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x=\pm 2\sqrt{5}\end{cases}\Leftrightarrow x=2\sqrt{5}$.

Khi đó: $f(0)=\dfrac{29}{12}$, $f(7)=\dfrac{\sqrt{74}}{4}$ và $f\left(2\sqrt{5}\right)=\dfrac{14-\sqrt{5}}{12}$.

Vậy $\min\limits_{x\in[0;7]} f(x)=f\left(2\sqrt{5}\right)=\dfrac{14-\sqrt{5}}{12}$.

Câu 48: Một bức tường cao 2m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 2m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Hỏi chiều dài tối thiểu của thang bằng bao nhiêu mét?



A. $4\sqrt{2}m$. **B.** $6m$. **C.** $3\sqrt{5}m$. **D.** $4\sqrt{2}cm$.

Lời giải

Chọn A

Đặt $BC=x\,(x>0)$. Ta cần tìm x để độ dài CD đạt GTNN.

Ta có $\dfrac{BC}{CE}=\dfrac{x}{x+2}=\dfrac{AC}{CD}\Rightarrow CD=AC\dfrac{x+2}{x}=\sqrt{x^2+4}.\dfrac{x+2}{x}$.

Đặt $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}\,(x+2)}{x}$.

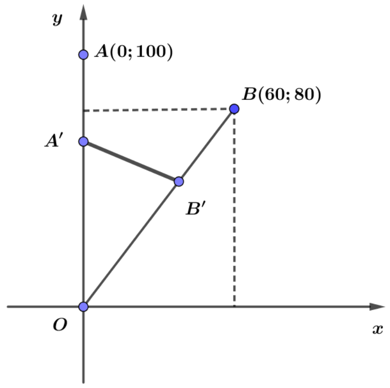
$f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}-\dfrac{8}{x^2\sqrt{x^2+4}}$. $f'(x)=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng biến thiên

x	0		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$4\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy GTNN là $4\sqrt{2}$, tức là khoảng cách $x=2\ (m)$.

Câu 49: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quĩ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0;100)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 5 m/s .Con còn lại bay trên quĩ đạo là đường thẳng từ $B(60;80)$ đến điểm $O(0;0)$ với vận tốc 10 m/s. Hỏi trong quá trình bay thì khoảng cách ngắn nhất hai con đạt được là bao nhiêu?



A. $10\sqrt{5}$ m. **B.** $20\sqrt{5}$ m. **C.** $20\sqrt{3}$ m. **D.** $10\sqrt{3}$ m.

Lời giải

Chọn B

Xét tại thời điểm t (giây), $t\in[0;10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0;100-5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60;80)$ về $O(0;0)$ trên quĩ đạo là đường thẳng có hệ số góc là $k=\tan\alpha=\frac{4}{3}\Rightarrow\cos\alpha=\frac{3}{5},\ \sin\alpha=\frac{4}{5}$.

Do đó tại thời điểm t, nó có tọa độ là $\begin{cases}x=60-10t.\cos\alpha\\ y=80-10t.\sin\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=60-6t\\ y=80-8t\end{cases}$

$\Rightarrow B'(60-6t;80-8t)$.

Ta có: $\overrightarrow{A'B'}=(60-6t;-20-3t)$.

Khi đó, khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn là:

$d=A'B'=\sqrt{(60-6t)^2+(20+3t)^2}\Leftrightarrow d=\sqrt{45t^2-600t+4000}$

Xét hàm số $f(t)=45t^2-600t+4000$ trên đoạn $[0;10]$

Ta có: $f'(t) = 90t - 600$

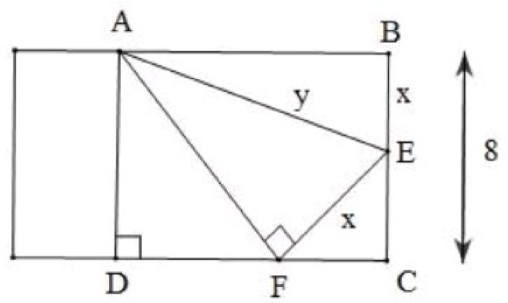
$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 90t - 600 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{20}{3}$

$f(0) = 4000; f(10) =; f\left(\dfrac{20}{3}\right) = 2000$

$\Rightarrow \min\limits_{t\in[0;10]} f(t) = 2000$ khi $x = \dfrac{20}{3}$

Vậy khoảng cách ngắn nhất của hai con chuồn chuồn trong quá trình bay là $\sqrt{2000} = 20\sqrt{5}$ m.

Câu 50: Cho một tờ giấy hình chữ nhật với chiều dài $12\ cm$ và chiều rộng $8\ cm$. Gấp góc bên phải của tờ giấy sao cho sau khi gấp, đỉnh của góc đó chạm đáy dưới như hình vẽ. Để độ dài nếp gấp là nhỏ nhất thì giá trị nhỏ nhất đó bằng bao nhiêu?



A. $6\sqrt{3}$ cm. **B.** $6\sqrt{2}$ cm. **C.** $6\sqrt{5}$ cm. **D.** 6 cm.

Lời giải

Chọn A

Đặt $EF = x, EC = 8 - x \Rightarrow FC = \sqrt{x^2 - (8-x)^2} = \sqrt{16x - 64}$.

Ta có $\Delta ADF \sim \Delta FCE\,(g.g) \Rightarrow \dfrac{EF}{AF} = \dfrac{CF}{AD}$.

$AF = \dfrac{EF.AD}{FC} = \dfrac{8x}{\sqrt{16x-64}}$.

$y = AE = \sqrt{AF^2 + EF^2} = \sqrt{\dfrac{64x^2}{16x-64} + x^2} = \sqrt{\dfrac{16x^3}{16x-64}}$.

$f(x) = \dfrac{16x^3}{16x-64}$ $x \in (0;8)$.

$f'(x) = \dfrac{48x^2(16x-64) - 16.16x^3}{(16x-64)^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 768x^3 - 3072x^2 - 256x^3 = 0 \Leftrightarrow 512x^3 - 3072x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 6$.

Bảng biến thiên:

x	0		6		8
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	108	$\nearrow$	

$y=\sqrt{f(x)} \Rightarrow y_{\min}=\sqrt{f_{\min}}=\sqrt{108}=6\sqrt{3}$.

E. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hàm số hàm số $y=f(x)=-x^3+mx^2-(m^2+m+1)x$,

a) Khi $m=1$ thì $\max\limits_{[-1;1]} f(x)$ đạt được tại $x=1$

b) Khi $m=1$ thì $\min\limits_{[1;3]} f(x)=-3$

c) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-6$

d) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\max\limits_{[-1;1]} f(x)<5$

Trả lời

a) Khi $m=1$ thì $\max\limits_{[-1;1]} f(x)$ đạt được tại $x=1$

Khi $m=1$, hàm số trở thành $y=-x^3+x^2-3x \Rightarrow y'=-3x^2+2x-3<0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên $[-1;1]$ nên $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(-1)$

b) Khi $m=1$ thì $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-3$

Ta có: $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=-1^3+1^3-3.1=-3$

c) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-6$

Ta có: $y'=-3x^2+2mx-m^2-m-1;\ \forall x\in\mathbb{R}$

Mà $\Delta'=-2m^2-3m-3<0;\ \forall m\in\mathbb{R}$

Suy ra $y'<0;\ \forall x\in[-1;1]$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $[-1;1]$

Suy ra $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=f(1)=-6$.

Lại có $y(1)=-2-m^2$.

Do đó $-2-m^2=-6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-2 \end{array}\right.$

d) Có 2 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $\max\limits_{[-1;1]} f(x)<5$

Ta có: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(-1)=m^2+2m+2$

Suy ra: $\max\limits_{[-1;1]} f(x)<5 \Leftrightarrow m^2+2m-3<0 \Leftrightarrow -3<m<1$

Do đó, có 3 giá trị nguyên của của tham số m thỏa mãn $\max\limits_{[-1;1]} f(x)<5$

Câu 2: Cho hàm số hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$

a) $\max\limits_{[3;5]} f(x)=f(3)$

b) $\min\limits_{[2;3]} f(x)=m^2+m+2$

c) $\max\limits_{[2;3]} f(x)=\dfrac{7}{4} \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$

d) Tổng tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $\max\limits_{[2;3]} f(x)+\min\limits_{[2;3]} f(x)=\dfrac{13}{2}$ bằng 1.

Lời giải

a) $\max\limits_{[3;5]} f(x)=f(3)$

Ta có: $y'=\dfrac{-m^2-m-1}{(x-1)^2}<0\ \forall x \in [3;5] \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[3;5]$

Vậy $\max\limits_{[3;5]} f(x)=f(3)$

b) $\min\limits_{[2;3]} f(x)=m^2+m+2$

Ta có: $y'=\dfrac{-m^2-m-1}{(x-1)^2}<0\ \forall x \in [2;3] \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $[2;3]$

Vậy $\min\limits_{[2;3]} f(x)=f(3)=\dfrac{m^2+m+3}{2}$

c) $\max\limits_{[2;3]} f(x)=\dfrac{7}{4} \Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$

Ta có: $\max\limits_{[2;3]} f\left(x\right)=f\left(2\right)=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow m^2+m+2=\dfrac{7}{4}\Leftrightarrow m^2+m+\dfrac{1}{4}=0\Leftrightarrow m=-\dfrac{1}{2}$

d) Tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $\max\limits_{[2;3]} f\left(x\right)+\min\limits_{[2;3]} f\left(x\right)=\dfrac{13}{2}$ bằng 1.

Xét hàm số $y=\dfrac{x+m^2+m}{x-1}$ trên đoạn $\left[2;3\right]$.

$y'=\dfrac{-m^2-m-1}{\left(x-1\right)^2}<0\ \forall x\in\left[2;3\right]\Rightarrow \min\limits_{[2;3]} f\left(x\right)=f\left(3\right)=\dfrac{m^2+m+3}{2},\max\limits_{[2;3]} f\left(x\right)=f\left(2\right)=\dfrac{m^2+m+2}{1}$

.

$\max\limits_{[2;3]} f\left(x\right)+\min\limits_{[2;3]} f\left(x\right)=\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow\dfrac{m^2+m+3}{2}+\dfrac{m^2+m+2}{1}=\dfrac{13}{2}\Leftrightarrow\dfrac{3}{2}m^2+\dfrac{3}{2}m-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$

.

Vậy tổng các giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu là $S=-2+1=-1$

Câu 3: Cho hàm số $y=x^4-2x^2-2$.

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -2.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -3.

c) Tập giá trị của hàm số là $\left[-3;+\infty\right)$.

d) Trên đoạn $\left[0;1\right]$, $\max y=f\left(x_A\right)=y_A$; $\min y=f\left(x_B\right)=y_B$. Độ dài $AB=\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -2.

Ta có TXĐ: $D=\mathbb{R}$..

$y'=4x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\Rightarrow y=-2\\x=\pm1\Rightarrow y=-3\end{array}\right.$..

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	↘	-3	↗	-2	↘	-3	↗	$+\infty$

.

Từ bảng biến thiên, hàm số không có giá trị lớn nhất trên $\mathbb{R}$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -3.

Từ bảng biến thiên, giá trị của hàm số trên $\mathbb{R}$ là -3.

c) Tập giá trị của hàm số là $\left[-3;+\infty\right)$.

Từ bảng biến thiên, tập giá trị của hàm số là $\left[-3;+\infty\right)$.

d) Trên đoạn $[0;1]$, $\max y = f(x_A) = y_A$; $\min y = f(x_B) = y_B$. Độ dài $AB = \sqrt{2}$.

Trên đoạn $[0;1]$

$\max y = f(0) = -2$; $\min y = f(1) = -3$. Suy ra $A(0;-2)$, $B(1;-3)$

Khoảng cách $AB = \sqrt{2}$.

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + m^2x - 2m^2 + 2m - 9$ với m là tham số.

a) Khi $m = 1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -9.

b) Khi $m = 1$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 3.

c) Khi $m = 1$ thì tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng 1.

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không vượt quá 3. Số phần tử của S bằng 3.

Lời giải

a) Khi $m = 1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -9.

Với $m = 1$ thì $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 9$; $y' = x^2 + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $[0;3]$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$: $\min y = f(0) = -9$

b) Khi $m = 1$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 3.

Với $m = 1$ thì $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 9$; $y' = x^2 + 1 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $[0;3]$

Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$: $\max y = f(3) = 3$

c) Khi $m = 1$ thì tiếp tuyến của đồ thị có hệ số góc nhỏ nhất bằng 1.

Với $m = 1$ thì $y = \frac{1}{3}x^3 + x - 9$; $y' = x^2 + 1 \geq 1$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số có hệ số góc nhỏ nhất bằng 1.

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[0;3]$ không vượt quá 3. Số phần tử của S bằng 3.

$y' = x^2 + m^2, x \in \mathbb{R}$; $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó hàm số đồng biến trên đoạn $[0;3] \Rightarrow \max\limits_{[0;3]} y = y(3) = m^2 + 2m$

Theo bài yêu cầu ta có $m^2 + 2m \leq 3 \Leftrightarrow m \in [-3;1]$

Vì m nguyên nên có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 5: Cho hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{3-x}$.

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x = -1$.

c) Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó $M+m=4\sqrt{2}$.

d) Bất phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-m\ge 0,\forall x\in[-1;3]$ (m là tham số) khi $m\in(-\infty;2]$.

Lời giải

Xét hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$

Tập xác định $D=[-1;3]$.

$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$.

$y'=0\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}-\dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}=0\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{3-x}\Leftrightarrow x=1$.

Bảng biến thiên

x	-1		1		3
y'		$+$	0	$-$	
y			$2\sqrt{2}$		
	2	$\nearrow$		$\searrow$	2

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2 .

Từ bảng biến thiên, suy ra $\min\limits_{[-1;3]} y=2$ khi $x=-1,x=3$.

b) Giá trị lớn nhất của hàm số đạt được tại $x=-1$.

Từ bảng biến thiên, ta có: $\max\limits_{[-1;3]} y=2\sqrt{2}$ khi $x=1$.

c) Gọi M,m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số. Khi đó $M+m=4\sqrt{2}$.

Từ bảng biến thiên, ta có: $M+m=\max\limits_{[-1;3]} y+\min\limits_{[-1;3]} y=2+2\sqrt{2}$.

d) Bất phương trình $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-m\ge 0,\forall x\in[-1;3]$ (m là tham số) khi $m\in(-\infty;2]$.

Ta có: $\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}-m\ge 0,\forall x\in[-1;3]$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\ge m,\forall x\in[-1;3]$

$\Leftrightarrow \min\limits_{[-1;3]}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\right)\ge m\ (1)$

Xét hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}$

Tập xác định $D=[-1;3]$.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}}$

$y' = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} - \dfrac{1}{2\sqrt{3-x}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{3-x} \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	-1		1		3
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	
	2				2

Dựa vào bảng biến thiên, $(1) \Leftrightarrow m \le 2$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x) = (x^2 - 3x + 1).e^x$

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là $5e^4$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là $-e$.

c) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[3;5]$ lần lượt là $e^3; 11e^5$.

d) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;0]$ lần lượt là $\dfrac{11}{e^2}; 1$.

Lời giải

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là $5e^4$.

Ta có: $y' = (x^2 - x - 2).e^x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2).e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [1;4]$, hoặc $x = 2 \in [1;4]$.

Lại có: $y(1) = -e$, $y(2) = -e^2$, $y(4) = 5e^4$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = (x^2 - 3x + 1).e^x$ trên đoạn $[1;4]$ là $5e^4$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[1;4]$ là $-e$.

Ta có: $y' = (x^2 - x - 2).e^x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow (x^2 - x - 2).e^x = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin [1;4]$, hoặc $x = 2 \in [1;4]$.

Lại có: $y(1)=-\mathrm{e}$, $y(2)=-\mathrm{e}^2$, $y(4)=5\mathrm{e}^4$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-3x+1\right).\mathrm{e}^x$ trên đoạn $[1;4]$ là $-\mathrm{e}^2$.

c) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[3;5]$ lần lượt là $\mathrm{e}^3;11\mathrm{e}^5$.

Ta có: $y'=\left(x^2-x-2\right).\mathrm{e}^x$.

$y'=0 \Leftrightarrow x=-1\notin[3;5]$, hoặc $x=2\notin[3;5]$.

Lại có: $y(3)=\mathrm{e}^3$, $y(5)=11\mathrm{e}^5$.

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-3x+1\right).\mathrm{e}^x$ trên đoạn $[3;5]$ lần lượt là $11\mathrm{e}^5$ và e^3.

d) Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;0]$ lần lượt là $\dfrac{11}{\mathrm{e}^2};1$.

Ta có: $y'=\left(x^2-x-2\right).\mathrm{e}^x$.

$y'=0 \Leftrightarrow x=-1\in[-2;0]$, hoặc $x=2\notin[-2;0]$.

Lại có: $y(-2)=11\mathrm{e}^{-2}$, $y(-1)=5\mathrm{e}^{-1}$, $y(0)=1$.

Vậy giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y=\left(x^2-3x+1\right).\mathrm{e}^x$ trên đoạn $[-2;0]$ lần lượt là $\dfrac{5}{\mathrm{e}}$ và 1.

Câu 7: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+m$.

a) Khi $m=2$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)$ đạt được tại $x=0$.

b) Khi $m=2$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)=1$.

c) Khi $m>1$, nếu $\min\limits_{[0;2]} f(x)+\max\limits_{[0;2]} f(x)=9$ thì $m=3$.

d) Khi $m>1$, nếu $2\min\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|-3\max\limits_{[0;2]}\left|f(x)\right|=-20$ thì $m=2$.

Lời giải

a) Khi $m=2$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)$ đạt được tại $x=0$.

$+\ f'(x)=6x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$.

+ Bảng biến thiên:

x	0		1		2
$f'(x)$	0	-	0	+	
$f(x)$	m	$\searrow$	$m-1$	$\nearrow$	$m+4$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy khi $m=2$ thì $\max\limits_{[0;2]} f(x)=6$ đạt được tại $x=2$.

b) Khi $m=2$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)=1$.

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy khi $m=2$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x)=1=f(1)$.

c) Khi $m>1$, nếu $\min\limits_{[0;2]} f(x)+\max\limits_{[0;2]} f(x)=9$ thì $m=3$.

Khi $m>1$ thì: $\min\limits_{[0;2]} f(x)=m-1$; $\max\limits_{[0;2]} f(x)=m+4$.

Ta có: $\min\limits_{[0;2]} f(x)+\max\limits_{[0;2]} f(x)=9 \Leftrightarrow m-1+m+4=9 \Leftrightarrow m=3$ (thỏa mãn điều kiện).

d) Khi $m>1$, nếu $2\min\limits_{[0;2]} |f(x)|-3\max\limits_{[0;2]} |f(x)|=-20$ thì $m=2$.

Khi $m>1$ thì $m-1>0$, suy ra: $0<m-1<m<m+4$.

Suy ra: $\min\limits_{[0;2]} |f(x)|=|m-1|=m-1$; $\max\limits_{[0;2]} |f(x)|=|m+4|=m+4$.

Ta có: $2\min\limits_{[0;2]} |f(x)|-3\max\limits_{[0;2]} |f(x)|=-20 \Leftrightarrow 2(m-1)-3(m+4)=-20 \Leftrightarrow m=6$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 8: Cho hàm số $y=f(x)=x^2-2x+m+5$.

a) Khi $m=0$ thì $\min\limits_{[-1;3]} f(x)$ đạt được tại $x=1$.

b) Khi $m=0$ thì $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=8$.

c) Khi $m>2$, nếu $\min\limits_{[-1;3]} f(x)+\max\limits_{[-1;3]} f(x)=22$ thì $m=7$.

d) Có 5 giá trị nguyên của $m\in(-20;-13)$ để $\min\limits_{[-1;3]} |f(x)|+\max\limits_{[-1;3]} |f(x)|>-6$.

Lời giải

a) Khi $m=0$ thì $\min\limits_{[-1;3]} f(x)$ đạt được tại $x=1$.

$+f'(x)=2x-2=0 \Leftrightarrow x=1.$

+ Bảng biến thiên:

x	-1		1		3
$f'(x)$		-	0	$+$	
$f(x)$	$m+13$	$\searrow$	$m+1$	$\nearrow$	$m+8$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy khi $m=0$ thì $\min\limits_{[-1;3]} f(x)$ đạt được tại $x=1$.

b) Khi $m=0$ thì $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=8.$

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy khi $m=0$ thì $\max\limits_{[-1;3]} f(x)=13=f(-1).$

c) Khi $m>2$, nếu $\min\limits_{[-1;3]} f(x)+\max\limits_{[-1;3]} f(x)=22$ thì $m=7.$

Khi $m>2$ thì: $\min\limits_{[-1;3]} f(x)=m+1;\ \max\limits_{[-1;3]} f(x)=m+13.$

Ta có: $\min\limits_{[-1;3]} f(x)+\max\limits_{[-1;3]} f(x)=22 \Leftrightarrow m+1+m+13=22 \Leftrightarrow m=4$ (thỏa mãn điều kiện).

d) Có 5 giá trị nguyên của $m\in(-20;-13)$ để $\min\limits_{[-1;3]}|f(x)|+\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|>-6.$

Khi $m\in(-20;-13)$ thì $m+13<0,$ suy ra: $m+1<m+8<m+13<0.$

Suy ra: $\min\limits_{[-1;3]}|f(x)|=|m+13|=-m-13;\ \max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=|m+1|=-m-1.$

Ta có:

$$\min\limits_{[-1;3]}|f(x)|+\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|>-6 \Leftrightarrow -m-13-m-1>-6 \Leftrightarrow m<-4.$$

Ta có:

$$\begin{cases} m\in(-\infty;-4) \\ m\in(-20;-13) \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\in(-20;-13) \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m\in[-19;-14] \\ m\in\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m\in\{-19;-18;-17;-16;-15;-14\}.$$

Vậy có 6 giá trị nguyên của $m\in(-20;-13)$ để $\min\limits_{[-1;3]}|f(x)|+\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|>-6.$

Câu 9: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3-3x^2+m$ với tham số m.

a. Với $m=-3$ thì $\min\limits_{[-1;1]} y=-8$ khi $x=-1$.

b. Với $m=-3$ thì $\max\limits_{[-1;1]} y=-3$ khi $x=1$.

c. Với mọi giá trị của m thì $\max\limits_{[-1;1]} f(x)-\min\limits_{[-1;1]} f(x)=5$.

d. $4\max\limits_{[-1;1]} f(x)+3\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-1$ khi $m=2$.

Lời giải

a. Với $m=-3$ thì $\min\limits_{[-1;1]} y=-8$ khi $x=-1$.

$y=f(x)=2x^3-3x^2-3$

$\Rightarrow y'=6x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=1\in[-1;1] \end{array}\right.$

Ta có $f(0)=-3;\ f(-1)=-8;\ f(1)=-4$

Nên $\min\limits_{[-1;1]} y=-8$ khi $x=-1$.

b. Với $m=-3$ thì $\max\limits_{[-1;1]} y=-3$ khi $x=1$.

Nên $\min\limits_{[-1;1]} y=-3$ khi $x=0$.

c. Với mọi giá trị của m thì $\max\limits_{[-1;1]} f(x)-\min\limits_{[-1;1]} f(x)=5$.

$y=f(x)=2x^3-3x^2+m$

$\Rightarrow y'=6x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;1] \\ x=1\in[-1;1] \end{array}\right.$

$f(0)=m;\ f(-1)=m-5;\ f(1)=m-1$.

Nên $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(0)=m$; $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=m-5$ nên $\max\limits_{[-1;1]} f(x)-\min\limits_{[-1;1]} f(x)=5$

d. $4\max\limits_{[-1;1]} f(x)+3\min\limits_{[-1;1]} f(x)=-1$ khi $m=2$.

Nên $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=f(0)=m$; $\min\limits_{[-1;1]} f(x)=m-5$ nên

$4\max\limits_{[-1;1]} f(x)+3\min\limits_{[-1;1]} f(x)=4m+3(m-5)=-1 \Leftrightarrow m=2$.

Câu 10: Cho hàm số $y=f(x)=mx+1+\dfrac{4}{x-3}$ với tham số m.

a. Với $m=1$ thì $\max\limits_{[-1;1]} f(x)=0$ khi $x=1$.

b. Với $m=1$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -\frac{1}{3}$ khi $x=0$.

c. Với $m<0$ thì $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = -\frac{1}{3}$.

d. Với mọi $m<0$ thì $\max\limits_{[-2;0]} f(x) + \min\limits_{[-2;0]} f(x) < 0$.

Lời giải

a. Với $m=1$ thì $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$ khi $x=1$.

Với $m=1 \Rightarrow y = f(x) = x+1+\frac{4}{x-3} \Rightarrow y' = 1-\frac{4}{(x-3)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\in[0;2] \\ x=5\notin[0;2] \end{array}\right.$

$f(0) = -\frac{1}{3}; f(1)=0; f(2)=-1$.

Nên $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = 0$ khi $x=1$.

b. Với $m=1$ thì $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -\frac{1}{3}$ khi $x=0$.

$f(0) = -\frac{1}{3}; f(1)=0; f(2)=-1$

Nên $\min\limits_{[0;2]} f(x) = -1$ khi $x=2$.

c. Với $m<0$ thì $\min\limits_{[-2;0]} f(x) = -\frac{1}{3}$.

$y = f(x) = mx+1+\frac{4}{x-3}$

$y' = m-\frac{4}{(x-3)^2} < 0$ với $m<0$ nên hàm số nghịch biến trên $[-2;0]$

$-2<0 \Rightarrow f(-2) > f(0) \Rightarrow \min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(0) = -\frac{1}{3}$.

d. Với mọi $m<0$ thì $\max\limits_{[-2;0]} f(x) + \min\limits_{[-2;0]} f(x) < 0$.

$y' = m-\frac{4}{(x-3)^2} < 0$ với $m<0$ nên hàm số nghịch biến trên $[-2;0]$

$-2<0 \Rightarrow f(-2) > f(0) \Rightarrow \min\limits_{[-2;0]} f(x) = f(0) = -\frac{1}{3}$.

$$\Rightarrow \max_{[-2;0]} f(x) = f(-2) = -2m + 1 + \frac{4}{-2-3} = -2m + \frac{1}{5}$$

$$\max_{[-2;0]} f(x) + \min_{[-2;0]} f(x) = -2m + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} = -2m - \frac{2}{15} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{15}.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x + m$. Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) Với $m = 3$, giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;1]$ là 5.

b) Với $m = 1$, tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = f(\sin x)$ bằng 0

c) Có hai giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất $y = |f(x)|$ trên $[-1;3]$ bằng 8.

d) Khi $m = m_0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ trên $[-1;3]$ đạt nhỏ nhất, $m_0 \in (-1;4)$.

Lời giải

Ta có: $y' = f'(x) = 3x^2 - 3$

Bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y = f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$m+2$	$\searrow$	$m-2$	$\nearrow$	$+\infty$

a. Với $m = 3$, giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2;1]$ là 5.

Từ bảng biến thiên, ta thấy: $\max_{[-2;1]} f(x) = f(-1) = m + 2$

Với $m = 3$, ta có $\max_{[-2;1]} f(x) = 3 + 2 = 5$. Vậy mệnh đề a) đúng.

b. Với $m = 1$, tổng giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số $y = f(\sin x)$ bằng 0

Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1;1]$

$\Rightarrow \max f(\sin x) = \max_{[-1;1]} f(t) = f(-1) = m + 2$

$\Rightarrow \min f(\sin x) = \min_{[-1;1]} f(t) = f(1) = m - 2$

Suy ra $\max f(\sin x) + \min f(\sin x) = 2m$

Với $m = 1$, ta có: $\max f(\sin x) + \min f(\sin x) = 2$. Vậy mệnh đề b) sai.

c. Có hai giá trị thực của tham số m để giá trị lớn nhất $y=|f(x)|$ trên $[-1;3]$ bằng 8.

Ta có: $\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=\max\{|f(-1),f(1),f(3)|\}=\max\{|m-2|,|m+18|\}$

TH1: $|m-2|\le|m+18|\Leftrightarrow m\ge-8$

Khi đó: $\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=\max\{|m-2|,|m+18|\}=|m+18|=m+18$

Theo giả thiết, ta có: $\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=m+18=8\Leftrightarrow m=-10$ (t/m)

TH2: $|m-2|\ge|m+18|\Leftrightarrow m\le-8$

Khi đó: $\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=\max\{|m-2|,|m+18|\}=|m-2|=2-m$

Theo giả thiết: $\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=8\Leftrightarrow 2-m=8\Leftrightarrow m=-6$ (t/m)

Vậy có hai giá trị của tham số m để $\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=8$. Mệnh đề c) đúng.

d. Khi $m=m_0$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên $[-1;3]$ đạt nhỏ nhất, $m_0\in(-1;4)$.

Ta có: $\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=\max\{|f(-1),f(1),f(3)|\}=\max\{|m-2|,|m+18|\}$

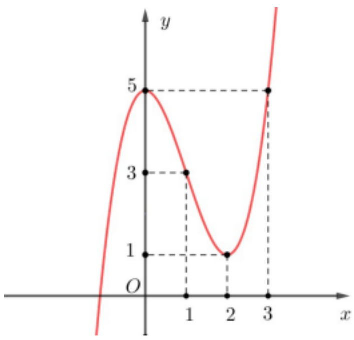
Khi đó: $\begin{cases}\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=\max\{|m-2|,|m+18|\}\ge|m-2|\\ \max\limits_{[-1;3]}|f(x)|=\max\{|m-2|,|m+18|\}\ge|m+18|\end{cases}$

$2.\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|\ge|m-2|+|m+18|\ge|2-m+m+18|=20$ hay $\max\limits_{[-1;3]}|f(x)|\ge10$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2-m=m+18\Leftrightarrow m=-8$

Vậy với $m=-8$ thì giá trị lớn nhất của hàm số $y=|f(x)|$ trên $[-1;3]$ đạt nhỏ nhất. Mệnh đề d) sai.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ sau:



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

a) $\min_{[1;3]} f(x) = f(1)$.

b) $2\min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = 7$.

c) Đặt $g(x) = f(x) - \sqrt{2x} - \sqrt{8-2x}$, $\min_{[0;4]} g(x) > 0$.

d) Đặt $h(x) = f(x^3 - x^2 + x + 2) + 3m$, m là tham số. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = m^2 + 3.\max_{[0;1]} h(x) + 4.\min_{[0;1]} h(x) - 3m$ bằng -62.

Lời giải

a. $\min_{[1;3]} f(x) = f(1)$.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy $\min_{[1;3]} f(x) = f(2) = 1$. Vậy mệnh đề a) sai.

b. $2\min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = 7$.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy $\min_{[0;3]} f(x) = f(2) = 1$, $\max_{[0;3]} f(x) = f(0) = f(3) = 5$

Suy ra: $2\min_{[0;3]} f(x) + \max_{[0;3]} f(x) = 7$. Vậy mệnh đề b) đúng.

c. Đặt $g(x) = f(x) - \sqrt{2x} - \sqrt{8-2x}$, $\min_{[0;4]} g(x) > 0$.

Từ đồ thị hàm số, ta thấy: $f(x) \ge 1, \forall x \in [0;4]$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$. (1)

Đặt $u = \sqrt{2x} + \sqrt{8-2x},\ x \in [0;4]$

$\Rightarrow u^2 = \left(\sqrt{2x} + \sqrt{8-2x}\right)^2 \le 2(2x + 8 - 2x) = 16$ $\Rightarrow 0 < u \le 4,\ \forall x \in [0;4]$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x = 8 - 2x \Leftrightarrow x = 2$.

Hay $\sqrt{2x} + \sqrt{8-2x} \le 4,\ \forall x \in [0;4]$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra $g(x) = f(x) - \sqrt{2x} - \sqrt{8-2x} \ge 1 - 4 = -3,\ \forall x \in [0;4]$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x = 2$

Vây $\min_{[0;4]} g(x) = -3$. Mệnh đề c) sai.

d) Đặt $h\left(x\right)=f\left(x^3-x^2+x+2\right)+3m$, m là tham số. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=m^2+3.\max\limits_{[0;1]}h(x)+4.\min\limits_{[0;1]}h(x)-3m$ bằng -62.

Đặt $t=x^3-x^2+x+2,\ x\in\left[0;1\right]$

Ta có: $t'=3x^2-2x+1>0\ \forall x\in\left[0;1\right]$

$\Rightarrow$ Hàm số $t=x^3-x^2+x+2$ đồng biến trên $\left[0;1\right]$ $\Rightarrow t\in\left[2;3\right]$

Khi đó: $\min\limits_{[0;1]}h(x)=f(2)+3m=1+3m$

$\max\limits_{[0;1]}h(x)=f(3)+3m=5+3m$

Suy ra:

$S=m^2+3.\max\limits_{[0;1]}h(x)+4.\min\limits_{[0;1]}h(x)-3m=m^2+3.\left(5+3m\right)+4.\left(1+3m\right)-3m=m^2+18m+19$

$\Rightarrow S=\left(m+9\right)^2-62\geq-62,\ \forall m\in\mathbb{R}$. Vậy mệnh đề d) đúng.

Câu 13: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-4mx+m^2+2024$ với m là tham số.

a) Khi $m=1$ thì $\max\limits_{[1;3]}f\left(x\right)$ đạt được tại $x=2$.

b) Khi $m=-1$ thì $\min\limits_{[0;2]}f\left(x\right)=2025$.

c) Với m là số nguyên dương, đặt $T=\min\limits_{[-2;1]}f\left(x\right)+\max\limits_{[-2;1]}f\left(x\right)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4051.

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f\left(x\right)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(12;2024\right)$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng 511036.

Lời giải

a) Khi $m=1$ thì $\max\limits_{[1;3]}f\left(x\right)$ đạt được tại $x=2$.

Khi $m=1$ thì $y=f\left(x\right)=x^2-4x+2025$.

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=x^2-4x+2025$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[1;3\right]$.

Ta có: $f'\left(x\right)=2x-4$ và $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 2x-4=0\Leftrightarrow x=2$.

Khi đó: $f\left(1\right)=2022; f\left(2\right)=2021; f\left(3\right)=2022$.

Suy ra $\max\limits_{[1;3]}f\left(x\right)=f\left(1\right)=f\left(3\right)=2022$.

Hay hàm số $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[1;3\right]$ tại $x=1;x=3$.

b) Khi $m=-1$ thì $\min\limits_{[0;2]}f\left(x\right)=2025$.

Khi $m=-1$ thì $y=f(x)=x^2+4x+2025$.

Xét hàm số $y=f(x)=x^2+4x+2025$ xác định và liên tục trên đoạn $[0;2]$.

Ta có: $f'(x)=2x+4$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x+4=0 \Leftrightarrow x=-2$.

Khi đó: $f(0)=2025; f(2)=2037$.

Suy ra $\min\limits_{[0;2]} f(x)=2025$.

c) Với m là số nguyên dương, đặt $T=\min\limits_{[-2;1]} f(x)+\max\limits_{[-2;1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4051.

Xét hàm số $y=f(x)=x^2-4mx+m^2+2024$ xác định và liên tục trên đoạn $[-2;1]$.

Ta có: $f'(x)=2x-4m$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4m=0 \Leftrightarrow x=2m \geq 2$ (vì m là số nguyên dương).

Khi đó: $f(-2)=m^2+8m+2028; f(1)=m^2-4m+2025$.

Suy ra $T=\min\limits_{[-2;1]} f(x)+\max\limits_{[-2;1]} f(x)=m^2+8m+2028+m^2-4m+2025=2m^2+4m+4053$

Hay $T \geq 4059, \forall m \in \mathbb{Z}^+$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 4059.

d) Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(12;2024)$. Tổng tất cả các giá trị của m bằng 511036.

Xét hàm số $y=f(x)=x^2-4mx+m^2+2024$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x)=2x-4m$ và $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2x-4m=0 \Leftrightarrow x=2m$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$2m$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(2m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị nhỏ nhất trên khoảng $(12;2024)$ thì

$12<2m<2024 \Leftrightarrow 6<m<1012$.

Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{7;8;9;...;1011\}$.

Tổng tất cả các giá trị của m là $7+8+9+...+1011=\dfrac{(7+1011)\cdot 1005}{2}=511545$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x)=x^3-6mx^2+m^2+2025$ với m là tham số.

a) Khi $m=2$ thì $\max\limits_{[-3;1]} f(x)$ đạt được tại $x=0$.

b) Khi $m=-1$ thì $\min\limits_{[-4;2]} f(x)=2058$.

c) Với m là số nguyên âm, đặt $T=\min\limits_{[-3;-1]} f(x)+\max\limits_{[-3;-1]} f(x)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4084

.

d) Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)$ tồn tại giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(-24;-2\right)$. Biết $S=\left(a;b\right)$, với $a,b\in\mathbb{R};a<b$. Giá trị của biểu thức $T=2024b-2025a=11138$

Lời giải

a) Khi $m=2$ thì $\max\limits_{[-3;1]} f\left(x\right)$ đạt được tại $x=0$.

Khi $m=2$ thì $y=f\left(x\right)=x^3-12x^2+2029$.

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-12x^2+2029$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-3;1\right]$.

Ta có: $f'\left(x\right)=3x^2-24x$ và $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-24x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=8\end{array}\right.$.

Khi đó: $f\left(-3\right)=1894; f\left(1\right)=2018; f\left(0\right)=2029$.

Suy ra $\max\limits_{[-3;1]} f\left(x\right)=f\left(0\right)=2029$.

Hay hàm số $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-3;1\right]$ tại $x=0$.

b) Khi $m=-1$ thì $\min\limits_{[-4;2]} f\left(x\right)=2058$.

Khi $m=-1$ thì $y=f\left(x\right)=x^3+6x^2+2026$.

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=x^3+6x^2+2026$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-4;2\right]$.

Ta có: $f'\left(x\right)=3x^2+12x$ và $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2+12x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-4\end{array}\right.$.

Khi đó: $f\left(-4\right)=2058; f\left(2\right)=2058; f\left(0\right)=2026$.

Suy ra $\min\limits_{[-4;2]} f\left(x\right)=f\left(0\right)=2026$.

c) Với m là số nguyên âm, đặt $T=\min\limits_{[-3;-1]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-3;-1]} f\left(x\right)$. Giá trị nhỏ nhất của T là 4084

.

Xét hàm số $y=f\left(x\right)=x^3-6mx^2+m^2+2025$ xác định và liên tục trên đoạn $\left[-3;-1\right]$.

Ta có: $f'\left(x\right)=3x^2-12mx$ và $f'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-12mx=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4m\le -4\end{array}\right.$ (vì $m\in\mathbb{Z}^-$).

Khi đó: $f\left(-3\right)=m^2-54m+1998; f\left(-1\right)=m^2-6m+2024$.

Suy ra $T=\min\limits_{[-3;-1]} f\left(x\right)+\max\limits_{[-3;-1]} f\left(x\right)=m^2-54m+1998+m^2-6m+2024=2m^2-60m+4022$

Hay $T\ge 4084,\forall m\in\mathbb{Z}^-$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m=-1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của T là 4084.

d) Gọi S là tập tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f\left(x\right)$ tồn tại giá trị lớn nhất trên khoảng $\left(-24;-2\right)$. Biết $S=\left(a;b\right)$, với $a,b\in\mathbb{R};a<b$. Giá trị của biểu thức $T=2024b-2025a=11138$.

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - 6mx^2 + m^2 + 2025$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 12mx$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12mx = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4m \end{array}\right.$.

Trường hợp 1: $m = 0$. Khi đó $f'(x) = 3x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-24;-2)$.

Trường hợp 2: $m > 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$4m$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(4m)$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-24;-2)$ nên hàm số $f(x)$ không có giá trị lớn nhất trên khoảng $(-24;-2)$.

Trường hợp 3: $m < 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$4m$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(4m)$	$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	$+\infty$

Để hàm số $f(x)$ tồn tại giá trị lớn nhất trên khoảng $(-24;-2)$ thì

$-24 < 4m < -2 \Leftrightarrow -6 < m < -\frac{1}{2}$.

So với điều kiện $m < 0$ ta được $-6 < m < -\frac{1}{2}$.

Suy ra $a = -6; b = -\frac{1}{2}$ nên $T = 2024b - 2025a = 2024 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2025 \cdot (-6) = 11138$.

Câu 15: Cho hàm số: $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(-3;2)$, $\lim\limits_{x \to (-3)^+} f(x) = -5$, $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = 3$ và có bảng biến thiên như sau

x	-3		-1		1		2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	-5	$\nearrow$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-3;2)$ bằng 0.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1;2)$ bằng -2.

c) Có 1 giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-5;5]$ để bất phương trình $f(x)>m$ luôn đúng với mọi $x\in(-3;2)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x^2+1\right)$ trên $(-1;1)$ bằng -2.

Lời giải

a) Sai

b) Đúng

c) Sai

Bất phương trình $f(x)>m$ luôn đúng với mọi $x\in(-3;2)\Leftrightarrow m\le -5$.

$m\in\mathbb{Z}, m\in[-5;5]\Rightarrow m\in\{-5\}$.

d) Đúng

Ta có $y'=2x.f'\left(x^2+1\right)$

Trên $(-1;1)\Rightarrow y'=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x^2+1=-1\Leftrightarrow x=0\text{ (bội lẻ)}\\x^2+1=1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	-1		0		1
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $y(0)=f(1)=-2$.

Câu 16: Cho hàm số $f(x)=x^3-3x$ có đồ thị (C)
Khẳng định dưới đây đúng hay sai?

a) Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

b) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;2]$ bằng 2

c) Với $m \in [-1;+\infty)$ thì trên $[-1;+\infty)$ phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm trái dấu.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f^2(x)-4f(x)$ trên $[-2;1]$ bằng -4.

Lời giải

a) Đúng

b) Đúng

x	-1		1		2
y'	0	$-$	0	$+$	
y	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	2

$\Rightarrow \max\limits_{[-1;2]} y = 2$

c) Sai

Trên $[-1;+\infty)$ phương trình $f(x)=m$ có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -2<m\le 2$

d) Sai

Ta có $y'=2f'(x)\left[f(x)-2\right]$.

Trên $[-2;2] \Rightarrow y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f(x)=2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pm 1 \\ x=-1 \\ x=a \quad \left(a\in(1;++\infty)\right) \Rightarrow L \end{array}\right.$

Ta có

$y(-1)=f^2(-1)-4f(-1)=-4; y(1)=f^2(1)-4f(1)=12; y(-2)=f^2(-2)-4f(-2)=12$

$\Rightarrow \max\limits_{[-2;1]} y = 12$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=\left(m^2-6m\right)x^4+(2m-1)x^2+2m^3-1$ với m là tham số

a) Khi $m=6$ thì $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=431$.

b) Khi $m=0$ thì $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$.

c) Khi $m<0$ hoặc $m>6$ thì hàm số có giá trị nhỏ nhất.

d) Khi $m\in(1;3)$ thì hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

a) Khi $m=6$ thì $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=431$.

Khi $m=6$, ta có $f(x)=11x^2+431\geq 431, \forall x\in\mathbb{R}$; dấu "$=$" xảy ra khi $x=0$.

Do đó $\min\limits_{\mathbb{R}} f(x)=431$.

b) Khi $m=0$ thì $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$.

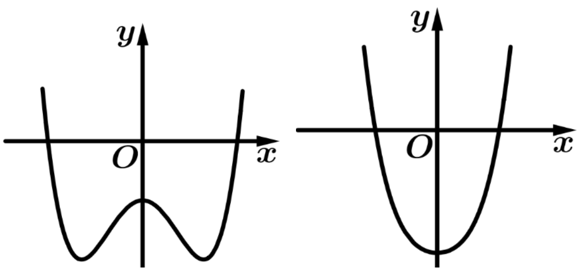
Khi $m=0$, ta có $f(x)=-x^2-1\leq -1, \forall x\in\mathbb{R}$; dấu "$=$" xảy ra khi $x=0$.

Do đó $\max\limits_{\mathbb{R}} f(x)=-1$.

c) Khi $m<0$ hoặc $m>6$ hàm số có giá trị nhỏ nhất.

Khi $m<0$ hoặc $m>6$ thì $m^2-6m>0$

Ta có $f(x)$ là hàm bậc 4 trùng phương có hệ số $a>0$ nên $f(x)$ có đồ thị 1 trong 2 dạng



Từ đồ thị ta thấy, hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất.

d) Khi $m\in(1;3)$ thì hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Khi $m\in(1;3)$ thì $m^2-6m=m(m-6)<0$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$, suy ra hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 18: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x+m+6}{x-m}$ với m là tham số

a) Khi $m=1$ thì $\max\limits_{[2;3]} y+\min\limits_{[2;3]} y=14$.

b) Khi $m=0$ thì $\min\limits_{[1;3]} y=2$.

c) Khi $m<-3$ và $\max\limits_{[1;3]} y>0$ thì $-9<m<-3$.

d) Khi $m > -3$ và $\max\limits_{[1;3]} y > 0$ thì $-7 < m < 1$.

Lời giải

a) Khi $m = 1$ thì $\max\limits_{[2;3]} y + \min\limits_{[2;3]} y = 14$.

Khi $m = 1$ thì $y = \dfrac{x+7}{x-1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ và $[2;3] \subset D$ nên

$\max\limits_{[2;3]} y + \min\limits_{[2;3]} y = y(2) + y(3) = 9 + 5 = 14$.

b) Khi $m = 0$ thì $\min\limits_{[1;3]} y = 2$.

Khi $m = 0$ thì $y = \dfrac{x+6}{x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $[1;3] \subset D$.

Ta có $y' = -\dfrac{6}{x^2} < 0, \forall x \neq 0$. Khi đó $\min\limits_{[1;3]} y = y(3) = 3$.

c) Khi $m < -3$ và $\max\limits_{[1;3]} y > 0$ thì $-9 < m < -3$.

Ta có: $y' = \dfrac{-2m-6}{(x-m)^2}$.

Khi $m < -3$ thì $-2m - 6 > 0$.

Khi đó $\max\limits_{[1;3]} y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1;3] \\ f(3) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right. \\ \dfrac{m+9}{3-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right. \\ -9 < m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow -9 < m < 1$.

Đối chiếu với $m < -3$, ta được $-9 < m < -3$.

d) Khi $m > -3$ và $\max\limits_{[1;3]} y > 0$ thì $-7 < m < 1$.

Ta có: $y' = \dfrac{-2m-6}{(x-m)^2}$.

Khi $m > -3$ thì $-2m - 6 < 0$.

Khi đó $\max\limits_{[1;3]} y > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \notin [1;3] \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right. \\ \dfrac{m+7}{1-m} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < 1 \\ m > 3 \end{array}\right. \\ -7 < m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow -7 < m < 1$.

Đối chiếu với $m > -3$, ta được $-3 < m < 1$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \dfrac{x+m+6}{x-m}$ (m là tham số).

a) Khi $m = 3$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[1;2\right]$ đạt tại $x = 2$.

b) Khi $m = 3$ thì $\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right) = -5$.

c) Khi $m = 3$ thì $\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right) + \min\limits_{[1;2]} f\left(x\right) = -2$.

d) Có hai giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng m^2.

Lời giải

a) Khi $m = 3$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[1;2\right]$ là 3.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Xét hàm số $y = \dfrac{x+m+6}{x-m}$ trên đoạn $[1;2]$, ta có $y' = \dfrac{-2m-6}{\left(x-m\right)^2}$

Khi $m = 3$ ta có $y' = \dfrac{-12}{\left(x-3\right)^2} < 0, \forall x \in \left[1;2\right]$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[1;2\right]$ đạt tại $x = 2$.

b) Khi $m = 3$ thì $\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right) = -5$.

Khi $m = 3$ ta có $y = \dfrac{x+9}{x-3}, y' = \dfrac{-12}{\left(x-3\right)^2} < 0, \forall x \in \left[1;2\right]$ nên $\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right) = f\left(1\right) = -5$.

c) Khi $m = 3$ thì $\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right) + \min\limits_{[1;2]} f\left(x\right) = -2$.

Khi $m \notin \left[1;2\right]$ ta có $y' = \dfrac{-2m-6}{\left(x-m\right)^2}$ không đổi dấu trên $\left[1;2\right]$

$\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right) + \min\limits_{[1;2]} f\left(x\right) = f\left(1\right) + f\left(2\right) = \dfrac{m+7}{1-m} + \dfrac{m+8}{2-m} = \dfrac{-2m^2-12m+22}{\left(1-m\right)\left(2-m\right)}$

Do đó $\max\limits_{[1;2]} f\left(x\right) + \min\limits_{[1;2]} f\left(x\right) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{-2m^2-12m+22}{\left(1-m\right)\left(2-m\right)} = -2, m \notin \{1;2\}$

$\Leftrightarrow -18m + 26 = 0 \Leftrightarrow m = \dfrac{13}{9}$

d) Có hai giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng m^2.

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{m\}$.

Để hàm số có giá trị lớn nhất trên $[1\,;\,3]$ thì $m\notin[1\,;\,3]$.

$$y'=\frac{-2m-6}{(x-m)^2}.$$

Trường hợp 1: $-2m-6>0\Leftrightarrow m<-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y=y(3)=\dfrac{m+9}{3-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1\,;\,3]$ là số dương thì $\dfrac{m+9}{3-m}>0\Leftrightarrow m+9>0\Leftrightarrow m>-9$.

Vậy các số nguyên m thỏa là $-8,\ -7,\ -6,\ -5,\ -4$.

Trường hợp 2: $-2m-6<0\Leftrightarrow m>-3$.

Khi đó $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y=y(1)=\dfrac{m+7}{1-m}$.

Để giá trị lớn nhất trên đoạn $[1\,;\,3]$ là số dương thì $\dfrac{m+7}{1-m}>0\Leftrightarrow 1-m>0\Leftrightarrow m<1$.

Vậy các số nguyên m thỏa mãn là $-2,\ -1,\ 0$.

Trường hợp 3: $-2m-6=0\Leftrightarrow m=-3$.

Khi đó $y=1$. Nên $\max\limits_{x\in[1\,;\,3]} y=1$.

Vậy $m=-3$ thỏa.

Kết luận: có 9 số nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+m}{x-1}$ xác định và liên tục trên đoạn $[2;3]$.

a) Khi $m=-3$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;3]$ bằng $\dfrac{3}{2}$.

b) Khi $m=-2$ thì $\max\limits_{[2;3]} f(x)=\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$ khi $m>-2$.

d) Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$ là 4.

Lời giải

a) Khi $m=-3$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $[2;3]$ bằng $\frac{3}{2}$.

Thay $m=-3$ vào $y=\frac{2x+m}{x-1}$, ta có: $y=\frac{2x-3}{x-1}\Rightarrow y'=\frac{1}{(x-1)^2}>0$

Vậy $\max\limits_{[2;3]} f(x)=\frac{3}{2}$ tại $x=3$.

b) Khi $m=-2$ thì $\max\limits_{[2;3]} f(x)=\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$.

Thay $m=-2$ vào $y=\frac{2x+m}{x-1}$, ta có: $y=\frac{2x-2}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}=2$.

Vậy $\max\limits_{[2;3]} f(x)=\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$ khi $m>-2$.

$y=\frac{2x+m}{x-1}\Rightarrow y'=\frac{-2-m}{(x-1)^2}$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=2$ khi và chỉ khi

$y'>0\Leftrightarrow\frac{-2-m}{(x-1)^2}>0\Leftrightarrow -2-m>0\Leftrightarrow m<-2$.

d) Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để $\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$ là 4.

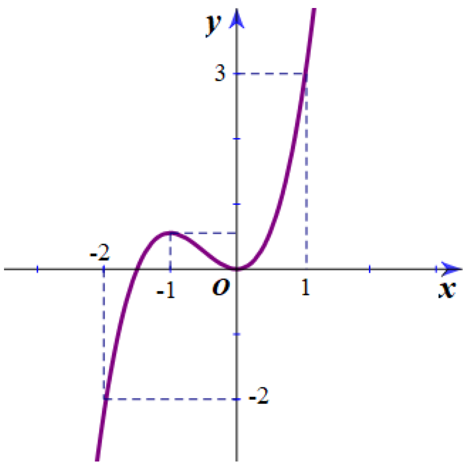
Khi $m=-2$ thì $\max\limits_{[2;3]} f(x)=\min\limits_{[2;3]} f(x)=2\Rightarrow m=-2$ không thỏa.

Khi $m\neq -2$ thì

$\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)=2\Leftrightarrow\left|4+m-\frac{6+m}{2}\right|=2\Leftrightarrow\left|\frac{m+2}{2}\right|=2\Leftrightarrow|m+2|=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\m=-6\end{array}\right.$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số m để $\max\limits_{[2;3]} f(x)-\min\limits_{[2;3]} f(x)=2$ là $2+(-6)=-4$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình dưới.



a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là 3.

b) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 0.

c) Tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \ge m$ có nghiệm $x \in [-2;1]$ là $m \le -2$.

d) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-1;0]$ bằng 4.

Lời giải

a) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là 3.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta có: $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 3$ tại $x = 1$.

b) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ bằng 0.

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$, ta có: $\max\limits_{[-2;1]} f(x) = 3$ tại $x = 1$ và $\min\limits_{[-2;1]} f(x) = -2$ tại $x = -2$.

Vậy tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ là: $3 + (-2) = 1$.

c) Tất cả giá trị thực của tham số m để bất phương trình $f(x) \ge m$ có nghiệm $x \in [-2;1]$ là $m \le -2$.

$f(x) \ge m$ có nghiệm $x \in [-2;1]$ khi và chỉ khi $\min\limits_{[-2;1]} f(x) \ge m \Leftrightarrow -2 \ge m \Leftrightarrow m \le -2$.

d) Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-1;0]$ bằng 4.

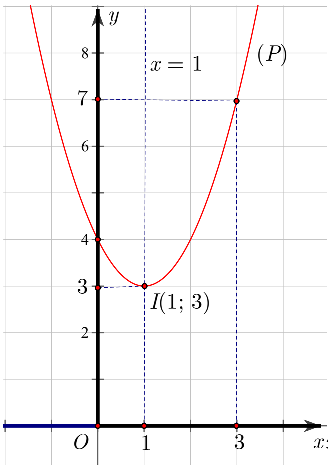
Đặt $t = x + 1$. Vì $x \in [-1;0] \Rightarrow t \in [0;1]$

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-1;0]$ lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(t)$ trên đoạn $[0;1]$

Dựa vào đồ thị của hàm số, ta có: $\max\limits_{[0;1]} f(t) = 3$ tại $x = 1$ và $\min\limits_{[0;1]} f(t) = 0$ tại $x = 0$.

Tổng của giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+1)$ trên đoạn $[-1;0]$ bằng $3 + 0 = 3$.

Câu 22: Cho đồ thị hàm số. Hàm số đạt ……………………………



A. Giá trị lớn nhất là 7 trên $[0;+\infty)$

B. Giá trị nhỏ nhất là 3 trên $[0;+\infty)$

C. Giá trị lớn nhất là 4 trên $[0;1]$

D. Giá trị nhỏ nhất là 3 trên $[0;3]$

Lời giải

Câu 23: Cho bảng biến thiên của hàm số. Hàm số đạt ....

t	0		$\frac{7}{2}$		9
y	3	↘	$-\frac{37}{4}$	↗	21

A. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{-37}{4}$ trên $[0;9]$

B. Giá trị lớn nhất là 21 trên $[0;+\infty)$

C. Giá trị lớn nhất là 21 trên $[0;9]$

D. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{-37}{4}$ trên $(0;+\infty)$

Lời giải

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)=-x^2-4x+3$. Hàm số đạt ....

A. Giá trị lớn nhất là 3 trên $[0;4]$

B. Giá trị nhỏ nhất là -29 trên $[0;4]$

C. Giá trị lớn nhất là 7 trên $[0;4]$

D. Giá trị lớn nhất là 7 trên $[-3;4]$

Lời giải

$f'(x) = -2x - 4$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (loại vì $x \notin [0;4]$.)

$f(0) = 3; f(4) = -29$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là 3 khi $x = 0$

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{40}x^2(30 - x)$. Hàm số đạt ....

A. Giá trị lớn nhất là 25 trên $[3;+\infty)$

B. Giá trị lớn nhất là 25 trên $(0;+\infty)$

C. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{14}{5}$ trên $[0;2]$

D. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{52}{5}$ trên $[2;+\infty)$

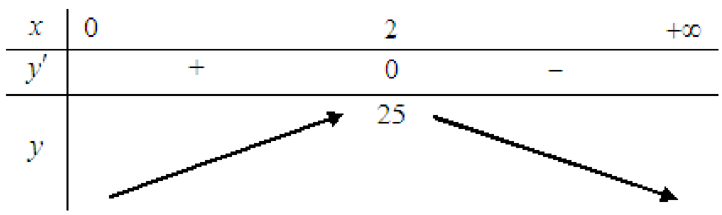
Lời giải

$f(x) = -\frac{1}{40}x^3 + \frac{3}{4}x^2$

$f'(x) = -\frac{3}{40}x^2 + \frac{3}{2}x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{40}x^2 + \frac{3}{2}x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0(l) \\ x = 20(n) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên.



Câu 26: Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + \frac{500}{x}$. Hàm số đạt ....

A. Giá trị nhỏ nhất là 150 trên $[0;+\infty)$

B. Giá trị nhỏ nhất là 150 trên $(0;+\infty)$

C. Giá trị lớn nhất là 502 trên $(0;5]$

D. Giá trị lớn nhất là 502 trên $(0;+\infty)$

Lời giải

$f'(x) = 4x - \frac{500}{x^2} = \frac{4x^3 - 500}{x^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 500 = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Bảng biến thiên.

x	0		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	150	$\nearrow$	$+\infty$

.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{6}\sqrt{16+(7-x)^2} + \frac{1}{10}x$. Hàm số đạt ....

A. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{17}{15}$ trên $[0;7]$

B. Giá trị nhỏ nhất là $\frac{17}{15}$ trên $[0;3]$

C. Giá trị lớn nhất tại $x = 0$ trên $[0;7]$

D. Giá trị lớn nhất là $\frac{41}{30}$ trên $[4;7]$

Lời giải

$f'(x) = \frac{1}{6}.\frac{x-7}{\sqrt{16+(7-x)^2}} + \frac{1}{10}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6\sqrt{16+(7-x)^2} = 10(7-x) \Leftrightarrow x = 4 \Leftrightarrow x = 4$.

$f(0) = \frac{1}{6}\sqrt{65}$, $f(7) = \frac{41}{30}$, $f(4) = \frac{17}{15}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất là $\frac{17}{15}$ khi $x = 4$

Câu 28: Một tam giác vuông có cạnh huyền bằng $5\sqrt{2}$ thì:.

A. Diện tích tam giác lớn nhất khi tam giác đó vuông cân

B. Diện tích tam giác lớn nhất là $\frac{25}{2}$ cm^2

C. Diện tích tam giác lớn nhất khi độ dài hai cạnh góc vuông có tỉ lệ $1:2$

D. Diện tích tam giác lớn nhất thì $5\left(2+\sqrt{2}\right)$ cm

Lời giải

Gọi một cạnh góc vuông là x $\left(0 < x < 5\sqrt{2}\right)$ nên cạnh còn lại $\sqrt{50-x^2}$.

Diện tích tam giác vuông là: $S = \frac{1}{2}x\sqrt{50-x^2}$.

Ta có $S = \frac{1}{2}x\sqrt{50-x^2} \le \frac{1}{2}\frac{x^2+50-x^2}{2} = \frac{25}{2}$. Dấu "$=$" xảy ra $\Leftrightarrow x = \sqrt{50-x^2} \Leftrightarrow x = 5$.

Diện tích lớn nhất khi: $x=5 \Rightarrow S=\dfrac{25}{2}$.

Câu 29: Một cơ sở sản xuất khăn mặt đang bán mỗi chiếc khăn với giá 30.000 đồng một chiếc và mỗi tháng cơ sở bán được trung bình 3000 chiếc khăn. Cơ sở sản xuất đang có kế hoạch tăng giá bán để có lợi nhận tốt hơn. Sau khi tham khảo thị trường, người quản lý thấy rằng nếu từ mức giá 30.000 đồng mà cứ tăng giá thêm 1000 đồng thì mỗi tháng sẽ bán ít hơn 100 chiế**c.** Biết vốn sản xuất một chiếc khăn không thay đổi là 18.000. Hỏi.

A. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần tăng thêm 10000 đồng?

B. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì mỗi chiếc khăn cần bán với giá 39000 đồng?

C. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì sau khi tăng giá mỗi chiếc khăn lãi 21000 đồng?

D. Để đạt lợi nhuận lớn nhất thì số khăn bán ra giảm 800 chiếc?

Lời giải

Gọi số tiền cần tăng giá mỗi chiếc khăn là x (nghìn đồng).

Vì cứ tăng giá thêm 1 (nghìn đồng) thì số khăn bán ra giảm 100 chiếc nên tăng x (nghìn đồng) thì số xe khăn bán ra giảm $100x$ chiế**c.**

Do đó tổng số khăn bán ra mỗi tháng là: $3000-100x$ chiế**c.**

Lúc đầu bán với giá 30 (nghìn đồng), mỗi chiếc khăn có lãi 12 (nghìn đồng). Sau khi tăng giá, mỗi chiếc khăn thu được số lãi là: $12+x$ (nghìn đồng).

Do đó tổng số lợi nhuận một tháng thu được sau khi tăng giá là:

$f(x)=(3000-100x)(12+x)$ (nghìn đồng).

Xét hàm số $f(x)=(3000-100x)(12+x)$ trên $(0;+\infty)$.

Ta có: $f(x)=-100x^2+1800x+36000$.

$f'(x)=-200x+1800$

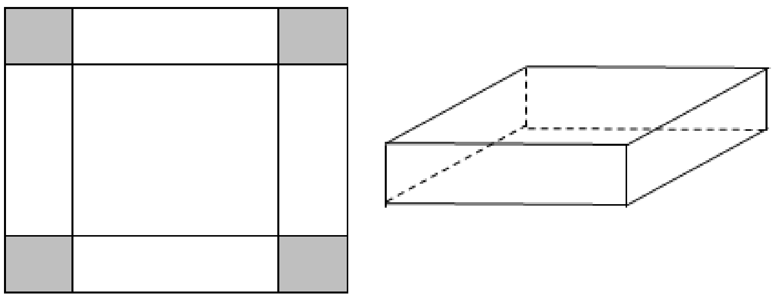
$f'(x)=0 \Leftrightarrow -200x+1800=0 \Leftrightarrow x=9$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;+\infty)$ ta thấy hàm số đạy giá trị lớn nhất khi

$x=9$

Như vậy, để thu được lợi nhuận cao nhất thì cơ sở sản xuất cần tăng giá bán mỗi chiếc khăn là 9.000 đồng, tức là mỗi chiếc khăn bán với giá mới là 39.000 đồng.

Câu 30: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh $2016(cm)$. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Hỏi..........................



A. Để hộp nhận được có thể tích lớn nhất thì $x = 250(cm)$

B. Để hộp nhận được có thể tích lớn nhất thì $x = 336(cm)$

C. Hộp nhận được có thể tích lớn nhất là $606928896(cm^3)$

D. Hộp nhận được có thể tích lớn nhất là $606928000(cm^3)$

Lời giải

Điều kiện: $0 < x < 1008,$ ta có.

$V = h.B = x(2016 - 2x)^2 = f(x).$

Xét hàm số $f(x) = x(2016 - 2x)^2 = x(a - 2x)^2, a = 2016.$.

Với $x \in (0;1008)$, ta có: $f'(x) = 12x^2 - 8ax + a^2; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 336$.

Bảng biến thiên

Suy ra V đạt giá trị lớn nhất là $606928896(cm^3)$ khi $x = 336(cm)$.

Vậy để thể tích hộp lớn nhất, cần cắt bốn góc bốn hình vuông có cạnh $x = 336$.

Câu 31: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá $2\,000\,000$ đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm $50\,000$ đồng một tháng thì có thêm một căn hộ bị bỏ trống. Hỏi…………………

A. Thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là 101250000 đồng?

B. Thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là 105250000 đồng?

C. Có 5 căn hộ bị bỏ trống thì công ty có thu nhập cao nhất ?

D. Để công ty có thu nhập cao nhất trong 1 tháng thì giá cho thuê là 2500000 đồng?

Lời giải

Gọi x (đồng/tháng) $(x > 0)$ là số tiền tăng giá

$\Rightarrow$ Số căn hộ bị bỏ trống là $\dfrac{x}{50\ 000}$ căn hộ

$\Rightarrow$ Số tiền công ty thu được $T(x) = (2\ 000\ 000 + x)\left(50 - \dfrac{x}{50\ 000}\right)$

Khảo sát hàm số $T(x)$ trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow T'(x) = 10 - \dfrac{x}{25\ 000} \Rightarrow T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 250\ 000$.

Bảng biến thiên

x	0		250000		$+\infty$
$T'(x)$		$+$	0	$-$	
$T(x)$		$\nearrow$	101250000	$\searrow$	

Vậy thu nhập cao nhất công ty có thể đạt được trong 1 tháng là: $T = 101250000$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + m$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Với m=1 thì $\max\limits_{[1;3]} f(x) = \dfrac{67}{27}$.

b) Với m=1 thì $\min\limits_{[1;3]} x\, f(x) = -7$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên đoạn $[1;3]$ khi $m = 8$.

d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[1;3]$ khi $m = 12$.

Lời giải.

Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 - 4x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \in [1;3] \\ x = -\dfrac{2}{3} \notin [1;3] \end{array}\right.$.

Ta có $\begin{cases} f(1) = -5 + m \\ f(2) = -8 + m \\ f(3) = -3 + m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[1;3]} f(x) = m - 3 \\ \min\limits_{[1;3]} f(x) = m - 8 \end{cases}$.

$+ \; m = 1 \Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[1;3]} f(x) = -2 \\ \min\limits_{[1;3]} f(x) = -7 \end{cases}$.

$+ \max\limits_{[1;3]} f(x) = m - 3 = 5 \Rightarrow m = 8$.

$+ \; \min\limits_{[1;3]} f(x) = m - 8 = 5 \Rightarrow m = 13$

Câu 33: Cho hàm số $y = \dfrac{x+m}{x-1}$ (với m là tham số thực). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Với m=1 thì $\min\limits_{[2;4]} y = \dfrac{5}{3}$

b) Với m=1 thì $\max\limits_{[2;4]} y = 4$.

c) Hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 5 trên đoạn $[2;4]$ khi $m = \dfrac{4}{3}$.

d) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng 5 trên đoạn $[2;4]$ khi $m = 11$.

Lời giải.

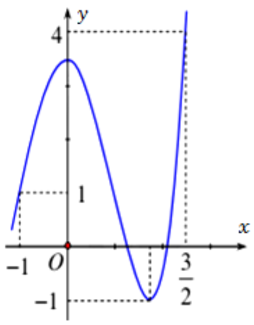
+ $m=1 \Rightarrow y=\dfrac{x+1}{x-1} \Rightarrow y'=-\dfrac{2}{(x-1)^2}<0 \Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[2;4]} f(x)=f(4)=\dfrac{5}{3} \\ \max\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=3 \end{cases}$.

+ Đạo hàm $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}$.

TH1. Với $m>-1$ suy ra $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}<0;\ \forall x\neq 1$ nên hàm số $f(x)$ nghịch biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\Rightarrow \begin{cases} \min\limits_{[2;4]} f(x)=f(4)=\dfrac{m+4}{3}=5 \Leftrightarrow m=11(N) \\ \max\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=m+2=5 \Leftrightarrow m=3(N) \end{cases}$.

TH2. Với $m<-1$ suy ra $f'(x)=-\dfrac{m+1}{(x-1)^2}>0;\ \forall x\neq 1$ nên hàm số $f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định. Khi đó $\Rightarrow \begin{cases} \max\limits_{[2;4]} f(x)=f(4)=\dfrac{m+4}{3}=5 \Leftrightarrow m=11 \\ \min\limits_{[2;4]} f(x)=f(2)=m+2=5 \Leftrightarrow m=3 \end{cases}$ (loại).

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau



a) $\min\limits_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=0$.

b) $\max\limits_{\left[-1;\frac{3}{2}\right]} y=4$.

c) Số giá trị nguyên của m để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm với mọi $x\in\left[-1;\dfrac{3}{2}\right)$ là 5.

d) Số giá trị nguyên âm của m để bất phương trình $f(x)\le m+7$ có nghiệm với mọi $x\in\left[-1;\dfrac{3}{2}\right]$ là 4.

Lời giải

a) Sai.

b) Đúng.

c) Sai. Vì để phương trình $f(x)=m$ có nghiệm với mọi $x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right)\Rightarrow -1\le m<4$. Suy ra có 4 giá trị nguyên là $m\in\{-1;0;1;2;3\}$

d) Sai.

Vì để bất phương trình $f(x)\le m+7$ có nghiệm với mọi $x\in\left[-1;\frac{3}{2}\right]$

$\Rightarrow \underset{\left[-1;\frac{3}{2}\right]}{\text{Max}}\, y=4\le m+7\Leftrightarrow m\ge -3\Rightarrow m\in\{-3;-2;-1\}$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên.

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Chọn khẳng định đúng, sai?

a) Hàm số có đúng một cực trị.

b) Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1.

c) Trên $[0;1]$ hàm số đạt nhỏ nhất là -1 tại $x=1$.

d) Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

a) sai vì hàm số có 2 điểm cực trị.

b) sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

b) đúng vì trên $[0;1]$ hàm số đạt nhỏ nhất là -1 tại $x=1$.

d) đúng vì hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 36: Cho hàm số $y=\frac{x+m}{x-1}$ (m là tham số thực) thỏa mãn $\min\limits_{[2;4]} y=3$.

Chọn khẳng định đúng, sai?

a) $y'=\frac{-1-m}{(x-1)^2}$.

b) $\min\limits_{[2;4]} y=3\Rightarrow m=5$.

d) $\max\limits_{[2;4]} y=3\Rightarrow m=5$.

d) $\min\limits_{[2;4]} y + \max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{16}{3} \Rightarrow m = 5$.

Lời giải

a) đúng vì $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

b) đúng vì: $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m>0 \Leftrightarrow m<-1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(2) = \dfrac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (loại)

* TH 2. $-1-m<0 \Leftrightarrow m>-1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra $\min\limits_{[2;4]} f(x) = f(4) = \dfrac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$.

c) sai vì: $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$

* TH 1. $-1-m>0 \Leftrightarrow m<-1$ suy ra y đồng biến trên $[2;4]$ suy ra $\max\limits_{[2;4]} f(x) = f(4) = \dfrac{4+m}{3} = 3 \Leftrightarrow m = 5$ (loại)

* TH 2. $-1-m<0 \Leftrightarrow m>-1$ suy ra y nghịch biến trên $[2;4]$ suy ra. $\max\limits_{[2;4]} f(x) = f(2) = \dfrac{2+m}{1} = 3 \Leftrightarrow m = 1$ (nhận).

d) sai vì ta có $y' = \dfrac{-1-m}{(x-1)^2}$.

Nếu $m = 1 \Rightarrow y = 1, \ \forall x \neq -1$. Không thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Nếu $m < -1 \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên đoạn $[2;4]$.

Khi đó: $\min\limits_{[2;4]} y + \max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(4) = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{2+m}{1} + \dfrac{4+m}{3} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m = 1,5$ (loại).

Nếu $m > -1 \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên đoạn $[1;2]$.

Khi đó: $\min\limits_{[2;4]} y + \max\limits_{[2;4]} y = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow y(2) + y(4) = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow \dfrac{4+m}{3} + \dfrac{2+m}{1} = \dfrac{16}{3} \Leftrightarrow m = 1,5$ (nhận).

Câu 37: Xét tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số $y = \left|x^3 - 3x + m\right|$ trên đoạn $[0;2]$ bằng 3.

Chọn khẳng định đúng, sai?

a) Tồn tại giá trị $m<-2$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Tồn tại giá trị $-2<m<0$ thỏa yêu cầu bài toán.

c) Tồn tại giá trị $0<m<2$ thỏa yêu cầu bài toán.

d) Tồn tại giá trị $m>2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Lời giải

a) sai vì xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$-2+m$	$\nearrow$	$2+m$

Khi $m<-2 \Leftrightarrow 2+m<0$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (loại).

b) đúng vì xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$-2+m$	$\nearrow$	$2+m$

Khi $-2<m<0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2+m>0 \\ m<0 \end{cases}$. Khi đó : $|m-2|=2-m>2>2+m$

$\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=-(-2+m)=2-m$

$2-m=3 \Leftrightarrow m=-1$ (thỏa mãn).

c) đúng vì xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$-2+m$	$\nearrow$	$2+m$

Khi: $0<m<2 \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ -2+m<0 \end{cases}$. Khi đó : $|m-2|=2-m<2<2+m$ $\Rightarrow \max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (thỏa mãn).

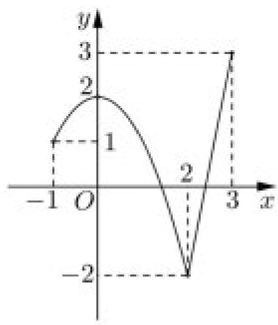
d) sai vì xét hàm số $f(x)=x^3-3x+m$, ta có $f'(x)=3x^2-3$. Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	0		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	m	$\searrow$	$-2+m$	$\nearrow$	$2+m$

Khi: $m>2 \Leftrightarrow -2+m>0$. Khi đó $\max\limits_{[0;2]}|f(x)|=2+m$

$2+m=3 \Leftrightarrow m=1$ (loại).

Câu 38: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau



a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$ là 3.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;3]$ đạt được tại $x=-2$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1;3)$ là -2.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-1;3)$ là 3.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$ là 3 tại $x=3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;3]$ là -2 đạt được tại $x=2$.

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1;3)$ là -2 đạt được tại $x=2$ và giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-1;3)$ không tồn tại.

a) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-1;3]$ là 3

b) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;3]$ là -2 đạt được tại $x=2$.

c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-1;3)$ là -2

d) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-1;3)$ không tồn tại.

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

x	$-\infty$	-4		-3		$+\infty$
y'			$-$	0	$+$	
y'		-8	$\searrow$	-9	$\nearrow$	$+\infty$

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -8.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -9.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là -9.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là $+\infty$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -8 tại $x=-4$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -8 đạt được tại $x=-3$.

Dựa vào đồ thị ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là -9 đạt được tại $x=-3$ và

giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ không tồn tại.

a) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -8.

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-4;3]$ là -9.

c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ là -9.

d) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-4;+\infty)$ không tồn tại.

Câu 40: Cho hàm số $y=x^3-3x^2+m$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Khi $m=1$ thì giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 1.

b) Khi $m=1$ thì giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -3.

c) Nếu giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -1 thì $m=3$.

d) Nếu giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 2 thì $m=2$.

Lời giải

+ Với $m=1$ thì $y=x^3-3x^2+1$ suy ra $y'=3x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\ (n) \\ x=0\ (n) \end{array}\right.$.

Ta có $y(0)=y(3)=1$ và $y(2)=-3$.

Khi đó giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 1 tại $x=0$ hoặc $x=3$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -3 tại $x=2$.

+ Ta có $y = x^3 - 3x^2 + m$ suy ra $y' = 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\ (n) \\ x = 0\ (n) \end{array}\right.$.

Khi đó $y(0) = y(3) = m$ và $y(2) = -4 + m$.

Nếu giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -1 thì $-4 + m = -1 \Leftrightarrow m = 3$.

Nếu giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 2 thì $m = 2$.

a) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 1.

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -3.

c) Đúng: Nếu giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;3]$ là -1 thì $m = 3$.

d) Đúng: Nếu giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;3]$ là 2 thì $m = 2$.

Câu 41: Cho hàm số $y = \dfrac{x - m^2 + m}{x + 1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;\ 1]$ là -2 khi $m = -1$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;\ 1]$ là -2 khi $m = 2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-3;\ -2]$ là 2 khi $m = 1$

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;\ -2]$ là 2 khi $m = 1$

Lời giải

$$y' = \frac{m^2 - m + 1}{(x+1)^2} > 0,\ \forall x \neq -1$$

a) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[0;1]$ là

$$y(1) = \frac{1 - m^2 + m}{2} = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1 + \sqrt{21}}{2} \\ m = \dfrac{1 - \sqrt{21}}{2} \end{array}\right.$$

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;\ 1]$ là

$$y(0) = \frac{0 - m^2 + m}{1} = -2 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 2 \end{array}\right.$$

c) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-3;\ -2]$ là

$$y(-3) = \frac{-3 - m^2 + m}{-2} = 2 \Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

d) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;-2]$ là

$$y(-2)=\frac{-2-m^2+m}{-1}=2\Leftrightarrow m^2-m=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=0\\m=1\end{array}\right..$$

Câu 42: Cho hàm số $y=\frac{x+m^2}{x-1}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[2;\ 3]$ là 2 khi $m=0$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;\ 0]$ là -2 khi $m=2$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;\ 2]$ là 2 khi $m=0$

d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;\ -2]$ là -1 khi $m=7$

Lời giải

$$y'=\frac{-m^2-1}{(x-1)^2}<0,\ \forall x\neq 1$$

a) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[2;3]$ là $y(2)=\frac{2+m^2}{1}=2\Leftrightarrow m^2=0\Leftrightarrow m=0$

b) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-1;\ 0]$ là $y(0)=\frac{m^2}{-1}=-2\Leftrightarrow m^2=2\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$

c) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[0;\ 2]$ là $y(2)=\frac{2+m^2}{1}=2\Leftrightarrow m^2=0\Leftrightarrow m=0$

d) Sai: Giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-3;\ -2]$ là

$$y(-3)=\frac{-3+m^2}{-4}=-1\Leftrightarrow m^2=7\Leftrightarrow m=\pm\sqrt{7}.$$

Câu 43: Cho hàm số $y=f(x)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\frac{m^2x-1}{x+2}$ trên đoạn $[1;3]$ bằng 1 khi $m=\sqrt{2}$

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0 khi $m=-4$

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^3-3x^2-m$ trên $[-1;1]$ là -1 khi $m=-4$

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $y=x^3-3ax^2+a-1$ trên đoạn $[-1;a]$ với $(a>0)$ bằng 10, khi $a=11$

Lời giải

a) Đúng:

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$. Ta có: $y'=\frac{2m^2+1}{(x+2)^2}>0,\forall x\neq -2$.

Hàm số đồng biến trên đoạn $[1;3]$ nên $\max\limits_{[1;3]}y=y(3)\Leftrightarrow\frac{3m^2-1}{5}=1\Leftrightarrow m=\sqrt{2}$.

b) Sai: Xét hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + m$ trên đoạn $[-1;1]$, ta có

$y' = -3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = -2 \notin [-1;1] \end{array}\right.$ Mà $\begin{cases} y'(-1) = \text{m} - 2 \\ y'(0) = \text{m} \\ y'(1) = \text{m} - 4 \end{cases}$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y = -4 + m = 0 \Leftrightarrow m = 4$.

c) Đúng: Xét $[-1;1]$ có $y' = 6x^2 - 6x$. $y' = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;1] \\ x = 1 \in [-1;1] \end{array}\right.$.

Khi đó $y(-1) = -5 - m$; $y(0) = -m$; $y(1) = -1 - m$

Ta thấy $-5 - m < -1 - m < -m$ nên $\min\limits_{[-1;1]} y = -5 - m$.

Theo bài ra ta có $\min\limits_{[-1;1]} y = -1$ nên $-5 - m = -1 \Leftrightarrow m = -4$.

d) Đúng: $y = x^3 - 3ax^2 + a - 1$, xét $x \in [-1;a]$. $\Rightarrow y' = 3x^2 - 6ax$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6ax = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \in [-1;a] \\ x = 2a \notin [-1;a] \end{array}\right.$.

Với $a > 0$ ta có bảng biến thiên

x	-1		0		a
y'		$+$	0	$-$	
y	$-2-2a$	$\nearrow$	$-1+a$	$\searrow$	$-2a^3+a-1$

Suy ra $\max\limits_{[-1;a]} y = y(0) = a - 1$.

$\Rightarrow a - 1 = 10 \Leftrightarrow a = 11$.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x) = -x^3 - 3x^2 + m$ (m là tham số).

a) Khi $m = 3$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$ là 3.

b) Khi $m = 3$ thì $\max\limits_{[1;2]} f(x) + \min\limits_{[1;2]} f(x) = -18$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0 khi $m = 1$.

d) Có hai giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng m^2.

Lời giải

a) Khi $m = 3$ giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[1;2]$ là 3.

Xét hàm số $y=-x^3-3x^2+m$ trên đoạn $[1;2]$, ta có

$$y'=-3x^2-6x;\ \ y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[1;2] \\ x=-2\notin[1;2] \end{array}\right.$$

Khi $m=3$ ta có $y=-x^3-3x^2+3$.

Mà $y(1)=-1, y(0)=3, y(2)=-17$

Do đó $\min\limits_{[1;2]} y=y(2)=-17$.

b) Khi $m=3$ thì $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=-18$.

Khi $m=3$: $\max\limits_{[1;2]} f(x)+\min\limits_{[1;2]} f(x)=y(1)+y(2)=-18$.

c) Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 0 khi $m=1$.

Ta có: $y'(-1)=m-2, y'(0)=m, y'(1)=m-4$

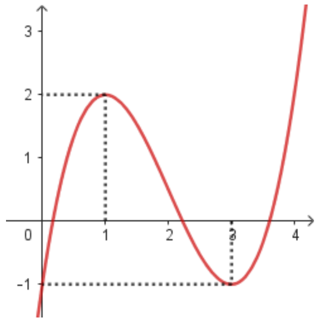
Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y=m-4=0 \Leftrightarrow m=4$.

d) Có hai giá trị thực của tham số m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng m^2.

Ta có: $y'(-1)=m-2, y'(0)=m, y'(1)=m-4$

Do đó $\min\limits_{[-1;1]} y=m-4=m^2 \Leftrightarrow m^2-m+4=0 \Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Câu 45: Cho hàm số $f(x)$ là đa thức bậc 3 có đồ thị hàm số như hình vẽ.



a. GTNN của hàm số $y=f(x)+m$ trên đoạn $[1,3]$ với $m=0$ bằng -1

b. GTLN của hàm số $y=f(x)+m\,(m>0)$ trên đoạn $[1,3]$ bằng $2-m$

c. GTLN của hàm số $y=\left|f(x+2m)+1\right|\,(m>0)$ trên đoạn $[1-2m,3-2m]$ bằng 3

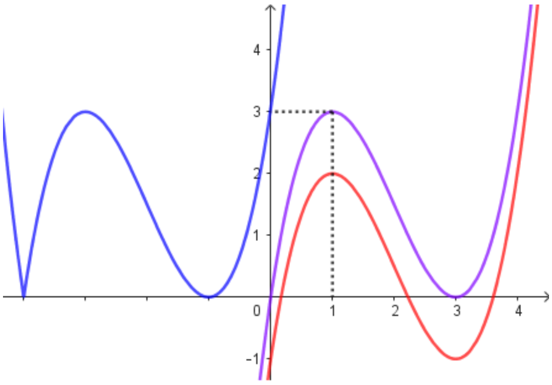
d. Hàm số $g(x)=f\left(2x^3+2x-1\right)+m$ đạt GTLN trên đoạn $[0;1]$ bằng 2020 khi $m=2022$

Lời giải

a. Đúng: Với $m=0$ khi đó hàm số $y=f(x)+m=f(x)$, dựa vào đồ thị hàm số $f(x)$ ta thấy $\min_{[1;3]} f(x)=-1$.

b. Sai: Dịch chuyển đồ thị hàm số $f(x)$ lên trên theo trục Oy một đoạn $|m|$ đơn vị ta được đồ thị hàm số $y=f(x)+m$. Khi đó $\max_{[1;3]}\left(f(x)+m\right)=2+m$.

c. Đúng: Ta có đồ thị hàm số $y=\left|f(x+2m)+1\right|\ (m>0)$ được biểu diễn như sau:



Do đó GTLN của hàm số $y=\left|f(x+2m)+1\right|\ (m>0)$ trên đoạn $[1-2m,3-2m]$ bằng 3.

d. Sai: Đặt $u=2x^3+2x-2 \Rightarrow u'=6x^2+2>0$ với $\forall x$

Đặt $u=2x^3+2x-2 \Rightarrow u'=6x^2+2>0$ với $\forall x$ $\Rightarrow x\in[0;1] \Leftrightarrow u\in[-2;2]$

Xét $g(x)=f(\mathrm{u})+m$ với $u\in[-2;2] \Rightarrow g'(x)=u'.f'(u)$

Xét $g'(x)=0 \Leftrightarrow u'.f'(u)=0 \Leftrightarrow f'(u)=0 \Leftrightarrow u=2$

BBT:

u	-2		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	↗		$2+m$		↘

$\Rightarrow 2+m=2020 \Leftrightarrow m=2018$.

Câu 46: Cho hàm số $y=x^3+3x^2+m-1$.

a. Đạo hàm của hàm số $f(x)$ là $f'(x)=3x^2+6x+m$.

b. Hàm số đồng biến trên $(0;2)$

c. $\max\limits_{[0;2]} g(x)\ge 9$.

d. Để giá trị lớn nhất của hàm số $g\left(x\right)=\left|x^3+3x^2+m-1\right|$ trên đoạn $\left[0;2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất thì $m=-9$.

Lời giải

Ta có:

a. Sai: $f(x)=x^3+3x^2 \Rightarrow f'(x)=3x^2+6x+m$

b. Đúng Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

=> Hàm số đồng biến trên $\left(0;2\right)$

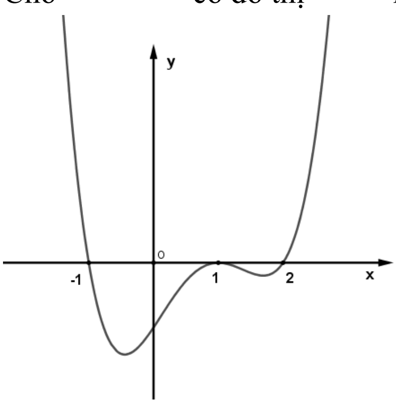
c. Sai Ta có $\max\limits_{[0;2]} g(x)=max\left\{\left|m-1\right|;\left|m+19\right|\right\}$

$\geq \dfrac{\left|m-1\right|+\left|m+19\right|}{2} \geq \dfrac{\left|1-m+m+19\right|}{2}=10$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

d. Đúng $\begin{cases}\left|m-1\right|=\left|m+19\right| \\ \left(1-m\right)\left(m+19\right)\geq 0\end{cases} \Rightarrow m=-9$ (thoả mãn).

Câu 47: Cho $y=f\left(x\right)$ có đồ thị $f'\left(x\right)$ như hình vẽ:



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng $f\left(2\right)$.

b. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f\left(x\right)$ trên đoạn $\left[1;3\right]$ bằng $f\left(1\right)$.

c. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=f\left(x\right)-x^3$ trên đoạn $\left[-1;2\right]$ bằng $f\left(-1\right)+1$.

d. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng $f(1)-\frac{2}{3}$.

Lời giải

a. Sai: Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có $f'(x)\le 0,\forall x\in[-1;2]$ nên $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)$.

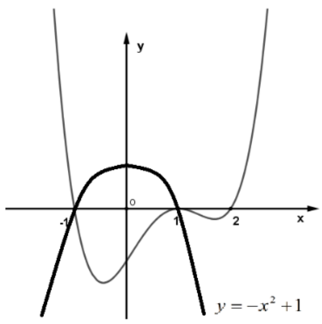
b. Sai: Dựa vào đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta có BBT của hàm số $y=f(x)$ trên $[1;3]$ như sau:

x	1		2		3
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

Dựa vào BBT ta thấy giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[1;3]$ bằng $f(2)$.

c. Đúng: $y'=f'(x)-3x^2\le 0,\forall x\in[-1;2]$ nên $\max\limits_{[-1;2]} y=y(-1)=f(-1)+1$.

d. Đúng:



$g'(x)=f'(x)+x^2-1$

* $g'(x)=0\Rightarrow f'(x)=1-x^2\ (*)$

Dựa vào đồ thị trên $(*)$ xảy ra: $\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$. Ta có bảng biến thiên:

x	-1		1		2
$g'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)=f(x)+\frac{1}{3}x^3-x$	$f(-1)+\frac{2}{3}$	↘	$f(1)-\frac{2}{3}$	↗	$f(2)+\frac{2}{3}$

$\Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-1;2]$ bằng $f(1)-\frac{2}{3}$

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=x^3-2x^2+x-6$ trên khoảng $(-1:1)$.

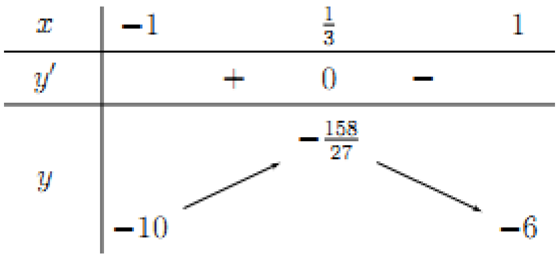
Lời giải

Trả lời: $-\frac{158}{27}$

Tập xác định: $\mathcal{D}=\mathbb{R}$, ta chỉ xét trên khoảng $(-1;1)$.

Đạo hàm: $y^{'}=3x^2-4x+1; y^{'}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên:



Từ bảng biến thiên ta có $\max_{(-1;1)} y=-\frac{158}{27}=y\left(\frac{1}{3}\right)$.

Câu 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)=\frac{x}{4+x^2}$ trên $\mathbb{R}$.

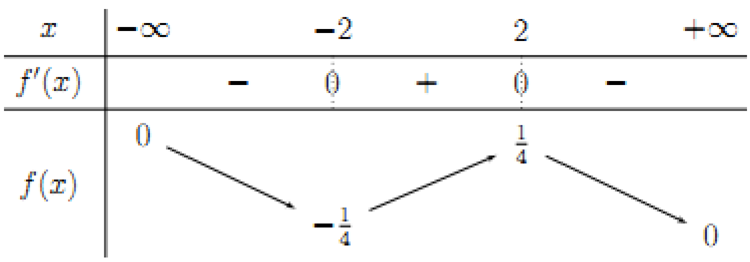
Lời giải

Trả lời: $\frac{1}{4}$

Tập xác định: $\mathcal{D}=\mathbb{R}$, ta chỉ xét trên nửa khoảng $\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Đạo hàm: $f^{'}(x)=x^2(1-x)(3-5x); f^{'}(x)=0 \Leftrightarrow x=0, x=1, x=\frac{3}{5}$.

Bảng biến thiên:



V?y $\min_{\mathbb{R}} f(x) = f(-2) = -\dfrac{1}{4}$ và $\max_{\mathbb{R}} f(x) = f(2) = \dfrac{1}{4}$.

Câu 3: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m = \sqrt{2}$. **B.** $m = 0$. **C.** $m = 2$. **D.** $m = 1$.

Lời giải

Trả lời: $\sqrt{2}$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Đạo hàm $f'(x) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{x^2}}{2\sqrt{x + \dfrac{1}{x}}} = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2\sqrt{x + \dfrac{1}{x}}} \longrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \notin (0; +\infty) \\ x = 1 \in (0; +\infty) \end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên ta tìm được giá trị nhỏ nhất của hàm số là $f(1) = \sqrt{2}$.

Câu 4: Tìm giá trị nhỏ nhất m của hàm số $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$ trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. $m = 1$. **B.** $m = 2$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 4$.

Lời giải.

Trả lời: 3

Đạo hàm $f'(x) = 2x - \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{2(x^3 - 1)}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \in (0; +\infty)$.

Lập bảng biến thiên & dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\min\limits_{(0;+\infty)} f(x) = f(1) = 3$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \dfrac{mx - 1}{x + m}$ (với m là số thực). Tìm m để hàm số đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[1; 4]$ bằng 1.

Lời giải

Trả lời: $\dfrac{5}{3}$

Tập xác định của hàm số: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \dfrac{m^2+1}{(x+m)^2} > 0, \forall x \in \mathcal{D}$ nên hàm số luôn đồng biến trên tìng khoảng xác định của nó.

Do đó hàm số dạt giá trị lớn nhất (nếu có) tại $x = 4$, tức là

$\dfrac{4m-1}{4+m} = 1 \Leftrightarrow 4m-1 = 4+m \Leftrightarrow m = \dfrac{5}{3}$.

Thử lại ta thấy $m = \dfrac{5}{3}$ là giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = m\sqrt{x-1}$ (m là tham số thực khác 0). Gọi m_1, m_2 là hai giá trị của m thỏa mãn $\min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = m^2 - 10$. Tính $m_1 + m_2$

Lời giải.

Trả lời: 3

Với mọi $x \in [2;5]$ có $f'(x) = \dfrac{m}{2\sqrt{x-1}}$. Ta thấy dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào dấu của m

$\forall m \neq 0$ thì $f(x)$ đơn điệu trên $[2;5] \Rightarrow \min\limits_{[2;5]} f(x) + \max\limits_{[2;5]} f(x) = f(2) + f(5) = m + 2m$

Từ giả thiết ta được $m^2 - 10 = m + 2m \Leftrightarrow m^2 - 3m - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 5 \\ m = -2 \end{array}\right.$. Vậy $m_1 + m_2 = 3$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = x^3 + (m^2+1)x + m^2 - 2$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị thực dương m để hàm số có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0;2]$ bằng 7.

A. $m = \pm 1$. **B.** $m = \pm\sqrt{7}$. **C.** $m = \pm\sqrt{2}$. **D.** $m = \pm 3$.

Lời giải

Trả lời: 3

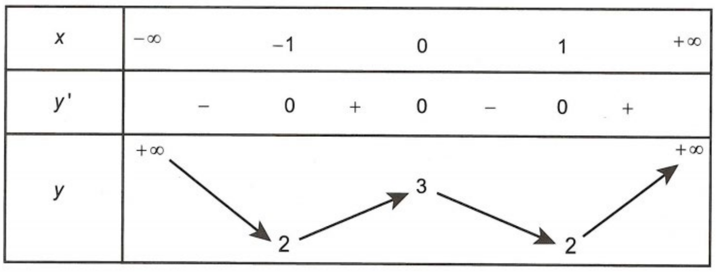
Đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + m^2 + 1 > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên $[0;2] \Rightarrow \min\limits_{[0;2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2$.

Theo bài ra: $\min\limits_{[0;2]} f(x) = 7 \Leftrightarrow m^2 - 2 = 7 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Ta chọn $m = 3$

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên sau



Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x+3)$ trên đoạn $[0;2]$ là

A. 64. **B.** 65. **C.** 66. **D.** 67.

Lời giải

Trả lời: 66

Hàm số có dạng $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Từ bảng biến thiên ta có

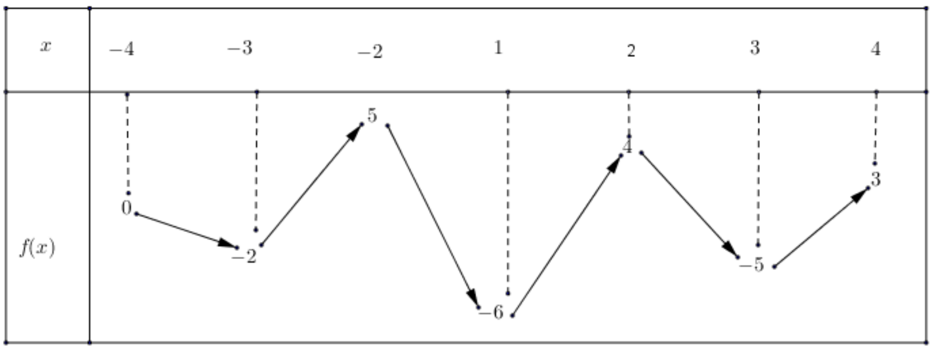
$$\begin{cases} f(0) = 3 \\ f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ a+b+c = 2 \\ 4a + 2b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 3 \\ b = -2 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^4 - 2x^2 + 3.$$

Đặt $t = x+3, x \in [0;2] \Leftrightarrow t \in [3;5]$.

Dựa vào đồ thị, hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên đoạn $[3;5]$.

Do đó $\min\limits_{[0;2]} f(x+3) = \min\limits_{[3;5]} f(t) = f(3) = 66$.

Câu 9: Cho hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m thuộc đoạn $[-4;4]$ để hàm số $g(x) = \left|f\left(x^3+2x\right)+3f(m)\right|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải

Trả lời: 11

Cách 1:

Đặt $t = f\left(x^3+2x\right)$. Vì $x \in [-1;1]$ nên $t \in [-6;5]$. Khi đó, $g(x) = |t+n|$ với $n = 3f(m)$.

Do đó, $\max\limits_{[-1;1]} g(x) = \max\{|n+5|;|n-6|\} = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} |n+5| = 8 \\ |n+5| \geq |n-6| \end{cases} \Leftrightarrow n = 3 \\ \begin{cases} |n-6| = 8 \\ |n-6| > |n+5| \end{cases} \Leftrightarrow n = -2 \end{array}\right.$

Với $n = 3 \Leftrightarrow 3.f(m) = 3 \Leftrightarrow f(m) = 1$, suy ra có 5 giá trị của m.

Với $n = -2 \Leftrightarrow 3.f(m) = -2 \Leftrightarrow f(m) = \frac{-2}{3}$, suy ra có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Cách 2:

Vì $x \in [-1;1]$ nên $-3 \leq x^3 + 3x \leq 3 \Rightarrow -6 \leq f(x^3+3x) \leq 5$..

Ta có : $\left|f(x^3+3x) + 3f(m)\right| \leq 8, \forall x \in [-1;1] \Leftrightarrow -8 \leq f(x^3+3x) + 3f(m) \leq 8, \forall x \in [-1;1]$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x^3+3x) \leq 8 - 3f(m) \\ -8 - 3f(m) \leq f(x^3+3x) \end{cases} \forall x \in [-1;1] \Rightarrow \begin{cases} 5 \leq 8 - 3f(m) \\ -8 - 3f(m) \leq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(m) \leq 1 \\ f(m) \geq -\frac{2}{3} \end{cases}.$

Do đó $\max\left|f(x^3+3x) + 3f(m)\right| = 8 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(m) = 1 \\ f(m) = -\frac{2}{3} \end{array}\right..$

Với $f(m) = 1$, có 5 giá trị của m. Với $f(m) = \frac{-2}{3}$, có 6 giá trị của m.

Vậy có 11 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 10: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $F(x) = \frac{1}{40}x^2(30-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất là ?.

Lời giải

Trả lời: 20

Xét hàm số : $F(x) = \frac{1}{40}x^2(30-x) \qquad (x > 0)$.

$\Rightarrow F'(x) = \frac{1}{40}.2x(30-x) - \frac{1}{40}x^2 = \frac{1}{40}(-3x^2 + 60x)$.

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{40}(-3x^2 + 60x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 20 \end{array}\right.$.

BBT.

x	0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	
y		$\nearrow$	25	$\searrow$	

.

Dựa vào BBT ta thấy để huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân là $x = 20$.

Câu 11: Sau khi phát hiện ra dịch bệnh vi rút Zika, các chuyên gia sở y tế TP.HCM ước tính số người nhiễm bệnh kể từ khi xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 15t^2 - t^3$. Ta xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t. Tốc độ truyền bệnh sẽ lớn nhất vào ngày thứ bao nhiêu?.

Lời giải

Trả lời: 5

Ta có: $f(t) = 15t^2 - t^3$.

$f'(t) = 30t - 3t^2 = -3(t-5)^2 + 75 \le 75$.

Suy ra $f'(t)_{\max} = 75 \Leftrightarrow t = 5$.

Câu 12: Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng 8 m^3, thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là $100000/\text{m}^2$, giá tôn làm thành xung quanh thùng là $50000/\text{m}^2$. Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy là bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?.

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi cạnh đáy và cạnh bên của thùng tôn là a và b (điều kiện: $a > 0$ và $b > 0$).

Ta có thể tích thùng tôn là: $V = a^2 b = 8$. Suy ra: $b = \dfrac{8}{a^2}$.

Chi phí để sản xuất thùng tôn là: $4ab.50000 + 100000a^2 = \dfrac{1600000}{a} + 100000a^2$.

Khảo sát hàm $y = \dfrac{1600000}{a} + 100000a^2$ với $a > 0$.

Suy ra: $y' = -\dfrac{1600000}{a^2} + 200000a = 0 \Leftrightarrow a = 2$. Khi đó, ta có bảng biến thiên sau:

Dựa vào bảng biến thiên ta có $y_{\min} \Leftrightarrow a = 2$.

Câu 13: Người ta muốn mạ vàng cho một cái hộp có đáy hình vuông không nắp có thể tích là 4 lít. Tìm kích thước của hộp đó để lượng vàng dùng mạ là ít nhất. Giả sử độ dày của lớp mạ tại mọi nơi trên mặt ngoài hộp là như nhau……………………………………

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi x là cạnh của đáy hộp.

h là chiều cao của hộp.

$S(x)$ là diện tích phần hộp cần mạ.

Khi đó, khối lượng vàng dùng mạ tỉ lệ thuận với S(x).

Ta có: $S(x) = x^2 + 4xh(1)$; $V = x^2h = 4 \Rightarrow h = 4/x^2\,(2)$..

Từ (1) và (2), ta có $S(x) = x^2 + \frac{16}{x}$.

Dựa vào BBT, ta có $S(x)$ đạt GTNN khi $x = 2$.

Câu 14: Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 20 USD/người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm 1 USD/người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi 1 USD/người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình.Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất?……………………………………………

Lời giải

Trả lời: 14

Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x$ $(x + 20 > 0)$

Số khách là: $1000 - 100x$

Tổng thu nhập

$f\left(x\right)=\left(20+x.1+2\right)\left(1000-100x\right)=\left(22+x\right)\left(1000-100x\right)=-100x^2-1200x+22000$

Bảng biến thiên

x	-20		-6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-6)$	$\searrow$	$-\infty$

$\max\limits_{(-20;+\infty)} f\left(x\right)=f\left(-6\right)$.Suy ra giá vé là: $x+20=20-6=14$ USD

Câu 15: Một người bán buôn Thanh Long Đỏ ở Lập Thạch – Vĩnh Phúc nhận thấy rằng: Nếu bán với giá 20000 nghìn /kg thì mỗi tuần có 90 khách đến mua và mỗi khách mua trung bình 60 kg. Cứ tăng giá 2000 nghìn /kg thì khách mua hàng tuần giảm đi 1 và khi đó khách lại mua ít hơn mức trung bình 5 kg, và như vậy cứ giảm giá 2000 nghìn /kg thì số khách mua hàng tuần tăng thêm 1 và khi đó khách lại mua nhiều hơnmức trung bình 5 kg. Hỏi người đó phải bán với giá mỗi kg là bao nhiêu để lợi nhuận thu được hàng tuần là lớn nhất, biết rằng người đó phải nộp tổng các loại thuế là 2200 nghìn /kg. (Kết quả làm tròn đến hàng nghìn)...............................

Lời giải

Trả lời: 22000

Gọi $2000x$ nghìn /kg là mức giá thay đổi tăng hoặc giảm so với giá bán bình quân.

Giá bán sau khi thay đổi là $20000+2000x$ nghìn /kg.

Số lượng người mua sau khi thay đổi giá là $90-x$.

Khối lượng khách mua trung bình sau khi giảm giá là $60-5x$ kg.

Số tiền thuế phải nộp sau khi thay đổi giá: $2200\left(90-x\right)\left(60-5x\right)$.

Số tiền thu được sau khi thay đổi giá là

$T\left(x\right)=\left(90-x\right)\left(60-5x\right)\left(20000+2000x\right)-2200\left(90-x\right)\left(60-5x\right)$

$=\left(17800+2000x\right)\left(90-x\right)\left(60-5x\right)=\left(10x^3-931x^2+1722x+96120\right).1000$.

Điều kiện $\begin{cases} x\le 90 \\ x\le 12 \\ x\ge 8,9 \end{cases} \Leftrightarrow 8,9\le x\le 12$.

Ta có $T'\left(x\right)=\left(30x^2-1862x+1722\right).1000$.

$T'\left(x\right)=0\Leftrightarrow 15x^2-931x+861=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\approx 0,94\left(N\right) \\ x\approx 61,13\left(L\right) \end{array}\right.$.

$T\left(\frac{89}{10}\right)=T(12)=0$, $T(0,94)=96924000$

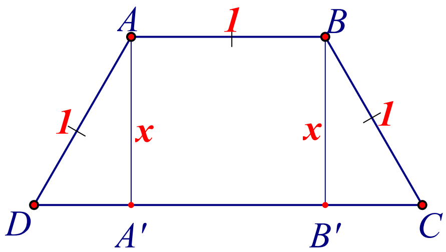
Do đó $x \approx 1$ thì lợi nhuận cao nhất.

Do đó giá bán tốt nhất là 22000 nghìn /kg .

Câu 16: Cho hình thang cân có độ dài đáy nhỏ và hai cạnh bên đều bằng 1 mét. Khi đó hình thang đã cho có diện tích lớn nhất bằng?.

Lời giải

Trả lời: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$



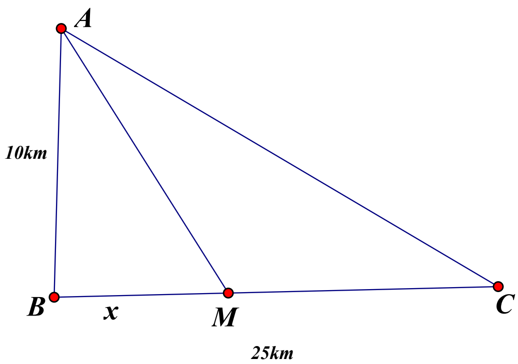
Kí hiệu x là độ dài đường cao suy ra $0<x\le 1$. Tính được đáy lớn bằng $1+2\sqrt{1-x^2}$.

Diện tích hình thang $S=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)x$. Xét hàm số $f(x)=\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)x$ trên $(0;1]$.

Ta có: $f'(x)=\frac{-2x^2+1+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Lập bảng biến thiên. Suy ra $\max\limits_{(0;1]} f(x)=f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 17: Nhà của ba bạn A, B, C nằm ở ba vị trí tạo thành một tam giác vuông tại B như hình vẽ, biết $AB=10$ km, $BC=25$ km và ba bạn tổ chức họp mặt tại nhà bạn C. Bạn B hẹn chở bạn A tại vị trí M trên đoạn đường BC. Giả sử luôn có xe buýt đi thẳng từ A đến M. Từ nhà bạn A đi xe buýt thẳng đến điểm hẹn M với tốc độ 30 km/h và từ M hai bạn A, B di chuyển đến nhà bạn C theo đoạn đường MC bằng xe máy với vận tốc 50 km/h . Hỏi $5MB+3MC$ bằng bao nhiêu km để bạn A đến nhà bạn C nhanh nhất?.



Lời giải

Trả lời: $\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Đặt $BM = x$, $0 < x < 25$.

Ta có: $AM = \sqrt{100 + x^2}$; $MC = 25 - x$.

Thời gian bạn A đi từ nhà đến nhà bạn C là: $T = \frac{\sqrt{100+x^2}}{30} + \frac{(25-x)}{50}$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{100+x^2}}{30} + \frac{(25-x)}{50}$, với $0 < x < 25$.

Ta có $f'(x) = \frac{1}{30}\frac{x}{\sqrt{100+x^2}} - \frac{1}{50}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15}{2}$ (do $x > 0$).

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{15}{2}$.

Do đó $5MB + 3MC = 5.\frac{15}{2} + 3.\frac{35}{2} = 90$.

Câu 18: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta cần xác định một ví trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB. Tính khoảng cách AD để số tiền chi phí thấp nhất, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là $100.000.000$ đồng và dưới nước là $260.000.000$ đồng..............................

Lời giải

Trả lời: $6,5$

Đặt $AD = x$ km, $x > 0$. $CD = 9 - x$; $BD = \sqrt{36 + (9-x)^2}$

Giá thành lắp đặt là: $100.10^6 x + \sqrt{36+(9-x)^2}.260.10^6 = 10^7\left[10x + 26\sqrt{36+(9-x)^2}\right]$

Xét hàm số $f(x) = 10x + \sqrt{36+(9-x)^2}.26$ $(0 < x < 9)$

$f'(x) = 10 - 26.\frac{9-x}{\sqrt{36+(9-x)^2}} = 0 \Leftrightarrow 10\sqrt{36+(9-x)^2} - 26(9-x) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le 9 \\ -576x^2 + 10368x - 43056 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{13}{2}$.

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên $(0;9)$ ta thấy hàm số đạy giá trị nhỏ nhất khi $x=\frac{13}{2}$.

Vậy $AD=6.5$ km .

Câu 19: Một sợi dây kim loại dài 60cm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a, đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn đường kính r. Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn là nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ là?.

Lời giải

Trả lời: 2

Độ dài đoạn dây bằng 60cm, cạnh hình vuông bằng a, bán kính đường tròn bằng r nên ta có: $4a+2\pi r=60 \Leftrightarrow r=\frac{30-2a}{\pi}(1)$.

Gọi S là tổng diện tích của hình vuông và hình tròn, suy ra $S=a^2+\pi r^2(2)$.

Thay (1) vào (2) ta được $S=a^2+\frac{(30-2a)^2}{\pi}$.

Khi đó $S'=2a-\frac{4(30-2a)}{\pi}=\frac{(2\pi+8)a-120}{\pi}$.

Cho $S'=0 \Leftrightarrow a=\frac{60}{\pi+4}$.

Bảng biến thiên.

x	0		$\frac{60}{\pi+4}$		60
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy S nhỏ nhất khi $a=\frac{60}{\pi+4} \Rightarrow r=\frac{30}{\pi+4}$. Vậy $\frac{a}{r}=2$.

BÀI 3: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

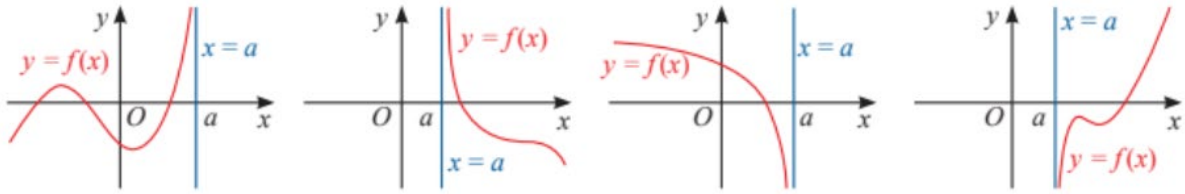
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đúnng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như Hình 2.



a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Hình 2

Ví dụ 1. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ b) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty; \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = -1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x^2-1} = -\infty; \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

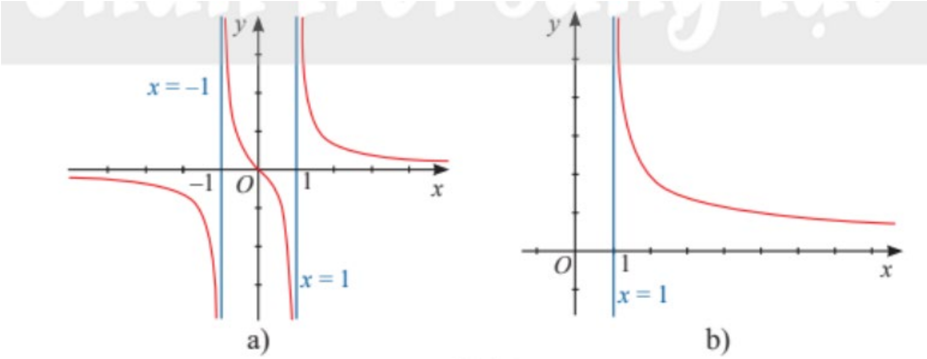
b) Tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{\sqrt{x-1}} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chú ý:

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x^2-1}$ cùng với hai tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = -1$ của nó được thể hiện trong Hình 3a.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{\sqrt{x-1}}$ cùng với tiệm cận đứng $x = 1$ của nó được thể hiện trong Hình 3b.



Hình 3

2. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y=m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=m$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$.

Đường thẳng $y=m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$ được minh hoạ như Hình 5 .

Hình 5

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$.

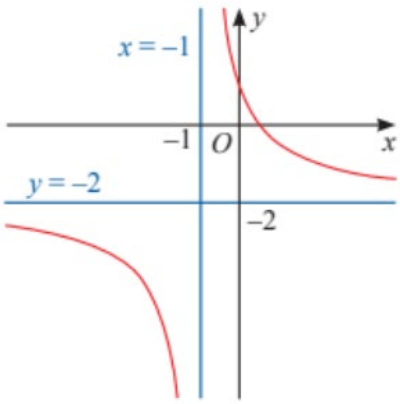
Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=-2; \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}}=-2$.

Vậy đường thẳng $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-2x+1}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y=-2$ và tiệm cận đứng $x=-1$ của nó được thể hiện trong Hình 6 .

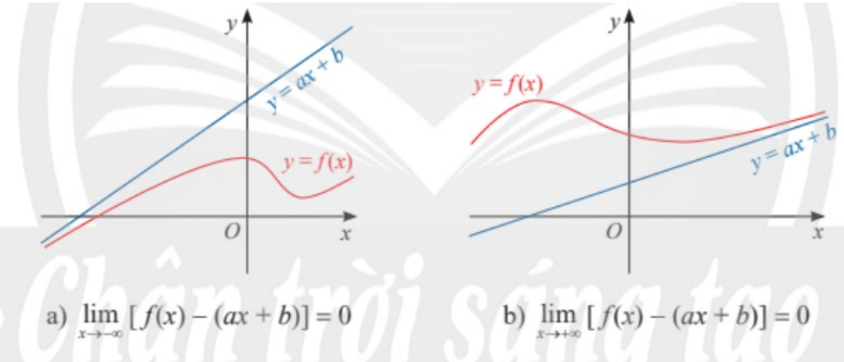


Hình 6

3. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là đuoòng tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Đường thẳng $y = ax + b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như Hình 8 .



Hình 8

Ví dụ 3. Chứng minh rằng đường thẳng $y = x - 2$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x+1}$.

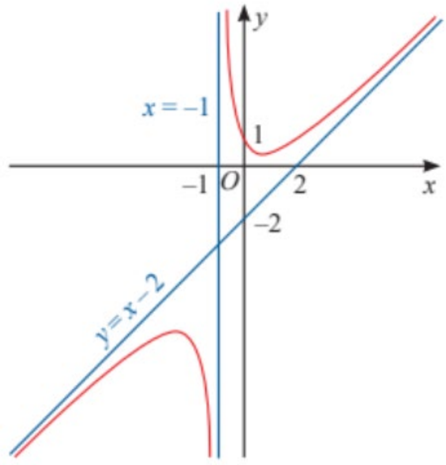
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{3}{x+1} = 0; \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3}{x+1} = 0$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 2$.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = f(x) = x - 2 + \dfrac{3}{x+1}$ cùng tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận xiên $y = x - 2$ của nó được thể hiện trong Hình 9.



Hình 9

Nhận xét:

a) Trong trường hợp tổng quát, có thể tìm các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y=ax+b$ theo công thức như sau: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]$ hoặc

$a=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}, b=\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-ax]$.

b) Khi $a=0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=b$.

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

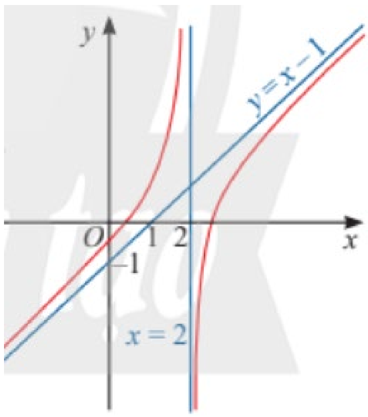
Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+1}{x^2-2x}=1$;

$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3x+1}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+1}{x-2}=-1.$

Ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=1; \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-1$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-1$.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-3x+1}{x-2}$ cùng với tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận xiên $y=x-1$ của nó được thể hiện trong Hình 10.



Hình 10

Ví dụ 5. Trong Hình 11, đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y=55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimét. Chứng minh rằng $y=55-\frac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.

Hình 11

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}\right)-\left(55-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2+144}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-144}{x+\sqrt{x^2+144}}\right)=0.$

Tương tự ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}\right)-\left(55-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$.

Do đó $y=55-\frac{1}{2}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

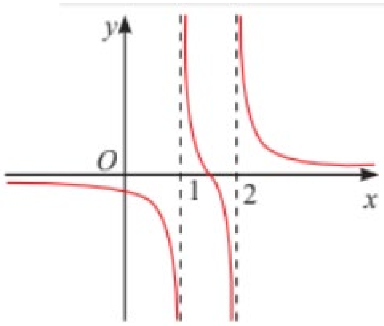
1. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số sau:

a) $y=\frac{4x-5}{2x-3}$; b) $y=\frac{-2x+7}{4x-3}$; c) $y=\frac{5x}{3x-7}$.

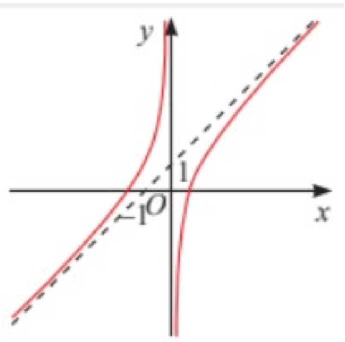
2. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a) $y=\frac{x^2+2}{2x-4}$; b) $y=\frac{2x^2-3x-6}{x+2}$; c) $y=\frac{2x^2+9x+11}{2x+5}$.

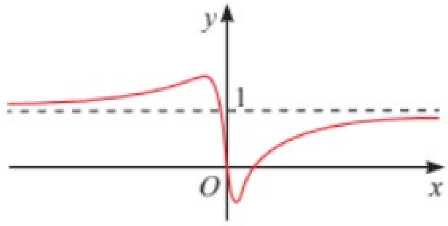
3. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số sau:



a) $y=\dfrac{2x-3}{5x^2-15x+10}$



b) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$



c) $y=\dfrac{16x^2-8x}{16x^2+1}$

4. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t\ge 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

(Theo: www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc)

5. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khối lượng hạt $m=m(v)=\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$ trong ⊘ (trang 19).

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ

Phương pháp: Xét hàm phân thức trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức của x, ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Tiệm cận đứng $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Nếu $\begin{cases}P(x_0)\ne 0\\ Q(x_0)=0\end{cases}$ thì đường thẳng $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

2. Tiệm cân ngang

- Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành.
- Nếu bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$, trong đó a,b lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của $P(x), Q(x)$.
- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang.

3. Tiệm cận xiên

- Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn hay bằng bậc của $Q(x)$ hoặc bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ từ hai bậc trở lên thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận xiên .
- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ một bậc và $P(x)$ không chia hết cho $Q(x)$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên và ta tìm tiệm cận xiên bằng cách chia $P(x)$ cho $Q(x)$ và viết $f(x)=ax+b+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ trong đó $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{R(x)}{Q(x)}=0$. Suy ra đường thẳng $y=ax+b$ là đường tiệm cận

xiên của đồ thị hàm số.

I. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a) y=\frac{2x+1}{x+2};$ $b) y=\frac{3-4x}{x-1};$ $c) y=\frac{x}{1-2x};$ $d) y=\frac{-4}{x+6}.$

Ví dụ 2. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a) y=2x+1-\frac{1}{x+2};$ $b) y=\frac{x^2-3x+4}{2x+1}.$

Ví dụ 3. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a)\ y=\frac{x^2+2x+3}{x^2-4};$ $b) y=\frac{3x}{x^3+27};$ $c) y=\frac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}.$

Ví dụ 4. Tùy theo giá trị m, hãy tìm tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{mx^3-1}$.

II. Bài tập tự luyện

BT 1. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a) y=\frac{x-2}{3x+2};$ $b) y=\frac{-2x-2}{x+3};$ $c) y=\frac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}.$

BT 2. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a) y=x+2-\frac{1}{x-3};$ $b)\ y=\frac{x+2}{x^2-1};$ $c) y=\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}.$

BT 3. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a) y=\frac{2x^2+5x+1}{x^2+2x+4};$ $b) y=\frac{x^2-x+4}{3x^2+4x-7};$ $c) y=\frac{x-1}{(x-3)^2}.$

BT 4. Tuỳ theo m, tìm các đường tiệm cận của $(C): y=\frac{x+2}{x^2+6x+m}$.

Dạng 2. Tiệm cận hàm vô tỉ

Phương pháp: Sử dụng định nghĩa và quy tắc tìm tiệm cận hai phía

Với hàm số $y=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, $A>0$ và $B^2-4AC\neq 0$. Để tìm tiệm cận của đồ thị hàm số này ta tiến hành các bước

- Bước 1: Giả sử $d_1: y=a_1x+b_1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to-\infty$). Ta tìm a_1, b_1 như sau:

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x} = -\sqrt{A};$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{Ax^2+Bx+C}+x\sqrt{A}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{Bx+C}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}-x\sqrt{A}} = \frac{-B}{2\sqrt{A}}.$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ nhất là $d_1 : y = -\sqrt{A}x - \dfrac{B}{2\sqrt{A}}$.

- Bước 2: Giả sử $d_2 : y = a_2x + b_2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to+\infty$). Ta tìm a_1, b_1 như sau:

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x} = \sqrt{A};$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{Ax^2+Bx+C}-x\sqrt{A}\right] = \lim_{x\to+\infty}\frac{Bx+C}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}+x\sqrt{A}} = \frac{B}{2\sqrt{A}}$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ hai là $d_2 : y = -\sqrt{A}x - \dfrac{B}{2\sqrt{A}}$.

Phương pháp này được mở rộng cho lớp hàm số

$y = cx + d \pm \sqrt{\mathrm{Ax}^2 + Bx + C};$ $\qquad y = \sqrt[n]{A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \ldots + A_0}$.

I. Các Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số

$a)\ y = \sqrt{x^2+x+1};$ $\qquad b)\ y = \sqrt{x^2-4x+3}.$

Ví dụ 2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y = x + \sqrt{x^2+1};$ $\qquad b)\ y = x + \sqrt{x^2-1}.$

Ví dụ 3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y = \sqrt{16-x^2};$ $\qquad b)\ y = \sqrt{\sqrt{x^2-x+1}-x}$.

Ví dụ 4. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y = \dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1};$ $\qquad b)\ y = \dfrac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}.$

II. Bài tập tự luyện

***BT 1*.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y = \dfrac{2}{\sqrt{5-x}};$ $\qquad b)\ y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x};$ $\qquad c)\ y = \dfrac{\sqrt{x}}{4-x^2}$.

BT 2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y = \sqrt{x^2-1};$ $\qquad b)\ y = 2x + \sqrt{x^2-1};$ $\qquad c)\ y = \sqrt{x^2+4}.$

BT 3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$; $\quad b)\ y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+1}$; $\quad c)\ y=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$.

BT 4. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y=x+\sqrt{x^2+2x}$; $\quad b)\ y=2x-\sqrt{4x^2-x+2}$.

Dạng 3: Một số bài toán tiệm cận có chứa tham số m

I. Các Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2m-1}{x+m}$ có tiệm cận đứng qua điểm $M(-3;1)$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{3x-4}{x-2}$ có đồ thị (C). Tìm điểm thuộc (C) cách đều 2 đường tiệm cận.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$. Tìm những điểm trên (C) sao cho tổng khoảng cách đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+m}{mx-1}$. Tìm m sao cho đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Ví dụ 5. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Ví dụ 6: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=mx+\dfrac{1}{x}$ (*), m là tham số. Tìm m để hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến đường tiệm cận xiên bằng $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}$ (1), m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}$ (1), m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+(m^2+m+2)x+m^2+3}{x+1}$ (1), m là tham số thực. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường tiệm cận xiên là nhỏ nhất.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = 2x + 1 - \dfrac{1}{x+2}$ (C), m là tham số thực. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc đồ thị, qua M vẽ hai đường thẳng lần lượt song song với hai đường tiệm cận của đồ thị, hai đường thẳng này tạo với đồ thị một hình bình hành. Chứng minh diện tích hình bình hành không đổi.

Ví dụ 11. Cho đường cong $(C_m): y = \dfrac{4(m+1)x^2 - 4mx - (m^3 - m^2 + 2)}{2x - m}$.

Gọi (d_m) là tiệm cận xiên của (C_m). Chứng minh (d_m) tiếp xúc với một Parabol cố định.

II. Bài tập rèn luyện

BT 1. Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{x-2}$ (C).

a) Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M thuộc (C) đến hai đường tiệm cận bằng một số không đổi.

b) Tìm điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang bằng 4 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng.

BT 2. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{2x+m}{x-m}$. Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận. Tìm m để đường tròn tâm I, bán kính $R = 2$ tiếp xúc với $y = -2x + m$.

BT 3. Cho $(C): y = \dfrac{x+7}{x-2}$. Goïi I laø giao ñieåm cuûa hai ñöôøng tieäm caän. Tìm $M \in (d): y = x + 2$ sao cho IM nhỏ nhất.

BT 4. Tìm m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{mx^2 + (3m+1)x - m + 2}{x+1}$ có tiệm cận xiên Δ, biết Δ tiếp xúc với đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $\sqrt{2}$.

BT 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x-1}$ (C).

a) Chứng minh tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến hai đường tiệm cận là không đổi.

b) Chứng minh không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua giao điểm của hai tiệm cận.

BT 6. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{(m+1)x^2 + (2m+1)x + m + 2}{x+1}$.

a) Tìm m để tiệm cận xiên đi qua điểm $M(1;2)$.

b) Tìm m để tiệm cận xiên vuông góc với đường thẳng $d: 3x + 4y - 5 = 0$.

c) Chứng minh rằng giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) luôn thuộc Parabol $(P): y = -x^2$.

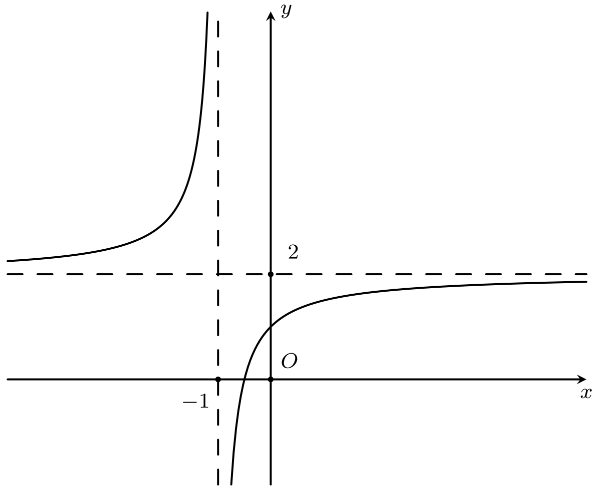
BT 7. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2\cos\alpha + 2x\sin\alpha + 1}{x-2}$. Định α để đường tròn có tâm là gốc tọa độ tiếp xúc với tiệm cận xiên của (C) có bán kính lớn nhất.

BT 8. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 - (3a-1)x + 2a}{x-1}$.

Chứng minh tiệm cận xiên đi qua điểm cố định với mọi a.

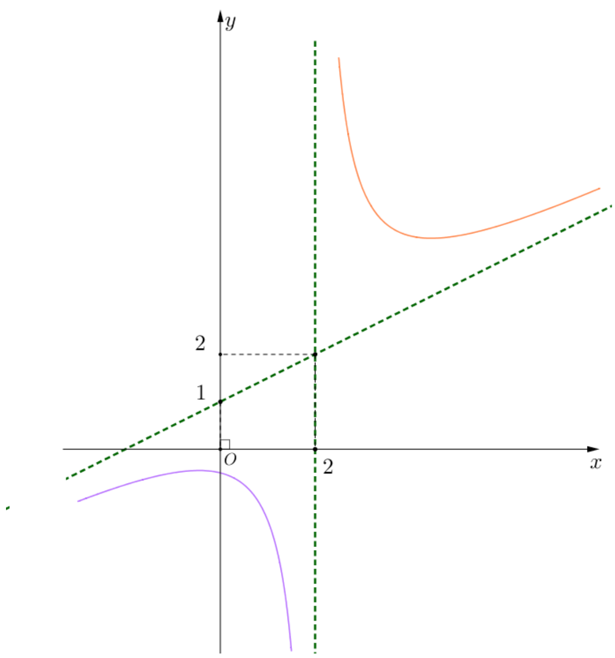
Dạng 4: Dựa vào đồ thị và bảng biến thiên xác định các đường tiệm cận

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là?

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là?

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$+$	
$f(x)$	-1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	3	↗	1

Tìm phương trình đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số?

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	-1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	-1

Tìm phương trình đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số?

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 2: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ là

A. $y=2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=2$. **D.** $y=1$.

Câu 3: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+3x+2}$ là đường thẳng.

A. $x=-2$. **B.** Không có tiệm cận đứng.
C. $x=-1$; $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Câu 4: Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị *(C)*. Tìm tọa độ giao điểm *I* của hai đường tiệm cận của đồ thị *(C)*.

A. $I\left(-2;2\right)$. **B.** $I\left(2;2\right)$. **C.** $I\left(2;-2\right)$. **D.** $I\left(-2;-2\right)$.

Câu 5: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

A. $y=5$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $y=0$.

Câu 6: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-4x}{2x-1}$.

A. $y=2$. **B.** $y=4$. **C.** $y=\dfrac{1}{2}$. **D.** $y=-2$.

Câu 7: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng.

A. $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{x^3}{x^2+2}$. **C.** $y=\sqrt{x^2+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Câu 8: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là

A. $y=-1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $y=1$.

Câu 9: Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng có đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $y=\dfrac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\dfrac{3x+2}{3x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+3}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x}{x^2+1}$.

Câu 10: Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=2^x$. **B.** $y=\log_2 x$. **C.** $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$. **D.** $y=\dfrac{x^2-4x+3}{x-1}$.

Câu 11: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 12: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-4x-5}{x^2-3x+2}$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 13: Đồ thị hàm số nào dưới đây có hai tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ **B.** $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ **C.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ **D.** $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x^2-5x+6}$

Câu 14: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 15: Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang?

A. $f(x)=3^x$ **B.** $g(x)=\log_3 x$ **C.** $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **D.** $k(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$

Câu 16: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Câu 17: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-1}$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 18: Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận?

A. $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$ **B.** $y=\dfrac{1}{4-x^2}$ **C.** $y=\dfrac{x+3}{3x-1}$ **D.** $y=\dfrac{x}{x^2-x+9}$

Câu 19: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Câu 20: Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 đường tiệm cận?

A. $y=\dfrac{x+1}{x^2-9}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x^2+3x+6}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

Câu 21: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số được cho dưới đây **không** có tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{x+2}{x^2+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-1}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x+2}$.

Câu 22: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{|x|+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 24: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Câu 25: Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Câu 26: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 27: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{6-x^2}}{x^2+3x-4}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 28: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+6}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29: Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 30: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 31: Số đường tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 32: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 33: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x-x^2}}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 34: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 35: Cho hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}$ *(C)*. Gọi m là số tiệm cận của đồ thị hàm số *(C)* và n là giá trị của hàm số *(C)* tại $x=1$ thì tích $m.n$ là.

A. $\dfrac{6}{5}$ **B.** $\dfrac{14}{5}$ **C.** $\dfrac{3}{5}$ **D.** $\dfrac{2}{15}$

Câu 36: Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Câu 37: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ **B.** $y=x^3-2x^2+3x+2$

C. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 39: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Câu 40: Đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x^2+4x+3}-\sqrt{4x^2+1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 41: Số đường tiệm cận đưng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sin x}{x^3-4x}$ là.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 42: Cho đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{3x-1}{x-1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-2}$?

A. $x=1$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=-1$. **D.** $x=2$.

Câu 43: Cho đường cong $\left(C\right):y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ và *M* là một điểm nằm trên *(C)*. Giả sử d_1,d_2 tương ứng là các khoảng cách từ *M* đến hai tiệm cận của *(C)*, khi đó $d_1.d_2$ bằng.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 44: Gọi *(H)* là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ thuộc *(H)* có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng?

A. -2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 3.

Câu 45: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x-3}$. Gọi *I* là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số. Khoảng cách từ *I* đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $d=1$. **C.** $d=\sqrt{2}$. **D.** $d=\sqrt{5}$.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{m\left(x-1\right)^2+4}}$ có hai tiệm cận đứng

A. $m<0$ **B.** $m=0$ **C.** $\begin{cases} m<0 \\ m\neq -1 \end{cases}$ **D.** $m<1$

Câu 47: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Tìm tất cả các giá trị của *m* để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -1. \\ m<\dfrac{1}{5} \end{cases}$ **B.** $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -1. \\ m<\dfrac{1}{3} \end{cases}$ **C.** $\begin{cases} m\neq 0 \\ m<\dfrac{1}{3} \end{cases}.$ **D.** $\begin{cases} m\neq 0 \\ m<\dfrac{1}{5} \end{cases}.$

Câu 48: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$ có đồ thị là *(C)*. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số *m* để đồ thị *(C)* có đúng 3 đường tiệm cận?

A. $\begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}.$ **B.** $m>2$. **C.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$ **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$

Câu 49: Tìm tất cả giá trị thực của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>2 \\ m\neq \dfrac{5}{2} \end{cases} \\ m<-2 \end{array}\right.$ **B.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ \begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right.$ **C.** $\left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right.$. **D.** $-2<m<2$.

Câu 50: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m^2x-m-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng.

A. $\mathbb{R}\setminus\{1;-3\}$. **B.** $\mathbb{R}$ **C.** $\mathbb{R}\setminus\left\{1;-\dfrac{2}{3}\right\}$ **D.** $\mathbb{R}\setminus\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$

Câu 51: Tập hợp các giá trị của *m* để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4m+1)}$ có đúng một tiệm cận là

A. $\{0\}$. **B.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$. **D.** $\varnothing$

Câu 52: Có bao nhiêu giá trị *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 53: Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4m+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

A. $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$. **B.** $\varnothing$

C. $\{0\}\cup(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Câu 54: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 55: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-(1-m)x+2m}}$ có hai tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-9}{\sqrt{x^2+2mx+2m+8}}$ có đúng hai đường tiệm cận.

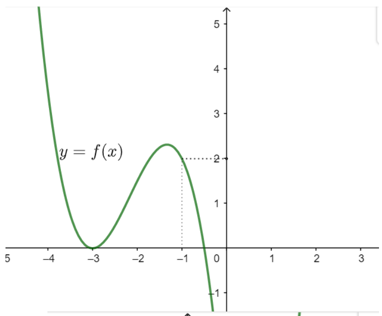
A. $-2<m<4$. **B.** $-2<m<5$. **C.** $-1<m<5$. **D.** $-1<m<4$.

Câu 57: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}$ có đúng bốn đường tiệm cận.

A. $m\in[-5;4]\setminus\{-4\}$ **B.** $m\in[-5;4]$

C. $m\in(-5;4)\setminus\{-4\}$ **D.** $m\in(-5;4]\setminus\{-4\}$

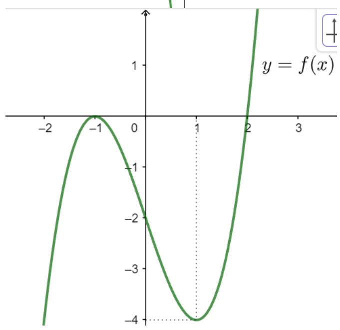
Câu 58: Cho đồ thị hàm bậc ba $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\left(x^2+4x+3\right)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 6 **B.** 3

C. 2 **D.** 4

Câu 59: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2\left(x^2-4x+3\right)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 2 **B.** 1

C. 3 **D.** 4

Câu 60: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{2x+1}}{\left(x^4-5x^2+4\right).f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Câu 61: Cho hàm bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{5}$		1		$\frac{5}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$			0			$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{\left[f^2(x)-2f(x)\right]\left(2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4\right)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

A. 7 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 4

Câu 62: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của *(C)*. Tiếp tuyến của *(C)* cắt hai đường tiệm cận của *(C)* tại hai điểm *A*, ***B.*** Giá trị nhỏ nhất của chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* bằng.

A. $4\sqrt{2}\pi$ **B.** 8π **C.** 2π **D.** 4π

Câu 63: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có đồ thị *(C)*. Gọi *I* là giao điểm của hai tiệm cận của *(C)*. Xét tam giác đều *ABI* có hai đỉnh *A,B* thuộc *(C)*, đoạn thẳng *AB* có độ dài bằng

A. $\sqrt{6}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** $2\sqrt{2}$

Câu 64: Trong các hàm số dưới đây đồ thị hàm số nào có tiệm cận xiên?

A. $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$. **B.** $y=x^3+3x^2-1$. **C.** $y=\dfrac{x^3-2x-1}{1-x}$. **D.** $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Câu 65: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng.

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=2x-3$. **D.** $y=2x+3$.

Câu 66: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $y=ax+b$. Tính a^2+2b.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 67: Biết tiện cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và **B.** Khi đó diện tích tam giác OAB là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 3.

Câu 68: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d.

A. $M(-1;2)$. **B.** $N(2;2)$. **C.** $(2;-2)$. **D.** $(2;-1)$.

Câu 69: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+4}{2x+1}$, tiệm cận xiên của đồ thì hàm số là đường thẳng.

A. $y=x-1$. **B.** $y=x$. **C.** $y=x+3$. **D.** $y=x-2$.

Câu 70: Tìm m để tiện cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2}{x-1}$ là đường thẳng $y=x+2024$.

A. $m=2023$. **B.** $m=2024$. **C.** $m=2025$. **D.** Đáp án khác.

Câu 71: Giả sử đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-2x+1}{x-2}$ có cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+2b+2030$ là?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** $m=2024$. **D.** Đáp án khá**C.**

Câu 72: Giả sử đồ thị hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2-3x+2}{x+1}$ có cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$, gọi M và giao điểm của d và đường tiệm cận đứng. Với giá trị nào của m thì OM là bé nhất?

A. $m=\dfrac{2}{5}$. **B.** $m=\dfrac{-3}{5}$. **C.** $m=\dfrac{5}{3}$. **D.** $m=\dfrac{-5}{2}$.

Câu 73: Đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$. **B.** $y=\sqrt{x^2-2x+3}$. **C.** $y=\dfrac{x^2+1}{x-2}$. **D.** $y=\dfrac{2x^2+x+1}{2x+1}$.

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{5}{x-1}$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$.

c. Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị nằm trên trục hoành.

d. Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị là đỉnh parabol $y=x^2-2x+1$

Câu 2. Cho hàm số $y=\dfrac{1-4x}{2x-1}$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=2$.

b. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y=\dfrac{1}{2}$.

c. Đường tiệm cận ngang cắt đồ thị hàm số $y=x^3-3x-2$ tại 3 điểm.

d. Hình chữ nhật giới hạn bởi 2 tiệm cận của đồ thị và hai trục tọa độ có diện tích bằng 1.

Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b. Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

c. Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị nằm trên parabol $y=x^2$.

d. Đường tiệm cận xiên của đồ thị vuông góc với đường thẳng $x+y-\pi=0$.

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

b. Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

c. Giao điểm của hai tiệm cận nằm trục hoành.

d. Đường tiệm cận xiên của đồ thị song song với đường thẳng $x+y=0$.

Câu 5. Cho hàm số $(C): y=f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$, khi đó:

a. Giao điểm của Δ và trục Ox có hoành lớn hơn 2.

b. Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3;-9)$.

c. Gọi $A=\Delta\cap Ox,\ B=\Delta\cap Oy$ ta có $S_{OAB}>3$.

d. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $\left[0;3\right]$ là 4.

Câu 6. Cho hàm số $(C): y=f(x)=\sqrt{4x^2+8x-12}$ và điểm $M\in(C)$ với $x_M<0$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận xiên đều là các hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b. Xét $\Delta_1:\ y=ax+b\ (b>0)$ là tiện cận xiên của (C) điểm $(1;4)\in\Delta$.

c. Xét $\Delta_2:\ y=ax+b\ (b<0)$ là tiện cận xiên của (C) khi đó $d_{\max}(M,\Delta_2)<2$.

d. Hoành độ giao điểm của hai đường tiệm cận xiên bằng -2.

Câu 7. Cho hàm số $(C): y = f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{2x - 1}$ biết đồ thị hàm số có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta: y = ax + b$ và tiện cận đứng là đường thẳng $x = x_0$. Khi đó:

a. Giá trị của biểu thức $S = 4a - 3b$ lớn hơn 4 .

b. Gọi điểm $M(4x_0; 2a)$ ta có độ dài của $\overrightarrow{OM}$ nhỏ hơn 2.

c. Gọi $A = \Delta \cap Ox,\ B = \Delta \cap Oy$ và $C = Ox \cap x_0$ ta có $S_{ABC} < 0,5$.

d. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = ax + b$ trên $\left[-4; -1\right]$ lớn hơn -3.

Câu 8. Cho hàm số $(C_1): f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 2}$ và $(C_2): g(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - 1}{2x - 1}$ biết đồ thị hàm số (C_1) có tiện cận đứng và tiện cận ngang là các đường thẳng $x = x_0$, $y = y_0$. (C_2) có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta: y = ax + b$ Khi đó:

a. Giá trị của biểu thức $S = x_0 + 2y_0 + 3b = 8$.

b. Đồ thị hàm số (C_2) có tiện cận ngang là đường thẳng $y = 1$.

c. Giao điểm của ba đường tiện cận ở đề bài tạo thành tam giác có diện tích bằng 2.

d. Đồ thị hàm số (C_1) và (C_2) có chung đường tiệm cận đứng.

Câu 9. Cho hàm số $(C): y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 4}$ biết đồ thị hàm số có tiện cận đừng và tiện cận ngang là các đường thẳng $x = x_0$, $y = y_0$. Khi đó

a. Giá trị của biểu thức $S = x_0^2 + y_0^2$ lớn hơn 18.

b. Gọi điểm $M(x_0; y_0)$ thì trung điểm của đoạn OM có tọa độ là $(2;1)$.

c. Điểm $(-1;-4)$ không nằm trên đường tiện cận đứng $x = x_0$.

d. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là $(2;-4)$.

Câu 10. Cho hàm số $(C): y = f(x) = \dfrac{mx - 1}{2x - 4}$. Khi đó

a. Nếu $m = -2$ thì đường thẳng $y = 1$ là tiện cận ngang của (C).

b. Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng khi $m \neq \dfrac{1}{2}$.

c. Điểm $(2;3)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số khi $m = 6$.

d. $\forall m \in \mathbb{R}$ ta có tiệm cận ngang của (C) là đường thẳng $y = \dfrac{m}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

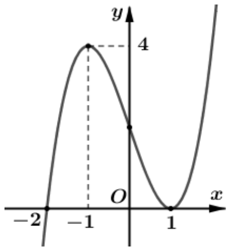
x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$		5	$\searrow$	0 $\nearrow$		10	$\searrow$	2 $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3

Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	Phát biểu		
	àm số $y = f(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng.		

	ım số $y = f(x)$ có tổng 3 đường tiệm cận ngang và		
	ận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ bằng 3.		
	tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ bằng 4.		

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



	Phát biểu		
	ận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x)-4}$ bằng 2.		
	ận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x)-4}$ bằng 3.		
	tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x)-4}$ bằng 6.		
	trị nguyên m đồ thị hàm số $g(x) = \dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có ệm cận đứng.		

Câu 13: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên ở bảng bên dưới và $y = nx - 2$ là tiệm cận xiên của đồ thị $y = g(x) = \dfrac{x^2+x+3}{x+3}$.

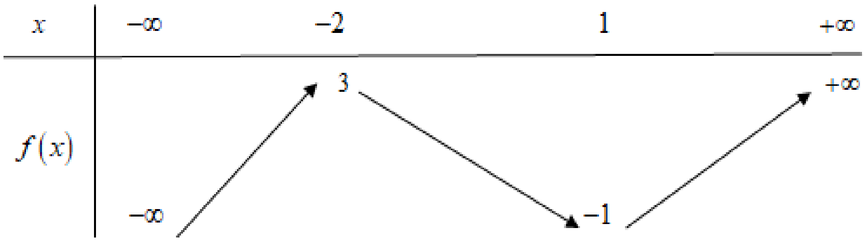
x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$ 5	$\Vert$	$-\infty$ $\nearrow$	$m+2$

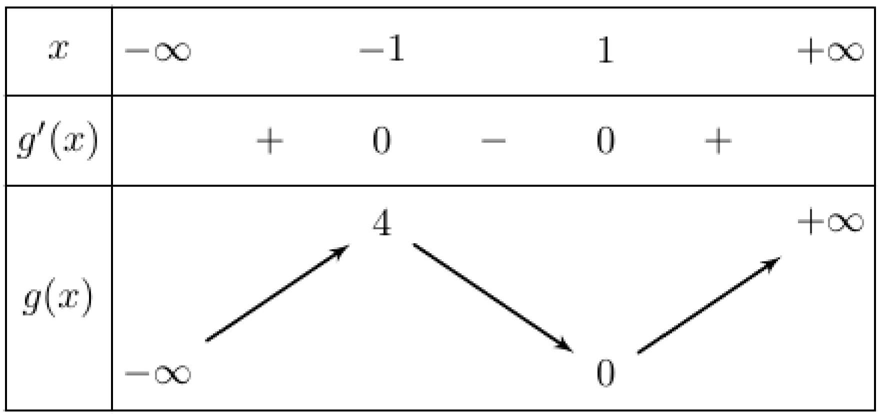
Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	u		
	ım số $y = g(x) = \dfrac{x^2+x+3}{x+3}$ có tiệm cận đứng là $x = -3$.		

	ı trị nguyên dương m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng tiệm cận ngang $y = y_o$ sao cho $x_o y_o < 30$.		
	guyên dương thì giá trị lớn nhất của $mn = 7$.		

Câu 14: Cho hàm số $y = f(x), y = g(x)$ là các hàm số bậc ba có bảng biến thiên ở bảng bên dưới

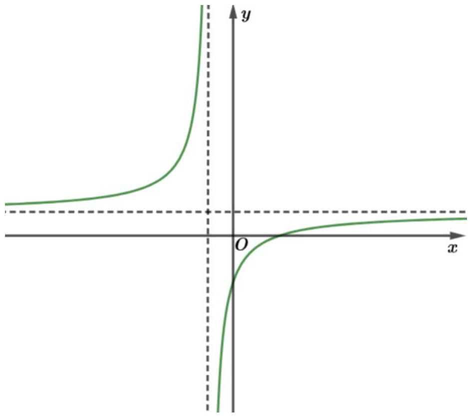




Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	u		
	ım số $y = \dfrac{1}{e^{2f(x)-1} - 1}$ có 5 tiệm cận ngang.		
	ım số $y = \dfrac{1}{e^{2f(x)-1} - 1}$ có 3 tiệm cận đứng.		
	ım số $y = \dfrac{x^4 - 1}{g^2(x) - 4g(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.		
	ım số $y = \dfrac{x^4 - 1}{g^2(x) - 4g(x)}$ và $y = \dfrac{1}{e^{2f(x)-1} - 1}$ có iệm cận.		

Câu 15: Cho hàm số $y = \dfrac{x-1}{2x+1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Xét tính **đúng-sai** của các khẳng định sau:



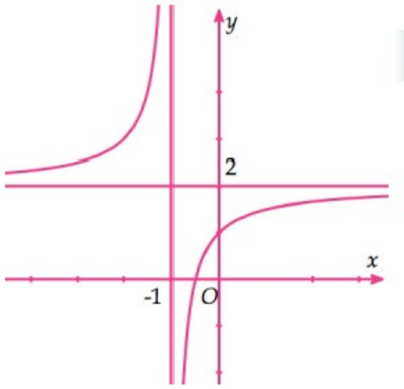
a) Đường thẳng $x=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

b) Đường thẳng $y=\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

c) $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}\right]=0$.

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{nx+1}{x+m}$; $(mn\neq 1)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Xét tính **đúng-sai** của các khẳng định sau:



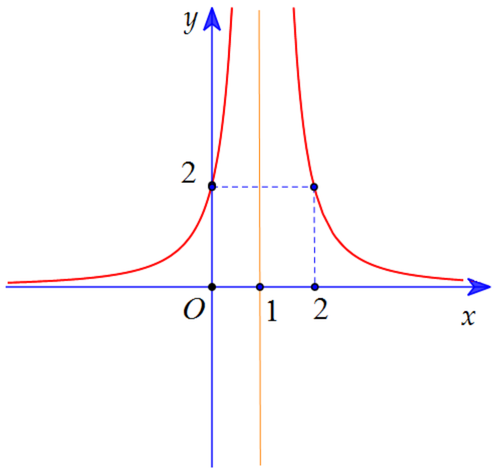
a) Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $(-1;2)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2\right]=0$.

c) $m+n=3$.

d) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$.

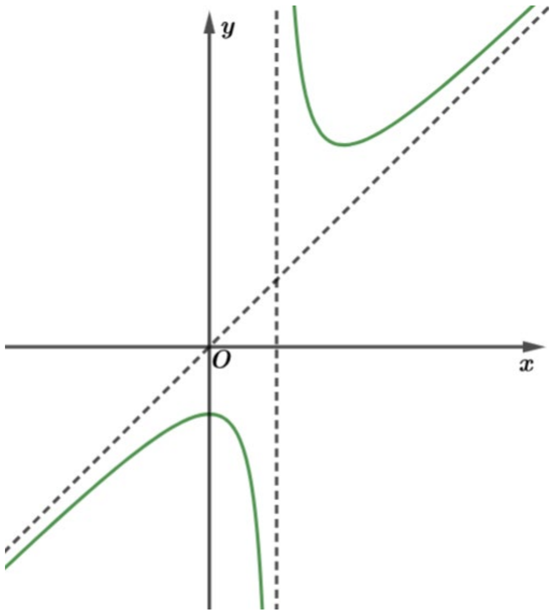
Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R};-\frac{d}{c}\neq 0\right)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



Biết đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

	$\dfrac{ad-bc}{cx+d)^2}$
	$\dfrac{+3}{-1}$
	trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(3;0)$ là : $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{3}{2}$

Câu 18: Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Xét tính **đúng-sai** của các khẳng định sau:



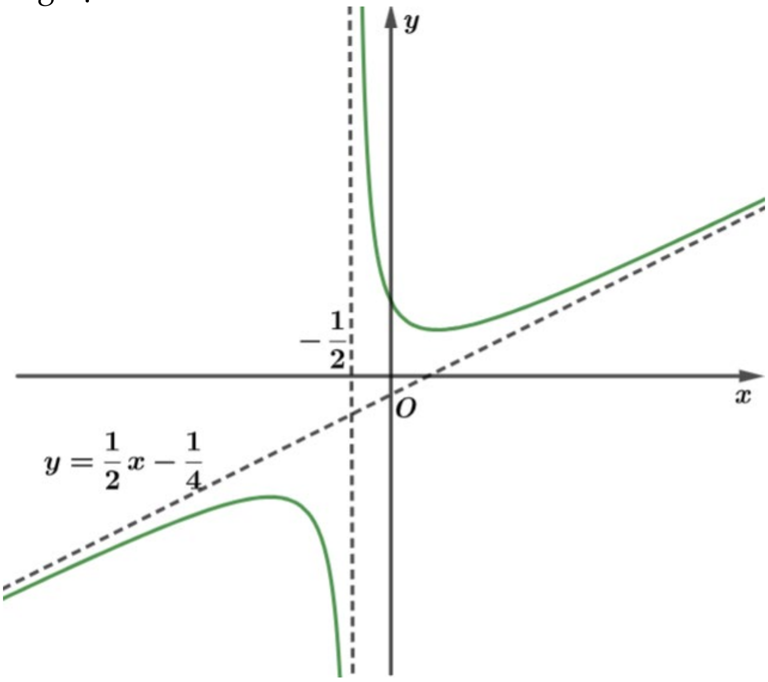
a) Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -1$.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - x \right] = 1$.

d) Đường thẳng $y = x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx^2+1}{mx+1};\ (mn\neq 0)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Xét tính **đúng-sai** của các khẳng định sau:



a) $\dfrac{n}{m}=-\dfrac{1}{4}$.

b) $m=-\dfrac{1}{2}$.

c) $m+n=3$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{2}x\right]=0$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 1

a) Hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

b) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận ngang là $y=1$.

c) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ có hai đường tiệm cận đứng.

d) Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(|x|)$ là 3.

Câu 21: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ có một đường tiệm cận đứng là $x=-2$.

b) Hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y=3,\ y=-3$.

c) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{f(x)}{(x^2+x-2)}$ có ba đường tiệm cận đứng.

d) Đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ có hai đường tiệm cận ngang.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	||	$-$	0	$+$	
y	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-3 || -4	$\searrow$	-8	$\nearrow$	5

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $x=-2$ làm tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=-2,\ x=0$.

c) Số đường tiệm cận ngang của của đồ thị hàm số là 2.

d) Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 4.

Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có đường tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có đường tiệm cận ngang là $y=0$.

c) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ có đúng một đường tiệm cận đứng là $x=1$.

d) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-1}$ có đúng năm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Câu 24: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1 $\nearrow$	$+\infty$	||	$-\infty$ $\nearrow$	1

a) Đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.
b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $x=1$.
c) Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I(-2;1)$.
d) Cho $M(x_M;y_M)$ là một điểm tùy ý thuộc đồ thị hàm số. Khi $x_M\to+\infty$ thì $y_M\to+\infty$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$ với m là tham số.

Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

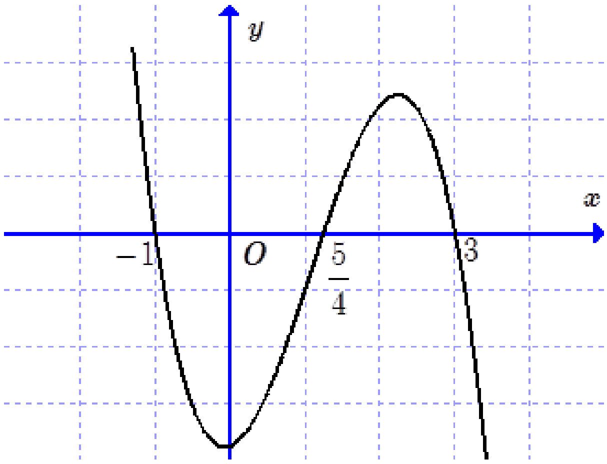
	hẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
	đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=0$.
	đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có đường tiệm cận đứng.
	2 giá trị nguyên của m đề đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 tiệm cận 1 tiệm cận ngang.

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$ với m là tham số.

Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	ım số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang.
	hẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$ với mọi ̣a m.
	3 đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là $x=1$; $x=3$.
	trị nguyên dương của m đề đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 2 ệm cận.

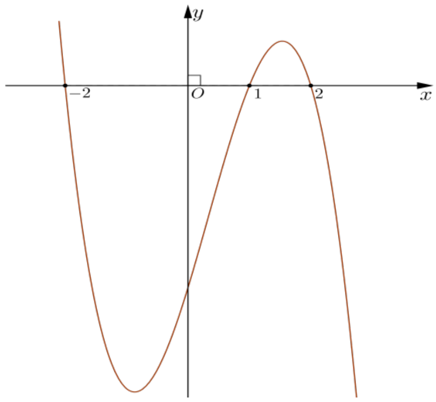
Câu 27: Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2025}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\,(m,n,p,q\in\mathbb{R}),h(0)=0$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	hằng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.
	hằng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=mx^4.g(x)$.
	-1 đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.
	á trị nguyên âm của m để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 2 đường đứng.

Câu 28: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc 4, thỏa mãn $f(1)=0$ và đồ thị của hàm số $y=f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên.



Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

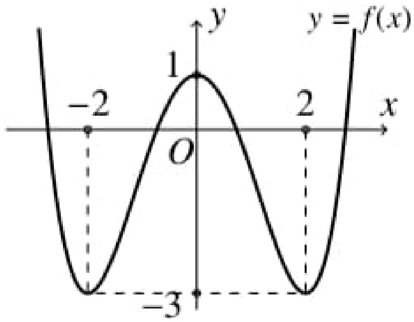
	hằng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.
	àm số $h(x)=\dfrac{2024x\left[f^2(x)+f(x)+1\right]}{f^2(x)+f(x)}$ không có tiệm cận ngang.
	àm số $g(x)=\dfrac{2024x\left(f(x)+1\right)}{f^2(x)+f(x)}$ có 6 tiệm cận đứng và ngang.
	àm số $g(x)=\dfrac{2024x}{f^2(x)+f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng.

Câu 29: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$ có đồ thị (C). (C). Các khẳng định sau đúng hay sai?

STT	Phát biểu	Đúng	Sai
a)	àm số $y=f(x)$ có 3 đường tiệm cận.		
b)	ı xiên của đồ thị hàm số có hệ số góc bằng 1.		

c)	Giao điểm của hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của (C) là $I(3;4)$.		
d)	lần lượt là giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận trục hoành. Khi đó, diện tích tam giác IAB bằng 4.		

Câu 30: Cho hàm số trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ, xét tính đúng sai của các khẳng định sau



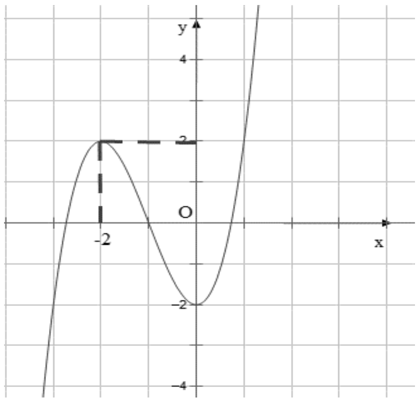
	ạm số $y = f(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng.
	ạm số $y = \dfrac{1}{f(x)-2}$ có tổng 3 đường tiệm cận ngang và đứng.
	ận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{e^{f(x)}-1}$ bằng 3.
	tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ bằng 4.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	|| $+\infty$	$\searrow$	0

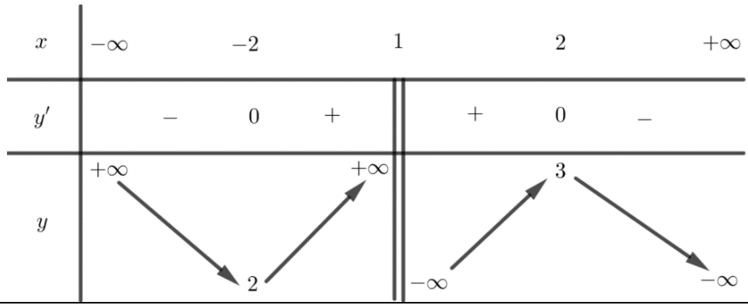
	ạm số $y = f(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng.
	ạm số $y = f(x)$ có tổng 3 đường tiệm cận ngang và đứng.
	trị nguyên của tham số m để ĐTHS $y = \dfrac{1}{f(x)-m}$ có 2 đường tiệm cận
	ạm số $y = \dfrac{1}{2f(x)+m^2+1}$ luôn có tiệm cận ngang với mọi giá trị của m

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



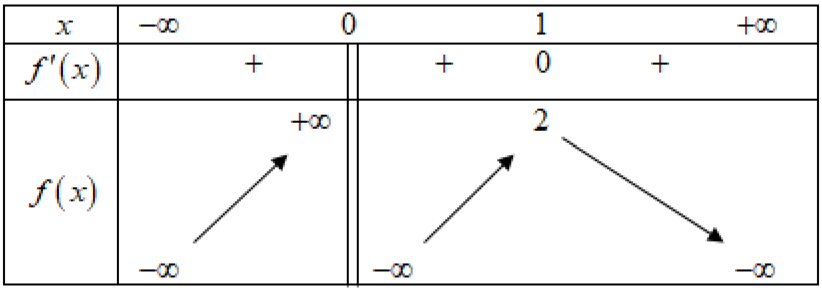
	hẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=f(x)$
	$\overline{)-1} = 0$
	$= \dfrac{2019}{f(x)-1}$ có tiệm cận ngang là $y=0$.
	ận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ là 3.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



	m số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang.
	$x)-2]=0$.
	m số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ 5 đường tiệm cận đứng
	m số $\dfrac{1}{f(x)-m}$ luôn có tiệm cận ngang với mọi giá trị của m

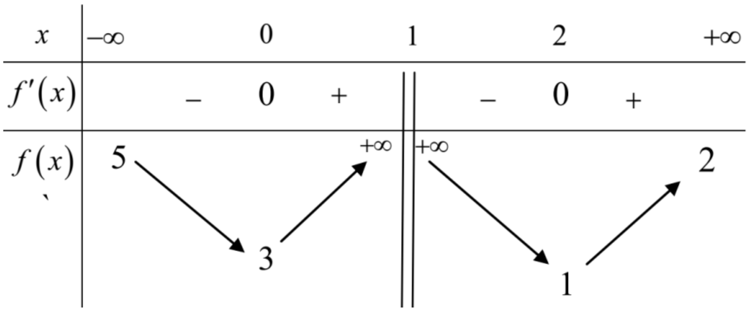
Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên



Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	ận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-4}$ bằng 2.
	ận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-4}$ bằng 3.
	tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-4}$ bằng 6.
	2 thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ có đúng ba đường tiệm cận.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ bảng biến thiên như sau:



Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	ạm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-m}$ có ba tiệm cận đứng khi $m=-5$.
	ạm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-m}$ có tổng hai đường tiệm cận ngang và đứng là 4 4
	ận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ bằng 3.
	$m\in\mathbb{Z}$, $m\in\left[-10;10\right]$ để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-m+1}$ có 4 ệm cận là 5.

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ là:

Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ là.

Câu 3: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ là.

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ 2$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

Câu 5: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$		0		
y	0	$\searrow$	$-\infty\ \|\|\ 2$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là.

Câu 6: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

Câu 7: Đồ thị hàm số $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Câu 8: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n. Giá trị của $m+n$ là.

Câu 9: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là.

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng.

Câu 11. Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

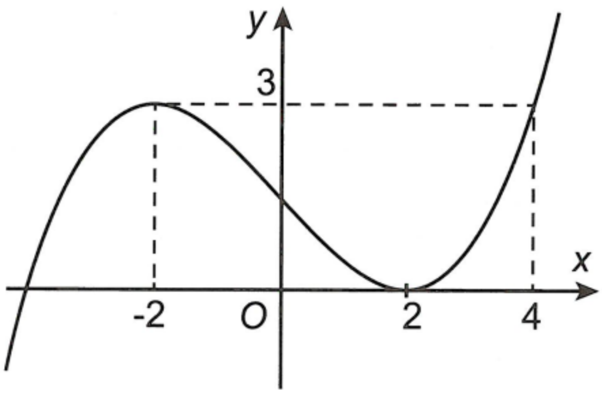
Tổng số đường tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+1}$ là…

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

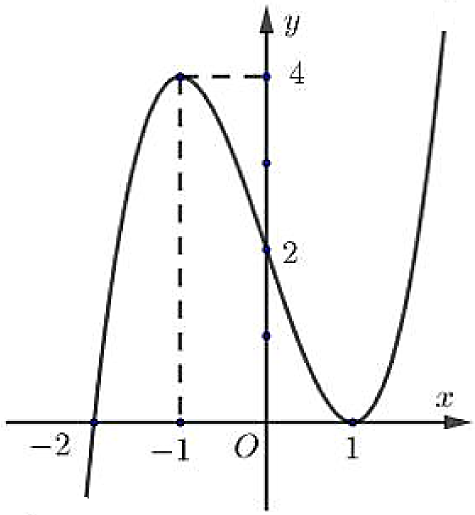
Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x^3+x)+3}$ là…

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a,b,c,d\in\mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(4-x^2)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Câu 14: Cho đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ như hình vẽ dưới đây:



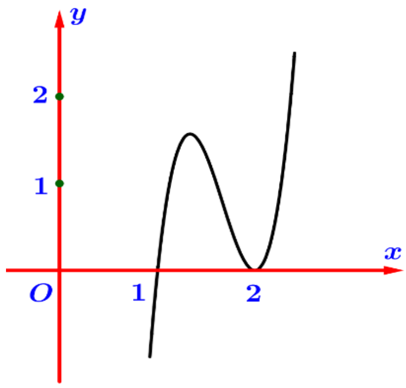
Đồ thị của hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{3f^2(x)-6f(x)}$ có bao nhiêu đường tiện cận đứng?

Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.

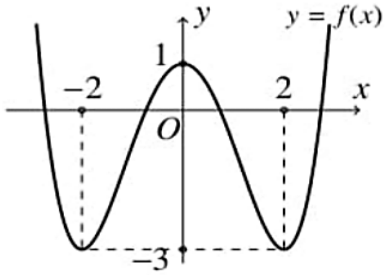
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

Câu 16: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



Câu 17: Cho hàm trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?


y
y = f(x)
1
−2
2
x
O
−3

BÀI 3: ĐƯỜNG TIỆM CẬN CỦA ĐỒ THỊ HÀM SỐ

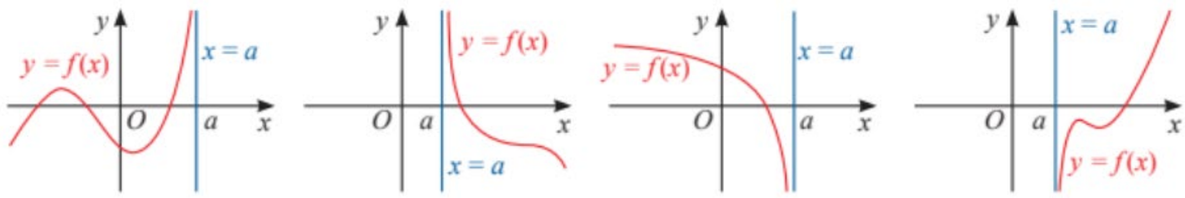
A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Đường tiệm cận đứng

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một đường tiệm cận đứng (hay tiệm cận đúnng) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn

$\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Đường thẳng $x = a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như Hình 2.



a) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ b) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ c) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$ d) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$

Hình 2

Ví dụ 1. Tìm tiệm cận đứng của đồ thị các hàm số sau:

a) $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ b) $y = \dfrac{2}{\sqrt{x - 1}}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x^2 - 1} = -\infty; \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = -1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x^2 - 1} = -\infty; \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = 1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

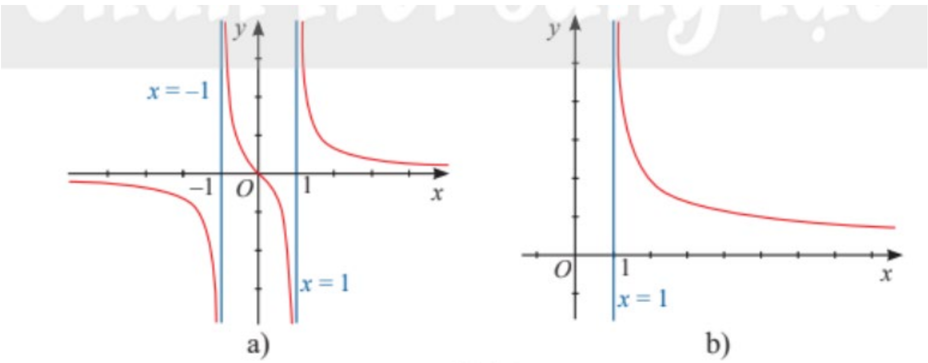
b) Tập xác định: $D = (1; +\infty)$.

Vì $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2}{\sqrt{x - 1}} = +\infty$ nên đường thẳng $x = 1$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Chú ý:

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ cùng với hai tiệm cận đứng $x = 1$ và $x = -1$ của nó được thể hiện trong Hình 3a.

Đồ thị hàm số $y = \dfrac{2}{\sqrt{x - 1}}$ cùng với tiệm cận đứng $x = 1$ của nó được thể hiện trong Hình 3b.



Hình 3

2. Đường tiệm cận ngang

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một đường tiệm cận ngang (hay tiệm cận ngang) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = m$ hoặc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = m$.

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh hoạ như Hình 5 .

Hình 5

Ví dụ 2. Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$.

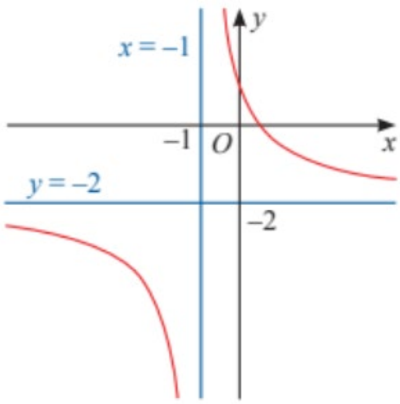
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2x+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = -2;\ \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2x+1}{x+1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-2+\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = -2$.

Vậy đường thẳng $y = -2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y = \dfrac{-2x+1}{x+1}$ cùng với tiệm cận ngang $y = -2$ và tiệm cận đứng $x = -1$ của nó được thể hiện trong Hình 6 .

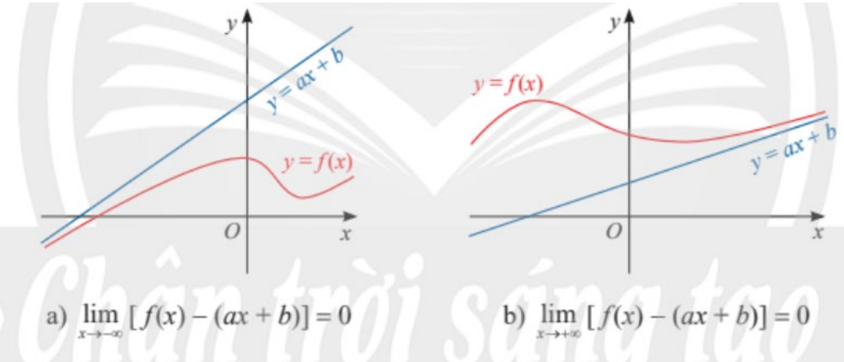


Hình 6

3. Đường tiệm cận xiên

Đường thẳng $y=ax+b, a\neq 0$, được gọi là đuoòng tiệm cận xiên (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$.

Đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)$ được minh hoạ như Hình 8 .



Hình 8

Ví dụ 3. Chứng minh rằng đường thẳng $y=x-2$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)=x-2+\dfrac{3}{x+1}$.

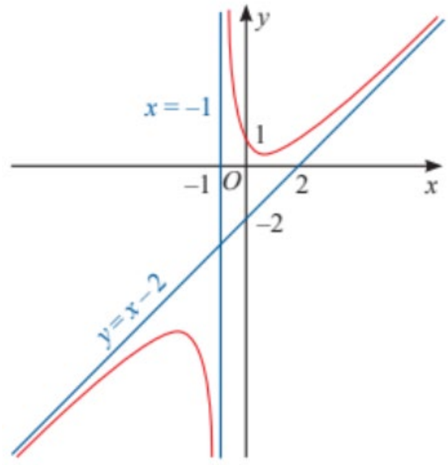
Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3}{x+1}=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{x+1}=0$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-2$.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y=f(x)=x-2+\dfrac{3}{x+1}$ cùng tiệm cận đứng $x=-1$ và tiệm cận xiên $y=x-2$ của nó được thể hiện trong Hình 9.



Hình 9

Nhận xét:

a) Trong trường hợp tổng quát, có thể tìm các hệ số a, b trong phương trình của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ theo công thức như sau: $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$ hoặc

$a = \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}, b = \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - ax]$.

b) Khi $a = 0$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = b$.

Ví dụ 4. Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

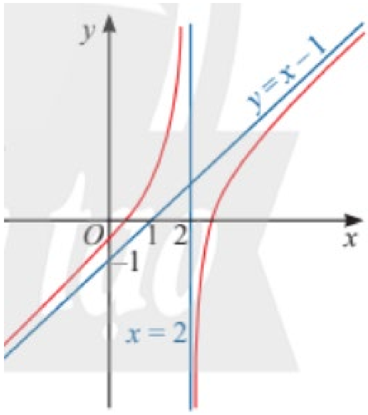
Ta có: $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 - 2x} = 1$;

$b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{-x + 1}{x - 2} = -1.$

Ta cũng có $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 1; \lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x] = -1$.

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x - 1$.

Chú ý: Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 2}$ cùng với tiệm cận đứng $x = 2$ và tiệm cận xiên $y = x - 1$ của nó được thể hiện trong Hình 10.



Hình 10

Ví dụ 5. Trong Hình 11, đường viền bóng của đèn ngủ lên tường là đồ thị của hàm số $y=55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}$ với x và y tính bằng đơn vị centimét. Chứng minh rằng $y=55-\frac{1}{2}x$ là một tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này.

Hình 11

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}\right)-\left(55-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2+144}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{-144}{x+\sqrt{x^2+144}}\right)=0.$

Tương tự ta cũng có $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}\right)-\left(55-\frac{1}{2}x\right)\right]=0$.

Do đó $y=55-\frac{1}{2}x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=55-\frac{1}{2}\sqrt{x^2+144}$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số sau:

a) $y=\frac{4x-5}{2x-3}$; b) $y=\frac{-2x+7}{4x-3}$; c) $y=\frac{5x}{3x-7}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3}{2}\right\}$

Có $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} y = \lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^+} \frac{4x-5}{2x-3} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} y = \lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} \frac{4x-5}{2x-3} = -\infty$.

Vậy $x = \frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4x-5}{2x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{4-\frac{5}{x}}{2-\frac{3}{x}} = 2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4x-5}{2x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{4-\frac{5}{x}}{2-\frac{3}{x}} = 2$

Vậy y = 2 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{3}{4}\right\}$.

Có $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{4}\right)^+} y = \lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{4}\right)^+} \frac{-2x+7}{4x-3} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{4}\right)^-} y = \lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{4}\right)^-} \frac{-2x+7}{4x-3} = -\infty$.

Vậy $x = \frac{3}{4}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2x+7}{4x-3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-2+\frac{7}{x}}{4-\frac{3}{x}} = -\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2x+7}{4x-3} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-2+\frac{7}{x}}{4-\frac{3}{x}} = -\frac{1}{2}$

Vậy $y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{7}{3}\right\}$.

Có $\lim\limits_{x\to\left(\frac{7}{3}\right)^+} y = \lim\limits_{x\to\left(\frac{7}{3}\right)^+} \frac{5x}{3x-7} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(\frac{7}{3}\right)^-} y = \lim\limits_{x\to\left(\frac{7}{3}\right)^-} \frac{5x}{3x-7} = -\infty$.

Vậy $x = \frac{7}{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5x}{3x-7} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{5}{3-\frac{7}{x}} = \frac{5}{3}$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5x}{3x-7} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{3-\frac{7}{x}} = \frac{5}{3}$.

Vậy $y = \frac{5}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

2. Tìm các tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của đồ thị hàm số sau:

a) $y = \frac{x^2+2}{2x-4}$; b) $y = \frac{2x^2-3x-6}{x+2}$; c) $y = \frac{2x^2+9x+11}{2x+5}$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Có $\lim\limits_{x\to 2^+} y=\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+2}{2x-4}=+\infty; \lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2}{2x-4}=-\infty$.

Vậy $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Có $y=\dfrac{x^2+2}{2x-4}=\dfrac{1}{2}x+1+\dfrac{6}{2x-4}$.

Có $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{1}{2}x+1+\dfrac{6}{2x-4}-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6}{2x-4}=0.$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[y-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{1}{2}x+1+\dfrac{6}{2x-4}-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{6}{2x-4}=0.$

Vậy $y=\dfrac{1}{2}x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

b) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

$\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}=+\infty; \lim\limits_{x\to(-2)^-} y=\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}=-\infty$

Vậy $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Có $y=\dfrac{2x^2-3x-6}{x+2}=2x-7+\dfrac{8}{x+2}.$

Có $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(2x-7)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2x-7+\dfrac{8}{x+2}-(2x-7)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{8}{x+2}=0;$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(2x-7)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2x-7+\dfrac{8}{x+2}-(2x-7)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{8}{x+2}=0$

Vậy $y=2x-7$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

c) Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{5}{2}\right\}$.

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{5}{2}\right)^+} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{5}{2}\right)^+}\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}=+\infty; \lim\limits_{x\to\left(-\frac{5}{2}\right)^-} y=\lim\limits_{x\to\left(-\frac{5}{2}\right)^-}\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}=-\infty$

Vậy $x=-\dfrac{5}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

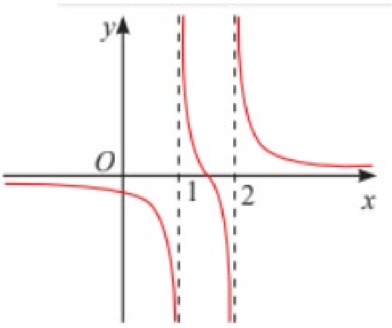
Có $y=\dfrac{2x^2+9x+11}{2x+5}=x+2+\dfrac{1}{2x+5}$.

Có $\lim\limits_{x\to+\infty}[y-(x+2)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2+\dfrac{1}{2x+5}-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2x+5}=0;$

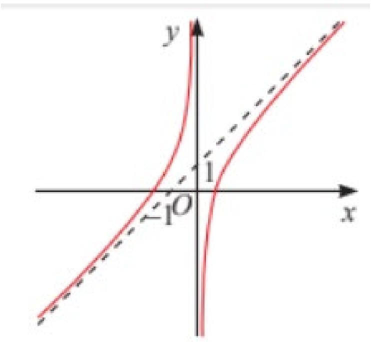
$\lim\limits_{x\to-\infty}[y-(x+2)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+2+\dfrac{1}{2x+5}-(x+2)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2x+5}=0$

Vậy $y=x+2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

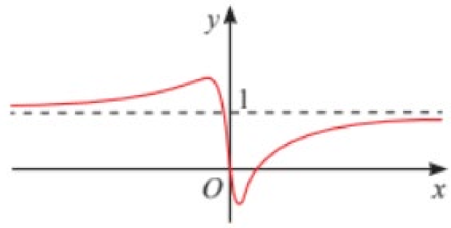
3. Tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số sau:



a) $y=\dfrac{2x-3}{5x^2-15x+10}$



b) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$



c) $y=\dfrac{16x^2-8x}{16x^2+1}$

Lời giải

a) Dựa vào đồ thị ta có:

Đường thẳng $x=1$ và $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{5x^2-15x+10}$

Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-3}{5x^2-15x+10}$

b) Dựa vào đồ thị ta có:

Đường thẳng $x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$

Đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x}$

c) Dựa vào đồ thị ta có:

Đường thẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{16x^2-8x}{16x^2+1}$

4. Nồng độ oxygen trong hồ theo thời gian t cho bởi công thức $y(t)=5-\dfrac{15t}{9t^2+1}$, với y được tính theo mg/l và t được tính theo giờ, $t\geq 0$. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=y(t)$. Từ đó, có nhận xét gì về nồng độ oxygen trong hồ khi thời gian t trở nên rất lớn?

(Theo: www.researchgate.net/publication/264903978_Microrespirometric
characterization_of_activated_sludge_inhibition_by_copper_and_zinc)

Lời giải

Có $\lim_{t\to+\infty} y(t) = \lim_{t\to+\infty}\left(5-\frac{15t}{9t^2+1}\right) = \lim_{t\to+\infty}\left(5-\frac{\frac{15}{t}}{9+\frac{1}{t^2}}\right) = 5$

$\lim_{t\to-\infty} y(t) = \lim_{t\to-\infty}\left(5-\frac{15t}{9t^2+1}\right) = \lim_{t\to-\infty}\left(5-\frac{\frac{15}{t}}{9+\frac{1}{t^2}}\right) = 5$

Do đó $y=5$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số và hàm số không có tiệm cận đứng, tiệm cận xiên.

Nhận xét:

Khi thời t trở nên rất lớn, nồng độ oxygen trong hồ sẽ tiến dần về giá trị cố định là $5 \text{ mg}/1$. Điều này có thể được hiểu sau một thời gian dài, môi trường trong hồ sẽ đạt đến một trạng thái ổn định nồng độ oxygen không thay đổi nhiều.

5. Tìm tiệm cận của đồ thị hàm số khối lượng hạt $m = m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ trong ⊘ (trang 19).

Lời giải

Xét $m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Tập xác định: $D = \mathbb{N}\setminus\{c\}$

Ta có: $\lim_{v\to c^+} m(v) = \lim_{v\to c^+}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \lim_{v\to c^+}\frac{\frac{m_0}{v}}{\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}}} = \frac{\frac{m_0}{c}}{\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c^2}}} = +\infty$

$\lim_{v\to c^-} m(v) = \lim_{v\to c^-}\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \lim_{v\to c^-}\frac{\frac{m_0}{v}}{\sqrt{\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}}} = \frac{\frac{m_0}{c}}{\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{c^2}}} = -\infty$

Do đó $v=c$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số. Hàm số không có tiệm cận ngang.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Tiệm cận của đồ thị hàm số phân thức hữu tỉ

Phương pháp: Xét hàm phân thức trong đó $P(x), Q(x)$ là hai đa thức của x, ta thường dùng phương pháp sau để tìm các đường tiệm cận của đồ thị hàm số

1. Tiệm cận đứng $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$

Nếu $\begin{cases} P(x_0)\neq 0 \\ Q(x_0)=0 \end{cases}$ thì đường thẳng $x=x_0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

2. Tiệm cân ngang

- Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là trục hoành.
- Nếu bậc của $P(x)$ bằng bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=\dfrac{a}{b}$, trong đó a,b lần lượt là hệ số của số hạng có số mũ lớn nhất của $P(x), Q(x)$.
- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận ngang.

3. Tiệm cận xiên

- Nếu bậc của $P(x)$ bé hơn hay bằng bậc của $Q(x)$ hoặc bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ từ hai bậc trở lên thì đồ thị của hàm số không có tiệm cận xiên .
- Nếu bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ một bậc và $P(x)$ không chia hết cho $Q(x)$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên và ta tìm tiệm cận xiên bằng cách chia $P(x)$ cho $Q(x)$ và viết $f(x)=ax+b+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ trong đó $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{R(x)}{Q(x)}=0$. Suy ra đường thẳng $y=ax+b$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

I. Các ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a) y=\dfrac{2x+1}{x+2}$; $\quad b) y=\dfrac{3-4x}{x-1}$; $\quad c) y=\dfrac{x}{1-2x}$; $\quad d) y=\dfrac{-4}{x+6}$.

Lời giải

a) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2\ \Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=+\infty \Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-4;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-4\ \Rightarrow y=-4$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

c) Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\frac{1}{2}; \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = -\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to \left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

d) Hàm số đã cho xác định trêm $\mathbb{R}\setminus\{-6\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 0; \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow Ox$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -6^+} f(x) = -\infty, \lim\limits_{x\to -6^-} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -6$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Nhận xét: Mọi hàm phân thức hữu tỉ bậc nhất trên bậc nhất $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ đều có hai tiệm cận

- Tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c}$.
- Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c}$.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Ví dụ 2. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a) y = 2x + 1 - \frac{1}{x+2};$ $\quad$ $b) y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x+1}.$

Lời giải

a) TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to (-2)^-} f(x) = +\infty; \lim\limits_{x\to (-2)^+} f(x) = -\infty \Rightarrow x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to -\infty} \left[f(x) - (2x+1)\right] = 0; \lim\limits_{x\to +\infty} \left[f(x) - (2x+1)\right] = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

b) $y = \frac{x^2 - 3x + 4}{2x+1} = \frac{1}{2}x - \frac{7}{4} + \frac{23}{4(2x+1)}$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^{+}} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^{+}} f(x)=-\infty \Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{4}\right)\right]=0$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{4}\right)\right]=0 \Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{7}{4}$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Nhận xét: Mọi hàm phân thức hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}$ đều có hai tiệm cận.

- Tiệm cận đứng $x=-\dfrac{e}{d}$.
- Tiệm cận xiên được tính bằng cách chia tử số cho mẫu số, giả sử $y=kx+m+\dfrac{A}{dx+e}$ thì đường thẳng $y=kx+m$ là tiệm cận xiên.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

Ví dụ 3. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau**:**

$a)\ y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-4}$; $\qquad b) y=\dfrac{3x}{x^3+27}$; $\qquad c) y=\dfrac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}$.

Lời giải

a) TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to(-2)^{+}} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to(-2)^{-}} f(x)=-\infty \Rightarrow x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tương tự hàm số có thêm một tiệm cận đứng khác là $x=2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to(-3)^{+}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to(-3)^{-}} f(x)=+\infty \Rightarrow x=-3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

c) TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. nên hàm không có tiệm cận đứng

Ta có:

$$a=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3+5x^2-1}{x\left(x^2-x+1\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^3}}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=2.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(y-2x)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3+5x^2-1}{x^2-x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x^2-2x-1}{x^2-x+1}=7.$$

$\Rightarrow y=2x+7$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ví dụ 4. Tùy theo giá trị m, hãy tìm tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^3-1}$.

Lời giải

- Nếu $m=0\Rightarrow y=-x+1$. Lúc đó đồ thị hàm số không có đường tiệm cận.
- Nếu $m=1\Rightarrow y=\dfrac{x-1}{x^3-1}$. Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}y=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

  Vì $\lim\limits_{x\to1^+}y=\lim\limits_{x\to1^-}y=\dfrac{1}{3}\Rightarrow$ đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.
- Nếu $\begin{cases}m\neq0\\m\neq1\end{cases}$. TXĐ $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{\sqrt[3]{m}}\right\}$.

  Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

  Đường thẳng $x=\dfrac{1}{\sqrt[3]{m}}$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

II. Bài tập tự luyện

BT 1. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a)\,y=\dfrac{x-2}{3x+2}$; $\quad b)\,y=\dfrac{-2x-2}{x+3}$; $\quad c)\,y=\dfrac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$.

Hướng dẫn

$a)\,y=\dfrac{x-2}{3x+2}$

Hàm số đã cho xác định trêm $\mathbb{R}\setminus\{-\frac{2}{3}\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\dfrac{1}{3};\ \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\dfrac{1}{3}\Rightarrow y=\dfrac{1}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{-2}{3}\right)^+}f(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to\left(\frac{-2}{3}\right)^-}f(x)=+\infty\Rightarrow x=-\dfrac{2}{3}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$b)\ y=\dfrac{-2x-2}{x+3}$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-2 \Rightarrow y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)=+\infty,\ \lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)=-\infty \Rightarrow x=-3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

c) $y=\dfrac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\left\{-1;\dfrac{3}{5}\right\}$.

Ta có: $y=\dfrac{x^2+x+1}{-5x^2-2x+3}=\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(-5x+3)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\dfrac{1}{5};\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\dfrac{1}{5} \Rightarrow y=-\dfrac{1}{5}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{x^2+x+1}{(x+1)(-5x+3)}=\lim_{x\to(-1)^+}\frac{1}{x+1}.\frac{x^2+x+1}{-5x+3}=+\infty,$$
$$\lim_{x\to(-1)^-} f(x)=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x+1}{(x+1)(-5x+3)}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{1}{x+1}.\frac{x^2+x+1}{-5x+3}=-\infty,$$

$\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tương tự $x=\dfrac{3}{5}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

BT 2. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a) y=x+2-\dfrac{1}{x-3};$ $\quad b)\ y=\dfrac{x+2}{x^2-1};$ $\quad c) y=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2-1}.$

Hướng dẫn

$a) y=x+2-\dfrac{1}{x-3}$

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Ta có:

$\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to3^-} f(x)=+\infty$

$\Rightarrow x=3$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0;\quad \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+2)\right]=0$

$\Rightarrow y=x+2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

$b)\ y=\dfrac{x+2}{x^2-1}$.

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}\backslash\{\pm 1\}$.

Ta có $y=\dfrac{x+2}{x^2-1}=\dfrac{x+2}{(x-1)(x+1)}$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}.\frac{x+2}{x+1}=+\infty;$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{x+2}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}.\frac{x+2}{x+1}=-\infty$$

$\Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Tương tự $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0;\quad \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

c) Đồ thị hàm có tiệm cận ngang là $y=1$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x+3}{x-1}.\frac{1}{x+1}=+\infty$$
$$\left(\text{vì }\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{2}>0;\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x+3}{x-1}=+\infty\right)$$
$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x+3}{x^2-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2+2x+3}{x+1}.\frac{1}{x-1}=-\infty$$
$$\left(\text{vì }\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}=-\infty;\ \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+2x+3}{x+1}=3>0\right)$$

Tương tự $\lim\limits_{x\to -1^\pm} f(x)$.

BT 3. Tìm các đường tiệm cận của các đồ thị hàm số sau:

$a) y=\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+2x+4}$; $\quad b) y=\dfrac{x^2-x+4}{3x^2+4x-7}$; $\quad c) y=\dfrac{x-1}{(x-3)^2}$.

Hướng dẫn

$a) y=\dfrac{2x^2+5x+1}{x^2+2x+4}$

Nhận thấy $x^2+2x+4=(x+1)^2+3>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$b) y=\dfrac{x^2-x+4}{3x^2+4x-7}$. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{1;-\dfrac{7}{3}\right\}$.

Tiệm cận ngang là $y=3$; Tiệm cận đứng là $x=1$ và $x=-\dfrac{7}{3}$.

$c) y=\dfrac{x-1}{(x-3)^2}$. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{3\}$

Tiệm cận ngang là $y=0$; Tiệm cận đứng là $x=3$.

BT 4. Tuỳ theo m, tìm các đường tiệm cận của $(C): y=\dfrac{x+2}{x^2+6x+m}$.

Hướng dẫn

Xét phương trình $x^2+6x+m=0$ với $\Delta=9-m$

- $m>9$ thì phương trình trên vô nghiệm trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng. $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=0 \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$
- $m=9$: Ta có hàm số $y=\dfrac{x+2}{x^2+6x+9}=\dfrac{x+2}{(x+3)^2}$. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-3$ và tiệm cận ngang là $y=0$.
- $8\neq m<9$: Phương trình $x^2+6x+m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1;x_2\neq -2$ Hay $y=\dfrac{x+2}{(x-x_1)(x-x_2)}$.

  Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng là $x=x_1; x=x_2$ và tiệm cận ngang là $y=0$.
- $m=8$: $y=\dfrac{1}{x+4},(x\neq -2)$. Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=-4$ và tiệm cận ngang là $y=0$.

Dạng 2. Tiệm cận hàm vô tỉ

Phương pháp: Sử dụng định nghĩa và quy tắc tìm tiệm cận hai phía

Với hàm số $y=\sqrt{Ax^2+Bx+C}$, $A>0$ và $B^2-4AC\neq 0$. Để tìm tiệm cận của đồ thị hàm số này ta tiến hành các bước

- Bước 1: Giả sử $d_1: y=a_1x+b_1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to-\infty$). Ta tìm a_1, b_1 như sau:

$$a_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x}=-\sqrt{A};$$
$$b_1=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{Ax^2+Bx+C}+x\sqrt{A}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{Bx+C}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}-x\sqrt{A}}=\frac{-B}{2\sqrt{A}}.$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ nhất là $d_1: y=-\sqrt{A}x-\frac{B}{2\sqrt{A}}$.

- Bước 2: Giả sử $d_2: y=a_2x+b_2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to+\infty$). Ta tìm a_1, b_1 như sau:

$$a_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{Ax^2+Bx+C}}{x}=\sqrt{A};$$
$$b_2=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{Ax^2+Bx+C}-x\sqrt{A}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{Bx+C}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}+x\sqrt{A}}=\frac{B}{2\sqrt{A}}$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ hai là $d_2: y=-\sqrt{A}x-\frac{B}{2\sqrt{A}}$.

Phương pháp này được mở rộng cho lớp hàm số

$$y=cx+d\pm\sqrt{\mathrm{A}x^2+Bx+C};\qquad y=\sqrt[n]{A_nx^n+A_{n-1}x^{n-1}+...+A_0}\ .$$

I. Các Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số

$a)\ y=\sqrt{x^2+x+1};\qquad b)\ y=\sqrt{x^2-4x+3}.$

Lời giải

a) TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$.

- Giả sử $d_1: y=a_1x+b_1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to-\infty$). Ta có

$$a_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right)=-1$$
$$b_1=\lim_{x\to-\infty}\left[y-a_1x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x}=-\frac{1}{2}$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ nhất là $d_1: y=-x-\frac{1}{2}$.

- Giả sử $d_2: y=a_2x+b_2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to+\infty$).

Ta có

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\right) = 1$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}\left[y-a_2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} = \frac{1}{2}$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ hai là $d_2 : y = x+\frac{1}{2}$.

b) TXĐ $D = (-\infty;1]\cup[3;+\infty)$

- Giả sử $d_1 : y = a_1x+b_1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to-\infty$).
  Ta có

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(-\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right) = -1$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}\left[y-a_1x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3}+x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}-x} = 2$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ nhất là $d_1 : y = -x+2$.

- Giả sử $d_2 : y = a_2x+b_2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to+\infty$).
  Ta có

$$a_2 = \lim_{x\to+\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}}\right) = 1$$

$$b_2 = \lim_{x\to+\infty}\left[y-a_2x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2-4x+3}-x\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-4x+3}{\sqrt{x^2-4x+3}+x} = -2$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ hai là $d_2 : y = x-2$.

Ví dụ 2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y = x+\sqrt{x^2+1};$ $\qquad$ $b)\ y = x+\sqrt{x^2-1}.$

Lời giải

a) TXĐ: $\mathrm{D} = \mathbb{R}$.

- Giả sử $d_1 : y = a_1x+b_1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to-\infty$). Ta có

$$a_1 = \lim_{x\to-\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right) = 0.$$

$$b_1 = \lim_{x\to-\infty}\left[y-a_1x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+1}\right] = \lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{x-\sqrt{x^2+1}} = 0.$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ nhất là $d_1 : y = 0$.

- Giả sử $d_2 : y = a_2x+b_2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to+\infty$). Ta có

$$a_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)=2.$$

$$b_2=\lim_{x\to+\infty}\left[y-a_2x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\sqrt{x^2+1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0.$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ hai là $d_1: y=2x.$

b) TXĐ: $\mathrm{D}=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

- Giả sử $d_1: y=a_1x+b_1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to-\infty$).
  Ta có

$$a_1=\lim_{x\to-\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=0.$$

$$b_1=\lim_{x\to-\infty}\left[y-a_1x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2+1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=0.$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ nhất là $d_1: y=0.$

- Giả sử $d_2: y=a_2x+b_2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (Khi $x\to+\infty$).
  Ta có

$$a_2=\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)=2.$$

$$b_2=\lim_{x\to+\infty}\left[y-a_2x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-1}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}+x}=0.$$

Khi đó, ta được tiệm cận xiên thứ hai là $d_1: y=2x.$

Chú ý: Với các đồ thị hàm số vô tỉ dạng khác, để xác định các đường tiệm cận ta có thể thực hiện theo các bước

- **Bước 1:** Tìm miền xác định D và miền giá trị I (nếu có thể) của hàm số, nếu D hoặc I có chứa ∞ thì thực hiện bước 2, còn trái lại kết luận đồ thị hàm số không có tiệm cận.
- **Bước 2:** Dựa vào miền D và miền giá trị I tìm các tiệm cận của đồ thị hàm số. Nếu hàm số chứa căn bậc chẵn, nói chung ta thường phải tìm các tiệm cận khi $x\to\pm\infty$.

Ví dụ 3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\, y=\sqrt{16-x^2}$; $\qquad$ $b)\, y=\sqrt{\sqrt{x^2-x+1}-x}$.

Lời giải

a) Điều kiện: $16-x^2\ge 0\Leftrightarrow -4\le x\le 4$

Do đó TXĐ $D=[-4;4]$ không chứa ∞.

Miền giá trị I của hàm số được xác định như sau

$16-x^2\le 16\Rightarrow 0\le\sqrt{16-x^2}\le 4$.

Do đó miền giá trị $I=[0;4]\Rightarrow I$ không chứa ∞.

Vậy hàm số không có tiệm cận.

b) Điều kiện

$$\sqrt{x^2-x+1}-x\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-x+1}\geq x \qquad \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\leq 0\\ x^2-x+1\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}x\geq 0\\ x^2-x+1\geq x^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq 0\\ 0\leq x\leq 1\end{array}\right.\Rightarrow D=(-\infty;1]$$

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{\sqrt{x^2-x+1}-x}=+\infty.$$

Vậy đồ thị hàm số không có tiệm cận.

Ví dụ 4. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y=\dfrac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1};\qquad b)\ y=\dfrac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}.$

Lời giải

a) TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.

Ta có $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}y=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}=-\infty$ và $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}y=\lim_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^+}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}=+\infty$

Suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{2}$.

Mặt khác: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{-\sqrt{2}}{2}$

$\Rightarrow y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$\lim_{x\to+\infty}y=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+1}}{2x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2+\frac{1}{x^2}}}{2-\frac{1}{x}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

b) TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=2$$

Vậy $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x\to-\infty$).

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=-2$$

Vậy $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số (khi $x\to+\infty$).

II. Bài tập tự luyện

BT 1 **.** Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y=\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}$; $\quad b)\ y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$; $\quad c)\ y=\dfrac{\sqrt{x}}{4-x^2}$.

Hướng dẫn

a) Tập xác định $D=(-\infty;5)$.

Ta có : $\lim\limits_{x\to5^-} y=\lim\limits_{x\to5^-}\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}=+\infty$

Vậy, đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=5$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0\Rightarrow TCN: y=0$.

b) Tập xác định $D=(-\infty;5)$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1\Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số khi $x\to+\infty$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty\Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}=0\Rightarrow$ hàm không có tiệm cận xiên khi $x\to\pm\infty$.

c) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{4-x^2}$

TXĐ: $D=(0;+\infty)\setminus\{2\}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{2-x}.\dfrac{\sqrt{x}}{2+x}=-\infty;\quad \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{1}{2-x}.\dfrac{\sqrt{x}}{2+x}=+\infty$

$\Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

BT 2. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y=\sqrt{x^2-1};$ $\quad b)\ y=2x+\sqrt{x^2-1};$ $\quad c)\ y=\sqrt{x^2+4}.$

Hướng dẫn

$a)\ y=\sqrt{x^2-1}$

TXĐ: $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng và không có tiêm cận ngang

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}=-1;$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(-x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\sqrt{x^2-1}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-1}-x}=0$$

Suy ra đường thẳng $y=-x$ là tiệm cận xiên (Khi $x\to-\infty$).

Tương tự , đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên (Khi $x\to+\infty$).

$b)\ y=2x+\sqrt{x^2-1}$.

TXĐ $D=(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$.

Đồ thị không có tiệm cận đứng, không có tiệm cận ngang

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[2+\frac{|x|}{x}\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right]=1;$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[x+\sqrt{x^2-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=0.$$

Suy ra đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên (Khi $x\to-\infty$).

Tương tự , đường thẳng $y=3x$ là tiệm cận xiên (Khi $x\to+\infty$).

$c)\ y=\sqrt{x^2+4}$.

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang, không có tiệm cận đứng.

Có hai đường tiệm cận xiên là $y=x$ và $y=-x$.

BT 3. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1};$ $\quad b)\ y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+1};$ $\quad c)\ y=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}.$

Hướng dẫn

$a)\ y=\dfrac{\sqrt{x^2+x}}{x-1}$. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $(\text{Khi } x\to+\infty)$

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-1 \Rightarrow y=-1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $(\text{Khi } x\to-\infty)$

b) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+1}$. TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Tiệm cận đứng là $x=-1$; Tiệm cận ngang là $y=0$.

$c) y=x+\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Tiệm cận đứng $x=0\left(\text{Khi } x\to 0^+\right)$; Tiệm cận xiên $y=x(\text{Khi } x\to+\infty)$.

BT 4. Tìm các đường tiệm cận của đồ thị các hàm số sau:

$a)\ y=x+\sqrt{x^2+2x};$ $\qquad$ $b) y=2x-\sqrt{4x^2-x+2}.$

Hướng dẫn

$a)\ y=x+\sqrt{x^2+2x}$.

Tiệm cận ngang $y=-1(\text{Khi } x\to-\infty)$; Tiệm cận xiên $y=2x+1(\text{Khi } x\to+\infty)$.

$b) y=2x-\sqrt{4x^2-x+2}$

Tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{4}\ (\text{Khi } x\to+\infty)$;

Tiệm cận xiên $y=4x-\dfrac{1}{4}(\text{Khi } x\to-\infty)$.

Dạng 3: Một số bài toán tiệm cận có chứa tham số m

I. Các Ví dụ

Ví dụ 1. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{2x+2m-1}{x+m}$ có tiệm cận đứng qua điểm $M\left(-3;1\right)$.

Lời giải

Ta có: $y=\frac{2x+2m-1}{x+m}=2-\frac{1}{x+m}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to(-m)^+} y=\lim\limits_{x\to(-m)^-} y=\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=-m$.

Tiệm cận đứng qua điểm $M\left(-3;1\right)$ khi và chỉ khi $-m=-3\Leftrightarrow m=3$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\frac{3x-4}{x-2}$ có đồ thị $\left(C\right)$. Tìm điểm thuộc $\left(C\right)$ cách đều 2 đường tiệm cận.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$, tiệm cận ngang là $y=3$

Gọi $M\left(x;y\right)\in\left(C\right)$ và cách đều 2 tiệm cận $x=2$ và $y=3$

$$\Leftrightarrow\left|x-2\right|=\left|y-3\right|\Leftrightarrow\left|x-2\right|=\left|\frac{3x-4}{x-2}-3\right|\Leftrightarrow\left|x-2\right|=\left|\frac{2}{x-2}\right|,\ x\neq 2$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x-2=\frac{2}{x-2} \\ x-2=-\frac{2}{x-2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(x-2\right)^2=2 \\ \left(x-2\right)^2=-2\ \text{(loại)}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=2-\sqrt{2} \\ x=2+\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán $M_1\left(2-\sqrt{2};3-\sqrt{2}\right)$; $M_2\left(2+\sqrt{2};3+\sqrt{2}\right)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{x+1}$. Tìm những điểm trên $\left(C\right)$ sao cho tổng khoảng cách đến hai tiệm cận là nhỏ nhất.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là là $x=-1$, tiệm cận ngang là $y=2$.

Gọi $M\left(x;y\right)\in\left(C\right)$.

Khoảng cách từ M đến tiêm cận ngang là $d_1=\left|y-2\right|=\left|\frac{2x+1}{x+1}-2\right|=\left|\frac{1}{x+1}\right|$.

Khoảng cách từ M đến tiêm cận đứng là $d_2=\left|x+1\right|$.

Tổng khoảng cách hai tiệm cận là

$d=d_1+d_2=\left|\frac{1}{x+1}\right|+|x+1|\ge 2\sqrt{\left|\frac{1}{x+1}\right|.|x+1|}=2$

Dấu ‘‘=’’ xảy ra khi $\left|\frac{1}{x+1}\right|=|x+1|\Leftrightarrow(x+1)^2=1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=1\\x+1=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$

$\min d=2$ đạt được khi $x=0,x=-2$.

Vậy có hai điểm M thỏa mãn yêu cầu bài toán $M_1(0;1)$; $M_2(-2;3)$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=\frac{2x+m}{mx-1}$. Tìm m sao cho đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang và các tiệm cận cùng với hai trục tọa độ tạo thành một hình chữ nhật có diện tích bằng 8.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang và tiệm cận đứng khi $m\ne 0$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=\frac{2}{m}$ và tiệm cận đứng là $x=\frac{1}{m}$.

Hai tiệm cận tạo với hai trục tọa độ thành 1 hình chữ nhật có diện tích bằng 8 nên $\left|\frac{2}{m}\right|.\left|\frac{1}{m}\right|=8\Leftrightarrow\left|\frac{2}{m^2}\right|=8\Leftrightarrow m=\pm\frac{1}{2}$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\pm\frac{1}{2}$.

Ví dụ 5. Tìm giá trị của tham số m sao cho đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}$ có tiệm cận xiên tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải

Ta có $y=\frac{2x^2+3mx-m+2}{x-1}=2x+3m+2+\frac{2m+4}{x-1}$.

- Với $m=-2$ thì hàm số trở thành $y=2x-4$. Đây là hàm số bậc nhất nên không có tiệm cận.
- Với $m\ne 2$ thì $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-(2x+3m+2)\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2m+4}{x+2}=0$.

Do đó với $m\ne 2$ thì đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là Δ: $y=2x+3m+2$.

Δ cắt trục hoành tại điểm $A\left(\frac{-3m-2}{2};0\right)$ và cắt trục tung tại $B(0;3m+2)$.

Từ đó $OA=\frac{|-3m-2|}{2}=\frac{|3m+2|}{2}$, $OB=|3m+2|$.

Theo giả thiết

$$S_{OAB}=4\Leftrightarrow \frac{1}{2}OA.OB=4\Leftrightarrow \frac{|3m+2|}{2}.|3m+2|=8\Leftrightarrow (3m+2)^2=16$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3m+2=-4\\3m+2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m=-2\,(\text{loại})\\m=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\frac{2}{3}$.

Ví dụ 6: Gọi (C_m) là đồ thị của hàm số $y=mx+\frac{1}{x}$ (*), m là tham số. Tìm m để hàm số (*) có cực trị và khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C_m) đến đường tiệm cận xiên bằng $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Lời giải

TXĐ: $D=\mathbb{R}$. Ta có $y'=m-\frac{1}{x^2}=\frac{mx^2-1}{x^2}$.

Hàm số (*) có cực trị khi $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow \frac{1}{m}>0\Leftrightarrow m>0$.

Lúc đó $y'=0\Leftrightarrow x_1=-\frac{1}{\sqrt{m}},x_2=\frac{1}{\sqrt{m}}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{-1}{\sqrt{m}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{m}}$		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y		↗		↘	||	↘		↗	

Điểm cực tiểu của (C_m) là $M\left(\frac{1}{\sqrt{m}};2\sqrt{m}\right)$.

Tiệm cận xiên $\Delta: y=mx\Leftrightarrow mx-y=0$.

Theo đề

$$d(M,\Delta)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{\left|\sqrt{m}-2\sqrt{m}\right|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2m=m^2+1\Leftrightarrow m=1.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $m=1$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\frac{mx^2+(3m^2-2)x-2}{x+3m}$ (1), m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0.

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{mx^2+\left(3m^2-2\right)x-2}{x+3m}=mx-2+\dfrac{6m-2}{x+3m}$.

- Khi $m=\dfrac{1}{3}$ đồ thị hàm số không tồn tại hai tiệm cận.
- Khi $m\neq\dfrac{1}{3}$ đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta_1: y=mx-2\Leftrightarrow mx-y-2=0$, tiệm cận đứng là $\Delta_2: x=-3m\Leftrightarrow x+3m=0$.

  Góc giữa hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số (1) bằng 45^0 nên

  $$\cos 45^0=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}=\frac{|m|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow m=\pm 1.$$

  Vậy giá trị m cần tìm là $m=\pm 1$.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}$ (1), m là tham số thực. Tìm giá trị của m để đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số (1) tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Ta có $y=\dfrac{x^2+(m-1)x+m^2-2m+1}{1-x}=-x-m+\dfrac{m^2-m+1}{1-x}$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta: y=-x-m$.

Tiệm cận xiên cắt hai trục tọa độ tại hai điểm $A(0;-m)$ và $B(-m;0)$.

Diện tích tam giác OAB là $S=\dfrac{1}{2}OA.OB=\dfrac{1}{2}|y_A|.|y_B|=\dfrac{1}{2}m^2$.

Theo giả thiết $S=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow m^2=1\Leftrightarrow m=\pm 1$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=\pm 1$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+\left(m^2+m+2\right)x+m^2+3}{x+1}$ (1), m là tham số thực. Tìm giá trị của m để khoảng cách từ gốc tọa độ O đến đường tiệm cận xiên là nhỏ nhất.

Lời giải

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

Ta có $y=\dfrac{mx^2+\left(m^2+m+2\right)x+m^2+3}{x+1}=mx+m^2+2+\dfrac{1}{x+1}$.

Để đồ thị hàm số có tiệm cận xiên thì điều kiện $m\neq 0$. Lúc đó tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $\Delta: y=mx+m^2+2\Leftrightarrow mx-y+m^2+2=0$.

Ta có $d\left(0,\Delta\right)=\dfrac{\left|m^2+2\right|}{\sqrt{\left|m^2+1\right|}}=\sqrt{m^2+1}+\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}\geq 2$

$\min d\left(O,\Delta\right)=2$ khi $\sqrt{m^2+1}=\dfrac{1}{\sqrt{m^2+1}}\Leftrightarrow m=0$.

Vậy giá trị m cần tìm là $m=0$.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y=2x+1-\dfrac{1}{x+2}$ $\left(C\right)$, m là tham số thực. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc đồ thị, qua M vẽ hai đường thẳng lần lượt song song với hai đường tiệm cận của đồ thị, hai đường thẳng này tạo với đồ thị một hình bình hành. Chứng minh diện tích hình bình hành không đổi.

Lời giải

TXĐ: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\left\{-2\right\}$. Gọi $MNIP$ là hình bình hành tạo bởi hai tiệm cận của $\left(C\right)$, và hai đường thẳng vẽ từ M lần lượt song song với hai tiệm cận này.

Gọi $M\left(x_0;2x_0+1-\dfrac{1}{x_0+2}\right)\in\left(C\right)$.

Ta có $\begin{cases}N\in TCX\\ MN\perp Ox\end{cases}\Rightarrow N\left(x_0;2x_0+1\right)\Rightarrow MN=\left|y_M-y_N\right|=\dfrac{1}{\left|x_0+2\right|}$.

Đường thẳng MN qua M và song song với đường tiệm cận đứng nên phương trình $x-x_0=0\Rightarrow d\left(I,MN\right)=\left|-2-x_0\right|=\left|x_0+2\right|$.

Diện tích của hình bình hành $MNIP$ là $S=MN.d\left(I,MN\right)=\left|\dfrac{1}{x_0+2}\right|.\left|x_0+2\right|=1$

Ví dụ 11. Cho đường cong $\left(C_m\right):y=\dfrac{4\left(m+1\right)x^2-4mx-\left(m^3-m^2+2\right)}{2x-m}$.

Gọi $\left(d_m\right)$ là tiệm cận xiên của $\left(C_m\right)$. Chứng minh $\left(d_m\right)$ tiếp xúc với một Parabol cố định.

Lời giải

Ta có $y=\dfrac{4\left(m+1\right)x^2-4mx-\left(m^3-m^2+2\right)}{2x-m}=2\left(m+1\right)x+\left(m^2-m\right)-\dfrac{2}{2x-m}$

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $\Delta:y=2\left(m+1\right)x+\left(m^2-m\right)$.

$$y=2\left(m+1\right)x+\left(m^2-m\right)=m^2+2\left(x-\frac{1}{2}\right)m+2x$$

$$=\left[m^2+2\left(x-\frac{1}{2}\right)m+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right]+2x-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\left[m+\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2-x^2+3x-\frac{1}{4}(*)$$

Gọi (P) là parabol $y=-x^2+3x-\frac{1}{4}$. Lúc đó $(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của (P) và Δ.

II. Bài tập rèn luyện

BT 1. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x-2}\,(C)$.

a) Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ điểm M thuộc (C) đến hai đường tiệm cận bằng một số không đổi.

b) Tìm điểm M thuộc (C) để tổng khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang bằng 4 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng.

Hướng dẫn

$M\left(x;1+\frac{1}{x-2}\right)\in(C)$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=2$, tiệm cận ngang là $y=1$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang là $d_1=|y-1|=\left|\frac{x-1}{x-2}-1\right|=\left|\frac{1}{x-2}\right|$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $d_2=|x-2|$.

a) $d=d_1.d_2=\left|\frac{1}{x+1}\right|.|x+1|=2$.

b) $d_1+d_2=\left|\frac{1}{x-2}\right|+|x-2|\geq 2$ Dấu ‘‘=’’ xảy ra khi

$$\left|\frac{1}{x-2}\right|=|x-2|\Leftrightarrow (x-2)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-2=1\\x-2=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=1\end{array}\right..$$

$\min d=2$ đạt được khi $x=3, x=1$.

c) Theo đề bài khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang bằng 4 lần khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng nên

$$\left|\frac{1}{x-2}\right|=4.|x-2|\Leftrightarrow\frac{1}{(x-2)^2}=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2=\frac{1}{2}\\x-2=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{5}{2}\\x=\frac{3}{2}\end{array}\right.$$

Vậy có 2 điểm $M_1\left(\frac{5}{2};3\right), M_2\left(\frac{3}{2};-1\right)$.

BT 2. Cho haøm soá $(C): y=\frac{2x+m}{x-m}$. Goïi I laø giao ñieåm cuûa hai ñöôøng tieäm caän. Tìm m ñeå ñöôøng troøn taâm I, baùn kính $R=2$ tieáp xuùc vôùi $y=-2x+m$.

Hướng dẫn

Ta có $I(m;2)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Đường tròn tâm $I(m;2)$ bán kính $R=2$ tiếp xúc với đường thẳng

$\Delta: y=-2x+m \Leftrightarrow \Delta: 2x+y-m=0$ khi và chỉ khi $d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|2m+2-m|}{\sqrt{5}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2\sqrt{5}-2 \\ m=-2\sqrt{5}-2 \end{array}\right.$.

BT 3. Cho $(C): y=\dfrac{x+7}{x-2}$. Goïi I laø giao ñieåm cuûa hai ñöôøng tieäm caän. Tìm $M\in(d): y=x+2$ sao cho IM nhỏ nhất.

Hướng dẫn

Ta có $I(2;1)$ là giao điểm hai đường tiệm cận.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên $d \Rightarrow IH \le IM$.

Do đó IM nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I lên d.

Gọi $M(m;m+2)\in d$. Ta có $\overrightarrow{IM}=(m-2;m+1)$, $\overrightarrow{u_d}=(1;1)$.

$\overrightarrow{IM}.\overrightarrow{u_d}=0 \Leftrightarrow m-2+m+1=0 \Leftrightarrow 2m=1 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

BT 4. Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2+(3m+1)x-m+2}{x+1}$ có tiệm cận xiên Δ, biết Δ tiếp xúc với đường tròn tâm $I(1;2)$, bán kính $\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

Điều kiện: $m\neq 0$; Tiệm cận xiên $\Delta: y=mx+2m+1 \Leftrightarrow mx-y+2m+1=0$

Δ tiếp xúc với đường tròn $I(1;2)$, bán kính bằng $\sqrt{2} \Leftrightarrow d(I;\Delta)=\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{|3m-1|}{\sqrt{m^2+1}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow 7m^2-6m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-\dfrac{1}{7} \end{array}\right.$.

BT 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}\,(C)$.

a) Chứng minh tích khoảng cách từ một điểm bất kì trên (C) đến hai đường tiệm cận là không đổi.

b) Chứng minh không có tiếp tuyến nào của (C) đi qua giao điểm của hai tiệm cận.

Hướng dẫn

a) $M\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;x_0+2+\dfrac{3}{x_0-1}\right)$

$\begin{array}{l} TCN \text{ là } \Delta_1: x-1=0 \\ TCĐ \text{ là } \Delta_2: x-y+2=0 \end{array}$. Từ đó: $d_1.d_2=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\,(đpcm)$

b) $I(1;3)=\Delta_1\cap\Delta_2$.

Giả sử Δ là tiếp tuyến bất kỳ của (C), lúc đó Δ có dạng:

$\Delta: y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

$I\in\Delta \Leftrightarrow \dfrac{6}{x_0-1}=0$: phương trình này vô nghiệm.

Vậy không có tiếp tuyến nào của đồ thị đi qua I.

BT 6. Gọi (C) là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{(m+1)x^2+(2m+1)x+m+2}{x+1}$.

a) Tìm m để tiệm cận xiên đi qua điểm $M(1;2)$.

b) Tìm m để tiệm cận xiên vuông góc với đường thẳng $d: 3x+4y-5=0$.

c) Chứng minh rằng giao điểm của hai đường tiệm cận của (C) luôn thuộc Parabol $(P): y=-x^2$.

Hướng dẫn

$$y=\frac{(m+1)x^2+(2m+1)x+m+2}{x+1}=(m+1)x+m+\frac{2}{x+1}$$

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $\Delta: y=(m+1)x+m$, tiệm cận đứng là $x=-1$.

a) Vì tiệm cận xiên đi qua điểm $M(1;2)$

nên $2=(m+1).1+m \Leftrightarrow 2m=1 \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{2}$.

b) Ta có $\Delta: y=(m+1)x+m \Leftrightarrow (m+1)x-y+m=0$.

Tiệm cận xiên vuông góc với đường thẳng $d: 3x+4y-5=0$

nên $(m+1).3+4.(-1)=0 \Leftrightarrow m+1=\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow m=\dfrac{1}{3}$.

c) Giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-1;-1)\in(P)$.

BT 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2\cos\alpha+2x\sin\alpha+1}{x-2}$. Định α để đường tròn có tâm là gốc tọa độ tiếp xúc với tiệm cận xiên của (C) có bán kính lớn nhất.

Hướng dẫn

$$y=\frac{x^2\cos\alpha+2x\sin\alpha+1}{x-2}=x\cos\alpha+2(\sin\alpha+\cos\alpha)+\frac{1+4(\sin\alpha+\cos\alpha)}{x-2}$$

Để đồ thị hàm số có tiệm cận xiên thì $\begin{cases}\cos\alpha\neq 0\\ 1+4\sqrt{2}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi\\ \sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\neq\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\end{cases}$

Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số

$y = x\cos\alpha + 2(\sin\alpha + \cos\alpha) \Leftrightarrow x\cos\alpha - y + 2(\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$.

Đường tròn tâm O tiếp xúc với tiệm cận xiên nên khoảng cách từ O đến tiệm cận xiên bằng R

Ta có $R = \dfrac{2|\sin\alpha + \cos\alpha|}{\sqrt{\cos^2\alpha + 1}} \Rightarrow R^2 = \dfrac{4(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{1 + \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \dfrac{8(1 + \sin 2\alpha)}{3 + \cos 2\alpha}$

Đặt $m = \dfrac{8(1+\sin 2\alpha)}{3 + \cos 2\alpha}$ xác định với mọi α.

$m = \dfrac{8(1+\sin 2\alpha)}{3+\cos 2\alpha} \Leftrightarrow \sin 2\alpha - m\cos 2\alpha = 3m - 1$ (*)

Phương trình (*) ẩn α có nghiệm $\Leftrightarrow 1 + m^2 \geq (3m-1)^2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \dfrac{3}{4}$.

Do đó $\max m = \dfrac{3}{4}$, suy ra giá trị lớn nhất của $R = \sqrt{8.\dfrac{3}{4}} = \sqrt{6}$.

Thay $m = \dfrac{3}{4}$ vào (*) ta được $\sin 2\alpha - \dfrac{3}{4}\cos 2\alpha = \dfrac{5}{4} \Leftrightarrow 4\sin 2\alpha - 3\cos 2\alpha = 5$

$\Leftrightarrow \cos(2\alpha + \varphi) = -1 \Leftrightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\left(\cos\varphi = \dfrac{3}{5}; \sin\varphi = \dfrac{4}{5}\right)$

Vậy R lớn nhất khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\varphi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

BT 8. Cho hàm số $y = \dfrac{ax^2 - (3a-1)x + 2a}{x-1}$.

Chứng minh tiệm cận xiên đi qua điểm cố định với mọi a.

Hướng dẫn

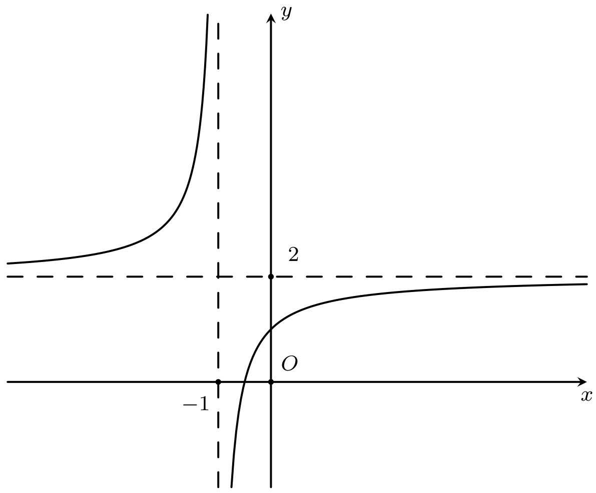
Ta có $y = \dfrac{ax^2 - (3a-1)x + 2a}{x-1} = ax + 1 - 2a + \dfrac{1}{x-1}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là $y = ax + 1 - 2a$.

Tiệm cận xiên luôn đi qua điểm cố định $A(2,1)$.

Dạng 4: Dựa vào đồ thị và bảng biến thiên xác định các đường tiệm cận

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



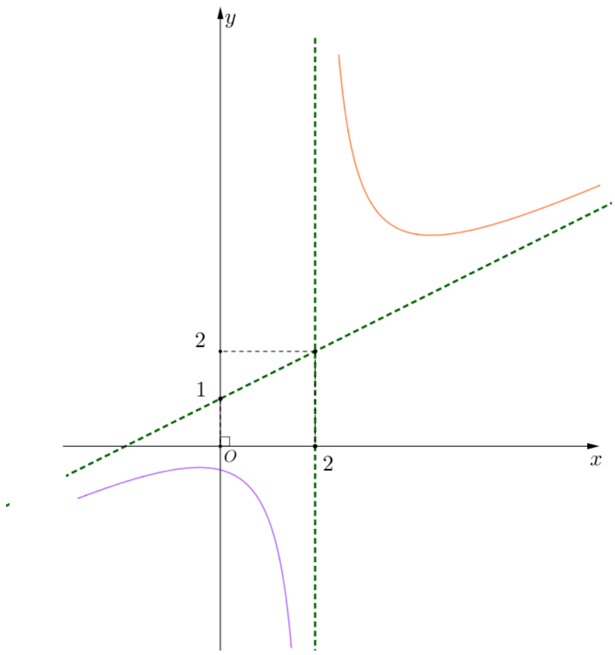
Phương trình đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị có đường tiệm cận ngang là $y = 2$ và tiệm cận đứng là $x = -1$

.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là?

Lời giải

Gọi đường tiệm cận xiên của đồ thị có dạng $y = ax + b$

Dựa vào hình vẽ ta thấy đường tiệm cận xiên đi qua hai điểm $A(2;2)$ và $B(0;1)$ suy ra

$$\begin{cases} 2a + b = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy đường tiệm cận xiên của đồ thị là $y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	||	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	1

Tìm phương trình đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$ và $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -1$

Từ đó suy ra các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=1$ và $y=-1$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$

Từ đó suy ra các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=-1$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	-1 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ -1

Tìm phương trình đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số?

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-1$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$

Từ đó suy ra các đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là đường thẳng $y=-1$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)=-\infty$

Từ đó suy ra các đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=2$.

D. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x-4}{x^2-16}$.

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$$y=\frac{(x-4)(x+1)}{(x-4)(x+4)}=\frac{x+1}{x+4}\Rightarrow \text{TCĐ: } x=-4.$$

Câu 2: Đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2}$ là

A. $y=2$. **B.** $x=2$. **C.** $x=2$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có tiệm cận đứng $x=2$.

Câu 3: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3-3x-2}{x^2+3x+2}$ là đường thẳng.

A. $x=-2$. **B.** Không có tiệm cận đứng.

C. $x=-1$; $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Chọn A

$$y=\frac{(x+1)(x^2-x-2)}{(x+1)(x+2)}=\frac{x^2-x-2}{x+2}\Rightarrow \text{TCĐ. } x=-2.$$

Câu 4: Cho hàm số $y=\frac{2x-1}{x+2}$ có đồ thị *(C)*. Tìm tọa độ giao điểm *I* của hai đường tiệm cận của đồ thị *(C)*.

A. $I(-2;2)$. **B.** $I(2;2)$. **C.** $I(2;-2)$. **D.** $I(-2;-2)$.

Lời giải

Ta có tiệm cận đứng $x=-2$.Lại có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{x+2}=2\Rightarrow TCN: y=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{x+2}=2\Rightarrow TCN: y=2\end{cases}\Rightarrow I(-2;2)$.

Câu 5: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{5}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình?

A. $y=5$. **B.** $x=0$. **C.** $x=1$. **D.** $y=0$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5}{x-1}=0\Rightarrow TCN: y=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x-1}=0\Rightarrow TCN: y=0\end{cases}$.

Câu 6: Đường thẳng nào dưới đây là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\frac{1-4x}{2x-1}$.

A. $y=2$. **B.** $y=4$. **C.** $y=\frac{1}{2}$. **D.** $y=-2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-4x}{2x-1}=-2\Rightarrow TCN: y=-2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-4x}{2x-1}=-2\Rightarrow TCN: y=-2\end{cases}$.

Câu 7: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng.

A. $y=\frac{x+2}{x-1}$. **B.** $y=\frac{x^3}{x^2+2}$. **C.** $y=\sqrt{x^2+1}$. **D.** $y=\frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\frac{x+2}{x-1}$ có TCĐ $x=1$.

Câu 8: Đồ thị của hàm số $y=\frac{x-2}{x+1}$ có đường tiệm cận đứng là

A. $y=-1$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Chọn B

Ta có tiệm cận đứng $x=-1$.

Câu 9: Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng có đồ thị hàm số nào trong các hàm số sau đây?

A. $y=\frac{2x-3}{x-1}$. **B.** $y=\frac{3x+2}{3x-1}$. **C.** $y=\frac{x+3}{x+1}$. **D.** $y=\frac{x}{x^2+1}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\frac{2x-3}{x-1}$ có TCĐ $x=1$.

Câu 10: Đồ thị hàm số nào dưới đây có tiệm cận đứng?

A. $y=2^x$. **B.** $y=\log_2 x$. **C.** $y=\frac{x^2}{x^2+1}$. **D.**

$y=\frac{x^2-4x+3}{x-1}$.

Lời giải

Chọn B.

Dễ thấy đồ thị hàm số $y=\log_2 x$ có TCĐ $x=0$.

Câu 11: Tìm số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$y=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\frac{x-1}{x+2}\Rightarrow$ TCĐ: $x=-2$.

Câu 12: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\frac{x^2-4x-5}{x^2-3x+2}$.

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

$y=\dfrac{(x+1)(x-5)}{(x-1)(x-2)}\Rightarrow$ TCĐ: $x=1;\ x=2.$

Mặt khác $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=1\Rightarrow TCN: y=1\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=1\Rightarrow TCN: y=1\end{cases}$.

Câu 13: Đồ thị hàm số nào dưới đây có hai tiệm cận đứng?

A. $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{2x^2-3x+1}}$ **B.** $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ **C.** $y=\dfrac{x+1}{x^2+x}$ **D.** $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x^2-5x+6}$

Lời giải

Chọn D

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+3}}{x^2-5x+6}$ có hai tiệm cận đứng là $x=2,\ x=3$.

Câu 14: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

A. 2. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

$y=\dfrac{1-\sqrt{1-x}}{x}=\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x}}\Rightarrow$ đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=0$.

Câu 15: Đồ thị hàm số nào sau đây **không** có tiệm cận ngang?

A. $f(x)=3^x$ **B.** $g(x)=\log_3 x$ **C.** $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$ **D.** $k(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{2x+3}$

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $\log_3 x$ không có tiệm cận ngang.

Câu 16: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-9}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4 **B.** 1 **C.** 3 **D.** 2

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$ và $x=-3$, tiệm cận ngang $y=0$.

Câu 17: Tìm số tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-1}$

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn B

$y=\dfrac{x^2-7x+6}{x^2-1}=\dfrac{x-6}{x+1}$ có tiệm cận đứng là $x=-1$, tiệm cận ngang là $y=1$.

Câu 18: Đồ thị hàm số nào sau đây có ba đường tiệm cận?

A. $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$ **B.** $y=\dfrac{1}{4-x^2}$ **C.** $y=\dfrac{x+3}{3x-1}$ **D.** $y=\dfrac{x}{x^2-x+9}$

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-2x}{1+x}$ có 2 đường tiệm cận.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{4-x^2}$ có 2 đường tiệm cận đứng là $x=\pm 2$. Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4-x^2}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Do đó đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{4-x^2}$ có 3 đường tiệm cận.

Câu 19: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$?

A. 1 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 3

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}}=-1$

Suy ra đồ thị có hai đường tiệm cận ngang $y=\pm 1$ và không có tiệm cận đứng.

Câu 20: Đồ thị hàm số nào sau đây có 3 đường tiệm cận?

A. $y=\dfrac{x+1}{x^2-9}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x+2}{x^2+3x+6}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+4x+8}}$

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-9}=\dfrac{x+1}{(x-3)(x-3)}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng $x=\pm 3$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-9}=0\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-9}$ có 3 đường tiệm cận.

Câu 21: Đồ thị hàm số nào trong các hàm số được cho dưới đây **không** có tiệm cận ngang?

A. $y=\dfrac{x+2}{x^2+1}$. **B.** $y=\dfrac{x+2}{x+1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2-1}{x+2}$. **D.** $y=\dfrac{1}{x+2}$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y=\dfrac{x^2-1}{x+2}$ có bậc của tử số lớn hơn bậc của mẫu số nên đồ thị của nó không có tiệm cận ngang.

Câu 22: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{|x|+1}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{x+1}=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{|x|+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{-x+1}=-1$

Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y=\pm 1$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+4x-1}{x^2+2x-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{1;-3\}$.

Khi đó: $y=\dfrac{2x^2+4x-1}{(x-1)(x+3)}\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} y=\infty,\ \lim\limits_{x\to -3} y=\infty \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=1,\ x=-3$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to\infty} y-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+4x-1}{x^2+2x-3}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}=2\Rightarrow y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 24: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 1 **B.** 2 **C.** 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2};2\right\}$.

Khi đó: $y=\dfrac{3x^2-7x+2}{2x^2-5x+2}=\dfrac{(3x-1)(x-2)}{(2x-1)(x-2)}=\dfrac{3x-1}{2x-1}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x=\dfrac{1}{2}$.

Câu 25: Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2-3x}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận ngang?

A. 3 **B.** 1 **C.** 4 **D.** 2

Lời giải

Chọn D

Ta có: $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-4}-\sqrt{x^2-3x}}=\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-3x}}{x^2-4-(x^2-3x)}=\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-3x}}{3x-4}$

Khi đó $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-3x}}{3x-4}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{3-\frac{4}{x}}=\dfrac{-2}{3}\Rightarrow y=\dfrac{-2}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-4}+\sqrt{x^2-3x}}{3x-4}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-\sqrt{1-\frac{4}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{3-\frac{4}{x}}=\dfrac{-2}{3}\Rightarrow y=\dfrac{-2}{3}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

Câu 26: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{\sqrt{4-x^2}}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=[-2;2]$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{2x+1}{\sqrt{(x+2)(2-x)}}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-2)^+} y=\lim\limits_{x\to(-2)^+}\dfrac{2x+1}{\sqrt{(x+2)(2-x)}}=-\infty$.

Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng $x=\pm 2$.

Câu 27: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{6-x^2}}{x^2+3x-4}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\left[-\sqrt{6};\sqrt{6}\right]\backslash\{1\}$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{6-x^2}}{(x-1)(x+4)}=\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng $x=1$.

Câu 28: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+6}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D=[-2;2)$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 2^-} y=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{(2-x)(x+2)}}{(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\sqrt{x+2}}{-\sqrt{2-x}}.\dfrac{1}{x-3}=+\infty$

$\Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=2$.

Câu 29: Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\left[-1;1\right]\setminus\left\{0\right\}$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to 0} y=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x\left(x+2\right)}=\infty \Rightarrow x=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to(-2)} y$.

Vậy đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng.

Câu 30: Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}$ là

A. 2. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định của hàm số là $D=\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)\setminus\left\{1\right\}$.

Khi đó $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=3\\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-1}+3x^2+2}{x^2-x}=3\end{cases}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang $y=3$.

Lại có: $\lim\limits_{x\to 1} y=\infty\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=1$.

Suy ra đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

Câu 31: Số đường tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$.

Ta có:

$$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=1,\ \lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x-2}=\lim\limits_{x\to-\infty}-\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{2}{x}}=-1.$$

Suy ra $y=\pm 1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to 2} y = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x-2} = \infty \Rightarrow x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 32: Tổng số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=(-1;1)$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

$y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{(1-x)(x+1)}}=\sqrt{\dfrac{x+1}{1-x}} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x=1$.

Câu 33: Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{2-x-x^2}}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=(-2;1)$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Ta có: $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{(1-x)(x+2)}}=-\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng $x=-2$.

Câu 34: Tổng số các đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{5-x^2}-2}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\left[-\sqrt{5};\sqrt{5}\right]\setminus\{-1;1\}$. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

Mặt khác $y=\dfrac{5-x^2-4}{(x^2-1)\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}=\dfrac{1-x^2}{(x^2-1)\left(\sqrt{5-x^2}+2\right)}=-\dfrac{1}{\sqrt{5-x^2}+2} \Rightarrow$ Đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

Câu 35: Cho hàm số $y=\dfrac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}$ *(C)*. Gọi m là số tiệm cận của đồ thị hàm số *(C)* và n là giá trị của hàm số *(C)* tại $x=1$ thì tích $m.n$ là.

A. $\frac{6}{5}$ **B.** $\frac{14}{5}$ **C.** $\frac{3}{5}$ **D.** $\frac{2}{15}$

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D=\left(-\infty;-\frac{\sqrt{3}}{2}\right]\cup\left[\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty\right)\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$. Ta có: $n=y(1)=\frac{1+1}{5}=\frac{2}{5}$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1+\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{3}{2}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}y=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x+\sqrt{4x^2-3}}{2x+3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1-\sqrt{4-\frac{3}{x^2}}}{2+\frac{3}{x}}=\frac{-1}{2}\Rightarrow$ Đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang.

Lại có: $\lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)}y=\infty\Rightarrow x=-\frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy $m=3,\ n=\frac{2}{5}\Rightarrow m.n=\frac{6}{5}$.

Câu 36: Hỏi đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn C

TXĐ: $D=[-2;+\infty)\setminus\{2\}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to2}y=\lim\limits_{x\to2}\frac{x-1}{x-\sqrt{x+2}}=\infty\Rightarrow$ đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là $x=2$. Vậy đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận.

Câu 37: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có tiệm cận ngang?

A. $y=\frac{3x+1}{x-1}$ **B.** $y=x^3-2x^2+3x+2$

C. $y=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ **D.** $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-2}$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ có tiệm cận ngang là $y=3$.

Câu 38: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên sau.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	5

Hỏi đồ thị hàm số đã cho có bao nhiêu đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy $\lim\limits_{x\to-\infty} y=3,\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=5 \Rightarrow y=3,\ y=5$ là 2 đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to1} y=\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Do đó đồ thị hàm số có 3 đường tiệm cận.

Câu 39: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-5}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 0 **B.** 4 **C.** 2 **D.** 1

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình $2f\left(x\right)-5=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{5}{2}$.

Dựa vào BBT suy ra phương trình $f\left(x\right)=\dfrac{5}{2}$ có 4 nghiệm phân biệt.

Do đó đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x) - 5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

Câu 40: Đồ thị hàm số $y = \sqrt{4x^2 + 4x + 3} - \sqrt{4x^2 + 1}$ có bao nhiêu tiệm cận ngang?

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y = \dfrac{4x^2 + 4x + 3 - (4x^2 + 1)}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1}} = \dfrac{4x + 2}{\sqrt{4x^2 + 4x + 3} + \sqrt{4x^2 + 1}}$

Khi đó:

$$\lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} \frac{4 + \frac{2}{x}}{\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = 1, \ \lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} \frac{4 + \frac{2}{x}}{-\sqrt{4 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}} - \sqrt{4 + \frac{1}{x^2}}} = -1$$

Do đó đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận ngang là $y = \pm 1$.

Câu 41: Số đường tiệm cận đưng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2 - 3x + 2)\sin x}{x^3 - 4x}$ là.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 2; 0\}$

Khi đó: $y = \dfrac{(x-1)(x-2)\sin x}{(x-2)(x+2)x} = \dfrac{(x-1)\sin x}{(x+2)x}$

Ta có: $\lim\limits_{x \to (-2)} y = \infty, \ \lim\limits_{x \to 0} y = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x-1}{x+2} . \dfrac{\sin x}{x} = -\dfrac{1}{2} . 1 = -\dfrac{1}{2}$.

Do đó đồ thị hàm số có một đường tiệm cận đứng là $x = -2$.

Câu 42: Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x - 1}{x - 1}$. Khi đó đường thẳng nào sau đây là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x) - 2}$?

A. $x = 1$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = -1$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

$y=\dfrac{1}{f(x)-2}=\dfrac{1}{\dfrac{3x-1}{x-1}-2}=\dfrac{x-1}{x+1}\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số

$y=\dfrac{1}{f(x)-2}$.

Câu 43: Cho đường cong $(C): y=\dfrac{2x+3}{x-1}$ và *M* là một điểm nằm trên *(C)*. Giả sử d_1, d_2 tương ứng là các khoảng cách từ *M* đến hai tiệm cận của *(C)*, khi đó $d_1.d_2$ bằng.

A. 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x=1(\Delta_1)$ và tiệm cận ngang $y=2(\Delta_2)$.

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+3}{a-1}\right)\in(C)(a\neq 1)$ ta có: $d_1=d(M;\Delta_1)=|a-1|$ và

$d_2=d(M;\Delta_2)=\left|\dfrac{2a+3}{a-1}-2\right|=\dfrac{5}{|a-1|}$.

Khi đó $d_1.d_2=|a-1|.\dfrac{5}{|a-1|}=5$.

Câu 44: Gọi *(H)* là đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+3}{x+1}$. Điểm $M(x_0;y_0)$ thuộc *(H)* có tổng khoảng cách đến hai đường tiệm cận là nhỏ nhất, với $x_0<0$ khi đó x_0+y_0 bằng?

A. -2. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng $x=-1(\Delta_1)$ và tiệm cận ngang $y=2(\Delta_2)$.

Gọi $M\left(a;\dfrac{2a+3}{a+1}\right)\in(C)(a\neq -1)$ ta có: $d_1=d(M;\Delta_1)=|a+1|$ và

$d_2=d(M;\Delta_2)=\left|\dfrac{2a+3}{a+1}-2\right|=\dfrac{5}{|a+1|}$.

Theo bất đẳng thức Cosi ta có: $d_1+d_2=|a+1|\geq 2\sqrt{|a+1|.\dfrac{1}{|a+1|}}=2$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow |a+1|=\dfrac{1}{|a+1|}\Leftrightarrow (a+1)^2=1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\a=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}M(0;3)\\M(-2;1)\end{array}\right.$.

Do $x_0<0$ nên $M(-2;1)\Rightarrow x_0+y_0=-2+1=-1$.

Câu 45: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x-3}$. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của đồ thị hàm số. Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho đạt giá trị lớn nhất bằng

A. $d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. **B.** $d=1$. **C.** $d=\sqrt{2}$. **D.** $d=\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M\left(a;\dfrac{a-1}{2a-3}\right)\left(a\neq\dfrac{3}{2}\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số.

Phương trình tiếp tuyến tại M là: $y=\dfrac{-1}{(2a-3)^2}(x-a)+\dfrac{a-1}{2a-3}\ (d)$

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x=\dfrac{3}{2}$, tiệm cận ngang $y=\dfrac{1}{2}\Rightarrow I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Khi đó $d(I;d)=\dfrac{\left|\dfrac{a-\frac{3}{2}}{(2a-3)^2}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{a-1}{2a-3}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{(2a-3)^2}+1}}=\dfrac{\left|\dfrac{1-2a+3+2a-2}{2(2a-3)}\right|}{\sqrt{\dfrac{1}{(2a-3)^2}+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{(2a-3)^2}+(2a-3)^2}}$

Do $\dfrac{1}{(2a-3)^2}+(2a-3)^2\geq 2\sqrt{\dfrac{1}{(2a-3)^2}.(2a-3)^2}=2\Rightarrow d\leq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $d_{\max}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{m(x-1)^2+4}}$ có hai tiệm cận đứng

A. $m<0$ **B.** $m=0$ **C.** $\begin{cases}m<0\\m\neq -1\end{cases}$ **D.** $m<1$

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có hai tiệm cận đứng khi phương trình $g(x)=m(x-1)^2+4$ có 2 nghiệm phân biệt khác $-1\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\g(-1)-4m+4\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m\neq -1\end{cases}$.

Câu 47: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{mx^2-2x+3}$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận.

A. $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -1 \\ m<\dfrac{1}{5} \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -1 \\ m<\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} m\neq 0 \\ m<\dfrac{1}{3} \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} m\neq 0 \\ m<\dfrac{1}{5} \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang của mọi m.

Đồ thị hàm số có ba đường tiệm cận $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x)=mx^2-2x+3=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta=1-3m>0 \\ g(1)=m+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m\neq -1 \\ m<\dfrac{1}{3} \end{cases}$.

Câu 48: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}$ có đồ thị là *(C)*. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị *(C)* có đúng 3 đường tiệm cận?

A. $\begin{cases} m<-2 \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$. **B.** $m>2$. **C.** $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$

Lời giải

Chọn C

Do $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x^2-2mx+4}=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị *(C)* có đúng 3 đường tiệm cận thì có phải có 2 đường tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow g(x)=x^2-2mx+4=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'=m^2-4>0 \\ g(-1)=5+2m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<-2 \end{array}\right. \\ m\neq -\dfrac{5}{2} \end{cases}.$$

Câu 49: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}$ có đúng 3 đường tiệm cận.

A. $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m>2\\ m\ne\dfrac{5}{2}\end{cases}\\ m<-2\end{array}\right.$.

B. $\left[\begin{array}{l}m>2\\ \begin{cases}m<-2\\ m\ne-\dfrac{5}{2}\end{cases}\end{array}\right.$

C. $\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.$.

D. $-2<m<2$.

Lời giải

Chọn A

Do $\lim\limits_{x\to\infty} y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2}{x^2-mx+1}=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Để đồ thị *(C)* có đúng 3 đường tiệm cận thì nó phải có 2 đường tiệm cận đứng.

Đồ thi hàm số có 2 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow g(x)=x^2-mx+1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 2.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-4>0\\ g(-1)=5-2m\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}m>2\\ m<-2\end{array}\right.\\ m\ne\dfrac{5}{2}\end{cases}.$$

Câu 50: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+m^2x-m-1}{x+2}$ có tiệm cận đứng.

A. $\mathbb{R}\setminus\{1;-3\}$.

B. $\mathbb{R}$

C. $\mathbb{R}\setminus\left\{1;-\dfrac{2}{3}\right\}$

D. $\mathbb{R}\setminus\left\{1;-\dfrac{3}{2}\right\}$

Lời giải

Chọn D

TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $\Leftrightarrow$ Phương trình $g(x)=x^2+m^2x-m-1=0$ không nhận $x=-2$ là nghiệm $\Leftrightarrow g(-2)=4-2m^2-m-1\ne0\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne1\\ m\ne-\dfrac{3}{2}\end{cases}$.

Câu 51: Tập hợp các giá trị của m để đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{(mx^2-2x+1)(4x^2+4m+1)}$ có đúng một tiệm cận là

A. $\{0\}$.

B. $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$.

D. $\varnothing$

Lời giải

Chọn A

Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

Suy ra để đồ thị hàm số có 1 tiệm cận thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH1: $m\neq 0$ và phương trình: $\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4mx+1\right)=0$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases}1-m<0\\4m^2-4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>1\\-1<m<1\end{cases}\Rightarrow m\in\varnothing.$$

TH2: Phương trình: $4x^2+4mx+1=0$ vô nghiệm. Phương trình: $mx^2-2x+1=0\ (*)$ có đúng 1 nghiệm đơn

$$x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-4<0\\m=0\Rightarrow(*)\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<1\\m=0\end{cases}\Rightarrow m=0.$$

Kết hợp 2 trường hợp suy ra $m=0$.

Câu 52: Có bao nhiêu giá trị m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}$ có đúng 2 đường tiệm cận?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{m-\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{x^2}}=m\Rightarrow$ Đồ thị hàm số luôn có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=m$. Đồ thị hàm số có đúng hai đường tiệm cận khi nó có một tiệm cận khi nó có một tiệm cận đứng. Ta có: $y=\dfrac{mx^2-1}{x^2-3x+2}=\dfrac{mx^2-1}{(x-1)(x-2)}$, đặt $f(x)=mx^2-1$.

Đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $\left[\begin{array}{l}f(1)=0\\f(2)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m-1=0\\4m-1=0\end{array}\right.$.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=\dfrac{1}{4}\end{array}\right.\Leftrightarrow m\in\left\{1;\frac{1}{4}\right\}.$$

Câu 53: Tập hợp các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{\left(mx^2-2x+1\right)\left(4x^2+4m+1\right)}$ có đúng 1 đường tiệm cận là

A. $(-\infty;-1)\cup\{0\}\cup(1;+\infty)$. **B.** $\varnothing$

C. $\{0\}\cup(1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

Suy ra để đồ thị hàm số có 1 tiệm cận thì đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

TH1: $m\neq 0$ và phương trình: $(mx^2-2x+1)(4x^2+4m+1)=0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow \begin{cases}1-m<0\\4m+1>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m>1\\m>-\dfrac{1}{4}\end{cases} \Rightarrow m>1$.

TH2: Phương trình: $4x^2+4m+1=0$ vô nghiệm. Phương trình: $mx^2-2x+1=0\ (*)$ có đúng 1 nghiệm đơn $x=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases}4m+1>0\\m=0\Rightarrow (*)\Leftrightarrow 2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow m=0$.

Kết hợp 2 trường hợp suy ra $m\in\{0\}\cup(1;+\infty)$.

Câu 54: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-mx-3m}}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$. **B.** $(0;+\infty)$ **C.** $\left[\dfrac{1}{4};\dfrac{1}{2}\right]$. **D.** $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy $1+\sqrt{x+1}>0\ (\forall x\geq -1)$. Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^2-mx-3m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,\ x_2\geq -1$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\x_1+x_2\geq -2\\(x_1+1)(x_2+1)\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(-m)^2-4(-3m)>0\\x_1+x_2\geq -2\\x_1x_2+x_1+x_2+1\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+12m>0\\m\geq -2\\1-2m\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow m\in\left(0;\dfrac{1}{2}\right]$.

Câu 55: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{1+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-(1-m)x+2m}}$ có hai tiệm cận đứng?

A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy $1+\sqrt{x+1}>0\ (\forall x\ge -1)$. Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng

$\Leftrightarrow x^2-(1-m)x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\ge -1$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2\ge -2\\ (x_1+1)(x_2+1)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=(m-1)^2-8m>0\\ x_1+x_2\ge -2\\ x_1x_2+x_1+x_2+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-10m+1>0\\ 1-m\ge -2\\ 2m+(1-m)+1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow 5-6\sqrt{2}\ge m\ge -2$$

.

Kết hợp $m\in\mathbb{Z}\Rightarrow m=\{-2,-1,0\}$.

Câu 56: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* sao cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x-9}{\sqrt{x^2+2mx+2m+8}}$ có đúng hai đường tiệm cận.

A. $-2<m<4$. **B.** $-2<m<5$. **C.** $-1<m<5$. **D.** $-1<m<4$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x-9}{\sqrt{x^2+2mx+2m+8}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5-\dfrac{9}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2m}{x}+\dfrac{2m+8}{x^2}}}=5$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x-9}{\sqrt{x^2+2mx+2m+8}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5-\dfrac{9}{x}}{-\sqrt{1+\dfrac{2m}{x}+\dfrac{2m+8}{x^2}}}=-5$

Do đó đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang $y=\pm 5$.

Để đồ thị hàm số có đứng hai đường tiệm cận thì nó phải không có tiệm cận đứng.

Khi đó phương trình $x^2+2mx+2m+8=0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

TH1: Phương trình $x^2+2mx+2m+8=0$ vô nghiệm
$\Leftrightarrow \Delta'=m^2-m-8<0\Leftrightarrow -2<m<4$.

TH2: Phương trình $x^2+2mx+2m+8=0$ có nghiệm kép

$x=\dfrac{9}{5}\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta=0\\ \left(\dfrac{9}{5}\right)^2+2m.\left(\dfrac{9}{5}\right)+2m+8=0\end{cases}$ (hệ phương trình này vô nghiệm).

Vậy $-2<m<4$ là giá trị cần tìm.

Câu 57: Tìm tất cả các giá trị của tham số *m* để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}$ có đúng bốn đường tiệm cận.

A. $m\in[-5;4]\setminus\{-4\}$ **B.** $m\in[-5;4]$

C. $m\in(-5;4)\setminus\{-4\}$ **D.** $m\in(-5;4]\setminus\{-4\}$

Lời giải

. **Chọn D**

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\sqrt{2-\dfrac{2}{x}-\dfrac{m}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-1}{\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-\dfrac{1}{x}}{-\sqrt{2-\dfrac{2}{x}-\dfrac{m}{x^2}}-1-\dfrac{1}{x}}=\frac{-1}{\sqrt{2}-1}$$

Do đó đồ thị hàm số luôn có 2 đường tiệm cận ngang.

Để độ thị hàm số có 4 đường tiệm cận thì phương trình

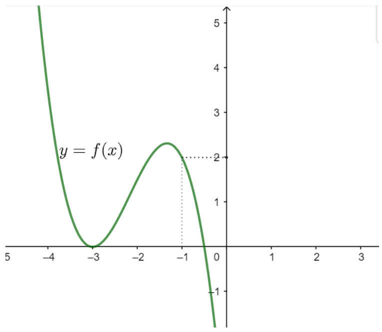
$$\sqrt{2x^2-2x-m}-x-1=0\Leftrightarrow\sqrt{2x^2-2x-m}=x+1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\2x^2-2x-m=(x+1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\g(x)=x^2-4x-m-1=0\end{cases}$$

có 2 nghiệm phân biệt khác 1 $\Leftrightarrow g(x)$ có nghiệm $\Leftrightarrow x_1>x_2\ge -1$ và $\Leftrightarrow x_1;x_2\ne 1$.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=4+m+1>0\\x_1+1+x_2+1>0\\(x_1+1)(x_2+1)\ge 0\\g(1)=-4-m\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-5\\6<0\\x_1x_2+(x_1+x_2)+1\ge 0\\m\ne -4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-5\\6>0\\-m-1+5\ge 0\\m\ne -4\end{cases}\Leftrightarrow m\in(-5;4]\setminus\{-4\}$$

Câu 58: Cho đồ thị hàm bậc ba $y=f(x)$ như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x\left[f^2(x)-2f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 6 **B.** 3

C. 2 **D.** 4

Lời giải

Chọn D

Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2+x\ge 0\\x.f(x).\left[f(x)-2\right]\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>0\\x\le -1\end{array}\right.\\f(x).\left[f(x)-2\right]\ne 0\end{cases}$

$y=\dfrac{(x+1)(x+3)}{f(x)\left[f(x)-2\right]}.\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$

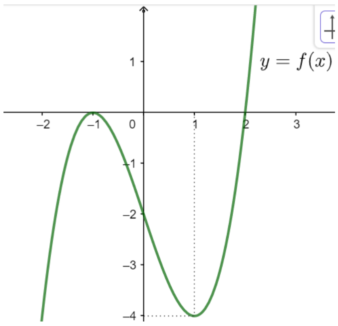
Dựa vào đồ thị hàm số ta thấy:

Phương trình $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=-3$ và nghiệm $x=x_1\in(-1;0)$.

Phương trình $f(x)=2$ có một nghiệm $x=-1$ và 2 nghiệm $x_2,x_3<-1$.

Do đó đồ thị hàm số có các đường tiệm cận $x=0,\ x=-3,\ x=x_2,\ x=x_3$.

Câu 59: Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$, $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



A. 2 **B.** 1

C. 3 **D.** 4

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f(x)=a(x+1)^2.(x-2)$ trong đó $a>0$.

Do đó $g(x)=\dfrac{\sqrt{f(x)}}{(x+1)^2(x^2-4x+3)}=\dfrac{\sqrt{a}.|x+1|.\sqrt{x-2}}{(x+1)^2(x-1)(x-3)}=\dfrac{\sqrt{a}.\sqrt{x-2}}{|x+1|.(x-1)(x-3)}$

Khi đó tập xác định của hàm số là $D=[2;+\infty)\setminus\{3\}$.

Suy ra đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng là $x=3$.

Câu 60: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{(x^2-3x+2)\sqrt{2x+1}}{(x^4-5x^2+4).f(x)}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?

A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 6

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x)=3ax^2+2bx+c=3a(x-1)(x-2)=3a(x^2-3x+2)$

Đồng nhất 2 vế ta có: $2b=-9a, c=6a \Rightarrow f(x)=ax^3-\frac{9a}{2}x^2+6ax+d$

Mặt khác $\begin{cases} f(1)=5 \\ f(2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{9}{2}a+6a+d=5 \\ 8a-18a+12a+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{10}{19} \\ d=\frac{-20}{19} \end{cases}$

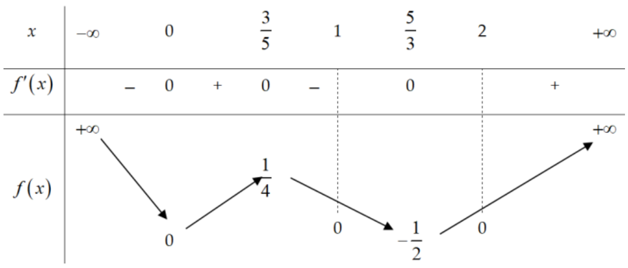
Giải phương trình $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$.

Hàm số có tập xác định là $D=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \left\{\frac{1}{2};1;2\right\}$

Khi đó. $g(x)=\frac{(x^2-3x+2)\sqrt{2x+1}}{(x^4-5x^2+4).f(x)}=\frac{(x-1)(x-2)\sqrt{2x+1}}{(x^2-1)(x^2-4).f(x)}=\frac{\sqrt{2x+1}}{(x+1)(x+2).f(x)}$

Suy ra đồ thị hàm số có 2 đường tiệm cận đứng là $x=\frac{1}{2}$, $x=2$.

Câu 61: Cho hàm bậc bốn $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau



Hỏi đồ thị hàm số $y=\frac{f^2(x)\sqrt{x^2+x}}{\left[f^2(x)-2f(x)\right](2x^5+x^4-10x^3-5x^2+8x+4)}$ có bao nhiêu tiệm cận đứng và ngang?

A. 7 **B.** 6 **C.** 5 **D.** 4

Lời giải

Chọn C

. Dựa vào BBT ta có: $f(x)=ax^2(x+1)(x-2)$

Ta có: $y=\frac{f(x).\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x^2-4)(x^2-1)(2x+1)}=\frac{ax^2(x+1)(x-2)\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x^2-4)(x^2-1)(2x+1)}$

$=\frac{ax^2\sqrt{x^2+x}}{\left[f(x)-2\right](x+2)(x-1)(2x+1)}$

Dựa vào BBT suy ra phương trình $f(x)=2$ có 2 nghiệm $\left[\begin{array}{l}x=a\\x=b\end{array}\right.$ trong đó $\begin{cases}a<0\\b>2\end{cases}$.

Với điều kiện $x^2+x\ge 0$ thì phương trình

$$\left[f(x)-2\right](x+2)(x-1)(2x+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\\x=a\\x=b\end{array}\right.$$

Do đó đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng.

Mặc khác bậc của tử số nhỏ hơn bậc của mẫu số nên đồ thị hàm số có một đường tiệm cận ngang là $y=0$. Do đó đồ thị hàm số có 5 đường tiệm cận.

Câu 62: Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có đồ thị (C). Gọi *I* là giao điểm hai đường tiệm cận của *(C)*. Tiếp tuyến của *(C)* cắt hai đường tiệm cận của *(C)* tại hai điểm *A*, ***B***. Giá trị nhỏ nhất của chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác *IAB* bằng.

A. $4\sqrt{2}\pi$ **B.** 8π **C.** 2π **D.** 4π

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ có tiệm cận đứng là $x=2$ và tiệm cận ngang là $y=1\Rightarrow I(2;1)$

.

Gọi $M\left(a;\dfrac{a+2}{a-2}\right)\in(C)$ với $a\ne 2$ suy ra phương trình tiếp tuyến tại M là:

$$y=\frac{-4}{(a-2)^2}(x-a)+\frac{a+2}{a-2}\quad (d).$$

Ta có: $d\cap x=2\Rightarrow\begin{cases}x=2\\ y=\dfrac{-4}{(a-2)^2(x-a)}+\dfrac{a+2}{a-2}\end{cases}\Rightarrow A\left(2;\dfrac{a+6}{a-2}\right)$

$$d\cap y=1\Rightarrow\begin{cases}y=1\\ y=\dfrac{-4}{(a-2)^2(x-a)}+\dfrac{a+2}{a-2}\end{cases}\Rightarrow A\left(2;\dfrac{a+6}{a-2}\right)\Rightarrow B(2a-2;1)$$

Khi đó $IA=\left|\dfrac{a+6}{a-2}-1\right|=\dfrac{8}{|a-2|}$, $IB=|2a-4|\Rightarrow IA.IB=16$

Do ΔIAB vuông tại I nên bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB là
$R=\frac{AB}{2}=\frac{\sqrt{IA^2+IB^2}}{2}$

Mặt khác $IA^2+IB^2\ge 2IA.IB=32\Rightarrow R\ge\frac{\sqrt{32}}{2}=2\sqrt{2}$.

Giá trị nhỏ nhất của chu vi đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB bằng:
$C_{\min}=2\pi R_{\min}=4\pi\sqrt{2}$.

Câu 63: Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+2}$ có đồ thị *(C)*. Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận của *(C)*. Xét tam giác đều ABI có hai đỉnh A,B thuộc *(C)*, đoạn thẳng AB có độ dài bằng

A. $\sqrt{6}$ **B.** $2\sqrt{3}$ **C.** 2 **D.** $2\sqrt{2}$

Lời giải

Chọn B

Giao điểm của 2 đường tiệm cận là $I(-2;1)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

Hàm số đã cho là hàm đồng biến, có 2 trục đối xứng là 2 đường phân giác của các đường tiệm cận có phương trình là $y=x$ và $y=-x$.

Do tính chất đối xứng nên: $AB\perp d:y=-x\Rightarrow AB:y=x+m$

Phương trình hoành độ giao điểm của *(C)* và AB là:
$$\frac{x-1}{x+2}=x+m\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne-2\\g(x)=x^2+(m+1)x+2m+1=0\end{cases}$$

Điều kiện để AB cắt *(C)* tại 2 điểm phân biệt là: $\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-4(2m+1)>0\\g(-2)\ne0\end{cases}$

Khi đó gọi $A(x_1;x_1+m);\ B(x_2;x_2+m)$, theo Viet ta có: $\begin{cases}x_1+x_2=-m-1\\x_1x_2=2m+1\end{cases}$

Tam giác ABC luôn cân tại I suy ra nó đều khi $IH=\frac{\sqrt{3}}{2}AB\Leftrightarrow d(I;AB)=\frac{\sqrt{3}}{2}AB$

$$\Leftrightarrow\frac{|m-3|}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2(x_1-x_2)^2}\Leftrightarrow(m-3)^2=3\left[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2\right]=3\left(m^2+2m+1-8m-4\right)$$

$$\Leftrightarrow m^2-6m=9\Rightarrow AB=\sqrt{2\left(m^2-6m-3\right)}=2\sqrt{3}.$$

Câu 64: Trong các hàm số dưới đây đồ thị hàm số nào có tiệm cận xiên?

A. $y=\frac{x-1}{2x+1}$. **B.** $y=x^3+3x^2-1$. **C.** $y=\frac{x^3-2x-1}{1-x}$. **D.** $y=\frac{x^3}{x^2-1}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 65: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x-1}{x-2}$, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng.

A. $y=2x-1$. **B.** $y=2x+1$. **C.** $y=2x-3$. **D.** $y=2x+3$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng chú ý b) chia tử thức cho mẫu thức ta được

$$\begin{cases} y=2x+1-\dfrac{1}{x-2} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-1}{x-2}=0 \end{cases} \Rightarrow TCX: y=2x+1.$$

Câu 66: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $y=ax+b$. Tính a^2+2b.

A. 4. **B.** 2. **C.** 5. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Sử dụng chú ý b) chia tử thức cho mẫu thức ta được

$$\begin{cases} y=x+1+\dfrac{5}{x-3} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5}{x-3}=0 \end{cases} \Rightarrow TCX: y=x+1 \Rightarrow a^2+2b=3.$$

Câu 67: Biết tiện cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+2}{x^2-2x}$ cắt trục tọa độ tại hai điểm A và **B.** Khi đó diện tích tam giác OAB là

A. 2. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Sử dụng chú ý b) chia tử thức cho mẫu thức ta được

$$\begin{cases} y=x+2+\dfrac{4x+2}{x^2-2x} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{4x+2}{x^2-2x}=0 \end{cases} \Rightarrow TCX\ \ d: y=x-2.$$

Ta có $d\cap Ox$ tại điểm $(0;-2)$ và $d\cap Oy$ tại điểm $(2;0)$.

Suy ra $S_{OAB}=\dfrac{1}{2}OA\cdot OB=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 2=2\,(dvdt)$.

Câu 68: Biết đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^3+x+1}{x^2-1}$ có tiện cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d.

A. $M(-1;2)$. **B.** $N(2;2)$. **C.** $(2;-2)$. **D.** $(2;-1)$.

Lời giải

Chọn B

Sử dụng chú ý b) chia tử thức cho mẫu thức ta được

$$\begin{cases} y=x+\dfrac{2x+1}{x^2-1} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x+1}{x^2-1}=0 \end{cases} \Rightarrow TCX\ d: y=x \Rightarrow N(2;2)\in d.$$

Câu 69: Cho hàm số $y=\dfrac{2x^2-3x+4}{2x+1}$, tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng.

A. $y=x-1$. **B.** $y=x$. **C.** $y=x+3$. **D.** $y=x-2$.

Lời giải

Chọn D

Sử dụng chú ý b) chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y=x-2+\dfrac{6}{2x+1} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{6}{2x+1}=0 \end{cases} \Rightarrow TCX: y=x-2$

.

Câu 70: Tìm m để tiện cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+mx+2}{x-1}$ là đường thẳng $y=x+2024$.

A. $m=2023$. **B.** $m=2024$. **C.** $m=2025$. **D.** Đáp án khác.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện để hàm số có TCX $\Leftrightarrow (1)^2+1\cdot m+2\neq 0 \Leftrightarrow m\neq -3$.

$\dfrac{x^2+mx+2}{x-1}=ax+b+\dfrac{c}{x-1}=\dfrac{ax^2+x(b-a)-b+c}{x-1}$. Đồng nhất hệ số ta có

$$\begin{cases} a=1 \\ b-a=m \\ c-b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=m+1 \\ c=3+m \end{cases} \Rightarrow f(x)=x+m+1+\dfrac{3+m}{x-1}.$$

Suy ra TCX là $y=x+m+1$, theo đề bài ta có $m+1=2024 \Leftrightarrow m=2023$ (nhận).

Câu 71: Giả sử đồ thị hàm số $y=\dfrac{mx^2-2x+1}{x-2}$ có cận xiên là đường thẳng $d: y=ax+b$. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=a^2+2b+2030$ là?

A. 2023. **B.** 2022. **C.** $m=2024$. **D.** Đáp án kháC.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện để hàm số có TCX $\Leftrightarrow m\cdot(2)^2-2\cdot2+1\neq0\Leftrightarrow m\neq\frac{-3}{4}$ và $m\neq0$.

$\frac{mx^2-2x+1}{x-2}=ax+b+\frac{c}{x-2}=\frac{ax^2+x(b-2a)-2b+c}{x-2}$. Đồng nhất hệ số ta có

$$\begin{cases}a=m\\b-2a=-2\\c-2b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=m\\b=2m-2\\c=4m-3\end{cases}\Rightarrow f(x)=mx+2m-2+\frac{4m-3}{x-2}.$$

Suy ra TCX là $y=mx+2m-2\Rightarrow P=m^2+2(2m-2)+2030=m^2+4m+2026$.

Vậy $P_{\min}=2022$ tại $m=-2$ (thỏa điều kiện).

Câu 72: Giả sử đồ thị hàm số $y=\frac{(m+1)x^2-3x+2}{x+1}$ có cận xiên là đường thẳng $d:y=ax+b$, gọi M và giao điểm của d và đường tiệm cận đứng. Với giá trị nào của m thì OM là bé nhất?

A. $m=\frac{2}{5}$. **B.** $m=\frac{-3}{5}$. **C.** $m=\frac{5}{3}$. **D.** $m=\frac{-5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện để hàm số có TCX $\Leftrightarrow(m+1)\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+2\neq0\Leftrightarrow m\neq-6$.

$\frac{(m+1)x^2-3x+2}{x+1}=ax+b+\frac{c}{x+1}=\frac{ax^2+x(b+a)+b+c}{x-2}$. Đồng nhất hệ số ta có

$$\begin{cases}a=m+1\\b+a=-3\\b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=m+1\\b=-m-4\\c=m+6\end{cases}\Rightarrow f(x)=(m+1)x-m-4+\frac{m+6}{x+1}.$$

Suy ra TCX là $y=(m+1)x-m-4$.

Ta có TCĐ. $x_0=-1$ suy ra tọa độ của $M(-1;-2m-5)$.

Khi đó $OM=\sqrt{1+(2m+5)^2}\Rightarrow OM_{\min}=1\Leftrightarrow2m+5=0\Leftrightarrow m=\frac{-5}{2}$.

Câu 73: Đường thẳng $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số nào dưới đây?

A. $y=\frac{x-1}{x^2+1}$. **B.** $y=\sqrt{x^2-2x+3}$. **C.** $y=\frac{x^2+1}{x-2}$. **D.** $y=\frac{2x^2+x+1}{2x+1}$.

Lời giải

Chọn D

Sử dụng chú ý đã nếu ta loại bỏ được đáp án A và **B.**

Xét $y = f(x) = \dfrac{x^2+1}{x-2}$ khi đó $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right] = 2 \Rightarrow TCX: y = x+2$ (loại).

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số $y = \dfrac{5}{x-1}$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$.

c. Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị nằm trên trục hoành.

d. Giao điểm của hai tiệm cận đồ thị là đỉnh parabol $y = x^2 - 2x + 1$

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là 2 đường thẳng $x = 1, y = 0$, nên **a sai, b đúng**.

Giao điểm hai đường tiệm cận là điểm $I(1;0) \in ox$ và cũng là là đỉnh parabol $y = x^2 - 2x + 1$ **nên c và d đúng.**

Câu 2. Cho hàm số $y = \dfrac{1-4x}{2x-1}$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là đường thẳng $y = 2$.

b. Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $y = \dfrac{1}{2}$.

c. Đường tiệm cận ngang cắt đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x - 2$ tại 3 điểm.

d. Hình chữ nhật giới hạn bởi 2 tiệm cận của đồ thị và hai trục tọa độ có diện tích bằng 1.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận ngang lần lượt là 2 đường thẳng $x = \dfrac{-1}{2}, y = -2,$ nên **a sai, b sai.**

Giải phương trình $x^3 - 3x - 2 = -2,$ tìm được 3 nghiệm nên **c đúng.**

d sai vì hình chữ nhật giới hạn bởi 2 tiệm cận của đồ thị và hai trục tọa độ có diện tích $S = \dfrac{1}{2}2.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1}$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số không có tiệm cận ngang.

b. Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 1.

c. Giao điểm hai tiệm cận của đồ thị nằm trên parabol $y = x^2$.

d. Đường tiệm cận xiên của đồ thị vuông góc với đường thẳng $x + y - \pi = 0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận xiên lần lượt là 2 đường thẳng $x = 1, y = x,$ nên **a đúng, b sai** do tiệm cận xiên qua gốc tọa độ O.

c đúng vì giao điểm hai tiệm cận của đồ thị là $I(1;1)$ nằm trên parabol $y = x^2$.

Đường tiệm cận xiên của đồ thị $y = x$ vuông góc với đường thẳng $y = -x + \pi,$ nên **d đúng.**

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 1}$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận.

b. Đường tiệm cận xiên của đồ thị tạo với hai trục tọa độ một tam giác vuông cân.

c. Giao điểm của hai tiệm cận nằm trục hoành.

d. Đường tiệm cận xiên của đồ thị song song với đường thẳng $x+y=0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số có tiệm cận đứng, tiệm cận xiên lần lượt là 2 đường thẳng $x=1, y=x-1,$ nên **A đúng, B đúng** do tiệm cận xiên cắt ox, oy lần lượt tại A(1;0), B(0;-1) nên tam giác OAB cân tại O.

C đúng vì giao điểm hai tiệm cận của đồ thị là $A(1;0)$ nằm trên trục hoành.

Đường tiệm cận xiên của đồ thị $y=x-1$ vuông góc với đường thẳng $y=-x,$ nên **D sai.**

Câu 5. Cho hàm số $(C): y=f(x)=\dfrac{2x^2+3x-5}{x+3}$ biết đồ thị hàm số có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$, khi đó:

a. Giao điểm của Δ và trục Ox có hoành lớn hơn 2 .

b. Giao điểm của Δ và tiệm cận đứng của (C) có tọa độ là $(-3;-9)$.

c. Gọi $A=\Delta\cap Ox, B=\Delta\cap Oy$ ta có $S_{OAB}>3$.

d. Giá trị lớn nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $\left[0;3\right]$ là 4.

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=2$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-2x\right]=-3 \Rightarrow TCX\,\Delta: y=2x-3$.

- $\Delta\cap Ox \Rightarrow y=0 \Leftrightarrow 2x-3=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}<2$ nên **a sai** .
- TCĐ $x=-3$ với $x_0=-3 \Rightarrow y_0=2\cdot(-3)-3=-9$ vậy **b đúng**.
- $A=\Delta\cap Ox \Rightarrow A(-3;0)$ và $B=\Delta\cap Ox \Rightarrow B\left(0;\dfrac{3}{2}\right) \Rightarrow S_{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}<3$ nên **c sai**.
- $y=2x-3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ suy ra GTLN trên $\left[0;3\right]$ là $2\cdot 3-3=3$ vậy **d sai**.

Câu 6. Cho hàm số $(C): y=f(x)=\sqrt{4x^2+8x-12}$ và điểm $M\in(C)$ với $x_M<0$, khi đó:

a. Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận xiên đều là các hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b. Xét $\Delta_1: \ y=ax+b \ (b>0)$ là tiện cận xiên của (C) điểm $(1;4)\in\Delta$.

c. Xét $\Delta_2: \ y=ax+b \ (b<0)$ là tiện cận xiên của (C) khi đó $d_{\max}(M,\Delta_2)<2$.

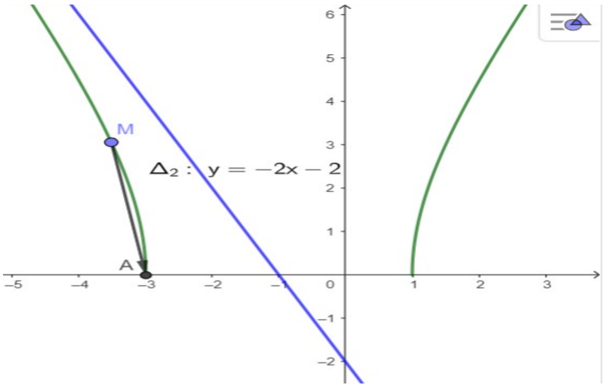
d. Hoành độ giao điểm của hai đường tiệm cận xiên bằng -2 .

Lời giải

Ta có hai đường TCX của đồ thị hàm số là:

$$\left[\begin{array}{l}\Delta_1: y=\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)=2x+2 \\ \Delta_2: y=-\sqrt{a}\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)=-2x-2\end{array}\right..$$

- Dễ thấy hai đường TCX Δ_2 không đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên **a sai** .
- Thay $x=1$ vào Δ_1 ta có $y=2\cdot1+2=4$ do đó **b đúng**.
- Ta có đồ thị hàm số và TCX Δ_2



Tập xác định của hàm số $D=(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

Do $x_M<0$ nên điểm M thuộc nhánh đồ thị bên trái.

Để $d(M,\Delta_2)$ đạt GTLN thì $M\equiv A(-3;0)$.

Vậy $d_{\max}(M,\Delta_2)=d(A,\Delta_2)=\dfrac{|-2\cdot(-3)-1\cdot0-2|}{\sqrt{(-2)^2+(-1)^2}}=\dfrac{4\sqrt{5}}{5}<2$ nên **c đúng**.

- Phương trình hoành độ giao điểm $2x+2=2x-2\Leftrightarrow x=-1\neq-2$ vậy **d sai**.

Câu 7. Cho hàm số $(C): y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{2x-1}$ biết đồ thị hàm số có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$ và tiện cận đứng là đường thẳng $x=x_0$. Khi đó:

a. Giá trị của biểu thức $S=4a-3b$ lớn hơn 4 .

b. Gọi điểm $M(4x_0;2a)$ ta có độ dài của $\overrightarrow{OM}$ nhỏ hơn 2 .

c. Gọi $A=\Delta\cap Ox,\ B=\Delta\cap Oy$ và $C=Ox\cap x_0$ ta có $S_{ABC}<0,5$.

d. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=ax+b$ trên $[-4;-1]$ lớn hơn -3 .

Lời giải

Ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{1}{2}$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\dfrac{x}{2}\right]=\dfrac{-3}{4}\Rightarrow TCX\ \Delta: y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}$. Tiệm cận đứng $x=\dfrac{1}{2}$.

- $S=4a-3b=4\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{9}{4}=4,25>4\Rightarrow$ **a đúng** .
- Điểm $M(4x_0;2a)=(2;1)\Rightarrow OM=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}>2\Rightarrow$ **b sai.**
- Ta có $A\left(\dfrac{3}{2};0\right)$, $B\left(0;\dfrac{-3}{4}\right)$ và $C\left(\dfrac{1}{2};0\right)\Rightarrow S_{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot\left|\dfrac{-3}{4}\right|\cdot\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{8}<0,5\Rightarrow$ **c đúng.**
- Hàm số $y=\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{4}$ đạt GTNN tại $x=-4\Rightarrow \min\limits_{[-4;-1]} y=\dfrac{-11}{4}=-2,75>-3$ **d đúng.**

Câu 8. Cho hàm số $(C_1): f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ và $(C_2): g(x)=\dfrac{2x^2-3x-1}{2x-1}$ biết đồ thị hàm số (C_1) có tiện cận đứng và tiện cận ngang là các đường thẳng $x=x_0$, $y=y_0$. (C_2) có tiện cận xiên là đường thẳng $\Delta: y=ax+b$ Khi đó:

a. Giá trị của biểu thức $S=x_0+2y_0+3b=8$.

b. Đồ thị hàm số (C_2) có tiện cận ngang là đường thẳng $y=1$.

c. Giao điểm của ba đường tiện cận ở đề bài tạo thành tam giác có diện tích bằng 2 .

d. Đồ thị hàm số (C_1) và (C_2) có chung đường tiệm cận đứng.

Lời giải

Với (C_1) ta có TCĐ $x=2$ và TCN $y=3$.

Với (C_2) ta có $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{g(x)}{x}=1$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-x\right]=-1\Rightarrow TCX\,\Delta: y=x-1$.

- $S=x_0+2y_0+3b=2+3\cdot3+3\cdot(-1)=8\Rightarrow$ **a đúng.**
- Do bậc tử lớn hơn bậc mẫu nên (C_2) không có TCN $\Rightarrow$ **b sai.**
- Giao điểm của ba đường tiệm cận là $(2;3),(2;1)$ và $(4;3)$. Tam giác vuông tại đỉnh có tọa độ $(2;3)$.

$\Rightarrow S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{(2-2)^2+(1-3)^2}\cdot\sqrt{(4-2)^2+(3-3)^2}=2\Rightarrow$ **c đúng.**

- Ta có TCĐ của đồ thị hàm số $(C_2): x=\dfrac{1}{2}\neq 2\Rightarrow$ **d sai.**

Câu 9. Cho hàm số $(C): y=f(x)=\dfrac{2x+1}{x+4}$ biết đồ thị hàm số có tiện cận đừng và tiện cận ngang là các đường thẳng $x=x_0$, $y=y_0$. Khi đó

a. Giá trị của biểu thức $S=x_0^2+y_0^2$ lớn hơn 18 .

b. Gọi điểm $M(x_0;y_0)$ thì trung điểm của đoạn OM có tọa độ là $(2;1)$.

c. Điểm $(-1;-4)$ không nằm trên đường tiện cận đứng $x=x_0$.

d. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số có tọa độ là $(2;-4)$.

Lời giải

Đồ thị hàm số đã cho có TCĐ: $x=-4$ và TCN: $y=2$.

- $S=x_0^2+y_0^2=(-4)^2+2^2=20>18\Rightarrow$ **a đúng**.
- Điểm $M(-4;2)$ tọa độ trung điểm đoạn OM là $(-2;1)\Rightarrow$ **b sai**.
- Dễ thấy $(-1;-4)$ thuộc đường thẳng $x=-4\Rightarrow$ **c sai**.
- Tọa độ tâm đối xứng của (C) là $\left(x_0;y_0\right)=(-4;2)\Rightarrow$ **d sai**.

Câu 10. Cho hàm số $(C): y=f(x)=\dfrac{mx-1}{2x-4}$. Khi đó

a. Nếu $m=-2$ thì đường thẳng $y=1$ là tiện cận ngang của (C).

b. Đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận đứng khi $m\neq\dfrac{1}{2}$.

c. Điểm $(2;3)$ là tâm đối xứng của đồ thị hàm số khi $m=6$.

d. $\forall m\in\mathbb{R}$ ta có tiệm cận ngang của (C) là đường thẳng $y=\dfrac{m}{2}$.

Lời giải

Ta có TCĐ: $x=2$ và $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\dfrac{m}{2}\Rightarrow TCN: y=\dfrac{m}{2}$.

- Với $m=-1$ thì TCN: $y=-1\Rightarrow$ **a sai**.
- Hàm số có TCĐ khi $m\cdot2+1\neq0\Leftrightarrow m\neq\dfrac{-1}{2}\Rightarrow$ **b đúng**.
- Điểm $(2;3)$ là tâm đối xứng của $(C)\Leftrightarrow(2;3)=\left(2;\dfrac{m}{2}\right)\Leftrightarrow\dfrac{m}{2}=3\Leftrightarrow m=6\Rightarrow$ **c đúng**.
- Do $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\dfrac{m}{2}\Rightarrow TCN: y=\dfrac{m}{2}$ xác định với mọi số thực $m\Rightarrow$ **d đúng**.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		x_1		x_2		x_3		x_4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	5	$\searrow$	0	$\nearrow$	10	$\searrow$	2 || $+\infty$	$\searrow$	3

Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	Phát biểu		
	àm số $y=f(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng.		

	ım số $y=f(x)$ có tổng 3 đường tiệm cận ngang và		
	ận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ bằng 3.		
	tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)}$ bằng 4.		

Lời giải

a. Đ	**b. S**	**c. S**	**d. Đ**

a) b) Từ đồ thị hàm số ta thấy $y=f(x)$ có một đường tiệm cận ngang $(y=3)$ và một đường tiệm cận đứng $(x=x_4)$.

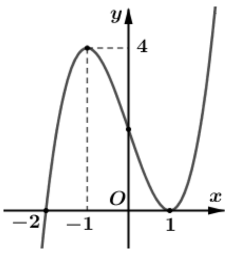
c) d) Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} y=0; \lim\limits_{x\to+\infty} y=\dfrac{1}{3}$ nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận ngang $y=0$ và $y=\dfrac{1}{3}$
.

Từ bảng biến thiên, ta có $f(\mathrm{x})=0$ có hai nghiệm $x=x_2$ và $x=a\in(-\infty;x_1)$.

Dễ thấy $\lim\limits_{x\to a^+} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to x_2^+} y=+\infty$ nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng là $x=x_2$ và $x=a$

Do đó đồ thị hàm số có tổng số 4 đường tiệm cận kể cả đứng và ngang.

Câu 12: Cho hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới



	Phát biểu		
	ận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-4}$ bằng 2.		
	ận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-4}$ bằng 3.		
	tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-4}$ bằng 6.		
	trị nguyên m đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có ệm cận đứng.		

Lời giải

a. S	**b. Đ**	**c. S**	**d. S**

a) b) c) Xét phương trình $2f(x)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1(-2<x_1<-1) \\ x=0 \\ x=x_2(x_2>1) \end{array}\right.$.

Khi đó $\lim\limits_{x\to x_1^+}\dfrac{1}{2f(x)-4}=+\infty \Rightarrow x=x_1$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y=\dfrac{1}{2f(x)-4}$.

Tương tự ta cũng có $x=0;\ x=x_2$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y=\dfrac{1}{2f(x)-4}$.

Hơn nữa $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)-4}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2f(x)-4}=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=\dfrac{1}{2f(x)-4}$.

d) Xét hàm số $h(x)=f(x^2-3) \Rightarrow h'(x)=2x.f'(x^2-3)$

$$\Rightarrow h'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f'(x^2-3)=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3=-1 \\ x^2-3=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		$-\sqrt{2}$		0		$\sqrt{2}$		2		$+\infty$
$2x$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x^2-3	$+\infty$		1		-1		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x^2-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$		0		4		$f(-3)<0$		4		0		$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{1}{f(x^2-3)-m}$ có đúng 6 tiệm cận đứng $\Leftrightarrow h(x)=m$ có 6 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 0<m<4$.

Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên ở bảng bên dưới và $y=nx-2$ là tiệm cận xiên của đồ thị $y=g(x)=\dfrac{x^2+x+3}{x+3}$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	5	||	$-\infty$	$m+2$

Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	u		

	m số $y=g(x)=\dfrac{x^2+x+3}{x+3}$ có tiệm cận đứng là $x=-3$.		
	á trị nguyên dương m để đồ thị hàm số có tiệm cận đứng tiệm cận ngang $y=y_o$ sao cho $x_o y_o<30$.		
	guyên dương thì giá trị lớn nhất của $mn=7$.		

Lời giải

a. Đ	**b. S**	**c. S**	**d. Đ**

b) Ta có: $y=\dfrac{x^2+x+3}{x+3}=x-2+\dfrac{9}{x+3}$

$\Rightarrow$ Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình: $y=x-2$ vì $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x-2+\dfrac{9}{x+3}-(x-2)\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9}{x+3}=0$.

Để đường thẳng $y=nx-2$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số thì $n=1$.

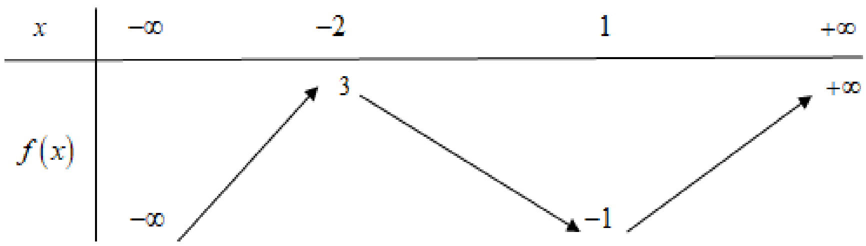
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=m+2$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận ngang là $y=m+2$. Ta có $y_o=m+2$.

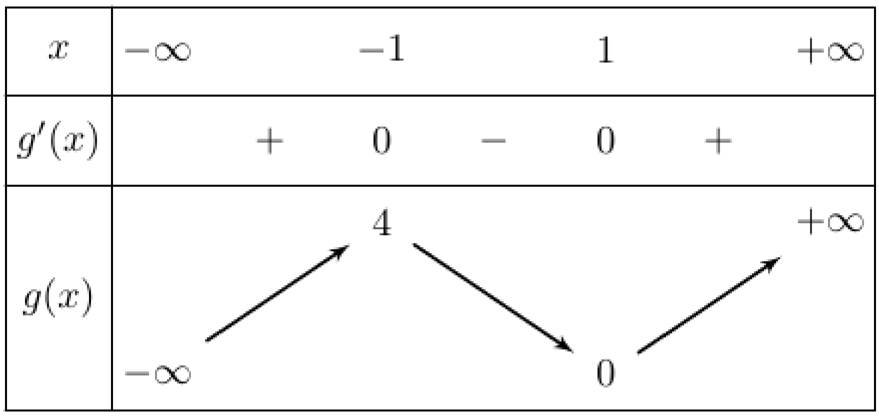
$\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=-\infty$ suy ra đồ thị hàm số có tiệm cận đứng là $x=3$. Ta có $x_o=3$.

$x_o y_o<30\Leftrightarrow 3(m+2)<30\Leftrightarrow m<8$. Suy ra có 7 có giá trị nguyên dương.

d) Với từng giá trị nguyên dương m suy ra $mn=m\Rightarrow(mn)_{\max}=7$.

Câu 14: Cho hàm số $y=f(x), y=g(x)$ là các hàm số bậc ba có bảng biến thiên ở bảng bên dưới





Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	u		
	m số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có 5 tiệm cận ngang.		

	ım số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có 3 tiệm cận đứng.		
	ım số $y=\dfrac{x^4-1}{g^2(x)-4g(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.		
	ım số $y=\dfrac{x^4-1}{g^2(x)-4g(x)}$ và $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có iệm cận.		

Lời giải

a. S	**b. Đ**	**c. Đ**	**d. Đ**

a) b) Xét phương trình:

$$e^{2f(x)-1}-1=0 \Leftrightarrow e^{2f(x)-1}=1 \Leftrightarrow 2f(x)-1=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, a<-2 \\ x=b,-2<b<1. \\ x=c, c>1 \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có ba tiệm cận đứng là: $x=a; x=b; x=c.$ $x=a; x=b; x=c$.

Từ bảng biến thiên ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}=-1; \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}=0.$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có hai tiệm cận ngang là $y=-1; y=0.$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{2f(x)-1}-1}$ có 5 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

c) Xét phương trình $g^2(x)-4g(x)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} g(x)=0 \\ g(x)=4 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=a,\ a\in(-\infty;-1) \\ x=1 \quad (ng\ kép) \\ x=-1\ \ (ng\ kép) \\ \mathrm{x}=b,\ b\in(1;+\infty) \end{array}\right.$.

$\Rightarrow g^2(x)-4g(x)=h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2;\ h(x)\neq 0$

Do đó $y=\dfrac{x^4-1}{g^2(x)-4g(x)}=\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{h(x)(x-a)(x-1)^2(x-b)(x+1)^2}$

$=\dfrac{x^2+1}{h(x)(x-a)(x-1)(x-b)(x+1)}.$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^4-1}{g^2(x)-4g(x)}$ có 4 tiệm cận đứng.

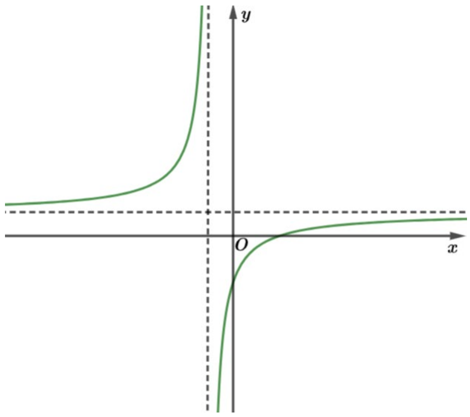
d) Từ bảng biến thiên ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty.$

Ta có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^4-1}{g^2(x)-4g(x)}=0; \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^4-1}{g^2(x)-4g(x)}=0.$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^4-1}{g^2(x)-4g(x)}$ có tiệm cận ngang là $y=0$.

Vậy tổng $y=\dfrac{x^4-1}{g^2(x)-4g(x)}$ có 5 đường tiệm cận.

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{2x+1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Xét tính **đúng-sai** của các khẳng định sau:



a) Đường thẳng $x=-\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

b) Đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

c) $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=+\infty$.

d) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\dfrac{1}{2}\right]=0$.

Lời giải

c) Đ

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=-\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

d) Đ

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$ nên đường thẳng $y=\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị (C).

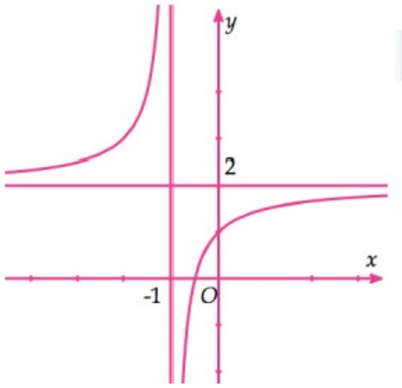
e) S

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=-\infty$

d) Đ

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\dfrac{1}{2}$

Câu 16: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx+1}{x+m}$; $(mn\neq 1)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Xét tính **đúng-sai** của các khẳng định sau:



a) Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $(-1;2)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2\right]=0$.

c) $m+n=3$.

d) $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=+\infty$.

Lời giải

a) Đ

b) Đ

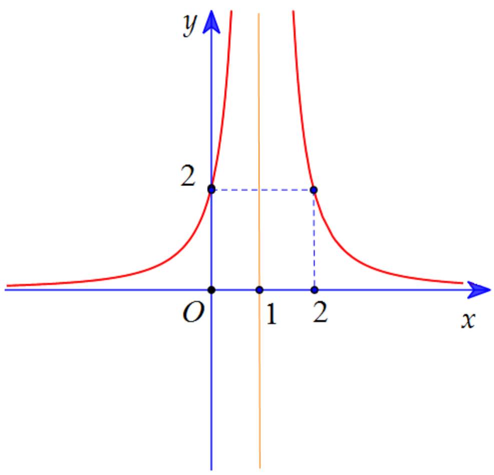
c) Đ

Đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx+1}{x+m}$; $(mn\neq 1)$ có hai đường tiệm cận $x=-m=-1$; $y=n=2\Rightarrow m=1$; $n=2\Rightarrow m+n=3$.

d) S

$\lim\limits_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} f(x)=-\infty$.

Câu 17: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(a,b,c,d\in\mathbb{R};-\dfrac{d}{c}\neq 0\right)$ có đồ thị (C), đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình vẽ bên.



Biết đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3.

	$\dfrac{ad-bc}{cx+d)^2}$
	$\dfrac{+3}{-1}$
	trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(3;0)$ là : $y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

Lời giải

Ta có $f'(x)=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$. Từ đồ thị hàm số $y=f'(x)$ ta thấy :

+ đồ thị $y=f'(x)$ có tiệm cận đứng $x=1\Rightarrow -\dfrac{d}{c}=1\Rightarrow c=-d$ (1)

+ đồ thị $y=f'(x)$ qua điểm $(2;2)\Rightarrow \dfrac{ad-bc}{(2c+d)^2}=2\Rightarrow ad-bc=2(2c+d)^2$ (2)

+ đồ thị $y=f'(x)$ cắt trục tung tại $y=2\Rightarrow \dfrac{ad-bc}{d^2}=2\Rightarrow ad-bc=2d^2$ (3)

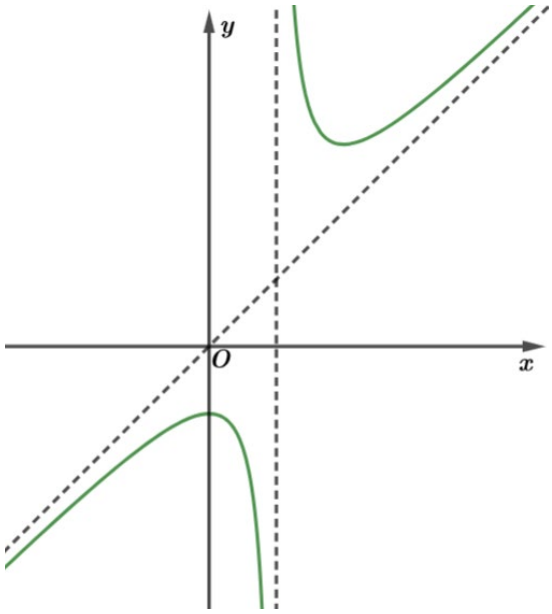
Mà đồ thị $y=f(x)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 $\Rightarrow \dfrac{b}{d}=3\Rightarrow b=3d$ (4)

Từ $(1),(2),(3),(4)$ ta có hệ $\begin{cases} c=-d \\ ad-bc=2(2c+d)^2 \\ ad-bc=2d^2 \\ b=3d \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=1 \\ d=-1 \end{cases}\Rightarrow y=f(x)=\dfrac{x-3}{x-1}$

Đồ thị (C) giao với Ox tại $(3;0)$. $f'(x)=\dfrac{2}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(3)=\dfrac{1}{2}$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $(3;0)$ là : $y=\dfrac{1}{2}(x-3)\Rightarrow y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$

Câu 18: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Xét tính **đúng-sai** của các khẳng định sau:



a) Đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị (C).

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-1$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=1$.

d) Đường thẳng $y=x$ là tiệm cận xiên của đồ thị (C).

Lời giải

a) Đ

b) S

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2-x}=1$

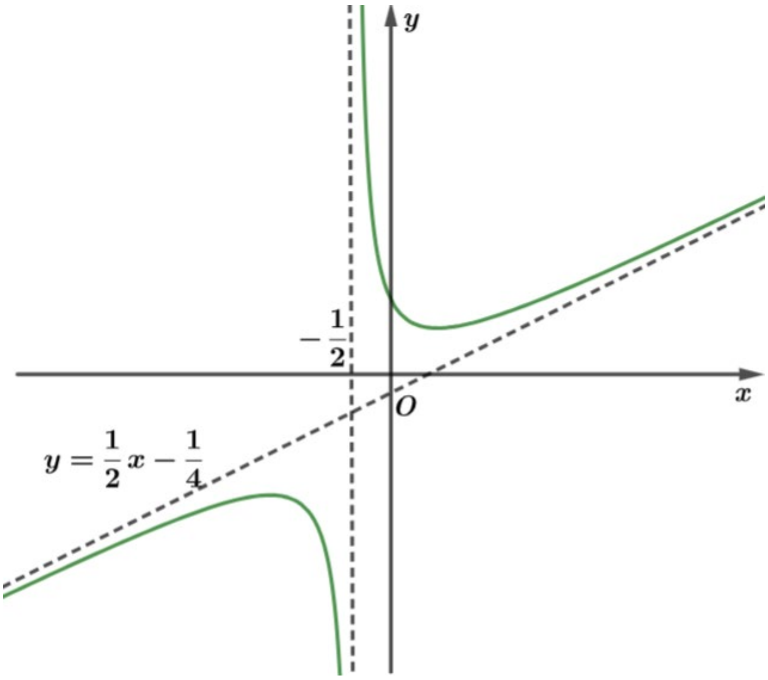
c) S

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$.

d) Đ

Từ hai ý b và c ta có đường tiệm cận xiên của đồ thị (C) là $y=x$.

Câu 19: Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{nx^2+1}{mx+1}$; $(mn\neq 0)$ có đồ thị (C) như hình vẽ. Xét tính **đúng-sai** của các khẳng định sau:



a) $\frac{n}{m}=-\frac{1}{4}$.

b) $m=-\frac{1}{2}$.

c) $m+n=3$.

d) $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=0$.

Lời giải

a) S

$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^2+1}{mx^2+x}=\frac{n}{m}=\frac{1}{2}$.

b) S

Đường tiệm cận đứng của đồ thị là $x=-\frac{1}{m}=-\frac{1}{2}\Rightarrow m=2$

c) Đ

Từ hai ý a và b ta có: $\begin{cases}m=2n\\m=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=2\\n=1\end{cases}\Rightarrow m+n=3$; $n=2\Rightarrow m+n=3$

d) S

Đường tiệm cận xiên $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\frac{1}{2}x\right]=-\frac{1}{4}$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	1 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$		↗ 1

a) Hàm số đã cho có đường tiệm cận đứng là $x=-1$.

b) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có đường tiệm cận ngang là $y=1$.

c) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-2}$ có hai đường tiệm cận đứng.

d) Số đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ là 3.

Lời giải

Ý a) Sai

Hàm số không có khái niệm tiệm cận. Chỉ có khái niệm đường tiệm cận của đồ thị hàm số.

Ý b) Đúng

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$
.

Ý c) Đúng

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f\left(x\right)-2=0$ có đúng 1 nghiệm $x=m<-1$. Khi đó

$y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-2}=\dfrac{1}{\dfrac{ax+b}{cx+d}-2}=\dfrac{ax+d}{-a\left(x-m\right)}$ nên đồ thị của hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-2}$ chỉ có 1 đường tiệm cận đứng là $x=m$.

Ý d) Sai

Đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ trùng với đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ ứng với phần đồ thị mà $x\ge 0$. Dựa vào bảng biến thiên ta thấy với $x\ge 0$ thì đồ thị hàm số chỉ có 1 đường tiệm cận ngang $y=1$ và không có tiệm cận đứng. Mà đồ thị hàm số $y=f\left(\left|x\right|\right)$ nhận trục tung làm trục đối xứng. Do đó nó chỉ có duy nhất một đường tiệm cận ngang $y=1$.

Câu 21: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	3 ↗		$+\infty$ || $-\infty$		↗ -3

a) Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có một đường tiệm cận đứng là $x=-2$.

b) Hàm số $y=f\left(x\right)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y=3,\ y=-3$.

c) Đồ thị hàm số $y=\dfrac{f\left(x\right)}{\left(x^2+x-2\right)}$ có ba đường tiệm cận đứng.

d) Đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ có hai đường tiệm cận ngang.

Lời giải

Ý a) Đúng

Dựa vào bảng biến thiên dễ thấy đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ có một đường tiệm cận đứng là $x=-2$.

Ý b) Sai

Vì hàm số không có tiệm cận.

Ý c) Sai

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\frac{a}{c}=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3 \Rightarrow a=3c,\ \lim\limits_{x\to(-2)^-} f(x)=+\infty \Rightarrow cx+d=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow -\frac{d}{c}=-2 \Leftrightarrow d=2c$

Do đó $f(x)=\frac{3cx+b}{c(x+2)}\ \left(-\frac{b}{3c}\neq -2 \Leftrightarrow b\neq 6c\right)$. Suy ra

$y=\frac{f(x)}{(x^2+x-2)}=\frac{3cx+b}{c(x+2)^2(x-1)}$. Điều này chứng tỏ đồ thị hàm số $y=\frac{f(x)}{(x^2+x-2)}$ có không quá hai đường tiệm cận đứng.

Ý d) Sai

Vì đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang là $y=\pm 3$, nên đồ thị hàm số $y=|f(x)|$ chỉ có duy nhất 1 đường tiệm cận ngang là $y=3$.

Câu 22: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		+	$\Vert$	+	$\Vert$	-	0	+	
y	3	↗	$+\infty$ $\Vert$ $-\infty$	↗	-3 $\Vert$ -4	↘	-8	↗	5

a) Đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $x=-2$ làm tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng là $x=-2,\ x=0$.

c) Số đường tiệm cận ngang của của đồ thị hàm số là 2.

d) Tổng số đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là 4.

Lời giải

Ý a) Đúng

Dựa vào bảng biến thiên, dễ thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận đường thẳng $x=-2$ làm tiệm cận đứng.

Ý b) Sai

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-3,\ \lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-4$ nên $x=0$ không phải là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=f(x)$.

Ý c) Đúng

Dựa vào bảng biến thiên dễ thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có hai đường tiệm cận ngang $y=3,\ y=5$.

Ý d) Sai

Dựa vào bảng biến thiên dễ thấy đồ thị hàm số $y=f(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng $x=-2$ và hai đường tiệm cận ngang $y=3,\ y=5$, nên nó có 3 đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Ý d) Sai

Câu 23: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

a) Đồ thị hàm số $y = f(x)$ không có đường tiệm cận đứng.

b) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ có đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

c) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ có đúng một đường tiệm cận đứng là $x = 1$.

d) Đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x)-1}$ có đúng năm đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng.

Lời giải

Ý a) Đúng

Đồ thị hàm số bậc ba không có đường tiệm cận đứng.

Ý b) Đúng

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{f(x)} = 0$. Do đó đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ có đường tiệm cận ngang là $y = 0$.

Ý c) Sai

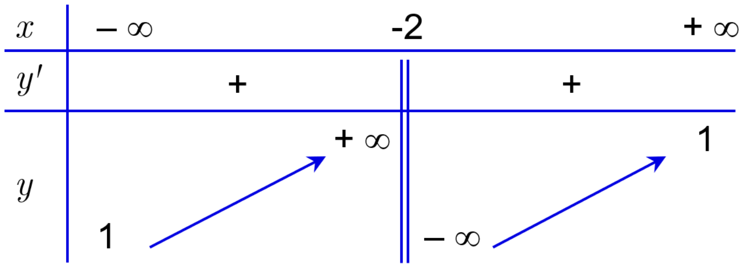
Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $f(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x = 1,\ x = m < -1$. Do đó $f(x) = a(x-1)^2(x-m)\ (a > 0) \Rightarrow y = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{a(x-1)^2(x-m)}$ suy ra đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{f(x)}$ có hai đường tiệm cận đứng là $x = m,\ x = 1$

Ý d) Sai

Dựa vào bảng biến thiên ta có phương trình $2f(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{1}{2}$. Phương trình này có 3 nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x)-1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{2f(x)-1} = 0 \Rightarrow y = 0$ là đường tiệm cận ngang duy nhất của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x)-1}$. Do đó số đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{2f(x)-1}$ là 3.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



a) Đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $x=1$.

c) Tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $I(-2;1)$.

d) Cho $M(x_M;y_M)$ là một điểm tùy ý thuộc đồ thị hàm số. Khi $x_M \to +\infty$ thì $y_M \to +\infty$.

Lời giải

Ý a) Đúng

Dễ thấy đường thẳng $x=-2$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Ý b) Sai

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận ngang là $y=1$ (không phải $x=1$).

Ý c) Đúng

Đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang là $x=-2$; $y=1$ nên tọa độ giao điểm của hai đường tiệm cận là $I(-2;1)$.

Ý d) Sai

Vì $\lim\limits_{x_M \to +\infty} y_M = 1$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$. Xét hàm số

$$g(x) = \frac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}$$ với m là tham số.

Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	hẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$.
	đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có tiệm cận ngang là $y=0$.
	đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có đường tiệm cận đứng.
	2 giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 1 tiệm cận 1 tiệm cận ngang.

Lời giải

a. Đ	b. Đ	c. S	d. Đ

a) Có $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$, suy ra đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=f(x)$. Vậy mệnh đề a) **Đúng**.

b)

Do $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}=0$,

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x-1)\left[f^2(x)+3\right]}{x^2+2(m-1)x+m^2-2}=0$ nên đồ thị hàm số $g(x)$ có một tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0$. Vậy b) **Đúng.**

c) Xét pt $x^2+2(m-1)x+m^2-2=0\ (1)$

Có $\Delta'=(m-1)^2-m^2+2=-2m+3$

$\Delta'\geq 0$ khi $-2m+3\geq 0\Leftrightarrow m\leq\dfrac{3}{2}$.

Do đó với $m>\dfrac{3}{2}$ thì pt (1) vô nghiệm hay hàm số không có tiệm cận đứng. Vậy c) **Sai**.

d) Đồ thị hàm số $y=g(x)$ luôn có 1 tiệm cận ngang $y=0$

Đặt $h(x)=x^2+2(m-1)x+m^2-2$.

Đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng một tiệm cận đứng khi và chỉ khi $h(x)=0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có 1 nghiệm $x=1$ hoặc $h(x)=0$ có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\Delta'>0\\ h(1)=0\end{cases}\\ \Delta'=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(m-1)^2-(m^2-2)>0\\ 1+2(m-1)+m^2-2=0\end{cases}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}m<\dfrac{3}{2}\\ m=1;m=-3\end{cases}\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\ m=-3\\ m=\dfrac{3}{2}\end{array}\right..$$

Vì m nguyên nên ta được $m=1;m=-3$. Vậy d) **Đúng.**

Câu 26: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$. Xét hàm số $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$ với m là tham số.

Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	àm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang.
	hẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$ với mọi a m.
	3 đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 2 tiệm cận đứng là $x=1;\ x=3$.
	trị nguyên dương của m để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 2 ệm cận.

Lời giải

a. S	b. Đ	c. S	d. Đ

a) Vì $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1$ nên $y=1$ là tiệm cận ngang của hàm số. Vậy mệnh đề a) **sai**

b) Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$: $x\geq-\dfrac{1}{3};x^2-4x+m\neq 0$.

Vì $x\geq-\dfrac{1}{3}$ nên không tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.

Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow f(x)>1, \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x).\left(\sqrt{3x+1}-2\right)}{\sqrt{f^2(x)+1}.\left(x^2-4x+m\right)}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{f^2(x)}}}.\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{\dfrac{3}{x^3}+\dfrac{1}{x^4}}-\dfrac{2}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{m}{x^2}}=1.0=0$$

Đường thẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$. Vậy b) **Đúng.**

c) Với $m=3$ ta có $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+3\right)\sqrt{f^2(x)+1}}=\dfrac{(3x-3)f(x)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$

$$\lim_{x\to1} g(x)=\lim_{x\to1}\frac{(3x-3)f(x)}{(x-1)(x-3)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\sqrt{f^2(x)+1}}=\frac{3f(1)}{-8\sqrt{f^2(1)+1}}.$$

Suy ra $x=1$ không là tiệm cận đứng. Vậy c) **Sai**.

d) Ta có $g(x)=\dfrac{\left(\sqrt{3x+1}-2\right)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\sqrt{f^2(x)+1}}=\dfrac{(3x-3)f(x)}{\left(x^2-4x+m\right)\left(\sqrt{3x+1}+2\right)\sqrt{f^2(x)+1}}$

Đồ thị hàm số $g(x)$ luôn có 1 tiệm cận ngang $y=0$

Đồ thị hàm số $g(x)$ có đúng hai tiệm cận khi và chỉ khi nó có đúng một tiệm cận đứng, tức là phương trình $x^2-4x+m=0$ có nghiệm kép x_0, $x_0\ge-\dfrac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 trong đó $x_1=1$, $x_2\ne1$, $x_2\ge-\dfrac{1}{3}$ hoặc có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 trong đó $x_3<-\dfrac{1}{3}$, $x_4\ge-\dfrac{1}{3}$, $x_4\ne1$.

Xét bảng biến thiên của hàm số $h(x)=-x^2+4x$:

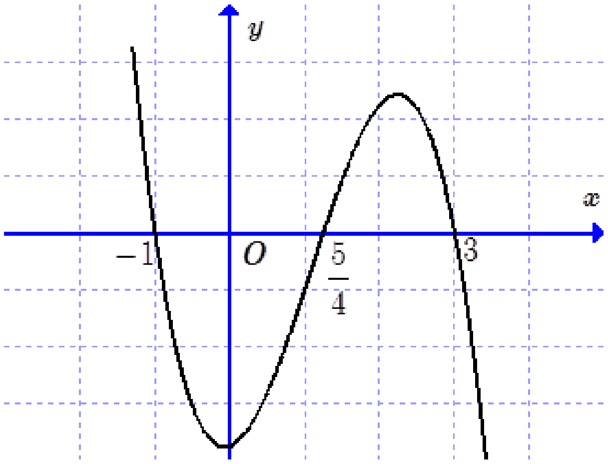
x	$-\frac{1}{3}$	1	2	$+\infty$
$-x^2+4x$	$-\frac{13}{9}$ ↗	3 ↗	4 ↘	$-\infty$

Ta có $x^2-4x+m=0 \Leftrightarrow m=-x^2+4x \qquad (1)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $\left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=3 \\ m<-\dfrac{13}{9} \end{array}\right.$. Do m là số nguyên dương nên $m\in\{3;4\}$. Vậy

d) **Đúng**

Câu 27: Cho hàm số $g(x)=\dfrac{2025}{h(x)-m^2-m}$ với $h(x)=mx^4+nx^3+px^2+qx\,(m,n,p,q\in\mathbb{R}),h(0)=0$. Hàm số $y=h'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	hẳng $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.
	hẳng $y=1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=mx^4.g(x)$.
	−1 đồ thị hàm số $y=g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.
	á trị nguyên âm của m để đồ thị hàm số $y=g(x)$ có đúng 2 đường đứng.

Lời giải

a. Đ	b. S	c. Đ	d. S

Từ đồ thị suy ra $h'(x)=m(x+1)(4x-5)(x-3)=m(4x^3-13x^2-2x+15)$ và $m<0$.

Ta được $h(x)=m\left(x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x\right)$.

Suy ra $g(x)=\dfrac{2025}{h(x)-m^2-m}=\dfrac{2025}{m\left(x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-m-1\right)}$

a) $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Vậy a) Đúng.

b) $y=mx^4.g(x)=\dfrac{2025mx^4}{m\left(x^4-\dfrac{13}{3}x^3-x^2+15x-m-1\right)}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} mx^4.g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2025mx^4}{m\left(x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x - m - 1\right)} = 2025 \Rightarrow y = 2025$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số. Vậy b) Sai.

c) Xét phương trình $h(x) - m^2 - m = 0 \Leftrightarrow x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x = m + 1$

Khi $m = -1$ phương trình có 3 nghiệm $x = 0; x = 3; x = -\dfrac{5}{3}$; nên đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 3 đường tiệm cận đứng.

d) Đồ thị $g(x)$ có 2 đường tiệm cận đứng khi và chỉ khi phương trình $h(x) - m^2 - m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

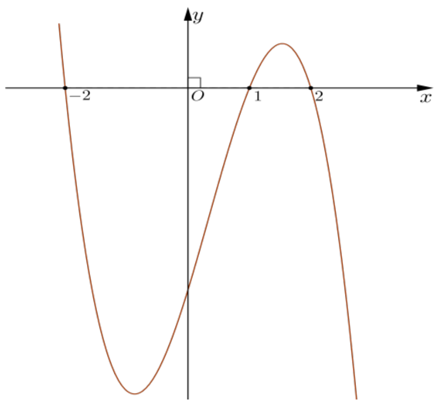
$\Leftrightarrow f(x) = x^4 - \dfrac{13}{3}x^3 - x^2 + 15x = m + 1$ có 2 nghiệm phân biệt.

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{4}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{-32}{3}$	$\nearrow$	$\frac{8575}{768}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Do đó $m + 1 \in \left(\dfrac{-32}{3}; 0\right) \Leftrightarrow m \in \left(\dfrac{-35}{3}; -1\right)$. m nguyên nên $m \in \{-11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3; -2\}$, có 10 giá trị. Vậy d) SAI.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm số đa thức bậc 4, thỏa mãn $f(1) = 0$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ có dạng như hình vẽ bên.



Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	hẳng $y = 0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = g(x)$.
	àm số $h(x) = \dfrac{2024x\left[f^2(x) + f(x) + 1\right]}{f^2(x) + f(x)}$ không có tiệm cận ngang.

	àm số $g(x)=\dfrac{2024x\left(f(x)+1\right)}{f^2(x)+f(x)}$ có 6 tiệm cận đứng và ngang.
	àm số $g(x)=\dfrac{2024x}{f^2(x)+f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng.

Lời giải

a. Đ	b. Đ	c. S	d. Đ

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=g(x)$.

Vậy a) Đúng.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} h\left(x\right)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} h\left(x\right)=+\infty$ nên đồ thị hàm số $y=h(x)$ không có tiệm cận ngang.

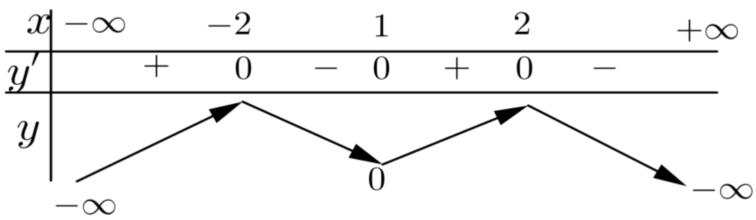
Vậy c) Đúng.

Xét phương trình $f^2(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$

Từ đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có:

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$, $f'(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-2 \\ 1<x<2 \end{array}\right.$

Ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y=f(x)$ như sau



Từ bảng biến thiên ta có:

Phương trình $f(x)=0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 0

Phương trình $f(x)=-1$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

c) Hàm số $g(x)=\dfrac{2024x\left(f(x)+1\right)}{f^2(x)+f(x)}=\dfrac{2024x\left(f(x)+1\right)}{f(x)\left(f(x)+1\right)}$ nên đồ thị hàm số có 3 tiệm cận đứng và $\lim\limits_{x\to-\infty} g\left(x\right)=0;\ \lim\limits_{x\to+\infty} g\left(x\right)=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của hàm số.

Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2024x\left(f(x)+1\right)}{f^2(x)+f(x)}$ có 4 tiệm cận đứng và ngang. Vậy c) Sai.

d) Phương trình $f^2(x)+f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \\ f(x)=-1 \end{array}\right.$ có 5 nghiệm phân biệt khác 0, nên đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2024x}{f^2(x)+f(x)}$ có 5 tiệm cận đứng. Vậy d) Đúng.

Câu 29: Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-3}$ có đồ thị $\left(C\right)$. $\left(C\right)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

STT	Phát biểu	Đúng	Sai
a)	àm số $y=f\left(x\right)$ có 3 đường tiệm cận.		

b)	ı xiên của đồ thị hàm số có hệ số góc bằng 1.		
c)	Giao điểm của hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của (C) là $I(3;4)$.		
d)	lần lượt là giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận trục hoành. Khi đó, diện tích tam giác IAB bằng 4.		

Lời giải

a) Ta có $y=f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-3}=x+1+\dfrac{5}{x-3}$

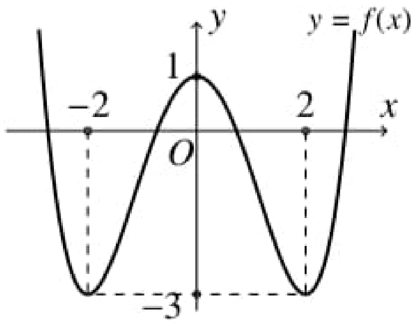
Suy ra (C) có một tiệm cận đứng $x=3$ và một tiệm cận xiên $y=x+1$.

b) Tiệm cận xiên $y=x+1$ có hệ số góc bằng 1.

c) Giao điểm của hai đường tiệm cận đứng và tiệm cận xiên của (C) là $I(3;4)$.

d) Có $A(3;0)$, $B(-1;0)$. Suy ra diện tích IAB bằng $\dfrac{1}{2}.4.4=8$.

Câu 30: Cho hàm số trùng phương $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị như hình vẽ, xét tính đúng sai của các khẳng định sau



	ım số $y=f(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng.
	ım số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ có tổng 3 đường tiệm cận ngang và đứng.
	ận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f(x)}-1}$ bằng 3.
	tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$ bằng 4.

Lời giải

a. Hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ nên ĐTHS không có tiệm cận đứng.

b.

Từ ĐTHS ta có:

+) Phương trình $f(x)-2=0 \Leftrightarrow f(x)=2$ có 2 nghiệm phân biệt. Nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận đứng

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{f(x)-2}=0$ nên ĐTHS có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-2}$ có 3 tiệm cận.

c.

Từ ĐTHS ta có:

+) Phương trình $e^{f(x)}-1=0 \Leftrightarrow f(x)=0$ có 4 nghiệm phân biệt. Nên đồ thị hàm số có 4 tiệm cận đứng

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{e^{f(x)}-1}=0$ nên ĐTHS có 1 đường tiệm cận ngang là $y=0$

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{e^{f(x)}-1}$ có 5 tiệm cận.

d. $y=\dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}=\dfrac{x(x+2)^2(x-2)}{[f(x)]^2+2f(x)-3}$

Ta có: $[f(x)]^2+2f(x)-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=1 \\ f(x)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=m\,(m<-2) \\ x=0 \\ x=n\,(n>2) \\ x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0; x=\pm 2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2) và đa thức $[f(x)]^2+2f(x)-3$ có bậc là 8 nên $y=\dfrac{x(x+2)^2(x-2)}{a^2x^2(x+2)^2(x-2)^2(x-m)(x-n)}$

Vậy hàm số có các tiệm cận đứng là $x=0; x=2; x=m; x=n$.

Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	-1	$\searrow$ $-\infty$	||	$+\infty$ $\searrow$	0

	m số $y=f(x)$ có 1 đường tiệm cận đứng.
	m số $y=f(x)$ có tổng 3 đường tiệm cận ngang và đứng.
	trị nguyên của tham số m để ĐTHS $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có 2 đường tiệm cận

	m số $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)+m^2+1}$ luôn có tiệm cận ngang với mọi giá trị của m

Lời giải

a. Từ BBT ta có: $\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là đường $x=1$

b.

Từ BBT ta có:

+) $\lim\limits_{x\to1^+} f\left(x\right)=+\infty$ hoặc $\lim\limits_{x\to1^-} f\left(x\right)=-\infty$ nên đồ thị hàm số có 1 đường tiệm cận đứng là đường $x=1$

+) $\lim\limits_{x\to-\infty} f\left(x\right)=-2;\ \lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0$ nên ĐTHS có 2 đường tiệm cận ngang là $y=-2;\ y=0$

Vậy ĐTHS có tổng 3 đường tiệm cận đứng và ngang.

c. Để ĐTHS $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có 2 tiệm cận đứng $\Rightarrow f\left(x\right)-m=0$ có 2 nghiệm phân biệt

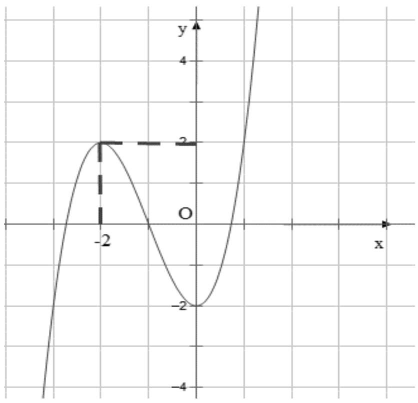
$\Leftrightarrow f\left(x\right)=m$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -2<m<-1$. Vậy không có giá trị nguyên nào của tham số m thỏa mãn ycbt.

d.

+) $\lim\limits_{x\to+\infty} f\left(x\right)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2f\left(x\right)+m^2+1}=\dfrac{1}{m^2+1}$

$\Rightarrow y=\dfrac{1}{1+m^2}$ là đường tiệm cận ngang với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Câu 32: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



	hẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=f\left(x\right)$
	$\overline{\ )-1}=0$
	$=\dfrac{2019}{f\left(x\right)-1}$ có tiệm cận ngang là $y=0$.

	ận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ là 3.

Lời giải

a)S

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ nên hàm số không có tiệm cận ngang.

b)Đ

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{f(x)-1}=0$ vì khi $x\to\pm\infty$ thì $f(x)\to\pm\infty$

c)Đ

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2019}{f(x)-1}=0$ nên đồ thị $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ có tiệm cận ngang là $y=0$.

d) Đ

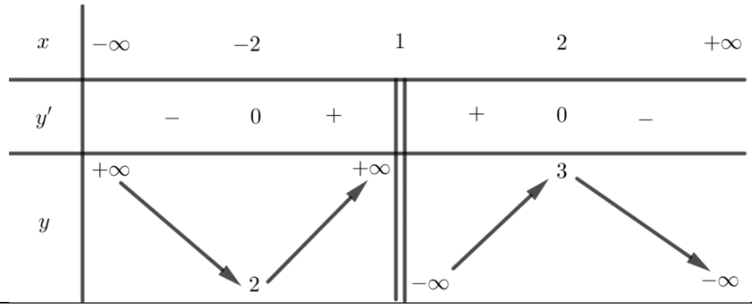
Từ đồ thị của hàm số $y=f(x)$ suy ra tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $D=\mathbb{R}$

Do đó số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ chính là số nghiệm của phương trình $f(x)=1$.

Qua đồ thị ta có: Đường thẳng $y=1$ cắt đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại 3 điểm phân biệt nên phương trình $f(x)=1$ có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{2019}{f(x)-1}$ có 3 đường tiệm cận đứng.

Câu 33: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ và có bảng biến thiên như sau:



	ạm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang.
	$x)-2]=0$.
	ạm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ 5 đường tiệm cận đứng
	ạm số $\dfrac{1}{f(x)-m}$ luôn có tiệm cận ngang với mọi giá trị của m

Lời giải

a) Đ

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ nên đồ thị hàm số $y=f(x)$ không có tiệm cận ngang.

b) S

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-2\right]=-\infty$

c) S

Ta có: $2f(x)-5=0 \Leftrightarrow f(x)=\frac{5}{2}(1)$. Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $x_1,x_2,x_3,x_4 \neq 1$ và giới hạn của hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ tại các điểm x_1,x_2,x_3,x_4 đều bằng $\pm\infty$.

Mặt khác $\lim\limits_{x\to1^{\pm}}\dfrac{1}{2f(x)-5}=0$ nên $x=1$ không phải tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-5}$ có 4 đường tiệm cận đứng.

d) Đ

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)-m}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)-m}=0$ với mọi giá trị của m

Câu 34: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ $\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	ận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-4}$ bằng 2.
	ận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-4}$ bằng 3.
	tiệm cận của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{2f(x)-4}$ bằng 6.
	2 thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{(x^2+1)\left[f(x)-m\right]}$ có đúng ba đường tiệm cận.

Lời giải

a. S	**b. S**	**c. S**	**d. Đ**

a) b) c) Xét phương trình $2f\left(x\right)-4=0 \Leftrightarrow f(x)=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a(a<0) \\ x=1 \end{array}\right.$.

Khi đó $x=a$; $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-4}$.

Hơn nữa $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{2f(x)-4}=0; \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{2f(x)-4}=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị $y=\dfrac{1}{2f\left(x\right)-4}$.

d.

Điều kiện xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ là: $\begin{cases} x>0 \\ f\left(x\right)\neq m \end{cases}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0 \Rightarrow$ đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

Để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ có đúng ba đường tiệm cận thì đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^3+2x^2+2x}}{\left(x^2+1\right)\left[f\left(x\right)-m\right]}$ có đúng hai tiệm cận đứng.

Suy ra phương trình $f\left(x\right)-m=0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $\left(0;+\infty\right)$.

Từ bảng biến thiên suy ra $m<2$.

Câu 35: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	5	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	2

Các khẳng định dưới đây đúng hay sai?

	ım số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-m}$ có ba tiệm cận đứng khi $m=-5$.
	ım số $y=\dfrac{1}{f\left(x\right)-m}$ có tổng hai đường tiệm cận ngang và đứng là 4 4
	ận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ bằng 3.
	$m\in\mathbb{Z}$, $m\in\left[-10;10\right]$ để đồ thị hàm số $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x\right)-m+1}$ có 4 ệm cận là 5.

Lời giải

a. S	b. Đ	c. S	d. Đ

a) Từ bảng biến thiên ta thấy khi $m=-5$ thì $f(x)=-5$ vô nghiệm nên không có tiệm cận đứng.

b) Từ bảng biến thiên ta thấy khi $m=4$ thì $f(x)=4$ có 3 nghiệm phân biệt nên có 3 tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)-m}$ có tổng hai đường tiệm cận ngang và đứng là 4 khi $m=4$.

c) Đồ thị hàm số luôn có tiệm cận ngang $y=0$.

d) + Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{f(x)-m+1}=\dfrac{5}{6-m}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{f(x)-m+1}=\dfrac{2}{3-m}$

- Xét với $m=6$ thì đồ thị hàm số $y=g(x)$ nhận đường thẳng có phương trình $y=-\dfrac{2}{3}$ là TCN

Khi đó phương trình: $f(x)=m-1=5$ có 2 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ ĐTHS có 2 TCĐ $\Rightarrow$ ĐTHS có 3 đường tiệm cận $\Rightarrow m=6$ (không thỏa mãn).

- Xét $m=3\Rightarrow$ĐTHS $y=g(x)$ nhận đường thẳng có phương trình $y=\dfrac{5}{3}$ là TCN

Khi đó phương trình: $f(x)=m-1=2$ có 1 nghiệm $\Rightarrow$ĐTHS có 1 TCĐ $\Rightarrow$ ĐTHS có 2 đường tiệm cận $\Rightarrow m=3$ (không thỏa mãn).

- Với $m\neq 3$ và $m\neq 6$ thì đồ thị hàm số $y=g(x)$ nhận 2 đường thẳng có phương trình $y=\dfrac{5}{6-m}$; $y=\dfrac{2}{3-m}$ là TCN

Xét phương trình: $f(x)-m+1=0\Leftrightarrow f(x)=m-1$ $(*)$

Để ĐTHS $y=g(x)$ có 4 đường tiệm cận thì $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow m\in(2;3)\cup\{4\}\cup[6;+\infty)$

Do ĐK nên $m\in(2;3)\cup\{4\}\cup(6;+\infty)$

Vậy $m\in(2;3)\cup\{4\}\cup(6;+\infty)$ do $m\in\mathbb{Z}$, $m\in[-10;10]$ nên $m\in\{4;7;8;9;10\}$

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ là:

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$ nên $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Câu 2: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ là.

Lời giải

Trả lời: 1

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty; \lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$, suy ra đồ thị có tiệm cận đứng là $x=1$.

Câu 3: Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ là.

Lời giải

Trả lời: $y=x-1$

Sử dụng chú ý b) chia tử thức cho mẫu thức ta được $\begin{cases} y=x-1+\dfrac{1}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x-1}=0 \end{cases} \Rightarrow TCX: y=x-1.$

Câu 4: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ || 2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	3

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là:

Lời giải

Trả lời: 3

Nhìn bảng biến thiên ta thấy x=0 hàm số không xác định nên x=0 là TCĐ của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3 \Rightarrow y=3$ là TCN của đồ thị hàm số

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=1 \Rightarrow y=1$ là TCN của đồ thị hàm số

Vậy hàm số có 3 tiệm cận

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$		0		
y	0	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ 2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho là.

Lời giải

Trả lời: 2

Từ bảng biến thiên đã cho ta có :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ nên đường thẳng $y=0$ là một tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=-\infty$ nên đường thẳng $x=0$ là một tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số đã cho có hai đường tiệm cận.

Câu 6: Số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}$ là

Lời giải

Trả lời: 1

Tập xác định của hàm số: $D=[-9;+\infty)\setminus\{0;-1\}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to(-1)^-} y=\lim\limits_{x\to(-1)^-}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=-\infty$.

$\Rightarrow$ TCĐ: $x=-1$.

$$\lim_{x\to0^+} y=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x}{(x^2+x)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)}=\frac{1}{6}.$$

$$\lim_{x\to 0^-} y = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x+9}-3}{x^2+x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{\left(x^2+x\right)\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{(x+1)\left(\sqrt{x+9}+3\right)} = \frac{1}{6}.$$

$\Rightarrow$ $x=0$ không là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng.

Câu 7: Đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Lờigiải

Trả lời: 1 TCĐ, 2 TCN

Tập xác định của hàm số $D=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$

TH1: $x<-1 \Rightarrow x+1<0$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{-\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=-\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y=-1$, không có TCĐ.

TH2: $x>1 \Rightarrow x+1>0$. Khi đó $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{\sqrt{(x-1)(x+1)}}=\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Suy ra hàm số TCN $y=1$, TCĐ $x=1$.

Vậy hàm số có 2 TCN và 1 TCĐ

Câu 8: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}$ có số đường tiệm cận đứng là m và số đường tiệm cận ngang là n. Giá trị của $m+n$ là.

Lời giải

Trả lời: 1

$D=[-2;2]\backslash\{-1\}$

$$\lim_{x\to(-1)^+} y = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}=+\infty;\ \lim_{x\to(-1)^-} y = \lim_{x\to(-1)^-} \frac{1-\sqrt{4-x^2}}{x^2-2x-3}=-\infty$$

$\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng.

Đồ thị hàm số không có đường tiệm cận ngang.

Vậy $m+n=1$.

Câu 9: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là.

Lời giải

Trả lời: 12

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2-6x+2m>0 \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 lớn hơn -2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9-2m>0 \\ x_1+x_2>-2 \\ (-2)^2-6\cdot(-2)+2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{2} \\ 3>-2 \\ 4+12+2m>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{9}{2} \\ m>-8 \end{cases}.$$

Do đó tập $S=\{-7;-6;-5;...;4\}$ có 12 giá trị.

Câu 10: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng. Khi đó tổng các phần tử của S bằng.

Lời giải

Trả lời: $-\dfrac{1}{2}$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}}$.

Mà $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^3+mx+1}-\sqrt[3]{x^4+x+1}+m^2x}{x}$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x^3+mx+1}-1}{x}-\frac{\sqrt[3]{x^4+x+1}-1}{x}+\frac{m^2x}{x}\right]$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\frac{x^3+mx}{x(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\frac{x^4+x}{x(\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1)}+m^2\right].$$

Đồ thị hàm số $f(x)$ nhận trục tung làm tiệm cận đứng

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{(x^2+m)}{(\sqrt{x^3+mx+1}+1)}-\frac{(x^3+1)}{\sqrt[3]{(x^4+x+1)^2}+\sqrt[3]{x^4+x+1}+1}+m^2\right)=0 \Leftrightarrow \frac{m}{2}-\frac{1}{3}+m^2=0.$$

$\Leftrightarrow 6m^2+3m-2=0$ Vậy $m_1+m_2=-\dfrac{1}{2}$.

Câu 11. Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3

Tổng số đường tiệm cận của hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+1}$ là…

Lời giải

Trả lời: 4

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình $f(x)+1=0 \Leftrightarrow f(x)=-1$.

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có hai nghiệm phân biệt nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+1}$ có hai đường tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f(x)+1}=\dfrac{1}{3+1}=\dfrac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)+1}=\dfrac{1}{1+1}=\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận ngang là $y=\dfrac{1}{4}$ và $y=\dfrac{1}{2}$.

Vậy đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x)+1}$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 12. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình vẽ bên dưới.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f(x^3+x)+3}$ là…

Lời giải

Trả lời: 4

Đặt $t=x^3+x$, ta có khi $x\to-\infty$ thì $t\to-\infty$ và khi $x\to+\infty$ thì $t\to+\infty$.

Mặt khác ta có $t'=3x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên với mọi $t\in\mathbb{R}$ phương trình $x^3+x=t$ có duy nhất một nghiệm x.

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị là số nghiệm của phương trình

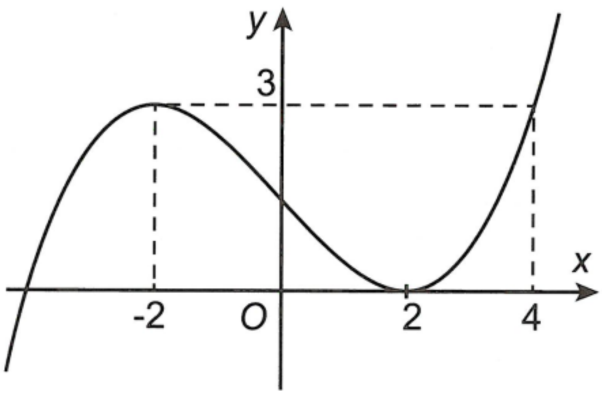
$$f(t)+3=0 \Leftrightarrow f(t)=-3.$$

Từ bảng biến thiên ta thấy phương trình có duy nhất một nghiệm nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ có một tiệm cận đứng.

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{1}{f\left(t\right)+3}=0$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(t\right)+3}=0$ nên đồ thị hàm số $y=\dfrac{1}{f\left(x^3+x\right)+3}$ có một tiệm cận ngang là $y=0$.

Vậy đồ thị có hai đường tiệm cận

Câu 13. Cho hàm số bậc ba $f\left(x\right)=ax^3+bx^2+cx+d\left(a,b,c,d\in\mathbb{R}\right)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Đồ thị hàm số $g\left(x\right)=\dfrac{1}{f\left(4-x^2\right)-3}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang?

Lời giải

Trả lời: 4

Đặt $t=4-x^2$, ta có khi $x\to\pm\infty$ thì $t\to-\infty$.

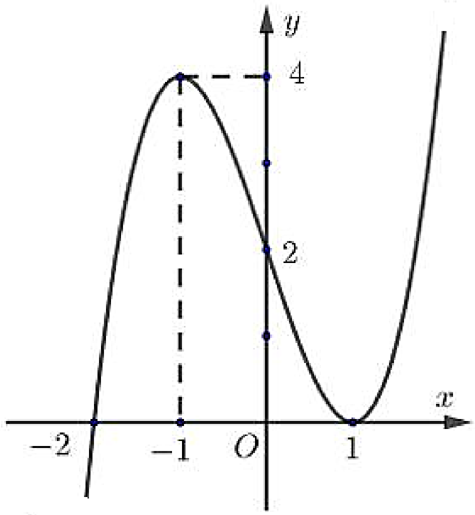
Khi đó $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g\left(x\right)=\lim\limits_{t\to-\infty}\dfrac{1}{f\left(t\right)-3}=0$ nên $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g\left(x\right)$.

Mặt khác $f\left(4-x^2\right)-3=0\Leftrightarrow f\left(4-x^2\right)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}4-x^2=-2\\4-x^2=4\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm\sqrt{6}\\x=0\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có ba đường tiệm cận đứng.

Vậy đồ thị hàm số $g\left(x\right)$ có bốn đường tiệm cận.

Câu 14: Cho đồ thị hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ như hình vẽ dưới đây:



Đồ thị của hàm số $g(x)=\dfrac{3x^2-x-2}{3f^2(x)-6f(x)}$ có bao nhiêu đường tiện cận đứng?

Lời giải

Trả lời: 5

Xét phương trình $3f^2(x)-6f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=0\\f(x)=2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta suy ra:

Phương trình $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=1\end{array}\right.$, với $x=-2$ là nghiệm đơn và $x=1$ là nghiệm kép.

Suy ra: $f(x)=a(x+2)(x-1)^2,(a\neq 0)$.

Phương trình $f(x)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=m(-2<m<-1)\\x=n(n>1)\end{array}\right.$, các nghiệm đều là nghiệm đơn.

Suy ra $f(x)-2=ax(x-m)(x-n),(a\neq 0)$.

Khi đó: $g(x)=\dfrac{(x-1)(3x+2)}{3f(x)\left[f(x)-2\right]}=\dfrac{(x-1)(3x+2)}{3a^2(x+2)(x-1)^2x(x-m)(x-n)}$

$=\dfrac{(3x+2)}{3a^2x(x+2)(x-1)(x-m)(x-n)},(a\neq 0)$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng

Cách 2: Chọn hàm số $f(x)$. Ta có $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Đồ thị hàm số qua 4 điểm $A(-2;0),B(-1;4),C(0;2),D(1;0)$.

suy ra $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=-3 \\ d=2 \end{cases}$ hay $f(x)=x^3-3x+2$

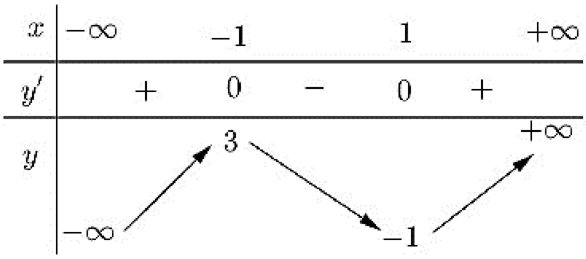
◆ Khi đó:

$$g(x)=\frac{3x^2-x-2}{3f^2(x)-6f(x)}=\frac{3x^2-x-2}{3f(x)\left(f(x)-2\right)}=\frac{3x^2-x-2}{3\left(x^3-3x+2\right)\left(x^3-3x\right)}$$

$$=\frac{(x-1)(3x+2)}{3(x+2)(x-1)^2x\left(x^2-3\right)}$$

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 5 đường tiệm cận đứng

Câu 15: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới.



Đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang

Lời giải

Trả lời: 2

Hàm số $g(x)$ xác định khi $\begin{cases} x\ge -\dfrac{5}{4} \\ f(x)\ne \pm 1 \end{cases}$

Ta có $y=f(x)$ là hàm bậc ba và dựa vảo bảng biến thiên ta có $y'=a\left(x^2-1\right)$

$\Rightarrow y=\dfrac{a}{3}x^3-ax+b$.

$$\begin{cases} y(-1)=3 \\ y(1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{a}{3}+a+b=3 \\ \dfrac{a}{3}-a+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow y=x^3-3x+1$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{\left|x^3-3x+1\right|-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{7}{x^3}-3\sqrt{\dfrac{4}{x^5}+\dfrac{5}{x^6}}}{\left|1-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right|-\dfrac{1}{x^3}}=0$$

$\Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

$$g(x)=\frac{2x+7-3\sqrt{4x+5}}{|f(x)|-1}=\frac{(4x^2-8x+4)(|f(x)|+1)}{(f^2(x)-1)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$=\frac{4(x-1)^2(|f(x)|+1)}{(f(x)-1)(f(x)+1)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$=\frac{4(x-1)^2(|f(x)|+1)}{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(x-1)^2(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

$$=\frac{4(|f(x)|+1)}{x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(2x+7+3\sqrt{4x+5})}$$

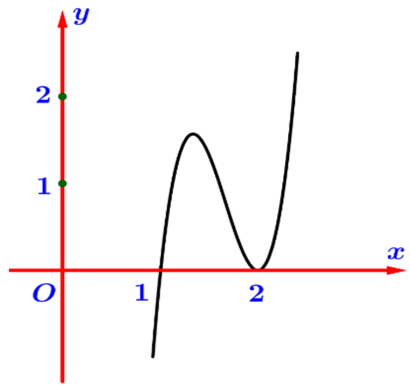
$$x(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})(x+2)(2x+7+3\sqrt{4x+5})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\sqrt{3}\end{array}\right.\text{ (vì } x\ge-\frac{5}{4}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0^+}g(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^-}g(x)=+\infty\end{cases}\Rightarrow x=0 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\sqrt{3}^+}g(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to\sqrt{3}^-}g(x)=-\infty\end{cases}\Rightarrow x=\sqrt{3} \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Vậy đồ thị hàm số có tiện cận ngang là $y=0$ và tiệm cận đứng là $y=\sqrt{3}$

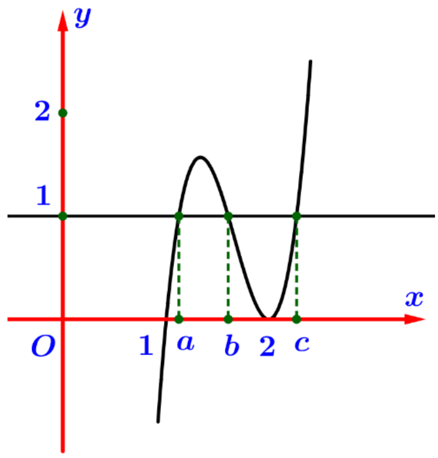
Câu 16: Cho hàm số bậc ba $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $g(x)=\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận?



Lời giải

Trả lời: 6

Điều kiện xác định của hàm số $g(x)$ là $x\ge1$.



Xét phương trình $x\left[f^2(x)-f(x)\right]=0 \Leftrightarrow x.f(x).\left[f(x)-1\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \\ f(x)=1 \end{array}\right.$.

Xét phương trình $f(x)=0$ có nghiệm kép $x=2$ và nghiệm đơn $x=1$.

Xét phương trình $f(x)=1$ có ba nghiệm đơn $\left[\begin{array}{l} x=a,\ 1<a<2 \\ x=b,\ 1<b<2,\ b\neq a \\ x=c,\ c>2 \end{array}\right.$. Ta thấy

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty \end{cases}$

Nên không mất tính tổng quát, ta có

$+\ f(x)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2=0$

$+\ f(x)=1 \Leftrightarrow (x-a)(x-b)(x-c)=0$

Do đó:

$$g(x)=\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x\left[f^2(x)-f(x)\right]}=\frac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}$$

Khi đó

$+\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} g(x) \\ \lim\limits_{x\to0^-} g(x) \end{cases}$ không tồn tại giới hạn $\Rightarrow x=0$ không là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$

$+\ \lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)}=+\infty$.

$\Rightarrow\ x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$+\begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^-} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x=2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$+\begin{cases} \lim\limits_{x\to a^+} g(x) = \lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to a^-} g(x) = \lim\limits_{x\to a^-} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x=a$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$+\begin{cases} \lim\limits_{x\to b^+} g(x) = \lim\limits_{x\to b^+} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to b^-} g(x) = \lim\limits_{x\to b^-} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \end{cases}$

$\Rightarrow$ $x=b$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$+\begin{cases} \lim\limits_{x\to c^+} g(x) = \lim\limits_{x\to c^+} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to c^-} g(x) = \lim\limits_{x\to c^-} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = -\infty \end{cases}$

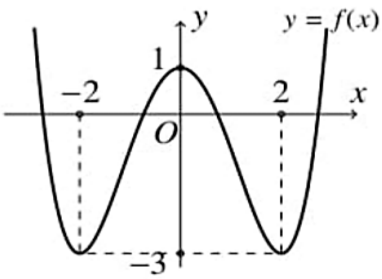
$\Rightarrow$ $x=c$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $g(x)$.

$+\ \lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-3x+2\sqrt{x-1}}{x(x-1)(x-2)^2(x-a)(x-b)(x-c)} = 0$.

$\Rightarrow$ $y=0$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $g(x)$.

Vậy đồ thị hàm số $g(x)$ có 6 đường tiệm cận.

Câu 17: Cho hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình vẽ. Hỏi đồ thị hàm số $y = \dfrac{(x^2-4)(x^2+2x)}{[f(x)]^2 + 2f(x) - 3}$ có tổng cộng bao nhiêu tiệm cận đứng?



Lời giải

Trả lời : 4

Ta có: $y=\dfrac{\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}=\dfrac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)x\left(x+2\right)}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}=\dfrac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)^2x}{\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3}$.

Xét $\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f\left(x\right)=1\\f\left(x\right)=-3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{c}x=m,\ m<-2\\x=0\\x=n,\ n>2\\x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Dựa vào đồ thị ta thấy các nghiệm $x=0;\ x=\pm2$ là các nghiệm kép (nghiệm bội 2).

Do đó đa thức $\left[f\left(x\right)\right]^2+2f\left(x\right)-3$ có bậc là 8.

Suy ra $y=\dfrac{\left(x-2\right)\left(x+2\right)^2x}{a^2x^2\left(x+2\right)^2\left(x-2\right)^2\left(x-m\right)\left(x-n\right)}=\dfrac{1}{a^2x\left(x-2\right)\left(x-m\right)\left(x-n\right)}$.

Vậy đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận đứng là $x=0,\ x=2,\ x=m,\ x=n$.

BÀI 4: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện theo các bước sau đây:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm đạo hàm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.

- Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

- Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 3. Vẽ đồ thị của hàm số

- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (nếu có và dễ tim), …

- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

- Vẽ đồ thị hàm số.

Chú ý: Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$

Ví dụ 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty), y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên khoảng $(0;2), y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = -2$.

- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right) = -\infty; \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^3}\right) = +\infty.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị:

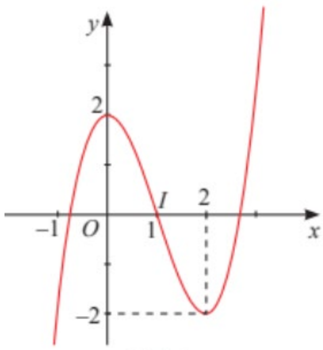
Khi $x=0$ thì $y=2$ nên $(0;2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại ba điểm $(1;0)$, $(1+\sqrt{3};0),(1-\sqrt{3};0)$.

Điểm $(0;2)$ là điểm cực đại và điểm $(2;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình 1. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1;0)$.



Hình 1

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ luôn nhận điểm $I\left(x_0;y_0\right)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y''=0$ và $y_0=y\left(x_0\right)$.

Ví dụ 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=-x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x$.

Lời giải

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

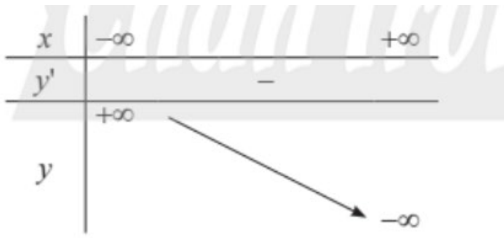
Đạo hàm $y'=-3x^2-3x-\frac{3}{2}$. Do $y'<0$ trên $\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

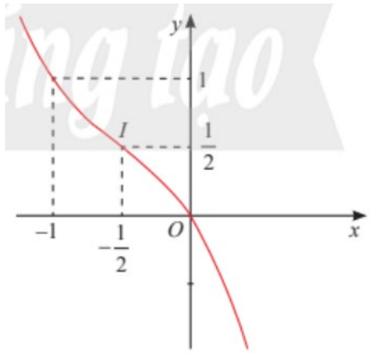
- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left[-x^3\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x^2}\right)\right]=+\infty; \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^3\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x^2}\right)\right]=-\infty.$$

- Bảng biến thiên:



3. Đồ thị



Hình 2

Đồ thị của hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $(-1;1)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình 2. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

3. Khảo sát hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

Ví dụ 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

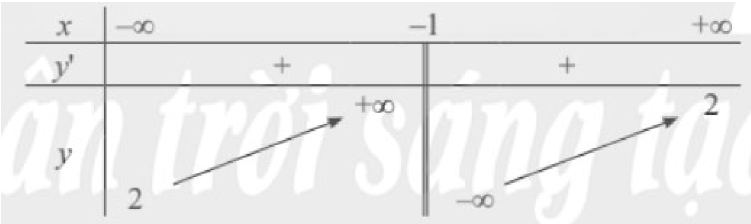
Đạo hàm $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$. Vì $y'>0$ với mọi $x\neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

- Tiệm cận:

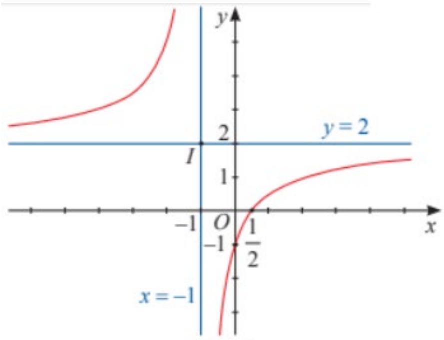
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$. Suy ra đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x-1}{x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x-1}{x+1}=-\infty$. Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:



3. Đồ thị:



Hình 3

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\frac{1}{2};0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $(0;-1)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 3. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1;2)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-1$ và $y=2$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$:

a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;

b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Ví dụ 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{-x+2}{2x+3}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

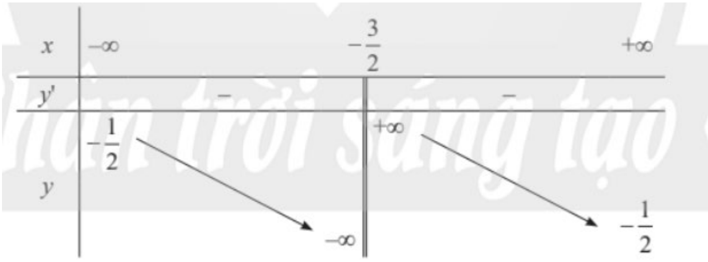
Đạo hàm $y'=\frac{-7}{(2x+3)^2}$. Vì $y'<0$ với mọi $x\neq -\frac{3}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

- Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x+2}{2x+3} = -\frac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x+2}{2x+3} = -\frac{1}{2}$. Suy ra đường thẳng $y=-\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-}\frac{-x+2}{2x+3} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = \lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-}\frac{-x+2}{2x+3} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x=-\frac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

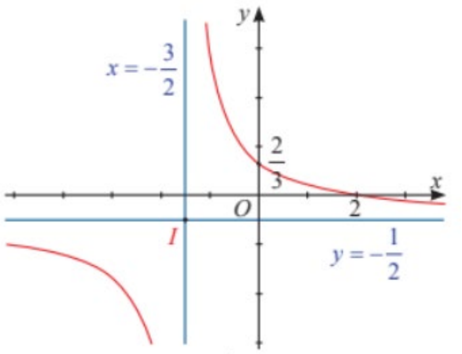
- Bảng biến thiên:



3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(2;0)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\frac{2}{3}\right)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 4. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(-\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$.



Hình 4

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-\frac{3}{2}$ và $y=-\frac{1}{2}$.

4. Khảo sát hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a\neq 0, m\neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

Ví dụ 5. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{x^2+2x-2}{x-1}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Ta có $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty), y'>0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2), y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và $y_{CT}=6$. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=2$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=+\infty$.

Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x}=1$ và $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x-1}=3$. Suy ra đường thẳng $y=x+3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=-\infty; \lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=+\infty$. Suy ra đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

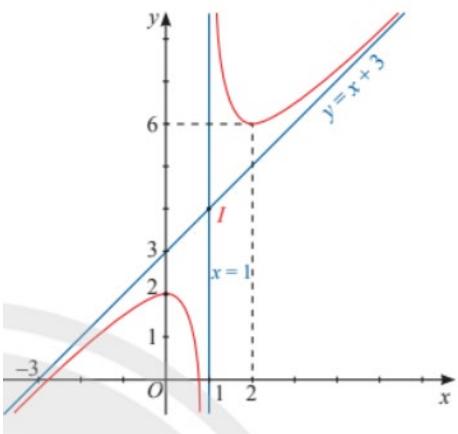
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$ ↗		2	↘ $-\infty$	||	$+\infty$ ↘	6	↗	$+\infty$

3. Đồ thị:

Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1+\sqrt{3}$ hoặc $x=-1-\sqrt{3}$. Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-1+\sqrt{3};0)$ và điểm $(-1-\sqrt{3};0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$. Đồ thị hàm số được biểu diễn trên Hình 5 .



Hình 5

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;4)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=1$ và $y=x+3$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a\neq 0, m\neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;

b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Ví dụ 6. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{-x^2-4x-10}{(x+2)^2}$. Vì $y'<0$ với mọi $x\neq -2$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

- Các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-3x+4}{x+2}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x+4}{x+2}=-\infty$$

Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-3x+4}{x^2+2x}=-1$ và $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}-(-1)x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x+4}{x+2}\right)=-1$.

Suy ra đường thẳng $y=-x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2^-} y=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^+} y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=+\infty$. Suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

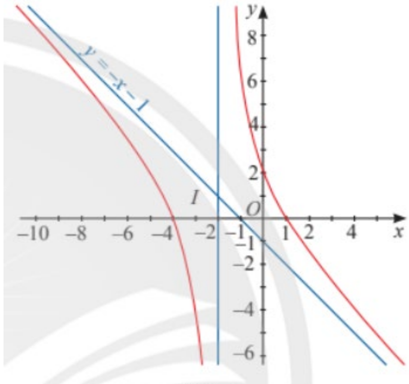
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	$\|$	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

3. Đồ thị:

Ta có $y=0\Leftrightarrow -x^2-3x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=1\end{array}\right.$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-4;0)$ và điểm $(1;0)$. Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 6. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-2;1)$.



Hình 6

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-2$ và $y=-x-1$.

5. Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liển quan đến thực tiễn

Ta có thể vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết nhiều bài toán liên quan đến thực tiễn trong những lĩnh vực khác nhau như kinh tế, khoa học, kĩ thuật, ...

Ví dụ 7. Xét tình huống ở (trang 25).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $C=C(v)$ trên $(0;120]$.

b) Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

(Theo: http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/bacpro/bacpro_maintenance_auto.pdf)

Lời giải

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $C=C(v)$:

- Tập xác định: $D=(0;120]$.

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $C'(v)=-\dfrac{16000}{v^2}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5(v-80)(v+80)}{2v^2}; C'(v)=0 \Leftrightarrow v=-80$ (loại) hoặc $v=80$.

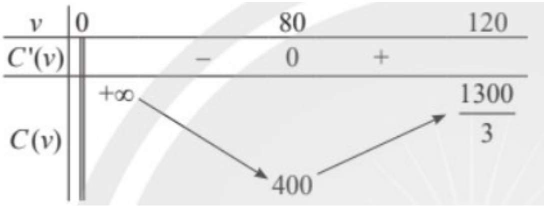
- Trên khoảng $(0;80), C'(v)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

- Trên khoảng $(80;120), C'(v)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v=80, C_{CT}=C(80)=400$.

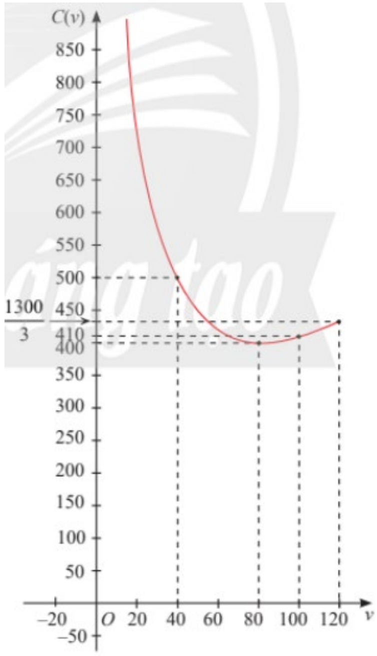
+ Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim\limits_{v\to 0^+} C(v)=\lim\limits_{v\to 0^+}\left(\dfrac{16000}{v}+\dfrac{5}{2}v\right)=+\infty$ nên đường thẳng $v=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:



- Đồ thị:

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80;400)$ và đi qua các điểm $(40;500),(100;410)$, $\left(120;\dfrac{1300}{3}\right)$ như Hình 7 .



Hình 7

b) Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v=80$ và GTNN là 400 .

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là $80\,\mathrm{km/h}$.

Ví dụ 8. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1 \le x \le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:
$C(x)=x^3-3x^2-20x+500.$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Hãy viết biểu thức tính $B(x)$ và $L(x)$ theo x.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=L(x)$ trên [1 ; 18].

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa? Tính lợi nhuận tối đa đó.

Lời giải

a) Khi bán x mét vải lụa:

- Số tiền thu được là: $B(x)=220x$ (nghìn đồng).

- Lợi nhuận thu được là: $L(x)=B(x)-C(x)=-x^3+3x^2+240x-500$ (nghìn đồng).

b) Hàm số $L(x)$ xác định trên [1 ; 18].

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $L'(x)=-3x^2+6x+240; L'(x)=0 \Leftrightarrow x=10$ hoặc $x=-8$ (loại).

- Trên khoảng $(1;10), L'(x)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

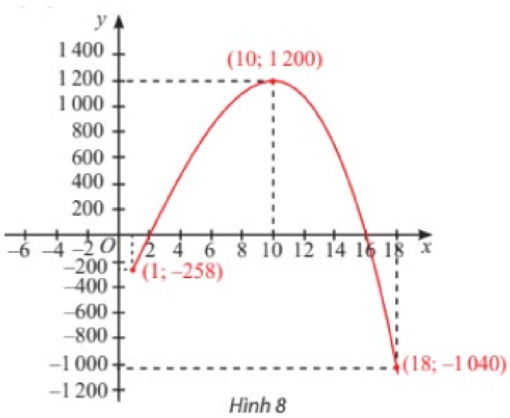
- Trên khoảng $(10;18), L'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x=10$ và $L_{CĐ}=L(10)=1200$.

+ Bảng biến thiên:

x	1		10		18
$L'(x)$		+	0	−	
$L(x)$			1 200		
	−258	↗		↘	−1 040

- Đồ thị:



Hình 8

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(10\ ;\ 1200)$ và đi qua các điểm $(1\ ;-258),(18\ ;-1040)$ như Hình 8 .

c) Quan sát đồ thị hàm số $y=L(x)$, ta nhận thấy khi $x=10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1200 .

Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1200 nghìn đồng.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=x^3+x-2$;

b) $y=2x^3+x^2-\frac{1}{2}x-3$.

2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$.

a) Tìm điểm I thuộc đồ thị hàm số biết hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y''=0$.

b) Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

3. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y = 3 + \frac{1}{x}$;　　　　b) $y = \frac{x-3}{1-x}$.

4. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

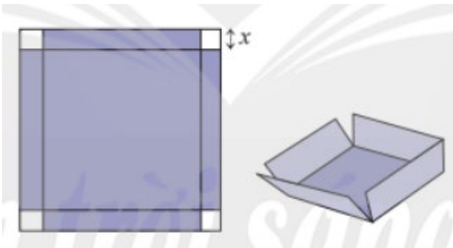
a) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$　　　　b) $y = 2x - \frac{1}{1-2x}$.

5. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm toạ độ trung điểm đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Có nhận xét gì về điểm này?

6. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình 11).



Hình 11

Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.

Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này.

(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Hàm số bậc ba và một số bài toán liên quan.

Phương pháp

1. Khảo sát hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

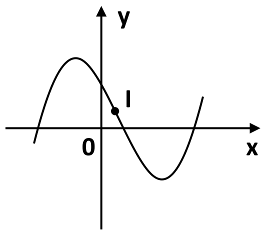
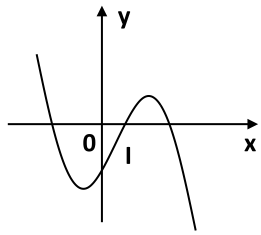
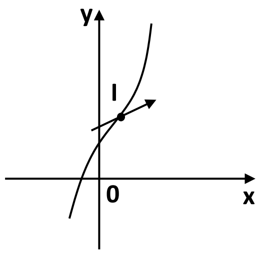
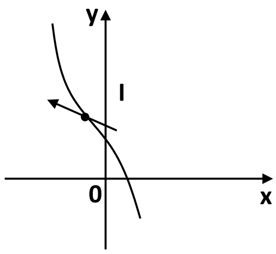
- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- **Đạo hàm** $y' = 3ax^2 + 2bx + c, \Delta' = b^2 - 3ac$
  - Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow$ hàm có hai cực trị.
  - Nếu $\Delta' \leq 0 \Rightarrow$ hàm số luôn tăng hoặc luôn giảm trên $\mathbb{R}$.
- **Đạo hàm cấp hai:** $y'' = 6ax + 2b$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{3a}$

  $x = -\frac{b}{3a}$ là hoành độ điểm uốn, đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.
- Giới hạn:

- Nếu $a > 0$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty.$
- Nếu $a < 0$ thì $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty.$

- Bảng biến thiên:
  - Trường hợp $a > 0$:
    - Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow$ hàm có hai cực trị.
    - Nếu $\Delta' \le 0 \Rightarrow$ hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$.
  - Trường hợp $a < 0$:
    - Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow$ hàm có hai cực trị.
    - Nếu $\Delta' \le 0 \Rightarrow$ hàm số luôn giảm trên $\mathbb{R}$.
- **Đồ thị: Vẽ các điểm đặc biệt (cực đại, cực tiểu, điểm uốn, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ). Kết hợp với bảng biến thiên để biết " dáng điệu" của đồ thị hàm số.**

Do có bốn trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm bậc ba có bốn dạng sau đây:

	a > 0	**a < 0**
y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} > 0$ (Có hai cực trị)		
y' = 0 vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_{y'} = 0\\ \Delta_{y'} < 0\end{array}\right.$ (Không có cực trị)		

2. Các tính chất của hàm bậc ba thường gặp

- Hàm có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$.
- Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$.
- Hàm số luôn giảm biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$.

- Để tìm các giá trị cực trị (trong trường hợp hoành độ nghiệm tương đối xấu) ta lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$ ta được: $f(x)=f'(x).g(x)+r(x)$. Nếu x_1,x_2 là nghiệm của $f'(x)$ thì $f(x_1)=r(x_1); f(x_2)=r(x_2)$. Khi đó đường thẳng đi qua hai cực trị là $y=r(x)$.
- Đồ thị hàm số nhận điểm uốn I làm tâm đối xứng
- Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có hai cực trị và các giá rị cực trị trái dấu nhau
- Đồ thị cắt Ox tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có hai cực trị và một cực trị nằm trên Ox.
- Đồ thị cắt Ox tại 1 điểm $\Leftrightarrow$ Hàm số không có cực trị hoặc hàm số có hai cực trị trái dấu.
- Tiếp tuyến: Gọi I là điểm uốn. Cho $M\in(C)$.
  - Nếu $M\equiv I$ thì có đúng một tiếp tuyến đi qua M và tiếp tuyến này có hệ số góc nhỏ nhất (nếu $a>0$) và lớn nhất (nếu $a<0$)
  - Nếu $M\neq I$ thì có đúng hai tiếp tuyến đi qua M.

1. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=-x^3+3x+1$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận số nghiệm của phương trình sau theo m: $x^3-3x+m=0$

Ví dụ 2. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+1$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3;1)$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$, trong đó m là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho với $m=0$.

b) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y=2x^3-9x^2+12x-4$ có đồ thị là (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Tìm m để phương tròn sau có 6 nghiệm phân biệt $2|x|^3-9x^2+12|x|=m$

Ví dụ 5. a) Tìm các hệ số m,n,p sao cho hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại điểm $x=3$ và đồ thị (C) của nó tiếp xúc với đường thẳng $y=3x-\frac{1}{3}$ tại giao điểm của (C) với trục tung.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với các giá trị m,n,p vừa tìm được.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ có đồ thị (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b) Tìm m để đường thẳng $d_m: y=(2m-1)x-1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;-1),B,C$ sao cho $BC=\sqrt{82}$.

c) Tìm những điểm nằm trên (C) mà qua đó kẻ duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=x^3-3ax^2+4a^3$

a) Hãy khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $a=1$.

b) Xác định a để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị đối xứng qua đường thẳng $y=x$

c) Xác định a để đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị tại các điểm A,B,C với $AB=BC$.

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x)=-x^3+3mx-2$, m là tham số

a) Xác định giá trị của m để bất phương trình sau thỏa mãn $f(x)\le -\frac{1}{x^3},\forall x\ge 1$

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=1$.

c) Gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm uốn và M là điểm bất kì trên d. Tùy theo vị trí của M, hãy biện luận số tiếp tuyến của (C) đi qua M.

Ví dụ 9. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-mx+m-2$ có đồ thị là (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m=3$. Chứng minh rằng (C) có một tâm đối xứng.

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (C_m) tại điểm uốn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

c) Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ mà (C_m) không đi qua với mọi giá trị m

2. Bài tập rèn luyện

BT 1. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+3$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+m=0$.

BT 2. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị.

BT 3. a) Tìm các hệ số a,b,c sao cho đồ thị hàm số $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2 và tiếp xúc với đường thẳng $y=1$ tại điểm có hoành độ là -1.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với các giá trị vừa tìm được của a,b,c.

BT 4. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-3$.

b) Chứng minh rằng phương trình $-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-3=0$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

BT 5. Cho hàm số $y=x^3+mx^2+2$ có đồ thị là (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m=-3$

b) Tùy theo k, giải và biện luận phương trình $-|x|^3+3x^2+k=0$.

c) Gọi A,B là hai điểm cực trị của của (C), tìm điểm M trên (C) sao cho tam giác MAB cân tại M.

BT 6. Cho hàm số $y=-x^3-3x^2+mx+4$, m là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=0$.

b) Tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

c) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

BT 7. Cho hàm số $y=2x^3+(m-1)x^2+(m+2)x+1$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m=1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y=9x-3$.

c) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

BT 8. Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(6m-5)x-3$ (*)

a) Chứng minh rằng đường cong (*) luôn đi qua hai điểm cố định với mọi m.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=2$.

c) Biện luận theo a số nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{3}|x|-1\right)(|x|-1)^2=a$.

BT 9. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ có đồ thị là (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số trên khi $m=1$.

b) Cho d có phương trình $y=x+4$ và điểm $K(1;3)$. Tìm các giá trị của tham số m sao cho d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B,C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

BT 10. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+1$ có đồ (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=3$.

b) Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng $y=1$ tại 3 điểm phân biệt $C(0;1)$, D,E sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại D và E vuông góc với nhau.

Dạng 2: Hàm số nhất biến và các bài toán liên quan

Phương pháp

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm

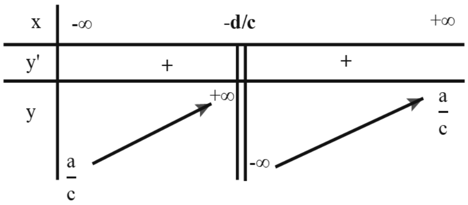
$$y=\frac{ax+b}{cx+d},\left(x\neq-\frac{d}{c};ad-bc\neq0\right)$$

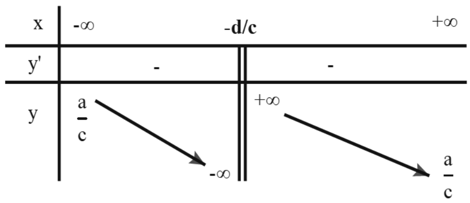
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-d/c\}$
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
  - Nếu $ad-bc>0\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.
  - Nếu $ad-bc<0\Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên D.
- Giới hạn, tiệm cận:

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\dfrac{a}{c}\Rightarrow y=\dfrac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

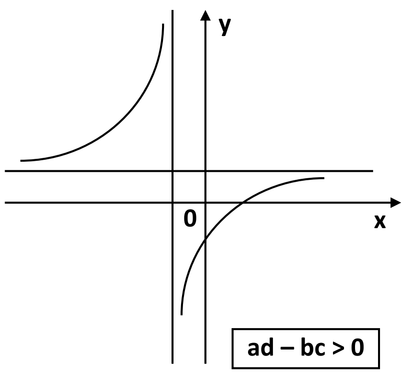
  $\lim\limits_{x\to-\frac{d}{c}} y=\infty\Rightarrow x=-\dfrac{d}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

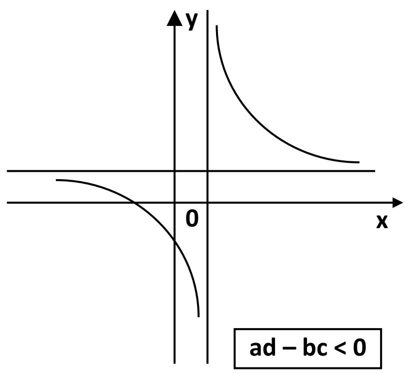
- Bảng biến thiên:





- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



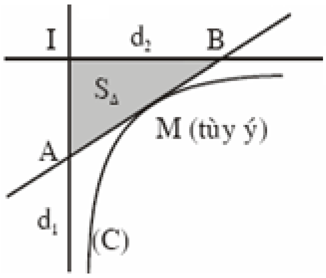


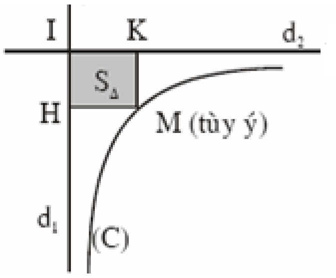
2. Một số tính chất thường gặp

- Hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng
- Không có bất kì tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua giao điểm hai đường tiệm cận
- Gọi M là điểm tùy ý trên $(C): y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(ad-bc\neq0)$ và (T) là tiếp tuyến tại M với (C).

Hạ $MH \perp (d_1): x = -\frac{d}{c}$ và MK $\perp$ (d$_2$)$: y = \frac{a}{c}$ theo thứ tự đó.

Xác định giao điểm $A = (T) \cap (d_1); B = (T) \cap (d_2)$ (nếu có) thì:





- AB luôn nhận M làm trung điểm.
- Diện tích tam giác AIB không đổi.
- Tích số $MH.MK$ không đổi.
- Diện tích tứ giác $IHMK$ không đổi.
- M,N nằm về ở hai nhánh phân biệt của đồ thị hàm số thì các hoành độ của x_M, x_N nằm về hai phía tiệm cận đứng.

1. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = \frac{mx-1}{2x+m}$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 2$.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x - 2m + 1}{x-1}$, ($m$ là tham số) có đồ thị (G)

a) Xác định m để đồ thị (G) đi qua điểm $(0;-1)$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m vừa tìm được.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị trên tại giao điểm của nó với trục tung.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \frac{x-2}{2x+1}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số .

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

c) Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm A của đồ thị (C) với trục hoành.

d) Viết phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 5x + 1$.

Ví dụ 4. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng d_m đi qua điểm $A\left(-2;2\right)$ và có hệ số góc m cắt đồ thị của hàm số đã cho

- Tại hai điểm phân biệt.
- Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

Ví dụ 5. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $\left(C\right): y=\dfrac{x+2}{2x+1}$

b) Chứng minh rằng đường thẳng $y=mx+m-1$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong $\left(C\right)$ khi m biến thiên.

c) Tìm các giá trị m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong $\left(C\right)$ tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của $\left(C\right)$.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị $\left(C\right)$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $\left(C\right)$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $\left(C\right)$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=4x+5$

c) Tìm trên $\left(C\right)$ những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của $\left(C\right)$ cắt hai tiệm cận của $\left(C\right)$ tại A,B sao cho AB ngắn nhất .

Ví dụ 7. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ (1).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số (1).

b) Tìm những điểm trên đồ thị $\left(C\right)$ có tọa độ nguyên.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị $\left(C\right)$ để tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích hệ số góc bằng - 9.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là $\left(C\right)$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $\left(C\right)$.

b) Tìm tọa độ điểm $M\in\left(C\right)$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y=-x$ bằng $\sqrt{2}$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $(C): y=\dfrac{2x+4}{x+1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $\left(C\right)$.

b) Chứng minh rằng đường thẳng $d: y=2x+m$ luôn cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt A,B với mọi m . Định m để đoạn AB ngắn nhất.

c) Gọi Δ là đường thẳng đi qua $E(-4;2)$ có hệ số góc k. Định k để Δ cắt (C) tại hai điểm M_1, M_2 lần lượt thuộc hai nhánh của (C). Khi đó tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn M_1M_2.

d) Tìm hai điểm M, N thuộc hai nhánh của (C) sao cho độ dài đoạn MN ngắn nhất.

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = \dfrac{\left(\sqrt{2}\tan\alpha\right)x + 1}{x + \sqrt{2}\cot\alpha}$ có đồ thị là $(C_\alpha), \alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Chứng minh các đường (C_α) và $\left(C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}\right)$ có chung hai điểm M, N nằm trên đường thẳng $\Delta: x + y = 0$. Tìm α để MN ngắn nhất.

2. Bài tập rèn luyện

BT 1. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số .

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1; 2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất .

BT 2. Cho hàm số $y = \dfrac{x+2}{2x-1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm những điểm trên đồ thị (C) cách đều hai điểm $A(2;0)$ và $B(0;2)$

BT 3. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-4}{x+1}$ (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3;0)$ và $N(-1;-1)$.

BT 4. Cho hàm số $y = \dfrac{2x+1}{1-x}$ có đồ thị là (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

b) Giả sử Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(0;1)$ của đồ thị hàm số (C). Hãy tìm trên (C) những điểm có hoành độ lớn hơn 1 mà khoảng cách từ đó đến Δ là ngắn nhất.

BT 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x-m}{x-2}(m \neq 2)$ có đồ thị là (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

b) Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số $\left(C_m\right)$ có ít nhất một điểm cách đều hai trục tọa độ, đồng thời hoành độ và tung độ của điểm đó trái dấu nhau.

BT 6. Cho hàm số $y=\frac{2x}{x+2}\left(C\right)$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm của $\left(C\right)$ với trục hoành.

c) Tính khoảng cách giữa hai nhánh của đồ thị hàm số $\left(C\right)$.

BT 7. Cho hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số.

b) Tìm những điểm trên đồ thị $\left(C\right)$ có tọa độ nguyên.

c) Gọi A,B là giao điểm của đường thẳng $y=\frac{1}{6}x$ với đồ thị hàm số $y=\frac{x-1}{x+1}$. Tìm điểm M thuộc đường phân giác góc phần tư thứ nhất sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

BT 8. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x+1}\,(C)$ và đường thẳng $\left(d_m\right): y=mx+m-1$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $\left(C\right)$.

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng d_m cắt $\left(C\right)$.

- Tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị.
- Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

BT 9. Cho hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{\left(m-1\right)x+m}{x-m}\left(m\neq 0\right)$ có đồ thị $\left(H_m\right)$

a) Chứng minh rằng $\left(H_m\right)$ luôn tiếp xúc nhau tại 1 điểm cố định, viết phương trình tiếp tuyến chung.

b) Gọi $\left(H\right)$ là đồ thị hàm số khi $m=2$. Tìm các điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến thuộc về hai nhánh của $\left(H\right)$.

c) Trên $\left(H\right)$ lấy các điểm $A_0,A_1,...,A_n$ có hoành độ tương ứng là $x_i=2^i+2\left(i=0,1,...,n\right)$. Gọi $y_0,y_1,...,y_n$ là tung độ các điểm trên.

Đặt $Y_0=y_0-1,Y_1=y_1-1,...,Y_n=y_n-1$

Đặt $S_n=Y_0+Y_1+...+Y_n$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

BT 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị là (C)

a) Chứng minh rằng họ đường thẳng $d_m: y=-x+m$ luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A,B. Tìm m để đoạn AB ngắn nhất.

b) Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với (C) sao cho khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) tới đường thẳng lớn nhất.

c) Chứng minh (H) nhận các đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường tiệm cận làm trục đối xứng.

Dạng 3. Hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất và một số bài toán liên quan

Phương pháp: Với hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}, ad\neq 0$, tử và mẫu không có nghiệm chung

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

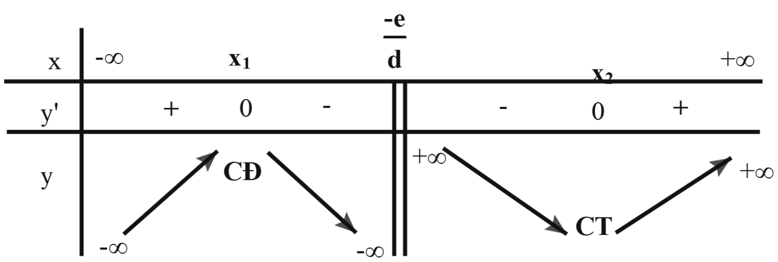
Viết hàm số dưới dạng $y=\alpha x+\beta+\dfrac{\gamma}{dx+e}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-e}{d}\right\}$
- Giới hạn và tiệm cận

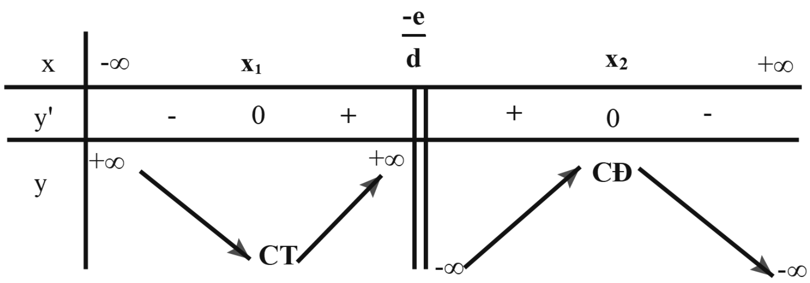
  $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{e}{d}\right)^{\pm}} y=\infty$ nên $x=-\dfrac{e}{d}$ là tiệm cận đứng

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(\alpha x+\beta)\right]=0$ nên $y=\alpha x+\beta$ là đường tiệm cận xiên

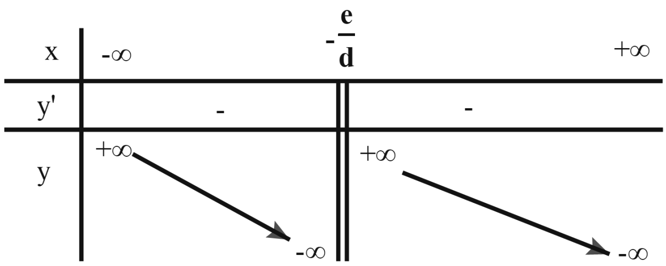
- Đạo hàm $y'=\dfrac{\alpha(dx+e)^2-\gamma d}{(dx+e)^2}$. Dấu của đạo hàm là dấu của $g(x)=\alpha(dx+e)^2-\gamma d$.
  - Phương trình $y'=0$ hoặc vô nghiệm, hoặc có nghiệm kép thì hàm không có cực trị.
  - Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thì hàm có hai cực trị.
- Bảng biến thiên
  - Trường hợp có hai cực trị



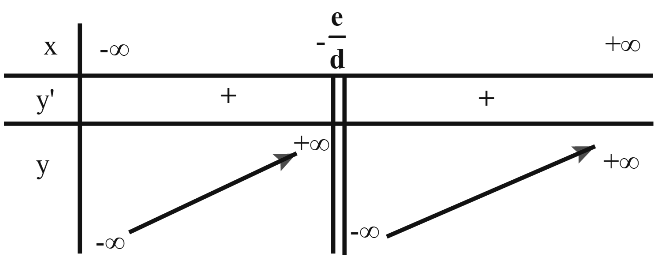
hoặc



- o Trường hợp không có cực trị



hoặc



Dựa vào bảng biến thiên đưa ra kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến và cực trị (nếu có) của hàm số.

- Đồ thị
  - o Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).
  - o Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

2. Các tính chất thường gặp

- Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng
- Đồ thị hàm có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$.
- Trong trường hợp đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y=\frac{2ax+b}{d}$.
- Mọi tiếp tuyến tại điểm $M\in(C)$ cắt hai đường tiệm cận tại A,B thì
  - o M là trung điểm của AB
  - o Diện tích tam giác IAB không đổi
- Mọi điểm $M\in(C)$ có tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là một hằng số
- Nếu từ một điểm E nằm trên một đường tiệm cận của (C) thì qua E kẻ duy nhất một tiếp tuyến với (C).

1. Các ví dụ

Ví dụ 1. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2+5x+4}{x+2}$ (H)

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của (H) là tâm đối xứng của (H).

c) Tùy theo giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình.

Ví dụ 2. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=x-\frac{2}{x-1}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $(3;3)$.

Ví dụ 3. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{x+1}$

b) Từ đồ thị (C) suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{|x+1|}$

Ví dụ 4. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2-x+1}{x-1}$.

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y=m-x$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

c) Gọi A,B là hai giao điểm đó. Tìm tập hợp trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m biến thiên.

2. Bài tập rèn luyện

BT1. Cho hàm số $y=\frac{ax^2-bx}{x-1}$

a) Tìm a,b biết rằng đồ thị (C) của hàm số đã cho đi qua điểm $A\left(-1;\frac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại điểm $O(0;0)$ có hệ số góc bằng -3.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với các giá trị của a,b đã tìm được.

BT 2. Cho hàm số $y=\frac{x^2-x+1}{x-1}=x+\frac{1}{x-1}(C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm trên (C) hai điểm A,B thuộc hai nhánh khác nhau, sao cho AB ngắn nhất

BT 3. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2}{x-2}=x+2+\frac{2}{x-2}$ (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm những điểm M trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất .

BT 4. Cho hàm số $y=\frac{x^2+5x+15}{x+3}=x+2+\frac{9}{x+3}$ (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm trên (C) những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến trục Ox bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục Oy.

BT 5. Cho hàm số $y=\frac{x^2+2x-2}{x-1}=x+3+\frac{1}{x-1}\quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b. Tìm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến I là nhỏ nhất (với I là giao hai tiệm cận).

BT 6. Cho hàm số $y=\frac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\frac{1}{x+2}\quad (C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến $d: y+3x+6=0$ là nhỏ nhất.

BT 7. Cho hàm số $y=-x+3+\frac{3}{x-1}\quad (C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Chứng minh với mọi m đường thẳng $d: y=2x+m$ luôn cắt (C) tại hai điểm A,B có hoành độ x_1,x_2. Tìm m để $(x_2-x_1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm m để AB đạt giá trị nhỏ nhất.

BT 8. Cho hàm số $y=\frac{x^2-3x+m}{x-1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m=2$.

b) Biện luận theo tham số a số nghiệm của phương trình: $\frac{2x^2-3x+2}{x-1}+\log_{\frac{1}{2}} a=0$.

c) Với giá trị nào của m thì hàm đã cho đồng biến trên $(3;+\infty)$.

BT 9. Cho hàm số $y=\frac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\frac{4}{x-2}\quad (C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm m để đường thẳng $y=mx+2-2m$ cắt (C) tại hai điểm A,B sao cho $AB=2$.

BT 10. Cho hàm số $y=\frac{mx^2+(m+3)x+1}{x-2}=mx+3(m+1)+\frac{7+6m}{x-2}\quad (C_m)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m=1$.

b) Tìm m để đồ thị (1) cắt trục Ox tại hai điểm M,N sao cho MN ngắn nhất .

BT 11. Cho hàm số $y=\dfrac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}$ (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm m để đường thẳng $d: y=m$ cắt (C) tại A,B sao cho $AB=1$.

BT 12. Cho hàm số $y=x+1+\dfrac{1}{x-1}$ (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm trên (C) điểm M (có hoành độ $x>1$) sao cho tiếp tuyến tại M tạo với hai tiệm cận một tam giác có:

- Chu vi nhỏ nhất.
- Một tam giác có diện tích không đổi.

BT 13. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}=x+2m-1+\dfrac{3-2m}{x+1}$ (C_m)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m=1$.

b) Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $d: x+y+2=0$ bằng nhau .

Dạng 4: Toán Thực Tế

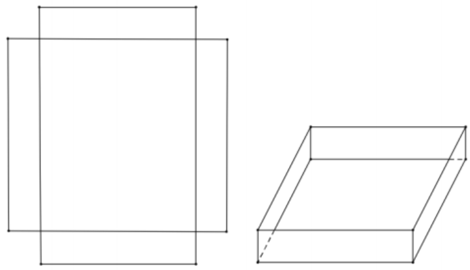
Ví dụ 1: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $1\le x\le 18$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa được cho bởi hàm chi phí $C(x)=x^3-3x^2-20x+500$ (nghìn đồng). Giả sự hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được.

a) Hãy viết biểu thức tính $B(x)$ và $L(x)$ theo x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y=L(x)$ trên $[1;18]$.

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Tính lợi nhuận tối đa đó.

Ví dụ 2: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



BÀI 4: KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ MỘT SỐ HÀM SỐ CƠ BẢN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Sơ đồ khảo sát hàm số

Để khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta thực hiện theo các bước sau đây:

Bước 1. Tìm tập xác định của hàm số

Bước 2. Xét sự biến thiên của hàm số

- Tìm đạo hàm y', xét dấu y', xác định khoảng đơn điệu, cực trị (nếu có) của hàm số.

- Tìm giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực của hàm số và các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

- Lập bảng biến thiên của hàm số.

Bước 3. Vẽ đồ thị của hàm số

- Xác định các điểm cực trị (nếu có), giao điểm của đồ thị với các trục toạ độ (nếu có và dễ tim), …

- Vẽ các đường tiệm cận của đồ thị hàm số (nếu có).

- Vẽ đồ thị hàm số.

Chú ý: Chỉ ra tâm đối xứng và trục đối xứng của đồ thị hàm số (nếu có).

2. Khảo sát hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$

Ví dụ 1. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Lời giải

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty), y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên khoảng $(0;2), y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

- Cực trị: Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = 2$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ và $y_{CT} = -2$.

- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = -\infty; \lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^3}\right) = +\infty.$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị:

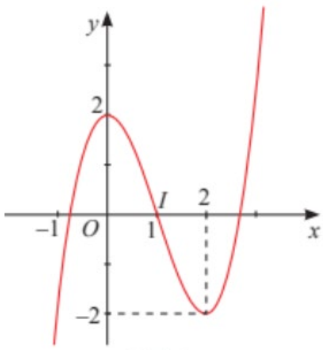
Khi $x=0$ thì $y=2$ nên $(0;2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^3-3x^2+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=1-\sqrt{3} \\ x=1+\sqrt{3} \end{array}\right.$

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại ba điểm $(1;0)$, $(1+\sqrt{3};0),(1-\sqrt{3};0)$.

Điểm $(0;2)$ là điểm cực đại và điểm $(2;-2)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình 1. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I(1;0)$.



Hình 1

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$ luôn nhận điểm $I\left(x_0;y_0\right)$ làm tâm đối xứng, trong đó x_0 là nghiệm của phương trình $y''=0$ và $y_0=y\left(x_0\right)$.

Ví dụ 2. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=-x^3-\frac{3}{2}x^2-\frac{3}{2}x$.

Lời giải

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

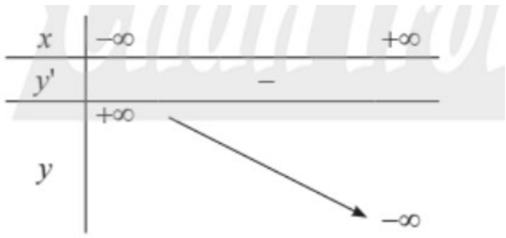
Đạo hàm $y'=-3x^2-3x-\frac{3}{2}$. Do $y'<0$ trên $\mathbb{R}$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Hàm số đã cho không có cực trị.

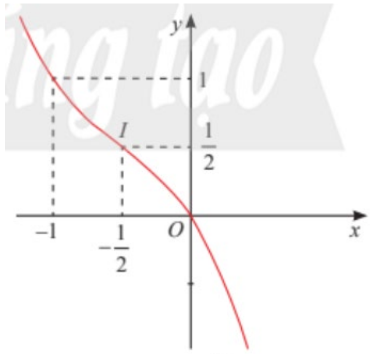
- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\left[-x^3\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x^2}\right)\right]=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\left[-x^3\left(1+\frac{3}{2x}+\frac{3}{2x^2}\right)\right]=-\infty.$$

- Bảng biến thiên:



3. Đồ thị



Hình 2

Đồ thị của hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ và điểm $(-1;1)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn trên Hình 2. Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

3. Khảo sát hàm số $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$

Ví dụ 3. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{3}{(x+1)^2}$. Vì $y'>0$ với mọi $x\neq -1$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

- Tiệm cận:

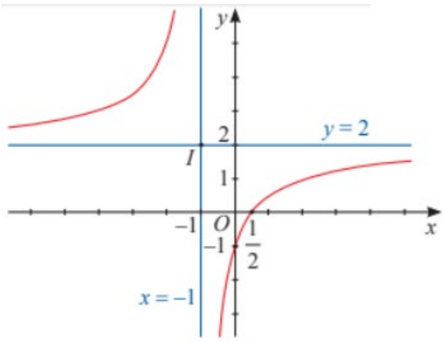
Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-1}{x+1}=2$. Suy ra đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\dfrac{2x-1}{x+1}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^+} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\dfrac{2x-1}{x+1}=-\infty$. Suy ra đường thẳng $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	‖	$+$	
y	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2

3. Đồ thị:



Hình 3

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(\frac{1}{2};0\right)$, giao với trục Oy tại điểm $(0;-1)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 3. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-1;2)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-1$ và $y=2$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y=\frac{ax+b}{cx+d}(c\neq 0, ad-bc\neq 0)$:

a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm tâm đối xứng;

b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận ngang làm trục đối xứng.

Ví dụ 4. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\frac{-x+2}{2x+3}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{2}\right\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

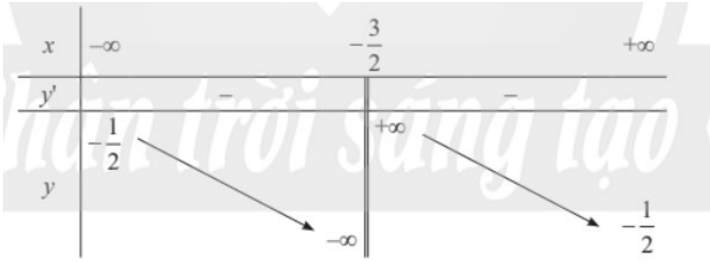
Đạo hàm $y'=\frac{-7}{(2x+3)^2}$. Vì $y'<0$ với mọi $x\neq -\frac{3}{2}$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

- Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-x+2}{2x+3} = -\dfrac{1}{2}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{-x+2}{2x+3} = -\dfrac{1}{2}$. Suy ra đường thẳng $y = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} y = \lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^-} \dfrac{-x+2}{2x+3} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{3}{2}\right)^+} y = \lim\limits_{x\to\left(\frac{3}{2}\right)^-} \dfrac{-x+2}{2x+3} = +\infty$. Suy ra đường thẳng $x = -\dfrac{3}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

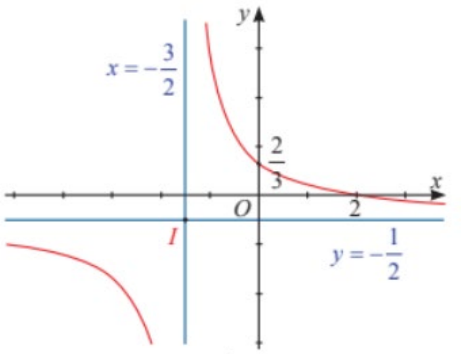
- Bảng biến thiên:



3. Đồ thị:

Đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm $(2;0)$, giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 4. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.



Hình 4

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = -\dfrac{3}{2}$ và $y = -\dfrac{1}{2}$.

4. Khảo sát hàm số $y = \dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}$ $(a \ne 0, m \ne 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu)

Ví dụ 5. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2+2x-2}{x-1}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Ta có $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty), y'>0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó. Trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2), y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và $y_{CT}=6$. Hàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CD}=2$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=-\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=+\infty$.

Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+2x-2}{x^2-x}=1$ và $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x-2}{x-1}=3$. Suy ra đường thẳng $y=x+3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=-\infty; \lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2+2x-2}{x-1}=+\infty$. Suy ra đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

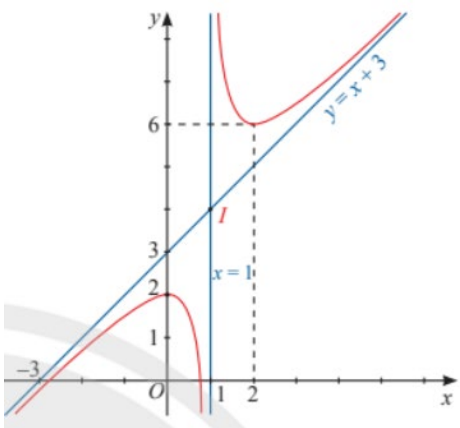
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

3. Đồ thị:

Ta có $y=0 \Leftrightarrow x^2+2x-2=0 \Leftrightarrow x=-1+\sqrt{3}$ hoặc $x=-1-\sqrt{3}$. Vậy đồ thị hàm số giao với trục $O x$ tại điểm $(-1+\sqrt{3};0)$ và điểm $(-1-\sqrt{3};0)$.

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$. Đồ thị hàm số được biểu diễn trên Hình 5 .



Hình 5

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(1;4)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=1$ và $y=x+3$.

Chú ý: Đồ thị của hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a\neq 0, m\neq 0$, đa thức tử không chia hết cho đa thức mẫu):

a) Nhận giao điểm của tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm tâm đối xứng;

b) Nhận hai đường phân giác của các góc tạo bởi tiệm cận đứng và tiệm cận xiên làm trục đối xứng.

Ví dụ 6. Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}$.

Lời giải

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{-x^2-4x-10}{(x+2)^2}$. Vì $y'<0$ với mọi $x\neq -2$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;-2)$ và $(-2;+\infty)$.

- Các giới hạn tại vô cực, giới hạn vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2-3x+4}{x+2}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2-3x+4}{x+2}=-\infty$$

Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^2-3x+4}{x^2+2x}=-1$ và $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}-(-1)x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{-x+4}{x+2}\right)=-1$.

Suy ra đường thẳng $y=-x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to-2^-} y=\lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^+} y=\lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{-x^2-3x+4}{x+2}=+\infty$. Suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

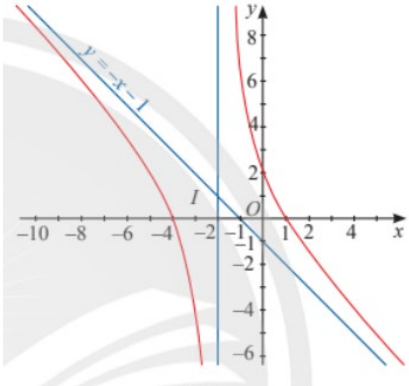
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
y'		$-$	‖	$-$	
y	$+\infty$ ↘	$-\infty$	‖ $+\infty$ ↘		$-\infty$

3. Đồ thị:

Ta có $y=0\Leftrightarrow -x^2-3x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-4\\x=1\end{array}\right.$

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-4;0)$ và điểm $(1;0)$. Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;2)$.

Đồ thị của hàm số được biểu diễn trên Hình 6. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm $I(-2;1)$.



Hình 6

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-2$ và $y=-x-1$.

5. Vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết một số vấn đề liển quan đến thực tiễn

Ta có thể vận dụng đạo hàm và khảo sát hàm số để giải quyết nhiều bài toán liên quan đến thực tiễn trong những lĩnh vực khác nhau như kinh tế, khoa học, kĩ thuật, ...

Ví dụ 7. Xét tình huống ở (trang 25).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $C=C(v)$ trên $(0;120]$.

b) Tài xế xe tải lái xe với tốc độ trung bình là bao nhiêu để tiết kiệm tiền xăng nhất?

(Theo: http://laroche.lycee.free.fr/telecharger/bacpro/bacpro_maintenance_auto.pdf)

Lời giải

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $C=C(v)$:

- Tập xác định: $D=(0;120]$.

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $C'(v)=-\dfrac{16000}{v^2}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5(v-80)(v+80)}{2v^2}$; $C'(v)=0 \Leftrightarrow v=-80$ (loại) hoặc $v=80$.

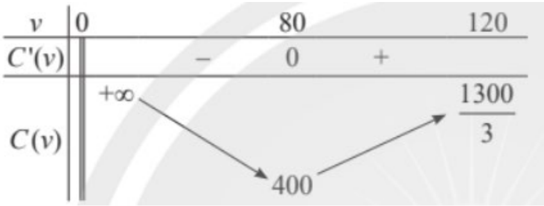
- Trên khoảng $(0;80), C'(v)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

- Trên khoảng $(80;120), C'(v)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số đạt cực tiểu tại $v=80, C_{CT}=C(80)=400$.

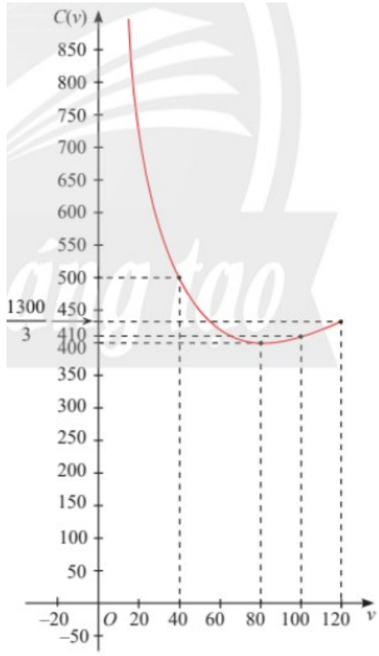
+ Giới hạn vô cực và tiệm cận: $\lim\limits_{v\to 0^+} C(v)=\lim\limits_{v\to 0^+}\left(\dfrac{16000}{v}+\dfrac{5}{2}v\right)=+\infty$ nên đường thẳng $v=0$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

+ Bảng biến thiên:



- Đồ thị:

Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $(80;400)$ và đi qua các điểm $(40;500),(100;410)$, $\left(120;\dfrac{1300}{3}\right)$ như Hình 7 .



Hình 7

b) Quan sát đồ thị hàm số, ta nhận thấy hàm số đạt GTNN khi $v=80$ và GTNN là 400 .

Như vậy, để tiết kiệm tiền xăng nhất, tài xế nên chạy xe với tốc độ trung bình là $80\,\mathrm{km/h}$.

Ví dụ 8. Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $(1 \le x \le 18)$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghì đồng, cho bởi hàm chi phí:
$C(x)=x^3-3x^2-20x+500.$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa.

a) Hãy viết biểu thức tính $B(x)$ và $L(x)$ theo x.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số $y=L(x)$ trên [1 ; 18].

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa? Tính lợi nhuận tối đa đó.

Lời giải

a) Khi bán x mét vải lụa:

- Số tiền thu được là: $B(x)=220x$ (nghìn đồng).

- Lợi nhuận thu được là: $L(x)=B(x)-C(x)=-x^3+3x^2+240x-500$ (nghìn đồng).

b) Hàm số $L(x)$ xác định trên [1 ; 18].

- Sự biến thiên:

+ Chiều biến thiên:

- Đạo hàm $L'(x)=-3x^2+6x+240; L'(x)=0 \Leftrightarrow x=10$ hoặc $x=-8$ (loại).

- Trên khoảng $(1;10), L'(x)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng này.

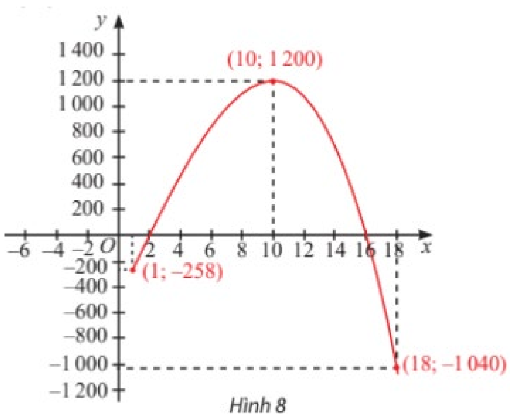
- Trên khoảng $(10;18), L'(x)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng này.

+ Cực trị: Hàm số $L(x)$ đạt cực đại tại $x=10$ và $L_{CĐ}=L(10)=1200$.

+ Bảng biến thiên:

x	1		10		18
$L'(x)$		+	0	−	
$L(x)$	−258	↗	1 200	↘	−1 040

- Đồ thị:



Hình 8

Đồ thị hàm số có điểm cực đại $(10\ ;\ 1200)$ và đi qua các điểm $(1\ ;-258),(18\ ;-1040)$ như Hình 8 .

c) Quan sát đồ thị hàm số $y=L(x)$, ta nhận thấy khi $x=10$ thì hàm số đạt giá trị lớn nhất là 1200 .

Như vậy, hộ làm nghề dệt cần sản xuất và bán ra mỗi ngày 10 mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Lợi nhuận tối đa này là 1200 nghìn đồng.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

1. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=x^3+x-2$;

b) $y=2x^3+x^2-\frac{1}{2}x-3$.

Lời giải

a) $y=x^3+x-2$

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

· Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 3x^2 + 1; y' > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = -\infty; \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x^3}\right) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

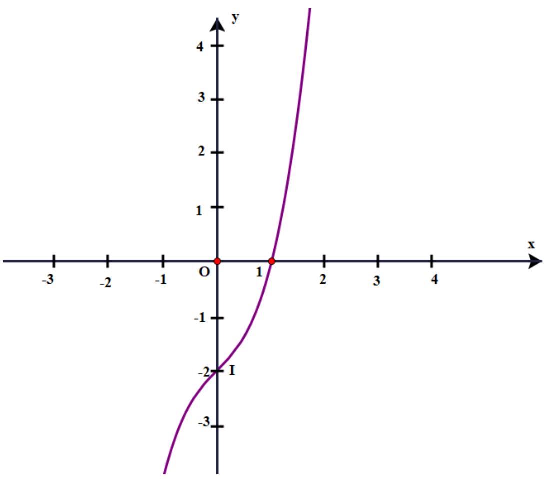
x	$-\infty$		$+\infty$
y'		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị:

Khi $x = 0$ thì $y = -2$ nên $(0; -2)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy. Ta có $y = 0 \Leftrightarrow x^3 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại điểm (1; 0).

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm I(0; - 2).

b) $y = 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3$

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 6x^2 + 2x - \frac{1}{2}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ hoặc $x = \frac{1}{6}$.

Trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{6}; +\infty\right)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{6}\right)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $x = -\frac{1}{2}$ và $y_{CĐ} = -\frac{11}{4}$. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{1}{6}$ và $y_{CT} = -\frac{329}{108}$.

- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = -\infty; \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(2 + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{3}{x^3}\right) = +\infty$$

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{11}{4}$	$\searrow$	$-\frac{329}{108}$	$\nearrow$	$+\infty$

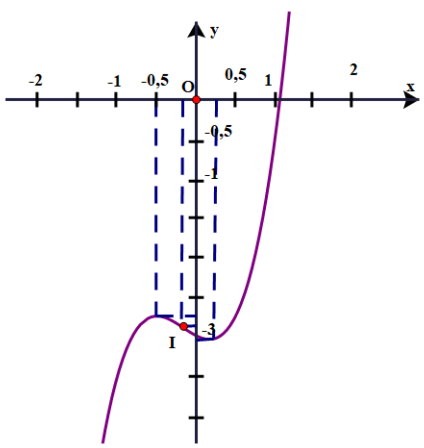
3. Đồ thị:

Khi $x = 0$ thì $y = -3$ nên $(0; -3)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - \frac{1}{2}x - 3 = 0$, phương trình này có 1 nghiệm nên đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại 1 điểm.

Điểm $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{11}{4}\right)$ là cực đại và điểm $\left(\frac{1}{6}; -\frac{329}{108}\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm I $\left(-\frac{1}{6};-\frac{313}{108}\right)$.

2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+2$.

a) Tìm điểm I thuộc đồ thị hàm số biết hoành độ của I là nghiệm của phương trình $y''=0$.

b) Chứng minh rằng I là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Lời giải

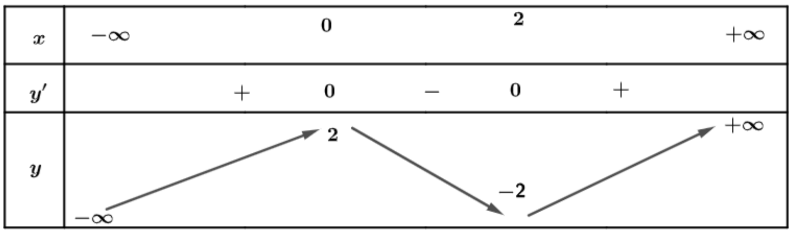
a) Xét hàm số $y=x^3-3x^2+2$. Tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Ta có $y'=3x^2-6x; y''=6x-6$; $y''=0 \Leftrightarrow x=1$. Với $x=1$, ta có $y(1)=0$.

Vậy I(1;0).

b) Ta có $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Bảng biến thiên:



Do đó, hàm số đạt cực đại tại $\mathrm{x}=0$, giá trị cực đại là $\mathrm{y}_{CD}=2$;

hàm số đạt cực tiểu tại $\mathrm{x}=2$, giá trị cực tiểu là $\mathrm{y}_{CT}=-2$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(0;2)$ và $(2;-2)$.

Ta thấy $\begin{cases} \dfrac{0+2}{2}=1 \\ \dfrac{2+(-2)}{2}=0 \end{cases}$

Vậy điểm I(1; 0) là trung điểm của đoạn thẳng nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

3. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=3+\frac{1}{x}$;

b) $y=\frac{x-3}{1-x}$.

Lời giải

a) $y=3+\frac{1}{x}$

1. Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

2. Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \frac{-1}{x^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; 0)$ và

$(0; +\infty)$.

Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x \to -\infty} y = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3; \lim\limits_{x \to +\infty} y = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$.

Suy ra đường thẳng y = 3 là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x \to 0^-} y = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = -\infty; \lim\limits_{x \to 0^+} y = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = 0$ (hay trục Oy) là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	3	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	3

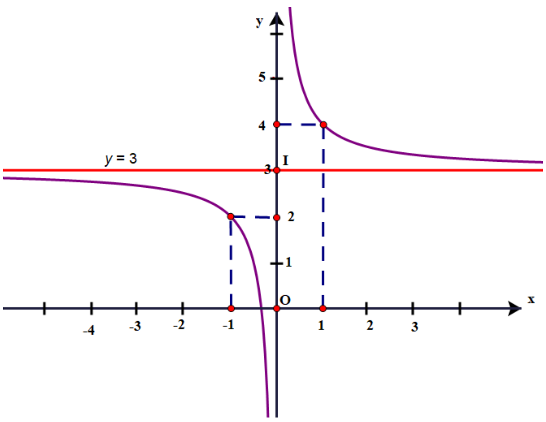
3. Đồ thị:

Ta có $\text{y} = 0 \Leftrightarrow 3 + \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ nên đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục Oy.

Ngoài ra, đồ thị hàm số đi qua các điểm (- 1; 2) và $(1; 4)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I(0; 3). Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 0$ và $y = 3$.

b) $y = \frac{x - 3}{1 - x}$

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{-2}{(1-x)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq 1$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Tiệm cận:

Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-3}{1-x} = -1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-3}{1-x} = -1$.

Suy ra đường thẳng $y = -1$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x-3}{1-x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x-3}{1-x} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

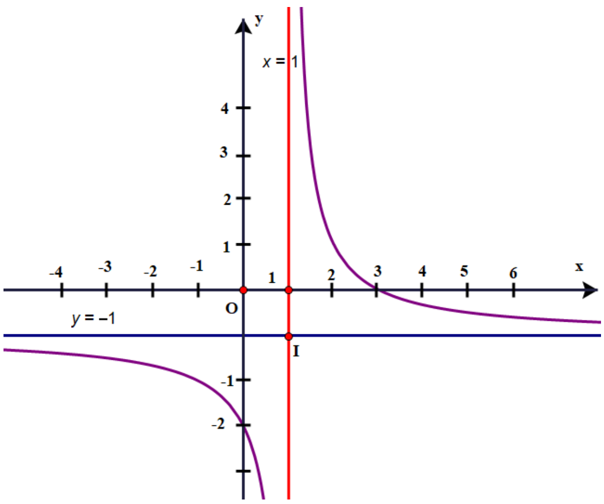
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	-1 ↘		$-\infty$ || $+\infty$		↘ -1

3. Đồ thị:

Ta có $x = 0$ thì $y = -3$ nên đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm $(0;-3)$.

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{1-x} = 0 \Leftrightarrow x = 3$ nên đồ thị hàm số cắt trục Ox tại điểm $(3;0)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I(1; - 1). Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = -1$.

4. Khảo sát và vẽ đồ thị của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$ b) $y=2x-\dfrac{1}{1-2x}$.

Lời giải

a) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

1. Tập xác định: $\mathrm{D}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$. Ta có $y'=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$.

Trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $(0;1)$ và $(1;2)$, $y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=2$ và $y_{CT}=2$.MHàm số đạt cực đại tại $x=0$ và $y_{CĐ}=-2$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty} y=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-2x+2}{x-1}=+\infty$$

Ta có $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-2x+2}{x(x-1)}=1$ và $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}-x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+2}{x-1}=-1$.

Suy ra đường thẳng $y=x-1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=-\infty;\ \lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}=+\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

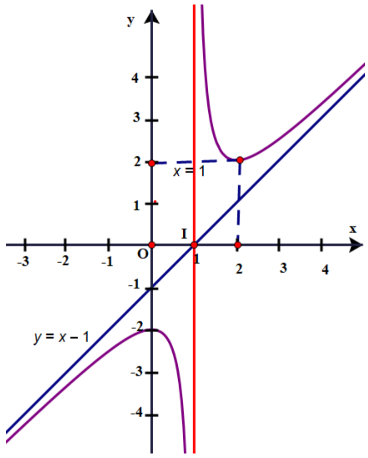
x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;-2)$.

Đồ thị hàm số không cắt trục Ox.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I(1; 0). Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = x - 1$.

b) $y = 2x - \dfrac{1}{1-2x}$

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{1}{2} \right\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = 2 - \dfrac{2}{(1-2x)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $\left(0; \dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(\dfrac{1}{2}; 1\right)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và $y_{CT} = 3$. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và $y_{CD} = -1$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\left(2x - \frac{1}{1-2x}\right) = -\infty; \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty}\left(2x - \frac{1}{1-2x}\right) = +\infty$$

Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty}(y - 2x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1}{1-2x} = 0; \lim\limits_{x\to-\infty}(y-2x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{1-2x} = 0$.

Suy ra đường thẳng $y = 2x$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-} y = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^-}\left(2x - \dfrac{1}{1-2x}\right) = -\infty; \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} y = \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+}\left(2x - \dfrac{1}{1-2x}\right) = +\infty.$

Suy ra đường thẳng $x = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên:

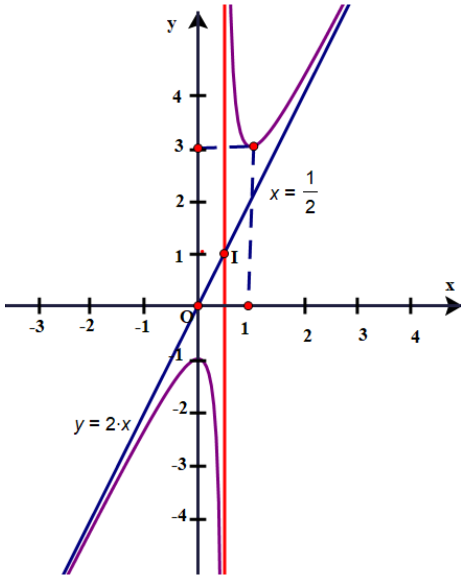
x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ $\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm (0; – 1).

Đồ thị hàm số không cắt trục Ox.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I $\left(\frac{1}{2};1\right)$. Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = \frac{1}{2}$ và $y = 2x$.

5. Cho hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số đã cho.

b) Tìm toạ độ trung điểm đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số. Có nhận xét gì về điểm này?

Lời giải

a) Xét hàm số $y = \frac{-x^2 + 3x + 1}{x + 2}$.

1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{-x^2-4x+5}{(x+2)^2}$. Ta có $y'=0 \Leftrightarrow x=-5$ hoặc $x=1$.

Trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(1;+\infty), y'<0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $(-5;-2)$ và $(-2;1)$, $y'>0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=-5$ và $y_{CT}=13$. Hàm số đạt cực đại tại $x=1$ và $y_{CD}=1$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$$\lim_{x\to-\infty} y = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x^2+3x+1}{x+2}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} = \frac{-x^2+3x+1}{x+2}=-\infty$$

Ta $a=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2+3x+1}{x(x+2)}=-1$; $b=\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x^2+3x+1}{x+2}-(-1)x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{5x+1}{x+2}=5.$

Suy ra đường thẳng $y=-x+5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\displaystyle\lim_{x\to-2^-} y=\lim_{x\to-2^-}\frac{-x^2+3x+1}{x+2}=+\infty;\ \lim_{x\to-2^+} y=\lim_{x\to-2^+}\frac{-x^2+3x+1}{x+2}=-\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=-2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

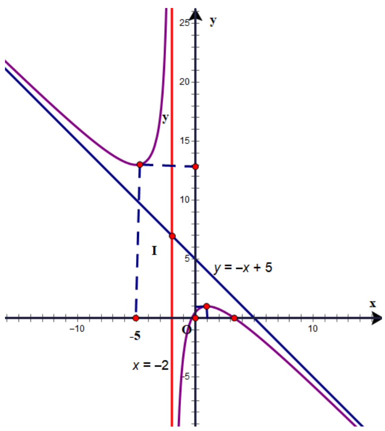
x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$ ↘		13	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1	↘	$-\infty$

3. Đồ thị:

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$.

Đồ thị hàm số cắt trục Ox tại 2 điểm và đi qua các điểm $(-5;13),(1;1)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



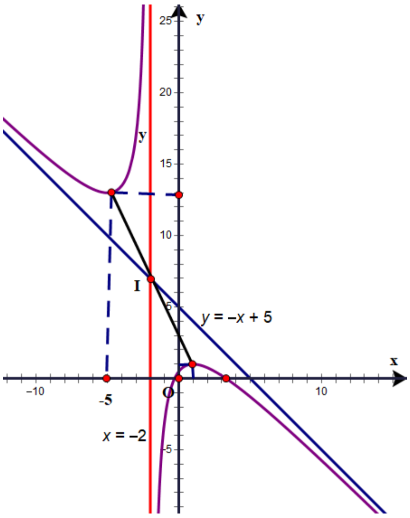
Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I(- 2; 7).

Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=-2$ và $y=-x+5$.

b) Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(-5;13)$ và $(1;1)$.

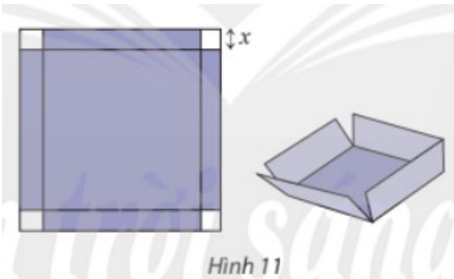
Ta có $\begin{cases}\dfrac{-5+1}{2}=-2\\ \dfrac{13+1}{2}=7\end{cases}$.

Vậy tọa độ trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(-2;7)$, đây chính là tâm đối xứng I của đồ thị hàm số.



Vậy trung điểm của đoạn nối hai điểm cực trị của đồ thị hàm số trùng với tâm đối xứng của đồ thị hàm số.

6. Bạn Việt muốn dùng tấm bìa hình vuông cạnh 6dm làm một chiếc hộp không nắp, có đáy là hình vuông bằng cách cắt bỏ đi 4 hình vuông nhỏ ở bốn góc của tấm bìa (Hình 11).



Hình 11

Bạn Việt muốn tìm độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất.

a) Hãy thiết lập hàm số biểu thị thể tích hộp theo x với x là độ dài cạnh hình vuông cần cắt đi.

b) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số tìm được.

Từ đó, hãy tư vấn cho bạn Việt cách giải quyết vấn đề và giải thích vì sao cần chọn giá trị này.

(Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải

a) Sau khi cắt bốn góc tấm bìa và dựng thành chiếc hộp không nắp, khi đó chiếc hộp dựng thành có dạng hình hộp chữ nhật với các kích thước là $x, 6-2x$ *và* $6-2x(\mathrm{dm})$.

Rõ ràng x phải thỏa mãn điều kiện $0<x<3$.

Thể tích của chiếc hộp là $V(x)=x(6-2x)^2\left(\mathrm{dm}^3\right) \quad (0<x<3)$.

b) Xét hàm số $V(x)=x(6-2x)^2$ với $x\in(0;3)$.

1. Tập xác định: $\mathrm{D}=(0;3)$.

2. Sự biến thiên:

- Chiều biến thiên:

Đạo hàm $V'(x)=(6-2x)^2+x\cdot 2(6-2x)\cdot(-2)=(6-2x)(6-6x)$.

Trên khoảng $(0;3)$, ta có $V'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$.

Trên khoảng $(0;1), V'(x)>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

Trên khoảng (1; 3), $V'\left(x\right)<0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

Hàm số có một điểm cực trị là điểm cực đại tại $\mathrm{x}=1, \mathrm{y}_{\mathrm{CD}}=16$.

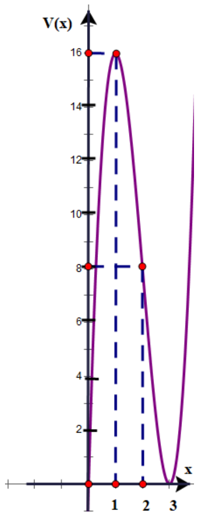
- Bảng biến thiên:

x	**0**		**1**		**2**
V'(x)		+	**0**	**–**	
V(x)	**0**	↗	**16**	↘	**0**

3. Đồ thị:

Trên khoảng $(0;3)$, đồ thị hàm số đi qua các điểm $(1;16)$ và $(2;8)$.

Đồ thị hàm số $\mathrm{V(x)}$ trên khoảng $(0;3)$ được biểu diễn như hình dưới đây.



Từ đó, ta thấy để tìm được độ dài cạnh hình vuông cần cắt bỏ để chiếc hộp đạt thể tích lớn nhất, ta cần tìm $x_0 \in (0;3)$ sao cho $V(x_0)$ có giá trị lớn nhất.

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy trong khoảng $(0;3)$ hàm số có một điểm cực trị duy nhất là điểm cực đại $x = 1$ nên tại đó $V(x)$ có giá trị lớn nhất là $\max\limits_{(0;3)} V(x) = 16$.

Vậy độ dài cạnh của hình vuông cần cắt bỏ là 1 dm thì chiếc hộp có thể tích lớn nhất.

C. CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1: Hàm số bậc ba và một số bài toán liên quan.

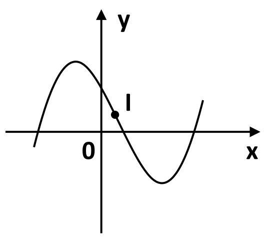
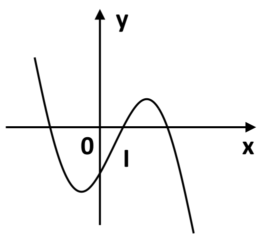
Phương pháp

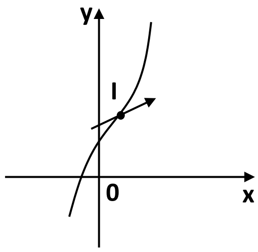
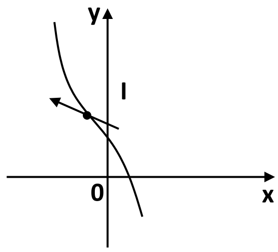
1. Khảo sát hàm bậc ba: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a \neq 0)$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- **Đạo hàm** $y' = 3ax^2 + 2bx + c, \Delta' = b^2 - 3ac$
  - Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow$ hàm có hai cực trị.
  - Nếu $\Delta' \le 0 \Rightarrow$ hàm số luôn tăng hoặc luôn giảm trên $\mathbb{R}$.
- **Đạo hàm cấp hai:** $y'' = 6ax + 2b,\ y'' = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{b}{3a}$

  $x = -\dfrac{b}{3a}$ là hoành độ điểm uốn, đồ thị nhận điểm uốn làm tâm đối xứng.
- Giới hạn:
  - Nếu $a > 0$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty.$
  - Nếu $a < 0$ thì $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty.$
- Bảng biến thiên:
  - Trường hợp $a > 0$:
    - Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow$ hàm có hai cực trị.
    - Nếu $\Delta' \le 0 \Rightarrow$ hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R}$.
  - Trường hợp $a < 0$:
    - Nếu $\Delta' > 0 \Rightarrow$ hàm có hai cực trị.
    - Nếu $\Delta' \le 0 \Rightarrow$ hàm số luôn giảm trên $\mathbb{R}$.
- **Đồ thị: Vẽ các điểm đặc biệt (cực đại, cực tiểu, điểm uốn, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ). Kết hợp với bảng biến thiên để biết " dáng điệu" của đồ thị hàm số.**

  Do có bốn trường hợp khác nhau về chiều biến thiên nên đồ thị của hàm bậc ba có bốn dạng sau đây:

	a > 0	**a < 0**
y' = 0 có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} > 0$ (Có hai cực trị)		

y’ = 0 vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\Delta_{y'} = 0\\ \Delta_{y'} < 0\end{array}\right.$ (Không có cực trị)		

2. Các tính chất của hàm bậc ba thường gặp

- Hàm có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi $\Delta' = b^2 - 3ac > 0$.
- Hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$.
- Hàm số luôn giảm biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' = b^2 - 3ac \le 0 \end{cases}$.
- Để tìm các giá trị cực trị (trong trường hợp hoành độ nghiệm tương đối xấu) ta lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$ ta được: $f(x) = f'(x).g(x) + r(x)$. Nếu x_1, x_2 là nghiệm của $f'(x)$ thì $f(x_1) = r(x_1); f(x_2) = r(x_2)$. Khi đó đường thẳng đi qua hai cực trị là $y = r(x)$.
- Đồ thị hàm số nhận điểm uốn I làm tâm đối xứng
- Đồ thị cắt Ox tại 3 điểm phân biệt$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có hai cực trị và các giá rị cực trị trái dấu nhau
- Đồ thị cắt Ox tại 2 điểm phân biệt$\Leftrightarrow$ Đồ thị hàm số có hai cực trị và một cực trị nằm trên Ox.
- Đồ thị cắt Ox tại 1 điểm $\Leftrightarrow$ Hàm số không có cực trị hoặc hàm số có hai cực trị trái dấu.
- Tiếp tuyến: Gọi I là điểm uốn. Cho $M \in (C)$.
  - Nếu $M \equiv I$ thì có đúng một tiếp tuyến đi qua M và tiếp tuyến này có hệ số góc nhỏ nhất (nếu $a > 0$) và lớn nhất (nếu $a < 0$)
  - Nếu $M \ne I$ thì có đúng hai tiếp tuyến đi qua M.

1. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Dựa vào đồ thị (C), biện luận số nghiệm của phương trình sau theo m:

$$x^3 - 3x + m = 0$$

Giải

a) $(C): y = -x^3 + 3x + 1$.

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$

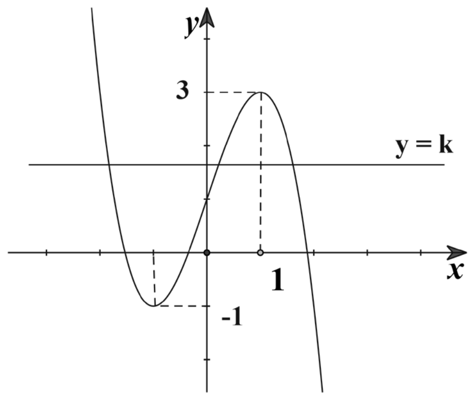
- **Đạo hàm** $y' = -3x^2 + 3 = -3\left(x^2 - 1\right)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array}\right.$
- **Đạo hàm cấp hai:** $y'' = -6x$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} y = -\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-1;1)$ và nghịch biến trên $(-\infty;-1),(1;+\infty)$.

Hàm đạt cực tiểu tại $x = -1, y_{CT} = -1$, hàm đạt cực đại tại $x = 1, y_{CÑ} = 3$

- **Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I(0;1)$ làm tâm đối xứng.**



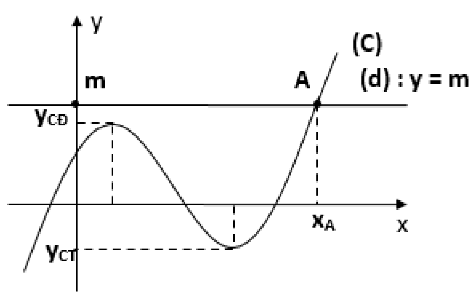
b) Ta có $x^3 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow -x^3 + 3x + 1 = 1 + m$.

Đặt $k = 1 + m$. Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3x + 1$ với đường thẳng $y = k$ là số nghiệm của phương trình $x^3 - 3x + m = 0$.

Dựa vào đồ thị ta có

- Nếu $\left[\begin{array}{l} k < -1 \\ k > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m + 1 < -1 \\ m + 1 > 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -2 \\ m > 2 \end{array}\right.$ thì phương trình có một nghiệm
- Nếu $\left[\begin{array}{l} k = -1 \\ k = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m + 1 = -1 \\ m + 1 = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -2 \\ m2 \end{array}\right.$ thì phương trình có hai nghiệm
- Nếu $-1 < k < 3 \Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2$ thì phương trình có ba nghiệm phân biệt.

Chú ý: Để giải câu b) ta xét bài toán tổng quát sau: Dựa vào đồ thị biện luận theo m số nghiệm của phương trình $f(x,m) = 0$



TH 1: $f(x,m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = m$ (1)

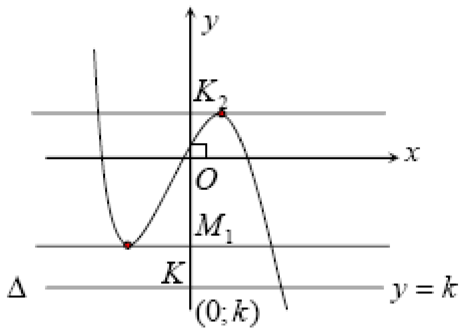
Khi đó (1) có thể xem là phương trình hoành độ

giao điểm của hai đường:

$(C): y = f(x);\quad d: y = m$

- d là đường thẳng cùng phương với trục hoành.
- Dựa vào đồ thị (C) ta biện luận số giao điểm của (C) và d. Từ đó suy ra số nghiệm của (1)

TH 2: $f(x,m) = 0 \Leftrightarrow f(x) = g(m)$



Thực hiện tương tự như trên, có thể đặt $g(m) = k$. Biện luận theo k, sau đó biện luận theo m.

Ví dụ 2. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 1$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3;1)$.

Giải

a) $(C): y = -x^3 + 3x^2 + 1$.

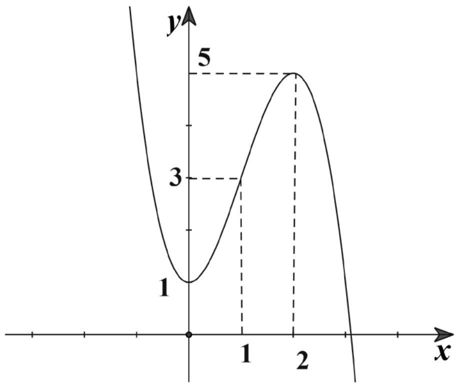
- Tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- **Đạo hàm** $y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$
- **Đạo hàm cấp hai:** $y'' = -6x + 6$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 3$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = -\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	1	↗	5	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $(0;2)$ và nghịch biến trên $(-\infty;0),(2;+\infty)$.

Hàm đạt cực tiểu tại $x = 0, y_{CT} = 1$, hàm đạt cực đại tại $x = 2, y_{CĐ} = 5$

- **Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I(1;3)$ làm tâm đối xứng.**



b) Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(3;1)$ có dạng

$y-1=f'(3)(x-3)\Leftrightarrow y=-9(x-3)+1\Leftrightarrow y=-9x+28$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3+3x^2-mx-4$, trong đó m là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số đã cho với $m=0$.

b) Với giá trị nào của m thì hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Giải

a) Với $m=0$ ta được đồ thị $(C): y=x^3+3x^2-4$

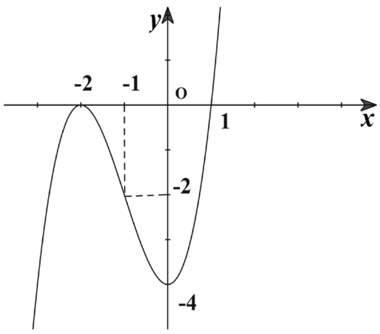
- Tập xác định $D=\mathbb{R}$
- **Đạo hàm** $y'=3x^2+6x=3x(x+2),\ y'=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$
- **Đạo hàm cấp hai:** $y''=6x+6,\ y''=0\Leftrightarrow x=-1\Rightarrow y=-2$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$
- Bảng biến thiên:

x	-∞		-2		0		+∞
y'		+	0	-	0	+	
y	-∞	↗	0	↘	-4	↗	+∞

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2),(0;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-2;0)$

Hàm đạt cực tiểu tại $x=0, y_{CT}=-4$, hàm đạt cực đại tại $x=-2, y_{CĐ}=0$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I(-1;2)$ làm tâm đối xứng.



b) Hàm số

$y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$

$\Leftrightarrow y' = 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty;0)$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 + 6x - m, x \in (-\infty;0)$

$g'(x) = 6x + 6 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0	$+\infty$
g'(x)		-	0	+		
g(x)	$+\infty$	↘	-3-m	↗	-m	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy

$g(x) = 3x^2 - 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty;0) \Leftrightarrow -3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$

Vậy giá trị m cần tìm là $m \leq -3$.

Ví dụ 4. Cho hàm số $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ có đồ thị là (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

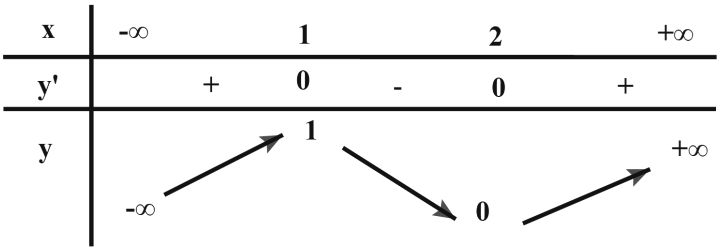
b) Tìm m để phương tròn sau có 6 nghiệm phân biệt $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m$

Giải

a) $(C): y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- **Đạo hàm** $y' = 6x^2 - 18x + 12 = 6(x^2 - 3x + 2)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$
- **Đạo hàm cấp hai:** $y'' = 12x - 18$, $y'' = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{3}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$

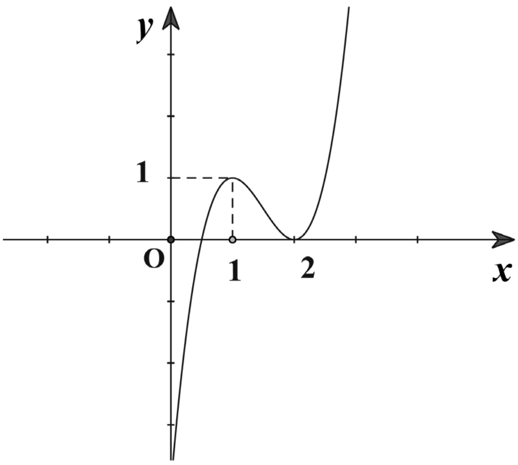
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên:



Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1),(2;+\infty)$ và nghịch biến trên $(1;2)$

Hàm đạt cực tiểu tại $x=2, y_{CT}=0$, hàm đạt cực đại tại $x=1, y_{CD}=1$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ làm tâm đối xứng.



b) Ta có $2|x|^3-9x^2+12|x|=m \Leftrightarrow 2|x|^3-9x^2+12|x|-4=m-4$

Gọi $(C): y=2x^3-9x^2+12x-4$ và $(C'): y=2|x|^3-9x^2+12|x|-4$

Ta thấy khi $x\ge 0$ thì $(C'): y=2x^3-9x^2+12x-4$.

Mặt khác đồ thị hàm số (C') là hàm số chẵn nên (C') nhận trục Oy làm trục đối xứng.

Từ đồ thị (C) ta suy ra đồ thị (C') như sau:

- Phần 1: Giữ nguyên phần đồ thị (C) phía bên phải trục Oy
- Phần 2: Lấy đối xứng đồ thị phần 1 qua trục Oy

Đồ thị (C') là hợp cả hai phần 1 và 2.

Số nghiệm của phương trình

$2|x|^3-9x^2+12|x|=m$

$\Leftrightarrow 2|x|^3-9x^2+12|x|-4=m-4$

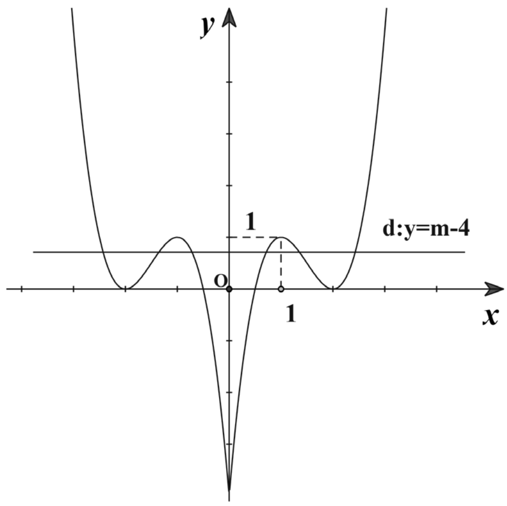
là số giao điểm của đồ thị (C')

và đường thẳng $d: y=m-4$.

Phương trình $2|x|^3-9x^2+12|x|=m$

có 6 nghiệm phân biệt khi

$0<m-4<1 \Leftrightarrow 4<m<5$.



Lưu ý: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là (C).

Từ đồ thị (C) ta có thể vẽ đồ thị hàm số (C’) : $y=f(|x|)$ như sau

Ta có $(C'): y=f(|x|)=f(x), x\geq 0$ (1)

Nhận thấy $f(|-x|)=f(|x|) \Rightarrow$ hàm số $y=f(|x|)$ là hàm số chẵn, do đó đồ thị sẽ đối xứng qua trục Oy

Do đó đồ thị (C') gồm 2 phần:

- Phần 1: là phần đồ thị của (C): y = f(x) nằm phía bên phải Oy ($x\geq 0$) (do 1)
- Phần 2: là phần đồ thị lấy đối xứng phần 1 qua trục **Oy** vì hàm số chẵn

Ví dụ 5. a) Tìm các hệ số m,n,p sao cho hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+mx^2+nx+p$ đạt cực đại tại điểm $x=3$ và đồ thị (C) của nó tiếp xúc với đường thẳng $y=3x-\frac{1}{3}$ tại giao điểm của (C) với trục tung.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với các giá trị m,n,p vừa tìm được.

Giải

a) Đường thẳng $y=3x-\frac{1}{3}$ cắt trục tung tại điểm $A\left(0;-\frac{1}{3}\right)$.

Vì đồ thị (C) của hàm số đã cho đi qua A nên $f(0)=p=-\frac{1}{3}$

Ta có $f'(x)=-x^2+2mx+n.$ Vì (C) tiếp xúc với đường thẳng $y=3x-\frac{1}{3}$ tại $A\left(0;-\frac{1}{3}\right)$ nên $f'(0)=n=3$.

Do hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$ nên $f'(3)=-9+6m+3=0 \Leftrightarrow m=1$

Với các giá trị m,n,p vừa tìm được ta có hàm số $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-\frac{1}{3}$.

Khi đó $f''(x)=-2x+2$ và $f''(3)=-4<0$. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=3$.

b) $(C): f(x)=-\frac{1}{3}x^3+x^2+3x-\frac{1}{3}$

- Tập xác định $D=\mathbb{R}$
- **Đạo hàm** $y'=-x^2+2x+3, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$
- **Đạo hàm cấp hai:** $y''=-2x+2,\ y''=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=\frac{10}{3}$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$
- Bảng biến thiên:

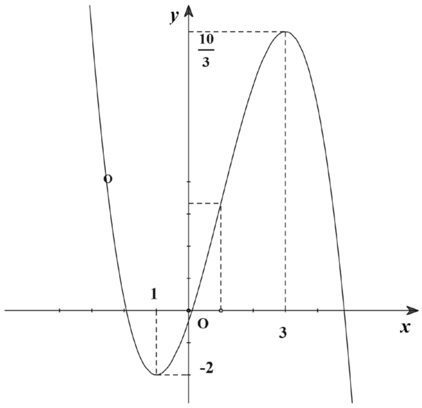
x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-2	↗	$\frac{26}{3}$	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-1;3)$

và nghịch biến trên $(-\infty;-1),(3;+\infty)$

Hàm đạt cực tiểu tại $x=1, y_{CT}=-1$,

hàm đạt cực đại tại $x=3, y_{CĐ}=\frac{26}{3}$



- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I\left(1;\frac{10}{3}\right)$ làm tâm đối xứng.

Ví dụ 6. Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+9x-1$ có đồ thị (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C)

b) Tìm m để đường thẳng $d_m: y=(2m-1)x-1$ cắt (C) tại ba điểm phân biệt $A(0;-1),B,C$ sao cho $BC=\sqrt{82}$.

c) Tìm những điểm nằm trên (C) mà qua đó kẻ duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

Giải

a) $(C): y=-x^3+3x^2+9x-1$

- Tập xác định $D=\mathbb{R}$
- **Đạo hàm** $y'=-3x^2+6x+9, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$

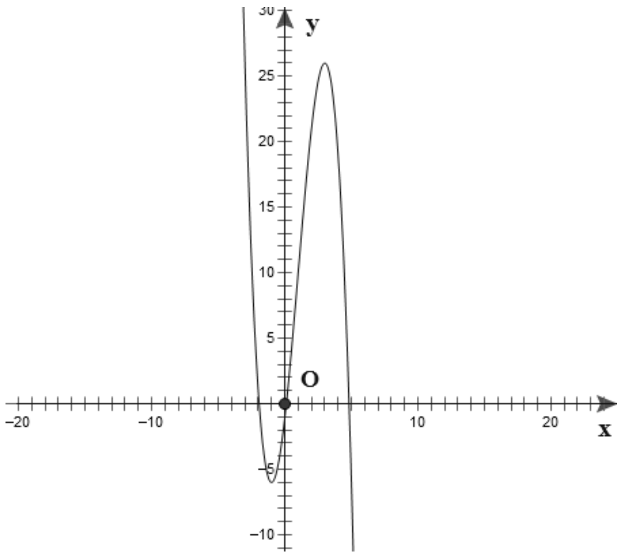
- **Đạo hàm cấp hai:** $y"=-6x+6,\ y"=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=10$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				26		
			-6				$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-1;3)$ và nghịch biến trên $(-\infty;-1),(3;+\infty)$

Hàm đạt cực tiểu tại $x=1, y_{CT}=-6$, hàm đạt cực đại tại $x=3, y_{CĐ}=26$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I(1;0)$ làm tâm đối xứng.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C) và d là

$$-x^3+3x^2+9x-1=(2m-1)x-1 \Leftrightarrow x\left(x^2-3x+2m-10\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2-3x+2m-10=0\ (*) \end{array}\right.$$

Đường thẳng d cắt (C) tại ba điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác $0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=49-8m>0 \\ 2m-10\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<\dfrac{49}{8} \\ m\neq 5 \end{cases}$

Gọi $B\left(x_1,(2m-1)x_1-1\right),\ C\left(x_2,(2m-1)x_2-1\right)$

Ta có

$BC^2 = \left[1+(2m-1)^2\right](x_1-x_2)^2 = \left(4m^2-4m+2\right)(49-8m)$

$BC = \sqrt{82} \Leftrightarrow \left(2m^2-2m+1\right)(49-8m) = 41$

$\Leftrightarrow 8m^3 - 57m^2 + 53m - 4 = 0 \Leftrightarrow (m-1)\left(8m^2-49m+4\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=\dfrac{49\pm\sqrt{2273}}{16} \end{array}\right.$.

c) Gọi $N\left(n;-n^3+3n^2+9n-1\right) \in (C)$.

Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M_0(x_0;y_0)$ có phương trình

$\Delta: y = \left(-3x_0^2+6x_0+9\right)(x-x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 - 1$

$N\left(n;-n^3+3n^2+9n-1\right) \in \Delta$

$\Leftrightarrow n^3 - 3n^2 - 9n + \left(-3x_0^2+6x_0+9\right)(n-x_0) - x_0^3 + 3x_0^2 + 9x_0 = 0$

$\Leftrightarrow (n-x_0)^2(a+2x_0-3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=x_0 \\ n=3-2x_0 \end{array}\right.$

Để từ N kẻ được đúng 1 tiếp tuyến đến (C) thì phải có

$x_0 = 3-2x_0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow N(1;10)$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = x^3 - 3ax^2 + 4a^3$

a) Hãy khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $a=1$.

b) Xác định a để các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị đối xứng qua đường thẳng $y=x$

c) Xác định a để đường thẳng $y=x$ cắt đồ thị tại các điểm A,B,C với $AB=BC$.

Giải

a) Với $a=1$ ta được $(C): y = x^3 - 3x^2 + 4$

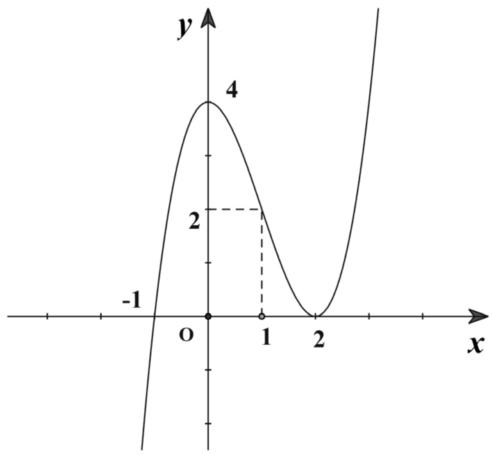
- Tập xác định $D=\mathbb{R}$
- **Đạo hàm** $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2), y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$
- **Đạo hàm cấp hai:** $y'' = 6x-6,\ y''=0 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0),(2;+\infty)$ và nghịch biến trên $(0;2)$.

Hàm đạt cực tiểu tại $x=2, y_{CT}=0$, hàm đạt cực đại tại $x=0, y_{CĐ}=4$.

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I(1;2)$ làm tâm đối xứng.



b) $y=x^3-3ax^2+4a^3$.

Ta có $y'=3x^2-6ax=3x(x-2a)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow a\neq 0$

Điểm cực đại $(0;4a^3)$ đối xứng với điểm cực tiểu $(2a;0)$ qua đường thẳng

$$y=x \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ 4a^3=2a \end{cases} \Leftrightarrow a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Gọi x_A,x_B,x_C là hoành độ các điểm A,B,C thì $x_B=\dfrac{x_A+x_C}{2}$

Ta có x_A,x_B,x_C là nghiệm của phương trình

$x^3-3ax^2-x+4a^3=0$ (1)

$\Leftrightarrow x^3-(x_A+x_B+x_C)x^2+(x_Ax_B+x_Bx_C+x_Ax_C)x-x_Ax_Bx_C=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra:

$3a = x_A + x_B + x_C = 3x_B \Leftrightarrow x_B = a$. Thay $x_B = a$ vào (1) ta có $a = 0; a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Thử lại ta thấy $a = 0; a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ thỏa mãn điều kiện bài toán.

Ví dụ 8. Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3mx - 2$, m là tham số

a) Xác định giá trị của m để bất phương trình sau thỏa mãn $f(x) \le -\frac{1}{x^3}, \forall x \ge 1$

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 1$.

c) Gọi d là tiếp tuyến với (C) tại điểm uốn và M là điểm bất kì trên d. Tùy theo vị trí của M, hãy biện luận số tiếp tuyến của (C) đi qua M.

Giải

a) Với $x \ge 1$ ta có

$$f(x) \le -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -x^3 + 3mx - 2 \le -\frac{1}{x^3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{x^6 + 2x^3 - 1}{x^4} \ge 3m \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^4} \ge 3m$$

Bài toán trở thành: Tìm m để $g(x) = x^2 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^4} \ge 3m, \forall x \ge 1$

Cách 1: Dùng đạo hàm

Ta có $g'(x) = 2x - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^5} > 0, \forall x \ge 1$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	1		$+\infty$
g'(x)			+	
g(x)		2	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta suy ra $\min_{x \ge 1} g(x) = g(1) = 2$.

Do đó $g(x) \ge g(1) = 2 \ge 3m \Leftrightarrow m \le \frac{2}{3}, \forall x \ge 1$

Cách 2: Dùng bất đẳng thức

Để ý $x \ge 1 \Rightarrow x^2 \ge x, x^4 \ge x$

Ta có $g\left(x\right)=x^2+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^4}\ge x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x}=x+\frac{1}{x}\ge 2$

$x+\frac{1}{x}=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x=1,\left(x\ge 1\right)$

Vậy $g\left(x\right)\ge 3m\Leftrightarrow \frac{2}{3}\ge m$

b) Với $m=1$ thì $\left(C\right):y=f\left(x\right)=-x^3+3x-2$

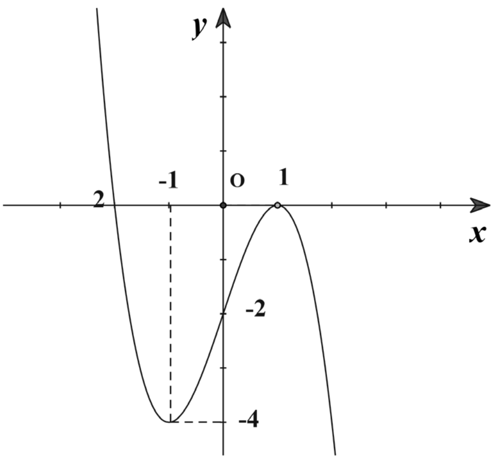
- Tập xác định $D=\mathbb{R}$
- **Đạo hàm** $y'=-3x^2+3=-3\left(x^2-1\right), y'=0\Leftrightarrow x=\pm 1$
- **Đạo hàm cấp hai:** $y''=-6x,\ y''=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=-2$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=-\infty$
- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(-1;1\right)$ và nghịch biến trên $\left(-\infty;-1\right),\left(1;+\infty\right)$

Hàm đạt cực tiểu tại $x=-1, y_{CT}=-4$, hàm đạt cực đại tại $x=1, y_{CĐ}=0$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I\left(0;-2\right)$ làm tâm đối xứng.



c) Phương trình tiếp tuyến với $\left(C\right)$ tại điểm uốn $I\left(0;-2\right)$ là $d:y=3x-2$.

$M\in d\Rightarrow M\left(x_0;3x_0-2\right)$.

Phương trình đường thẳng đi qua M có hệ số góc k là

$\Delta: y = k(x - x_0) + 3x_0 - 2$

Δ tiếp xúc với $(C) \Leftrightarrow$ hệ sau có nghiệm

$$\begin{cases} -x^3 + 3x - 2 = k(x - x_0) + 3x_0 - 2 & (1) \\ -3x^2 + 3 = k & (2) \end{cases} \quad (I)$$

Thế (2) vào (1) ta nhận được $x = 0, x = \dfrac{3x_0}{2}$.

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow k = 3, \Delta: y = 3x - 2$.
- Với $x_0 \neq 0$ thì hệ (I) có hai nghiệm

  Vậy: $M \equiv I$ thì từ M kẻ được một tiếp tuyến với (C),

  $M \in \Delta, M \neq$ I thì từ M kẻ được hai tiếp tuyến với (C).

Ví dụ 9. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - mx + m - 2$ có đồ thị là (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 3$. Chứng minh rằng (C) có một tâm đối xứng.

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến của (C_m) tại điểm uốn đi qua một điểm cố định khi m thay đổi.

c) Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng tọa độ mà (C_m) không đi qua với mọi giá trị m

Giải

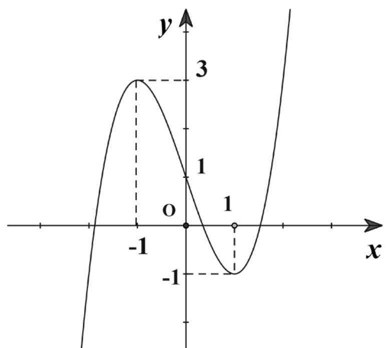
a) Với $m = 3$ thì $(C): y = x^3 - 3x + 1$

- Tập xác định $D = \mathbb{R}$
- **Đạo hàm** $y' = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1), y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$
- **Đạo hàm cấp hai:** $y'' = 6x,\ y'' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = 1$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x \to -\infty} y = -\infty;\ \lim\limits_{x \to +\infty} y = +\infty$
- Bảng biến thiên:

x	-∞		**-1**		**1**		+∞
y'		+	**0**	-	**0**	+	
y			**3**				+∞
	-∞				**-1**		

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1),(1;+\infty)$

và nghịch biến trên $(-1;1)$



Hàm đạt cực tiểu tại $x = 1, y_{CT} = -1$,

hàm đạt cực đại tại $x = -1, y_{CĐ} = 3$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I(0;1)$ làm tâm đối xứng.

Giả sử $I(x_0; y_0)$ là tâm đối xứng của (C).

Công thức đổi tọa độ $\begin{cases} x = X + x_0 \\ y = Y + y_0 \end{cases}$

Trong hệ trục tọa độ IXY thì $Y = X^3 + 3x_0X^2 + 3(x_0^2 - 1)X + x_0^3 - 3x_0 + 1 - y_0$ là hàm số lẻ $\Leftrightarrow 3x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 1$.

Vậy chỉ có một điểm uốn $I(0;1)$ là tâm đối xứng.

b) Tọa độ điểm uốn I của (C_m) là $y" = 0 \Leftrightarrow 6x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = m - 2$.

Vậy điểm uốn $I(0; m-2)$. Tiếp tuyến tại điểm uốn $I(0; m-2)$ của (C_m):

$d_m : y = -mx + m - 2 = (1 - x)m - 2$.

Vậy điểm $(1;-2)$ là điểm cố định của (C_m)

c) Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm không thuộc (C_m), $\forall m$

$\Leftrightarrow y_0 = x_0^3 - mx_0 + m - 2$ vô nghiệm với mọi m

$\Leftrightarrow (1 - x_0)m + x_0^3 - y_0 - 2 = 0$ vô nghiệm với mọi m

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 = 0 \\ x_0^3 - y_0 - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 \neq -1 \end{cases}$

Vậy tập hợp các điểm $\{(x;y) \mid x = 1, y \neq -1\}$ là những điểm mà (C_m) không đi qua $\forall m$.

Lưu ý: Cho họ đường cong (C_m) có phương trình $f(x,m)$ với $m \in \mathbb{R}$. Để tìm điểm mà họ (C_m) không thể đi qua ta làm như sau:

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm không thuộc (C_m), $\forall m$. Khi đó

Phương trình $y_0 = f(x_0, m)$ (1) vô nghiệm đối với ẩn m

$\Leftrightarrow$ nhóm theo bậc của m rồi tìm điều kiện để (1) vô nghiệm đối với ẩn $m \Leftrightarrow (x_0; y_0)$.

2. Bài tập rèn luyện

BT 1. Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số.

b) Biện luận theo m số nghiệm của phương trình $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + m = 0$.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) $\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + m = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 3 = -m + 3$

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C) với đường thẳng $y = -m + 3$

- $m > 9$ hoặc $m < \frac{5}{3}$: phương trình có 1 nghiệm.
- $m = 9$ hoặc $m = \frac{5}{3}$: phương trình có 2 nghiệm.
- $\frac{5}{3} < m < 9$: phương trình có 3 nghiệm.

BT 2. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn của đồ thị.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Ta có $y' = x^2 + 2x,\ y'' = 2x + 2, y'' = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = -\frac{4}{3}$; $y'(-1) = -1$.

Tọa độ điểm uốn $I\left(-1; -\frac{4}{3}\right)$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm uốn là $y = -x - \frac{7}{3}$.

BT 3. a) Tìm các hệ số a, b, c sao cho đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ cắt trục tung tại điểm có tung độ là 2 và tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ là -1.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với các giá trị vừa tìm được của a, b, c.

Hướng dẫn

a) Dễ thấy $c = 2$. Vì đồ thị hàm số cần tìm đi qua điểm $(-1;1)$ nên $f(-1) = -1 + a - b + 2 = 1$. Do đó $a = b$.

Vì đồ thị tiếp xúc với đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ là -1 nên $f'(-1) = 3 - 2a + b = 0$.

b) Học sinh tự làm.

BT 4.a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = -x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 6x - 3$.

b) Chứng minh rằng phương trình $-x^3+\frac{3}{2}x^2+6x-3=0$ có ba nghiệm phân biệt, trong đó có một nghiệm nhỏ hơn $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Từ bảng biến thiên của hàm số, dễ thấy rằng phương trình đã cho có ba nghiệm x_1,x_2,x_3 trong đó $x_1<-1,x_2\in(-1;2),\ x_3>2$.

Hơn nữa vì $f(0)=-3<0$ và $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}>0$ nên $x_2\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

BT 5. Cho hàm số $y=x^3+mx^2+2$ có đồ thị là (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m=-3$

b) Tùy theo k, giải và biện luận phương trình $-|x|^3+3x^2+k=0$.

c) Gọi A,B là hai điểm cực trị của của (C), tìm điểm M trên (C) sao cho tam giác MAB cân tại M.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Ta có

$-|x|^3+3x^2+k=0\Leftrightarrow|x|^3-3x^2+2=k+2$. Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị $(C'):y=|x|^3-3x^2+2$ và đường thẳng $d:y=k+2$.

Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ thị (C') và đường thẳng d

- Nếu $k+2<-2\Leftrightarrow k<-4$ thì phương trình đã cho vô nghiệm
- Nếu $\left[\begin{array}{l}k+2=-2\\k+2>2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}k=-4\\k>0\end{array}\right.$ thì phương trình đã cho có hai nghiệm
- Nếu $k+2=2\Leftrightarrow k=0$ thì phương trình đã cho có ba nghiệm.
- $-2<k+2<2\Leftrightarrow-4<k<0$ thì phương trình đã cho có bốn nghiệm.

c) Gọi $A(0;2)$ và $B(2;-2)$ là hai điểm cực trị của (C)

Tam giác MAB cân tại $M\Leftrightarrow MA=MB$ và M,A,B không thẳng hàng.

$MA=MB\Leftrightarrow M$ thuộc đường trung trực của $AB:x-2y-1=0$.

Tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x^2 + 2 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x-1)\left(2x^2 - 4x - 5\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \ \text{(loại)} \\ x = 1 \pm \dfrac{\sqrt{14}}{2} \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow M_1\left(1 + \frac{\sqrt{14}}{2}; \frac{\sqrt{14}}{4}\right), M_2\left(1 - \frac{\sqrt{14}}{2}; -\frac{\sqrt{14}}{4}\right)$$

BT 6. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + mx + 4$, m là tham số

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m = 0$.

b) Tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

c) Tìm m để đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt lập thành một cấp số cộng.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Hàm số đã cho nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$y' = -3x^2 - 6x + m \le 0, \forall x \ge 0 \Leftrightarrow m \le 3x^2 + 6x = f(x)$

Hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ liên tục trên $(0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 6x + 6 > 0, \forall x > 0$ và $f(0) = 0$. Từ đó ta được $m \le 0$

c) Giả sử đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm phân biệt là A, B, C có hoành độ lần lượt là x_1, x_2, x_3.

Với x_1, x_2, x_3 là nghiệm của phương trình $x^3 + 3x^2 - mx - 4 = 0$ (*).

Nên ta có

$$x^3 + 3x^2 - mx - 4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$
$$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = -3 \Rightarrow 3x_2 = -3 \Rightarrow x_2 = -1$$

Thay $x_2 = -1$ vào (*) ta có được $m = 2$.

Với $m = 2 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -1, x = -1 \pm \sqrt{5}$

Từ đó ta thấy đồ thị hàm số đã cho cắt Ox tại ba điểm lập thành một cấp số cộng.

BT 7. Cho hàm số $y = 2x^3 + (m-1)x^2 + (m+2)x + 1$ (1)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C) khi $m = 1$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $y = 9x - 3$.

c) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Gọi d là tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $y=9x-3$ thì hệ số góc của d là $k=9 \Leftrightarrow y'(x_0)=9 \Leftrightarrow x_0^2=1 \Leftrightarrow x_0=\pm 1$

- Với $x_0=1$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=9x-3$
- Với $x_0=-1$ thì phương trình tiếp tuyến là $y=9x+5$

c) Ta có $y'=6x^2+2(m-1)x+m+2$

Đồ thị hàm số (1) có điểm cực đại và cực tiểu có hoành độ lớn hơn $\frac{1}{6}$

$\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn $\frac{1}{6}$

Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt $\left[\begin{array}{l} x<4-3\sqrt{3} \\ x>4+3\sqrt{3} \end{array}\right.$.

Khi đó hai nghiệm của phương trình $y'=0$ là

$x_1=\dfrac{1-m-\sqrt{m^2-8m-11}}{6}, x_2=\dfrac{1-m+\sqrt{m^2-8m-11}}{6}$

Vì $x_1<x_2$ do đó $\frac{1}{6}<x_1<x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1-m-\sqrt{m^2-8m-11}}{6}>\dfrac{1}{6} \Leftrightarrow -\dfrac{11}{8}<m<4-3\sqrt{3}$

BT 8. Cho hàm số $y=x^3-(2m+1)x^2+(6m-5)x-3$ (*)

a) Chứng minh rằng đường cong (*) luôn đi qua hai điểm cố định với mọi m.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với $m=2$.

c) Biện luận theo a số nghiệm của phương trình $\left(\frac{1}{3}|x|-1\right)(|x|-1)^2=a$.

Giải

a) Giả sử $M(x,y)$ là điểm mà đồ thị hàm số đã cho luôn đi qua $\forall m$

$\Leftrightarrow y=x^3-(2m+1)x^2+(6m-5)x-3$

hay $(-2x^2+6x)m+(x^3-x^2-5x-y-3)=0$ có nghiệm $\forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2+6x=0 \\ x^3-x^2-5x-y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(3-x)=0 \\ y=x^3-x^2-5x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, y=-3 \\ x=3, y=0 \end{array}\right.$

Vậy (*) luôn đi qua hai điểm $(0;-3),(3;0), \quad \forall m$

b) Với $m=1$ thì $y=x^3-5x^2+7x-3$

- Tập xác định $D=\mathbb{R}$
- **Đạo hàm** $y'=3x^2-10x+7, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{7}{3} \end{array}\right.$

- **Đạo hàm cấp hai:** $y''=6x-10,\ y''=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{5}{3} \Rightarrow y=-\dfrac{32}{27}$
- Giới hạn: $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty$
- Bảng biến thiên:

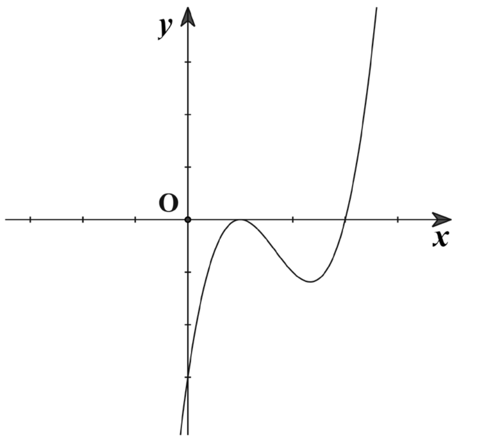
x	$-\infty$		1		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\frac{-32}{27}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1),\left(\dfrac{7}{3};+\infty\right)$

và nghịch biến trên $\left(1;\dfrac{7}{3}\right)$

Hàm đạt cực tiểu tại $x=\dfrac{7}{3}, y_{CT}=-\dfrac{32}{27}$,

hàm đạt cực đại tại $x=1, y_{CĐ}=0$.



- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận điểm uốn $I\left(\dfrac{5}{3};-\dfrac{16}{27}\right)$ làm tâm đối xứng.

c) Ta có

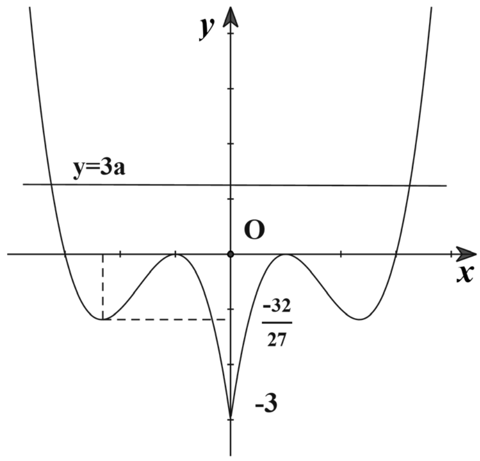
$\left(\dfrac{1}{3}|x|-1\right)\left(|x|-1\right)^2=a \Leftrightarrow |x|^3-5|x|+7|x|-3=3a$ (1)

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị

$(C'): y=|x|^3-5|x|+7|x|-3$

với đường thẳng $y=3a$.

Dựa vào đồ thị ta thấy



- Nếu $3a<-3 \Leftrightarrow a<-1$
thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $3a=-3 \Leftrightarrow a=-1$
thì phương trình có một nghiệm.
- $-3<3a<-\dfrac{32}{27} \Leftrightarrow -1<a<-\dfrac{32}{81}$
thì phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- $3a=-\dfrac{32}{27} \Leftrightarrow a=-\dfrac{32}{81}$ thì phương trình đã cho có 4 nghiệm.

- $-32<3a<0\Leftrightarrow -\frac{32}{81}<a<0$ thì phương trình có 6 nghiệm.
- $3a=0\Leftrightarrow a=0$ thì phương trình có 4 nghiệm.
- $3a>0\Leftrightarrow a>0$ thì phương trình có 2 nghiệm.

BT 9. Cho hàm số $y=x^3+2mx^2+(m+3)x+4$ có đồ thị là (C_m)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C_1) của hàm số trên khi $m=1$.

b) Cho d có phương trình $y=x+4$ và điểm $K(1;3)$. Tìm các giá trị của tham số m sao cho d cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt $A(0;4)$, B,C sao cho tam giác KBC có diện tích bằng $8\sqrt{2}$.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Phương trình hoành độ điểm chung của (C_m) và d là:

$$x^3+2mx^2+(m+3)x+4=x+4\ (1)\Leftrightarrow x(x^2+2mx+m+2)=0$$
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ g(x)=x^2+2mx+m+2=0\ \ (2)\end{array}\right.$$

(d) cắt (C_m) tại ba điểm phân biệt A(0; 4), B, C $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=m^2-m-2>0\\ g(0)=m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-1\vee m>2\\ m\neq -2\end{cases}\qquad (a).$$

Mặt khác: $d(K,d)=\frac{|1-3+4|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

Do đó: $S_{\Delta KBC}=8\sqrt{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}BC.d(K,d)=8\sqrt{2}\Leftrightarrow BC=16\Leftrightarrow BC^2=256$

$\Leftrightarrow(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2=256$ với x_B,x_C là hai nghiệm của phương trình (2).

$$\Leftrightarrow(x_B-x_C)^2+((x_B+4)-(x_C+4))^2=256\Leftrightarrow 2(x_B-x_C)^2=256$$
$$\Leftrightarrow(x_B+x_C)^2-4x_Bx_C=128$$

$\Leftrightarrow 4m^2-4(m+2)=128\Leftrightarrow m^2-m-34=0\Leftrightarrow m=\frac{1\pm\sqrt{137}}{2}$ (thỏa ĐK (a)).

Vậy $m=\frac{1\pm\sqrt{137}}{2}$.

BT 10. Cho hàm số $y=x^3+3x^2+mx+1$ có đồ (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=3$.

b) Xác định m để (C_m) cắt đường thẳng $y=1$ tại 3 điểm phân biệt $C(0;1)$, D,E sao cho các tiếp tuyến của (C_m) tại D và E vuông góc với nhau.

Hướng dẫn

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và đường thẳng $y=1$ là:

$$x^3+3x^2+mx+1=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^2+3x+m=0 \quad (2) \end{array}\right.$$

(C_m) cắt đường thẳng $y=1$ tại 3 điểm $C(0;1)$ D,E phân biệt:

$\Leftrightarrow$ Phương trình (2) có 2 nghiệm $x_D, x_E \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=9-4m>0 \\ 0^2+3\times 0+m\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m<\dfrac{4}{9} \end{cases}.$

Lúc đó tiếp tuyến tại D,E có hệ số góc lần lượt là:

$k_D=f'(x_D)=3x_D^2+6x_D+m=-(3x_D+2m);$

$k_E=f'(x_E)=3x_E^2+6x_E+m=-(3x_E+2m).$

Các tiếp tuyến tại D,E vuông góc khi và chỉ khi: $k_D.k_E=-1$

$\Leftrightarrow (3x_D+2m)(3x_E+2m)=9x_Dx_E+6m(x_D+x_E)+4m^2=-1$

$\Leftrightarrow 9m+6m.(-3)+4m^2=-1$

$$\Leftrightarrow 4m^2-9m+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\frac{1}{8}\left(9+\sqrt{65}\right) \\ m=\frac{1}{8}\left(9-\sqrt{65}\right) \end{array}\right..$$

Vậy $m=\frac{1}{8}\left(9-\sqrt{65}\right)$ hay $m=\frac{1}{8}\left(9+\sqrt{65}\right)$ là giá trị cần tìm.

Dạng 2: Hàm số nhất biến và các bài toán liên quan

Phương pháp

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm

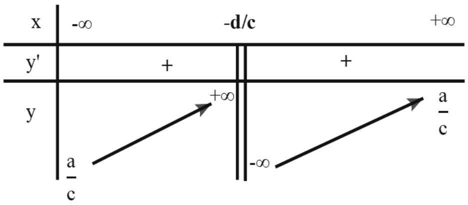
$$y=\frac{ax+b}{cx+d},\left(x\neq -\frac{d}{c}; ad-bc\neq 0\right)$$

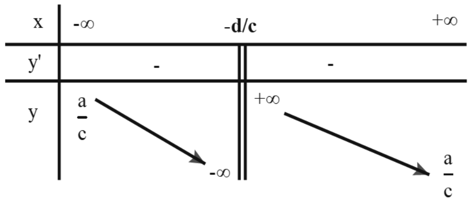
- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-d/c\}$
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$.
  - Nếu $ad-bc>0 \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên D.
  - Nếu $ad-bc<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên D.
- Giới hạn, tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \frac{a}{c} \Rightarrow y = \frac{a}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

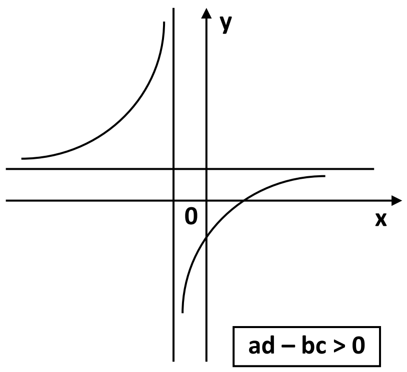
$\lim\limits_{x \to -\frac{d}{c}} y = \infty \Rightarrow x = -\frac{d}{c}$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

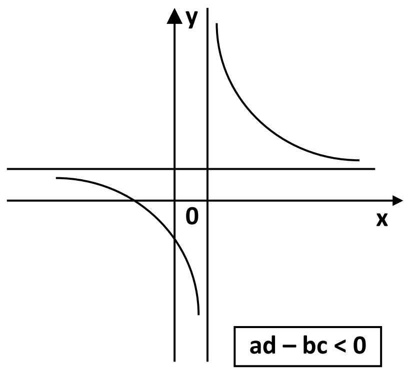
- Bảng biến thiên:





- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



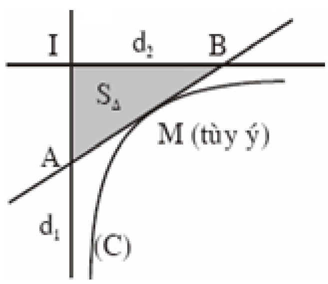


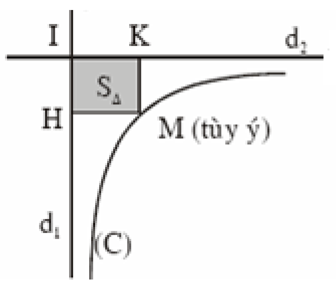
2. Một số tính chất thường gặp

- Hàm số có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang.
- Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng
- Không có bất kì tiếp tuyến nào của đồ thị hàm số đi qua giao điểm hai đường tiệm cận
- Gọi M là điểm tùy ý trên $(C): y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $\left(ad - bc \neq 0\right)$ và $\left(T\right)$ là tiếp tuyến tại M với $\left(C\right)$.

  Hạ $MH \perp (d_1): x = -\frac{d}{c}$ và $MK \perp (d_2): y = \frac{a}{c}$ theo thứ tự đó.

  Xác định giao điểm $A = (T) \cap (d_1); B = (T) \cap (d_2)$ (nếu có) thì:





  - AB luôn nhận M làm trung điểm.
  - Diện tích tam giác AIB không đổi.
  - Tích số $MH.MK$ không đổi.
  - Diện tích tứ giác $IHMK$ không đổi.

- M,N nằm về ở hai nhánh phân biệt của đồ thị hàm số thì các hoành độ của x_M,x_N nằm về hai phía tiệm cận đứng.

1. Các ví dụ

Ví dụ 1. Cho hàm số $y=\dfrac{mx-1}{2x+m}$

a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của tham số m, hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó.

b) Xác định m để tiệm cận đứng của đồ thị đi qua $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$.

c) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=2$.

Giải

a) Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{m}{2}\right\}$.

Đạo hàm $y'=\dfrac{m^2+1}{\left(2x+m\right)^2}>0,\forall m$ và $\forall\in D$

Do đó hàm số luôn đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó

b) Ta có $\lim\limits_{x\to-\left(\frac{m}{2}\right)} y=+\infty\Rightarrow$ tiệm cận đứng của đồ thị là $x=-\dfrac{m}{2}$

Điểm $A\left(-1;\sqrt{2}\right)$ thuộc đường thẳng $x=-\dfrac{m}{2}$ khi và chỉ khi $\dfrac{-m}{2}=-1\Leftrightarrow m=2$

c) Với $m=2$ ta có $y=\dfrac{2x-1}{2x+2}$

- Tập xác đinh: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-1\right\}$
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{6}{\left(2x+2\right)^2}>0,\forall x\neq-1$
- Giới hạn và tiệm cận:

  $\lim\limits_{x\to-1^+} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^-} y=+\infty\Rightarrow x=-1$ là tiệm cận đứng

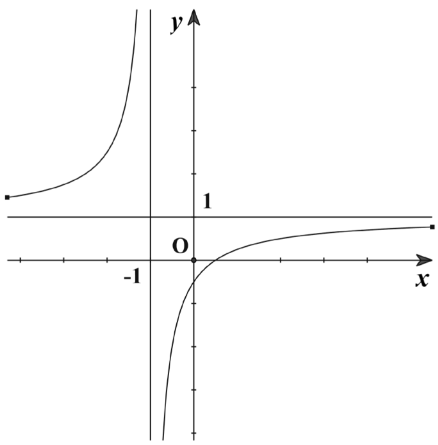
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1\Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	1	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	1

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



Ví dụ 2. Cho hàm số $y=\dfrac{(m+1)x-2m+1}{x-1}$, ($m$ là tham số) có đồ thị (G)

a) Xác định m để đồ thị (G) đi qua điểm $(0;-1)$.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với m vừa tìm được.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị trên tại giao điểm của nó với trục tung.

Giải

a) (G) đi qua điểm $(0;-1) \Leftrightarrow -1=\dfrac{(m+1).0-2m+1}{0-1} \Leftrightarrow m=0$

b) Với $m=0$ ta có $y=\dfrac{x+1}{x-1}$

- Tập xác đinh: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$
- Đạo hàm: $y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0, \forall x\neq 1$
- Giới hạn và tiệm cận: $\lim\limits_{x\to 1^+} y=+\infty; \lim\limits_{x\to 1^-} y=-\infty \Rightarrow x=1$ là tiệm cận đứng

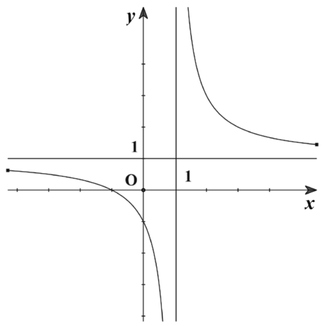
  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=1 \Rightarrow y=1$ là tiệm cận ngang

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	1	$\searrow$ $-\infty$	‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(1;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



c) Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $P(0;-1)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $P(0;-1)$ là

$y = y'(0)(x-0)-1 \Leftrightarrow y = -2x-1$.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x-2}{2x+1}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số .

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của đồ thị là tâm đối xứng của đồ thị.

c) Viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm A của đồ thị (C) với trục hoành.

d) Viết phương trình tiếp tuyến biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 5x+1$.

Giải

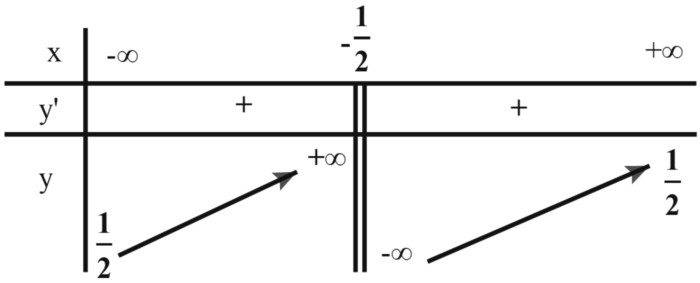
a) $(C): y = \dfrac{x-2}{2x+1}$

- Tập xác đinh: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{5}{(2x+1)^2} > 0, \forall x \neq -\dfrac{1}{2}$
- Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} y = -\infty;\ \lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} y = +\infty \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\frac{1}{2}\Rightarrow y=\frac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

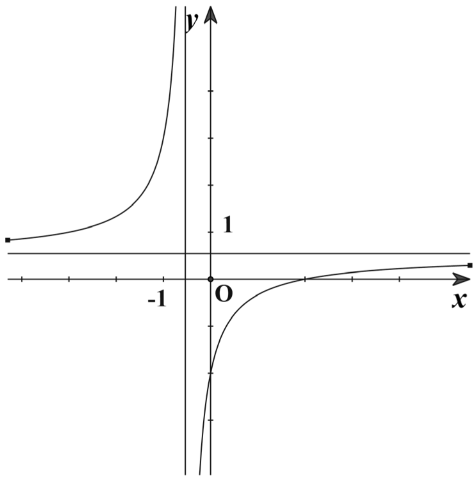
- Bảng biến thiên



Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ và $\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ của

hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) Giao điểm hai đường tiệm cận là $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Phương trình đường cong $y=\frac{x-2}{2x+1}$ trong hệ trục IXY là

$$Y=\frac{X-\frac{1}{2}-2}{2\left(X-\frac{1}{2}\right)+2}-\frac{1}{2}\Leftrightarrow Y=-\frac{5}{4X}$$

Hàm số $Y=\frac{-5}{4X}$ là một hàm số lẻ. Ta biết đồ thị hàm số lẻ nhận gốc tọa độ (gốc I trong hệ trục IXY) làm tâm đối xứng.

Vậy giao điểm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ của hai đường tiệm cận là tâm đối xứng của đồ thị.

c) Ta có (C) cắt trục Ox tại điểm $A(2;0)$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(2;0)$ là

$y = y'(0)(x-2)+0 \Leftrightarrow y = 5(x-2) = 5x-10$.

d) Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 5x+1$ nên

$$k = 5 \Leftrightarrow \frac{5}{(2x+1)^2} = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+1=1 \\ 2x+1=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

- Với $x = 0 \Rightarrow y = -2$ và $y'(0) = 5$ nên phương trình tiếp tuyến $y = 5x-2$.
- Với $x = -1 \Rightarrow y = 3$ và $y'(-1) = 5$ nên phương trình tiếp tuyến $y = 5(x+1)+3 = 5x+8$.

Ví dụ 4. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng d_m đi qua điểm $A(-2;2)$ và có hệ số góc m cắt đồ thị của hàm số đã cho

- Tại hai điểm phân biệt.
- Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

Giải

a) $(C): y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

- Tập xác đinh: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$
- Giới hạn và tiệm cận:

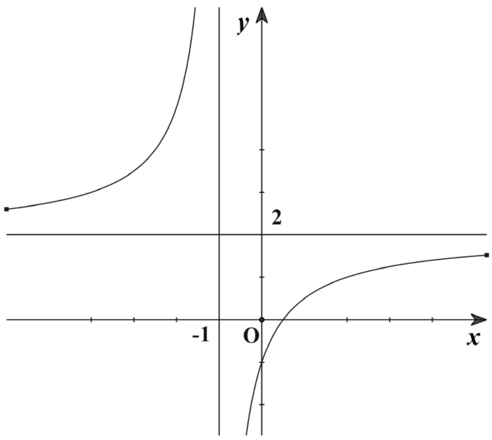
  $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty;\ \lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) Đường thẳng d_m đi qua $A(-2;2)$ có hệ số góc m có phương trình là

$y = m(x+2)+2 \Leftrightarrow y = mx + 2(m+1)$

Phương trình hoành độ giao điểm

$\dfrac{2x-1}{x+1} = mx + 2(m+1) \Leftrightarrow 2x-1 = (x+1)\left[mx+2(m+1)\right], x \neq -1$

$\Leftrightarrow mx^2 + 3mx + 2m + 3, x \neq -1 \quad (1)$

- Đường thẳng d_m cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác $-1 \Leftrightarrow$ $\begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta = (3m)^2 - 4m(2m+3) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < 0 \\ m > 12 \end{array}\right. \\ 3 \neq 0 \end{cases}$
- Đường thẳng d_m cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, một nghiệm nhỏ hơn -1 và một nghiệm lớn hơn -1 $\Leftrightarrow m\left[m(-1)^2 + 3m(-1) + 2m + 3\right] < 0 \Leftrightarrow m < 0.$

Ví dụ 5. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{x+2}{2x+1}$

b) Chứng minh rằng đường thẳng $y = mx + m - 1$ luôn đi qua một điểm cố định của đường cong (C) khi m biến thiên.

c) Tìm các giá trị m sao cho đường thẳng đã cho cắt đường cong (C) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của (C).

Giải

a) $(C): y = \dfrac{x+2}{2x+1}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$

- Đạo hàm: $y' = -\dfrac{3}{(2x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$

- Giới hạn và tiệm cận:

  $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to \left(-\frac{1}{2}\right)^-} y = -\infty \Rightarrow x = -\dfrac{1}{2}$ là tiệm cận đứng

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}$ là tiệm cận ngang

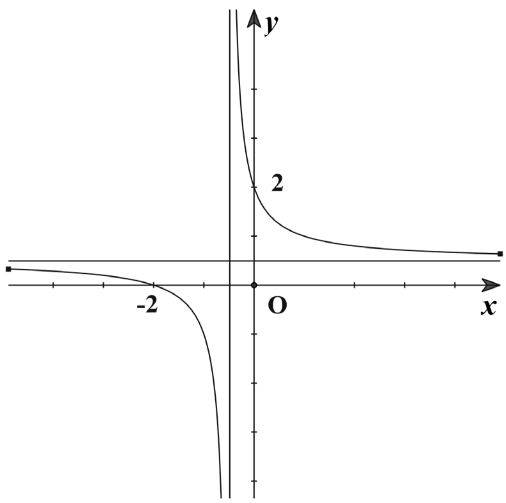
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	$\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2}$

  Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right)$ và $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ của hai

  đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) Ta có

$y = mx + m - 1 \Leftrightarrow (x+1)m - 1 - y = 0$ (*)

Hệ thức (*) đúng với mọi m khi

và chỉ khi $\begin{cases} x + 1 = 0 \\ -1 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$

Đường thẳng $y = mx + m - 1$ luôn đi qua điểm cố định $A(-1;-1)$ thuộc (C) (Vì tọa độ A thỏa mãn phương trình $y = \dfrac{x+2}{2x+1}$)

c) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = mx + m - 1$ và (C) là

$$\frac{x+2}{2x+1} = mx + m - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2mx^2 + 3(m-1)x + m - 3 = 0 \\ 2x + 1 \neq 0 \end{cases}$$

Đường thẳng cắt (C) tại hai điểm thuộc cùng một nhánh nếu và chỉ nếu

$$\begin{cases} \Delta = 9(m-2)^2 - 8m(m-3) > 0 \\ 2m\left[2m\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 3(m-1)\left(-\frac{1}{2}\right) + m - 3\right] > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m < 0 \end{cases}$$

Ví dụ 6. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-3}{x-2}$ có đồ thị (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (C) .

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C), biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = 4x + 5$

c) Tìm trên (C) những điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt hai tiệm cận của (C) tại A, B sao cho AB ngắn nhất .

Giải

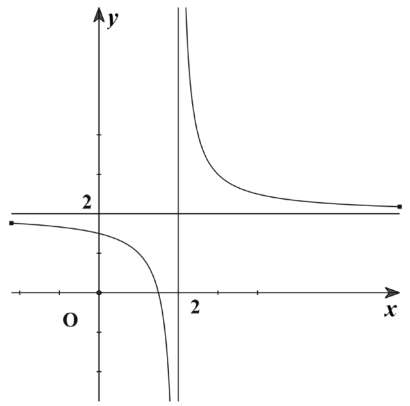
a) $(C): y = \dfrac{2x-3}{x-2}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- Đạo hàm: $y' = -\dfrac{1}{(x-2)^2} < 0, \forall x \neq 2$
- Giới hạn và tiệm cận:
  $\lim\limits_{x \to 2^+} y = +\infty;\ \lim\limits_{x \to 2^-} y = -\infty \Rightarrow x = 2$ là tiệm cận đứng.
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.
- Bảng biến thiên

x	-∞		2		+∞
y'		-	‖	-	
y	2	↘	-∞ ‖ +∞	↘	2

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(2;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) Vì tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y = 4x + 5$ nên

$k.4 = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$, với k là hệ số góc của tiếp tuyến

Ta có $-\frac{1}{(x-2)^2} = -\frac{1}{4} \Leftrightarrow (x-2)^2 = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=2 \\ x-2=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=0 \end{array}\right.$

- Với $x = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$ thì phương trình tiếp tuyến là $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.
- Với $x = 4 \Rightarrow y = \frac{5}{2}$ thì phương trình tiếp tuyến là

$y = -\frac{1}{4}(x-4) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{2}$.

c) Lấy điểm $M\left(x_0; 2 + \frac{1}{x_0 - 2}\right) \in (C)$. Ta có: $f'(x_0) = -\frac{1}{(x_0-2)^2}$

Tiếp tuyến (d) tại M có phương trình là: $y = -\frac{1}{(x_0-2)^2}(x - x_0) + 2 + \frac{1}{x_0 - 2}$

Giao điểm (d) với tiệm cận đứng $\mathrm{A}\left(2; 2 + \frac{2}{x_0 - 2}\right)$.

Giao điểm (d) với tiệm cận ngang $B(2x_0 - 2; 2)$.

$AB^2 = 4\left[(x_0-2)^2 + \frac{1}{(x_0-2)^2}\right] \geq 8.$

Dấu"=" xảy ra khi $(x_0-2)^2 = \frac{1}{(x_0-2)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 2 = 1 \\ x_0 - 2 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 3 \\ x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm $M(3;3), M(1;1)$.

Ví dụ 7. Cho hàm số $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$ (1).

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) của hàm số (1).

b) Tìm những điểm trên đồ thị (C) có tọa độ nguyên.

c) Tìm điểm thuộc đồ thị (C) để tiếp tuyến của (C) tại M với đường thẳng đi qua M và giao điểm hai đường tiệm cận có tích hệ số góc bằng - 9.

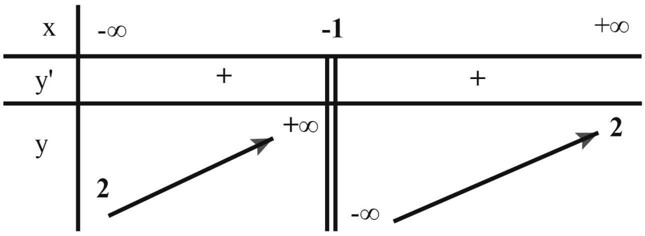
Giải

a) $(C): y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$
- Giới hạn và tiệm cận:

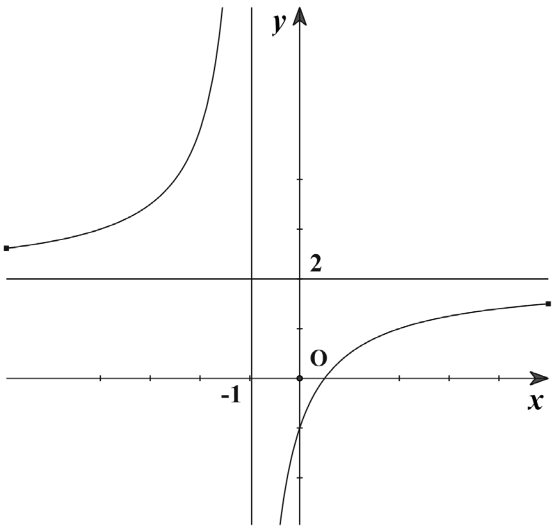
  $\lim\limits_{x \to (-1)^+} y = -\infty;\ \lim\limits_{x \to (-1)^-} y = +\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang
- Bảng biến thiên



Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) Ta có

$$y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2\left(x+1\right)-3}{x+1}$$
$$= 2 - \frac{3}{x+1}$$

Gọi $M\left(x_0;y_0\right) \in \left(C\right), \begin{cases} x_0 \in \mathbb{Z} \\ y_0 \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Vì $M\left(x_0;y_0\right) \in \left(C\right) \Rightarrow y_0 = 2 - \frac{3}{x_0+1}$

Để $y_0 \in \mathbb{Z}$ thì $\left[\begin{array}{l} x_0+1=1 \\ x_0+1=-1 \\ x_0+1=3 \\ x_0+1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \Rightarrow y_0=-1 \\ x_0=-2 \Rightarrow y_0=5 \\ x_0=2 \Rightarrow y_0=1 \\ x_0=-4 \Rightarrow y_0=3 \end{array}\right.$

Vậy, trên $\left(C\right)$ tồn tại bốn điểm M có tọa độ nguyên

$M_1\left(0;-1\right), M_2\left(-2;5\right), M_3\left(2;1\right), M_4\left(-4;3\right)$.

c) Ta có $I\left(-1;2\right)$. Gọi $M \in (C) \Rightarrow M(x_0;2-\frac{3}{x_0+1}) \Rightarrow k_{IM} = \frac{y_M - y_I}{x_M - x_I} = \frac{-3}{(x_0+1)^2}$

Hệ số góc của tiếp tuyến tại M là $k_M = y'(x_0) = \frac{3}{\left(x_0+1\right)^2}$

Theo đề $k_M.k_{IM} = -9 \Leftrightarrow \frac{-3}{(x_0+1)^2}.\frac{3}{(x_0+1)^2} = -9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0=-2 \end{array}\right.$

Suy ra có 2 điểm M thỏa mãn: $M\left(0;-3\right), M\left(-2;5\right)$.

Ví dụ 8. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị là $\left(C\right)$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $\left(C\right)$.

b) Tìm tọa độ điểm $M \in \left(C\right)$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $y=-x$ bằng $\sqrt{2}$.

Giải

a) $\left(C\right): y = \frac{x+2}{x-1}$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{1\right\}$.
- Đạo hàm: $y' = \frac{-3}{\left(x-1\right)^2} < 0, \forall x \neq 1$
- Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to 1^+} y = +\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^-} y = -\infty \Rightarrow x = 1$ là tiệm cận đứng.

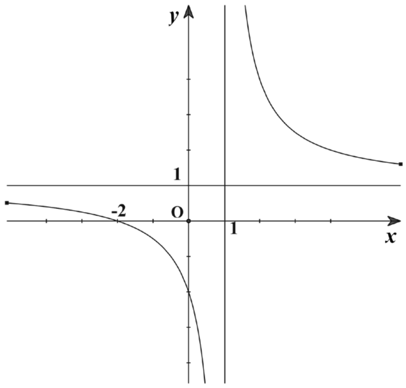
$\lim\limits_{x\to \pm\infty} y = 1 \Rightarrow y = 1$ là tiệm cận ngang.

- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		-	‖	-	
y	1	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	1

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(1;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) $M \in (C) \Rightarrow M\left(m;\dfrac{m+2}{m-1}\right)$,

điều kiện ($m \in R, m \neq 1$).

Gọi đường thẳng đã cho là $\Delta: x + y = 0$.

Theo bài ta có:

d(M, Δ) = $\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|m + \dfrac{m+2}{m-1}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left|m^2+2\right| = 2\left|m-1\right| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m^2+2 = 2(m-1) \\ m^2+2 = -2(m-1) \end{array}\right.$$

- Với $m^2+2 = 2(m-1) \Leftrightarrow m^2 - 2m + 4 = 0$ (có $\Delta' = -3 < 0$) nên vô nghiệm.
- Với $m^2+2 = -2(m-1) \Leftrightarrow m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \Rightarrow M(0;-2) \\ m = -2 \Rightarrow M(-2;0) \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm M thỏa yêu cầu bài toán là $M(0;-2); M(-2;0)$.

Ví dụ 9. Cho hàm số $(C): y = \dfrac{2x+4}{x+1}$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Chứng minh rằng đường thẳng $d: y = 2x + m$ luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B với mọi m. Định m để đoạn AB ngắn nhất.

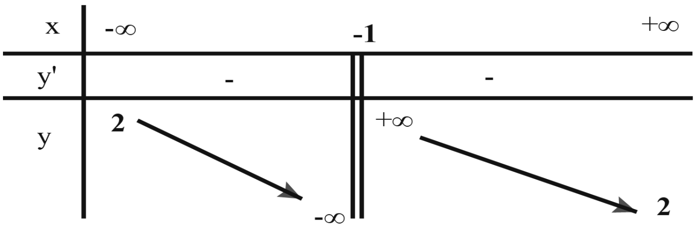
c) Gọi Δ là đường thẳng đi qua $E(-4;2)$ có hệ số góc k. Định k để Δ cắt (C) tại hai điểm M_1, M_2 lần lượt thuộc hai nhánh của (C). Khi đó tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn M_1M_2.

d) Tìm hai điểm M, N thuộc hai nhánh của (C) sao cho độ dài đoạn MN ngắn nhất.

Giải

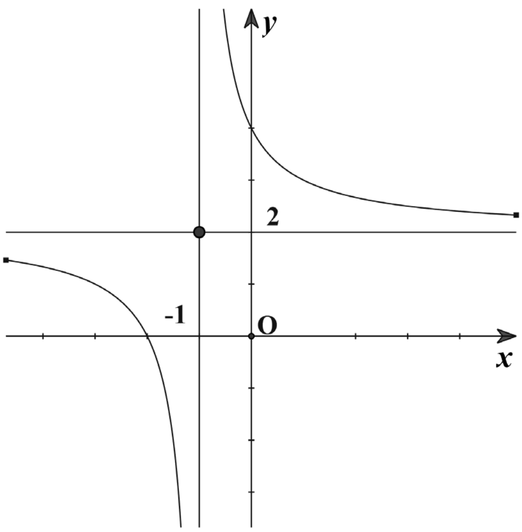
a) $(C): y = \dfrac{2x+4}{x+1}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Đạo hàm: $y' = \dfrac{-2}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$
- Giới hạn và tiệm cận:
  $\lim\limits_{x \to -1^+} y = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -1^-} y = -\infty \Rightarrow x = -1$ là tiệm cận đứng.
  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = 2 \Rightarrow y = 2$ là tiệm cận ngang.
- Bảng biến thiên



Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I(-1;2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C) là

$$\frac{2x+4}{x+1}=2x+m \Leftrightarrow 2x^2+mx+m-4=0, x\neq -1 \qquad (1)$$

Nhận thấy $\Delta=m^2-8(m-4)=(m-4)^2+16>0, \forall m$ nên d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B với mọi m.

Giả sử $A(x_1, 2x_1+m), B(x_2, 2x_2+m)$.

Ta có $AB^2=(x_2-x_1)^2+(2x_2-2x_1)^2=5(x_2-x_1)^2$, với x_1,x_2 là các nghiệm của (1), ta có $x_1,x_2=\dfrac{-m\pm\sqrt{\Delta}}{4}$.

Suy ra $AB^2=\dfrac{5}{4}\Delta=\dfrac{5}{4}\left[(m-4)^2+16\right]\geq 20$.

Vậy AB nhỏ nhất bằng $2\sqrt{5}\Leftrightarrow m=4$.

c) Đường thẳng Δ đi qua $E(-4;2)$ có hệ số góc k có phương trình là

$\Delta: y=k(x+4)+2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của Δ và (C) là

$$\frac{2x+4}{x+1}=k(x+4)+2 \Leftrightarrow 2x+4=k(x+4)(x+1)+2(x+1), x\neq -1$$
$$\Leftrightarrow kx^2+5kx+4k-2=0, x\neq -1 \ (2)$$

Đường thẳng Δ cắt (C) tại M_1,M_2 thuộc về hai nhánh $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa

$$x_1<-1<x_2 \Leftrightarrow x_1+1<0<x_2+1 \Leftrightarrow (x_1+1).(x_2+1)<0$$
$$\Leftrightarrow x_1x_2+(x_1+x_2)+1<0 \Leftrightarrow k>0$$

Gọi $I(x,y)$ là trung điểm của

$$M_1,M_2 \Leftrightarrow \begin{cases} k>0 \\ x_1+x_2=2x \\ y=k(x+4)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>0 \\ -5=2x \\ y=k\left(-\dfrac{5}{2}+4\right)+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k>0 \\ x=\dfrac{-5}{2} \\ y=\dfrac{3k}{2}+2>2 \end{cases}$$

Vậy quỹ tích trung điểm của trung điểm I là $\left\{\left(-\dfrac{5}{2};y\right), \text{ với } y>2\right\}$.

d) Gọi M,N là hai điểm thuộc hai nhánh của (C).

Giả sử $x_M > -1, x_N < -1$. Đặt $\alpha = x_M + 1, \beta = x_N + 1$ thì $\alpha > 0$ và $\beta < 0$

Do $M, N \in (C)$ nên $M\left(x_M, 2 + \dfrac{2}{x_M + 1}\right); N\left(x_N, 2 + \dfrac{2}{x_N + 1}\right)$

Hay $M\left(\alpha - 1; 2 + \dfrac{2}{\alpha}\right); N\left(\beta - 1; 2 + \dfrac{2}{\beta}\right);$

Nên

$$MN^2 = (\beta - \alpha)^2 + \left(\frac{2}{\beta} - \frac{2}{\alpha}\right)^2 = (\beta - \alpha)^2\left[1 + \frac{4}{\alpha^2\beta^2}\right]$$

$$= \left[(\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta\right]\left[1 + \frac{4}{\alpha^2\beta^2}\right]$$

$$\Rightarrow MN^2 \geq -4\alpha\beta\left[1 + \frac{4}{\alpha^2\beta^2}\right]$$

Dấu "=" xảy ra khi $\alpha = -\beta$.

$$MN^2 \geq -4\left[-\alpha\beta + \frac{4}{-\alpha\beta}\right] \geq 16 \Rightarrow MN \geq 4.$$

Vậy MN nhỏ nhất khi $\begin{cases} \alpha = -\beta > 0 \\ \alpha\beta = \dfrac{1}{\alpha\beta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \sqrt{2} \\ \beta = -\sqrt{2} \end{cases}$

Vậy MN nhỏ nhất khi $M\left(\sqrt{2} - 1; 2 + \sqrt{2}\right), N\left(-\sqrt{2} - 1, 2 - \sqrt{2}\right)$.

Chú ý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C). Để tìm trên (C) hai điểm A và B sao cho khoảng cách AB ngắn nhất ta làm như sau:

Giả sử (C) có tiệm cận đứng : $x = a$. Do tính chất của hàm phân thức , đồ thị nằm về hai phía của tiệm cận đứng . Cho nên gọi hai số α, β là hai số dương

Nếu A thuộc nhánh trái $x_A < a \Rightarrow x_A = a - \alpha < a \in (C)$, và

B thuộc nhánh phải $x_B > a \Rightarrow x_B = a + \beta > a \in (C)$

Ta tính : $y_A = f(x_A); y_B = f(x_B)$;

Sau đó tính $AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = \left[(b + \beta) - (a - \alpha)\right]^2 + (y_B - y_A)^2$

Khi đó AB có dạng : $AB^2 = g\left[(a + b); \alpha + \beta; \alpha.\beta\right]$. Áp dụng bất đẳng thức Cô-si , ta có kết quả cần tìm .

Ví dụ 10. Cho hàm số $y = \dfrac{\left(\sqrt{2}\tan\alpha\right)x + 1}{x + \sqrt{2}\cot\alpha}$ có đồ thị là $(C_\alpha), \alpha \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

b) Chứng minh các đường (C_α) và $\left(C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}\right)$ có chung hai điểm M, N nằm trên đường thẳng $\Delta : x + y = 0$. Tìm α để MN ngắn nhất.

Giải

a) Khi $\alpha = \frac{\pi}{4}$ thì $y = \frac{\sqrt{2}x + 1}{x + \sqrt{2}}$

- Tập xác đinh: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}\right\}$
- Đạo hàm: $y' = \frac{1}{\left(x + \sqrt{2}\right)^2} > 0, \forall x \neq -\sqrt{2}$
- Giới hạn và tiệm cận:

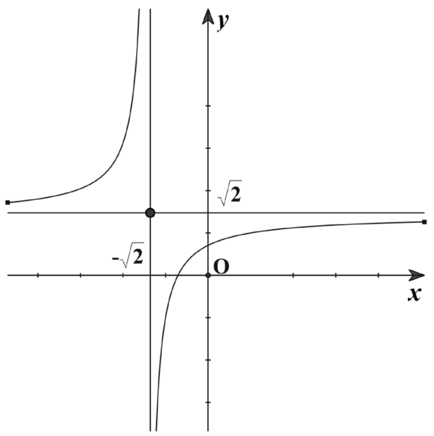
  $\lim\limits_{x \to \left(-\sqrt{2}\right)^+} y = +\infty; \ \lim\limits_{x \to \left(-\sqrt{2}\right)^-} y = -\infty \Rightarrow x = -\sqrt{2}$ là tiệm cận đứng.

  $\lim\limits_{x \to \pm\infty} y = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}$ là tiệm cận ngang.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty; -\sqrt{2}\right)$ và $\left(-\sqrt{2}; +\infty\right)$

- Đồ thị: Đồ thị hàm số nhận giao điểm $I\left(-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.



b) Tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ và $\left(C_\alpha\right)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \dfrac{\left(\sqrt{2}\tan\alpha\right)x+1}{x+\sqrt{2}\cot\alpha}=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+\sqrt{2}\left(\tan\alpha+\cot\alpha\right)x+1=0 \ (1) \end{cases}$$

Tọa độ giao điểm của đường thẳng Δ và $\left(C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}\right)$ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=0 \\ \dfrac{\left(\sqrt{2}\cot\alpha\right)x+1}{x+\sqrt{2}\tan\alpha}=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x^2+\sqrt{2}\left(\tan\alpha+\cot\alpha\right)x+1=0 \ (1) \end{cases}$$

Phương trình (1) có $\Delta=\left[\sqrt{2}\left(\tan\alpha+\cot\alpha\right)\right]^2-4=2\left(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha\right)>0$

Vậy $\left(C_\alpha\right)$ và $\left(C_{\frac{\pi}{2}-\alpha}\right)$ có chung hai điểm M,N nằm trên đường thẳng $\Delta: x+y=0$.

Mặt khác

$$MN^2=\left(x_M-x_N\right)^2+\left(y_M-y_N\right)^2=2\left[\left(x_M+x_N\right)^2-4x_Mx_N\right]$$
$$=2\left[2\left(\tan\alpha+\cot\alpha\right)^2-4\right]=4\left(\tan^2\alpha+\cot^2\alpha\right)\geq 8$$

Đẳng thức xảy ra khi $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

Vậy MN nhỏ nhất bằng $2\sqrt{2}$ khi $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

2. Bài tập rèn luyện

BT 1. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ (C)

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số .

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến của (C) tại M là lớn nhất .

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Gọi $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right)\in(C)$ thì tiếp tuyến tại M có phương trình

$y-2+\dfrac{3}{x_0+1}=\dfrac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0)$ hay $3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0$

Khoảng cách từ $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến là

$$d=\frac{|3(-1-x_0)-3(x_0+1)|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\frac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2}}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi $\dfrac{9}{(x_0+1)^2}+(x_0+1)^2\ge 2\sqrt{9}=6$, vậy $d\le\sqrt{6}$.

Khoảng cách d lớn nhất bằng $\sqrt{6}$ khi

$$\frac{9}{(x_0+1)^2}=(x_0+1)^2\Leftrightarrow(x_0+1)^2=3\Leftrightarrow x_0=-1\pm\sqrt{3}.$$

Vậy có hai điểm M : $M\left(-1+\sqrt{3};2-\sqrt{3}\right)$ hoặc $M\left(-1-\sqrt{3};2+\sqrt{3}\right)$.

BT 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x-1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số đã cho.

b) Tìm những điểm trên đồ thị (C) cách đều hai điểm $A(2;0)$ và $B(0;2)$

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Phương trình đường trung trực đoạn AB là $y=x$

Những điểm thuộc đồ thị cách đều A và B có hoành độ là nghiệm của phương trình

$$\frac{x+2}{2x-1}=x\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\\x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm trên đồ thị thỏa yêu cầu bài toán : $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right),\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2};\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$

BT 3. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-4}{x+1}$ (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm trên đồ thị (C) hai điểm đối xứng nhau qua đường thẳng MN biết $M(-3;0)$ và $N(-1;-1)$.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Gọi 2 điểm cần tìm là A, B có $A\left(a;2-\frac{6}{a+1}\right);B\left(b;2-\frac{6}{b+1}\right);a,b\neq -1$

Trung điểm I của AB: $I\left(\frac{a+b}{2};\frac{a-2}{a+1}+\frac{b-2}{b+1}\right)$

Phương trình đường thẳng $MN: x+2y+3=0$.

Có : $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{MN}=0\\ I\in MN\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(0;-4)\\ B(2;0)\end{cases}$.

BT 4. Cho hàm số $y=\frac{2x+1}{1-x}$ có đồ thị là (C).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

b) Giả sử Δ là tiếp tuyến tại điểm $M(0;1)$ của đồ thị hàm số (C). Hãy tìm trên (C) những điểm có hoành độ lớn hơn 1 mà khoảng cách từ đó đến Δ là ngắn nhất.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Khoảng cách từ một điểm trên (C) tới đường thẳng Δ là ngắn nhất khi và chỉ khi điểm đó là tiếp điểm của đồ thị (C) với tiếp tuyến là song song với đường thẳng Δ.

Ta có: $y'=\frac{3}{(1-x)^2};y'(0)=3$.

Phương trình tiếp tuyến của (C) là $\Delta: y=3x+1$.

Gọi $N(x_0;y_0)\in(C),x_0>1$ có khoảng cách tới Δ ngắn nhất, thế thì x_0 là nghiệm của phương trình

$$y'(x_0)=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2\Rightarrow y_0=-5\\ x_0=0\text{ (loại)}\end{array}\right.$$

BT 5. Cho hàm số $y=\frac{x-m}{x-2}(m\neq 2)$ có đồ thị là (C_m).

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số khi $m=1$.

b) Tìm tất cả các giá trị m để đồ thị hàm số (C_m) có ít nhất một điểm cách đều hai trục tọa độ, đồng thời hoành độ và tung độ của điểm đó trái dấu nhau.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Những điểm cách đều hai trục tọa độ có hoành độ và tung độ trái dấu nhau sẽ nằm trên đường thẳng $y=-x$.

Giả sử $M(x;y)$ là điểm thỏa mãn đề bài thì ta có phương trình:

$$-x=\frac{x-m}{x-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-x-m=0 & (*)\\ x\neq 2\end{cases}.$$

Phương trình (*) có ít nhất một nghiệm khác 2 khi và chỉ khi

$$\begin{cases}\Delta=1+4m\geq 0\\ 2-m\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\geq -\dfrac{1}{4}\\ m\neq 2\end{cases}.$$

BT 6. Cho hàm số $y=\dfrac{2x}{x+2}(C)$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị tại giao điểm của (C) với trục hoành.

c) Tính khoảng cách giữa hai nhánh của đồ thị hàm số (C).

Hướng dẫn

a), b) Học sinh tự làm.

c) Giả sử $(C_1);(C_2)$ là hai nhánh của đồ thị hàm số và

$$M\left(a;\frac{2a}{a+2}\right)\in(C_1);N\left(b;\frac{2b}{b+2}\right)\in(C_2)$$
$$y'=\frac{4}{(x+2)^2},\overrightarrow{MN}=\left(b-a;\frac{2b}{b+2}-\frac{2a}{a+2}\right).$$

Tiếp tuyến với (C) tại M có phương trình:

$$y=\frac{4}{(a+2)^2}(x-a)+\frac{2a}{a+2}\Leftrightarrow 4x-(a+2)^2y+2a^2=0$$

Ta thấy MN là khoảng cách của hai nhánh $(C_1);(C_2)$ khi và chỉ khi tiếp tuyến tại M,N với $(C_1);(C_2)$ song song với nhau và chúng vuông góc với đường thẳng chứa MN. Điều đó tương đương

$$\begin{cases}\dfrac{4}{(a+2)^2}=\dfrac{4}{(b+2)^2} & (1)\\ (b-a)(a+2)^2+4\left(\dfrac{2b}{b+2}-\dfrac{2a}{a+2}\right)=0 & (2)\end{cases}$$

Từ $(1)\Rightarrow b=-4-a$ thay vào (2) ta được :

$-2(a+2)^4+32=0\Leftrightarrow a=0$ (do $a>-2$)

$\Rightarrow b=-4$ và $\overrightarrow{MN}=(-4;4)\Rightarrow MN=4\sqrt{2}.$

BT 7. Cho hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số.

b) Tìm những điểm trên đồ thị (C) có tọa độ nguyên.

c) Gọi A,B là giao điểm của đường thẳng $y=\dfrac{1}{6}x$ với đồ thị hàm số $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. Tìm điểm M thuộc đường phân giác góc phần tư thứ nhất sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a, b) Học sinh tự làm.

c) Tọa độ A,B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} y=\dfrac{1}{6}x \\ y=\dfrac{x-1}{x+1}\end{cases}\Rightarrow A\left(2;\dfrac{1}{3}\right);B\left(3;\dfrac{1}{2}\right).$

Dễ thấy A và B nằm cùng phía đối với đường phân giác $\Delta: x-y=0$. Gọi $A'(a;b)$ là điểm đối xứng của A qua $\Delta: x-y=0$.

$$\begin{cases}(a-2).1+\left(b-\dfrac{1}{3}\right).1=0 \\ \dfrac{a+2}{2}-\dfrac{b+\frac{1}{3}}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{3} \\ b=2\end{cases}\Rightarrow A'\left(\dfrac{1}{3};2\right).$$

M là giao điểm của A'B và $\Delta\Rightarrow \mathrm{M}\left(\dfrac{7}{5};\dfrac{7}{5}\right).$

BT 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x+2}{2x+1}\,(C)$ và đường thẳng $(d_m): y=mx+m-1$.

a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số (C).

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng d_m cắt (C).

- Tại hai điểm thuộc cùng một nhánh của đồ thị.
- Tại hai điểm thuộc hai nhánh của đồ thị.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng (d_m) và (C)

$$mx+m-1=\frac{x+2}{2x+1}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-\frac{1}{2}\\2mx^2+3(m-1)x+m-3=0\ (1)\end{cases}$$

- Đường thẳng (d_m) cắt (C) tại hai điểm thuộc cùng một nhaùnh của đồ thị khi (1) có hai nghiệm x_1,x_2 sao cho $x_1<x_2<-\frac{1}{2}$ (hoặc $-\frac{1}{2}<x_1<x_2$) $\Leftrightarrow\begin{cases}m<0\\m\neq-3\end{cases}$
- Đường thẳng (d_m) cắt (C) tại hai điểm thuộc hai nhaùnh của đồ thị khi (1) có hai nghiệm x_1,x_2 sao cho $x_1<0<x_2\Leftrightarrow m>0$.

BT 9. Cho hàm số $y=f(x)=\frac{(m-1)x+m}{x-m}$ $(m\neq0)$ có đồ thị (H_m)

a) Chứng minh rằng (H_m) luôn tiếp xúc nhau tại 1 điểm cố định, viết phương trình tiếp tuyến chung.

b) Gọi (H) là đồ thị hàm số khi $m=2$. Tìm các điểm trên trục hoành sao cho từ đó kẻ được 2 tiếp tuyến thuộc về hai nhánh của (H).

c) Trên (H) lấy các điểm $A_0,A_1,...,A_n$ có hoành độ tương ứng là $x_i=2^i+2(i=0,1,...,n)$. Gọi $y_0,y_1,...,y_n$ là tung độ các điểm trên.

Đặt $Y_0=y_0-1,Y_1=y_1-1,...,Y_n=y_n-1$

Đặt $S_n=Y_0+Y_1+...+Y_n$.

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n$

Giải

a) Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định của (H_m)

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y_0=\frac{(m-1)x_0+m}{x_0-m},\forall m\neq0\\m\neq x_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0+y_0+1)m-x_0(y_0+1)=0,\forall m\neq0\\m\neq x_0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0+y_0+1=0\\x_0(y_0+1)=0\\m\neq x_0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=0\\y_0=-1\end{cases}.$$

Vậy (H_m) luôn qua điểm cố định $M(0;-1)$.

Ta có $f'(x)=\frac{-m(m-1)-m}{(x-m)^2}=\frac{-m^2}{(x-m)^2}\Rightarrow f'(0)=-1$

Tiếp tuyến của (H_m) tại $M(0;-1)$ là $y=-x-1$.

Do đó mọi đồ thị của (H_m) đều tiếp xúc với $M(0;-1)$ và tiếp tuyến chung là đường thẳng $y=-x-1$

b) Khi $m=2$ thì $(H): y=\dfrac{x+2}{x-2}$.

Giả sử $A(a;0)\in \text{Ox}$ và $M_0(x_0;y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến d với (H).

Ta có

$$d: y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0 \Leftrightarrow y=-\frac{4}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-2}$$

$$A(a;0)\in d \Leftrightarrow 0=-\frac{4}{(x_0-2)^2}(a-x_0)+\frac{x_0+2}{x_0-2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4(a-x_0)=(x_0+2)(x_0-2) \\ x_0\neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2+4x_0-4(a+1)=0 \\ x_0\neq 2 \end{cases}$$

Đồ thị (H) có tiệm cận đứng là $x=2$. Vậy từ A kẻ được hai tiếp tuyến ứng với hai nhánh của (H) thì (1) phải có hai nghiệm thỏa điều kiện

$$x_0^{'}<2<x_0^{''} \Leftrightarrow (x_0^{'}-2)(x_0^{''}-2)<0 \Leftrightarrow a>2.$$

Vậy những điểm $A(a;0)$ với $a>2$ thỏa yêu cầu bài toán.

c) $A_i(x_i;y_i)\in(H)\Rightarrow y_i=\dfrac{x_i+2}{x_i-2},\ (i=0,1,...,n)$ mà $x_i=2^i+2$

nên $y_i=\dfrac{2^i+4}{2^i}=1+\dfrac{4}{2^i}$

Vậy $Y_i=y_i-1=\dfrac{4}{2^i},\ (i=1,2,...,n)$

$$S_n=Y_0+Y_1+Y_2+...+Y_n$$
$$=\frac{4}{2^0}+\frac{4}{2^1}+\frac{4}{2^2}+...+\frac{4}{2^n}=4\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}\right)$$
$$\Rightarrow S_n=4.\frac{1-\dfrac{1}{2^{n+1}}}{1-\dfrac{1}{2}}=8\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Do đó $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n=8$.

BT 10. Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ có đồ thị là (C)

a) Chứng minh rằng họ đường thẳng $d_m: y=-x+m$ luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A,B. Tìm m để đoạn AB ngắn nhất.

b) Viết phương trình đường thẳng tiếp xúc với(C) sao cho khoảng cách từ tâm đối xứng của (C) tới đường thẳng lớn nhất.

c) Chứng minh (H) nhận các đường phân giác của góc tạo bởi 2 đường tiệm cận làm trục đối xứng.

Hướng dẫn

a) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $d_m: y=-x+m$

$$\frac{x+1}{x+2}=-x+m \Leftrightarrow -x^2+(m-3)x+2m-1=0,(x\neq -2)\ (1)$$

Nhận thấy $x=-2$ không là nghiệm của phương trình (1) và có

$\Delta = m^2+2m+5=(m+1)^2+4>0, \forall m$

Do đó, đường thẳng $d_m: y=-x+m$ luôn cắt đồ thị tại hai điểm phân biệt A,B.

Gọi $A(x_A,-x_A+m), B(x_B,-x_B+m)$

Ta có

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2=2(x_B-x_A)^2$$
$$=2\left[(x_B+x_A)^2-4x_Ax_B\right]=2\left[(m+1)^2+4\right]$$

AB^2 nhỏ nhất khi $m=-1$.

b) Tiệm cận ngang: $y=1$; Tiệm cận đứng $x=-2$.

Tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm của hai tiệm cận $I(-2;1)$.

Giả sử $M(x_0;y_0)\in(C)$. Đường thẳng d tiếp xúc với (C) tại M có dạng

$$d: y=\frac{1}{(x_0+2)^2}(x-x_0)+\frac{x_0+1}{x_0+2}\Leftrightarrow -(x_0+2)^2y+3x+2x_0^2+2x_0+2=0, x_0\neq -2$$

Khoảng cách từ I tới đường thẳng d:

$$d=\frac{2|x_0+2|}{\sqrt{(x_0+2)^4+1}}\Leftrightarrow d^2=\frac{4(x_0+2)^2}{(x_0+2)^4+1}\ (*)$$

d lớn nhất $\Leftrightarrow d^2$ lớn nhất

Đặt $t=x_0+2$ lúc đó $d^2=\frac{4t^2}{t^4+1}$.

Xét $g(t)=\frac{4t^2}{t^4+1}, g'(t)=\frac{8t(1-t^4)}{(t^4+1)^2}, g'(t)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\pm 1\end{array}\right.$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
g'(t)		+	0	-	0	+	0	-	
g(t)	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

Từ bảng biến ta có $g(t)$ lớn nhất khi $t = \pm 1 \Leftrightarrow x_0 + 2 = \pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \\ x_0 = -3 \end{array}\right.$

Vậy có hai tiếp tuyến với (C) là $d_1 : y = x + 1;\quad d_2 : y = x + 5$

Lời bình: Đến (*), ngoài cách giải trên ta có thể đi theo hướng sau

$$d = \frac{2|x_0 + 2|}{\sqrt{(x_0 + 2)^4 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{(x_0 + 2)^2 + \dfrac{1}{(x_0 + 2)^2}}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số $(x_0 + 2)^2, \dfrac{1}{(x_0 + 2)^2}$. Đến đây quá dễ dàng, học sinh tự làm tiếp.

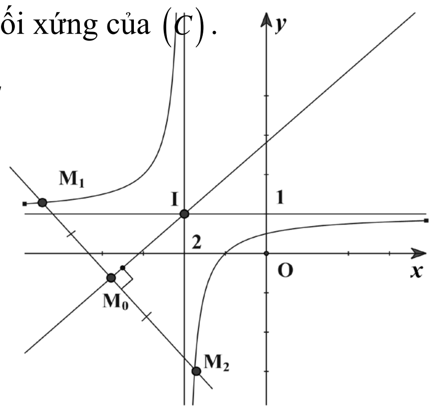
c) Các đường tiệm cận của (C) là

Tiệm cận ngang $y = 1$; Tiệm cận đứng $x = -2$

Suy ra phương trình các đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận là

$$|x + 2| = |y - 1| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y + 3 = 0:\ d_1 \\ x + y + 1 = 0:\ d_2 \end{array}\right.$$

Ta chứng minh $d_1 : y = x + 3$ là trục đối xứng của (C).



Xét đường thẳng d vuông góc với d

$\Rightarrow d : y = -x + m$

Giả sử d cắt (C) tại hai điểm

$M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2)$ và cắt d_1

tại $M_0(x_0; y_0)$

Để chứng minh d_1 là trục đối xứng của (C)

ta chỉ cần chứng minh $M_0(x_0; y_0)$ là trung điểm của đoạn M_1M_2.

Thật vậy:

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và đường thẳng $d: y = -x + m$ là

$\frac{x+1}{x+2} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (3-m)x - 2m + 1, x \neq -2$ (2)

Nhận thấy $x = -2$ không là nghiệm của phương trình (2) và $\Delta = m^2 + 2m + 5 > 0, \forall m$

Do đó d luôn cắt (C) tại hai điểm phân biệt, $\forall m$

Gọi $M'_0(x'_0; y'_0)$ là trung điểm của đoạn M_1M_2.

Ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_0^{'} \\ y_1 + y_2 = 2y_0^{'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2x_0^{'} \\ \left(-x_1^{'} + m\right) + \left(-x_2^{'} + m\right) = 2y_0^{'} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^{'} = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_0^{'} = m - \frac{x_1 + x_2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^{'} = \frac{m-3}{2} \\ y_0^{'} = m - \frac{m-3}{2} \end{cases}$$

Vậy $M_0^{'}\left(\frac{m-3}{2}; \frac{m+3}{2}\right) \Rightarrow y_0^{'} = x_0^{'} + 3 \Rightarrow M_0^{'} \in d_1 \Leftrightarrow M_0 \equiv M_0^{'}$

Vậy M_0 là trung điểm của M_1M_2 nên (C) nhận d_1 làm trục đối xứng.

Tương tự (C) nhận $d_2: y = -x - 1$ làm trục đối xứng.

Chú ý: Cho hai đường thẳng $\Delta_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0;\quad \Delta_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1, Δ_2

$$\left|\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1 + B_1}}\right| = \left|\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2 + B_2}}\right|$$

Dạng 3. Hàm số hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất và một số bài toán liên quan

Phương pháp: Với hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{dx + e}, ad \neq 0$, tử và mẫu không có nghiệm chung

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

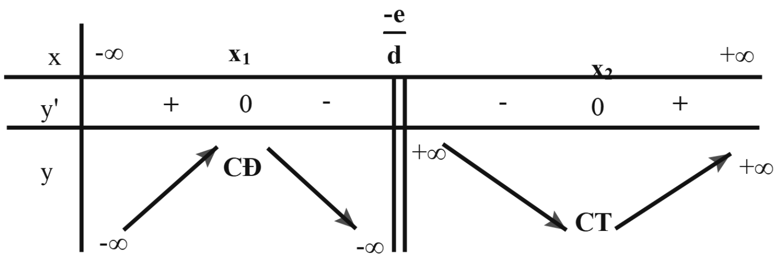
Viết hàm số dưới dạng $y = \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{dx + e}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-e}{d}\right\}$
- Giới hạn và tiệm cận

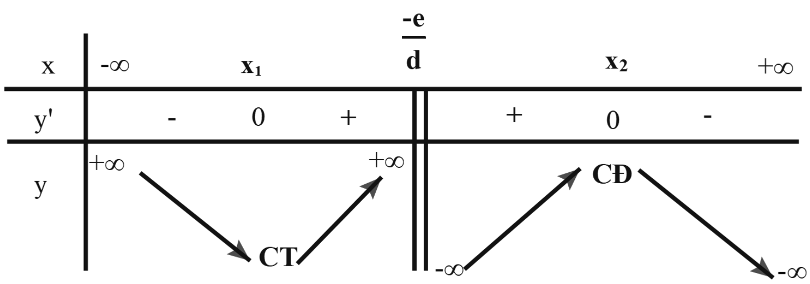
$\lim\limits_{x \to \left(-\frac{e}{d}\right)^{\pm}} y = \infty$ nên $x = -\frac{e}{d}$ là tiệm cận đứng

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[y - \left(\alpha x + \beta \right) \right] = 0$ nên $y = \alpha x + \beta$ là đường tiệm cận xiên

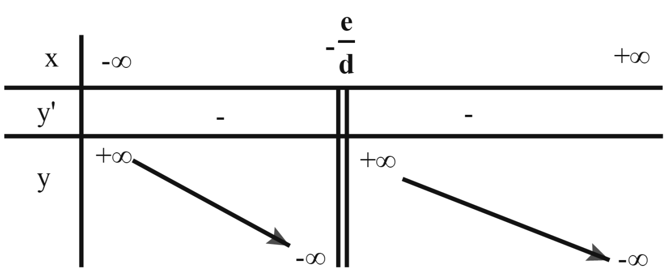
- Đạo hàm $y' = \dfrac{\alpha \left(dx + e \right)^2 - \gamma d}{\left(dx + e \right)^2}$. Dấu của đạo hàm là dấu của $g(x) = \alpha \left(dx + e \right)^2 - \gamma d$.
    - Phương trình $y' = 0$ hoặc vô nghiệm, hoặc có nghiệm kép thì hàm không có cực trị.
    - Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thì hàm có hai cực trị.
- Bảng biến thiên
    - Trường hợp có hai cực trị



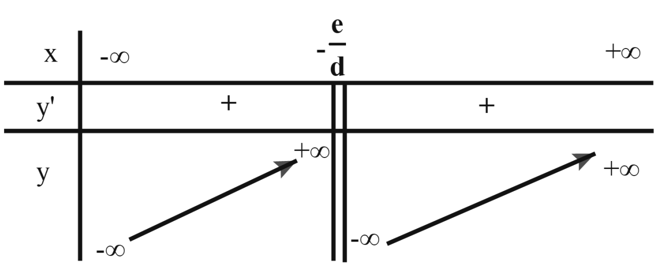
hoặc



- Trường hợp không có cực trị



hoặc



Dựa vào bảng biến thiên đưa ra kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến và cực trị (nếu có) của hàm số.

- Đồ thị
  - Tìm giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (nếu có).
  - Nhận xét: Đồ thị hàm số nhận giao điểm I của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng.

2. Các tính chất thường gặp

- Đồ thị hàm số nhận giao điểm hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng
- Đồ thị hàm có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác $-\frac{e}{d}$.
- Trong trường hợp đồ thị hàm số có cực đại, cực tiểu thì phương trình đường thẳng qua hai cực trị là $y=\frac{2ax+b}{d}$.
- Mọi tiếp tuyến tại điểm $M \in (C)$ cắt hai đường tiệm cận tại A, B thì
  - M là trung điểm của AB
  - Diện tích tam giác IAB không đổi
- Mọi điểm $M \in (C)$ có tích khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận là một hằng số
- Nếu từ một điểm E nằm trên một đường tiệm cận của (C) thì qua E kẻ duy nhất một tiếp tuyến với (C).

1. Các ví dụ

Ví dụ 1. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2+5x+4}{x+2}$ (H)

b) Chứng minh rằng giao điểm I của hai đường tiệm cận của (H) là tâm đối xứng của (H).

c) Tùy theo giá trị của m, hãy biện luận số nghiệm của phương trình.

Giải

a) Ta có $y=\frac{2x^2+5x+4}{x+2}=2x+1+\frac{2}{x+2}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
- Giới hạn và tiệm cận

  $\lim\limits_{x\to-\infty} y=-\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y=+\infty \Rightarrow$ hàm số không có tiệm cận ngang.

  $\lim\limits_{x\to-2^+} y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to-2^-} y=-\infty$ nên $x=-2$ là tiệm cận đứng.

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(2x+1)\right]=0$ nên $y=2x+1$ là đường tiệm cận xiên.

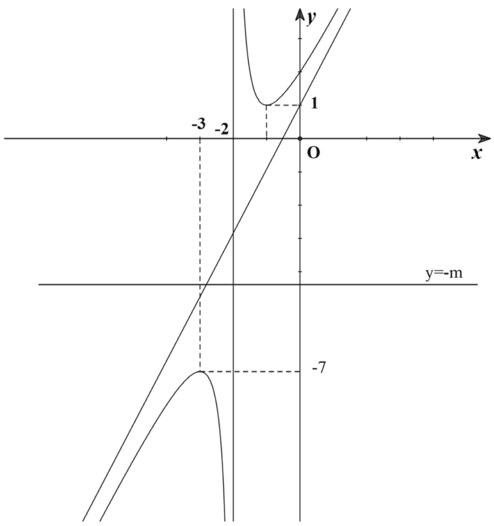
- Đạo hàm $y'=2-\frac{2}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}$, $y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-7	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$

Hàm số nghich biến trên $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$

- Đồ thị: Đồ thị nhận giao điểm $I(-2;-3)$của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng .



b) Giao điểm của hai tiệm cận là $I(-2;-3)$.

Phương trình đường cong trong hệ IXY là

$$Y=\frac{2(X-2)^2+5(X-2)+4}{(X-2)+2}+3=2X+\frac{2}{X}$$

Hàm số $Y=2X+\dfrac{2}{X}$ là một hàm số lẻ có đồ thị là gốc $I(-2;-3)$ làm tâm đối xứng.

Suy ra I là tâm đối xứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$.

c) Số nghiệm của phương trình là số giao điểm của đồ

thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$ và đường thẳng $y=-m$

- Nếu $\left[\begin{array}{l}-m<-7\\-m>1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<-1\\m>7\end{array}\right.$.

thì phương trình có hai nghiệm

- Nếu $\left[\begin{array}{l}-m=-7\\-m=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=7\\m=-1\end{array}\right.$.

thì phương trình có một nghiệm

- Nếu $-7<-m<1 \Leftrightarrow -1<m<7$
  thì phương trình vô nghiệm.

Ví dụ 2. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = x - \dfrac{2}{x-1}$.

b) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho, biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm $(3;3)$.

Giải

a) $y = x - \dfrac{2}{x-1}$

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$.
- Giới hạn và tiệm cận

  $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \Rightarrow$ hàm số không có tiệm cận ngang.

  $\lim\limits_{x\to 1^+} y = -\infty;\ \lim\limits_{x\to 1^-} y = +\infty$ nên $x=1$ là tiệm cận đứng.

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-x\right]=0$ nên $y=x$ là đường tiệm cận xiên.

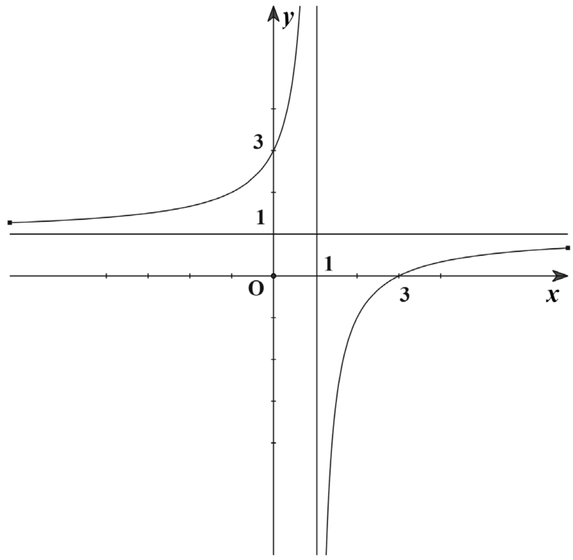
- Đạo hàm $y' = 1 + \dfrac{2}{(x-1)^2} > 0, \forall \neq 1$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

  Hàm số đồng biến trên

  $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$

- Đồ thị: Đồ thị nhận giao điểm $I(1;1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng



b) Đường thẳng đi qua điểm $(3;3)$ có dạng

$d: y = k(x-3)+3$

Để d là tiếp tuyến của đồ thị thì hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} k(x-3)+3 = x - \dfrac{2}{x-1} \\ k = 1 + \dfrac{2}{(x-1)^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ k = 3 \end{cases}$$

Vậy tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $(3;3)$ là $y = 3(x-3)+3 \Leftrightarrow y = 3x-6$.

Ví dụ 3. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{x+1}$

b) Từ đồ thị (C) suy ra cách vẽ đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{|x+1|}$

Giải

a) $y = \dfrac{x^2}{x+1} = x - 1 + \dfrac{1}{x+1}$

- Tập xác định: $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
- Giới hạn và tiệm cận

  $\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty;\ \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \Rightarrow$ hàm số không có tiệm cận ngang.

  $\lim\limits_{x\to-1^+} y = +\infty;\ \lim\limits_{x\to-1^-} y = -\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng.

  $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[y - (x-1)\right] = 0$ nên $y = x-1$ là đường tiệm cận xiên.

- Đạo hàm $y' = 1 - \dfrac{1}{(x+1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

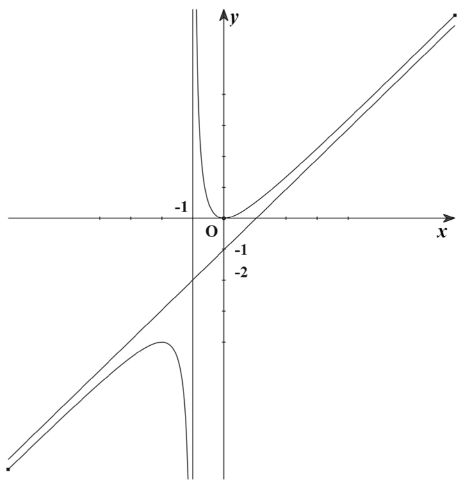
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	-4	↘ $-\infty$	|| $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-2)$ và $(0;+\infty)$

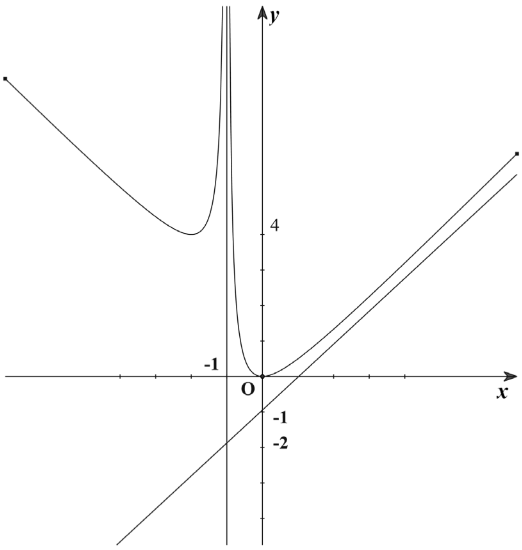
Hàm số nghịch biến trên $(-2;-1)$ và $(-1;0)$

- Đồ thị:
  Đồ thị nhận giao điểm $I(-1;-2)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng .



b) Ta có $y = \dfrac{x^2}{|x+1|} = \begin{cases} \dfrac{x^2}{x+1}, \text{ nếu } x > -1 \\ -\dfrac{x^2}{x+1}, \text{ nếu } x < -1 \end{cases}$

Từ đó suy ra đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2}{|x+1|}$ có nhánh bên phải đường $x = -1$ trùng với nhánh bên phải $x = -1$ của (C), còn nhánh bên trái đường thẳng $x = -1$ là ảnh đối xứng với nhánh bên trái đường thẳng $x = -1$ của đồ thị qua Ox .



Chú ý: Từ đồ thị hàm số $y=\dfrac{U(x)}{x-a}$ (C) ta suy ra cách vẽ đồ thị hàm số (C') $y=\dfrac{U(x)}{|x-a|}$ hoặc $y=\dfrac{|U(x)|}{x-a}$ như sau

Ta có:

$$y=\frac{U(x)}{|x-a|}=\begin{cases}\dfrac{U(x)}{x-a} & \text{nếu } x>a \quad (C_1') \\ -\dfrac{U(x)}{x-a} & \text{nếu } x<a \quad (C_2')\end{cases}$$

Suy ra: Đồ thị (C') gồm **2** phần:

- (C_1') là phần đồ thị của (C) ứng với $x>a$
- (C_2') là phần đồ thị lấy đối xứng phần $x<a$ của đồ thị (C) qua trục **Ox**.

Hàm số $y=\dfrac{|U(x)|}{x-a}$ tương tự.

Ví dụ 4. a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.

b) Với giá trị nào của m thì đường thẳng $y=m-x$ cắt đồ thị hàm số đã cho tại hai điểm phân biệt.

c) Gọi A,B là hai giao điểm đó. Tìm tập hợp trung điểm M của đoạn thẳng AB khi m biến thiên.

Giải

a) Ta có $y=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}=2x+1+\dfrac{2}{x-1}$

- Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

- Giới hạn và tiệm cận

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = -\infty; \lim\limits_{x\to+\infty} y = +\infty \Rightarrow$ hàm số không có tiệm cận ngang.

$\lim\limits_{x\to-1^+} y = +\infty; \lim\limits_{x\to-1^-} y = -\infty$ nên $x = -1$ là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-(2x+1)\right] = 0$ nên $y = 2x+1$ là đường tiệm cận xiên.

- Đạo hàm $y' = \dfrac{2x^2-4x}{(x-1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.
- Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		-1		2		$+\infty$
y'		+	0	-	||	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên $(0;-1)$ và $(-1;2)$.

- Đồ thị: Đồ thị nhận giao điểm $I(-1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng .
- Học sinh tự vẽ đồ thị

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d là

$\dfrac{2x^2-x+1}{x-1} = m - x$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình $3x^2-(m+2)x+1=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+2)^2-12(m+1)>0 \\ 3.1^2+(-m-2).1+m+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<4-2\sqrt{6} \\ m>4+2\sqrt{6} \end{array}\right..$$

c) Theo định lý Vi-et , tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{m+2}{6} \\ y_I = m - x_I = \dfrac{5m-2}{6} \end{cases}$$

Khử m giữa các biểu thức x_I và y_I ta được phương trình quỹ tích trung điểm I của AB là

$y = 5x-2$ loại trừ các điểm (x,y) với $1-\dfrac{\sqrt{6}}{3} \leq x \leq 1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.

(Vì $4-2\sqrt{6}<m<4+2\sqrt{6}$ đường thẳng $y=m-x$ không cắt đồ thị hàm số).

2. Bài tập rèn luyện

BT1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2-bx}{x-1}$

a) Tìm a,b biết rằng đồ thị (C) của hàm số đã cho đi qua điểm $A\left(-1;\dfrac{5}{2}\right)$ và tiếp tuyến của (C) tại điểm $O(0;0)$ có hệ số góc bằng -3.

b) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số với các giá trị của a,b đã tìm được.

Hướng dẫn

a) Ta có $\begin{cases}\dfrac{5}{2}=\dfrac{a(-1)^2-b(-1)}{-1-1}\\ y'(0)=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=-5\\ b=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-2\\ b=-3\end{cases}.$

b) Học sinh tự làm.

BT 2. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}=x+\dfrac{1}{x-1}(C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm trên (C) hai điểm A,B thuộc hai nhánh khác nhau, sao cho AB ngắn nhất

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Gọi A thuộc nhánh trái $x_A<1\Rightarrow$ với số $\alpha>0$,

Đặt $x_A=1-\alpha<1\Leftrightarrow y_A=x_A+\dfrac{1}{x_A-1}=1-\alpha+\dfrac{1}{1-\alpha-1}=1-\alpha-\dfrac{1}{\alpha}\quad(1)$

Tương tự B thuộc nhánh phải $x_B>1\Rightarrow$ với số $\beta>0$,

Đặt : $x_B=1+\beta\Rightarrow y_B=x_B+\dfrac{1}{x_B-1}=1+\beta+\dfrac{1}{1+\beta-1}=1+\beta+\dfrac{1}{\beta}\quad(2)$

$$AB^2=(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2$$
$$=\left[(1+\beta)-(1-\alpha)\right]^2+\left[\left(1+\beta+\frac{1}{\beta}\right)-\left(1-\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)\right]^2$$
$$g(\alpha;\beta)=(\alpha+\beta)^2+\left(\alpha+\beta+\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)^2=(\alpha+\beta)^2+(\alpha+\beta)^2\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)^2$$
$$=\left(\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\right)\left(1+1+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right)$$

$$g(\alpha;\beta) \ge (2\alpha\beta + 2\alpha\beta)\left(1+1+\frac{2}{\alpha\beta}+\frac{1}{\alpha^2\beta^2}\right) = 8\alpha\beta + \frac{4}{\alpha\beta} + 8 \ge 8 + 2\sqrt{4.8} = 8 + 8\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow AB \ge \sqrt{8+8\sqrt{2}}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi : $\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta \\ 8\alpha\beta = \dfrac{4}{\alpha\beta} \end{cases}; \begin{cases} \alpha = \beta \\ (\alpha\beta)^2 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = \pm\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}$

Do đó ta tìm được hai điểm :

$$A\left(1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}-\sqrt[4]{2}\right); B\left(1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}+\sqrt[4]{2}\right).$$

BT 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2-2}{x-2} = x + 2 + \dfrac{2}{x-2} \quad (C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm những điểm M trên (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất .

Hướng dẫn

a) Học sinh tự vẽ đồ thị (C).

b) **Định hướng:** Nếu $M(x,y) \in (C)$ thì tổng khoảng cách từ M đến hai trục là $d \Rightarrow d = |x| + |y|$

- Xét các khoảng cách từ M đến hai trục khi M nằm ở các vị trí đặc biệt: Trên trục hoành, trên trục tung.
- Sau đó xét tổng quát, những điểm M có hoành độ, hoặc tung độ lớn hơn hoành độ hoặc tung độ của M khi nằm trên hai trục, để suy ra cách tìm GTLN-GTNN của d .

Hướng dẫn

- Xét những điểm M nằm trên trục Ox , cho $y = 0$

  $\Leftrightarrow x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{2} \vee x = \sqrt{2} \Leftrightarrow M_1\left(-\sqrt{2};0\right); M_2\left(\sqrt{2};0\right)$

  $\Rightarrow$ Khoảng cách từ M đến hai trục là $d \Rightarrow d = \left|-\sqrt{2}\right| + |0| = \sqrt{2}$

- Xét những điểm M nằm trên trục Oy cho $x = 0, y = 1$, suy ra tồn tại 1 điểm $M(0;1)$.

  $\Rightarrow$ Khoảng cách từ M đến hai trục là $d = 0 + 1 = 1 < \sqrt{2}$.
- Xét những điểm M có hoành độ : $|x| > \sqrt{2} \Rightarrow d = |x| + |y| > \sqrt{2}$.
- Xét những điểm M có hoành độ thỏa mãn : $|x| < \sqrt{2}$.

▪ Trường hợp : $-\sqrt{2} < x < 0; y > 0$

$$\Rightarrow d = |x| + |y| = -x + x + 2 + \frac{2}{x-2} = 2 + \frac{2}{x-2}. \Rightarrow y' = -\frac{2}{(x-2)^2} < 0.$$

Chứng tỏ hàm số nghịc biến . Do vậy $\min d = y(0) = 1$. Có một điểm $M(0;1)$

- Trường hợp: $0 < x < \sqrt{2}; y > 0 \Rightarrow d = x + x + 2 + \dfrac{2}{x-2} = 2x + 2 + \dfrac{2}{x-2}$;

  $y' = 2 - \dfrac{2}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = 3.$

- Bằng cách lập bảng biến thiên, ta suy ra $\min d = y(0) = 1$. Có một điểm $M(0;1)$.

  Vậy trên (C) có đúng một điểm $M(0;1)$ có tổng khoảng cách từ nó đến hai tiệm cân là nhỏ nhất.

BT 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 5x + 15}{x+3} = x + 2 + \dfrac{9}{x+3} \quad (C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm trên (C) những điểm M sao cho khoảng cách từ M đến trục Ox bằng hai lần khoảng cách từ M đến trục Oy.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Theo giả thiết:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x \\ y = -2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x^2+5x+15}{x+3} = 2x \\ \dfrac{x^2+5x+15}{x+3} = -2x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 15 = 0 \\ 3x^2 + 11x + 15 = 0 \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-1-\sqrt{61}}{2} \vee x = \dfrac{-1+\sqrt{61}}{2} \\ \text{vơ nghiệm} \end{array}\right.$$

Như vậy trên (C) có hai điểm M với hoành độ của chúng là :

$$x = \frac{-1-\sqrt{61}}{2} \vee x = \frac{-1+\sqrt{61}}{2}.$$

BT 5. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + 2x - 2}{x-1} = x + 3 + \dfrac{1}{x-1} \quad (C)$

a. Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b. Tìm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến I là nhỏ nhất (với I là giao hai tiệm cận).

Định hướng

- Tìm tọa độ giao điểm của hai tiệm cận $I(a,b)$
- Tính khoảng cách IM bằng cách :
  $\overrightarrow{IM} = (x-a; y-b) \Rightarrow IM^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 = g(x;a,b)$
- Sử dụng phương pháp tìm GTLN-GTNN của hàm số ta có kết quả.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Tọa độ của I là giao hai tiệm cận là $I(1;4)$

Gọi $M(x;y)$ thuộc (C), ta có:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IM}=(x-1;y-4)$$

$$\Rightarrow IM^2=g(x)=(x-1)^2+\left(x+3+\frac{1}{x-1}-4\right)^2$$

$$=(x-1)^2+\left(x-1+\frac{1}{x-1}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow g(x)=(x-1)^2+(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2$$

$$=2(x-1)^2+\frac{1}{(x-1)^2}+2\geq 2+2\sqrt{2}$$

$\Rightarrow \min IM=2+2\sqrt{2}$. Đạt được khi :

$$\Leftrightarrow 2(x-1)^2=\frac{1}{(x-1)^2}\Leftrightarrow (x-1)^4=\frac{1}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right..$$

Như vậy trên (C) tìm được hai điểm M có hoành độ: $x=1-\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ và $x=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

BT 6. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x+5}{x+2}=x+2+\dfrac{1}{x+2}$ (C)

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm điểm M trên (C) sao cho khoảng cách từ M đến $d: y+3x+6=0$ là nhỏ nhất.

Định hướng

- Gọi M thuộc (C) $\Rightarrow M(x_0;y_0=f(x_0))$
- Tính khoảng cách từ M đến d : $g(x_0)=h(I;d)=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$
- Khảo sát hàm số $y=g(x_0)$, để tìm ra min.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Gọi M là điểm bất kỳ thuộc (C), thì $M\left(x;x+2+\dfrac{1}{x+2}\right)$

Khoảng cách từ M đến d là

$$\Leftrightarrow h(M;d)=g(x)=\frac{|3x+y+6|}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|3x+6+x+2+\frac{1}{x+2}\right|$$
$$=\frac{1}{\sqrt{10}}\left|4(x+2)+\frac{1}{x+2}\right|$$

- Khi $x>-2\Rightarrow x+2>0$

$$\Rightarrow 4(x+2)+\frac{1}{x+2}\ge 4\Leftrightarrow 4(x+2)=\frac{1}{x+2};$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2=\frac{1}{4}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{5}{2}<-2 \\ x=-\frac{3}{2}>-2 \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \min h(M,d)=\frac{4}{\sqrt{10}}, \text{ khi } x=-\frac{3}{2}.$$

- Khi $x<-2\Rightarrow x+2<0$

$$\Rightarrow -4(x+2)-\frac{1}{(x+2)}\ge 4\Leftrightarrow -4(x+2)=-\frac{1}{x+2};$$
$$\Leftrightarrow (x+2)^2=1\Rightarrow x=-\frac{5}{2}$$
$$\Rightarrow \min h(M,d)=\frac{4}{\sqrt{10}}, \text{ khi } x=-3.$$

Tóm lại: $\min h(M,d)=\frac{4}{\sqrt{10}}$ khi $x=-1$ hoặc $x=-3.$

Vậy có hai điểm M là $M_1(-1;2)$ và $M_2(-3;-2)$.

BT 7. Cho hàm số $y=-x+3+\frac{3}{x-1}\quad (C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Chứng minh với mọi m đường thẳng $d: y=2x+m$ luôn cắt (C) tại hai điểm A,B có hoành độ x_1,x_2. Tìm m để $(x_2-x_1)^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

c) Tìm m để AB đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Gọi hoành độ của A,B là x_1,x_2 là hai nghiệm của phương trình :

$\Leftrightarrow -x+3+\dfrac{3}{x-1}=2x+m$

$\Leftrightarrow -3x+3-m+\dfrac{3}{x-1}=0$

$\Rightarrow g(x;m)=3x^2+(m-6)x-m-3=0 \quad (1)$

Điều kiện để có A,B là:

$\begin{cases}\Delta=(m-6)^2+12(m+3)>0\\ g(1;m)=-6\neq 0\end{cases} \Rightarrow m^2+72>0, \forall m\in\mathbb{R}$

Khi đó $(x_2-x_1)^2=\dfrac{\Delta}{9}=\dfrac{1}{9}\sqrt{m^2+72}\geq\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow m=0$.

c) Khoảng cách

$AB^2=(x_2-x_1)^2+\left[(2x_2+m)-(2x_2+m)\right]^2=5.(x_2-x_1)^2$

$\Rightarrow AB=|x_2-x_1|\sqrt{5}=\dfrac{\sqrt{m^2+72}}{3}.\sqrt{5}\geq 2\sqrt{10}$

AB nhỏ nhất $\Leftrightarrow m=0$.

BT 8. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+m}{x-1}$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m=2$.

b) Biện luận theo tham số a số nghiệm của phương trình: $\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}+\log_{\frac{1}{2}}a=0$.

c) Với giá trị nào của m thì hàm đã cho đồng biến trên $(3;+\infty)$.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Ta có $\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}+\log_{\frac{1}{2}}a=0\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}=-\log_{\frac{1}{2}}a=\log_2 a$ (*).

Đặt $m=\log_2 a$ thì $(*)\Leftrightarrow\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}=m$.

Dựa vào đồ thị (C) ta có:

- $1-2\sqrt{2}<m<1+2\sqrt{2}\Leftrightarrow 2^{1-2\sqrt{2}}<a<2^{1+2\sqrt{2}}$: (*) vô nghiệm
- $\left[\begin{array}{l} m=1-2\sqrt{2}\rightarrow a=2^{1-2\sqrt{2}} : \text{(*) có 1 nghiệm}\\ m=1+2\sqrt{2}\rightarrow a=2^{1+2\sqrt{2}} : \text{(*) có 1 nghiệm}\end{array}\right.$

- $\left[\begin{array}{l} m<1-2\sqrt{2}\to a<2^{1-2\sqrt{2}} \text{ : (*) có hai nghiệm} \\ m>1+2\sqrt{2}\to a>2^{1+2\sqrt{2}} \text{ : (*) có hai nghiệm} \end{array}\right.$

c) Hàm số đồng biến trên $\left(3;+\infty\right)\Leftrightarrow 2x^2-4x+3\ge m,\forall x>3$

Khảo sát hàm số $g\left(x\right)=2x^2-4x+3,\ x\in\left(3;+\infty\right)$

Ta tìm được $m\le 9$.

BT 9. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+4}{x-2}=x+\dfrac{4}{x-2}\quad\left(C\right)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị $\left(C\right)$.

b) Tìm m để đường thẳng $y=mx+2-2m$ cắt $\left(C\right)$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=2$.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự vẽ đồ thị $\left(C\right)$

b) Phương trình hoành độ điểm chung của $\left(C\right)$ và d là

$$\Leftrightarrow\frac{x^2-2x+4}{x-2}=mx+2-2m$$
$$\Leftrightarrow g(x;m)=\left(m-1\right)x^2+4\left(1-m\right)x+4m-8=0\left(1\right)$$

Để tồn tại A,B thì:

$$\Leftrightarrow\begin{cases} m-1\ne 0 \\ \Delta'=4\left(1-m\right)^2-\left(m-1\right)\left(4m-8\right)>0 \\ g(2;m)=-4\ne 0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} m\ne 1 \\ 4m-4>0 \end{cases}\Leftrightarrow m>1\left(*\right)$$

Khi đó

$$\Leftrightarrow AB=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+m^2\left(x_2-x_1\right)^2}$$
$$=\left|x_2-x_1\right|\sqrt{m^2+1}=\frac{2\sqrt{\Delta'}}{\left|m-1\right|}\sqrt{m^2+1}=\frac{2\sqrt{4m-4}}{\left|m-1\right|}\sqrt{m^2+1}$$

$$\Leftrightarrow AB=\frac{4\sqrt{\left(m-1\right)\left(m^2+1\right)}}{\left|m-1\right|}=2\Leftrightarrow 4\left(m-1\right)\left(m^2+1\right)=\left(m-1\right)^2$$
$$\Rightarrow\left(m-1\right)\left[4m^2+4-\left(m-1\right)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m-1=0 \\ 4m^2-m+5=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow m=1\ \text{(Không thỏa (*))}.$$

Vậy không tồn tại m .

BT 10. Cho hàm số $y=\frac{mx^2+(m+3)x+1}{x-2}=mx+3(m+1)+\frac{7+6m}{x-2}\quad (C_m)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m=1$.

b) Tìm m để đồ thị (1) cắt trục Ox tại hai điểm M,N sao cho MN ngắn nhất .

Hướng dẫn

a) Học sinh tự vẽ đồ thị (C)

b) Nếu (1) cắt trục Ox tại hai điểm M,N thì:

$\Leftrightarrow g(x;m)=mx^2+(m+3)x+1=0\quad (2)$ có hai nghiệm phân biệt khác 2 .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ \Delta=(m+3)^2-4m>0 \\ g(2;m)=6m+7\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 0 \\ m^2+2m+9>0 \\ m\neq -\frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow m\neq 0 \text{ và } m\neq -\frac{7}{6} (*)$$

Khi đó:

$$\Leftrightarrow MN=|x_2-x_1|=\frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}=\frac{\sqrt{(m+1)^2+8}}{|m|}.$$

$$\Rightarrow MN^2=\frac{m^2+2m+9}{m^2}=1+\frac{2}{m}+\frac{9}{m^2}$$

Đặt $t=\frac{1}{m}\Rightarrow g(t)=1+2t+9t^2$

$$\Leftrightarrow g'(t)=2(1+9t)=0\Rightarrow t=-\frac{1}{9};\ g(-\frac{1}{9})=\frac{8}{9}$$

$\Rightarrow \min MN=\sqrt{\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow t=-\frac{1}{9}\Rightarrow \frac{1}{m}=-\frac{1}{9}\Rightarrow m=-9$. Thỏa mãn (*)

BT 11. Cho hàm số $y=\frac{-x^2+3x-3}{2(x-1)}\quad (C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm m để đường thẳng $d:y=m$ cắt (C) tại A,B sao cho $AB=1$.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Nếu d cắt (C) tại A,B thì hoành độ của A,B là hai nghiệm của phương trình:

$-x^2+3x-3-2m(x-1)=0$

$\Leftrightarrow g(x;m)=x^2+(2m-3)x+3-2m=0 \quad (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta=(2m-3)^2-4(3-2m)>0 \\ g(1;m)=1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2-4m-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<-\dfrac{1}{2} \\ m>\dfrac{3}{2} \end{array}\right. (*)$$

Khi đó $A(x_1;m)$, $B(x_2;m) \Rightarrow AB=|x_2-x_1|=\sqrt{\Delta}$

$\Leftrightarrow AB=\sqrt{4m^2-4m-3}=1$

$\Leftrightarrow 4m^2-4m-4=0 \Rightarrow m^2-m-1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ m=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$ thỏa mãn (*) .

BT 12. Cho hàm số $y=x+1+\dfrac{1}{x-1} \quad (C)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C).

b) Tìm trên (C) điểm M (có hoành độ $x>1$) sao cho tiếp tuyến tại M tạo với hai tiệm cận một tam giác có:

- Chu vi nhỏ nhất.
- Một tam giác có diện tích không đổi.

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) Gọi $M(x_0;y_0)\in(C) \Rightarrow y_0=x_0+1+\dfrac{1}{x_0-1}$.

Tiếp tuyến tại M có phương trình là:

$y=\left[1-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}\right](x-x_0)+x_0+1+\dfrac{1}{x_0-1} \quad (*)$ và I là giao hai tiệm cận .

Tọa độ của $I(1;2)$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng $x=1$ tại điểm B

$\Rightarrow y_B=2\left(1+\dfrac{1}{x_0-1}\right) \Leftrightarrow B\left(1;2+\dfrac{2}{x_0-1}\right)$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận xiên $y=x+1$ tại điểm A.

$$\Leftrightarrow \left[1-\frac{1}{\left(x_0-1\right)^2}\right]\left(x_A-x_0\right)+x_0+1+\frac{1}{x_0-1}=x_A+1$$

$$\Leftrightarrow x_A=2x_0-1 \Rightarrow A\left(2x_0-1;2x_0\right)$$

- Diện tích tam giác AIB là S $\Rightarrow S=\frac{1}{2}IA.IB.\sin 45^0=\frac{1}{4}\sqrt{2}IA.IB \quad (1)$

  Ta có : $\overrightarrow{IA}=\left(2x_0-2;2x_0-2\right) \Rightarrow IA^2=8\left(x_0-1\right)^2 \Leftrightarrow IA=\left|x_0-1\right|2\sqrt{2}$

  Tương tự:

  $$\overrightarrow{IB}=\left(0;\frac{2}{x_0-1}\right) \Rightarrow IB=\frac{2}{\left|x_0-1\right|} \Leftrightarrow IA.IB=\left|x_0-1\right|2\sqrt{2}.\frac{2}{\left|x_0-1\right|}=4\sqrt{2}$$

  $\Rightarrow S=\frac{1}{4}\sqrt{2}.4\sqrt{2}=2 \quad \left(đvdt\right)$. Không phụ thuộc vào vị trí của điểm M .

- Gọi chu vi tam giác IAB là $P=IA+IB+AB$.
  Nhưng

  $$AB^2=IA^2+IB^2-2IA.IB.\cos 45^0 \ge 2IA.IB-2IA.IB.\frac{\sqrt{2}}{2}$$
  $$=IA.IB\left(2-\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}\left(2-\sqrt{2}\right)=4\left(2\sqrt{2}-2\right)=8\left(\sqrt{2}-1\right)$$

  (Dấu đẳng thức xảy ra khi $IA=IB$)

  Mặt khác : $IA+IB \ge 2\sqrt{IA.IB}=2\sqrt{4\sqrt{2}}=4\sqrt[4]{2}$.

  Dấu đẳng thức xảy ra khi : $IA=IB$

  Do đó :

  $$P \ge 4\sqrt[4]{2}+\sqrt{8\left(\sqrt{2}-1\right)}=4\sqrt[4]{2}+2\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}}$$
  $$\Rightarrow \min P=4\sqrt[4]{2}+2\sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}}$$

  Xảy ra khi :

  $$\left|x_0-1\right|\sqrt{2}=\frac{2}{\left|x_0-1\right|} \Leftrightarrow \left(x_0-1\right)^2=\sqrt{2}$$
  $$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=1-\sqrt[4]{2} \to y_0=2-\sqrt[4]{2}-\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \\ x_0=1+\sqrt[4]{2} \to y_0=2+\sqrt[4]{2}+\frac{1}{\sqrt[4]{2}} \end{array}\right.$$

  Như vậy có hai điểm M :

$M_1\left(1-\sqrt[4]{2};y_0=2-\sqrt[4]{2}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$; $M_2\left(1+\sqrt[4]{2};y_0=2+\sqrt[4]{2}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

BT 13. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+2mx+2}{x+1}=x+2m-1+\dfrac{3-2m}{x+1}\quad (C_m)$

a) Khảo sát và vẽ đồ thị (C) với $m=1$.

b) Tìm các giá trị của m để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách từ hai điểm đó tới đường thẳng $d: x+y+2=0$ bằng nhau .

Hướng dẫn

a) Học sinh tự làm.

b) TXĐ: D=R\ $\{-1\}$.

Đạo hàm: $y'=\dfrac{x^2+2x+2m-2}{(x+1)^2}$

Hàm số có cực đại, cực tiểu, thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt khác -1.

$\Leftrightarrow g(x;m)=x^2+2x+2m-2=0\quad (1)$ (có hai nghiệm $x_1,x_2\neq -1$)

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'=3-2m>0\\ g(-1;m)=2m-3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m<\frac{3}{2}\quad (*)$$

Gọi $A(x_1;y_1);B(x_2;y_2)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với $x_1,x_2\neq -1$ là hai nghiệm của phương trình (1) .

Theo định lý Vi-ét : $x_1+x_2=-2;x_1.x_2=2m-2$.

Mặt khác đường thẳng đi qua hai điểm cực trị có phương trình là $y=2x+m$, cho nên $y_1=2x_1+m;y_2=2x_2+m\Rightarrow A(x_1;2x_1+m);B(x_2;2x_2+m)$

Theo giả thiết:

$$\frac{|x_1+y_1+2|}{\sqrt{2}}=\frac{|x_2+y_2+2|}{\sqrt{2}}\Rightarrow |x_1+y_1+2|=|x_2+y_2+2|$$

$$\Leftrightarrow |3x_1+2m+2|=|3x_2+2m+2|$$

$$\Leftrightarrow (3x_1+2m+2)^2-(3x_2+2m+2)^2=0\Leftrightarrow (x_1-x_2)\left[3(x_1+x_2+4m+4)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1+x_2+4m+4)=0,(x_1\neq x_2)\Leftrightarrow 3(-2+4m+4)=0\Rightarrow m=-\frac{1}{2}.$$

Thỏa mãn (*). Vậy giá trị m cần tìm là: $m=-\dfrac{1}{2}$.

Dạng 4: Toán Thực Tế

Ví dụ 1: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa $1 \le x \le 18$. Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa được cho bởi hàm chi phí $C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$ (nghìn đồng). Giả sự hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $B(x)$ là số tiền bán được và $L(x)$ là lợi nhuận thu được.

a) Hãy viết biểu thức tính $B(x)$ và $L(x)$ theo x.

b) Lập bảng biến thiên của hàm số $y = L(x)$ trên $[1;18]$.

c) Hộ làm nghề dệt này cần sản xuất và bán ra mỗi ngày bao nhiêu mét vải lụa để thu được lợi nhuận tối đa. Tính lợi nhuận tối đa đó.

Lời giải

a)

Số tiền bán được là: $B(x) = 220x$ (nghìn đồng)

Lợi nhuận thu được là: $L(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500 - 220x = x^3 - 3x^2 - 240x + 500$ (nghìn đồng)

b)

Xét $L(x) = x^3 - 3x^2 - 240x + 500$ trên $[1;18]$

$$L'(x) = 3x^2 - 6x - 240 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -8 \\ x = 10 \end{array}\right.$$

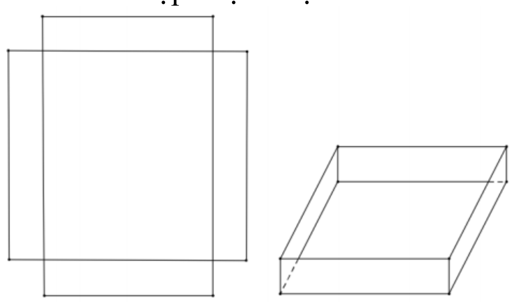
Bảng biến thiên:

x	1		10		18
$L'(x)$		+	0	−	
$L(x)$	−258	↗	1200	↘	−1040

c)

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy để lợi nhuận đạt tối đa thì hộ này cần dệt 10 m vải lụa mỗi ngày. Lúc đó lợi nhuận tối đa thu được là 1200 (nghìn đồng)

Ví dụ 3: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x(cm)$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ bên để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải

- Cạnh đáy của hộp là: $12 - 2x(cm)$
- Chiều cao của hộp là: $x(cm)$

- Thể tích của hộp là: $V\left(x\right)=\left(12-2x\right)^{2}.x=4x^{3}-48x^{2}+144x$
- Xét $V\left(x\right)=4x^{3}-48x^{2}+144x$ với $0<x<6$

  $V'\left(x\right)=12x^{2}-96x+144=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=6\\x=2\end{array}\right.$

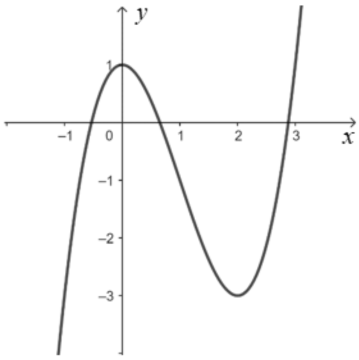
Bảng biến thiên

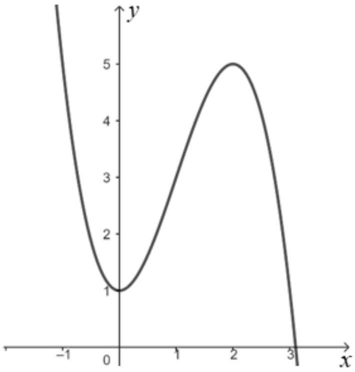
x	0		2		6
$V'\left(x\right)$		+	0	−	
$V\left(x\right)$	0	↗	128	↘	0

Từ bảng biến thiên ta thấy để thể tích hộp lớn nhất thì $x=2cm$

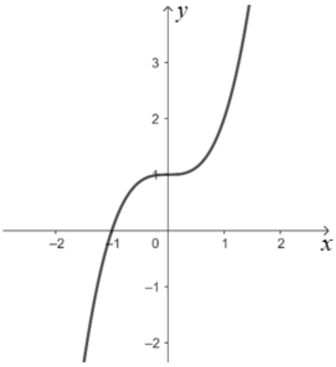
D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

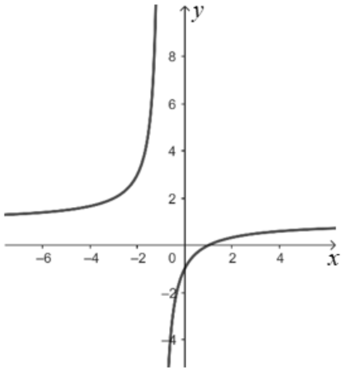
Câu 1: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

A. 

. **B.** 

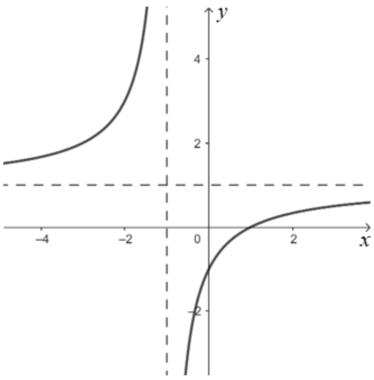
.

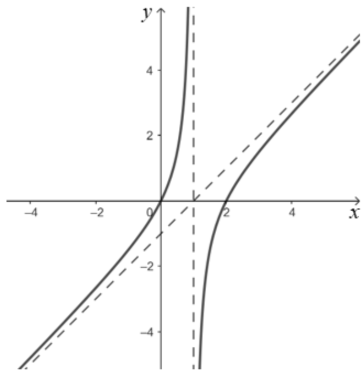
C. 

. **D.** 

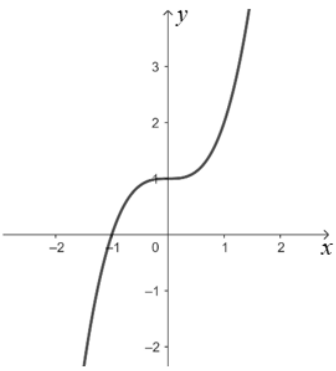
.

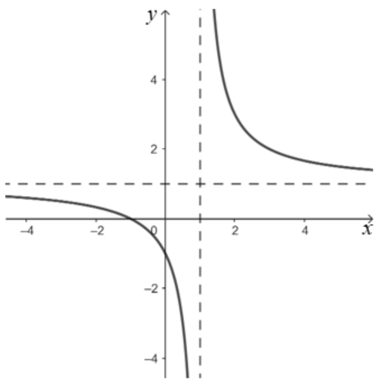
Câu 2: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

A. 

. **B.** 

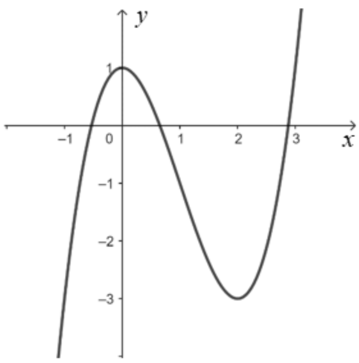
.

C. 

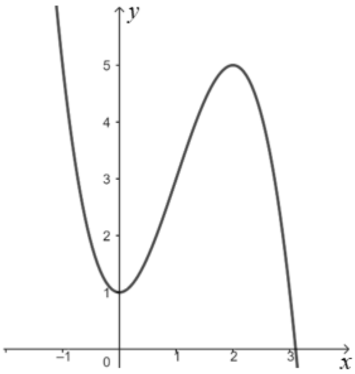
. **D.** 

.

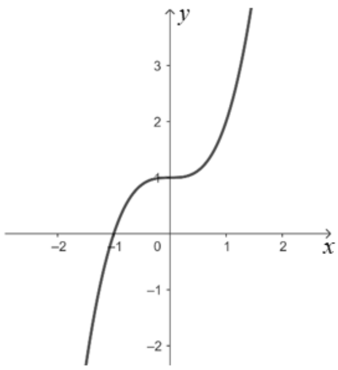
Câu 3: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x^3 + 1$

A. 

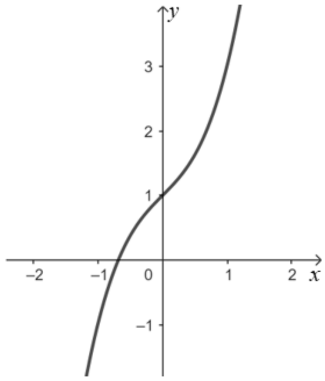
.

B. 

.

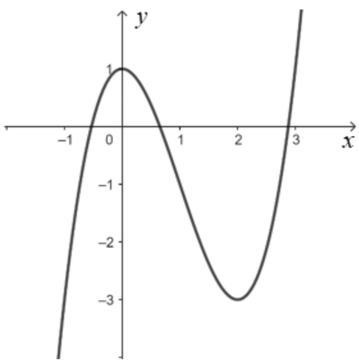
C. 

.

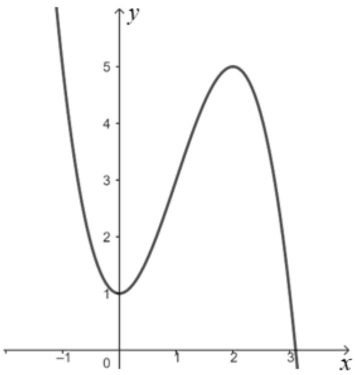
D. 

.

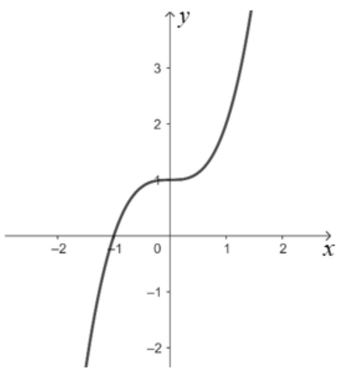
Câu 4: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x^3 + x + 1$

A. 

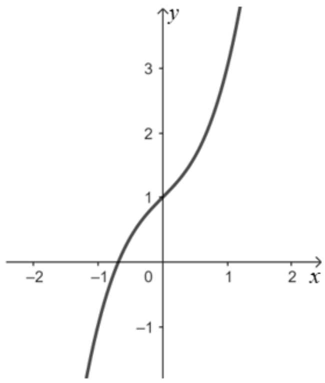
.

B. 

.

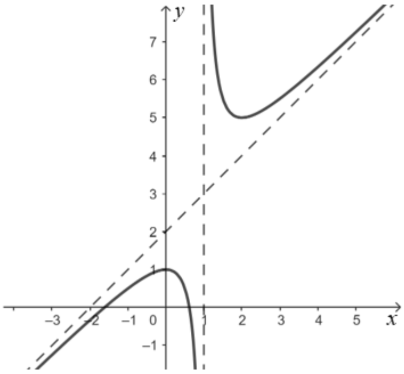
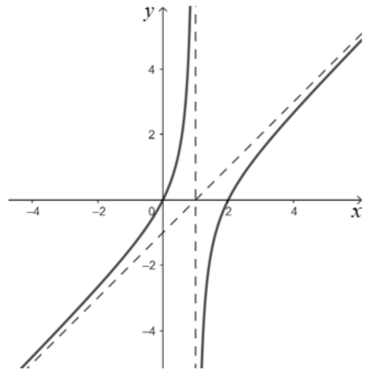
C. 

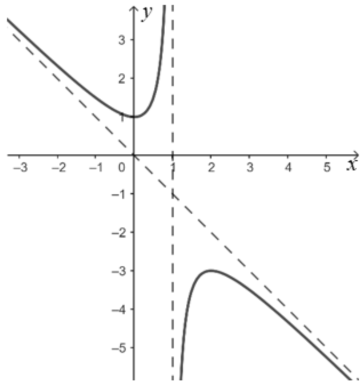
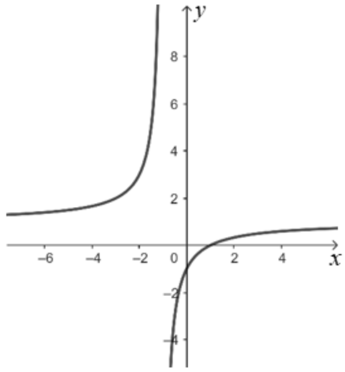
.

D. 

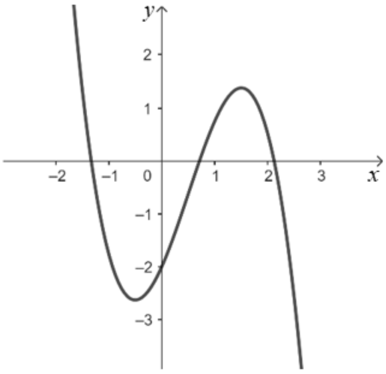
.

Câu 5: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

A.  . **B.**  .

C.  . **D.**  .

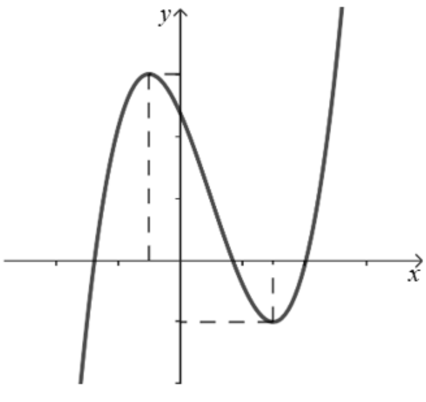
Câu 6: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$. **B.** $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$.

C. $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$. **D.** $a < 0; b > 0; c < 0; d < 0$.

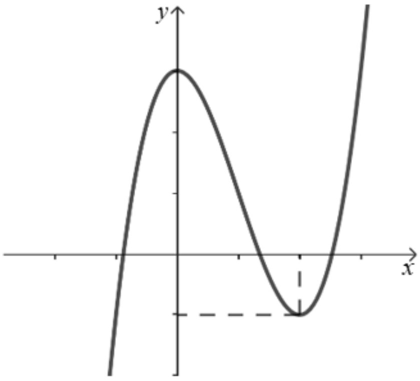
Câu 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c > 0; d < 0$.

C. $a > 0; b > 0; c < 0; d > 0$. **D.** $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$.

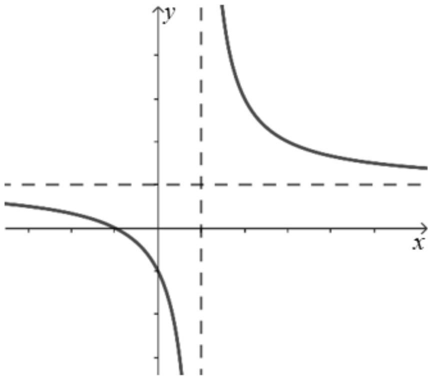
Câu 8: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c = 0; d > 0$.

C. $a > 0; b > 0; c = 0; d > 0$. **D.** $a > 0; b = 0; c < 0; d > 0$.

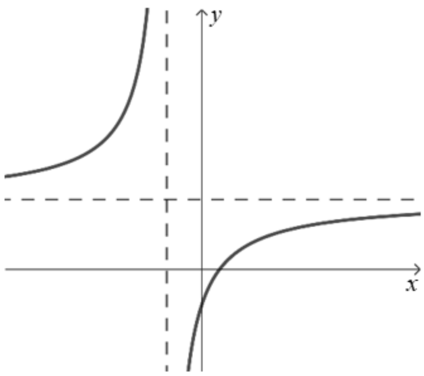
Câu 9: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $ac > 0; bd > 0$. **B.** $ab < 0; cd < 0$. **C.** $bc > 0; ad < 0$. **D.** $ad > 0; bd < 0$

.

Câu 10: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng a là số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?



A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

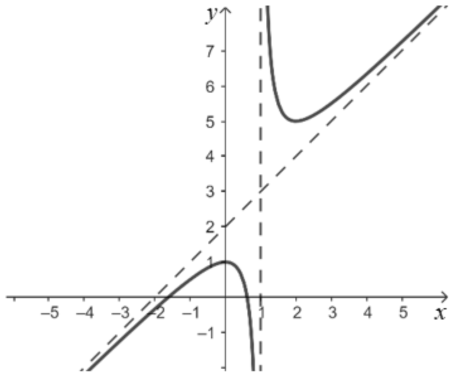
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2-ax}{bx-c}\left(a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 3$

Tổng $(a+b+c)^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

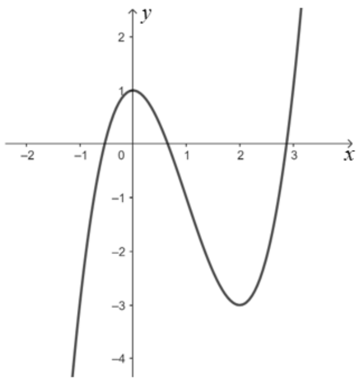
A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$. **D.** $\left(\dfrac{4}{9};1\right)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a>0,m\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b,c,m,n có tất cả bao nhiêu số dương?

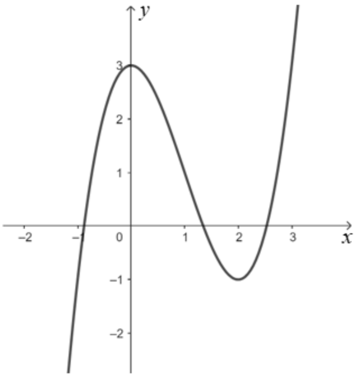


A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

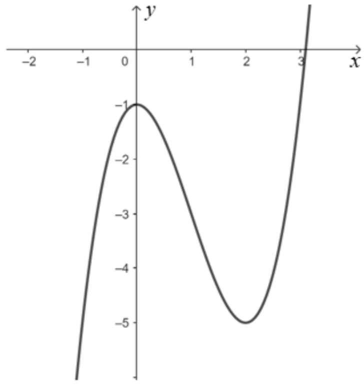
Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới



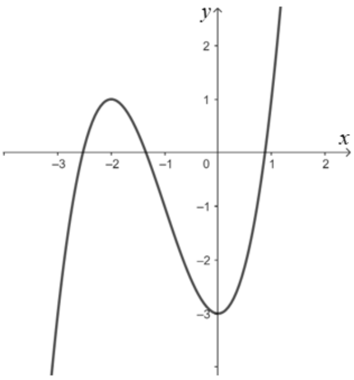
Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)+2$.

A. 

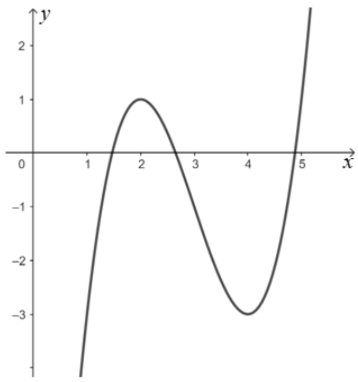
.

B. 

.

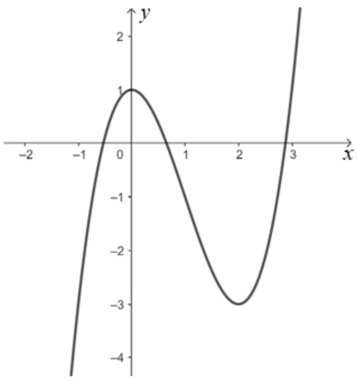
C. 

.

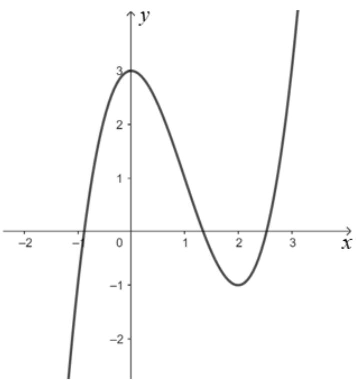
D. 

.

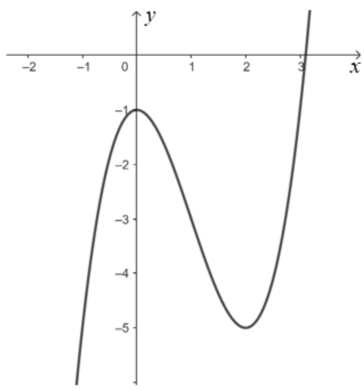
Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới.



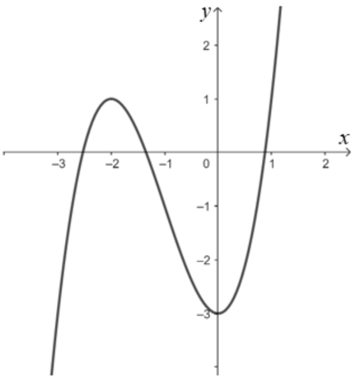
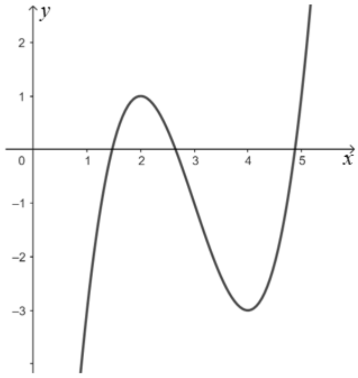
Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f\left(x+2\right)$.

A. 

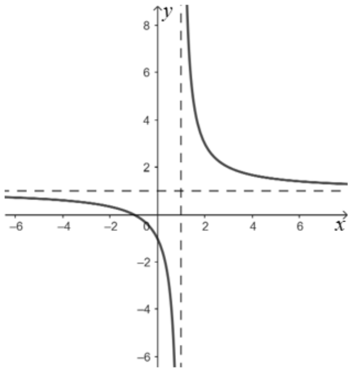
.

B. 

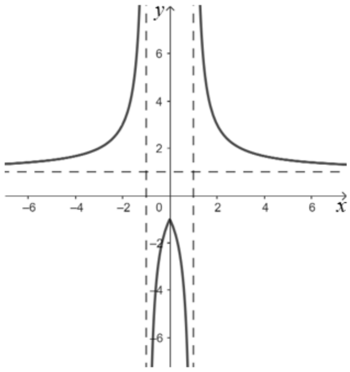
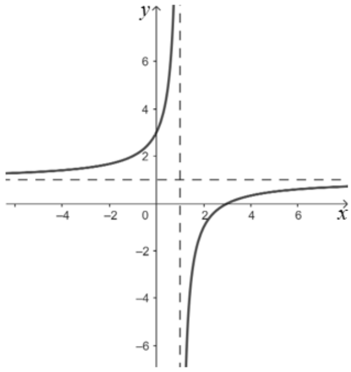
.

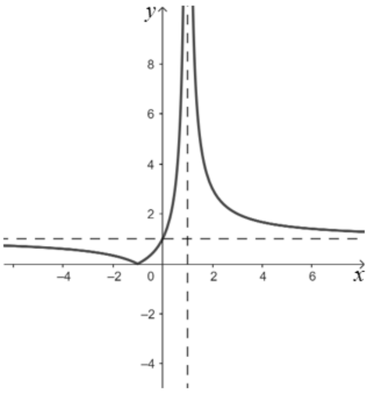
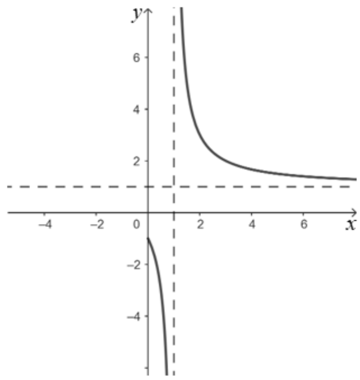
C.  . **D.**  .

Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị như hình bên dưới

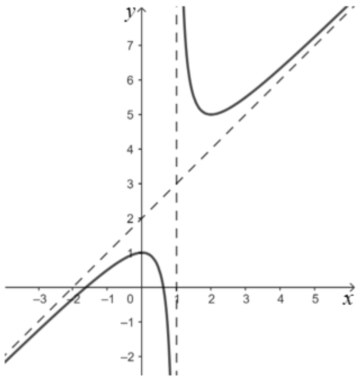


Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$.

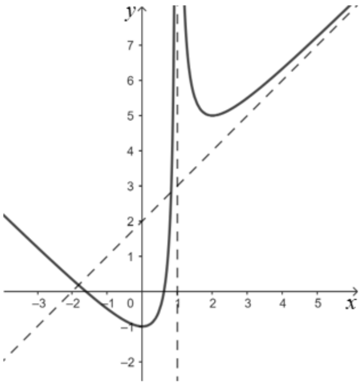
A.  . **B.**  .

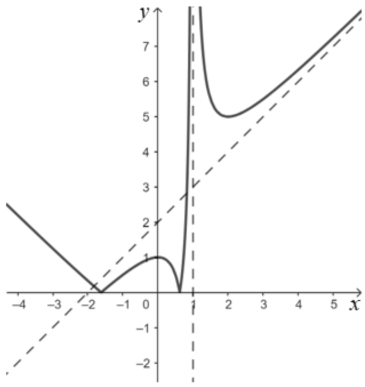
C.  . **D.**  .

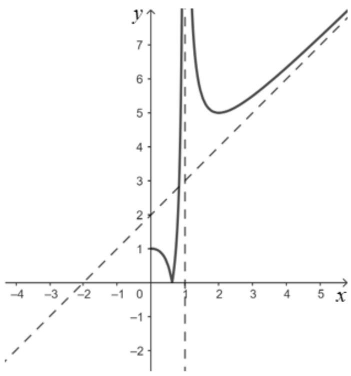
Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới.

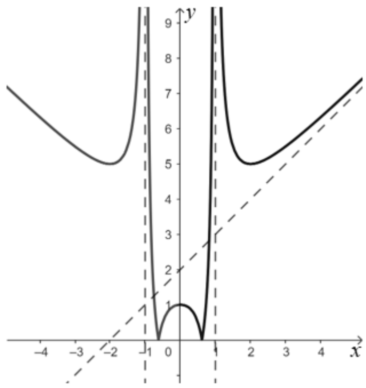


Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+x-1}{x-1}\right|$.

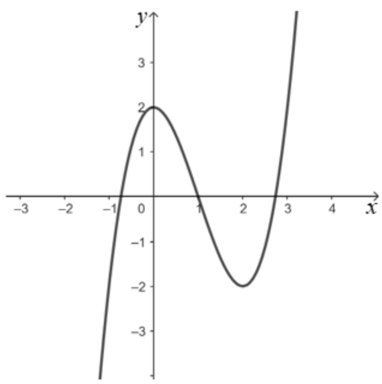
A.  .

B.  .

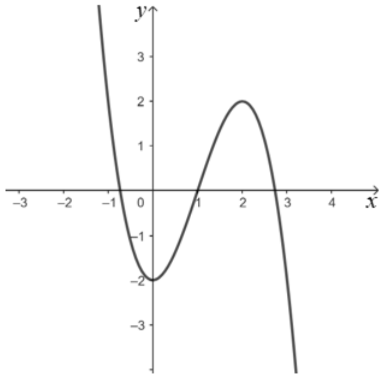
C.  .

D.  .

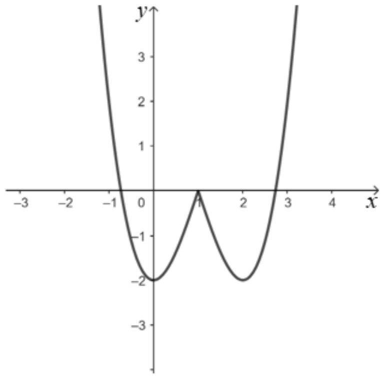
Câu 17: Cho hàm số $y=(x-1)\left(x^2-2x+2\right)$ có đồ thị như hình bên dưới



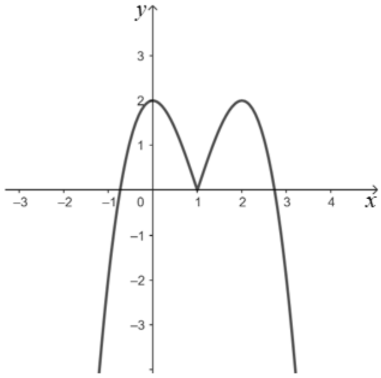
Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=|x-1|\left(x^2-2x+2\right)$.

A. 

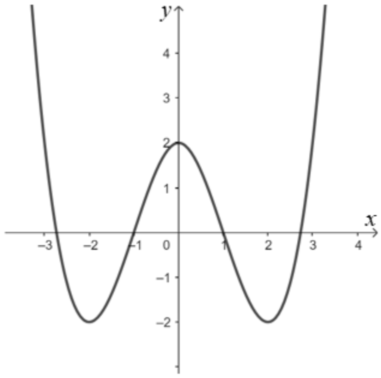
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x)-3=0$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 19: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x)-3=0$ là?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	-1	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↘	3	↗	$-\infty$

Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	1

Số nghiệm của phương trình $2f(x)-3=0$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$27/4$	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x)-3=0$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

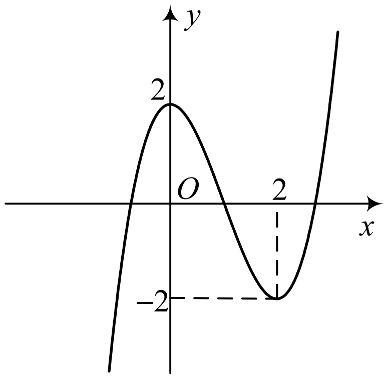
Câu 23: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-38	↗	$\frac{14}{3}$	↘	-2	↗	$+\infty$

Đồ thị của hàm số trên cắt trục hoành tại mấy điểm?

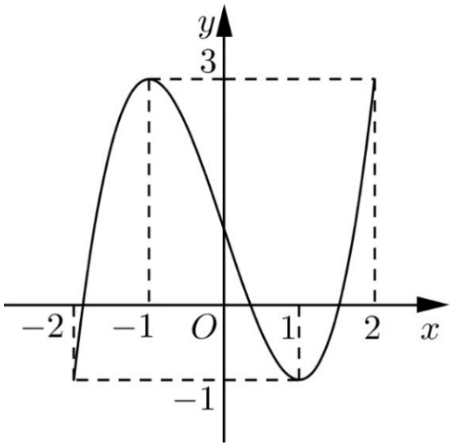
A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 24: Cho hàm số $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y=f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)+4=0$ là:



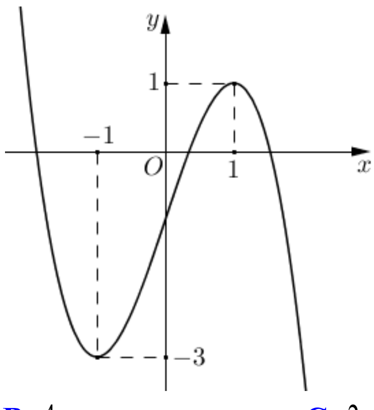
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 25: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)-4=0$ trên đoạn $[-2;2]$ là:



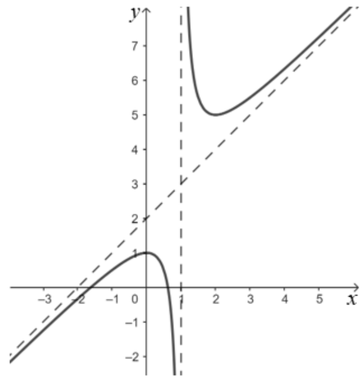
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 26: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)+4=0$ là:



A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 28: Đồ thị của hàm số $y=x^3-3x+2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 29: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^3+x^2$ và đồ thị hàm số $y=x^2+5x$:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{-x^2+mx-2}{x-1}$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

A. vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

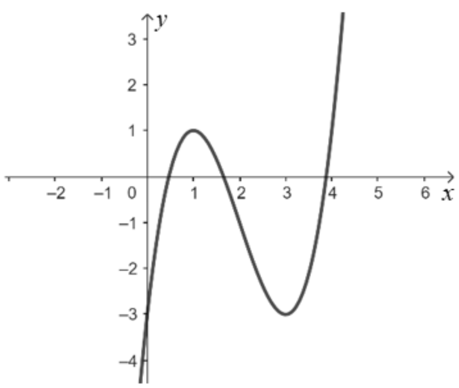
Câu 31: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-1

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $(-1;1]$. **B.** $(-\sqrt{2};-1)$. **C.** $(-\sqrt{2};-1]$. **D.** $(-1;1)$.

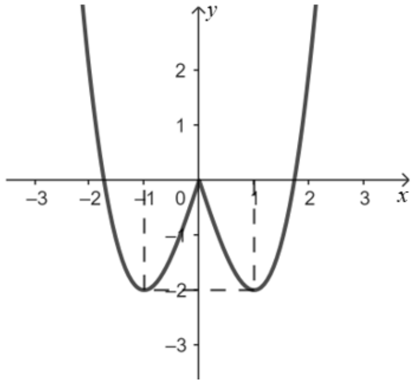
Câu 32: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục, xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như sau:



Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

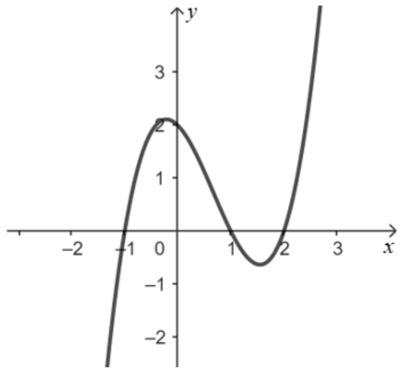
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 33: Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?



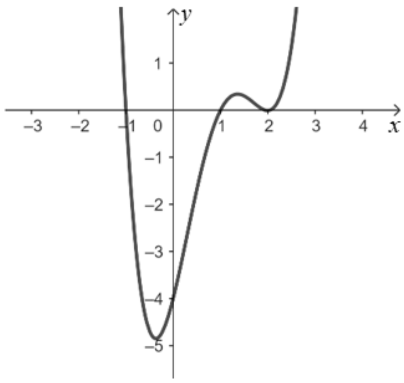
A. Hàm số y = f(x) nghịch biến trên khoảng (-1; 0).
B. Hàm số y = f(x) đồng biến trên khoảng (1; +∞).
C. Hàm số y = f(x) nghịch biến trên khoảng (-∞; 0).
D. Hàm số y = f(x) đồng biến trên khoảng (0; +∞).

Câu 34: Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$ và $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

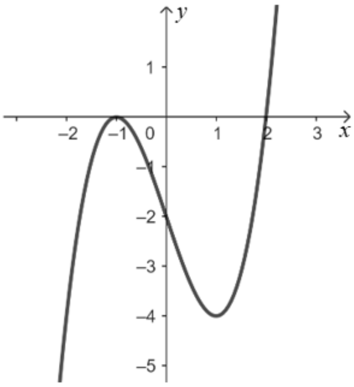
Câu 35: Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;2)$ và $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$.

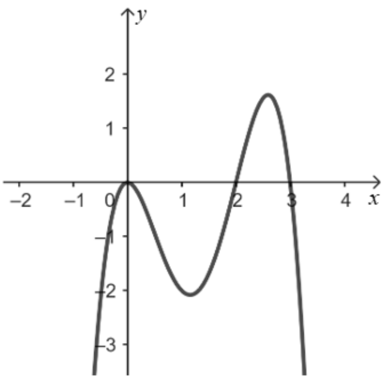
C. $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 36: Hàm số bậc ba $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $g(x)=f(x-1)$?



A. $(1;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$

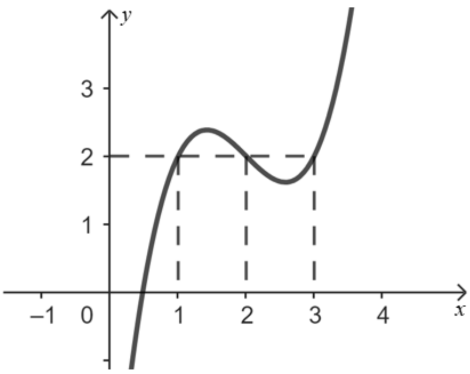
Câu 37: Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Hàm số $y=f(x^2-2x+3)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Câu 38: Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

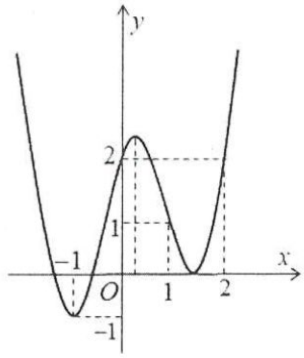


Hàm số $g(x)=2f(x)-4x+7$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;2)\cup(3;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$ và $(2;3)$.

C. $(1;2)$ và $(3;+\infty)$.　　　　**D.** $(-\infty;1)\cup(2;3)$.

Câu 39: Hàm số $y=f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}+2\ ;(C)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

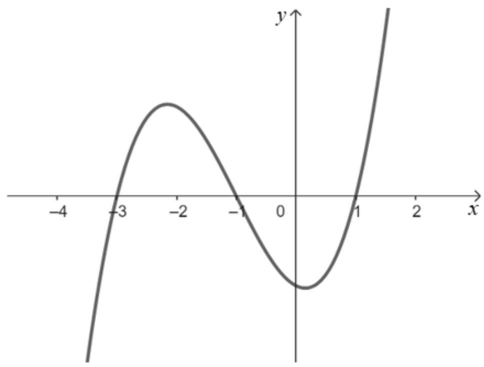
A. Hàm số (C) nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

B. Hàm số (C) nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số (C) đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

D. Hàm số (C) đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 40: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng bình phương các điểm cực đại của hàm số $g(x)=f(x^2-2)$ bằng bao nhiêu?

A. 6.　　**B.** 2.　　**C.** 3.　　**D.** 4.

Câu 41: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

A. $y=-x+7$.　　**B.** $y=-x-5$.　　**C.** $y=x-5$.　　**D.** $y=x+7$.

Câu 42: Cho đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3;1)$ là:

A. 1.　　**B.** 3.　　**C.** 2.　　**D.** 0.

Câu 43: Biết trên đồ thị $(C): y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có hai điểm mà tiếp tuyến tại các điểm đó đều song song với đường thẳng $d: 3x-y+15=0$. Tìm tổng S các tung độ tiếp điểm.

A. $S=3$. **B.** $S=14$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=2$.

Câu 44: Cho hàm số $y=-x^3+3x^2+2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) mà có hệ số góc lớn nhất là:

A. $y=3x+1$. **B.** $y=-3x-1$. **C.** $y=-3x+1$. **D.** $y=3x-1$.

Câu 45: Đường thẳng $y=2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y=-x^3+3x+4$ khi m bằng

A. -3 hoặc 1. **B.** 3 hoặc 1. **C.** 3 hoặc -1. **D.** -3 hoặc -1.

Câu 46: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$ vuông góc với đường thẳng $y=-\dfrac{1}{9}x$ là

A. $y=-\dfrac{1}{9}x+18, y=-\dfrac{1}{9}x+5$. **B.** $y=\dfrac{1}{9}x+18, y=\dfrac{1}{9}x-14$.

C. $y=9x+18, y=9x-14$. **D.** $y=9x+18, y=9x+5$.

Câu 47: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=3x+2024$.

A. $m=\dfrac{7}{3}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\dfrac{-1}{3}$.

Câu 48: Gọi S là tập hợp các giá trị của hàm số m sao cho đường thẳng $d: y=mx-m-3$ cắt đồ thị $(C): y=2x^3-3x^2-2$ tại ba điểm phân biệt $A, B, I(1;-3)$ mà tiếp tuyến với (C) tại A và tại B vuông góc với nhau. Tính tổng các phần tử của S.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Câu 49: Giả sử đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến chung của đồ thị hàm số $y=x^2-5x+6$ và $y=x^2+3x-10$. Tính $M=2a+b$.

A. $M=16$. **B.** $M=-4$. **C.** $M=4$. **D.** $M=7$.

Câu 50: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm trên trục tung, có tọa độ nguyên thỏa mãn $x^2+y^2<144$, mà từ đó vẽ được ít nhất một tiếp tuyến tới (C).

A. 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** vô số.

Câu 51: Biết $A(0;y), B(x;1)$ thuộc đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-1$ khi đó giá trị $x+y$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 52: Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-1$?

A. $(-1;2)$. **B.** $(2;7)$. **C.** $(0;-1)$. **D.** $(1;-2)$.

Câu 53: Đồ thị hàm số $y=x^2+2mx-m+1$ (m là tham số) luôn đi qua điểm M cố định có tọa độ là

A. $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $M(-1;0)$. **C.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $M(0;1)$.

Câu 54: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số nào sau đây cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất?

A. $y=\frac{2x-1}{x+3}$. **B.** $y=\frac{1-x}{1+x}$.

C. $y=2x^3-3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x-2$.

Câu 55: Trên đồ thị hàm số $y=\frac{2x-1}{x+4}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

A. 6. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Câu 56: Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị (C) của hàm số $y=\frac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(1;-3)$. **B.** $M(3;5)$. **C.** $M(0;-1)$. **D.** $M(4;3)$.

Câu 57: Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\frac{2x^2+3x+10}{x+2}$ là:

A. 16. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Câu 58: Cho hàm số $y=\frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi $M(x_M;y_M)$ là một điểm bất kỳ trên (C). Khi tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất, tính tổng x_M+y_M.

A. $2\sqrt{2}-1$. **B.** 1. **C.** $2-2\sqrt{2}$. **D.** $2-\sqrt{2}$.

Câu 59: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P=12I-0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

A. 72. **B.** 12. **C.** $-\frac{1}{192}$. **D.** $\frac{23}{2}$.

Câu 60: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n)=480-20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 **B.** 13 **C.** 12 **D.** 11

Câu 61: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

A. $27,832^0C$. **B.** $18,4^0C$. **C.** $26,2^0C$. **D.** $25,312^0C$.

Câu 62: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

Câu 63: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Câu 64: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G(x)=0,25x^2(30-x)$ trong đó $x(mg)$ và x > 0 là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg **B.** 30mg **C.** 40mg **D.** 20mg

Câu 65: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t):45t^2-t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 **B.** 30 **C.** 20 **D.** 15

Câu 66: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h=3\cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t=10(h)$ **B.** $t=14(h)$ **C.** $t=15(h)$ **D.** $t=22(h)$

Câu 67: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t)=\frac{1}{100}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)$ $(0\le t\le 90)$

Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t)=V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

D. Cả A, B, C đều sai.

Câu 68: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Câu 69: Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi $\left(200g/m^2\right)$ tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A. $\frac{230}{3}kg$ **B.** $70kg$ **C.** $72kg$ **D.** $69kg$

Câu 70: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 450 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Câu 71: Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

A. 29 triệu VNĐ **B.** 27, 5 triệu VNĐ **C.** 29, 5 triệu VNĐ **D.** 27 triệu VNĐ

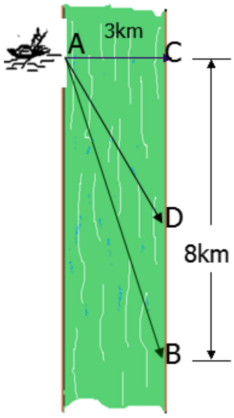
Câu 72: Công ty dụ lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

A. 1375000. **B.** 3781250. **C.** 2500000. **D.** 3000000.

Câu 73: Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp đủ chứa được 10 lít nước. Hỏi bán kính đáy (đơn vị cm, làm tròn đến hàng phần chục) của chiếc xô bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất.

A. $14,7$ **B.** 15 **C.** $15,2$ **D.** 14

Câu 74: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng $3km$ (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền $6km/h$, chạy $8km/h$ và quãng đường $BC=8km$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{9}{\sqrt{7}}$ **C.** $\frac{\sqrt{73}}{6}$ **D.** $1+\frac{\sqrt{7}}{8}$.

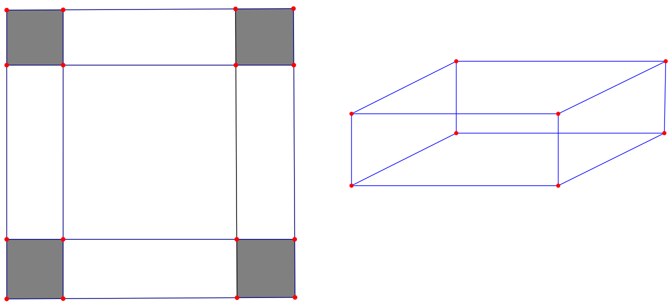
Câu 75: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $216\ (m/s)$ **B.** $30\ (m/s)$ **C.** $400\ (m/s)$ **D.** $54\ (m/s)$

Câu 76: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\frac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $24(m/s)$. **B.** $108(m/s)$. **C.** $18(m/s)$. **D.** $64(m/s)$.

Câu 77: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=6$ **B.** $x=3$ **C.** $x=2$ **D.** $x=4$

Câu 78: Một kiến trúc sư mốn thiết kế một mô hình kim tự tháp Ai Cập có dạng là một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính bằng $6m$. Để tiết kiệm nguyên liệu xây dựng thì kiến trúc sư đó phải thiết kế kim tự tháp sao cho có thể tích nhỏ nhất. Chiều cao của kim tự tháp đó là:

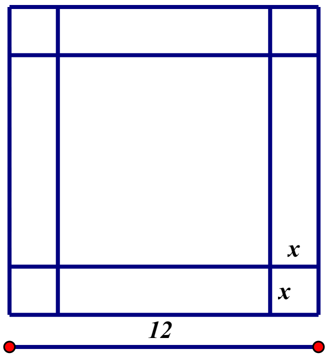
A. $12m$. **B.** $18m$. **C.** $36m$. **D.** $24m$.

Câu 79: Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải chứa được $16\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản suất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R=2(m), h=4(m)$ **B.** $R=4(m), h=2(m)$

C. $R=3(m), h=4(m)$ **D.** $R=4(m), h=4(m)$

Câu 80: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được cái hộp không nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.



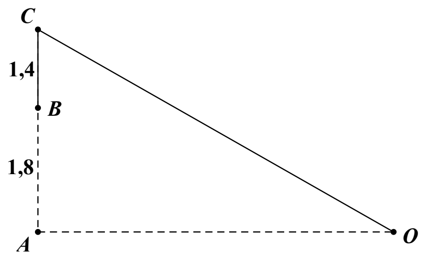
A. $x=6(cm)$ **B.** $x=3(cm)$ **C.** $x=2(cm)$ **D.** $x=4(cm)$

Câu 81: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$ **B.** Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$ **D.** Dài $24cm$, rộng $19cm$

Câu 82: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO=2,4m$ **B.** $AO=2m$ **C.** $AO=2,6m$ **D.** $AO=3m$

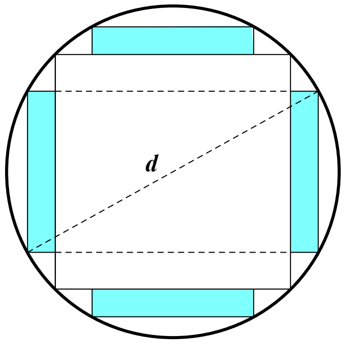
Câu 83: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d.

A. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

B. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

C. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

D. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$



Câu 84: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/m^2. Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Câu 85: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$ **B.** $5R^2$ **C.** R^2 **D.** $3R^2$

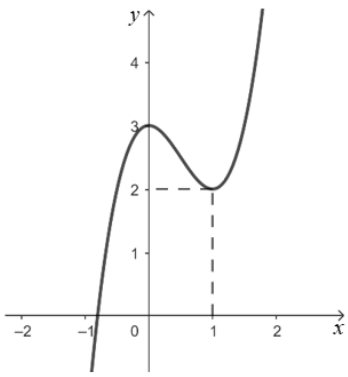
Câu 86: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. $83.200.000$ đồng **B.** 382.000 đồng

C. 83.200 đồng **C.** 8.320.000 đồng.

E. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

B. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Câu 2. Xét đường thẳng $d: y=4-2x$ và đường cong $(C): y=\dfrac{2x+4}{x+1}$.

A. Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường cong (C).

B. (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương.

C. (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

D. Đường thẳng d cắt đường cong (C) tại hai điểm phân biệt.

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

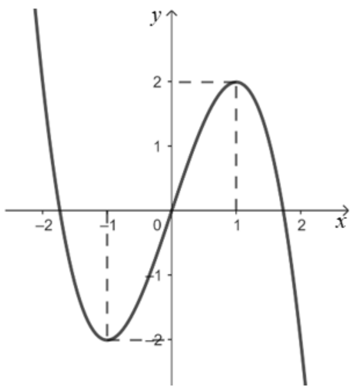
A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Phương trình $f(x)+3=0$ vô nghiệm.

D. Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

C. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2024}$ là 3.

D. Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=2024$ tại 3 điểm phân biệt.

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2024}{x-1}$ có đồ thị (C).

A. (C) có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

B. (C) có đường tiệm cận xiên là $y = x + 1$.

C. (C) có 2 trục đối xứng.

D. Trên (C) có đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty \Vert -\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$-\infty$

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $y = 2$.

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+4)^3, \forall x \in \mathbb{R}$.

A. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4.

B. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 1)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{2};+\infty)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3m^2x + 2024$ có đồ thị (C).

A. (C) luôn có hai điểm cực trị.

B. Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

C. Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

D. Khi (C) có 2 cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y = ax + b$. Đặt $S = a + b$ thì $S \le 2024$.

Câu 9. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 + 3x$ có đồ thị (C).

A. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6.

B. Đạo hàm của hàm số đã cho là $y' = 3x^2 + 3$.

C. Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị.

D. $\lim\limits_{x \to -\infty} y = +\infty$.

Câu 10. Cho hàm số $y = \dfrac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị (C).

A. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x = -1$.

B. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1$.

C. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2;-1)$.

D. $\forall M \in (C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3.

Câu 11. Cho hàm số $f\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'\left(x\right)=x\left(x+1\right)^{2025}\left(x-3\right)^{2024}, \forall x\in\mathbb{R}$.

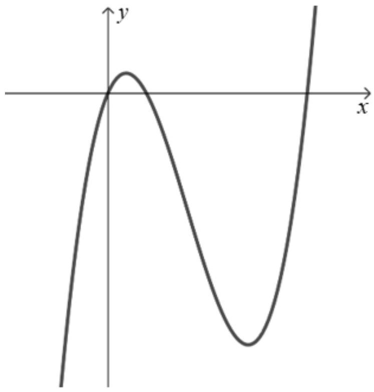
A. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;3\right)$.

B. Hàm số $y=f\left(x\right)$ đạt cực đại tại $x=0$.

C. Biết $f\left(0\right)=0$, đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

D. Hàm số $g\left(x\right)=f\left(x^2-1\right)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 12. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình bên.



A. Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.
B. Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.
C. Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt.
D. Trong các hệ số a,b,c,d có 2 hệ số dương.

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I\left(a;b\right)$ thì $a+b=?$

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=ax+b$ thì $a+b=?$

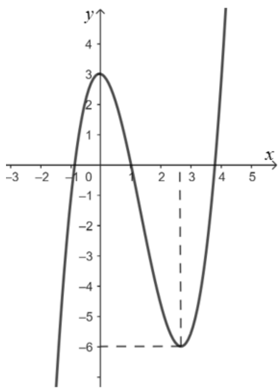
Câu 3. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x+1}{x-1}$. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A và B, $I\left(a;b\right)$ là trung điểm AB thì $a+b=?$

Câu 4. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m\neq 0$ thuộc đoạn $\left[-5;5\right]$, để đường thẳng $d: y=mx+1$ cắt đồ thị hàm số $\left(C\right): y=\dfrac{-2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt?

Câu 6. Cho hàm số $y=-x^3-mx^2+\left(4m+9\right)x+5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;+\infty\right)$.

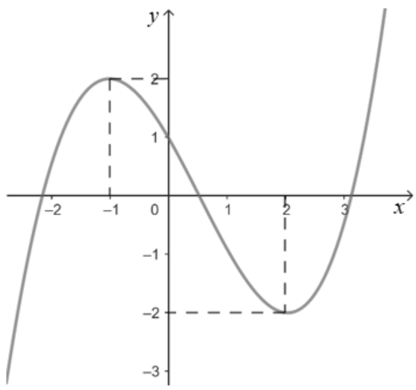
Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y=\left|3x^5-25x^3+60x+m\right|$ có 7 điểm cực trị?



Đặt $g(x)=f\left[f(x)\right]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$, để đường thẳng $d: y=x+2m$ cắt đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung?

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



Hỏi hàm số $g(x)=\left|\left[f(x)\right]^2-3f(x)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định có đạo hàm và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến của hai đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)=\dfrac{f(x)}{f(x^2)}$ cùng tại điểm có hoành độ $x_0=1$ có hệ số góc lần lượt là 12 và –3. Giá trị của $f(1)$ bằng

Câu 12. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$. Giả sử Δ cắt Ox tại điểm A và cắt Oy tại điểm B. Khi đó diện tích của tam giác OAB bằng

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi điểm I là giao của hai đường tiệm cận của (C). M là một điểm bất kì trên (C) và tiếp tuyến của (C) tại M cắt hai tiệm cận tại

A, B. Biết chu vi tam giác IAB có giá trị nhỏ nhất bằng $a+\sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Hỏi $a-b+4$ bằng bao nhiêu?

Câu 14: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$.Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

Câu 15: Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từmột miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Thể tích của hộp cần làm.

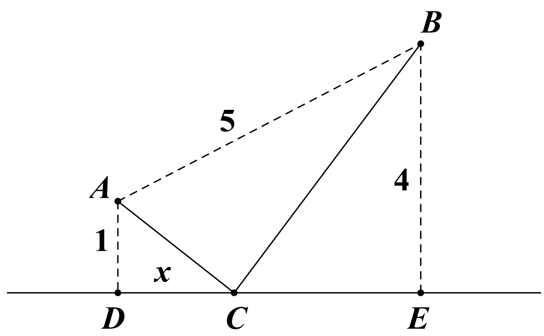
Câu 16: Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

Câu 17: Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là 2m. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng 1,2m. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

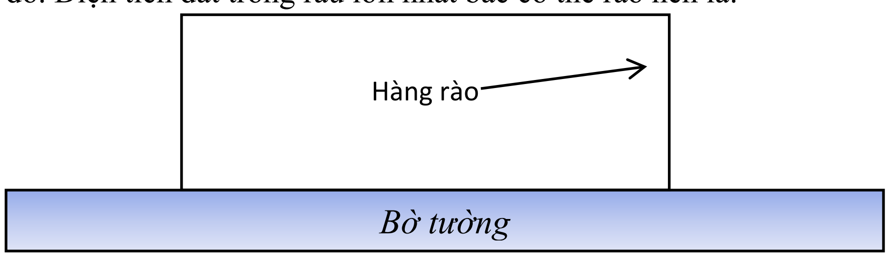
Câu 18: Anh Tuân muốn xây dựng một hố ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứ được 3200cm^3, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

Câu 19:

Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.



Câu 20: Bác nông dân muốn làm hàng rà trồng ra hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 200m lưới để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Diện tích đất trồng rau lớn nhất bác có thể rào nên là:

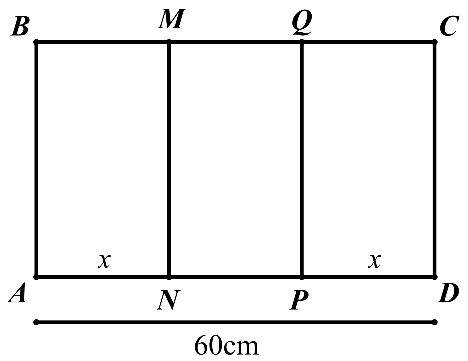


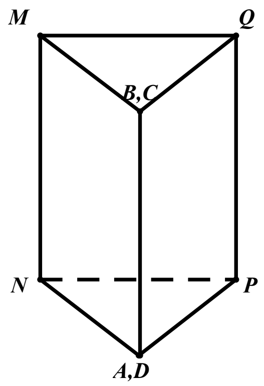
Câu 21: Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

Câu 22: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần hình trụ nhỉ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

Câu 23: Do nhu cầu sử dụng người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h, có thể tích là $1m^3$. Với a như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất?

Câu 24: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD = 60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ để được 1 hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?

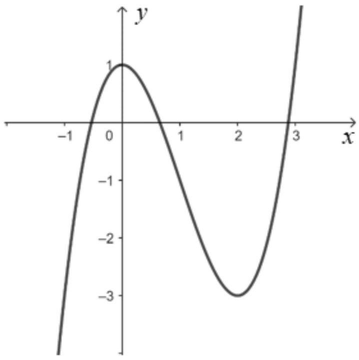


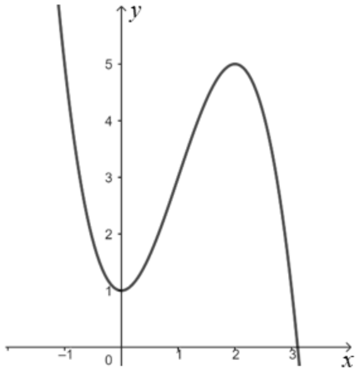


A. $x = 20$ **B.** $x = 30$ **C.** $x = 45$ **D.** $x = 40$

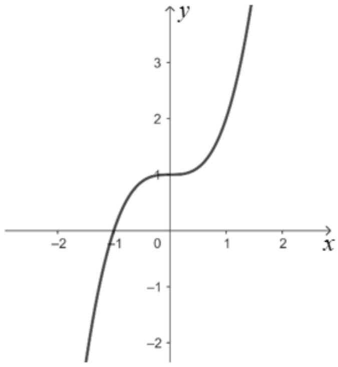
D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

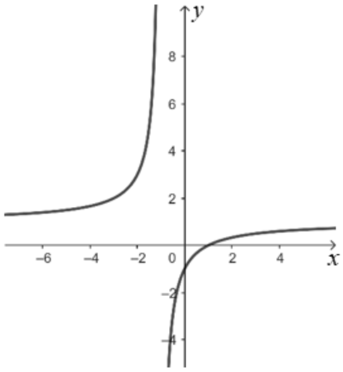
Câu 1: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

A. 

. **B.** 

.

C. 

. **D.** 

.

Lời giải

Chọn A

$y = x^3 - 3x^2 + 1; D = \mathbb{R}$

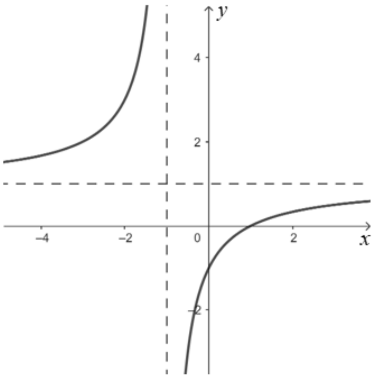
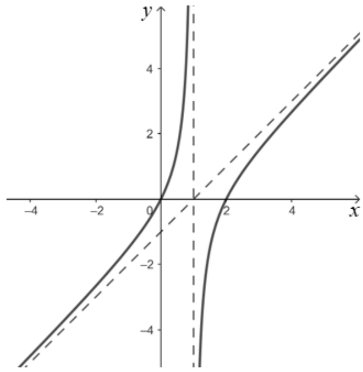
$y' = 3x^2 - 6x$

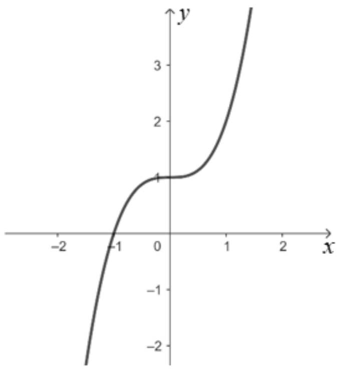
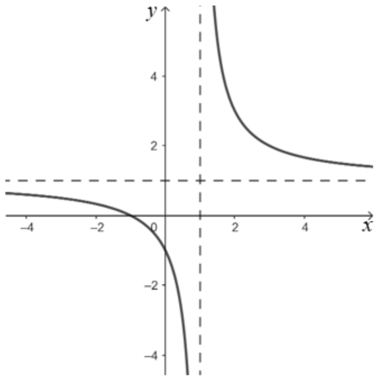
$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Câu 2: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x+1}{x-1}$

A.  . **B.**  .

C.  . **D.**  .

Lời giải

Chọn D

$y=\dfrac{x+1}{x-1};D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$y'=\dfrac{-2}{(x-1)^2}<0,\forall x\in D$

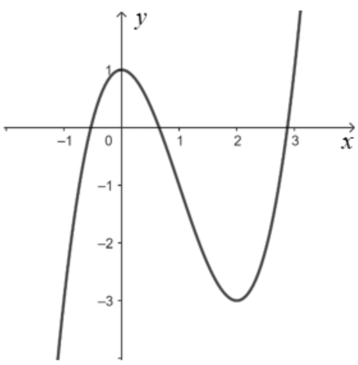
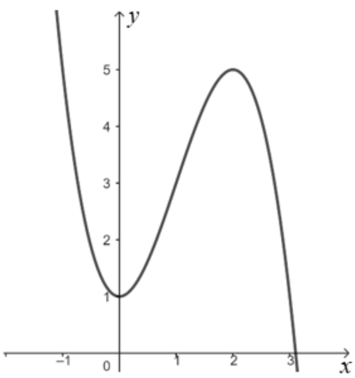
$\lim\limits_{x\to\pm\infty}y=1$ nên đồ thị có tiệm cân ngang là đường thẳng $y=1$.

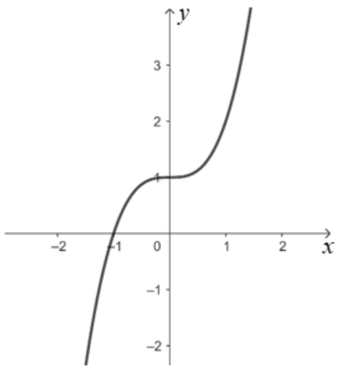
$\lim\limits_{x\to1^+}y=+\infty;\ \lim\limits_{x\to1^-}y=-\infty$ nên đồ thị có tiệm cân đứng là đường thẳng $x=1$.

Bảng biến thiên:

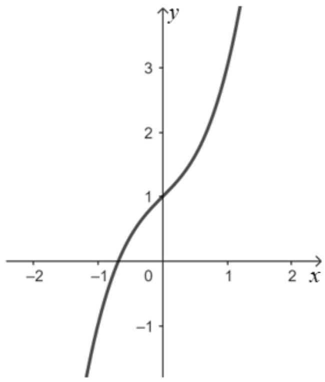
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	‖	$-$
$f(x)$	$1 \searrow -\infty$	‖	$+\infty \searrow 1$

Câu 3: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=x^3+1$

A.  . **B.**  .

C. 

.

D. 

.

Lời giải

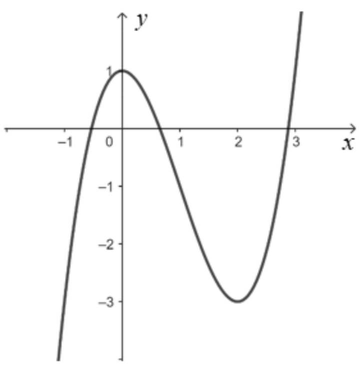
Chọn C

$y = x^3 + 1$

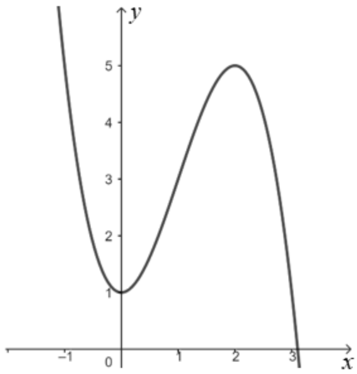
$y' = 3x^2; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0\left(\text{nghiệm kép}\right)$

Nên chọn C (lưu ý cách gọi gợi nhớ " dạng cái ghế ")

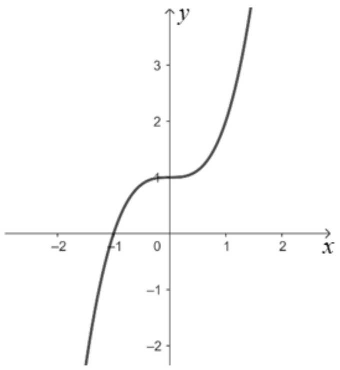
Câu 4: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = x^3 + x + 1$

A. 

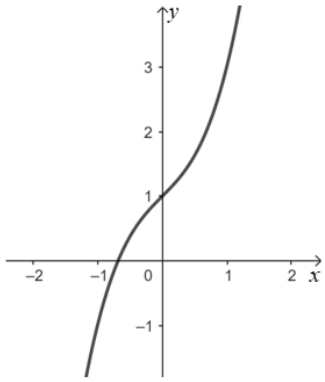
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Lời giải

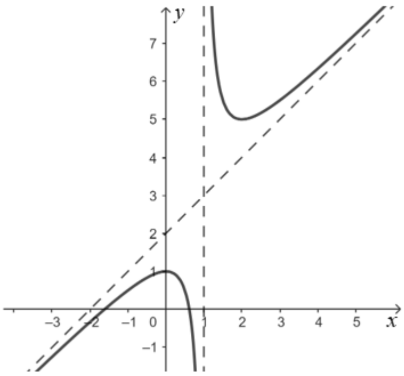
Chọn D

$y = x^3 + x + 1$

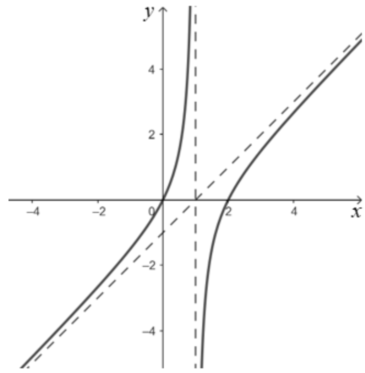
$y' = 3x^2 + 1; y' = 0 \Leftrightarrow x \in \varnothing$

Nên chọn D (lưu ý phân biệt câu 3 và 4)

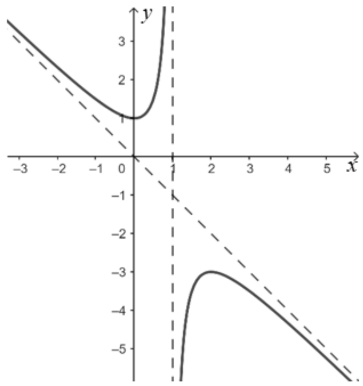
Câu 5: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

A. 

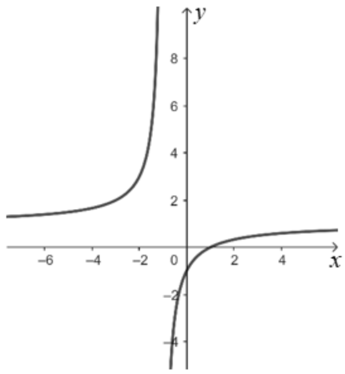
.

B. 

.

C. 

.

D. 

.

Lời giải

Chọn A

$y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1} = x + 2 + \dfrac{1}{x - 1}; D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

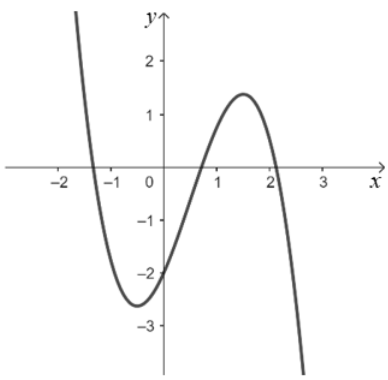
$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = 2 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right.$

Tiệm cận đứng $x = 1$, tiệm cận xiên $y = x + 2$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\searrow$	5	$\nearrow$	$-\infty$

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

B. $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$.

C. $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$.

D. $a < 0; b > 0; c < 0; d < 0$.

Lời giải

Chọn A

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

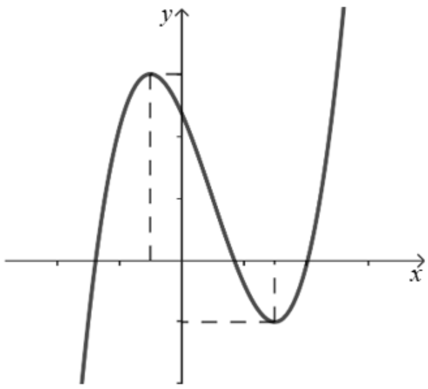
"Nhánh bên phải" hướng xuống $\Rightarrow a < 0$

Đồ thị cắt trục tung tại $y = -2 \Rightarrow d = -2 \Rightarrow d < 0$

$x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b > 0$

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c > 0$

Câu 7: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a > 0; b > 0; c > 0; d > 0$. **B.** $a > 0; b < 0; c > 0; d < 0$.

C. $a > 0; b > 0; c < 0; d > 0$. **D.** $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$.

Lời giải

Chọn D

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

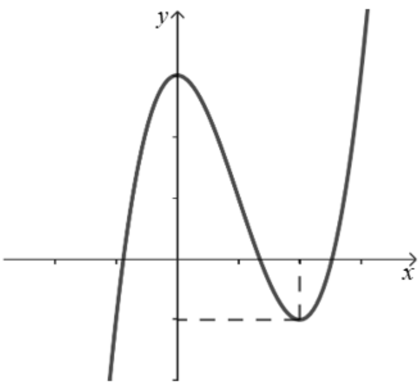
"Nhánh bên phải" hướng lên $\Rightarrow a > 0$

Đồ thị cắt trục tung tại $y_0 > 0 \Rightarrow d > 0$

$x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b < 0$

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} < 0 \Rightarrow c < 0$

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

B. $a > 0; b < 0; c = 0; d > 0$.

C. $a > 0; b > 0; c = 0; d > 0$.

D. $a > 0; b = 0; c < 0; d > 0$.

Lời giải

Chọn B

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

"Nhánh bên phải" hướng lên $\Rightarrow a > 0$

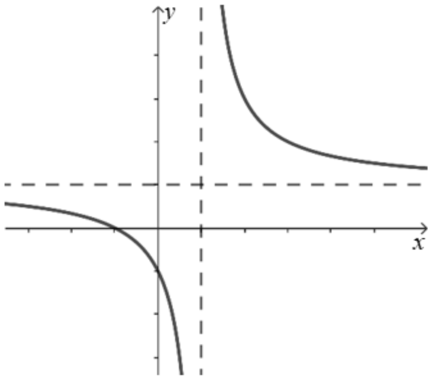
Đồ thị cắt trục tung tại $y_0 > 0 \Rightarrow d > 0$

$x_1 = 0; x_2 > 0$

$x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{3a} > 0 \Rightarrow \dfrac{b}{a} < 0 \Rightarrow b < 0$

$x_1.x_2 = \dfrac{c}{3a} = 0 \Rightarrow c = 0$

Câu 9: Cho hàm số $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



A. $ac > 0; bd > 0$.

B. $ab < 0; cd < 0$.

C. $bc > 0; ad < 0$.

D. $ad > 0; bd < 0$

.

Lời giải

Chọn C

$y = \dfrac{ax+b}{cx+d}; D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{-d}{c} \right\}$

$y' = \dfrac{ad - bc}{(cx+d)^2}$

Tiệm cận đứng $x = \dfrac{-d}{c} > 0 \Rightarrow cd < 0$

Tiệm cận ngang $y = \dfrac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0$

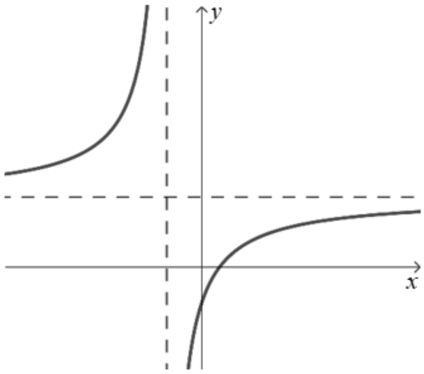
$\begin{cases} cd < 0 \\ ac > 0 \end{cases} \Rightarrow ad < 0$

Đồ thị cắt trục hoành tại $x_0 = \dfrac{-b}{a} < 0 \Rightarrow ab > 0$

Đồ thị cắt trục tung tại $y_0 = \frac{b}{d} < 0 \Rightarrow bd < 0$

$\begin{cases} ab > 0 \\ ac > 0 \end{cases} \Rightarrow bc > 0$

Câu 10: Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ có đồ thị như hình vẽ bên. Biết rằng a là số thực dương, hỏi trong các số b, c, d có tất cả bao nhiêu số dương?



A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$y = \frac{ax+b}{cx+d}; D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{-d}{c} \right\}$

$y' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$

Tiệm cận ngang $y = \frac{a}{c} > 0 \Rightarrow ac > 0 \Rightarrow c > 0$

Tiệm cận đứng $x = \frac{-d}{c} < 0 \Rightarrow cd > 0 \Rightarrow d > 0$

Đồ thị cắt trục hoành tại $x_0 = \frac{-b}{a} > 0 \Rightarrow ab < 0 \Rightarrow b < 0$

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2-ax}{bx-c} \left(a, b, c \in \mathbb{R}, b \neq 0 \right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	||	$+$
$f(x)$	$3 \nearrow +\infty$	||	$-\infty \nearrow 3$

Tổng $(a+b+c)^2$ thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(1;2)$. **B.** $(2;3)$. **C.** $\left(0;\frac{4}{9}\right)$. **D.** $\left(\frac{4}{9};1\right)$.

Lời giải

Chọn C

$y=\dfrac{-ax+2}{bx-c};D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{c}{b}\right\}$

$y'=\dfrac{ac-2b}{(bx-c)^2}$

Tiệm cận đứng $x=\dfrac{c}{b}=1\Leftrightarrow b=c$

Tiệm cận ngang $y=\dfrac{-a}{b}=3\Rightarrow a=-3b$

Hàm số đồng biến: $y'>0\Leftrightarrow ac-2b>0$

$\Leftrightarrow -3b.b-2b>0$

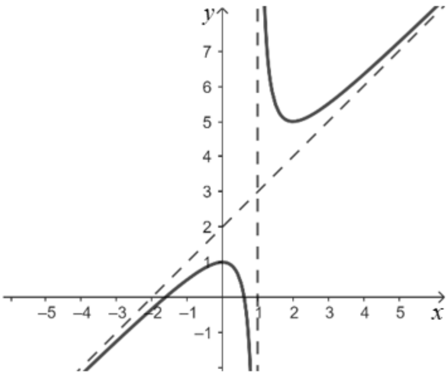
$\Leftrightarrow 3b^2+2b<0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2}{3}<b<0$

$\Rightarrow a+b+c=-3b+b+b=-b\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right)$

$\Rightarrow (a+b+c)^2\in\left(0;\dfrac{4}{9}\right)$

Câu 12: Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a>0,m\neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hỏi trong các số b,c,m,n có tất cả bao nhiêu số dương?



A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$y=\dfrac{ax^2+bx+c}{mx+n}(a>0,m\neq 0);D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{-n}{m}\right\}$

Tiệm cận xiên $y=x+2$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^2+bx+c}{mx^2+nx}\right)=\frac{a}{m}=1 \Leftrightarrow a=m>0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{ax^2+bx+c}{mx+n}-x\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(b+n)x+c}{mx+n}\right]=\frac{b+n}{m}=2$$

$$\Leftrightarrow b+n=2m$$

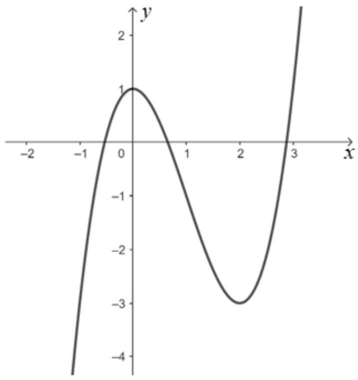
$$\Leftrightarrow b-m=2m$$

$$\Leftrightarrow b=3m=3a>0$$

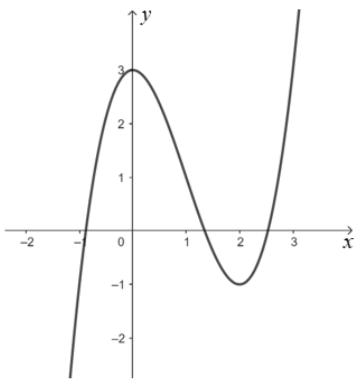
Tiệm cận đứng $x=\frac{-n}{m}=1 \Leftrightarrow n=-m=-a<0$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại $y_0=\frac{c}{n}>0 \Rightarrow c<0$

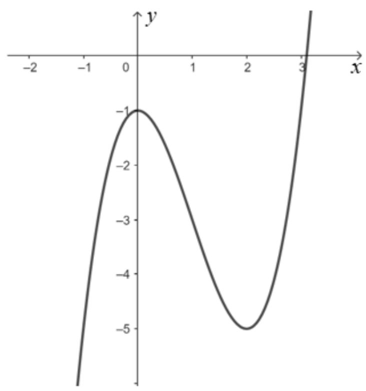
Câu 13: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới



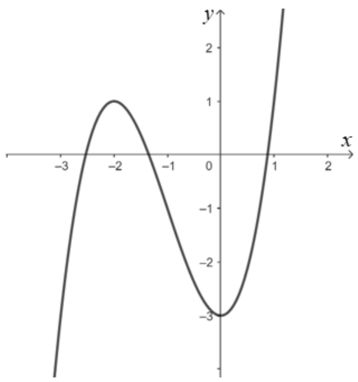
Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f(x)+2$.

A. 

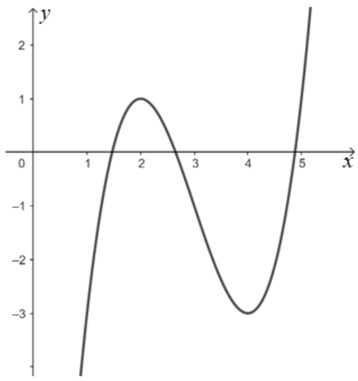
.

B. 

.

C. 

.

D. 

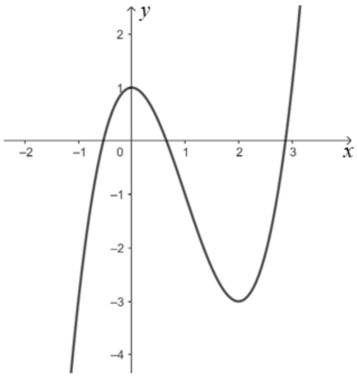
.

Lời giải

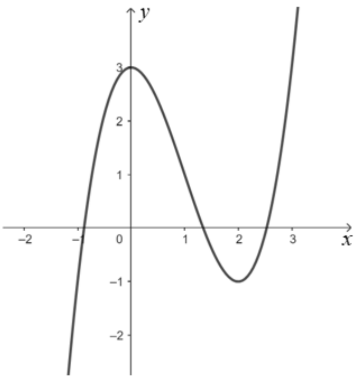
Chọn A

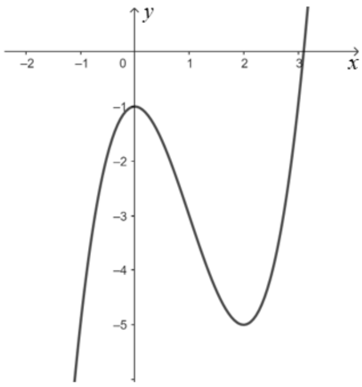
Đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)+2$ được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị $y=f\left(x\right)$ lên phía trên (theo phương Oy) 2 đơn vị.

Câu 14: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới.

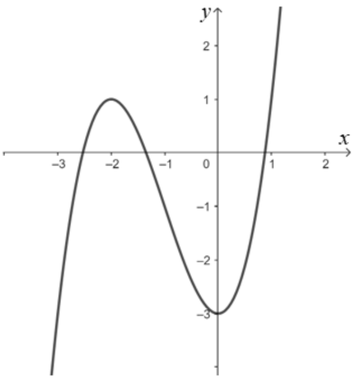


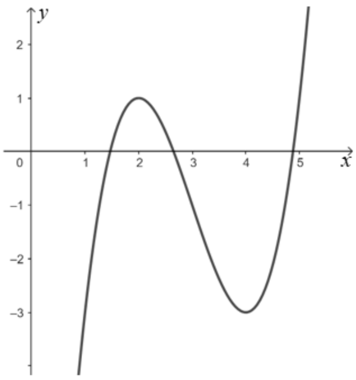
Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=f\left(x+2\right)$.

A. 

. **B.** 

.

C. 

. **D.** 

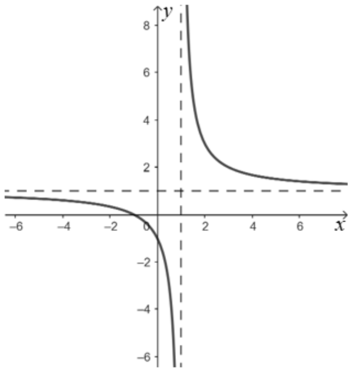
.

Lời giải

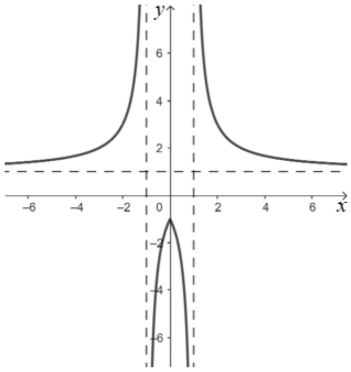
Chọn C

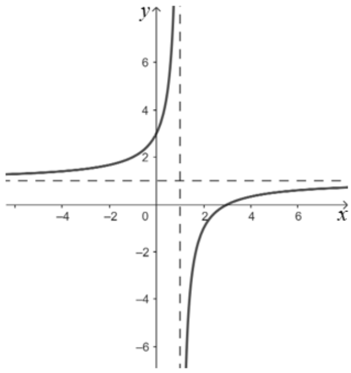
Đồ thị hàm số $y=f\left(x+2\right)$ được suy ra bằng cách tịnh tiến đồ thị $y=f\left(x\right)$ lên trái (theo phương Ox) 2 đơn vị.

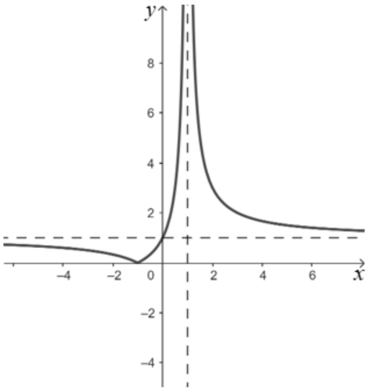
Câu 15: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị như hình bên dưới

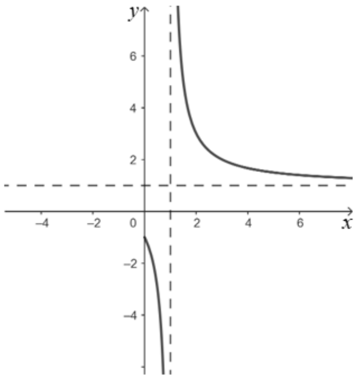


Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{|x|+1}{|x|-1}$.

A.  .

B.  .

C.  .

D.  .

Lời giải

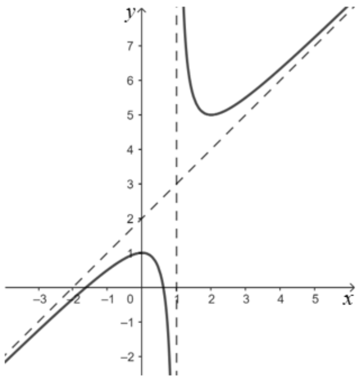
Chọn A

Xét hàm số $y=f\left(|x|\right)$. Ta có $f\left(-x\right)=f\left(x\right)$ nên $f\left(x\right)$ là *hàm số chẵn*, đồ thị nhận Oy làm trục đối xứng.

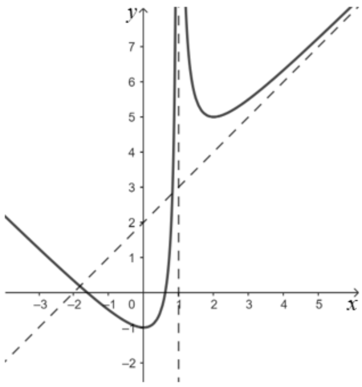
Cách vẽ:

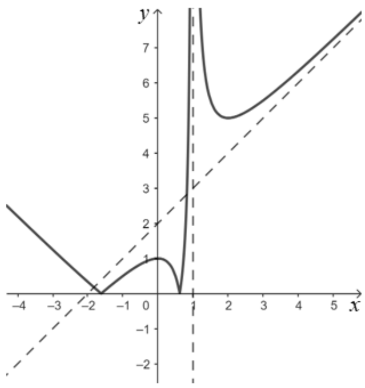
- Giữ nguyên phần đồ thị bên phải Oy của đồ thị $y=f\left(x\right)$.
- Bỏ phần đồ thị bên trái Oy của đồ thị $y=f\left(x\right)$, **lấy đối xứng phần đồ thị** ***được giữ*** qua Oy

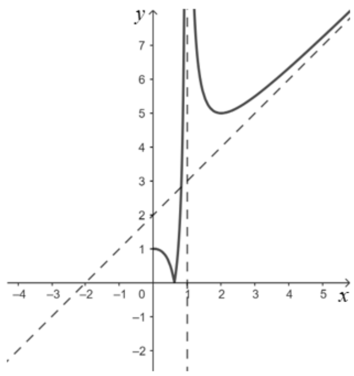
Câu 16: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới.

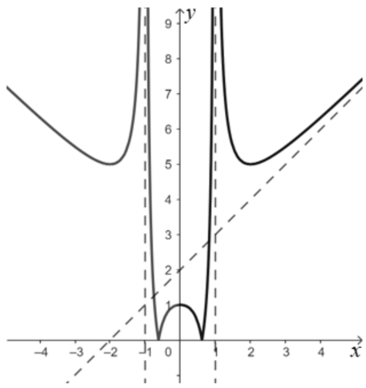


Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\left|\dfrac{x^2+x-1}{x-1}\right|$.

A. .

B. .

C. .

D. .

Lời giải

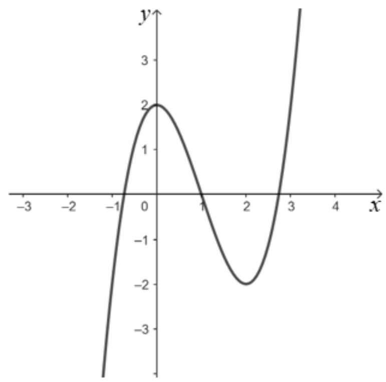
Chọn B

Xét hàm số $y=\left|f(x)\right|=\begin{cases} f(x) \ khi \ f(x)\geq 0 \\ -f(x) \ khi \ f(x)<0 \end{cases}$.

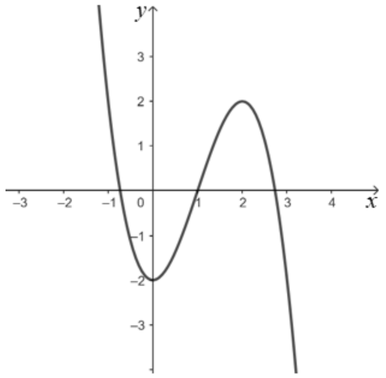
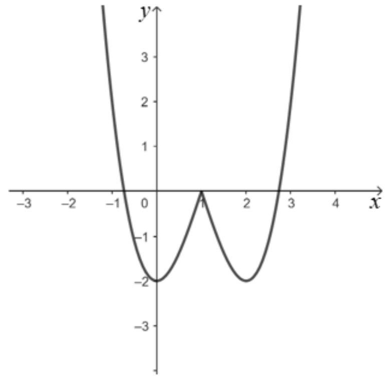
Cách vẽ:

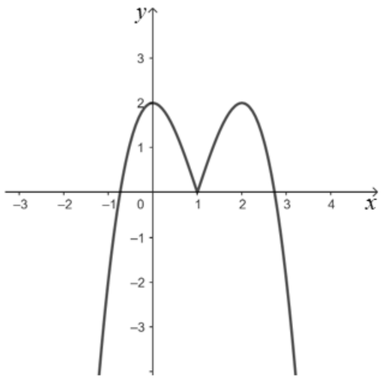
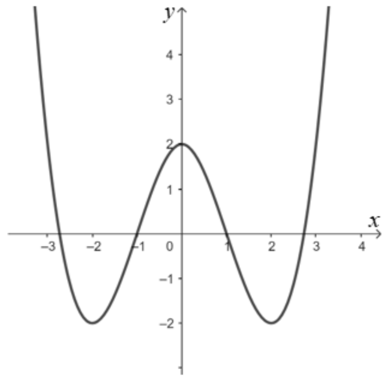
- Giữ nguyên phần đồ thị phía trên Ox của đồ thị $y=f(x)$.
- Bỏ phần đồ thị phía dưới Ox của đồ thị $y=f(x)$, **lấy đối xứng phần đồ thị *bị bỏ*** qua Ox.

Câu 17: Cho hàm số $y=(x-1)(x^2-2x+2)$ có đồ thị như hình bên dưới



Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\left|x-1\right|\left(x^2-2x+2\right)$.

A.  . **B.**  .

C.  . **D.**  .

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y=y=\left|x-1\right|\left(x^2-2x+2\right)=\begin{cases}\left(x-1\right)\left(x^2-2x+2\right)\ khi\ \text{x}\geq 1\\ -\left(x-1\right)\left(x^2-2x+2\right)\ khi\ \text{x<1}\end{cases}$.

Cách vẽ:

□ Giữ nguyên phần đồ thị bên phải $x=1$ của đồ thị $y=f\left(x\right)$.

□ Bỏ phần đồ thị bên trái $x=1$ của đồ thị $y=f\left(x\right)$, **lấy đối xứng phần đồ thị** ***bị bỏ*** qua Ox.

Câu 18: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f\left(x\right)-3=0$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

$2f\left(x\right)-3=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

$y=\dfrac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên, thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị tại 3 điểm.

Câu 19: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f\left(x\right)-3=0$ là?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

$2f\left(x\right)-3=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=\dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-5	$\nearrow$	2	$\searrow$	-5	$\nearrow$	$+\infty$

$y=\dfrac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên, thấy đường thẳng $y=\dfrac{3}{2}$ cắt đồ thị tại 4 điểm.

Câu 20: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$		-1	$\searrow$ $-\infty$	‖	$-\infty$ $\searrow$	3	$\nearrow$ $-\infty$	

Số nghiệm của phương trình $f(x)=0$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$		-1	$\searrow$ $-\infty$	‖	$-\infty$ $\searrow$	3	$\nearrow$ $-\infty$	

$y=0$

Từ bảng biến thiên, thấy đường thẳng $y=0$ không cắt đồ thị.

Câu 21: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1 $\nearrow$		$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

Số nghiệm của phương trình $2f(x)-3=0$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$2f(x)-3=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{3}{2}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	||	$+$	
$f(x)$	1	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	1

$y = \frac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên, thấy đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị tại 1 điểm.

Câu 22: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$27/4$	↗	$+\infty$

Số nghiệm của phương trình $2f(x) - 3 = 0$ là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$2f(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{2}$.

x	$-\infty$		0		1		$3/2$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘		↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	$\frac{27}{4}$	↗	$+\infty$

$y = \frac{3}{2}$

Từ bảng biến thiên, thấy đường thẳng $y = \frac{3}{2}$ cắt đồ thị tại 1 điểm.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				$\frac{14}{3}$				$+\infty$
			-38				-2		

Đồ thị của hàm số trên cắt trục hoành tại mấy điểm?

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

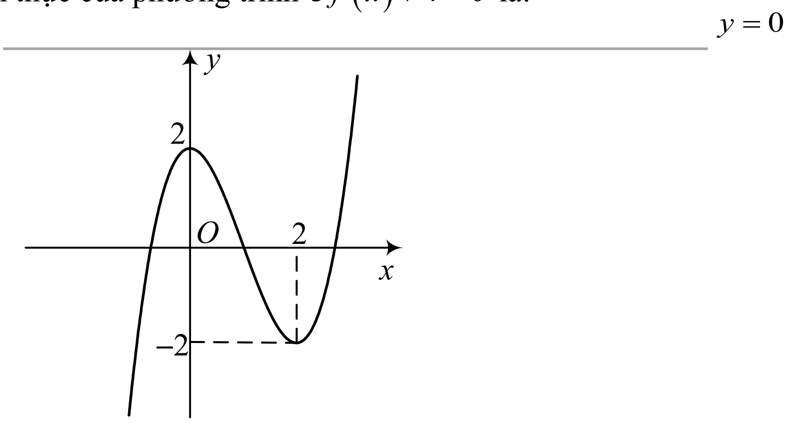
Chọn A

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				$\frac{14}{3}$				$+\infty$
			-38				-2		

$y = 0$

Từ bảng biến thiên, thấy đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị tại 4 điểm.

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a, b, c, d \in \mathbb{R})$. Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) + 4 = 0$ là:

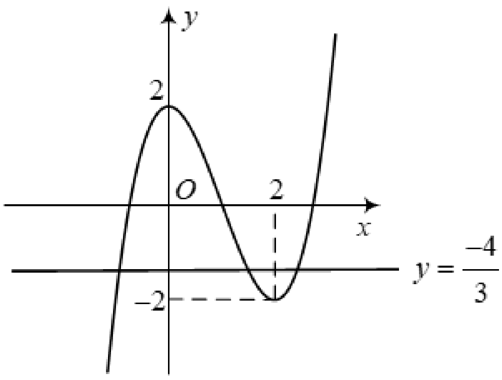


A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

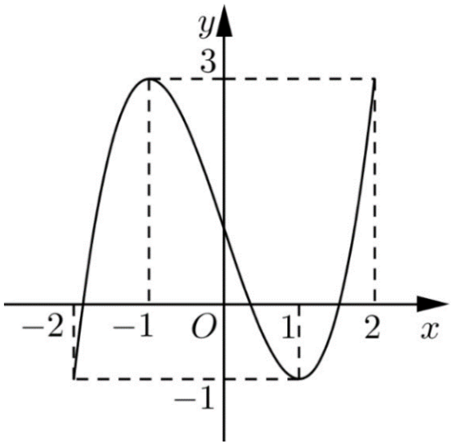
Chọn D

$$3f(x) + 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{-4}{3}$$



Đường thẳng $y = \frac{-4}{3}$ cắt đồ thị tại 3 điểm.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-2;2]$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x) - 4 = 0$ trên đoạn $[-2;2]$ là:

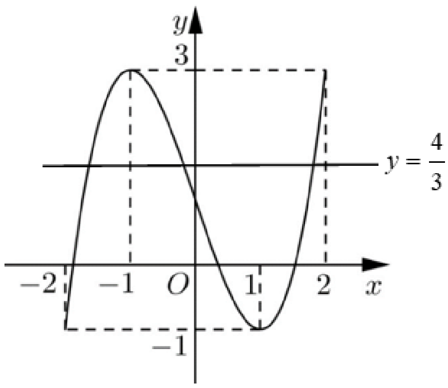


A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

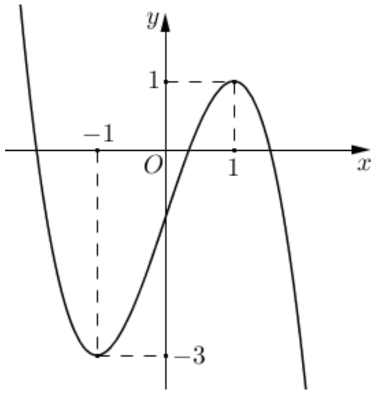
Chọn D

$3f(x) - 4 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3}$



Đường thẳng $y = \frac{4}{3}$ cắt đồ thị tại 3 điểm.

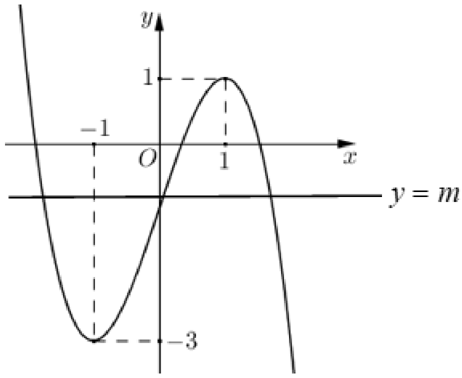
Câu 26: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x)=m$ có ba nghiệm thực phân biệt?



A. 5. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

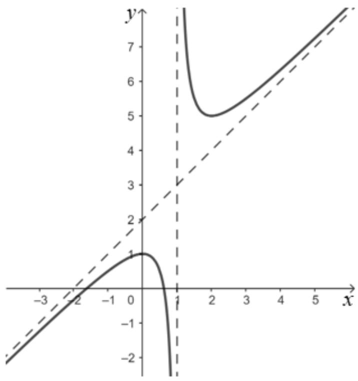
Lời giải

Chọn D



Từ đồ thị, ta được $-3<m<1$. Vì $m\in\mathbb{Z}$ nên $m\in\{-2;-1;0\}$.

Câu 27: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số nghiệm thực của phương trình $3f(x)+4=0$ là:

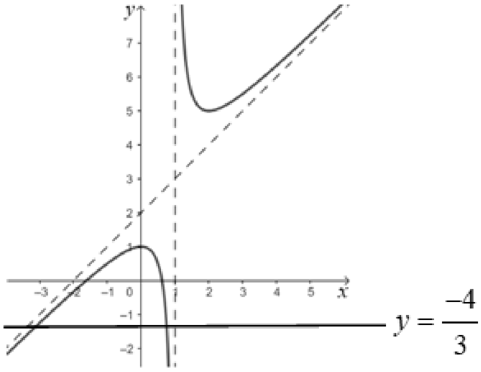


A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

$3f(x)+4=0 \Leftrightarrow f(x)=\dfrac{-4}{3}$



Đường thẳng $y = \dfrac{-4}{3}$ cắt đồ thị tại 2 điểm.

Câu 28: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2$.

Câu 29: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2$ và đồ thị hàm số $y = x^2 + 5x$:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^3 + x^2 = x^2 + 5x$.

$\Leftrightarrow x^3 - 5x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -\sqrt{5} \\ x = \sqrt{5} \end{array}\right.$$

Câu 30: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = \dfrac{-x^2 + mx - 2}{x - 1}$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt?

A. vô số. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm: $y = \dfrac{-x^2 + mx - 2}{x - 1} \Leftrightarrow g(x) = x^2 - mx + 2 = 0$.

$$\Delta = m^2 - 8$$

Đồ thị cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 8 > 0 \\ 3 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m < -2\sqrt{2} \\ m > 2\sqrt{2} \end{array} \right. \\ m \neq 3 \end{cases}$$

m nguyên nên có vô số m.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, liên tục trên mỗi khoảng xác định và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty \; \|\| \; -\infty$	$\nearrow$	-1

Tìm tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho phương trình $f(x) = m$ có ba nghiệm thực phân biệt.

A. $(-1;1]$. **B.** $(-\sqrt{2};-1)$. **C.** $(-\sqrt{2};-1]$. **D.** $(-1;1)$.

Lời giải

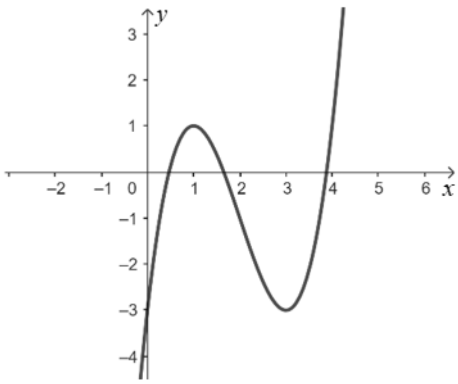
Chọn B

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	$\|\|$	$+$	
$f(x)$	1	$\searrow$	$-\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty \; \|\| \; -\infty$	$\nearrow$	-1

$y = m$

Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị tại 3 điểm phân biệt khi $-\sqrt{2} < m < -1$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục, xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như sau:

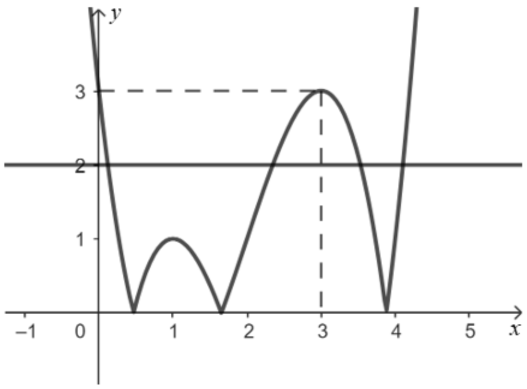


Số giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(x)| = m$ có bốn nghiệm thực phân biệt.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

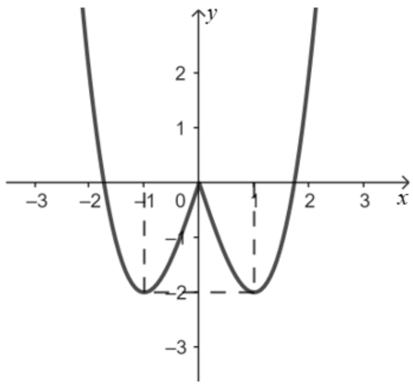
Lời giải

Chọn B



Đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ tại 4 điểm phân biệt khi $1 < m < 3$.

Câu 33: Hàm số y = f’(x) có đồ thị như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?



A. Hàm số y = f(x) nghịch biến trên khoảng (-1; 0).
B. Hàm số y = f(x) đồng biến trên khoảng (1; +∞).
C. Hàm số y = f(x) nghịch biến trên khoảng (-∞; 0).
D. Hàm số y = f(x) đồng biến trên khoảng (0; +∞).

Lời giải

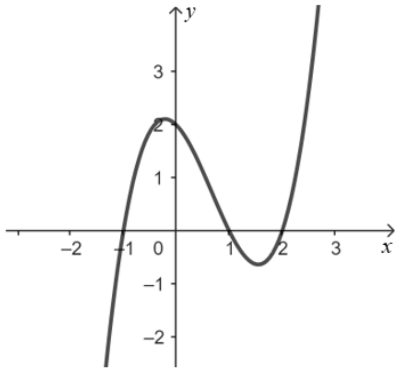
Chọn A

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \in (-2;-1) \\ x = 0 \\ x = b \in (1;2) \end{array}\right.$$

Từ đồ thị, ta được bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		0		b		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↘		↘		↗	

Câu 34: Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;+\infty)$. **B.** $(-1;1)$. **C.** $(-\infty;-1)$ và $(1;2)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

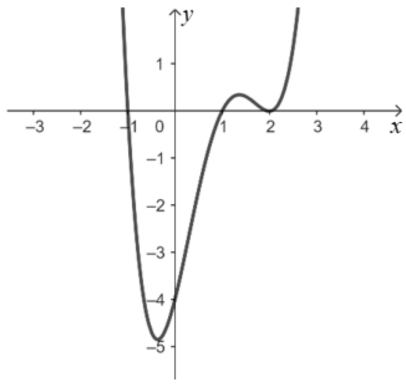
Chọn C

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Từ đồ thị, ta được bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Câu 35: Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $(-1;2)$ và $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$.

C. $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

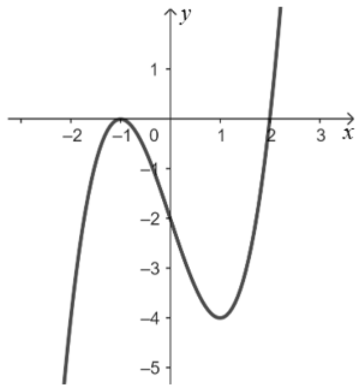
Chọn C

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Từ đồ thị, ta được bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$			$\nearrow$		

Câu 36: Hàm số bậc ba $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x-1)$?



A. $(1;+\infty)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. **D.** $(3;+\infty)$

.

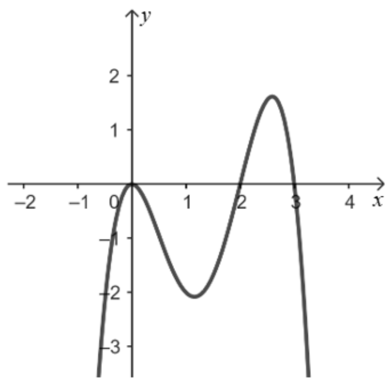
Lời giải

Chọn D

$g'(x) = f'(x-1)$.

Hàm số đồng biến khi $g'(x) = f'(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x-1 \geq 2 \Leftrightarrow x \geq 3$

Câu 37: Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới.



Hàm số $y = f(x^2 - 2x + 3)$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(2;+\infty)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-\infty;2)$.

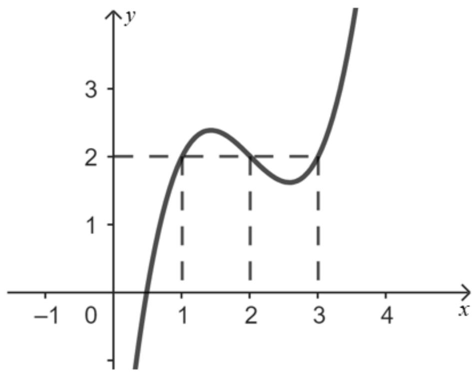
Lời giải

Chọn B

$$y'=\left[f\left(x^2-2x+3\right)\right]'=\left(2x-2\right)f'\left(x^2-2x+3\right)\le 0$$

Hàm số đồng biến khi $\left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}2x-2\ge 0\\ f'\left(x^2-2x+3\right)\le 0\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}2x-2\le 0\\ f'\left(x^2-2x+3\right)\ge 0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x^2-2x+3\le 2\\ x^2-2x+3\ge 3\end{array}\right.\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x\le 1\\ 2\le x^2-2x+3\le 3\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge 2\\ 0\le x\le 1\end{array}\right.$

Câu 38: Hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g\left(x\right)=2f\left(x\right)-4x+7$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(1;2\right)\cup\left(3;+\infty\right)$.

B. $\left(-\infty;1\right)$ và $\left(2;3\right)$.

C. $\left(1;2\right)$ và $\left(3;+\infty\right)$.

D. $\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;3\right)$.

Lời giải

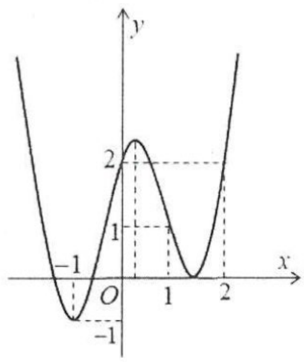
Chọn A

$$g'\left(x\right)=2f'\left(x\right)-4=0\Leftrightarrow f'\left(x\right)=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=2\\ x=3\end{array}\right.$$

Từ đồ thị, ta được bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	

Câu 39: Hàm số $y=f'\left(x\right)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x)=f(x)-\dfrac{x^2}{2}+2\;;(C)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số (C) nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

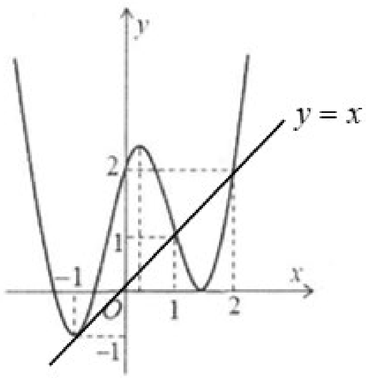
B. Hàm số (C) nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

C. Hàm số (C) đồng biến trên khoảng $(-1;2)$.

D. Hàm số (C) đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A



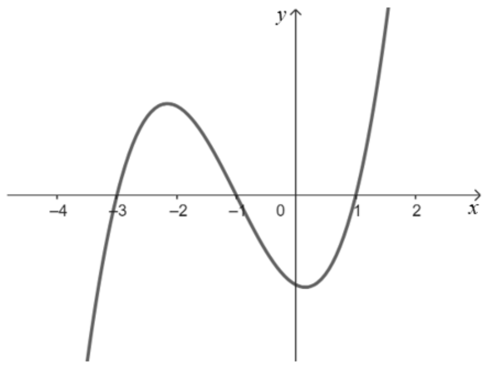
$$g'(x)=f'(x)-x=0 \Leftrightarrow f'(x)=x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$$

Vẽ đường thẳng $d: y=x$ trên cùng hệ trục tọa độ với (C). d cắt (C) tại các điểm có hoành độ $x=-1; x=1; x=2$.

Từ đồ thị, ta được bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗		↗		↘		↗	

Câu 40: Cho hàm số bậc bốn $y=f(x)$. Hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Tổng bình phương các điểm cực đại của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2)$ bằng bao nhiêu?

A. 6. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị, ta chọn

$f'(x) = (x+3)(x+1)(x-1) \Rightarrow f'(x^2-2) = (x^2+1)(x^2-1)(x^2-3)$

Ta có $g'(x) = \left[f(x^2-2)\right]' = 2xf'(x^2-2) = 2x(x^2+1)(x^2-1)(x^2-3)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \\ x = \pm 1 \end{array}\right.$$

Tất cả đều là nghiệm đơn nên đổi dấu 5 lần.

Ta được bảng biến thiên:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		0		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Câu 41: Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \dfrac{x^2+1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ bằng 2 là:

A. $y = -x + 7$. **B.** $y = -x - 5$. **C.** $y = x - 5$. **D.** $y = x + 7$.

Lời giải

Chọn A

$y = \dfrac{x^2+1}{x-1}; D = \mathbb{R}\setminus\{1\}$

$y' = \dfrac{x^2-2x-1}{(x-1)^2}$

$x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 5; y'(2) = -1$

$\Delta: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0 = -(x-2) + 5 = -x + 7$

Câu 42: Cho đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(3;1)$ là:

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

$(C): y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}; D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

$y'=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm $\Rightarrow M\left(x_0;\dfrac{x_0^2+x_0-1}{x_0-1}\right)$

Phương trình tiếp tuyến tại $M: y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0=\dfrac{(x_0^2-2x_0)}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\left(\dfrac{x_0^2+x_0-1}{x_0-1}\right)$

$A(3;1)\in(C)\Rightarrow 1=\dfrac{(x_0^2-2x_0)}{(x_0-1)^2}(3-x_0)+\left(\dfrac{x_0^2+x_0-1}{x_0-1}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\ x_0=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

$\Rightarrow$ có 2 tiếp tuyến.

Câu 43: Biết trên đồ thị $(C): y=\dfrac{x-1}{x+2}$ có hai điểm mà tiếp tuyến tại các điểm đó đều song song với đường thẳng $d: 3x-y+15=0$. Tìm tổng S các tung độ tiếp điểm.

A. $S=3$. **B.** $S=14$. **C.** $S=-4$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Chọn B

$(C): y=\dfrac{x-1}{x+2}; D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$

$y'=\dfrac{3}{(x+2)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại $M: y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

$$d: 3x-y+15=0\Leftrightarrow y=3x+15$$

Tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Rightarrow y'(x_0)=k_d=3$

$$\Rightarrow\dfrac{3}{(x_0+2)^2}=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\Rightarrow y_0=-2\\ x_0=-3\Rightarrow y_0=4\end{array}\right.$$

Vậy có 2 tiếp tuyến:

$\Delta_1: y = 3(x+1) - 2 = 3x + 1$

$\Delta_2: y = 3(x+3) + 4 = 3x + 13$

$\Rightarrow y_1 + y_2 = 1 + 13 = 14$

Câu 44: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ có đồ thị (C). Phương trình tiếp tuyến của (C) mà có hệ số góc lớn nhất là:

A. $y = 3x + 1$. **B.** $y = -3x - 1$. **C.** $y = -3x + 1$. **D.** $y = 3x - 1$.

Lời giải

Chọn A

$(C): y = -x^3 + 3x^2 + 2; D = \mathbb{R}$

$y' = -3x^2 + 6x$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại M có hệ số góc $k = y'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 = 3 - 3(x_0 - 1)^2 \geq 3$.

$k_{\max} = 3 \; khi \; x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 4$

$d: y = 3(x-1) + 4 = 3x + 1$

Câu 45: Đường thẳng $y = 2m$ là tiếp tuyến của đường cong $y = -x^3 + 3x + 4$ khi m bằng

A. -3 hoặc 1. **B.** 3 hoặc 1. **C.** 3 hoặc -1. **D.** -3 hoặc -1.

Lời giải

Chọn B

$d \; tx \; (C)$ khi hệ phương trình $\begin{cases} y_{(C)} = y_d \\ y'_{(C)} = y'_d \end{cases}$ có nghiệm.

$\begin{cases} -x^3 + 3x + 4 = 2m \; (1) \\ -3x^2 + 3 = 0 \; (2) \end{cases}$

$(2) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow m = 3 \\ x = -1 \Rightarrow m = 1 \end{array} \right.$

Câu 46: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ vuông góc với đường thẳng $y = -\frac{1}{9}x$ là

A. $y = -\frac{1}{9}x + 18, y = -\frac{1}{9}x + 5$. **B.** $y = \frac{1}{9}x + 18, y = \frac{1}{9}x - 14$.

C. $y = 9x + 18, y = 9x - 14$. **D.** $y = 9x + 18, y = 9x + 5$.

Lời giải

Chọn C

$(C): y = x^3 - 3x + 2; D = \mathbb{R}$

$y' = 3x^2 - 3$

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại $M: y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $y=\dfrac{-1}{9}x$

$\Rightarrow y'(x_0)=\dfrac{-1}{k_d}=9$

$\Rightarrow 3x_0^2-3=9 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=2\Rightarrow y_0=4 \\ x_0=-2\Rightarrow y_0=0 \end{array}\right.$

Vậy có 2 tiếp tuyến:

$\Delta_1: y=9(x-2)+4=9x-14$

$\Delta_2: y=9(x+2)=9x+18$

Câu 47: Cho hàm số $y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để tiếp tuyến có hệ số góc nhỏ nhất của đồ thị (C_m) vuông góc với đường thẳng $\Delta: y=3x+2024$.

A. $m=\dfrac{7}{3}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=2$. **D.** $m=\dfrac{-1}{3}$.

Lời giải

Chọn C

$(C): y=x^3-2x^2+(m-1)x+2m; D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-4x+m-1$

Gọi $M(x_0;y_0)\in(C)$ là tiếp điểm.

Phương trình tiếp tuyến tại $M: y=y'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

$$k=y'(x_0)=3x_0^2-4x_0+m-1$$

Tiếp tuyến tại M có hệ số góc: $k'=6x_0-4$

$$k'=0\Leftrightarrow x_0=\frac{2}{3}\Rightarrow k=\frac{-7}{3}+m$$

x_0	$-\infty$		$\dfrac{2}{3}$		$+\infty$
k'		$-$	0	$+$	
k	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-7}{3}+m$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow k_{\min}=\dfrac{-7}{3}+m$, tiếp tuyến này vuông góc với đường thẳng $y=3x+2024$

$\Rightarrow k_{\min}=\dfrac{-1}{k_d}=\dfrac{-1}{3}$

$\Rightarrow \dfrac{-7}{3}+m=\dfrac{-1}{3}\Leftrightarrow m=2$

Câu 48: Gọi *S* là tập hợp các giá trị của hàm số *m* sao cho đường thẳng $d: y = mx - m - 3$ cắt đồ thị $(C): y = 2x^3 - 3x^2 - 2$ tại ba điểm phân biệt *A, B,* $I(1;-3)$ mà tiếp tuyến với (C) tại *A* và tại *B* vuông góc với nhau. Tính tổng các phần tử của *S*.

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$(C): y = 2x^3 - 3x^2 - 2; D = \mathbb{R}$

$y' = 6x^2 - 6x$

Phương trình hoành độ giao điểm: $2x^3 - 3x^2 - 2 = mx - m - 3$

$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 - mx + m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(2x^2 - x - m - 1) = 0 \ (1)$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ g(x) = 2x^2 - x - m - 1 = 0 \ (2) \end{array}\right.$

d cắt (C) tại 3 điểm phân biệt khi phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt

$\Rightarrow (2)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$\Rightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 9 > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \dfrac{-9}{8} \\ m \neq 0 \end{cases}$

Khi đó, gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $(2) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{1}{2} \\ x_1.x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-m-1}{2} \end{cases}$.

Các tiếp tuyến có hệ số góc: $k_1 = 6x_1^2 - 6$; $k_2 = 6x_2^2 - 6$

2 tiếp tuyến này vuông góc nhau nên:

$k_1.k_2 = -1$

$\Leftrightarrow (6x_1^2 - 6)(6x_2^2 - 6) = -1$

$\Leftrightarrow 36(x_1x_2)^2 - 36(x_1^2 + x_2^2) + 37 = 0$

$\Leftrightarrow 36\left(\dfrac{-m-1}{2}\right)^2 - 36\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\dfrac{-m-1}{2}\right)\right] + 37 = 0$

$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m_1 = \dfrac{3 + 2\sqrt{2}}{3} \\ m_2 = \dfrac{3 - 2\sqrt{2}}{3} \end{array}\right.$

Suy ra $m_1 + m_2 = 2$.

Câu 49: Giả sử đường thẳng $y = ax + b$ là tiếp tuyến chung của đồ thị hàm số $y = x^2 - 5x + 6$ và $y = x^2 + 3x - 10$. Tính $M = 2a + b$.

A. $M = 16$. **B.** $M = -4$. **C.** $M = 4$. **D.** $M = 7$.

Lời giải

Chọn B

Đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2-5x+6$ khi phương trình $x^2-5x+6=ax+b\Leftrightarrow x^2-(5+a)x+6-b=0$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta=(a+5)^2-4(6-b)=0\ (1)$

Đường thẳng $y=ax+b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=x^2+3x-10$ khi phương trình $x^2+3x-10=ax+b\Leftrightarrow x^2+(3-a)x-10-b=0$ có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta=(a-3)^2+4(b+10)=0\ (2)$

Giải hệ phương trình $(1),(2)$ ta được $a=3;\ b=-10$

Vậy: $M=2a+b=-4$.

Câu 50: Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}$ có đồ thị (C). Có bao nhiêu điểm trên trục tung, có tọa độ nguyên thỏa mãn $x^2+y^2<144$, mà từ đó vẽ được ít nhất một tiếp tuyến tới (C).

A. 14. **B.** 15. **C.** 16. **D.** vô số.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(0;m)$ là điểm cần tìm.

Tọa độ M thỏa $x^2+y^2<144$ nên $-12<m<12$.

Đường thẳng Δ qua M có hệ số góc k có phương trình:

$\Delta: y=k(x-x_0)+y_0=kx+m$

Phương trình hoành độ giao điểm:

$\dfrac{x^2+3x+3}{x+1}=kx+m\Leftrightarrow g(x)=(k-1)x^2+(k+m-2)x+m-3=0\ (1)$

Δ tiếp xúc (C) khi phương trình (1) có nghiệm kép khác -1

$$\Rightarrow\begin{cases} a=k-1\neq 0\ (a)\\ \Delta=(k+m-2)^2-4(k-1)(m-3)=0\ \ (b)\\ g(-1)=2k+2m-6\neq 0\ (c)\end{cases}$$

$(b)\Leftrightarrow k^2+2k(4-m)+4m-8=0$

Có ít nhất 1 tiếp tuyến $\Rightarrow$ hệ có nghiệm

$\Rightarrow \Delta'=(4-m)^2-(4m-8)=m^2-12m+24\geq 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} m\geq 6+2\sqrt{3}\\ m\leq 6-2\sqrt{3}\end{array}\right.$$

$(a): k\neq 1\Rightarrow m\neq \dfrac{-1}{2}$

$(c): k\neq 3-m\Rightarrow 3m^2-16m+25\neq 0\Rightarrow \forall m$

Suy ra: $m\in\{-11;...;-1;0;1;2;10;11\}$.

Câu 51: Biết $A(0;y), B(x;1)$ thuộc đồ thị hàm số $y=x^3+x^2-1$ khi đó giá trị $x+y$ là

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn B

$(C): y=x^3+x^2-1$

$A(0;y)\in(C)\Rightarrow y=-1$

$B(x;1)\in(C)\Rightarrow x^3+x^2-1=1\Leftrightarrow x=1$

$\Rightarrow x+y=1-1=0.$

Câu 52: Điểm nào sau đây không thuộc đồ thị hàm số $y=x^4-2x^2-1$?

A. $(-1;2)$. **B.** $(2;7)$. **C.** $(0;-1)$. **D.** $(1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

$(C): y=x^4-2x^2-1$

$x=-1\Rightarrow y=-2.$

Câu 53: Đồ thị hàm số $y=x^2+2mx-m+1$ (m là tham số) luôn đi qua điểm M cố định có tọa độ là

A. $M\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. **B.** $M(-1;0)$. **C.** $M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$. **D.** $M(0;1)$.

Lời giải

Chọn C

$M(x;y)$ là điểm cố định của họ đồ thị khi $y=x^2+2mx-m+1$ thỏa $\forall m$

$\Leftrightarrow (2x-1)m=y-x^2-1, \forall m$

$$\Rightarrow \begin{cases}2x-1=0\\ y=x^2+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}\\ y=\dfrac{5}{4}\end{cases}\Rightarrow M\left(\frac{1}{2};\frac{5}{4}\right)$$

Câu 54: Tâm đối xứng của đồ thị hàm số nào sau đây cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất?

A. $y=\dfrac{2x-1}{x+3}$. **B.** $y=\dfrac{1-x}{1+x}$. **C.** $y=2x^3-3x^2-2$. **D.** $y=-x^3+3x-2$.

Lời giải

Chọn A

$y=\dfrac{2x-1}{x+3}$ có tâm đối xứng $I(-3;2)\Rightarrow OI=\sqrt{13}$.

$y=\dfrac{1-x}{1+x}$ có tâm đối xứng $I\left(-1;-1\right)\Rightarrow OI=\sqrt{2}$.

$y=2x^3-3x^2-2$ có tâm đối xứng $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{-5}{2}\right)\Rightarrow OI=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$.

$y=-x^3+3x-2$ có tâm đối xứng $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{-5}{8}\right)\Rightarrow OI=\dfrac{\sqrt{41}}{8}$.

Câu 55: Trên đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x+4}$ có bao nhiêu điểm có tọa độ nguyên?

A. 6. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

$\left(C\right):y=\dfrac{2x-1}{x+4}=2-\dfrac{9}{x+4}$

$M\left(x;y\right)\in\left(C\right)$ có tọa độ nguyên khi

$$\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\9\vdots\left(x+4\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\\left[\begin{array}{l}x+4=9\Rightarrow x=5;y=1\\x+4=-9\Rightarrow x=-13;y=3\\x+4=3\Rightarrow x=-1;y=-1\\x+4=-3\Rightarrow x=-7;y=5\\x+4=1\Rightarrow x=-3;y=-7\\x+4=-1\Rightarrow x=-5;y=11\end{array}\right.\end{cases}$$

Câu 56: Tìm tọa độ điểm M có hoành độ dương thuộc đồ thị $\left(C\right)$ của hàm số $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ sao cho khoảng cách từ M đến hai đường tiệm cận của đồ thị $\left(C\right)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M\left(1;-3\right)$. **B.** $M\left(3;5\right)$. **C.** $M\left(0;-1\right)$. **D.** $M\left(4;3\right)$.

Lời giải

Chọn A

$y=\dfrac{x+2}{x-2}=1+\dfrac{4}{x-2}$

$M\left(x_0;y_0\right)\in\left(C\right)\Rightarrow M\left(x_0;1+\dfrac{4}{x_0-2}\right)$

Tiệm cận đứng $x-2=0$; khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng: $d_1=\left|x_0-2\right|$.

Tiệm cận ngang $y-1=0$; khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang:

$$d_2=|y_0-2|=\left|1+\frac{4}{x_0-2}-1\right|=\frac{1}{|x_0-2|}.$$

$$d_1+d_2=|x_0-2|+\frac{1}{|x_0-2|}\ge 2\sqrt{|x_0-2|.\frac{1}{|x_0-2|}}$$

$$\Rightarrow (d_1+d_2)_{\min}=2\ khi\ |x_0-2|=\frac{1}{|x_0-2|}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=-3\Rightarrow y_0=\frac{1}{5} \\ x_0=1\Rightarrow y_0=-3 \end{array}\right.$$

Vì M có hoành độ dương nên chọn **A.**

Câu 57: Số điểm có tọa độ nguyên thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x^2+3x+10}{x+2}$ là:

A. 16. **B.** 12. **C.** 10. **D.** 8.

Lời giải

Chọn B

$$(C): y=\frac{2x^2+3x+10}{x+2}=2x-1+\frac{12}{x+2}$$

$M(x;y)\in(C)$ có tọa độ nguyên khi $\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x\in\mathbb{Z} \\ 12\,\vdots\,(x+2)\end{cases}$

12 có 12 ước số nên có 12 điểm.

Câu 58: Cho hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ có đồ thị là (C). Gọi $M(x_M;y_M)$ là một điểm bất kỳ trên (C). Khi tổng khoảng cách từ M đến hai trục tọa độ là nhỏ nhất, tính tổng x_M+y_M.

A. $2\sqrt{2}-1$. **B.** 1. **C.** $2-2\sqrt{2}$. **D.** $2-\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

$$y=\frac{x+1}{x-1}$$

$$M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;\frac{x_0+1}{x_0-1}\right)$$

Khoảng cách từ M đến trục tung: $d_1=|x_0|$.

Khoảng cách từ M đến trục hoành: $d_2=|y_0|=\left|\dfrac{x_0+1}{x_0-1}\right|$.

$$d_1 + d_2 = |x_0| + \left|\frac{x_0+1}{x_0-1}\right| \geq \left|x_0 + \frac{x_0+1}{x_0-1}\right|$$

Dấu bằng xảy ra khi $x_0.\frac{x_0+1}{x_0-1} \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 > 1 \\ -1 \leq x_0 \leq 0 \end{array}\right.$

Đặt $f(x) = x + \frac{x+1}{x-1} = \frac{x^2+1}{x-1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên

x	-1		$1-\sqrt{2}$		0		1		$1+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	$2-2\sqrt{2}$	$\searrow$	-1		$+\infty$	$\searrow$	$2+2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $\left|x + \frac{x+1}{x-1}\right| \geq \left|2-2\sqrt{2}\right| = 2\sqrt{2}-2$.

Dấu bằng xảy ra khi $x = 1-\sqrt{2} \Rightarrow y = 1-\sqrt{2} \Rightarrow x_M + y_M = 2-2\sqrt{2}$.

Câu 59: Công suất P (đơn vị W) của một mạch điện được cung cấp bởi một nguồn pin $12V$ được cho bởi công thức $P = 12I - 0,5I^2$ với I (đơn vị A) là cường độ dòng điện. Tìm công suất tối đa của mạch điện.

A. 72. **B.** 12. **C.** $-\frac{1}{192}$. **D.** $\frac{23}{2}$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $P = 12I - 0,5I^2$ với $I \geq 0$.

$P' = 12 - I$. $P' = 0 \Leftrightarrow I = 12$.

Bảng biến thiên:

I	0		12		$+\infty$
P		$\nearrow$	72	$\searrow$	

Công suất tối đa của mạch điện là $72(W)$ đạt được khi cường độ dòng điện là $12(A)$.

Câu 60: Khi nuôi cá thí nghiệm trong hồ, một nhà khoa học đã nhận thấy rằng: nếu trên mỗi đơn vị diện tích của mặt hồ có n con cá thì trung bình mỗi con cá sau một vụ cân nặng là $P(n)=480-20n(g)$. Hỏi phải thả bao nhiêu con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất?

A. 14 **B.** 13 **C.** 12 **D.** 11

Lời giải

Chọn C

Gọi $F(n)$ là hàm cân nặng của n con cá sau vụ thu hoạch trên một đơn vị diện tích

Ta có: $F(n)=(480-20n).n=480n-20n^2$

Để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất thì cân nặng của n con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ là lớn nhất.

Câu toán trở thành tìm $n\in\mathbb{N}^*$ sao cho F(x) đạt GTLN.

$F'(n)=480-40n$

$F'(n)=0\Leftrightarrow 480-40n=0\Leftrightarrow n=12$

Học sinh tự lập bảng biến thiên.

Vậy phải thả 12 con cá trên một đơn vị diện tích của mặt hồ để sau một vụ thu hoạch được nhiều cá nhất.

Câu 61: Để giảm nhiệt độ trong phòng từ 28^0C, một hệ thống làm mát được phép hoạt động trong 10 phút. Gọi T (đơn vị ^0C) là nhiệt độ phòng ở phút thứ t được cho bởi công thức $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$. Tìm nhiệt độ thấp nhất trong phòng đạt được trong thời gian 10 phút kể từ khi hệ thống làm mát bắt đầu hoạt động.

A. $27,832^0C$. **B.** $18,4^0C$. **C.** $26,2^0C$. **D.** $25,312^0C$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $T=-0,008t^3-0,16t+28$ với $t\in[1;10]$.

$T'=-0,024t^2-0,16<0,\forall t\in[1;10]$.

Suy ra hàm số T nghịch biến trên đoạn $[1;10]$.

Nhiệt độ thấp nhất trong phong đạt được là $T_{\min}=T(10)=18,4^0C$.

Câu 62: Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2.000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

A. 2.250.000 **B.** 2.350.000 **C.** 2.450.000 **D.** 2.550.000

Lời giải

Chọn A

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x: đồng; $x\geq 2000.000$ đồng)

Ta có thể lập luận như sau:

Tăng giá 100.000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống.

Tăng giá $x-2.000.000$ đồng thì có bao nhiêu căn hộ bị bỏ trống.
Theo quy tắc tam xuất ta có số căn hộ bị bỏ trống là:

$$\frac{2\left(x-2.000.000\right)}{100.000}=\frac{x-2.000.000}{50.000}$$

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50-\frac{x-2.000.000}{50.000}=-\frac{x}{50.000}+90$$

Gọi $F\left(x\right)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, (F(x): đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{x}{50.000}+90\right)x=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$ (bằng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

Câu toán trở thành tìm GTLN của $F\left(x\right)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$, ĐK: $x\geq 2.000.000$

$$F'\left(x\right)=-\frac{1}{25.000}x+90$$

$$F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x+90=0\Leftrightarrow x=2.250.000$$

Bảng biến thiên:

X	2.000.000		2.250.000		$+\infty$
F'(x)		+	0	−	
F(x)		$\nearrow$	F_{max}	$\searrow$	

Suy ra F(x) đạt giá trị lớn nhất khi $x=2.250.000$
Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.
Nhận xét:

Sau khi tìm được hàm $F(x)=-\frac{1}{50.000}x^2+90x$. Ta không cần phải đi khảo sát và vẽ bảng biến thiên như trên. Đề đã cho bốn đáp án x, ta dùng phím CALC của MTCT để thay lần lượt các giá trị vào, cái nào làm cho F(x) lớn nhất chính là giá trị cần tìm.

Câu 63: Một cửa hàng bán bưởi Đoan Hùng của Phú Thọ với giá bán mỗi quả là 50.000 đồng. Với giá bán này thì cửa hàng chỉ bán được khoảng 40 quả bưởi. Cửa hàng này dự định giảm giá bán, ước tính nếu cửa hàng cứ giảm mỗi quả 5000 đồng thì số bưởi bán được tăng thêm là 50 quả. Xác định giá bán để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá nhập về ban đầu mỗi quả là 30.000 đồng.

A. 44.000đ **B.** 43.000đ **C.** 42.000đ **D.** 41.000đ

Lời giải

Chọn C

Gọi x là giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng, (x: đồng; $30.000\leq x\leq 50.000$ đồng).

Ta có thể lập luận như sau:
Giá 50.000 đồng thì bán được 40 quả bưởi
Giảm giá 5.000 đồng thì bán được thêm 50 quả.
Giảm giá 50.000 – x thì bán được thêm bao nhiêu quả?
Theo quy tắc tam xuất số quả bán thêm được là:

$$\left(50000-x\right).\frac{50}{5000}=\frac{1}{100}\left(50000-x\right).$$

Do đó Số quả bưởi bán được tương ứng với giá bán x:

$$40+\frac{1}{100}\left(50000-x\right)=-\frac{1}{100}x+540$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được ($F(x)$: đồng).

Ta có: $F(x)=\left(-\frac{1}{100}x+540\right).\left(x-30.000\right)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$

Câu toán trở thành tìm GTLN của

$F(x)=-\frac{1}{100}x^2+840x-16.200.000$, Đk: $30.000\le x\le 50.000$.

$$F'\left(x\right)=-\frac{1}{50}x+840$$

$$F'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -\frac{1}{50}x+840=0\Leftrightarrow x=42.000$$

Vì hàm F(x) liên tục trên $30.000\le x\le 50.000$ nên ta có:

$$F\left(30.000\right)=0$$

$$F\left(42.000\right)=1.440.000$$

$$F\left(50.000\right)=800.000$$

Vậy với $x=42.000$ thì $F\left(x\right)$ đạt GTLN.

Vậy để cửa hàng đó thu được lợi nhuận lớn nhất thì giá bán thực tế của mỗi quả bưởi Đoan Hùng là 42.000 đồng.

Câu 64: Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được đo bởi công thức $G\left(x\right)=0,25x^2\left(30-x\right)$ trong đó $x\left(mg\right)$ và x > 0 là lượng thuốc cần tiêm cho bệnh nhân. Để huyết áp giảm nhiều nhất thì cần tiêm cho bệnh nhân một liều lượng bằng bao nhiêu:

A. 15mg **B.** 30mg **C.** 40mg **D.** 20mg

Lời giải

Chọn D

Ta có: $G\left(x\right)=0,25x^2\left(30-x\right)=\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{40}x^3$

$$G'\left(x\right)=\frac{3}{2}x-\frac{3}{40}x^2$$

$$G'\left(x\right)=0\Leftrightarrow \frac{3}{2}x-\frac{3}{40}x^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0(\text{loai}) \\ \text{x}=20(\text{t/ m}) \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

X	0		20		$+\infty$
G'(x)		+	0	−	
G(x)		↗	100	↘	

Dựa vào bảng biến thiên thì bênh nhân cần tiêm một lượng thuốc $20mg$

Câu 65: Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $G(t): 45t^2 - t^3$, (kết quả khảo sát được trong 10 tháng vừa qua). Nếu xem $G'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người / ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ:

A. 25 **B.** 30 **C.** 20 **D.** 15

Lời giải

Chọn D

Ta có:

$G'(t) = 90t - 3t^2$

$G''(t) = 90 - 6t$

$G''(t) = 0 \Leftrightarrow 90 - 6t = 0 \Leftrightarrow t = 15$

Bảng biến thiên:

T	0		15		$+\infty$
G''(t)		+	0	−	
G(t)		↗	675	↘	

Vậy tốc độ truyền bệnh lớn nhất sẽ vào ngày thứ 15.

Câu 66: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ trong ngày cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. Khi nào mực nước của kênh là cao nhất với thời gian ngắn nhất?

A. $t = 10(h)$ **B.** $t = 14(h)$ **C.** $t = 15(h)$ **D.** $t = 22(h)$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$h' = -3\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$h' = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow t = -2 + 6k, \left(k \in Z_{(+)}\right)$$

ở đây ta chỉ cần xét một số giá trị

Bảng biến thiên:

Ta suy ra được h đạt GTLN khi $t = 10$ (h)

Lưu ý: Ngoài cách trên ta có thể làm như sau

Vì $-1 \le cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right) \le 1 \Rightarrow 9 \le 3cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+12 \le 15.$

Vậy để h lớn nhất thì $cos\left(\frac{\pi t}{6}+\frac{\pi}{3}\right)=1 \Leftrightarrow t=-2+12k,\left(k \in Z_{(+)}\right)$

Vậy h đạt GTLN khi $t = 10$ (h)

Câu 67: Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm tính theo công thức $V(t)=\frac{1}{100}\left(30t^3-\frac{t^4}{4}\right)$ $(0 \le t \le 90)$

Tốc độ bơm nước tại thời điểm t được tính bởi $v(t)=V'(t)$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng.

A. Tốc độ bơm giảm từ phút 60 đến phút thứ 90.

B. Tốc độ bơm luôn giảm.

C. Tốc độ bơm tăng từ phút 0 đến phút thứ 75.

D. Cả A, B, C đều sai.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm $V'=\frac{9}{10}t^2-\frac{1}{100}t^3 \quad (0 \le t \le 90)$

$V''=\frac{9}{5}t-\frac{3}{100}t^2 \Rightarrow V''=0$ khi $t=0, t=60$

Dựa vào bảng biến thiên, Ta có hàm số V’ đồng biến trên (0;60), nghịch biến trên (60;90).

Câu 68: Một xe khách đi từ Việt Trì về Hà Nội chở tối đa được là 60 hành khách một chuyến. Nếu một chuyến chở được m hành khách thì giá tiền cho mỗi hành khách được tính là $\left(30-\frac{5m}{2}\right)^2$ đồng. Tính số hành khách trên mỗi chuyến xe để nhà xe thu được lợi nhuận mỗi chuyến xe là lớn nhất.?

A. 30 **B.** 40 **C.** 50 **D.** 60

Lời giải

Chọn B

Gọi x là số hành khách trên mỗi chuyến xe để số tiền thu được là lớn nhất, $(0 < x \le 60)$

Gọi F(x) là hàm lợi nhuận thu được (F(x): đồng)

Số tiền thu được:

$$F(x)=\left(300-\frac{5x}{2}\right)^2.x=90.000x-1500x^2+\frac{25}{4}x^3$$

Câu toán trở thành tìm x để F(x) đạt giá trị lớn nhất.

$F'(x) = 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 90000 - 3000x + \frac{75}{4}x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 120(loai) \\ x = 40(\text{t/ m}) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

X	0		40		60
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Vậy để thu được số tiền lớn nhất thì trên mỗi chuyến xe khách đó phải chở 40 người.

Câu 69: Gia đình ông Thanh nuôi tôm với diện tích ao nuôi là $100m^2$. Vụ tôm vừa qua ông nuôi với mật độ là $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống và sản lượng tôm khi thu hoạch được khoảng 2 tấn tôm. Với kinh nghiệm nuôi tôm nhiều năm, ông cho biết cứ thả giảm đi $\left(200g/m^2\right)$ tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được 2,2 tấn tôm. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu kg tôm giống để đạt sản lượng tôm cho thu hoạch là lớn nhất? (Giả sử không có dịch bệnh, hao hụt khi nuôi tôm giống).

A. $\frac{230}{3}kg$ **B.** $70kg$ **C.** $72kg$ **D.** $69kg$

Lời giải

Chọn A

Số Kg tôm giống mà ông Thanh thả vụ vừa qua: 100.1= 100(kg).

Gọi x (0<x<100) là số kg tôm cần thả ít đi trong vụ tôm tới.

Khối lượng trung bình $1\left(kg/m^2\right)$ tôm giống thu hoạch được: $2000:100 = 20\left(kg\right)$

Khi giảm 0,2 kg tôm giống thì thì sản lượng tôm thu hoạch tăng thêm là $2\left(kg/m^2\right)$

Gọi $F(x)$ là hàm sản lượng tôm thu được vụ tới $(F(x):kg)$

Vậy sản lượng tôm thu hoạch được trong vụ tới có pt tổng quát là:

$F(x) = (100 - x)\left(20 + \frac{3}{8}x\right) = 2000 + \frac{35}{2}x - \frac{3}{8}x^2$

Bìa toán trở thành tìm x để F(x) lớn nhất.

Ta có:

$F'(x) = \frac{25}{2} - \frac{3}{4}x$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{25}{2} - \frac{3}{4}x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{70}{3}$

Bảng biến thiên

X	0	$\frac{70}{3}$	100
F'(x)	+	0	−
F(x)	↗	F_{max}	↘

Vậy vụ tới ông Thanh phải thả số kg tôm giống là:

$100-\frac{70}{3}=\frac{230}{3}\approx 76,67(kg)$

Nhận xét:

Làm sao ta có thể tìm được hàm F(x) và tìm được hệ số $\frac{3}{8}$

Ta có thể hiểu đơn giản như sau: nếu ta không giảm số lượng tôm giống thì sản lượng tôm thu hoạch được là: $100.20=2000(kg)$ tôm.

Nếu ta giảm số $x(kg)$ tôm giống thì số tôm giống cần thả là $100-x$ và số kg tôm thu hoạch được là: $(100-x)(20+mx)kg$

Theo giả thiết tôm giống giảm 0,2 $\left(kg/m^2\right)$ thì $100m^2$ giảm $x=20kg$, sản lượng thu được là $2200kg$.

Ta có: $(100-20)(20+m20)=2200 \Leftrightarrow m=\frac{3}{8}$

Câu 70: Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất.

A. 480 ngàn. **B.** 50 ngàn. **C.** 450 ngàn. **D.** 80 ngàn.

Lời giải

Chọn C

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x>400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x-400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x: $\frac{(x-400)+2}{20}=\frac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50-\frac{x-400}{10}=90-\frac{x}{10}$.

Tổng doanh thu trong ngày là: $f(x)=x\left(90-\frac{x}{10}\right)=-\frac{x^2}{10}+90x$.

$f'(x)=-\frac{x}{5}+90$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=450$.

Bảng biến thiên:

x	400		450		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	20250	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 2.025.000 đồng.

Câu 71: Một doanh nghiệp bán xe gắn máy trong đó có loại xe A bán ế nhất với giá mua vào mỗi chiếc xe là 26 triệu VNĐ và bán ra 30 triệu VNĐ, với giá bán này thì số lượng bán một năm là 600 chiếc. Cửa hàng cần đẩy mạnh việc bán được loại xe này nên đã đưa ra chiến lược kinh doanh giảm giá bán và theo tính toán của CEO nếu giảm 1 triệu VNĐ mỗi chiếc thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi cửa hàng định giá bán loại xe đó bao nhiêu thì doanh thu loại xe đó của cửa hàng đạt lớn nhất.

A. 29 triệu VNĐ **B.** 27, 5 triệu VNĐ **C.** 29, 5 triệu VNĐ **D.** 27 triệu VNĐ

Lời giải

Chọn C

Gọi x (triệu VNĐ) là số tiền cần giảm cho mỗi chiếc xe $(0 \le x \le 4)$.

Số lượng xe bán ra được trong một năm sau khi giảm giá là: $x.200 + 600$ (chiếc)

Số lợi nhuận thu được từ việc bán xe trong một năm sau khi giảm giá là: $(x.200 + 600)(4 - x)$

Xét hàm số $f(x) = (x.200 + 600)(4 - x) = 200(-x^2 + x + 12)$ $(0 \le x \le 4)$ đạt giá trị lớn nhất là 2450 khi $x = \frac{1}{2}$.

Câu 72: Công ty dụ lịch Ban Mê dự định tổ chức một tua xuyên Việt. Công ty dự định nếu giá tua là 2 triệu đồng thì sẽ có khoảng 150 người tham gia. Để kích thích mọi người tham gia, công ty quyết định giảm giá và cứ mỗi lần giảm giá tua 100 ngàn đồng thì sẽ có thêm 20 người tham gia. Hỏi công ty phải bán giá tua là bao nhiêu để doanh thu từ tua xuyên Việt là lớn nhất.

A. 1375000. **B.** 3781250. **C.** 2500000. **D.** 3000000.

Lời giải

Chọn A

Gọi x (triệu đồng) là giá tua.

Giá đã giảm so với ban đầu là $2 - x$.

Số người tham gia tăng thêm nếu giá bán x là: $\frac{(2-x)20}{0,1} = 400 - 200x$.

Số người sẽ tham gia nếu bán giá x là: $150+(400-200x)=550-220x$.

Tổng doanh thu là: $f(x)=x(550-200x)=-200x^2+550x$.

$f'(x)=-400x+550$. $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{11}{8}$.

Bảng biến thiên

x	0		$\frac{11}{8}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{3025}{8}$	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x=\dfrac{11}{8}=1,375$.

Vậy công ty cần đặt giá tua 1375000 đồng thì tổng doanh thu sẽ cao nhất là 378125000 đồng.

Câu 73: Một cửa hàng nhận làm những chiếc xô bằng nhôm hình trụ không có nắp đủ chứa được10 lít nước. Hỏi bán kính đáy (đơn vị cm, làm tròn đến hàng phần chục) của chiếc xô bằng bao nhiêu để cửa hàng tốn ít nguyên vật liệu nhất.

A. $14,7$ **B.** 15 **C.** $15,2$ **D.** 14

Lời giải

Chọn A

Gọi x ($x>0$) là bán kính của chiếc xô. Khi đó $V=\pi x^2 h \Rightarrow h=\dfrac{V}{\pi x^2}$.

Để tiết kiệm nguyên vật liệu thì diện tích toàn phần của chiếc xô phải bé nhất.

Ta có: $10l=10dm^3=10000cm^3$.

Diện tích toàn phần của chiếc xô là:

$$S(x)=\pi x^2+2\pi xh=\pi x^2+2\pi x\frac{V}{\pi x^2}=\pi x^2+2\frac{10000}{x}=\pi x^2+\frac{20000}{x}$$

$$S'(x)=2\pi x-\frac{20000}{x^2}=\frac{2\pi x^3-20000}{x^2}.$$

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow 2\pi x^3-20000=0 \Leftrightarrow x^3=\frac{10000}{\pi} \Leftrightarrow x=10.\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$$

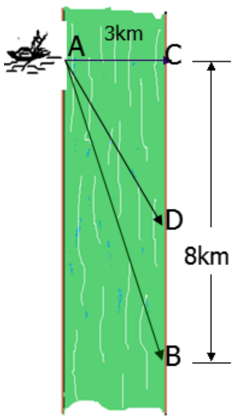
Bảng biến thiên:

x	0		$10.\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}}$		$+\infty$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$		$\searrow$	$2039,4$	$\nearrow$	

Ta thấy diện tích toàn phần chiếc xô nhỏ nhất khi bán kính đáy xô là $x = 10\sqrt[3]{\frac{10}{\pi}} \approx 14,7(\text{cm})$

.

Câu 74: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng $3km$ (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B, hay có thể chèo trực tiếp đến B, hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B. Biết anh ấy có thể chèo thuyền $6km/h$, chạy $8km/h$ và quãng đường $BC = 8km$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tìm khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: giờ) để người đàn ông đến B.



A. $\frac{3}{2}$ **B.** $\frac{9}{\sqrt{7}}$ **C.** $\frac{\sqrt{73}}{6}$ **D.** $1+\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $CD = x$. Quãng đường chạy bộ $DB = 8 - x$ và quãng đường chèo thuyền $AD = \sqrt{9 + x^2}$.

Khi đó, thời gian chèo thuyền là $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}$ và thời gian chạy bộ là $\frac{8-x}{8}$.

Tổng thời gian mà người đàn ông cần có là:

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8}, \forall x \in [0;8].$$

Ta có: $T'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$.

$T'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x}{6\sqrt{x^2+9}}=\dfrac{1}{8} \Leftrightarrow 4x=3\sqrt{x^2+9} \Leftrightarrow 16x^2=9(x^2+9) \Leftrightarrow 7x^2=81 \Rightarrow x=\dfrac{9}{\sqrt{7}}$

Ta có: $T(0)=\dfrac{3}{2}$; $T\left(\dfrac{9}{\sqrt{7}}\right)=1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$; $T(8)=\dfrac{\sqrt{73}}{6}$.

Do đó: $\min\limits_{[0;8]} T(x)=T\left(\dfrac{9}{\sqrt{7}}\right)=1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian ngắn nhất mà người đàn ông cần dùng là $1+\dfrac{\sqrt{7}}{8}\approx 1,33(h)$ bằng cách chèo thuyền đến điểm D cách C một khoảng $\dfrac{9}{\sqrt{7}}(km)$ rồi từ đó chạy bộ đến điểm B.

Câu 75: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+9t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $216\ (m/s)$ **B.** $30\ (m/s)$ **C.** $400\ (m/s)$ **D.** $54\ (m/s)$

Lời giải

Chọn D

Vận tốc tại thời điểm t là $v(t)=s'(t)=-\dfrac{3}{2}t^2+18t$ với $t\in[0;10]$.

Ta có : $v'(t)=-3t+18=0 \Leftrightarrow t=6$.

Suy ra: $v(0)=0; v(10)=30; v(6)=54$. Vậy vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $54\ (m/s)$.

Câu 76: Một vật chuyển động theo quy luật $s=-\dfrac{1}{2}t^3+6t^2$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 6 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

A. $24(m/s)$. **B.** $108(m/s)$. **C.** $18(m/s)$. **D.** $64(m/s)$.

Lời giải

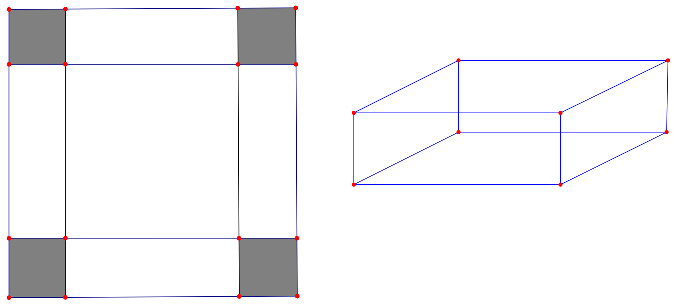
Chọn A

Ta có $v(t)=s'(t)=-\dfrac{3t^2}{2}+12t$;

$v'(t)=-3t+12$; $v'(t)=0 \Leftrightarrow t=4$.

$v(0)=0$; $v(4)=24$; $v(6)=18$. Suy ra vận tốc lớn nhất của vật đạt được trong 6 giây đầu là $24(m/s)$.

Câu 77: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12 cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng x (cm), rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



A. $x=6$ **B.** $x=3$ **C.** $x=2$ **D.** $x=4$

Lời giải

Chọn C

Ta có : $h=x\ (cm)$ là đường cao hình hộp

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $12-2x\ (cm)$

Vậy diện tích đáy hình hộp $S=(12-2x)^2\left(cm^2\right)$. Ta có:

$$\begin{cases} x>0 \\ 12-2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<6 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0;6)$$

Thể tích của hình hộp là: $V=S.h=x.(12-2x)^2$

Xét hàm số: $y=x.(12-2x)^2\ \forall x\in(0;6)$

Ta có : $y'=(12-2x)^2-4x(12-2x)=(12-2x)(12-6x)$;

$y'=0\Leftrightarrow(12-2x).(12-6x)=0\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=6$ (loại).

x	0		2		6
y'		+	0	−	
y		↗		↘	

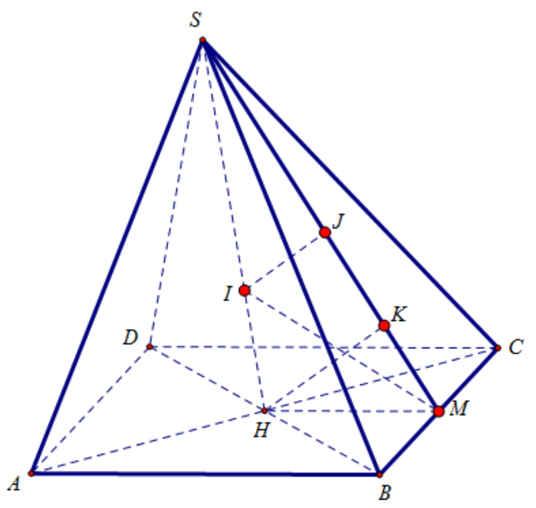
Suy ra với $x=2$ thì thể tích hộp là lớn nhất và giá trị lớn nhất đó là $y(2)=128$.

Câu 78: Một kiến trúc sư mốn thiết kế một mô hình kim tự tháp Ai Cập có dạng là một hình chóp tứ giác đều ngoại tiếp một mặt cầu có bán kính bằng $6m$.Để tiết kiệm nguyên liệu xây dựng thì kiến trúc sư đó phải thiết kế kim tự tháp sao cho có thể tích nhỏ nhất. Chiều cao của kim tự tháp đó là:

A. $12m$. **B.** $18m$. **C.** $36m$. **D.** $24m$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử kim tự tháp là hình chóp đều $S.ABCD$, gọi M là trung điểm của BC

Kẻ phân giác trong góc $\widehat{SMH}$ cắt SH tại I. I là tâm mặt cầu nội tiếp hình chóp đã cho

Từ I hạ IJ vuông góc (SBC), Từ H hạ HK vuông góc (SBC), IJ=R=6

Theo Ta-lét. $\frac{SI}{SH}=\frac{IJ}{HK} \Leftrightarrow \frac{h-6}{h}=\frac{6}{HK} \Leftrightarrow HK=\frac{6h}{h-6}; SH=h; HM=\frac{a}{2}$

$$HK=\frac{SH.HM}{\sqrt{SH^2+HM^2}} \Leftrightarrow \frac{6h}{h-6}=\frac{ah}{2\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}}$$

$$\Leftrightarrow a^2=\frac{144h^2}{h^2-12h}=\frac{144h}{h-12} \Rightarrow V=\frac{1}{3}.\frac{144h}{h-12}h$$

Xét hàm

$$f(h)=\frac{h^2}{h-12} \Rightarrow f'(h)=\frac{h(h-24)}{(h-12)^2} \Rightarrow f'(h)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} h=0 \\ h=24 \end{array}\right.$$

Lập bảng biến thiên có Thể tích V đạt GTNN khi *h =24*.

Câu 79: Một công ty chuyên sản xuất thùng phi nhận được đơn đặt hàng với yêu cầu là thùng phi phải chứa được $16\pi\left(m^3\right)$ mỗi chiếc. Hỏi chiếc thùng phải có kích thước như thế nào để sản suất ít tốn vật liệu nhất?

A. $R=2(m), h=4(m)$ **B.** $R=4(m), h=2(m)$

C. $R=3(m), h=4(m)$ **D.** $R=4(m), h=4(m)$

Lời giải

Chọn A

Do thùng phi có dạng hình trụ nên:

$$V_{tru} = \pi R^2 h = 16\pi \Leftrightarrow h = \frac{16}{R^2}, (1)$$

Diện tích toàn phần của thùng phi là:

$$S_{Tp} = 2\pi R^2 + 2\pi Rh = 2\pi R(h+R), (2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$S_{Tp} = 2\pi R\left(\frac{16}{R^2} + R\right) = 2\pi\left(\frac{16}{R} + R^2\right)$$

$$S'_{Tp} = 2\pi\left(-\frac{16}{R^2} + 2R\right) = \frac{4\pi}{R^2}\left(R^3 - 8\right)$$

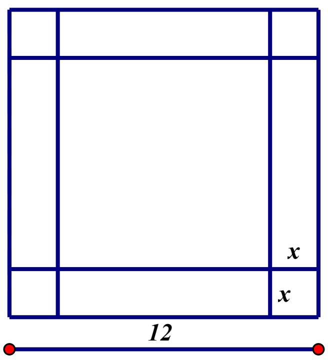
$$S'_{Tp} = 0 \Leftrightarrow \frac{4\pi}{R^2}\left(R^3 - 8\right) = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Bảng biến thiên

R	0		2		$+\infty$
S'(R)		−	0	+	
S(R)		↘	S_{min}	↗	

Vậy để sản xuất thùng phi ít tốn vật liệu nhất thì R= 2(m) và chiều cao là h = 4 (m).

Câu 80: Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 12cm. Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh $x(cm)$, rồi gấp tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được cái hộp không nắp. Tìm x để được một cái hộp có thể tích lớn nhất.



A. $x = 6(cm)$ **B.** $x = 3(cm)$ **C.** $x = 2(cm)$ **D.** $x = 4(cm)$

Lời giải

Chọn C

Khi cắt tấm nhôm hình vuông và gập thành một cái hộp thì độ dài cạnh của cái hộp là: $12 - 2x$

Ta có:

$$V = S.h = (12-2x)^2 .x = 4x^3 - 48x + 144x \text{ với } 0 < x \le 6$$

Câu toán trở thành tìm x để V lớn nhất.

Ta có:

$V' = 12x^2 - 96x + 144$

$V' = 0 \Leftrightarrow 12x^2 - 96x + 144 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

			2		
		+	0	−	
			128		

Vậy để thể tích hộp lớn nhất thì x =2 cm

Câu 81: Cuốn sách giáo khoa cần một trang chữ có diện tích là $384cm^2$. Lề trên và dưới là $3cm$, lề trái và lề phải là $2cm$. Kích thước tối ưu của trang giấy?

A. Dài $24cm$, rộng $17cm$ **B.** Dài $30cm$, rộng $20cm$

C. Dài $24cm$, rộng $18cm$ **D.** Dài $24cm$, rộng $19cm$

Lời giải

Chọn B

Gọi chiều dài của trang chữ nhật là $x(cm),(x > 0)$

Chiều rộng của trang chữ nhật là: $\frac{384}{x}cm$

Chiều dài của trang giấy là $x + 6(cm)$

Chiều rộng của trang giấy là: $\frac{384}{x} + 4(cm)$

Diện tích trang giấy: $S = (x+6)\left(\frac{384}{x} + 4\right) = 408 + 4x + \frac{2304}{x}$

Câu toán trở thành tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Ta có: $S'(x) = 4 - \frac{2304}{x^2}$

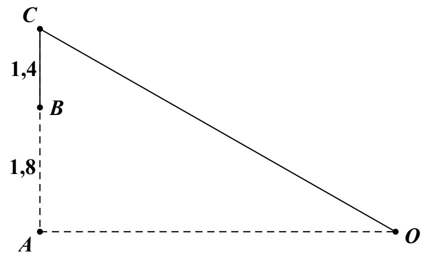
$S' = 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{2304}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 24(t/m) \\ x = -24(loai) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	0		24		$+\infty$
S'(x)		−	0	+	
S(x)			S_{min}		

Vậy kích thước tối ưu của trang giấy có chiều dài là 30 cm, chiều rộng là 20 cm.

Câu 82: Một màn ảnh hình chữ nhật cao 1,4 mét và đặt ở độ cao 1,8 mét so với tầm mắt (tính từ đầu mép dưới của màn hình). Để nhìn rõ nhất phải xác định vị trí đó? Biết rằng góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn.



A. $AO = 2,4m$ **B.** $AO = 2m$ **C.** $AO = 2,6m$ **D.** $AO = 3m$

Lời giải

Chọn A

Đặt độ dài cạnh $AO = x(cm),(x > 0)$

Suy ra:

$BO = \sqrt{3,24 + x^2}, CO = \sqrt{10,24 + x^2}$

Ta sử dụng định lí cosin trong tam giác OBC ta có:

$$\cos\widehat{BOC} = \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2.OB.OC} = \frac{(3,24 + x^2) + (10,24 + x^2) - 1,96}{2\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

$$= \frac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$$

Vì góc $\widehat{BOC}$ là góc nhọn nên Câu toán trở thành Câu toán tìm x để $F(x) = \dfrac{5,76 + x^2}{\sqrt{(3,24 + x^2)(10,24 + x^2)}}$

Đạt GTNN.

Đặt $(3,24 + x^2) = t,(t > 3,24)$.

Suy ra $F(t) = \dfrac{t + \dfrac{63}{25}}{\sqrt{t(t+7)}} = \dfrac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}$

Ta tìm t để $F(t)$ nhận giá trị nhỏ nhất.

$$F'(t) = \left(\frac{25t + 63}{25\sqrt{t(t+7)}}\right)' = \frac{1}{25}\left(\frac{25\sqrt{t(t+7)} - (25t + 63)\left(\dfrac{2t + 7}{2\sqrt{t(t+7)}}\right)}{t(t+7)}\right)$$

$$= \frac{1}{25}\left(\frac{50(t^2 + 7t) - (25t + 63)(2t + 7)}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right) = \frac{1}{25}\left(\frac{49t - 441}{2t(t+7)\sqrt{t(t+7)}}\right)$$

$F'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 9$

BBT

t	3,24		9		$+\infty$
F'(t)		$-$	0	$+$	
F(t)			F_{min}		

Thay vào đặt ta có: $\left(3,24+x^2\right)=9 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{144}{25} \Leftrightarrow x=2,4m$

Vậy để nhìn rõ nhất thì AO =2,4 m.

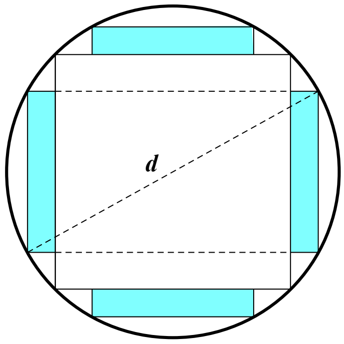
Câu 83: Một khúc gỗ tròn hình trụ cần xẻ thành một chiếc xà có tiết diện ngang là hình vuông và 4 miếng phụ như hình vẽ. Hãy xác định kích thước của các miếng phụ để diện tích sử dụng theo tiết diện ngang là lớn nhất. Biết đường kính khúc gỗ là d.

A. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

B. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{15}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

C. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{14}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

D. Rộng $\dfrac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{13}d$, dài $\dfrac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$



Lời giải

Chọn A

Gọi chiều dài và chiều rộng của miếng phụ lần lượt là x, y. Đường kính của khúc gỗ là d, khi đó tiết diện ngang của thanh xà có độ dài cạnh là $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$ và $0<x<\dfrac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}, 0<y<\dfrac{d}{\sqrt{2}}$

Theo đề Câu ta được hình chữ nhật ABCD như hình vẽ, theo định lý Pitago ta có:

$$\left(2x+\frac{d}{\sqrt{2}}\right)^2+y^2=d^2 \Leftrightarrow y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}x}$$

Do đó, miếng phụ có diện tích là:

$$S\left(x\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx} \text{ với } 0<x<\frac{d\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}$$

Câu toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

Ta có:

$$S'(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}+\frac{x\left(-8x-2\sqrt{2}d\right)}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$$

$$=\frac{-16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2}{\sqrt{2}\sqrt{d^2-8x^2-4\sqrt{2}dx}}$$

$$S'(x)=0\Leftrightarrow -16x^2-6\sqrt{2}dx+d^2=0\Leftrightarrow -16\left(\frac{x}{d}\right)^2-6\sqrt{2}\left(\frac{x}{d}\right)+1=0$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$$

BBT

X	0		$\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d$		$\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)}{4}d$
S'(x)		+	0	−	
S(x)		↗	S_{max}	↘	

Vậy miếng phụ có kích thước $x=\frac{\sqrt{34}-3\sqrt{2}}{16}d, y=\frac{\sqrt{7-\sqrt{17}}}{4}d$

Câu 84: Nhà Long muốn xây một hồ chứa nước có dạng một khối hộp chữ nhật có nắp đậy có thể tích bằng $576m^3$. Đáy hồ là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá tiền thuê nhân công để xây hồ tính theo m^2 là 500.000 đồng/m^2. Hãy xác định kích thước của hồ chứa nước sao cho chi phí thuê nhân công là ít nhất và chi phí đó là bao nhiêu?

A. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 216 triệu

B. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 215 triệu

C. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 214 triệu

D. Rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Tiền: 213 triệu.

Lời giải

Chọn A

Gọi x, y, h lần lượt là chiều dài, chiều rộng, chiều cao của hồ chứa nước, $\left(x>0, y>0, h>0, m\right)$

Ta có: $\frac{y}{x}=2\Leftrightarrow y=2x$

Thể tích hồ chứa nước $V=xyh\Leftrightarrow h=\frac{V}{xy}=\frac{576}{x(2x)}=\frac{288}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hồ chứa nước:

$$S(x)=2xy+2xh+2yh=2x(2x)+2x\frac{288}{x^2}+2(2x)\frac{288}{x^2}=4x^2+\frac{1728}{x}$$

Để chi phí nhân công là ít nhất thì diện tích cần xây dựng là nhỏ nhất, mà vẫn đạt thể tích như mong muốn.

Câu toán trở thành tìm x để $S(x)$ nhỏ nhất.

$S(x)=4x^2+\dfrac{1728}{x}$

$S'(x)=0 \Leftrightarrow 8x-\dfrac{1728}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=6$

BBT

X	0		6		$+\infty$
S'(x)		$-$	0	$+$	
S(x)		$\searrow$	$S_{\min}$	$\nearrow$	

Vậy kích thước của hồ là: rộng 6m, dài 12m, cao 8m. Diện tích cần xây: $432m^2$
Chi phí ít nhất là: $432x500.000=216.000.000$

Câu 85: Tìm diện tích lớn nhất của hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn bán kính R, nếu một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của hình tròn mà hình chữ nhật đó nội tiếp?

A. $2R^2$ **B.** $5R^2$ **C.** R^2 **D.** $3R^2$

Lời giải

Chọn C

Gọi x là độ dài cạnh của hình chữ nhật không nằm dọc theo đường kính của hình tròn $(0<x<R)$.

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $2\sqrt{R^2-x^2}$

Ta có diện tích của hình chữ nhật là: $S(x)=2x\sqrt{R^2-x^2}$

Câu toán trở thành tìm x để S(x) đạt GTLN.

$S'(x)=2\sqrt{R^2-x^2}-\dfrac{2x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=\dfrac{2R^2-4x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}$

$S'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2R^2-4x^2}{\sqrt{R^2-x^2}}=0 \Leftrightarrow 2R^2-4x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}(\text{t/ m}) \\ x=\dfrac{-R\sqrt{2}}{2}(\text{loai}) \end{array}\right.$

BBT:

X	0		$\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$		R
S'(x)		$+$	0	$-$	
S(x)		$\nearrow$	R^2	$\searrow$	

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là R^2

Câu 86: Để thiết kế một chiếc bể cá hình chữ nhật có chiều cao là $60cm$, thể tích là $96.000cm^3$, người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành 70.000 đồng/m^2 và loại kính để làm mặt đáy có giá thành là 100.000 đồng/m^2. Chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là:

A. 83.200.000 đồng **B.** 382.000 đồng

C. 83.200 đồng **C.** 8.320.000 đồng.

Lời giải

Chọn C

Diện tích của đáy hộp là: $S=\frac{V}{h}=\frac{96.000}{60}=1600cm^2=0,16m^2$

Gọi chiều dài cạnh đáy của hộp là $x,(x>0,m)$

Chiều rộng của hộp là $\frac{0,16}{x}$

Gọi $F(x)$ là hàm chi phí để làm để cá.

Chi phí để hoàn thành bể cá:

$$F(x)=0,16\times 100.000+2.0,6x.70.000+2.0,6.\frac{0,16}{x}.70.000$$

$$=16.000+48.000x+\frac{13440}{x}$$

Câu toán trở thành tìm x để F(x) đạt GTNN.

$$F'(x)=84.000-\frac{13440}{x^2}$$

$$F'(x)=0\Leftrightarrow 84.000-\frac{13440}{x^2}=0\Leftrightarrow x=0,4$$

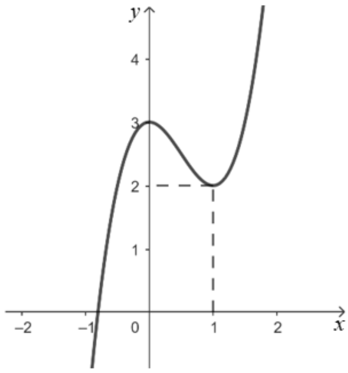
BBT

X	0		0,4		$+\infty$
F'(x)		−	0	+	
F(x)		$\searrow$	F_{min}	$\nearrow$	

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là: 83.200 đồng

E. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới



A. Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$.

B. Hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=0$.

C. Hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$.

D. Hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

A. Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;1\right)$. ✓

B. Hàm số $f\left(x\right)$ không đạt cực tiểu tại $x=0$. ✗

C. Hàm số $f\left(x\right)$ không đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;0\right)$. ✗

D. Hàm số $f\left(x\right)$ đạt cực tiểu tại $x=1$. ✓

Câu 2. Xét đường thẳng $d: y=4-2x$ và đường cong $\left(C\right): y=\dfrac{2x+4}{x+1}$.

A. Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường cong $\left(C\right)$.

B. $\left(C\right)$ cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương.

C. $\left(C\right)$ cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

D. Đường thẳng d cắt đường cong $\left(C\right)$ tại hai điểm phân biệt.

Lời giải

Điều kiện: $x\neq 1$.

Phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng và đường cong:

$\dfrac{2x+4}{x+1}=4-2x \Leftrightarrow 2x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

Vậy đường thẳng có 1 điểm chung với $\left(C\right)$.

Với $x=0 \Rightarrow y=4$ suy ra $\left(C\right)$ cắt trục tung tại điểm $\left(0;4\right)$.

Với $y=0 \Rightarrow x=-2$ suy ra $\left(C\right)$ cắt trục hoành tại điểm $\left(-2;0\right)$.

A. Đường thẳng d là tiếp tuyến của đường cong (C). ✓

B. (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ dương. ✗

C. (C) cắt trục tung tại điểm có tung độ dương. ✓

D. Đường thẳng d cắt đường cong (C) tại hai điểm phân biệt. ✗

Câu 3. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Phương trình $f(x)+3=0$ vô nghiệm.

D. Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

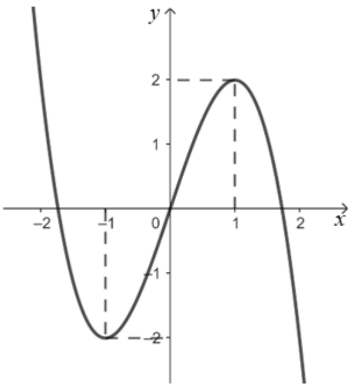
A. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(0;1)$, suy ra nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. ✓

B. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$, suy ra không đồng biến khoảng $(-2;+\infty)$. ✗

C. Do $f(x)\ge -2, \forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình $f(x)+3=0 \Leftrightarrow f(x)=-3$ vô nghiệm. ✓

D. Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị. ✓

Câu 4. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên.



A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$.

C. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2024}$ là 3.

D. Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=2024$ tại 3 điểm phân biệt.

Lời giải

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1;1)$. ×

B. Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x=-1$. ✓

C. Từ đồ thị hàm số $y=f(x)$ suy ra phương trình $f(x)=\dfrac{1}{2024}$ có đúng 3 nghiệm phân biệt. ✓

D. Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y=2024$ tại 1 điểm. ×

Câu 5. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+2024}{x-1}$ có đồ thị (C).

A. (C) có đường tiệm cận đứng là $x=1$.

B. (C) có đường tiệm cận xiên là $y=x+1$.

C. (C) có 2 trục đối xứng.

D. Trên (C) có đúng 4 điểm có tọa độ nguyên.

Lời giải

$$y=\frac{x^2-2x+2024}{x-1}=x-1+\frac{2023}{x-1};\ D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

A. (C) có đường tiệm cận đứng là $x=1$. ✓

B. (C) có đường tiệm cận xiên là $y=x-1$. ×

C. (C) có 2 trục đối xứng là 2 đường phân giác của các góc tạo bởi 2 đường tiệm cận. ✓

D. $M(x;y)\in(C)$ có tọa độ nguyên khi $\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ y\in\mathbb{Z}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in\mathbb{Z}\\ 2023\,\vdots\,(x-1)\end{cases}$ 2023 có 4 ước số nên có 4 điểm. ✓

Câu 6. Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	||	–	0	+	
$f(x)$		↗	2	↘	|| $-\infty$	↘		↗	$-\infty$

	$-\infty$ $\qquad$ $-\infty$	4

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=2$.

D. Hàm số đạt giá trị lớn nhất là $y=2$.

Lời giải

A. Hàm số $f(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$. ✗

B. Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(0;1)$. ✓

C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x=-1$. ✗

D. Hàm số không có giá trị lớn nhất. ✗

Câu 7. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=x(x-1)(x+4)^3, \forall x\in\mathbb{R}$.

A. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4.

B. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

D. Hàm số $g(x)=f(x^2-1)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{2};+\infty)$.

Lời giải

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$		-4		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$g(x)=f(x^2-1)$

$\Rightarrow g'(x)=2x.f'(x^2-1)=2x(x^2-1)\left[(x^2-1)-1\right]\left[(x^2-1)+4\right]^3$

$=2x(x^2-1)(x^2-2)(x^2+3)$

$$g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm 1 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

)	

Dựa vào bảng xét dấu suy ra

A. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 4. ✗

B. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2. ✓

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. ✓

D. Hàm số $g(x)=f\left(x^2-1\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt{2};+\infty\right)$. ✓

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)=x^3-3m^2x+2024$ có đồ thị (C).

A. (C) luôn có hai điểm cực trị.

B. Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định.

C. Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm.

D. Khi (C) có 2 cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y=ax+b$. Đặt $S=a+b$ thì $S\le 2024$.

Lời giải

$(C): y=f(x)=x^3-3m^2x+2024;\ D=\mathbb{R}$

$y'=3x^2-3m^2$

$y''=6x; y''=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=2024$

$y=\frac{1}{3}x.y'+\left(-2m^2+2024\right)$

Tại các điểm cực trị, $y'=0$ nên đường thẳng đi qua các điểm cực trị của hàm số có phương trình $y=-2m^2x+2024$

$\Rightarrow a=-2m^2; b=2024$

$\Rightarrow S=a+b=-2m^2+2024<2024$

Lưu ý khi $m=0$ thì hàm số không có cực trị.

A. (C) luôn có hai điểm cực trị. ✗

B. Khi m thay đổi, (C) luôn có tâm đối xứng cố định. ✓

C. Khi m thay đổi, (C) luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm. ✓ (hàm số bậc ba luôn cắt trục hoành tại ít nhất 1 điểm)

D. Khi (C) có 2 cực trị, đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của (C) có dạng $y=ax+b$. Đặt $S=a+b$ thì $S\le 2024$. ✗ (dấu "=" không xảy ra)

Câu 9. Cho hàm số $y=f(x)=x^3+3x$ có đồ thị (C).

A. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6.

B. Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=3x^2+3$.

C. Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị.

D. $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$.

Lời giải

$y'=3x^2+3$, suy ra hàm số không có cực trị vì $y'=3x^2+3>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4

$\Rightarrow y0=4\Rightarrow x_0^3+3x_0=4\Leftrightarrow x_0=1\Rightarrow f'(x_0)=6$

A. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị (C) tại điểm có tung độ bằng 4 là 6. ✓

B. Đạo hàm của hàm số đã cho là $y'=3x^2+3$. ✓

C. Hàm số đã cho có đúng 2 cực trị. ✗

D. $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$. ✗

Câu 10. Cho hàm số $y=\dfrac{1-2x}{x+1}$ có đồ thị (C).

A. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-1$.

B. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=1$.

C. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2;-1)$.

D. $\forall M\in(C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3.

Lời giải

$y=\dfrac{1-2x}{x+1}=-2+\dfrac{3}{x+1}$

Tiệm cận đứng: $x=-1$.

Tiệm cận ngang: $y=-2$.

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $(-1;-2)$

$M(x_0;y_0)\in(C)\Rightarrow M\left(x_0;-2+\dfrac{3}{x_0+1}\right)$

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng: $d_1=|x_0+1|$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận ngang: $d_2=|y_0+2|=\left|-2+\dfrac{3}{x_0+1}+2\right|=\dfrac{3}{|x_0+1|}$.

$d_1.d_2=3$.

A. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là $x=-1$. ✓

B. Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y=1$. ✗

C. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $(-2;-1)$. ✗

D. $\forall M\in(C)$ tích khoảng cách từ M đến các đường tiệm cận luôn bằng 3. ✓

Câu 11. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)=x(x+1)^{2025}(x-3)^{2024}, \forall x\in\mathbb{R}$.

A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$.

C. Biết $f(0)=0$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.

D. Hàm số $g(x)=f(x^2-1)$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0		$\nearrow$		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm, nên đồ thị hàm số cắt trục hoành tai hai điểm.

$g(x)=f(x^2-1)$

$\Rightarrow g'(x)=2x.f'(x^2-1)=2x(x^2-1)\left[(x^2-1)+1\right]^{2025}\left[(x^2-1)-3\right]^{2024}$

$=2x^{4051}(x^2-1)\left[x^2-4\right]^{2024}$

Phương trình $g'(x)=0$ có 3 nghiệm bội lẻ và 2 nghiệm bội chẵn nên có 3 cực trị.

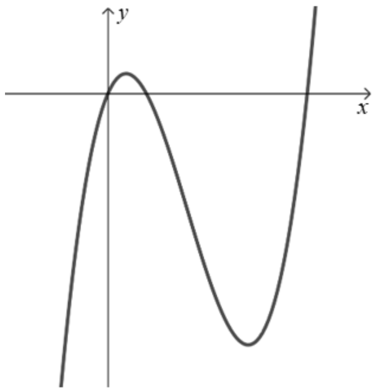
A. Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$. ✓

B. Hàm số $y=f(x)$ đạt cực đại tại $x=0$. ✗

C. Biết $f(0)=0$, đồ thị hàm số $y=f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt. ✗

D. Hàm số $g(x)=f(x^2-1)$ có 3 điểm cực trị. ✓

Câu 12. Cho hàm số $y=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên.



A. Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu.

B. Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm.

C. Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt.

D. Trong các hệ số a,b,c,d có 2 hệ số dương.

Lời giải

$y=ax^3+bx^2+cx+d$

$y'=3ax^2+2bx+c$

"Nhánh bên phải" hướng lên $\Rightarrow a>0$

Đồ thị qua gốc tọa độ $x_0=0 \Rightarrow y_0=d=0$.

Gọi $x_1;x_2$ là hoành độ các cực trị

$x_1+x_2=\dfrac{-2b}{3a}>0 \Rightarrow \dfrac{b}{a}<0 \Rightarrow b<0$

$x_1.x_2=\dfrac{c}{3a}>0 \Rightarrow c>0$

A. Hàm số có hai điểm cực trị trái dấu. ✗

B. Tổng giá trị cực đại và giá trị cực tiểu là số âm. ✓

C. Phương trình $y'=0$ có ba nghiệm phân biệt. ✓

D. Trong các hệ số a,b,c,d có 2 hệ số dương. ✓

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Cho hàm số $y=x^3-3x+1$. Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I(a;b)$ thì $a+b=?$

Lời giải

Trả lời: 1

$y=x^3-3x+1$

$y'=3x^2-3$

$y''=6x$

$y''=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1 \Rightarrow I(0;1) \Rightarrow a+b=0+1=1.$

Câu 2. Cho hàm số $y=x^3-3x^2+1$. Đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y=ax+b$ thì $a+b=?$

Lời giải

Trả lời: -1

$y = x^3 - 3x^2 + 1$

$y' = 3x^2 - 6x$

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow A(0;1) \\ x = 2 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow B(2;-3) \end{array}\right.$

$AB: y = -2x + 1 \Rightarrow a + b = -2 + 1 = -1$

Câu 3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}$. Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là A và B, $I(a;b)$ là trung điểm AB thì $a + b = ?$

Lời giải

Trả lời: 4

$y = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1} = x + 2 + \dfrac{3}{x - 1}$

Tiệm cận đứng: $x = 1$

Tiệm cận xiên: $y = x + 2$

Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là giao điểm của hai đường tiệm cận: $I(1;3)$.

Hai điểm cực trị đối xứng nhau qua $I(1;3)$ nên $I(1;3)$ cũng là trung điểm AB.

Vậy $a + b = 1 + 3 = 4$.

Câu 4. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$. Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Lời giải

Trả lời: 6,32

$y = \dfrac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

$y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = -1 \Rightarrow A(0;-1) \\ x = 2 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow B(2;5) \end{array}\right.$

$\overrightarrow{AB} = (2;6) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10} \approx 6.32$

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \neq 0$ thuộc đoạn $[-5;5]$, để đường thẳng $d: y = mx + 1$ cắt đồ thị hàm số $(C): y = \dfrac{-2x + 1}{x - 1}$ tại hai điểm phân biệt?

Lời giải

Trả lời: 10

Điều kiện $x \neq 1$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$\dfrac{-2x+1}{x-1} = mx+1 \Leftrightarrow (mx+1)(x-1) = -2x+1$

$\Leftrightarrow mx^2 + (3-m)x - 2 = 0$

Đặt $g(x) = mx^2 + (3-m)x - 2 = 0$.

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi phương trình $g(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ (3-m)^2 + 8m > 0 \\ m+3-m-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 + 2m + 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0.$$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-5;5] \end{cases}$ nên $m \in \{-5;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;5\}$.

Vậy có 10 giá trị.

Câu 6. Cho hàm số $y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$, với m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$.

Lời giải

Trả lời: 7

$y = -x^3 - mx^2 + (4m+9)x + 5$

$y' = -3x^2 - 2mx + (4m+9)$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;+\infty)$ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-\infty;+\infty)$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 12m + 27 \leq 0 \end{cases}.$

$\Leftrightarrow -9 \leq m \leq -3$

Vì m nguyên nên $m \in \{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3\}$.

Vậy có 7 giá trị.

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị?

Lời giải

Trả lời: 42

Xét hàm số $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + m;\ y' = 15x^4 - 75x^2 + 60$

$$y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=m-16 \\ x=-1 \Rightarrow y=m-38 \\ x=1 \Rightarrow y=m+38 \\ x=2 \Rightarrow y=m+16 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

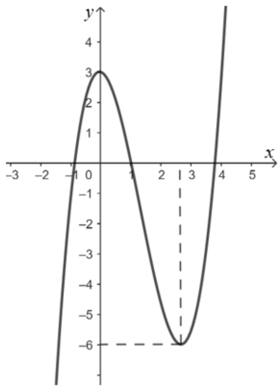
x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$m-16$	$\searrow$	$m-38$	$\nearrow$	$m+38$	$\searrow$	$m+16$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên để hàm số đã cho có 7 điểm cực trị khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} m-38<0<m-16 \\ m+16<0<m+38 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 16<m<38 \\ -38<m<-16 \end{array}\right..$$

Vậy có tất cả 42 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 8. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới



Đặt $g(x)=f[f(x)]$. Tìm số nghiệm của phương trình $g'(x)=0$.

Lời giải

Trả lời: 6

Dựa vào đồ thị ta thấy $f(x)$ đạt cực trị tại $x=0, x=a \in (2;3)$.

Suy ra $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x=a \text{ (nghiệm đơn)} \end{array}\right.$.

Ta có $g'(x)=f'(x).f'[f(x)]; g'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f'(x)=0 \\ f'[f(x)]=0 \end{array}\right.$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \text{ (nghiệm đơn)} \\ x=a \text{ (nghiệm đơn)} \end{array}\right.$$

$$f'\left[f(x)\right]=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x)=0 \ (1) \\ f(x)=a \ (2) \end{array}\right.$$

Dựa vào đồ thị suy ra:

- Phương trình (1) có ba nghiệm.
- Phương trình (2) có ba nghiệm.

Vậy phương trình $g'(x)=0$ có 6 nghiệm.

Câu 9. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024;2024]$, để đường thẳng $d: y=x+2m$ cắt đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x-3}{x+1}$ tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung?

Lời giải

Trả lời: 2023

Điều kiện $x \neq -1$. Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C):

$$\frac{x-3}{x+1}=x+m \Leftrightarrow (x+m)(x+1)=x-3$$

$$\Leftrightarrow x^2+2mx+2m+3=0$$

Đặt $g(x)=x^2+2mx+2m+3=0$.

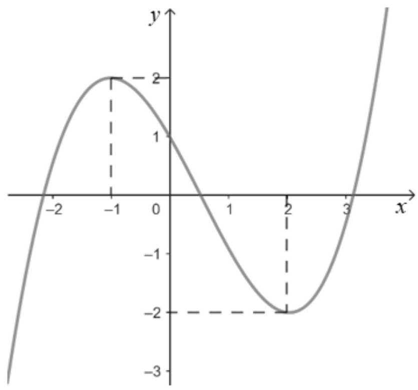
d cắt (C) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung khi phương trình $g(x)=0$ có hai nghiệm $x_1;x_2$ khác -1 và $x_1.x_2<0$.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta>0 \\ g(-1)\neq 0 \\ \dfrac{c}{a}<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2-2m-3>0 \\ 1-2m+2m-3 \neq 0 \\ 2m+3<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m<\dfrac{-3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} m<-1 \\ m>3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow m<\frac{-3}{2}.$$

Vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2024;2024] \end{cases}$ nên $m \in \{-2024;-2023;...-2\}$.

Vậy có 2023 giá trị.

Câu 10. Cho hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên.



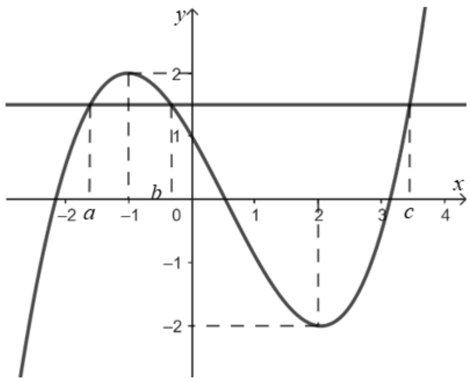
Hỏi hàm số $g(x)=\left|\left[f(x)\right]^2-3f(x)+1\right|$ có bao nhiêu điểm cực trị.

Lời giải

Trả lời: 9

$g'(x)=f'(x).\left[2f(x)-3\right]$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\ f(x)=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(-2;-1)\\ x=b\in(-1;0)\\ x=c>3\\ x=-1\\ x=2\end{array}\right..$$



Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		a		-1		b		2		c		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$g(a)<0$	↗	-1	↘	$g(b)<0$	↗	11	↘	$g(c)>0$	↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 9 điểm cực trị.

Câu 11: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định có đạo hàm và nhận giá trị dương trên $\mathbb{R}$. Biết tiếp tuyến của hai đồ thị hàm số $y=f\left(x\right)$ và $y=g\left(x\right)=\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x^2\right)}$ cùng tại điểm có hoành độ $x_0=1$ có hệ số góc lần lượt là 12 và –3. Giá trị của $f\left(1\right)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 4

Ta có $g'\left(x\right)=\left(\dfrac{f\left(x\right)}{f\left(x^2\right)}\right)'=\dfrac{f\left(x^2\right).f'\left(x\right)-f\left(x\right).2x.f'\left(x^2\right)}{f^2\left(x^2\right)}$

Từ giả thiết ta có $f'\left(1\right)=12$ và $g'\left(1\right)=-3,\ f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \dfrac{f\left(1\right).f'\left(1\right)-2f\left(1\right).f'\left(1\right)}{f^2\left(1\right)}=-3\Leftrightarrow -\dfrac{f'\left(1\right)}{f\left(1\right)}=-3\Leftrightarrow f\left(1\right)=4.$

Câu 12. Cho hàm số $f\left(x\right)$ thỏa mãn $f\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=x-\sqrt{x^2+1}$ với $\forall x\in\mathbb{R}$. Gọi Δ là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$. Giả sử Δ cắt Ox tại điểm A và cắt Oy tại điểm B. Khi đó diện tích của tam giác OAB bằng

Lời giải

Trả lời: 2

Đặt $t=x+\sqrt{x^2+1}$ suy ra $t>0$ (vì $\sqrt{x^2+1}>\left|x\right|$ với mọi x và $\left|x\right|+x\ge 0$ với mọi x).

Ta có $\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=-1$ suy ra $x-\sqrt{x^2+1}=\dfrac{-1}{t}$.

Vậy $f\left(t\right)=\dfrac{-1}{t}$ với $t>0$ hay $f\left(x\right)=\dfrac{-1}{x}$ với $x>0$.

Có $f'\left(x\right)=\dfrac{1}{x^2}\Rightarrow f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$ suy ra tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f\left(x\right)$ tại điểm có hoành độ $x_0=\dfrac{1}{2}$ là đường thẳng Δ có phương trình: $y=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)+f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4x-4$.

Khi đó Δ cắt Ox tại điểm $A\left(1\,;0\right)$ và cắt Oy tại điểm $B\left(0\,;-4\right)$ nên diện tích của ΔOAB là $S_{\Delta OAB}=\dfrac{1}{2}.OA.OB=\dfrac{1}{2}\left|1\right|.\left|-4\right|=2$.

Câu 13. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị là $\left(C\right)$. Gọi điểm I là giao của hai đường tiệm cận của $\left(C\right)$. M là một điểm bất kì trên $\left(C\right)$ và tiếp tuyến của $\left(C\right)$ tại M cắt hai tiệm cận tại

A, B. Biết chu vi tam giác IAB có giá trị nhỏ nhất bằng $a+\sqrt{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$. Hỏi $a-b+4$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có $y' = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$. Giả sử $M(x_0\,;y_0) \in (C), (x_0 \neq 1)$ suy ra tiếp tuyến của (C) tại điểm M có phương trình $y = \dfrac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + \dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$.

Vì $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{2x-1}{x-1} = +\infty, \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x-1}{x-1} = -\infty$ nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của (C).

Mà $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x-1}{x-1} = 2$ nên đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của (C), suy ra $I(1\,;2)$.

Điểm $A\left(1\,;\dfrac{2x_0}{x_0-1}\right)$ là giao điểm của tiệm cận đứng và tiếp tuyến, điểm $B(2x_0-1\,;2)$ là giao điểm của tiệm cận ngang và tiếp tuyến.

Ta có chu vi của tam giác IAB bằng $IA+IB+AB$

$= \dfrac{2}{|x_0-1|} + 2|x_0-1| + \sqrt{4(x_0-1)^2 + \dfrac{4}{(x_0-1)^2}}$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có $IA+IB+AB \geq 2\sqrt{4} + \sqrt{4.2} = 4+\sqrt{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi $|x_0-1| = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0 = 2 \end{array}\right.$

Vậy chu vi tam giác IAB đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4+\sqrt{8}$ khi $M(0\,;1)$ hoặc $M(2\,;3)$.

Suy ra $a=4, b=8$ nên $a-b+4=0$.

Câu 14: Ông Thanh nuôi cá chim ở một cái ao có diện tích là $50m^2$.Vụ trước ông nuôi với mật độ là 20 con/m^2 và thu được 1,5 tấn cá. Theo kinh nghiệm nuôi cá của mình thì cứ thả giảm đi 8 con/m^2 thì mỗi con cá khi thu hoạch tăng lên 0,5kg. Vậy vụ tới ông phải thả bao nhiêu con cá giống để được tổng năng suất khi thu hoạch là cao nhất? Giả sử không có hao hụt khi nuôi.

Lời giải

Trả lời: 512

Số cá giống mà ông thanh đã thả trong vụ vừa qua là $50.20 = 1000(con)$

Khối lượng trung bình mỗi con cá thành phần trong vụ vừa qua là:

$1500:1000 = 1,5(kg)$.

Gọi số cá giống cần thả ít đi trong vụ này là: $x(con), (x>0)$

Theo đề Câu, giảm 8 con thì mỗi con tăng thêm $0,5kg / con$

Vậy giảm x con thì mỗi con tăng thêm $0,0625x\ kg / con$.

Tổng số lượng cá thu được ở vụ này:

$F(x) = (1000 - x)(1,5 + 0,0625x) = -0,0625x^2 + 61x + 1500$.

Câu toán trở thành tìm x để $F(x)$ đạt GTLN.

Ta có:

$F'(x) = -0,125x + 61$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,125x + 61 = 0 \Leftrightarrow x = 488$

BBT

X	0		488		1000
F'(x)		+	0	−	
F(x)		↗	F_{max}	↘	

Vậy ông thanh phải thả số cá giống trong vụ này là:

$1000 - 488 = 512con$

Câu 15: Người ta cần làm một hộp theo dạng một khối lăng trụ đều không nắp với thể tích lớn nhất từmột miếng tôn hình vuông có cạnh là 1 mét. Thể tích của hộp cần làm.

Lời giải

Trả lời: $\frac{2}{27}$

Giả sử mỗi góc cắt đi một hình vuông x dm.

Khi đó chiều cao của hình hộp là $x(dm), \left(0 < x < \frac{1}{2}\right)$

Và cạnh đáy của hộp là $(1 - 2x)dm$.

Vậy thể tích của hộp là: $V = x(1 - 2x)^2\ dm^3$

Ta có:

$V' = 1 - 8x + 12x^2$

Phương trình $V' = 0 \Leftrightarrow -8x + 12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{6} \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

BBT

X	0		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{2}$
V'		+	0	−	
V		↗	$\frac{2}{27}$	↘	

Vậy thể tích cần tìm là: $\frac{2}{27}dm^3$.

Câu 16: Một công ty muốn làm đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6km. Giá thành để xây đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. B' là điểm trên bờ sao cho BB' vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến B' là 9km. Vị trí C trên đoạn AB' sao cho khi nối ống theo hướng ACB thì số tiền ít nhất. Khi đó C cách A một đoạn bằng:

A. 9km **B.** 6,5km **C.** 5km **D.** 4km.

Lời giải

Trả lời: $6,5$

Ta đặt: $B'C = x(km), (0 \le x \le 9)$

Ta có:

$BC = \sqrt{B'B^2 + B'C^2} = \sqrt{36 + x^2}, AC = 9 - x$

Gọi F(x) là hàm chi phí xây dựng đường ống nước từ ACB

Ta có: $F(x) = 130.000.\sqrt{36 + x^2} + 50.000(9 - x)(USD)$

Câu toán trở thành tìm x sao cho F(x) đạt GTNN.

$$F'(x) = \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}}x - 50.000.$$

$$F'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{130.000}{\sqrt{36 + x^2}}x - 50.000 = 0 \Leftrightarrow 13x = 5\sqrt{36 + x^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{25}{4} \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} = 2,5$$

Vì F(x) là hàm liên tục trên đoạn $[0;9]$ nên ta có:

$$F(0) = 1.230.000, F(9) = 1.406.000, F\left(\frac{5}{2}\right) = 1.170.000$$

Vậy chi phí nhỏ nhất khi C cách A khoảng bằng 9km-2,5km=6,5km.

Câu 17: Có một tấm gỗ hình vuông có độ dài cạnh là 2m. Cắt tấm gỗ đó thành tấm gỗ có hình dạng là một tam giác vuông sao cho tổng của một cạnh tam giác vuông và cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng 1,2m. Hỏi cạnh huyền của tấm gỗ tam giác vuông đó bằng bao nhiêu để tam giác vuông có diện tích lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: $0,8$

Giả sử tấm dỗ cắt có hình dạng tam giác vuông là ABC, BC là cạnh huyền. Vì cạnh AB, AC là như nhau nên ta có thể đặt $AB = x, (0 < x < 0,6)$

Khi đó, cạnh huyền $BC = 1,2 - x$ Cạnh góc vuông còn lại là:

$$AC = \sqrt{(1,2 - x)^2 - x^2} = \sqrt{1,44 - 2,4x}$$

Ta có diện tích tam giác ABC: $S(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{1,44 - 2,4x}$

Câu toán trở thành tìm x để $S(x)$ đạt GTLN.

$$S'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{1,44-2,4x}-\frac{1}{2}\frac{1,2x}{\sqrt{1,44-2,4x}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1,44-3,6x}{\sqrt{1,44-2,4x}}\right)$$

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow 1,44-3,6x=0 \Leftrightarrow x=0,4$$

BBT

X	0		0,4		0,6
S'(x)		+	0	–	
S(x)		↗	S_{max}	↘	

Câu 18: Anh Tuân muốn xây dựng một hố ga không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứ được 3200cm^3, tỉ số giữa chiều cao và chiều rộng của hố ga bằng 2. Xác định diện tích đáy của hố ga để khi xây hố tiết kiệm được nguyên liệu nhất.

Lời giải

Trả lời: 160

Gọi x,y,h lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của hố ga, $(x>0,y>0,h>0,cm)$

Ta có: $\frac{h}{x}=2 \Leftrightarrow h=2x$

Thể tích hố ga: $V=xyh \Leftrightarrow y=\frac{V}{xh}=\frac{1600}{x^2}$

Diện tích cần xây dựng hố ga là:

$$S(x)=xy+2xh+2yh=x.\frac{1600}{x^2}+2x2x+x\frac{1600}{x^2}2x$$

$$=\frac{1600}{x}+4x^2+\frac{6400}{x}=4x^2+\frac{8000}{x}$$

Câu toán trở thành tìm x để S(x) nhỏ nhất.

$$S'(x)=8x-\frac{8000}{x^2}$$

$$S'(x)=0 \Leftrightarrow 8x-\frac{8000}{x^2}=0 \Leftrightarrow x=10$$

BBT

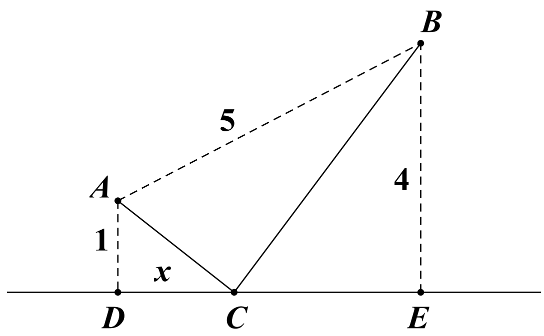
X	0		10		$+\infty$
S'(x)		–	0	+	
S(x)		↘	S_{min}	↗	

Vậy chiều rộng của hố ga là 10cm, chiều dài là 16cm.

Vậy diện tích đáy hố ga nhỏ nhất là: $S=10.16=160cm^2$.

Câu 19:

Có hai cây cột dựng trên mặt đất lần lượt cao 1m và 4m, đỉnh của hai cây cột cách nhau 5m. Người ta chọn một vị trí trên mặt đất (nằm giữa hai chân cột) để giăng dây nối đến hai đỉnh cột để trang trí như hình dưới. Tính độ dài dây ngắn nhất.



Lời giải

Trả lời: $\sqrt{41}$

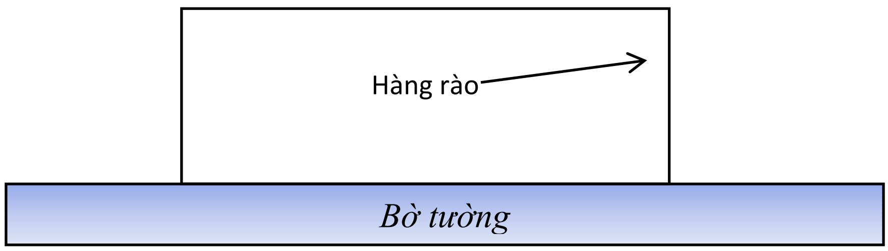
Đặt $CD = x, x > 0$. Ta tính được $DE = \sqrt{5^2 - (4-1)^2} = 4$

Ta có $AC + BC = \sqrt{x^2+1} + \sqrt{(4-x)^2+16} = f(x)$

Khi đó: $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} + \dfrac{x-4}{\sqrt{x^2-8x+32}}$

Lời giải phương trình $f'(x) = 0$, ta thu được $x = \dfrac{4}{5}$ và tìm được $\min f(x) = \sqrt{14}$,

Câu 20: Bác nông dân muốn làm hàng rà trồng ra hình chữ nhật có chiều dài song song với hàng tường gạch. Bác chỉ làm ba mặt hàng rào bởi vì mặt thứ tư bác tận dụng luôn bờ tường. Bác dự tính sẽ dùng 200m lưới để làm nên toàn bộ hàng rào đó. Diện tích đất trồng rau lớn nhất bác có thể rào nên là:



Lời giải

Trả lời: 5000

Đề Câu cho ta dữ liệu về chu vi của hàng rào là $200m$. Từ đó ta sẽ tìm được mối quan hệ giữa x và r, đến đậy ta có thể đưa về hàm số một biến theo x hoặc theo r như sau:

Ta có:

$x + 2r = 200 \Leftrightarrow r = 100 - \dfrac{x}{2}$. Từ đây ta có $r > 0 \Rightarrow x < 200$.

Diện tích đất rào được tính bởi: $f(x) = x\left(100 - \dfrac{x}{2}\right) = -\dfrac{x^2}{2} + 100x$

Xét hàm số $f(x) = -\dfrac{x^2}{2} + 100x$ trên khoảng $(0;200)$

Đến đây áp dụng quy tắc tìm GTLN của hàm số trên đoạn. ta có:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x + 100 = 0 \Leftrightarrow x = 100$

Từ đó ta có $f(100) = 5000$ là GTLN của diện tích đất rào được.

Câu 21: Một người có một dây ruy băng dài 130 cm, người đó cần bọc dải ruy băng này quanh một hộp quà hình trụ. Khi bọc quà, người này dùng 10cm của dải ruy băng để thắt nơ ở trên nắp hộp (như hình vẽ minh họa). Hỏi dải ruy băng có thể bọc được hộp quà có thể tích lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 1000 π

Gọi $x(cm); y(cm)$ lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của hình trụ $(x, y > 0; x < 30)$

Dải dây ruy băng còn lại khi đã thắt nơ là: 120cm.

Ta có: $(2x + y).4 = 120 \Leftrightarrow y = 30 - 2x$

Thể tích khối hộp quà là: $V = \pi x^2.y = \pi x^2(30 - 2x)$

Thể tích V lớn nhất khi hàm số $f(x) = x^2(30 - 2x)$ với $0 < x < 30$ đạt GTLN

$f'(x) = -6x^2 + 60x$, cho $f'(x) = -6x^2 + 60x = 0 \Leftrightarrow x = 10$

Lập Bảng Biến thiên ta thấy thể tích đạt GTLN là:

$V = 1000\pi(cm^3)$.

Câu 22: Khi sản xuất vỏ lon sữa bò hình trụ, các nhà thiết kế luôn đặt mục tiêu sao cho chi phí nguyên liệu làm vỏ lon là ít nhất, tức là diện tích toàn phần hình trụ nhỉ nhất. Muốn thể tích khối trụ đó bằng 2 và diện tích toàn phần hình trụ nhỏ nhất thì bán kính đáy gần số nào nhất?

Lời giải

Trả lời: $0,68$

Ta có $S_{tp} = S_{xq} + 2S_d = 2\pi rl + 2\pi r^2 \quad (1)$

$V = \pi r^2 l = 2 \Rightarrow l = \dfrac{2}{\pi r^2}$ thay vào (1) ta được:

$$S_{tp} = \frac{4}{r} + 2\pi r^2 = f(r)$$

$$f'(r) = -\frac{4}{r^2} + 4\pi r$$

$f'(r) = 0$ khi r gần bằng 0,68.

Câu 23: Do nhu cầu sử dụng người ta cần tạo ra một lăng trụ đứng có đáy là hình vuông cạnh a và chiều cao h, có thể tích là $1m^3$. Với a như thế nào để đỡ tốn nhiều vật liệu nhất?

Lời giải

Trả lời: 1

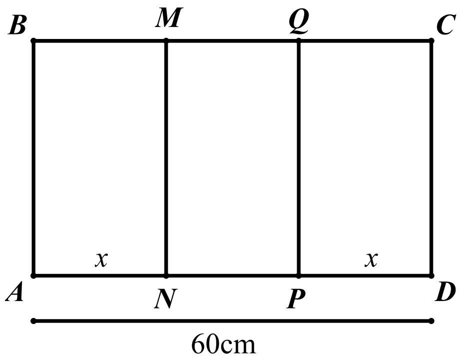
$V = a^2 h = 1 \Rightarrow a = \sqrt{\frac{1}{h}}$

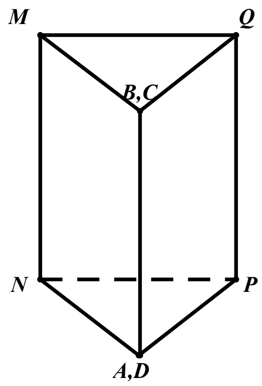
$S = 4ah + 2a^2 = \frac{4}{a} + 2a^2 = f(a)$

$f'(a) = -\frac{4}{a^2} + 4a$

Dấu "=" xẩy ra khi $a = 1$.

Câu 24: Cho một tấm nhôm hình chữ nhật ABCD có $AD = 60cm$. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh $MN \text{ và } PQ$ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau như hình vẽ để được 1 hình lăng trụ khuyết 2 đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?





A. $x = 20$ **B.** $x = 30$ **C.** $x = 45$ **D.** $x = 40$

Lời giải

Trả lời:20

Gọi m_a là độ dài đường trung tuyến đối với cạnh NP

Diện tích tam giác NAP = S_{NAP}

Ta có: $m_a = \sqrt{\frac{4x^2 - (60-2x)^2}{4}} = \sqrt{-900 + 60x}$

$V = h.m_A.NP$

Xét hàm $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{60x - 900}(60 - 2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{60(60-2x)}{2\sqrt{60x - 900}} - 2\sqrt{60x - 900}$

$f'(x) = 0,\ f(x) \to \max$ khi x=20.

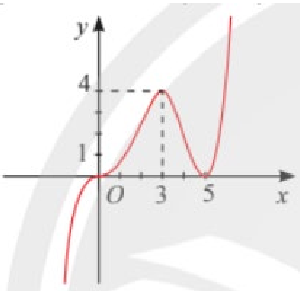
GIẢI BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

Chọn phương án đúng.

1. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 1 . Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng

A. $(5;+\infty)$. B. $(3;5)$. C. $(0;5)$. D. $(3;+\infty)$.



Hình 1

Lời giải

Chọn A

Từ hình vẽ ta thấy trong khoảng $(5;+\infty)$ thì đồ thị đi lên

2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như Hình 1 . Hàm số đạt cực đại tại

A. $x = 0$. B. $x = 3$. C. $x = 4$. D. $x = 5$.

Lời giải

Chọn B

Quan sát Hình 1 , ta thấy trên khoảng $(0;3)$, đồ thị hàm số đi lên từ trái qua phải nên hàm số đồng biến trên khoảng đó, suy ra $y' > 0$ với $x \in (0;3)$; trên khoảng $(3;5)$ đồ thị hàm số đi xuống từ trái qua phải nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó, suy ra $y' < 0$ với $x \in (3;5)$, vậy tại điểm $x = 3$, đạo hàm y' đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.

3. Cho hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu là $y = 2$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, giá trị cực tiểu là $y = 6$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, giá trị cực tiểu là $y = 6$.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, giá trị cực tiểu là $y = 2$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{x - 4}$.

- Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

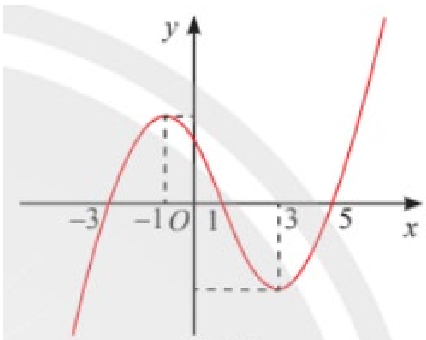
- Đạo hàm $y' = \dfrac{(2x-4)(x-4) - x^2 + 4x - 1}{(x-4)^2} = \dfrac{x^2 - 8x + 15}{(x-4)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x = 3$ hoặc $x = 5$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		3		4		5		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	6	↗	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 5$, giá trị cực tiểu là $y = 6$.

4. Đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ là hàm số có đồ thị được cho trong Hình 2. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng



Hình 2

A. $(-1;3)$. B. $(-3;1)$. C. $(1;5)$. D. $(3;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Quan sát Hình 2, ta thấy trên khoảng $(1;5)$, đồ thị của hàm số $f''(x)$ nằm phía dưới trục Ox, do đó $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (1;5)$, vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;5)$.

5. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$ trên đoạn $[-2;3]$ là

A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{30}$. C. $\sqrt{2}$. D. 0.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = \sqrt{x^2 + 2x + 3}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$. Trên khoảng (-2; 3), $y' = 0$ khi $x = -1$.

Ta có $y(-2) = \sqrt{3}, y(-1) = \sqrt{2}, y(3) = 3\sqrt{2}$.

Vậy $\min\limits_{[-2;3]} y = \sqrt{2}$ tại $x = -1$.

6. Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = 2x + 3$. B. $y = 2x + 1$. C. $y = x + 3$. D. $y = x + 1$.

Lời giải

Chọn A

Xét hàm số $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

Ta có $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x\left(x^2 - 1\right)} = 2$; $b = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1} - 2x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1} = 3.$

Vậy đường thẳng $y = 2x + 3$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2 - 1}$.

7. Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x + 3}{5x + 1}$ là đường thẳng có phương trình

A. $y = -\dfrac{1}{5}$. B. $x = -\dfrac{1}{5}$. C. $y = -\dfrac{2}{5}$. D. $x = -\dfrac{2}{5}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = \dfrac{-2x + 3}{5x + 1}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\dfrac{1}{5} \right\}$.

Ta có $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{5}^-} y = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{5}^-} \dfrac{-2x + 3}{5x + 1} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\frac{1}{5}^+} y = \lim\limits_{x \to -\frac{1}{5}^+} \dfrac{-2x + 3}{5x + 1} = +\infty$.

Vậy đường thẳng $x = -\dfrac{1}{5}$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \dfrac{-2x + 3}{5x + 1}$

8. Cho hàm số $y = \dfrac{-2x - 3}{4 - x}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -4)$ và nghịch biến trên $(-4; +\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 4)$ và $(4; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -4)$ và $(-4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $y = \dfrac{-2x-3}{4-x}$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{4\}$.

Đạo hàm $y' = \dfrac{-5}{(4-x)^2}$. Vì $y' < 0$ với mọi $x \neq 4$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;4)$ và $(4;+\infty)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

9. Tìm hai số không âm a và b có tổng bằng 10 sao cho:

a) Biểu thức ab đạt giá trị lớn nhất;

b) Tổng bình phương của chúng đạt giá trị nhỏ nhất;

c) Biểu thức ab^2 đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có $a+b=10$, suy ra $b=10-a$. Vì $a,b \geq 0$ nên $10-a \geq 0$, suy ra $a \leq 10$.

a) Ta có $ab = a(10-a) = -a^2+10a$. Xét hàm số $\mathrm{H(a)} = -\mathrm{a}^2 + 10\mathrm{a}$ với $\mathrm{a} \in [0;10]$.

Đạo hàm $\mathrm{H'(a)} = -2\mathrm{a}+10$. Trên khoảng $(0;10), \mathrm{H'(a)} = 0$ khi $\mathrm{a}=5$.

$\mathrm{H(0)} = 0; \mathrm{H(5)} = 25; \mathrm{H(10)} = 0$. Do đó, $\max H(a) = 25$ tại $\mathrm{a}=5$. Với $\mathrm{a}=5$ thì $\mathrm{b} = 10-5 = 5$.

Vậy biểu thức ab đạt giá trị lớn nhất bằng 25 khi $a=b=5$.

b) Ta có $a^2+b^2 = a^2+(10-a)^2 = 2a^2-20a+100$.

Xét hàm số $S(a) = 2a^2-20a+100$ với $a \in [0;10]$.

Đạo hàm $S'(a) = 4a-20$. Trên khoảng $(0;10), S'(a) = 0$ khi $a=5$.
$S(0) = 100; S(5) = 50; S(10) = 100$

Do đó, $\min\limits_{[0;10]} S(a) = 50$ tại $\mathrm{a} = 5$.

Vậy tổng các bình phương của hai số a và b đạt giá trị nhỏ nhất bằng 50 khi $a=b=5$.

c) Ta có $ab^2 = a(10-a)^2 = a^3-20a^2+100a$.

Xét hàm số $\mathrm{T(a)} = \mathrm{a}^3 - 20\mathrm{a}^2 + 100\mathrm{a}$ với với $\mathrm{a} \in [0;10]$.

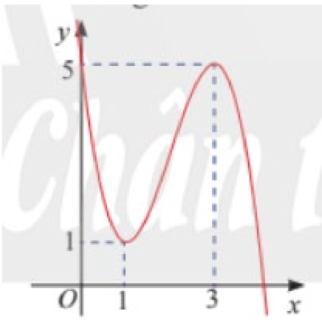
Đạo hàm $T'(a) = 3a^2-40a+100$. Trên khoảng $(0;10), S'(a) = 0$ khi $a = \dfrac{10}{3}$.

$\mathrm{T(0)} = 0; T\left(\dfrac{10}{3}\right) = \dfrac{4000}{27}; \mathrm{T(10)} = 0$. Do đó, $\max\limits_{[0;10]} T(a) = \dfrac{4000}{27}$ tại $\mathrm{a} = \dfrac{10}{3}$.

Với $\mathrm{a} = \dfrac{10}{3}$ thì $b = 10 - \dfrac{10}{3} = \dfrac{20}{3}$.

Vậy biểu thức ab^2 đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{4000}{3}$ tại $a=\frac{10}{3},b=\frac{20}{3}$.

10. Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị như Hình 3. Viết công thức của hàm số.



Hình 3

Lời giải

Giả sử hàm số bậc ba cần tìm có dạng $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq 0)$.

Quan sát Hình 3, ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;5),(1;1)$ và $(3;5)$.

Với $x=0$ thì $y=5$, thay vào hàm số ta suy ra $d=5$.

Khi đó hàm số trở thành $y=f(x)=axx^3+bx^2+cx+5$.

Với $x=1$ thì $y=1$, thay vào hàm số ta được $a+b+c+5=1$ (1).

Ta thấy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $(1;1)$ và $(3;5)$, tức là phương trình $y'=0$ có hai nghiệm là $x=1$ và $x=3$.

Ta có $y'=3ax^2+2bx+c$.

Với $x=1$ thì $y'=0$ nên ta có $3a+2b+c=0$ (2).

Với $x=3$ thì $y'=0$ nên ta có $27a+6b+c=0$ (3).

Từ (1), (2) và (3) ta suy ra $a=-1;b=6;c=-9$.

Vậy hàm số cần tìm là $y=f(x)=-x^3+6x^2-9x+5$.

11. Cho hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tính khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Lời giải

a) Xét hàm số $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$.

1. Tập xác định: $\mathbb{R}$.

2. Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = x^2 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 2$.

Trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên khoảng $(0; 2), y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực đại tại $\mathrm{x} = 0$ và $\mathrm{y}_{\mathrm{CD}} = 4$. Hàm số đạt cực tiểu tại $\mathrm{x} = 2$ và $\mathrm{y}_{\mathrm{CT}} = \frac{8}{3}$.

- Các giới hạn tại vô cực:

$$\lim_{x \to -\infty} y = \lim_{x \to -\infty} x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} \right) = -\infty; \lim_{x \to +\infty} y = \lim_{x \to +\infty} x^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{x} + \frac{4}{x^3} \right) = +\infty$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$\frac{8}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

3. Đồ thị:

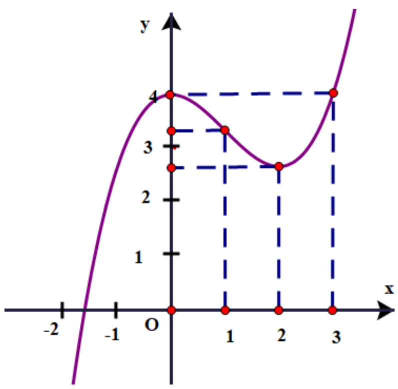
Khi $x = 0$ thì $y = 4$ nên $(0; 4)$ là giao điểm của đồ thị với trục Oy.

Ta có $\mathrm{y} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4 = 0$, phương trình này có 1 nghiệm nên đồ thị của hàm số giao với trục Ox tại 1 điểm.

Điểm $(0; 4)$ là cực đại và điểm $\left(2; \frac{8}{3}\right)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

Đồ thị hàm số đi qua điểm $(3; 4)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Đồ thị của hàm số có tâm đối xứng là điểm I $\left(1; \frac{10}{3}\right)$.

b) Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(0; 4)$ và $\left(2; \frac{8}{3}\right)$.

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $d=\sqrt{(2-0)^2+\left(\frac{8}{3}-4\right)^2}=\frac{4\sqrt{10}}{3}$.

12. Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Gọi A là giao điểm của đồ thị hàm số với trục Oy, I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tìm điểm B đối xứng với A qua I. Chứng minh rằng điểm B cũng thuộc đồ thị hàm số này.

Lời giải

a) Xét hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

1. Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

2. Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y'=\dfrac{-3}{(x-1)^2}$. Vì $y'<0$ với mọi $x\neq 1$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Tiệm cận: Ta có $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2;\quad \lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x+1}{x-1}=2$.

Suy ra đường thẳng $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{2x+1}{x-1}=-\infty; \lim\limits_{x\to1^+} y=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{2x+1}{x-1}=+\infty$.

Suy ra đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

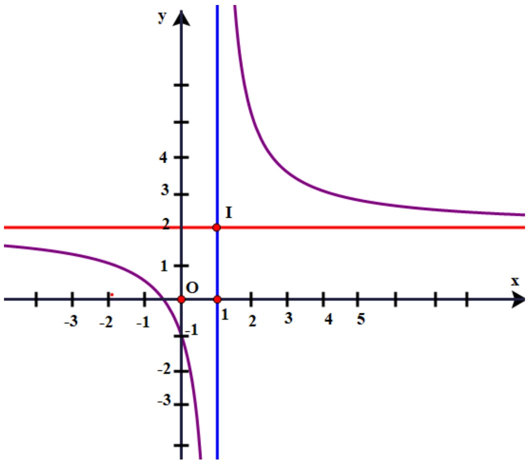
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	||	$-$	
y	2	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	2

3. Đồ thị:

Với $x=0$ thì $y=-1$ nên đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm $(0;-1)$.

Với $y=0$ thì $x=-\dfrac{1}{2}$ nên đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$.

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I(1;2). Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x=1$ và $y=2$.

b) Ta có $\mathrm{A}(0;-1), \mathrm{I}(1;2)$.

Vì B đối xứng với A qua I nên I là trung điểm của AB.

Khi đó, tọa độ của điểm B là $\begin{cases} x_B = 2x_I - x_A = 2\cdot 1 - 0 = 2 \\ y_B = 2y_I - y_A = 2\cdot 2 - (-1) = 5 \end{cases}$.

Suy ra $\mathrm{B}(2;5)$. Ta có $\dfrac{2\cdot 2+1}{2-1} = 5$, do đó điểm $\mathrm{B}(2;5)$ thuộc đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$.

13. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị của hàm số.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên đoạn $[2;4]$.

Lời giải

a) Xét hàm số $y=\dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$.

1. Tập xác định: $\mathrm{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $y' = \dfrac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=3$.

Trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(3;+\infty)$, $y' > 0$ nên hàm số đồng biến trên mỗi khoảng đó.

Trên các khoảng $(-1;1)$ và $(1;3)$, $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số đạt cực tiểu tại $x=3$ và $y_{CT} = 10$. Hàm số đạt cực đại tại $x=-1$ và $y_{CD} = 2$.

- Các giới hạn tại vô cực và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-\infty} y = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2+4x-1}{x-1} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+4x-1}{x-1} = +\infty$

Ta có $a = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+4x-1}{x(x-1)} = 1$ và $b = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+4x-1}{x-1} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5x-1}{x-1} = 5$.

Suy ra đường thẳng $y = x+5$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y = \lim\limits_{x\to1^-} \dfrac{x^2+4x-1}{x-1} = -\infty; \lim\limits_{x\to1^+} y = \lim\limits_{x\to1^+} \dfrac{x^2+4x-1}{x-1} = +\infty$.

Suy ra đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

- Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	‖	-	0	+	
y	$-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	10	↗	$+\infty$

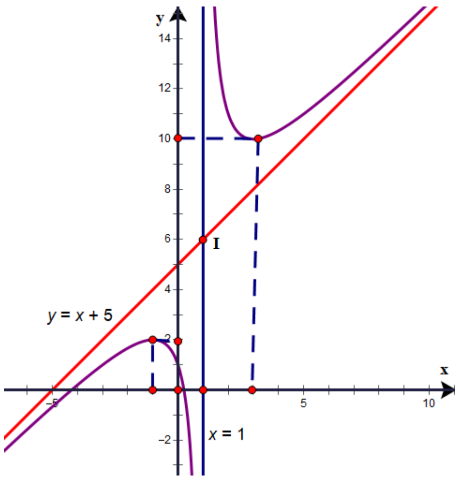
3. Đồ thị:

Ta có $y = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+4x-1}{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = -2+\sqrt{5}$ hoặc $x = -2-\sqrt{5}$.

Vậy đồ thị hàm số giao với trục Ox tại điểm $(-2-\sqrt{5};0)$ và điểm $(-2+\sqrt{5};0)$

Đồ thị hàm số giao với trục Oy tại điểm (0; 1).

Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là điểm I(1; 6).

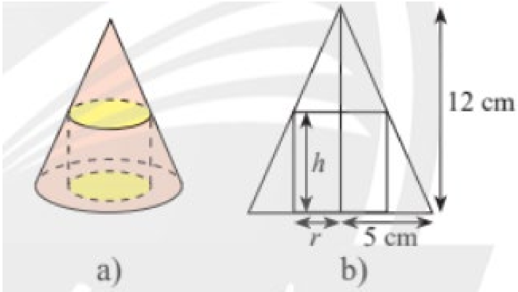
Các trục đối xứng của đồ thị hàm số là hai đường phân giác của các góc tạo bởi hai đường tiệm cận $x = 1$ và $y = x+5$.

b) Xét hàm số $y = \dfrac{x^2+4x-1}{x-1}$ với $x \in [2;4]$.

Trên khoảng $(2;4)$, $y' = 0$ khi $x = 3$. Ta có $y(2) = 11; y(3) = 10; y(4) = \frac{31}{3}$.

Vậy $\max\limits_{[2;4]} y = 11$ tại $x = 2$ và $\min\limits_{[2;4]} y = 10$ tại $x = 3$.

14. Cho một hình trụ nội tiếp trong hình nón có chiều cao bằng $12\,\text{cm}$ và bán kính đáy bằng $5\,\text{cm}$ (Hình 4a). Người ta cắt hình nón, trụ này theo mặt phẳng chứa đường thẳng nối đỉnh và tâm hình tròn đáy của hình nón thì thu được một hình phẳng như Hình 4b.



Hình 4

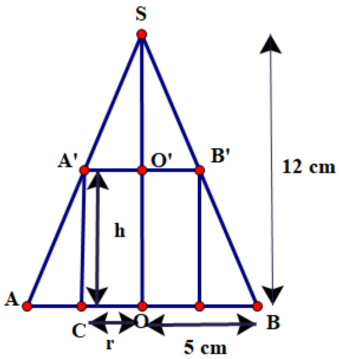
a) Chứng minh rằng công thức tính bán kính r của đáy hình trụ theo chiều cao h của nó là: $r = \frac{5(12-h)}{12}$.

b) Chứng minh biểu thức sau biểu thị thể tích khối trụ theo h : $V(h) = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}$.

c) Tìm h để khối trụ có thể tích lớn nhất.

Lời giải

a) Ta đặt tên các điểm như hình vẽ dưới đây:



Ta có $A'O' // AO$ nên $\frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA}$. Lại có $AC // SO$ nên $\frac{SA'}{SA} = \frac{OC}{OA}$. Từ đó suy ra $\frac{SO'}{SO} = \frac{OC}{OA}$.

Mà $SO = 12\,\text{cm}, OA = 5\,\text{cm}, OC = r, SO' = SO - OO' = 12 - h$.

Do đó, $\frac{12-h}{12} = \frac{r}{5}$. Suy ra $r = \frac{5(12-h)}{12}$.

b) Thể tích của khối trụ là $V = \pi r^2 h = \pi \cdot \left[\frac{5(12-h)}{12}\right]^2 \cdot h = \frac{25\pi h(12-h)^2}{144}\left(\text{cm}^3\right)$.

Vậy thể tích khối trụ theo h là $V(h) = \dfrac{25\pi h(12-h)^2}{144}$.

c) Rõ ràng h phải thỏa mãn điều kiện $0 < h < 12$.

Xét hàm số $V(h) = \dfrac{25\pi h(12-h)^2}{144}$ với $h \in (0;12)$. Ta có $V'(h) = \dfrac{25\pi(12-h)(12-3h)}{144}$.

Trên khoảng $(0;12)$, ta có $V'(h) = 0$ khi $h = 4$.

Bảng biến thiên:

h	0		4		12
V'(h)		+	0	-	
V(h)	0	↗	$\dfrac{400\pi}{9}$	↘	0

Căn cứ vào bảng biến thiên, ta thấy trên khoảng $(0;12)$, hàm số V(h) đạt giá trị lớn nhất bằng $\dfrac{400\pi}{9}$ tại $\text{h} = 4$

Vậy $h = 4\,\text{cm}$ thì khối trụ có thể tích lớn nhất.

15. Trong một nhà hàng, mỗi tuần để chế biến x phần ăn (x lấy giá trị trong khoảng từ 30 đến 120) thì chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) của một phần ăn được cho bởi công thức: $\overline{C}(x) = 2x - 230 + \dfrac{7200}{x}$.

a) Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số $y = \overline{C}(x)$ trên $[30\ ;\ 120]$.

b) Từ kết quả trên, tìm số phần ăn sao cho chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

Lời giải

a) Xét hàm số $\overline{C}(x) = 2x - 230 + \dfrac{7200}{x}$ với $\text{x} \in [30;120]$.

1. Tập xác định: $\text{D} = [30;120]$.

2. Sự biến thiên:

Chiều biến thiên:

Đạo hàm $\overline{C}'(x) = 2 - \dfrac{7200}{x^2}$. Trên khoảng $(30;120)$, ta có $\overline{C}'(x) = 0 \Leftrightarrow \text{x} = 60$.

Trên khoảng $(30;60), \overline{C}'(x) < 0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng đó.

Trên khoảng (60; 120), $\overline{C}'(x) > 0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng đó.

- Cực trị:

Hàm số có một điểm cực trị là điểm cực tiểu tại x $= 60$ và $\overline{C}_{CT} = 10$.

- Bảng biến thiên:

h	30		60		120
$\overline{C}'(x)$		$-$	0	$+$	
$\overline{C}(x)$	70	$\searrow$	10	$\nearrow$	70

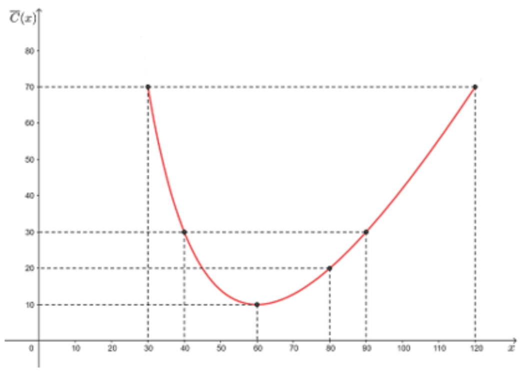
3. Đồ thị:

Đồ thị hàm số không cắt các trục tọa độ.

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là (60; 10).

Đồ thị hàm số đi qua các điểm $(30;70),(40;30),(80;20),(90;30)$ và $(120;70)$.

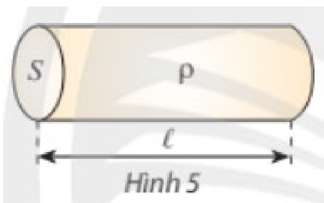
Đồ thị của hàm số đã cho được biểu diễn như hình dưới đây.



b) Từ câu a), ta thấy trên đoạn [30 ; 120], giá trị nhỏ nhất của hàm số $\overline{C}(x)$ bằng 10 tại $x=60$.

Vậy số phần ăn là 60 thì chi phí trung bình của một phần ăn là thấp nhất.

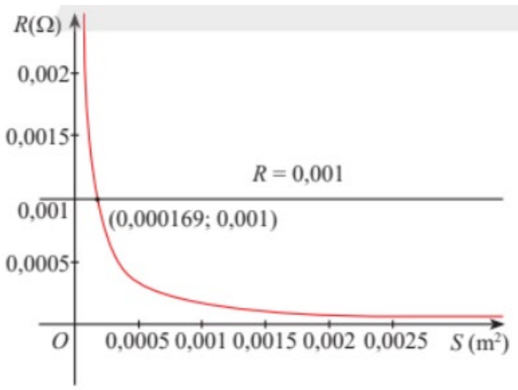
16. Điện trở $R(\Omega)$ của một đoạn dây dẫn hình trụ được làm từ vật liệu có điện trở suất $\rho(\Omega\mathrm{m})$, chiều dài $\ell(\mathrm{m})$ và tiết diện $S\left(\mathrm{m}^2\right)$ được cho bởi công thức $R=\rho\cdot\dfrac{\ell}{S}$.



Hình 5

(Vật lí 11 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 104)

Giả sử người ta khảo sát sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S (ở nhiệt độ $20^{\circ}\mathrm{C}$) của một sợi dây điện dài $10\,\mathrm{m}$ làm từ kim loại có điện trở suất ρ và thu được đồ thị hàm số như Hình 6.



Hình 6

a) Có nhận xét gì về sự biến thiên của điện trở R theo tiết diện S ?
b) Từ đồ thị, hãy giải thích ý nghĩa của toạ độ giao điểm của đồ thị hàm số với đường thẳng $R=0,001$.
c) Tính điện trở suất ρ của dây điện. Từ đó, hãy cho biết dây điện được làm bằng kim loại nào trong số các kim loại được cho ở bảng sau:

Kim loại	**Điện trở suất ở** $20^\circ\mathrm{C}(\Omega\mathrm{m})$
Bạc	$1,62\cdot10^{-8}$
Đồng	$1,69\cdot10^{-8}$
Vàng	$2,44\cdot10^{-8}$
Nhôm	$2,75\cdot10^{-8}$
Sắt	$9,68\cdot10^{-8}$

Lời giải

a) Quan sát đồ thị hàm số ở Hình 6, ta thấy:

- Trên đoạn $(0;+\infty)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái qua phải nên hàm số $\mathrm{R(S)}$ nghịch biến trên khoảng đó.

- Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} R(S)=0$ nên đường thẳng $\mathrm{y}=0$ hay trục Ox là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

- Ta có $\lim\limits_{x\to0^+} R(S)=+\infty$ nên đường thẳng $\mathrm{x}=0$ hay trục Oy là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy tiết diện S càng tăng thì điện trở R càng giảm dần về 0.

b) Từ đồ thị Hình 6 , ta thấy đồ thị hàm số $R(S)$ cắt đường thẳng $R=0,001$ tại điểm $(0,000169;0,01)$, tức là khi tiết diện $S=0,000169m^2$ thì điện trở $R=0,001\Omega$.

c) Với $S=0,000169$ thì $R=0,001$ và theo bài ra ta có $\ell=10$.

Do đó, $0,001=\rho\cdot\dfrac{10}{0,000169}$. Suy ra $\rho=1,69\cdot10^{-8}$. Vậy dây điện được làm bằng kim loại đồng.