CHƯƠNG II. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.

BÀI 6. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

- Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái

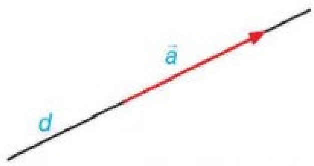
niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \ldots$

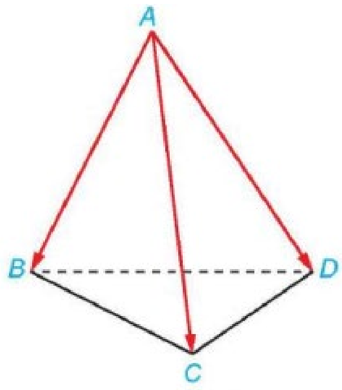
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (H.2.4).



Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5).
a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?
b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) ?
c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.



Hình 2.5

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.

- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ gọi là các vectơ-không.

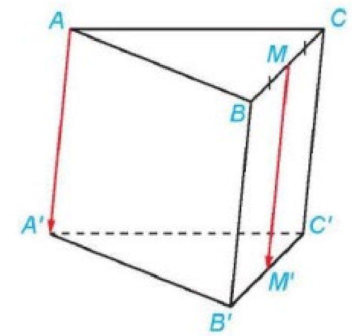
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0 , cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các

vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ (H2.8).

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.



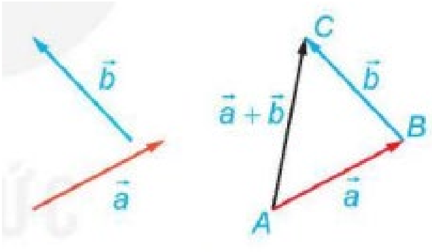
Hình 2.8

2. TỔNG VÀ HIỆUU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{a}, \overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}+\vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ.**



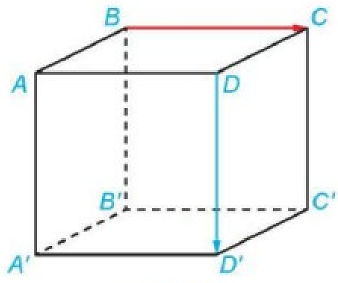
Hình 2.11

Nhận xét. Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:

- Nếu A, B, C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;

- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 $(H2.12)$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}$.



Hình 2.12

Chú ý. Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

- Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Kết quả sau đây được gọi là **quy tắc hình hộp.**

Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Ví dụ 5. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ $(H.2.14)$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý

- Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

- Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

- Vectơ 0 được coi là vectơ đối của chính nó.

Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vecto trong không gian:

Vectơ $\vec{a}+(-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a}-\vec{b}$.

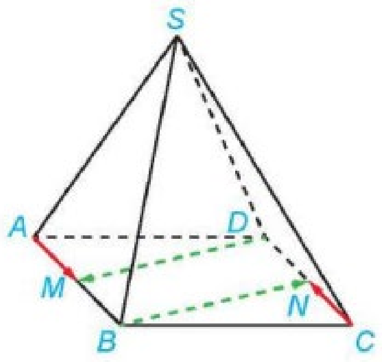
Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Nhận xét. Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (H .2 .16). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ đối nhau;

b) $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SA}$.



Hình 2.16

3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Tương tự như tích của một số với một vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về tích của một số với một vectơ trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k>0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k<0$;

- Có độ dài bằng $|k| \cdot |\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

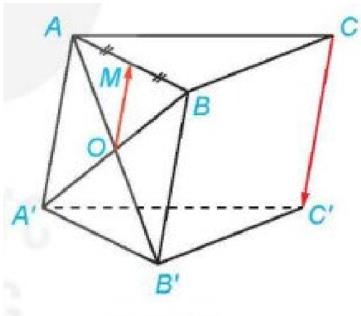
Chú ý

- Quy ước $k\vec{a}=\vec{0}$ nếu $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Nếu $k\vec{a}=\vec{0}$ thì $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ a $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b} \neq \vec{0})$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Ví dụ 7. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, AC, gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$ (H .2 .18). Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'} = (-2)\overrightarrow{OM}$.



Hình 2.18

Chú ý. Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất kết hợp: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$.

- Tính chất phân phối: Nếu h, k là hai số thực và $\vec{a}$ là hai vectơ bất kì thì $(h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ và $k(\vec{a}+\vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$.

- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $1\vec{a} = \vec{a}$ và $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$.

Ví dụ 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Chú ý. Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tuỳ ý, ta có

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$.

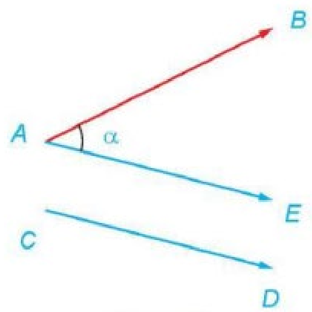
4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A,B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}\left(0^\circ \le \widehat{AOB} \le 180^\circ\right)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$.

Chú ý

- Để xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \widehat{BAE} (H.2.23)$.



Hình 2.23

- Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và 0 ó có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ 0° đến 180°.

Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (H .2 .24). Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$;

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}\cdot\vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Chú ý

- Quy ước nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=0$ thì $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

- Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

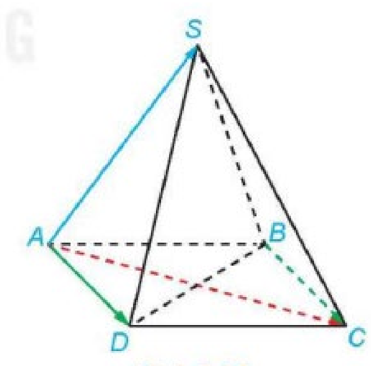
- Với mọi vectơ a a ta có $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$.

- Nếu $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Ví dụ 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S\ .ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a (H.2.26). Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}$.



Hình 2.26

Nhận xét. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là các vectơ trong không gian và k là một số thực thì ta có:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $\quad k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$; $\quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Ví dụ 11. Cho tứ diện ABCD có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD (H.2.27). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ $\qquad$ b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.1. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ phân biệt và đều khác $\vec{0}$. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

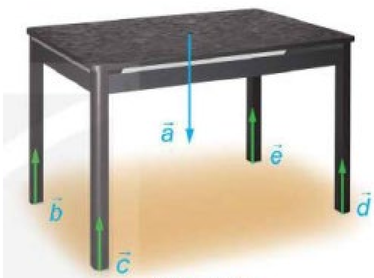
d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

2.2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 3$ và $AA' = 4$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

2.3. Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vectơ â) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$).

a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ và $\vec{e}$.

b) Giải thich vì sao các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một bằng nhau.



Hình 2.29

2.4. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CC'}$; $\quad$ b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD'} - \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$; $\quad$ c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'C}$.

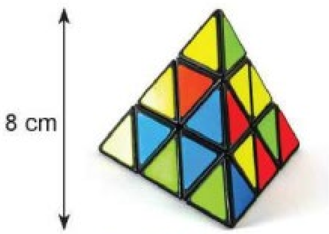
2.5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$ và $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau qua các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

a) $\overrightarrow{AB'}$; b) $\overrightarrow{B'C}$; c) $\overrightarrow{BC'}$.

2.6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

2.7. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, lấy điểm M sao cho $SM=2AM$. Trên cạnh BC, lấy điểm N sao cho $CN=2BN$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AB}$.

2.8. Trong Luyện tập 8 , ta đã biết trọng tâm của tứ diện ABCD là một điểm I thoả mãn $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{G}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H 2.30).



Hình 2.30

2.9. Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.

Hình 2.31

2.10. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2 . Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$;

b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$;

c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.

2.11. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45°, hãy

tính:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$; c) $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

2.12. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$;

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ

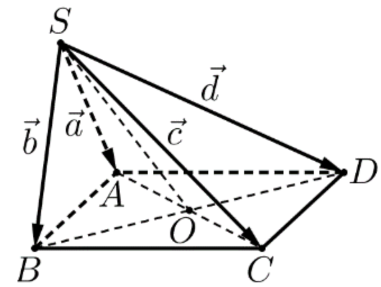
1. Phương pháp

Vận dụng các kiến thức sau.

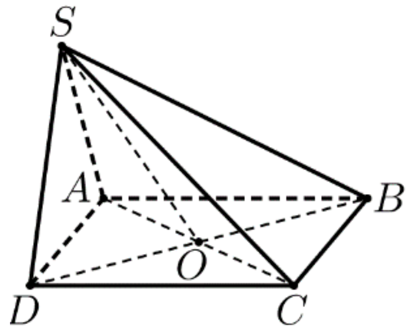
- Định nghĩa các khái niệm liên quan đến vectơ;
- Tính chất hình học của các đa giác đã học;
- Các quy tắc tính toán với vectơ;
- Một số hệ thức vectơ hay dùng;
- Các tính chất của các hình hình học cụ thể.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Chứng minh: $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

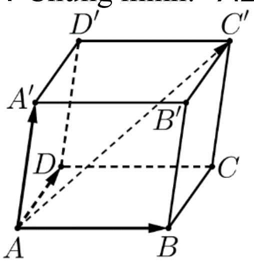


Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Chứng minh: $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$.



Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện, M là một điểm trong không gian. Chứng minh: $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$

Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.



Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Chứng minh: $\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+\overrightarrow{BD'}+\overrightarrow{DB'}\right)$.

Ví dụ 6: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$

Ví dụ 7: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng :

$a)$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$

$b)$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

DẠNG 2: PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO CÁC VECTƠ THÀNH PHẦN

1. Phương pháp: Để phân tích một véc tơ theo hệ các véc tơ thành phần thì phải kết hợp hình vẽ với các quy tắc véc tơ, đặc biệt là quy tắc 3 điểm.

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD.

a) Hãy biểu diễn vec tơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 vectơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Hãy biểu diễn vec tơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 vec tơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MD};\ \overrightarrow{NB}=-3\overrightarrow{NC}$. Biết $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$.

a) Hãy biểu diễn vecto $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Gọi G là trung điểm của PQ, chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA}=\vec{a};\ \overrightarrow{BB'}=\vec{b};\ \overrightarrow{BC}=\vec{c}$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm nằm trên AC và DC' sao cho $MB//BD'$. Tính tỷ số $\frac{MN}{BD'}$.

DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI VECTƠ. TÍCH VÔ HƯỚNG GIỮA HAI VECTƠ

1. Phương pháp: Nắm được định nghĩa góc giữa hai vectơ, công thức tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$, $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^\circ$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$?

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$, $\widehat{CAD} = 90°$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp AC$ và $AB \perp BD$. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng $AB \perp PQ$.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG VECTƠ GIẢI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 1: Trong Hình 2.2, lực căng dây (được tạo ra bởi sức nặng của kiện hàng) được thể hiện bởi các đoạn thẳng có mũi tên màu đỏ.

Hình 2.2

a) Các đoạn thẳng này cho biết gì về hướng và độ lớn của các các lực căng dây?

b) Các đoạn thẳng này có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

Ví dụ 2: Một tòa nhà có chiều cao của các tầng là như nhau. Một chiếc thang máy di chuyển từ tầng 15 lên tầng 22 của tòa nhà, sau đó di chuyển từ tầng 22 lên tầng 29. Các vectơ biểu diễn độ dịch chuyển của thang máy trong hai lần di chuyển đó có bằng nhau không? Giải thích vì sao.

Hình 2.9

Ví dụ 3: Hình 2.15 mô tả một lọ hoa được đặt trên bàn, trọng lượng của lọ hoa tạo nên một lực tác dụng lên mặt bàn và một phản lực từ mặt bàn lên lọ hoa. Có nhận xét về độ dài và hướng của các vectơ biểu diễn hai lực đó.

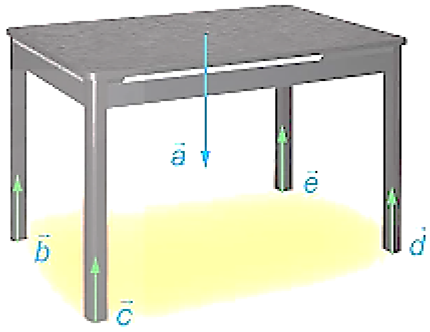
Hình 2.15

Ví dụ 4: Thang cuốn tại các trung tâm thương mại, siêu thị hay nhà ga, sân bay thường có hai làn, trong đó một làn lên và một làn xuống. Khi thang cuốn chuyển động, vectơ biểu diễn vận tốc của mỗi làn có là hai vectơ đối nhau không? Giải thích vì sao.

Ví dụ 5: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của đông cơ, lực cản cưa không khí, trọng lực vả lực nâng khí động học (H.2.20). Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và cồ độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc mây bay tăng vận tốc tữ $900\ \text{km/h}$ lên $920\ \text{km/h}$, trong quá trình tăng tốc máy bay giứ nguyên hướng bay. Lực cán của khống khí khi máy bay đạt vận tốc $900\ \text{km/h}$ và $920\ \text{km/h}$ lần lượt được biểu diễn bởi hai vecto $\overrightarrow{F_1}$ và $\overrightarrow{F_2}$. Hãy giải thích vì sao $\overrightarrow{F_1} = k\overrightarrow{F_2}$ với k là một số thực dương nào đó. Tính giá trị của k (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Hình 2.20

Ví dụ 6: Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vectơ $\vec{a}$) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$).

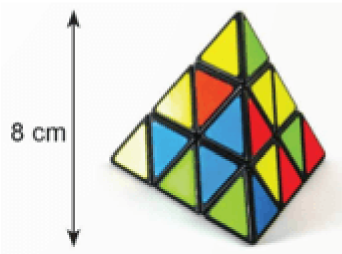


Hình 2.29

a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ và $\vec{e}$.

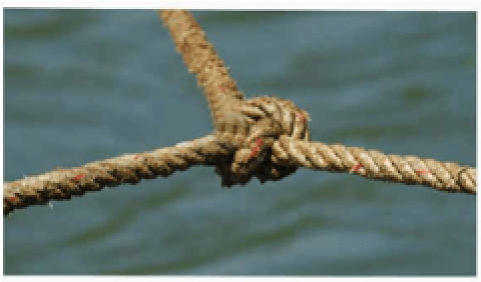
b) Giải thích vì sao các vectơ $\vec{b},\vec{c},\vec{d},\vec{e}$ đôi một bằng nhau.

Ví dụ 7. Ta đã biết trọng tâm của tứ diện $ABCD$ là một điểm I thỏa mãn $\overrightarrow{AI}=3\overrightarrow{IG}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD. Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là 8 cm (H.2.30).



Hình 2.30

Ví dụ 8: Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.


Hình 2.31

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}\right)$.

B. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}\right)$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d} + \vec{b}\right)$.

B. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{d} + \vec{b} - \vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{b} - \vec{d}\right)$.

D. $\overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}\right)$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_o là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_oG}$.

B. $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_oG}$.

C. $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_oG}$.

D. $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_oG}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$.

B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

C. $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véctơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

A. $\frac{1}{3}\left(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c}\right)$.

B. $\frac{1}{3}\left(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

C. $\frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}\right)$.

D. $\frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

B. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

D. $\overrightarrow{B'C} = -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

B. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

D. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'}=\vec{u}$, $\overrightarrow{CA'}=\vec{v}$, $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}$, $\overrightarrow{DB'}=\vec{y}$. Khi đó:

A. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.
B. $2\overrightarrow{OI}=-\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.
C. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.
D. $2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right)$.

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.
B. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
C. $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.
D. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
B. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.
D. $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

A. $\overrightarrow{AC'}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
B. $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.
C. $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.
D. $\overrightarrow{AC'}=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD.
B. N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.
C. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$.
D. $N\equiv A$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA'}+\overrightarrow{MB'}+\overrightarrow{MC'}+\overrightarrow{MD'}=\vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.
B. M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.
C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.
D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB'.
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là trung điểm CC'.
D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Câu 16: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m,n,p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng qui.

Câu 17: Cho ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các véctơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ và $\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng.
B. $\vec{x},\vec{a}$ cùng phương.
C. $\vec{x},\vec{b}$ cùng phương.
D. $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Câu 18: Cho ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$ và $\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 19: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

B. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.

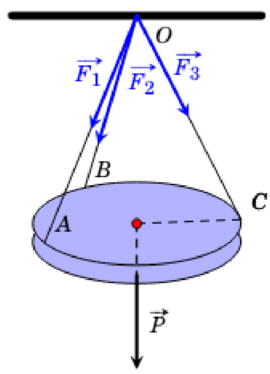
C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luông đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M,N,P xác định bởi $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB'}(k\neq 0),\overrightarrow{NB}=x\overrightarrow{NC'},\overrightarrow{PC}=y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x,y theo k để ba điểm M,N,P thẳng hàng.

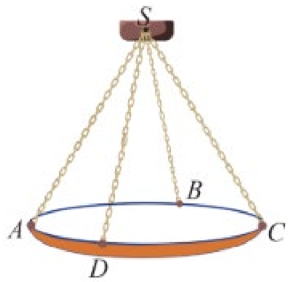
A. $x=\dfrac{2+k}{2-k},y=-\dfrac{2}{k}$
B. $x=\dfrac{1+2k}{1-2k},y=-\dfrac{1}{2k}$
C. $x=\dfrac{\frac{1}{2}+k}{2-k},y=-\dfrac{1}{2k}$
D. $x=\dfrac{1+k}{1-k},y=-\dfrac{1}{k}$

Câu 21: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3}$ lần lượt trên mối dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và $\left|\vec{F_1}\right|=\left|\vec{F_2}\right|=\left|\vec{F_3}\right|=15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



A. $14\sqrt{3}(\text{N})$. **B.** $15\sqrt{3}(\text{N})$. **C.** $17\sqrt{3}(\text{N})$. **D.** $16\sqrt{3}(\text{N})$.

Câu 22: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5\text{kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10\,\text{m}/\text{s}^2$.



A. $\dfrac{15\sqrt{3}}{3}\text{N}$. **B.** $\dfrac{20\sqrt{3}}{3}\text{N}$. **C.** $\dfrac{25\sqrt{3}}{3}\text{N}$. **D.** $\dfrac{30\sqrt{3}}{3}\text{N}$.

Câu 23: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Câu 24: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 25: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a}.\vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha = 30^\circ$. **B.** $\alpha = 45^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 120^\circ$.

Câu 26: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \dfrac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^\circ$. **B.** $\alpha = 180^\circ$. **C.** $\alpha = 60^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Câu 27: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a}.\vec{b} = 3$. Độ dài vectơ $3\vec{a} + 5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** 8. **D.** 124.

Câu 28: Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $\left(\vec{a} + 2\vec{b}\right)$ vuông góc với vectơ $\left(5\vec{a} - 4\vec{b}\right)$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 90^\circ$. **C.** $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \dfrac{1}{2}$.

Câu 29: Cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn: $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\alpha = 60^0$.

Câu 30: $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vectơ đều khác $\vec{0}$. Khi đó $\left|\vec{u}+2\vec{v}\right|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2+2\vec{v}^2-4\vec{u}.\vec{v}$. **B.** $\vec{u}^2+4\vec{v}^2+4\vec{u}.\vec{v}$. **C.** $\vec{u}^2+4\vec{v}^2$. **D.** $4\vec{u}\cdot\vec{v}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

.

Câu 31: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$ và $|\vec{a}+\vec{b}|=13$. Khi đó cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ và $\vec{a}+\vec{b}$ bằng

A. $\frac{12}{13}$. **B.** $\frac{5}{12}$. **C.** $-\frac{119}{169}$. **D.** $\frac{119}{169}$.

Câu 32: Cho $\vec{u}=\vec{a}+3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v}=7\vec{a}-5\vec{b}$ và $\vec{x}=\vec{a}-4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y}=7\vec{a}-2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=75°$. **B.** $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60°$. **C.** $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120°$. **D.** $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45°$.

Câu 33: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\vec{a}.\vec{b}=10$. Xét hai vectơ $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}$, . Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha=\frac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{15}}$.

Câu 34: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=26;\left|\vec{b}\right|=28;\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

Câu 35: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^0$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=SB=SC$ và $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc $\left(MN,SC\right)$ bằng:

A. $45°$ **B.** $30°$ **C.** $90°$ **D.** $60°$

Câu 38: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB\perp AC$, $AB\perp BD$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Câu 40: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0, \widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

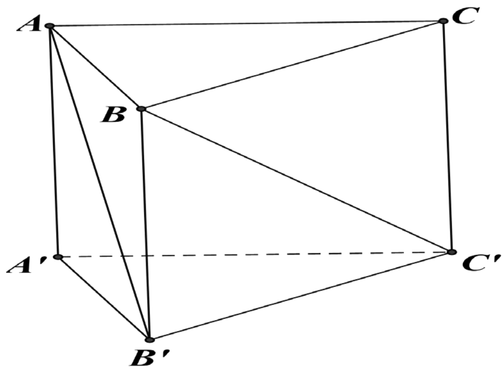
A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Câu 41: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau **B.** AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng **D.** AB và CD cắt nhau

Câu 42: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Câu 43: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\frac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\frac{3}{4}a^2$. **D.** $\frac{3}{2}a^2$.

Câu 44: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$

Câu 45: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 46: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M là trung điểm cạnh CC'. Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

A. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Câu 47: Cho tam giác ABC, thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 - BC^2}$ **B.** $S = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2 + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

C. $S=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$ **D.** $S=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Câu 48: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** a^2. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 49: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC=\frac{3}{2}AD,\widehat{CAB}=\widehat{DAB}=60^0,CD=AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\varphi=\frac{3}{4}$. **B.** $\varphi=60^0$. **C.** $\varphi=30^0$. **D.** $\cos\varphi=\frac{1}{4}$.

Câu 50: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

.**B.** $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

C. $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

D. $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB,CD và G là trung điểm MN. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

.**B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

C. $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

D. . $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}$. **B.** $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$. **D.** $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BC}$.

Câu 5: Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

D. Chóp $S.ABCD$ có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

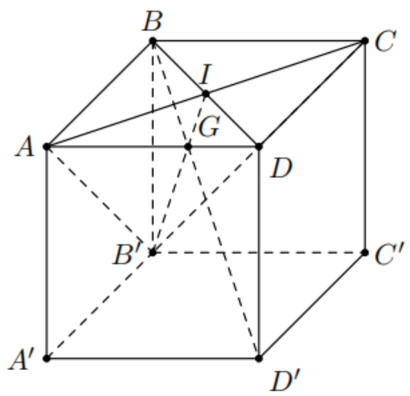
A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{SO}$

B. .$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

D. $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ). Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'C'}$.

D. $\overrightarrow{BD'}=2\overrightarrow{BG}$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N lần lượt là trung điểm AD, BC. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

B. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=3MD$ và $BN=3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm AD và BC. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

B. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

C. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}$

D. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Câu 10: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ".		
B: " $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ ".		
C: " $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là tứ giác ".		
D: " $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là hình bình hành ".		

Câu 11: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}$ ".		
B: " $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$ ".		
C: " $k.\vec{a}=\vec{0}\leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$ ".		
D: " $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}\leftrightarrow$ Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng ".		

Câu 12: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với I là trung điểm đoạn AB và điểm M bất kỳ ".		
B: " $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với G là trọng tâm ΔABC và điểm M bất kỳ ".		
C: " $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$ với G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và điểm M bất kỳ ".		
D: "Nếu $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành ".		

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BB'}$ ".		
B: " $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ".		
C: " $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BD'}$ ".		
D: " $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ ".		

Câu 14: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{BC}$ ".		
B: " Góc giữa $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AA'}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CC'}\right)=\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BB'}\right)$ ".		
C: " $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{AC'}$ ".		
D: "Góc giữa $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AA'}\right)=\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AA'}\right)$ ".		

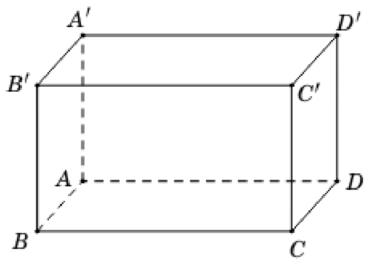
Câu 15: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có cạnh $AB=\ a; AD=a\sqrt{3}; AA'=2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$.

c) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=a\sqrt{5}$.

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=2\sqrt{2}a$.



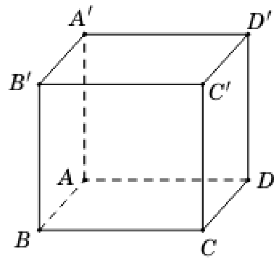
Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$.

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=a\sqrt{2}$.

d) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$.



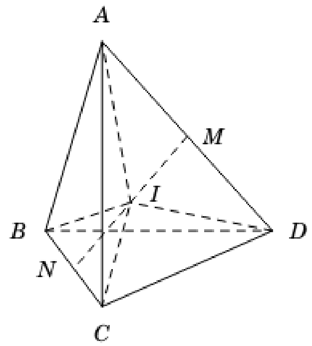
Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC,I là trung điểm MN. Xét tính đúng, sai của các khẳng đinh sau:

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.

d) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$



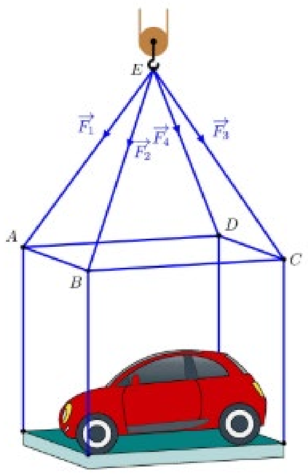
Câu 18: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\mathrm{N}$ và trọng lượng của khung sắt là $3000\,\mathrm{N}$.

a) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}$.

b) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$.

c) $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=8141\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là $16282\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 19: Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45°.

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $|\vec{a}+\vec{b}|=2+\sqrt{2}$.

d) $|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=0$.

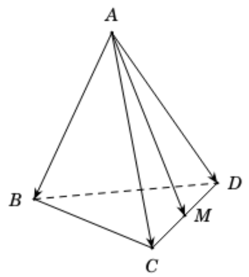
Câu 20: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{a^2}{2}$.



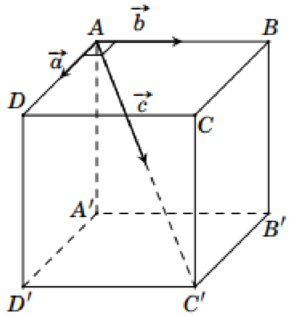
Câu 21: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\,\text{N}, 10\,\text{N}$ và $20\,\text{N}$.

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=20(\text{N})$.

c) $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}|$.

d) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=32,59(\text{N})$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết ΔABC có cạnh bằng 3. Tìm vectơ tổng $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{B'C'}\right|$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Câu 4: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA=SB=SC=AB=AC=2, BC=2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB, CD. Cho $AB=2a,\ CD=2b,\ EF=2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2+MB^2=k.ME^2+l.a^2$. Tính $k+l$.

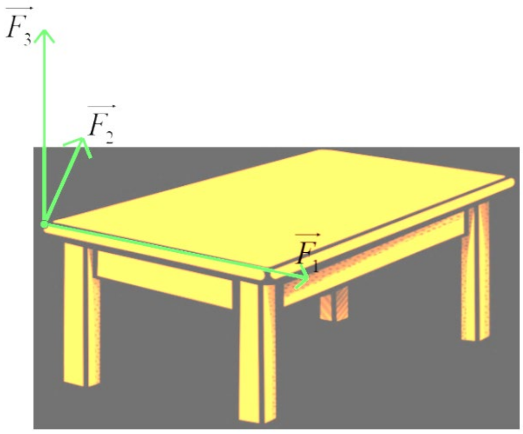
Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'}=l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k+l$ có giá trị là bao nhiêu?

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA}=\vec{a},\ \overrightarrow{SB}=\vec{b},\ \overrightarrow{SC}=\vec{a}$ và các điểm M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,SC. Các điểm P,Q trên các đường thẳng SA,BN sao cho $PQ//CM$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. $PQ//CM$. Khi biểu diễn vectơ $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, ta được: $\overrightarrow{PQ}=-\frac{m}{n}\vec{a}-\frac{p}{q}\vec{b}+\frac{r}{z}\vec{c}$ (với $\frac{m}{n},\frac{p}{q},\frac{r}{z}$ là các phân số tối giản và $m,n,p,q,r,z\in\mathbb{Z}$). Tính $\frac{m}{n}+\frac{p}{q}+\frac{r}{z}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O,M là điểm thay đổi trên SO. Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ sao cho $P=MS^2+MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh BC,BD và AC sao cho $BC=4BM, AC=3AP, BD=2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\frac{AQ}{AD}$.

Câu 10: Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ tạo với nhau một góc $110°$ và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên là $a(N)$, tìm giá trị của a.



Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA'}+k\left(\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{C'D}\right)=\vec{0}$?

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)$?

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC=3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N=x.C'D$. Với giá trị nào của x thì MN song song BD'?

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x.\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{DD_1}=k\overrightarrow{AC_1}$?

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD. Gọi I là trung điểm đoạn MN. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA}+(2k-1)\overrightarrow{IB}+k\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$?

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các số thực m, n thỏa mãn $\overrightarrow{MA'}=m\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{NC'}=n\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $m+n$ bằng bao nhiêu?

Câu 18: Trong không gian cho các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x-y)\vec{a}+(y-z)\vec{b}=(x+z-2)\vec{c}$. Tính $x+y+z$?

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có $BC=DA=a, CA=DB=b, AB=DC=c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}$.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\dfrac{MA}{MA'}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A', B', C' lần lượt thuộc các tia SA, SB, SC sao cho $\dfrac{SA}{SA'} = a$, $\dfrac{SB}{SB'} = b$, $\dfrac{SC}{SC'} = c$, trong đó a, b, c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $\left(A'B'C'\right)$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì $a + b + c$ bằng bao nhiêu?

CHƯƠNG II. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.

BÀI 6. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

- Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

- Độ dài của vectơ trong không gian là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, đối với vectơ trong không gian ta cũng có các kí hiệu và khái

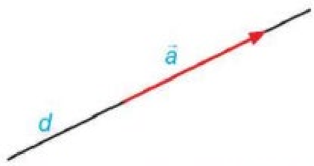
niệm sau:

- Vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$.

- Khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của vectơ thì vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{x},\vec{y},\ldots$

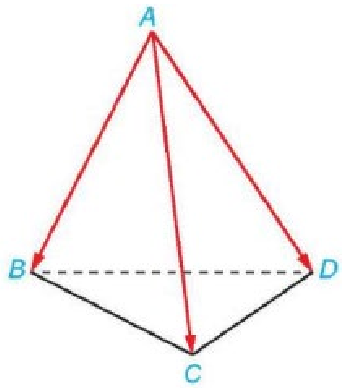
- Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $|\overrightarrow{AB}|$, độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó (H.2.4).



Hình 2.4. Đường thẳng d là giá của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.5).
a) Có bao nhiêu vectơ có điểm đầu là A và điểm cuối là một trong các đỉnh còn lại của tứ diện?
b) Trong các vectơ tìm được ở câu a, những vectơ nào có giá nằm trong mặt phẳng (ABC) ?
c) Tính độ dài của các vectơ tìm được ở câu a.



Hình 2.5

Lời giải

a) Có ba vectơ là $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Trong ba vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$ chỉ có hai vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ có giá nằm trong mặt phẳng (ABC).

c) Vì tứ diện $ABCD$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{AD}|=1$

Tương tự như trường hợp của vectơ trong mặt phẳng, ta có các khái niệm sau đối với vectơ trong không gian:

- Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

- Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ được gọi là bằng nhau, kí hiệu $\vec{a}=\vec{b}$, nếu chúng có cùng độ dài và cùng hướng.

Chú ý. Tương tự như vectơ trong mặt phẳng, ta có tính chất và các quy ước sau đối với vectơ trong không gian:

- Trong không gian, với mỗi điểm O và vectơ $\vec{a}$ cho trước, có duy nhất điểm M sao cho $\overrightarrow{OM}=\vec{a}$.

- Các vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ví dụ như $\overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \ldots$ gọi là các vectơ-không.

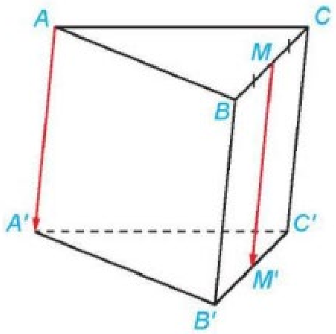
- Ta quy ước vectơ-không có độ dài là 0 , cùng hướng (và vì vậy cùng phương) với mọi vectơ. Do đó, các

vectơ-không đều bằng nhau và được kí hiệu chung là $\vec{0}$.

Ví dụ 2. Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ (H2.8).

a) Trong ba vectơ $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{B'B}$, vectơ nào bằng vectơ $\overrightarrow{AA'}$? Giải thích vì sao.

b) Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Xác định điểm M' sao cho $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$.



Hình 2.8

Lời giải

a) Hai đường thẳng AA' và BC chéo nhau nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không cùng phương. Do đó, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$ không bằng nhau.

Tứ giác $ACC'A'$ là hình bình hành nên $AA' // CC'$ và $AA'=CC'$. Hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{CC'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên hai vectơ đó bằng nhau.

Tương tự, hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ có cùng độ dài và ngược hướng nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{B'B}$ không bằng nhau.

b) Gọi M' là trung điểm của cạnh $B'C'$. Vì tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $MM'//BB'$ và $MM'=BB'$.

Hình lăng trụ $ABC\cdot A'B'C'$ có $AA'//BB'$ và $AA'=BB'$, suy ra $MM'//AA'$ và $MM'=AA'$. Hai vectơ $\overrightarrow{MM'}$ và $\overrightarrow{AA'}$ có cùng độ dài và cùng hướng nên $\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{AA'}$. Vậy trung điểm của cạnh $B'C'$ là điểm M' cần tìm.

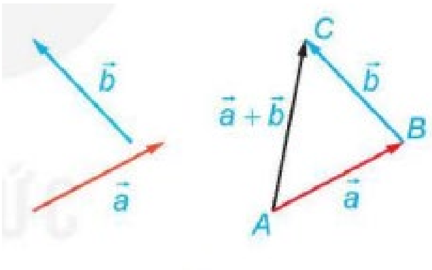
2. TỔNG VÀ HIỆUU CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Tổng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A bất kì và các điểm B, C sao cho

$\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là **tổng của hai vectơ** $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\vec{a}+\vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là **phép cộng vectơ.**



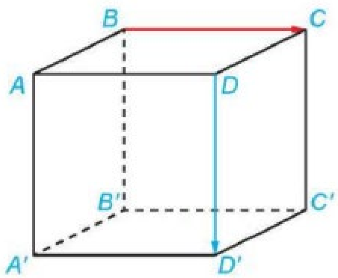
Hình 2.11

Nhận xét. Quy tắc ba điểm và quy tắc hình bình hành trong mặt phẳng vẫn đúng trong không gian:

- Nếu A,B,C là ba điểm bất kì thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$;

- Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 3. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 $(H2.12)$. Tính độ dài của vectơ $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}$.



Hình 2.12

Lời giải

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Do đó $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}$.

Tứ giác $ADD'A'$ là hình vuông nên $AD'=\sqrt{AD^2+DD'^2}=\sqrt{2}$, suy ra $\left|\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DD'}\right|=\sqrt{2}$.

Chú ý. Tương tự như phép cộng vectơ trong mặt phẳng, phép cộng vectơ trong không gian có các tính chất sau:

- Tính chất giao hoán: Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

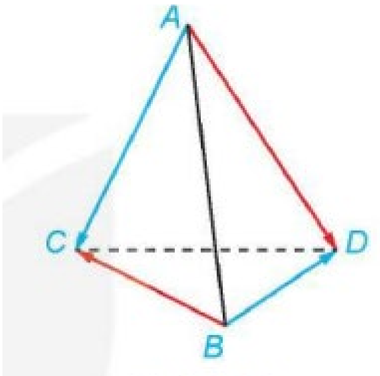
- Tính chất kết hợp: Nếu $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là ba vectơ bất kì thì $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

- Tính chất cộng với vectơ $\vec{0}$: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

Từ tính chất kết hợp của phép cộng vectơ trong không gian, ta có thể viết tổng của ba vectơ $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ là $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ mà không cần sử dụng các dấu ngoặc. Tương tự đối với tổng của nhiều vectơ trong không gian.

Ví dụ 4. Cho tứ diện $ABCD$ (H.2.13). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



Hình 2.13

Theo quy tắc ba điểm trong không gian, ta có $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

Từ đó lần lượt áp dụng tính chất của phép cộng vectơ trong không gian, ta được:

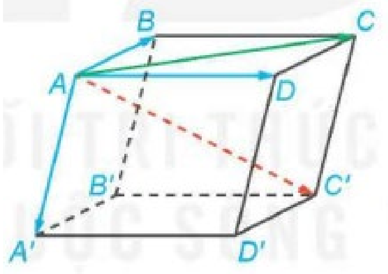
$$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD})=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}.$$

Kết quả sau đây được gọi là **quy tắc hình hộp.**

Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Khi đó, ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Ví dụ 5. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$ $(H.2.14)$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải



Hình 2.14

Vì tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$. Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

b) Hiệu của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ được gọi là vectơ đối của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$.

Chú ý

- Hai vectơ là đối nhau nếu và chỉ nếu tổng của chúng bằng $\vec{0}$.

- Vectơ $\overrightarrow{BA}$ là một vectơ đối của vectơ $\overrightarrow{AB}$.

- Vectơ 0 được coi là vectơ đối của chính nó.

Tương tự như hiệu của hai vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về hiệu của hai vecto trong không gian:

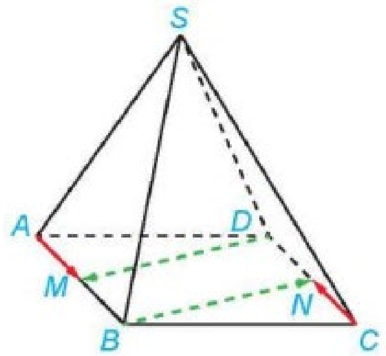
Vectơ $\vec{a} + (-\vec{b})$ được gọi là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ và kí hiệu là $\vec{a} - \vec{b}$.

Trong không gian, phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.

Nhận xét. Với ba điểm O, A, B bất kì trong không gian, ta có $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD (H .2 .16). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ là hai vectơ đối nhau; b) $\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{SA}$.



Hình 2.16

Lời giải

a) Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB = CD$ và $AB // CD$, suy ra $AM = CN$ và $AM // CN$. Hai vectơ $\overrightarrow{AM}$ và CN có cùng độ dài và ngược hướng nên chúng là hai vectơ đối nhau.

b) Từ câu a, ta có $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{AM}$.

Suy ra $\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{CN}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{SN}+\overrightarrow{NA}=\overrightarrow{SA}$.

3. TÍCH CỦA MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Tương tự như tích của một số với một vectơ trong mặt phẳng, ta có định nghĩa về tích của một số với một vectơ trong không gian:

Trong không gian, tích của một số thực $k \neq 0$ với một vectơ $\vec{a} \neq 0$ là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$, được xác định như sau:

- Cùng hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k>0$; ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ nếu $k<0$;

- Có độ dài bằng $|k|\cdot|\vec{a}|$.

Trong không gian, phép lấy tích của một số với một vectơ được gọi là phép nhân một số với một vectơ.

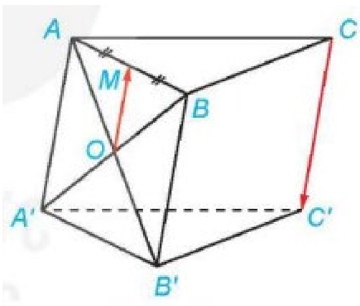
Chú ý

- Quy ước $k\vec{a}=\vec{0}$ nếu $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Nếu $k\vec{a}=\vec{0}$ thì $k=0$ hoặc $\vec{a}=\vec{0}$.

- Trong không gian, điều kiện cần và đủ để hai vectơ a $\vec{a}$ và $\vec{b}(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng phương là có một số thực k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

Ví dụ 7. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC\cdot A'B'C'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB, AC, gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$ (H .2 .18). Chứng minh rằng $\overrightarrow{CC'}=(-2)\overrightarrow{OM}$.



Hình 2.18

Lời giải

Vì O là trung điểm của AB' nên OM là đường trung bình của tam giác $AB'B$. Suy ra $B'B//OM$ và $B'B=2OM$. Tứ giác $BCC'B'$ là hình bình hành nên $B'B//C'C$ và $B'B=C'C$. Do đó $C'C//OM$ và $C'C=2OM$. Vì hai vectơ $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{OM}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{CC'}=(-2)\overrightarrow{OM}$.

Chú ý. Tương tự như phép nhân một số với một vectơ trong mặt phẳng, phép nhân một số với một vectơ trong không gian có các tính chất sau:

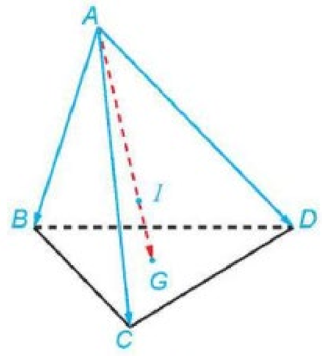
- Tính chất kết hợp: Nếu $h,\ k$ là hai số thực và $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $h(k\vec{a})=(hk)\vec{a}$.

- Tính chất phân phối: Nếu $h,\ k$ là hai số thực và $\vec{a}$ là hai vectơ bất kì thì $(h+k)\vec{a}=h\vec{a}+k\vec{a}$ và $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

- Tính chất nhân với 1 và -1: Nếu $\vec{a}$ là một vectơ bất kì thì $1\vec{a}=\vec{a}$ và $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$.

Ví dụ 8. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD (H.2.19). Chứng minh rằng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

Lời giải



Hình 2.19

Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Do đó ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}$
$=3\overrightarrow{AG}+(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD})=3\overrightarrow{AG}+\vec{0}=3\overrightarrow{AG}$.

Chú ý. Tương tự như trong mặt phẳng, nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì với điểm O tuỳ ý, ta có

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}.$

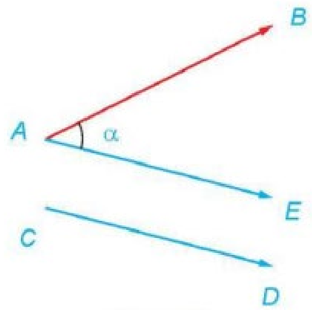
4. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

a) Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm O bất kì và gọi A,B là hai điểm sao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Khi đó, góc $\widehat{AOB}\left(0^\circ\le\widehat{AOB}\le180^\circ\right)$ được gọi là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a},\vec{b})$.

Chú ý

- Để xác định góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ trong không gian ta có thể lấy điểm E sao cho $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{CD}$, khi đó $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=\widehat{BAE}(H.2.23)$.



Hình 2.23

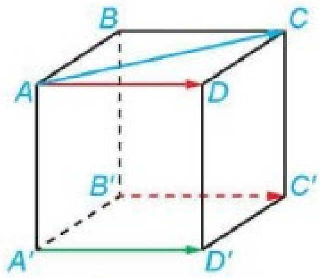
- Quy ước góc giữa một vectơ bất kì và 0 ó có thể nhận một giá trị tuỳ ý từ 0° đến 180°.

Ví dụ 9. Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ (H .2 .24). Tính góc giữa các cặp vectơ sau:

a) $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$;

b) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{A'D'}$.

Lời giải



Hình 2.24

a) Hai vectơ $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ cùng hướng nên $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{B'C'}\right)=0^\circ$.

b) Vì tứ giác $ADD'A'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}$. Do đó $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'D'}\right)=(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})=\widehat{CAD}$.

Tam giác ADC vuông cân tại D nên $\widehat{CAD}=45^\circ$, vì vậy $\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{A'D'}\right)=45^\circ$.

b) Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}\cdot\vec{b}$, được xác định bởi công thức: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Chú ý

- Quy ước nếu $\vec{a}=\vec{0}$ hoặc $\vec{b}=0$ thì $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

- Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$. Khi đó: $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

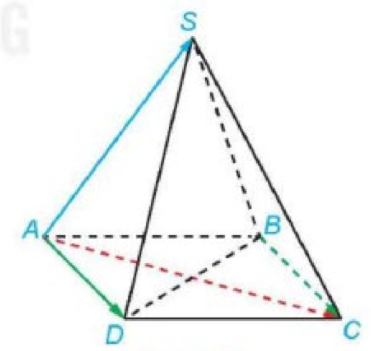
- Với mọi vectơ a a ta có $\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

- Nếu $\vec{a},\vec{b}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Ví dụ 10. Cho hình chóp tứ giác đều $S\,.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a (H.2.26). Tính các tích vô hướng sau:

a) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AC}$.



Hình 2.26

Lời giải

a) Tam giác SAD có ba cạnh bằng nhau nên là tam giác đều, suy ra $\widehat{SAD} = 60^\circ$. Tứ giác ABCD là hình vuông nên $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, suy ra $(\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AD}) = \widehat{SAD} = 60^\circ$. Do đó

$$\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos 60^\circ = a \cdot a \cdot \frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}.$$

b) Tứ giác ABCD là hình vuông có độ dài mỗi cạnh là a nên độ dài đường chéo AC là $\sqrt{2}a$. Tam giác SAC có $SA = SC = a$ và $AC = \sqrt{2}a$ nên tam giác SAC vuông cân tại S, suy ra $\widehat{SAC} = 45^\circ$.

Do đó $\overrightarrow{AS} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AS}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos \widehat{SAC} = a \cdot \sqrt{2}a \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = a^2$.

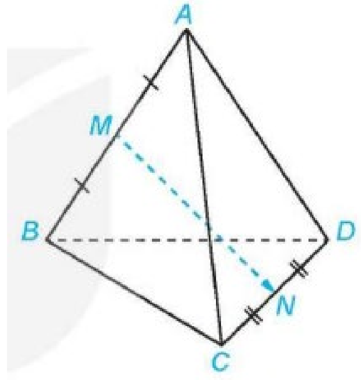
Nhận xét. Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất giống như các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ trong mặt phẳng. Cụ thể, nếu $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ là các vectơ trong không gian và k là một số thực thì ta có:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$; $\quad k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$; $\quad \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$.

Ví dụ 11. Cho tứ diện ABCD có AC và BD cùng vuông góc với AB. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của hai cạnh AB, CD (H.2.27). Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ $\qquad$ b) $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Lời giải



Hình 2.27

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}$ và $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DN}$.

Do đó $2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN})$.

Vì M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD nên $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$.

Suy ra $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$, hay $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

b) Từ giả thiết, ta có $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

Vì vậy, $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.1. Trong không gian, cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ phân biệt và đều khác $\vec{0}$. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

c) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

d) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ngược hướng.

Lời giải

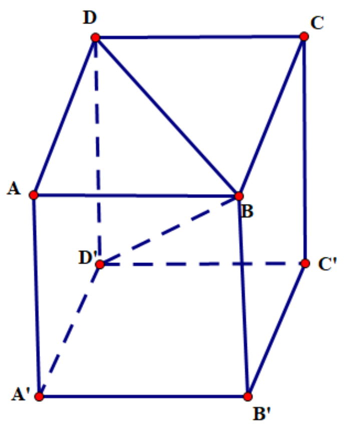
Các câu đúng là:

a) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều cùng hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

b) Nếu $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều ngược hướng với $\vec{c}$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

2.2. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 3$ và $AA' = 4$. Tính độ dài của các vectơ $\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{BD}$ và $\overrightarrow{BD'}$.

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $AA' = BB' = D' = 4$. Suy ra $\left|\overrightarrow{BB'}\right| = 4$.

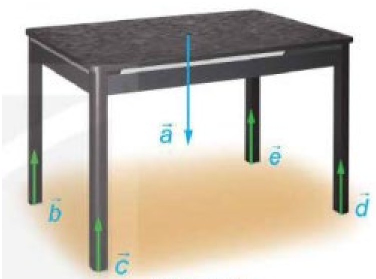
Xét DABD vuông tại A, có $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{BD}\right| = \sqrt{13}$.

Xét DDD'B vuông tại D, có $BD' = \sqrt{DB^2 + DD'^2} = \sqrt{13+16} = \sqrt{29}$. Suy ra $\left|\overrightarrow{BD'}\right| = \sqrt{29}$

2.3. Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn và bốn chân bàn vuông góc với mặt sàn như Hình 2.29. Trọng lực tác dụng lên bàn (biểu thị bởi vectơ â) phân tán đều qua bốn chân bàn và gây nên các phản lực từ mặt sàn lên các chân bàn (biểu thị bởi các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$).

a) Hãy chỉ ra mối quan hệ về phương và hướng của các vecto $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ và $\vec{e}$.

b) Giải thich vì sao các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một bằng nhau.



Hình 2.29

Lời giải

a) Các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ và $\vec{e}$ đều cùng phương với nhau.

Các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đều ngược hướng với $\vec{a}$ nên các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ cùng hướng với nhau.

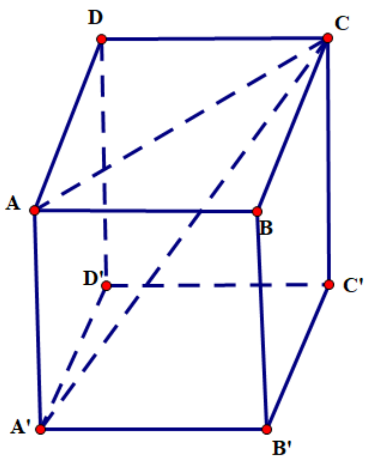
b) Do trọng lực phân tán đều qua các chân bàn nên các phản lực có độ lớn như nhau.

Suy ra các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ có độ dài bằng nhau hơn nữa $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ cùng hướng với nhau nên các vectơ $\vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ đôi một bằng nhau.

2.4. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{C'D'} = \overrightarrow{CC'}$; b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD'} - \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$; c) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{A'C}$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{CC'}$

Vì ABCD. A'B'C'D' là hình hộp nên các mặt là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC};\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{C'D'}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\right)+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{CC'}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD'}-\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$ vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD'}-\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{DD'}-\overrightarrow{DD'}=\vec{0}$.

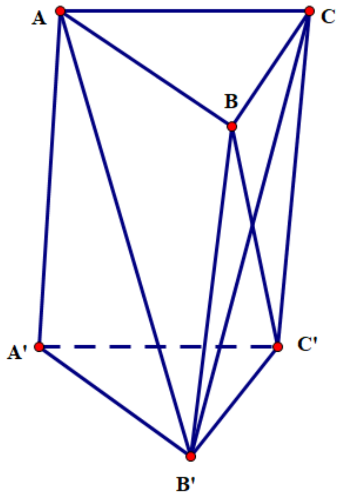
c) $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{A'C}$

Ta có $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{DC}=-\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{CD}\right)=-\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{A'C}$ (quy tắc hình hộp).

2.5. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC\cdot A'B'C'$ có $\overrightarrow{AA'}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ và $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy biểu diễn các vectơ sau qua các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$:

a) $\overrightarrow{AB'}$; b) $\overrightarrow{B'C}$; c) $\overrightarrow{BC'}$.

Lời giải



a) Vì $A'ABB'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}$

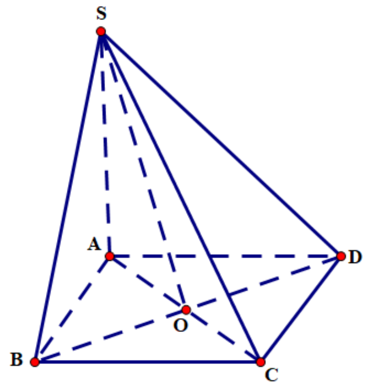
b) Vì $A'ABB'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\vec{a}$. Ta có: $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\vec{b}+\vec{c}$

Vì $C'CBB'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC}=-\vec{b}+\vec{c}$; $\overrightarrow{B'C}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'B}=-\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}$

c) Vì $C'CBB'$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=-\vec{b}+\vec{c}+\vec{a}$

2.6. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Chứng minh rằng tứ giác ABCD là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

Lời giải



Chứng minh: Nếu tứ giác ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ Gọi O là tâm hình bình hành ABCD. Khi đó, O là trung điểm của $\mathrm{AC,BD}$.Suy ra $\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OD}=-\overrightarrow{OB}$

Ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{SO}+(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA})=2\overrightarrow{SO}$

$\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{SO}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{SO}+(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OB})=2\overrightarrow{SO}$

Do đó, $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

Chứng minh: Nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ thì tứ giác ABCD là hình bình hành:

Ta có: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}\Leftrightarrow\overrightarrow{SA}-\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SC}\Leftrightarrow\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$

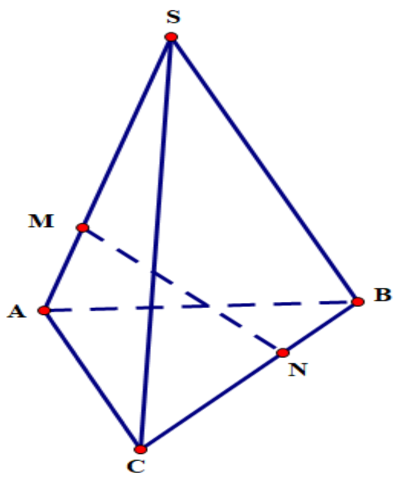
Suy ra, hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng hướng và có độ lớn bằng nhau.

Suy ra, $AB=CD, AB//CD$. Khi đó, tứ giác ABCD là hình bình hành.

Vậy tứ giác ABCD là hình bình hành nếu và chỉ nếu $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

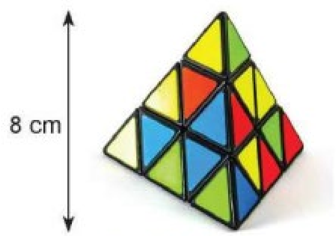
2.7. Cho hình chóp $S.ABC$. Trên cạnh SA, lấy điểm M sao cho $SM=2AM$. Trên cạnh BC, lấy điểm N sao cho $CN=2BN$. Chứng minh rằng $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{AB}$.

Lời giải



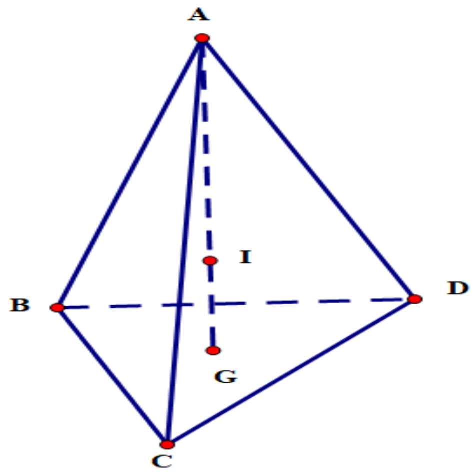
Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{AB}$ (đpcm)

2.8. Trong Luyện tập 8 , ta đã biết trọng tâm của tứ diện ABCD là một điểm I thoả mãn $\overrightarrow{AI} = 3\vec{G}$, ở đó G là trọng tâm của tam giác BCD . Áp dụng tính chất trên để tính khoảng cách từ trọng tâm của một khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều đến một mặt của nó, biết rằng chiều cao của khối rubik là $8\,\text{cm}$ (H 2.30).



Hình 2.30

Lời giải



Giả sử khối rubik (đồng chất) hình tứ diện đều được mô phỏng như hình vẽ.

G là trọng tâm DBCD, I là trọng tâm của tứ diện. Vì ABCD là hình tứ diện đều nên $AG \perp (BCD)$ và $AG = 8\,\text{cm}$.

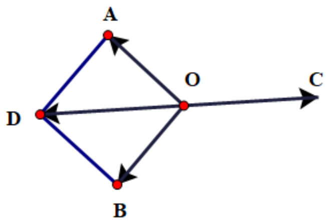
vì $\overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{IG}$ nên 3 điểm A, I, G thẳng hàng và $IG = \frac{1}{4}AG$.

Do đó IG $\perp$(BCD). Khi đó $d(I,(BCD)) = IG = \frac{1}{4}AG = 2\,\text{cm}$.

2.9. Ba sợi dây không giãn với khối lượng không đáng kể được buộc chung một đầu và được kéo căng về ba hướng khác nhau (H.2.31). Nếu các lực kéo làm cho ba sợi dây ở trạng thái đứng yên thì khi đó ba sợi dây nằm trên cùng một mặt phẳng. Hãy giải thích vì sao.

Hình 2.31

Lời giải



Giả sử lực kéo trên mỗi sợi dây được biểu diễn bởi các vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ với là đầu chung của ba sợi dây. Khi ba sợi dậy cân bằng thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$.

Vẽ hình bình hành OADB. Theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$.

Do đó $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OD}$.

Hay O là trung điểm của CD. Do đó các điểm O, A, B, C cùng thuộc mặt phẳng (ABCD).

Suy ra ba sợi dây cùng nằm trong mặt phẳng đó.

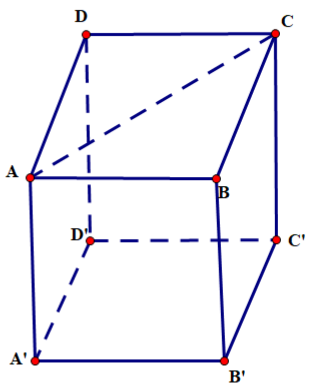
2.10. Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh đáy bằng 1 và độ dài mỗi cạnh bên bằng 2 . Hãy tính góc giữa các cặp vectơ sau đây và tính tích vô hướng của mỗi cặp vectơ đó:

a) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$;

b) $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{BC}$;

c) $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'A'}$.

Lời giải



a) Vì $AA'//CC'$ nên hai vectơ $\overrightarrow{AA'}$ và $\overrightarrow{C'C}$ ngược hướng nhau.

Suy ra, $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=180^\circ$. Do đó, $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{C'C}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{C'C}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{C'C}\right)=2\cdot 2\cdot\cos 180^\circ=-4$

b) Vì $A'ADD'$ là hình chữ nhật nên $\widehat{A'AD}=90^\circ$
vì $ABCD$ là hình vuông nên $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Do đó, $\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{A'AD}=90^\circ$

Ta có: $\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AA'}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AA'},\overrightarrow{AD}\right)=2\cdot 1\cdot\cos 90^\circ=0$

c) Vì A'ABB' là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{BA}$.
vì ABCD là hình vuông nên $\widehat{CAB}=45^\circ$ và $AC=\sqrt{2}$
Ta có: $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{B'A'}=-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=-\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=-\sqrt{2}\cdot 1\cdot\cos 45^\circ=-1$

2.11. Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai vectơ đó là 45°, hãy

tính:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}$; b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})$; c) $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

Lời giải

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=1\cdot 1\cdot\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

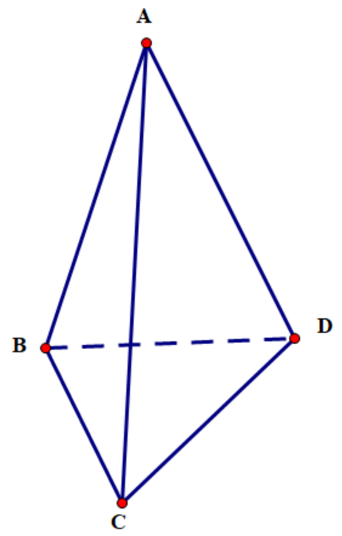
b) $\left(\vec{a}+3\vec{b}\right)\cdot\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)=\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-6\vec{b}^2=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-6.1=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1=2+\sqrt{2}$

2.12. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$; b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$.

Lời giải



a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}\right)\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$

$=\left(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}\right)+\left(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB}\right)+\overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\right)$

$=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\left(\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DA}\right)=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BC}\right)=0$

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: CHỨNG MINH MỘT ĐẲNG THỨC VECTƠ

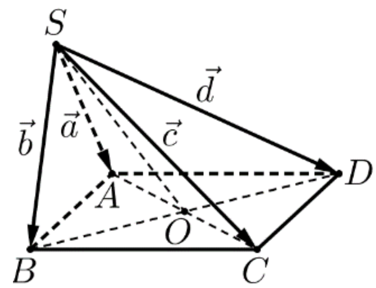
1. Phương pháp

Vận dụng các kiến thức sau.

- Định nghĩa các khái niệm liên quan đến vectơ;
- Tính chất hình học của các đa giác đã học;
- Các quy tắc tính toán với vectơ;
- Một số hệ thức vectơ hay dùng;
- Các tính chất của các hình hình học cụ thể.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Đặt $\overrightarrow{SA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{SB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{SC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{SD}=\vec{d}$. Chứng minh: $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

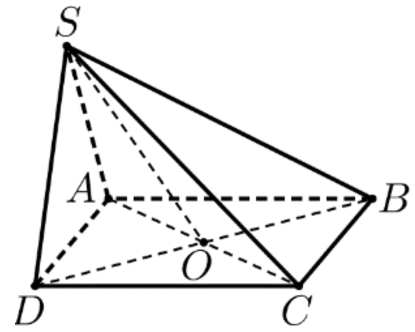


Lời giải

Vì O là trung điểm của AC và BD nên $\begin{cases} \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO} \\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO} \end{cases}$.

Suy ra $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ hay $\vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$.

Ví dụ 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Chứng minh: $\overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$.



Lời giải

Ta có $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\left(\underbrace{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}_{=\vec{0}}\right)=\vec{0}$ (do O là tâm hình bình hành)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$.

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tứ diện, M là một điểm trong không gian. Chứng minh: $\overrightarrow{MG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$

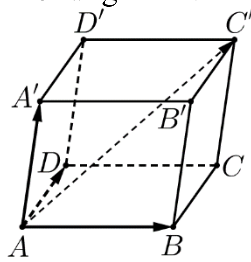
Lời giải

Do G là trọng tâm tứ diện nên ta có $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MA}\right)+\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MB}\right)+\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MC}\right)+\left(\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{MD}\right)=\vec{0},\ \forall M$

$\Rightarrow \overrightarrow{MG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right)$.

Ví dụ 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

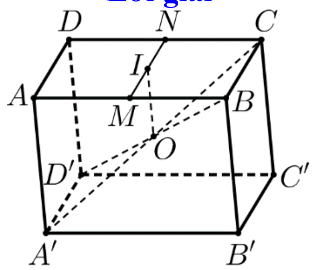


Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0} \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{D'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}\right)+\overrightarrow{CD}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$: luôn đúng

Ví dụ 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình hình hành $ABCD$. Chứng minh: $\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'}\right)$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Suy ra I là trung điểm của MN nên $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OI}$.

Ta có $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{ON} \end{cases}$.

Từ đó suy ra $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}\right)$

$= \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD'} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right) = -\frac{1}{8}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{CA'} + \overrightarrow{BD'} + \overrightarrow{DB'}\right)$.

Ví dụ 6: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm của tam giác BCD chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$

Lời giải

a) Ta có:

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2}((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD})) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$

b) Ta có:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}$

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GD}$

Cộng các đẳng thức theo vế ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \left(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}\right) = 3\overrightarrow{AG}$

Vì G là trọng tâm tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

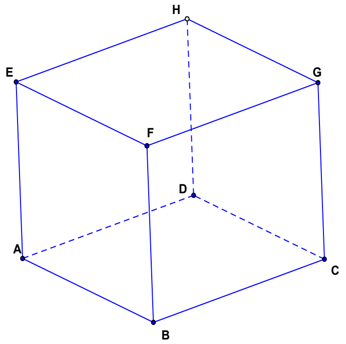
suy ra $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}$.

Ví dụ 7: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}+\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AD}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}+\overrightarrow{FE}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{FE}\right)+\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{\mathrm{GC}}\right)=\vec{0}+\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HD}\right)=\overrightarrow{AD}$

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}=\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}\right)+\left(\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GB}\right)=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$

DẠNG 2: PHÂN TÍCH MỘT VECTƠ THEO CÁC VECTƠ THÀNH PHẦN

1. Phương pháp: Để phân tích một véc tơ theo hệ các véc tơ thành phần thì phải kết hợp hình vẽ với các quy tắc véc tơ, đặc biệt là quy tắc 3 điểm.

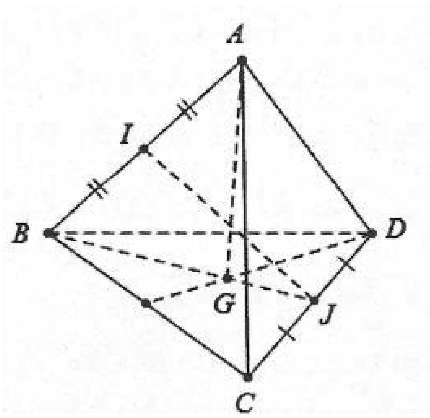
2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J là trung điểm của AB và CD.

a) Hãy biểu diễn vec tơ $\overrightarrow{IJ}$ theo 3 vecto $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

b) Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Hãy biểu diễn vec tơ $\overrightarrow{AG}$ theo 3 vec tơ $\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AD}$.

Lời giải



a) Ta có: $\overrightarrow{IJ}=\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\right)$, mặt khác $\overrightarrow{IA}=-\overrightarrow{AI}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$ (tính chất trung điểm)

Do đó: $\overrightarrow{IJ}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$

b) Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}\\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}\\ \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}\end{cases}$ cộng theo vế ta được:

$3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AD}$

Mặt khác $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}$ (do G là trọng tâm tam giác ABC). Do vậy $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}}{3}$.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M và N lần lượt thuộc AD và BC sao cho $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{MD};\ \overrightarrow{NB}=-3\overrightarrow{NC}$. Biết $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{CD}=\vec{b}$.

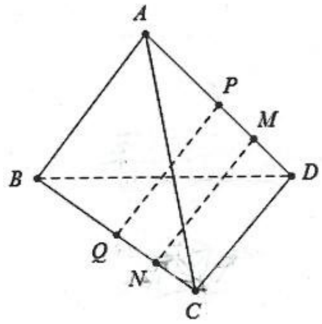
a) Hãy biểu diễn vecto $\overrightarrow{MN}$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

b) Gọi G là trung điểm của PQ, chứng minh rằng G là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN}\left(1\right)$.

Lại có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}\left(2\right)$.



Mặt khác: $\overrightarrow{MA} + 3.\overrightarrow{MD} = \vec{0}; \overrightarrow{NB} + 3.\overrightarrow{NC} = \vec{0}$.

Lấy $\left(2\right) + 3.\left(1\right)$ ta được $4.\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + 3.\overrightarrow{DC}$.

Do đó $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\vec{a} - \frac{3}{4}\vec{b}$.

b) Theo tính chất trung điểm ta có:

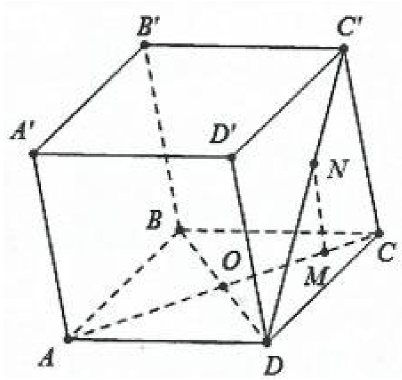
$$\begin{cases} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GP} \\ \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GQ} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 2\left(\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ}\right)$$

Mặt khác $\overrightarrow{GP} + \overrightarrow{GQ} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0} \Rightarrow G$ là trọng tâm tứ diện $ABCD$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{BA} = \vec{a}; \overrightarrow{BB'} = \vec{b}; \overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm nằm trên AC và DC' sao cho $MB // BD'$. Tính tỷ số $\frac{MN}{BD'}$.

Lời giải

Giả sử: $\overrightarrow{MC} = n\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{C'N} = m\overrightarrow{C'D}$.



Ta có: $\overrightarrow{BD'} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DD'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Lại có: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N} = n\overrightarrow{AC} + \vec{b} + m\overrightarrow{C'D}$

$= n.\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}\right) + \vec{b} + m\left(\overrightarrow{C'C} + \overrightarrow{CD}\right)$

$= n.\left(\vec{c} - \vec{a}\right) + \vec{b} + m\left(-\vec{b} + \vec{a}\right) = \left(m - n\right)\vec{a} + \left(1 - m\right)\vec{b} + n\vec{c}$.

Khi đó $MN // BD' \Rightarrow \overrightarrow{MN} = k.\overrightarrow{BD'}$

$$\frac{m-n}{1} = \frac{1-m}{1} = \frac{n}{1} = k \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{2}{3} \\ n = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \frac{MN}{B'D'} = k = \frac{1}{3}.$$

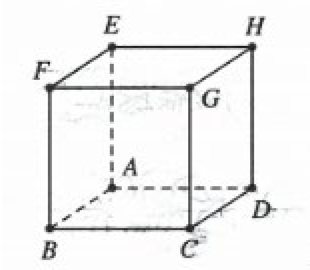
DẠNG 3: GÓC GIỮA HAI VECTƠ. TÍCH VÔ HƯỚNG GIỮA HAI VECTƠ

1. Phương pháp: Nắm được định nghĩa góc giữa hai vecto, công thức tích vô hướng của hai vecto trong không gian

2. Ví dụ

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vecto $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DH}$?

Lời giải

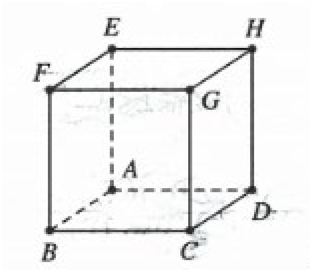


Vì $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$ ($ADHE$ là hình vuông)

Nên $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{DH}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AE}}\right) = \widehat{BAE} = 90°$ ($ABFE$ là hình vuông).

Ví dụ 2. Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

Lời giải

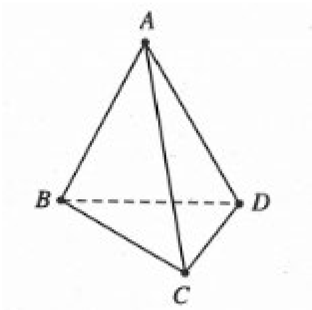


Vì $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC}$ ($AEGC$ là hình vuông)

Nên $\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{EG}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}}\right) = \widehat{BAC} = 45°$ ($ABCD$ là hình vuông).

Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

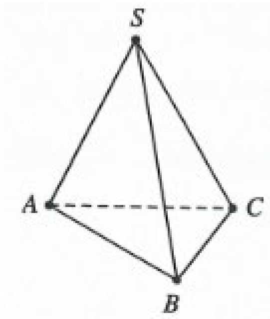
$= \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) - \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$

$= \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60° - \left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60°$.

Mà $AC = AD \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}\right) = 90°$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$, $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{SC}$?

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}\left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA}$

$= \left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SB}\right|\cos\left(\overrightarrow{SC};\overrightarrow{SB}\right) - \left|\overrightarrow{SC}\right|.\left|\overrightarrow{SA}\right|\cos\left(\overrightarrow{SC};\overrightarrow{SA}\right)$

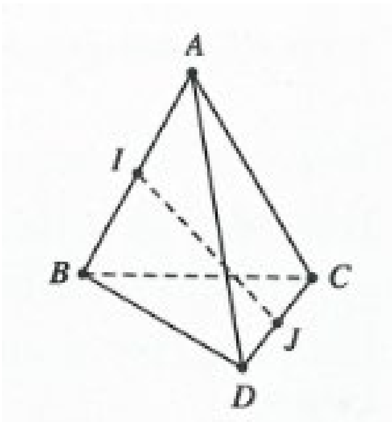
$= SC.SB.\cos\widehat{BSC} - SC.SA.\cos\widehat{ASC}$.

Mà $SA = SB = SC$ và $\widehat{BSC} = \widehat{ASC} \longrightarrow \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = 0$

Do đó $\left(\overrightarrow{SC};\overrightarrow{AB}\right) = 90°$.

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60°$, $\widehat{CAD} = 90°$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

Lời giải



Xét tam giác ICD có J là trung điểm

$CD \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)$

Tam giác ABC có $\begin{cases} AB = AC \\ \widehat{BAC} = 60° \end{cases} \Rightarrow \Delta ABC$ đều $\Rightarrow CI \perp AB$

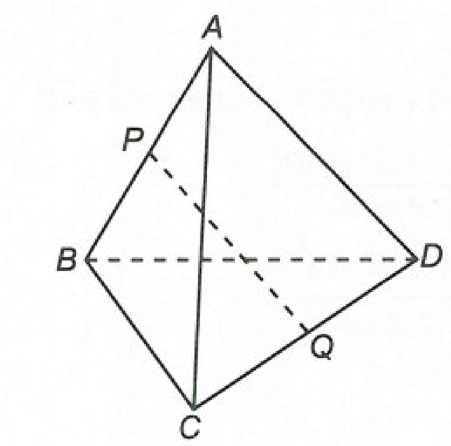
Tương tự ta có ΔABD đều nên $DI \perp AB$

Ta có $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB}=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{IJ}\perp\overrightarrow{AB}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{IJ}\right)=90^\circ$

Ví dụ 6. Cho tứ diện *ABCD* có $AB\perp AC$ và $AB\perp BD$. Gọi *P* và *Q* lần lượt là trung điểm của *AB* và *CD*. Chứng minh rằng $AB\perp PQ$.

Lời giải



Vì $AB\perp AC$ và $AB\perp BD$ nên $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}=0;\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB}=0$.

Ta có $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CQ}$ và $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DQ}$

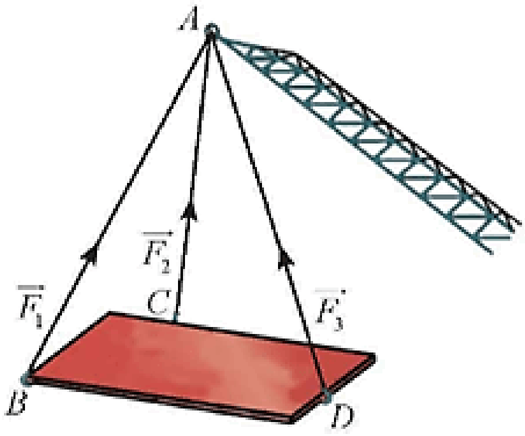
Do đó $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\Rightarrow 2\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AB}=0$

Hay $\overrightarrow{PQ}.\overrightarrow{AB}=0$.

Vậy $AB\perp PQ$.

DẠNG 4. MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG VECTƠ GIẢI TOÁN THỰC TIỄN

Ví dụ 1: Trong Hình 4, cho biết ba vectơ $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ biểu diễn lực căng của các sợi dây cáp AB, AC, AD tác dụng lên vật nặng. Giá của ba vectơ này có cùng nằm trên một mặt phẳng không?



Hình 4

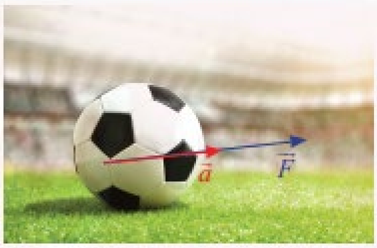
Lời giải

Giá của ba vectơ này lần lượt là ba đường thẳng AB, AC, AD. Chúng không cùng nằm trong một mặt phẳng vì bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng.

Ví dụ 2: Theo định luật II Newton (Vật lí 10 - Chân trời sáng tạo, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2023, trang 60): Gia tốc của một vật có cùng hướng với lực tác dụng lên vật. Độ lớn của gia tốc tỉ lệ thuận với độ lớn của lực và tỉ lệ nghịch với khối lượng của vật:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

trong đó $\vec{a}$ là vectơ gia tốc $\left(\mathrm{m/s^2}\right), \vec{F}$ là vectơ lực (N)



Hình 20

Hình 20 tác dụng lên vật, $m(\mathrm{~kg})$ là khối lượng của vật.

Muốn truyền cho quả bóng có khối lượng $0,5\mathrm{~kg}$ một gia tốc $50\mathrm{~m/s^2}$ thì cần một lực đá có độ lớn là bao nhiêu?

Lời giải

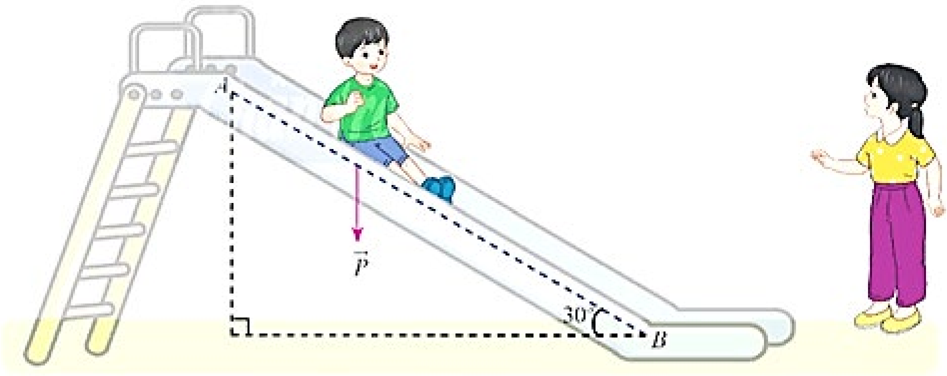
Ta có $\vec{F} = m\vec{a}$, suy ra $|\vec{F}| = m|\vec{a}| = 0,5.50 = 25(\mathrm{~N})$.

Vậy muốn truyền cho quả bóng khối lượng $0,5\mathrm{~kg}$ một gia tốc $50\mathrm{~m/s^2}$ thì cần một lực đá có độ lớn là $25\mathrm{~N}$.

Ví dụ 3: Một em nhỏ cân nặng $m = 25$ kg trượt trên cầu trượt dài 3,5 m. Biết rằng, cầu trượt có góc nghiêng so với phương nằm ngang là 30° (Hình 27).

a) Tính độ lớn của trọng lực $\vec{P} = m\vec{g}$ tác dụng lên em nhỏ, cho biết vectơ gia tốc rơi tự do $\vec{g}$ có độ lớn là $g = 9,8\ \text{m/s}^2$.

b) Cho biết công $\text{A}(\text{J})$ sinh bởi một lực $\vec{F}$ có độ dịch chuyển $\vec{d}$ được tính bởi công thức $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$. Hãy tính công sinh bởi trọng lực $\vec{P}$ khi em nhỏ trượt hết chiều dài cầu trượt.

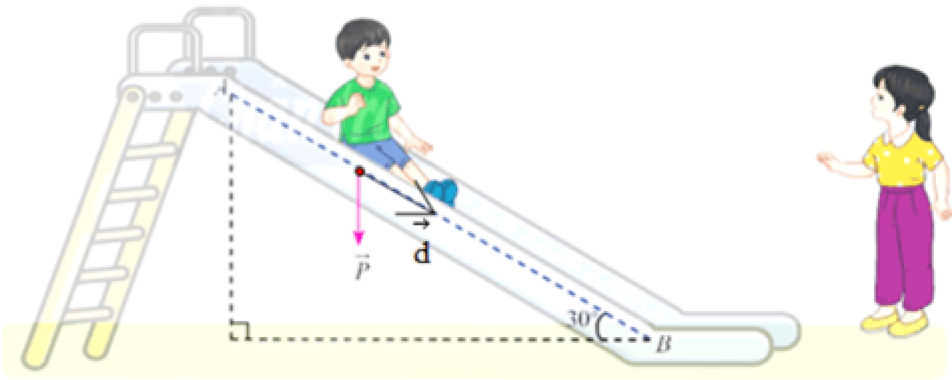


Hình 27

Lời giải

a) Ta có $\left|\vec{P}\right| = m\left|\vec{g}\right| = 25.9,8 = 245$ N.

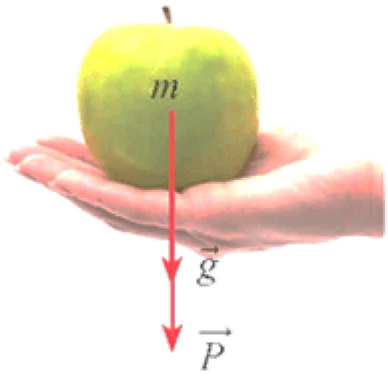
b)



Theo đề ta có $A = \vec{P} \cdot \vec{d}, \left(\vec{P}, \vec{d}\right) = 60^\circ$

$$A = \vec{P} \cdot \vec{d} = \left|\vec{P}\right| \cdot \left|\vec{d}\right| \cdot \cos\left(\vec{P}, \vec{d}\right) = 245 \cdot 3,5 \cdot \cos 60^\circ \approx 428,75 \text{ J}$$

Ví dụ 4: Nếu một vật có khối lượng $m(kg)$ thì lực hấp dẫn $\vec{P}$ của Trái Đất tác dụng lên vật được xác định theo công thức $\vec{P} = m\vec{g}$, trong đó $\vec{g}$ là gia tốc rơi tự do có độ lớn $g = 9,8\ \text{m/s}^2$. Tính độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo có khối lượng 102 gam (Hình 28).



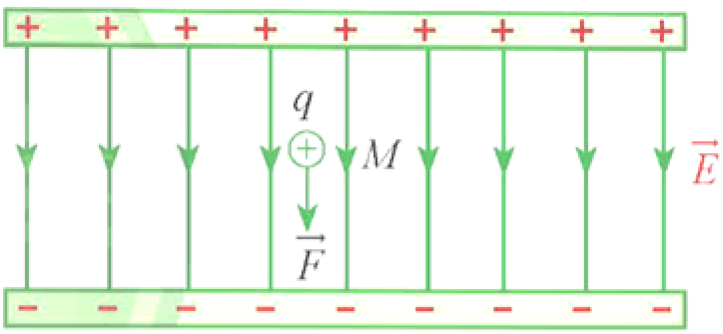
Hình 28

Lời giải

Đổi 102 gam =0,102 kg.
Độ lớn của lực hấp dẫn của Trái Đất tác dụng lên một quả táo là:

$$\left|\vec{P}\right| = m\left|\vec{g}\right| = 0{,}102.9{,}8 = 0{,}9996 \text{ N}$$

Ví dụ 5: Trong điện trường đều, lực tĩnh điện $\vec{F}$ (đơn vị: N) tác dụng lên điện tích điểm có điện tích q (đơn vị: C) được tính theo công thức $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$, trong đó $\vec{E}$ là cường độ điện trường (đơn vị: N/C). Tính độ lớn của lực tĩnh điện tác dụng lên điện tích điểm khi $q = 10^{-9}\text{C}$ và độ lớn điện trường $E = 10^5 \text{ N/C}$ (Hình 29).

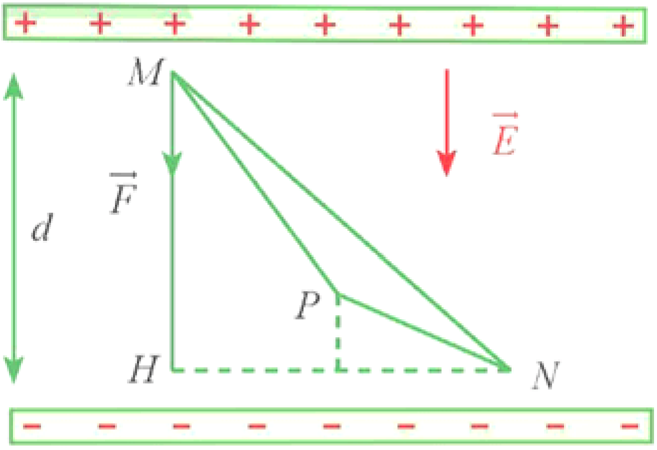


Hình 29

Lời giải

Độ lớn của lực tĩnh điện là $\left|\vec{F}\right| = q \cdot \left|\vec{E}\right| = 10^{-9} \cdot 10^5 = 10^{-4} \text{ N}$.

Ví dụ 6: Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MPN (Hình 30). Biết $q = 2 \cdot 10^{-12}\text{C}$, vectơ điện trường có độ lớn $E = 1{,}8.10^5$ N/C và $d = MH = 5 \text{ mm}$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.



Hình 30

Lời giải

Đối $5\text{ mm} = 5.10^{-3}$ m

Công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$ là $A = qEd = 2\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}8\cdot 10^{5}\cdot 5\cdot 10^{-3} = 18\cdot 10^{-10}\,(\text{J})$.

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

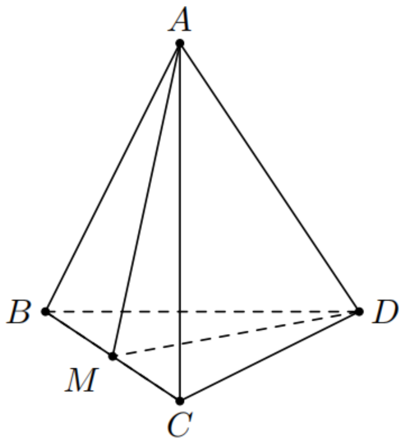
B. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{4}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi M là trung điểm của $CD \to \overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}$.

+ $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}.\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}\right)$

$=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}\right)$

$=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{c}$. Gọi M là trung điểm của đoạn BC. Đẳng thức nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$.

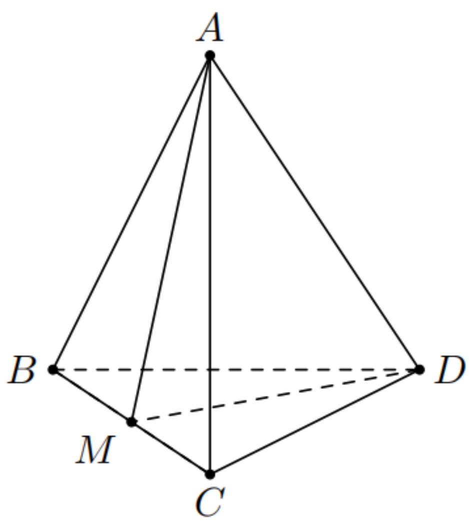
B. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}\right)$.

D. $\overrightarrow{DM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn A



+ Vì M là trung điểm của $BC \rightarrow \overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

+ $\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

$=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$

$=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}\right)$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}+\vec{b}\right)$.

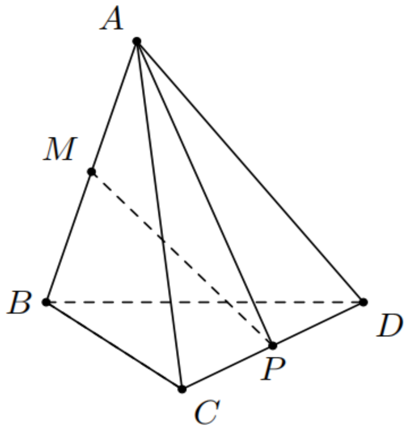
B. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{d}+\vec{b}-\vec{c}\right)$.

C. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{b}-\vec{d}\right)$.

D. $\overrightarrow{MP}=\frac{1}{2}\left(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b}\right)$.

Lời giải

Chọn D



+ Vì M, P lần lượt là trung điểm của $AB, CD \rightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AP} \end{cases}$

+ $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}\right)$

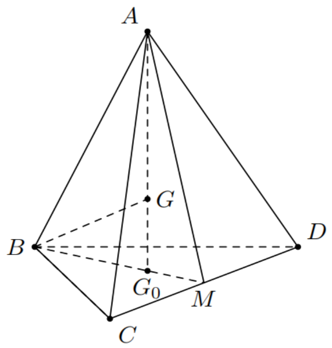
$= -\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{d} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d} - \vec{b}\right)$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ và điểm G thỏa mãn $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$ (G là trọng tâm của tứ diện). Gọi G_o là giao điểm của GA và mặt phẳng (BCD). Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{G_oG}$. **B.** $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{G_oG}$. **C.** $\overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_oG}$. **D.** $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{G_oG}$.

Lời giải

Chọn C



+ Vì G_o là giao điểm của AG và mặt phẳng (BCD)

$\rightarrow G_o$ là trọng tâm tam giác BCD.

$\rightarrow \overrightarrow{G_oB} + \overrightarrow{G_oC} + \overrightarrow{G_oD} = \vec{0}$.

+ Mà $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_o} + \overrightarrow{G_oB} + \overrightarrow{G_oC} + \overrightarrow{G_oD} = \vec{0}$

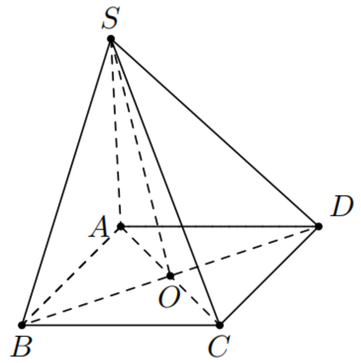
$\rightarrow \overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GG_o} = \vec{0} \rightarrow \overrightarrow{GA} = 3\overrightarrow{G_oG}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đặt $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{SD} = \vec{d}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{a} + \vec{c} = \vec{b} + \vec{d}$. **B.** $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. **C.** $\vec{a} + \vec{d} = \vec{b} + \vec{c}$. **D.** $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + \vec{d}$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}=\vec{a}+\vec{c} \\ \overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}=\vec{b}+\vec{d} \end{cases}$$

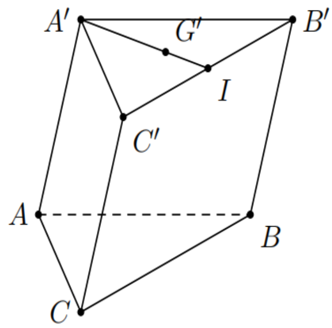
$\rightarrow \vec{a}+\vec{c}=\vec{b}+\vec{d}$

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véctơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng?

A. $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}\right)$. **B.** $\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$. **C.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+3\vec{c}\right)$. **D.** $\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

Lời giải

Chọn B



+ Gọi I là trung điểm $B'C'$.

+ Vì G' là trọng tâm tam giác $A'B'C' \rightarrow \overrightarrow{A'G'}=\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}$.

$+\ \overrightarrow{AG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'G'}=\overrightarrow{AA'}+\frac{2}{3}\overrightarrow{A'I}=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'C'}\right)$

$=\overrightarrow{AA'}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{3}\left(3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$.

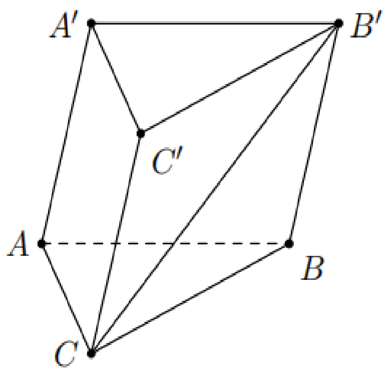
Câu 7: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{B'C}$ theo $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$?

A. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{B'C}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{B'C}=-\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải

Chọn D



+ Vì $BB'C'C$ là hình bình hành nên

$\rightarrow \overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{B'C'} + \overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AA'}$

$= -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$= -\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M là trung điểm của cạnh BB'. Đặt $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM} = \vec{a} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{b}$. **B.** $\overrightarrow{AM} = \vec{b} + \vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$.

C. $\overrightarrow{AM} = \vec{b} - \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{AM} = \vec{a} - \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{b}$.

Lời giải

Chọn C

+ Vì M là trung điểm $BB' \rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'}$.

+ $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}BB' = -\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

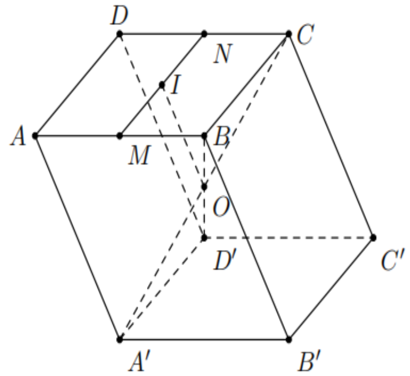
Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$. Đặt $\overrightarrow{AC'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{CA'} = \vec{v}$, $\overrightarrow{BD'} = \vec{x}$, $\overrightarrow{DB'} = \vec{y}$. Khi đó:

A. $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{4}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}\right)$. **B.** $2\overrightarrow{OI} = -\frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}\right)$.

C. $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}\right)$. **D.** $2\overrightarrow{OI} = \frac{1}{4}\left(\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + \vec{y}\right)$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OM} \\ \overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=2\overrightarrow{ON} \end{cases}.$$

+ Vì I là trung điểm $MN \rightarrow \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}=2\overrightarrow{OI}$.

$$\rightarrow 2\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD'}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB'}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\vec{u}+\vec{v}+\vec{x}+\vec{y}\right).$$

Câu 10: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Đặt $\overrightarrow{AA'}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{BD}=\vec{d}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$. **B.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **C.** $\vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$. **D.** $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{d}$.

Lời giải

Chọn C

+ $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB} \leftrightarrow \vec{d}=\vec{c}-\vec{b} \leftrightarrow \vec{b}-\vec{c}+\vec{d}=\vec{0}$.

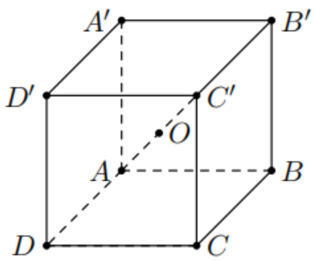
Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O là tâm của hình lập phương. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$. **B.** $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

C. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$. **D.** $\overrightarrow{AO}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$.

Lời giải

Chọn B



+ $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$

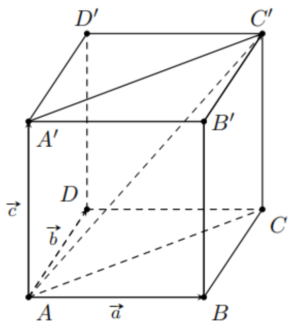
+ O là trung điểm $AC' \to \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC'} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right)$.

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Phân tích vectơ $\overrightarrow{AC'}$ theo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$?

A. $\overrightarrow{AC'} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
B. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.
D. $\overrightarrow{AC'} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm N xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$. Mệnh đề nào đúng?

A. N là trung điểm BD.
B. N là đỉnh hình bình hành $BCDN$.
C. N là đỉnh hình bình hành $CDBN$.
D. $N \equiv A$.

Lời giải

Chọn C

+ Ta có $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \leftrightarrow \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{DC}$.

$\to N$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $CDBN$.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm được xác định bởi đẳng thức sau $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = \vec{0}$. Mệnh đề nào đúng?

A. M là tâm mặt đáy $ABCD$.
B. M là tâm mặt đáy $A'B'C'D'$.
C. M là trung điểm đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.
D. tập hợp điểm M là đoạn thẳng nối hai tâm của hai mặt đáy.

Lời giải

Chọn C

+ Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D' \to \begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \\ \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = \vec{0} \end{cases}$.

$$\to \begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} + \overrightarrow{MD'} = 4\overrightarrow{MO'} + \overrightarrow{O'A'} + \overrightarrow{O'B'} + \overrightarrow{O'C'} + \overrightarrow{O'D'} = 4\overrightarrow{MO'} \end{cases}.$$

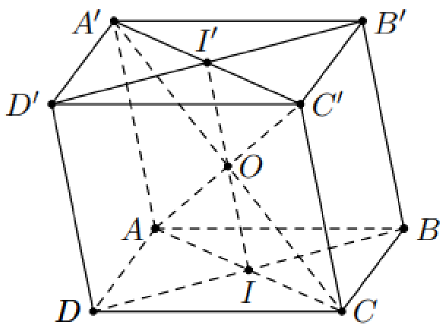
$\to 4\overrightarrow{MO} + 4\overrightarrow{MO'} = \vec{0} \leftrightarrow \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MO'} = \vec{0} \to M$ là trung điểm của OO'.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tâm O. Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. Điểm M xác định bởi đẳng thức $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. M là trung điểm BB'.
B. M là tâm hình bình hành $BCC'B'$.
C. M là trung điểm CC'.
D. M là tâm hình bình hành $ABB'A'$.

Lời giải

Chọn A



+ Gọi I, I' lần lượt là tâm các mặt đáy $ABCD, A'B'C'D'$.

$\rightarrow O$ là trung điểm II'.

+ $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{IB}$.

$\rightarrow M$ là trung điểm BB'.

Câu 16: Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. Điều kiện nào dưới đây khẳng định $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng?

A. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

B. Tồn tại ba số thực m,n,p thỏa mãn $m+n+p\neq 0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

C. Tồn tại ba số thực m,n,p sao cho $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$.

D. Giá của $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng qui.

Lời giải

Chọn B

+ Xét $m=n=p=0$ ta luôn có $m+n+p=0$ và $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0}$ nhưng không thể suy ra được $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

+ Xét $m+n+p\neq 0$ thì chắc chắn có một trong ba số m,n,p khác 0.

Giả sử $m\neq 0 \rightarrow m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=\vec{0} \leftrightarrow \vec{a}=-\frac{n}{m}\vec{b}-\frac{p}{m}\vec{c} \rightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

Câu 17: Cho ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Xét các véctơ $\vec{x}=2\vec{a}+\vec{b}$ và $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$ và $\vec{z}=-3\vec{b}-2\vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

A. $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng.
B. $\vec{x},\vec{a}$ cùng phương.
C. $\vec{x},\vec{b}$ cùng phương.
D. $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đôi một cùng phương.

Lời giải

Chọn A

+ Giả sử ba vectơ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng khi đó $\rightarrow \vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$.

$$\leftrightarrow 2\vec{a}+\vec{b}=m\vec{a}-(m+3n)\vec{b}-(m+2n)\vec{c} \leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ m+3n=-1 \\ m+2n=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} m=2 \\ n=-1 \end{cases}.$$

Vậy $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 18: Cho ba véctơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng. Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c}$ đồng phẳng.

B. $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}+4\vec{c}$ và $\vec{y}=3\vec{a}-3\vec{b}+2\vec{c}$ và $\vec{z}=2\vec{a}-3\vec{b}-3\vec{c}$ đồng phẳng.

C. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ và $\vec{y}=2\vec{a}-\vec{b}+3\vec{c}$ và $\vec{z}=-\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ đồng phẳng.

Lời giải

Chọn A

+ $\vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng khi và chỉ khi $\exists m,n:\vec{x}=m\vec{y}+n\vec{z}$.

Với $\begin{cases} \vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c} \\ \vec{y}=2\vec{a}-3\vec{b}-6\vec{c} \\ \vec{z}=-\vec{a}+3\vec{b}+6\vec{c} \end{cases} \rightarrow \vec{x}=\frac{4}{3}\vec{y}+\frac{5}{3}\vec{z} \rightarrow \vec{x},\vec{y},\vec{z}$ đồng phẳng.

Câu 19: Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

A. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu một trong ba vectơ đó bằng $\vec{0}$.

B. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng nếu có hai trong ba vectơ đó cùng phương.

C. Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ ba vectơ $\overrightarrow{AB'},\overrightarrow{C'A'},\overrightarrow{DA'}$ đồng phẳng.

D. $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ luông đồng phẳng với hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải

Chọn D

+ Giả sử cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và gọi M là trung điểm $C'D'$ khi đó:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{AM} \rightarrow \overrightarrow{AM}$ không đồng phẳng với $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các điểm M,N,P xác định bởi $\overrightarrow{MA}=k\overrightarrow{MB'}(k\neq 0),\overrightarrow{NB}=x\overrightarrow{NC'},\overrightarrow{PC}=y\overrightarrow{PD'}$. Hãy tính x,y theo k để ba điểm M,N,P thẳng hàng.

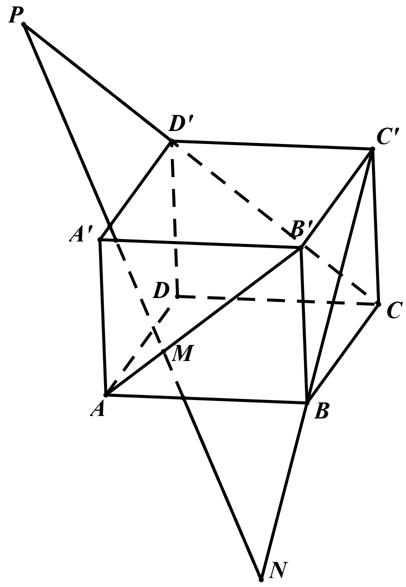
A. $x=\dfrac{2+k}{2-k},y=-\dfrac{2}{k}$

B. $x=\dfrac{1+2k}{1-2k},y=-\dfrac{1}{2k}$

C. $x=\dfrac{\frac{1}{2}+k}{2-k},y=-\dfrac{1}{2k}$

D. $x=\dfrac{1+k}{1-k},y=-\dfrac{1}{k}$

Lời giải



Chọn D

Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Từ giả thiết ta có: $\overrightarrow{AM}=\dfrac{k}{k-1}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)\quad(1)$, $\overrightarrow{AN}=\vec{b}+\dfrac{x}{x-1}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)\quad(2)$

$,\overrightarrow{AP}=\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{y}{y-1}\left(\vec{c}-\vec{b}\right)(3)$.

Từ đó ta có: $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AM}=\dfrac{x}{x-1}\vec{a}-\dfrac{1}{k-1}\vec{b}+\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{k}{k-1}\right)\vec{c}+\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{y}{y-1}\right)\vec{c}$.

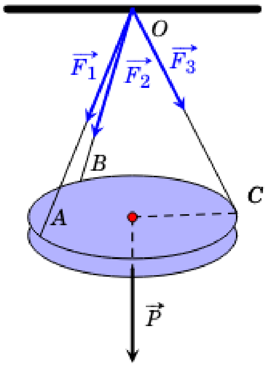
$\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AM}=\vec{a}-(\dfrac{y}{y-1}+\dfrac{1}{k-1})\vec{b}+\left(\dfrac{y}{y-1}-\dfrac{k}{k-1}\right)\vec{c}$

Ba điểm M,N,P thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại λ sao cho $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{MP}\quad(*)$.

Thay các vec tơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$ vào $(*)$ và lưu ý $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng ta tính được

$x=\dfrac{1+k}{1-k},y=-\dfrac{1}{k}$.

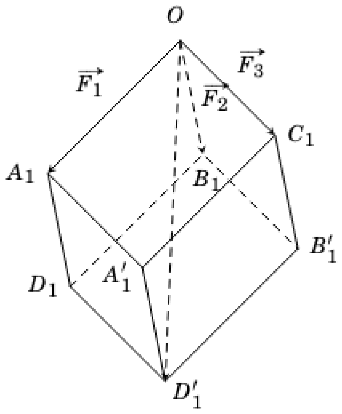
Câu 21: Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà và lần lượt buộc vào ba điểm A,B,C trên đèn tròn sao cho các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3}$ lần lượt trên mỗi dây OA,OB,OC đôi một vuông góc với nhau và $\left|\overrightarrow{F_1}\right|=\left|\overrightarrow{F_2}\right|=\left|\overrightarrow{F_3}\right|=15$ (N). Tính trọng lượng của chiếc đèn tròn đó.



A. $14\sqrt{3}(\mathrm{N})$. **B.** $15\sqrt{3}(\mathrm{N})$. **C.** $17\sqrt{3}(\mathrm{N})$. **D.** $16\sqrt{3}(\mathrm{N})$.

Lời giải

Chọn B



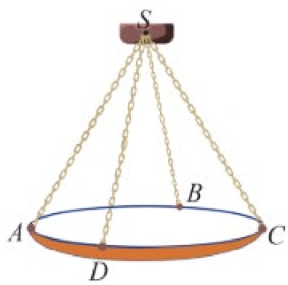
Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$. Lấy các điểm D_1, A_1', B_1', D_1' sao cho $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A_1'D_1'B_1'$ là hình hộp (như hình bên). Khi đó, áp dụng quy tắc hình hộp ta có

$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{OD_1'}$.

Mặt khác, do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ đôi một vuông góc và $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F_3}| = 15(\mathrm{N})$ nên hình hộp $OA_1D_1B_1 \cdot C_1A_1'D_1'B_1'$ có ba cạnh OA_1, OB_1, OC_1 đôi một vuông góc và bằng nhau. Vì thế hình hộp đó là hình lập phương có độ dài cạnh bằng 15. Suy ra độ dài đường chéo OD_1' của hình lập phương đó bằng $15\sqrt{3}$.

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \vec{P}$, ơ đó $\vec{P}$ là trong lực tác dụng lên chiếc đèn. Suy ra trọng lượng của chiếc đèn là $|\vec{P}| = |\overrightarrow{OD_1'}| = 15\sqrt{3}(\mathrm{N})$

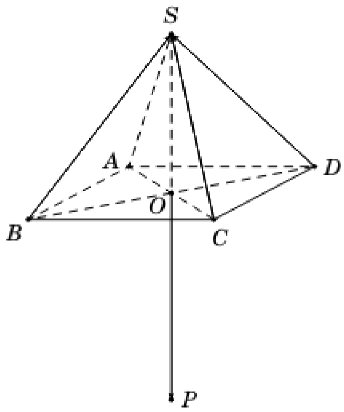
Câu 22: Một chiếc đèn chùm treo có khối lượng $m = 5\,\mathrm{kg}$ được thiết kế với đĩa đèn được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\widehat{ASC} = 60^\circ$. Tìm độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích. Lấy $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.



A. $\frac{15\sqrt{3}}{3}\mathrm{N}$. **B.** $\frac{20\sqrt{3}}{3}\mathrm{N}$. **C.** $\frac{25\sqrt{3}}{3}\mathrm{N}$. **D.** $\frac{30\sqrt{3}}{3}\mathrm{N}$.

Lời giải

Chọn D



- Ta có $\vec{P} = m\vec{g}$ nên $|\vec{P}| = m \cdot |\vec{g}| = 5 \cdot 10 = 50\,\mathrm{N}$.

Vậy độ lớn của trọng lực $\vec{P}$ tác động lên chiếc đèn chùm là $50\,\mathrm{N}$.

- Gọi O là trọng tâm của chiếc đèn chùm cũng là chân đường cao hình chóp đều $S \cdot ABCD$. Vẽ $\overrightarrow{OP}$ biểu diễn trọng lực tác động lên đèn chùm với

$OP \perp (ABCD)$.

Khi đó lực căng mỗi sợi xích sẽ là $\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{DS}$.

Chiếc đèn chùm đứng yên nên $\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{BS} + \overrightarrow{CS} + \overrightarrow{DS} + \overrightarrow{OP} = \vec{0}$.

Câu 23: Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ $\vec{0}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$. **B.** $\vec{a}.\vec{b} = 0$. **C.** $\vec{a}.\vec{b} = -1$. **D.** $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Lời giải

Chọn A

Do $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là hai vectơ cùng hướng nên $\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 0^0 \longrightarrow \cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 1$.

Vậy $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|$.

Câu 24: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khi $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$.

A. $\alpha = 180^\circ$. **B.** $\alpha = 0^\circ$. **C.** $\alpha = 90^\circ$. **D.** $\alpha = 45^\circ$.

Lời giải

Chọn A

Mà theo giả thiết $\vec{a}.\vec{b} = -|\vec{a}|.|\vec{b}|$, suy ra $\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = -1 \longrightarrow \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = 180^0$

Câu 25: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ và $\vec{a}.\vec{b} = -3$. Xác định góc α giữa hai vectơ

$\vec{a}$ và $\vec{b}$

A. $\alpha = 30^{\circ}$. **B.** $\alpha = 45^{\circ}$. **C.** $\alpha = 60^{\circ}$. **D.** $\alpha = 120^{\circ}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b}) \longrightarrow \cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{-3}{3.2} = -\dfrac{1}{2} \longrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 120^0$

Câu 26: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và hai vectơ $\vec{u} = \dfrac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}$ và $\vec{v} = \vec{a} + \vec{b}$ vuông góc với nhau. Xác định góc α giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

A. $\alpha = 90^{\circ}$. **B.** $\alpha = 180^{\circ}$. **C.** $\alpha = 60^{\circ}$. **D.** $\alpha = 45^{\circ}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\vec{u} \perp \vec{v} \longrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{5}\vec{a} - 3\vec{b}\right)(\vec{a} + \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{2}{5}\vec{a}^2 - \dfrac{13}{5}\vec{a}\vec{b} - 3\vec{b}^2 = 0$

$\xrightarrow{|\vec{a}|=|\vec{b}|=1} \vec{a}\vec{b} = -1$

Suy ra $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = -1 \longrightarrow (\vec{a},\vec{b}) = 180^0$

Câu 27: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn điều kiện $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ và $\vec{a}.\vec{b} = 3$. Độ dài vectơ $3\vec{a} + 5\vec{b}$:

A. $5\sqrt{5}$. **B.** $\sqrt{24}$. **C.** 8. **D.** 124.

Lời giải

Chọn B

$(3\vec{a} + 5\vec{b})^2 = 9\vec{a}^2 + 30\vec{a}\vec{b} + 25\vec{b}^2 = 9 + 90 + 25 = 124.$

$\Rightarrow |3\vec{a} + 5\vec{b}| = \sqrt{124}$

Câu 28: Cho $\vec{a}$, $\vec{b}$ có $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ và $|\vec{a}| = |\vec{b}|$. Khi đó:

A. $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b}) = 90^{\circ}$. **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

+Vì $(\vec{a} + 2\vec{b})$ vuông góc với vectơ $(5\vec{a} - 4\vec{b})$ nên:

$(\vec{a} + 2\vec{b}).(5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 5\vec{a}^2 - 8\vec{b}^2 + 6\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = \dfrac{-5\vec{a}^2 + 8\vec{b}^2}{6}$.

Ta có $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{a}\right|^2 = \left|\vec{b}\right|^2$. Suy ra $\vec{a}.\vec{b} = \dfrac{3\vec{a}^2}{6}$

+ $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{\frac{3\vec{a}^2}{6}}{\vec{a}^2} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 29: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right| = 4; \left|\vec{b}\right| = 3; \left|\vec{a}-\vec{b}\right| = 4$. Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\alpha = \dfrac{3}{8}$. **B.** $\alpha = 30^0$. **C.** $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. **D.** $\alpha = 60^0$.

Lời giải

Chọn A

$(\vec{a}-\vec{b})^2 = \left|\vec{a}\right|^2 + \left|\vec{b}\right|^2 - 2\vec{a}.\vec{b} \Rightarrow \vec{a}.\vec{b} = \dfrac{9}{2}$.

Do đó: $\cos\alpha = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|} = \dfrac{3}{8}$.

Câu 30: $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là 2 vectơ đều khác $\vec{0}$. Khi đó $\left|\vec{u}+2\vec{v}\right|^2$ bằng

A. $\vec{u}^2 + 2\vec{v}^2 - 4\vec{u}.\vec{v}$. **B.** $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u}.\vec{v}$. **C.** $\vec{u}^2 + 4\vec{v}^2$. **D.** $4\vec{u}\cdot\vec{v}\left(\vec{u}-\vec{v}\right)$

.

Lời giải

Chọn C

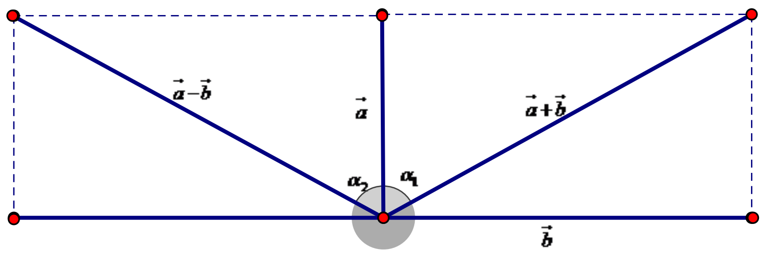
Ta có $\left|\vec{u}+2\vec{v}\right|^2 = \left(\vec{u}+2\vec{v}\right)^2 = \vec{u}^2 + 4\vec{v}^2 + 4\vec{u}.\vec{v}$.

Câu 1: Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=12$ và $|\vec{a}+\vec{b}|=13$. Khi đó cosin của góc giữa hai vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ và $\vec{a}+\vec{b}$ bằng

A. $\dfrac{12}{13}$. **B.** $\dfrac{5}{12}$. **C.** $-\dfrac{119}{169}$. **D.** $\dfrac{119}{169}$.

Lời giải

Chọn C



Nhận thấy $\sqrt{5^2+12^2}=13$ suy ra $\vec{a}\perp\vec{b}$

Mặt khác: $\cos(\alpha_2)=\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}+\vec{b}|}=\dfrac{5}{13}\Rightarrow \alpha_2=\cos^{-1}\dfrac{5}{13}$.

Do đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ và $\vec{a}+\vec{b}$ bằng $\alpha_1+\alpha_2=2\alpha_2=2.\cos^{-1}\dfrac{5}{13}$

Vậy $\cos\left(\widehat{\vec{a}-\vec{b},\vec{a}+\vec{b}}\right)=\cos\left(2.\cos^{-1}\dfrac{5}{13}\right)=-\dfrac{119}{169}$.

Câu 2: Cho $\vec{u}=\vec{a}+3\vec{b}$ vuông góc với $\vec{v}=7\vec{a}-5\vec{b}$ và $\vec{x}=\vec{a}-4\vec{b}$ vuông góc với $\vec{y}=7\vec{a}-2\vec{b}$. Khi đó góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=75^\circ$. **B.** $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^\circ$. **C.** $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=120^\circ$. **D.** $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=45^\circ$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$$\begin{cases}\vec{u}.\vec{v}=0\\ \vec{x}.\vec{y}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\vec{a}+3\vec{b}\right).\left(7\vec{a}-5\vec{b}\right)=0\\ \left(\vec{a}-4\vec{b}\right).\left(7\vec{a}-2\vec{b}\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7\left|\vec{a}\right|^2-15\left|\vec{b}\right|^2=-16\vec{a}.\vec{b}\\ 7\left|\vec{a}\right|^2+8\left|\vec{b}\right|^2=30\vec{a}.\vec{b}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\vec{b}\right|^2=2\vec{a}.\vec{b}\\ \left|\vec{a}\right|^2=2\vec{a}.\vec{b}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\vec{b}\right|^2=2\vec{a}.\vec{b}\\ \left|\vec{a}\right|=\left|\vec{b}\right|\end{cases}.$$

Từ đó, ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\left(\vec{a},\vec{b}\right)=60^\circ$

Câu 3: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=4;\left|\vec{b}\right|=3;\vec{a}.\vec{b}=10$. Xét hai vectơ $\vec{y}=\vec{a}-\vec{b}$ $\vec{x}=\vec{a}-2\vec{b}$, . Gọi α là góc giữa hai vectơ $\vec{x},\vec{y}$. Chọn khẳng định đúng.

A. $\cos\alpha=\dfrac{-2}{\sqrt{15}}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{15}}$. **C.** $\cos\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{15}}$. **D.** $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{15}}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $\vec{x}.\vec{y}=\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\right)^2+2\left(\vec{b}\right)^2-3\vec{a}.\vec{b}=4$.

$\left|\vec{x}\right|=\sqrt{\left(\vec{x}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}-2\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}\right)^2+4\left(\vec{b}\right)^2-4\vec{a}.\vec{b}}=2\sqrt{3}$.

$\left|\vec{y}\right|=\sqrt{\left(\vec{y}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{\left(\vec{a}\right)^2+\left(\vec{b}\right)^2-2\vec{a}.\vec{b}}=\sqrt{5}$.

$\cos\alpha=\dfrac{\vec{x}.\vec{y}}{\left|\vec{x}\right|.\left|\vec{y}\right|}=\dfrac{4}{2\sqrt{3}.\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{15}}$

Câu 4: Cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ thỏa mãn: $\left|\vec{a}\right|=26;\left|\vec{b}\right|=28;\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=48$. Độ dài vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ bằng?

A. 25. **B.** $\sqrt{616}$. **C.** 9. **D.** $\sqrt{618}$.

Lời giải

Chọn B

$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2-2\vec{a}.\vec{b}=2\left(\vec{a}^2+\vec{b}^2\right)-\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2$

$=2\left(\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2\right)-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=2\left(26^2+28^2\right)-48^2=616$

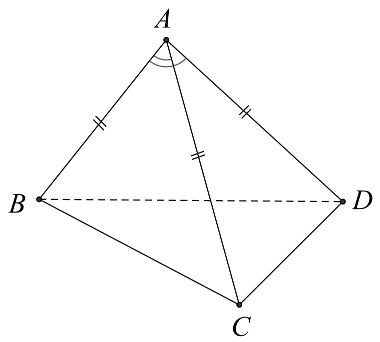
$\Rightarrow\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{616}.$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=AC=AD$ và $\widehat{BAC}=\widehat{BAD}=60^0$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$?

A. 60^0. **B.** 45^0. **C.** 120^0. **D.** 90^0.

Lời giải

Chọn D



Ta có

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$= AB.AD.\cos 60^0 - AB.AC.\cos 60^0 = 0$

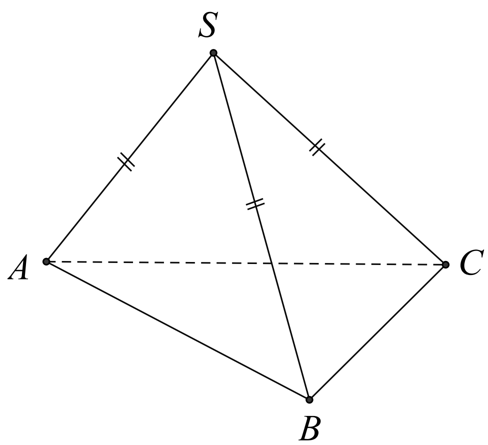
$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 90^0$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$ và $\widehat{ASB} = \widehat{BSC} = \widehat{CSA}$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{SA}$ và $\overrightarrow{BC}$?

A. 120^0. **B.** 90^0. **C.** 60^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn B



Ta có

$\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{SA}.\left(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SB}\right) = \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SB}$

$= SA.SC.\cos\widehat{ASC} - SA.SB.\cos\widehat{ASB} = 0$

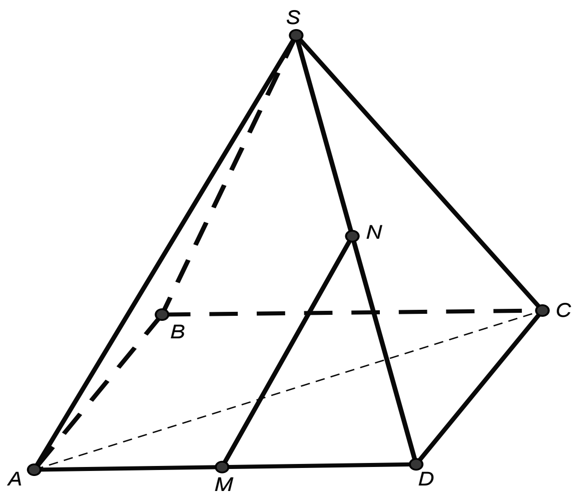
$\Rightarrow \left(\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BC}\right) = 90^0$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a và các cạnh bên đều bằng a. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SD. Số đo của góc (MN, SC) bằng:

A. 45° **B.** 30° **C.** 90° **D.** 60°

Lời giải

Chọn C



Ta có: $AC = a\sqrt{2}$

$\Rightarrow AC^2 = 2a^2 = SA^2 + SC^2$

$\Rightarrow \Delta SAC$ vuông tại S.

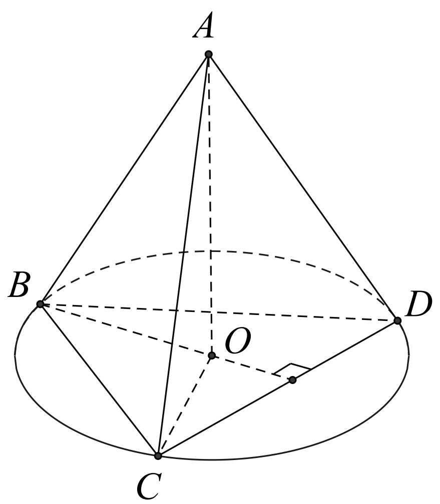
Khi đó: $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{SC} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SA}.\overrightarrow{SC} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{SC}\right) = 90^\circ \Rightarrow \left(MN, SC\right) = 90^\circ$

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ đều cạnh bằng a. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

A. 0^0. **B.** 30^0. **C.** 90^0. **D.** 60^0.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CA}\right)\overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{CO}.\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = CO.CD.\cos 30^0 - CA.CD.\cos 60^0$

$= \frac{a\sqrt{3}}{3}.a.\frac{\sqrt{3}}{2} - a.a.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0.$

Suy ra $AO \perp CD$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ với $AB \perp AC,\ AB \perp BD$. Gọi $P,\ Q$ lần lượt là trung điểm của AB và CD. Góc giữa PQ và AB là?

A. 90^0. **B.** 60^0. **C.** 30^0. **D.** 45^0.

Lời giải

Chọn A

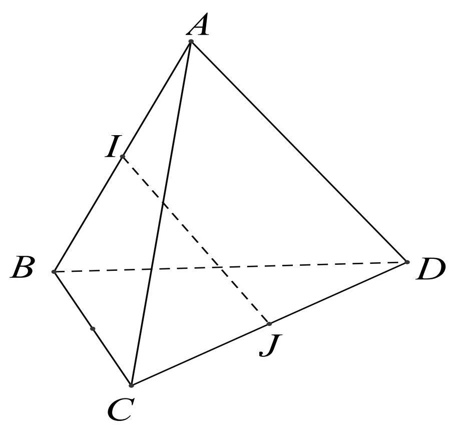
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{PQ} \Rightarrow AB \perp PQ$

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC = AD$ và $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 60^0, \widehat{CAD} = 90^0$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$?

A. $120°$. **B.** $90°$. **C.** $60°$. **D.** $45°$.

Lời giải

Chọn B



Xét tam giác ICD có J là trung điểm đoạn CD.

Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right)$

Vì tam giác ABC có $AB = AC$ và $\widehat{BAC} = 60°$

Nên tam giác ABC đều. Suy ra: $CI \perp AB$

Tương tự ta có tam giác ABD đều nên $DI \perp AB$.

Xét $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}\right).\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{ID}.\overrightarrow{AB} = \vec{0}$.

Suy ra $\overrightarrow{IJ} \perp \overrightarrow{AB}$. Hay góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{IJ}$ bằng 90^0.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và ABD là các tam giác đều. Khẳng định nào sau đây đúng nhất.

A. AB và CD chéo nhau **B.** AB và CD vuông góc với nhau

C. AB và CD đồng phẳng **D.** AB và CD cắt nhau

Lời giải

Chọn B

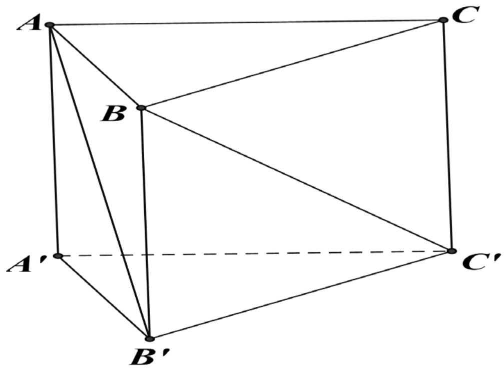
Đặt $AB = AD = AC = a$

Ta có $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}\right)\overrightarrow{AB}$

$$= \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AD}\right|\cos 60^0 - \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos 60^0 = a.a.\frac{1}{2} - a.a.\frac{1}{2} = 0$$

Vậy $AB \perp CD$.

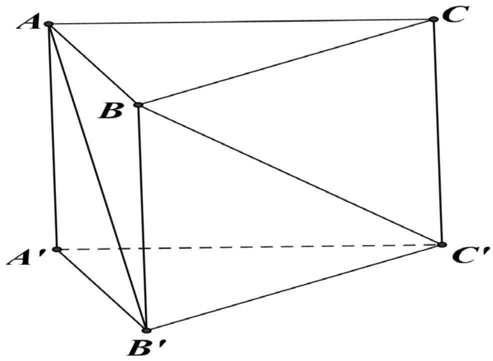
Câu 12: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = \sqrt{2}a$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng



A. $60°$. **B.** $45°$. **C.** $90°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}\right)\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'}\right) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'}$

$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'}.\overrightarrow{CC'} = -\dfrac{a^2}{2} + 0 + 0 + 2a^2 = \dfrac{3a^2}{2}$.

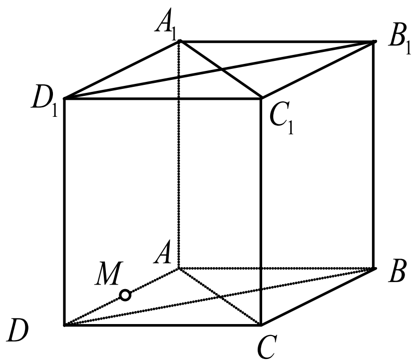
Suy ra $\cos\left(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{BC'}\right) = \dfrac{\overrightarrow{AB'}.\overrightarrow{BC'}}{\left|\overrightarrow{AB'}\right|.\left|\overrightarrow{BC'}\right|} = \dfrac{\dfrac{3a^2}{2}}{a\sqrt{3}.a\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \widehat{\left(AB', BC'\right)} = 60°$.

Câu 13: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ có cạnh a. Gọi M là trung điểm AD. Giá trị $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1}$ là:

A. $\dfrac{1}{2}a^2$. **B.** a^2. **C.** $\dfrac{3}{4}a^2$. **D.** $\dfrac{3}{2}a^2$.

Lời giải

Chọn A



Ta có: $\overrightarrow{B_1M}.\overrightarrow{BD_1} = \left(\overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right)\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD_1}\right)$

$= \overrightarrow{B_1B}.\overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AD}$

$= -a^2 + a^2 + \dfrac{a^2}{2}$

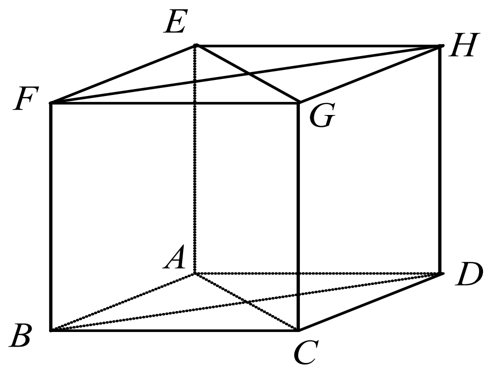
$= \dfrac{a^2}{2}$

Câu 14: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$. Hãy xác định góc giữa cặp vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{EG}$?

A. $90°$ **B.** $60°$ **C.** $45°$ **D.** $120°$

Lời giải

Chọn C



Ta có: $EG//AC$ (do $ACGE$ là hình chữ nhật)

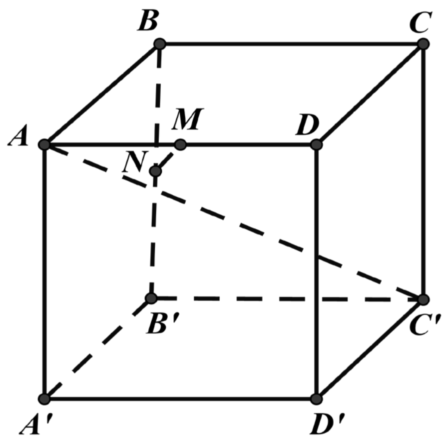
$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{EG}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45°$

Câu 15: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BB'. Cosin của góc hợp bởi MN và AC' bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **B.** $\frac{\sqrt{2}}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn B



* Xét hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a.

* Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB},\ \vec{b} = \overrightarrow{AD},\ \vec{c} = \overrightarrow{AA'} \Rightarrow \left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right| = \left|\vec{c}\right| = a,\ \vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{c} = \vec{a}.\vec{c} = 0$.

* Ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{AM} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \Rightarrow \left|\overrightarrow{MN}\right| = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$$

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \left|\overrightarrow{AC'}\right| = \sqrt{a^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\overrightarrow{AC'}.\overrightarrow{MN} = a^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}a^2 = a^2$$

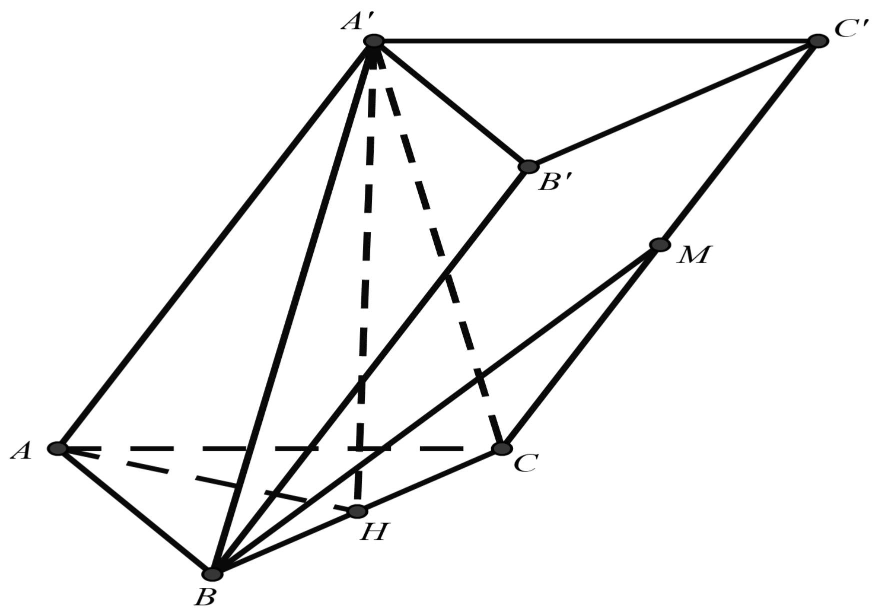
$$\cos(MN;AC') = \left|\cos\left(\overrightarrow{MN};\overrightarrow{AC'}\right)\right| = \frac{\left|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC'}\right|}{\left|\overrightarrow{MN}\right|.\left|\overrightarrow{AC'}\right|} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 16: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a, tam giác $A'BC$ đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC). M là trung điểm cạnh CC'. Tính cosin góc α giữa hai đường thẳng AA' và BM.

A. $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{22}}{11}$. **B.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{33}}{11}$. **C.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{11}}{11}$. **D.** $\cos\alpha = \frac{\sqrt{22}}{11}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có: $AH = A'H = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và $AH \perp BC, A'H \perp BC \Rightarrow BC \perp (AA'H) \Rightarrow BC \perp AA'$ hay $BC \perp BB'$. Do đó: $BCC'B'$ là hình chữ nhật.

Khi đó: $CC' = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}.\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow BM = \sqrt{a^2 + \frac{a^2.6}{16}} = a\frac{\sqrt{22}}{4}$.

Xét: $\overrightarrow{AA'}.\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AA'}.\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM}\right) = 0 + AA'.CM = \frac{3a^2}{4}$.

Suy ra $\cos(AA', BM) = \frac{\left|\frac{3a^2}{4}\right|}{\frac{a\sqrt{6}}{2}.\frac{a\sqrt{22}}{4}} = \frac{\sqrt{33}}{11}$.

Câu 17: Cho tam giác ABC, thì công thức tính diện tích nào sau đây là đúng nhất.

A. $S=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-BC^2}$

B. $S=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

C. $S=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

D. $S=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}$

Lời giải

Chọn D

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}ABAC\sin A=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AB^2\sin^2 A}=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2\left(1-\cos^2 A\right)}$$

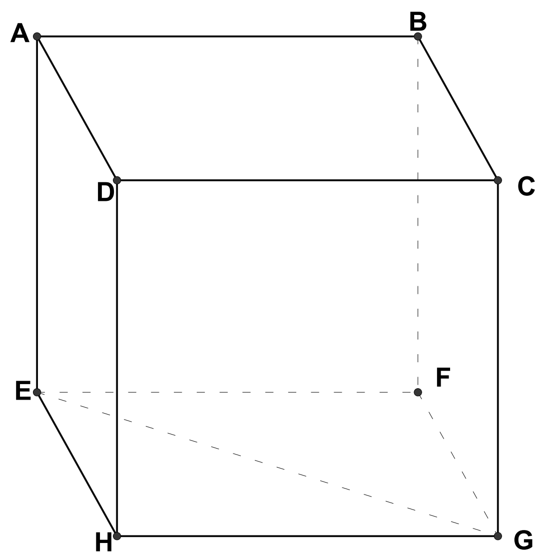
$$=\frac{1}{2}\sqrt{AB^2AC^2-\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)^2}.$$

Câu 18: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng a. Ta có $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}$ bằng?

A. $a^2\sqrt{2}$. **B.** a^2. **C.** $a^2\sqrt{3}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



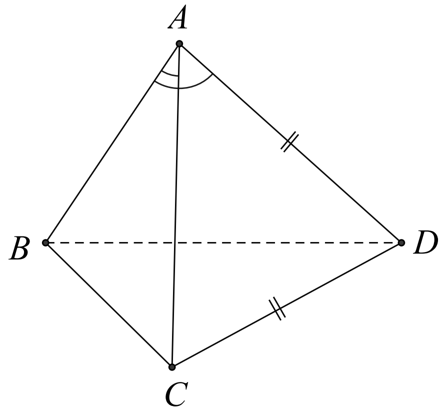
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EG}=\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{EH}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}\ (\overrightarrow{EH}=\overrightarrow{AD})=a^2$ (Vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$)

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ với $AC=\frac{3}{2}AD,\widehat{CAB}=\widehat{DAB}=60^0,CD=AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD. Chọn khẳng định đúng?

A. $\cos\varphi=\frac{3}{4}$. **B.** $\varphi=60^0$. **C.** $\varphi=30^0$. **D.** $\cos\varphi=\frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{CD}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}}{AB.CD}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

$=AB.AD.\cos 60^0-AB.AC.\cos 60^0$

$=AB.AD.\dfrac{1}{2}-AB.\dfrac{3}{2}AD.\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{4}AB.AD=-\dfrac{1}{4}AB.CD.$

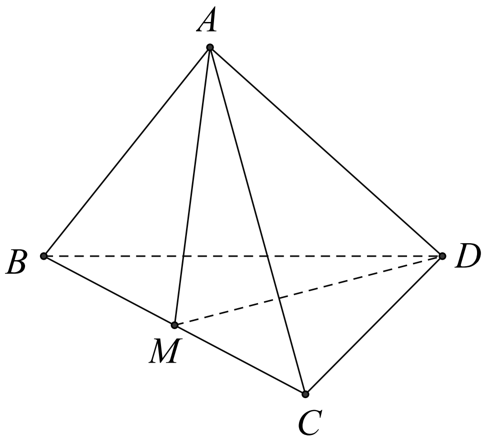
Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right)=\dfrac{-\dfrac{1}{4}AB.CD}{AB.CD}=-\dfrac{1}{4}$. Suy ra $\cos\varphi=\dfrac{1}{4}$.

Câu 20: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm của cạnh BC. Khi đó $\cos\left(AB,DM\right)$ bằng

A. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. **C.** $\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử cạnh của tứ diện là a.

Ta có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|.\left|\overrightarrow{DM}\right|}=\dfrac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}}{a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}}$

Mặt khác

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{AB}\left(\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=AB.AM.\cos 30^0-AB.AD.\cos 60^0$

$=a.\dfrac{a\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{3}}{2}-a.a.\dfrac{1}{2}=\dfrac{3a^2}{4}-\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{4}.$

Do có $\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DM}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. Suy ra $\cos\left(AB,DM\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có trọng tâm G. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

.**B.** $\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$

C. $\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}$

D. $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. Đ**	**D. S**

- Theo công thức vì G là trọng tâm tứ diện $ABCD\to\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ nên A đúng
- Ta có:

$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OG}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DG}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$ nên B đúng

- $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{BG}$ nên C đúng
- $\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{AO}+\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)=\overrightarrow{AO}+\dfrac{1}{4}\left(4\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right).$

$=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)\to D$ sai

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AB,CD và G là trung điểm MN. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

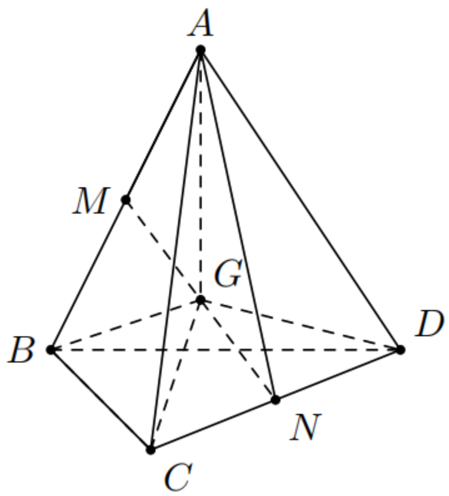
.**B.** $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$

C. $\overrightarrow{MN}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}\right)$

D. . $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. S**	**D. Đ**



□ Vì M,N lần lượt là trung điểm $AB,CD\to\begin{cases}\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GM}\\ \overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{GN}\end{cases}$

G là trung điểm $MN\to\overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0}\leftrightarrow\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Vậy A đúng

□ Khi đó $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}\right)=4\overrightarrow{MG}$

Vậy B đúng

□ Dễ chứng minh được $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$ nên C sai

□ Ta có:

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DN}$

Do đó: $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}$. Vậy D đúng

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$.

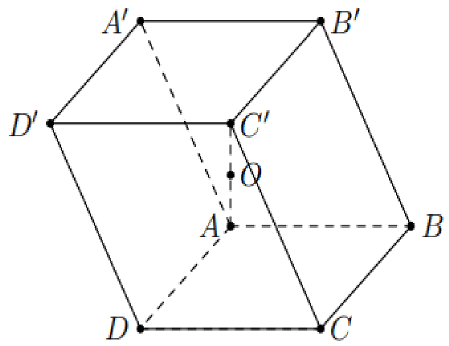
Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. S**	**D. Đ**

□ Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$ đúng. Do đó A đúng

□ Ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$

Do đó: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC'}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{D'A}=\vec{0}$. Do đó B đúng



□ Vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AB'}\\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{AD'}\end{cases}$, mà $\overrightarrow{AB'}\neq\overrightarrow{AD'}$ $\rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA'}\neq\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DD'}$. Vậy C sai

□ Ta có

$\oplus\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$

$\oplus\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{AC'}$

Vậy $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AD'}+\overrightarrow{D'O}+\overrightarrow{OC'}$. Do đó D đúng

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}$.

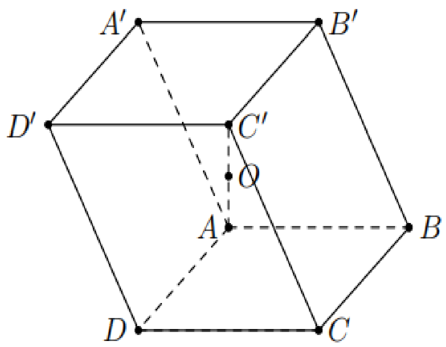
B. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$.

D. $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. Đ**	**D. Đ**



□ Ta có

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{B'D'}$

Mà $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D'}$ nên A đúng

□ Ta có

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'C'}+\overrightarrow{D'A'}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{D'B'}=\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{DC}$

Vậy B đúng

□ Ta có:

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$ vậy C đúng

□ Vì $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DD'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{BD'}=\overrightarrow{BA'}+\overrightarrow{BD'}\neq\overrightarrow{BC}$. Vậy D sai

Câu 5: Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

A. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

B. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$.

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$.

D. Chóp $S.ABCD$ có $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. S	D. Đ

□ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên A sai

□ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}=\vec{0}$ nên B đúng

□ Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ nên C sai

□ $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SD}\leftrightarrow\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}\leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\to ABCD$ là hình bình hành nên D đúng

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi G là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Xét tính đúng- sai của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{SO}$

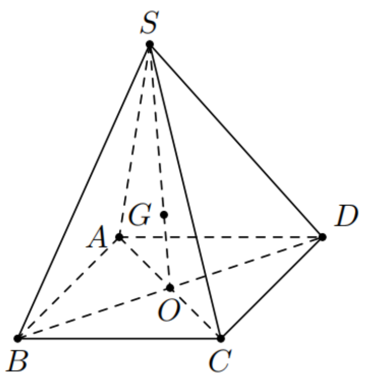
B. .$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

C. $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$.

D. $\overrightarrow{GS}=3\overrightarrow{OG}$.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. S	D. Đ



□ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{\mathrm{AA}}=\vec{0}$ nên A sai

□ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$ $\to\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ nên B đúng

□ Ta có

$\begin{matrix}\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=2\overrightarrow{SO}\\ \overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=2\overrightarrow{SO}\end{matrix}$ nên $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$. Do đó C đúng

□ Ta có

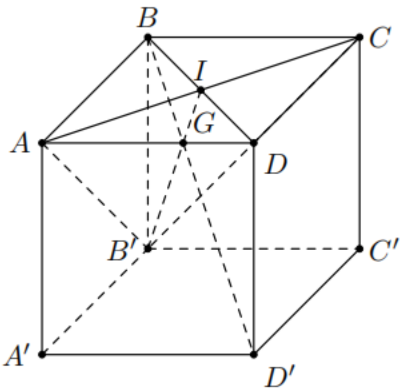
$\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

$\leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

$\leftrightarrow \overrightarrow{GS}+4\overrightarrow{GO}=\vec{0}$

$\leftrightarrow \overrightarrow{GS}=4\overrightarrow{OG}$ nên D sai

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$, gọi G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ (tham khảo hình vẽ). Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?



A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

B. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=2\overrightarrow{GI}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'C'}$.

D. $\overrightarrow{BD'}=2\overrightarrow{BG}$.

Lời giải

A. Đ	**B. S**	**C. Đ**	**D. Đ**

- Theo quy tắc hình hộp thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ nên A đúng
- G là trọng tâm của tam giác $AB'C$ nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Do đí B sai
- Ta có

  $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{A'C'}$ nên C đúng
- Ta có

$\Delta BIG \sim \Delta D'B'G \to \frac{BG}{D'G}=\frac{BI}{D'B'}=\frac{1}{2}$

$\to \frac{BG}{BD'}=\frac{1}{3} \to \overrightarrow{BD'}=3\overrightarrow{BG}$ nên D sai

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N lần lượt là trung điểm AD,BC. Xét tính **đúng- sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

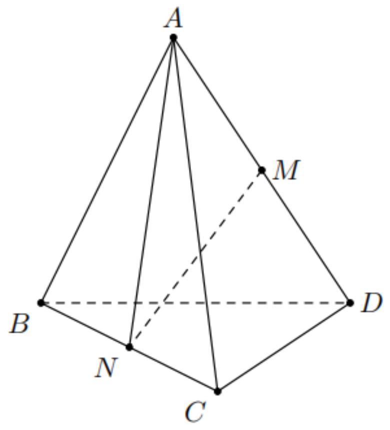
B. $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng.

C. $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

D. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. S**	**D. Đ**



- $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)\to \overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng $\to A$ đúng.
- $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng vì MN không nằm trong $(ABC)\to B$ đúng.
- $\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng sai vì AN không nằm trong (MNC)
- $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}\right)\to \overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng $\to D$ đúng.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Trên cạnh AD và BC lần lượt lấy các điểm M,N sao cho $AM=3MD$ và $BN=3NC$. Gọi P,Q lần lượt là trung điểm AD và BC. Xét tính **đúng-sai** của các mệnh đề sau?

A. $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

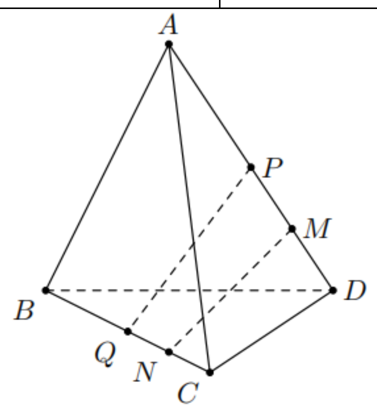
B. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CN}$

C. $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BN}$

D. $\overrightarrow{BD},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{MN}$ đồng phẳng.

Lời giải

A. S	**B. Đ**	**C. Đ**	**D. Đ**



- Dễ chứng minh được $2\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$ nên A sai
- Theo giả thuyết ta có M,N là trung điểm của PD,QC

$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN} \end{cases}$. Nên B và C đúng

 Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} \\ 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MD} + 3\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{BN} \end{cases}$$

$\rightarrow 4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \rightarrow \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{MN}$ không đồng phẳng. Do đó D đúng

Câu 10: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ".		
B: " $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ ".		
C: " $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là tứ giác ".		
D: " $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ với $ABCD$ là hình bình hành ".		

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. S**	**D. Đ**

+ Mệnh đề A đúng: Quy tắc ba điểm.

+ Mệnh đề B đúng: Quy tắc đa giác.

+ Mệnh đề C sai: Vì $ABCD$ là tứ giác.

+ Mệnh đề D đúng: Quy tắc hình bình hành.

Câu 11: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ ".		
B: " $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AC}$ ".		
C: " $k.\vec{a} = \vec{0} \leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ ".		
D: " $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{AC} \leftrightarrow$ Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng ".		

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. S**	**D. S**

+ Mệnh đề A đúng: Quy tắc trừ vectơ.

+ Mệnh đề B đúng: Quy tắc trừ vectơ.

+ Mệnh đề C sai: Vì $\begin{cases} k = 0 \\ \vec{a} \neq 0 \end{cases} \rightarrow k.\vec{a} = \vec{0}$.

+ Mệnh đề D sai: Vì $k = 0 \leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{0} \leftrightarrow A \equiv B$.

Câu 12: Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ với I là trung điểm đoạn AB và điểm M bất kỳ ".		
B: " $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$ với G là trọng tâm ΔABC và điểm M bất kỳ ".		
C: "$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$ với G là trọng tâm tứ diện $ABCD$ và điểm M bất kỳ ".		
D: "Nếu $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}$ thì chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành ".		

Lời giải

A. Đ	**B. Đ**	**C. Đ**	**D. Đ**

+ Mệnh đề A đúng: Vì ta có

$\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}\leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MI}=\vec{0}\leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$.

+ Mệnh đề B đúng: Vì ta có

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}\leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}=\vec{0}\leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$.

+ Mệnh đề C đúng: Vì ta có

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\leftrightarrow\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MG}+\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MG}=\vec{0}$.

$\leftrightarrow\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MG}$.

+ Mệnh đề D đúng: Vì $\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}\leftrightarrow\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SD}\leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ nên $ABCD$ là

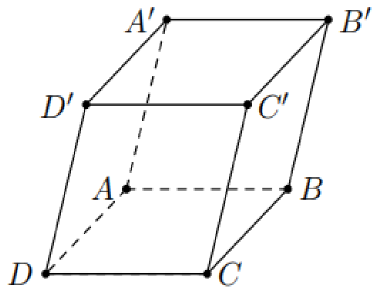
hình bình hành.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{BB'}$ ".		
B: " $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ ".		
C: "$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC'}=\overrightarrow{BD'}$ ".		
D: "$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$ ".		

Lời giải

A. Đ	**B. S**	**C. S**	**D. Đ**



+ Mệnh đề A đúng: Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ và $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'}$.

+ Mệnh đề B sai: Vì $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

+ Mệnh đề C sai: Vì $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AD'} \to \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{D'B}$.

+ Mệnh đề D đúng: Vì

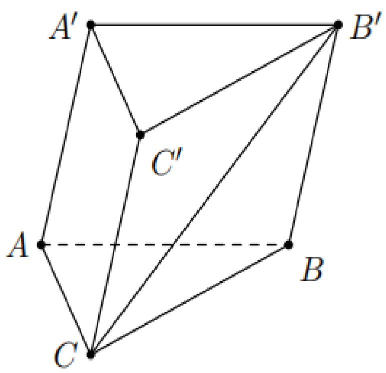
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$ (Quy tắc hình hộp).

Câu 14: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Xét tính **đúng, sai** của các mệnh đề sau:

Mệnh đề	Đúng	Sai
A: " $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BC}$ ".		
B: " Góc giữa $\left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{AA'}\right) = \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{CC'}\right) = \left(\overrightarrow{BC};\overrightarrow{BB'}\right)$ ".		
C: " $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$ ".		
D: "Góc giữa $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AA'}\right) = \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AA'}\right)$ ".		

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S



+ Mệnh đề A đúng: Vì $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \to \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$.

+ Mệnh đề B đúng: Vì $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'}$.

+ Mệnh đề C đúng: Vì $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'}$.

+ Mệnh đề D sai: Vì nếu $\alpha = \left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AA'}\right)$ thì $\left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{AA'}\right) = 180^o - \alpha$.

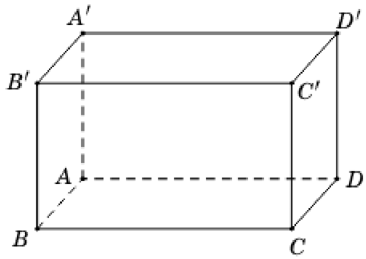
Câu 15: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có cạnh $AB=\ a; AD=a\sqrt{3}; AA'=2a$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$.

b) $\overrightarrow{A'D}+\overrightarrow{CB'}=\vec{0}$.

c) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=a\sqrt{5}$.

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=2\sqrt{2}a$.



Lời giải

A. S	B. Đ	C. S	D. Đ

a) $\overrightarrow{AB'}$ và $\overrightarrow{CD'}$ không đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}\neq\vec{0}$ nên A sai

b) $\overrightarrow{A'D}$ và $\overrightarrow{CB'}$ đối nhau nên $\overrightarrow{AB'}+\overrightarrow{CD'}=\vec{0}$ nên B đúng

c) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{AC}|=AC=\sqrt{AB^2+AD^2}=2a$ nên C sai

d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{CC'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|=AC'=\sqrt{AB^2+AD^2+AA'^2}=2\sqrt{2}a$ nên D đúng

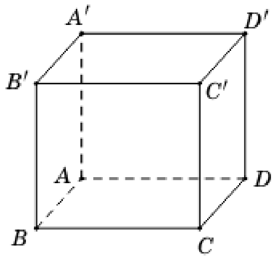
Câu 16: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'D}$.

b) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD}$.

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=a\sqrt{2}$.

d) $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=a$.



Lời giải

A. Đ	B. S	C. S	D. Đ

a) Ta có

$\overrightarrow{B'B}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{B'B}+(-\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{B'B}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{B'D}.$ nên A đúng

b) Áp dụng quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}$. Nên B sai

c) $\left|\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}\right|=\left|\overrightarrow{BD'}\right|=BD'=a\sqrt{3}$ nên C sai

d) Ta có $\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{C'C}$.

Do đó $\left|\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}\right|=C'C=a$ nên D đúng

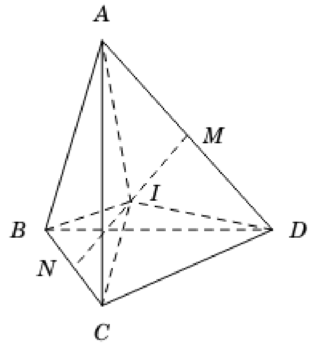
Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC, I là trung điểm MN. Xét tính đúng, sai của các khẳng đinh sau:

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{MN}$.

d) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$



Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ

a) Sử dụng quy tắc ba điểm và quy tắc hiệu, ta có

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB})-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}.$$

b) Theo quy tắc ba điểm, ta có $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}$. Do đó

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DB})=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}.$$

c,d) Dễ chứng minh

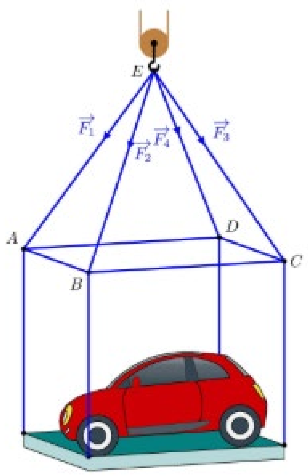
Câu 18: Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật $ABCD$, mặt phẳng $(ABCD)$ song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA,EB,EC,ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng $(ABCD)$ một góc bằng 60°. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết rằng các lực căng $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2},\overrightarrow{F_3},\overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ và trọng lượng của khung sắt là $3000\,\text{N}$.

a) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}=\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}$.

b) $\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_4}$.

c) $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_3}\right|=8141\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơ vì).

d) Trọng lượng của chiếc xe ô tô là $16282\,\text{N}$ (làm tròn đến hàng đơn vị).



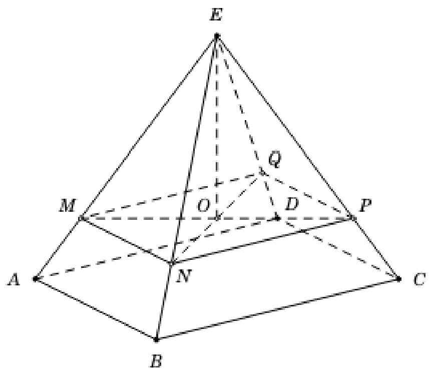
Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ

Lấy các điểm M, N, P, Q lần lượt trên các tia EA, EB, EC, ED sao cho

$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{EN} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{EP} = \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{EQ} = \overrightarrow{F_4}$.

Do các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}, \overrightarrow{F_4}$ đều có cường độ là $4700\,\text{N}$ nên $EM = EN = EP = EQ = 4700$.



a) Ta có

- $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EN} = 2\overrightarrow{EH}$, với H là trung điểm của MN

$\overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{EK}$, với K là trung điểm của PQ.

Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} \neq \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}$

b) Ta có

$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{EM} + \overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP

$\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{EN} + \overrightarrow{EQ} = 2\overrightarrow{EO}$, với O là trung điểm của MP.

Suy ra $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_4}$.

c) $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}\right| = |2\overrightarrow{EO}| = 2EO$.

Theo giả thiết, góc giữa EA với $(ABCD)$ bằng 60°, suy ra góc giữa EM với $(MNPQ)$ cũng bằng 60° hay $\widehat{SMO} = 60^\circ$.

Xét $\triangle EMO$ có $EM = 4700, \widehat{SMO} = 60^\circ$. Suy ra $EO = EM \sin 60^\circ = 2350\sqrt{3}$.

Từ đây, ta tính được $\left|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_3}\right| = 2EO = 8141\,\text{N}$.

Câu 19: Trong không gian, cho hai véc-tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng có độ dài bằng 1. Biết rằng góc giữa hai véc-tơ đó là 45°.

a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $|\vec{a}+\vec{b}|=2+\sqrt{2}$.

d) $|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=0$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D. S

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $(\vec{a}+3\vec{b})\cdot(\vec{a}-2\vec{b})=|\vec{a}|^2+\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}-6|\vec{b}|^2=1+\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-6=-5+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) $(\vec{a}+\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2=1+2\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+1=2+\sqrt{2}$. Suy ra $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{2+\sqrt{2}}$.

d) $(\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b})^2=\vec{a}^2+2\sqrt{2}\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}^2=1+2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+2=2$. Suy ra $|\vec{a}-\sqrt{2}\vec{b}|=\sqrt{2}$.

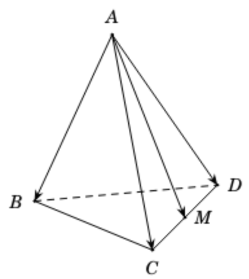
Câu 20: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a và M là trung điểm của CD.

a) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{a^2}{2}$.

c) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$

d) $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{a^2}{2}$.



Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S

a) Tam giác ACD đều, suy ra AM vuông góc với CD nên $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

b) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=AB\cdot AC\cdot\cos\widehat{BAC}=a\cdot a\cdot\cos 60^\circ=\dfrac{a^2}{2}$.

c) Ta có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}$.

Mà AM, BM là trung tuyến của các tam giác đều ACD, BCD nên $\overrightarrow{AM}\perp\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{MB}\perp\overrightarrow{CD}$.

Suy ra $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{CD}=0$.

Từ các kêt quả trên ta có $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{CD}=0$. Suy ra $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})=90^\circ$.

d) Ta có $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})$, suy ra

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD})=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^2}{2}$$

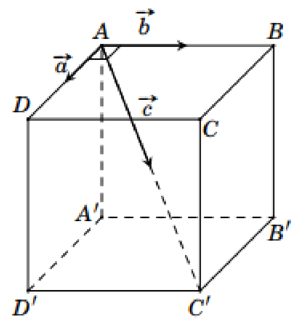
Câu 21: Một chất điểm ở vị trí đỉnh A của hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Chất điểm chịu tác động bởi ba lực $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ lần lượt cùng hướng với $\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC'}$ như hình vẽ. Độ lớn của các lực $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ tương ứng là $10\,\mathrm{N}, 10\,\mathrm{N}$ và $20\,\mathrm{N}$.

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$.

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=20(\mathrm{N})$.

c) $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}|$.

d) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=32,59(\mathrm{N})$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

A. S	B. S	C. Đ	D. Đ

Từ giả thiết, ta có $\vec{a}\perp\vec{b}; \cos(\vec{a},\vec{c})=\cos\widehat{DAC'}=\frac{1}{\sqrt{3}}; \cos(\vec{b},\vec{c})=\cos\widehat{BAC'}=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

a) Giả sử $\vec{a}+\vec{b}=\vec{d}$. Theo quy tắc hình bình hành thì $\vec{d}$ cùng hướng với $\overrightarrow{AC}$. Suy ra $\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{c}$

b) $|\vec{a}+\vec{b}|=10\sqrt{2}$ (đường chéo hình vuông cạnh bằng 10).

c) Ta có

$$(\vec{a}+\vec{c})^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=10^2+2\cdot10\cdot20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\frac{400\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra $|\vec{a}+\vec{c}|=\sqrt{500+\frac{400\sqrt{3}}{3}}$.

$$(\vec{b}+\vec{c})^2=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=10^2+2.10.20\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}+20^2=500+\frac{400\sqrt{3}}{3}.$$

Suy ra $|\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{500+\frac{400\sqrt{3}}{3}}$.

Vậy $|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}+\vec{c}|$.

d) Giả sử lực tổng hợp là $\vec{m}$, tức là $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

Do đó

$\vec{n}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} \Leftrightarrow |\vec{m}|^2=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$

$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2=\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}$

$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2=10^2+10^2+20^2+0+2\cdot10\cdot20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot10\cdot20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow |\vec{m}|^2=10^2+10^2+20^2+0+2\cdot10\cdot20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}+2\cdot10\cdot20\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

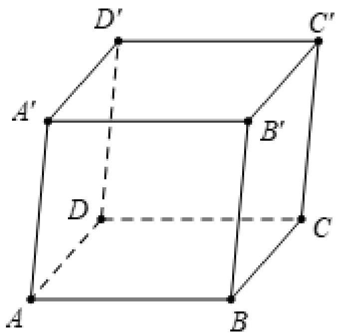
$\Leftrightarrow |\vec{m}|\approx 32,59.$

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Có bao nhiêu vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải

Trả lời: 3

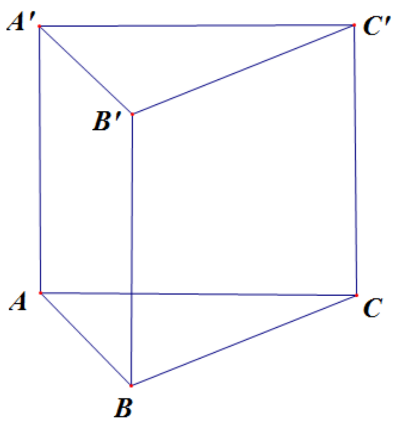


Các vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$ là: $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{A'D'}$, $\overrightarrow{B'C'}$. Vậy có 3 vectơ bằng vectơ $\overrightarrow{BC}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ biết ΔABC có cạnh bằng 3. Tìm vectơ tổng $\left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{B'C'}\right|$

Lời giải

Trả lời: 3

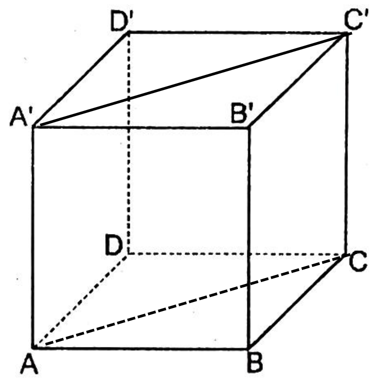


Ta có: $\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{B'C'}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA} \Rightarrow \left|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{B'C'}\right|=\left|\overrightarrow{BA}\right|=3$.

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{A'C'}$.

Lời giải

Trả lời: 45



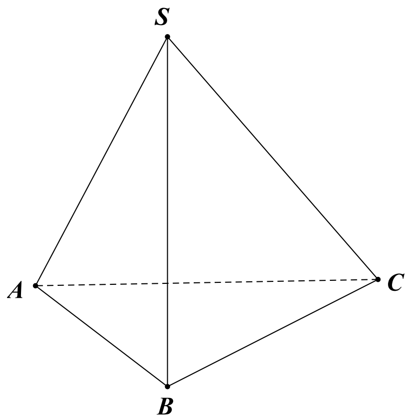
Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$.

Do đó: $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'C'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \widehat{BAC} = 45°$

Câu 4: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = 2, BC = 2\sqrt{2}$. Tính $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB}$.

Lời giải

Trả lời: -2



Có: $BC^2 = SB^2 + SC^2 \left(2.2^2 = 2^2 + 2^2\right) \Rightarrow \Delta SBC$ vuông cân tại S.

Lại có: $SA = AC = SC = 2 \Rightarrow \Delta SAC$ là tam giác đều.

$$\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SC}\left(\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}\right) = \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SC}.\overrightarrow{SA} = 0 - SC.SA.\cos\widehat{ASC} = -2.2.\cos 60° = -\frac{2^2}{2} = -2$$

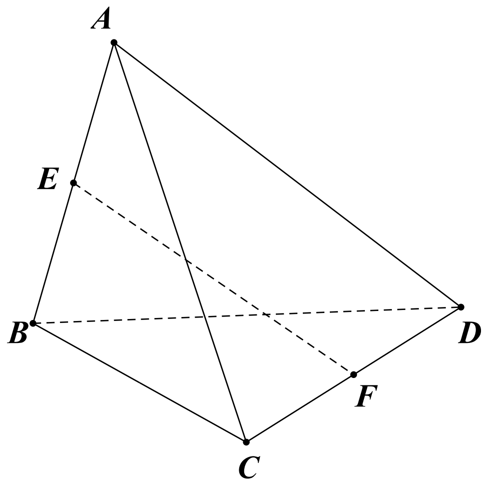
.

Vậy $\overrightarrow{SC}.\overrightarrow{AB} = -2$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E,F lần lượt là trung điểm của AB, CD. Cho $AB=2a,\ CD=2b,\ EF=2c$. Với M là một điểm tùy ý, biết tổng $MA^2+MB^2=k.ME^2+l.a^2$. Tính $k+l$.

Lời giải

Trả lời: 4



Áp dụng công thức độ dài đường trung tuyến, ta có:

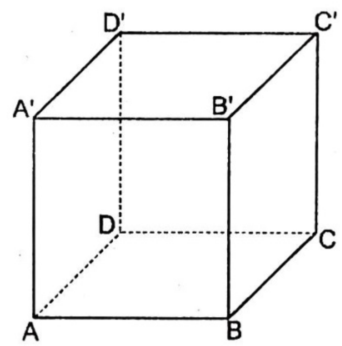
$$ME^2=\frac{MA^2+MB^2}{2}-\frac{AB^2}{4}\Rightarrow MA^2+MB^2=2ME^2+\frac{AB^2}{2}=2ME^2+2a^2.$$

Vậy $k+l=2+2=4$.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $\overrightarrow{MA}=k.\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC'}=l.\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $k+l$ có giá trị là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -4



Đặt $\overrightarrow{AB}=\vec{a},\overrightarrow{AD}=\vec{b},\overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Có: $\overrightarrow{MA'} = k.\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AM} = k\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \dfrac{-k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}}{1-k}$.

Có: $\overrightarrow{NC} = l.\overrightarrow{ND} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-l\vec{b}}{1-l}$.

Suy ra: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \left(-\dfrac{k}{1-k} - \dfrac{1}{1-l}\right)\vec{a} + \left(-\dfrac{k}{1-k} - 1\right)\vec{b} + \left(\dfrac{1}{1-k} - \dfrac{1}{1-l}\right)\vec{c}$.

Mà: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD'} - \overrightarrow{AB} = -\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$.

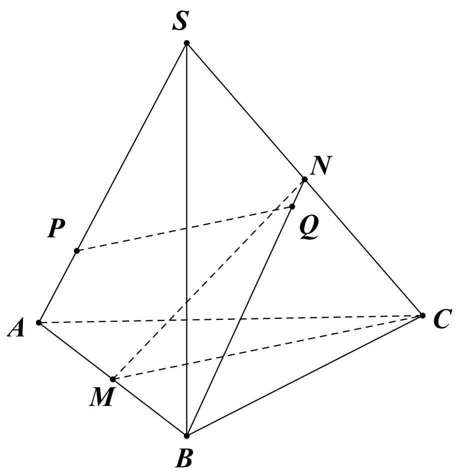
Vì $MN//BD'$ nên $\overrightarrow{MN}//\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \dfrac{3k+1}{1-k} = -2 \Leftrightarrow k = -3 \Rightarrow l = -1$.

Vậy $k + l = -4$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $\overrightarrow{SA} = \vec{a},\ \overrightarrow{SB} = \vec{b},\ \overrightarrow{SC} = \vec{a}$ và các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, SC. Các điểm P, Q trên các đường thẳng SA, BN sao cho $PQ//CM$. Hãy biểu diễn vectơ $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$. $PQ//CM$. Khi biểu diễn vectơ $\overrightarrow{PQ}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, ta được: $\overrightarrow{PQ} = -\dfrac{m}{n}\vec{a} - \dfrac{p}{q}\vec{b} + \dfrac{r}{z}\vec{c}$ (với $\dfrac{m}{n}, \dfrac{p}{q}, \dfrac{r}{z}$ là các phân số tối giản và $m,n,p,q,r,z \in \mathbb{Z}$). Tính $\dfrac{m}{n} + \dfrac{p}{q} + \dfrac{r}{z}$.

Lời giải

Trả lời: $\dfrac{4}{3}$



Đặt $\overrightarrow{PA} = x\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{BQ} = y\overrightarrow{BN}$

Suy ra:

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=x\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}-\overrightarrow{SA}+y\overrightarrow{BN}=(x-1)\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+y\left(\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SB}\right)$$

$$=(x-1)\vec{a}+(1-y)\vec{b}+\frac{y}{2}\vec{c}.$$

Lại có: $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{SM}-\overrightarrow{SC}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}\right)-\overrightarrow{SC}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$

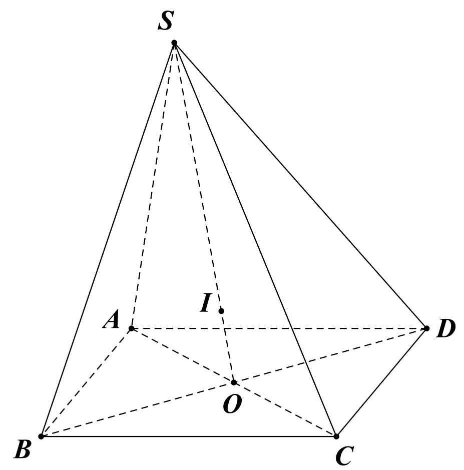
$$PQ//CM\Leftrightarrow\overrightarrow{PQ}=k\overrightarrow{CM}\Leftrightarrow\frac{x-1}{0,5}=\frac{1-y}{0,5}=\frac{y}{-2}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{2}{3}\\ y=\frac{4}{3}\end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{PQ}=-\frac{1}{3}\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O,M là điểm thay đổi trên SO. Tỉ số $\frac{SM}{SO}$ sao cho $P=MS^2+MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ nhỏ nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: $\frac{4}{5}$



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{SI}=4\overrightarrow{IO}$.

Suy ra: $P=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IS}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{ID}\right)^2$

$$=5MI^2+IS^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}\right)$$

$$=5MI^2+IS^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2+2\overrightarrow{MI}\left(\overrightarrow{IS}+4\overrightarrow{IO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)$$

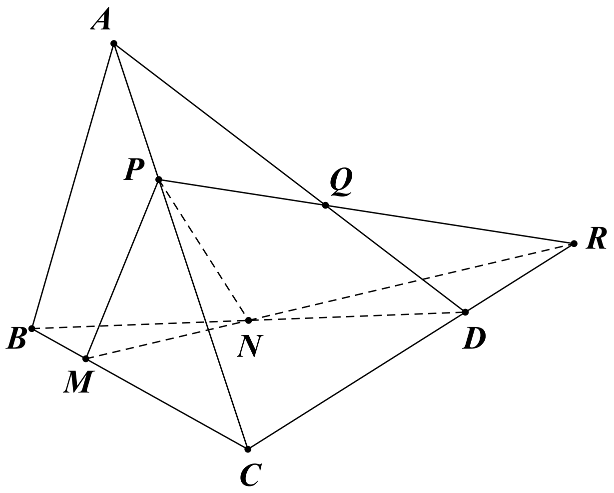
$$=5MI^2+IS^2+IA^2+IB^2+IC^2+ID^2$$

Vậy $P_{\min}$ khi $M \equiv I \Rightarrow \dfrac{SM}{SO} = \dfrac{4}{5}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có các điểm M,N,P lần lượt thuộc các cạnh BC,BD và AC sao cho $BC = 4BM, AC = 3AP, BD = 2BN$. Mặt phẳng (MNP) cắt đường thẳng AD tại điểm Q. Tính tỉ số $\dfrac{AQ}{AD}$.

Lời giải

Trả lời: $\dfrac{3}{5}$



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}, \overrightarrow{AD} = \vec{c}, \overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AD} = k\vec{c}$

Theo đề bài, ta có: $\overrightarrow{AM} = \dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b}; \overrightarrow{AN} = \dfrac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{c}\right); \overrightarrow{AP} = \dfrac{1}{3}\vec{b}$.

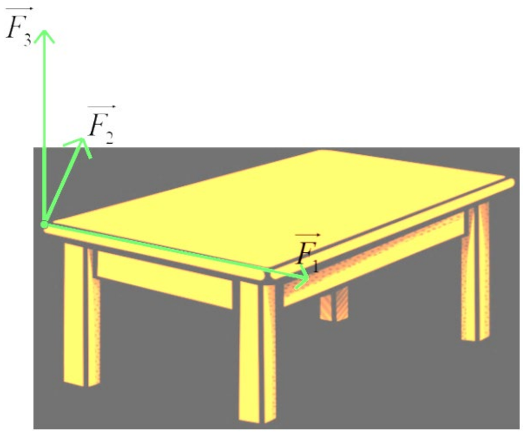
Ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -\dfrac{1}{4}\vec{a} - \dfrac{1}{4}\vec{b} + \dfrac{1}{2}\vec{c} \\ \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = -\dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{12}\vec{b} \\ \overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AM} = -\dfrac{3}{4}\vec{a} - \dfrac{1}{4}\vec{b} + k\vec{c} \end{cases}$

Vì M,N,P,Q đồng phẳng nên

$$x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,25x + 0,75y = 0,75 \\ 0,25x - \dfrac{1}{12}y = 0,25 \\ 0,5x = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{6}{5} \\ y = \dfrac{3}{5} \\ k = \dfrac{3}{5} \end{cases}.$$

Vậy $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\Rightarrow\frac{AQ}{AD}=\frac{3}{5}$.

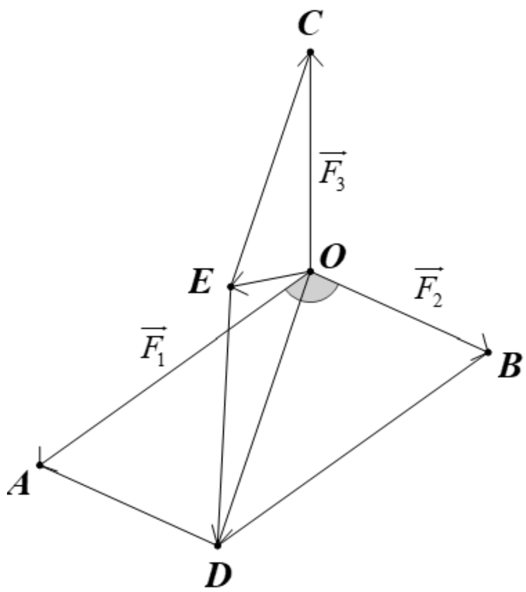
Câu 10: Có ba lực cùng tác động vào một cái bàn như hình vẽ. Trong đó hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ tạo với nhau một góc $110°$ và có độ lớn lần lượt là $9N$ và $4N$, lực $\overrightarrow{F_3}$ vuông góc với mặt phẳng tạo bởi hai lực $\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}$ và có độ lớn $7N$. Độ lớn hợp lực của ba lực trên là $a(N)$, tìm giá trị của a.



Lời giải

Trả lời: 10

Theo đề bài ta có hình vẽ sau:



Hợp lực tác động vào ba vật là $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OE}$

Áp dụng định lý cosin trong ΔOAD, ta có:

$OD^2=OA^2+AD^2-2OA.AD.\cos\widehat{OAD}=9^2+4^2-2.9.4.\cos 80°=97-72\cos 80°$.

Vì $OC\perp(OBDA)$ nên $OC\perp OD\Rightarrow ODEC$ là hình chữ nhật.

Do đó ΔOCE vuông tại C nên:

$OE^2 = OC^2 + EC^2 = 4^2 + 97 - 72\cos 80° = 113 - 72\cos 80°$

$\Rightarrow OE = \sqrt{113 - 72\cos 80°} \approx 10$

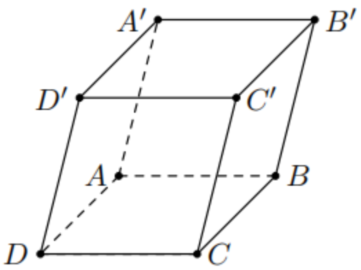
Suy ra độ lớn của hợp lực của ba lực trên khoảng $10N$.

Vậy $a = 10$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} + k\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D}\right) = \vec{0}$?

Lời giải

Trả lời: $k = 1$



Ta có

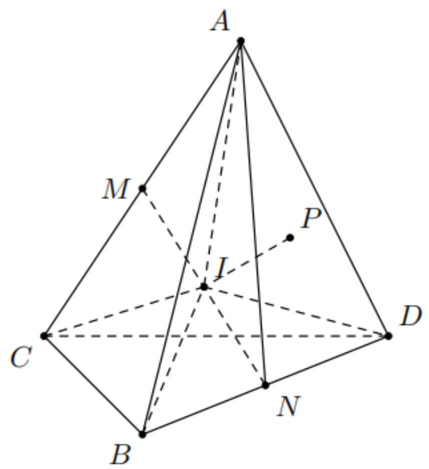
$$\begin{cases} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AD'} \\ \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{C'D} = \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC'} = \overrightarrow{C'B} = \overrightarrow{D'A} \end{cases}.$$

$\rightarrow \overrightarrow{AD'} + k\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \leftrightarrow (k-1).\overrightarrow{D'A} = \vec{0} \leftrightarrow k = 1$.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD. Gọi I là trung điểm đoạn MN và P là một điểm bất kỳ trong không gian. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{PI} = k\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD}\right)$?

Lời giải

Trả lời: $k = \frac{1}{4}$



+ Vì M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{ID}=2\overrightarrow{IN} \\ \overrightarrow{IM}+\overrightarrow{IN}=\vec{0} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}.$$

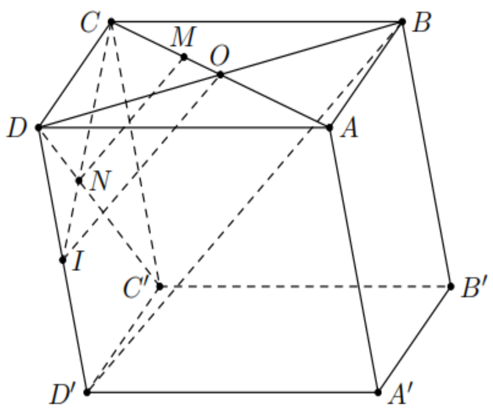
+ Khi đó $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=4\overrightarrow{PI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=4\overrightarrow{PI}$.

+ Mà $\overrightarrow{PI}=k\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right) \leftrightarrow \overrightarrow{PI}=k.4.\overrightarrow{PI} \leftrightarrow 1=4k \leftrightarrow k=\dfrac{1}{4}$

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AC=3MC$. Lấy điểm N trên đoạn $C'D$ sao cho $C'N=x.C'D$. Với giá trị nào của x thì MN song song BD'?

Lời giải

Trả lời: $\dfrac{2}{3}$



+ Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

+ Gọi I là trung điểm DD'.

+ Nối $C'D$ cắt CI tại $N' \rightarrow N'$ là trọng tâm $\Delta CDD'$.

+ Ta có OI là đường trung bình của $\Delta BDD' \rightarrow OI \parallel BD'$.

+ Lại có $\dfrac{CN'}{CI}=\dfrac{CM}{CO} \rightarrow MN' \parallel OI \rightarrow MN' \parallel BD'$.

+ Theo bài ta có $MN \parallel BD' \leftrightarrow N' \equiv N \rightarrow C'N=\dfrac{2}{3}C'D \leftrightarrow x=\dfrac{2}{3}$.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$ và các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DB}+x.\overrightarrow{DC}$. Tìm x để các đường thẳng AD, BC, MN cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải

Trả lời: -2

+ bài toán tương đương tìm x để $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng.

+ $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} - 3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) = -\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$.

+ $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DB} + x\overrightarrow{DC} \leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + x\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{BC}$

$\rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (2+x)\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AD} + (x+3)\overrightarrow{BC}$.

+ Để $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$ đồng phẳng $\leftrightarrow 2 + x = 0 \leftrightarrow x = -2$.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức vectơ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = k\overrightarrow{AC_1}$?

A. $k = 4$. **B.** $k = 1$. **C.** $k = 0$. **D.** $k = 2$.

Lời giải

Trả lời: 1

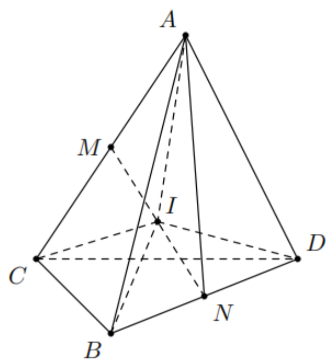
+ Ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{B_1C_1} + \overrightarrow{DD_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AC_1}$

$\rightarrow \overrightarrow{AC_1} = k\overrightarrow{AC_1} \leftrightarrow k = 1$.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BD. Gọi I là trung điểm đoạn MN. Tìm giá trị thực của k thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$?

Lời giải

Trả lời: 1



+ Vì M, N, I lần lượt là trung điểm của AC, BD, MN

$$\rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IM} \\ \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IN} \\ \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} = \vec{0} \end{cases} \rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}.$$

+ Ta có $\overrightarrow{IA} + (2k-1)\overrightarrow{IB} + k\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}$

$= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} + (2k-2)\overrightarrow{IB} + (k-1)\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$\rightarrow (k-1)\left(2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}\right) = \vec{0}$.

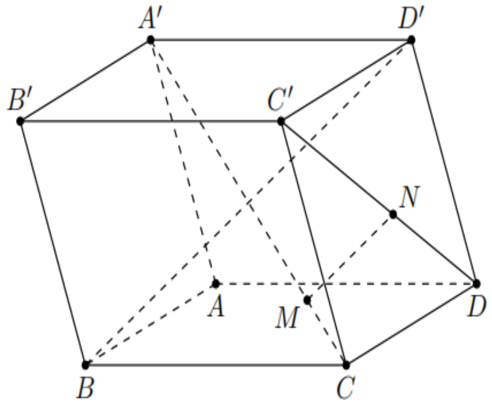
+ Mà $2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} \neq 0 \leftrightarrow k - 1 = 0 \leftrightarrow k = 1$.

Câu 17: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và các số thực m,n thỏa mãn $\overrightarrow{MA'}=m\overrightarrow{MC}$ và $\overrightarrow{NC'}=n\overrightarrow{ND}$. Khi MN song song với BD' thì $m+n$ bằng bao nhiêu?

A. $m-n=-\frac{3}{2}$. **B.** $m+n=-3$. **C.** **D.** $m+n=-2$.

Lời giải

Trả lời: -4



+ Đặt $\vec{x}=\overrightarrow{BA}$, $\vec{y}=\overrightarrow{BC}$, $\vec{z}=\overrightarrow{BB'}$.

+ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}=\frac{1}{m-1}\left(\vec{x}-\vec{y}+\vec{z}\right)+\vec{x}+\frac{1}{1-n}\left(-\vec{x}+\vec{z}\right)$

$=\left(1+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{n-1}\right)\vec{x}-\frac{1}{m-1}\vec{y}+\left(\frac{1}{m-1}+\frac{1}{1-n}\right)\vec{z}$

+ $\overrightarrow{BD'}=\vec{x}+\vec{y}+\vec{z}$.

+ Vì $MN \parallel BD' \rightarrow 1+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{n-1}=-\frac{1}{m-1}=\frac{1}{m-1}+\frac{1}{1-n} \leftrightarrow m=-3, n=-1$.

Câu 18: Trong không gian cho các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng thỏa mãn $(x-y)\vec{a}+(y-z)\vec{b}=(x+z-2)\vec{c}$. Tính $x+y+z$?

Lời giải

Trả lời: 3

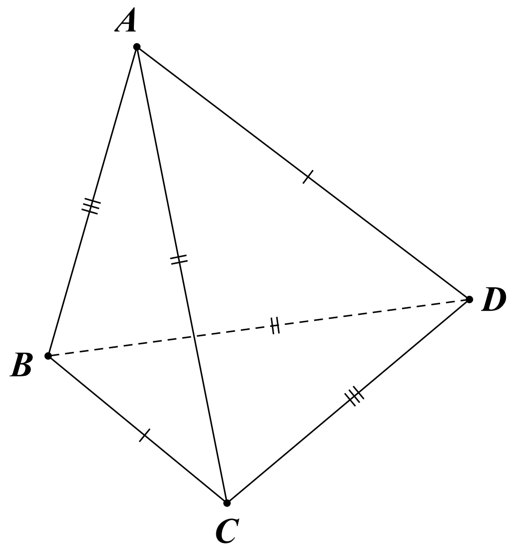
+ Có $(x-y)\vec{a}+(y-z)\vec{b}-(x+z-2)\vec{c}=\vec{0}$. Do $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng nên mỗi vectơ được
phân tích duy nhất qua ba vectơ nói trên.

$$\begin{cases} x-y=0 \\ y-z=0 \\ x+z-2=0 \end{cases} \leftrightarrow x=y=z=1 \rightarrow x+y+z=3.$$

Câu 19: Cho tứ diện $ABCD$ có $BC=DA=a, CA=DB=b, AB=DC=c$. Gọi S là diện tích toàn phần (tổng diện tích tất cả các mặt). Tính giá trị lớn nhất của $\frac{1}{a^2b^2}+\frac{1}{b^2c^2}+\frac{1}{c^2a^2}$.

Lời giải

Trả lời: $\dfrac{9}{S^2}$



Do tứ diện $ABCD$ có $BC = DA = a, CA = DB = b, AB = DC = c$ nên $\Delta BCD = \Delta ADC = \Delta DAB = \Delta CBA$. Gọi S' là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp mỗi mặt đó thì $S = 4S' = \dfrac{abc}{R}$, nên bất đẳng thức cần chứng minh $\dfrac{1}{a^2b^2} + \dfrac{1}{b^2c^2} + \dfrac{1}{c^2a^2} \le \dfrac{9}{S^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \le 9R^2$.

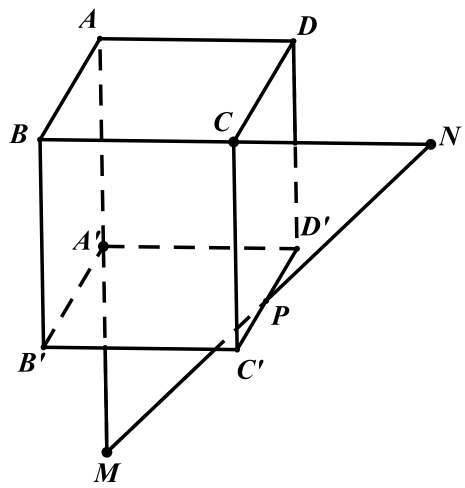
Theo công thức Leibbnitz: Với điểm M bất kì và G là trọng tâm của tam giác ABC thì $MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + BC^2 + 3MG^2 = \dfrac{1}{3}\left(a^2 + b^2 + c^2 + 9MG^2\right)$

Cho M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ta được $9R^2 = aa^2 + b^2 + c^2 + 9OG^2 \ge a^2 + b^2 + c^2$.

Câu 20: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một đường thẳng Δ cắt các đường thẳng $AA', BC, C'D'$ lần lượt tại M, N, P sao cho $\overrightarrow{NM} = 2\overrightarrow{NP}$. Tính $\dfrac{MA}{MA'}$.

Lời giải

Trả lời: 2



Đặt $\overrightarrow{AD}=\vec{a}, \overrightarrow{AB}=\vec{b}, \overrightarrow{AA'}=\vec{c}$.

Vì $M\in AA'$ nên $\overrightarrow{AM}=k\overrightarrow{AA'}=k\vec{c}$

$N\in BC \Rightarrow \overrightarrow{BN}=l\overrightarrow{BC}=l\vec{a}$, $P\in C'D' \Rightarrow \overrightarrow{C'P}=m\vec{b}$

Ta có $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{NB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=-l\vec{a}-\vec{b}+k\vec{c}$

$\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{B'C'}+\overrightarrow{C'P}=(1-l)\vec{a}+m\vec{b}+\vec{c}$

Do $\overrightarrow{NM}=2\overrightarrow{NP} \Rightarrow -l\vec{a}-\vec{b}+k\vec{c}=2[(1-l)\vec{a}+m\vec{b}+\vec{c}]$

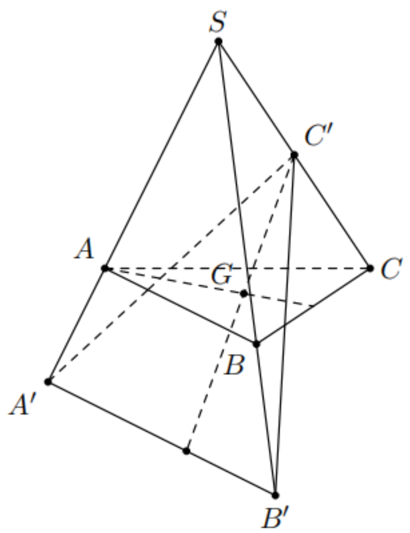
$$\Leftrightarrow \begin{cases}-l=2(1-l)\\ -1=2m\\ k=2\end{cases} \Leftrightarrow k=2, m=-\frac{1}{2}, l=2.$$

Vậy $\frac{MA}{MA'}=2.$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$. Lấy các điểm A',B',C' lần lượt thuộc các tia SA,SB,SC sao cho $\frac{SA}{SA'}=a$, $\frac{SB}{SB'}=b$, $\frac{SC}{SC'}=c$, trong đó a,b,c là các số thay đổi. Để mặt phẳng $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm của tam giác ABC thì $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3



+ Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \to \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

$\to 3\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}=\vec{0}$.

+ Mà $\begin{cases}\overrightarrow{SA}=a\overrightarrow{SA'}\\ \overrightarrow{SB}=b\overrightarrow{SB'}\\ \overrightarrow{SC}=c\overrightarrow{SC'}\end{cases} \to \overrightarrow{SG}=\frac{a}{3}\overrightarrow{SA'}+\frac{b}{3}\overrightarrow{SB'}+\frac{c}{3}\overrightarrow{SC'}$.

+ Vì $(A'B'C')$ đi qua trọng tâm ΔABC nên:

$\to \overrightarrow{GA'},\overrightarrow{GB'},\overrightarrow{GC'}$ đồng phẳng

$\to \exists l,m,n$ sao cho $l^2+m^2+n^2\neq 0$ và $l\overrightarrow{GA'}+m\overrightarrow{GB'}+n\overrightarrow{GC'}=\vec{0}$

$$\leftrightarrow l\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SA'}\right)+m\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)+n\left(\overrightarrow{GS}+\overrightarrow{SB'}\right)=\vec{0}$$

$$\leftrightarrow (l+m+n)\overrightarrow{SG}=l\overrightarrow{SA'}+m\overrightarrow{SB'}+n\overrightarrow{SC'} \leftrightarrow \overrightarrow{SG}=\frac{l}{l+m+n}\overrightarrow{SA'}+\frac{m}{l+m+n}\overrightarrow{SB'}+\frac{n}{l+m+n}\overrightarrow{SC'}$$

.

$$\to \frac{a}{3}+\frac{b}{3}+\frac{c}{3}=\frac{l}{l+m+n}+\frac{m}{l+m+n}+\frac{n}{l+m+n} \leftrightarrow \frac{a+b+c}{3}=1 \leftrightarrow a+b+c=3.$$

BÀI 7. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. HỆ TRỤC TOA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, ba trục $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$ đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$.

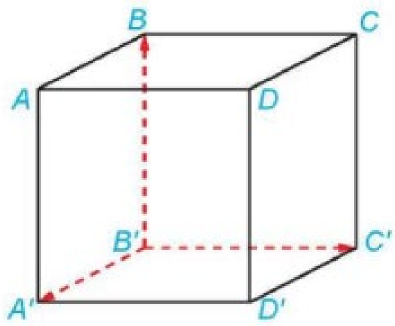
- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$ hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.

- Điểm O được gọi là gốc toạ độ.

- Các mặt phẳng $(\mathrm{Oxy}),(\mathrm{Oyz}),(\mathrm{Ozx})$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng toạ độ.

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.36). Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overline{B'A'}, \overline{B'C'}, \overline{B'B}$ không? Giải thích vì sao.

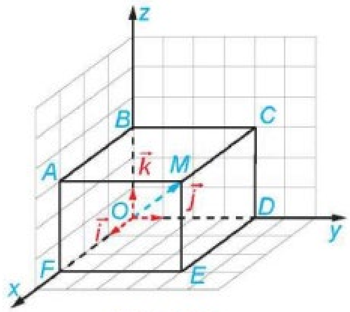


Hình 2.36

2. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

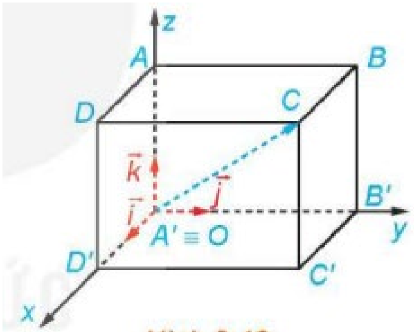
Trong không gian $Oxyz$ cho một điểm M tuỳ ý. Bộ ba số $(x; y, z)$ duy nhất sao cho $\overline{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y, z)$ hoặc $M(x; y, z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M.

Ví dụ 2. Hình 2.38 minh hoạ một hệ toạ độ $Oxyz$ trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tìm toạ độ của điểm M.



Hình 2.38

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A' trùng với gốc O và các đỉnh D', B', A lần lượt thuộc các tia $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$ (H.2.40). Giả sử đỉnh C có toạ độ là $(2;3;5)$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$, hãy tìm toạ độ của các đỉnh D', B', A đối với hệ tọa độ đó.



Hình 2.40

Nhận xét. Nếu điểm M có toạ độ $(x;y;z)$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục $Ox,\ Oy$ và Oz có tọa độ lần lượt là $(x;0;0)$, $(0;y;0)$ và $(0;0;z)$.

- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Ozx) có toạ độ lần lượt là $(x;y;0), (0;y,z)$ và $(x;0;z)$.

Người ta chứng minh được rằng bộ ba số $(x;y,z)$ trong HĐ3 là duy nhất.

Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý. Bộ ba số $(x;y;z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x;y;z)$ hoặc $\vec{a}(x;y;z)$.

Nhận xét

- Toạ độ của vectơ $\vec{a}$ cũng là toạ độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a} = (x;y;z)$ và $\vec{b} = (x';y';z')$. Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu

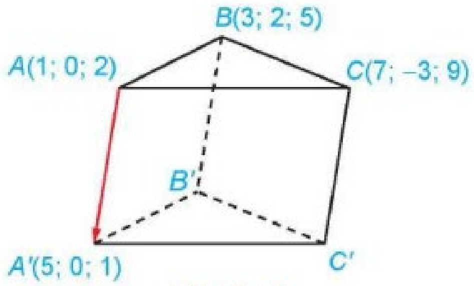
$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z'. \end{cases}$$

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$ hãy tìm toạ độ của các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$ cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1;0;2), B(3;2;5), C(7;-3;9)$ và $A'(5;0;1)$.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{A'}$.

b) Tìm toạ độ của các điểm B', C'.



Hình 2.42

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.13. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đều khác $\vec{0}$ và có giá đôi một vuông góc. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các trục toạ độ lần lượt song song với giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các trục toạ độ lần lượt trùng với giá của các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

c) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt bằng các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

d) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt cùng phương các vectơ a $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

2.14. Hãy mô tả hệ toạ độ Oxyz trong căn phòng ở Hình 2.44 sao cho gốc O trùng với góc trên của căn phòng, khung tranh nằm trong mặt phẳng (Oxy) và mặt trần nhà trùngvới mặt phẳng (Oxz).

Hình 2.44

2.15. Trong không gian Oxyz xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(0;0;0)$ và $B(4;2;-5)$;

b) $A(1;-3;7)$ và $B(1;-3;7)$;

c) $A(5;4;9)$ và $B(-5;7;2)$.

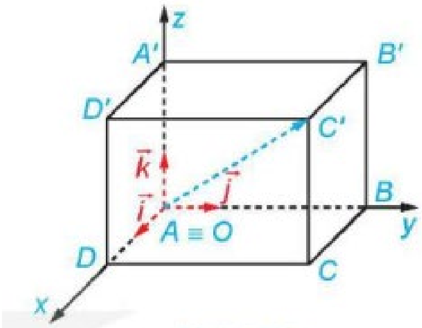
2.16. Trong không gian Oxyz xác định toạ độ của điểm A trong mỗi trường hợp sau:

a) A trùng với gốc toạ độ;

b) A nằm trên tia Ox và $OA = 2$;

c) A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA = 3$.

2.17. Trong không gian Oxyz cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O và các đỉnh D, B, A' có tọa độ lần lượt là $(2;0;0), (0;4;0), (0;0;3)$ (H.2.45). Xác định toạ độ của các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật.



Hình 2.45

2.18. Trong không gian Oxyz cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1), B(0;3;0)$, $C'(2;-3;6)$.

a) Xác định toạ độ của điểm C.

b) Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

2.19. Trong Vận dụng 2, hãy giải thích vì sao tại mỗi thời điểm chiếc máy bay di chuyển trên đường băng thì toạ độ của nó luôn có dạng $(x; y; 0)$ với x, y là hai số thực nào đó.

BÀI 8. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$. Ta có:

$\vec{a}+\vec{b}=(x+x';y+y';z+z')$; $\quad\quad$ $\vec{a}-\vec{b}=(x-x';y-y';z-z')$;

$k\vec{a}=(kx;ky;kz)$ với k là một số thực.

Nhận xét. Vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b}=(x';y';z')\neq\vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\begin{cases} x=kx' \\ y=ky' \\ z=kz'. \end{cases}$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;5)$ và $\vec{b}=(2;2;1)$. Tìm toạ độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{a}-\vec{b}$;

b) $3\vec{a}+2\vec{b}$.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3), B(3;2;1)$ và $C(2;-1;5)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ được xác định bởi công thức: $\vec{a}\cdot\vec{b}=xx'+yy'+zz'$

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu $xx'+yy'+zz'=0$.

- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ thì $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;4;2)$ và $\vec{b}=(-4;1;0)$.

a) Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và cho biết hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có vuông góc với nhau hay không.

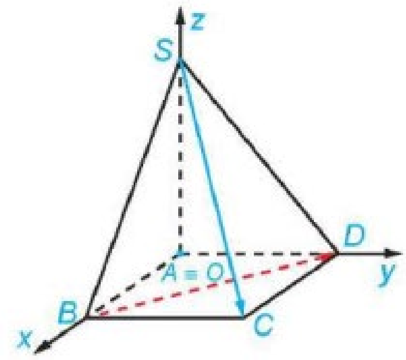
b) Tính độ dài của vectơ $\vec{a}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Giả sử $SA=2, AB=3$, $AD=4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS(H .2 .48).

a) Xác định toạ độ của các điểm S, A,B,C, D.

b) Tính BD và SC.

c) Tính $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{SC})$.



Hình 2.48

Chú ý. Nếu $A\left(x_A; y_A; z_A\right)$ và $B\left(x_B; y_B; z_B\right)$ thì $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2 + \left(z_B - z_A\right)^2}$.

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2}$.

3. VẬN DỤNG TỌA Độ CỦA VECTƠ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Ví dụ 5. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?

Hình 2.49

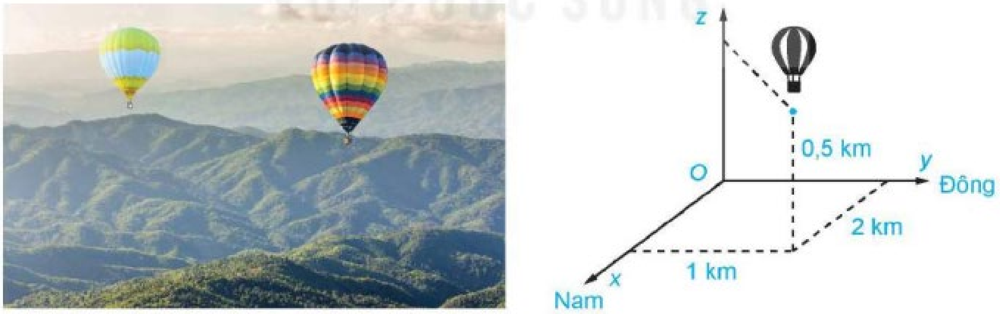
Ví dụ 6. Hãy trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu.

Ví dụ 7. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát $2\,\text{km}$ về phía nam và $1\,\text{km}$ về phia đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\,\text{km}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát $1\,\text{km}$ về phía bắc và $1,5\,\text{km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\,\text{km}$.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời $(\text{H}.2.50$), đơn vị đo lấy theo kilômét.

a) Tìm toạ độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Hình 2.50

iài

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.20. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(3;1;2), \vec{b}=(-3;0;4)$ và $\vec{c}=(6;-1;0)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ và $2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a}\cdot(-\vec{b})$ và $(2\vec{a})\cdot\vec{c}$.

2.21. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(-4;3;3), N(4;-4;2)$ và $P(3;6;-1)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}$, từ đó chứng minh rằng ba điểm M,N,P không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}$, từ đó suy ra toạ độ của điểm Q sao cho tứ giác MNPQ là hình bình hành.

c) Tính chu vi của hình bình hành MNPQ

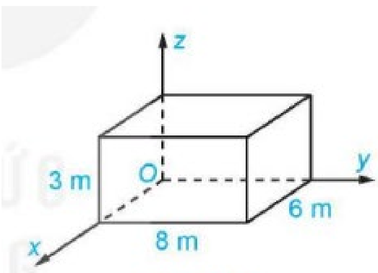
2.22. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;0;1), B(0;-3;1)$ và $C(4;-1;4)$.

a) Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BAC}=90^\circ$.

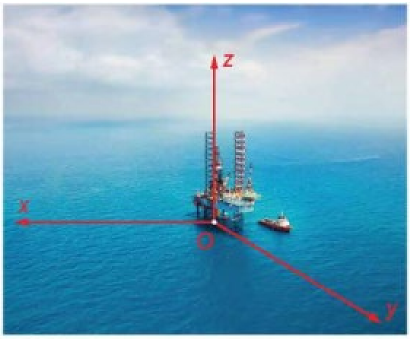
c) Tính $\widehat{ABC}$.

2.23. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét $(\text{H}, 2.51)$. Hãy tìm toạ độ của điểm treo đèn.



Hình 2.51

2.24. Trong không gian, xét hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời $(\text{H.}2.52)$. Đơn vị đo trong không gian Oxyz lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ toạ độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.52

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTƠ

1. Phương pháp: Sử dụng khái niệm

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ biết:

a) $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-5\vec{k},\ \vec{b}=-3\vec{j}+4\vec{k},\ \vec{c}=-\vec{i}-2\vec{j}.$ Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}.$

b) $\overrightarrow{OM}=5\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k},\overrightarrow{ON}=\vec{i}-3\vec{k}.$ Tìm tọa độ các điểm M,N.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz,$ biết:

a) $\vec{a}=(-3;2;-1),\vec{b}=(3;0;12).$ Tính $\vec{a},\vec{b}$ theo các vecto $\vec{i},\vec{j},\vec{k}.$

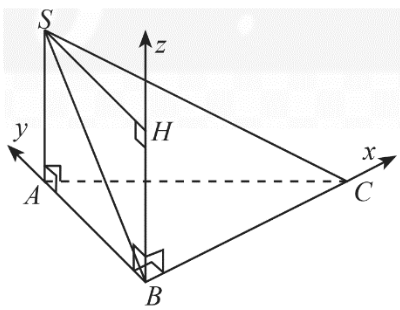
b) $A(-5;-2;1),B(0;4;-11).$ Tính $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ theo các vecto $\vec{i},\vec{j},\vec{k}.$

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz,$ cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ và có $AB=5,AD=6,\ AA'=9$. Tìm toạ độ các vecto $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Ví dụ 4: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC=3,BA=2,SA$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2.

a) Xác định một hệ toạ độ dựa trên gợi ý của hình vẽ.

b) Tìm toạ độ các điểm $A,B,C,S.$



DẠNG 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA VÉC TƠ, VÀ ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}=(1;2;3);\vec{b}=(2;2;-1);\vec{c}=(4;0;-4)$. Tìm tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$

Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(1;4;3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB

Ví dụ 4: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}=(-2;2;0);\vec{b}=(2;2;0);\vec{c}=(2;2;2)$. Tính giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$.

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(3;m+1;3),\vec{b}=(1;-3;2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $\left[\vec{m},\vec{n}\right]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $\left|\vec{p}\right|=15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM

1. Phương pháp:

Dùng công thức biểu thức tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm của tam giác…

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5;-2;0),B(-2;3;0)$, $C(0;2;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-5;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3,3,0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD=BC$.

Ví dụ 5 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A'(-3;2;1),C(4;2;0),B'(-2;1;1),D(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6),B(-3;1;8),C(-1;0;7),D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH\perp(ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1,S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của tích có hướng và công thức ứng dụng của tích có hướng.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}=(3;0;1)$ và $\vec{v}=(2;1;0)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;2)$ và $\vec{b}=(1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{u}=(2;3;-1)$ và $\vec{v}=(5;-4;m)$. Tìm m để $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2;1;-1)$, $B(3;0;1)$, $C(2;-1;3)$ và D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tìm tọa độ của điểm D.

Ví dụ 5: Cho ba điểm $A(5;-1;2)$, $B(1;-3;7)$ và $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x,y thì ba điểm A,B,M thẳng hàng ?

Ví dụ 6: Cho $\vec{u}=(2;-1;1), \vec{v}=(m;3;-1), \overrightarrow{w}=(1;2;1)$. Tìm m để ba vectơ trên đồng phẳng.

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ΔABC có $A(4;0;2)$, $B(1;-4;-2)$ và $C(2;1;1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

Ví dụ 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$. Tìm giá trị m để $\left|\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{AC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 10: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, Tìm giá trị m để $MA^2-MB^2-MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

DẠNG 5: ỨNG DỤNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500;200;8)$ đến điểm $N(800;300;10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?

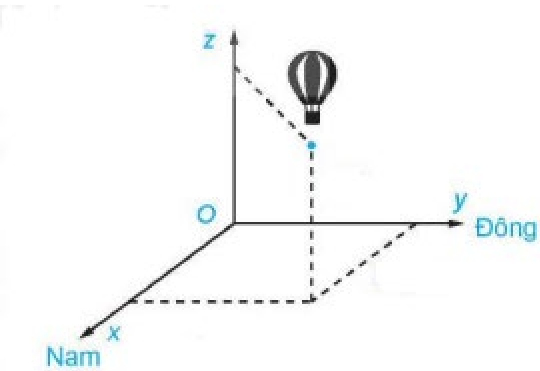
Câu 2. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Xác định tọa độ vị trí điểm N.

Câu 3. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

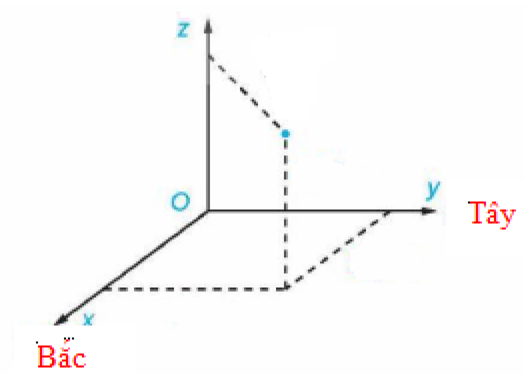



Câu 4. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Câu 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.

Câu 6. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.

a) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

b) Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Câu 7. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;-1;-3)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vectơ $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

A. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1;-1;1)$. **B.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (-1;1;1)$.

C. $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1;1;-1)$. **D.** $\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} = (1;-1;1)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA = 4$ và $SA \perp (ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định tọa độ điểm C?

A. $(3;0;0)$ **B.** $(0;0;3)$ **C.** $(0;3;3)$ **D.** $(3;3;0)$

Câu 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có $AB = 2; AD = 3; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A’ lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tọa độ của C’ là:

A. $(2;3;0)$. **B.** $(2;3;4)$. **C.** $(0;3;4)$. **D.** $(2;0;4)$.

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A’ lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Gọi M là trung điểm D’C’. Tọa độ điểm M là:

A. $(4;6;0)$ **B.** $(0;6;4)$ **C.** $(4;6;4)$ **D.** $(4;0;4)$

Câu 6: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ và $\vec{v} = (2;-1;1)$. Tính $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v} = -3$. **B.** $\vec{u}.\vec{v} = 1$. **C.** $\vec{u}.\vec{v} = 2$. **D.** $\vec{u}.\vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A. $OA=\sqrt{5}$. **B.** $OA=5$. **C.** $OA=3$. **D.** $OA=9$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;3),\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$.

A. $(0;-1;-5)$. **B.** $(2;-1;1)$. **C.** $(2;3;1)$. **D.** $(0;-1;1)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}=(1;2;3);\vec{b}=(2;2;-1);\vec{c}=(4;0;-4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}=(-7;0;-4)$. **B.** $\vec{d}=(-7;0;4)$. **C.** $\vec{d}=(7;0;-4)$. **D.** $\vec{d}=(7;0;4)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $(3;4;1)$. **B.** $(-1;-2;3)$. **C.** $(3;5;1)$. **D.** $(1;2;3)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

A. $(10;-2;13)$. **B.** $(-2;2;-7)$. **C.** $(-2;-2;7)$. **D.** $(-2;2;7)$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(-2;1;3)$. Vectơ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ là

A. $\vec{b}=(-4;1;3)$. **B.** $\vec{c}=(2;-1;-3)$. **C.** $\vec{d}=(-4;2;3)$. **D.** $\vec{e}=(-4;-2;3)$.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3),B(-1;2;5),C(0;0;1)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(0;0;3)$. **B.** $G(0;0;9)$. **C.** $G(-1;0;3)$. **D.** $G(0;0;1)$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. 26. **B.** 22. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{22}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3),\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7;n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=4;n=-3$. **C.** $m=1;n=0$. **D.** $m=7;n=-\frac{4}{3}$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tìm tọa độ của điểm B, biết M là trung điểm của AB.

A. $B\left(\frac{1}{2};3;\frac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4;9;8)$. **C.** $B(5;3;-7)$. **D.** $B(5;-3;-7)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5),B(5;-5;7),M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x,y thì A,B,M thẳng hàng.

A. $x=4;y=7$ **B.** $x=-4;y=-7$ **C.** $x=4;y=-7$ **D.** $x=-4;y=7$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}(2;0;-1)$. Tìm vectơ $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u}.\vec{v}=20$

A. $(4;0;-2)$ **B.** $(-8;0;4)$ **C.** $(8;0;-4)$ **D.** $(8;0;4)$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;0)$ và $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A. $m=2$ **B.** $m=-6$ **C.** $m=0$ **D.** $m=-4$

Câu 23: Trong không gian Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;3;0)$, $B(-2;-2;0)$, $C(3;1;0)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A=\frac{2}{\sqrt{17}}$ **B.** $\cos A=\frac{1}{\sqrt{17}}$ **C.** $\cos A=-\frac{2}{\sqrt{17}}$ **D.** $\cos A=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=(-\sqrt{3};0;1)$ là

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$, $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\frac{3}{13}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $-\frac{5}{6}$. **D.** $-\frac{3}{13}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** –9.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(5;-1;2), C(3;2;-4)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là

A. $M\left(4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$. **B.** $M\left(4;-\frac{3}{2};-\frac{9}{2}\right)$. **C.** $M\left(4;\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$. **D.** $M\left(-4;-\frac{3}{2};\frac{9}{2}\right)$.

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{a}=(2;3;1)$, $\overrightarrow{b}=(-1;5;2)$, $\overrightarrow{c}=(4;-1;3)$ và $\overrightarrow{x}=(-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\overrightarrow{x}=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$. **B.** $\overrightarrow{x}=-2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

C. $\overrightarrow{x}=2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$. **D.** $\overrightarrow{x}=2\overrightarrow{a}-3\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7$; $n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=7$; $n=-\frac{4}{3}$. **C.** $m=4$; $n=-3$. **D.** $m=1$; $n=0$.

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4;-2;9)$. **B.** $D(-4;2;9)$. **C.** $D(4;-2;9)$. **D.** $D(4;2;-9)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$ **B.** $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$ **D.** $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$

Câu 35: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9;-5;7)$. **B.** $M(9;5;7)$. **C.** $M(-9;5;-7)$. **D.** $M(9;-5;-5)$.

Câu 36: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1), \overrightarrow{AB}=(1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

A. $B(2;5;0)$. **B.** $B(0;-1;-2)$. **C.** $B(0;1;2)$. **D.** $B(-2;-5;0)$

Câu 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A=(1;0;1)$, $B=(2;1;2)$ và $D=(1;-1;1)$. Tọa độ điểm C là

A. $(2;0;2)$. **B.** $(2;2;2)$. **C.** $(2;-2;2)$. **D.** $(0;-2;0)$.

Câu 38: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Câu 39: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(2;0;2)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;4;-6)$.

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2;11;1)$.

Câu 41: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C'.

A. $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Câu 42: Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45°.

A. $m=2$. **B.** $m=2\pm\sqrt{6}$. **C.** $m=2-\sqrt{6}$. **D.** $m=2+\sqrt{6}$.

Câu 43: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0), B(2;0;-3)$. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-\frac{1}{2}$ có tọa độ là:

A. $M\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};-1\right)$. **B.** $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-2\right)$. **C.** $M\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};1\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-2\right)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}(2;0;-1)$. Tìm vectơ $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u}.\vec{v}=20$.

A. $(4;0;-2)$. **B.** $(-8;0;4)$. **C.** $(8;0;-4)$. **D.** $(8;0;4)$.

Câu 45: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3), \vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7;n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=4;n=-3$. **C.** $m=1;n=0$. **D.** $m=7;n=-\frac{4}{3}$.

Câu 46: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;1)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Toạ độ điểm G là trung điểm MN là:

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Câu 47: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm O, A, B, C sao cho O, A, B không thẳng hàng. Tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MO}-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=0$ là

A. một mặt phẳng. **B.** một điểm.
C. tập hợp rỗng. **D.** một đường thẳng.

Câu 48: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}$

A. $D(8;7;-1)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\D(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **D.** $D(-12;-1;3)$

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1;0;1),B(2;1;2),C'(4;5;-5),D(1;-1;1)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

A. $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+2\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$

B. $C(2;0;4)$

C. $B'(4;6;-5)$

D. $D'(4;4;6)$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vectơ đơn vị, điểm $M(2;0;1),N(3;2;4)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

A. $\overrightarrow{MN}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

B. $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{k}$

C. $\overrightarrow{ON}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$

D. $\left|\overrightarrow{NO}\right|=\sqrt{27}$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\vec{u}=(2;0;-1)$

B. $\vec{a}=(-1;2;-3)$

C. $\vec{u}+\vec{v}=(1;2;3)$

D. $\vec{u}.\vec{v}=-1$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA=4$ và $SA\perp(ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $A(0;0;0)$

B. $B(0;3;0)$

C. $C(3;0;0)$

D. $S(4;0;0)$

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB=2; AD=3; AA'=4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AA'}=-4\vec{k}$

B. $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$

C. $\overrightarrow{AD}=3\vec{i}$

D. $C'(2;3;4)$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 3; SA vuông góc với đáy và $SA=4$. Chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc O trùng với A; các điểm B; D; S lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AD}=3\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$

B. $\overrightarrow{AS}=0\vec{i}+0\vec{j}+4\vec{k}$

C. $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}+3\vec{j}+0\vec{k}$

D. $\overrightarrow{SC}=3\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$

B. $\overrightarrow{AA'}=(0;0;a)$

C. $\overrightarrow{AC'}=(a;2a;2a)$

D. $\overrightarrow{AD}=(a;2a;0)$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(-1;3;0)$.

A. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng $(0;1;1)$.

B. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}=(2;-4;2)$.

C. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$.

D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(-2;4;-2)$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;2)$ và $\vec{b}=(1;1;-1)$.

A. Tọa độ vectơ $\vec{a}-\vec{b}=(1;2;3)$.

B. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 6.

C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

D. Cosin góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\dfrac{\sqrt{51}}{51}$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a}=(-2;1;-3), \vec{b}=(-1;-3;2)$ và điểm $A(4;6;-3)$.

A. Tọa độ vectơ $\vec{a}-2\vec{b}=(0;1;-1)$.

B. Tọa độ điểm $B(2;7;-6)$ thì $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$.

C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

D. Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0), \vec{b}=(1;1;0), \vec{c}=(1;1;1)$.

A. Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.

B. Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.

C. Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

D. Tọa độ vectơ $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ bằng $(-2;4;-1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0), \vec{b}=(1;1;0), \vec{c}=(1;1;1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. $|\vec{a}|=\sqrt{2}$.

B. $\vec{b}\perp\vec{a}$.

C. $\vec{b}\perp\vec{c}$.

D. $2|\vec{c}|=6.$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;1)$, $B(2;1;3)$, $C(-1;3;-2)$.

A. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3};2;\frac{2}{3}\right)$.

B. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3;\frac{3}{2};2\right)$

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D=(1;4;-4)$.

D. Ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$, $C(9;2;y)$.

A. Ba điểm A,B,C thẳng hàng thì $x+y=5$.

B. Điểm $G\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x=1; y=3$.

C. Tam giác ABC vuông tại A thì $x=13, y=-1$.

D. Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3x+2y+41$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$; $\vec{b}=(2;2;-1)$, $\vec{c}=(4;0;-4)$.

A. $3\vec{a}=(1;6;9)$.

B. $\vec{a}+\vec{b}=(3;4;2)$.

C. $\vec{a}-\vec{c}=(3;-2;-7)$.

D. $\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(7;0;-4)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$; $\vec{b}=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$.

A. Tọa độ vectơ $\vec{a}=(-1;3;4)$.

B. Cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng $\frac{1}{2}$.

C. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng 14.

D. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;1;-2),\vec{b}=(1;2;-4),\vec{c}=(-1;-3;3)$.

A. $\vec{a}=2\vec{b}$.

B. $|\vec{a}|=3|\vec{b}|$.

C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$

D. $2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}=(-4;-19;23)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn vectơ $\vec{a}=(2;3;1),\vec{b}=(-1;5;2),\vec{c}=(4;-1;3)$ và $\vec{x}=(-3;22;5)$.

A. $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$.

B. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.

D. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2),B(1;0;3),C(0;2;-2)$.

A. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{BC}=(-1;2;-5)$.

B. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

C. Tọa độ điểm D là $D(-2;3;-3)$.

D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AD}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2;1;0),C(0;3;0),C'(-1;2;1),D'(0;-2;0)$.

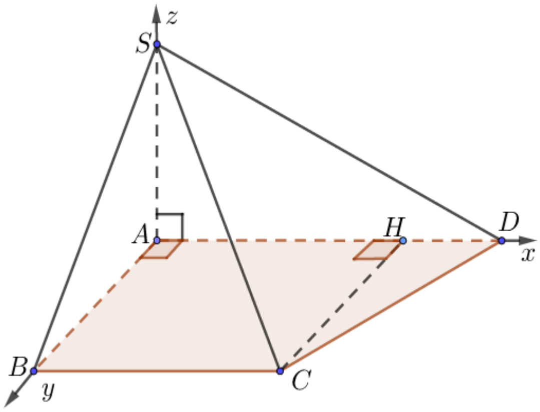
A. Tọa độ các điểm A',B' là $A'(1;0;-1),B'(0;4;2)$.

B. Tọa độ các điểm B,D là $B(1;5;1),D(1;-1;-1)$.

C. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB}=\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$.

D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D}=\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD=2AB=2BC=2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA=2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD.



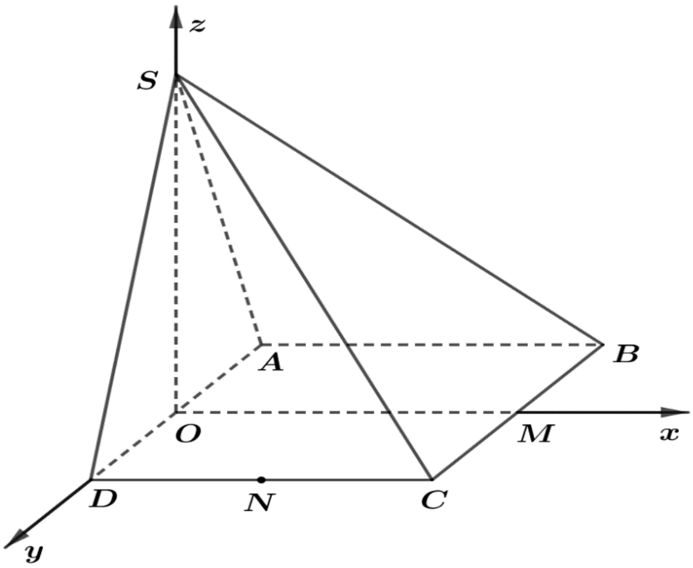
A. Tọa độ các điểm A,B là $A(0;0;0), B(a;a;0)$.

B. Tọa độ các điểm C,D là $C(a;a;0), D(2a;0;0)$.

C. Tọa độ điểm S là $S(0;0;2a)$.

D. Tọa độ điểm H là $H(a;0;0)$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O,M và N lần lượt là trung điểm của AD,BC và CD. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



A. Tọa độ các điểm A,B là $A\left(0;-\frac{1}{2};0\right), B\left(1;-\frac{1}{2};0\right)$.

B. Tọa độ các điểm C,D là $C\left(1;\frac{1}{2};0\right), D\left(0;\frac{1}{2};0\right)$.

C. Tọa độ điểm S là $S\left(0;0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

D. Tọa độ các điểm M,N là $M(1;0;0), N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;-2;-4)$, $\vec{b}=(1;-1;1)$.

A. $\vec{a}+\vec{b}=(3;-3;-3)$

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$

D. $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$

Câu 24: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-5;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(1;7;2)$.

A. $\vec{u}=3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}$ với $\vec{u}=(11;22;18)$.

B. $\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}-2\vec{c}$ với $\vec{x}=\left(-1;-\frac{115}{6};-\frac{7}{6}\right)$.

C. $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ với $\overrightarrow{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$.

D. $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$ với $\overrightarrow{y}=-\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{k}-4\vec{j}$ và $\vec{b}=(m-n;4m-6n;n^2-3m+2)$, với m,n là tham số.

a) Tọa độ $\vec{a}=(1;3;-4)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì $A(1;-4;3)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b}=\vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a}=\vec{b}$ thì $m+n=9$.

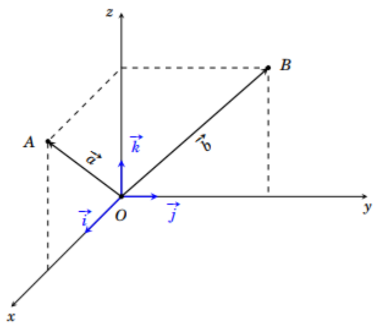
Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;2;0),\vec{b}=\ 2\vec{j}+2\vec{k}$. Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

a) $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{k}$.

b) Toạ độ $\vec{b}=(0;2;2)$.

c) Toạ độ $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)$

d) Góc $\widehat{AOB}=45^\circ$.



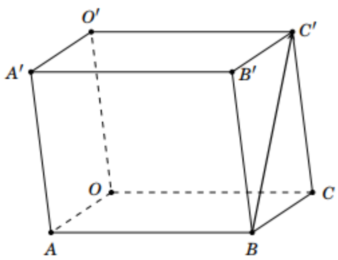
Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1),B(0;3;0),\overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)$. Gọi H,K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

a) Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$

b) Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$.

c) Tọa độ véc to $\overrightarrow{AB'}=(-2;3;-6)$.

d) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK}=(-1;2;-1)$.



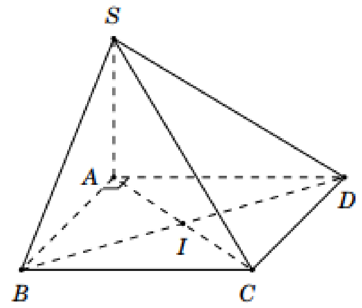
Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1, AD=2, SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các véc tơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Tọa độ $D(0;2;0)$.

b) Tọa độ $C(1;2;3)$.

c) Tọa độ $S(2;0;0)$

d) Tọa độ $I(1;1;0)$.



Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.

b) $\overrightarrow{AC'} = \left(2\sqrt{2};0;2\right)$.

c) Tọa độ $D'\left(0;\sqrt{2};2\right)$.

d) $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$.

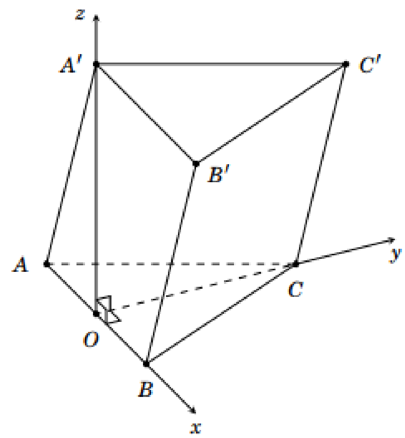
Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) trùng với trung điểm cạnh AB, góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ điểm $A(-1;0;0)$.

b) Tọa độ điểm $C\left(0;\sqrt{3};0\right)$.

c) Tọa độ điểm $A'\left(0;-1;\sqrt{3}\right)$.

d) Tọa độ điểm $C'\left(1;\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.



Câu 32: Cho các điểm $A(1;-2;3), B(-2;1;2), C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1)$.

b) $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;1)$.

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

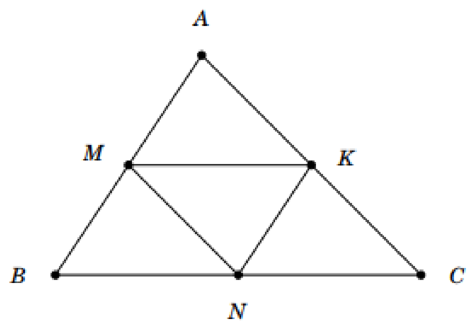
Câu 33: Cho ba điểm $A(3;3;-6),B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M,N,K lần lượt là trung điểm của AB,BC và CA.

a) Tọa độ $M(2;3;2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC=2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.

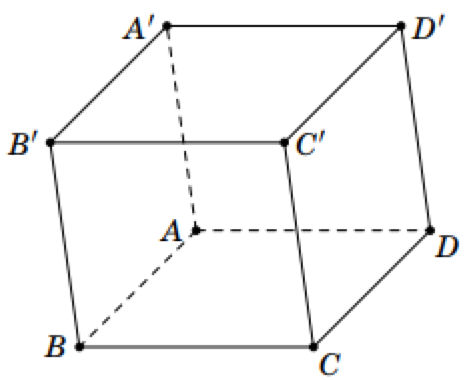
d) Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



Câu 34: Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0),C(1;2;0),D'(-1;3;5)$. Gọi M,N là tâm của các hình bình hành $ABB'A',ADD'A'$.

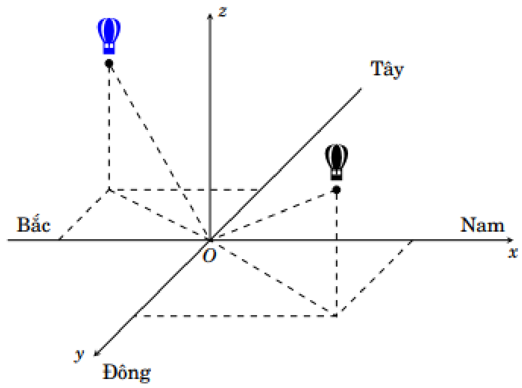
a) Tọa độ $D(0;2;0)$. b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$.

c) Tọa độ $\overline{MN}=(-1;1;0)$. d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right|=\sqrt{29}$.



Câu 35: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5$ km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5$ km về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8$ km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $(\ 2;1;0,5)$.

b) Với hệ tọa độ đã chọn, toạ độ khinh khí cầu thứ hai là $(-1,5;-1;0,8)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là $3,92$ km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 36: Cho ba vec-tơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$.

a) $|\vec{a}|=2$.

b) $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.

c) $\cos(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $\vec{b}\perp\vec{c}$.

Câu 37: Cho hai véctơ $\vec{u}=(0;2;3)$ và $\vec{v}=(m-1;2m;3)$.

a) $|\vec{u}|=\sqrt{13}$.

b) $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{5}$.

c) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow m=1$.

d) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow m=\dfrac{9}{4}$.

Câu 38: Cho tam giác ABC có $A(1;2;0),B(0;1;1),C(2;1;0)$.

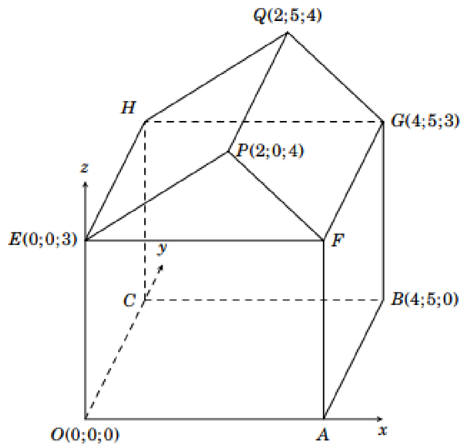
a) Tam giác ABC vuông tại A.

b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 39: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(3;2;5)$ và $\vec{b}=(3m+2;3;6-n)$. Tính giá trị biểu thức $6m+2n$ để hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng nhau.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(1;2;3)$, $B(-1;2;0), C(3;2;-3)$ và $G(a;b;c)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

Câu 4: Trong không gian Oxy, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(2;1;1)$. Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A,B,M thẳng hàng. Tính giá trị biểu thức $x_0+y_0+z_0$.

Câu 5: Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1;-1;1), B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB,CD và có góc tại D bằng $45°$.

Câu 6: Trong không gian Oxy, cho tam giác ABC, biết $A(2;0;0), B(0;3;1), C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài AM.

Câu 7: Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2-c^2$.

Câu 8: Trong không gian Oxy, cho hai điểm trên trục hoành mà khoảng cách từ đó đến điểm $M(-3;4;8)$ bằng 12. Tính tổng hai hoành độ của chúng.

Câu 9: Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;5;-3), \vec{b}=(0;-4;0)$. Tính tích vô hướn của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+0\vec{j}+3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, $\overrightarrow{OC}=-3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. Điểm $D(x;y;z)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tính $P=2x+y-z$.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}$. Tọa độ vec tơ $\vec{a}=(x;0;3)$; $\vec{b}=(3;y;0)$. Tính $P=x^2+y^2$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$; $\overrightarrow{ON}=-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$. Tọa độ điểm $M(2;-3;a); N(-1;b;-1)$. Tính $T=2a-3b$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(3;-5;2)$; $\vec{b}=(2;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}=3\vec{i}-y\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$. Tính $P=y^2-z^2$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $M(1;0;-2), N(5;1;-6)$. Tính $\overrightarrow{OM}=\vec{i}+y\vec{j}-2\vec{k}; \overrightarrow{ON}=x\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$. Tính $P=x^3+y^3$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 5, $SA=2$ và $SA\perp(ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ điểm $C(x;y;z)$. Tính $P=x^3+y^3+z^3$.

Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=2; AD=3; AA'=4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tìm tọa độ của $C'(x;3;z)$. Tính $P=x-z$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA=4$ và $SA\perp(ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Gọi M là trung điểm SC. Tìm tọa độ điểm $M(x;y;z)$. Tính $T=x+y-\frac{3}{2}z$.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\left|\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+2\overrightarrow{CC'}\right|$.

Câu 19: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB=8; AD=6; AA'=4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tọa độ điểm $C'(x;y;z)$. Tính $P=x-2y+z$.

Câu 20: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P=a^2+b^2-c^2$ có giá trị bằng

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;2;0);\vec{b}=(2;2;0)$ và $\vec{c}(2;2;2)$. Giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ bằng

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng

Câu 23: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-3;4), B(1;y;-1) C(x;4;3)$. Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tổng giá trị $5x+y$ là:

Câu 24: Trong không gian Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;m;2),\vec{b}=(m+1;2;1),\vec{c}=(0;m-2;2)$. Tổng các giá trị thực của tham số m để $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$.

Câu 25: Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;-1;0),\vec{b}=(2;2t-1;0)$. Xác định giá trị t để hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương.

Câu 26: Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;-2),\vec{b}=(-1;-1;0)$. Số đo độ của góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$?

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

Câu 28: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Giả sử điểm $D(a,b,c)$ sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}$. Tính $a+b+c$

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

Câu 30: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A\left(2;2;1\right)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I\left(a;b;c\right)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB. Tính $S=a+b+c$.

BÀI 7. HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN.

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. HỆ TRỤC TOA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian, ba trục $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$ đôi một vuông góc với nhau tại gốc O của mỗi trục.

Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$.

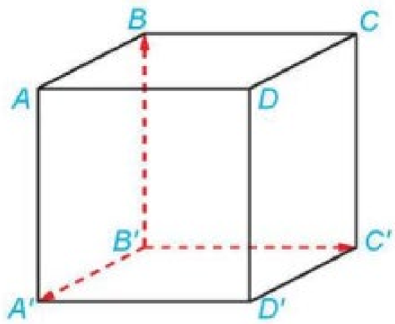
- Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục toạ độ Descartes vuông góc $Oxyz$ hay đơn giản là hệ tọa độ $Oxyz$.

- Điểm O được gọi là gốc toạ độ.

- Các mặt phẳng $(\mathrm{Oxy}), (\mathrm{Oyz}), (\mathrm{Ozx})$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặt phẳng toạ độ.

Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$

Ví dụ 1. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài mỗi cạnh bằng 1 (H.2.36). Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overline{B'A'}, \overline{B'C'}, \overline{B'B}$ không? Giải thích vì sao.



Hình 2.36

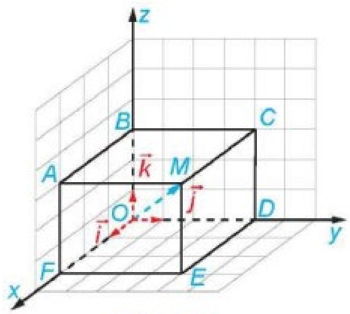
Lời giải

Hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $B'A', B'C'$ và $B'B$ đôi một vuông góc với nhau.
Vì hình lập phương có độ dài mỗi cạnh bằng 1 nên các vectơ $\overline{B'A'}, \overline{B'C'}, \overline{B'B}$ cùng có điểm đầu là B' và đều có độ dài bằng 1 .
Từ các điều trên, suy ra có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với đỉnh B' và các vectơ $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ $\overrightarrow{B'A'}, \overrightarrow{B'C'}, \overrightarrow{B'B}$.

2. TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM, TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Trong không gian $Oxyz$ cho một điểm M tuỳ ý. Bộ ba số $(x; y, z)$ duy nhất sao cho $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là tọa độ của điểm M đối với hệ tọa độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $M = (x; y, z)$ hoặc $M(x; y, z)$, trong đó x là hoành độ, y là tung độ và z là cao độ của M.

Ví dụ 2. Hình 2.38 minh hoạ một hệ toạ độ $Oxyz$ trong không gian cùng với các hình vuông có cạnh bằng 1 đơn vị. Tìm toạ độ của điểm M.



Hình 2.38

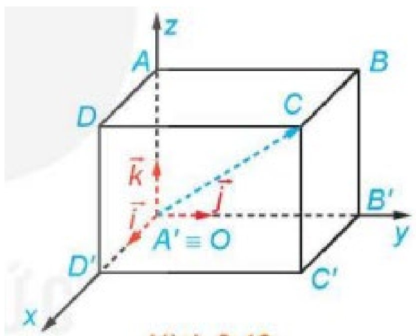
Lời giải

Trong Hình 2.38, $ABCM.FODE$ là hình hộp chữ nhật.

Áp dụng quy tắc hình hộp suy ra $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OB} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$.

Vì vậy, toạ độ của điểm M là $(3;4;3)$.

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đỉnh A' trùng với gốc O và các đỉnh D', B', A lần lượt thuộc các tia $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$ (H.2.40). Giả sử đỉnh C có toạ độ là $(2;3;5)$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$, hãy tìm toạ độ của các đỉnh D', B', A đối với hệ tọa độ đó.



Hình 2.40

Lời giải

Vì đỉnh D' thuộc tia Ox nên hai vectơ $\overrightarrow{OD'}$ và $\vec{i}$ cùng phương, suy ra có số thực m sao cho $\overrightarrow{OD'} = m\vec{i}$ Tương tự, có các số thực n, p sao cho $\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = n\vec{j}$ và $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = p\vec{k}$. Theo quy tắc hình hộp, suy ra $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OA} = m\vec{i} + n\vec{j} + p\vec{k}$ và do đó điểm C có toạ độ là $(m;n;p)$.

Mặt khác, đỉnh C có toạ độ là $(2;3;5)$ nên $m = 2, n = 3, p = 5$, tức là $\overrightarrow{OD'} = 2\vec{i}, \overrightarrow{OB'} = 3\vec{j}$ và $\overrightarrow{OA} = 5\vec{k}$.

Từ đây suy ra $D'(2;0;0), B'(0;3;0)$ và $A(0;0;5)$.

Nhận xét. Nếu điểm M có toạ độ $(x;y;z)$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$ thì:

- Hình chiếu vuông góc của M trên các trục Ox, Oy *và* Oz có tọa độ lần lượt là $(x;0;0)$, $(0;y;0)$ và $(0;0;z)$.

- Hình chiếu vuông góc của M trên các mặt phẳng (Oxy), (Oyz) và (Ozx) có toạ độ lần lượt là $(x;y;0), (0;y,z)$ và $(x;0;z)$.

Người ta chứng minh được rằng bộ ba số $(x; y, z)$ trong HĐ3 là duy nhất.

Trong không gian $Oxyz$ cho vectơ $\vec{a}$ tuỳ ý. Bộ ba số $(x; y; z)$ duy nhất sao cho $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ được gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ toạ độ $Oxyz$. Khi đó, ta viết $\vec{a} = (x; y; z)$ hoặc $\vec{a}(x; y; z)$.

Nhận xét

- Toạ độ của vectơ $\vec{a}$ cũng là toạ độ của điểm M sao cho $\overrightarrow{OM} = \vec{a}$.

- Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a} = (x; y; z)$ và $\vec{b} = (x'; y'; z')$. Khi đó, $\vec{a} = \vec{b}$ nếu và chỉ nếu

$$\begin{cases} x = x' \\ y = y' \\ z = z'. \end{cases}$$

Ví dụ 4. Trong không gian $Oxyz$ hãy tìm toạ độ của các vectơ $\vec{i}, \vec{j}$ và $\vec{k}$.

Lời giải

Vì $\vec{i} = 1\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$ nên $\vec{i} = (1;0;0)$. Vì $\vec{j} = 0\cdot\vec{i} + 1\cdot\vec{j} + 0\cdot\vec{k}$ nên $\vec{j} = (0;1;0)$.

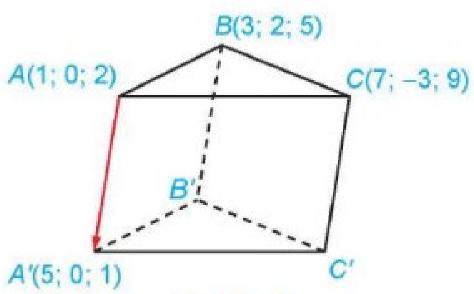
Vì $\vec{k} = 0\cdot\vec{i} + 0\cdot\vec{j} + 1\cdot\vec{k}$ nên $\vec{k} = (0;0;1)$.

Trong không gian $Oxyz$ cho hai điểm $M(x_M; y_M; z_M)$ và $N(x_N; y_N; z_N)$. Khi đó:
$\overrightarrow{MN} = (x_N - x_M; y_N - y_M; z_N - z_M)$.

Ví dụ 5. Trong không gian $Oxyz$ cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có $A(1;0;2), B(3;2;5), C(7;-3;9)$ và $A'(5;0;1)$.

a) Tìm toạ độ của $\overrightarrow{A'}$.

b) Tìm toạ độ của các điểm B', C'.



Hình 2.42

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{AA'} = (x_{A'} - x_{A'}; y_{A'} - y_A; z_{A'} - z_A) = (4;0;-1)$.

b) Gọi toạ độ của điểm B' là $(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{BB'} = (x-3; y-2; z-5)$. Vì $ABC.A'B'C'$ là hình lăng trụ nên $ABB'A'$ là hình bình hành, suy ra $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Do đó $\begin{cases} x-3=4 \\ y-2=0 \\ z-5=-1 \end{cases}$ hay $x=7, y=2$ và $z=4$. Vậy $B'(7;2;4)$.

Lập luận tương tự suy ra $C'(11;-3;8)$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.13. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đều khác $\vec{0}$ và có giá đôi một vuông góc. Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

a) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các trục toạ độ lần lượt song song với giá của các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

b) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các trục toạ độ lần lượt trùng với giá của các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

c) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt bằng các vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

d) Có thể lập một hệ toạ độ $Oxyz$ có các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt cùng phương các vectơ a $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Lời giải

Cả 4 đáp án trên đều đúng.

2.14. Hãy mô tả hệ toạ độ Oxyz trong căn phòng ở Hình 2.44 sao cho gốc O trùng với góc trên của căn phòng, khung tranh nằm trong mặt phẳng (Oxy) và mặt trần nhà trùngvới mặt phẳng (Oxz).

Hình 2.44

Lời giải

Hình vẽ phù hợp là

2.15. Trong không gian Oxyz xác định toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trong mỗi trường hợp sau:

a) $A(0;0;0)$ và $B(4;2;-5)$;

b) $A(1;-3;7)$ và $B(1;-3;7)$;

c) $A(5;4;9)$ và $B(-5;7;2)$.

Lời giải

a) $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)=(4;2;-5)$

b) $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)=(0;0;0)$

c) $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)=(-10;3;-7)$

2.16. Trong không gian Oxyz xác định toạ độ của điểm A trong mỗi trường hợp sau:

a) A trùng với gốc toạ độ;

b) A nằm trên tia Ox và $OA=2$;

c) A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA=3$.

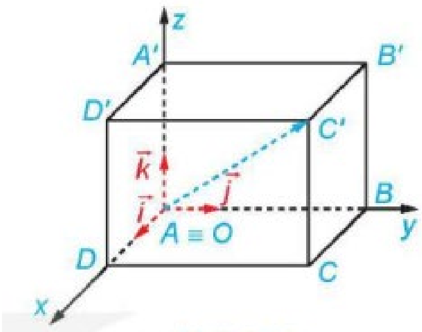
Lời giải

a) A trùng với gốc tọa độ nên $A(0;0;0)$.

b) Vì A nằm trên tia Ox và $OA=2$ nên $\overrightarrow{OA}=2\vec{i}$. Do đó, A(2;0;0).

c) Vì A nằm trên tia đối của tia Oy và $OA=3$ nên $\overrightarrow{OA}=-3\vec{j}$. Do đó, $A(0;-3;0)$.

2.17. Trong không gian Oxyz cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O và các đỉnh D,B,A' có tọa độ lần lượt là $(2;0;0),(0;4;0),(0;0;3)$ (H.2.45). Xác định toạ độ của các đỉnh còn lại của hình hộp chữ nhật.



Hình 2.45

Lời giải

Đỉnh A trùng với gốc tọa độ nên $A(0;0;0)$.

Ta có $D(2;0;0)$ nên $\overrightarrow{OD}=2\vec{i}$; $B(0;4;0)$ nên $\overrightarrow{OB}=4\vec{j}$; $A'(0;0;3)$ nên $\overrightarrow{OA'}=3\vec{k}$.

Theo quy tắc hình hộp, ta có: $\overrightarrow{OC'}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA'}=2\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k}$. Do đó $C'(2;4;3)$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+4\vec{j}$. Do đó $C(2;\ 4;0)$.

Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA'} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$. Do đó $D'(2;0;3)$.

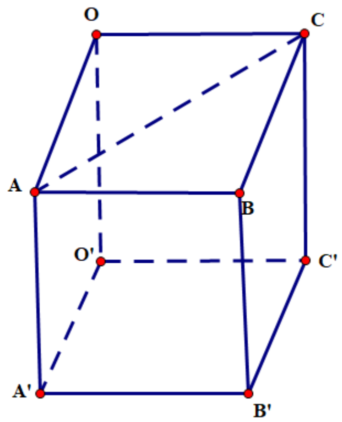
Theo quy tắc hình bình hành, ta có: $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA'} = 4\vec{j} + 3\vec{k}$. Do đó $B'(0;4;3)$.

2.18. Trong không gian Oxyz cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1), B(0;3;0)$, $C'(2;-3;6)$.

a) Xác định toạ độ của điểm C.

b) Xác định toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Lời giải



a) Ta có: $O(0;0;0)$

Vì $OABC.O'A'B'C'$ là hình hộp nên $AOBC$ là hình bình hành. Do đó:

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Rightarrow \begin{cases} x_A = x_B - x_C \\ y_A = y_B - y_C \\ z_A = z_B - z_C \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = x_A - x_B = 1 \\ y_C = y_A - y_B = -2 \\ z_C = z_A - z_B = -1 \end{cases} \Rightarrow C(1;-2;-1)$$

b) Vì OABC. $O'A'B'C'$ là hình hộp nên

$$\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \begin{cases} x_{O'} = x_{C'} - x_C = 1 \\ y_{O'} = y_{C'} - y_C = -1 \Rightarrow O'(1;-1;7) \\ z_{O'} = z_{C'} - z_C = 7 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} - x_A = x_{C'} - x_C = 1 \\ y_{A'} - y_A = y_{C'} - y_C = -1 \\ z_{A'} - z_A = z_{C'} - z_C = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2 \\ y_{A'} = 0 \\ z_{A'} = 6 \end{cases} \Rightarrow A'(2;0;6)$$

$$\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} - x_B = (x_{C'} - x_C) = 1 \\ y_{B'} - y_B = (y_{C'} - y_C) = -1 \\ z_{B'} - z_B = (z_{C'} - z_C) = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{B'} = 1 \\ y_{B'} = 2 \\ z_{B'} = 7 \end{cases} \Rightarrow B'(1;2;7)$$

2.19. Trong Vận dụng 2, hãy giải thích vì sao tại mỗi thời điểm chiếc máy bay di chuyển trên đường băng thì toạ độ của nó luôn có dạng $(x; y; 0)$ với x, y là hai số thực nào đó.

Lời giải

Khi máy bay di chuyển trên đường băng tức là máy bay di chuyển ở trên mặt đất, tức là thuộc mặt phẳng (Oxy). Do đó máy bay khi di chuyển trên đường băng thì tọa độ của nó luôn có dạng (x ; y ; 0) với x, y là hai số thực nào đó.

BÀI 8. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTƠ

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP CỘNG HAI VECTƠ, PHÉP TRỪ HAI VECTƠ, PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VECTƠ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$. Ta có:

$\vec{a}+\vec{b}=(x+x';y+y';z+z')$; $\vec{a}-\vec{b}=(x-x';y-y';z-z')$;

$k\vec{a}=(kx;ky;kz)$ với k là một số thực.

Nhận xét. Vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ cùng phương với vectơ $\vec{b}=(x';y';z')\neq\vec{0}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực k sao cho $\begin{cases} x=kx' \\ y=ky' \\ z=kz'. \end{cases}$

Ví dụ 1. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;5)$ và $\vec{b}=(2;2;1)$. Tìm toạ độ của mỗi vectơ sau:

a) $\vec{a}-\vec{b}$;

b) $3\vec{a}+2\vec{b}$.

Lời giải

a) Vì $\vec{a}=(2;1;5)$ và $\vec{b}=(2;2;1)$ nên $\vec{a}-\vec{b}=(2-2;1-2;5-1)=(0;-1;4)$.

b) Ta có $3\vec{a}=(3\cdot2;3\cdot1;3\cdot5)=(6;3;15)$ và $2\vec{b}=(2\cdot2;2\cdot2;2\cdot1)=(4;4;2)$.

Do đó $3\vec{a}+2\vec{b}=(6+4;3+4;15+2)=(10;7;17)$.

Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm không thẳng hàng $A(x_A;y_A;z_A), B(x_B;y_B;z_B)$ và $C(x_C;y_C;z_C)$. Khi đó:

- Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng AB là $\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$;

- Toạ độ trọng tâm của tam giác ABC là $\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

Ví dụ 2. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(1;2;3), B(3;2;1)$ và $C(2;-1;5)$. Tìm tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB và toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên toạ độ của điểm M là $\left(\dfrac{1+3}{2};\dfrac{2+2}{2};\dfrac{3+1}{2}\right)$, suy ra $M(2;2;2)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên toạ độ của điểm G là $\left(\frac{1+3+2}{3};\frac{2+2+(-1)}{3};\frac{3+1+5}{3}\right)$, suy ra $G(2;1;3)$

2. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA TÍCH VÔ HƯỚNG

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ được xác định bởi công thức: $\vec{a}\cdot\vec{b}=xx'+yy'+zz'$

Nhận xét

- Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau nếu và chỉ nếu $xx'+yy'+zz'=0$.

- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ thì $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

- Nếu $\vec{a}=(x;y;z)$ và $\vec{b}=(x';y';z')$ là hai vectơ khác $\vec{0}$ thì

$$\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{xx'+yy'+zz'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}}.$$

Ví dụ 3. Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;4;2)$ và $\vec{b}=(-4;1;0)$.

a) Tính $\vec{a}\cdot\vec{b}$ và cho biết hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có vuông góc với nhau hay không.
b) Tính độ dài của vectơ $\vec{a}$.

Lời giải

a) Ta có: $\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot(-4)+4\cdot1+2\cdot0=0$. Do đó, hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau.

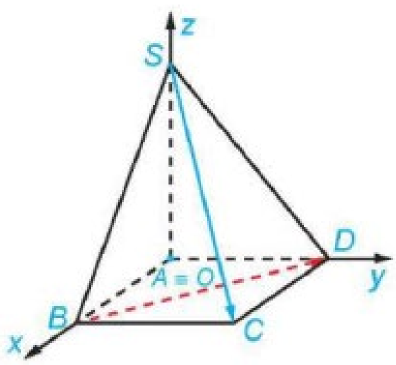
b) Độ dài của vectơ $\vec{a}$ là $|\vec{a}|=\sqrt{1^2+4^2+2^2}=\sqrt{21}$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp S. ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Giả sử $SA=2, AB=3$, $AD=4$. Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O trùng A và các tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS(H .2 .48).

a) Xác định toạ độ của các điểm S, A,B,C, D.

b) Tính BD và SC.

c) Tính $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC})$.



Hình 2.48

Lời giải

a) Vì A trùng gốc toạ độ nên $A(0;0;0)$. Vì B thuộc tia $O x$ và $AB=3$ nên $B(3;0;0)$. Vì D thuộc tia Oy và $AD=4$ nên $D(0;4;0)$. Vì S thuộc tia Oz và $AS=2$ nên $S(0;0;2)$. Vì hình chiếu của C lên các trục $\mathrm{Ox}, \mathrm{Oy}, \mathrm{Oz}$ lần lượt là B,D,A nên $C(3;4;0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{BD}=(0-3;4-0;0-0)=(-3;4;0)$, suy ra $BD=|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}=5$. Ta có $\overrightarrow{SC}=(3-0;4-0;0-2)=(3;4;-2)$, suy ra $SC=|\overrightarrow{SC}|=\sqrt{3^2+4^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$.

c) Ta có $\cos(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC})=\dfrac{\overrightarrow{BD}\cdot\overrightarrow{SC}}{|\overrightarrow{BD}|\cdot|\overrightarrow{SC}|}=\dfrac{(-3)\cdot 3+4\cdot 4+0\cdot(-2)}{5\sqrt{29}}=\dfrac{7}{5\sqrt{29}}$, suy ra $(\overrightarrow{BD},\overrightarrow{SC})\approx 74,9^{\circ}$.

Chú ý. Nếu $A\left(x_A;y_A;z_A\right)$ và $B\left(x_B;y_B;z_B\right)$ thì $AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

Đặc biệt, khi B trùng O ta nhận được công thức $OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2+z_A^2}$.

3. VẬN DỤNG TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG MỘT SỐ BÀI TOÁN CÓ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

Ví dụ 5. Trong không gian với một hệ trục toạ độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilômét), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;8)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là gì?

Hình 2.49

Lời giải

Gọi $C(x;y;z)$ là vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì hướng của máy bay không đổi nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng. Do vận tốc của máy bay không đổi và thời gian bay từ A đến B gấp đôi thời gian bay từ B đến C nên $AB=2BC$.

Do đó $\overrightarrow{BC}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{940-800}{2};\dfrac{550-500}{2};\dfrac{8-7}{2}\right)=(70;25;0,5)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BC}=(x-940;y-550;z-8)$ nên $\begin{cases}x-940=70\\ y-550=25\\ z-8=0,5.\end{cases}$. Từ đó $\begin{cases}x=1010\\ y=575\\ z=8,5\end{cases}$ và vì vậy $C(1010;575;8,5)$.

Vậy toạ độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(1010;575;8,5)$.

Ví dụ 6. Hãy trả lời câu hỏi trong tình huống mở đầu.

Lời giải

Vì điểm A' có toạ độ là $(240;450;0)$ nên khoảng cách từ A' đến các trục Ox, Oy lần lượt là 450 cm và 240 cm. Suy ra $A'A = 450\text{ cm}$ và $A'O' = 240\text{ cm}$. Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{A'B'} = (-120;0;300)$, do đó $A'B' = \left|\overrightarrow{A'B'}\right| = \sqrt{(-120)^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(\text{ cm})$.

Vì $O'O = A'A = 450\text{ cm}$ và O' nằm trên trục O yên tọa độ của điểm O' là $(0;450;0\ )$.

Do đó $\overrightarrow{O'B'} = (120;0;300)$ và $O'B' = \left|\overrightarrow{O'B'}\right| = \sqrt{120^2 + 0^2 + 300^2} = 60\sqrt{29} \approx 323(\text{ cm})$.

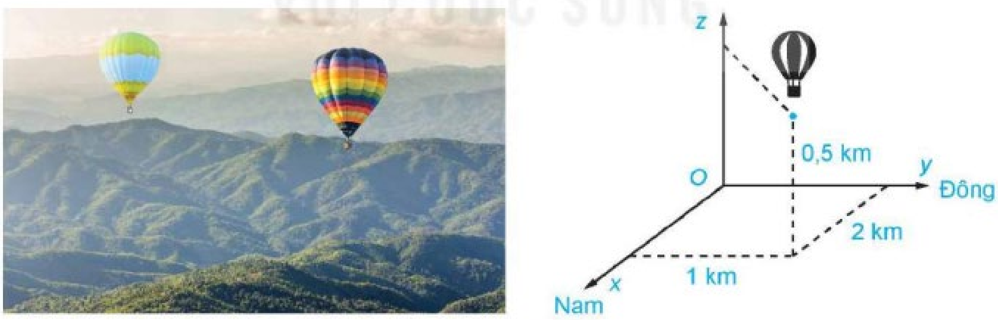
Vậy mỗi căn nhà gỗ có chiều dài là 450 cm, chiều rộng là 240 cm, mỗi cạnh bên của mặt tiền có độ dài là 323 cm.

Ví dụ 7. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 2km về phía nam và 1km về phia đông, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{km}$. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1km về phía bắc và $1,5\text{km}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{km}$.

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời $(\mathrm{H}.2.50\ )$, đơn vị đo lấy theo kilômét.

a) Tìm toạ độ của mỗi chiếc khinh khí cầu đối với hệ tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách giữa hai khinh khí cầu (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



iải

Hình 2.50

Lời giải

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai có toạ độ lần lượt là $(2;1;0,5)$ và $(-1;-1,5;0,8)$.

b) Khoảng cách giữa hai chiếc khinh khí cầu là

$\sqrt{(-1-2)^2 + (-1,5-1)^2 + (0,8-0,5)^2} = \sqrt{15,34} \approx 3,92(\text{km})$.

B. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

2.20. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a} = (3;1;2), \vec{b} = (-3;0;4)$ và $\vec{c} = (6;-1;0)$.

a) Tìm tọa độ của các vectơ $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ và $2\vec{a} - 3\vec{b} - 5\vec{c}$.

b) Tính các tích vô hướng $\vec{a} \cdot (-\vec{b})$ và $(2\vec{a}) \cdot \vec{c}$.

Lời giải

a) Tọa độ của vectơ $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ là $(3-3+6;1+0-1;2+4+0)=(6;0;6)$.

Có $2\vec{a}=(6;2;4);3\vec{b}=(-9;0;12);5\vec{c}=(30;-5;0)$.

Tọa độ của vectơ $2\vec{a}-3\vec{b}-5\vec{c}$ là $(6+9-30;2+5;4-12)=(-15;7;-8)$.

b) Có $-\vec{b}=(3;0;-4)$.

Do đó $\vec{a}\cdot(-\vec{b})=3\cdot 3+1.0+2\cdot(-4)=1$. $(2\vec{a})\cdot\vec{c}=6\cdot 6+2\cdot(-1)+4.0=34$

2.21. Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(-4;3;3), N(4;-4;2)$ và $P(3;6;-1)$.

a) Tìm toạ độ của các vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$, từ đó chứng minh rằng ba điểm M,N,P không thẳng hàng.

b) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}$, từ đó suy ra toạ độ của điểm Q sao cho tứ giác MNPQ là hình bình hành.

c) Tính chu vi của hình bình hành MNPQ

Lời giải

a) Ta có: $\overrightarrow{MN}=(4-(-4);-4-3;2-3)=(8;-7;-1),\overrightarrow{MP}(7;3;-4)$

Vì $\frac{8}{7}\neq\frac{-7}{3}\neq\frac{-1}{4}$ nên hai vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{MP}$ không cùng phương. Do đó, ba điểm $\mathrm{M,N,P}$ không thẳng hàng.

b)Ta có: $\overrightarrow{NM}(-8;7;1),\overrightarrow{NP}(-1;10;-3)$.

Suy ra: $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=((-8)+(-1);7+10;1-3)=(-9;17;-2)$

Gọi tọa độ điểm Q là $\mathrm{Q(x;y;z)}$, ta có: $\overrightarrow{NQ}(x-4;y+4;z-2)$

Để tứ giác MNPQ là hình bình hành thì $\overrightarrow{NM}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{NQ}$

Suy ra: $\begin{cases}x-4=-9\\y+4=17\\z-2=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-5\\y=13\\z=0\end{cases}$. Vậy $Q(-5;13;0)$

c) Ta có: $NM=|\overrightarrow{NM}|=\sqrt{(-8)^2+7^2+1^2}=\sqrt{114}, NP=|\overrightarrow{NP}|=\sqrt{(-1)^2+10^2+(-3)^2}=\sqrt{110}$

Vậy chu vi hình bình hành MNPQ là: $C=2(NP+NM)=2(\sqrt{114}+\sqrt{110})$

2.22. Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1;0;1),B(0;-3;1)$ và $C(4;-1;4)$.

a) Tìm toạ độ trọng tâm của tam giác ABC.

b) Chứng minh rằng $\widehat{BAC}=90^\circ$.

c) Tính $\widehat{ABC}$.

Lời giải

a) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

Khi đó, $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{5}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{4}{3} \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 2 \end{cases}$.

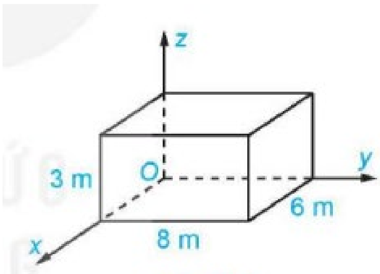
Vậy tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là: $G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3};2\right)$.

b) Ta có: $\overrightarrow{AB}(-1;-3;0), \overrightarrow{AC}(3;-1;3)$

c) Ta có: $BA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}; AC = \sqrt{3^2 + (-1)^2 + 3^2} = \sqrt{19}$

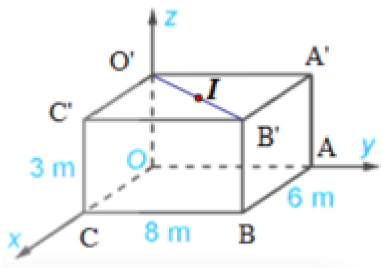
Vì tam giác ABC vuông tại A nên $\tan\widehat{ABC} = \dfrac{AC}{BA} = \dfrac{\sqrt{19}}{\sqrt{10}} \Rightarrow \widehat{ABC} \approx 54^0$

2.23. Một phòng học có thiết kế dạng hình hộp chữ nhật với chiều dài là 8 m, chiều rộng là 6 m và chiều cao là 3 m. Một chiếc đèn được treo tại chính giữa trần nhà của phòng học. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với một góc phòng và mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sàn, đơn vị đo được lấy theo mét $(\text{H}, 2.51)$. Hãy tìm toạ độ của điểm treo đèn.



Hình 2.51

Lời giải

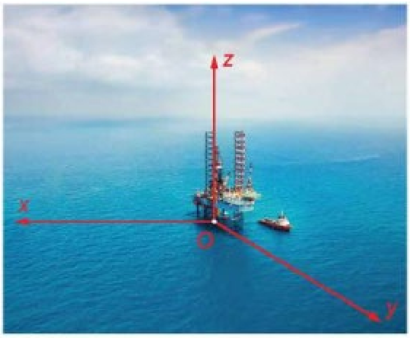


Giả sử căn phòng hình hộp chữ nhật được mô phỏng như hình vẽ.
Khi đó ta có $B'(6;8;3)$ và $O'(0;0;3)$. Gọi I là điểm chính giữa trần nhà của phòng học.
Vì O'A'B'C' là hình chữ nhật nên I là trung điểm của $O'B'$.

Do đó $\begin{cases} x_I = \dfrac{6+0}{2} \\ y_I = \dfrac{8+0}{2} \\ z_I = \dfrac{3+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = 3 \\ y_I = 4. \\ z_I = 3 \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm treo đèn là $(3;4;3)$.

2.24. Trong không gian, xét hệ toạ độ $Oxyz$ có gốc O trùng với vị trí của một giàn khoan trên biển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt biển (được coi là phẳng) với trục Ox hướng về phía tây, trục Oy hướng về phía nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời $(\text{H}.2.52)$. Đơn vị đo trong không gian Oxyz lấy theo kilômét. Một chiếc ra đa đặt tại giàn khoan có phạm vi theo dõi là 30 km. Hỏi ra đa có thể phát hiện được một chiếc tàu thám hiểm có toạ độ là $(25;15;-10)$ đối với hệ toạ độ nói trên hay không? Hãy giải thích vì sao.



Hình 2.52

Lời giải

Để xác định xem ra đa có thể phát hiện được tàu thám hiểm hay không, ta cần xác định khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm.

Theo đề ta có tọa độ của ra đa là $(0;0;0)$, tọa độ của tàu thám hiểm là $(25;15;-10)$.

Khi đó khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là:
$d = \sqrt{(25-0)^2 + (15-0)^2 + (-10-0)^2} = 5\sqrt{38} \approx 30,82$

Vi phạm vi theo dõi của ra đa là 30 km mà khoảng khoảng cách giữa ra đa và tàu thám hiểm là $30,82\text{ km}$ nên ra đa không phát hiện được tàu thám hiểm.

C. CÁC DẠNG TOÁN

DẠNG 1: TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VECTƠ

1. Phương pháp: Sử dụng khái niệm

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{b} = -3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. Tìm tọa độ các vectơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

b) $\overrightarrow{OM} = 5\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}, \overrightarrow{ON} = \vec{i} - 3\vec{k}$. Tìm tọa độ các điểm M, N.

Lời giải

a) $\vec{a}=(2;3;-5)$, $\vec{b}=(0;-3;4)$, $\vec{c}=(-1;-2;0)$.

b) $M(5;-1;2)$, $N(1;0;-3)$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, biết:

a) $\vec{a}=(-3;2;-1),\vec{b}=(3;0;12)$. Tính $\vec{a},\vec{b}$ theo các vecto $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

b) $A(-5;-2;1),B(0;4;-11)$. Tính $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$ theo các vecto $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Lời giải

a) $\vec{a}=(-3;2;-1)\Leftrightarrow\ \vec{a}=-3\vec{i}+2\vec{j}-1\vec{k}$

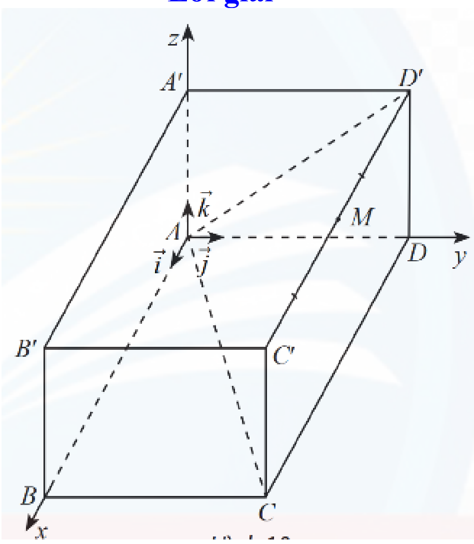
$\vec{b}=(3;0;12)\Leftrightarrow\vec{b}=3\vec{i}+12\vec{k}$.

b) $\overrightarrow{OA}=-5\vec{i}-2\vec{j}+1\vec{k}$

$\overrightarrow{OB}=4\vec{j}-11\vec{k}$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có đỉnh A trùng với gốc O, các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AA'}$ theo thứ tự cùng hướng với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ và có $AB=5,AD=6$, $AA'=9$. Tìm toạ độ các vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AC'}$ và $\overrightarrow{AM}$ với M là trung điểm của cạnh $C'D'$.

Lời giải



Để tìm tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$, ta cần biểu diễn $\overrightarrow{AB}$ theo ba vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.

Do $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{AB}|=AB=5=5|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}$ hay $\overrightarrow{AB}=5\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$.

Tương tự, ta cũng có: $\overrightarrow{AD}=0\vec{i}+6\vec{j}+0\vec{k},\overrightarrow{AA'}=0\vec{i}+0\vec{j}+9\vec{k}$.

Trong hình bình hành $ABCD$, ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=5\vec{i}+6\vec{j}+0\vec{k}$.

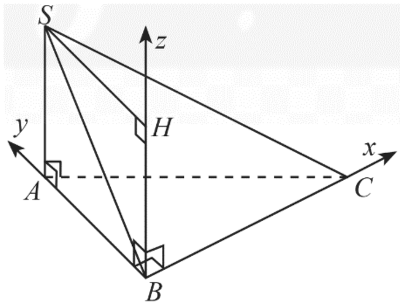
Trong hình bình hành $AA'C'C$, ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=5\vec{i}+6\vec{j}+9\vec{k}$.

Suy ra $\overrightarrow{AB}=(5;0;0);\overrightarrow{AC}=(5;6;0);\overrightarrow{AC'}=(5;6;9)$.

Vì $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD'}\right)=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$

$=\frac{1}{2}(5\vec{i}+6\vec{j}+9\vec{k}+6\vec{j}+9\vec{k})=\frac{5}{2}\vec{i}+6\vec{j}+9\vec{k}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(\frac{5}{2};6;9)$.



Ví dụ 4: Cho tứ diện $SABC$ có ABC là tam giác vuông tại B, $BC=3, BA=2, SA$ vuông góc với mặt phẳng (ABC) và có độ dài bằng 2.

a) Xác định một hệ toạ độ dựa trên gợi ý của hình vẽ.

b) Tìm toạ độ các điểm A, B, C, S.

Lời giải

a) Quan sát hình ảnh xét đây là *hệ trục tọa độ* $Oxyz$ với điểm $B\equiv O$.

b) Vì $B\equiv O\Rightarrow B(0;\ 0;\ 0)$

Do $\overrightarrow{BC}$ cùng hướng với $\vec{i}$ và $|\overrightarrow{BC}|=BC=3=3|\vec{i}|$ nên $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}$ hay $\overrightarrow{BC}=3\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\Leftrightarrow\overrightarrow{OC}=3\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}\Leftrightarrow C(3;0;0)$.

Tương tự, ta cũng có:

$\overrightarrow{BA}=0\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}\Leftrightarrow\overrightarrow{OA}=0\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}\Leftrightarrow A(0;2;0)$

$\overrightarrow{BH'}=0\vec{i}+0\vec{j}+2\vec{k}\Leftrightarrow\overrightarrow{OH}=0\vec{i}+2\vec{j}+0\vec{k}\Leftrightarrow H(0;2;0)$

Trong hình bình hành $BASH$, ta có:

$\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BH}=0\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\Leftrightarrow\overrightarrow{OS}=0\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}\Leftrightarrow S(0;2;2)$.

Vậy $A(0;2;0)$, $B(0;\ 0;\ 0)$, $C(3;0;0)$, $S(0;2;2)$.

DẠNG 2: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA VÉC TƠ, VÀ ĐỘ DÀI CỦA ĐOẠN THẲNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của các phép toán véc tơ.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}=(1;2;3);\vec{b}=(2;2;-1);\vec{c}=(4;0;-4)$. Tìm tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$

Lời giải

Ta có : $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(1;2;3)-(2;2;-1)+2.(4;0;-4)=(1-2+8;2-2+0;3+1-8)=(7;0;-4)$

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-3;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(3;-1;5)$

Tìm tọa độ của vecto $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{a}=(4;-6;6)$; $3\vec{b}=(0;6;-3)$; $-2\vec{c}=(-6;2;-10)$.

Khi đó: $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}=(-2\,;2\,;-7)$.

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$, $B(1;4;3)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

Lời giải

Ta có $AB=\sqrt{(1-1)^2+(4+2)^2+(3+1)^2}=2\sqrt{13}$.

Ví dụ 4: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}=(-2;2;0);\vec{b}=(2;2;0);\vec{c}=(2;2;2)$. Tính giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$.

Lời giải

Ta có: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(-2;2;0)+(2;2;0)+(2;2;2)=(2;6;2)$.

Vậy $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=\sqrt{2^2+6^2+2^2}=2\sqrt{11}$

Ví dụ 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(3;m+1;3),\vec{b}=(1;-3;2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

Lời giải

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}\ (k>0) \Leftrightarrow \begin{cases}3=k\\ m+1=-3k\\ 3=k.2n\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=3\\ m=-10\\ n=\dfrac{1}{2}\end{cases}$. Vậy $m=-10;n=\dfrac{1}{2}$

Ví dụ 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{m}=(4;3;1)$, $\vec{n}=(0;0;1)$. Gọi $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $\left[\vec{m},\vec{n}\right]$ (tích có hướng của hai vectơ $\vec{m}$ và $\vec{n}$). Biết $\left|\vec{p}\right|=15$, tìm tọa độ vectơ $\vec{p}$.

Lời giải

Ta có : $\left[\vec{m};\vec{n}\right]=(3;-4;0)$

Do $\vec{p}$ là vectơ cùng hướng với $\left[\vec{m};\vec{n}\right]$ nên $\vec{p}=k\left[\vec{m};\vec{n}\right]$, $k>0$

Mặt khác: $\left|\vec{p}\right|=15 \Leftrightarrow k.\left|\left[\vec{m},\vec{n}\right]\right|=15 \Leftrightarrow k.5=15 \Leftrightarrow k=3$. Vậy $\vec{p}=(9;-12;0)$.

DẠNG 3: XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM

1. Phương pháp:

Dùng công thức biểu thức tọa độ trung điểm, tọa độ trọng tâm của tam giác…

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-4;3)$ và $B(2;2;7)$. Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của AB, ta có tọa độ điểm I là $\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = 2 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = -1 \\ z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2} = 5 \end{cases}$.

Vậy $I(2;-1;5)$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho tam giác ABC biết $A(5;-2;0), B(-2;3;0)$, $C(0;2;3)$. Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

Lời giải

Gọi $G(x,y,z)$.

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên

$\begin{cases} x = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \\ z = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5+(-2)+0}{3} = 1 \\ y = \dfrac{-2+3+2}{3} = 1 \\ z = \dfrac{0+0+3}{3} = 1 \end{cases}$. Vậy $G(1;1;1)$.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1;3;-7) = (-3-x;1-y;2-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -2 \\ z = 9 \end{cases}$.

Vậy $D(-4;-2;9)$.

Ví dụ 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-5;0)$, $B(-1;1;3)$, $C(3,3,0)$. Tìm tọa độ điểm D trên trục hoành sao cho $AD = BC$.

Lời giải

Vì $D \in Ox$ nên $D(x;0;0)$

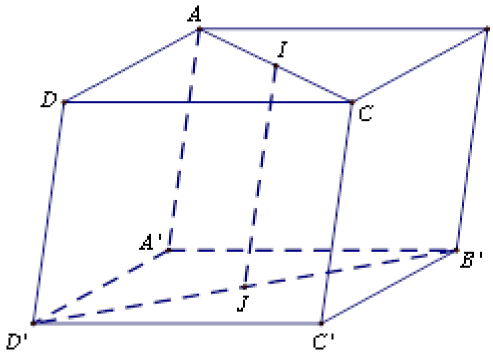
Ta có : $AD = BC \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + 25} = \sqrt{(3+1)^2 + (3-1)^2 + (0-3)^2}$.

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+25}=\sqrt{29} \Leftrightarrow x^2-4x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Vậy $D(0;0;0)$, $D(4;0;0)$

Ví dụ 5 Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết tọa độ các đỉnh $A'(-3;2;1), C(4;2;0), B'(-2;1;1), D(3;5;4)$. Tìm tọa độ điểm A' của hình hộp.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của AC $\Rightarrow I\left(\frac{1}{2};2;\frac{1}{2}\right)$.

Gọi J là trung điểm của $B'D'$ $\Rightarrow J\left(\frac{1}{2};3;\frac{5}{2}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{IJ}=(0;1;2)$.

Ta có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{IJ} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}+3=0 \\ y_{A'}-2=1 \\ z_{A'}-1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'}=-3 \\ y_{A'}=3 \\ z_{A'}=3 \end{cases}$.

Vậy $A'(-3;3;3)$.

Ví dụ 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ biết $A(-2;2;6), B(-3;1;8), C(-1;0;7), D(1;2;3)$. Gọi H là trung điểm của CD, $SH \perp (ABCD)$. Để khối chóp $S.ABCD$ có thể tích bằng $\frac{27}{2}$ (đvtt) thì có hai điểm S_1, S_2 thỏa mãn yêu cầu bài toán. Tìm tọa độ trung điểm I của S_1S_2

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;2), \overrightarrow{AC}=(1;-2;1) \Rightarrow S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\overrightarrow{DC}=(-2;-2;4), \overrightarrow{AB}=(-1;-1;2) \Rightarrow \overrightarrow{DC}=2.\overrightarrow{AB}$ $\Rightarrow ABCD$ là hình thang và

$S_{ABCD}=3S_{ABC}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Vì $V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SH.S_{ABCD}\Rightarrow SH=3\sqrt{3}$

Lại có H là trung điểm của $CD\Rightarrow H\left(0;1;5\right)$

Gọi $S\left(a;b;c\right)\Rightarrow \overrightarrow{SH}=\left(-a;1-b;5-c\right)\Rightarrow \overrightarrow{SH}=k\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=k\left(3;3;3\right)=\left(3k;3k;3k\right)$

Suy ra $3\sqrt{3}=\sqrt{9k^2+9k^2+9k^2}\Rightarrow k=\pm 1$

+) Với $k=1\Rightarrow \overrightarrow{SH}=\left(3;3;3\right)\Rightarrow S\left(-3;-2;2\right)$

+) Với $k=-1\Rightarrow \overrightarrow{SH}=\left(-3;-3;-3\right)\Rightarrow S\left(3;4;8\right)$

Suy ra $I\left(0;1;3\right)$

DẠNG 4: XÁC ĐỊNH TÍCH VÔ HƯỚNG VÀ ỨNG DỤNG

1. Phương pháp: Áp dụng biểu thức tọa độ của tích có hướng và công thức ứng dụng của tích có hướng.

2. Ví dụ

Ví dụ 1: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho vectơ $\vec{u}=\left(3;0;1\right)$ và $\vec{v}=\left(2;1;0\right)$. Tính tích vô hướng $\vec{u}.\vec{v}$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=3.2+0.1+1.0=6$.

Ví dụ 2: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=\left(2;1;2\right)$ và $\vec{b}=\left(1;0;-2\right)$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Lời giải

Ta có: $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\frac{2.1+1.0+2.(-2)}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}.\sqrt{1^2+0^2+(-2)^2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{15}$.

Ví dụ 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{u}=\left(2;3;-1\right)$ và $\vec{v}=\left(5;-4;m\right)$. Tìm m để $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v}=0\Leftrightarrow 10-12-m=0\Leftrightarrow -2-m=0\Leftrightarrow m=-2$.

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho $A\left(2;1;-1\right)$, $B\left(3;0;1\right)$, $C\left(2;-1;3\right)$ và D nằm trên trục Oy và thể tích tứ diện $ABCD$ bằng 5. Tìm tọa độ của điểm D.

Lời giải

Vì $D\in Oy$ nên $D(0;y;0)$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-1;2)$, $\overrightarrow{AC}=\left(0;-2;4\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=\left(0;-4;-2\right)$, $\overrightarrow{AD}=\left(-2;y-1;1\right)$

$V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{6}\left|2-4y\right|$. Vậy $V_{ABCD}=5\Leftrightarrow\left|2-4y\right|=30\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-7\\y=8\end{array}\right.$.

Vậy $D(0;-7;0)$; $D(0;8;0)$

Ví dụ 5: Cho ba điểm $A(5;-1;2)$, $B(1;-3;7)$ và $M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x,y thì ba điểm A,B,M thẳng hàng ?

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-4;-2;5)$, $\overrightarrow{AM}=(x-5;y+1;-1)$.

Để ba điểm A,B,M thẳng hàng thì $\frac{x-5}{-4}=\frac{y+1}{-2}=\frac{-1}{5}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{29}{5}\\ y=\frac{-3}{5}\end{cases}$.

Ví dụ 6: Cho $\vec{u}=(2;-1;1),\vec{v}=(\mathrm{m};3;-1),\vec{\mathrm{w}}=(1;2;1)$. Tìm m để ba vectơ trên đồng phẳng.

Lời giải

Ta có: $\left[\vec{u},\vec{v}\right]=(-2;m+2;m+6)$, $\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{\mathrm{w}}=3m+8$

$\vec{u},\vec{v},\vec{\mathrm{w}}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{u},\vec{v}\right].\vec{\mathrm{w}}=0\Leftrightarrow m=-\frac{8}{3}$

Ví dụ 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho ΔABC có $A(4;0;2)$, $B(1;-4;-2)$ và $C(2;1;1)$. Tính diện tích S của tam giác ABC.

Lời giải

Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}=(-3;-4;-4)$;

$\overrightarrow{AC}=(-2;1;-1)$; $\overrightarrow{BC}=(1;5;3)$.

Vì $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC}=-2+5-3=0$ nên tam giác ABC vuông tại C.

Vậy diện tích tam giác ABC là $S=\frac{1}{2}AC.BC=\frac{1}{2}\sqrt{6}.\sqrt{35}=\frac{\sqrt{210}}{2}$.

Cách 2: Ta có $\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=(8;5;-11)$.

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right\|=\frac{1}{2}\sqrt{8^2+5^2+(-11)^2}=\frac{\sqrt{210}}{2}.$$

Ví dụ 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$ và $C(1;1;3)$. Tính diện tích hình bình hành $ABCD$.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8)$ và $\overrightarrow{AC}=(-1;0;6)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-18;4;-3)$.

Vậy diện tích hình bình hành là $S_{ABCD} = \left|\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right]\right| = \sqrt{(-18)^2 + 4^2 + (-3)^2} = \sqrt{349}$.

Ví dụ 9: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$. Tìm giá trị m để $\left|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

$\overrightarrow{AC}(-1;-3;-2), \overrightarrow{MB}(-2-m;-6-m;2-m)$

$\left|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{m^2 + m^2 + (m-6)^2} = \sqrt{3m^2 - 12m + 36} = \sqrt{3(m-2)^2 + 24} \geq \sqrt{24}.$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $m - 2 = 0$

Vậy $m = 2$ thì $\left|\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{AC}\right|$ nhỏ nhất.

Ví dụ 10: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $A(2;5;1), B(-2;-6;2), C(1;2;-1)$ và điểm $M(m;m;m)$, Tìm giá trị m để $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có:
$\overrightarrow{MA} = (2-m;5-m;1-m), \overrightarrow{MB} = (-2-m;-6-m;2-m), \overrightarrow{MC} = (1-m;2-m;-1-m)$

$MA^2 - MB^2 - MC^2 = -3m^2 - 24m - 20 = 28 - 3(m-4)^2 \leq 28$

Vậy $m = 4$ thì $MA^2 - MB^2 - MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

DẠNG 5: ỨNG DỤNG GIẢI CÁC BÀI TOÁN THỰC TIỄN

Câu 1. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Nga di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500;200;8)$ đến điểm $N(800;300;10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi $Q(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo.

$\overrightarrow{MN}=(300;100;2)$

$\overrightarrow{NQ}=(x-800;y-300;z-10)$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M\to N$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N\to Q$ nên $MN=4NQ$

Suy ra $\overrightarrow{MN}=4\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}300=4(x-800)\\100=4(y-300)\\2=4(z-10)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=875\\y=325\\z=10,5\end{cases}\Rightarrow Q(875;325;10,5)$

Tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(875;325;10,5)$

Câu 2. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu của Mỹ di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1000;600;14)$ đến điểm N trong 30 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo bằng $Q(1400;800;16)$. Xác định tọa độ vị trí điểm N.

Lời giải

Gọi $N(x;y;z)$ là tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo.

$\overrightarrow{MQ}=(400;200;2)$

$\overrightarrow{NQ}=(1400-x;800-y;16-z)$

Vì máy bay giữ nguyên hướng bay nên $\overrightarrow{MQ}$ và $\overrightarrow{NQ}$ cùng hướng.

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và thời gian bay từ $M\to Q$ gấp 4 lần thời gian bay từ $N\to Q$ nên $MQ=4NQ$

Suy ra $\overrightarrow{MQ}=4\overrightarrow{NQ}\Leftrightarrow\begin{cases}400=4(1400-x)\\200=4(800-y)\\2=4(16-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1300\\y=750\\z=15,5\end{cases}\Rightarrow N(1300;750;15,5)$

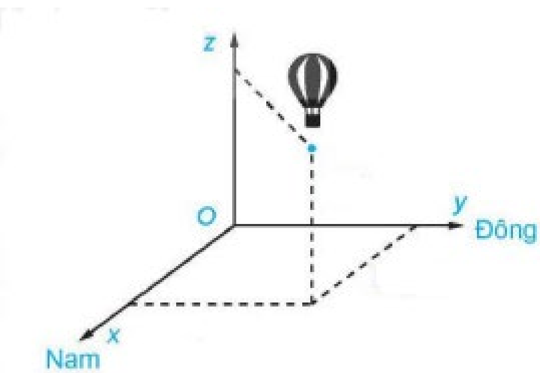
Tọa độ vị trí điểm N là $(1300;750;15,5)$

Câu 3. Một chiếc khinh khí cầu bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu cách điểm xuất phát về phía Đông $10(km)$ và về phía Nam $5(km)$, đồng thời cách mặt đất $400(m)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

a) Chiếc khinh khí cầu có tọa độ $(5;10;0,4)$.

b) Khoảng cách của chiếc khinh khí cầu với vị trí tại điểm xuất phát là:

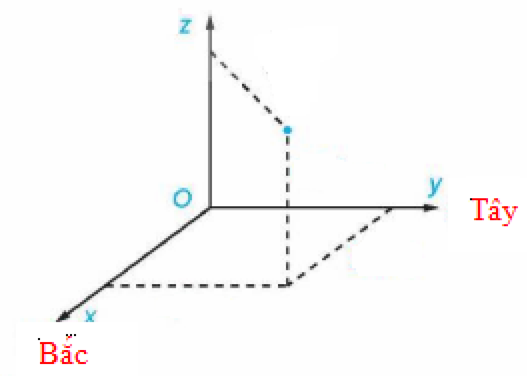
$\sqrt{5^2+10^2+(0,4)^2}\approx 11,2(km)$

Câu 4. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc $50(km)$ và về phía Tây $20(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).

a) Tìm tọa độ của chiếc khinh khí cầu đối với hệ trục tọa độ đã chọn.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát của nó.



Lời giải

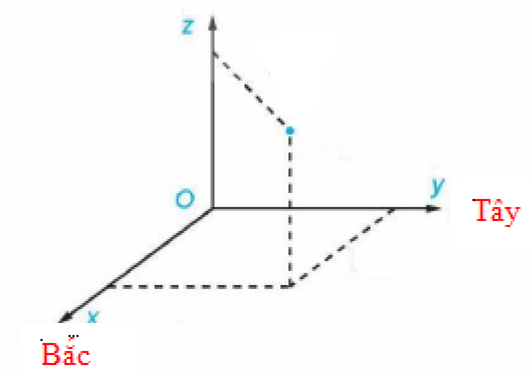
a) Chiếc máy bay có tọa độ $(50;20;1)$.

b) Khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát là: $\sqrt{50^2+20^2+1^2} \approx 53,9(km)$

Câu 5. Hai chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Bắc $20(km)$ và về phía Tây $10(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,7(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Đông $30(km)$ và về phía Nam $25(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Xác định khoảng cách giữa hai chiếc máy bay.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(20;10;0,7)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(-30;-25;1)$.

Do đó khoảng cách giữa hai chiếc máy bay là: $\sqrt{(20+30)^2+(10+25)^2+(0,7-1)^2} \approx 61(km)$

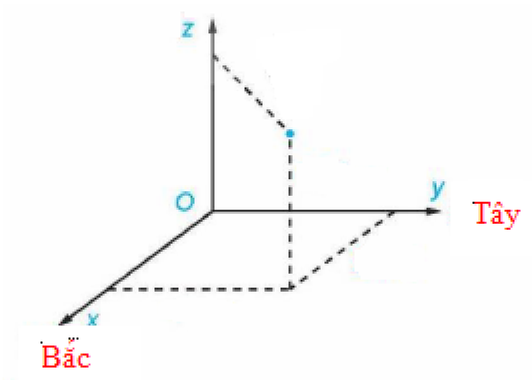
Câu 6. Hai chiếc khinh khí cầu cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $100(km)$ và về phía Nam $80(km)$, đồng thời cách mặt đất $1(km)$. Chiếc khinh khí cầu thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $70(km)$ và về phía Tây $60(km)$, đồng thời cách mặt đất $0,8(km)$.

a) Xác định khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

b) Xác định khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ $(-100;-80;1)$.

Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ $(70;60;0,8)$.

a) khoảng cách của chiếc khinh khí cầu thứ nhất với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$\sqrt{(-100)^2+(-80)^2+1^2} \approx 128(km)$

b) khoảng cách giữa chiếc khinh khí cầu thứ nhất và chiếc khinh khí cầu thứ hai là:

$\sqrt{(-100-70)^2+(-80-60)^2+(1-0,8)^2} \approx 220(km)$

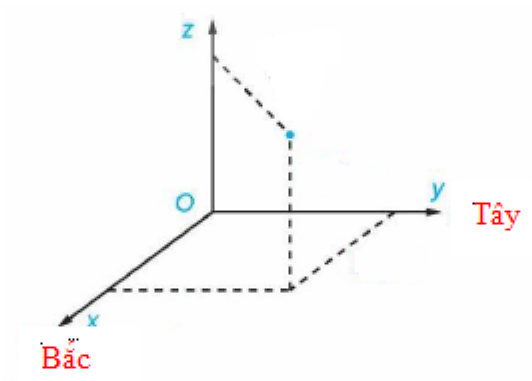
Câu 7. Ba chiếc máy bay không người lái cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát về phía Đông $60(km)$ và về phía Nam $40(km)$, đồng thời cách mặt đất $2(km)$. Chiếc máy bay thứ hai cách điểm xuất phát về phía Bắc $80(km)$ và về phía Tây $50(km)$, đồng thời cách mặt đất $4(km)$. Chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng.

a) Xác định khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai.

b) Xác định khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Chiếc máy bay thứ nhất có tọa độ $(-60;-40;2)$.

Chiếc máy bay thứ hai có tọa độ $(80;50;4)$.

Do chiếc máy bay thứ ba nằm chính giữa của chiếc máy bay thứ nhất và thứ hai, đồng thời ba chiếc máy bay này thẳng hàng nên ở vị trí trung điểm, suy ra chiếc máy bay thứ ba có tọa độ $\left(\frac{-60+80}{2};\frac{-40+50}{2};\frac{2+4}{2}\right)=(10;5;3)$.

a) khoảng cách giữa chiếc máy bay thứ nhất và chiếc máy bay thứ hai:

$$\sqrt{(-60-80)^2+(-40-50)^2+(2-4)^2}\approx 166,4(km)$$

b) khoảng cách của chiếc máy bay thứ ba với vị trí tại điểm xuất phát của nó là:

$$\sqrt{10^2+5^2+3^2}\approx 11,6(km)$$

D. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(-1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;-1)$. **C.** $(2;-1;-3)$. **D.** $(-3;2;-1)$.

Lời giải

Chọn A

$\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}\Rightarrow \vec{a}=(-1;2;-3)$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$ với $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vecto đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Tính tọa độ của vectơ $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

A. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;-1;1)$. **B.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(-1;1;1)$.

C. $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;1;-1)$. **D.** $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}=(1;-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

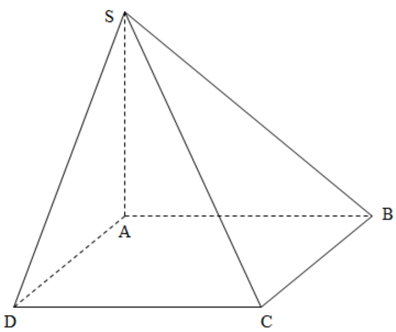
$\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}\Rightarrow \vec{u}=(1;1;-1)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA=4$ và $SA\perp(ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Xác định tọa độ điểm C?

A. $(3;0;0)$ **B.** $(0;0;3)$ **C.** $(0;3;3)$ **D.** $(3;3;0)$

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\vec{i}+3\vec{j}+0\vec{k}$. Suy ra: $C(3;3;0)$

Câu 4: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có $AB=2; AD=3; AA'=4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A’ lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tọa độ của C’ là:

A. $(2;3;0)$. **B.** $(2;3;4)$. **C.** $(0;3;4)$. **D.** $(2;0;4)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:

$\overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$; $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$; $\overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$

$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$; suy ra $C'(2;3;4)$

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB = 8; AD = 6; AA' = 4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Gọi M là trung điểm D'C'. Tọa độ điểm M là:

A. $(4;6;0)$ **B.** $(0;6;4)$ **C.** $(4;6;4)$ **D.** $(4;0;4)$

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$\overrightarrow{AB} = 8\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$; $\overrightarrow{AD} = 0\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$; $\overrightarrow{AA'} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$

Trong hình bình hành ABCD: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 0\vec{k}$

Trong hình bình hành ACC'A': $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} = 8\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$

Vì M là trung điểm của D'C' nên:

$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD'}\right) = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}\right) = 4\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k}$

Vậy $M(4;6;4)$.

Câu 6: Trong hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ và $\vec{v} = (2;-1;1)$. Tính $\vec{u}.\vec{v}$.

A. $\vec{u}.\vec{v} = -3$. **B.** $\vec{u}.\vec{v} = 1$. **C.** $\vec{u}.\vec{v} = 2$. **D.** $\vec{u}.\vec{v} = 5\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A

Từ $\vec{u} = \vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \Rightarrow \vec{u} = (1;3;-2)$.

Do đó, $\vec{u}.\vec{v} = 1.2 + 3.(-1) + (-2).1 = -3$.

Câu 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

A. $(-1;-1;-3)$ **B.** $(3;1;1)$ **C.** $(1;1;3)$ **D.** $(3;3;-1)$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{AB} = (2-1;2-1;1-(-2))$ hay $\overrightarrow{AB} = (1;1;3)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(2;2;1)$. Tính độ dài đoạn thẳng OA.

A. $OA = \sqrt{5}$. **B.** $OA = 5$. **C.** $OA = 3$. **D.** $OA = 9$.

Lời giải

Chọn C

$OA=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;3),\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$. Tính tọa độ vectơ $\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}$.

A. $(0;-1;-5)$. **B.** $(2;-1;1)$. **C.** $(2;3;1)$. **D.** $(0;-1;1)$.

Lời giải

Chọn C

$\vec{a}=(1;2;3),\vec{b}=(1;1;-2)$.

$\vec{u}=\vec{a}+\vec{b}=(2;3;1)$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vecto $\vec{a}=(1;2;3);\vec{b}=(2;2;-1);\vec{c}=(4;0;-4)$. Tọa độ của vecto $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}$ là

A. $\vec{d}=(-7;0;-4)$. **B.** $\vec{d}=(-7;0;4)$. **C.** $\vec{d}=(7;0;-4)$. **D.** $\vec{d}=(7;0;4)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=\left(1-2+2.4;2-2+2.0;3+1+2.(-4)\right)=\left(7;0;-4\right)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\left(2;3;2\right)$ và $\vec{b}=\left(1;1;-1\right)$. Vectơ $\vec{a}-\vec{b}$ có tọa độ là

A. $\left(3;4;1\right)$. **B.** $\left(-1;-2;3\right)$. **C.** $\left(3;5;1\right)$. **D.** $\left(1;2;3\right)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\vec{a}-\vec{b}=\left(2-1;3-1;2+1\right)=\left(1;2;3\right)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=\left(2;-3;3\right)$, $\vec{b}=\left(0;2;-1\right)$, $\vec{c}=\left(3;-1;5\right)$. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}$.

A. $\left(10;-2;13\right)$. **B.** $\left(-2;2;-7\right)$. **C.** $\left(-2;-2;7\right)$. **D.** $\left(-2;2;7\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $2\vec{a}=\left(4;-6;6\right)$, $3\vec{b}=\left(0;6;-3\right)$, $-2\vec{c}=\left(-6;2;-10\right)$

$\Rightarrow \vec{u}=2\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}=\left(-2;2;-7\right)$.

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(-2;1;3)$. Vectơ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ là

A. $\vec{b}=(-4;1;3)$. **B.** $\vec{c}=\left(2;-1;-3\right)$.

C. $\vec{d}=\left(-4;2;3\right)$. **D.** $\vec{e}=\left(-4;-2;3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\vec{c}=(2;-1;-3)=-\vec{a}\Rightarrow \vec{a},\vec{c}$ cùng phương.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;-2;3),B(-1;2;5),C(0;0;1)$. Tìm toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC.

A. $G(0;0;3)$. **B.** $G(0;0;9)$. **C.** $G(-1;0;3)$. **D.** $G(0;0;1)$.

Lời giải

Chọn A

Toạ độ trong tâm G của tam giác ABC bằng

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{1-1+0}{3}=0 \\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{-2+2+0}{3}=0 \Rightarrow G(0;0;3) \\ z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}=\dfrac{3+5+1}{3}=3 \end{cases}$$

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-3;1)$, $B(3;0;-2)$. Tính độ dài đoạn thẳng AB.

A. 26. **B.** 22. **C.** $\sqrt{26}$. **D.** $\sqrt{22}$.

Lời giải

Chọn D

$\overrightarrow{AB}=(2;3;-3)\Rightarrow AB=\sqrt{2^2+3^2+(-3)^2}=\sqrt{22}.$

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3),\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7;n=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $m=4;n=-3$. **C.** $m=1;n=0$. **D.** $m=7;n=-\dfrac{4}{3}$

.

Lời giải

Chọn D

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}$ $(k>0)\Leftrightarrow \begin{cases} 2=k \\ m-1=3k \\ 3=k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=2 \\ m=7 \\ n=-\dfrac{3}{4} \end{cases}$. Vậy $m=7;n=-\dfrac{3}{4}$

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;5;3)$ và $M(2;1;-2)$. Tìm tọa độ của điểm B, biết M là trung điểm của AB.

A. $B\left(\dfrac{1}{2};3;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $B(-4;9;8)$. **C.** $B(5;3;-7)$. **D.** $B(5;-3;-7)$.

Lời giải

Chọn D

Giả sử $B(x_B;y_B;z_B)$.

Vì M là trung điểm của AB nên ta có:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A+x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A+y_B}{2} \\ z_M = \dfrac{z_A+z_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{-1+x_B}{2} \\ 1 = \dfrac{5+y_B}{2} \\ -2 = \dfrac{3+z_M}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 5 \\ y_B = -3 \\ z_B = -7 \end{cases}. \text{ Vậy } B(5;-3;-7).$$

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-1;5), B(5;-5;7), M(x;y;1)$. Với giá trị nào của x, y thì A, B, M thẳng hàng.

A. $x=4; y=7$ **B.** $x=-4; y=-7$ **C.** $x=4; y=-7$ **D.** $x=-4; y=7$

Lời giải

Chọn D

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-4;2), \overrightarrow{AM}=(x-2;y+1;-4)$

A, B, M thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-4}=\dfrac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=7 \end{cases}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $|\vec{u}|=|\vec{v}|$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u}=(2;-2;1)$

Khi đó $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ và $|\vec{v}|=\sqrt{m^2+2^2+(m+1)^2}=\sqrt{2m^2+2m+5}$

Do đó $|\vec{u}|=|\vec{v}| \Leftrightarrow 9=2m^2+2m+5 \Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=1 \\ m=-2 \end{array}\right.$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}(2;0;-1)$. Tìm vectơ $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u}.\vec{v}=20$

A. $(4;0;-2)$ **B.** $(-8;0;4)$ **C.** $(8;0;-4)$ **D.** $(8;0;4)$

Lời giải

Chọn C

Vì $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên $\vec{v}=k.\vec{u}=(2k;0;-k)$, với $k>0$.

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=4k+k=5k=20 \Leftrightarrow k=4$

Vậy $\vec{v}=(8;0;-4)$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;1;0)$ và $\vec{b}=(-1;0;-2)$. Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

A. $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{25}$ **B.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=-\frac{2}{5}$ **C.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{25}$ **D.** $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{2}{5}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\cos(\vec{a},\vec{b})=\frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}=\frac{-2}{\sqrt{5}.\sqrt{5}}=-\frac{2}{5}$.

Câu 22: Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $M(2;3;-1)$, $N(-1;1;1)$ và $P(1;m-1;2)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

A. $m=2$ **B.** $m=-6$ **C.** $m=0$ **D.** $m=-4$

Lời giải

Chọn C

$\overrightarrow{MN}(-3;-2;2);\overrightarrow{NP}(2;m-2;1)$.

Tam giác MNP vuông tại

$N\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=0\Leftrightarrow -6-2(m-2)+2=0\Leftrightarrow m-2=-2\Leftrightarrow m=0$.

Câu 23: Trong không gian Oxy, cho tam giác ABC biết $A(1;3;0)$, $B(-2;-2;0)$, $C(3;1;0)$. Tính cosin góc A của tam giác.

A. $\cos A=\frac{2}{\sqrt{17}}$ **B.** $\cos A=\frac{1}{\sqrt{17}}$ **C.** $\cos A=-\frac{2}{\sqrt{17}}$ **D.** $\cos A=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-5;0)$, $\overrightarrow{AC}=(2;-2;0)$.

Khi đó: $\cos A=\cos\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC}=\frac{-3.2+5.2}{\sqrt{34}.2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Câu 24: Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai vectơ $\vec{i}$ và $\vec{u}=\left(-\sqrt{3};0;1\right)$ là

A. $120°$. **B.** $60°$. **C.** $150°$. **D.** $30°$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{i}=(1;0;0)$.

Vậy: $\cos(\vec{i},\vec{u})=\frac{\vec{i}.\vec{u}}{|\vec{i}|.|\vec{u}|}=\frac{1.\left(-\sqrt{3}\right)+0.0+0.1}{1.\sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2+0^2+1^2}}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\Rightarrow(\vec{i},\vec{u})=150°$.

Câu 25: Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}=(-3;4;0)$, $\vec{b}=(5;0;12)$. Côsin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

A. $\dfrac{3}{13}$. **B.** $\dfrac{5}{6}$. **C.** $-\dfrac{5}{6}$. **D.** $-\dfrac{3}{13}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{-3.5+4.0+0.12}{\sqrt{(-3)^2+4^2+0^2}.\sqrt{5^2+0^2+12^2}}=\dfrac{-3}{13}$.

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(5;1;5)$; $B(4;3;2)$; $C(-3;-2;1)$. Điểm $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tính $a+2b+c$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 6. **D.** -9.

Lời giải

Chọn B

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-1;2;-3)\\ \overrightarrow{BC}=(-7;-5;-1)\end{cases}\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B.

$\Rightarrow$ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là trung điểm của cạnh huyền AC.

$\Rightarrow I\left(1;-\dfrac{1}{2};3\right)$. Vậy $a+2b+c=3$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;1;1), B(5;-1;2), C(3;2;-4)$. Tọa độ điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}$ là

A. $M\left(4;-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$. **B.** $M\left(4;-\dfrac{3}{2};-\dfrac{9}{2}\right)$.

C. $M\left(4;\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$. **D.** $M\left(-4;-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;y;z)$, ta có :

$\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{CA}=\vec{0}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow \overrightarrow{MB}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5-x=\dfrac{1}{2}(3-1)\\ -1-y=\dfrac{1}{2}(2-1)\\ 2-z=\dfrac{1}{2}(-4-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=-\dfrac{3}{2}\\ z=\dfrac{9}{2}\end{cases}\Leftrightarrow M\left(4;-\dfrac{3}{2};\dfrac{9}{2}\right)$$

Câu 28: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các véc tơ $\vec{u}=2\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{v}=(m;2;m+1)$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị của m để $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{v}\right|$.

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có $\vec{u}=(2;-2;1)$

Khi đó $|\vec{u}|=\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=3$ và $|\vec{v}|=\sqrt{m^2+2^2+(m+1)^2}=\sqrt{2m^2+2m+5}$

Do đó $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow 9=2m^2+2m+5\Leftrightarrow m^2+m-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=1\\m=-2\end{array}\right.$

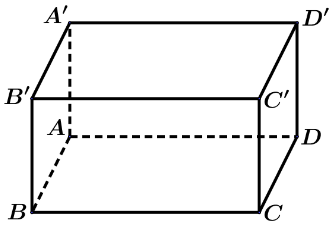
Vậy có 2 giá trị của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 29: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a\neq 0$. Độ dài đoạn thẳng AC' là

A. $|a|$. **B.** $2|a|$. **C.** $3|a|$. **D.** $\frac{3}{2}|a|$.

Lời giải

Chọn C



Ta có $\overrightarrow{AB}=(a;0;0)$; $\overrightarrow{AD}=(0;2a;0)$; $\overrightarrow{AA'}=(0;0;2a)$.

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}\Leftrightarrow\overrightarrow{AC'}=(a;2a;2a)$.

Suy ra $AC=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{a^2+(2a)^2+(2a)^2}=3|a|$.

Vậy độ dài đoạn thẳng $AC'=3|a|$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;3;1)$, $\vec{b}=(-1;5;2)$, $\vec{c}=(4;-1;3)$ và $\vec{x}=(-3;22;5)$. Đẳng thức nào đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}-\vec{c}$. **B.** $\vec{x}=-2\vec{a}+3\vec{b}+\vec{c}$.

C. $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$. **D.** $\vec{x}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$.

Lời giải

Chọn C

Đặt: $\vec{x}=m.\vec{a}+n.\vec{b}+p.\vec{c}$, $m,n,p\in\mathbb{R}$.

$$\Rightarrow(-3;22;5)=m.(2;3;1)+n.(-1;5;2)+p.(4;-1;3)\Rightarrow\begin{cases}2m-n+4p=-3\\3m+5n-p=22\\m+2n+3p=5\end{cases}\ (I).$$

Giải hệ phương trình (I) ta được: $\begin{cases}m=2\\n=3\\p=-1\end{cases}$.

Vậy $\overrightarrow{x}=2\overrightarrow{a}+3\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$.

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3)$, $\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m, n để các vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7$; $n=-\dfrac{3}{4}$. **B.** $m=7$; $n=-\dfrac{4}{3}$. **C.** $m=4$; $n=-3$. **D.** $m=1$; $n=0$.

Lời giải

Chọn A

Các vectơ $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ cùng hướng khi và chỉ khi tồn tại số thực dương k sao cho $\overrightarrow{a}=k\overrightarrow{b}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2=k \\ m-1=3k \\ 3=k(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=k \\ m-1=6 \\ 3=2(-2n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=k \\ m=7 \\ n=\dfrac{-3}{4} \end{cases}.$$

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;1)$, $B(0;1;2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là

A. $M(4;-5;0)$. **B.** $M(2;-3;0)$. **C.** $M(0;0;1)$. **D.** $M(4;5;0)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$; $\overrightarrow{AB}=(-2;3;1)$; $\overrightarrow{AM}=(x-2;y+2;-1)$.

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2}=\frac{y+2}{3}=\frac{-1}{1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$.

Vậy $M(4;-5;0)$.

Câu 2: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1;0;3)$, $B(2;3;-4)$, $C(-3;1;2)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $ABCD$ là hình bình hành.

A. $D(-4;-2;9)$. **B.** $D(-4;2;9)$. **C.** $D(4;-2;9)$. **D.** $D(4;2;-9)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $D(x;y;z)$. Để $ABCD$ là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow (1;3;-7)=(-3-x;1-y;2-z) \Leftrightarrow \begin{cases} x=-4 \\ y=-2 \\ z=9 \end{cases} \Leftrightarrow D(-4;-2;9).$$

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho 2 điểm $B(1;2;-3)$, $C(7;4;-2)$. Nếu điểm E thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB}$ thì tọa độ điểm E là:

A. $\left(3;\frac{8}{3};-\frac{8}{3}\right)$ **B.** $\left(\frac{8}{3};3;-\frac{8}{3}\right)$. **C.** $\left(3;3;-\frac{8}{3}\right)$ **D.** $\left(1;2;\frac{1}{3}\right)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $E(x;y;z)$

Ta có: $\overrightarrow{CE}=(x-7;y-4;z+2)$; $2\overrightarrow{EB}=(2-2x;4-2y;-6-2z)$

$$\overrightarrow{CE}=2\overrightarrow{EB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-7=2-2x \\ y-4=4-2y \\ z+2=-6-2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=\frac{8}{3} \\ z=-\frac{8}{3} \end{cases}$$

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;1;-2)$ và $B(3;-1;1)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}$.

A. $M(9;-5;7)$. **B.** $M(9;5;7)$. **C.** $M(-9;5;-7)$. **D.** $M(9;-5;-5)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có: $\overrightarrow{AM}=(x;y-1;z+2)$; $\overrightarrow{AB}=(3;-2;3)$.

$$\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y-1=-6\\z+2=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=9\\y=-5\\z=7\end{cases}.$$ Vậy $M(9;-5;7)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1),\overrightarrow{AB}=(1;3;1)$ thì tọa độ của điểm B là:

A. $B(2;5;0)$. **B.** $B(0;-1;-2)$. **C.** $B(0;1;2)$. **D.** $B(-2;-5;0)$

Lời giải

Chọn A

Gọi $B(x;y;z)$,ta có $\overrightarrow{AB}=(x-1;y-2;z+1)$

mà $\overrightarrow{AB}=(1;3;1)\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=5\\z=0\end{cases}\Rightarrow B(2;5;0)$

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A=(1;0;1)$, $B=(2;1;2)$ và $D=(1;-1;1)$. Tọa độ điểm C là

A. $(2;0;2)$. **B.** $(2;2;2)$. **C.** $(2;-2;2)$. **D.** $(0;-2;0)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi tọa độ điểm C là $(x;y;z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Ta có $\overrightarrow{DC}=(x-1;y+1;z-1)$ và $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$

Suy ra $\begin{cases}x-1=1\\y+1=1\\z-1=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2\\y=0\\z=2\end{cases}$

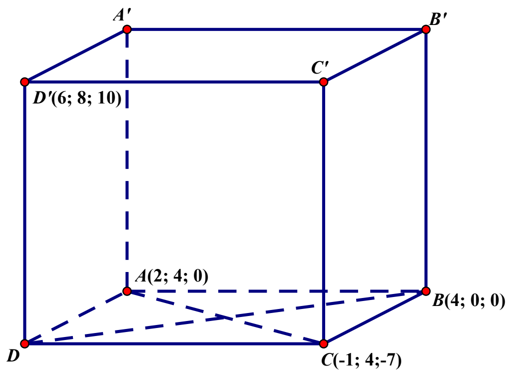
Vậy tọa độ điểm C là $(2;0;2)$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(2;4;0)$, $B(4;0;0)$, $C(-1;4;-7)$ và $D'(6;8;10)$. Tọa độ điểm B' là

A. $B'(8;4;10)$. **B.** $B'(6;12;0)$. **C.** $B'(10;8;6)$. **D.** $B'(13;0;17)$.

Lời giải

Chọn D



Giả sử $D(a;b;c)$, $B'(a';b';c')$

Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O\left(\frac{1}{2};4;\frac{-7}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=8 \\ c=-7 \end{cases}$.

Vậy $\overrightarrow{DD'}=(9;0;17)$, $\overrightarrow{BB'}=(a'-4;b';c')$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên

$\overrightarrow{DD'}=\overrightarrow{BB'} \Rightarrow \begin{cases} a'=13 \\ b'=0 \\ c'=17 \end{cases}$. Vậy $B'(13;0;17)$.

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(1;0;1)$, $B(2;1;2)$, $D(1;-1;1)$, $C'(4;5;-5)$. Tính tọa độ đỉnh A' của hình hộp.

A. $A'(4;6;-5)$. **B.** $A'(2;0;2)$. **C.** $A'(3;5;-6)$. **D.** $A'(3;4;-6)$.

Lời giải

Chọn C

Theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$.

Lại có: $\overrightarrow{AC'}=(3;5;-6)$, $\overrightarrow{AB}=(1;1;1)$, $\overrightarrow{AD}=(0;-1;0)$.

Do đó: $\overrightarrow{AA'}=(2;5;-7)$.

Suy ra $A'(3;5;-6)$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2;11;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{BA}=(-1;-3;4) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{26}; \overrightarrow{BC}=(-6;8;2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

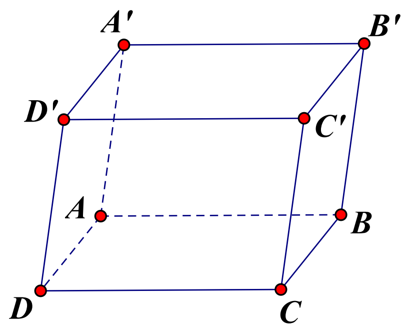
Suy ra : $\frac{DA}{DC}=\frac{BA}{BC} \Rightarrow \overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DA} \Rightarrow D\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(-3;0;0)$, $B(0;2;0)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm C'.

A. $C'(10;4;4)$. **B.** $C'(-13;4;4)$. **C.** $C'(13;4;4)$. **D.** $C'(7;4;4)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;2;0)$; $\overrightarrow{AD}=(3;0;1)$; $\overrightarrow{AA'}=(4;2;3)$.

Mà $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{AC'}=(10;4;4) \Rightarrow \begin{cases} x=10+3 \\ y=4-0 \\ z=4-0 \end{cases} \Rightarrow C'(13;4;4)$.

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho véc tơ $\vec{u}=(1;1;-2)$, $\vec{v}=(1;0;m)$. Tìm tất cả giá trị của m để góc giữa $\vec{u}$, $\vec{v}$ bằng 45°.

A. $m=2$. **B.** $m=2\pm\sqrt{6}$. **C.** $m=2-\sqrt{6}$. **D.** $m=2+\sqrt{6}$.

Lời giải

$$+\ (\vec{u},\vec{v})=45^\circ \Leftrightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1-2m}{\sqrt{6}.\sqrt{1+m^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3(m^2+1)}=1-2m \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2m\ge 0 \\ 3m^2+3=1-4m+4m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\le \frac{1}{2} \\ m^2-4m-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow m=2-\sqrt{6}.$$

Câu 12: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;0), B(2;0;-3)$. Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-\frac{1}{2}$ có tọa độ là:

A. $M\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};-1\right)$. **B.** $M\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};-2\right)$.

C. $M\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3};1\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3};-2\right)$.

Lời giải

Chọn A

Giả sử $M(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Vì M chia đoạn AB theo tỉ số $k=-\frac{1}{2}$ nên ta có: $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{MB}$.

$$\Rightarrow\begin{cases}1-x=-\frac{1}{2}(2-x)\\1-y=-\frac{1}{2}(0-y)\\-z=-\frac{1}{2}(-3-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{4}{3}\\y=\frac{2}{3}\\z=-1\end{cases}.$$

Vậy $M\left(\frac{4}{3};\frac{2}{3};-1\right)$.

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho vectơ $\vec{u}(2;0;-1)$. Tìm vectơ $\vec{v}$ biết $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ và $\vec{u}.\vec{v}=20$.

A. $(4;0;-2)$. **B.** $(-8;0;4)$. **C.** $(8;0;-4)$. **D.** $(8;0;4)$.

Lời giải

Chọn C

Vì $\vec{v}$ cùng phương với $\vec{u}$ nên $\vec{v}=k.\vec{u}=(2k;0;-k)$, với $k>0$.

Ta có $\vec{u}.\vec{v}=4k+k=5k=20\Leftrightarrow k=4$.

Vậy $\vec{v}=(8;0;-4)$.

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;m-1;3),\vec{b}=(1;3;-2n)$. Tìm m,n để các vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng hướng.

A. $m=7;n=-\frac{3}{4}$. **B.** $m=4;n=-3$. **C.** $m=1;n=0$. **D.** $m=7;n=-\frac{4}{3}$.

.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \vec{a}=k\vec{b}\ (k>0)\Leftrightarrow\begin{cases}2=k\\m-1=3k\\3=k(-2n)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\m=7\\n=-\frac{3}{4}\end{cases}$. Vậy $m=7;n=-\frac{3}{4}$.

Câu 15: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$, $D(1;1;1)$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Toạ độ điểm G là trung điểm MN là:

A. $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Vì M là trung điểm của AB nên $M\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

N là trung điểm của CD nên $N\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$. Do đó $G\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn điểm O, A, B, C sao cho O, A, B không thẳng hàng. Tập hợp những điểm M sao cho $\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MO}-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=0$ là

A. một mặt phẳng. **B.** một điểm.
C. tập hợp rỗng. **D.** một đường thẳng.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của OB

Ta có:

$\overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MO}-2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{MO}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}\right)=0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MC}\left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{AB}\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MC}.\overrightarrow{AI}=0 \Leftrightarrow MC\perp AI$.

Vậy tập hợp những điểm M là mặt phẳng qua C và vuông góc với AI.

Câu 17: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Tìm tất cả các điểm D sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}$

A. $D(8;7;-1)$. **B.** $\left[\begin{array}{l}D(-8;-7;1)\\D(12;1;-3)\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}D(8;7;-1)\\D(-12;-1;3)\end{array}\right.$. **D.** $D(-12;-1;3)$

.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC).d(A,BC) \Leftrightarrow S_{ABCD}=\frac{1}{2}(AD+BC).\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC}$.

$\Leftrightarrow 3S_{\Delta ABC}=\frac{(AD+BC).S_{\Delta ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC=AD+BC \Leftrightarrow AD=2BC$.

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)$, $\overrightarrow{AD}=(x_D+2;y_D-3;z_D-1)$.

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases}x_D+2=-10\\y_D-3=-4\\z_D-1=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_D=-12\\y_D=-1\\z_D=3\end{cases}$. Vậy $D(-12;-1;3)$.

E. TRẢ LỜI ĐÚNG SAI

Câu 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1;0;1), B(2;1;2), C'(4;5;-5), D(1;-1;1)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

A. $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+2\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$

B. $C(2;0;4)$

C. $B'(4;6;-5)$

D. $D'(4;4;6)$

Lời giải

A. Đúng

Ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'A}$ và $\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{CA}$

Suy ra: $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+2\overrightarrow{C'C}=2\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$ (đpcm)

B. Sai

$C(2;0;2)$

C. Đúng

D. Sai

$D'(3;4;-6)$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vectơ đơn vị, điểm $M(2;0;1), N(3;2;4)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

A. $\overrightarrow{MN}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

B. $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}+\vec{k}$

C. $\overrightarrow{ON}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$

D. $\left|\overrightarrow{NO}\right|=\sqrt{27}$

Lời giải

A. $\overrightarrow{MN}=1\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ nên A **Sai**

B. Đúng

C. Đúng

D. $\left|\overrightarrow{NO}\right|=\sqrt{2^2+3^2+4^2}=\sqrt{29}$ nên D **Sai**

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ giả sử $\vec{u}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$; $\vec{a}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\vec{u}=(2;0;-1)$

B. $\vec{a}=(-1;2;-3)$

C. $\vec{u}+\vec{v}=(1;2;3)$

D. $\vec{u}.\vec{v}=-1$

Lời giải

A. Đúng

B. Đúng

C. $\vec{u}+\vec{v}=(1;5;-4)$ **nên C sai**

D. $\vec{u}.\vec{v}=2.(-1)+(-1).(-3)=1$ **nên D Sai**

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA=4$ và $SA\perp(ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $A(0;0;0)$

B. $B(0;3;0)$

C. $C(3;0;0)$

D. $S(4;0;0)$

Lời giải

A. Đúng

B. Đúng

C. Sai

Ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\vec{i}+3\vec{j}+0\vec{k}$. Suy ra: $C(3;3;0)$

D. Sai

$S(0;0;4)$

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có $AB=2; AD=3; AA'=4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AA'}=-4\vec{k}$

B. $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}$

C. $\overrightarrow{AD}=3\vec{i}$

D. $C'(2;3;4)$

Lời giải

A. Sai

$\overrightarrow{AA'}=4\vec{k}$

B. Đúng

C. Sai

$\overrightarrow{AD}=3\vec{j}$

D. Đúng

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$; $\overrightarrow{AD}=0\vec{i}+3\vec{j}+0\vec{k}$; $\overrightarrow{AA'}=0\vec{i}+0\vec{j}+4\vec{k}$

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$; suy ra $C'(2;3;4)$

Câu 6: Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 3; SA vuông góc với đáy và $SA = 4$. Chọn hệ trục Oxyz sao cho gốc O trùng với A; các điểm B; D; S lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$

B. $\overrightarrow{AS} = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 4\vec{k}$

C. $\overrightarrow{AC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$

D. $\overrightarrow{SC} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$

Lời giải

A. Sai

$\overrightarrow{AD} = 3\vec{i} + 3\vec{j} + 0\vec{k}$

B. Đúng

C. Đúng

D. Sai

$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AS} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 4\vec{k}$

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$; $D(0;2a;0)$, $A'(0;0;2a)$ với $a \neq 0$. Các khẳng định sau **đúng** hay **sai**?

A. $\overrightarrow{AB} = (a;0;0)$

B. $\overrightarrow{AA'} = (0;0;a)$

C. $\overrightarrow{AC'} = (a;2a;2a)$

D. $\overrightarrow{AD} = (a;2a;0)$

Lời giải

A. Đúng

B. Sai

$\overrightarrow{AA'} = (0;0;2a)$

C. Đúng

D. Sai

$\overrightarrow{AD} = (0;2a;0)$

Câu 8: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-1;2)$ và $B(-1;3;0)$.

A. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng $(0;1;1)$.

B. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB} = (2;-4;2)$.

C. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2;4;-2)$

Lời giải

A. Đúng. Vì $\begin{cases} x_0 = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{1-1}{2} = 0 \\ y_0 = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{-1+3}{2} = 1 \\ z_0 = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{2+0}{2} = 1 \end{cases}$. Vậy tọa độ trung điểm là $(0;1;1)$.

B. Sai. Vì $\overrightarrow{AB} = (-2;4;-2)$.

C. Sai. Vì $\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

D. Đúng. Vì $\begin{cases} \overrightarrow{OA} = (1;-1;2) \\ \overrightarrow{OB} = (-1;3;0) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (-2;4;-2)$

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2;3;2)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$.

A. Tọa độ vectơ $\vec{a} - \vec{b} = (1;2;3)$.

B. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 6.

C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương.

D. Cosin góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\dfrac{\sqrt{51}}{51}$

Lời giải

A. Đúng. Vì $\vec{a} - \vec{b} = (2-1;3-1;2-(-1)) = (1;2;3)$.

B. Sai. Vì $\vec{a}\vec{b} = 2.1 + 3.1 - 2.1 = 3$

C. Đúng. Vì $\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{1} \neq \dfrac{2}{-1}$.

D. Sai. Vì $\cos(\vec{a};\vec{b}) = \dfrac{2.1+3.1-2.1}{\sqrt{2^2+3^2+2^2}.\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \dfrac{3}{\sqrt{51}}$

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho hai véctơ $\vec{a} = (-2;1;-3), \vec{b} = (-1;-3;2)$ và điểm $A(4;6;-3)$.

A. Tọa độ vectơ $\vec{a} - 2\vec{b} = (0;1;-1)$.

B. Tọa độ điểm $B(2;7;-6)$ thì $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương hướng.

D. Góc giữa vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $120°$.

Lời giải

A. Sai. Vì $\vec{a} - 2\vec{b} = (0;7;-7)$.

B. Đúng. Vì $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = x_B - 4 \\ 1 = y_B - 6 \\ -3 = z_B + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 7 \\ z_B = -6 \end{cases} \Rightarrow B(2;7;-6)$.

C. Sai. Vì $\dfrac{-2}{-1} \neq \dfrac{1}{-3} \neq \dfrac{-3}{2}$.

D. Đúng. Vì $\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{-2.(-1)+(-3).1+(-3).2}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}.\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}}=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow(\vec{a},\vec{b})=120°$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0),\vec{c}=(1;1;1)$.

A. Độ dài vectơ $\vec{a}$ bằng $\sqrt{2}$.

B. Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{a}$.

C. Vectơ $\vec{b}$ vuông góc với $\vec{c}$.

D. Tọa độ vectơ $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$ bằng $(-2;4;-1)$.

Lời giải

A. Đúng. Vì $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{(-1)^2+1^2+0}=\sqrt{2}$.

B. Đúng. Vì $\vec{a}\vec{b}=(-1).1+1.1+0=0$

C. Sai. Vì $\vec{b}\vec{c}=1.1+1.1+0.1=2$.

D. Sai. Vì $3\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}=(-2;4;-1)$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0),\vec{c}=(1;1;1)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

A. $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{2}$.

B. $\vec{b}\perp\vec{a}$.

C. $\vec{b}\perp\vec{c}$.

D. $2\left|\vec{c}\right|=6.$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. S	D.S

- Ta có: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(-1\right)^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$ nên A đúng
- $\vec{b}.\vec{a}=0$ nên $\vec{b}\perp\vec{a}$. Suy ra B đúng
- $\vec{b}.\vec{c}=1.1+1.1+0.1=2\Rightarrow\vec{b}$ không vuông góc với $\vec{c}$.
- $2\left|\vec{c}\right|=2\sqrt{3}$ nên D sai

Câu 13: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4;2;1)$, $B(2;1;3)$, $C(-1;3;-2)$.

A. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\dfrac{5}{3};2;\dfrac{2}{3}\right)$.

B. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB bằng $\left(3;\dfrac{3}{2};2\right)$

C. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì tọa độ điểm $D=(1;4;-4)$.

D. Ba điểm A,B,C thẳng hàng.

Lời giải

A. Đúng. Tọa độ trọng tâm tam giác ABC $\left(\dfrac{4+2-1}{3};\dfrac{2+1+3}{3};\dfrac{1+3-2}{3}\right)=\left(\dfrac{5}{3};2;\dfrac{2}{3}\right)$.

B. Đúng. Tọa độ trung điểm đoạn thẳng AB $\left(\frac{4+2}{2};\frac{2+1}{2};\frac{1+3}{2}\right)=\left(3;\frac{3}{2};2\right)$.

C. Đúng. Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}2-4=-1-x_D\\1-2=3-y_D\\3-1=-2-z_D\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=1\\y_D=4\\z_D=-4\end{cases}\Rightarrow D(1;4;-4).$$

D. Sai. Vì $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(-2;-1;2)\\\overrightarrow{AC}=(-5;1;-3)\end{cases}$. Ta có: $\frac{-2}{-5}\neq\frac{-1}{1}\neq\frac{2}{-3}\Rightarrow A,B,C$ không thẳng hàng.

Câu 14: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3;5;-1)$, $B(7;x;1)$, $C(9;2;y)$.

A. Ba điểm A,B,C thẳng hàng thì $x+y=5$.

B. Điểm $G\left(\frac{19}{3};\frac{8}{3};3\right)$ là trọng tâm tam giác ABC thì $x=1;y=3$.

C. Tam giác ABC vuông tại A thì $x=13,y=-1$.

D. Tích vô hướng của $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-3x+2y+41$.

Lời giải

A. Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;x-5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1)$

Để ba điểm A, B, C thẳng hàng $\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\begin{cases}4=k.6\\x-5=k(-3)\\2=k(y+1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{2}{3}\\x=3\\y=2\end{cases}$.

Vậy $x+y=5$.

B. Đúng. Ta có : $\begin{cases}\frac{3+7+9}{3}=\frac{19}{3}\\\frac{5+x+2}{3}=\frac{8}{3}\\\frac{-1+1+y}{3}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\end{cases}$.

C. Đúng.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(4;x-5;2)$, $\overrightarrow{AC}=(6;-3;y+1)$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24+(x-5)(-3)+2(y+1)$

Với $\begin{cases}x=13\\y=-1\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

D. Đúng. Vì $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=24+(x-5)(-3)+2(y+1)=-3x+2y+41$.

Câu 15: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;2;3)$; $\vec{b}=(2;2;-1)$, $\vec{c}=(4;0;-4)$.

A. $3\vec{a}=(1;6;9)$.

B. $\vec{a}+\vec{b}=(3;4;2)$.

C. $\vec{a}-\vec{c}=(3;-2;-7)$.

D. $\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(7;0;-4)$.

Lời giải

A. Sai. Vì $3\vec{a}=3(1;2;3)=(3;6;9)$

B. Đúng. Vì $\vec{a}+\vec{b}=(1+2;2+2;3-1)=(3;4;2)$.

C. Sai. Vì $\vec{a}-\vec{c}=(1-4;2-0;3+4)=(-3;2;7)$.

D. Đúng. Vì $\vec{a}-\vec{b}+2\vec{c}=(1-2+2.4;2-2+2.0;3-(-1)+2.(-4))=(7;0;-4)$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=-\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k};\ \vec{b}=2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$.

A. Tọa độ vectơ $\vec{a}=(-1;3;4)$.

B. Cosin góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng $\frac{1}{2}$.

C. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng 14.

D. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

A. Đúng. Dựa theo định nghĩa suy ra $\vec{a}=(-1;3;4)$.

B. Sai. Vì $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{-1\cdot 2+3\cdot 4+4\cdot 1}{\sqrt{(-1)^2+3^2+4^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+1^2}}=\dfrac{\sqrt{546}}{39}$.

C. Đúng. Vì $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1.2+3.4+4.1=14$.

D. Sai. Vì tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ khác 0.

Câu 17: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;1;-2),\vec{b}=(1;2;-4),\vec{c}=(-1;-3;3)$.

A. $\vec{a}=2\vec{b}$.

B. $|\vec{a}|=3|\vec{b}|$.

C. $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$

D. $2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}=(-4;-19;23)$.

Lời giải

A. Sai. Vì $\vec{a},\vec{b}$ không cùng hướng.

B. Sai. Vì $\begin{cases}|\vec{a}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3\\ |\vec{b}|=\sqrt{1+2^2+(-4)^2}=\sqrt{21}\end{cases}\Rightarrow|\vec{a}|=\dfrac{3\sqrt{21}}{21}|\vec{b}|$

C. Đúng. Vì $\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 1+1.2+(-2).(-4)=12$.

D. Đúng.

Ta có $2\vec{a}=(4;2;-4),-3\vec{b}=(-3;-6;12),5\vec{c}=(-5;-15;15)$

Vậy $2\vec{a}-3\vec{b}+5\vec{c}=(-4;-19;23)$.

Câu 18: Trong không gian $Oxyz$, cho bốn vectơ $\vec{a}=(2;3;1),\vec{b}=(-1;5;2),\vec{c}=(4;-1;3)$ và $\vec{x}=(-3;22;5)$.

A. $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$.

B. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương.

C. Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{c}$ không cùng phương.

D. Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ vuông góc với nhau.

Lời giải

A. Đúng.

Đặt $\vec{x}=m\cdot\vec{a}+n\cdot\vec{b}+p\cdot\vec{c}\Leftrightarrow\begin{cases}2m-n+4p=-3\\3m+5n-p=22\\m+2n+3p=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=2\\n=3\\p=-1\end{cases}$.

Vậy $\vec{x}=2\vec{a}+3\vec{b}-\vec{c}$.

B. Sai. Vì $\frac{2}{-1}=\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$.

C. Sai. Vì $\frac{2}{-1}=\frac{3}{5}=\frac{1}{2}$.

D. Sai. $\vec{a}.\vec{b}=2\cdot(-1)+3\cdot5+1\cdot2=15$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$. Biết $A(-1;1;2),B(1;0;3),C(0;2;-2)$.

A. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{BC}=(-1;2;-5)$.

B. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

C. Tọa độ điểm D là $D(-2;3;-3)$.

D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AD}=-\vec{i}+2\vec{j}+5\vec{k}$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S

□ $\overrightarrow{BC}=(-1;2;-5)$ nên A đúng

□ $\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)$ nên B đúng

□ Gọi tọa độ điểm D là $(x;y;z)$

$\overrightarrow{AB}=(2;-1;1)$

$\overrightarrow{DC}=(-x;2-y;-2-z)$

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$

Suy ra $\begin{cases} -x = 2 \\ 2 - y = -1 \\ -2 - z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = -3 \end{cases}$

Vậy tọa độ điểm D là $D(-2;3;-3)$ vậy C đúng

- $\overrightarrow{AD} = -\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k}$ nên D sai

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, biết rằng $A(2;1;0), C(0;3;0), C'(-1;2;1), D'(0;-2;0)$.

A. Tọa độ các điểm A', B' là $A'(1;0;-1), B'(0;4;2)$.

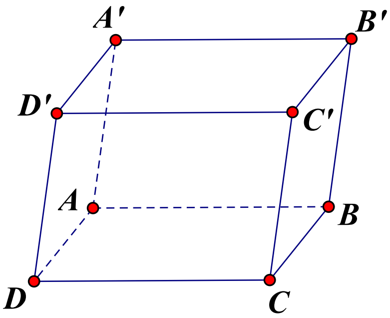
B. Tọa độ các điểm B, D là $B(1;5;1), D(1;-1;-1)$.

C. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$.

D. Tọa độ vectơ $\overrightarrow{AB}$ là $\overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Lời giải

A. S	**B. Đ**	**C. Đ**	**D. Đ**



- Gọi tọa độ điểm A' là $(x;y;z)$

$\overrightarrow{A'C'} = (-1-x; 2-y; 1-z)$

$\overrightarrow{AC} = (-2;2;0)$

Vì $A'C'CA$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC}$

Suy ra $\begin{cases} -1 - x = -2 \\ 2 - y = 2 \\ 1 - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \Rightarrow A'(1;0;1) \\ z = 1 \end{cases}$ nên A sai

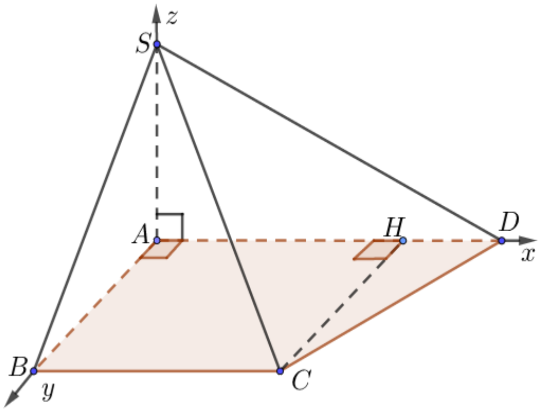
Làm tương tự ta có: $B'(0;4;2)$

- $B(1;5;1); D(1;-1;-1)$ nên B đúng

- $\overrightarrow{AB} = (1;4;1) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$ nên C đúng

- $\overrightarrow{B'D} = (1;-5;-3) \Rightarrow \overrightarrow{B'D} = \vec{i} - 5\vec{j} - 3\vec{k}$ nên D đúng

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thang vuông tại A và B, $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, $SA = 2a$. Gọi H là hình chiếu điểm C trên cạnh AD.



A. Tọa độ các điểm A, B là $A(0;0;0), B(a;a;0)$.

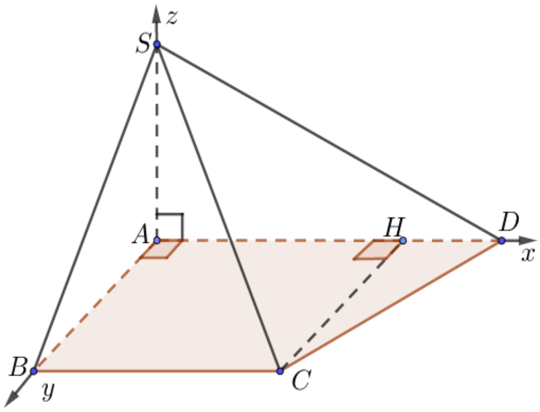
B. Tọa độ các điểm C, D là $C(a;a;0), D(2a;0;0)$.

C. Tọa độ điểm S là $S(0;0;2a)$.

D. Tọa độ điểm H là $H(a;0;0)$.

Lời giải

A. S	B. Đ	C. Đ	D. Đ

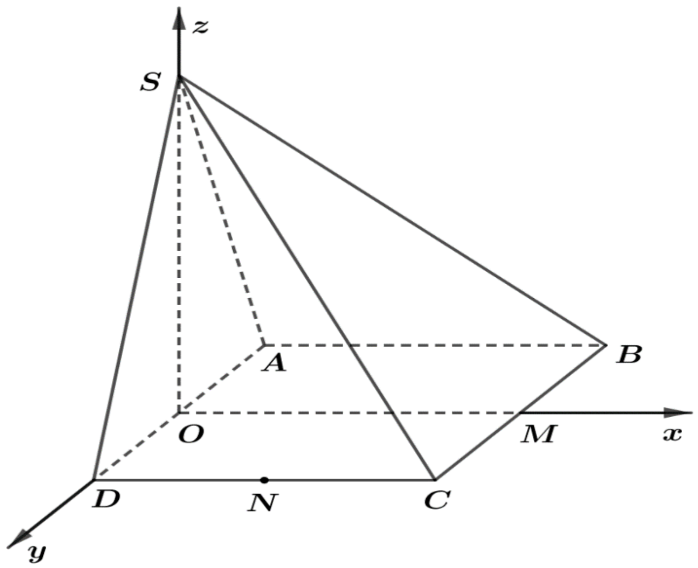


Dễ tính được $AB = BC = AH = a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$, $\overrightarrow{AB} = \vec{i}, \overrightarrow{AH} = \vec{j}, \overrightarrow{AS} = 2\vec{k}$

Khi đó ta có $A(0;0;0), B(a;a;0), C(a;a;0), D(2a;0;0), S(0;0;2a), H(a;0;0)$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có các cạnh bằng 1, SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng với đáy. Gọi O, M và N lần lượt là trung điểm của AD, BC và CD. Thiết lập hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.



A. Tọa độ các điểm A,B là $A\left(0;-\dfrac{1}{2};0\right),B\left(1;-\dfrac{1}{2};0\right)$.

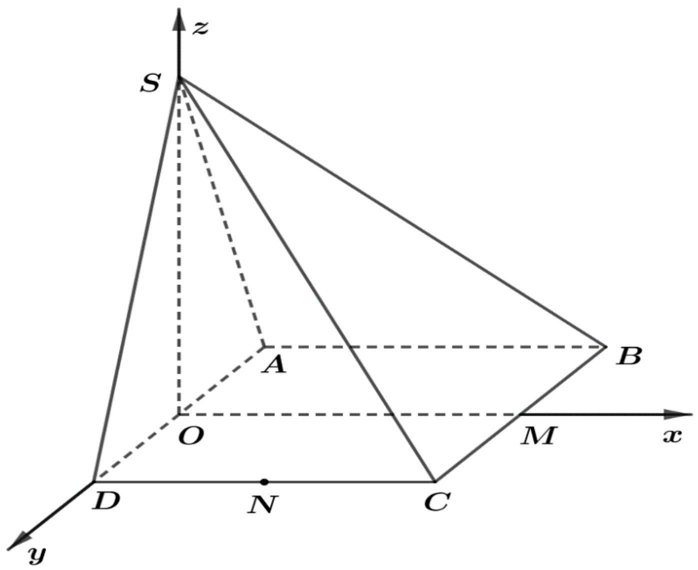
B. Tọa độ các điểm C,D là $C\left(1;\dfrac{1}{2};0\right),D\left(0;\dfrac{1}{2};0\right)$.

C. Tọa độ điểm S là $S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

D. Tọa độ các điểm M,N là $M(1;0;0),N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. Đ



Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

SAD là tam giác đều có cạnh bằng 1 nên $SO=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$A\left(0;-\dfrac{1}{2};0\right), B\left(1;-\dfrac{1}{2};0\right), C\left(1;\dfrac{1}{2};0\right), D\left(0;\dfrac{1}{2};0\right), S\left(0;0;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $M(1;0;0), N\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$

Câu 23: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}=(2;-2;-4)$, $\vec{b}=(1;-1;1)$.

A. $\vec{a}+\vec{b}=(3;-3;-3)$

B. $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương

C. $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$

D. $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$

Lời giải

A. Đ	B. S	C. Đ	D. Đ

• Xét đáp án A: $\vec{a}+\vec{b}=(3;-3;-3)$ đúng.

• Xét đáp án B: $\vec{a}=2(1;-1;-2)\neq\vec{b}=(1;-1;1)$. Suy ra $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Đáp án B sai.

• $\left|\vec{b}\right|=\sqrt{3}$ đúng.

• $\vec{a}=2\vec{i}-2\vec{j}-4\vec{k}$ đúng.

Câu 24: Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;-5;3)$, $\vec{b}=(0;2;-1)$, $\vec{c}=(1;7;2)$.

A. $\vec{u}=3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}$ với $\vec{u}=(11;22;18)$.

B. $\vec{x}=\dfrac{1}{2}\vec{a}-\dfrac{4}{3}\vec{b}-2\vec{c}$ với $\vec{x}=\left(-1;-\dfrac{115}{6};-\dfrac{7}{6}\right)$.

C. $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ với $\overrightarrow{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$.

D. $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$ với $\overrightarrow{y}=-\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$.

Lời giải

A. Đ	B. Đ	C. Đ	D. S

A. $\vec{u}=3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}$ với $\vec{u}=(11;22;18)$. **ĐÚNG**

+ Ta có: $\begin{cases}3\vec{a}=(6;-15;9)\\ \vec{b}=(0;-2;1)\\ 5\vec{c}=(5;35;10)\end{cases}\Rightarrow 3\vec{a}-\vec{b}+5\vec{c}=(11;22;18)=\vec{u}$

B. $\vec{x}=\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}-2\vec{c}$ với $\vec{x}=\left(-1;-\frac{115}{6};-\frac{7}{6}\right)$. **ĐÚNG**

+ Ta có: $\begin{cases}\frac{1}{2}\vec{a}=\left(1;-\frac{5}{2};\frac{3}{2}\right)\\ \frac{4}{3}\vec{b}=\left(0;\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)\\ 2\vec{c}=\left(2;14;4\right)\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}-2\vec{c}=\left(-1;-\frac{115}{6};-\frac{7}{6}\right)=\vec{x}$

C. $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}$ với $\overrightarrow{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$. **ĐÚNG**

$\overrightarrow{v}=\overrightarrow{a}+\overrightarrow{b}\Rightarrow\overrightarrow{v}=\left(2;-3;2\right)\Rightarrow\overrightarrow{v}=2\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{k}$

D. $\overrightarrow{y}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}$ với $\overrightarrow{y}=-\vec{i}+5\vec{j}-3\vec{k}$. **SAI**

$\overrightarrow{y}=\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}\Rightarrow\overrightarrow{y}=\left(-1;-5;-3\right)\Rightarrow\overrightarrow{y}=-\vec{i}-5\vec{j}-3\vec{k}$

Câu 26: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=\vec{i}+3\vec{k}-4\vec{j}$ và $\vec{b}=\left(m-n;4m-6n;n^2-3m+2\right)$, với m,n là tham số.

a) Tọa độ $\vec{a}=\left(1;3;-4\right)$.

b) Dựng điểm A thỏa $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì $A\left(1;-4;3\right)$.

c) Tồn tại giá trị của m và n để $\vec{b}=\vec{0}$.

d) Nếu $\vec{a}=\vec{b}$ thì $m+n=9$.

Lời giải

Đáp án: a sai; b **đúng;** c **sai;** d **đúng**

a) Tọa độ $\vec{a}=\left(1;-4;3\right)$.

b) Khi $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì tọa độ $\vec{a}$ cũng là tọa độ điểm A. Suy ra $A\left(1;-4;3\right)$.

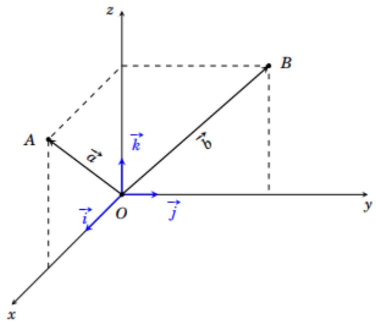
c) $\vec{b}=\vec{0}\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=0\\4m-6n=0\\n^2-3m+2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=0\\n=0\\n^2-3m+2=0\end{cases}$. (vô nghiệm).

Vậy, không tồn tại m,n để $\vec{b}=\vec{0}$.

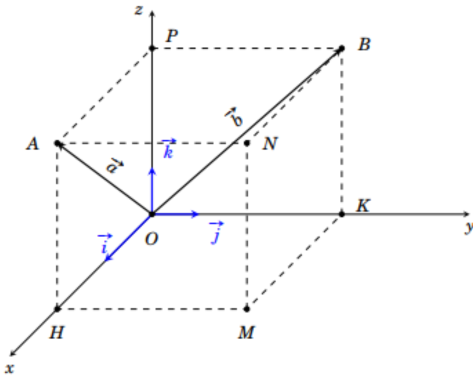
d) $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}m-n=1\\4m-6n=-4\\n^2-3m+2=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=5\\n=4\end{cases}$.

Suy ra $m+n=9$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(2;2;0), \vec{b}=\ 2\vec{j}+2\vec{k}$. Dựng $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

a) $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{k}$. b) Toạ độ $\vec{b}=(0;2;2)$. c) Toạ độ $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)$ d) Góc $\widehat{AOB}=45^\circ$.	

Lời giải



Đáp án:a sai, b đúng, c đúng, d sai

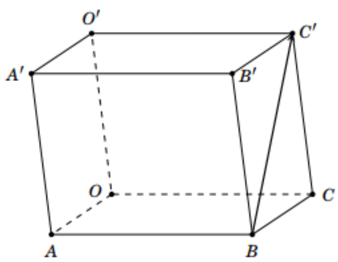
a) Ta có $\vec{a}=(2;0;2) \Rightarrow \vec{a}=2\vec{i}+2\vec{k}$.

b) Ta có $\vec{b}=2\vec{j}+2\vec{k} \Rightarrow \vec{b}=(0;2;2)$.

c) Ta có $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ thì toạ độ véc tơ $\vec{a}$ cũng chính là toạ độ A. Suy ra $A(2;0;2)$. Tương tự $B(0;2;2)$. Từ đây, ta tính được $\overrightarrow{AB}=(-2;2;0)$

d) Nhận xét $OHMK\ .PANB$ là hình lập phương. Suy ra $\triangle OAB$ đều. Vậy $\widehat{AOB}=60^\circ$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ có $A(1;1;-1), B(0;3;0), \overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)$. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của tam giác $OA'O'$ và $CB'C'$.

a) Tọa độ điểm C' là $(2;-3;6)$ b) Tọa độ điểm O' là $(3;-5;5)$. c) Tọa độ véc to $\overrightarrow{AB'}=(-2;3;-6)$. d) Tọa độ véc tơ $\overrightarrow{HK}=(-1;2;-1)$.	

Lời giải

Đáp án: a đúng; b đúng; c sai;d sai

a) Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{BC'}=(2;-6;6)\Rightarrow\begin{cases}x-0=2\\y-3=-6\\z-0=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-3\\z=6\end{cases}$

Vậy $C(2;-3;6)$.

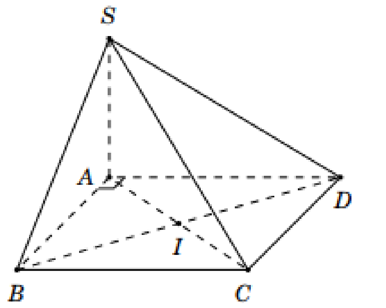
b) Gọi $O'(x;y;z)$. Theo hình vẽ thì $\overrightarrow{AO'}=\overrightarrow{BC'}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=2\\y-1=-6\\z+1=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=-5\\z=5\end{cases}$

Vậy $O'(3;-5;5)$.

c) Theo hình vẽ thì $\overrightarrow{AB'}=\overrightarrow{OC'}=(2;-3;6)$.

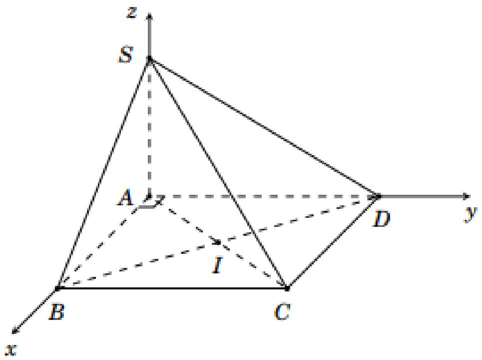
d) Ta có $\overrightarrow{HK}=\overrightarrow{AB}=(-1;2;1)$.

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB=1, AD=2, SA$ vuông góc với mặt đáy và $SA=3$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như sau: Gốc tọa độ O trùng với điểm A, các véc tơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AS}$ lần lượt cùng hướng với $\vec{i},\vec{j}$ và $\vec{k}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Tọa độ $D(0;2;0)$. b) Tọa độ $C(1;2;3)$. c) Tọa độ $S(2;0;0)$ d) Tọa độ $I(1;1;0)$.	

Lời giải

Đáp án: a đúng; b **sai;** c **đúng;** d **sai**



Với hệ trục đã chọn như hình vẽ thì

a) Điểm $D \in Oy$ và $AD = 2$ nên $D(0;2;0)$.

b) Điểm $C \in (Oxy)$ và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là điểm B và D. Do $AB = 1$ và $AD = 2$ nên $C(2;2;0)$.

c) Điểm $S \in Oz$ và $AS = 3$ nên $S(0;0;3)$.

d) Điểm $I \in (Oxy)$ và và có hình chiếu lên Ox, Oy lần lượt là trung điểm của AB và AD nên $I(0,5;1;0)$.

Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với tâm hình vuông $ABCD$), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ $A(-1;0;0)$.

b) $\overrightarrow{AC'} = \left(2\sqrt{2};0;2\right)$.

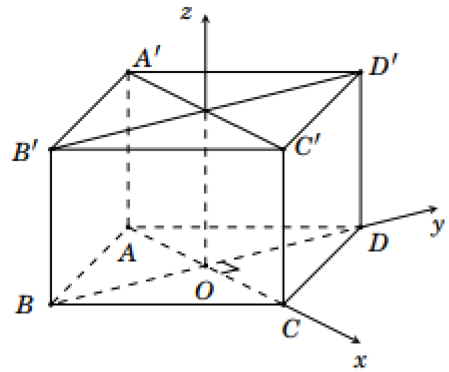
c) Tọa độ $D'\left(0;\sqrt{2};2\right)$.

d) $\overrightarrow{BD'} = (0;0;2)$.

Lời giải

Đáp án: a sai; b **đúng;** c **đúng;** d **sai**

Độ dài $AC = 2\sqrt{2}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ thì



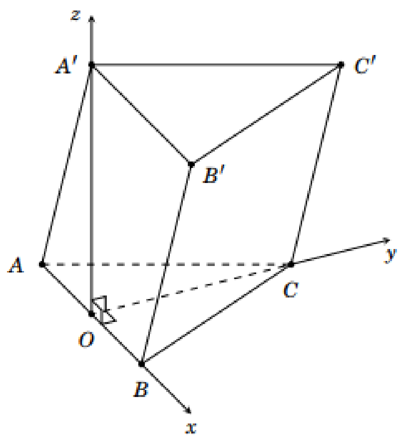
a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = \sqrt{2}$ nên $A\left(-\sqrt{2};0;0\right)$.

b) Tọa độ $C'\left(\sqrt{2};0;2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{AC'} = \left(2\sqrt{2};0;2\right)$.

c) Điểm D' có hình chiếu vuông góc xuống (Oxy) là điểm $D\left(0;\sqrt{2};0\right)$ và $DD' = 2$ nên $D'\left(0;\sqrt{2};2\right)$.

d) Tọa độ $B\left(0;-\sqrt{2};0\right), D'\left(0;\sqrt{2};2\right)$. Suy ra $\overrightarrow{BD'} = \left(0;2\sqrt{2};2\right)$.

Câu 31: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 2 như hình vẽ. Hình chiếu vuông góc của A' lên $\left(ABC\right)$ trùng với trung điểm cạnh AB, góc $\widehat{A'AO} = 60^\circ$. Với hệ toạ độ $Oxyz$ được thiết lập như hình bên (gốc tọa độ O trùng với trung điểm của đoạn BC), hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ điểm $A\left(-1;0;0\right)$. b) Tọa độ điểm $C\left(0;\sqrt{3};0\right)$. c) Tọa độ điểm $A'\left(0;-1;\sqrt{3}\right)$. d) Tọa độ điểm $C'\left(1;\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$.	

Lời giải

Đáp án: a **đúng** |b **đúng** |c **sai** |d **đúng**

Độ dài $OC = 2 \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \cdot OA' = OA \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$. Với hệ trục $Oxyz$ đã chọn như hình vẽ trên thì

a) Điểm $A \in Ox$, nằm ngược chiều dương và $OA = 1$ nên $A(-1;0;0)$.

b) Điểm $A' \in Oy$, nằm cùng chiều dương và $OC = \sqrt{3}$ nên $C\left(0;\sqrt{3};0\right)$.

c) $A' \in Oz$, nằm cùng chiều dương và $OA' = \sqrt{3}$ nên $A'\left(0;0;\sqrt{3}\right)$.

d) Gọi $C'(x;y;z)$. Ta có $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 0 = 1 \\ y - 0 = \sqrt{3} \\ z - \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \sqrt{3}. \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$

Câu 32: Cho các điểm $A(1;-2;3), B(-2;1;2), C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1)$.

b) $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;1)$.

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Lời giải

Đáp án: a đúng; b sai; c **sai** ;d **đúng**

a) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)=(-3;3;-1)$.

b) $\overrightarrow{AC}=(x_C-x_A;y_C-y_A;z_C-z_A)=(2;1;-1)$

c) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1), \overrightarrow{AC}=(2;1;-1)$. Hai vec tơ này không cùng phương nên không tồn tại số thực k để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

d) Hai vec tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

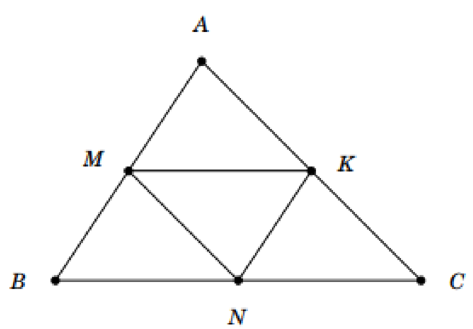
Câu 33: Cho ba điểm $A(3;3;-6), B(1;3;2)$ và $C(-1;-3;1)$. Gọi M,N,K lần lượt là trung điểm của AB,BC và CA.

a) Tọa độ $M(2;3;2)$.

b) Với G là trọng tâm tam giác ABC thì $GC=2\sqrt{5}$.

c) Trọng tâm tam giác MNK là $E(1;1;-1)$.

d) Với $D(-3;-3;9)$ thì tứ giác $ABDC$ là hình bình hành.



Lời giải

Đáp án: a sai; b **sai;** c **đúng;** d **đúng**

a) M là trung điểm của AB, suy ra $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$ hay $M(2;3;-2)$.

b) Ta có $G(1;1;-1)$. Suy ra $GC=\sqrt{(-1-1)^2+(-3-1)^2+(1+1)^2}=2\sqrt{6}$.

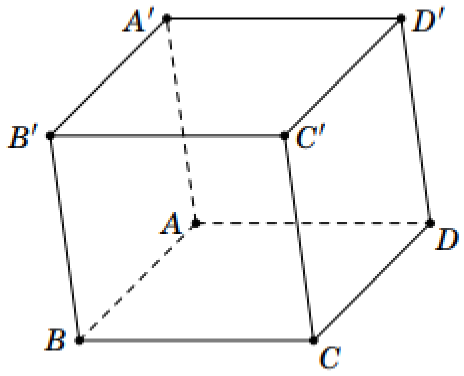
c) Hai tam giác ABC và MNK có cùng trọng tâm. Suy ra E trùng với $G(1;1;-1)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC}=(-4;-6;7),\overrightarrow{BD}=(-4;-6;7)$, suy ra $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$. Vậy $ABDC$ là hình bình hành.

Câu 34: Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$, biết điểm $A(0;0;0)$, $B(1;0;0),C(1;2;0),D'(-1;3;5)$. Gọi M,N là tâm của các hình bình hành $ABB'A',ADD'A'$.

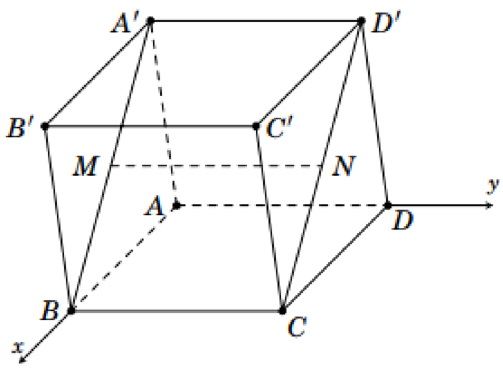
a) Tọa độ $D(0;2;0)$. b) Tọa độ $A'(-1;1;5)$.

c) Tọa độ $\overrightarrow{MN}=(-1;1;0)$. d) $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right|=\sqrt{29}$.



Lời giải

Đáp án: a **đúng**;b **đúng** ;c **sai;** d **sai**



a) Theo qui tắc hình bình hành, ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(0;2;0)\Rightarrow D(0;2;0)$.

b) Ta có $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{DD'}=(-1;1;5)\Rightarrow A'(-1;1;5)$.

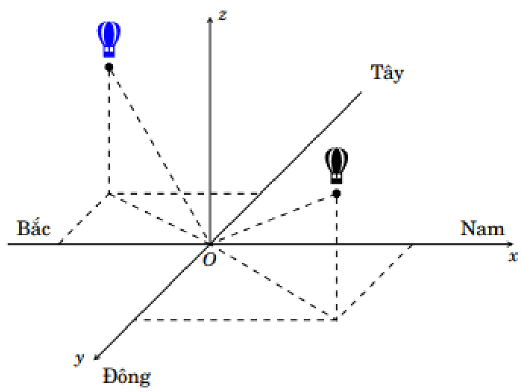
c) Theo hình vẽ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}=\left(0;2;0\right)$.

d) Ta có $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\left(0;3;5\right)$. Xét

$\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CC'}\right|=\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right|=\left|\overrightarrow{AC'}\right|=\sqrt{0^2+3^2+5^2}=\sqrt{34}$

Câu 35: Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 2 km về phía nam và 1 km về phía đông, đồng thời cách mặt đất $0,5$ km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1 km về phía bắc và $1,5$ km về phía tây, đồng thời cách mặt đất $0,8$ km.

Chọn hệ trục $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng $\left(Oxy\right)$ trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (Hình bên dưới), đơn vị đo lấy theo kilomet.



a) Với hệ tọa độ đã chọn, tọa độ khinh khí cầu thứ nhất là $\left(2;1;0,5\right)$.

b) Với hệ tọa độ đã chọn, toạ độ khinh khí cầu thứ hai là $\left(-1,5;-1;0,8\right)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng $\sqrt{21}$ km.

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là $3,92$ km (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: a **đúng** |b **sai** |c **sai** |d **đúng**

a) Chiếc khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $\left(2;1;0,5\right)$.

b) Chiếc khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $\left(-1;-1,5;0,8\right)$.

c) Khoảng cách từ điểm xuất phát đến khinh khí cầu thứ nhất bằng

$\sqrt{2^2+1^2+0,5^2}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}\left(\text{ km}\right)$

d) Khoảng cách hai chiếc khinh khí cầu là
$\sqrt{(-1-2)^2+(1,5-1)^2+(0,8-0,5)^2}=\sqrt{15,34}\approx 3,92(\text{ km})$.

Câu 36: Cho ba vec-tơ $\vec{a}=(-1;1;0),\vec{b}=(1;1;0)$ và $\vec{c}=(1;1;1)$.

a) $|\vec{a}|=2$.

b) $|\vec{c}|=\sqrt{3}$.

c) $\cos(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

d) $\vec{b}\perp\vec{c}$.

Lời giải

Đáp án: a sai |b đúng |c **sai** |d **sai**

a) $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$. b) $|\vec{c}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$

c) $\cos(\vec{a},\vec{c})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}||\vec{c}|}=0$ d) $\vec{b}\cdot\vec{c}=2$, suy ra $\vec{b}$ không vuông $\vec{c}$.

Câu 37: Cho hai véctơ $\vec{u}=(0;2;3)$ và $\vec{v}=(m-1;2m;3)$.

a) $|\vec{u}|=\sqrt{13}$.

b) $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow m=-\dfrac{3}{5}$.

c) $\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow m=1$.

d) $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow m=\dfrac{9}{4}$.

Lời giải

Đáp án: a **đúng** |b **. sai** |c **đúng** |d **sai**

a) $|\vec{u}|=\sqrt{0^2+2^2+3^2}=\sqrt{13}$

b) $|\vec{u}|=|\vec{v}|\Leftrightarrow\sqrt{13}=\sqrt{(m-1)^2+4m^2+9}\Leftrightarrow 5m^2-2m-3=0\Leftrightarrow m=1$ hoặc $m=-\dfrac{3}{5}$.

c) khi $m=1$ thì $\vec{v}=(0;2;3)$. Suy ra $\vec{u}=\vec{v}$.

d) $\vec{u} \perp \vec{u} \Leftrightarrow 4m+9=0 \Leftrightarrow m=-\dfrac{9}{4}$.

Câu 38: Cho tam giác ABC có $A(1;2;0), B(0;1;1), C(2;1;0)$.

a) Tam giác ABC vuông tại A.

b) Chu vi tam giác là $\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

c) Diện tích tam giác ABC là $\sqrt{6}$.

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Lời giải

Đáp án: a đúng |b **sai** |c **sai** |d **đúng**

Ta có $\overrightarrow{AB}=(-1;-1;1) \Rightarrow AB=\sqrt{3}, \overrightarrow{AC}=(1;-1;0) \Rightarrow AC=\sqrt{2}$,
$\overrightarrow{BC}=(2;0;-1) \Rightarrow BC=\sqrt{5}$.

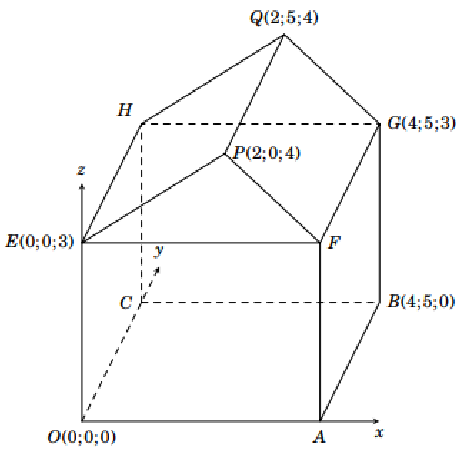
a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}=0$ do đó $AB \perp AC$, tam giác ABC vuông tại A.

b) Chu vi của tam giác là $AB+AC+BC=\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

c) Diện tích là $S=\dfrac{1}{2} \cdot AB \cdot AC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

d) Tâm đường tròn ngoại tiếp là trung điểm của BC có tọa độ $I\left(1;1;\dfrac{1}{2}\right)$.

Câu 39: Hình minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



a) Tọa độ của các điểm $A(5;0;0)$.

b) Tọa độ của các điểm $H(0;5;3)$.

c) Góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ gọi là góc dốc của mái nhà. Số đo của góc dốc của mái nhà bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ).

d) Chiều cao của ngôi nhà là 4.

Lời giải

Đáp án: a sai ;b **sai** ;c **sai** ;d **sai**

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra $x_A = x_B = 4, y_C = y_B = 5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$.

b) Tường nhà là hình chữ nhật, suy ra $y_H = y_C = 5, z_H = z_E = 3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$.

c) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt phẳng lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó.

Ta có $\overrightarrow{FP} = (-2;0;1), \overrightarrow{FE} = (-4;0;0)$.

Suy ra $\cos\widehat{PFE} = \cos\left(\overrightarrow{FP}, \overrightarrow{FE}\right) = \dfrac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FE}}{\left|\overrightarrow{FP}\right|\cdot\left|\overrightarrow{FE}\right|} = \dfrac{(-2)\cdot(-4)+0\cdot 0+1\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+0^2+0^2}} = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26$,. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

d) Chiều cao bằng cao độ của điểm P. Suy ra $h = 4$.

F. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a} = (3;2;5)$ và $\vec{b} = (3m+2;3;6-n)$. Tính giá trị biểu thức $6m+2n$ để hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bằng nhau.

Lời giải

Trả lời: 2

Ta có $\vec{a}, \vec{b} \Leftrightarrow \dfrac{3m+2}{3} = \dfrac{3}{2} = \dfrac{6-n}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \dfrac{5}{6} \\ n = \dfrac{-3}{2} \end{cases} \Rightarrow 6m+2n = 2.$

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có ba đỉnh $A(1;2;3)$, $B(-1;2;0)$, $C(3;2;-3)$ và $G(a;b;c)$ là trọng tâm của tam giác ABC. Tính giá trị biểu thức $P=a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: 3

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên

$$\begin{cases} a=\dfrac{1+(-1)+3}{3}=1 \\ b=\dfrac{2+2+2}{3}=2 \\ c=\dfrac{3+0+(-3)}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow G(1;2;0)$$

Vậy $P=a+b+c=1+2+0=3$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;0;0)$, $B(0;0;1)$, $C(2;1;1)$. Diện tích của tam giác ABC bằng:

Lời giải

Trả lời: $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;0;1), \overrightarrow{AC}=(1;1;1) \Rightarrow (-1).1+0.1+1.1=0 \Rightarrow AB \perp AC$.

Nên diện tích tam giác ABC là $S=\dfrac{1}{2}AB.AC=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Câu 4: Trong không gian Oxy, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(2;1;1)$. Cho điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho ba điểm A,B,M thẳng hàng. Tính giá trị biểu thức $x_0+y_0+z_0$.

Lời giải

Trả lời: 8

Điểm $M \in (Oyz) \Rightarrow M(0;y;z)$

Ta có: $\overrightarrow{AM}=(-1;y-2;z-3)$, $\overrightarrow{AB}=(1;-1;-2)$

Để A,B,M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{x-3}{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3 \\ z=5 \end{cases} \Rightarrow M(0;3;5)$$

Suy ra $x_0+y_0+z_0=8$.

Câu 5: Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1;-1;1)$, $B(3;1;2)$ và $C(-1;0;3)$. Có bao nhiêu điểm D sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB,CD và có góc tại D bằng $45°$.

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $D(x;y;z)$

$\overrightarrow{AB}=(2;2;1), \overrightarrow{DC}=(-1-x;-y;3-z)$

Tứ giác $ABCD$ là hình thang có 2 cạnh đáy AB,CD nên $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}$ cùng phương.

$$\Rightarrow \frac{-1-x}{2}=\frac{-y}{2}=\frac{3-z}{1}\Rightarrow\begin{cases}x=2z-7\\y=2z-6\end{cases}.$$

$$\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(x-1;y+1;z-1)\\\overrightarrow{CD}=(x+1;y;z-3)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{AD}=(2z-8;2z-5;z-1)\\\overrightarrow{CD}=(2z-6;2z-6;z-3)\end{cases}$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{9(z-3)^2}{\sqrt{9(z^2-6z+10)}.\sqrt{9(z-3)^2}}=\frac{z-3}{\sqrt{z^2-6z+10}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\Rightarrow 2(z^2-6z+9)=z^2-6z+10\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=4\\z=2\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1;y=2\\x=-3;y=-2\end{array}\right..$$

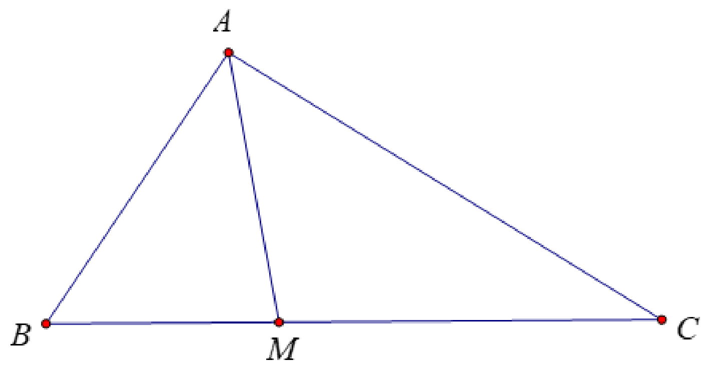
Vậy $D(1;2;4)$ hoặc $D(-3;-2;2)$.

Có 2 điểm D thỏa điều kiện.

Câu 6: Trong không gian Oxy, cho tam giác ABC, biết $A(2;0;0), B(0;3;1), C(-3;6;4)$. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho $MC=2MB$. Tính độ dài AM .

Lời giải

Trả lời: $5,39$



Gọi $M(x;y;z)$

$\overrightarrow{CM}=(-3-x;6-y;4-x)$

$\overrightarrow{MB}=(x;y-3;z-1)$

Theo đề ta có, $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\begin{cases}-3-x=2x\\6-y=2(y-3)\\4-z=2(z-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=4\\z=2\end{cases}\Rightarrow M(-1;4;2)$

$$AM=\sqrt{(-1-2)^2+4^2+2^2}=\sqrt{29}\approx 5,39$$

Câu 7: Trong không gian Oxy, cho ba điểm $A(1;2;-1), B(2;-1;3), C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$. Tính giá trị của biểu thức $P=a^2+b^2-c^2$.

Lời giải

Trả lời: 44

$\overrightarrow{MC}=(-2-a;3-b;3-c)$

$\overrightarrow{AB}=(1;-3;4)$

Tứ giác $ABCM$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -2-a=1 \\ 3-b=-3 \\ 3-c=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=6 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow P=44.$

Câu 8: Trong không gian Oxy, cho hai điểm trên trục hoành mà khoảng cách từ đó đến điểm $M(-3;4;8)$ bằng 12. Tính tổng hai hoành độ của chúng.

Lời giải

Trả lời: -6

$N(x;0;0)$

$MN=12 \Leftrightarrow \sqrt{(x+3)^2+4^2+8^2}=144 \Leftrightarrow (x+3)^2=64 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-11 \end{array}\right.$

Tổng hoành độ của chúng bằng -6

Câu 9: Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(2;5;-3), \vec{b}=(0;-4;0)$. Tính tích vô hướn của hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$.

Lời giải

Trả lời: -20

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot 0+5\cdot(-4)+(-3)\cdot 0=-20$

Câu 10: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $\overrightarrow{OA}=\vec{i}+0\vec{j}+3\vec{k}$, $\overrightarrow{OB}=2\vec{i}+3\vec{j}-4\vec{k}$, $\overrightarrow{OC}=-3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$. Điểm $D(x;y;z)$ sao cho $ABCD$ là hình bình hành. Tính $P=2x+y-z$.

Lời giải

Trả lời: -19

Gọi D để $ABCD$ là hình bình hành.

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}-\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=-5\vec{i}-2\vec{j}+6\vec{k} \Leftrightarrow \overrightarrow{OD}=-4\vec{i}-2\vec{j}+9\vec{k} \Leftrightarrow D(-4;-2;9)$

$P=2x+y-z=2.(-4)-2-9=-19$

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{k}$; $\vec{b}=3\vec{i}+3\vec{j}$. Tọa độ vec tơ $\vec{a}=(x;0;3)$; $\vec{b}=(3;y;0)$. Tính $P=x^2+y^2$.

Lời giải

Trả lời: 13

$\vec{a}=(2;0;3)$; $\vec{b}=(3;3;0)$. $P=x^2+y^2=2^2+3^2=13$

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$; $\overrightarrow{ON}=-\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$. Tọa độ điểm $M(2;-3;a);N(-1;b;-1)$. Tính $T=2a-3b$.

Lời giải

Trả lời: -1

$M(2;-3;4),N(-1;3;-1)$. $T=2a-3b=2.4-3.3=-1$

Câu 13: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$,cho $\vec{a}=(3;-5;2)$; $\vec{b}=(2;1;-1)$. Vectơ $\vec{a}=3\vec{i}-y\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+z\vec{k}$. Tính $P=y^2-z^2$

Lời giải

Trả lời: 26

$\vec{a}=3\vec{i}-5\vec{j}+2\vec{k}$; $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$. $P=y^2-z^2=(-5)^2+(-1)^2=26$

Câu 14: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, $M(1;0;-2),N(5;1;-6)$. Tính $\overrightarrow{OM}=\vec{i}+y\vec{j}-2\vec{k};\overrightarrow{ON}=x\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$. Tính $P=x^3+y^3$.

Lời giải

Trả lời: 125

$\overrightarrow{OM}=\vec{i}-2\vec{k}$; $\overrightarrow{ON}=5\vec{i}+\vec{j}-6\vec{k}$. $P=x^3+y^3=0^3+5^3=125$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 5, $SA=2$ và $SA\perp(ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Tọa độ điểm $C(x;y;z)$. Tính $P=x^3+y^3+z^3$.

Lời giải

Trả lời: 250

Ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=5\vec{i}+5\vec{j}+0\vec{k}$. Suy ra: $C(5;5;0)$.

$P=x^3+y^3+z^3=5^3+5^3+0^3=250$

Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật ABC**D.**A'B'C'D' có $AB=2;AD=3;AA'=4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tìm tọa độ của $C'(x;3;z)$. Tính $P=x-z$.

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có:

$\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$; $\overrightarrow{AD}=0\vec{i}+3\vec{j}+0\vec{k}$; $\overrightarrow{AA'}=0\vec{i}+0\vec{j}+4\vec{k}$

$\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$; suy ra $C'(2;3;4)$. $P=x-z=2-4=-2$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 3, $SA=4$ và $SA\perp(ABCD)$. Chọn hệ trục Oxyz có gốc toạ độ tại A; các điểm B, D, S lần lượt trên các tia Ox, Oy, Oz. Gọi M là trung điểm S**C.** Tìm tọa độ điểm $M(x;y;z)$. Tính $T=x+y-\frac{3}{2}z$.

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=3\vec{i}+3\vec{j}+0\vec{k}$.

Vì M là trung điểm SC nên:

$$\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\left(0\vec{i}+0\vec{j}+4\vec{k}+3\vec{i}+3\vec{j}+0\vec{k}\right)=\frac{3}{2}\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}+2\vec{k}$$

$\Rightarrow M\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2};2\right)$. $T=x+y-\frac{3}{2}z=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-\frac{3}{2}.2=0$

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính $\left|\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+2\overrightarrow{CC'}\right|$.

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CC'}$; $\overrightarrow{CA'}=\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{C'A}$ và $\overrightarrow{C'A'}=\overrightarrow{CA}$

Suy ra: $\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+2\overrightarrow{C'C}=2\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{C'C}=\vec{0}$

$\Rightarrow\left|\overrightarrow{AC'}+\overrightarrow{CA'}+2\overrightarrow{CC'}\right|=0$

Câu 19: Cho hình hộp chữ nhật ABC**D.**A'B'C'D' có $AB=8; AD=6; AA'=4$. Chọn hệ trục tọa độ Oxyz có gốc O trùng với A, các điểm B; D; A' lần lượt thuộc Ox; Oy; Oz. Tọa độ điểm $C'(x;y;z)$. Tính $P=x-2y+z$.

Lời giải

Trả lời: 0

Ta có:
$\overrightarrow{AB}=8\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}$; $\overrightarrow{AD}=0\vec{i}+6\vec{j}+0\vec{k}$; $\overrightarrow{AA'}=0\vec{i}+0\vec{j}+4\vec{k}$

Trong hình bình hành ABCD: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=8\vec{i}+6\vec{j}+0\vec{k}$

Trong hình bình hành ACC'A': $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA'}=8\vec{i}+6\vec{j}+4\vec{k}$

$\Rightarrow C'(8;6;4)$. $P=x-2y+z=8-2.6+4=0$

Câu 20: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-2;3;3)$. Điểm $M(a;b;c)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCM$, khi đó $P=a^2+b^2-c^2$ có giá trị bằng

Lời giải

Trả lời: 44

$M(x;y;z)$, $ABCM$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{BC}\Rightarrow\begin{cases}x-1=-2-2\\y-2=3+1\\z+1=3-3\end{cases}\Rightarrow M(-3;6;-1)\Rightarrow \mathrm{P}=44.$$

Câu 21: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(-2;2;0);\vec{b}=(2;2;0)$ và $\vec{c}(2;2;2)$. Giá trị của $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$ bằng

Lời giải

Trả lời: $2\sqrt{11}$

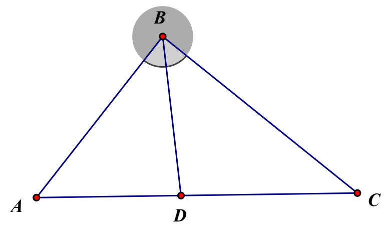
Ta có: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=(2;6;2)$.

Vậy $\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|=2\sqrt{11}$.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Gọi $D(a;b;c)$ là chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC. Giá trị của $a+b+2c$ bằng

Lời giải

Trả lời: 5



Ta có $AB=\sqrt{26}$, $BC=\sqrt{104}=2\sqrt{26}$.

Gọi $D(x;y;z)$, theo tính chất phân giác ta có $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{BA}{BC}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra $\overrightarrow{DA}=-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}\ (*)$.

Ta có $\overrightarrow{DA}=(1-x;2-y;-1-z)$ và $\overrightarrow{DC}=(-4-x;7-y;5-z)$.

Do đó $$(*)\Rightarrow\begin{cases}1-x=-\dfrac{1}{2}(-4-x)\\2-y=-\dfrac{1}{2}(7-y)\\-1-z=-\dfrac{1}{2}(5-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{11}{3}\\z=1\end{cases}\Rightarrow D\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)\Rightarrow a+b+2c=5.$$

Câu 23: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;-3;4),B(1;y;-1)C(x;4;3)$. Để ba điểm A, B, C thẳng hàng thì tổng giá trị $5x+y$ là:

Lời giải

Trả lời: 41

Có $\overrightarrow{AB}=\left(-1;y+3;-5\right);\overrightarrow{AC}=\left(x-2;7;-1\right)$.

Để ba điểm *A, B, C* thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{x-2}=\dfrac{y+3}{7}=\dfrac{-5}{-1}$.

$\Rightarrow x=\dfrac{9}{5};y=32$

$\Rightarrow 5\text{x}+\text{y}=41$

Vậy $5\text{x}+\text{y}=41$.

Câu 24: Trong không gian Oxy, cho ba vectơ $\vec{a}=(1;m;2),\vec{b}=(m+1;2;1),\vec{c}=(0;m-2;2)$. Tổng các giá trị thực của tham số m để $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right|$.

Lời giải

Trả lời: -12

$\vec{a}+\vec{b}=(m+2;m+2;3)$

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\left|\vec{c}\right| \Leftrightarrow \left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{c}\right|^2$

$\Leftrightarrow (m+2)^2+(m+2)^2+9=(m-2)^2+4$

$\Leftrightarrow m^2+12m+9=0$

$\Leftrightarrow m=-6\pm\sqrt{3}.$

Tổng các giá trị của m bằng -12.

Câu 25: Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;-1;0),\vec{b}=(2;2t-1;0)$. Xác định giá trị t để hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương.

Lời giải

Trả lời: -0,5

Hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ cùng phương thì

$$\vec{a}=k\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases}1=2k\\-1=(2t-1)k\\0=0k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1=2k\\-1=(2t-1)k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\dfrac{1}{2}\\-1=(2t-1)k\end{cases}$$

Với $t=\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}k=\dfrac{1}{2}\\-1=0\end{cases}$ (vô nghiệm.

Với $t\neq\dfrac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases}k=\dfrac{1}{2}\\k=\dfrac{-1}{2t-1}\end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-1}{2t-1}=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow t=-\dfrac{1}{2}.$

Vậy $t=-0,5$.

Câu 26: Trong không gian Oxy, cho hai vectơ $\vec{a}=(1;2;-2),\vec{b}=(-1;-1;0)$. Số đo độ của góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$?

Lời giải

Trả lời: 130

$\cos(\vec{a};\vec{b})=\dfrac{1\cdot(-1)+2\cdot(-1)+(-2)\cdot 0}{\sqrt{1^2+2^2+(-2)^2}.\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+0^2}}=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$\Rightarrow(\vec{a};\vec{b})=135°$

Câu 27: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-2)$, $B(2;2;-4)$. Giả sử $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB. Tính $T=a^2+b^2+c^2$.

Lời giải

Trả lời : 8

Ta có $\overrightarrow{OA}=(0;2;-2)$, $\overrightarrow{OB}=(2;2;-4)$. (OAB) có phương trình: $x+y+z=0$

$I\in(OAB)\Rightarrow a+b+c=0$.

$\overrightarrow{AI}=(a;b-2;c+2)$, $\overrightarrow{BI}=(a-2;b-2;c+4)$, $\overrightarrow{OI}=(a;b;c)$.

Ta có hệ $\begin{cases}AI=BI\\AI=OI\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+(c+2)^2=(a-2)^2+(c+4)^2\\(b-2)^2+(c+2)^2=b^2+c^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=4\\-b+c=-2\end{cases}$

Ta có hệ $\begin{cases}a-c=4\\-b+c=-2\\a+b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-c=4\\-b+c=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2\\b=0\\c=-2\end{cases}$.

Vậy $I(2;0;-2)\Rightarrow T=a^2+b^2+c^2=8$

Câu 28: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2;3;1)$, $B(2;1;0)$, $C(-3;-1;1)$. Giả sử điểm $D(a,b,c)$ sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD}=3S_{\Delta ABC}$. Tính $a+b+c$

Lời giải

Trả lời: -10

Ta có: $S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC).d(A,BC)\Leftrightarrow S_{ABCD}=\dfrac{1}{2}(AD+BC).\dfrac{2S_{\Delta ABC}}{BC}$.

$\Leftrightarrow 3S_{\Delta ABC}=\dfrac{(AD+BC).S_{\Delta ABC}}{BC}\Leftrightarrow 3BC=AD+BC\Leftrightarrow AD=2BC$.

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{BC}$ (1).

$\overrightarrow{BC}=(-5;-2;1)$, $\overrightarrow{AD}=(x_D+2;y_D-3;z_D-1)$.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}.$$

Vậy $D(-12;-1;3)$.

Câu 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho hình thang $ABCD$ vuông tại A và B. Ba đỉnh $A(1;2;1)$, $B(2;0;-1)$, $C(6;1;0)$ Hình thang có diện tích bằng $6\sqrt{2}$. Giả sử đỉnh $D(a;b;c)$. Tính $a+b+c$

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $\overrightarrow{AB} = (1;-2;-2) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = 3$; $\overrightarrow{BC} = (4;1;1) \Rightarrow \left|\overrightarrow{BC}\right| = 3\sqrt{2}$.

Theo giả thiết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B và có diện tích bằng $6\sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2}AB(AD+BC) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}.3.(AD+3\sqrt{2}) = 6\sqrt{2} \Rightarrow AD = \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{1}{3}BC$.

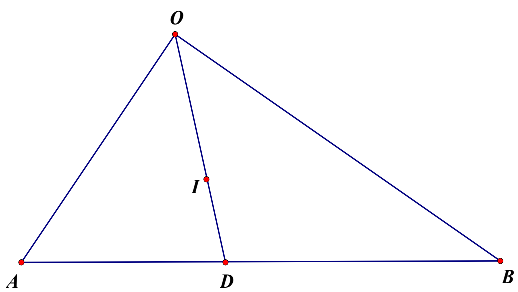
Do $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B nên $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Giả sử $D(a;b;c)$ khi đó ta có $\begin{cases} a-1 = \frac{4}{3} \\ b-2 = \frac{1}{3} \\ c-1 = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{7}{3} \\ c = \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow a+b+c = 6$.

Câu 30: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(2;2;1)$, $B\left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right)$. Biết $I(a;b;c)$ là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác OAB. Tính $S = a+b+c$.

Lời giải

Trả lời: 2



Ta có: $\overrightarrow{OA} = (2;2;1)$, $\overrightarrow{OB} = \left(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -\frac{16}{3} + \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$.

Lại có: $OA = 3$, $OB = 4 \Rightarrow AB = 5$.

Gọi D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{AOB} \Rightarrow D$ thuộc đoạn AB.

Theo tính chất của phân giác trong ta có:

$$\frac{DA}{DB}=\frac{OA}{OB}=\frac{3}{4}\Rightarrow \overrightarrow{DA}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{DB}\Rightarrow D=\left(0;\frac{12}{7};\frac{12}{7}\right).$$

Tam giác OAB có diện tích $S=\frac{1}{2}.OA.OB=6$, nửa chu vi $p=\frac{OA+OB+AB}{2}=6$

$\Rightarrow r=\frac{S}{p}=1$ là bàn kính đường tròn nội tiếp; chiều cao $OH=\frac{OA.OB}{AB}=\frac{12}{5}$.

Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB $\Rightarrow I$ thuộc đoạn OD.

Ta có: $\frac{DI}{DO}=\frac{r}{OH}=\frac{5}{12}\Rightarrow \overrightarrow{DI}=\frac{5}{12}\overrightarrow{DO}$ $\Rightarrow I=(0;1;1)$ hay $\begin{cases}a=0\\b=1\\c=1\end{cases}$.

Vậy $S=a+b+c=2$.

BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A - TRẮC NGHIỆM

2.25. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BG}$.

D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

2.26. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Lấy M là trung điểm của đoạn thẳng CC'. Vectơ $\overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

2.27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AB'}$.

B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{AD'}$.

D. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AC'}$.

2.28. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CD. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\frac{a^2}{4}$.

B. $\frac{a^2}{2}$.

C. $\frac{a^2}{3}$.

D. a^2.

2.29. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}=(1;-2;2),\vec{b}=(-2;0;3)$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\vec{a}+\vec{b}=(-1;-2;5)$.

B. $\vec{a}-\vec{b}=(3;-2;-1)$.

C. $3\vec{a}=(3;-2;2)$.

D. $2\vec{a}+\vec{b}=(0;-4;7)$.

2.30. Trong không gian Oxyz cho hình bình hành ABCD có $A(-1;0;3), B(2;1;-1)$ và $C(3;2;2)$. Toạ độ của điểm D là

A. $(2;-1;0)$.

B. $(0;-1;-6)$.

C. $(0;1;6)$.

D. $(-2;1;0)$.

2.31. Trong không gian Oxyz cho $A(1;0;-1), B(0;-1;2)$ và $G(2;1;0)$. Biết tam giác ABC có trọng tâm là điểm G. Toạ độ của điểm C là

A. $(5;4;-1)$.

B. $(-5;-4;1)$.

C. $(1;2;-1)$.

D. $(-1;-2;1)$.

2.32. Trong không gian Oxyz cho $\vec{a}=(2;1;-3),\vec{b}=(-2;-1;2)$. Tích vô hướng $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bằng

A. -2 .

B. -11 .

C. 11 .

D. 2.

2.33. Trong không gian Oxyz cho $\vec{a}=(2;1;-2),\vec{b}=(0;-1;1)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng

A. 60°.

B. 135°.

C. 120°.

D. 45°.

2.34. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-2;2;2),\vec{b}=(1;-1;-2)$. Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng

A. $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{-\sqrt{2}}{3}$.

B – TỰ LUẬN

2.35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh rằng:
$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}.$

2.36. Cho tứ diện $ABCD$, lấy hai điểm M,N thoả mãn $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{DN}$.
Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

2.37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi G là trọng tâm của tam giác BDA' :

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AA'}$.

b) Từ câu a, hãy chứng tỏ ba điểm A,G và C' thẳng hàng.

2.38. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;3),B(1;1;-1)$ và $C(-1;0;2)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng BM vuông góc với đường thẳng AC.

2.39. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ và các điểm $A(2;3;1),C(-1;2;3)$ và $O'(1;-2;2)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

2.40. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;1;2),\vec{b}=(1;1;-1)$.

a) Xác định toạ độ của vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$.

c) Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

2.41. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(4;2;-1),B(1;-1;2)$ và $C(0;-2;3)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và tính độ dài đoạn thẳng AB

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

c) Tìm toạ độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy), sao cho A,B,N thẳng hàng.

2.42. Hình 2.53 minh hoạ một chiếc đèn được treo cách trần nhà là $0,5$m, cách hai tường lần lượt là $1,2$m và $1,6$m. Hai bức tường vuông góc với nhau và cùng vuông góc với trần nhà. Người ta di chuyển chiếc đèn đó đến vị trí mới cách trần nhà là $0,4$m, cách hai tường đều là $1,5$m.

a) Lập một hệ trục toạ độ Oxyz phù hợp và xác định toạ độ của bóng đèn lúc đầu và sau khi di chuyển.

b) Vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hình 2.53

PHẦN 2. ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG 2

PHẦN 1. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(-1;3;2)$, $\vec{v}=(-3;-1;2)$ khi đó $\vec{u}.\vec{v}$ bằng

A. 10. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba véctơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\vec{b}\perp\vec{c}$. **B.** $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. **C.** $|\vec{a}|=\sqrt{2}$. **D.** $\vec{b}\perp\vec{a}$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ biểu diễn của các vectơ đơn vị là $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}-3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;1)$. **C.** $(2;1;-3)$. **D.** $(1;-3;2)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz).

A. $A_1(1;0;0)$. **B.** $A_1(0;2;3)$. **C.** $A_1(1;0;3)$. **D.** $A_1(1;2;0)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$ và $B(1;4;3)$. Độ dài đoạn AB là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 3.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;2)$, $B(1;1;4)$, $C(1;-4;0)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là

A. $(1;-1;2)$. **B.** $(-1;-1;2)$. **C.** $(1;1;2)$. **D.** $(1;-1;-2)$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2;\ 3;\ 1), B(3;\ 0;-1), C(6;\ 5;\ 0)$. Tọa độ đỉnh D là

A. $D(1;\ 8;-2)$. **B.** $D(11;\ 2;\ 2)$. **C.** $D(1;\ 8;\ 2)$. **D.** $D(11;\ 2;-2)$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;\ -2;\ -1)$ và $A(1;\ -1;\ 2)$. Tọa độ điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$ là

A. $M\left(\frac{2}{3};-\frac{4}{3};\ 1\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2};\ \frac{1}{2}\right)$.

C. $M(2;\ 0;\ 5)$. **D.** $M(-1;-3;-4)$.

Câu 9: Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A(1;2;-1)$ và điểm $B(2;1;2)$.

A. $M\left(\frac{1}{3};0;0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$. **C.** $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3};0;0\right)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vecto $\vec{a}=(0;3;1)$, $\vec{b}=(3;0;-1)$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{100}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{100}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{10}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{10}$

.

Câu 11: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ 0)$, $D(0;\ 3;\ 0)$, $D'(0;\ 3;\ -3)$. Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là

A. $(1;\ 1;\ -2)$. **B.** $(2;\ 1;\ -2)$. **C.** $(1;\ 2;\ -1)$. **D.** $(2;\ 1;\ -1)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\frac{2}{3};\frac{11}{3};1\right)$. **B.** $\left(\frac{11}{3};-2;1\right)$. **C.** $\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};\frac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2;11;1)$.

PHẦN 2 : TRẮC NGHIỆM ĐÚNG- SAI

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông

b) Tam giác SBD vuông cân tại S.

c) $(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BD})=45^\circ$.

d) $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BD}=-a^2$.

Câu 2: Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.

a) $\overline{AB}=(-3;3;-1)$.

b) $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;1)$.

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;-1;-2)$, $B(3;1;2)$, $C(1;-1;1)$ và $D(x_D;y_D;z_D)$.

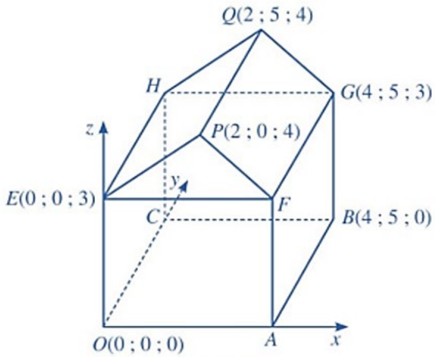
a) $\overrightarrow{AB}=(1;2;4)$.

b) $\overrightarrow{DC}=(1-x_D;-1-y_D;1-z_D)$.

c) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

d) Toạ độ điểm D là $(0;3;3)$.

Câu 4: Hình minh hoạ sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tọa độ điểm F là $(4;0;3)$.

b) Tọa độ $\overrightarrow{AH}=(4;5;3)$

c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AF}=3$

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6^{\circ}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)

PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

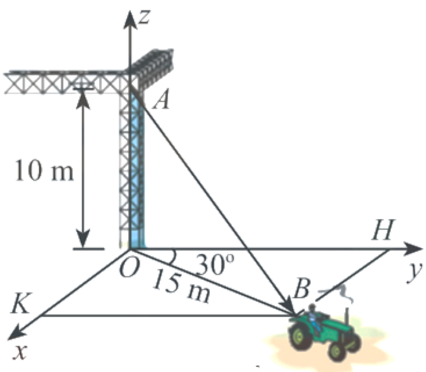
Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{C'B}=na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;3;5),B(1;1;3),C(4;-2;3)$. Số đo của góc $\widehat{ABC}$ bằng bao nhiêu độ?

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;2;8)$, $N(0;1;3)$ và $P(2;m;4)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Câu 5: Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển $150\,\text{m}$ về phía nam và $200\,\text{m}$ về phía đông, đồng thời cách mặt đất $50\,\text{m}$. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển $180\,\text{m}$ về phía bắc và $240\,\text{m}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $60\,\text{m}$.
Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hương trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 6: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như Hình với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}=(a;b;c)$, khi đó $a+c=$?



BÀI TẬP CUỐI CHƯƠNG II

PHẦN 1. GIẢI BÀI TẬP SÁCH GIÁO KHOA

A - TRẮC NGHIỆM

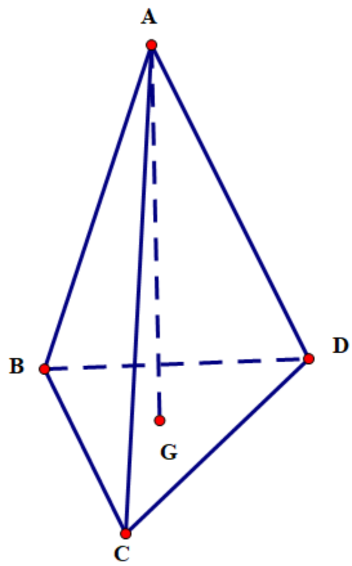
2.25. Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G là trọng tâm của tam giác BCD. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG}=\vec{0}$. B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AG}$.

C. $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}=3\overrightarrow{BG}$. D. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.

Lời giải

Chọn D



+) Vì G là trọng tâm của tam giác BCD nên $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Do đó đáp án A đúng.

+) Có $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{AG}$

vì $\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$. Do đó đáp án B đúng.

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=2\overrightarrow{BG}-\overrightarrow{GB}=3\overrightarrow{BG}$$

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-\overrightarrow{GB}$$

Do đó đáp án C đúng.

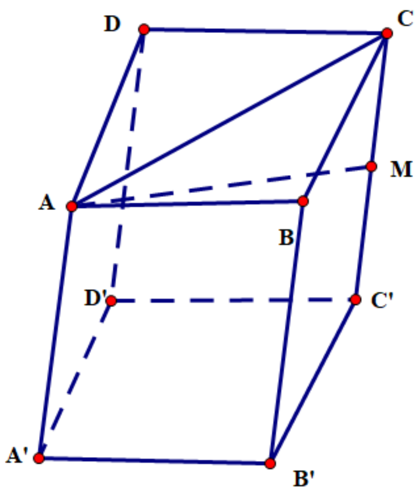
2.26. Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Lấy M là trung điểm của đoạn thẳng CC'. Vectơ $\overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$. B. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

C. $\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$. Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

Vì M là trung điểm của CC' nên $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

Do đó $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$.

2.27. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'}$.

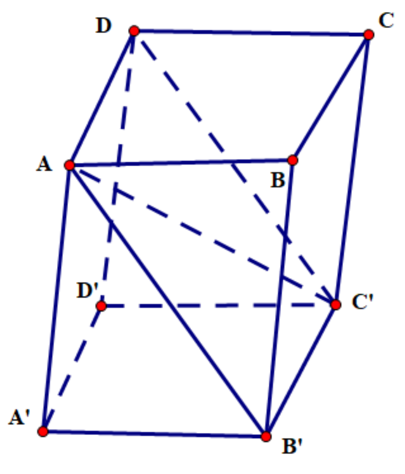
B. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$.

C. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'}$.

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AC'}$.

Lời giải

Chọn D



+) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$

Do đó đáp án B đúng.

+) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB'}$ (vì $\overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$). Do đó đáp án A đúng.

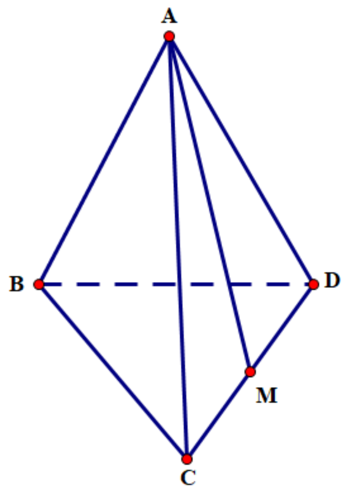
+) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AD'}$ (vì $\overrightarrow{D'D} + \overrightarrow{BB'} = \vec{0}$). Do đó đáp án C đúng.

2.28. Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài cạnh bằng a, gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CD. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}$ bằng

A. $\frac{a^2}{4}$. B. $\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2}{3}$. D. a^2.

Lời giải

Chọn B



Vì M là trung điểm của đoạn thẳng CD nên $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)$. Khi đó

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}\cdot\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$.

Có $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=a\cdot a\cdot\cos60^\circ=\frac{a^2}{2}$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=a\cdot a\cdot\cos60^\circ=\frac{a^2}{2}$

Do đó $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AM}=\frac{a^2}{4}+\frac{a^2}{4}=\frac{a^2}{2}$.

2.29. Trong không gian Oxyz, cho $\vec{a}=(1;-2;2),\vec{b}=(-2;0;3)$. Khẳng định nào dưới đây là sai?

A. $\vec{a}+\vec{b}=(-1;-2;5)$. B. $\vec{a}-\vec{b}=(3;-2;-1)$.

C. $3\vec{a}=(3;-2;2)$. D. $2\vec{a}+\vec{b}=(0;-4;7)$.

Lời giải

Chọn C

$\vec{a}+\vec{b}=(1-2;-2+0;2+3)=(-1;-2;5)$ nên A đúng.

$\vec{a}-\vec{b}=(1+2;-2-0;2-3)=(3;-2;-1)$ nên B đúng.

$3\vec{a}=(3.1;3.(-2);3.2)=(3;-6;6)$ nên C sai.

$2\vec{a}+\vec{b}=(2.1-2;2\cdot(-2)+0;2.2+3)=(0;-4;7)$ nên D đúng.

2.30. Trong không gian Oxyz cho hình bình hành ABCD có $A(-1;0;3), B(2;1;-1)$ và $C(3;2;2)$. Toạ độ của điểm D là

A. $(2;-1;0)$. B. $(0;-1;-6)$.

C. $(0;1;6)$. D. $(-2;1;0)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $D(x;y;z)$.

Vì ABCD là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow(3;1;-4)=(3-x;2-y;2-z)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3-x=3\\2-y=1\\2-z=-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1.\\z=6\end{cases}$$

Vậy $D(0;1;6)$.

2.31. Trong không gian Oxyz cho $A(1;0;-1), B(0;-1;2)$ và $G(2;1;0)$. Biết tam giác ABC có trọng tâm là điểm G. Toạ độ của điểm C là

A. $(5;4;-1)$. B. $(-5;-4;1)$.

C. $(1;2;-1)$. D. $(-1;-2;1)$.

Lời giải

Chọn A

Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên $\begin{cases}x_C=3.2-1-0\\y_C=3.1-0+1\\z_C=3.0+1-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_C=5\\y_C=4\\z_C=-1\end{cases}$. Vậy C(5; 4; -1).

2.32. Trong không gian Oxyz cho $\vec{a}=(2;1;-3),\vec{b}=(-2;-1;2)$. Tích vô hướng $\vec{a}\cdot\vec{b}$ bằng

A. -2 . B. -11 . C. 11 . D. 2.

Lời giải

Chọn B

$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\cdot(-2)+1\cdot(-1)+(-3)\cdot2=-11$.

2.33. Trong không gian Oxyz cho $\vec{a}=(2;1;-2),\vec{b}=(0;-1;1)$. Góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng

A. 60°. B. 135°. C. 120°. D. 45°.

Lời giải

Chọn B

Có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{2\cdot 0+1\cdot(-1)+(-2)\cdot 1}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{0+1+1}}=\dfrac{-1}{\sqrt{2}}$. Suy ra $(\vec{a},\vec{b})=135^{\circ}$

2.34. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(-2;2;2),\vec{b}=(1;-1;-2)$. Côsin của góc giữa hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$ bằng

A. $\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$.   B. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.   C. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$.   D. $\dfrac{-\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải

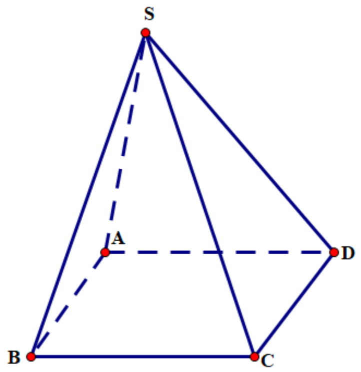
Chọn A

Có $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot\vec{b}|}=\dfrac{(-2)\cdot 1+2\cdot(-1)+2\cdot(-2)}{\sqrt{4+4+4}\cdot\sqrt{1+1+4}}=\dfrac{-2\sqrt{2}}{3}$.

B – TỰ LUẬN

2.35. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Chứng minh rằng:
$\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

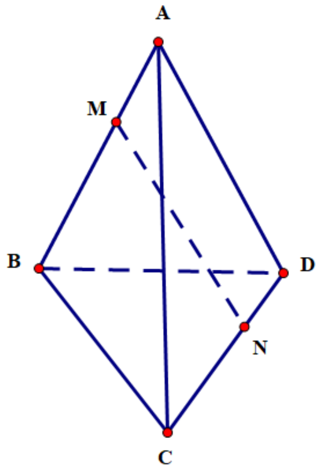
Lời giải



Vì ABCD là hình chữ nhật nên $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\Leftrightarrow\overrightarrow{SD}-\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{SC}-\overrightarrow{SB}\Leftrightarrow\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$

2.36. Cho tứ diện $ABCD$, lấy hai điểm M,N thoả mãn $\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$ và $\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{DN}$.
Hãy biểu diễn $\overrightarrow{MN}$ theo $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Lời giải



Có$\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}=\vec{0}$

$\overrightarrow{NC}=2\overrightarrow{DN}\Leftrightarrow 2\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0}$

Có$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\Rightarrow 2\overrightarrow{MN}=2\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{DN}\,(1)$

$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\,(2)$

Cộng từng vế (1) và (2): $3\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{DN}$

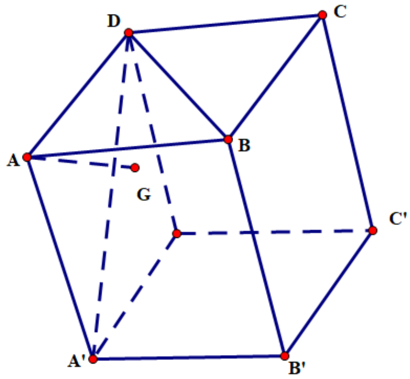
$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MA})+\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}+(\overrightarrow{CN}+2\overrightarrow{DN})\Leftrightarrow 3\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{AD}\Leftrightarrow \overrightarrow{MN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

2.37. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$, gọi G là trọng tâm của tam giác BDA' :

a) Biểu diễn $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AA'}$.

b) Từ câu a, hãy chứng tỏ ba điểm A,G và C' thẳng hàng.

Lời giải



a) Vì G là trọng tâm của tam giác BDA' nên

$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{GA'}=\vec{0}\,(1)\Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AA'}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\vec{0}\Leftrightarrow \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\right)$

b) Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên theo quy tắc hình hộp ta có: $\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}\,(2)$

Từ (1) và (2), ta có $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}$.

Vậy ba điểm A, G và C' thẳng hàng.

2.38. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(2;-1;3), B(1;1;-1)$ và $C(-1;0;2)$.

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm M thuộc trục Oz sao cho đường thẳng BM vuông góc với đường thẳng AC.

Lời giải

a) Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_G=\frac{2+1-1}{3} \\ y=\frac{-1+1+0}{3} \\ z=\frac{3-1+2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\frac{2}{3} \\ y=0 \\ z=\frac{4}{3} \end{cases}$.

Vậy $G\left(\frac{2}{3};0;\frac{4}{3}\right)$.

b) Vì M thuộc Oz nên $M(0;0;z)$.

Khi đó $\overrightarrow{BM}=(-1;-1;z+1)$ và $\overrightarrow{AC}=(-3;1;-1)$.

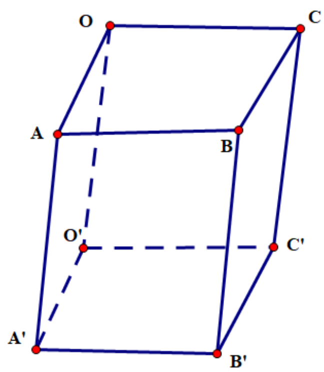
Vì đường thẳng BM vuông góc với đường thẳng AC nên $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\Leftrightarrow(-1)\cdot(-3)+(-1)\cdot 1+(z+1)\cdot(-1)=0 \Leftrightarrow z=1$$

Vậy $M(0;0;1)$.

2.39. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $OABC.O'A'B'C'$ và các điểm $A(2;3;1), C(-1;2;3)$ và $O'(1;-2;2)$. Tìm toạ độ các đỉnh còn lại của hình hộp.

Lời giải



Ta có O(0; 0; 0)

Gọi $B(x_B;y_B;z_B)$.

Ta có $\overrightarrow{OA}=(2;3;1);\overrightarrow{OC}=(-1;2;3);\overrightarrow{OB}=(x_B;y_B;z_B)$

Vì OABC là hình bình hành nên theo quy tắc hình bình hành ta có:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=2-1\\y_B=3+2\\z_B=1+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_B=1\\y_B=5\\z_B=4\end{cases}$$

Vậy $B(1;5;4)$.

Có $\overrightarrow{OO'}=(1;-2;2);\overrightarrow{CC'}=(x_{C'}+1;y_{C'}-2;z_{C'}-3)$;

$\overrightarrow{BB'}=(x_{B'}-1;y_{B'}-5;z_{B'}-4);\overrightarrow{AA'}=(x_{A'}-2;y_{A'}-3;z_{A'}-1)$

Vì $OABC.O'A'B'C'$ là hình hộp nên: $\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{CC'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{C'}+1=1\\y_{C'}-2=-2\\z_{C'}-3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{C'}=0\\y_{C'}=0\\z_{C'}=5\end{cases}$

$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{AA'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{A'}-2=1\\y_{A'}-3=-2\\z_{A'}-1=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{A'}=3\\y_{A'}=1\\z_{A'}=3\end{cases}$. Vậy $A'(3;1;3)$.

$\overrightarrow{OO'}=\overrightarrow{BB'}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{B'}-1=1\\y_{B'}-5=-2\\z_{B'}-4=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_{B'}=2\\y_{B'}=3\\z_{B'}=6\end{cases}$ Vậy $B'(2;3;6)$.

2.40. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{a}=(-2;1;2),\vec{b}=(1;1;-1)$.

a) Xác định toạ độ của vectơ $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}$.

b) Tính độ dài vectơ $\vec{u}$.

c) Tính $\cos(\vec{a},\vec{b})$.

Lời giải

a) Có $2\vec{b}=(2;2;-2)$. Khi đó $\vec{u}=\vec{a}-2\vec{b}=(-2-2;1-2;2+2)=(-4;-1;4)$.

b) $|\vec{u}|=\sqrt{16+1+16}=\sqrt{33}$.

c) $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{(-2)\cdot1+1\cdot1+2\cdot(-1)}{\sqrt{4+1+4}\cdot\sqrt{1+1+1}}=\dfrac{-\sqrt{3}}{3}$.

2.41. Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(4;2;-1),B(1;-1;2)$ và $C(0;-2;3)$.

a) Tìm toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và tính độ dài đoạn thẳng AB

b) Tìm tọa độ điểm M sao cho $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$.

c) Tìm toạ độ điểm N thuộc mặt phẳng (Oxy), sao cho A,B,N thẳng hàng.

Lời giải

a) Ta có $\overrightarrow{AB}=(1-4;-1-2;2+1)=(-3;-3;3)$. Có $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+3^2}=3\sqrt{3}$.

b) Giả sử $M(x;y;z)$. Khi đó $\overrightarrow{CM}=(x;y+2;z-3)$

vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CM}=\vec{0}$ nên $\begin{cases}-3+x=0\\-3+y+2=0\\3+z-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\\z=0\end{cases}$

Vậy M(3; 1; 0).

c) Giả sử $N(x;y;0)$. Khi đó $\overrightarrow{AN}=(x-4;y-2;1);\overrightarrow{BN}=(x-1;y+1;-2)$.

Để A, B, N thẳng hàng thì $\overrightarrow{AN}$ và $\overrightarrow{BN}$ cùng phương tức là $\overrightarrow{AN}=k\overrightarrow{BN}$.

Suy ra $\begin{cases}(x-4)=k(x-1)\\y-2=k(y+1)\\1=k(-2)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-4)=-\dfrac{1}{2}(x-1)\\y-2=-\dfrac{1}{2}(y+1)\\k=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\\k=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Vậy $N(3;1;0)$.

2.42. Hình 2.53 minh hoạ một chiếc đèn được treo cách trần nhà là $0,5\,\text{m}$, cách hai tường lần lượt là $1,2\,\text{m}$ và $1,6\,\text{m}$. Hai bức tường vuông góc với nhau và cùng vuông góc với trần nhà. Người ta di chuyển chiếc đèn đó đến vị trí mới cách trần nhà là $0,4\,\text{m}$, cách hai tường đều là $1,5\,\text{m}$.

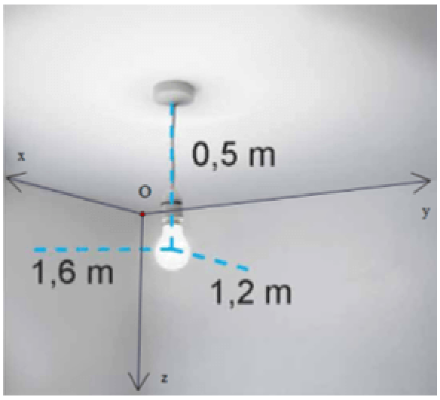
a) Lập một hệ trục toạ độ Oxyz phù hợp và xác định toạ độ của bóng đèn lúc đầu và sau khi di chuyển.

b) Vị trí mới của bóng đèn cách vị trí ban đầu là bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Hình 2.53

Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxyz như hình vẽ.



Tọa độ bóng đèn lúc đầu là $A(1,2;1,6;0,5)$.

Tọa độ bóng đèn lúc sau là $B(1,5;1,5;0,4)$.

b) Có $\overrightarrow{AB}=(0,3;-0,1;-0,1)$. Khi đó $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0,3^2+(-0,1)^2+(-0,1)^2}\approx 0,3$.

Vậy vị trí mới cách vị trí ban đầu của bóng đèn là $0,3\text{m}$.

PHẦN 2. ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG

ĐỀ KIỂM TRA KẾT THÚC CHƯƠNG 2

PHẦN 1. TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1: Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{u}=(-1;3;2)$, $\vec{v}=(-3;-1;2)$ khi đó $\vec{u}.\vec{v}$ bằng

A. 10. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn D

$\vec{u}.\vec{v}=3-3+4=4$.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba véctơ $\vec{a}=(-1;1;0)$, $\vec{b}=(1;1;0)$, $\vec{c}=(1;1;1)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. $\vec{b}\perp\vec{c}$. **B.** $|\vec{c}|=\sqrt{3}$. **C.** $|\vec{a}|=\sqrt{2}$. **D.** $\vec{b}\perp\vec{a}$.

Lời giải

Chọn A

$\vec{b}.\vec{c}=2\neq 0\Rightarrow\vec{b}$ và $\vec{c}$ không vuông góc với nhau.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$ biểu diễn của các vectơ đơn vị là $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}-3\vec{j}$. Tọa độ của vectơ $\vec{a}$ là

A. $(1;2;-3)$. **B.** $(2;-3;1)$. **C.** $(2;1;-3)$. **D.** $(1;-3;2)$.

Lời giải

Chọn B

$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{k}-3\vec{j}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ nên $\vec{a}=(2;-3;1)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;2;3)$. Tìm tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz).

A. $A_1(1;0;0)$. **B.** $A_1(0;2;3)$. **C.** $A_1(1;0;3)$. **D.** $A_1(1;2;0)$.

Lời giải

Chọn B

Tọa độ điểm A_1 là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) là: $A_1(0;2;3)$.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;-1)$ và $B(1;4;3)$. Độ dài đoạn AB là:

A. $2\sqrt{13}$. **B.** $2\sqrt{3}$. **C.** $\sqrt{6}$. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(0;6;4)$ nên $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{0^2+6^2+4^2}=2\sqrt{13}$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC với $A(1;0;2)$, $B(1;1;4)$, $C(1;-4;0)$. Trọng tâm G của tam giác ABC có tọa độ là

A. $(1;-1;2)$. **B.** $(-1;-1;2)$. **C.** $(1;1;2)$. **D.** $(1;-1;-2)$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $G(x_G;y_G;z_G)$ ta có $\begin{cases} x_G=\dfrac{1}{3}(x_A+x_B+x_c)=1 \\ y_G=\dfrac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)=-1 \\ z_G=\dfrac{1}{3}(z_A+z_B+z_C)=2 \end{cases} \Rightarrow G(1;-1;2)$.

Câu 7: Cho hình bình hành $ABCD$ với $A(-2;\ 3;\ 1), B(3;\ 0;-1), C(6;\ 5;\ 0)$. Tọa độ đỉnh D là

A. $D(1;\ 8;-2)$. **B.** $D(11;\ 2;\ 2)$. **C.** $D(1;\ 8;\ 2)$. **D.** $D(11;\ 2;-2)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;\ -2;\ -1)$ và $A(1;\ -1;\ 2)$. Tọa độ điểm M thuộc đoạn AB sao cho $MA=2MB$ là

A. $M\left(\dfrac{2}{3};-\dfrac{4}{3};\ 1\right)$. **B.** $M\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{3}{2};\ \dfrac{1}{2}\right)$. **C.** $M(2;\ 0;\ 5)$. **D.** $M(-1;-3;-4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{MB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_M - x_A = 2(x_B - x_M) \\ y_M - y_A = 2(y_B - y_M) \\ z_M - z_A = 2(z_B - z_M) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x_M = 2x_B + x_A \\ 3y_M = 2y_B + y_A \\ 3z_M = 2z_B + z_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{2}{3} \\ y_M = -\dfrac{4}{3} \\ z_M = 1 \end{cases}.$$

Câu 9: Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox cách đều hai điểm $A(1;2;-1)$ và điểm $B(2;1;2)$.

A. $M\left(\frac{1}{3};0;0\right)$. **B.** $M\left(\frac{1}{2};0;0\right)$. **C.** $M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$. **D.** $M\left(\frac{2}{3};0;0\right)$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $M(x;0;0)\in Ox$.

Ta có:

$MA=MB \Leftrightarrow MA^2=MB^2 \Leftrightarrow (1-x)^2+4+1=(2-x)^2+1+4 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2};0;0\right)$.

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(0;3;1)$, $\vec{b}=(3;0;-1)$. Tính $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

A. $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{100}$. **B.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{100}$. **C.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\frac{1}{10}$. **D.** $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{1}{10}$.

Lời giải

Chọn C

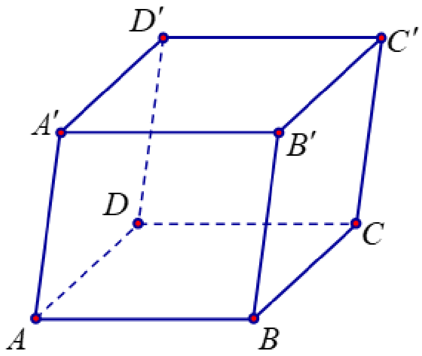
Ta có $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{0.3+3.0+1.(-1)}{\sqrt{0^2+3^2+1^2}.\sqrt{3^2+0^2+(-1)^2}} \Leftrightarrow \cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-\dfrac{1}{10}$.

Câu 11: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0;\,0;\,0)$, $B(3;\,0;\,0)$, $D(0;\,3;\,0)$, $D'(0;\,3;\,-3)$. Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là

A. $(1;\,1;\,-2)$. **B.** $(2;\,1;\,-2)$. **C.** $(1;\,2;\,-1)$. **D.** $(2;\,1;\,-1)$.

Lời giải

Chọn B



Cách 1: Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;\,0;\,0)$. Gọi $C(x;y;\,z)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=(x;\,y-3;\,z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Rightarrow(x;\,y;\,z)=(3;\,3;\,0)\Rightarrow C(3;\,3;\,0)$

Ta có $\overrightarrow{AD}=(0;\,3;\,0)$. Gọi $A'(x';\,y';\,z')\Rightarrow\overrightarrow{A'D'}=(-x';\,3-y';\,-3-z')$

$ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}\Rightarrow(x';\,y';\,z')=(0;\,0;\,-3)\Rightarrow A'(0;\,0;-3)$

Gọi $B'(x_0;\,y_0;\,z_0)\Rightarrow\overrightarrow{A'B'}=(x_0;\,y_0;\,z_0+3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}\Rightarrow(x_0;\,y_0;\,z_0)=(3;\,0;-3)\Rightarrow B'(3;\,0;-3)$

G là trọng tâm tam giác ABC $\Rightarrow\begin{cases}x_G=\dfrac{0+3+3}{3}=2\\ y_G=\dfrac{0+0+3}{3}=1\\ z_G=\dfrac{-3-3+0}{3}=-2\end{cases}\Rightarrow G(2;\,1;\,-2)$.

Cách 2: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng BD'.Ta có $I\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.Gọi $G(a;b;c)$ là trọng tâm tam giác $A'B'C$

Ta có: $\overrightarrow{DI}=3\overrightarrow{IG}$ với $\begin{cases}\overrightarrow{DI}=\left(\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{2}\right)\\ \overrightarrow{IG}=\left(a-\dfrac{3}{2};b-\dfrac{3}{2};c+\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}$. Do đó: $\begin{cases}\dfrac{3}{2}=3\left(a-\dfrac{3}{2}\right)\\ -\dfrac{3}{2}=3\left(b-\dfrac{3}{2}\right)\\ -\dfrac{3}{2}=3\left(c+\dfrac{3}{2}\right)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=1\\ c=-2\end{cases}$.

Vậy $G(2;1;-2)$.

Câu 12: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(-4;7;5)$. Tọa độ chân đường phân giác trong góc B của tam giác ABC là

A. $\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$. **B.** $\left(\dfrac{11}{3};-2;1\right)$. **C.** $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};\dfrac{1}{3}\right)$. **D.** $(-2;11;1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{BA}=(-1;-3;4)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BA}\right|=\sqrt{26};\overrightarrow{BC}=(-6;8;2)\Rightarrow\left|\overrightarrow{BC}\right|=2\sqrt{26}$.

Gọi D là chân đường phân giác trong kẻ từ B lên AC của tam giác ABC

Suy ra : $\dfrac{DA}{DC}=\dfrac{BA}{BC}\Rightarrow \overrightarrow{DC}=-2\overrightarrow{DA}\Rightarrow D\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{11}{3};1\right)$.

PHẦN 2 : TRẮC NGHIỆM ĐÚNG- SAI

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có độ dài tất cả các cạnh đều bằng a.

a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông

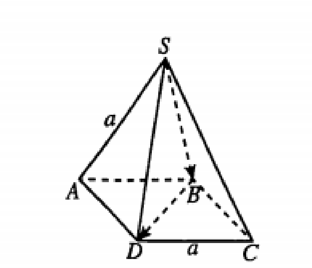
b) Tam giác SBD vuông cân tại S.

c) $(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BD})=45^{\circ}$.

d) $\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BD}=-a^2$.

Lời giải

Đáp án : a) Đ ; b) Đ ; c) S ; d) Đ



Hình 4

Vì tứ giác $ABCD$ là hình vuông có độ dài cạnh bằng a nên độ dài đường chéo BD bằng $a\sqrt{2}$.

Tam giác SBD có $SB=SD=a$ và $BD=a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD vuông cân tại S, suy ra $\widehat{SBD}=45^{\circ}$.

Do đó $(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BD})=180^{\circ}-\widehat{SBD}=135^{\circ}$. Suy ra

$\overrightarrow{SB}\cdot\overrightarrow{BD}=|\overrightarrow{SB}|\cdot|\overrightarrow{BD}|\cdot\cos 135^{\circ}=a\cdot a\sqrt{2}\cdot\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=-a^2$.

Câu 2: Trong không gian Oxyz cho các điểm $A(1;-2;3)$, $B(-2;1;2)$, $C(3;-1;2)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(-3;3;-1)$.

b) $\overrightarrow{AC}=(-2;-1;1)$.

c) $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AC}$.

d) Ba điểm A,B,C không thẳng hàng.

Lời giải

Đáp án : a) Đ ; b) S ; c) S ; d) Đ

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ có $A(2;-1;-2),B(3;1;2)$, $C(1;-1;1)$ và $D(x_D;y_D;z_D)$.

a) $\overrightarrow{AB}=(1;2;4)$.

b) $\overrightarrow{DC}=(1-x_D;-1-y_D;1-z_D)$.

c) $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$.

d) Toạ độ điểm D là $(0;3;3)$.

Lời giải

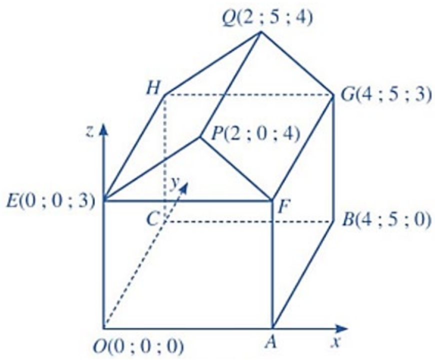
Đáp án : a) Đ ; b) S ; c) S ; d) Đ

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;4),\overrightarrow{DC}=\left(1-x_D;-1-y_D;1-z_D\right)$. Vì $ABCD$ là hình bình

hành nên $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$. Suy ra $\begin{cases}1-x_D=1\\-1-y_D=2\\1-z_D=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_D=0\\y_D=-3.\\z_D=-3\end{cases}$

$D(0;-3;-3)$.

Câu 4: Hình minh hoạ sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tọa độ điểm F là $(4;0;3)$.

b) Tọa độ $\overrightarrow{AH}=\left(4;5;3\right)$

c) $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AF}=3$

d) Góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$ bằng $26,6^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười của độ)

Lời giải

Đáp án : a) Đ ; b) S ; c) S ; d) Đ

a) Vì nền nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OABC$ là hình chữ nhật, suy ra$x_A=x_B=4$, $y_C=y_B=5$. Do A nằm trên trục Ox nên tọa độ điểm A là $(4;0;0)$. Tường nhà là hình chữ nhật nên tứ giác $OCHE$ là hình chữ nhật, suy ra $y_H=y_C=5$, $z_H=z_E=3$. Do H nằm trên mặt phẳng (Oyz) nên tọa độ điểm H là $(0;5;3)$. Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F=x_A=4;z_F=z_E=3$. Do F nằm trên mặt phẳng (Ozx) nên tọa độ điểm F là $(4;0;3)$.

b) Nên $\overrightarrow{AH}=\left(-4;5;3\right)$ và $\overrightarrow{AF}=(0;0;3)$

c) Suy ra $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{AF}=0+0+9=9$

d) Để tính góc dốc của mái nhà, ta đi tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG, hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$. Do mặt phẳng (Ozx) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$ nên góc PFE là góc phẳng nhị diện ứng với góc nhị diện đó. Ta có: $\overrightarrow{FP}=(-2;0;1), \overrightarrow{FE}=(-4;0;0)$.

Suy ra $\cos\widehat{PFE}=\cos(\overrightarrow{FP},\overrightarrow{FE})=\dfrac{\overrightarrow{FP}\cdot\overrightarrow{FE}}{|\overrightarrow{FP}|\cdot|\overrightarrow{FE}|}$

$$=\frac{(-2)\cdot(-4)+0\cdot 0+1\cdot 0}{\sqrt{(-2)^2+0^2+1^2}\cdot\sqrt{(-4)^2+0^2+0^2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

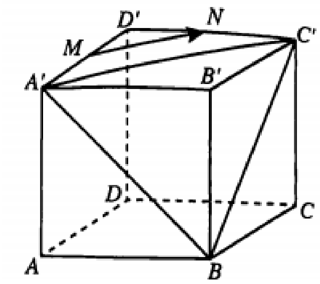
Do đó, $\widehat{PFE}\approx 26,6^{\circ}$. Vậy góc dốc của mái nhà khoảng $26,6^{\circ}$.

PHẦN 3. TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{A'B}$. Số đo của góc φ bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: $60°$



Vì $MN//A'C'$ nên $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{A'B}\right)=\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{A'B}\right)=\widehat{C'A'B}$.

Tam giác $C'A'B'$ là tam giác đều vì $ABCD\cdot A'B'C'D'$ là hình lập phương. Suy ra $\widehat{C'A'B}=60^{\circ}$.

Vậy $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{A'B}\right)=\widehat{C'A'B}=60^{\circ}$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD\cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{C'B}=na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Trả lời

Trả lời: $-0,5$

Vì $MN//A'C'$ nên $\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{C'B}\right)=\left(\overrightarrow{A'C'},\overrightarrow{C'B}\right)=180^{\circ}-\widehat{A'C'B}=120^{\circ}$.

Ta có: $MN=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}, C'B=a\sqrt{2}$. Suy ra

$$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{C'B}=|\overrightarrow{MN}|\cdot\left|\overrightarrow{C'B}\right|\cdot\cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{C'B}\right)=\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot a\sqrt{2}\cdot\cos 120^{\circ}=-0,5a^2.$$

Vậy $n=-0,5$.

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;3;5), B(1;1;3), C(4;-2;3)$. Số đo của góc $\widehat{ABC}$ bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 120°

Ta có: $\overrightarrow{BA}=(0;2;2), \overrightarrow{BC}=(3;-3;0)$. Suy ra

$ $\cos\widehat{ABC}=\cos(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=\dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\dfrac{0\cdot 3+2\cdot(-3)+2\cdot 0}{\sqrt{0^2+2^2+2^2}\cdot\sqrt{3^2+(-3)^2+0^2}}=\dfrac{-1}{2}.$

Suy ra góc $\widehat{ABC}=120^{\circ}$.

Câu 4: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $M(3;2;8)$, $N(0;1;3)$ và $P(2;m;4)$. Tìm m để tam giác MNP vuông tại N.

Lời giải

Trả lời: -10

Ta có $\overrightarrow{NM}=(3;1;5)$, $\overrightarrow{NP}=(2;m-1;1)$.

Do tam giác MNP vuông tại N nên $\overrightarrow{NM}.\overrightarrow{NP}=0 \Rightarrow 6+m-1+5=0 \Rightarrow m=-10$.

Câu 5: Một người đứng ở mặt đất điều khiển hai flycam để phục vụ trong một chương trình của đài truyền hình. Flycam I ở vị trí A cách vị trí điều khiển $150\,\text{m}$ về phía nam và $200\,\text{m}$ về phía đông, đồng thời cách mặt đất $50\,\text{m}$. Flycam II ở vị trí B cách vị trí điều khiển $180\,\text{m}$ về phía bắc và $240\,\text{m}$ về phía tây, đồng thời cách mặt đất $60\,\text{m}$.
Chọn hệ trục toạ độ Oxyz với gốc O là vị trí người điều khiển, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hương trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo mét. Khoảng cách giữa hai flycam đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

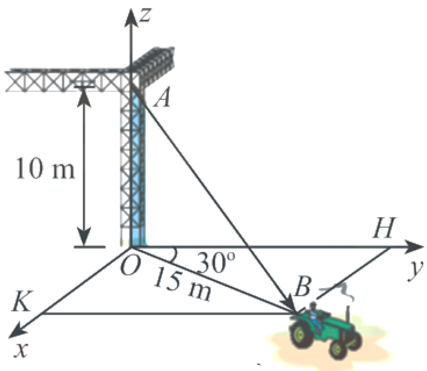
Trả lời: 550

Vị trí A, B có toạ độ lần lượt là: $(150;200;50), (-180;-240;60)$.

Suy ra khoảng cách giữa hai flycam đó bằng:

$$AB=\sqrt{(-180-150)^2+(-240-200)^2+(60-50)^2}\approx 550(\text{m}).$$

Câu 6: Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ toạ độ $Oxyz$ như Hình với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Tìm được tọa độ của vectơ $\overrightarrow{AB}=(a;b;c)$, khi đó $a+c=?$



Lời giải

Trả lời: $2,5$

$\overrightarrow{OA}=10\vec{k}$ => $A(0;0;10)$

Ta có: $OH=OB\cdot\cos 30^{\circ}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$

$OK=OB\cdot\cos\left(90^{\circ}-30^{\circ}\right)=\dfrac{15}{2}$

$\Rightarrow B\left(\dfrac{15}{2};\dfrac{15\sqrt{3}}{2};0\right)$

=> $\overrightarrow{AB}=\left(\dfrac{15}{2};\dfrac{15\sqrt{3}}{2};-10\right)$

Vậy $a+c=2,5$