Mục lục

Chương 1

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

§1. GÓC LƯỢNG GIÁC

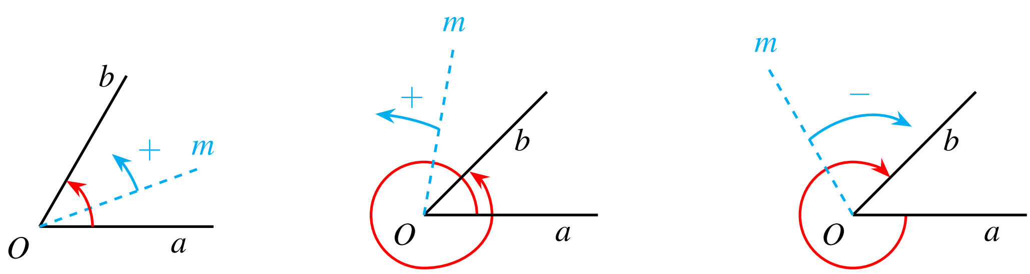
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. GÓC LƯỢNG GIÁC

Góc lượng giác và số đo của góc lượng giác: Trong mặt phẳng, cho hai tia Oa, Ob. Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này.

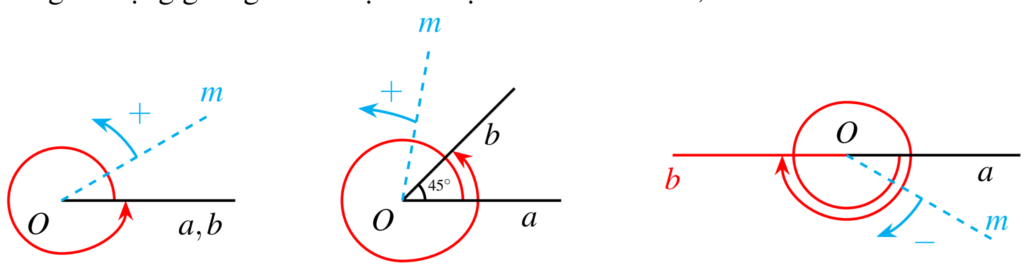
Ghi nhớ 1:

- Nếu tia Om quay quanh điểm O, theo một chiều nhất định từ Oa đến Ob, thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Oa, tia cuối Ob và kí hiệu là (Oa, Ob).



Ghi nhớ 2:

- Khi tia Om quay một góc α°, ta nói số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) bằng α°, kí hiệu sđ$(Oa, Ob) = \alpha^\circ$ hoặc $(Oa, Ob) = \alpha^\circ$.
- Mỗi góc lượng giác gốc O được xác định bởi tia đầu Oa, tia cuối Ob và số đo α° của nó.



sđ$(Oa, Ob) = 360^\circ$ sđ$(Oa, Ob) = 405^\circ$ sđ$(Oa, Ob) = -540^\circ$

- Số đo của các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có công thức tổng quát là

$$\boxed{\text{sđ}(Oa, Ob) = \alpha^\circ + k360^\circ,\ \text{với } k \in \mathbb{Z}}$$

Hệ thức Chasles: Với ba tia Oa, Ob, Oc bất kì, ta có

$$\text{sđ}(Oa, Ob) + \text{sđ}(Ob, Oc) = \text{sđ}(Oa, Oc) + k360^\circ \quad \text{với } k \in \mathbb{Z}.$$

2. ĐƠN VỊ ĐO GÓC VÀ ĐỘ DÀI CUNG TRÒN

Đơn vị đo góc và cung tròn

- Đơn vị độ ($^\circ$): Chia đường tròn thành 360 cung tròn bằng nhau thì góc ở tâm chắn bởi cung đó sẽ có số đo là 1°.
- Đơn vị rađian (rad): Trên đường tròn, nếu một cung tròn có độ dài bằng bán kính thì ta nói cung đó có số đo là 1 rad. Khi đó, góc ở tâm chắn cung đó cũng có số đo 1 rad.

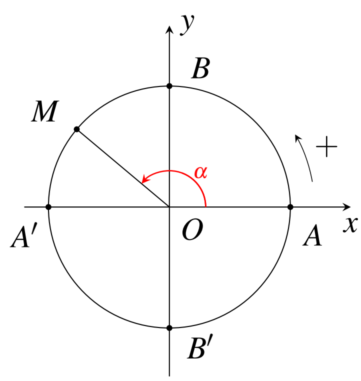
  Khi viết số đo một góc theo đơn vị rad, ta thường không viết chữ rad sau số đo. Chẳng hạn góc $\frac{\pi}{2}$ ta hiểu là góc $\frac{\pi}{2}$ rad.
- Mối liên hệ giữa độ và rađian: Độ dài đường tròn là $2\pi R$ nên có số đo là 2π rad tương ứng với 360°. Suy ra

$$1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{rad} \quad \text{và} \quad 1\,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

Độ dài cung tròn: Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì sẽ có độ dài là $l = R\alpha$.

3. ĐƯỜNG TRÒN LƯỢNG GIÁC

- Trong mặt phẳng tọa độ, đường tròn tâm O bán kính 1, cùng với gốc $A(1;0)$ và chiều quay dương (như quy ước) gọi là đường tròn lượng giác.
- Cho góc lượng giác số đo α. Trên đường tròn lượng giác, tồn tại duy nhất điểm M sao cho góc lượng giác (OA, OM) bằng α (hình bên). Khi đó, M gọi là điểm biểu diễn của góc có số đo α trên đường tròn lượng giác.



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Đổi đơn vị giữa độ và rađian. Độ dài cung tròn

☑ Sử dụng cộng thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo rađian:

- $1^\circ = \frac{\pi}{180}\,\text{rad}$
- $1\,\text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

☑ Xét đường tròn có bán kính R.

- Cung tròn có số đo α $(0 \le \alpha \le 2\pi)$ thì có độ dài là $l = R\alpha$.
- Cung tròn có số đo a° $(0 \le a \le 360)$ thì có độ dài là $l = \frac{\pi a}{180}.R$.

Ví dụ 1. Đổi số đo của các góc sau ra rađian.

a) 72°; b) 600°; c) $-37^\circ45'30''$.

Ví dụ 2. Đổi số đo của các góc sau ra độ.

a) $\dfrac{5\pi}{18}$; b) $\dfrac{3\pi}{5}$; c) -4.

Ví dụ 3. Một đường tròn có bán kính 36 m. Tìm độ dài của cung, biết số đo tương ứng

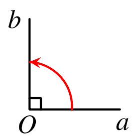
a) $\dfrac{3\pi}{4}$ b) 51° c) $\dfrac{1}{3}$

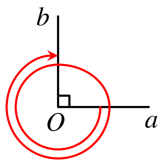
Ví dụ 4. Một hải lí là độ dài cung tròn xích đạo có số đo $\left(\dfrac{1}{60}\right)^\circ = 1'$. Biết độ dài xích đạo là 40.000 km, hỏi một hải lí dài bao nhiêu km?

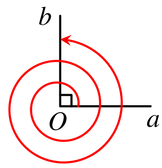
DT 2 Số đo của góc lượng giác. Hệ thức Chasles

- Khi xác định số đo của góc lượng giác, ta cần chú ý đến chiều quay (chiều dương ngược kim đồng hồ, chiều âm cùng kim đồng hồ). Từ đó xác định chính xác số đo của góc lượng giác (Oa, Ob).
- Giả sử α° là một số đo của góc lượng giác (Oa, Ob). Suy ra số đo các góc lượng giác có cùng tia đầu Oa, tia cuối Ob có dạng $\alpha^\circ + k\cdot 360^\circ$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hệ thức Chasles: $\text{sđ}(Ob, Oc) = \text{sđ}(Oa, Oc) - \text{sđ}(Oa, Ob) + k360^\circ$ với $k \in \mathbb{Z}$.

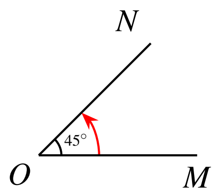
Ví dụ 5. Xác định số đo của góc lượng giác (Oa, Ob) được biểu diễn trong hình bên dưới.

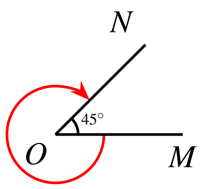
a) 

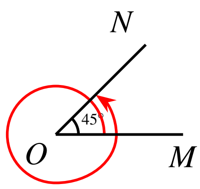
b) 

c) 

Ví dụ 6. Cho $\widehat{MON} = 45^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên dưới và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM, ON).

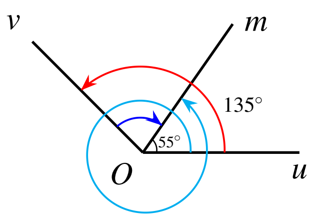
a) 

b) 

c) 

Ví dụ 7.

Xác định số đo các góc lượng giác (Ou, Ov), (Ov, Om) và (Ou, Om) được minh họa ở hình bên.



Ví dụ 8. Hãy biểu diễn trên mặt phẳng góc lượng giác trong mỗi trường hợp sau:

a) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo 510°;

b) Góc lượng giác gốc O có tia đầu Ou, tia cuối Ov và có số đo $-\dfrac{7\pi}{6}$.

Ví dụ 9. Cho góc lượng giác (Ou,Ov) có số đo là $\dfrac{3\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou,Ow) có số đo là $\dfrac{5\pi}{4}$. Tìm số đo các góc lượng giác (Ov,Ow).

DT 3 Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác

Chọn gốc $A(1;0)$ làm điểm đầu. Để biểu diễn góc lượng giác có số đo α trên đường tròn lượng giác ta cần chọn điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA,OM)=\alpha$.

⚠ *Nếu $|\alpha|>2\pi$ ta phân tích $\alpha=\beta+k2\pi$, với $-\pi<\beta<\pi$. Khi đó, ta chỉ cần xác định điểm cuối M trên đường tròn lượng giác sao cho $(OA,OM)=\beta$.*

Ví dụ 10. Biểu diễn các góc (cung) lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo sau

a) $\dfrac{\pi}{4}$; b) $-\dfrac{11\pi}{2}$; c) 120°; d) -765°.

Ví dụ 11. Trên đường tròn lượng giác, biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau (với k là số nguyên tùy ý).

a) $x_1=k\pi$; b) $x_2=\dfrac{\pi}{3}+k\pi$.

DT 4 Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 12. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn Bưu điện Hà Nội theo thứ tự dài 1,75 mét và 1,26 mét. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút và kim giờ vạch được cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu mét?

Ví dụ 13. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km. Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: 1 h; 3 h; 5 h.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

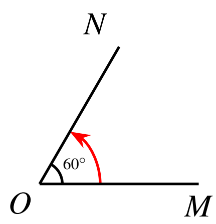
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

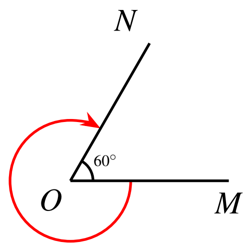
1 Tính độ dài cung tròn trong các trường hợp sau

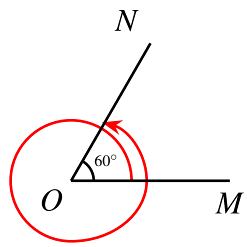
a) Đường tròn có bán kính $R=5$ và cung có số đo 72°.

b) Đường tròn có bán kính $R=18$ và cung có số đo 150°.

2 Cho $\widehat{MON}=60^\circ$. Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên dưới và viết công thức tổng quát của số đo góc lượng giác (OM,ON).

a) 

b) 

c) 

3 Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác có số đo như sau:

a) $\dfrac{9\pi}{4}$. b) -765°. c) $x = k\pi$, với $k \in \mathbb{Z}$.

4 Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo $-\dfrac{\pi}{7}$. Trong các số $-\dfrac{29\pi}{7}; -\dfrac{22}{7}; \dfrac{6\pi}{7}; \dfrac{41\pi}{7}$, những số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối với góc đã cho?

5 Hai góc lượng giác có số đo $\dfrac{39\pi}{7}$ và $\dfrac{m\pi}{9}$ (m là số nguyên) có thể cùng tia đầu, tia cuối được không?

6 Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo -270° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo 135°. Tính số đo của các góc lượng giác (Ou, Ov).

7 Biểu diễn các cung lượng giác có số đo $x = \dfrac{k\pi}{2}$ với k là số nguyên tùy ý.

8 Bánh xe có đường kính (tính cả lốp) là 55 cm. Nếu xe chạy với vận tốc 40 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Đổi số đo của góc 108° sang đơn vị radian.

A. $\dfrac{3\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{10}$. **C.** $\dfrac{3\pi}{5}$. **D.** $\dfrac{\pi}{4}$.

Câu 2. Đổi số đo của góc $\dfrac{\pi}{12}$ rad sang đơn vị độ.

A. 6°. **B.** 15°. **C.** 10°. **D.** 5°.

Câu 3. Trên đường tròn cung có số đo 1 rad là?

A. Cung có độ dài bằng nửa đường kính.
B. Cung có độ dài bằng đường kính.
C. Cung có độ dài bằng 1.
D. Cung tương ứng với góc ở tâm 60°.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $1 \text{ rad} = 60^\circ$. **B.** $1 \text{ rad} = \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$. **C.** $1 \text{ rad} = 1^\circ$. **D.** $1 \text{ rad} = 180^\circ$.

Câu 5. Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Số đo *radian* của cung tròn đó là

A. 3. **B.** 4. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 6. Đổi số đo của góc 70° sang đơn vị radian.

A. $\dfrac{7}{18}$. **B.** $\dfrac{7\pi}{18}$. **C.** $\dfrac{70}{\pi}$. **D.** $\dfrac{7}{18\pi}$.

Câu 7. Đổi số đo của góc $-\dfrac{3\pi}{16}$ rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. $-33^\circ 45'$. **B.** $-32^\circ 55$. **C.** $33^\circ 45'$. **D.** $-29^\circ 30'$.

Câu 8. Đổi số đo của góc -5 rad sang đơn vị độ, phút, giây.

A. -286°. **B.** $286^\circ 28' 44''$. **C.** $-286^\circ 44' 28''$. **D.** $-286^\circ 28' 44''$.

Câu 9. Đổi số đo của góc $45^\circ 32'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần nghìn.

A. $0{,}794$. **B.** $0{,}7947$. **C.** $0{,}795$. **D.** $0{,}7948$.

Câu 10. Tính độ dài ℓ của cung trên đường tròn có bán kính bằng 20 cm và số đo $\dfrac{\pi}{16}$.

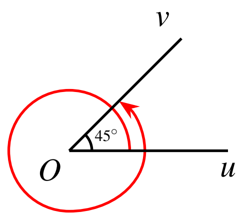
A. $\ell = 2{,}94$ cm. **B.** $\ell = 3{,}39$ cm. **C.** $\ell = 1{,}49$ cm. **D.** $\ell = 3{,}93$ cm.

Câu 11. Tính độ dài của cung trên đường tròn có số đo 1,5 và bán kính bằng 20 cm.

A. 40 cm. **B.** 60 cm. **C.** 30 cm. **D.** 20 cm.

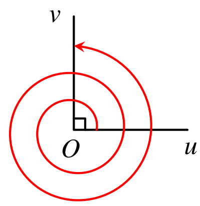
Câu 12. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

A. 405°. **B.** 385°. **C.** -405°. **D.** 45°.



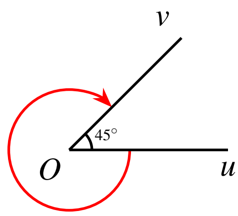
Câu 13. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

A. 450°. **B.** -450°. **C.** 810°. **D.** 90°.



Câu 14. Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình bên.

A. 45°. **B.** -315°. **C.** 315°. **D.** 405°.



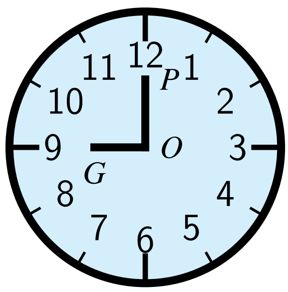
Câu 15. Cho góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo là $-\dfrac{\pi}{4}$, góc lượng giác (Ou, Ow) có số đo là $\dfrac{3\pi}{4}$. Tìm số đo của các góc lượng giác (Ov, Ow).

A. $\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **B.** $k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **C.** $\pi + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$. **D.** $k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 16. Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo các góc lượng giác (OG, OP) là

A. $-270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $-90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

C. $90^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.



Câu 17. Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A. Điểm M thuộc đường tròn sao cho góc lượng giác (OA, OM) có số đo 45°. Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox. Số đo các góc lượng giác (OA, ON) là

A. $135^\circ + k360^\circ$. **B.** -45°.

C. 315°. **D.** $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 18. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

A. $\dfrac{k\pi}{3}$. **B.** $k\pi$. **C.** $\dfrac{k2\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{k\pi}{2}$.

Câu 19. Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu độ.

A. $\dfrac{5}{8}\pi$. **B.** $\dfrac{8}{5}\pi$. **C.** $\dfrac{5}{3}\pi$. **D.** $\dfrac{3}{5}\pi$.

Câu 20. Trên đường tròn lượng giác gốc A, cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

A. $\dfrac{k2\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{k\pi}{2}$. **C.** $\dfrac{k\pi}{3}$. **D.** $k\pi$.

§2. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

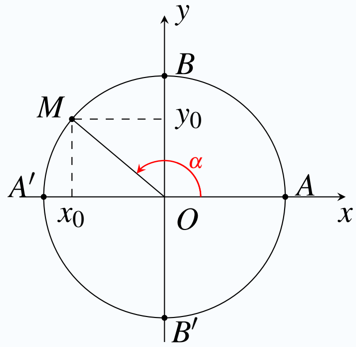
Ghi nhớ 1: Giả sử $M(x_0; y_0)$ trên đường tròn lượng giác biểu diễn cho góc lượng giác có số đo α.

① Tung độ y_0 của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin\alpha$, hay $\sin\alpha = y_0$.

② Hoành độ x_0 của điểm M gọi là côsin của α và kí hiệu là $\cos\alpha$, hay $\cos\alpha = x_0$.

③ Nếu $x_0 \neq 0$ thì tỉ số $\dfrac{y_0}{x_0}\,\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là tang của góc α, kí hiệu $\tan\alpha$. Nghĩa là $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, với $\cos\alpha \neq 0$.

④ Nếu $y_0 \neq 0$ thì tỉ số $\dfrac{x_0}{y_0}\,\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là côtang của góc α, kí hiệu $\cot\alpha$. Nghĩa là $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, với $\sin\alpha \neq 0$.



Ghi nhớ 2: Ta có các kết quả sau được suy ra từ định nghĩa

① Vì $-1 \leq x_0; y_0 \leq 1$ nên

$$\boxed{-1 \leq \sin\alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1.}$$

② $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$. Hơn nữa, $\forall k \in \mathbb{Z}$ ta có

$$\boxed{\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha\ ; \quad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha.}$$

③ $\tan\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$; $\cot\alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi\,(k \in \mathbb{Z})$ và

$$\boxed{\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha\ ; \quad \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha.}$$

2. HỆ THỨC CƠ BẢN GIỮA CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau:

① $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

② $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, với $\alpha \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

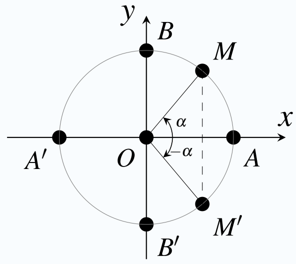
③ $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$, với $\alpha \neq k\pi$.

④ $\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$, với $\alpha \neq \dfrac{k\pi}{2}$.

3. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA CÁC GÓC CÓ LIÊN QUAN ĐẶC BIỆT

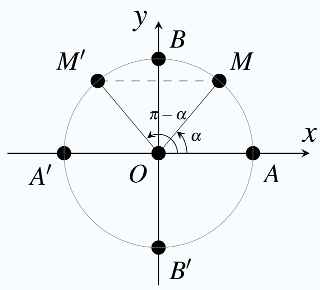
Góc đối nhau: $\boxed{\alpha \text{ và } -\alpha}$ tương ứng với hai điểm "đại diện" là điểm M và điểm M'. Muốn so sánh sin, ta so sánh tung độ; muốn so sánh cos, ta so sánh hoành độ. Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục hoành nên ta có kết quả sau:

- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
- $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$
- $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$



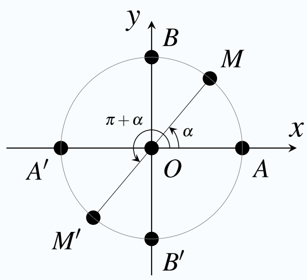
Góc bù nhau: $\boxed{\alpha \text{ và } \pi - \alpha}$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua trục tung nên ta có kết quả sau:

- $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
- $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$
- $\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$
- $\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$



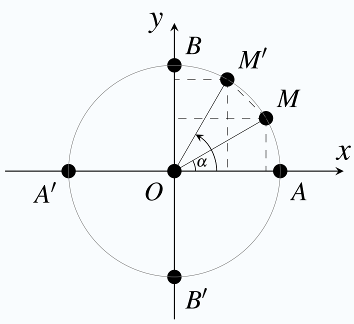
Góc hơn kém π: $\boxed{\alpha \text{ và } \alpha + \pi}$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' đối xứng nhau qua gốc O nên ta có kết quả sau:

- $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$
- $\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$
- $\tan(\alpha + \pi) = \tan\alpha$
- $\cot(\alpha + \pi) = \cot\alpha$



Góc phụ nhau: $\boxed{\alpha \text{ và } \dfrac{\pi}{2} - \alpha}$ Hình vẽ bên, hai điểm M và M' có hoành độ và tung độ ngược nhau nên ta có kết quả sau:

- $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$
- $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$
- $\cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan\alpha$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

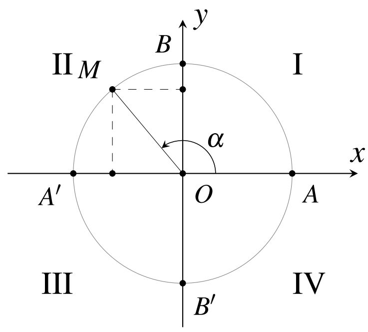
DT 1 Tính các giá trị lượng giác của một góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán.

Chú ý:

Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α, thì ta cần xem trên miền đó, các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào. Cụ thể:

Giá trị lượng giác	Góc phần tư I	II	III	IV
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$



Ví dụ 1. Tính các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \dfrac{2017\pi}{3}$.

Ví dụ 2. Tính các giá trị lượng giác (nếu có) của mỗi góc lượng giác sau

a) $\dfrac{\pi}{3} + k2\pi$.

b) $-\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi$.

c) $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$.

Ví dụ 3. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α, biết

a) $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$ và $90^\circ < \alpha < 180^\circ$;

b) $\sin\alpha = -\dfrac{2}{3}$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$.

c) $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

d) $\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Ví dụ 4. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α, biết

a) $\tan\alpha = 2$ và $\pi < \alpha < \dfrac{3\pi}{2}$;

b) $\tan\alpha = \sqrt{3}$ và $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$;

c) $\sin\alpha = 0{,}8$ và $\tan\alpha < 0$.

d) $\cos\alpha = 0{,}8$ và $\tan\alpha + \cot\alpha > 0$.

DT 2 Tính giá trị của biểu thức M liên quan đến các giá trị lượng giác

Hướng 1:

- Từ tỉ số lượng giác đã cho, ta tính toán các giá trị lượng giác có trong biểu thức M.
- Thay tất cả giá trị vừa tìm được vào M, suy ra kết quả.

Hướng 2:

- Biến đổi biểu thức M về tỉ số lượng giác đã cho.
- Thay kết quả vào M, suy ra kết quả.

Ví dụ 5. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{3}{5}$ với $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính giá trị của biểu thức $M = 3\sin\alpha + 2\cos\alpha$.

Ví dụ 6. Cho $\tan\alpha = 2$. Tính giá trị biểu thức $M = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

Ví dụ 7. Cho $\cot\alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $M = \dfrac{2\sin\alpha - 3\cos\alpha}{5\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$.

Ví dụ 8. Biết $\sin x = \dfrac{1}{3}$. Tính giá trị biểu thức $A = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$.

Ví dụ 9. Tính giá trị của biểu thức $B = \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \ldots + \cos 180^\circ$.

Ví dụ 10. Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức:

$$B(t) = 80 + 7\sin\frac{\pi t}{12}$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

a) 6 giờ sáng;

b) 10 giờ 30 phút sáng;

c) 12 giờ trưa;

d) 8 giờ tối.

DT 3 Rút gọn biểu thức, chứng minh đẳng thức

Ví dụ 11. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha\tan^2\alpha$;

b) $B = \dfrac{2\sin^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$;

c) $C = \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^4\alpha$;

d) $D = \dfrac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \dfrac{1}{1 + \cos\alpha}$;

Ví dụ 12. Chứng minh rằng $\dfrac{2 + \sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = 3\tan^2\alpha + 2$.

Ví dụ 13. Cho A, B, C là các góc của tam giác. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\sin(A + B) = \sin C$.

b) $\cos(A + B) + \cos C = 0$.

c) $\sin\dfrac{A + B}{2} = \cos\dfrac{C}{2}$.

d) $\tan(A - B + C) = -\tan 2B$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho $\cos\alpha = -\dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\sin\alpha$ và $\tan\alpha$.

2. Cho $\sin\alpha = \dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

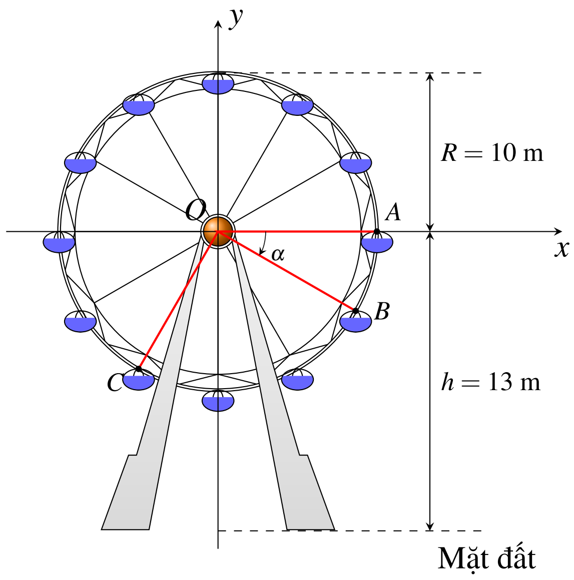
3. Cho $\tan\alpha = 3$ và $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$. Tính các giá trị lượng giác còn lại của góc α.

4. Cho tam giác ABC, chứng minh rằng $\sin(A + B + 2C) = -\sin C$.

5 Trong Hình bên, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C.

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13+10\sin\alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB. Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.

b) Khi điểm B cách mặt đất 4 m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



6 Rút gọn các biểu thức sau: (*không còn căn thức*)

a) $A=\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}}-\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$;　　b) $B=\sqrt{1-\cot^2 x\cdot\sin^2 x}+1$.

7 Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A=\sin^2 10^\circ+\sin^2 20^\circ+\cdots+\sin^2 170^\circ+\sin^2 180^\circ$.

b) $B=\tan 10^\circ.\tan 20^\circ\ldots\tan 80^\circ$.

c) $C=\cot 20^\circ+\cot 40^\circ+\cdots+\cot 140^\circ+\cot 160^\circ$.

8 Rút gọn các biểu thức sau:

a) $E=\dfrac{1-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\cos^2\alpha$;　　b) $F=2(\sin^4 x+\cos^4 x)+4\sin^2 x\cos^2 x$.

9 Rút gọn các biểu thức sau (*giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa*).

a) $A=\cos(5\pi-x)-\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)+\tan\left(\dfrac{3\pi}{2}-x\right)+\cot(3\pi-x)$;

b) $B=\sqrt{2}-\dfrac{1}{\sin(x+2013\pi)}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{1+\cos x}+\dfrac{1}{1-\cos x}}$ với $\pi<x<2\pi$.

10 Cho $\tan\alpha=3$. Tính giá trị biểu thức $B=\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin^3\alpha+3\cos^3\alpha+2\sin\alpha}$.

11 Chứng minh các hệ thức sau

a) $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=2\cos^2\alpha-1$;　　b) $1-\cot^4\alpha=\dfrac{2}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{\sin^4\alpha}$;

c) $\dfrac{1+\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}=1+2\tan^2\alpha$;　　d) $2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

12 Chứng minh các hệ thức sau

a) $\dfrac{1+\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}=\dfrac{2}{3\cos^2\alpha}$;

b) $\dfrac{\sin^2\alpha(1+\cos\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\sin\alpha)}=\dfrac{\sin\alpha+\tan\alpha}{\cos\alpha+\cot\alpha}$;

c) $\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{\cot\beta-\cot\alpha}=\tan\alpha\tan\beta$;

d) $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cot^2\alpha-\tan^2\alpha}=\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

13 Chứng minh các hệ thức sau

a) $\dfrac{1-4\sin^2x\cos^2x}{(\sin x+\cos x)^2}=(\sin x-\cos x)^2$;

b) $\dfrac{\sin^2x-\cos^2x+\cos^4x}{\cos^2x-\sin^2x+\sin^4x}=\tan^4x$.

14 Chứng minh các hệ thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $A=\dfrac{\sin^6x+\cos^6x+2}{\sin^4x+\cos^4x+1}$;

b) $B=\dfrac{1+\cot x}{1-\cot x}-\dfrac{2+2\cot^2x}{(\tan x-1)(\cot^2x+1)}$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho α thuộc góc phần tư thứ nhất của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

A. $\sin\alpha>0$. **B.** $\cos\alpha<0$. **C.** $\tan\alpha<0$. **D.** $\cot\alpha<0$.

Câu 2. Cho α thuộc góc phần tư thứ hai của đường tròn lượng giác. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau đây.

A. $\sin\alpha>0$; $\cos\alpha>0$. **B.** $\sin\alpha<0$; $\cos\alpha<0$.
C. $\sin\alpha>0$; $\cos\alpha<0$. **D.** $\sin\alpha<0$; $\cos\alpha>0$.

Câu 3. Cho α thuộc góc phần tư thứ ba của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. $\sin\alpha>0$. **B.** $\cos\alpha<0$. **C.** $\tan\alpha>0$. **D.** $\cot\alpha>0$.

Câu 4. Cho α thuộc góc phần tư thứ tư của đường tròn lượng giác. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin\alpha>0$. **B.** $\cos\alpha>0$. **C.** $\tan\alpha>0$. **D.** $\cot\alpha>0$.

Câu 5. Cho $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin(\alpha-\pi)\geqslant 0$. **B.** $\sin(\alpha-\pi)\leqslant 0$. **C.** $\sin(\alpha-\pi)<0$. **D.** $\sin(\alpha-\pi)<0$.

Câu 6. Tính giá trị của $\cot\dfrac{89\pi}{6}$.

A. $\cot\dfrac{89\pi}{6}=\sqrt{3}$. **B.** $\cot\dfrac{89\pi}{6}=-\sqrt{3}$. **C.** $\cot\dfrac{89\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\cot\dfrac{89\pi}{6}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7. Tính giá trị biểu thức $P=\tan 10^\circ\cdot\tan 20^\circ\cdot\tan 30^\circ\ldots\tan 80^\circ$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=4$. **D.** $P=8$.

Câu 8. Tính giá trị biểu thức $P=\tan 1^\circ\tan 2^\circ\tan 3^\circ\ldots\tan 89^\circ$.

A. $P=0$. **B.** $P=1$. **C.** $P=2$. **D.** $P=3$.

Câu 9. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin 60^\circ<\sin 150^\circ$. **B.** $\cos 30^\circ<\cos 60^\circ$. **C.** $\tan 45^\circ<\tan 60^\circ$. **D.** $\cot 60^\circ>\cot 240^\circ$.

Câu 10. Với mọi số thực α, ta có $\sin\left(\dfrac{9\pi}{2}+\alpha\right)$ bằng

A. $-\sin\alpha$. **B.** $\cos\alpha$. **C.** $\sin\alpha$. **D.** $-\cos\alpha$.

Câu 11. Với mọi $\alpha\in\mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi+\alpha)$ bằng

A. $-\tan\alpha$. **B.** $\cot\alpha$. **C.** $\tan\alpha$. **D.** $-\cot\alpha$.

Câu 12. Đơn giản biểu thức $A=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)$, ta được

A. $A=\cos\alpha+\sin\alpha$. **B.** $A=2\sin\alpha$. **C.** $A=\sin\alpha\cos\alpha$. **D.** $A=0$.

Câu 13. Biết A,B,C là các góc của tam giác ABC, mệnh đề nào sau đây đúng.

A. $\sin(A+C)=-\sin B$. **B.** $\cos(A+C)=-\cos B$.
C. $\tan(A+C)=\tan B$. **D.** $\cot(A+C)=\cot B$.

Câu 14. Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha=\dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính $\cos\alpha$.

A. $\cos\alpha=\dfrac{1}{13}$. **B.** $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$. **C.** $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$. **D.** $\cos\alpha=-\dfrac{1}{13}$.

Câu 15. Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $\tan\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. **C.** $\tan\alpha=-\dfrac{4}{\sqrt{5}}$. **D.** $\tan\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 16. Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha=-\dfrac{12}{13}$ và $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính $\tan\alpha$.

A. $\tan\alpha=-\dfrac{12}{5}$. **B.** $\tan\alpha=\dfrac{5}{12}$. **C.** $\tan\alpha=-\dfrac{5}{12}$. **D.** $\tan\alpha=\dfrac{12}{5}$.

Câu 17. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$ và $\dfrac{2017\pi}{2}<\alpha<\dfrac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$.

A. $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$. **B.** $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$. **C.** $\sin\alpha=-\dfrac{4}{5}$. **D.** $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$.

Câu 18. Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Tính $P=\dfrac{\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$.

A. $P=-3$. **B.** $P=\dfrac{3}{7}$. **C.** $P=\dfrac{12}{25}$. **D.** $P=-\dfrac{12}{25}$.

Câu 19. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha=2$. Tính $P=\dfrac{3\sin\alpha-2\cos\alpha}{5\cos\alpha+7\sin\alpha}$.

A. $P=-\dfrac{4}{9}$. **B.** $P=\dfrac{4}{9}$. **C.** $P=-\dfrac{4}{19}$. **D.** $P=\dfrac{4}{19}$.

Câu 20. Cho góc α thỏa mãn $\cot\alpha=\dfrac{1}{3}$. Tính $P=\dfrac{3\sin\alpha+4\cos\alpha}{2\sin\alpha-5\cos\alpha}$.

A. $P=-\dfrac{15}{13}$. **B.** $P=\dfrac{15}{13}$. **C.** $P=-13$. **D.** $P=13$.

§3. CÁC CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Công thức cộng:

① $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$.

② $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\sin b\cos a$.

③ $\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$.

④ $\cos(a-b)=\cos a\cos b+\sin a\sin b$.

⑤ $\tan(a+b)=\dfrac{\tan a+\tan b}{1-\tan a\tan b}$.

⑥ $\tan(a-b)=\dfrac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\tan b}$.

2. Công thức nhân đôi:

① $\sin 2a=2\sin a\cos a$.

② $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$.

③ $\cos 2a=2\cos^2 a-1=1-2\sin^2 a$.

④ $\tan 2a=\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

3. Công thức hạ bậc:

① $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$.

② $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$.

③ $\tan^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$.

4. Công thức biến đổi tích thành tổng:

① $\cos a\cos b=\dfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$.

② $\sin a\sin b=-\dfrac{1}{2}[\cos(a+b)-\cos(a-b)]$.

③ $\sin a\cos b=\dfrac{1}{2}[\sin(a+b)+\sin(a-b)]$.

④ $\cos a\sin b=\dfrac{1}{2}[\sin(a+b)-\sin(a-b)]$.

5. Công thức biến đổi tổng thành tích:

① $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

② $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

③ $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$.

④ $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Sử dụng công thức cộng, công thức nhân đôi

Ví dụ 1. Hãy tính

a) $\sin 75^\circ$ b) $\sin 15^\circ$ c) $\tan\dfrac{7\pi}{12}$.

d) $\cot\dfrac{5\pi}{8}$. e) $\cos 795^\circ$. f) $\sin 18^\circ$.

Ví dụ 2. Cho $\sin\alpha = -\dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tính $\cos\alpha$, $\tan\alpha$; $\cos 2\alpha$ và $\sin\left(\alpha + \dfrac{19\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 3. Cho $\tan\alpha = -2$ và $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha - \dfrac{3\pi}{4}\right)$ và $\tan\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 4. Cho $\cos 2\alpha = -\dfrac{4}{5}$, với $\dfrac{\pi}{4} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$. Tính $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right)$, $\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

DT 2 Sử dụng công thức biến đổi tích thành tổng

Ví dụ 5. Hãy tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \cos 45^\circ \cos 15^\circ$. b) $B = \cos 75^\circ \sin 15^\circ$.

c) $C = \sin 75^\circ \sin 15^\circ$. d) $D = \sin\dfrac{11\pi}{12}\cos\dfrac{5\pi}{12}$.

Ví dụ 6. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tổng:

a) $\cos 5a \sin 3a$. b) $2\cos(a+b)\cos(a-b)$.

c) $\sin(a-b)\cos(b-a)$. d) $4\cos x \cos 2x \cos 3x$.

Ví dụ 7. Chứng minh $\sin 20^\circ \cdot \sin 40^\circ \cdot \sin 60^\circ \cdot \sin 80^\circ = \dfrac{3}{16}$.

DT 3 Sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích

Ví dụ 8. Tính giá trị biểu thức lượng giác sau

a) $C = \dfrac{\sin\dfrac{\pi}{5} - \sin\dfrac{2\pi}{15}}{\cos\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{15}}$. b) $D = \sin\dfrac{\pi}{9} - \sin\dfrac{5\pi}{9} + \sin\dfrac{7\pi}{9}$.

Ví dụ 9. Biến đổi các biểu thức sau đây thành một tích.

a) $A = \sin a + \sin 3a + \sin 5a$. b) $B = 1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x$.

Ví dụ 10. Chứng minh

a) $\sin 65^\circ + \sin 55^\circ = \sqrt{3}\cos 5^\circ$.

b) $\cos 12^\circ - \cos 48^\circ = \sin 18^\circ$.

c) $\sin 20^\circ - \sin 100^\circ + \sin 140^\circ = 0$.

d) $\tan 9^\circ - \tan 27^\circ - \tan 63^\circ + \tan 81^\circ = 4$.

DT 4 Các bài toán chứng minh, rút gọn

Ví dụ 11. Rút gọn các biểu thức:

a) $A = \dfrac{\sqrt{2}\cos a - 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)}{-\sqrt{2}\sin a + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + a\right)}$.

b) $B = (\tan a - \tan b)\cot(a-b) - \tan a \tan b$.

Ví dụ 12. Chứng minh các biểu thức sau

a) $\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta) = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$.

b) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha - \sin\beta\sin(\alpha+\beta)} = \tan(\alpha+\beta)$.

Ví dụ 13. Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x.

a) $A = \cos^2\alpha + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3} - \alpha\right)$;

b) $B = \cos\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\alpha + \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

Ví dụ 14. Chứng minh các đẳng thức sau trong điều kiện có nghĩa của biểu thức

a) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4\alpha$

b) $\dfrac{1 - \cos\alpha + \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - \sin\alpha} = \cot\alpha$

c) $\dfrac{\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha}{2(1-\cos\alpha)} = \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$.

d) $\dfrac{1 - \cos 2x + \sin 2x}{1 + \cos 2x + \sin 2x}\cdot\cot x = 1$

Ví dụ 15. Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\sin A + \sin B + \sin C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$;

b) $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2(1 + \cos A\cos B\cos C)$.

DT 5 Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 16. Một thiết bị trễ kĩ thuật số lặp lại tín hiệu đầu vào bằng cách lặp lại tín hiệu đó trong một khoảng thời gian cố định sau khi nhận được tín hiệu. Nếu một thiết bị như vậy nhận được nốt thuần $f_1(t) = 5\sin t$ và phát lại được nốt thuần $f_2(t) = 5\cos t$ thì âm kết hợp là $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, trong đó t là biến thời gian. Chứng tỏ rằng âm kết hợp viết được dưới dạng $f(t) = k\sin(t+\varphi)$, tức là âm kết hợp là một sóng âm hình sin. Hãy xác định biên độ âm k và pha ban đầu $\varphi(-\pi \le \varphi \le \pi)$ của sóng âm.

Ví dụ 17. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t, A là biên độ dao động $(A > 0)$ và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)},$$
$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)}.$$

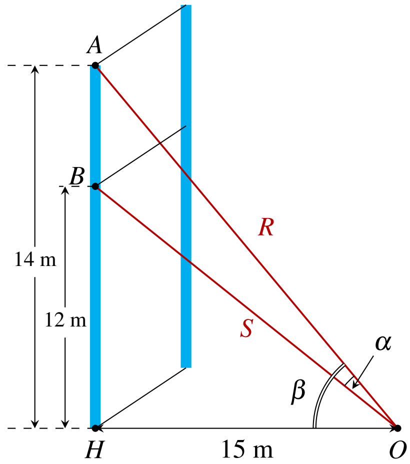
Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Ví dụ 18.

Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình bên).

a) Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính

a) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$, biết $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

b) $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$, biết $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

c) $\cos(a+b), \sin(a-b)$, biết $\sin a = \frac{4}{5}, 0^\circ < a < 90^\circ$ và $\sin b = \frac{2}{3}, 90^\circ < b < 180^\circ$.

2 Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, với $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$. Tính giá trị của $\sin 2\alpha$ và $\tan 2\alpha$.

3 Cho $\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{2}{5}$. Tính $\sin 2\alpha$.

4 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = \frac{3}{4} + \frac{\cos 4\alpha}{4}$;

b) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = \frac{5}{8} + \frac{3}{8}\cos 4\alpha$.

5 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $2\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos 2\alpha$;

b) $\sin\alpha(1 + \cos 2\alpha) = \sin 2\alpha\cos\alpha$;

c) $\dfrac{1 + \sin 2\alpha - \cos 2\alpha}{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha} = \tan\alpha$;

d) $\tan\alpha - \dfrac{1}{\tan\alpha} = -\dfrac{2}{\tan 2\alpha}$.

6 Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\cos a+\sin a=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-a\right)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)$.

b) $\cos a-\sin a=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+a\right)=\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-a\right)$.

7 Rút gọn biểu thức sau

a) $A=\dfrac{\cos a+2\cos 2a+\cos 3a}{\sin a+\sin 2a+\sin 3a}$; b) $B=\dfrac{\cos\left(a+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(a-\dfrac{\pi}{3}\right)}{\cot a-\cot\dfrac{a}{2}}$.

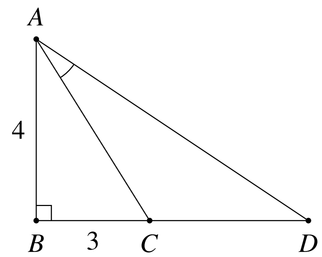
8 Chứng minh rằng $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\cot^2\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$, với điều kiện biểu thức có nghĩa.

9 Chứng minh các đẳng thức sau

a) $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}+a\right)-\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}-a\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin 2a$;

b) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\alpha-\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\dfrac{3}{2}$.

10 Tam giác ABC vuông tại B và có hai cạnh góc vuông là $AB=4$, $BC=3$. Vẽ điểm D nằm trên tia đối của tia CB thỏa mãn $\widehat{CAD}=30^\circ$. Tính $\tan\widehat{BAD}$, từ đó tính độ dài cạnh CD (*làm tròn đến hàng phần chục*).



11 Dao động của một vật là tổng hợp của hai dao động điều hòa cùng phương, có phương trình lần lượt là $x_1=6\cos 100\pi t$ (mm) và $x_2=6\sin 100\pi t$ (mm), (t tính bằng giây). Tính li độ của vật tại thời điểm $\mathrm{t}=0,25$ giây.

12 Chứng minh trong mọi tam giác ABC ta đều có

a) $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$

b) $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1+2\cos A\cos B\cos C$.

c) $\tan\dfrac{A}{2}\tan\dfrac{B}{2}+\tan\dfrac{B}{2}\tan\dfrac{C}{2}+\tan\dfrac{C}{2}\tan\dfrac{A}{2}=1$;

d) $\cot\dfrac{A}{2}+\cot\dfrac{B}{2}+\cot\dfrac{C}{2}=\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $\cos(a-b)=\sin a\sin b+\cos a\cos b$.
B. $\cos(a+b)=\sin a\sin b-\cos a\cos b$.
C. $\sin(a-b)=\sin a\cos b-\cos a\sin b$.
D. $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$.

Câu 2. Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin a+\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)$.
B. $\sin a+\cos a=\sqrt{2}\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

C. $\sin a+\cos a=-\sqrt{2}\sin\left(a-\dfrac{\pi}{4}\right)$. **D.** $\sin a+\cos a=-\sqrt{2}\sin\left(a+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Câu 3. Cho góc α thỏa mãn $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ và $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$. Tính $P=\sin 2(\alpha+\pi)$.

A. $P=-\dfrac{24}{25}$. **B.** $P=\dfrac{24}{25}$. **C.** $P=-\dfrac{12}{25}$. **D.** $P=\dfrac{12}{25}$.

Câu 4. Biết $\sin\alpha=-\dfrac{3}{5}$ và $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$. Tính $P=\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$.

A. $P=-\dfrac{3}{5}$. **B.** $P=\dfrac{3}{5}$. **C.** $P=\dfrac{-4-3\sqrt{3}}{10}$. **D.** $P=\dfrac{4-3\sqrt{3}}{10}$.

Câu 5. Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$ và $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Tính $P=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)$.

A. $P=\dfrac{3+\sqrt{21}}{8}$. **B.** $P=\dfrac{3-\sqrt{21}}{8}$. **C.** $P=\dfrac{3\sqrt{3}+\sqrt{7}}{8}$. **D.** $P=\dfrac{3\sqrt{3}-\sqrt{7}}{8}$.

Câu 6. Cho góc α thỏa mãn $\cos\alpha=\dfrac{5}{13}$ và $\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$. Tính $P=\tan 2\alpha$.

A. $P=-\dfrac{120}{119}$. **B.** $P=-\dfrac{119}{120}$. **C.** $P=\dfrac{120}{119}$. **D.** $P=\dfrac{119}{120}$.

Câu 7. Cho góc α thỏa mãn $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ và $\sin\alpha=\dfrac{2}{3}$. Tính $P=\dfrac{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$.

A. $P=-\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$. **B.** $P=\dfrac{3}{2}$. **C.** $P=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $P=\dfrac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 8. Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$. Tính $P=\cos 4\alpha$.

A. $P=\dfrac{527}{625}$. **B.** $P=-\dfrac{527}{625}$. **C.** $P=\dfrac{524}{625}$. **D.** $P=-\dfrac{524}{625}$.

Câu 9. Cho góc α thỏa mãn $\cot\alpha=15$. Tính $P=\sin 2\alpha$.

A. $P=\dfrac{11}{113}$. **B.** $P=\dfrac{13}{113}$. **C.** $P=\dfrac{15}{113}$. **D.** $P=\dfrac{17}{113}$.

Câu 10. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha=-\dfrac{4}{3}$ và $\alpha\in\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$. Tính $P=\sin\dfrac{\alpha}{2}+\cos\dfrac{\alpha}{2}$.

A. $P=\sqrt{5}$. **B.** $P=-\sqrt{5}$. **C.** $P=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $P=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

Câu 11. Cho góc α thỏa mãn $\tan\alpha=-2$. Tính $P=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 4\alpha+1}$.

A. $P=\dfrac{10}{9}$. **B.** $P=\dfrac{9}{10}$. **C.** $P=-\dfrac{10}{9}$. **D.** $P=-\dfrac{9}{10}$.

Câu 12. Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha=-\dfrac{4}{5}$ và $\dfrac{3\pi}{4}<\alpha<\pi$. Tính $P=\sin\alpha-\cos\alpha$.

A. $P=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **B.** $P=-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$. **C.** $P=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $P=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 13. Cho góc α thỏa mãn $\cos 2\alpha=-\dfrac{2}{3}$. Tính $P=\left(1+3\sin^2\alpha\right)\left(1-4\cos^2\alpha\right)$.

A. $P=12$. **B.** $P=\dfrac{21}{2}$. **C.** $P=6$. **D.** $P=21$.

Câu 14. Biết $\sin a=\dfrac{5}{13};\cos b=\dfrac{3}{5};\dfrac{\pi}{2}<a<\pi;0<b<\dfrac{\pi}{2}$. Hãy tính $\sin(a+b)$.

A. $\dfrac{56}{65}$. **B.** $\dfrac{63}{65}$. **C.** $-\dfrac{33}{65}$. **D.** 0.

Câu 15. Cho hai góc nhọn $a;b$ thoả $\cos a=\dfrac{1}{3};\cos b=\dfrac{1}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $P=\cos(a+b)\cdot\cos(a-b)$.

A. $-\dfrac{113}{144}$. **B.** $-\dfrac{115}{144}$. **C.** $-\dfrac{117}{144}$. **D.** $-\dfrac{119}{144}$.

Câu 16. Cho $0<\alpha,\beta<\dfrac{\pi}{2}$ và thỏa mãn $\tan\alpha=\dfrac{1}{7}$, $\tan\beta=\dfrac{3}{4}$. Góc $\alpha+\beta$ có giá trị bằng

A. $\dfrac{\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{6}$. **D.** $\dfrac{\pi}{2}$.

Câu 17. Cho $0<x,y<\dfrac{\pi}{2}$ thỏa mãn $\cot x=\dfrac{3}{4}$, $\cot y=\dfrac{1}{7}$. Tổng $x+y$ bằng

A. $\dfrac{\pi}{4}$. **B.** $\dfrac{3\pi}{4}$. **C.** $\dfrac{\pi}{3}$. **D.** π.

Câu 18. Nếu $\tan\alpha$ và $\tan\beta$ là hai nghiệm của phương trình $x^2+px+q=0$ $(q\neq 1)$ thì $\tan(\alpha+\beta)$ bằng

A. $\dfrac{p}{q-1}$. **B.** $-\dfrac{p}{q-1}$. **C.** $\dfrac{2p}{1-q}$. **D.** $-\dfrac{2p}{1-q}$.

Câu 19. Cho hai dao động điều hòa cùng phương có phương trình lần lượt là $\mathrm{x}_1=5\cos(100\pi\mathrm{t}+\pi)(\mathrm{cm})$ và $\mathrm{x}_2=5\cos(100\pi\mathrm{t}-\pi/2)(\mathrm{cm})$. Phương trình dao động tổng hợp của hai dao động trên là

A. $x=5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ (cm). **B.** $x=5\sqrt{2}\cos\left(100\pi t-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

C. $x=10\cos\left(100\pi t-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ (cm). **D.** $x=10\cos\left(100\pi t+\dfrac{3\pi}{4}\right)$ (cm).

Câu 20. Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số theo các phương trình: $x_1=2\cos\left(5\pi t+\dfrac{\pi}{2}\right)$ (cm) ; $x_2=2\cos(5\pi t)(\mathrm{cm})$. Biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là

A. 2. **B.** 4. **C.** $2\sqrt{2}$. **D.** $\sqrt{2}$.

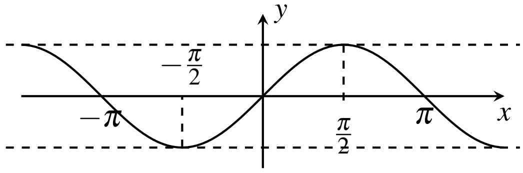
—HẾT—

§4. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hàm số $y = \sin x$

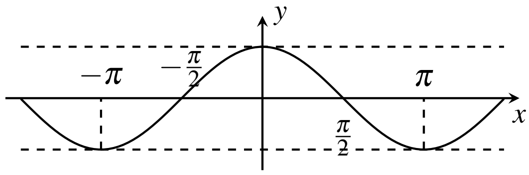
- Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1;1]$, tức là
$$-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}.$$
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.



- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

2. Hàm số $y = \cos x$

- Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R}$.
- Tập giá trị: $[-1;1]$, tức là
$$-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in R.$$
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng.

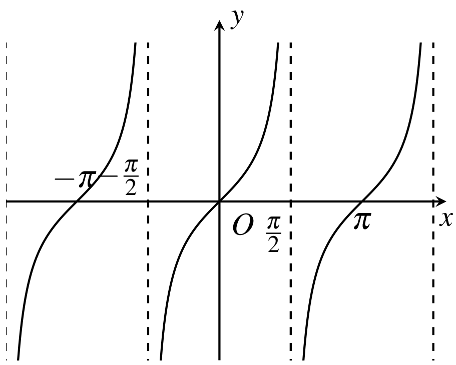


- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$, nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

3. Hàm số $y = \tan x$

- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

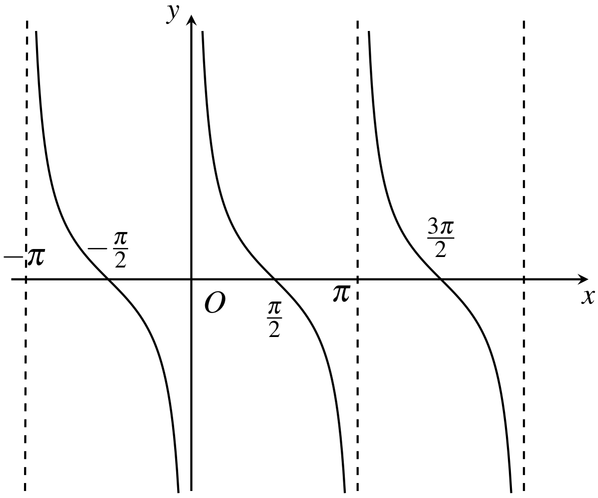
  Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$; Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$.



- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

4. Hàm số $y=\cot x$

- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
  Tập xác định: $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
- Tập giá trị: $\mathbb{R}$.
- Là hàm số lẻ.
- Là hàm số tuần hoàn với chu kì $T=\pi$, nghĩa là $\cot(x+k\pi)=\cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$.
- Hàm số $y=\cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.



B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tìm tập xác định của hàm số lượng giác

Ta chú ý một số điều kiện sau:

a) $y=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ xác định $\Leftrightarrow g(x) \neq 0$.

b) $y=\sqrt[2n]{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geqslant 0$, trong đó $n \in \mathbb{N}^*$.

c) $y=\tan[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) $y=\cot[u(x)]$ xác định $\Leftrightarrow u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y=\dfrac{2\sin x+3}{\cos x}$ b) $y=\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}$ c) $y=\dfrac{2+3\cos 2x}{\sin x}$

d) $y=\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$ e) $y=\dfrac{\sin x-3}{\cos x+1}$ f) $y=\dfrac{2\sin x+3}{\cos x+2}$

g) $y=\dfrac{2\sin x+3}{\sin x-1}$ h) $y=\dfrac{2\sin x-3}{2\sin x+3}$ i) $y=\sin\dfrac{x-1}{x+2}$.

j) $y=\sqrt{3-2\cos x}$. k) $y=\dfrac{\sqrt{\cos x+2}}{1+\cos x}$ l) $y=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{1-\cos x}}$

Ví dụ 2. Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y=2\tan x+3$ b) $y=2\tan 2x-4\sin x$ c) $y=\cot\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)+1$

Ví dụ 3. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số sau có tập xác định $\mathbb{R}$.

a) $y=\sqrt{m-\cos x}$ b) $y=\sqrt{2\sin x-m}$ c) $y=\dfrac{\sin x-1}{\cos x+m}$

Ví dụ 4. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\sqrt{\cos^2 x-(2+m)\cos x+2m}$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

DT 2 Tính chẵn lẻ của hàm số

Ta thực hiện các bước sau:

① Tìm tập xác định $\mathscr{D}$ của hàm số – Tập $\mathscr{D}$ phải đối xứng.

② Tính $f(-x)$ (*chỗ nào có biến x, ta thay bởi $-x$*) và thu gọn kết quả. Khi đó

- Nếu $f(-x) = f(x)$: hàm số đã cho là hàm chẵn.
- Nếu $f(-x) = -f(x)$: hàm số đã cho là hàm lẻ.
- Nếu không rơi vào 2 trường hợp trên, ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ.

GHI NHỚ

① Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

② Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

③ Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ.

④ Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ.

Ví dụ 5. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $f(x) = |x|\sin x$.

b) $f(x) = \tan|x|$.

Ví dụ 6. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = \sin^2 2x + \cos 3x$.

b) $f(x) = \sqrt{2+\sin x} + \sqrt{2-\sin x}$.

Ví dụ 7. Xét tính chẵn lẻ của hàm số

a) $f(x) = \sin\left(2x + \dfrac{9\pi}{2}\right)$.

b) $f(x) = \tan x + \cot x$.

DT 3 Tìm giá trị lớn nhất - giá trị nhỏ nhất

Ta thường dùng một trong 3 phương pháp sau:

☑ Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản

① $-1 \le \sin x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

② $-1 \le \cos x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

③ $0 \le \sin^2 x, \cos^2 x \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$;

④ $0 \le |\sin x|, |\cos x| \le 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

☑ Sử dụng điều kiện có nghiệm

① $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \le f(m) \le 1$.

② $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \le f(m) \le 1$.

③ $a\sin x + b\cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \ge c^2$.

☑ Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số, từ đó, kết luận.

Ví dụ 8. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau

a) $y = 2\sin x + 3$

b) $y = \dfrac{1-2\sin^2 x}{3}$

c) $y = \sqrt{2+\cos x} - 1$

d) $y = 4\sin x\cos x + 1$;

e) $y = 4 - 3\sin^2 2x$.

f) $y = (3-\sin x)^2 + 1$

Ví dụ 9. Tìm x để hàm số $y=(\sin x+3)^2-1$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 10. Tìm x để hàm số $y=1-3\sqrt{1-\cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Ví dụ 11. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ b) $y=\sin 2x-\cos 2x$ c) $y=3\sin x+4\cos x$

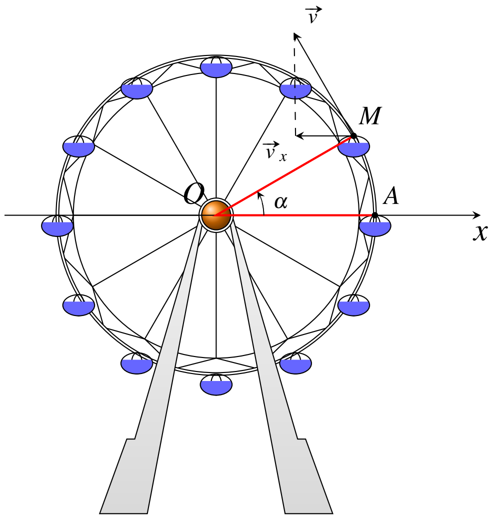
Ví dụ 12. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số sau

a) $y=2\sin^2 x-3\sin x+1$ b) $y=2\cos^2 x+3\cos x-2$ c) $y=\cos 2x-\sin x+3$

Ví dụ 13.
Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha=(Ox,OM)$ theo hàm số $v_x=0,3\sin\alpha\,(\mathrm{m/s})$ (Hình bên).

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x

b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên $(0\le\alpha\le 2\pi)$, góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.



C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\cot\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)$. b) $y=\dfrac{\sin x}{\cos 2x-1}$.

c) $y=\sqrt{\dfrac{2+\sin x}{1-\cos x}}$. d) $y=\dfrac{1}{\sin x}+\dfrac{1}{\cos x}$.

2 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y=3-2\sin 2x$ b) $y=5-3\cos 4x$.

c) $y=3-2|\sin 2x|$. d) $y=3\sin^2 2x-4$

3 Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y=2-4\sin^2 x\cdot\cos^2 x$.

4 Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=4\sin^2 x-4\sin x+3$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Tập giá trị của hàm số $y=\cos x$ là tập hợp nào sau đây?

A. $\mathbb{R}$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty]$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 2. Tập giá trị của hàm số $y=\sin 2x$ là

A. $[-2;2]$. **B.** $[0;2]$. **C.** $[-1;1]$. **D.** $[0;1]$.

Câu 3. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y=\sin x$ là hàm số chẵn. **B.** Hàm số $y=\cos x$ là hàm số chẵn.
C. Hàm số $y=\tan x$ là hàm số chẵn. **D.** Hàm số $y=\cot x$ là hàm số chẵn.

Câu 4. Tìm hàm số lẻ trong các hàm số sau:

A. $y=\sin^2 x$. **B.** $y=x\cos 2x$. **C.** $y=x\sin x$. **D.** $y=\cos x$.

Câu 5. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. Hàm số $y=\tan x$ tuần hoàn với chu kì π. **B.** Hàm số $y=\cos x$ tuần hoàn với chu kì π.
C. Hàm số $y=\cot x$ tuần hoàn với chu kì π. **D.** Hàm số $y=\sin 2x$ tuần hoàn với chu kì π.

Câu 6. Hàm số $y=\sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

A. $T=2\pi$. **B.** $T=\dfrac{\pi}{2}$. **C.** $T=\pi$. **D.** $T=4\pi$.

Câu 7. Hàm số nào trong các hàm số dưới đây là hàm số chẵn?

A. $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$. **B.** $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$. **C.** $y=\sin 2x$. **D.** $y=\tan x-\sin 2x$.

Câu 8. Tìm tập xác định của hàm số $y=\cot x$.

A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{k\dfrac{\pi}{2}|k\in\mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{k\pi|k\in\mathbb{Z}\}$.
C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\{k2\pi|k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi|k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Câu 9. Điều kiện xác định của hàm số $y=\dfrac{1-3\cos x}{\sin x}$ là

A. $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x\neq k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. **C.** $x\neq\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x\neq k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$.

Câu 10. Với ký hiệu $k\in\mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y=\dfrac{2\sin x+1}{1-\cos x}$ là

A. $x\neq k2\pi$. **B.** $x\neq k\pi$. **C.** $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. **D.** $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k2\pi$.

Câu 11. Với ký hiệu $k\in\mathbb{Z}$, điều kiện xác định của hàm số $y=\tan\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ là

A. $x\neq\dfrac{\pi}{6}+k\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $x\neq\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$. **C.** $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$. **D.** $x\neq\dfrac{5\pi}{12}+k\dfrac{\pi}{2}$.

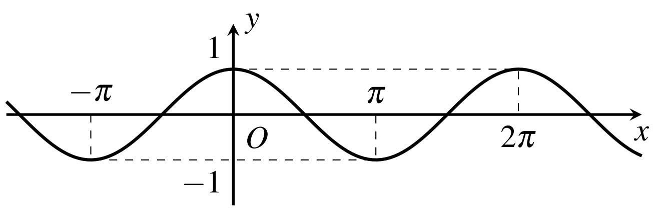
Câu 12. Tìm điều kiện xác định của hàm số $y=\tan x+\cot x$.

A. $x\neq k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **B.** $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}$. **C.** $x\neq\dfrac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. **D.** $x\in\mathbb{R}$.

Câu 13. Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{2\cos 3x-1}{\cos x+1}$ là

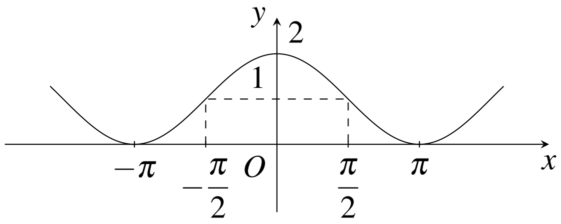
A. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$. **B.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{k2\pi;k\in\mathbb{Z}\}$.
C. $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi;k\in\mathbb{Z}\}$. **D.** $\mathscr{D}=\mathbb{R}\setminus\{\pi+k2\pi;k\in\mathbb{Z}\}$.

Câu 14. Đường cong trong hình dưới đây là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A,B,C,D. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y = 1 + \sin x$. **B.** $y = 1 - \sin x$. **C.** $y = \sin x$. **D.** $y = \cos x$.

Câu 15. Đường cong trong hình vẽ bên dưới là đồ thị của một trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án **A**, **B**, **C**, **D**. Hỏi đó là hàm số nào?



A. $y = \cos x + 1$. **B.** $y = 2 - \sin x$. **C.** $y = 2\cos x$. **D.** $y = \cos^2 x + 1$.

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 1 + 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $\min y = -2$, $\max y = 4$. **B.** $\min y = 2$, $\max y = 4$.
C. $\min y = -2$, $\max y = 3$. **D.** $\min y = -1$, $\max y = 4$.

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = 3 - 2\cos^2 3x$.

A. $\min y = 1$, $\max y = 2$. **B.** $\min y = 1$, $\max y = 3$.
C. $\min y = 2$, $\max y = 3$. **D.** $\min y = -1$, $\max y = 3$.

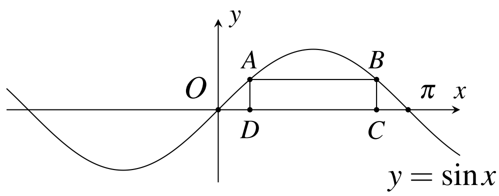
Câu 18. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \sqrt{2\sin x + 3}$.

A. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 1$. **B.** $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 2\sqrt{5}$.
C. $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 2$. **D.** $\max y = \sqrt{5}$, $\min y = 3$.

Câu 19. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau $y = \dfrac{4}{1 + 2\sin^2 x}$.

A. $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 4$. **B.** $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 3$.
C. $\min y = \frac{4}{3}$, $\max y = 2$. **D.** $\min y = \frac{1}{2}$, $\max y = 4$.

Câu 20. Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$, các điểm C, D thuộc trục Ox thỏa mãn $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \dfrac{2\pi}{3}$. Tính độ dài đoạn BC.



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** 1. **D.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

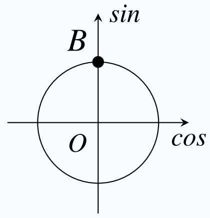
—HẾT—

§5. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

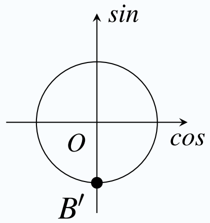
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Phương trình $\sin x = a$.

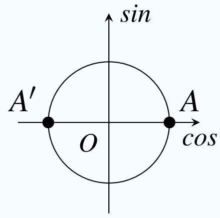
☑ Trường hợp $a \in \{-1;0;1\}$.



$\boxed{\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi}$



$\boxed{\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi}$



$\boxed{\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi}$

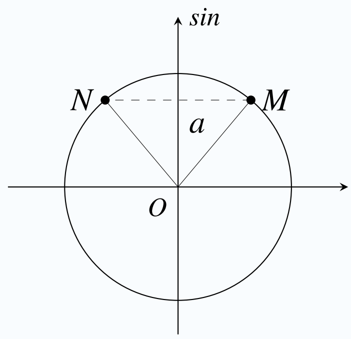
☑ Trường hợp $a \in \left\{\pm\frac{1}{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{2};\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **sin** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp $a \in [-1;1]$ nhưng khác các số ở trên.

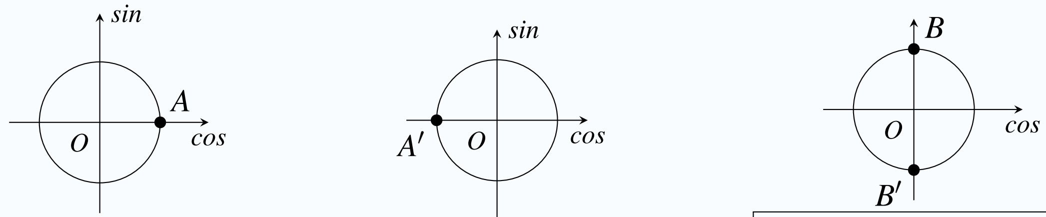
$$\sin x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

2. Phương trình $\cos x = a$.

☑ Trường hợp $a \in \{-1;0;1\}$.



$\boxed{\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi}$ $\boxed{\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi}$ $\boxed{\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi}$

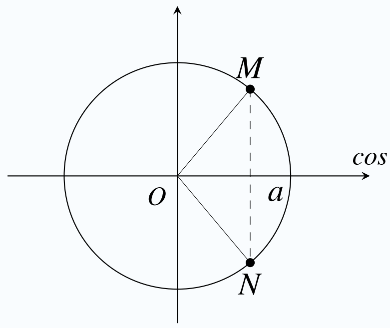
☑ Trường hợp $a \in \left\{\pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **cos** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên.

$$\cos x = a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

☑ Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{array}\right., k \in \mathbb{Z}$$

3. Phương trình $\tan x = a$.

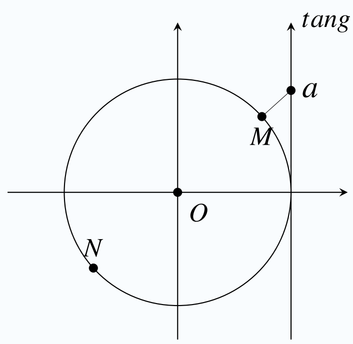
☑ Trường hợp $a \in \left\{0; \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Ta bấm máy **SHIFT** **tan** **a** để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng.

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

4. Phương trình $\cot x = a$.

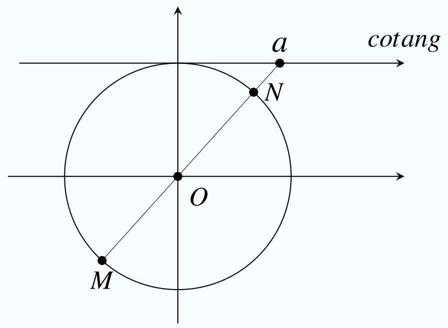
☑ Trường hợp $a \in \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm\sqrt{3}\right\}$. Ta bấm máy $\boxed{\text{SHIFT}}$ $\boxed{\tan}$ $\boxed{\frac{1}{a}}$ để đổi số a về góc α hoặc $\beta°$ tương ứng. Riêng $a = 0$ thì $\alpha = \frac{\pi}{2}$

① Công thức theo đơn vị rad:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

② Công thức theo đơn vị độ:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta° + k180°,\ k \in \mathbb{Z}$$



☑ Trường hợp a khác các số ở trên thì

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Giải các phương trình lượng giác cơ bản

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số a quy đổi về góc "đẹp" hay xấu;
- Chọn và ráp công thức nghiệm.

Ví dụ 1. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $2\sin\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = 1$ c) $2\sin(x - 45°) - 1 = 0$

d) $\cos\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) = 1$ e) $\sqrt{2}\cos 2x - 1 = 0$ f) $3\cos x - 1 = 0$.

Ví dụ 2. Giải các phương trình sau:

a) $\tan 3x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ b) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 1$ c) $\tan(x - 45°) - 1 = 0$

d) $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$ e) $\sqrt{3}\cot x - 1 = 0$ f) $\sin x + 4\cos x = 2 + \sin 2x$.

Ví dụ 3. Tìm nghiệm của các phương trình lượng giác sau trên khoảng cho trước

a) $\sqrt{3}\tan x - 3 = 0$ trên $(0, 3\pi)$. b) $\sqrt{2}\sin(x - 1) = -1$ trên $\left(-\frac{7\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

c) $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$ trên $(-\pi, \pi)$. d) $\tan(3x + 2) - \sqrt{3} = 0$ trên $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

DT 2 Giải các phương trình lượng giác dạng mở rộng

- Biến đổi về một trong các cấu trúc sau

① $\sin u = \sin v$ ② $\cos u = \cos v$ ③ $\tan u = \tan v$ ④ $\cot u = \cot v$

- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác sau:

① $-\sin x = \sin(-x)$. ② $-\cos x = \cos(\pi - x)$.

③ $\sin x = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$. ④ $\cos x = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình sau:

a) $\sin 3x = \sin 2x$ b) $\sin 2x - \sin x = 0$ c) $\sin 5x + \sin x = 0$

d) $\cos 2x - \cos x = 0$ e) $\cos 8x + \cos x = 0$ f) $\cos 4x - \sin x = 0$

Ví dụ 5. **(B.2013).** Giải phương trình $\sin 5x + 2\cos^2 x = 1$

DT 3 Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 6. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

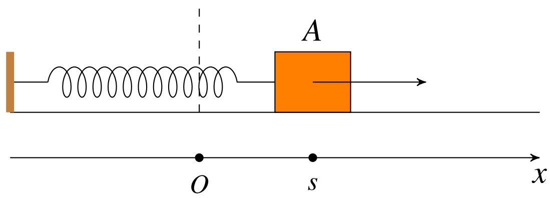
$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

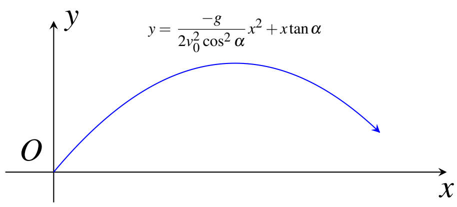
b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Ví dụ 7.
Trong Hình bên , khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O. Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t + \dfrac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?



Ví dụ 8.
Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ m/s hợp với phương ngang một góc α. Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \dfrac{-g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha$, ở đó $g = 9{,}8$ m/s^2 là gia tốc trọng trường.



a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Giải phương trình $3-\sqrt{3}\tan\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=0$ với $\frac{-\pi}{4}<x<\frac{2\pi}{3}$.

2 Giải phương trình $\tan(x+30^\circ)+1=0$ với $-90^\circ<x<360^\circ$.

3 Giải các phurong trinh sau:

a) $\cos 3x=\sin 2x$

b) $\cos 3x-2\cos\frac{\pi}{4}=0$

c) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$

d) $\cos(2x+30^\circ)=\frac{1}{2}$

e) $2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$

f) $2\cos(2x-60^\circ)-1=0$

g) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)+2=0$

h) $\cos\left(\frac{x}{3}-30^\circ\right)=1$

i) $\sin^2 2x=\frac{1}{4}$

4 Giải các phương trình sau:

a) $\tan x=\sqrt{3}$.

b) $\cot(x-\frac{\pi}{3})=1$.

c) $\tan(x+48^\circ)=\tan 25^\circ$.

d) $\tan\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)=\tan\frac{\pi}{7}$.

5 Giải phương trình $\tan\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$.

6 Giải phương trình $\left(\cot\frac{x}{3}-1\right)\left(\cot\frac{x}{2}+1\right)=0$.

7 Giải phương trình $\dfrac{\sin 2x+2\cos x-\sin x-1}{\sqrt{3}+\tan x}=0$.

8 Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày có thể được mô phỏng bởi công thức

$$h(t)=29+3\sin\left[\frac{\pi}{12}(t-9)\right]$$

với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ. Nhiệt độ thấp nhất trong ngày là bao nhiêu độ C và vào lúc mấy giờ?

9 Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.

10 Độ sâu $h($ m$)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t)=0,8\cos 0,5t+4$.

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t=2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu $3,6$ m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thuỷ triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thuỷ. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Phương trình nào sau đây vô nghiệm?

A. $\sin x = \frac{1}{2}$. **B.** $\tan x = \sqrt{3}$. **C.** $\sin x = 3$. **D.** $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\sin x = -1$ là

A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 3. Tìm tất cả các nghiệm của phương trình $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

A. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$.
B. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$.
C. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$.
D. $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$.

Câu 4. Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

A. $x = \frac{11\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$.
B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{-7\pi}{6} + k2\pi$.
C. $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k\pi$.
D. $x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi$ và $x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

Câu 5. Tập nghiệm của phương trình $\sin 2x = 1$ là

A. $\left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **C.** $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. **D.** $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 6. Phương trình $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ có tập nghiệm là

A. $\left\{x = \pm\frac{5\pi}{6} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
B. $\left\{x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\left\{x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.
D. $\left\{x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi; k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 7. Tập nghiệm của phương trình $\cos 2x = -1$ là

A. $-k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
B. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $\left\{-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
D. $\{90^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 8. Phương trình $2\cos x - 1 = 0$ có nghiệm là

A. $x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
B. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.
D. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9. Số nghiệm của phương trình $2\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ trong khoảng $(0; \pi)$ là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 10. Phương trình $\sin x - \cos x = 1$ có một nghiệm là

A. $-\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** π.

Câu 11. Nghiệm của phương trình $\sin^4 x - \cos^4 x = 0$ là

A. $x = \pi + k2\pi$. **B.** $x = k\pi$. **C.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$. **D.** $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Câu 12. Xét trên $(-\pi; \pi)$, phương trình $\sin x = \frac{2}{3}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 13. Cho phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Gọi n là số các nghiệm của phương trình trong đoạn $[0; 3\pi]$ thì giá trị của n là

A. $n = 8$. **B.** $n = 5$. **C.** $n = 6$. **D.** $n = 2$.

Câu 14. Tính tổng các nghiệm $x \in [0; 2018\pi]$ của phương trình $\sin 2x = 1$.

A. $S = \frac{4071315\pi}{2}$. **B.** $S = \frac{4071315\pi}{4}$. **C.** $S = \frac{8141621\pi}{2}$. **D.** $S = \frac{8141621\pi}{4}$.

Câu 15. Tìm số nghiệm thuộc khoảng $(-\pi; \pi)$ của phương trình $\cos x + \sin 2x = 0$

A. 1. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 16. Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

A. 16145. **B.** 20181. **C.** 20179. **D.** 16144.

Câu 17. Đồ thị của các hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ cắt nhau tại bao nhiêu điểm có hoành độ thuộc đoạn $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$?

A. 5. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 7.

Câu 18. Với giá trị của tham số m thì phương trình $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 2m = 0$ vô nghiệm?

A. $\left[\begin{array}{l} m < -\frac{1}{2} \\ m > \frac{1}{2} \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le -\frac{1}{2} \\ m \ge \frac{1}{2} \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m \le -1 \\ m \ge 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Câu 19. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos^2 \pi x = m^2 - 9$ có nghiệm.

A. 5. **B.** 2. **C.** 1 . **D.** 3 .

Câu 20. Cho vận tốc v (cm/s) của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức $v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất.

A. $t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$. **B.** $t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$.

C. $t = \frac{8\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$. **D.** $t = \frac{4\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k,\ k \in \mathbb{Z}$.

—HẾT—

Chương 2

DÃY SỐ. CẤP SỐ CỘNG VÀ CẤP SỐ NHÂN

§1. DÃY SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA DÃY SỐ

Định nghĩa dãy số: Mỗi hàm số u xác định trên tập các số nguyên dương $\mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu $u = u(n)$.

Ta thường viết u_n thay cho $u(n)$ và kí hiệu dãy số $u = u(n)$ bởi (u_n). Do đó dãy số (u_n) được viết dưới dạng khai triển $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, trong đó

- *u_1 là số hạng đầu;*
- *u_n là số hạng thứ n và là số hạng tổng quát của dãy số.*

Định nghĩa dãy số hữu hạn:

- Mỗi hàm số u xác định trên tập $M = \{1, 2, 3, \ldots, m\}$ với $m \in \mathbb{N}^*$ được gọi là một dãy số hữu hạn.
- Dạng khai triển của nó là $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_m$, trong đó u_1 là số hạng đầu, u_m là số hạng cuối.

2. CÁCH CHO MỘT DÃY SỐ

Ta thường gặp một trong các cách sau đây:

① Liệt kê các số hạng (chỉ dùng cho các dãy hữu hạn và có ít số hạng);

② Dãy số cho bằng công thức của số hạng tổng quát;

③ Dãy số cho bằng phương pháp mô tả;

④ Dãy số cho bằng phương pháp truy hồi, nghĩa là

- Cho số hạng đầu (hay vài số hạng đầu).
- Cho hệ thức truy hồi, tức là hệ thức biểu thị số hạng thứ n qua số hạng (hay vài số hạng) đứng trước nó.

3. DÃY SỐ TĂNG, DÃY SỐ GIẢM

① Dãy số (u_n) được gọi là dãy số tăng nếu ta có $u_{n+1} > u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

② Dãy số (u_n) được gọi là dãy số giảm nếu ta có $u_{n+1} < u_n$ với mọi $n \in \mathbb{N}^*$.

4. DÃY SỐ BỊ CHẶN

① Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn trên nếu tồn tại một số M sao cho $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

② Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại một số m sao cho $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

③ Dãy số (u_n) được gọi là bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới, tức là tồn tại các số m, M sao cho $m \leq u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức tổng quát

Ví dụ 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n}{3^n - 1}$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

Ví dụ 2. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_n = \dfrac{n^2+3n+7}{n+1}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy.

b) Dãy số có bao nhiêu số hạng nhận giá trị nguyên?

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) có số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số hạng thứ 100 và 200.

c) Số $\dfrac{167}{84}$ là số hạng thứ mấy?

d) Dãy số có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

DT 2 Tìm các số hạng của dãy số cho bởi công thức truy hồi

Ví dụ 4. Cho dãy số (u_n), biết $\begin{cases} u_1 = -1 \\ u_{n+1} = u_n + 3 \end{cases}$ với $n \geq 0$. Tìm ba số hạng đầu tiên của dãy số.

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2u_{n-1} + 1, (n \geq 2). \end{cases}$

a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.

b) Tính u_8.

Ví dụ 6. Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1, u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, (n \geq 3) \end{cases}$ (dãy số Phi-bô-na-xi).

a) Hãy viết dạng khai triển của dãy số trên.

b) Tính u_7.

DT 3 Dự đoán và chứng minh công thức tổng quát của dãy số bằng phương pháp quy nạp (đọc thêm)

Ví dụ 7. Cho dãy số (u_n) có $u_1=3$ và $u_{n+1}=u_n+5$ với mọi $n\geq 1$.

a) Tìm 5 số hạng đầu của dãy số trên.

b) Dự đoán công thức và chứng minh quy nạp công thức tổng quát của dãy số trên.

Ví dụ 8. Cho dãy số (u_n) biết: $u_1=10$, $u_{n+1}=2u_n$, với mọi $n\geq 1$.

a) Tính u_2,u_3,u_4,u_5.

b) Dùng quy nạp để chứng minh $u_n=10.2^{n-1}$, $\forall n\geq 1$.

Ví dụ 9. Cho dãy số (u_n) xác định bởi: $\begin{cases} u_1=1 \\ u_n=2u_{n-1}+3 \quad \forall n\geq 2 \end{cases}$.

a) Viết năm số hạng đầu của dãy.

b) Chứng minh rằng $u_n=2^{n+1}-3$.

Ví dụ 10. Người ta nuôi cấy 5 con vi khuẩn ecoli trong môi trường nhân tạo. Cứ 30 phút thì vi khuẩn ecoli sẽ nhân đôi 1 lần.

a) Tính số lượng vi khuẩn thu được sau $1,2,3$ lần nhân đôi.

b) Dự đoán công thức tính số lượng vi khuẩn sau n giờ và chứng minh công thức đó bằng phương pháp quy nạp.

DT 4 Xét sự tăng giảm của dãy số

Phương pháp 1: Xét dấu của hiệu số $u_{n+1}-u_n$.

- Nếu $u_{n+1}-u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $u_{n+1}-u_n<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Phương pháp 2: Nếu $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Nếu $u_n<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì ta có thể so sánh thương $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ với 1.

- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<1$ thì (u_n) là dãy số tăng.
- Nếu $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$ thì (u_n) là dãy số giảm.

Ví dụ 11. Xét tính tăng giảm của dãy số sau (u_n) với

a) $u_n = n^2$.

b) $u_n = \dfrac{2n+1}{n+1}$.

c) $u_n = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 5}$.

d) $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

e) $u_n = (-1)^n$.

f) $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+3}$.

Ví dụ 12. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng. Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25 \text{ với } n \geq 2.$$

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

DT 5 Xét tính bị chặn của dãy số

- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn trên bởi M, ta chứng minh $u_n \leq M, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số (u_n) bị chặn dưới bởi m, ta chứng minh $u_n \geq m, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
- Để chứng minh dãy số bị chặn ta chứng minh nó bị chặn trên và bị chặn dưới.
- Nếu dãy số (u_n) tăng thì bị chặn dưới bởi u_1; dãy số (u_n) giảm thì bị chặn trên bởi u_1.

Ví dụ 13. Xét tính bị chặn của các dãy số (u_n) sau, với

a) $u_n = \dfrac{1}{2^n}$.

b) $u_n = 2\sin n^2$

c) $u_n = \dfrac{3n-1}{3n+1}$.

d) $u_n = \dfrac{n^2+1}{2n^2-3}$.

e) $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$.

f) $u_n = \dfrac{2n-1}{\sqrt{n^2+2}}$.

Ví dụ 14. Chứng minh rằng dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \dfrac{8n+3}{3n+5}$ là một dãy số bị chặn.

Ví dụ 15. Chứng minh rằng dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3n}{n^2+9}$ bị chặn trên bởi $\dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 16. Xét tính bị chặn của dãy (u_n) được cho bởi

a) $u_n = \dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

b) $u_n = \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}$.

DT 6 Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 17. Biết rằng năm 2016, dân số của Việt Nam là 93,422 triệu người. Tỷ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là 1,07% thì số dân P_n (triệu người) của Việt Nam sau n năm, kể từ năm 2016, được tính bằng công thức $P_n = 93,422(1+0,0107)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2026, dân số Việt Nam khoảng bao nhiêu triệu người?

Ví dụ 18. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất $0,8\%$ số tiền còn lại của mỗi tháng.
Gọi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n).

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tìm 4 số hạng đầu tiên của các dãy số (u_n) biết số hạng tổng quát:

a) $u_n = \dfrac{1+n}{\sqrt{n^2+1}}$.

b) $u_n = \dfrac{2^n - 1}{2^n + 1}$.

c) $u_n = (-1)^n \sqrt{4^n}$.

d) $u_n = \dfrac{1+(-1)^n}{n}$.

e) $u_n = \sin^2 \dfrac{n\pi}{4} + \cos \dfrac{2n\pi}{3}$.

2 Cho dãy số (u_n) với số hạng tổng quát $u_n = \dfrac{2n+1}{n+2}$.

a) Tìm 4 số hạng đầu tiên của dãy số (u_n).

b) Số $\dfrac{105}{54}$ là số hạng thứ mấy của dãy số (u_n)?

3 Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{n-1}{3n+1}$. Hãy viết dạng khai triển của dãy số. Tính u_{50} và u_{99}.

4 Viết năm số hạng đầu tiên của dãy số (u_n) và dự đoán công thức số hạng tổng quát u_n theo n của các dãy số (u_n) sau

a) $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}, \forall n \geq 1. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3, \forall n \geq 1. \end{cases}$

5 Xét tính tăng giảm của dãy số (u_n), biết

a) $u_n = n^3 - 2n + 1$.

b) $u_n = \dfrac{1}{n} - 2$.

c) $u_n = \dfrac{\sqrt{2}}{3^n}$.

d) $u_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n}$

6 Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào bị chặn trên, bị chặn dưới và bị chặn?

a) $u_n = n^2 + 5$.

b) $u_n = \dfrac{3n+1}{2n+5}$.

c) $u_n = (-1)^n \cos \dfrac{\pi}{2n}$.

d) $u_n = \dfrac{n^2+2n}{n^2+n+1}$.

7 Việt Nam là quốc gia nằm ở phía Đông bán đảo Đông Dương thuộc khu vực Đông Nam Á. Với dân số ước tính 93,7 triệu dân vào đầu năm 2018, tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,2%. Giả sử tỉ lệ tăng dân số từ năm 2018 đến năm 2030 không thay đổi thì dân số nước ta đầu năm 2030 khoảng bao nhiêu?

8 Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100\left(1+\frac{0,06}{12}\right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

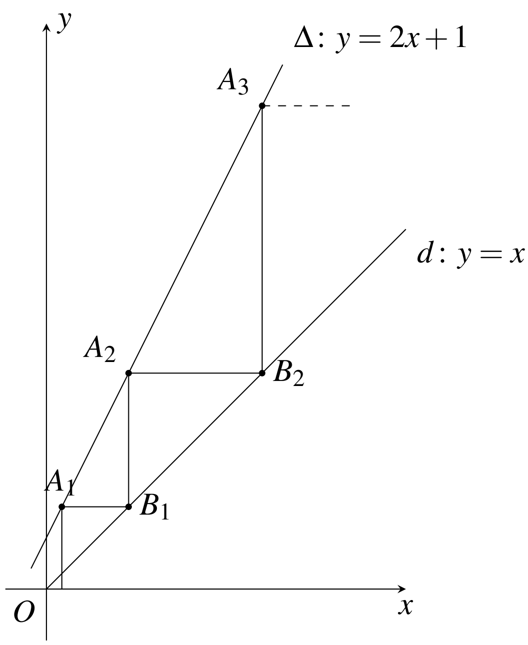
9 Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là $0,5\%$ một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy P_n.

10 Trong mặt phẳng toạ độ, cho đường thẳng $\Delta\colon y = 2x+1$. Trên Δ lấy điểm A_1 có hoành độ bằng $\frac{1}{3}$. Qua A_1 kẻ một đường thẳng song song với trục hoành cắt đường thẳng $d\colon y = x$ tại điểm B_1; gọi A_2 là giao điểm của Δ với đường thẳng đi qua B_1 và song song với trục tung. Với điểm A_2, lại thực hiện các bước tương tự như đã làm với điểm A_1 ta sẽ được điểm A_3. Với điểm A_3, lại làm như thế ta được điểm A_4. Cứ tiếp tục mãi quá trình trên, ta sẽ đuợc một dãy vô hạn các điểm A_1, A_2, A_3, A_4, ... nằm trên Δ (hình bên).
Với mỗi số nguyên dương n, gọi u_n là hoành độ của điểm A_n. Hãy cho dãy số (u_n) bằng hệ thức truy hồi.



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = (-1)^n \cdot 2n$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $u_3 = -6$. **B.** $u_2 = 4$. **C.** $u_4 = -8$. **D.** $u_1 = -2$.

Câu 2. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \frac{n}{3^n-1}$. Ba số hạng đầu tiên của dãy số đó lần lượt là những số nào dưới đây?

A. $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{16}$. **B.** $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}$. **C.** $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{26}$. **D.** $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}$.

Câu 3. Cho các dãy số sau, dãy số nào là dãy tăng?

A. $1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{4}$. **B.** $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}$. **C.** $-1; 3; 5; 3$. **D.** $2; 4; 6; 8$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n) với $u_n = (2017+n)^n$. Số hạng đầu tiên của dãy là

A. 2018. **B.** 2018^2. **C.** 1. **D.** 2017.

Câu 5. Cho dãy số (u_n) với $u_n = 2n+1$. Tìm u_5.

A. 11. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2} \text{ với } n \geq 1 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ hai của dãy số (u_n).

A. $u_2 = 2$. **B.** $u_2 = \sqrt{10}$. **C.** $u_2 = 10$. **D.** $u_2 = \sqrt{2}$.

Câu 7. Dãy (u_n) gồm có 5 phần tử cho bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2,\ \forall n \geq 1. \end{cases}$ Phần tử thứ 5 của dãy bằng

A. 7. **B.** 5. **C.** 9. **D.** 3.

Câu 8. Cho dãy số (u_n) có $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ và $u_{n+1} = 2u_n + u_{n-1}$ với mọi $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. Tìm số hạng thứ tư của dãy số đó.

A. $u_4 = 19$. **B.** $u_4 = 17$. **C.** $u_4 = 13$. **D.** $u_4 = 14$.

Câu 9. Cho dãy số $(u_n): \begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2}, \forall n \geq 3. \end{cases}$ Tìm số hạng thứ 7 của dãy.

A. $u_7 = 13$. **B.** $u_7 = 21$. **C.** $u_7 = 17$. **D.** $u_7 = 7$.

Câu 10. Cho dãy số (u_n) với $u_n = \dfrac{3n-4}{2n+5}$. Số $\dfrac{14}{17}$ là số hạng thứ bao nhiêu của dãy?

A. 4. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 11. Cho dãy số (u_n), biết $u_n = \dfrac{n+1}{2n+1}$. Số $\dfrac{8}{15}$ là số hạng thứ mấy của dãy số?

A. 7. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 8.

Câu 12. Cho dãy số (u_n) biết $u_n = 2^n$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $u_{n+2} = 2^2$. **B.** $u_{n+2} = 2^n + 2$. **C.** $u_{n+2} = 2 \cdot 2^n$. **D.** $u_{n+2} = 4 \cdot 2^n$.

Câu 13. Trong các dãy số (u_n) sau đây, hãy chọn dãy số giảm.

A. $u_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$. **B.** $u_n = \sin n$. **C.** $u_n = \dfrac{n^2+1}{n}$. **D.** $(-1)^n(2^n+1)$.

Câu 14. Dãy số nào có công thức số hạng tổng quát dưới đây là dãy số tăng?

A. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$. **B.** $u_n = (-3)^n$. **C.** $u_n = 2020 - 3n$. **D.** $u_n = 2018 + 2n$.

Câu 15. Cho dãy số (u_n), với $u_n = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Dãy số (u_n) không tăng không giảm.
B. Dãy số (u_n) là một dãy số tăng.
C. Số hạng thứ $n+1$ của dãy là $u_{n+1} = \sin\dfrac{\pi}{n+1}$.
D. Dãy số (u_n) là dãy số bị chặn.

Câu 16. Trong các dãy số (u_n) sau, dãy số nào là dãy số bị chặn?

A. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$. **B.** $u_n = \sqrt{n^2+1}$. **C.** $u_n = 2^n + 1$. **D.** $u_n = n + \dfrac{1}{n}$.

Câu 17. Cho dãy (u_n) là: 0; $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{3}{4}$; $\dfrac{4}{5}$;.... Số hạng tổng quát (u_n) là

A. $\dfrac{n+1}{n}$. **B.** $\dfrac{n-1}{n}$. **C.** $\dfrac{n}{n+1}$. **D.** $\dfrac{n^2-n}{n+1}$.

Câu 18. Cho dãy số có các số hạng đầu là: $-2; 0; 2; 4; 6; \ldots$. Số hạng tổng quát của dãy số này là công thức nào dưới đây?

A. $u_n = -2(n+1)$. **B.** $u_n = -2n$. **C.** $u_n = 2n-4$. **D.** $u_n = n-2$.

Câu 19. Cho dãy số (u_n), được xác định $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n. \end{cases}$ Số hạng tổng quát u_n của dãy số là số hạng nào dưới đây?

A. $u_n = 2^n$. **B.** $u_n = 2^{n+1}$. **C.** $u_n = 2$. **D.** $u_n = n^{n-1}$.

Câu 20. Một vi sinh đặc biệt X có cách sinh sản vô tính kì lạ, sau một giờ thì đẻ một lần, đặc biệt sống được tới giờ thứ n (với n là số nguyên dương) thì ngay lập tức thời điểm đó nó đẻ một lần ra 2^n con X khác, tuy nhiên do chu kì của con X ngắn nên ngay sau khi đẻ xong lần thứ 2, nó lập tức chết. Hỏi rằng, nếu tại thời điểm ban đầu có đúng 1 con thì sau 5 giờ có bao nhiêu con sinh vật X đang sống?

A. 256. **B.** 96. **C.** 336. **D.** 32.

—HẾT—

§2. CẤP SỐ CỘNG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cấp số cộng là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều bằng số hạng đứng ngay trước nó cộng với một số không đổi d. Nghĩa là

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + d \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.}$$

- Số d được gọi là công sai của cấp số cộng.
- Đặc biệt khi $d = 0$ thì cấp số cộng là một dãy số không đổi (tất cả các số hạng đều bằng nhau).

2. Số hạng tổng quát

Nếu cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu u_1 và công sai d thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định theo công thức

$$\boxed{u_n = u_1 + (n-1)d}$$

3. Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Gọi u_{k-1},u_k, u_{k+1} là ba số hạng lien tiếp của một cấp số cộng thì

$$\boxed{u_k = \frac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2} \text{ với } k \geq 2}$$

4. Tổng n số hạng đầu của một cấp số cộng

Cho (u_n) là một cấp số cộng với số hạng đầu là u_1 và công sai d. Đặt

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

Khi đó:

$$\boxed{S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n(u_2 + u_{n-1})}{2} = \frac{n(u_3 + u_{n-2})}{2} = \cdots}$$

hoặc

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n-1)d)}$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Chứng minh dãy số là một cấp số cộng

Ta cần chứng minh $u_{n+1} - u_n = d$, với d là một số không đổi (công sai).

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy số nào là cấp số cộng? Vì sao?

a) $10, -2, -14, -26, -38$;

b) $\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{4}, 2, \dfrac{11}{4}, \dfrac{7}{2}$;

c) $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$;

d) $1, 4, 7, 10, 13$.

Ví dụ 2. Viết 5 số hạng đầu của mỗi dãy (u_n) sau và xem nó có phải là một cấp số cộng hay không? Nếu dãy là một cấp số cộng, hãy tìm công sai.

a) $u_n = 3n + 2$

b) $u_n = 3^n - 1$

c) $u_n = (n+2)^2 - n^2$

d) $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = 3 - u_n, \text{ với } n \geq 1. \end{cases}$

Ví dụ 3. Chứng minh các dãy số sau là một cấp số cộng. Xác định công sai và số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = 19n - 5$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = -3n + 1$.

DT 2 Công sai, số hạng đầu và số hạng tổng quát của cấp số cộng

Ví dụ 4. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 4$ và công sai $d = 3$.

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n.

b) Số 832 là số hạng thứ mấy của cấp số cộng trên?

c) Số 2024 có là số hạng nào của cấp số cộng trên không?

Ví dụ 5. Viết sáu số xen giữa hai số 3 và 24 để được cấp số cộng có tám số hạng. Tìm cấp số cộng đó.

Ví dụ 6. Tìm số hạng đầu, công sai và số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết

a) $\begin{cases} u_7 = 27 \\ u_{15} = 59. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_9 = 5u_2 \\ u_{13} = 2u_6 + 5. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 - u_6 = -7 \\ u_8 - u_7 = 2u_4. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_3 - u_7 = -8 \\ u_2 \cdot u_7 = 75. \end{cases}$

e) $\begin{cases} u_1 + u_5 = \dfrac{5}{3} \\ u_3 \cdot u_4 = \dfrac{65}{72}. \end{cases}$

f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 9 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 35. \end{cases}$

DT 3 Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số cộng

Tổng của n số hạng đầu tiên: Đặt $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$. Khi đó

- $S_n = \dfrac{n(u_1+u_n)}{2} = \dfrac{n(u_2+u_{n-1})}{2} = \dfrac{n(u_3+u_{n-2})}{2} = \cdots$
- Vì $u_n = u_1 + (n-1)d$ nên công thức trên có thể viết lại là $S_n = nu_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$.

Ví dụ 7. Cho một cấp số cộng (u_n) có $S_6 = 18$ và $S_{10} = 110$. Tính S_{20}.

Ví dụ 8. Cho một cấp số cộng (u_n) có $u_3 + u_{28} = 100$. Hãy tính tổng của 30 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó.

Ví dụ 9. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết

a) $\begin{cases} u_1^2+u_2^2+u_3^2 = 155 \\ S_3 = 21. \end{cases}$

b) $\begin{cases} S_3 = 12 \\ S_5 = 35. \end{cases}$

c) $\begin{cases} S_5 = 5 \\ u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot u_4 \cdot u_5 = 45. \end{cases}$

Ví dụ 10. Tìm số hạng tổng quát của cấp số cộng, biết $\begin{cases} S_4 = 20 \\ \dfrac{1}{u_1}+\dfrac{1}{u_2}+\dfrac{1}{u_3}+\dfrac{1}{u_4} = \dfrac{25}{24} \end{cases}$ và cấp số cộng có công sai là một số nguyên âm.

Ví dụ 11. Tính các tổng sau

a) $S = 1+3+5+\cdots+(2n-1)+(2n+1)$.

b) $S = 100^2 - 99^2 + 98^2 - 97^2 + \cdots + 2^2 - 1^2$.

DT 4 Tính chất của cấp số cộng

① Nếu a; b; c theo thứ tự lập thành cấp số cộng thì $a+c = 2b$.

② Lưu ý:

- Nếu cho ba số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là
$$a-d; \quad a; \quad a+d$$
- Nếu cho bốn số liên tiếp của một cấp số cộng, ta có thể xem ba số đó là
$$a-3d; \quad a-d; \quad a+d; \quad a+3d.$$

Ví dụ 12. Tìm ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng biết tổng của chúng bằng 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

Ví dụ 13. Tìm bốn số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 10 và tổng bình phương của chúng bằng 30.

Ví dụ 14. Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm ba góc đó.

Ví dụ 15. Cho a, b, c là ba số hạng liên tiếp của một cấp số cộng. Chứng minh rằng

a) $a^2+2bc=c^2+2ab$.

b) $2(a+b+c)^3=9\left[a^2(b+c)+b^2(a+c)+c^2(a+b)\right]$.

c) b^2+bc+c^2, a^2+ac+c^2, a^2+ab+b^2 cũng là một cấp số cộng.

DT 5 Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 16. Một người trồng 3003 cây theo một hình tam giác như sau: "Hàng thứ nhất có một cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây, ...". Hỏi có bao nhiêu hàng cây được trồng như thế?

Ví dụ 17. Bạn A muốn mua món quà tặng mẹ và chị nhân ngày Quốc tế phụ nữ $8/3$. Do đó A quyết định tiết kiệm từ ngày $1/1$ của năm đó với ngày đầu là 500 đồng/ngày, ngày sau cao hơn ngày trước 500 đồng. Hỏi đúng đến ngày $8/3$ bạn A có đủ tiền để mua quà cho mẹ và chị không? Giả sử rằng món quà A dự định mua khoảng 800 ngàn đồng và từ ngày $1/1$ đến ngày $8/3$ có số ngày ít nhất là 67 ngày.

Ví dụ 18. Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng thêm 5000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Ví dụ 19. Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1=9$, công sai $d=-2$. Viết ba số hạng đầu của cấp số cộng đó.

2. Cho cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1=2$ và công sai $d=3$. Hãy viết năm số hạng đầu của cấp số cộng này.

3. Cho dãy số (u_n) với $u_n=5n-1$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Tìm số hạng đầu u_1 và công sai d của nó.

4. Cho dãy số (u_n) với $u_n=-2n+3$. Chứng minh rằng (u_n) là một cấp số cộng. Xác định số hạng đầu và công sai của cấp số cộng này.

5. Tìm năm số hạng đầu và số hạng thứ 100 của cấp số cộng $(u_n):10,5,\ldots$.

6. Số hạng thứ 10 của một cấp số cộng (u_n) bằng 48 và số hạng thứ 18 bằng 88. Tìm số hạng thứ 100 của cấp số cộng đó.

7. Cần lấy tổng của bao nhiêu số hạng đầu của cấp số cộng $2,5,8,\ldots$ để được kết quả bằng 345?

8. Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế, ... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70 800 000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

9 Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

10 Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

11 Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng $1,2$ triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

12 Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức:

$$x_n = 75 + 5(n-1).$$

(Nguồn: https://bibabo.vn)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

13 Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

- Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.
- Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng $1,8$ triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

14 Ở một loài thực vật lưỡng bội, tính trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene aabb có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene AABB có chiều cao bao nhiêu?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số cộng?

A. 2; 8; 32. **B.** 3; 7; 11; 16.
C. (u_n) với $u_n = 4 + 3n$. **D.** (v_n) với $v_n = n^3$.

Câu 2. Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 3 - 5n$. Tìm công sai d của cấp số cộng (u_n).

A. $d = 3$. **B.** $d = -5$. **C.** $d = -3$. **D.** $d = 5$.

Câu 3. Tìm số hạng thứ 11 của cấp số cộng có số hạng đầu bằng 3 và công sai $d = -2$.

A. -21. **B.** 23. **C.** -17. **D.** -19.

Câu 4. Cho cấp số cộng có $u_1 = 1$ và công sai $d = -4$. Giá trị của số hạng thứ 17 bằng bao nhiêu?

A. $u_{17} = -63$. **B.** $u_{17} = 65$. **C.** $u_{17} = -85$. **D.** $u_{17} = -75$.

Câu 5. Tìm giá trị của x, y sao cho dãy số $-2, x, 4, y$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng.

A. $x = 2, y = 8$. **B.** $x = 1, y = 7$. **C.** $x = 2, y = 10$. **D.** $x = -6, y = 2$.

Câu 6. Cấp số cộng (u_n) có $u_6 = 12$, $u_{10} = 24$. Tìm số hạng đầu u_1.

A. $u_1 = 3$. **B.** $u_1 = 2$. **C.** $u_1 = 5$. **D.** $u_1 = -3$.

Câu 7. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 123$ và $u_3 - u_{15} = 84$. Số hạng u_{17} bằng

A. 235. **B.** 242. **C.** 4. **D.** 11.

Câu 8. Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng biết $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_7 = 1 \\ u_1 + u_6 = 16. \end{cases}$

A. $u_1 = \dfrac{171}{17}, d = -\dfrac{14}{17}$. **B.** $u_1 = -\dfrac{14}{17}, d = \dfrac{171}{17}$.
C. $u_1 = 2, d = 3$. **D.** $u_1 = 3, d = 2$.

Câu 9. Cho 9, x, -1, y là 4 số lập thành cấp số cộng, khi đó giá trị của x, y là

A. $\begin{cases} x = 4 \\ y = -6 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = -6 \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} x = 4 \\ y = 6 \end{cases}$.

Câu 10. Cho cấp số cộng (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_4 = 7u_1 \\ S_5 = 75 \end{cases}$. Tìm số hạng thứ hai của cấp số cộng này.

A. $u_2 = 9$. **B.** $u_2 = 6$. **C.** $u_2 = 3$. **D.** $u_2 = 12$.

Câu 11. Cho hai số -3 và 23. Xen kẽ giữa hai số đã cho n số hạng để tất cả các số đó tạo thành cấp số cộng có công sai $d = 2$. Tìm n.

A. $n = 14$. **B.** $n = 15$. **C.** $n = 13$. **D.** $n = 12$.

Câu 12. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = -2$. Tính $S_{2017} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{2017}$.

A. $S_{2017} = -4060211$. **B.** $S_{2017} = -4060221$. **C.** $S_{2017} = 4072323$. **D.** $S_{2017} = 4073232$.

Câu 13. Tính tổng $S = 1 + 5 + 9 + \cdots + 397$ ta được kết quả

A. 19298. **B.** 19090. **C.** 19920. **D.** 19900.

Câu 14. Một cấp số cộng có 15 số hạng. Biết tổng của 15 số hạng đó bằng 120 và công sai bằng -4. Tìm số hạng đầu.

A. $u_1 = -20$. **B.** $u_1 = 36$. **C.** $u_1 = 540$. **D.** $u_1 = 64$.

Câu 15. Cho cấp số cộng (u_n) với $u_1 = 2$, $d = 9$. Khi đó số 2018 là số hạng thứ mấy trong dãy?

A. 223. **B.** 225. **C.** 224. **D.** 226.

Câu 16. Cho dãy số (u_n), biết: $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + 4$ với $n \geqslant 1$. Tìm u_{1000}.

A. 3900. **B.** 4000. **C.** 3999. **D.** 4200.

Câu 17. Tính số hạng đầu u_1 và và công sai d của cấp số cộng (u_n), biết $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 7. \end{cases}$

A. $u_1 = -36, d = 13$. **B.** $u_1 = 36, d = 13$.
C. $u_1 = 36, d = -13$. **D.** $u_1 = -36, d = -13$.

Câu 18. Người ta trồng 1275 cây theo hình tam giác như sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ 2 có 2 cây, hàng thứ 3 có 3 cây, ... hàng thứ k có k cây $(k \geq 1)$. Hỏi có bao nhiêu hàng?

A. 51. **B.** 52. **C.** 53. **D.** 50.

Câu 19. Bé An luyện tập khiêu vũ cho buổi dạ hội cuối khóa. Bé bắt đầu luyện tập trong 1 giờ vào ngày đầu tiên. Mỗi ngày tiếp theo, bé tăng thêm 5 phút luyện tập so với ngày trước đó. Hỏi sau một tuần, tổng thời gian bé An đã luyện tập là bao nhiêu phút?

A. 505 phút. **B.** 450 phút. **C.** 525 phút. **D.** 425 phút.

Câu 20. Chu vi của một đa giác là 158 cm, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3$ cm. Biết cạnh lớn nhất là 44 cm. Số các cạnh của đa giác đó là bao nhiêu?

A. 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 21. Bác Bình muốn trồng cây cà phê trên một ngọn đồi như sau: Từ trên đỉnh đồi trồng hàng thứ nhất 2 cây; đi xuống hàng thứ hai 5 cây; đi xuống hàng thứ ba 8 cây; ...; đi xuống hàng cuối cùng dưới chân đồi trồng 26 cây. Theo cách trồng như trên bác bình trồng được bao nhiêu cây cà phê?

A. 224 cây. **B.** 112 cây. **C.** 126 cây. **D.** 121 cây.

Câu 22. Một công ty trả lương cho anh A mức lương là 4,5 triệu đồng/quý và kể từ quý làm việc thứ 2 thì mức lương sẽ tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hỏi tổng số tiền sau 3 năm làm việc anh A nhận được là bao nhiêu?

A. 56 triệu. **B.** 72 triệu. **C.** 74,3 triệu. **D.** 73,8 triệu.

Câu 23. Ông X vay của công ty A một khoản tiền 72 triệu đồng và ông này trả nợ cho công ty A như sau: Ở quý thứ nhất ông trả 3 triệu đồng và kể từ quý thứ 2 mức trả sẽ tăng thêm 0,2 triệu đồng mỗi quý. Hỏi sau bao lâu thì ông X trả hết nợ?

A. 5 năm. **B.** 6 năm. **C.** 3 năm. **D.** 4 năm.

Câu 24. Một đa giác có n cạnh và có chu vi bằng 158 cm. Biết số đo các cạnh của đa giác lập thành một cấp số cộng và công sai $d = 3$ cm và cạnh lớn nhất có độ dài là 44 cm. Đa giác có số cạnh n bằng

A. $n = 5$. **B.** $n = 7$. **C.** $n = 6$. **D.** $n = 4$.

Câu 25. Tính tổng tất các giá trị của tham số m để phương trình $x^4 - 2(m+2)x^2 + 2m + 3 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt lập thành cấp số cộng.

A. $\dfrac{14}{9}$. **B.** $\dfrac{10}{9}$. **C.** $\dfrac{12}{9}$. **D.** $\dfrac{8}{9}$.

—HẾT—

§3. CẤP SỐ NHÂN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. Định nghĩa

Cấp số nhân là một dãy số (hữu hạn hoặc vô hạn), trong đó kể từ số hạng thứ hai, mỗi số hạng đều là tích của số hạng đứng ngay trước nó với một số không đổi q. Nghĩa là

$$\boxed{u_{n+1} = u_n q \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.}$$

- Số q được gọi là công bội của cấp số nhân.
- Khi $q = 0$ cấp số nhân có dạng $u_1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$
- Khi $q = 1$ cấp số nhân có dạng $u_1, u_1, u_1, \ldots, u_1, \ldots$
- Khi $u_1 = 0$ thì với mọi q cấp số nhân có dạng $0, 0, 0, \ldots, 0, \ldots$

2. Số hạng tổng quát

Nếu một cấp số nhân có số hạng đầu u_1 và công bội q thì số hạng tổng quát u_n của nó được xác định bởi công thức

$$\boxed{u_n = u_1 \cdot q^{n-1} \text{ với } n \geq 2.}$$

3. Tính chất của ba số hạng liên tiếp

Giả sử u_{k-1}, u_k, u_{k+1} là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân thì

$$\boxed{u_k^2 = u_{k-1} \cdot u_{k+1} \text{ với } k \geq 2}$$

4. Tổng của n số hạng đầu của một cấp số nhân

Cho cấp số nhân (u_n) với công bội $q \neq 1$. Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. Khi đó

- Nếu $q \neq 1$ thì

$$\boxed{S_n = \frac{u_1\left(1-q^n\right)}{1-q}.}$$

- Nếu $q = 1$ thì

$$\boxed{S_n = n u_1}$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Chứng minh dãy số là một cấp số nhân

Ví dụ 1. Trong các dãy số sau, dãy nào là cấp số nhân? Xác định số hạng đầu và công bội của cấp số nhân.

a) Dãy số (u_n) với $u_n = (-3)^{2n+1}$.

b) Dãy số (u_n) với $u_n = n \cdot 5^{2n-1}$.

Ví dụ 2. Chứng minh các dãy số sau là cấp số nhân. Hãy tìm công bội và số hạng đầu của cấp số nhân đó.

a) Dãy (u_n) với $u_n = (-1)^n.3^{2n}$.

b) Dãy (v_n) với $v_n = \dfrac{5}{3^n}$.

Ví dụ 3. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 5.u_n + 8$, với $n > 1$. Chứng minh (v_n) với $v_n = u_n + 2$ là cấp số nhân.

DT 2 Công bội, số hạng đầu, số hạng tổng quát

Ví dụ 4. Cho cấp số nhân (u_n) với công bội dương, biết $u_1 = 3$ và $u_5 = 48$.

a) Tính u_8.

b) Hỏi số 1536 là số hạng thứ mấy?

Ví dụ 5. Giữa các số 160 và 5 hãy chèn 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân. Tìm 4 số đó.

Ví dụ 6. Tìm số hạng đầu u_1, công bội q và số hạng tổng quát u_n của cấp số nhân (u_n) biết

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 = 51 \\ u_2 + u_6 = 102. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 + u_6 = 165 \\ u_3 + u_4 = 60. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 13 \\ u_4 + u_5 + u_6 = 351. \end{cases}$

DT 3 Tính tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân

Ví dụ 7. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_n = 12.2^{n-1}$.

a) Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q.

b) Tính tổng của 10 số hạng đầu tiên.

c) Tính tổng $S' = u_3 + u_4 + \ldots + u_{12}$.

Ví dụ 8. Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Ví dụ 9. Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

Ví dụ 10. Tính tổng sau: $A = 2 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{512}$.

Ví dụ 11. Cho n là số tự nhiên ≥ 2, tính tổng sau: $S_n = \left(2 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(2^2 + \frac{1}{2^2}\right)^2 + \cdots + \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)^2$.

DT 4 Tính chất của cấp số nhân

Ví dụ 12. Tìm a để ba số $a-2$; $a-4$; $a+2$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân.

Ví dụ 13. Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Ví dụ 14. Tìm các số dương a và b sao cho $a, a+2b, 2a+b$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng và $(b+1)^2$, $ab+5$, $(a+1)^2$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân.

Ví dụ 15. Chứng minh rằng nếu 3 số $\frac{2}{y-x}, \frac{1}{y}, \frac{2}{y-z}$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng thì 3 số x, y, z lập thành một cấp số nhân.

Ví dụ 16. Cho ba số tạo thành một cấp số cộng có tổng 21. Nếu thêm 2, 3, 9 lần lượt vào số thứ nhất, số thứ hai, số thứ ba tạo thành một cấp số nhân. Tìm 3 số đó.

Ví dụ 17. Ba số khác nhau có tổng bằng 114 có thể coi là ba số hạng liên tiếp của một cấp số nhân hoặc coi là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ 25 của 1 cấp số cộng. Tìm các số đó.

DT 5 Vận dụng, thực tiễn

Ví dụ 18. Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

Ví dụ 19. Độ dài các cạnh của $\triangle ABC$ lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng $\triangle ABC$ có hai góc không quá 60°.

Ví dụ 20. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là 4.10^5 mét khối. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây ở khu rừng đó là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm, khu rừng đó sẽ có khoảng bao nhiêu mét khối gỗ?

Ví dụ 21. Một người gửi ngân hàng 150 triệu đồng theo thể thức lãi kép, lãi suất $0{,}58\%$ một tháng (kể từ tháng thứ 2, tiền lãi được tính theo phần trăm của tổng tiền lãi tháng trước đó và tiền gốc của tháng trước đó). Sau ít nhất bao nhiêu tháng, người đó có 180 triệu đồng?

Ví dụ 22. Một của hàng kinh doanh, ban đầu bán mặt hàng A với giá 100 (đơn vị nghìn đồng). Sau đó, cửa hàng tăng giá mặt hàng A lên 10%. Nhưng sau một thời gian, cửa hàng lại tiếp tục tăng giá mặt hàng đó lên 10%. Hỏi giá của mặt hàng A của cửa hàng sau hai lần tăng giá là bao nhiêu?

Ví dụ 23. Tỷ lệ tăng dân số của tỉnh M là $1{,}2\%$. Biết rằng số dân của tỉnh M hiện nay là 2 triệu người. Nếu lấy kết quả chính xác đến hàng nghìn thì sau 9 năm nữa số dân của tỉnh M sẽ là bao nhiêu?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Trong các dãy số dưới đây, dãy số nào là cấp số nhân?

a) Dãy số (x_n), với $x_n = n^2$.

b) Dãy số (y_n), với $y_n = \sqrt{5}^{2n-3}$.

c) Dãy số (z_n), với $z_n = \dfrac{2}{n}$.

d) Dãy số (w_n), với $w_n = \dfrac{3^n + 1}{3^{n+1}}$.

2 Trong các dãy số sau dãy nào là cấp số nhân? Hãy xác định công bội của cấp số nhân đó.

a) $1; 4; 16; 64; 256$.

b) $2; -2; 3; -3; 4; -4$.

c) $-1; \dfrac{1}{3}; -\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{27}; -\dfrac{1}{81}$.

3 Biết ba số $-\dfrac{1}{5}; b; -\dfrac{1}{125}$ theo thứ tự lập thành cấp số nhân. Tìm b.

4 Giữa các số 160 và 5, hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân và tìm cấp số nhân đó.

5 Tìm số hạng đầu u_1 và công bội q của cấp số nhân trong các trường hợp sau:

a) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240. \end{cases}$

b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325. \end{cases}$

c) $\begin{cases} u_2 + u_4 + u_6 = -42 \\ u_3 + u_5 = 20. \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 15 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 85. \end{cases}$

6 Cho ba số khác nhau lập thành cấp số cộng, bình phương của các số đó lập thành cấp số nhân. Tìm các số đó.

7 Tìm công bội của tất cả các cấp số nhân sao cho tổng bốn số hạng đầu tiên của cấp số nhân đó bằng 15 và tổng các bình phương của chúng bằng 85.

8 Tìm 4 số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng tổng 3 số hạng đầu là $\dfrac{148}{9}$, đồng thời, theo thứ tự, chúng là số hạng thứ nhất, thứ tư và thứ tám của một cấp số cộng.

9 Cho 3 số có tổng bằng 28 lập thành cấp số nhân. Tìm cấp số nhân đó biết nếu số thứ nhất giảm 4 thì ta được 3 số lập thành cấp số cộng.

10 Tìm số đo bốn góc của một tứ giác, biết số đo các góc đó lập thành một cấp số nhân có số hạng cuối gấp tám lần số hạng đầu tiên.

11 Số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật lập thành một cấp số nhân. Biết thể tích của khối hộp là 125 cm^3 và diện tích toàn phần là 175 cm^2. Tính tổng số đo ba kích thước của hình hộp chữ nhật đó.

12 Một người muốn có 100 triệu sau 18 tháng phải gửi mỗi tháng vào ngân hàng bao nhiêu tiền, biết lãi suất $0,6\%$/ tháng (lãi kép)?

13 Năm 2020, một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 900.000.000 đồng và dự định trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán so với giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?

14 Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại nhân đôi một lần. Nếu lúc đầu có 10^{12} tế bào thì sau 3 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

15 Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng theo cách: Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích bề mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích đế tháp. Biết diện tích đế tháp là $12\,288\,\text{m}^2$, tính diện tích mặt trên cùng.

16 Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức như sau: Hàng tháng từ đầu mỗi tháng người đó sẽ gửi cố định số tiền 5 triệu đồng với lãi suất 0,6% trên tháng. Biết rằng lãi suất không thay đổi trong quá trình gửi, thì sau 10 năm số tiền mà người đó nhận được cả vốn lẫn lãi khoảng bao nhiêu?

17 Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong các dãy số hữu hạn sau, dãy số nào là cấp số nhân?

A. $2;4;8;16;32;63$. **B.** $1;-2;4;-8;16;-32$.
C. $1;3;9;27;54;162$. **D.** $4;2;1;\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{16}$.

Câu 2. Trong các dãy (u_n) cho bởi số hạng tổng quát dưới đây, dãy nào là một cấp số nhân có công bội bằng 2?

A. $u_n = 2n+3$. **B.** $u_n = 2^n$. **C.** $u_n = 2^n+3$. **D.** $u_n = n+2$.

Câu 3. Tìm công bội của cấp số nhân (u_n) biết số hạng tổng quát $u_n = 3^{2n}$.

A. $q=9$. **B.** $q=2$. **C.** $q=3$. **D.** $q=6$.

Câu 4. Dãy số nào sau đây **không** phải là một cấp số nhân?

A. $(u_n): 1;-\frac{1}{2};\frac{1}{4};-\frac{1}{8};\frac{1}{16}$. **B.** $u_n = 2^n+2$.
C. $u_n = 2^n + 2^{n+1}$. **D.** $(u_n): 7;7;7;7;7;\ldots$.

Câu 5. Cấp số nhân (u_n) có $u_1 = 3$, $q = 2$. Tìm u_2.

A. $u_2 = 6$. **B.** $u_2 = 5$. **C.** $u_2 = -6$. **D.** $u_2 = 1$.

Câu 6. Cho cấp số nhân (u_n) biết $u_1 = 3$ và công bội $q = -2$. Tìm số hạng thứ bảy của cấp số nhân đó.

A. $u_7 = 192$. **B.** $u_7 = -9$. **C.** $u_7 = -192$. **D.** $u_7 = 384$.

Câu 7. Cho cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = 2, q = \frac{1}{3}$. Tìm u_{10}.

A. $\frac{2}{3^8}$. **B.** $\frac{2}{3^{10}}$. **C.** $\frac{3}{2^9}$. **D.** $\frac{2}{3^9}$.

Câu 8. Tính tổng 10 số hạng đầu tiên của cấp số nhân (u_n), biết $u_1 = -3$ và công bội $q = -2$.

A. $S_{10} = -1023$. **B.** $S_{10} = 1025$. **C.** $S_{10} = -1025$. **D.** $S_{10} = 1023$.

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) có $u_5 = 15$ và $u_8 = -1875$. Công bội của cấp số nhân là

A. $q=3$. **B.** $q=-3$. **C.** $q=-5$. **D.** $q=5$.

Câu 10. Cho cấp số nhân (u_n) thỏa mãn $\begin{cases} u_{10} = 8u_7 \\ u_1 + u_4 = 144 \end{cases}$. Tính cộng bội q của cấp số nhân (u_n).

A. $q = 2$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = 3$. **D.** $q = -2$.

Câu 11. Cho cấp số nhân $(u_n) : u_1 = 1, q = 2$. Hỏi 2048 là số hạng thứ mấy?

A. 12. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 10.

Câu 12. Cho cấp số nhân với $u_1 = 3, q = -2$. Số 192 là số hạng thứ mấy của cấp số nhân?

A. u_5. **B.** u_6. **C.** u_7. **D.** u_8.

Câu 13. Xác định x để 3 số $2x-1$; $2x$; $2x+3$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân.

A. $x = -\dfrac{3}{4}$. **B.** $x = -\dfrac{4}{3}$. **C.** $x = \dfrac{3}{4}$. **D.** $x = \dfrac{4}{3}$.

Câu 14. Cho tam giác ABC có ba góc A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số nhân với công bội $q = 2$. Tính số đo góc A.

A. $\dfrac{\pi}{2}$. **B.** $\dfrac{\pi}{7}$. **C.** $\dfrac{2\pi}{7}$. **D.** $\dfrac{4\pi}{7}$.

Câu 15. Ba số thực a, b, c theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tính giá trị biểu thức $D = ac - 5b$ biết rằng $abc = -27$.

A. $D = -6$. **B.** $D = -24$. **C.** $D = 6$. **D.** $D = 24$.

Câu 16. Cho các số $x+6y$; $5x+2y$; $8x+y$ theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng, đồng thời các số $x-1$; $y+2$; $x-3y$ theo thứ tự đó lập thành một cấp số nhân. Khi đó $x+2y$ bằng

A. 10. **B.** -10. **C.** 14. **D.** -14.

Câu 17. Ba cạnh của một tam giác vuông lập thành cấp số nhân. Tính tỉ số cạnh góc vuông nhỏ chia cho cạnh huyền.

A. $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. **B.** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$. **D.** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Câu 18. Dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n \end{cases}$ với $n \geq 1$. Tính tổng $S = u_1 + u_2 + \ldots + u_{10}$.

A. $S = \dfrac{5}{2}$. **B.** $S = \dfrac{1023}{2048}$. **C.** $S = 2$. **D.** $\dfrac{1023}{512}$.

Câu 19. Trong một cấp số nhân gồm các số hạng dương, hiệu của số hạng thứ năm và số hạng thứ tư là 576, hiệu của số hạng thứ hai và số hạng đầu tiên là 9. Tìm tổng S_3 của 3 số hạng đầu của cấp số nhân này.

A. $S_3 = 21$. **B.** $S_3 = -63$. **C.** $S_3 = 63$. **D.** $S_3 = -21$.

Câu 20. Giá trị của tổng $S = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{2018}$ bằng

A. $S = \dfrac{3^{2019}-1}{2}$. **B.** $S = \dfrac{3^{2018}-1}{2}$. **C.** $S = \dfrac{3^{2020}-1}{2}$. **D.** $S = \dfrac{3^{2018}-1}{2}$.

Câu 21. Cho cấp số nhân (u_n) có hạng đầu $u_1 = 2$ và tổng của 8 số hạng đầu tiên $S_8 = 6560$. Tìm công bội q của cấp số nhân đã cho.

A. $q = 3$. **B.** $q = -3$. **C.** $q = \dfrac{1}{3}$. **D.** $q = \pm 3$.

Câu 22. Ba số lập thành một cấp số nhân. Nếu số hạng thứ hai cộng thêm 2 ta được một cấp số cộng. Sau đó cộng thêm 9 với số hạng thứ ba ta lại được một cấp số nhân. Tính tổng ba số đó.

A. $-\dfrac{16}{25}$. **B.** $\dfrac{52}{25}$. **C.** $\dfrac{4}{25}$. **D.** $\dfrac{64}{25}$.

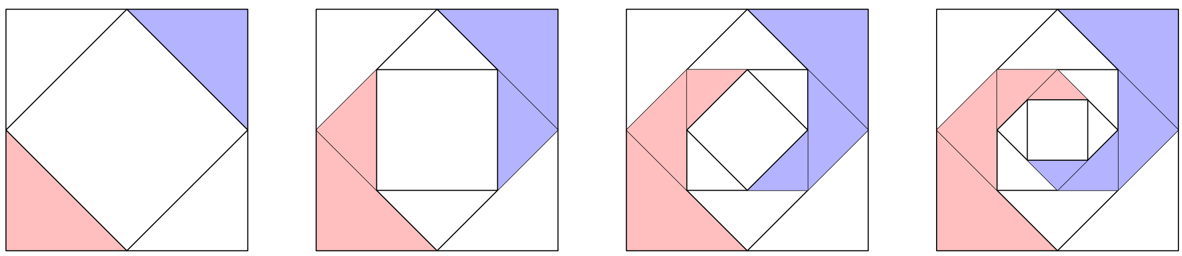
Câu 23. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép. Sau đúng 6 tháng, người đó gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền người đó nhận được sau 1 năm kể từ khi bắt đầu gửi tiền gần với kết quả nào sau đây?

A. 212 triệu. **B.** 210 triệu. **C.** 216 triệu. **D.** 220 triệu.

Câu 24. Ông A mua một chiếc ô tô trị giá 1 tỷ đồng, do chưa đủ tiền nên ông chọn mua bằng hình thức trả góp hàng tháng (số tiền trả góp mỗi tháng như nhau) với lãi suất 12%/năm và trả trước 500 triệu đồng. Hỏi mỗi tháng ông phải trả số tiền gần nhất với số tiền nào dưới đây để sau đúng 2 năm kể từ lúc mua xe, ông trả hết nợ, biết kỳ trả nợ đầu tiên sau ngày mua ô tô đúng một tháng và chỉ tính lãi hàng tháng trên số dư nợ thực tế của tháng đó?

A. 23.573.000 đồng. **B.** 23.537.000 đồng. **C.** 23.703.000 đồng. **D.** 24.443.000 đồng.

Câu 25. Một thợ thủ công muốn vẽ trang trí một hình vuông kích thước $4\,\text{m} \times 4\,\text{m}$ bằng cách vẽ một hình vuông mới với các đỉnh là trung điểm các cạnh của hình vuông ban đầu, và tô kín màu lên hai tam giác đối diện (như hình vẽ). Quá trình vẽ và tô theo quy luật đó được lặp lại 5 lần. Tính số tiền nước sơn để người thợ đó hoàn thành trang trí hình vuông trên? Biết tiền nước sơn $1\,\text{m}^2$ là $60\,000$ đồng.



A. $575\,000$ đồng. **B.** $387\,500$ đồng. **C.** $465\,000$ đồng. **D.** $232\,500$ đồng.

—HẾT—

Chương 3

GIỚI HẠN. HÀM SỐ LIÊN TỤC

§1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

Định nghĩa 1: Dãy số (u_n) có giới hạn là 0 khi n dần tới dương vô cực nếu $|u_n|$ có thể nhỏ hơn một số dương bé tuỳ ý, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$

Định nghĩa 2: Dãy số (u_n) có giới hạn là a nếu $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - a) = 0$. Kí hiệu

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = a}$$

Ta có thể viết $\lim u_n = a$ thay cho cách viết $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ (không cần viết chỉ số $n \to +\infty$)

Một vài giới hạn đặc biệt: (*có thể xem như công thức*)

- $\lim \dfrac{1}{n} = 0$;
- $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$;
- $\lim \dfrac{1}{q^n} = 0$, với $|q| > 1$;
- $\lim \dfrac{1}{n^k} = 0$, với $k \in \mathbb{N}^*$;
- $\lim C = C, \forall C \in \mathbb{R}$;
- $\lim q^n = 0$, nếu $|q| < 1$.

2. ĐỊNH LÝ VỀ GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA DÃY SỐ

Nếu $\lim u_n = a$ và $\lim v_n = b$ thì ta có:

- $\lim(u_n \pm v_n) = a + b$;
- $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{a}{b}$, với $b \neq 0$;
- $\lim |u_n| = |a|$;
- $\lim(u_n.v_n) = a.b$;
- $\lim \sqrt{u_n} = \sqrt{a}$, với $a \geq 0$;
- $\lim(k.u_n) = k.a$ $(k \in \mathbb{R})$.

Định lý "kẹp giữa":

- Nếu $0 \leq |u_n| \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim v_n = 0$ thì $\lim u_n = 0$.
- Nếu $w_n \leq u_n \leq v_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ và $\lim w_n = \lim v_n = a$ thì $\lim u_n = a$.

3. TỔNG CỦA CẤP SỐ NHÂN LÙI VÔ HẠN

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q| < 1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn*.
- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), ta có tổng của cấp số nhân lùi vô hạn đó là

$$S = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{u_1}{1-q}, (|q| < 1)$$

4. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA DÃY SỐ

- **Định nghĩa 1:** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $+\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu u_n có thể lớn hơn một số dương bất kì, kể từ một số hạng nào đó trở đi. Kí hiệu

$$\boxed{\lim u_n = +\infty}$$

- **Định nghĩa 2:** Ta nói dãy số (u_n) có giới hạn $-\infty$ khi $n \to +\infty$, nếu $\lim(-u_n) = +\infty$. Kí hiệu

$$\boxed{\lim u_n = -\infty}$$

- **Một số giới hạn đặc biệt:**

① $\lim n^k = +\infty$, với $k \in \mathbb{N}^*$. ② $\lim q^n = +\infty$, với $q > 1$.

- **Một số quy tắc tính giới hạn vô cực:**

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n = \infty$	$\lim [u_n \cdot v_n]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
$L > 0$	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
$L < 0$	0	$-$	$+\infty$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Khử vô định dạng $\frac{\infty}{\infty}$

Xét giưới hạn: $\lim \dfrac{u_n}{v_n}$.

Phương pháp giải:

- Đặt nhân tử n^k có tính "quyết định ∞" ở tử và mẫu.
- Khử bỏ n^k, đưa giới hạn về dạng xác định được.
- Áp dụng định lý về giới hạn hữu hạn để tính kết quả.

Chú ý: Trong trường hợp hàm mũ, ta đặt đại lượng "quyết định ∞" có dạng a^n.

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{2n^2+3n-1}{2-3n^2}$

b) $\lim \dfrac{3n^3+2n^2+n}{n^3+4}$

c) $\lim \dfrac{n^2+1}{2n^4+n+1}$

d) $\lim \left(\dfrac{n+1}{n^2+2n}-\dfrac{1}{n-1}\right)$

e) $\lim \left(\dfrac{2n^2+3n}{n+1}-\dfrac{2n^3-3}{n^2-1}\right)$

f) $\lim n\left(1-\dfrac{n^2+3}{n^2-1}\right)$

g) $\lim \dfrac{(2n+3)(1-3n)}{2n^2-n+5}$

h) $\lim \dfrac{n^4-2n^2}{(n+1)(2+n)(n^2+1)}$

i) $\lim \dfrac{\left(2n^4+1\right)(n+2)^2}{(2n+1)^2(2-n)^4}$

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{1+3^n}{4+3^n}$

b) $\lim \dfrac{4.3^n+7^{n+1}}{2.5^n+7^n}$

c) $\lim \dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim \dfrac{2n-1}{\sqrt{4n^2+1}+3n}$

b) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^2+3n-1}}{\sqrt{3n^2+1}-\sqrt{2n+1}}$

c) $\lim \dfrac{\sqrt{4n^4+1}}{\sqrt{n^4+4n+1}+n^2}$

d) $\lim \dfrac{\sqrt{n^2-4n}-\sqrt{4n^2+1}}{\sqrt{3n^2+1}+n}$

e) $\lim \dfrac{\sqrt[3]{8n^3+n^2-1}+n-4}{2n-3}$

f) $\lim \dfrac{n^2+\sqrt[3]{1-n^6}}{\sqrt{n^4+1}+n^2}$

Ví dụ 4. Tìm các giới hạn sau:

a) $\lim \dfrac{1+2+\ldots+n}{n^2}$

b) $\lim \left[1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\ldots+\dfrac{1}{2^n}\right]$

c) $\lim \left(\dfrac{2+4+8+\ldots+2^n}{3.2^n-1}\right)$

d) $\lim \left(\dfrac{1}{1.2}+\dfrac{1}{2.3}\cdots\dfrac{1}{n(n+1)}\right)$

Ví dụ 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1=10$ và $u_{n+1}=\dfrac{1}{5}u_n+3$, với mọi $n\geq 1$.

a) Chứng minh dãy (v_n) xác định bởi $v_n=u_n-\dfrac{15}{4}$ là một cấp số nhân.

b) Tính $\lim u_n$.

DT 2 Khử vô định dạng $\infty - \infty$

Xét các giưới hạn dạng: $\boxed{\lim\left(\sqrt{u_n} - v_n\right)}$ hoặc $\boxed{\lim\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)}$.

Phương pháp giải:

- Nhân thêm lượng liên hợp:

① $\lim\left(\sqrt{u_n} - v_n\right) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{u_n} - v_n\right)\left(\sqrt{u_n} + v_n\right)}{\sqrt{u_n} + v_n} = \lim \dfrac{u_n - v_n^2}{\sqrt{u_n} + v_n}$

② $\lim\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right) = \lim \dfrac{\left(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n}\right)\left(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}\right)}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}} = \lim \dfrac{u_n - v_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n}}$

- Biến đổi biểu thức cần tính giới hạn về Dạng 1 (phân thức, đặt n^k)

Chú ý: Đôi khi, ta còn sử dụng liên hợp bậc ba để giải các bài toán tính giới hạn của những dãy số mà công thức tổng quát của nó có chứa ẩn trong dấu căn bậc ba.

$$\sqrt[3]{A} - B = \frac{\left(\sqrt[3]{A} - B\right)\left(\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A}\cdot B + B^2\right)}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A}\cdot B + B^2} = \frac{A - B^3}{\sqrt[3]{A}^2 + \sqrt[3]{A}\cdot B + B^2}$$

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n} - n\right)$ b) $\lim\left(2n - \sqrt{4n^2 + n}\right)$ c) $\lim\left(\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 + 2}\right)$

d) $\lim n\left(\sqrt{n^2 + 2} - n\right)$ e) $\lim\left(\sqrt{n^2 + 2n} - n - 1\right)$ f) $\lim \dfrac{1}{\sqrt{n^2 + 2n} - \sqrt{n^2 + 4}}$.

Ví dụ 7. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 + 2} - n\right)$ b) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1}\right)$ c) $\lim\left(\sqrt[3]{n^3 + 2} - \sqrt{n^2 + n}\right)$

DT 3 Một số quy tắc tính giới hạn vô cực

① Quy tắc tìm giới hạn của tích $u_n \cdot v_n$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n = \infty$	$\lim\left[u_n \cdot v_n\right]$
$L > 0$	$+\infty$	$+\infty$
$L > 0$	$-\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$+\infty$	$-\infty$
$L < 0$	$-\infty$	$+\infty$

② Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{u_n}{v_n}$

$\lim u_n = L$	$\lim v_n$	Dấu của v_n	$\lim \dfrac{u_n}{v_n}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L > 0$	0	$+$	$+\infty$
$L > 0$	0	$-$	$-\infty$
$L < 0$	0	$+$	$-\infty$
$L < 0$	0	$-$	$+\infty$

Ví dụ 8. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\left(2n^3+2n-1\right)$ b) $\lim\left(n-2n^3\right)$ c) $\lim\sqrt{n^2+2n+7}$

d) $\lim\left(\sqrt{n^2-3n}-\sqrt{n+2}\right)$ e) $\lim\left(1-\sqrt{1+3n^2}\right)$ f) $\lim\left(3^n-2\cdot 5^n\right)$

Ví dụ 9. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\dfrac{2^n+5^{n+1}}{1+5^n}$ b) $\lim\dfrac{1+2.3^n-7^n}{5^n-2.6^n}$ c) $\lim\dfrac{1-2.3^n+7^n}{2^n\left(3^{n+1}-5\right)}$

Ví dụ 10. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\dfrac{2n^4+n^2-3}{3n^3-2n^2+1}$ b) $\lim\dfrac{2n^3+n+4}{5n-n^2}$ c) $\lim\dfrac{(3n-1)(n-2)}{2n-1}$

d) $\lim\dfrac{2n+5}{\sqrt{n^2+1}-n}$ e) $\lim\dfrac{2n+5}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$ f) $\lim\dfrac{(3n-1)^4(n-2)}{(1-2n)^2}$

DT 4 Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

- Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q thoả mãn $|q|<1$ được gọi là *cấp số nhân lùi vô hạn.*
- Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n), Xét $S=u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots$. Khi đó, ta có công thức tính

$$\boxed{S=\dfrac{u_1}{1-q}}$$

Ví dụ 11. Tính các tổng sau:

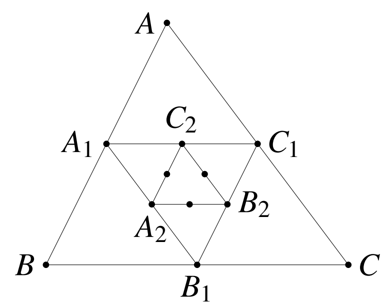
a) $S=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\ldots+\dfrac{1}{3^n}+\ldots$ b) $S=16-8+4-2+\ldots$

Ví dụ 12. Hãy biểu diễn các số thập phân vô hạn tuần hoàn sau dưới dạng phân số.

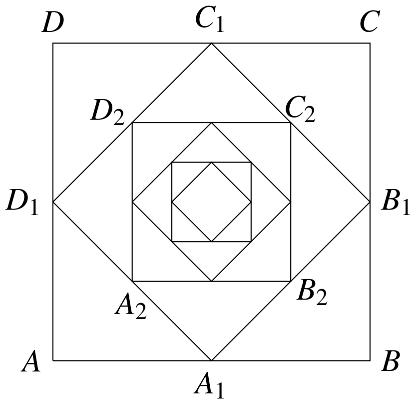
a) $A=0,353535\ldots.$ b) $B=5,231231\ldots.$

Ví dụ 13. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc 150 mg. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5 . Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Ví dụ 14.
Tam giác mà ba đỉnh của nó là ba trung điểm ba cạnh của tam giác ABC được gọi là *tam giác trung bình* của tam giác ABC. Ta xây dựng dãy các tam giác $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$, $A_3B_3C_3$, ... sao cho $A_1B_1C_1$ là một tam giác đều cạnh bằng 3 và với mỗi số nguyên dương $n\geq 2$, tam giác $A_nB_nC_n$ là tam giác trung bình của tam giác $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$. Với mỗi số nguyên dương n, kí hiệu S_n tương ứng là diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác $A_nB_nC_n$. Tính tổng $S=S_1+S_2+\cdots+S_n+\cdots$.



Ví dụ 15. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 2. Hình vuông $A_1B_1C_1D_1$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $ABCD$, hình vuông $A_2B_2C_2D_2$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, hình vuông $A_3B_3C_3D_3$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_2B_2C_2D_2$,..., hình vuông $A_nB_nC_nD_n$ có các đỉnh là trung điểm của các cạnh của hình vuông $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}D_{n-1}$,... (*quá trình chia nhỏ này được lặp lại vô hạn*)



Gọi S_1, S_2, S_3,...,S_n,... lần lượt là diện tích hình vuông $A_1B_1C_1D_1$, $A_2B_2C_2D_2$, $A_3B_3C_3D_3$,..., $A_nB_nC_nD_n$,.... Tính tổng $S_1+S_2+S_3+\ldots+S_n+\ldots$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hai dãy số $(u_n),(v_n)$ với $u_n=3+\dfrac{1}{n}; v_n=5-\dfrac{2}{n^2}$. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim u_n, \lim v_n$.

b) $\lim(u_n+v_n)$, $\lim(u_n-v_n)$, $\lim(u_n\cdot v_n)$, $\lim\dfrac{u_n}{v_n}$.

2 Tính các giới hạn sau

a) $\lim\dfrac{3n+2}{2n+3}$.

b) $\lim\dfrac{4n^2-1}{2n^2+n}$.

c) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-3}{n+2}$.

d) $\lim\dfrac{\sqrt{n^2+2n}-n-1}{\sqrt{n^2+n}+n}$.

3 Tính các giới hạn sau

a) $\lim\dfrac{7.5^n-2.7^n}{5^n-5.7^n}$.

b) $\lim\dfrac{4^{n+1}+6^{n+2}}{5^n+8^n}$.

4 Tính các giới hạn sau

a) $\lim\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)$.

b) $\lim\left(\sqrt{n^3+2n}-n^2\right)$.

c) $\lim(\sqrt{n^2+3n+2}-n+1)$.

d) $\lim(\sqrt{n^2+2n+3}-1+n)$.

5 Tính các giới hạn sau

a) $\lim\dfrac{\sin 10n+\cos 10n}{n^2+1}$.

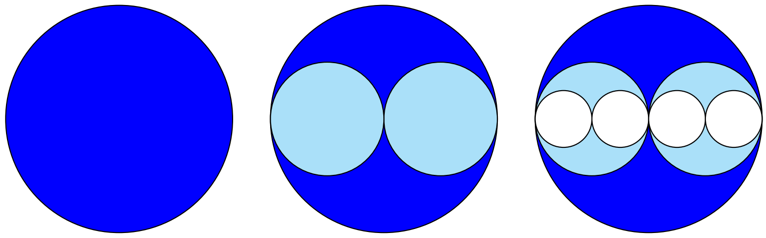
b) $\lim\dfrac{1-\sin n\pi}{n+1}$.

6 Tính tổng của các cấp số nhân lùi vô hạn sau

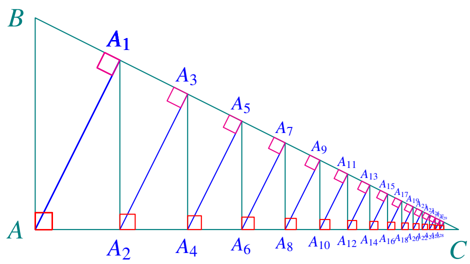
a) $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{8}+\cdots+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\cdots$.   b) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{64}+\cdots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^n+\cdots$.

7 Viết số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}444\ldots$ dưới dạng một phân số.

8 Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình a. Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\dfrac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\dfrac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.



9 Cho tam giác vuông ABC vuông tại A, có $AB=h$ và góc B bằng α (Hình vẽ bên). Từ A kẻ $AA_1\perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2\perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3\perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3\ldots$ Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α.



D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Giới hạn $\lim\dfrac{1}{n}$ bằng

A. ∞. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** 0.

Câu 2. $\lim\limits_{n\to+\infty}3^n$ bằng

A. $-\infty$. **B.** 2. **C.** $+\infty$. **D.** 0.

Câu 3. Cho dãy số (u_n) có $\lim u_n=2$. Tính giới hạn $\lim\dfrac{3u_n-1}{2u_n+5}$.

A. $\dfrac{5}{9}$. **B.** $\dfrac{-1}{5}$. **C.** $+\infty$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 4. Cho dãy số (u_n), (v_n) thỏa $\lim u_n=2$, $\lim v_n=1$. Tính $\lim(2u_n-3v_n)$.

A. 3. **B.** 7. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 5. Nếu $\lim u_n=L$ (với $u_n\geq-9$ với $\forall n\in\mathbb{N}^*$) thì $\lim\sqrt{u_n+9}$ có giá trị là bao nhiêu?

A. $L+9$. **B.** $\sqrt{L+9}$. **C.** $\sqrt{L}+3$. **D.** $L+3$.

Câu 6. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n=(-0{,}99)^n$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $\lim u_n=+\infty$. **B.** $\lim u_n=0$.
C. Không tồn tại $\lim u_n$. **D.** $\lim u_n=-\infty$.

Câu 7. Giá trị của giới hạn $\lim\left(4+\dfrac{(-1)^n}{n+1}\right)$ bằng

A. 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2.

Câu 8. Giá trị của giới hạn $\lim\dfrac{-3}{4n^2-2n+1}$ là

A. $-\dfrac{3}{4}$. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** -1.

Câu 9. Giá trị của giới hạn $\lim \dfrac{n+2n^2}{n^3+3n-1}$ bằng

A. 2. **B.** 1. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** 0.

Câu 10. Tính giới hạn $L=\lim \dfrac{n^2+n+5}{2n^2+1}$.

A. $L=\dfrac{3}{2}$. **B.** $L=\dfrac{1}{2}$. **C.** $L=2$. **D.** $L=1$.

Câu 11. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{4n^2+n+2}{an^2+5}$. Để dãy số đã cho có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. $a=-4$. **B.** $a=4$. **C.** $a=3$. **D.** $a=2$.

Câu 12. Trong các giới hạn sau đây, giới hạn nào bằng 0?

A. $\lim \dfrac{3+2n^3}{2n^2-1}$. **B.** $\lim \dfrac{2n^2-3}{-2n^3-4}$. **C.** $\lim \dfrac{2n-3n^3}{-2n^2-1}$. **D.** $\lim \dfrac{2n^2-3n^4}{-2n^4+n^2}$.

Câu 13. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $+\infty$?

A. $u_n=\dfrac{1+n^2}{5n+5}$. **B.** $u_n=\dfrac{n^2-2}{5n+5n^3}$. **C.** $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+5n^2}$. **D.** $\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$.

Câu 14. Dãy số nào sau đây có giới hạn là $-\infty$?

A. $\dfrac{1+2n}{5n+5n^2}$. **B.** $u_n=\dfrac{n^3+2n-1}{-n+2n^3}$. **C.** $u_n=\dfrac{2n^2-3n^4}{n^2+2n^3}$. **D.** $u_n=\dfrac{n^2-2n}{5n+1}$.

Câu 15. Giá trị của giới hạn $\lim\left(\sqrt{n^2-n+1}-n\right)$ là

A. $-\dfrac{1}{2}$. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 16. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{an+4}{5n+3}$ trong đó a là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn bằng 2, giá trị của a là

A. $a=10$. **B.** $a=8$. **C.** $a=6$. **D.** $a=4$.

Câu 17. Cho dãy số (u_n) với $u_n=\dfrac{2n+b}{5n+3}$ trong đó b là tham số thực. Để dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giá trị của b là

A. b là một số thực tùy ý. **B.** $b=2$.
C. không tồn tại b. **D.** $b=5$.

Câu 18. Tìm tất cả các giá trị của tham số a để $L=\lim \dfrac{5n^2-3an^4}{(1-a)n^4+2n+1}>0$.

A. $a\leqslant 0; a\geqslant 1$. **B.** $0<a<1$. **C.** $a<0; a>1$. **D.** $0\leqslant a<1$.

Câu 19. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thuộc khoảng $(-10;10)$ để $L=\lim\left(5n-3\left(a^2-2\right)n^3\right)=-\infty$?

A. 19. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 20. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $0{,}5111\cdots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\dfrac{a}{b}$. Tính tổng $T=a+b$.

A. 17. **B.** 68. **C.** 133. **D.** 137.

Câu 21. Số thập phân vô hạn tuần hoàn $A = 0,353535\ldots$ được biểu diễn bởi phân số tối giản $\frac{a}{b}$. Tính $T = ab$.

A. 3456. **B.** 3465. **C.** 3645. **D.** 3546.

Câu 22. Tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn bằng 2, tổng của ba số hạng đầu tiên của cấp số nhân bằng $\frac{9}{4}$. Số hạng đầu u_1 của cấp số nhân đó là

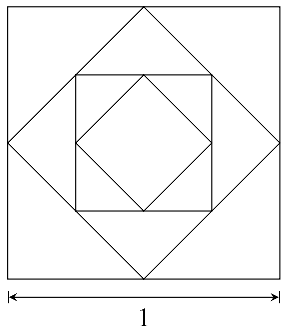
A. $u_1 = 3$. **B.** $u_1 = 4$. **C.** $u_1 = \frac{9}{2}$. **D.** $u_1 = 5$.

Câu 23. Tính tổng $S = 9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{3^{n-3}} + \cdots$.

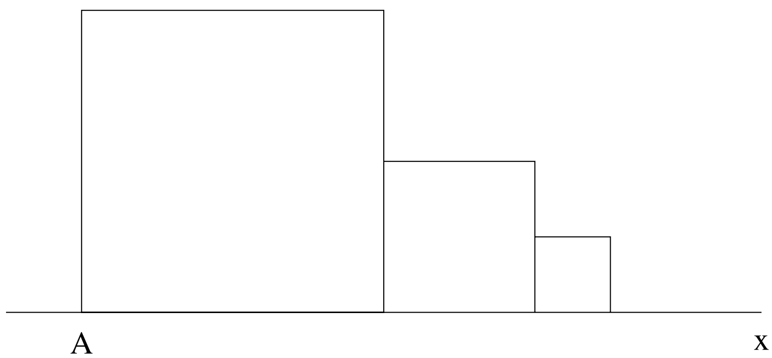
A. $S = \frac{27}{2}$. **B.** $S = 14$. **C.** $S = 16$. **D.** $S = 15$.

Câu 24. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn. Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

A. $\frac{5}{2}$. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** 1.



Câu 25. Người ta xếp các hình vuông kề với nhau như trong hình dưới đây, mỗi hình vuông có độ dài cạnh bằng nửa độ dài cạnh của hình vuông trước nó. Nếu hình vuông đầu tiên có cạnh dài 10 cm thì trên tia Ax cần có một đoạn thẳng dài bao nhiêu xentimet để có thể xếp được tất cả các hình vuông đó?



A. 20. **B.** 15. **C.** 22. **D.** 18.

—HẾT—

§2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho khoảng K chứa điểm x_0 và hàm số $y=f(x)$ xác định trên K hoặc trên $K\setminus\{x_0\}$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi x dần tới x_0 nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n\in K\setminus\{x_0\}$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \text{ hay } f(x)\to L \text{ khi } x\to x_0$$

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$; $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ với c là hằng số.

Định lí về giới hạn hữu hạn:

a) Giả sử $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ và $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Khi đó:

① $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=L+M$;

② $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=L-M$;

③ $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=L\cdot M$;

④ $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (nếu $M\neq 0$).

b) Nếu $f(x)\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, thì $L\geqslant 0$ và $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$.

Giới hạn một bên:

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(x_0;b)$. Số L được gọi là giới hạn bên phải của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_0<x_n<b$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L.$$

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;x_0)$. Số L được gọi là giới hạn bên trái của hàm số $y=f(x)$ khi $x\to x_0$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $a<x_n<x_0$ và $x_n\to x_0$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L.$$

Điều kiện để tồn tại giới hạn:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=L$$

2. GIỚI HẠN HỮU HẠN CỦA HÀM SỐ TẠI VÔ CỰC

Định nghĩa:

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L.$$

- Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(-\infty;a)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là số L khi $x\to-\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n<a$ và $x_n\to-\infty$, ta có $f(x_n)\to L$. Kí hiệu:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L.$$

Chú ý:

- Với c, k là hằng số và k nguyên dương, ta luôn có:

① $\lim\limits_{x\to+\infty} c=c$ ② $\lim\limits_{x\to-\infty} c=c$

③ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{c}{x^k}=0$ ④ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{c}{x^k}=0.$

- Định lí về giới hạn hữu hạn của hàm số khi $x\to x_0$ vẫn còn đúng khi $x\to+\infty$ hoặc $x\to-\infty$.

3. GIỚI HẠN VÔ CỰC CỦA HÀM SỐ

Định nghĩa : Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;+\infty)$. Ta nói hàm số $y=f(x)$ có giới hạn là $-\infty$ khi $x\to+\infty$ nếu với dãy số (x_n) bất kì, $x_n>a$ và $x_n\to+\infty$, ta có $f(x_n)\to-\infty$. Kí hiệu: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

Nhận xét: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} (-f(x))=-\infty$.

Một vài giới hạn đặc biệt:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$, với k nguyên dương.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty \text{ nếu } k \text{ chẵn}\\ -\infty \text{ nếu } k \text{ lẻ.}\end{cases}$

Một vài quy tắc về giới hạn vô cực:

- Quy tắc tìm giới hạn của tích $f(x)\cdot g(x)$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)\cdot g(x)]$
$L>0$	$+\infty$	$+\infty$
$L>0$	$-\infty$	$-\infty$
$L<0$	$+\infty$	$-\infty$
$L<0$	$-\infty$	$+\infty$

- Quy tắc tìm giới hạn của thương $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	Dấu của $g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$
L	$\pm\infty$	Tùy ý	0
$L>0$	0	$+$	$+\infty$
$L>0$	0	$-$	$-\infty$
$L<0$	0	$+$	$-\infty$
$L<0$	0	$-$	$+\infty$

Các quy tắc trên vẫn đúng khi thay $x\to x_0$ bởi $x\to x_0^+$, $x\to x_0^-$ hoặc $x\to+\infty$, $x\to-\infty$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Giới hạn của hàm số khi $x \to x_0$. Khử dạng vô định $\frac{0}{0}$

Xét giới hạn $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Phương pháp giải: Thay x_0 vào $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ để kiểm tra, sẽ có một trong các trường hợp:

① Tử số $f(x_0) = a$ và mẫu số $g(x_0) = b \neq 0$, ta suy ra luôn kết quả

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \frac{a}{b}.$$

② Cả tử số và mẫu số đều bằng 0 hay $f(x_0) = g(x_0) = 0$, ta xem đây là dạng vô định $\frac{0}{0}$. Khử dạng vô định này bằng cách phân tích nhân tử $x - x_0$.
Phân tích $f(x) = (x - x_0) \cdot f_1(x)$ và $g(x) = (x - x_0) \cdot g_1(x)$. Khi đó

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) f_1(x)}{(x - x_0) g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \quad (1)$$

Ta tiếp tục tính giới hạn (1).

③ Tử số $f(x_0) \neq 0$ và mẫu số $g(x_0) = 0$. Ta áp dụng các định lý liên quan đến giới hạn vô cực để tìm kết quả.

Một số cách phân tích nhân tử thường dùng:

- *Nếu $f(x) = ax^2 + bx + c$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.*
- *Nếu $f(x)$ là một đa thức bậc ba, bậc bốn,...ta có thể dùng phương pháp chia đa thức.*
- *Nếu $f(x)$ là biểu thức chứa căn, ta dùng cách nhân lượng liên hợp.*

Ví dụ 1. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 + 2x}{4}$.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} + 1}{x^2 + 2}$.

Ví dụ 2. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 + 4x}$.

b) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{1 - 2x}$.

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 5x + 2}{x^2 + x - 6}$.

d) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^3 - 5x^2 + 2}{3x^2 - 5x + 2}$.

e) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3 + 3x^2 - 9x - 2}{x^3 - x - 6}$.

f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x^2 - 3x - 7}{x^3 + 1}$.

Ví dụ 3. Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 3} - 2}{2x - 2}$.

b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$.

c) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{2 - \sqrt{5 - x^2}}{x + 1}$.

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{4x+1}}{x^2+3x}$. e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x^2+3x-1}-3}$. f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sqrt{x+5}-2}$.

DT 2 Giới hạn của hàm số khi $x\to\pm\infty$. Khử dạng vô định $\frac{\infty}{\infty}$; $\infty-\infty$; $0\cdot\infty$

Ví dụ 4. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{5x-2}{3x+1}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-x+10}{x^3+3x-3}$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^4-x^3+3}{2x^6-7}$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{2x^2}{x+1}-1\right)$.

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^3-3x}{(x+1)(2x^2-3)}$.

f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(x+1)^2(2x+1)^2}{(2x^3+1)(x-2)^3}$.

Ví dụ 5. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-x+5}}{5x-1}$. b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+x}+2x}{2x+3}$. c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2+2x}+x}$.

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\sqrt{2x^2-7x+1}}{3|x|-7}$. e) $\lim\limits_{x\to -\infty}\sqrt[3]{\dfrac{x^2+2x}{8x^2-x+5}}$. f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+\sqrt{x^2+2}}{\sqrt[3]{8x^3+x^2+1}}$.

Ví dụ 6. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$. b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+2x}\right)$. c) $\lim\limits_{x\to -\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)$.

Ví dụ 7. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-x\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x}-\sqrt{x^2+x}\right)$.

Ví dụ 8. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(2x^5-x^4+4x^3-3\right)$.

b) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2x^5-x^4+4x^3-3\right)$.

c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(-x^3-x^2+4x+2\right)$.

d) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(-x^3-x^2+4x+2\right)$.

e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(2x-\sqrt{x^2+x}\right)$.

Ví dụ 9. Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{5x^2-2x+3}{x+1}$. b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x^3-x+10}{x^2+3x-3}$. c) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{3x^4+5x^2+7}{x^3-15x}$.

d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x^2+\sqrt{x+1}}{2x-7}$. e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x}-x}$. f) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{x^2+x}+x}$.

DT 3 Giới hạn một bên. Sự tồn tại giới hạn

Phương pháp tính $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ và $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ hoàn toàn tương tự như bài toán tính $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

Lưu ý: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$ *khi và chỉ khi* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=L.$

Ví dụ 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}-x^2 & \text{khi } x<1\\ x & \text{khi } x\geq 1.\end{cases}$ Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (nếu có).

Ví dụ 11. Tính giới hạn của các hàm số sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3}{x^2-2x+6}$;

b) $\lim\limits_{x\to 3^+}\dfrac{-x^2+5}{x-3}$;

c) $\lim\limits_{x\to 3^-}\dfrac{2x^2+\sqrt{3-x}}{x-3}$;

d) $\lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{|x^2-4|}{x+2}$.

DT 4 Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 12. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t)=\dfrac{50t}{t+4}$ $(t\geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim\limits_{t\to +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Ví dụ 13. Một cái hồ đang chứa 200 m^3 nước mặn với nồng độ muối 10 kg/m^3. Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với vận tốc 2 m^3/phút.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim\limits_{t\to +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Ví dụ 14. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công thức

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}.$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}0 & \text{khi } x<0\\ 1 & \text{khi } x>0.\end{cases}$

a) Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$.

b) Có tồn tại $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

2 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}1-2x & \text{khi } x\leq -1\\ x^2+2 & \text{khi } x>-1.\end{cases}$
Tìm các giới hạn $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ và $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ (nếu có).

3 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{4x^2-x-5}{7x^2+5x-2}$.

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{4-x^2}{x+2}$.

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-15}{x-3}$.

d) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$.

4 Tính các giới hạn sau

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{2x}$.

b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{2x^3-3x^2}$.

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7}-x-2}{x^3-4x+3}$.

5 Tính các giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-2}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to 4^-} \dfrac{x^2-x+1}{4-x}$.

6 Cho hàm số $g(x) = \dfrac{x^2-5x+6}{|x-2|}$. Tìm $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)$ và $\lim\limits_{x\to 2^-} g(x)$.

7 Tính các giới hạn sau:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x+2}-x\right)$.

8 Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \dfrac{30t}{400+t}$ (gam/lít).

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \to +\infty$.

9 Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$). Tính $\lim\limits_{t\to 0^+} H(t)$ và $\lim\limits_{t\to 0^-} H(t)$.

10 Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\overline{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim\limits_{x\to +\infty} \overline{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

11 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax^2+3ax-4a}{x-1} & \text{khi } x < 1 \\ 2bx+1 & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Biết rằng a, b là các số thực thỏa mãn hàm số $f(x)$ có giới hạn tại $x = 1$.

a) Tìm mối quan hệ giữa a và b.

b) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + b^2$.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=3$. Tìm khẳng định **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)+3]=6$.
B. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{f(x)+1}=2$.
C. $\lim\limits_{x\to 2}[f(x)-2x]=-1$.
D. $\lim\limits_{x\to 2}\left[f(x)-x^2\right]=1$.

Câu 2. Biết $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=3$ và $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=-2$. Tìm khẳng định đúng?

A. $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+2g(x)]=-1$.
B. $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+2g(x)]=1$.
C. $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+2g(x)]=5$.
D. $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)+2g(x)]=-6$.

Câu 3. $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x^2+7x+11\right)$ có kết quả là

A. 37. **B.** 38. **C.** 39. **D.** 40.

Câu 4. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-3}{x^3+2}$ là

A. 1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** $-\dfrac{3}{2}$.

Câu 5. Giá trị của $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{3x^2+1}-x}{x-1}$ là

A. $-\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{1}{2}$. **C.** $-\dfrac{1}{2}$. **D.** $\dfrac{3}{2}$.

Câu 6. Kết quả của $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x-15}{x-2}$ là

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{15}{2}$. **D.** 1.

Câu 7. Kết quả của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{|2-x|}{2x^2-5x+2}$ là

A. $-\infty$. **B.** $+\infty$. **C.** $-\dfrac{1}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{3}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\sqrt{1-x}} & \text{với } x<1\\ \sqrt{3x^2+1} & \text{với } x\geqslant 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ là

A. $+\infty$. **B.** 2. **C.** 4. **D.** $-\infty$.

Câu 9. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+1}{1-x} & \text{với } x<1\\ \sqrt{2x-2} & \text{với } x\geqslant 1\end{cases}$. Khi đó $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ là

A. $+\infty$. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3 & \text{với } x>3\\ 1 & \text{với } x=3\\ 3-2x^2 & \text{với } x<3\end{cases}$. Khẳng định nào dưới đây **sai**?

A. $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=6$.
B. Không tồn tại $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$.
C. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=6$.
D. $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-15$.

Câu 11. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 3. **D.** Không xác định.

Câu 12. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}} \dfrac{2x^3+6\sqrt{3}}{3-x^2} = a\sqrt{3}+b$. Tính a^2+b^2.

A. 10. **B.** 25. **C.** 5. **D.** 13.

Câu 13. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-x^3+1\right)$ là

A. 1. **B.** $-\infty$. **C.** 0. **D.** $+\infty$.

Câu 14. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(|x|^3+2x^2+3|x|\right)$ là

A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** 1. **D.** $-\infty$.

Câu 15. Giá trị của giới hạn $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{1+2x^2}-x\right)$ là

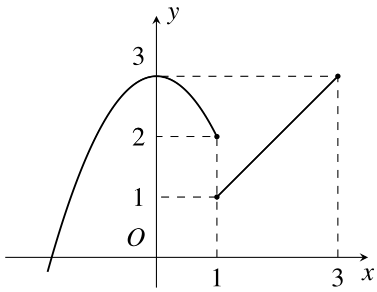
A. 0. **B.** $+\infty$. **C.** $\sqrt{2}-1$. **D.** $-\infty$.

Câu 16. Biết rằng $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{5x^2+2x}+x\sqrt{5}\right) = a\sqrt{5}+b$. Tính $S=5a+b$.

A. $S=1$. **B.** $S=-1$. **C.** $S=5$. **D.** $S=-5$.

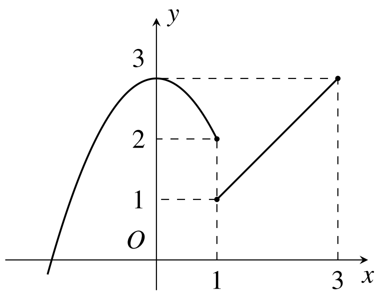
Câu 17. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Tính $\lim\limits_{x\to1^+} f(x) + \lim\limits_{x\to3^-} f(x)$.

A. 5. **B.** 4 .
C. 2. **D.** 0.



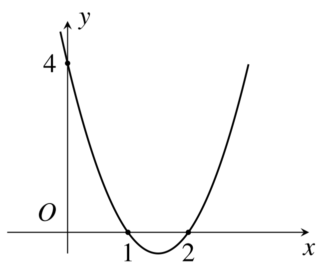
Câu 18. Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.
Tính $\lim\limits_{x\to0} f(x) + \lim\limits_{x\to1^-} f(x)$.

A. 5. **B.** 4 .
C. 2. **D.** 0.



Câu 19. Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên.
Tính $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{3x^2+1}$.

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$.
C. 2. **D.** 1.



Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+2}{x-1}$. Biết rằng $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=0$. Tính $m+n$.

A. $m+n=0$. **B.** $m+n=1$. **C.** $m+n=-1$. **D.** $m+n=3$.

—HẾT—

§3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

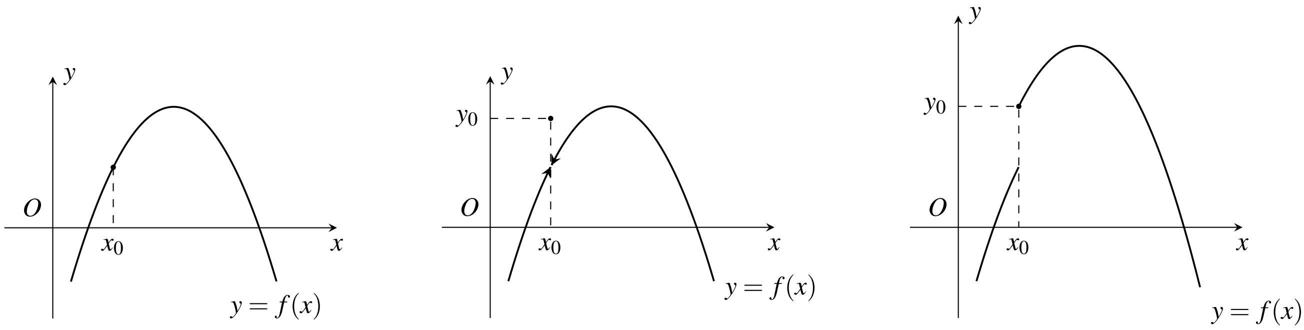
1. HÀM SỐ LIÊN TỤC TẠI MỘT ĐIỂM

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục** tại x_0 nếu

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)}$$

*Nếu hàm số không liên tục tại x_0 thì ta nói hàm số đó **gián đoạn** tại x_0.*

Minh họa đồ thị:



Hàm số liên tục tại x_0 — Hàm số gián đoạn tại x_0 — Hàm số gián đoạn tại x_0

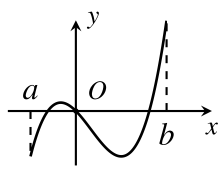
2. HÀM SỐ LIÊN TỤC TRÊN MỘT KHOẢNG

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên một khoảng** nếu nó liên tục tại mọi điểm của khoảng đó.

Chú ý:

- Hàm số $y = f(x)$ được gọi là **liên tục trên đoạn** $[a;b]$ nếu nó liên tục trên khoảng $(a;b)$ và $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = f(b)$.
- Khái niệm hàm số **liên tục trên nửa khoảng** như $[a;b)$, $[a;+\infty)$,... được định nghĩa một cách tương tự như liên tục trên đoạn.

- *Đồ thị của hàm số liên tục trên một khoảng là một "đường liền" trên khoảng đó. Hình bên là đồ thị của một hàm số liên tục tên $(a;b)$.*



- *Hàm số đa thức và các hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ liên tục trên toàn bộ tập số thực $\mathbb{R}$.*
- *Hàm số phân thức hữu tỉ (thương của hai đa thức) và các hàm số $y = \tan x$, $y = \cot x$, $y = \sqrt{x}$ liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.*

3. MỘT SỐ ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1. Giả sử $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là hai hàm số liên tục tại điểm x_0. Khi đó

- Các hàm số $y = f(x) + g(x)$, $y = f(x) - g(x)$ và $y = f(x) \cdot g(x)$ liên tục tại x_0.
- Hàm số $y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ liên tục tại x_0 nếu $g(x_0) \neq 0$.

Định lý 2. Sự tồn tại nghiệm của phương trình trên một khoảng

- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$, thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a;b)$ sao cho $f(c) = 0$.
- Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ và $f(a) \cdot f(b) < 0$ thì phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm nằm trong khoảng $(a;b)$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Xét tính liên tục của hàm số tại một điểm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D. Để xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in D$, ta thực hiện các bước sau:

- Bước 1. Tính $f(x_0)$.
- Bước 2. Tìm $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$.
- Bước 3. So sánh và rút ra kết luận.
  - Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm x_0.
  - Nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ thì hàm số $f(x)$ không liên tục (gián đoạn) tại điểm x_0.

Ví dụ 1. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} & \text{khi } x \neq 2 \\ 4x - 7 & \text{khi } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Ví dụ 2. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 6x + 5}{x^2 - 1} & \text{nếu } x \neq 1 \\ -2 & \text{nếu } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

Ví dụ 3. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{2x - 3}}{2 - x} & \text{nếu } x \neq 2 \\ -1 & \text{nếu } x = 2 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 2$.

Ví dụ 4. Xét tính liên tục của hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{nếu } x > 0 \\ x & \text{nếu } x \leq 0 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 0$.

Ví dụ 5. Xét tính liên tục của hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-5}{\sqrt{2x-1}-3} & \text{nếu } x>5\\ (x-5)^2+3 & \text{nếu } x\le 5\end{cases}$ tại điểm $x_0=5$.

DT 2 Xét tính liên tục của hàm số trên miền xác định

- Hàm đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm phân thức hữu tỉ, hàm lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.

Ví dụ 6. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x+1} & \text{khi } x\ne -1\\ -3 & \text{khi } x=-1\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{(x-1)^2} & \text{khi } x\ne 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

Ví dụ 7. Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases}x^2+3x & \text{khi } x\ge 2\\ 6x+1 & \text{khi } x<2.\end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+5 & \text{khi } x>1\\ 3 & \text{khi } x=1\\ 2x+1 & \text{khi } x<1.\end{cases}$

Ví dụ 8. Tìm các giá trị của a để hàm số $f(x)=\begin{cases}x+1 & \text{nếu } x\le a\\ x^2 & \text{nếu } x>a\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

DT 3 Tìm giá trị của tham số để hàm số liên tục - gián đoạn tại điểm cho trước.

Ví dụ 9. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-m & \text{khi } x\ne 2\\ x+m & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x_0=2$.

Ví dụ 10. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x-3}{x+1} & \text{khi } x\ne -1\\ m^2+5m & \text{khi } x=-1\end{cases}$ liên tục tại $x_0=-1$.

Ví dụ 11. Tìm tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{4x+5}-3}{x^2-1} & \text{khi } x>1\\ 2m+3 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ gián đoạn tại $x_0=1$.

DT 4 Chứng minh phương trình có nghiệm

- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có ít nhất một nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và có hai số $a,b\in D$ sao cho $f(a).f(b)<0$.
- Để chứng minh phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm trên D, ta chứng minh hàm số $y=f(x)$ liên tục trên D và tồn tại k khoảng rời nhau $(a_i;a_{i+1})\,(i=1,2,\ldots,k)$ nằm trong D sao cho $f(a_i).f(a_{i+1})<0$.

Ví dụ 12. Chứng minh rằng phương trình $2x^4-2x^3-3=0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(-1;0)$.

Ví dụ 13. Chứng minh rằng phương trình $6x^3+3x^2-31x+10=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Xét tính liên tục của hàm số:

a) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{khi } x\geq 0\\ 1-x & \text{khi } x<0\end{cases}$ tại điểm $x=0$.

b) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{khi } x\geq 1\\ x & \text{khi } x<1\end{cases}$ tại điểm $x=1$.

2 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x+2} & \text{khi } x\neq -2\\ a & \text{khi } x=-2.\end{cases}$ Tìm a để hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

3 Xét tính liên tục của hàm số sau trên tập xác định của chúng.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & \text{khi } x\neq 2\\ 1 & \text{khi } x=2\end{cases}$.

b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{khi } x\neq 1\\ 3 & \text{khi } x=1\end{cases}$.

4 Một bãi đậu xe ô-tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x)=\begin{cases} 60.000 & \text{khi } 0<x\leq 2\\ 100.000 & \text{khi } 2<x\leq 4\\ 200.000 & \text{khi } 4<x\leq 24.\end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

5 Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó là $F(r)=\begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0<r\leq R\\ \dfrac{GM}{r^2} & \text{khi } r\geq R\end{cases}$, trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0;+\infty)$ không?

6 Chứng minh rằng phương trình $x^4-x^3-2x^2-15x-25=0$ có ít nhất một nghiệm âm và ít nhất một nghiệm dương.

7 Chứng minh rằng phương trình $x^3+4x^2-2=0$ có ba nghiệm trong khoảng $(-4;1)$.

8 Chứng minh rằng phương trình $x^5-5x^3+4x-1=0$ có đúng năm nghiệm.

9 Chứng minh rằng phương trình $x+1+\cos x=0$ có nghiệm.

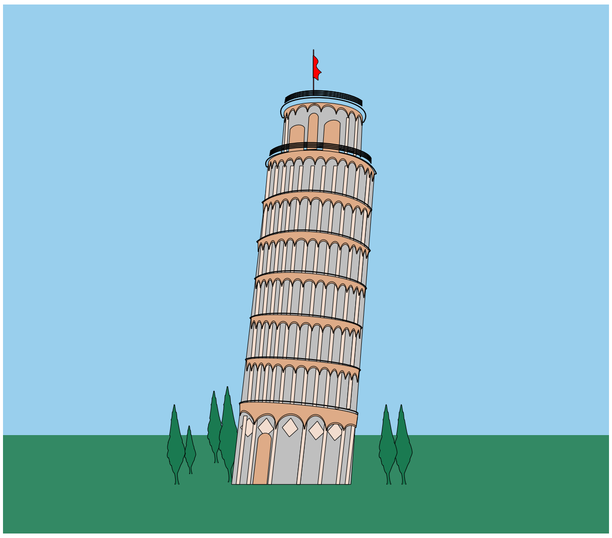
10 Cho hàm số $f(x)=\begin{cases} 2x+a & \text{nếu } x<2\\ 4 & \text{nếu } x=2\\ -3x+b & \text{nếu } x>2\end{cases}$

a) Với $a=0, b=1$, xét tính liên tục của hàm số tại $x=2$.

b) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục tại $x=2$?

c) Với giá trị nào của a, b thì hàm số liên tục trên tập xác định?

11 Từ độ cao $55,8$ m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất hình bên dưới. Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

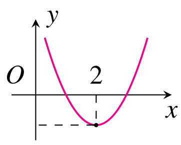


D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

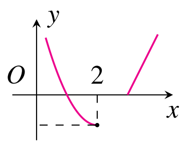
Câu 1. Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên khoảng K và $x_0 \in K$. Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại x_0 nếu

A. $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. **B.** $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$. **C.** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. **D.** $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

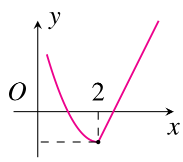
Câu 2. Trong bốn đồ thị sau, có một đồ thị không liên tục tại điểm $x=2$. Hỏi đó là đồ thị nào?

A. 

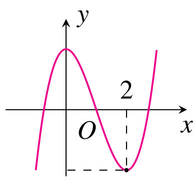
.

B. 

.

C. 

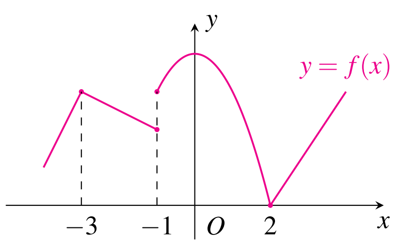
.

D. 

.

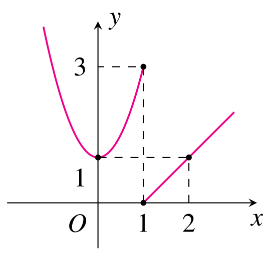
Câu 3. Cho đồ thị hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình bên. Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Hàm số liên tục tại $x=-3$. **B.** Hàm số liên tục tại $x=-1$.
C. Hàm số liên tục tại $x=0$. **D.** Hàm số liên tục tại $x=2$.



Câu 4. Hàm số $y=f(x)$ có đồ thị dưới đây gián đoạn tại điểm có hoành độ bằng bao nhiêu?

A. $x=1$. **B.** $x=0$.
C. $x=2$. **D.** $x=3$.



Câu 5. Cho $f(x)$ và $g(x)$ là các hàm số liên tục tại $x=1$. Biết $f(1)=2$ và $\lim\limits_{x \to 1}[2f(x)-g(x)]=3$. Tính $g(1)$.

A. $g(1)=-2$. **B.** $g(1)=2$. **C.** $g(1)=-1$. **D.** $g(1)=1$.

Câu 6. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau.

A. $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.
B. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(2;+\infty)$.
C. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;2)$ và $(2;+\infty)$.
D. $f(x)$ liên tục trên các khoảng $(-\infty;1)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 7. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. Hàm số $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ gián đoạn tại $x=1$. **B.** Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ liên tục trên $(0;2)$.
C. Hàm số $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x+4}$ với $x\neq -4$. Để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=-4$ thì ta cần bổ sung giá trị $f(-4)$ bằng bao nhiêu?

A. 5. **B.** -5. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 9. Hàm số nào dưới đây gián đoạn tại điểm $x=1$?

A. $y=\dfrac{x-1}{x^2+x+1}$. **B.** $y=\dfrac{x^2-x+1}{x+1}$.
C. $y=(x-1)(x^2+x+1)$. **D.** $y=\dfrac{x^2+2}{x-1}$.

Câu 10. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ m & \text{khi } x=2\end{cases}$. Với giá trị nào của tham số m thì hàm số đã cho liên tục tại điểm $x=2$?

A. $m=1$. **B.** $m=3$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=-3$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & \text{nếu } x\neq 1\\ m & \text{nếu } x=1\end{cases}$, với m tham số thực. Tìm m để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=1$.

A. $m=-2$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-1$. **D.** $m=2$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x^2-4}-2}{x-2} & \text{nếu } x\neq 2\\ a & \text{nếu } x=2\end{cases}$. Tìm a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

A. 2. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 8.

Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}x^2+m & \text{khi } x\geq 2\\ 3x-1 & \text{khi } x<2\end{cases}$ (m là tham số). Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số đã cho liên tục tại $x_0=2$.

A. $m=0$. **B.** $m=2$. **C.** $m=1$. **D.** $m=3$.

Câu 14. Tìm a để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} & \text{khi } x\neq 2\\ 2x+a & \text{khi } x=2\end{cases}$ liên tục tại $x=2$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{4}$. **C.** $\dfrac{15}{4}$. **D.** $-\dfrac{15}{4}$.

Câu 15. Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-x^2}{x-1} & \text{khi } x>1\\ n & \text{khi } x=1\\ mx+1 & \text{khi } x<1\end{cases}$. Biết hàm số $f(x)$ liên tục tại $x_0=1$. Giá trị của m, n là

A. $n=m=1$. **B.** $n=1$, $m=0$. **C.** $n=-1$, $m=0$. **D.** $n=0$, $m=1$.

Câu 16. Tìm P để hàm số $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-4x+3}{x-1} & \text{khi } x>1\\ 6Px-3 & \text{khi } x\le 1\end{cases}$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

A. $P=\dfrac{1}{3}$. **B.** $P=\dfrac{5}{6}$. **C.** $P=\dfrac{1}{6}$. **D.** $P=\dfrac{1}{2}$.

Câu 17. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} & \text{khi } x\ne 0\\ 2a-\dfrac{5}{4} & \text{khi } x=0\end{cases}$. Tìm giá trị thực của tham số a để hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=0$.

A. $a=\dfrac{3}{4}$. **B.** $a=-\dfrac{3}{4}$. **C.** $a=\dfrac{4}{3}$. **D.** $a=-\dfrac{4}{3}$.

Câu 18. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{3x+1}-2}{x-1} & \text{khi } x\ne 1\\ m & \text{khi } x=1\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=1$.

A. $m=3$. **B.** $m=1$. **C.** $m=\dfrac{3}{4}$. **D.** $m=\dfrac{1}{2}$.

Câu 19. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-1} & \text{khi } x<-1\\ mx+2 & \text{khi } x\ge -1\end{cases}$ liên tục tại $x=-1$.

A. $m=\dfrac{5}{2}$. **B.** $m=\dfrac{3}{2}$. **C.** $m=-\dfrac{3}{2}$. **D.** $m=-\dfrac{5}{2}$.

Câu 20. Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1} & \text{nếu } x>1\\ ax+2 & \text{nếu } x\le 1\end{cases}$. Giá trị của a để hàm số liên tục tại $x=1$ thuôc khoảng nào sau đây?

A. $(-4;-2)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(2;4)$. **D.** $(0;2)$.

—HẾT—

Chương 4

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

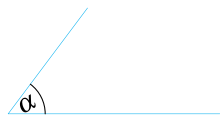
§1. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

Mặt phẳng: Để biểu diễn mặt phẳng, người ta dùng hình bình hành hay một miền góc

Kí hiệu (P) hoặc mp(P)



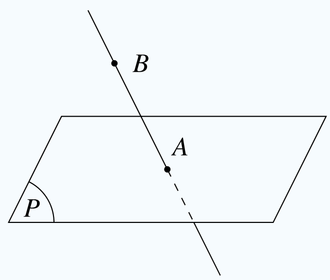
Kí hiệu (α) hoặc mp(α)

Điểm thuộc mặt phẳng: Cho điểm A, B và mặt phẳng (α).

① Khi A thuộc mặt phẳng (α), ta kí hiệu $A \in (\alpha)$.

② Khi B không thuộc mặt phẳng (α), ta kí hiệu $B \notin (\alpha)$.

⚠ *Dấu hiệu nhận biết $A \in (\alpha)$ là điểm A thuộc một đường thẳng nằm trong (α)*



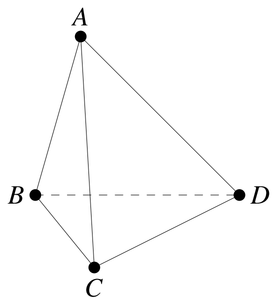
Biểu diễn hình không gian lên một mặt phẳng:

① Dùng nét vẽ liền để biểu diễn cho những đường trông thấy và dùng nét đứt đoạn (- - - -) để biểu diễn cho những đường bị che khuất.

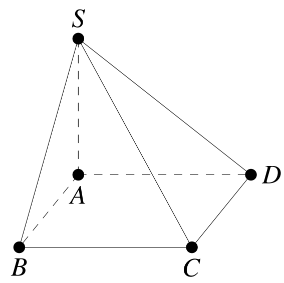
① Quan hệ thuộc, song song được giữ nguyên, nghĩa là

- Nếu hình thực tế điểm A thuộc đường thẳng Δ thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.
- Nếu hình thực tế hai đường thẳng song song thì hình biểu diễn phải giữ nguyên quan hệ đó.

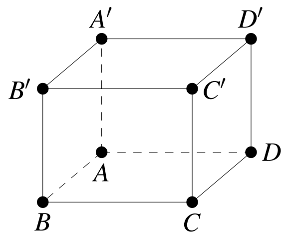
Hình biểu diễn của các mô hình không gian thường gặp:



Hình tứ diện



Hình chóp tứ giác đáy hình bình hành



Hình lập phương, hộp chữ nhật

2. CÁC TÍNH CHẤT THỪA NHẬN

Xét trong không gian, ta thừa nhận các tính chất sau:

Tính chất 1: Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt.

Tính chất 2: Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

Tính chất 3: Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng thuộc mặt phẳng đó. Ta kí hiệu mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng A, B, C là (ABC). Nếu có nhiều điểm cùng thuộc một mặt phẳng thì ta nói những điểm đó đồng phẳng. Nếu *không* có mặt phẳng nào chứa các điểm đó thì ta nói những điểm đó *không đồng phẳng*.

Tính chất 4: Nếu một đường thẳng có hai điểm thuộc một mặt phẳng thì tất cả các điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α).

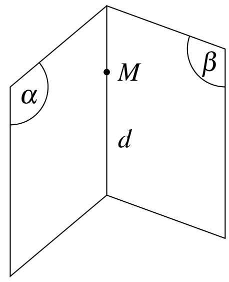
① Khi d nằm trong (α), ta kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hoặc $(P) \supset d$. (không được viết $d \in (\alpha)$ nhé!!!)

② Khi d không nằm trong (α), ta kí hiệu $d \not\subset (\alpha)$.

⚠ *Dấu hiệu nhận biết $d \subset (\alpha)$ là trên d có hai điểm phân biệt thuộc (α)*

Tính chất 5: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có điểm chung thì các điểm chung của hai mặt phẳng là một đường thẳng đi qua điểm chung đó.

Đường thẳng chung d (nếu có) của hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q) được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng đó và kí hiệu là $d = (P) \cap (Q)$.



Tính chất 6: Trên mỗi mặt phẳng các kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3. CÁCH XÁC ĐỊNH MỘT MẶT PHẲNG

Ba cách xác định một mặt phẳng

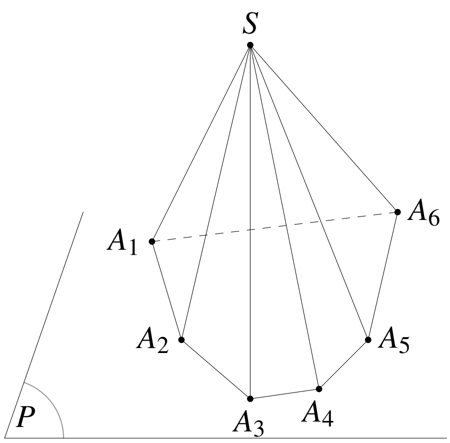
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng của mặt phẳng, kí hiệu (ABC).
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua một đường thẳng d và một điểm A không thuộc d, kí hiệu (A, d).
- Một mặt phẳng được xác định nếu biết nó đi qua hai đường thẳng a, b cắt nhau, kí hiệu (a, b).

4. HÌNH CHÓP VÀ HÌNH TỨ DIỆN

Hình chóp:

Định nghĩa: Cho đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ và cho điểm S nằm ngoài mặt phẳng chứa đa giác đó. Nối S với các đỉnh $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta được n miền đa giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \ldots, SA_{n-1}A_n$. Hình gồm n tam giác đó và đa giác $A_1A_2A_3\ldots A_n$ được gọi là hình chóp $S.A_1A_2A_3\ldots A_n$.

Các tên gọi:



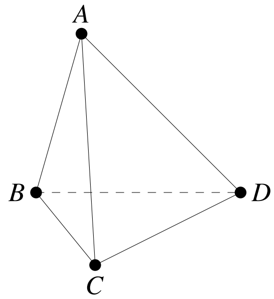
- Điểm S gọi là đỉnh của hình chóp.
- Đa giác $A_1A_2\ldots A_n$ gọi là mặt đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ gọi là các cạnh đáy của hình chóp.
- Các đoạn thẳng $SA_1, SA_2, \ldots, SA_n$ gọi là các cạnh bên của hình chóp.
- Các miền tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, \ldots, SA_{n-1}A_n$ gọi là các mặt bên của hình chóp.

Hình tứ diện:

Định nghĩa: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ACD, ABD, BCD được gọi là hình tứ diện và được kí hiệu là $ABCD$.

Chú ý:

- Hai cạnh không có đỉnh chung gọi là hai cạnh đối diện, đỉnh không nằm trên một mặt được gọi là đỉnh đối diện với mặt đó.
- Hình chóp tam giác còn được gọi là hình tứ diện.
- Hình tứ diện có bốn mặt là những tam giác đều hay có tất cả các cạnh bằng nhau được gọi là hình tứ diện đều.



Hình tứ diện

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Các quan hệ cơ bản

① Chứng minh điểm A thuộc (α): Ta chứng tỏ điểm A thuộc đường thẳng Δ nằm trong α, nghĩa là

$$\begin{cases} A \in \Delta \\ \Delta \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha).$$

② Chứng minh đường thẳng d nằm trong (α): Ta chứng tỏ d có hai điểm phân biệt cùng thuộc (α), nghĩa là

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ B \in (\alpha) \\ A, B \in d \end{cases} \Rightarrow d \subset (\alpha).$$

③ Chứng minh A là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β):Ta thường sử dụng một trong hai cách sau

$$\begin{cases} A \in (\alpha) \\ A \in (\beta) \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta).$$

hoặc

$$\begin{cases} d \subset (\alpha) \\ \Delta \subset (\beta) \\ d \cap \Delta = A \end{cases} \Rightarrow A \in (\alpha) \cap (\beta).$$

Ví dụ 1. Cho tam giác ABC và điểm S không thuộc mặt phẳng (ABC). Lấy D, E là các điểm lần lượt thuộc các cạnh SA, SB $(D, E$ khác $S)$.

a) Đường thẳng DE có nằm trong mặt phẳng (SAB) không?

b) Giả sử DE cắt AB tại F. Chứng minh rằng F là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (CDE).

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Lấy M, N lần lượt thuộc các cạnh SA, SC.

a) Chứng minh rằng đường thẳng MN nằm trong mặt phẳng (SAC).

b) Chứng minh rằng O là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Ví dụ 3. Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác BCD, CDA.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI).

b) Gọi G là giao điểm của AM và BN. Chứng minh rằng $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{GN}{GB} = \dfrac{1}{3}$.

DT 2 Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Cho hai mặt phẳng (α) và (β) cắt nhau. Để xác định giao tuyến của chúng, ta đi tìm hai điểm chung phân biệt. Cụ thể, ta thường gặp một trong ba trường hợp sau:

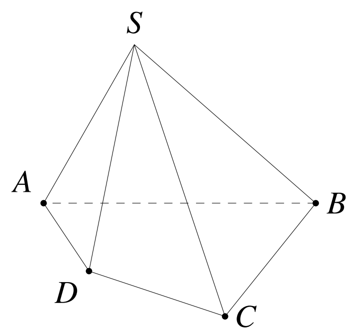
① Hai mặt phẳng (α) và (β) có sẵn hai điểm chung phân biệt: Khi đó giao tuyến là đường thẳng qua hai điểm chung đó.

② Hai mặt phẳng (α) và (β) thấy trước một điểm chung A:

- A là điểm chung thứ nhất hay $A \in (\alpha) \cap (\beta)$.
- Ta tìm điểm chung thứ 2: Trong (α) tìm một đường thẳng d_1, trong (β) tìm một đường thẳng d_2 sao cho chúng có thể cắt nhau (đồng phẳng). Gọi $B = d_1 \cap d_2$, suy ra $B \in (\alpha) \cap (\beta)$. Vậy $AB = (\alpha) \cap (\beta)$.

③ Hai mặt phẳng (α) và (β) chưa thấy điểm chung: Ta mở rộng mặt phẳng để tìm điểm chung tương tự như cách tìm điểm chung ở mục số ②.

Ví dụ 4.
Cho tứ giác $ABCD$ sao cho các cạnh đối không song song với nhau. Lấy một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định giao tuyến của

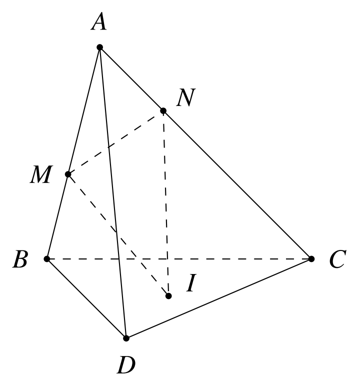


a) Mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (SBD).

b) Mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SCD).

c) Mặt phẳng (SAD) và mặt phẳng (SBC).

Ví dụ 5.
Cho tứ diện $ABCD$. Lấy các điểm M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC sao cho MN cắt BC. Gọi I là điểm bên trong tam giác BCD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNI) với các mặt phẳng (ABC), (BCD), (ABD), (ACD).



Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm các cạnh AD, BC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng (JAD).

b) Lấy điểm M thuộc cạnh AB, N thuộc cạnh AC sao cho M, N không là trung điểm. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (IBC) và mặt phẳng (DMN).

Ví dụ 7. Cho tứ diện $ABCD$, M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

a) (AMN) và (BCD).

b) (DMN) và (ABC).

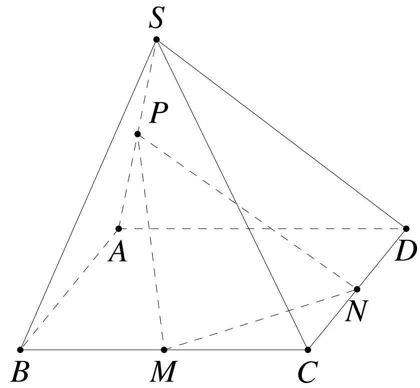
Ví dụ 8.
Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của cạnh BC, CD, SA. Tìm giao tuyến của

a) (MNP) và (SAB).

b) (MNP) và (SBC).

c) (MNP) và (SAD).

d) (MNP) và (SCD).



Ví dụ 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của SA, BC. N là điểm trên cạnh SB sao cho $BN = \frac{1}{4}BS$. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng

a) $(ABCD)$.

b) (SAD).

c) (SCD).

DT 3 Tìm giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

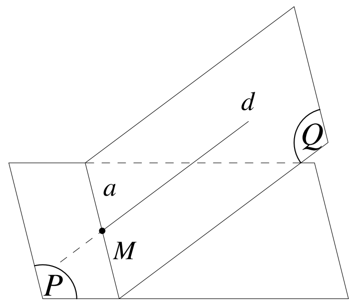
Muốn tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) (phân biệt, không song song), ta tìm giao điểm của d với một đường thẳng a nằm trong (P). Xét hai khả năng:

① Nếu đường thẳng a dễ tìm, nghĩa là có sẵn $a \subset (P)$ và a cắt được d. Khi đó

- Gọi $M = d \cap a$ thì $\begin{cases} M \in d \\ M \in a \subset (P) \end{cases}$.
- Vậy $M = d \cap (P)$.

② Nếu đường thẳng a khó tìm, ta thực hiện các bước sau:

- Tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng d và dễ tìm giao tuyến với (P);
- Tìm $(Q) \cap (P) = a$.
- Tìm $M = d \cap a$, suy ra $M = d \cap (P)$.



Ví dụ 10. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. K là điểm nằm trên BD sao cho $KD < KB$.

a) Tìm giao điểm của CD với mặt phẳng (MNK).

b) Tìm giao điểm của AD với mặt phẳng (MNK).

Ví dụ 11. Cho tứ diện $ABCD$. trên cạnh AC và AD lấy hai điểm M, N sao cho $AC = 3AM$ và

$AN = \frac{2}{3}AD$. Gọi O là điểm bên trong tam giác (BCD).

a) Tìm giao điểm của BC với (OMN).

b) Tìm giao điểm của BD với (OMN).

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm I của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD). Chứng minh $IA = 2IM$.

b) Tìm giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM).

c) Gọi N là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB. Tìm giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD).

Ví dụ 13. Cho tứ giác $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn AB lấy một điểm M, trên đoạn SC lấy một điểm N (M, N không trùng với các đầu mút).

a) Tìm giao điểm của đường thẳng AN với mặt phẳng (SBD).

b) Tìm giao điểm của đường thẳng MN với mặt phẳng (SBD).

DT 4 Chứng minh ba điểm thẳng hàng

Muốn chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng, ta chứng minh ba điểm đó lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β), nghĩa là chúng cùng nằm trên một đường giao tuyến.

- Ta có $A = a \cap b$, mà $a \subset (\alpha)$, $b \subset (\beta)$ nên

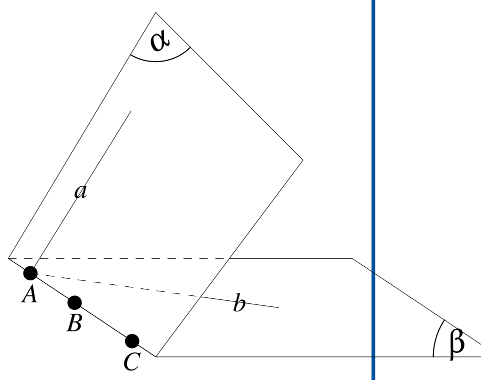
$$A \in (\alpha) \cap (\beta) \quad (1)$$

- Tương tự ta cũng tìm xem B và C tương ứng là giao của cặp đường thẳng nào nằm trong (α) và (β). Từ đó, suy ra

$$B \in (\alpha) \cap (\beta) \quad (2)$$

và

$$C \in (\alpha) \cap (\beta) \quad (3)$$



Từ (1), (2), (3) suy ra A, B, C cùng thuộc đường giao tuyến nên chúng thẳng hàng.

Ví dụ 14. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD, Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của (AND) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP$, $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Ví dụ 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD ; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD; P thuộc đoạn SC và không là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao điểm Q của đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP).

c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh rằng I, J, K

thẳng hàng.

DT 5 Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 16. Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.

Ví dụ 17. Giải thích tại sao chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại hình mà vẫn đứng vững.

Ví dụ 18. Hãy giải thích tại sao phần giao nhau giữa 2 vách tường nhà luôn là 1 đường thẳng

Ví dụ 19. Hãy giải thích vì sao khi gấp đôi một tờ giấy thì nếp gấp luôn là 1 đường thẳng

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lấy 2 điểm M, N sao cho MN không song song BC. Gọi O là một điểm trong tam giác BCD.

a) Tìm giao tuyến của (OMN) và (BCD).

b) Tìm giao điểm của DC, BD với (OMN).

2 Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. M, N, P lần lượt là các điểm trên SA, SB, SD.

a) Tìm giao điểm I của SO với mặt phẳng (MNP).

b) Tìm giao điểm Q của SC với mặt phẳng (MNP).

3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB song song với CD. O là giao điểm của hai đường chéo, M thuộc SB.

a) Xác định giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD); (SAD) và (SBC).

b) Tìm giao điểm $SO \cap (MCD)$; $SA \cap (MCD)$.

4 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, SC.

a) Tìm $I = AN \cap (SBD)$.

b) Tìm $K = MN \cap (SBD)$.

c) Tính tỉ số $\dfrac{KM}{KN}$.

d) Chứng minh B, I, K thẳng hàng. Tính $\dfrac{IB}{IK}$.

5 Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ thuộc SB, N thuộc miền trong tam giác $S\Delta SCD$.

a) Tìm giao điểm của MN và mặt phẳng $(ABCD)$

b) Tìm $SC \cap (AMN)$ và $SD \cap (AMN)$

c) Tìm $SA \cap (CMN)$

6 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB, K là trọng tâm của tam giác ACD.

a) Xác định giao tuyến của (AKM) và (BCD).

b) Tìm giao điểm H của MK và mp(BCD). Chứng minh K là trọng tâm của tam giác ABH.

c) Trên BC lấy điểm N. Tìm giao điểm P, Q của CD, AD với mp(MNK).

7 Cho tứ giác $ABCD$ và $S \notin (ABCD)$. Gọi I, J là hai điểm trên AD và SB, AD cắt BC tại O và OJ cắt SC tại M.

a) Tìm giao điểm $K = IJ \cap (SAC)$.

b) Xác định giao điểm $L = DJ \cap (SAC)$.

c) Chứng minh A, K, L, M thẳng hàng.

8 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ và hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD, M là trung điểm của SB.

a) Tìm giao điểm N của MG và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Chứng minh ba điểm C, D, N thẳng hàng và D là trung điểm của CN.

9 Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SC.

a) Xác định giao tuyến của (ABM) và (SCD).

b) Gọi N là trung điểm của BO. Xác định giao điểm I của (AMN) với SD. Chứng minh $\dfrac{SI}{ID} = \dfrac{2}{3}$.

10 Cho tứ diện $SABC$. Gọi I, H lần lượt là trung điểm của SA, AB. Trên cạnh SC lấy điểm K sao cho $CK = 3SK$.

a) Tìm giao điểm F của BC với mặt phẳng (IHK). Tính tỉ số $\dfrac{FB}{FC}$.

b) Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng IH. Tìm giao điểm của KM và mặt phẳng (ABC).

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho tứ giác $ABCD$. Có thể xác định được bao nhiêu mặt phẳng chứa tất cả các đỉnh của tứ giác $ABCD$?

A. 1. **B.** 3. **C.** 0. **D.** 2.

Câu 2. Hình chóp tam giác có số cạnh là

A. 6. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 3.

Câu 3. Hình chóp lục giác có bao nhiêu mặt?

A. 10. **B.** 6. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 4. Các yếu tố nào sau đây xác định một mặt phẳng duy nhất?

A. Một điểm và một đường thẳng. **B.** Hai đường thẳng cắt nhau.
C. Bốn điểm phân biệt. **D.** Ba điểm phân biệt.

Câu 5. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.
B. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác nữa.
C. Nếu ba điểm phân biệt cùng thuộc hai mặt phẳng phân biệt thì chúng thẳng hàng.
D. Nếu hai mặt phẳng có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung duy nhất.

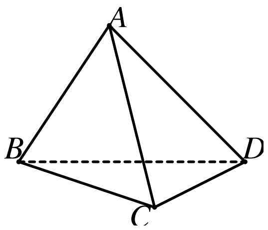
Câu 6. Cho 5 điểm A, B, C, D, E trong đó không có 4 điểm nào đồng phẳng. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng tạo bởi 3 trong 5 điểm đã cho?

A. 10.   **B.** 14.   **C.** 12.   **D.** 8.

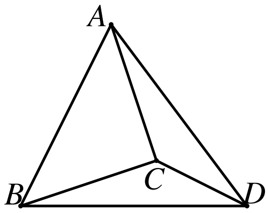
Câu 7. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Qua 3 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
B. Qua 4 điểm phân biệt bất kì có duy nhất một mặt phẳng.
C. Qua 2 điểm phân biệt có duy nhất một mặt phẳng.
D. Qua 3 điểm không thẳng hàng có duy nhất một mặt phẳng.

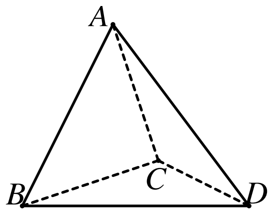
Câu 8. Cho các hình vẽ sau:



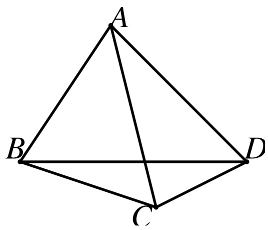
Hình (1)



Hình (2)



Hình (3)



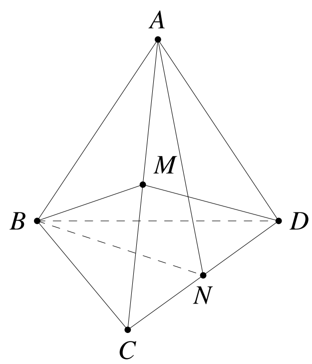
Hình (4)

Trong các hình trên, những hình nào biểu diễn cho tứ diện?

A. Hình (1) và hình (2).   **B.** Hình (1), hình (2) và hình (3).
C. Hình (1) và hình (3).   **D.** Hình (1), hình (3) và hình (4).

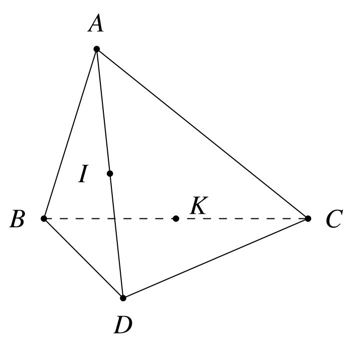
Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN) là

A. đường thẳng BG (G là trọng tâm tam giác ACD).
B. đường thẳng AH (H là trực tâm tam giác ACD).
C. đường thẳng MN.
D. đường thẳng AM.



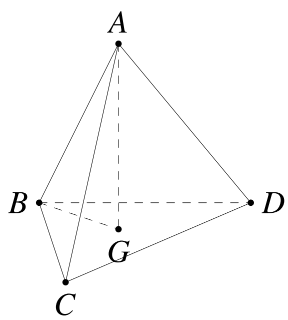
Câu 10. Cho 4 điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của (IBC) và (KAD) là

A. IK.   **B.** DK.   **C.** AK.   **D.** BC.

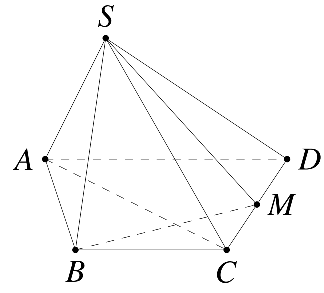


Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD. Giao tuyến của mặt phẳng (ACD) và (GAB) là

A. AH (H là hình chiếu của B trên CD).
B. AM (M là trung điểm của AB).
C. AK (K là hình chiếu của C trên BD).
D. AN (N là trung điểm của CD).



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD\,(AD \,//\, BC)$. Gọi M là trung điểm CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là

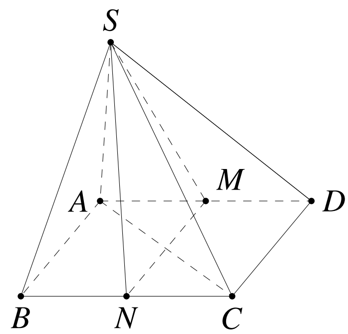


A. SJ (J là giao điểm của AM và BD).
B. SI (I là giao điểm của AC và BM).
C. SO (O là giao điểm của AC và BD).
D. SP (P là giao điểm của AB và CD).

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD\,(AB \,//\, CD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

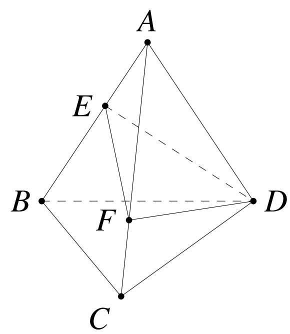
A. Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.
B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).
C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.
D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là



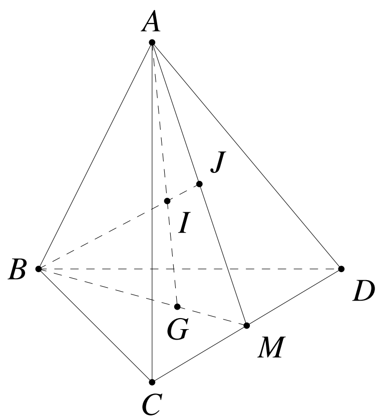
A. SG (G là trung điểm AB).
B. SD.
C. SO (O là tâm hình bình hành $ABCD$).
D. SF (F là trung điểm CD).

Câu 15. Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α) chứa tam giác BCD. Lấy E,F là các điểm lần lượt nằm trên các cạnh AB,AC. Khi EF và BC cắt nhau tại I thì I không phải là điểm chung của hai mặt phẳng nào sau đây?



A. (BCD) và (ABC). **B.** (BCD) và (ABD).
C. (BCD) và (AEF). **D.** (BCD) và (DEF).

Câu 16. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm ở trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. J là trung điểm của AM. **B.** $AM = (ACD) \cap (ABG)$.
C. A,J,M thẳng hàng. **D.** $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

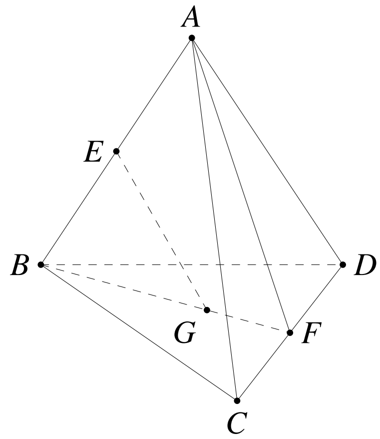
Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của AB và CD; G là trọng tâm tam giác BCD. Giao điểm của đường thẳng EG và mặt phẳng (ACD) là

A. Giao điểm của đường thẳng EG và CD.

B. Giao điểm của đường thẳng EG và AC.

C. Giao điểm của đường thẳng EG và AF.

D. Điểm F.



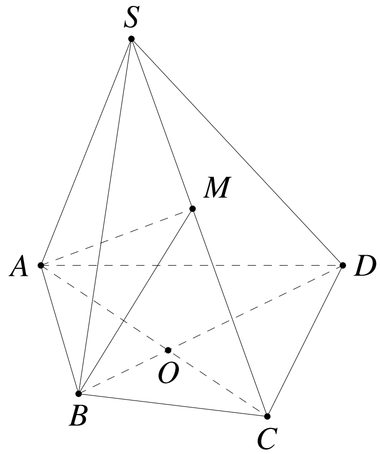
Câu 18. Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C. Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là

A. Giao điểm của SD và BK (với $K = SO \cap AM$).

B. Giao điểm của SD và AB.

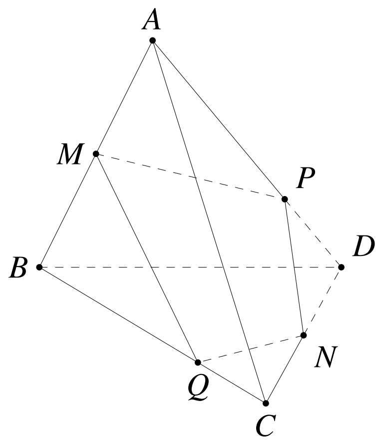
C. Giao điểm của SD và MK (với $K = SO \cap AM$).

D. Giao điểm của SD và AM.



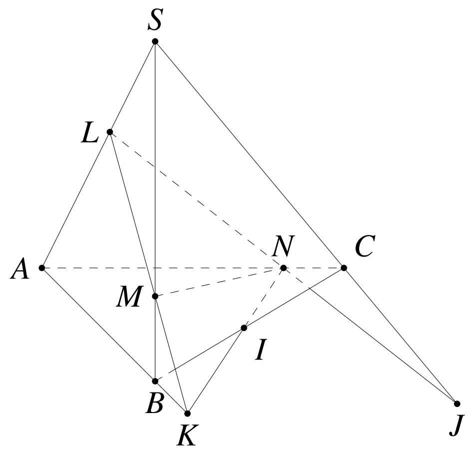
Câu 19. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, B, D. **B.** I, A, C. **C.** I, C, D. **D.** I, A, B.



Câu 20. Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC. Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. M, K, J. **B.** N, I, J. **C.** K, I, J. **D.** M, I, J.



§2. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

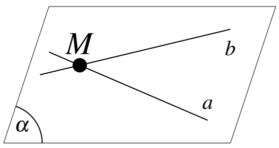
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

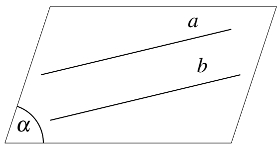
Trong không gian, cho hai đường thẳng a và b.

Các trường hợp có thể xảy ra:

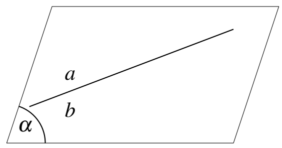
- Nếu a và b đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng) thì chúng có các khả năng: cắt nhau; song song nhau hoặc trùng nhau.
- Nếu a và b không đồng phẳng (không tồn tại mặt phẳng chưa được cả a và b) thì ta nói a và b chéo nhau.



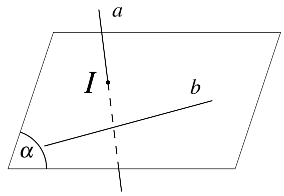
* a cắt b
* Kí hiệu $a \cap b = M$



* a song song b
* Kí hiệu $a \parallel b$



* a trùng b
* Kí hiệu $a \equiv b$



* a chéo b
* a, b không điểm chung

Chú ý:

Cho hai đường thẳng a và b phân biệt.

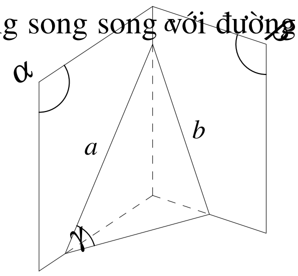
- Khi kiểm tra hai đường thẳng a và b **song song** hay **cắt nhau** thì trước tiên chúng phải đồng phẳng (cùng thuộc một mặt phẳng nào đó);
- Khi a và b không có điểm chung thì chúng có thể song song hoặc chéo nhau. Vấn đề này các bạn hay bị nhầm lẫn, cần chú ý.

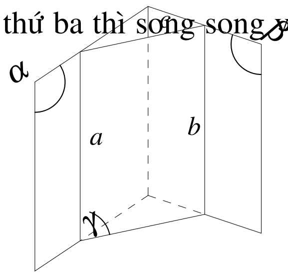
2. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

Định lý 1: Trong không gian, qua một điểm không nằm trên đường thẳng cho trước, có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đã cho.

Định lý 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Định lý 3: Nếu ba mặt phẳng phân biệt đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến đó hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.





Hệ quả: *Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.*

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng a và b phân biệt. Xét vị trí tương đối của a với b, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Kiểm tra xem hai đường thẳng a và b có đồng phẳng không?

- Nếu a và b không đồng phẳng thì a và b chéo nhau.
- Nếu a và b đồng phẳng chuyển sang bước 2.

Bước 2: Kiểm tra xem a và b có điểm chung hay không?

- Nếu a và b không có điểm chung thì $a \parallel b$.
- Nếu a và b có một điểm chung thì a và b cắt nhau.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

a) AB và CD. b) SA và SC. c) SA và BC.

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$ có M,N lần lượt là trung điểm của AB,AC. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau

a) MN và BC. b) AN và CD. c) MN và CD.

DT 2 Chứng minh hai đường thẳng song song

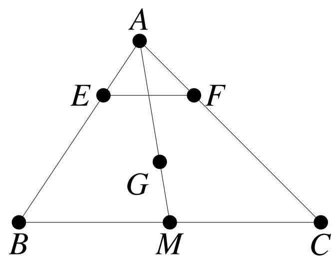
Phương pháp thường dùng:

① Sử dụng các kết quả của hình học phẳng như:

- Cặp cạnh đối hình bình hành thì song song nhau;...
- Đường trung bình của tam giác thì song song và bằng nửa cạnh đáy.

② Sử dụng tỉ lệ (Định lý Talet) (hình vẽ bên)

- Nếu $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{AF}{AC}$ thì $EF \parallel BC$.
- Chú ý tỉ lệ trọng tâm: $AG=\dfrac{2}{3}AM$.



Ví dụ 3. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và ABD. Chứng minh rằng $IJ \parallel CD$.

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn và $AB=2CD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SB. Chứng minh rằng $NC \parallel MD$.

Ví dụ 5. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I,J lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CD. Trên cạnh AC lấy điểm K. Gọi M là giao điểm của BK và AI, N là giao điểm của DK và AJ. Chứng minh rằng $MN \parallel BD$.

Ví dụ 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của AB, CD, BC, AD, AC, BD.

a) Chứng minh $MPNQ$ là hình bình hành.

b) Chứng minh ba đoạn thẳng MN, PQ, RS cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm BC,CD,SB,SD.

a) Chứng minh rằng $MN \parallel PQ$.

b) Gọi I là trọng tâm của tam giác ABC, J thuộc SA sao cho $\dfrac{JS}{JA} = \dfrac{1}{2}$. Chứng minh $IJ \parallel SM$.

DT 3 Xác định giao tuyến d của hai mặt phẳng cắt nhau

Ta thực hiện một trong hai cách sau đây:

- **Cách 1:** Tìm hai điểm chung phân biệt (đã xét ở bài học trước)
- **Cách 2:** Tìm 1 điểm chung. Sau đó nếu hai mặt phẳng có cặp đường thẳng song song nhau thì giao tuyến d sẽ đi qua điểm chung và song song (hoặc trùng) với một trong hai đường thẳng đó.

Ví dụ 8. Cho tứ diện $ABCD$. Trên AB, AC lần lượt lấy M, N sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC}$. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (DBC) và (DMN).

Ví dụ 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BD; G là trọng tâm tam giác ABC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABC) và (MNG).

Ví dụ 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA. Điểm E, F lần lượt là trung điểm của AB và BC.

a) Tìm $(SAB) \cap (SCD)$.

b) Tìm $(MBC) \cap (SAD)$.

c) Tìm $(MEF) \cap (SAC)$.

d) Tìm $AD \cap (MEF)$.

e) Tìm $SD \cap (MEF)$.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD. Chứng minh

a) $MN \parallel AD$ và $MN \parallel BC$;

b) $MO \parallel SC$ và $NO \parallel SB$.

2 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD. Gọi I, J, G lần lượt là trọng tâm của các tam giác SAB, SAD và AOD. Chứng minh

a) $IJ \parallel MN$;

b) $IJ \parallel BD$ và $GJ \parallel SO$.

3 Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SB.

a) Chứng minh $EF \parallel CD$.
b) Tìm $I = AF \cap (SCD)$.
c) Chứng minh $SI \parallel AB \parallel CD$.

4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi P là một điểm trên cạnh BC. Tìm giao tuyến của

a) (SBC) và (SAD);
b) (SAB) và (SCD);
c) (MNP) và $(ABCD)$.

5. Cho tứ diện $SABC$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và AB, G là một điểm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau

a) (SAC) và (EFC);
b) (SAC) và (EFG).

6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, N là trung điểm SG. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (SCD).

7. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N theo thứ tự là trung điểm của AB,BC và Q là một điểm nằm trên cạnh AD ($QA \neq QD$) và P là giao điểm của CD với mặt phẳng (MNQ). Chứng minh rằng $PQ \parallel MN$ và $PQ \parallel AC$.

8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD là đáy lớn và $AD = 2BC$. Gọi M, N, P lần lượt thuộc các đoạn SA, AD, BC sao cho $MA = 2MS$, $NA = 2ND$, $PC = 2PB$.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau: (SAD) và (SBC), (SAC) và (SBD).

b) Xác định giao điểm Q của SB với (MNP).

c) Gọi K là trung điểm của SD. Chứng minh $CK = (MQK) \cap (SCD)$.

9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có O là tâm của hình bình hành $ABCD$, điểm M thuộc cạnh SA sao cho $SM = 2MA$, N là trung điểm của AD.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SAD) và (MBC).

b) Tìm giao điểm I của SB và (CMN), giao điểm J của SA và (ICD).

c) Chứng minh ba đường thẳng ID, JC, SO cắt nhau tại E. Tính tỉ số $\dfrac{SE}{SO}$.

10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC,CD,DA; gọi I,J,K,L lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SM,SN,SP,SQ.

a) Chứng minh rằng bốn điểm I,J,K,L đồng phẳng và tứ giác $IJKL$ là hình bình hành.

b) Chứng minh rằng $IK \parallel BC$.

c) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng $(IJKL)$ và (SBC).

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Hai đường thẳng không có điểm chung thì

A. chéo nhau.
B. song song.
C. cắt nhau.
D. chéo nhau hoặc song song.

Câu 2. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì

A. chéo nhau.
B. có điểm chung.
C. cắt nhau hoặc chéo nhau.
D. không có điểm chung.

Câu 3. Cho hai đường thẳng phân biệt không có điểm chung cùng nằm trong một mặt phẳng thì hai đường thẳng đó

A. trùng nhau. **B.** chéo nhau. **C.** song song. **D.** cắt nhau.

Câu 4. Chọn khẳng định **sai**

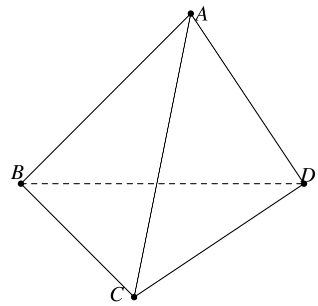
A. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Nếu hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không đồng phẳng.
C. Hai đường thẳng song song thì không đồng phẳng và không có điểm chung.
D. Hai đường thẳng cắt nhau thì đồng phẳng và có một điểm chung.

Câu 5. Cho đường thẳng a cắt mặt phẳng (P) tại điểm A. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều chéo với a.
B. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều cắt a.
C. Mọi đường thẳng nằm trong (P) hoặc chéo với a, hoặc cắt a.
D. Mọi đường thẳng nằm trong (P) đều không cắt a.

Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng AB, M' và N' là hai điểm phân biệt nằm trên đường thẳng CD. Các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng MM' và NN' có thể cắt nhau.
B. Hai đường thẳng MM' và NN' có thể song song với nhau.
C. Hai đường thẳng MM' và NN' hoặc cắt nhau hoặc song song với nhau.
D. Hai đường thẳng MM' và NN' chéo nhau.



Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$, lấy M, N lần lượt là trung điểm của CD, AB. Khi đó, xác định vị trí tương đối giữa hai đường thẳng BC và MN.

A. Chéo nhau. **B.** Có hai điểm chung.
C. Song song. **D.** Cắt nhau.

Câu 8. Cho tứ diện $MNPQ$. Mệnh đề nào trong các mệnh đề dưới đây là đúng?

A. $MN \parallel PQ$. **B.** MN cắt PQ.
C. MN và PQ đồng phẳng. **D.** MN và PQ chéo nhau.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SC sao cho $SM = 3MC$, N là giao điểm của SD và (MAB). Khi đó tứ giác $ABMN$ là hình gì?

A. Tứ giác không có cặp cạnh nào song song. **B.** Hình vuông.
C. Hình thang. **D.** Hình bình hành.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $AB \parallel CD$. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (ASB) và (SCD). Khẳng định nào sau đây là đúng?

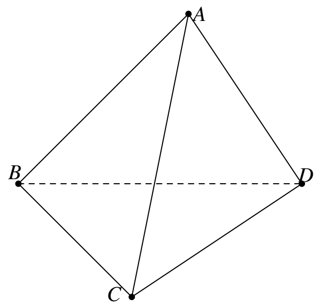
A. $d \parallel AB$. **B.** d cắt AB. **C.** d cắt AD. **D.** d cắt CD.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi G, E lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SCD. Lấy M, N lần lượt là trung điểm AB, BC . Khi đó ta có:

A. GE và MN trùng nhau. **B.** GE và MN chéo nhau.
C. GE và MN song song với nhau. **D.** GE cắt BC.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có P, Q lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và BCD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (ABQ) và mặt phẳng (CDP).

A. Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và CD.
B. Giao tuyến là đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và AD.
C. Giao tuyến là đường thẳng PQ.
D. Giao tuyến là đường thẳng QA.



Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và J theo thứ tự là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

A. qua J và song song với BD. **B.** qua G và song song với BC.
C. qua I và song song với AB. **D.** qua G và song song với CD.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi (ACI) lần lượt là trung điểm của AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

A. đường thẳng qua S và song song với AB. **B.** đường thẳng qua G và song song với DC.
C. SC. **D.** đường thẳng qua G và cắt BC.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ?

A. DC. **B.** AB. **C.** AD. **D.** EF.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. d qua S và song song với DC. **B.** d qua S và song song với BD.
C. d qua S và song song với BC. **D.** d qua S và song song với AB.

Câu 17. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB. P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng MP, NQ.

A. $MP \parallel NQ$. **B.** MP cắt NQ. **C.** MP trùng NQ. **D.** MP, NQ chéo nhau.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AB đáy nhỏ CD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và SB. Gọi P là giao điểm của SC và (AND). Gọi I là giao điểm của AN và DP. Hỏi tứ giác $SABI$ là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thoi. **C.** Hình vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Gọi I là một điểm trên cạnh B. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (IMN) là hình gì?

A. Tam giác MNQ. **B.** Tam giác MNI.
C. Hình thang $MNIJ$. **D.** Hình bình hành $MNIJ$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là

A. Tam giác IBC. **B.** Tứ giác $IBCD$.
C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB). **D.** Hình thang $IBCJ$ (J là trung điểm SD).

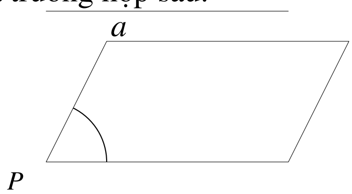
—HẾT—

§3. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

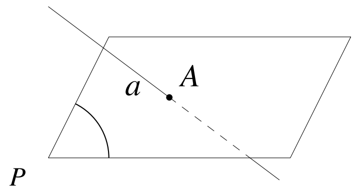
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

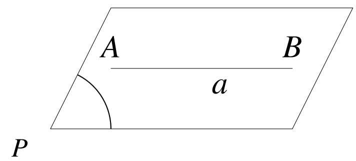
Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P). Căn cứ vào số điểm chung của đường thẳng và mặt phẳng, ta có ba trường hợp sau:



* a và (P) không có điểm chung.
* a song song (P). Kí hiệu $a \parallel (P)$.



* a và (P) có đúng 1 điểm chung.
* a cắt (P). Kí hiệu $a \cap (P) = A$.

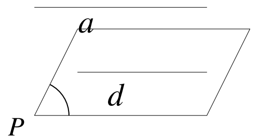


* a và (P) có vô số điểm chung.
* a nằm trong (P). Kí hiệu $a \subset (P)$.

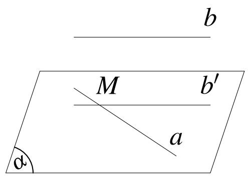
2. CÁC ĐỊNH LÝ VÀ HỆ QUẢ CẦN NHỚ

Định lý 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nào đó trong (P) thì a song song với (P), hay

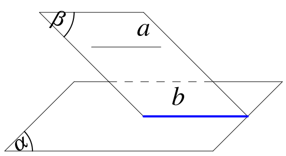
$$a \not\subset (P) \text{ và } \begin{cases} a \parallel d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$



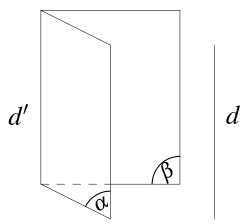
Định lý 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



Định lý 3: Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.



Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

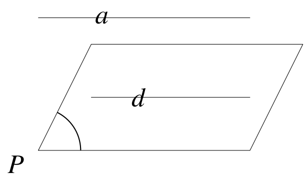


B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp giải: Để chứng minh đường thẳng a song song với mặt phẳng (P), ta cần chứng tỏ các ý sau đây

- a không nằm trên (P);
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P). Suy ra $a \parallel (P)$.



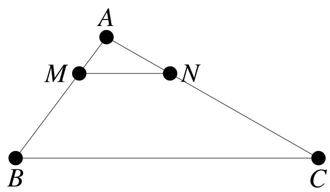
Tóm lại $\boxed{\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)}$

Chú ý: Việc chứng minh $a \parallel b$, ta thường đi đến việc xét các yếu tố song song đã biết trong hình học phẳng như

① Cặp cạnh đối của hình bình hành;

② Đường trung bình trong tam giác;

③ Tỉ lệ $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow MN \parallel BC$ (hình bên). Đặc biệt cần chú ý tỉ lệ trọng tâm của tam giác.



Ví dụ 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ACD và BCD. Chứng minh rằng MN song song với các mặt phẳng (ABC) và (ABD).

Ví dụ 2. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD, điểm I nằm trên cạnh BC sao cho $BI = 2IC$. Chứng minh rằng IG song song (ACD).

Ví dụ 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy M nằm trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và ABC.

a) Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh MN song song (SCD) và NG song song (SAC).

Ví dụ 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b) Gọi E là trung điểm của SA. Chứng minh SB và SC đều song song với mặt phẳng (MNE).

Ví dụ 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE$, I là trung điểm AD.

a) Chứng minh OI song song với các mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Tìm giao điểm P của IE và (SBC). Chứng minh $GE \parallel (SBC)$.

DT 2 Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng cắt nhau

Các phương pháp đã học ở hai bài trước:

① Tìm hai điểm chung phân biệt. Khi đó giao tuyến là đường thẳng đi qua hai điểm chung đó.

② Nếu hai mặt phẳng lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

Ta xét thêm một trong hai cách sau:

① Nếu đường thẳng a song song với mặt phẳng (α) và mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.

hay $\boxed{\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \subset (\beta) \\ M \in (\alpha)\cap(\beta) \end{cases} \Rightarrow (P)\cap(\beta) = Mx \parallel a}$

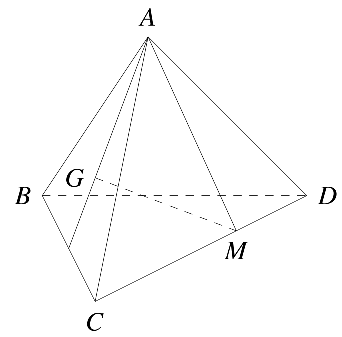
② Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với đường thẳng đó.

hay $\boxed{\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ a \parallel (\beta) \\ M \in (\alpha)\cap(\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha)\cap(\beta) = Mx \parallel a}$.

Ví dụ 6.
Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm $\triangle ABC$, $M \in CD$ với $MC = 2MD$.

a) Chứng minh MG song song với (ABD).

b) Tìm giao tuyến của (ABD) với (BGM).

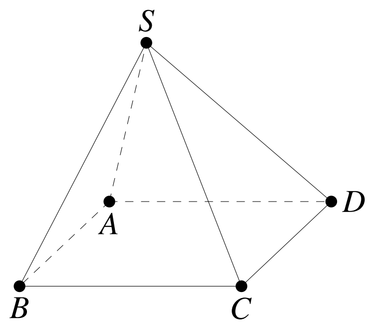


Ví dụ 7.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BC và CD.

a) Tìm giao tuyến của (SIK) và (SAC), (SIK) và (SBD).

b) Gọi M là trung điểm của SB. Chứng minh $SD \parallel (ACM)$.

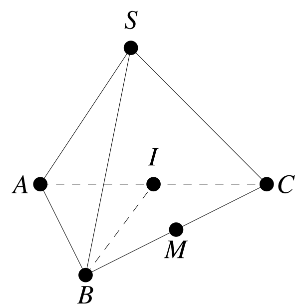
c) Tìm giao điểm F của DM và (SIK). Tính tỉ số $\dfrac{MF}{MD}$.



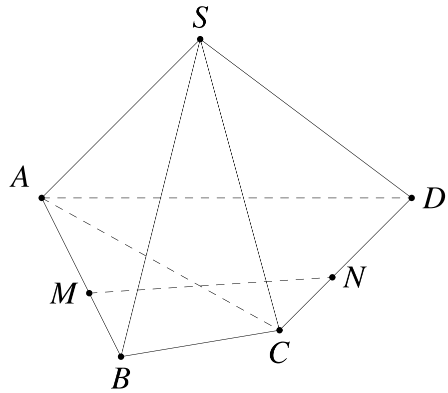
Ví dụ 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD. Gọi I là trung điểm của SB. Gọi (P) là mặt phẳng qua I, song song với SD và AC. Tìm giao tuyến của (P) với các mặt (SBD) và $(ABCD)$.

Ví dụ 9.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, I lần lượt là trung điểm của BC, AC. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M, song song với BI và SC. Xác định trên hình vẽ các giao điểm H, K, N của (P) với các cạnh AC, SA, SB. Tứ giác $MNKH$ là hình gì?



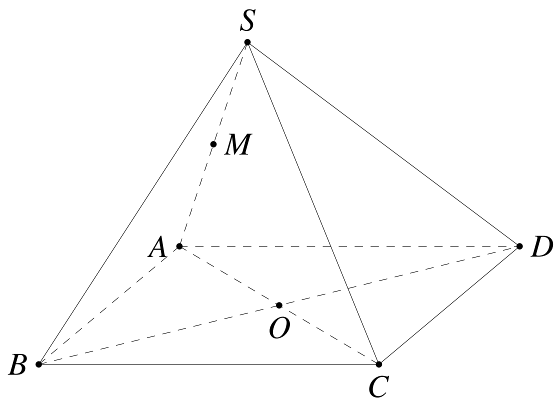
Ví dụ 10.
Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N thuộc cạnh AB, CD. Gọi (α) là mặt phẳng qua MN và song song với SA. Tìm giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp.



Ví dụ 11.
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, O là giao điểm của AC và BD, M là trung điểm của SA.

a) Chứng minh $OM \parallel (SCD)$.

b) Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, đồng thời song song với SC và AD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp $S.ABCD$. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?



Ví dụ 12. Cho tứ diện $ABCD$ và điểm M thuộc cạnh AB. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với đường thẳng BC và AD. Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với các cạnh AC, CD và DB .

a) Chứng minh $MNPQ$ là hình bình hành.

b) Trong trường hợp nào thì $MNPQ$ là hình thoi.

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác ABD. Trên đoạn BC lấy điểm M sao cho $MB = 2MC$. Chứng minh rằng đường thẳng MG song song với mặt phẳng (ACD).

2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SD, CD, BC.

   a) Chứng minh đường thẳng OM song song với các mặt phẳng (SAB), (SBC).

   b) Chứng minh đường thẳng SP song song với mặt phẳng (OMN).

3 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang đáy lớn AB, với $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là trung điểm của SA, G là trọng tâm của tam giác SBC và E là một điểm trên cạnh SD sao cho $3SE = 2SD$. Chứng minh:

a) $DI \parallel (SBC)$.   b) $GO \parallel (SCD)$.   c) $SB \parallel (ACE)$.

4 Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, M là một điểm trên đoạn IJ. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD.

a) Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và (ICD).

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của tứ diện. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

5 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi K và J lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh $KJ \parallel (SAB)$.

b) Gọi (P) là mặt phẳng chứa KJ và song song với AD. Xác định giao tuyến của mặt phẳng (P) với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

6 Cho tứ diện $ABCD$. Lấy điểm M trên cạnh AB sau cho $AM = 2MB$. Gọi G là trọng tâm $\triangle BCD$ và I là trung điểm CD, H là điểm đối xứng của G qua I.

a) Chứng minh $GD \parallel (MCH)$.

b) Tìm giao điểm K của MG với (ACD). Tính tỉ số $\dfrac{GK}{GM}$.

7 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là trung điểm của SA. Gọi (P) là mặt phẳng qua O, song song với BM và SD. Tìm giao tuyến của (P) và (SAD).

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Trong không gian cho mặt phẳng (α) và A không thuộc (α). Qua điểm A có thể dựng được bao nhiêu đường thẳng song song với (α)?

A. Duy nhất.   **B.** Vô số .   **C.** 2.   **D.** 4.

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O không nằm trong Δ. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng song song với đường thẳng Δ?

A. Vô số.   **B.** 3.   **C.** 1.   **D.** 2.

Câu 3. Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

A. Vô số.   **B.** 1.   **C.** 2.   **D.** 3.

Câu 4. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel (\alpha), b \subset (\alpha)$. Khi đó

A. $a \parallel b$.   **B.** a, b chéo nhau.
C. a, b cắt nhau.   **D.** $a \parallel b$ hoặc a, b chéo nhau.

Câu 5. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \parallel b$ và $b \parallel (\alpha)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $a \parallel (\alpha)$.   **B.** $a \subset (\alpha)$.
C. $a \parallel (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.   **D.** a cắt (α).

Câu 6. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và đường thẳng b không thuộc (α). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$.
B. Nếu $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.
C. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b. .
D. Nếu b cắt (α) thì b cắt a.

Câu 7. Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.
B. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.
C. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.
D. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b (với M là điểm cho trước).

Câu 8. Cho $d \parallel (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. d cắt d'. **B.** $d \parallel d'$. **C.** d và d' chéo nhau. **D.** $d \equiv d'$.

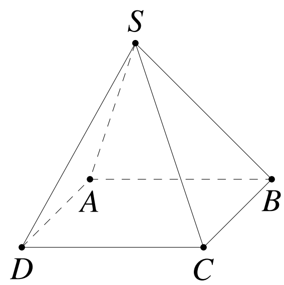
Câu 9. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MN \parallel (ABCD)$. **B.** $MN \parallel (SAB)$. **C.** $MN \parallel (SCD)$. **D.** $MN \parallel (SBC)$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SN}{SB} = \dfrac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là

A. MN và $(ABCD)$ chéo nhau. **B.** MN song song $(ABCD)$.
C. MN nằm trong $(ABCD)$. **D.** MN cắt $(ABCD)$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).



A. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD.
B. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O của đáy.
C. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC.
D. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có I, J lần lượt là trung điểm của BC, BD. Giao tuyến của mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là

A. đường thẳng d đi qua A và song song với BC. **B.** đường thẳng d đi qua A và song song với BD.
C. đường thẳng d đi qua A và song song với CD. **D.** đường thẳng AB.

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB, M là trung điểm của BD. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $Q \in (CDP)$. **B.** QG cắt (BCD). **C.** $MP \parallel (BCD)$. **D.** $GQ \parallel (BCD)$.

Câu 14. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD$, $ABEF$; M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $OO_1 \parallel (BEC)$. **B.** $OO_1 \parallel (EFM)$. **C.** MO_1 cắt (BEC). **D.** $OO_1 \parallel (AFD)$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng đi qua trung điểm M của cạnh AB và song song với BD, SA là hình gì?

A. Ngũ giác. **B.** Hình thang. **C.** Tam giác. **D.** Hình bình hành.

—HẾT—

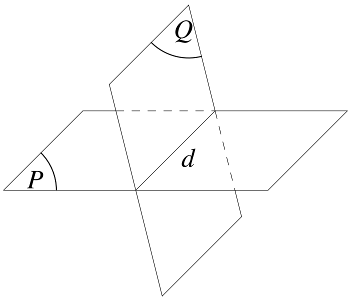
§4. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

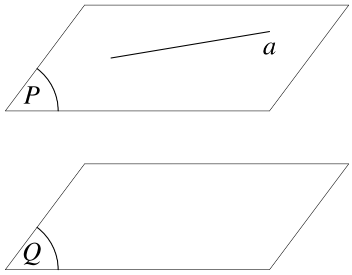
Cho hai mặt phẳng (P) và (Q). Các trường hợp có thể xảy ra:

- **Trường hợp 1:** (P) và (Q) trùng nhau.
- **Trường hợp 2:** (P) và (Q) có một điểm chung. Khi đó chúng sẽ có điểm chung khác nữa. Tập hợp tất cả các điểm chung đó gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q) (**Hình 1**).
- **Trường hợp 3:** (P) và (Q) không có điểm chung. Khi đó ta nói (P) song song (Q) (**Hình 2**).
  - Kí hiệu $(P) \parallel (Q)$;
  - Khi $(P) \parallel (Q)$ và $a \subset (P)$ thì $a \parallel (Q)$.



Hình 1.

(P), (Q) cắt nhau: $(P) \cap (Q) = d$



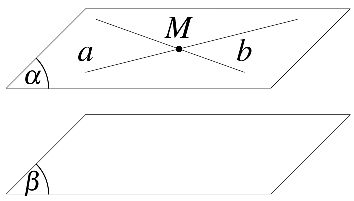
Hình 2.

(P), (Q) không có điểm chung: $(P) \parallel (Q)$

2. CÁC ĐỊNH LÝ CƠ BẢN

Định lý 1:

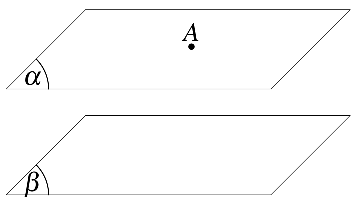
Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a, b và a, b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).



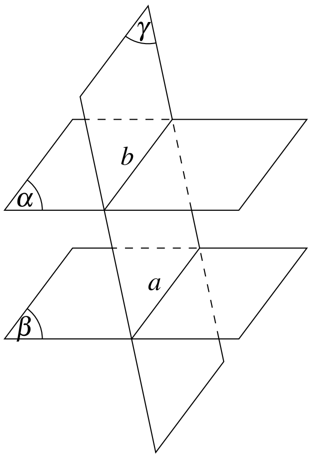
- *Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đường thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.*
- *Muốn chứng minh đường thẳng $a \parallel (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và $(P) \parallel (Q)$.*

Định lý 2:

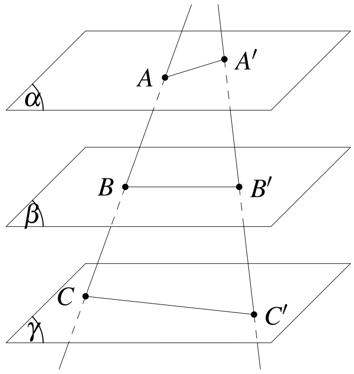
Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.



Định lý 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến song song với nhau.



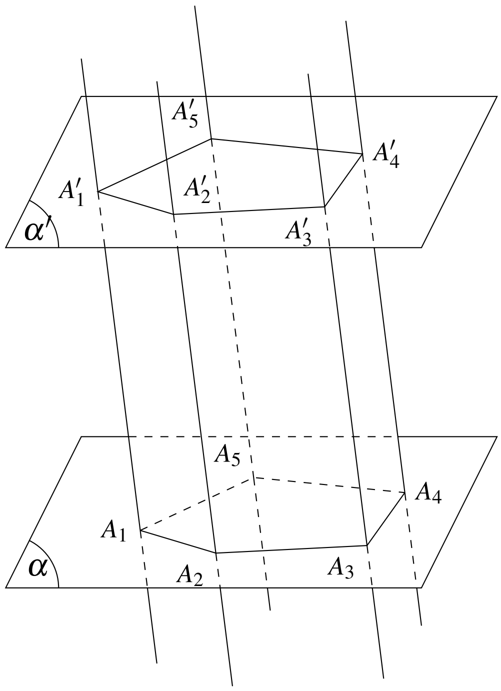
Định lý 4: (*Định lí Thales*) Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



3. HÌNH LĂNG TRỤ VÀ HÌNH HỘP

Định nghĩa: Cho hai mặt phẳng $(\alpha) \parallel (\alpha')$. Trong (α) cho đa giác lồi $A_1A_2\ldots A_n$. Qua các điểm $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ta dựng các đường song song với nhau và cắt (α') tại $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$.
Hình tạo thành bởi hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ cùng với các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2$, ..., $A_nA_1A'_1A'_n$ được gọi là *hình lăng trụ* và được ký hiệu bởi $A_1A_2\ldots A_n.A'_1A'_2\ldots A'_n$.

- Hai đa giác $A_1A_2\ldots A_n$, $A'_1A'_2\ldots A'_n$ được gọi là hai *mặt đáy* (bằng nhau) của hình lăng trụ.
- Các đoạn thẳng $A_1A'_1, A_2A'_2, \ldots, A_nA'_n$ gọi là các *cạnh bên* của hình lăng trụ.
- Các hình bình hành $A_1A_2A'_2A'_1$, $A_2A_3A'_3A'_2, \ldots$, $A_nA_1A'_1A'_n$ gọi là các *mặt bên* của hình lăng trụ.
- Các đỉnh của hai đa giác đáy gọi là các *đỉnh* của hình lăng trụ.



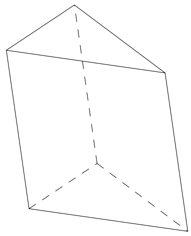
Tính chất:

- Các cạnh bên của hình lăng trụ thì song song và bằng nhau.
- Các mặt bên của hình lăng trụ đều là hình bình hành.
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

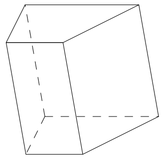
Hình lăng trụ có đáy là hình bình hành gọi là *hình hộp*.

- Các mặt của hình hộp là hình bình hành.
- Hai mặt phẳng lần lượt chứa hai mặt đối diện của hình hộp thì song song nhau.

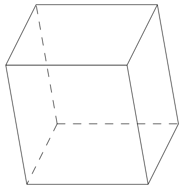
Minh họa vài mô hình thường gặp:



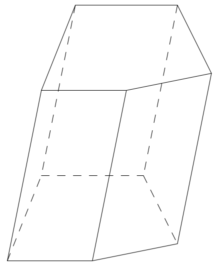
* Lăng trụ tam giác



* Lăng trụ tứ giác



* Hình hộp



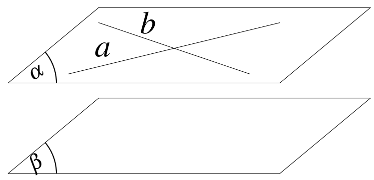
* Lăng trụ ngũ giác

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp:

Chứng minh trên mặt phẳng này có hai đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng còn lại.



$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ a \subset (\alpha), b \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta), b \parallel (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

Chú ý: Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song nhau.

Ví dụ 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SD và SB.

a) Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (ABCD)$.

b) Chứng minh rằng $(OMN) \parallel (SBC)$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD. Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$.

Ví dụ 3. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ có chung cạnh AB và không đồng phẳng. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm AB, CD, EF. Chứng minh

a) $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) $(DIK) \parallel (JBE)$.

Ví dụ 4. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACC', $A'B'C'$. Chứng minh rằng $(IJK) \parallel (BCC'B')$ và $(A'JK) \parallel (AIB')$.

Ví dụ 5. Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ ở trong hai mặt phẳng phân biệt. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $AM = BN$. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD và AF tại M' và N'.

a) Chứng minh rằng $(ADF) \parallel (BCE)$.

b) Chứng minh rằng $(CDF) \parallel (MM'N'N)$.

DT 2 Chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Để chứng minh a song song (P), ta thường sử dụng một trong hai cách sau

Cách 1: (*Đã xét ở bài học trước*) Ta cần chứng tỏ các ý sau:

- a không nằm trên (P);
- a song song với một đường thẳng b nằm trong (P). Suy ra $a \parallel (P)$ hay

$$\begin{cases} a \not\subset (P) \\ a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \parallel (P)$$

Cách 2: Ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (Q) và $(Q) \parallel (P)$ thì $a \parallel (P)$.

Ví dụ 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, ABC, SBD. Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng G_2G_3. Chứng minh $G_1M \parallel (SBC)$.

Ví dụ 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh hai mặt phẳng (OMN) và (SBC) song song với nhau.

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên $(ABCD)$ và cách đều AB, CD. Chứng minh IJ song song với (SAB).

DT 3 Định lý Thales

Định lí Thales: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.

Ví dụ 8. Cho ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A,B,C sao cho $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{2}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A',B',C' . Tính tỉ số $\dfrac{A'B'}{B'C'}$.

Ví dụ 9. Cho ba mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ đôi một song song với nhau. Đường thẳng a cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại A,B,C sao cho $\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{1}{3}$ và đường thẳng b cắt các mặt phẳng $(P),(Q),(R)$ lần lượt tại D,E,F .Tính tỉ số $\dfrac{ED}{DF}$.

Ví dụ 10. Cho hình tứ diện $S.ABC$. Trên cạnh SA lấy các điểm A_1,A_2 sao cho $2AA_1=2A_1A_2=A_2S$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng song song với mặt phẳng (ABC) và lần lượt đi qua A_1, A_2 . Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1, C_1 . Mặt phẳng (Q) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_2, C_2 . Chứng minh $2BB_1=2B_1B_2=B_2S$ và $2CC_1=2C_1C_2=C_2S$.

Ví dụ 11. Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE = 80$ cm, $CG = 90$ cm và muốn đóng thêm một mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên và dưới sao cho khoảng cách $EI = 36$ cm (tham khảo hình vẽ). Hãy giúp bác thợ mộc tính độ dài GK để đặt mâm tầng giữa cho kệ để đồ đúng vị trí.

Ví dụ 12. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA=9, SB=12, SC=15$. Trên cạnh SA lấy các điểm M,N sao cho $SM=4, MN=3, NA=2$. Vẽ hai mặt phẳng song song với (ABC) lần lượt đi qua M,N , cắt SB theo thứ tự M',N' và cắt SC theo thứ tự M'',N''. Tính độ dài các đoạn thẳng $SM',M'N',M''N'',N''C$.

DT 4 Hình hộp, hình lăng trụ

Ví dụ 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và một mặt phẳng (α) cắt các mặt của hình hộp theo các giao tuyến MN, NP, PQ, QR, RS, SM như hình vẽ. Chứng minh các cặp cạnh đối của lục giác $MNPQRS$ song song nhau.

Ví dụ 14. Cho hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$ với đáy là hình thang $AB \parallel CD$. Một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(AA'B'B)$ cắt các cạnh $AD, BC, B'C', A'D'$ lần lượt tại E, F, M, H . Hỏi hình tạo bởi các điểm E, F, M, H, D, D', C', C là hình gì?

Ví dụ 15. Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên cạnh AA', BB', CC' sao cho: $\dfrac{AM}{MA'} = \dfrac{BN}{NB'} = \dfrac{CP}{PC'} = \dfrac{1}{2}$. Hỏi hình tạo bởi các điểm M, N, P, A', B', C' là hình gì?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD. Chứng minh hai mặt phẳng (MNO) và (SBC) song song.

2. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang có $AB \parallel CD$ và $AB = 2CD$, I là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của SD, E là trung điểm đoạn CM và G là điểm đối xứng của E qua M, SE cắt CD tại K. Chứng minh $(IKE) \parallel (ADG)$.

3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB. Chứng minh $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$.

4. Cho hình chóp $SABC$ có G là trọng tâm tam giác ABC. Trên đoạn SA lấy hai điểm M, N sao cho $SM = MN = NA$.

   a) Chứng minh rằng $GM \parallel (SBC)$.

   b) Gọi D là điểm đối xứng với A qua G. Chứng minh rằng $(MCD) \parallel (NBG)$.

5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt đáy $(ABCD)$ của hình hộp và cắt các cạnh AA', BB', CC', DD' lần lượt tại M, N, M', N' . Chứng minh rằng $ABCD.MNM'N'$ là hình hộp.

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α). Có bao nhiêu mặt phẳng đi qua d và song song với (α)?

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 2. Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận mặt phẳng (α) song song với mặt phẳng (β)?

A. $(\alpha) \parallel (\gamma)$ và $(\beta) \parallel (\gamma)$ (với (γ) là mặt phẳng nào đó).
B. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β).
C. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β).
D. $(\alpha) \parallel a$ và $(\alpha) \parallel b$ với a, b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β).

Câu 3. Cho các mệnh đề sau:

① Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

② Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

③ Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề **sai** là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau. Mệnh đề **sai** là

A. Hai mặt phẳng song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.
B. Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.
C. Một mặt phẳng cắt hai mặt phẳng song song cho trước theo hai giao tuyến thì hai giao tuyến song song với nhau.
D. Hai mặt phẳng song song thì không có điểm chung.

Câu 5. Cho mặt phẳng (R) cắt hai mặt phẳng song song (P) và (Q) theo hai giao tuyến a và b. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a và b vuông góc nhau. **B.** a và b chéo nhau.
C. a và b cắt nhau. **D.** a và b song song.

Câu 6. Cho đường thẳng a thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng b thuộc mặt phẳng (Q). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel (Q)$ và $b \parallel (P)$. **B.** a và b chéo nhau.
C. $(P) \parallel (Q) \Rightarrow a \parallel b$. **D.** $a \parallel b \Rightarrow (P) \parallel (Q)$.

Câu 7. Hình lăng trụ tam giác có tất cả bao nhiêu cạnh?

A. 6. **B.** 9. **C.** 12. **D.** 3.

Câu 8. Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

A. Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.
B. Hình lăng trụ có tất cả các mặt song song với nhau.
C. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.
D. Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (BCA'). **B.** (BDA'). **C.** (BDC'). **D.** $(A'C'C)$.

Câu 10. Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không thuộc cùng một mặt phẳng, có cạnh chung AB. Kết quả nào sau đây đúng?

A. $BC \parallel (AEF)$. **B.** $FD \parallel (BEF)$. **C.** $(CEF) \parallel (ABD)$. **D.** $(AFD) \parallel (BCE)$.

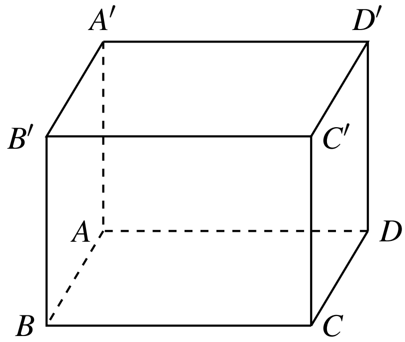
Câu 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB \parallel CD)$ và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm SB và AB. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD)?

A. (SJC). **B.** (ICB). **C.** (IJB). **D.** (IJC).

Câu 12. Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$, qua A, B, C, D lần lượt vẽ bốn đường thẳng a, b, c, d đôi một song song với nhau và không nằm trên (P). Mặt phẳng song song với mặt phẳng (b,c) là

A. (a,b). **B.** (a,c). **C.** (a,d). **D.** (d,b).

Câu 13. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là **sai**?



A. $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$. **B.** $(ABB'A') \parallel (CDD'C')$.
C. $(AA'D'D) \parallel (BCC'B')$. **D.** $(BDD'B') \parallel (ACC'A')$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình bình hành. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $A'C' \parallel BD$. **B.** $A'B' \parallel (SAD)$. **C.** $(A'C'D') \parallel (ABC)$. **D.** $A'B' \parallel (SBD)$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, SD. Mặt phẳng (OMN) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(ABCD)$. **B.** (SCD). **C.** (SBC). **D.** (SAB).

—HẾT—

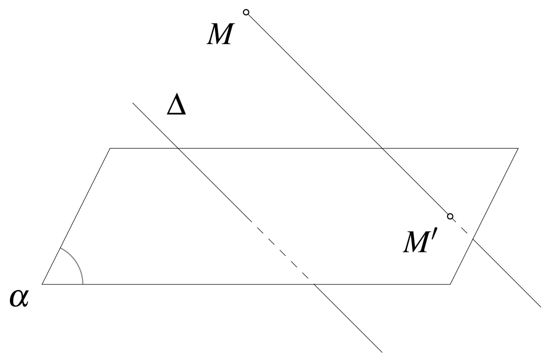
§5. PHÉP CHIẾU PHẲNG SONG SONG

A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. ĐỊNH NGHĨA

Cho mặt phẳng (α) và đường thẳng Δ cắt (α). Với mỗi điểm M trong không gian ta xác định điểm M' như sau:

- Nếu M thuộc Δ thì M' là giao điểm của Δ và (α).
- Nếu M không thuộc Δ thì M' là giao điểm của (α) và đường thẳng qua M song song Δ.
- Điểm M' gọi là hình chiếu song song của M trên (α) theo phương Δ.
- Phép đặt tương ứng mỗi điểm M với hình chiếu M' của nó được gọi là **phép chiếu song song** lên (α) theo phương Δ.
- Mặt phẳng (α) gọi là mặt phẳng chiếu; phương Δ gọi là **phương chiếu.**



2. TÍNH CHẤT

Phép chiếu song song có các tính chất sau:

① Biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng.

② Biến đường thẳng thành đường thẳng , biến tia thành tia, đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

③ Biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

④ Giữ nguyên tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng cùng nằm trên một đường thẳng hoặc nằm trên hai đường thẳng song song.

3. HÌNH BIỂU DIỄN CỦA MỘT HÌNH KHÔNG GIAN

① Hình biểu diễn của hình trong không gian là hình chiếu song song của hình đó trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

② Hình biểu diễn của một hình không gian (trong trường hợp hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu) có các tính chất sau:

- Hình biểu diễn của một tam giác là một tam giác.
- Hình biểu diễn của hình chữ nhật, hình vuông, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.
- Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với $A'B' \parallel C'D'$ thoả mãn $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{A'B'}{C'D'}$.
- Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.

B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Xác định ảnh của một hình qua phép chiếu song song

Ví dụ 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

a) Xác định ảnh của các điểm A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương AA'.

b) Xác định ảnh của tam giác $A'C'D'$ qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'B$.

Ví dụ 2. Phép chiếu song song biến hình bình hành $ABCD$ thành hình bình hành $A'B'C'D'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến tâm của hình bình hành $ABCD$ thành tâm của hình bình hành $A'B'C'D'$.

Ví dụ 3. Phép chiếu song song biến tam giác ABC thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng phép chiếu đó biến đường trung bình của tam giác ABC thành đường trung bình của tam giác $A'B'C'$.

DT 2 Vẽ hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

Ví dụ 4. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

a) Hình lục giác đều.

b) Hình vuông nội tiếp trong hình tròn.

Ví dụ 5. Vẽ hình biểu diễn của hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ với AB song song CD; $AB = 2$ cm, $CD = 6$ cm.

Ví dụ 6. Vẽ hình biểu diễn của các hình sau

a) Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều.

b) Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều.

c) Hình hộp.

d) Hình chóp tam giác $S.ABC$ đặt trên một hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$.

C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ Hình chiếu của $\Delta B'DM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu AA' là

A. $\Delta B'A'M'$. **B.** $\Delta C'D'M'$. **C.** $\Delta DMM'$. **D.** $\Delta B'D'M'$.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ Hình chiếu của $\Delta D'CM$ qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

A. $\Delta B'CM'$. **B.** $\Delta C'D'M'$. **C.** $\Delta DMM'$. **D.** $\Delta B'D'M'$.

Câu 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $AD, A'D'$; N, N' lần lưở là trung điểm của các cạnh $CD, C'D'$; P là trung điểm của DD'. Hình chiếu của ΔMNP qua phép chiếu song song trên $(A'B'C'D')$ theo phương chiếu BB' là

A. $\Delta B'N'M'$. **B.** $\Delta D'M'N'$. **C.** $\Delta PM'N'$. **D.** $\Delta PD'M'$.

Câu 4. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

a) Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó.

b) Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.

c) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

d) Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trung nhau.

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

a) Phép chiếu song song biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

b) Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng cắt nhau.

c) Phép chiếu song song biến tam giác đều thành tam giác cân.

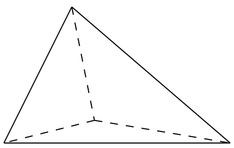
d) Phép chiếu song song biến hình vuông thành hình bình hành.

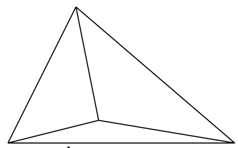
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

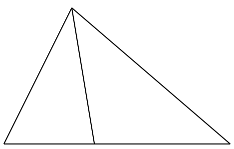
Câu 6. Hình chiếu của tứ diện $ABCD$ lên một mặt phẳng (P) theo phương chiếu AB (AB không song song với (P) là

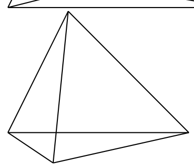
A. hình tam giác. **B.** hình tứ giác. **C.** đoạn thẳng. **D.** hình thang.

Câu 7. Hình nào dưới đây **không phải** là hình biểu diễn của một tứ diện?

A. 

B. 

C. 

D. 

Câu 8. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của các cạnh $BC, B'C'$ và I là giao điểm của đường thẳng $A'M$ và $(AB'C')$. Tìm hình chiếu song song của I trên $(A'B'C')$ theo phương BB'.

A. Trung điểm của đoạn thẳng $A'M'$. **B.** Trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.
C. Điểm A'. **D.** Điểm M'.

Câu 9. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, BC, trên cạnh BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Mặt phẳng (MNP) cắt mặt phẳng (ACD) theo giao tuyến d. Tìm hình chiếu song song của đường thẳng d trên (BCD) theo phương AD.

A. Đường thẳng DN. **B.** Đường thẳng CD. **C.** Đường thẳng BD. **D.** Điểm M.

Câu 10. Cho tứ diện $ABCD$ và M là điểm bất kì thuộc miền trong của tam giác BCD. Gọi B', C', D' lần lượt là hình chiếu song song của M theo các phương AB, AC, AD lên các mặt (ACD), (ABD), (ABC). Tính $\dfrac{MB'}{AB} + \dfrac{MC'}{AC} + \dfrac{MD'}{AD}$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{9}$. **C.** $\dfrac{1}{3}$. **D.** 3.

—HẾT—

Chương 5

CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

§1. SỐ TRUNG BÌNH VÀ MỐT CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1. SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Định nghĩa: Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng tần số ghép nhóm có dạng như sau:

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_1;u_2)$	$\cdots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Chú ý:

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j;u_{j+1})$ với $1 \leq j \leq k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định. Trong một số trường hợp, nhóm số liệu cuối cùng có thể lấy đầu mút bên phải.
- Cỡ mẫu $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.
- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm giá trị đại diện cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1;u_2)$ có giá trị đại diện là $\dfrac{1}{2}(u_1+u_2)$.
- Hiệu $u_{j+1} - u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j;u_{j+1})$. Ta thường phân chia các chóm có độ dài L bằng nhau và $L > \dfrac{R}{k}$, với R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu: Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

- Sử dụng từ $k = 5$ đến $k = 20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R < k \cdot L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.
- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1;u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k;u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

2. SỐ TRUNG BÌNH

Cho mẫu số liệu ghép nhóm **(BẢNG 1)**

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$\ldots$	$[u_i;u_{i+1})$	$\ldots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	$\ldots$	n_i	$\ldots$	n_k

Công thức tính:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm kí hiệu là $\overline{x}$ và

$$\overline{x} = \frac{n_1x_1 + \ldots + n_kx_k}{n}$$

trong đó, $n = n_1 + \ldots + n_k$ là cỡ mẫu và $x_i = \dfrac{u_i + u_{i+1}}{2}$ (với $i = 1, \ldots, k$) là giá trị đại diện của nhóm $[u_i;u_{i+1})$.

Chú ý: Đối với số liệu rời rạc, người ta thường cho các nhóm dưới dạng $k_1 - k_2$, trong đó k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$. Nhóm $k_1 - k_2$ được hiểu là nhóm gồm các giá trị $k_1, k_1+1, \ldots, k_2$. Khi đó, ta cần hiệu chỉnh mẫu số liệu ghép nhóm để đưa về dạng Bảng 1 trước khi thực hiện tính toán các số đặc trưng bằng cách hiệu chỉnh nhóm $k_1 - k_2$ với k_1, $k_2 \in \mathbb{N}$ thành nhóm $[k_1 - 0{,}5; k_2 + 0{,}5)$. Chẳng hạn, với dữ liệu ghép nhóm điểm thi môn Toán trong bảng

Điểm thi	$1-4$	$5-7$	$8-10$
Số học sinh	5	20	10

sau khi hiệu chỉnh người ta được bảng:

Điểm thi	$[0{,}5;4{,}5)$	$[4{,}5;7{,}5)$	$[7{,}5;10{,}5)$
Số học sinh	5	20	10

Ý nghĩa: Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng đại diện cho mẫu số liệu.

3. MỐT

Công thức tính: Để tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm **(BẢNG 1)**, ta thực hiện theo các bước:

- **Bước 1:** Xác định nhóm có tần số lớn nhất (gọi là nhóm chứa mốt), giả sử là nhóm $m: [u_m;u_{m+1})$.
- **Bước 2:** Mốt được xác định là $M_0 = u_m + \dfrac{n_m - n_{m-1}}{(n_m - n_{m-1}) + (n_m - n_{m+1})} \cdot h$

Trong đó, n_m là tần số nhóm m (quy ước $n_0 = n_{k+1} = 0$) và h là độ dài của nhóm.

Chú ý: Người ta chỉ định nghĩa mốt cho mẫu ghép nhóm có độ dài các nhóm bằng nhau. Một mẫu có thể không có mốt hoặc có nhiều hơn một mốt.

Ý nghĩa: Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho mốt của mẫu số liệu gốc, nó được dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Nhận dạng mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 1. Mẫu số liệu sau cho biết phân bố theo độ tuổi của dân số Việt Nam năm 2019.

Độ tuổi	Dưới 15 tuổi	Từ 15 đến dưới 65 tuổi	Từ 65 tuổi trở lên
Số người	23 371 882	65 420 451	7 416 651

a) Mẫu số liệu đã cho có là mẫu số liệu ghép nhóm hay không?

b) Nêu các nhóm và tần số tương ứng. Dân số Việt Nam năm 2019 là bao nhiêu?

Ví dụ 2. Mẫu số liệu sau cho biết kết quả kiểm tra môn Toán của lớp 11A năm 2022.

Điểm số	$[3;5)$	$[5;7)$	$[7;9)$	$[9;11)$
Số học sinh	5	18	10	7

a) Mẫu số liệu đã cho có là mẫu số liệu ghép nhóm hay không?

b) Nêu các nhóm và tần số tương ứng. Số học sinh của lớp 11A là bao nhiêu?

DT 2 Ghép nhóm mẫu số liệu

Ví dụ 3. Bảng thống kê sau cho biết thời gian chạy (phút) của 30 vận động viên (VĐV) trong một giải chạy Marathon.

Thời gian	129	130	133	134	135	136	138	141	142	143	144	145
Số VĐV	1	2	1	1	1	2	3	3	4	5	2	5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang mẫu số liệu ghép nhóm gồm sáu nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 3. Xác định giá trị đại diện của mỗi nhóm.

Ví dụ 4. Cân nặng (kg) của 35 người trưởng thành tại một khu dân cư được cho như sau:

43	51	47	62	48	40	50	62	53	56	40	48
56	53	50	42	55	52	48	46	45	54	52	50
47	44	54	55	60	63	58	55	60	58	53.	

Chuyển mẫu số liệu trên thành dạng ghép nhóm, các nhóm có độ dài bằng nhau, trong đó có nhóm $[40;45)$. Xác định giá trị đại diện của mỗi nhóm.

DT 3 Tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 5. Anh Văn ghi lại cự li 30 lần ném lao của mình ở bảng sau (đơn vị: mét):

72,1	72,9	70,2	70,9	72,2	71,5	72,5	69,3	72,3	69,7
72,3	71,5	71,2	69,8	72,3	71,1	69,5	72,2	71,9	73,1
71,6	71,3	72,2	71,8	70,8	72,2	72,2	72,9	72,7	70,7

a) Tính cự li trung bình của mỗi lần ném.

b) Tổng hợp lại kết quả ném của anh Văn vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Cự li (m)	$[69{,}2;70)$	$[70;70{,}8)$	$[70{,}8;71{,}6)$	$[71{,}6;72{,}4)$	$[72{,}4;73{,}2)$
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng cự li trung bình mỗi lần ném từ bảng tần số ghép nhóm trên.

d) Khả năng anh Văn ném được khoảng bao nhiêu mét là cao nhất?

Ví dụ 6. Tìm cân nặng trung bình của học sinh lớp $11D$ cho trong bảng sau:

Cân nặng	$[40{,}5;45{,}5)$	$[45{,}5;50{,}5)$	$[50{,}5;55{,}5)$	$[55{,}5;60{,}5)$	$[60{,}5;65{,}5)$	$[65{,}5;70{,}5)$
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Ví dụ 7. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả cam ở mỗi lô hàng A và B được cho ở bảng sau:

Cân nặng (g)	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số quả cam ở lô hàng A	2	6	12	4	1
Số quả cam ở lô hàng B	1	3	7	10	4

a) Hãy ước lượng cân nặng trung bình của mỗi quả cam ở lô hàng A và lô hàng B.

b) Nếu so sánh theo số trung bình thì cam ở lô hàng nào nặng hơn?

DT 4 Tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 8. Bảng số liệu ghép nhóm sau cho biết chiều cao (cm) của 50 học sinh lớp $11A$.

Khoảng chiều cao (cm)	$[145;150)$	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$
Số học sinh	7	14	10	10	9

Tính mốt của mẫu số liệu ghép nhóm này. Có thể kết luận gì từ giá trị tính được?

Ví dụ 9. Kết quả kiểm tra môn Toán của lớp $11D$ như sau

5	6	7	5	6	9	10	8	5	5	4	5	4	5	7	4	5	8	9	10
5	3	5	6	5	7	5	8	4	9	5	6	5	6	8	8	7	9	7	9

a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên có bốn nhóm ứng với bốn nửa khoảng $[3;5)$, $[5;7)$, $[7;9)$, $[9;11)$.

b) Mốt của bảng số liệu ghép nhóm trên là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Một trường trung học phổ thông chọn 36 học sinh nam của khối 11, đo chiều cao của các bạn học sinh đó và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị: centimét):

160	161	161	162	162	162	163	163	163	164	164	164
164	165	165	165	165	165	166	166	166	166	167	167
168	168	168	168	169	169	170	171	171	172	172	174

Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có 5 nhóm ứng với 5 nửa khoảng:

$$[160;163),\ [163;169),\ [166;169),\ [169;172),\ [172;175).$$

2 Số sản phẩm một công nhân làm được trong một ngày được cho như sau:

18	25	39	12	54	27	46	25	19	8	36	22	
20	19	17	44	5	18	23	28	25	34	46	27	16

Hãy chuyển mẫu số liệu sang dạng ghép nhóm với sáu nhóm có độ dài bằng nhau.

3 Mẫu số liệu sau ghi lại cân nặng của 30 bạn học sinh (đơn vị: kilôgam):

17	40	39	40,5	42	51	41,5	39	41	30
40	42	40,5	39,5	41	40,5	37	39,5	40	41
38,5	39,5	40	41	39	40,5	40	38,5	39,5	41,5

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với 8 nhóm có độ dài bằng nhau.

4 Người ta đếm số xe ô tô đi qua một trạm thu phí mỗi phút trong khoảng thời gian từ 9 giờ đến 9 giờ 30 phút sáng. Kết quả được ghi lại ở bảng sau:

15	16	13	21	17	23	15	21	6	11	12	23	19	25	11
25	7	29	10	28	29	24	6	11	23	11	21	9	27	15

a) Tính số xe trung bình đi qua trạm thu phí trong mỗi phút.

b) Tổng hợp lại số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Số xe	$[6;10]$	$[11;15]$	$[16;20]$	$[21;25]$	$[26;30]$
Số lần	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng trung bình số xe đi qua trạm thu phí trong mỗi phút từ bảng tần số ghép nhóm trên.

5 Một thư viện thống kê số lượng sách được mượn mỗi ngày trong ba tháng ở bảng sau:

Số sách	$[16;20]$	$[21;25]$	$[26;30]$	$[31;35]$	$[36;40]$	$[41;45]$	$[46;50]$
Số ngày	3	6	15	27	22	14	5

Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

6 Quãng đường (km) từ nhà đến nơi làm việc của 40 công nhân một nhà máy được ghi lại như sau:

5	3	10	20	25	11	13	7	12	31	19	10	12	17	18
11	32	17	16	2	7	9	7	8	3	5	12	15	18	3
12	14	2	9	6	15	15	7	6	12					

a) Ghép nhóm dãy số liệu trên thành các khoảng có độ rộng bằng nhau, khoảng đầu tiên là $[0;5)$. Tìm giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

b) Tính số trung bình của mẫu số liệu không ghép nhóm và mẫu số liệu ghép nhóm. Giá trị nào chính xác hơn?

c) Xác định nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm thu được.

7 Một công ty xây dựng khảo sát khách hàng xem họ có nhu cầu mua nhà ở mức giá nào. Kết quả khảo sát được ghi lại ở bảng sau

Mức giá (triệu đồng/m^2)	$[10;14)$	$[14;18)$	$[18;22)$	$[22;26)$	$[26;30)$
Số khách hàng	54	78	120	45	12

a) Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Công ty nên xây nhà ở mức giá nào để nhiều người có nhu cầu mua nhất?

8 Số cuộc gọi điện thoại một người thực hiện mỗi ngày trong 30 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên được thống kê trong bảng sau:

Số cuộc gọi	$[3;5]$	$[6;8]$	$[9;11]$	$[12;14]$	$[15;17]$
Số ngày	5	13	7	3	2

a) Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Hãy dự đoán xem khả năng người đó thực hiện bao nhiêu cuộc gọi mỗi ngày là cao nhất.

§2. TRUNG VỊ VÀ TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Cho mẫu số liệu ghép nhóm

Nhóm	$[u_1;u_2)$	...	$[u_m;u_{m+1})$	...	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	...	n_m	...	n_k

1. Trung vị M_e của mẫu số liệu ghép nhóm

Công thức tính:

① Gọi n là cỡ mẫu.
② Giả sử nhóm $[u_m;u_{m+1})$ chứa trung vị;
③ n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
④ $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$M_e = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

Ý nghĩa: Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho trung vị của mẫu số liệu gốc, nó chia mẫu số liệu thành hai phần, mỗi phần chứa 50% giá trị.

2. Tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai Q_2: Cũng hình là **trung vị** của mẫu số liệu ghép nhóm.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1: Các bước tìm Q_1 như sau

- Giả sử nhóm $[u_m;u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất và n_m là tần số của nhóm tứ phân vị thứ nhất;
- $C = n_1 + n_2 + \cdots + n_{m-1}$.

Khi đó

$$Q_1 = u_m + \frac{\frac{n}{4} - C}{n_m} \cdot (u_{m+1} - u_m)$$

Tứ phân vị thứ ba Q_3: Các bước tìm Q_3 như sau

- Giả sử nhóm $[u_j;u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba và n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{j-1}$.

Khi đó

$$Q_3 = u_j + \frac{\frac{3n}{4} - C}{n_j} \cdot (u_{j+1} - u_j)$$

CHÚ Ý

Các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc, chúng chia mẫu số liệu gồm 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 1. Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	$[9{,}5;12{,}5)$	$[12{,}5;15{,}5)$	$[15{,}5;18{,}5)$	$[18{,}5;21{,}5)$	$[21{,}5;24{,}5)$
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tính trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm này.

Ví dụ 2. Kết quả khảo sát cân nặng của 25 quả bơ ở một lô hàng cho trong bảng sau:

Cân nặng (g)	$[150;155)$	$[155;160)$	$[160;165)$	$[165;170)$	$[170;175)$
Số quả bơ	1	7	12	3	2

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

DT 2 Tìm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ví dụ 3. Thời gian (phút) truy cập internet mỗi buổi tối của một số học sinh được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	$[9{,}5;12{,}5)$	$[12{,}5;15{,}5)$	$[15{,}5;18{,}5)$	$[18{,}5;21{,}5)$	$[21{,}5;24{,}5)$
Số học sinh	3	12	15	24	2

Tìm tứ phân vị thứ nhất Q_1 và tứ phân vị thứ ba Q_3 của mẫu số liệu ghép nhóm.

Ví dụ 4. Bảng bên cho biết tần số ghép nhóm số liệu thống kê cân nặng của 40 học sinh lớp 11A trong một trường trung học phổ thông (đơn vị: kilôgam). Xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Nhóm	$[30;40)$	$[40;50)$	$[50;60)$	$[60;70)$	$[70;80)$	$[80;90)$
Tần số	2	10	16	8	2	2

Ví dụ 5. Thời gian luyện tập trong một ngày (tính theo giờ) của một số vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập (giờ)	$[0;2)$	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$
Số vận động viên	3	8	12	12	4

a) Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu đã cho.

b) Huấn luyện viên muốn xác định nhóm gồm 25% các vận động viên có số giờ luyện tập cao nhất. Hỏi huấn luyện viên nên chọn các vận động viên có thời gian luyện tập từ bao nhiêu giờ trở lên vào nhóm này?

Ví dụ 6. Một phòng khám thống kê số bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 4 năm 2022 ở bảng sau:

Số bệnh nhân	$[1;10]$	$[11;20]$	$[21;30]$	$[31;40]$	$[41;50]$
Số ngày	7	8	7	6	2

a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Quản lý phòng khám cho rằng có khoảng 25% số ngày khám có nhiều hơn 35 bệnh nhân đến khám. Nhận định trên có hợp lý không?

C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Bảng bên cho ta bảng tần số ghép nhóm số liệu thống kê chiều cao của 40 mẫu cây ở một vườn thực vật (đơn vị: centimét). Xác định trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Nhóm	**Tần số**
$[30;40)$	4
$[40;50)$	10
$[50;60)$	14
$[60;70)$	6
$[70;80)$	4
$[80;90)$	2
	$n=40$

2 Mẫu số liệu dưới đây ghi lại tốc độ của 40 ô tô khi đi qua một trạm đo tốc độ (đơn vị: km/h):

48,5	43	50	55	45	60	53	55,5	44	65
51	62,5	41	44,5	57	57	68	49	46,5	53,5
61	49,5	54	62	59	56	47	50	60	61
49,5	52,5	57	47	60	55	45	47,5	48	61,5

a) Lập bảng tần số ghép nhóm cho mẫu số liệu trên có sáu nhóm ứng với sáu nửa khoảng:

$$[40;45),[45;50),[50;55),[55;60),[60;65),[65;70).$$

b) Xác định số trung vị, tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

3 Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 11 tiến hành thu nhặt vỏ chai nhựa để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ chai của học sinh khối 11 ở bảng sau:

Số vỏ chai nhựa	$[11;15]$	$[16;29]$	$[21;25]$	$[26;30]$	$[31;35]$
Số học sinh	53	82	48	39	18

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

4 Trong một hội thao, thời gian chạy 200 m của một nhóm các vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (giây)	$[21;21,5)$	$[21,5;22)$	$[22;22,5)$	$[22,5;23)$	$[23;23,5)$
Số vận động viên	5	12	32	45	30

Dựa vào bảng số liệu trên, ban tổ chức muốn chọn ra khoảng 50% số vận động viên chạy nhanh nhất để tiếp tục thi vòng 2. Ban tổ chức nên chọn các vận động viên có thời gian chạy không quá bao nhiêu giây?

5 Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau:

Số lần gặp sự cố	$[1;2]$	$[3;4]$	$[5;6]$	$[7;8]$	$[9;10]$
Số xe	17	33	25	20	5

a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Một người cho rằng có trên 25% xe của hãng gặp không ít hơn 4 sự cố về đồng cơ trong 2 năm sử dụng đầu tiên. Nhận định trên có hợp lí không?

D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho bảng phân bố tần số ghép lớp sau

Chiều cao của 40 học sinh nam ở một trường THPT

Lớp chiều cao (cm)	[160; 163]	[164; 167]	[168; 171]	[172; 175]	Cộng
Tần số	9	20	7	4	40

Giá trị đại diện c_3 của lớp chiều cao thứ 3 là

A. $c_3 = 168$. **B.** $c_3 = 169,5$. **C.** $c_3 = 7$. **D.** $c_3 = 171$.

Câu 2. Độ dài của 60 lá dương xỉ trưởng thành được cho bằng bảng phân bố tần số ghép lớp như sau.

Số TT	Lớp của độ dài (cm)	Tần số
1	$[10;20)$	8
2	$[20;30)$	18
3	$[30;40)$	24
4	$[40;50)$	10
	Cộng	60

Hỏi số lá có chiều dài từ 30 cm đến 50 cm chiếm bao nhiêu phần trăm?

A. 50%. **B.** 56%. **C.** 56,7%. **D.** 57%.

Câu 3. Bảng xếp loại học lực của học sinh lớp 11A2 trường THPT Bắc Thăng Long năm học 2012 – 2013 được cho như sau

Học lực	Kém	Yếu	Trung Bình	Khá	Giỏi	Tổng
Điểm	$[0;3)$	$[3;5)$	$[5;6,5)$	$[6,5;8)$	$[8;10)$	
Số học sinh	3	12	13	11	6	45

Xác định số trung bình $\bar{x}$ điểm của 45 học sinh nói trên

A. $\bar{x} = 5,8$. **B.** $\bar{x} = 5,5$. **C.** $\bar{x} = 6,0$. **D.** $\bar{x} = 5$.

Thống kê điểm trung bình môn Toán của một số học sinh lớp 11 được cho ở bảng sau:

Khoảng điểm	$[6,5;7)$	$[7;7,5)$	$[7,5;8)$	$[8;8,5)$	$[8,5;9)$	$[9;9,5)$	$[9,5;10)$
Tần số	8	10	16	24	13	7	4

Từ bảng số liệu ghép nhóm này, trả lời các câu hỏi sau:

Câu 4. Bảng số liệu trên có cỡ mẫu (kích thước mẫu) là bao nhiêu?

A. 24. **B.** 82. **C.** 7. **D.** 10.

Câu 5. Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu này là

A. $[9,5;10)$. **B.** $[6,5;7)$. **C.** $[8,5;9)$. **D.** $[8;8,5)$.

Câu 6. Số trung bình của mẫu số liệu trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

A. 7,34. **B.** 8,12. **C.** 8,30. **D.** 8,45.

Câu 7. Trung vị của mẫu số liệu trên thuộc khoảng nào trong các khoảng dưới đây?

A. 8,15. **B.** 8,43. **C.** 8,30. **D.** 8,21.

Câu 8. Mốt của mẫu số liệu trên có giá trị gần nhất với kết quả nào dưới đây?

A. 7,34. **B.** 8,12. **C.** 8,30. **D.** 8,21.

Câu 9. Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau đây?

A. 7. **B.** 7,95. **C.** $7,58$. **D.** 8,21.

Câu 10. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên gần nhất với giá trị nào trong các giá trị sau đây?

A. $8,53$. **B.** 7,95. **C.** $7,58$. **D.** 8,63.

—HẾT—