

CHỦ ĐỀ 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

NỘI DUNG CÂU HỎI

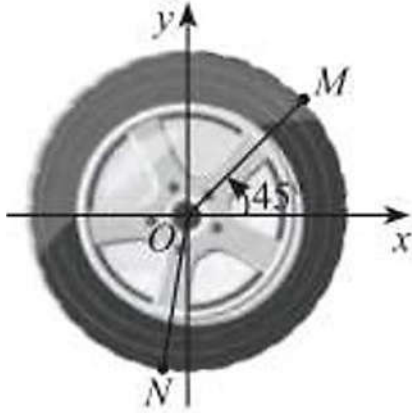
GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 184 cm , bánh xe trước có đường kính là 92 cm , xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.



- a) Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.
 - b) Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).
 - c) Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).
- Câu 2.** Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức: $B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12}$, trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thủy ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:
- a) 6 giờ sáng;
 - b) 10 giờ 30 phút sáng;
 - c) 12 giờ trưa;
 - d) 8 giờ tối.
- Câu 3.** Một đường tròn có bán kính 20 cm . Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:
- a) $\frac{\pi}{12}$
 - b) $1,5$;
 - c) 35° ;
 - d) 315° .
- Câu 4.** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.
- a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
 - b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm .
- Câu 5.** Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km . Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h .
- a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: $1\text{ h}; 3\text{ h}; 5\text{ h}$.
 - b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

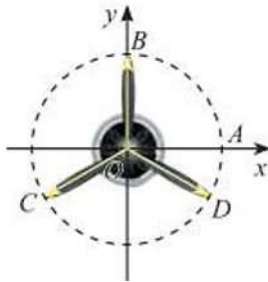
Câu 6. Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



Hình 15

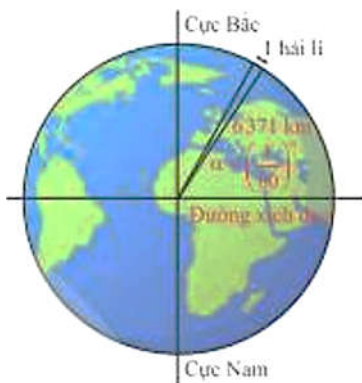
Câu 7. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$



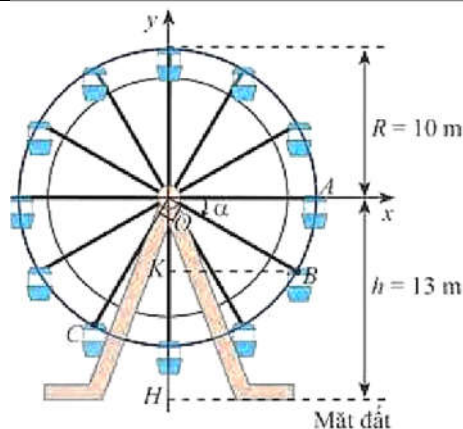
Hình 16

Câu 8. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371km . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

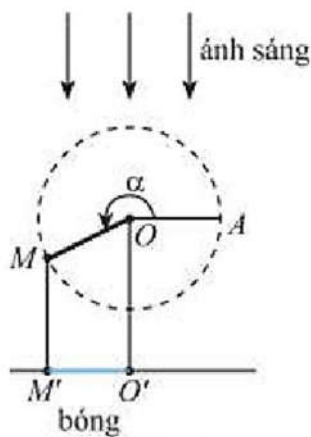
Câu 9. Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C .



Hình 11

- a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10\sin \alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB . Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.
- b) Khi điểm B cách mặt đất 4 m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 10. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15 cm ? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Câu 11. Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58\text{ cm}$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 13

Câu 12. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Câu 13. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 860 mm .

Câu 14. Kim giờ dài 6 cm và kim phút dài 11 cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

Câu 15. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài $1,75\text{ m}$ và $1,26\text{ m}$. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

Câu 16. Huyện lỵ Quận Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lỵ Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quận Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến nối hai huyện lỵ đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính 6378 km .

Câu 17. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Câu 18. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



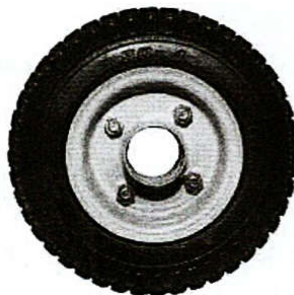
a) Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm . Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?

Câu 19. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2h$ theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được $3h$, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Câu 20. Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Câu 21. Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là bao nhiêu?

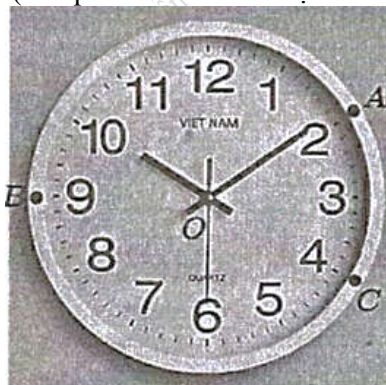


Câu 22. Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng $6,5cm$ (lấy $\pi = 3,1416$).

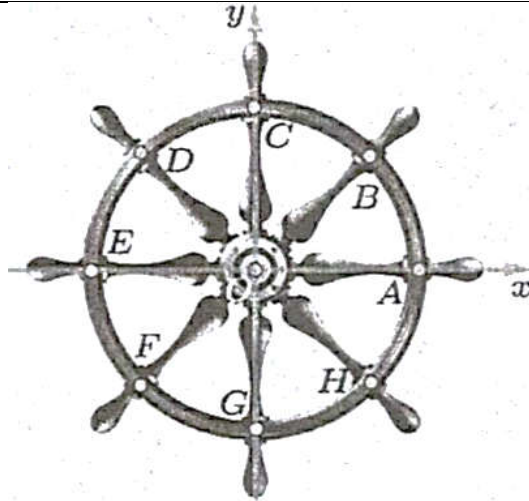
Câu 23. Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57cm$ và kim phút dài $13,34cm$. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu?

Câu 24. Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng $60cm$, ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm A, B, C lần lượt tương ứng với vị trí các số 2, 9, 4.

Tính độ dài các cung nhỏ AB và AC (kết quả tính theo đơn vị centimet và làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 25. Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thủy tương ứng với một đường tròn lượng giác.



a) Hãy viết công thức tổng quát biểu diễn các góc lượng giác sau đây theo đơn vị radian:

$(OA, OB), (OA, OD), (OA, OE), (OA, OF)$.

Các góc đều được định hướng theo chiều dương.

b) Hãy viết duy nhất một công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là A, C, E, G theo đơn vị radian.

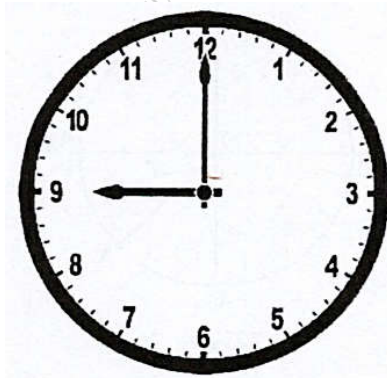
c) Hãy viết duy nhất một công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là A, E theo đơn vị độ.

d) Hãy viết công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác theo đơn vị radian:

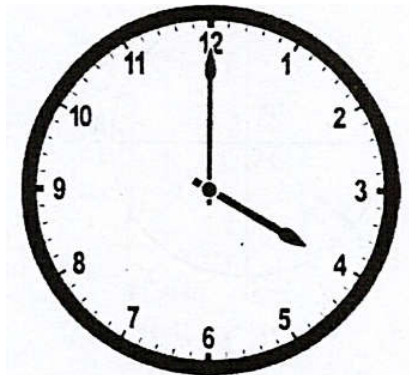
$(OA, OB) + (OB, OC); (OA, OC) + (OC, OH)$.

Câu 26. Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Xét tia Ou là kim giờ, Ov là kim phút. Xét chiều quay của góc là chiều kim đồng hồ, hãy viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ou, Ov) trong các trường hợp sau:

a)

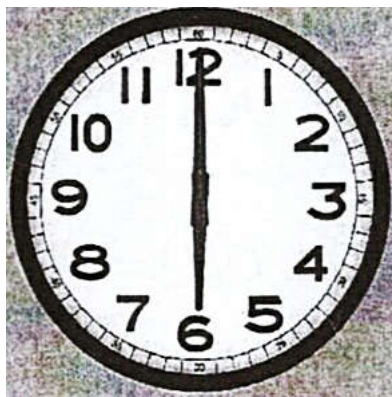


b)



Câu 27. Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Ta xem tia Ou là kim giờ, tia Ov là kim phút. Xét tia OA với điểm A trùng vị trí số 3 trên chiếc đồng hồ. Hãy viết một công thức

duy nhất để thể hiện số đo tổng quát của cả hai góc lượng giác (OA, Ou) và (OA, Ov) với góc quay xác định theo chiều dương.



Câu 28. Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là 55 cm . Nếu xe chạy với tốc độ 50 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Câu 29. Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thanh, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).

		Tần số cao		
		1209 Hz	1336 Hz	1477 Hz
		↓	↓	↓
	697 Hz →	1	2	3
	770 Hz →	4	5	6
Tần số thấp	852 Hz →	7	8	9
	941 Hz →	*	0	#

a) Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.

b) Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số cosin.

Câu 30. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

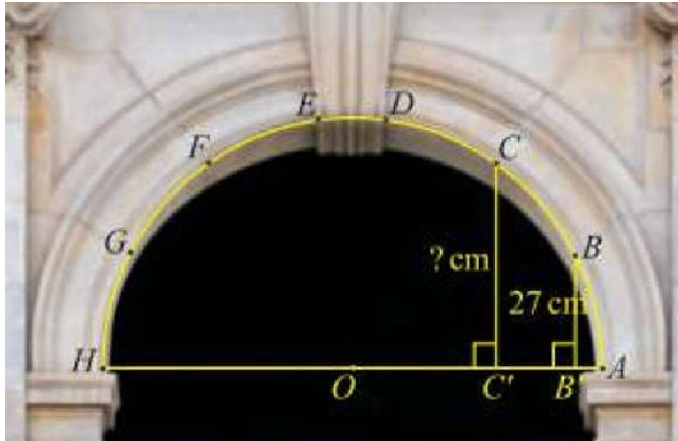
$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right)(\text{cm}),$$

$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)(\text{cm}).$$

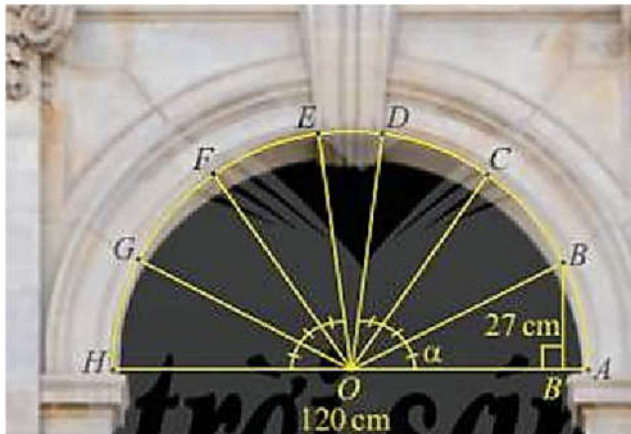
Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Câu 31. Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC ,

CD, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chót ở đỉnh. Nếu biết chiều rộng cổng và khoảng cách từ điểm B đến đường kính AH , làm thế nào để tính được khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH ?

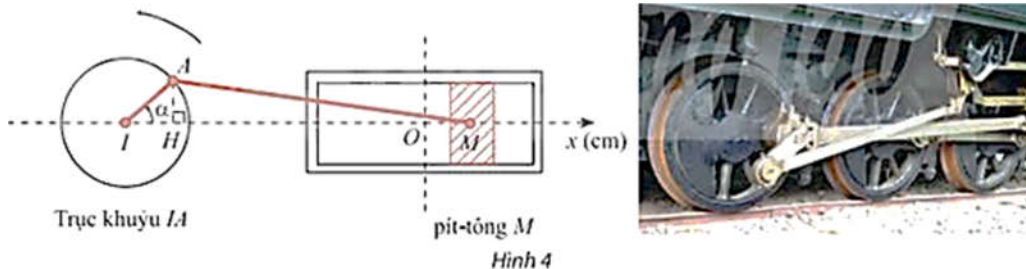


Câu 32. cho biết vòm cổng rộng 120 cm và khoảng cách từ B đến đường kính AH là 27 cm . Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH . Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 2

Câu 33. Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .



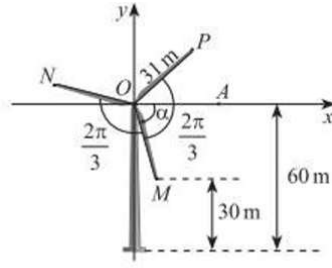
Hình 4

- Biết $IA = 8\text{ cm}$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .
- Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3\text{ cm}$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 34. Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m , độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m , góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α .



Hình 5



a) Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

b) Tính $\sin$ của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 35. Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

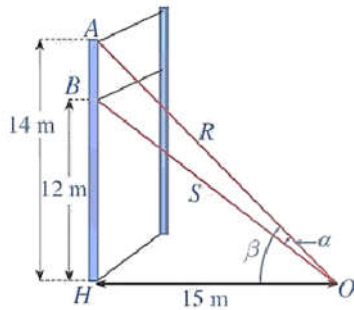
$$u = 40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t) \quad (V);$$

$$i = 4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t) \quad (A).$$

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P = u \cdot i(W)$. Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có lũy thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Câu 36. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $15m$ (Hình 18).

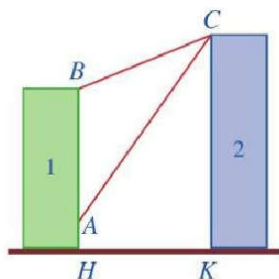


Hình 18

a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.

b) Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

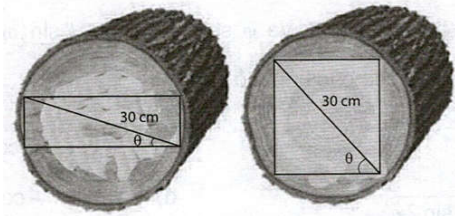
Câu 37. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20m$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C . Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32m$, $AH = 6m$, $BH = 24m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

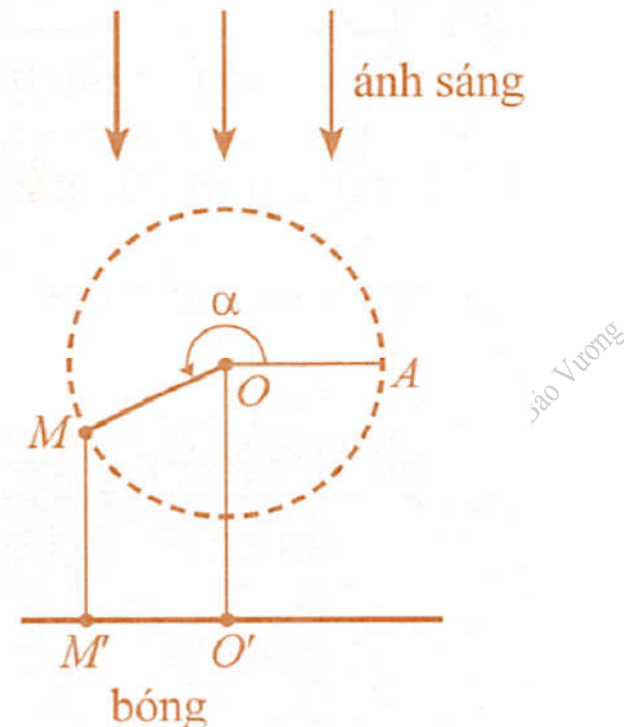
Câu 38. Một thanh xà gỗ hình hộp chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính $30cm$.

a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gồ được tính bởi công thức $S(\theta) = 450 \sin 2\theta (cm^2)$, ở đó góc θ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.



b) Tìm góc θ để diện tích mặt cắt của thanh xà gồ là lớn nhất.

Câu 39. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là $10cm$?



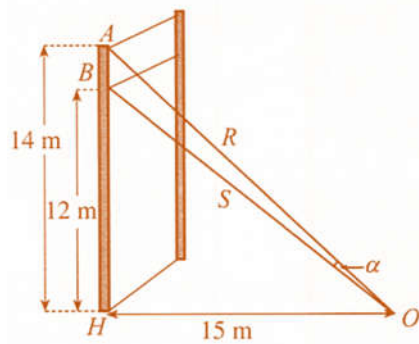
Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Câu 40. Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức

$$d(t) = 4 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right] + 12, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ và } 1 \leq t \leq 365.$$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

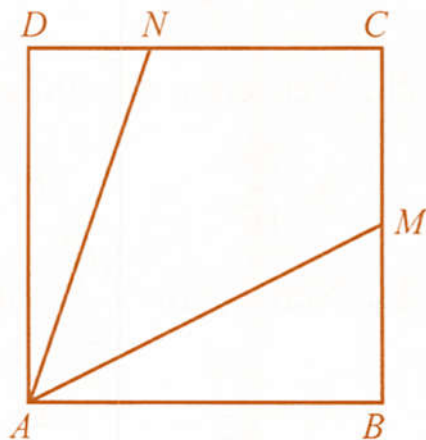
Câu 41. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $15m$ (Hình 3).



Hình 3

- a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
 b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

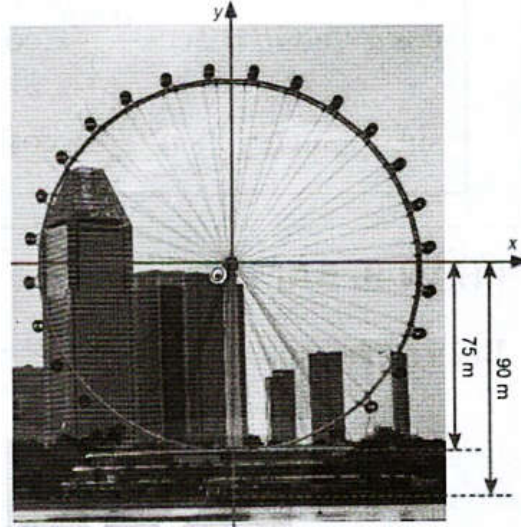
Câu 42. Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN , ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$



Hình 4

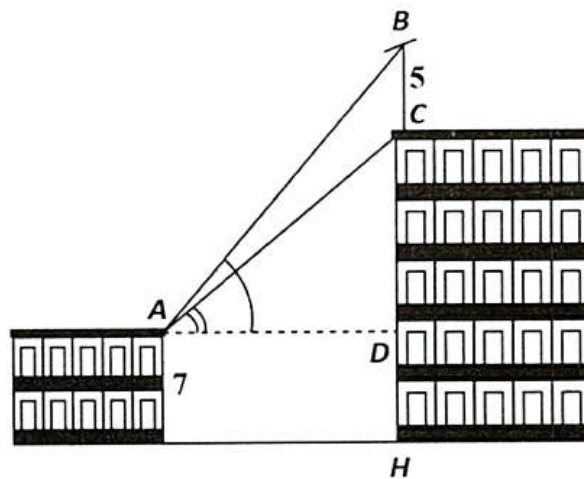
- a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.
 b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Câu 43. Một chiếc đu quay có bán kính $75m$, tâm của vòng quay ở độ cao $90m$, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Câu 44. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của tòa nhà là $18,9m$, hai tòa nhà cách nhau $10m$.

- Tính $\tan \alpha$;
- Tính góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Câu 45. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình: $x_1(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)(cm)$, $x_2(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)(cm)$. Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

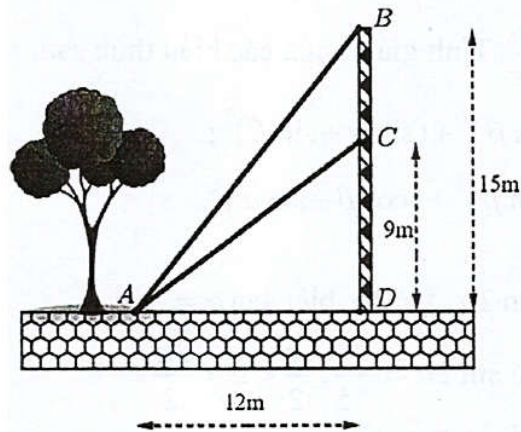
Câu 46. Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng $9200km$. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

- Tính quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ; 1,5 giờ; 3 giờ.
 - Sau khoảng bao nhiêu giờ thì X di chuyển được quãng đường $240000km$?
 - Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, hỏi sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc bao nhiêu rad?
- (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 47. Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây.

- a) Tính theo đơn vị radian độ lớn của góc mà một chất điểm trên bánh xe quay được sau 6 giây.
 b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng 340 mm . (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 48. Từ một vị trí A , người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao 15 m , được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D . Biết $CD = 9\text{ m}$ và $AD = 12\text{ m}$. Tìm góc nhọn $\alpha = \widehat{BAC}$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).



HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 49. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kỳ T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

- a) $A = 3\text{ cm}, \varphi = 0$;
 b) $A = 3\text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;
 c) $A = 3\text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Câu 50. Vì sao mặt cắt của sóng nước trên mặt hồ được gọi là có dạng hình sin?

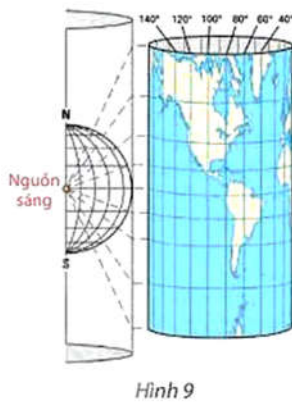


Câu 51. Li độ $s(\text{cm})$ của một con lắc đồng hồ theo thời gian t (giây) được cho bởi hàm số $s = 2 \cos \pi t$. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 1 giây đầu thì li độ s nằm trong đoạn $[-1; 1](\text{cm})$.



(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Câu 52. Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong Hình 9. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ φ° ($-90 < \varphi < 90$) được cho bởi hàm số $y = 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)$ (cm). Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ.



(Theo <https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/>)

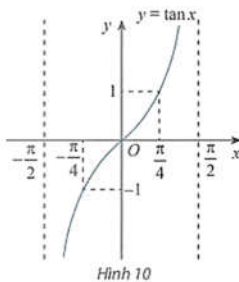
Giải

Vì điểm nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ nên ta có $-20 \leq y \leq 20$.

$$\text{Khi đó } -20 \leq 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 20 \text{ hay } -1 \leq \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 1.$$

$$\text{Ta có } -90 < \varphi < 90 \text{ khi và chỉ khi } -\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{180}\varphi < \frac{\pi}{2}.$$

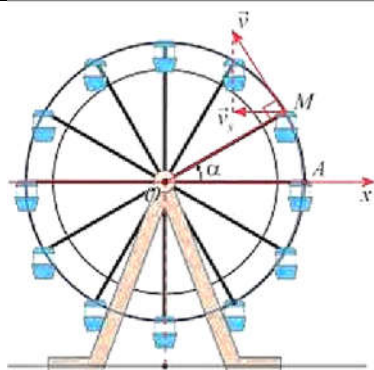
Xét đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (Hình 10).



$$\text{Ta thấy } -1 \leq \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 1 \text{ khi và chỉ khi } -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{180}\varphi \leq \frac{\pi}{4} \text{ hay } -45 \leq \varphi \leq 45.$$

Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá 20 cm nằm ở vĩ độ từ -45° đến 45° .

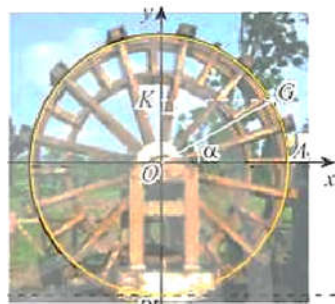
~!Câu 53. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình 11).



Hình 11

- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .
 b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

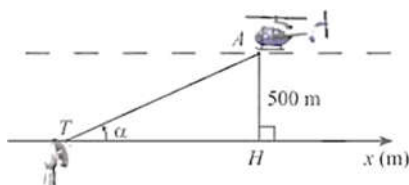
Câu 54. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng $3m$. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



Hình 12

- a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (\overline{OA}, \overline{OG})$.
 b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng $1,5m$.

Câu 55. Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao $500m$ theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hình 13

- a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .
 b) Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào.
 Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 56. Giả sử vận tốc v (tính bằng lít/giây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức $v = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3}$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây).

- a) Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.

b) Biết rằng quá trình hít vào xảy ra khi $v > 0$ và quá trình thở ra xảy ra khi $v < 0$.

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm nào thì người đó hít vào? người đó thở ra?

Câu 57. Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$), $\omega t + \varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Dao động điều hoà này có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần).

Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = -5 \cos 4\pi t (cm)$.

a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.

b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

Câu 58. Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

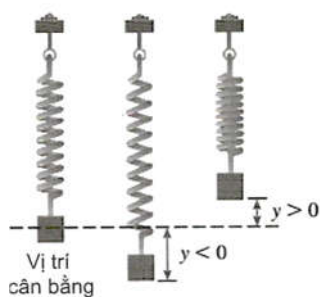
Câu 59. Độ sâu $h(m)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

(Theo <https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf>)

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu $3,6m$ để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 60. Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25 \sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.



a) Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.

b) Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.

c) Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.

Câu 61. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao $40m$ in trên mặt đất, độ dài

bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$

ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.

b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Câu 62. Hai sóng âm có phương trình lần lượt là

$$f_1(t) = C \sin \omega t \text{ và } f_2(t) = C \sin(\omega t + \alpha).$$

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo ra một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha).$$

a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng $f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, ở đó A, B là hai hằng số phụ thuộc vào α .

b) Khi $C = 10$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$.

Câu 63. Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức

$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)(cm)$ là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$)

và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)(cm) \text{ và } x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)(cm).$$

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Câu 64. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$p(t) = 120 + 15 \cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Câu 65. Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính

bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

Câu 66. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega > 0$. Khi

đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ

đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

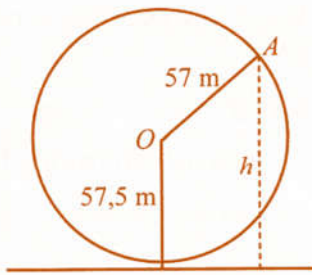
a) $A = 3cm, \varphi = 0$;

b) $A = 3cm, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;

c) $A = 3cm, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Câu 67. Một vòng quay trò chơi có bán kính $57m$, trục quay cách mặt đất $57,5m$, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt

đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$) (Hình 12).



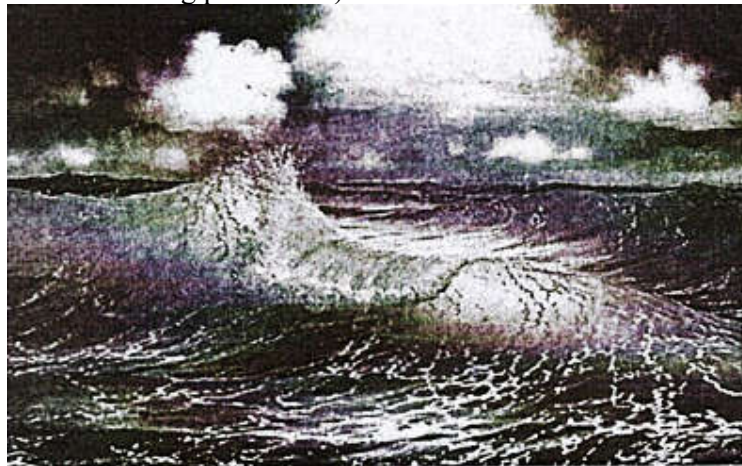
Hình 12

- Tính chu kỳ của hàm số $h(t)$?
- Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?
- Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là $86m$?

Câu 68. Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Câu 69. Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimet.

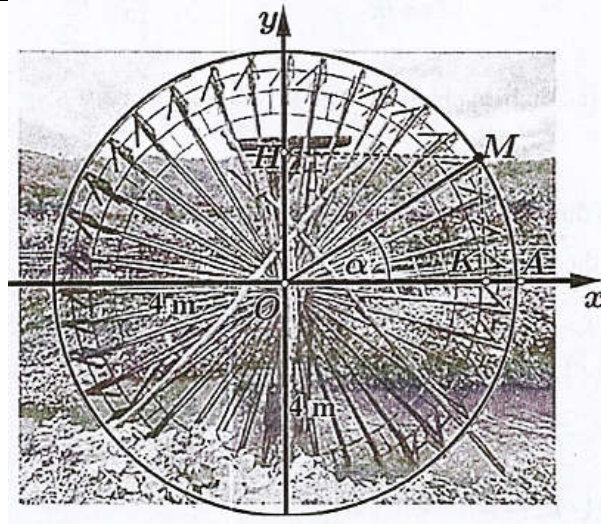
- Tìm chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây, 20 giây.
- Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), hãy tìm thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất. (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)



Câu 70. Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (\overline{OA}, \overline{OM})$.

Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

- Hãy lập hàm số $h(x)$ thể hiện chiều cao của điểm M so với mặt nước theo góc α . Tìm góc α khi điểm M cách mặt nước $6m$.
- Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 71. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.



Câu 72. Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha).$$



(Theo trang usno.navy.mil).

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

- $F = 0$ (trăng mới);
- $F = 0,25$ (trăng lưỡi liềm);
- $F = 0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);
- $F = 1$ (trăng tròn).

Câu 73. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500 \text{ m/s}$ hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường.

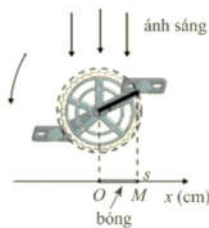
- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m .
- Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Câu 74. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right)$$

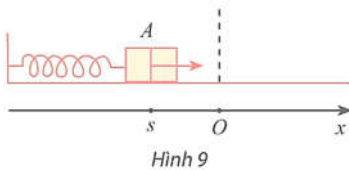
Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Câu 75. Trong hình bên, khi bàn đạp xe đạp quay, bóng M của đầu trục quay dao động trên mặt đất quanh điểm O theo phương trình $s = 17 \cos 5\pi t$ với $s(\text{cm})$ là toạ độ của điểm M trên trục Ox và t (giây) là thời gian bàn đạp quay. Làm cách nào để xác định được các thời điểm mà tại đó độ dài bóng OM bằng 10 cm ?



Câu 76. Quay lại bài toán khởi động, phương trình chuyển động của bóng đầu trục bàn đạp là $x = 17 \cos 5\pi t(\text{cm})$ với t được đo bằng giây. Xác định các thời điểm t mà tại đó độ dài bóng $|x|$ vừa bằng 10 cm . Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 77. Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ $s(\text{cm})$ của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3} \text{ cm}$?



(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Câu 78. Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1 \text{ km}$. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10} \text{ rad/s}$ và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.

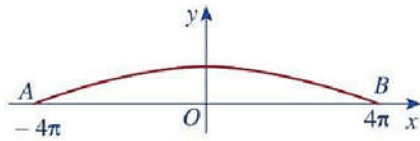


Hình 10

(Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)

- a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .
- b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1(\text{km})$. Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Câu 79. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2 \cdot \cos \frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 38.



Hình 38

Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $12,5\text{ m}$.

Câu 80. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 80) \right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$.

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

- a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
- c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Câu 81. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(\text{m})$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời

gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t - 1) \right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân

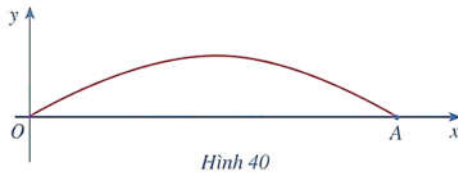
bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3\text{ m}; 0\text{ m}$?



Hình 39

- Câu 82.** Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12$ (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021). Tìm t để độ sâu của mực nước là:
- $15m$;
 - $9m$;
 - $10,5m$.

- Câu 83.** Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.



Hình 40

- Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA . Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $13,1m$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

- Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là $9m$ sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $4,3m$.

- Câu 84.** Cho vận tốc $v(cm/s)$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức
- $$v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right).$$

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;

b) Vận tốc con lắc bằng $1,5 \text{ cm/s}$.

Câu 85. Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m . Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_s = (\overline{AB}, \overline{AE})$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày

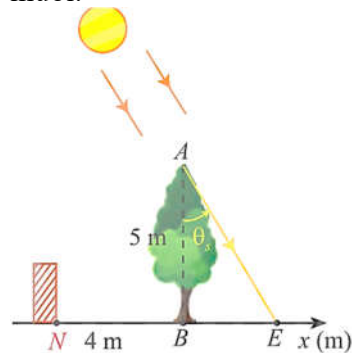
theo công thức $\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t-12)\text{rad}$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

(Theo <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle>)

a) Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t .

b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với tọa độ là $x_N = -4(\text{m})$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 1

Câu 86. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $p(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$,

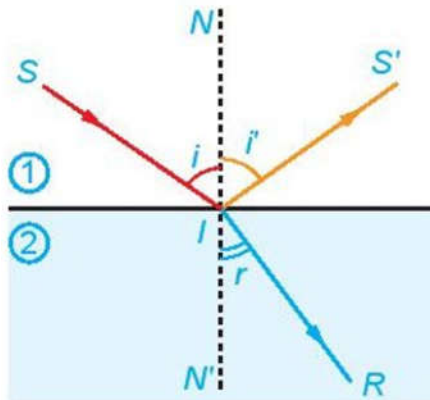
trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo phút.

a) Tìm chu kỳ của hàm số $p(t)$.

b) Tìm số nhịp tim mỗi phút.

c) Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Câu 87. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình.



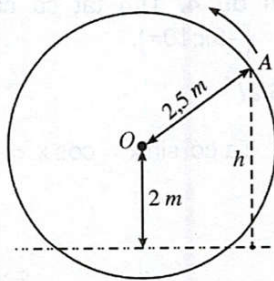
Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$.

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Câu 88. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gàu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt

nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right)$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gàu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gàu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

- Khi nào chiếc gàu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?
- Chiếc gàu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

Câu 89. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right), t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

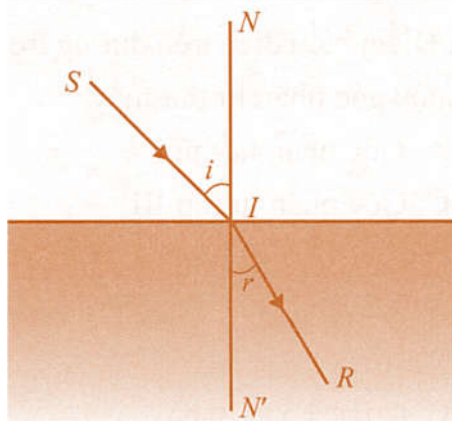
Câu 90. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp

của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20 \sin \left(\frac{7\pi}{3} t \right)$

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

- Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 mmHg.
- Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 mmHg.

Câu 91. Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30° . Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu?



Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 92. Một quả bóng được ném xiên một góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) từ mặt đất với tốc độ v_0 (m/s). Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức

$$d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}.$$

- Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu 10 m/s và góc ném là 30° so với phương ngang.
- Nếu tốc độ ban đầu của bóng là 10 m/s thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là 5 m ?

Câu 93. Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động

được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

- Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?
- Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

Câu 94. Vận tốc v_1 (cm/s) của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc v_2 (cm/s) của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

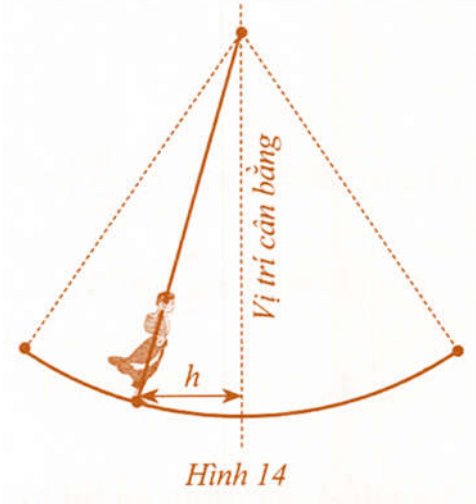
$$v_1(t) = -4 \cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ và } v_2(t) = 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right). \text{ Xác định các thời điểm } t \text{ mà tại đó:}$$

- Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 cm/s ;
- Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

Câu 95. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 14). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời

gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân

bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3 \text{ m}; 0 \text{ m}$?



Giải

Do $-1 \leq \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 1$ nên $-3 \leq 3 \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 3$ hay $-3 \leq d \leq 3$. Do đó, $0 \leq |d| \leq 3$.

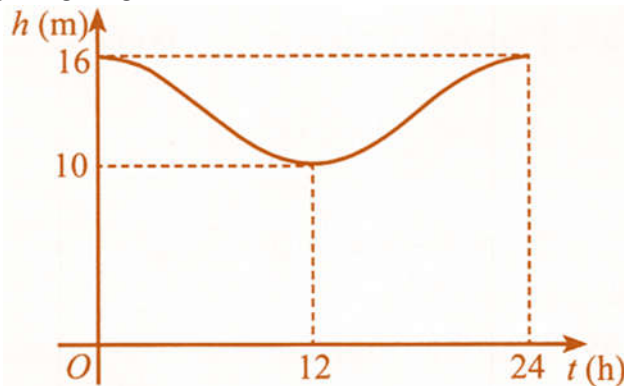
Vậy $h = 3$ khi $|d| = 3$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$; $h = 0$ khi $|d| = 0$ hay

$\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow t = \frac{5+6k}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$.

~!Câu 96. Mức nước cao nhất tại một cảng biển là $16m$ khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mức nước thấp nhất là $10m$. Đồ thị ở Hình 15 mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm.



Hình 15

Biết chiều cao của mực nước $h(m)$ theo thời gian $t(h)$ ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức

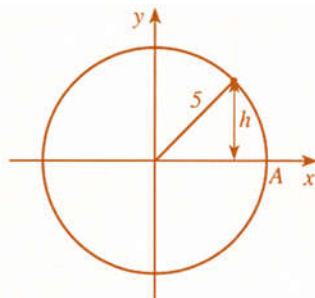
$h = m + a \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a .

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là $11,5m$.

Câu 97. Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính $5cm$. Khoảng cách $h(cm)$ từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó

$y = a \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây ($t \geq 0$) và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16).



Hình 16

- Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?
- Tìm giá trị của a .
- Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h = 2,5 \text{ cm}$ và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.

Câu 98. Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

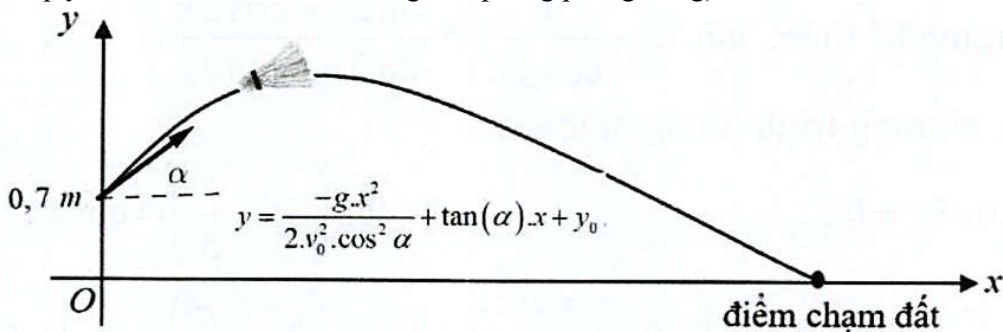
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , chọn điểm có tọa độ $(0; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của

cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là: $y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$; trong đó:

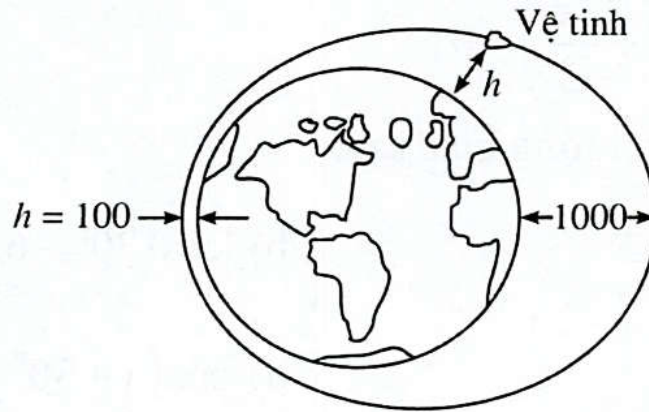
- g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8 \text{ m/s}^2$);
- α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.

Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68 \text{ m}$. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? (biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,7 \text{ m}$ so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là 8 m/s , bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



Câu 99. Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao h (tính bằng kilômét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức

$$h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t. \text{ Trong đó } t \text{ là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta}$$

cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó ?

Câu 100. Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = -2 \sin \left(\frac{\pi t}{6} \right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định các thời điểm vật có li độ bằng 1 cm .

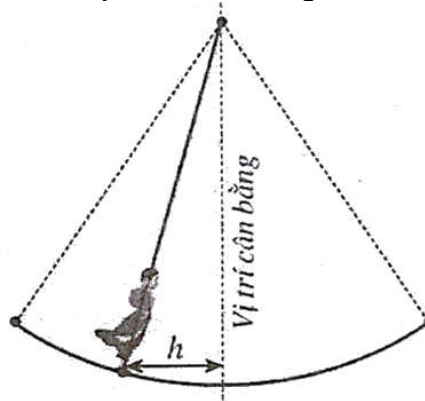
Câu 101. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức $h = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + 8$.

Tìm t để độ sâu của mực nước là:

- a) 8 m ;
- b) $6,5 \text{ m}$.

Câu 102. Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 1,5 \cos \left(\frac{t\pi}{4} \right)$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng.

- a) Trong 10 giây đầu tiên, thời điểm nào vật ở xa vị trí cân bằng nhất?
- b) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?



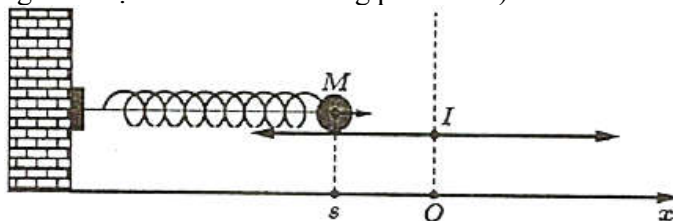
Câu 103. Một vật M được gắn vào đầu lò xo và dao động quanh vị trí cân bằng I , biết rằng O là hình chiếu vuông góc của I trên trục Ox , toạ độ điểm M trên Ox tại thời điểm t (giây) là đại lượng s (đơn vị:

$$\text{cm}) \text{ được tính bởi công thức } s = 8,6 \sin \left(8t + \frac{\pi}{2} \right)$$

- a) Tìm khoảng cách từ vật đến vị trí cân bằng tại thời điểm $t = 3$ giây.

b) Thời điểm nào trong khoảng 2 giây đầu tiên thì $s = 4,3\text{ cm}$?

(Các kết quả gần đúng trong bài được làm tròn đến hàng phần trăm)



LỜI GIẢI THAM KHẢO

GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 184 cm , bánh xe trước có đường kính là 92 cm , xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.



- Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.
- Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).
- Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Lời giải

a) Chu vi của bánh xe sau là: $C_s = \pi \cdot 184$ (cm).

Khi đó, bánh xe sau đi mỗi vòng được quãng đường có độ dài là 184π (cm).

Trong 10 phút, bánh xe sau chuyển động được $80 \cdot 10 = 800$ (vòng).

Quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút hay chính là quãng đường đi được khi bánh xe sau lăn 800 vòng là $800 \cdot 184\pi = 147200\pi(\text{cm}) = 1,472\pi(\text{km})$.

b) Ta có: 10 phút $= \frac{1}{6}$ giờ.

Vận tốc của máy kéo là $v = \frac{1,472\pi}{\frac{1}{6}} \approx 27,75$ (km/giờ).

c) Chu vi của bánh xe trước là: $C_t = \pi \cdot 92(\text{cm})$.

Khi bánh xe sau lăn được 800 vòng trong 10 phút thì bánh xe trước lăn được số vòng là

$$\frac{147200\pi}{92\pi} = 1600 \text{ (vòng)}.$$

Vận tốc của bánh xe trước trong chuyển động này là $\frac{1600}{10} = 160$ (vòng/phút).

Câu 2. Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi

công thức: $B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12}$, trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng $mmHg$ (milimét

thủy ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

- a) 6 giờ sáng;
- b) 10 giờ 30 phút sáng;
- c) 12 giờ trưa;
- d) 8 giờ tối.

Lời giải

a) $t = 6, B(t) = 80 + 7 \sin \frac{6\pi}{12} = 80 + 7 \sin \frac{\pi}{2} = 87 \text{ (mmHg)}$

b) $t = 10.5, B(t) = 80 + 7 \sin \frac{10.5\pi}{12} = 82.6788 \text{ (mmHg)}$

c) $t = 12, B(t) = 80 + 7 \sin \frac{12\pi}{12} = 80 + 7 \sin \pi = 80 \text{ (mmHg)}$

d) $t = 20, B(t) = 80 + 7 \sin \frac{20\pi}{12} = 80 + 7 \sin \frac{5\pi}{3} = 73.9378 \text{ (mmHg)}$

Câu 3. Một đường tròn có bán kính 20 cm . Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

- a) $\frac{\pi}{12}$
- b) $1,5$;
- c) 35° ;
- d) 315° .

Lời giải

a) Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times \frac{\pi}{12} = 5.236 \text{ (cm)}$

b) Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times 1.5 = 30 \text{ (cm)}$

c) Đồi $35^\circ = \frac{7\pi}{36}$

Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times \frac{7\pi}{36} = 12.2173 \text{ (cm)}$

d) Đồi $315^\circ = \frac{7\pi}{4}$

Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times \frac{7\pi}{4} = 109.9557 \text{ (cm)}$

Câu 4. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

- a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
- b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm .

Lời giải

a) 1 giây bánh xe quay được số vòng là: $11 : 5 = \frac{11}{5}$ (vòng)

Góc mà bánh xe quay được trong 1 giây: $\frac{11}{5} \times 360^\circ = 792^\circ = 4.4\pi \text{ (rad)}$

b) Ta có: 1 phút = 60 giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60 \times \frac{11}{5} = 132$ vòng.

Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi(mm)$.

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là
 $680\pi \times 132 = 89760\pi(mm) = 89,76\pi(m)$

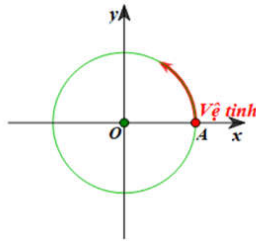
Câu 5. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km . Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h .

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: $1\text{ h}; 3\text{ h}; 5\text{ h}$.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Giả sử vệ tinh được định tại vị trí A , chuyển động quanh Trái Đất được mô tả như hình vẽ dưới đây:



a) Vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo tức là vệ tinh chuyển động được quãng đường bằng chu vi của quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km .

Do đó quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 2 h là: $2\pi \cdot 9000 = 18\pi(\text{km})$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 h là: $\frac{18\pi}{2} \cdot 1 = 9\pi(\text{km})$.

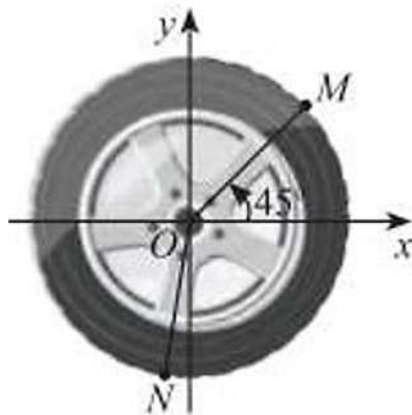
Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 3 h là: $\frac{18\pi}{2} \cdot 3 = 27\pi(\text{km})$.

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 5 h là: $\frac{18\pi}{2} \cdot 5 = 45\pi(\text{km})$.

b) Ta thấy vệ tinh chuyển động được quãng đường là $9\pi(\text{km})$ trong 1 h .

Vậy vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km trong thời gian là: $\frac{200000}{9\pi} \approx 7074$ (giờ).

Câu 6. Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



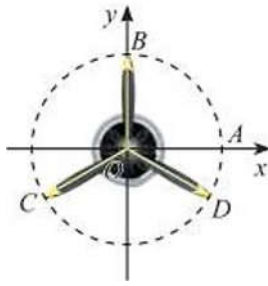
Hình 15

Lời giải

$$(Ox, ON) = -99^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Câu 7. Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z}).$$



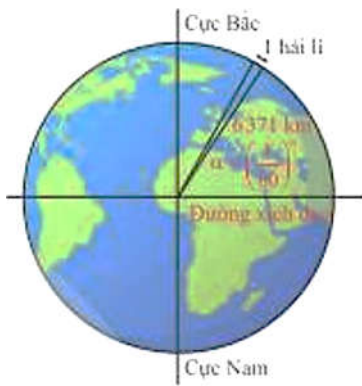
Hình 16

Lời giải

Điểm B, C, D biểu diễn cho góc lượng giác $\frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3} \ (k \in \mathbb{Z})$

Câu 8. Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



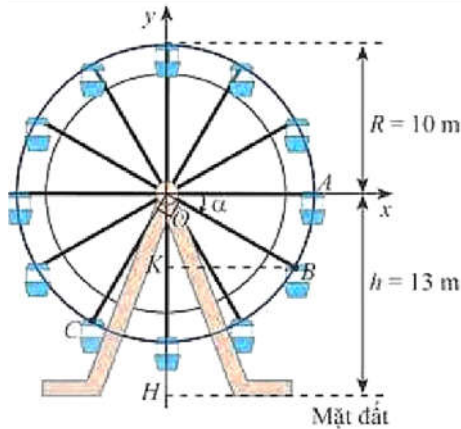
Hình 17

Lời giải

$$\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{\pi}{10800} \text{ rad}$$

$$1 \text{ hải lí} = \frac{\pi}{10800} \cdot 6371 \approx 1,85(\text{km})$$

Câu 9. Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C .



Hình 11

- a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13+10\sin\alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB . Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.
- b) Khi điểm B cách mặt đất 4m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

- a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng KH

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn trên thì $\alpha > 0, \sin\alpha > 0$ và $OK = 10\sin\alpha$

Ta có: $KH = OH + OK = 13 + 10\sin\alpha$

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn dưới thì $\alpha < 0, \sin\alpha < 0$ và $OK = 10 \cdot (-\sin\alpha)$.

Ta có: $KH = OH - OK = 13 - 10 \cdot (-\sin\alpha) = 13 + 10\sin\alpha$

Khi $\alpha = -30^\circ, KH = 13 + 10 \cdot \frac{-1}{2} = 8$

- b) Gọi $(OA, OC) = \beta$. Ta có: $\beta = \alpha - 90^\circ$

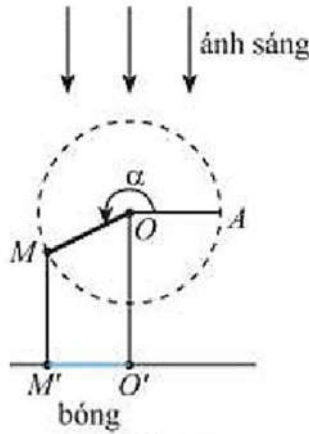
Khi $KH = 4$. Suy ra $\sin\alpha = \frac{-9}{10}, \alpha < 0$

$$\sin\beta = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-9}{10}\right)^2} = \frac{-\sqrt{19}}{10}$$

Điểm C cách mặt đất là: $13 + 10\sin\beta \approx 12,96$

Câu 10. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M'$

của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 15cm ? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Lời giải

Sau khi thanh OM quay được 3 vòng, vị trí của thanh là OA .

Quay tiếp $\frac{1}{10}$, thanh sẽ tạo với OA một góc $\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

Độ dài của bóng $O'M' = OM \cos \alpha = 15 \cdot \cos \frac{\pi}{5} = 12,1(cm)$.

Câu 11. Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 1 rad/s (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58 \text{ cm}$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 13

Lời giải

Sau một phút di chuyển, van V quay được một góc là $11.60 = 660 \text{ (rad)}$

Khoảng cách từ van đến mặt đất là: $58 + 58 \cdot \sin 660 \approx 57,7(cm)$

Câu 12. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

Trong 3 giây, quạt quay được: $3 \cdot \frac{45}{60} = \frac{9}{4}$ (vòng)

Vậy quạt quay được một góc: $2\pi \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\pi}{2}$ (rad)

Câu 13. Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 860 mm .

Lời giải

a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{12}{6} = 2$ vòng, tức là quay được một góc $4\pi(\text{rad})$ hay 720° .

b) Trong 1 phút, quãng đường mà người đi xe đã đi được là:

$$I = 430 \cdot 4\pi \cdot 60 = 103200\pi(\text{mm}).$$

Câu 14. Kim giờ dài 6 cm và kim phút dài 11 cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

Lời giải

Một giờ, kim phút quét được một góc lượng giác 2π ; kim giờ quét được một góc $\frac{\pi}{6}$. Hiệu vận

tốc giữa kim phút và kim giờ là $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Vào lúc 4 giờ hai kim tạo với nhau một góc là $\frac{2\pi}{3}$.

Khoảng thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) : \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{11}$ (giờ)

Vậy sau $\frac{1}{11}$ (giờ) hai kim sẽ vuông góc với nhau.

Tổng quãng đường hai đầu mút kim đi được là $I = R \cdot \alpha = 6 \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{\pi}{6} + 11 \cdot \frac{1}{11} \cdot 2\pi = \frac{23\pi}{11}(\text{cm})$.

Câu 15. Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài $1,75\text{ m}$ và $1,26\text{ m}$. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

Lời giải

a) Trong 15 phút thì mũi kim phút vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4}$ độ dài đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1,75 = \frac{7}{8}\pi \approx 2,75(\text{m}).$$

b) Trong 15 phút thì mũi kim giờ vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}$ đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 1,26 = \frac{21}{400}\pi \approx 0,16(\text{m}).$$

Câu 16. Huyện lỵ Quận Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lỵ Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quận Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến nối hai huyện lỵ đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính 6378 km .

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quận Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23^\circ - 9^\circ = 14^\circ$. Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng $\frac{6378 \cdot 14 \cdot \pi}{180} \approx 1558(\text{km})$

Câu 17. Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Lời giải

a) Sau 1 giây, cánh quạt quay được $\frac{175}{60} = \frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12} \cdot 2\pi = \frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6} \cdot 5 = \frac{175\pi}{6}$.

b) Thời gian để cánh quạt quay được một góc có số đo 42π là

$$42\pi : \frac{35\pi}{6} = 7,2 \text{ giây.}$$

Câu 18. Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



a) Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

b) Biết rằng bán kính của bánh xe là 35cm . Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?

Lời giải

a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8} = 3,75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75 \cdot 60 = 225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225 \cdot 2\pi = 450\pi$.

b) Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r = 0,35\text{m}$.

Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là $450\pi \cdot 0,35 \approx 494,8(m)$.

Câu 19. Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2h$ theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được $3h$, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Theo giả thiết, vệ tinh chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau $2h$, bán kính của vòng quay khi vệ tinh chuyển động quét được một góc lượng giác bằng $-2\pi(\text{rad})$.

Vậy khi vệ tinh chuyển động được $3h$ thì bán kính của vòng quay quét được một góc lượng giác bằng -3π (rad).

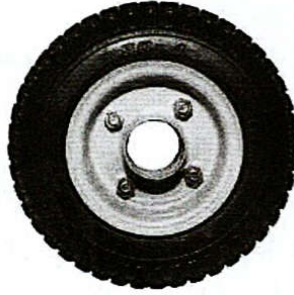
Câu 20. Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Do vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút và chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau 15 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng $-2\pi(rad)$.

Do đó, sau 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng $\frac{-2\pi}{15} \cdot 10 = \frac{-4\pi}{3}(rad)$.

Câu 21. Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có:

01 bánh răng tương ứng với $\frac{360^\circ}{72} = 5^\circ \Rightarrow 10$ bánh răng là 50° .

Câu 22. Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng $6,5cm$ (lấy $\pi = 3,1416$).

Lời giải

Ta có:

3 phút xe đi được $\frac{3 \times 60}{20} \times 60 = 540$ vòng.

Độ dài 1 vòng bằng chu vi bánh xe là: $2\pi R = 2 \times 3,1416 \times 6,5 = 40,8408cm$.

Vậy quãng đường xe đi được là $540 \times 40,8408 = 22054,032cm$.

Câu 23. Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57cm$ và kim phút dài $13,34cm$. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có:

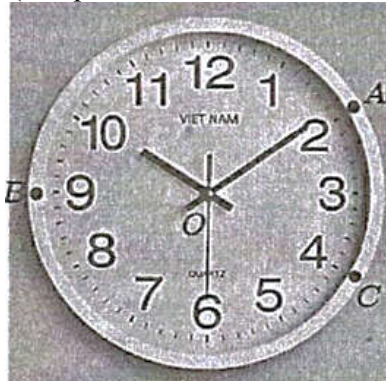
6 giờ thì kim giờ vạch lên 1 cung có số đo π nên 30 phút kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là $\frac{1}{12}\pi$, suy ra

độ dài cung tròn mà nó vạch lên là $l = R\alpha = 10,57 \times \frac{3,14}{12} \approx 2,77cm$.

Chú ý: 1 cung tròn bán kính R có góc tương ứng $\alpha(rad)$ thì độ dài cung tròn là: $l = \alpha R$.

Câu 24. Một cái đồng hồ treo tường có đường kính bằng $60cm$, ta xem vành ngoài chiếc đồng hồ là một đường tròn với các điểm A, B, C lần lượt tương ứng với vị trí các số 2, 9, 4.

Tính độ dài các cung nhỏ AB và AC (kết quả tính theo đơn vị centimét và làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Bán kính đường tròn là $R = \frac{60}{2} = 30 \text{ cm}$.

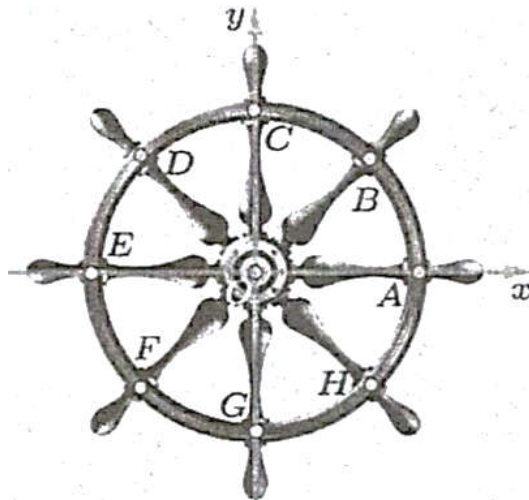
a) Ta có: $\widehat{AOB} = 150^\circ = \frac{150\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{6} \text{ rad}$; suy ra độ dài cung nhỏ AB là

$$l_{\widehat{AB}} = R \cdot \widehat{AOB} = 30 \cdot \frac{5\pi}{6} = 25\pi \approx 78,54 \text{ cm}.$$

b) Ta có: $\widehat{AOC} = 60^\circ = \frac{60\pi}{180} \text{ rad} = \frac{\pi}{3} \text{ rad}$; suy ra độ dài cung nhỏ AC là

$$l_{\widehat{AC}} = R \cdot \widehat{AOC} = 30 \cdot \frac{\pi}{3} = 10\pi \approx 31,42 \text{ cm}$$

Câu 25. Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thủy tương ứng với một đường tròn lượng giác.



a) Hãy viết công thức tổng quát biểu diễn các góc lượng giác sau đây theo đơn vị radian:

$(OA, OB), (OA, OD), (OA, OE), (OA, OF)$.

Các góc đều được định hướng theo chiều dương.

b) Hãy viết duy nhất một công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là A, C, E, G theo đơn vị radian.

c) Hãy viết duy nhất một công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là A, E theo đơn vị độ.

d) Hãy viết công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác theo đơn vị radian:

$(OA, OB) + (OB, OC); (OA, OC) + (OC, OH)$.

Lời giải

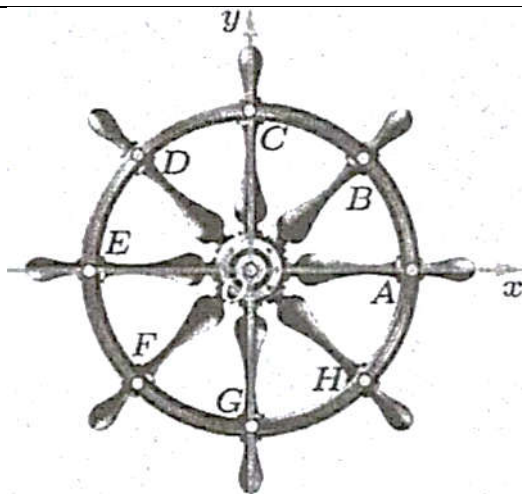
a) Ta có: $(OA, OB) = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}); (OA, OD) = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$

$$(OA, OE) = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}); (OA, OF) = \frac{5\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Ta thấy A, C, E, G lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác $0\text{rad}, \frac{\pi}{2}\text{rad}, \pi\text{rad}, \frac{3\pi}{2}\text{rad}, 2\pi\text{rad},$

$\frac{5\pi}{2}\text{rad}, \dots$ Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau $\frac{\pi}{2}$ rad. Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho

các góc lượng giác ấy là $k \frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.



c) Ta thấy hai điểm A, E lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, \dots$. Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau 180° . Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho các góc lượng giác ấy là $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

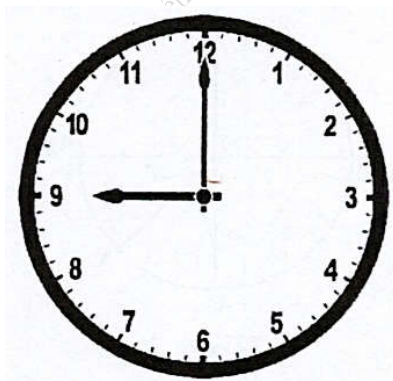
d) Theo hệ thức Sa-lơ, ta có:

$$(OA, OB) + (OB, OC) = (OA, OC) = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

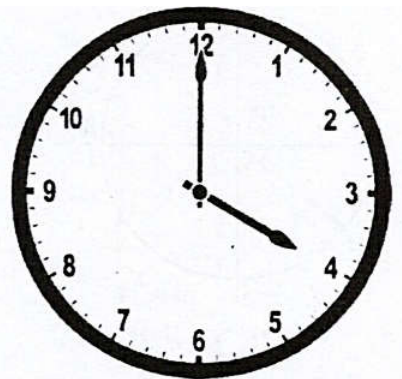
$$(OA, OC) + (OC, OH) = (OA, OH) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 26. Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Xét tia Ou là kim giờ, Ov là kim phút. Xét chiều quay của góc là chiều kim đồng hồ, hãy viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ou, Ov) trong các trường hợp sau:

a)



b)

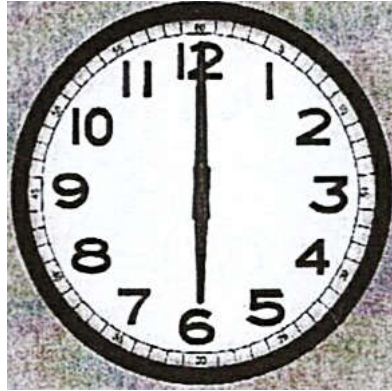


Lời giải

a) Ta có $(Ou, Ov) = 90^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

b) Ta có $(Ou, Ov) = 120^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

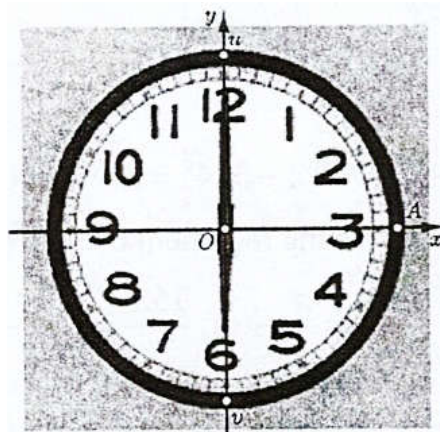
Câu 27. Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Ta xem tia Ou là kim giờ, tia Ov là kim phút. Xét tia OA với điểm A trùng vị trí số 3 trên chiếc đồng hồ. Hãy viết một công thức duy nhất để thể hiện số đo tổng quát của cả hai góc lượng giác (OA, Ou) và (OA, Ov) với góc quay xác định theo chiều dương.



Lời giải

Xét đường tròn lượng giác như hình vẽ sau:

Công thức góc lượng giác cần tìm là $x = 90^\circ + k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.



Câu 28. Một bánh xe có đường kính kể cả lốp xe là 55 cm . Nếu xe chạy với tốc độ 50 km/h thì trong một giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng? (Kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

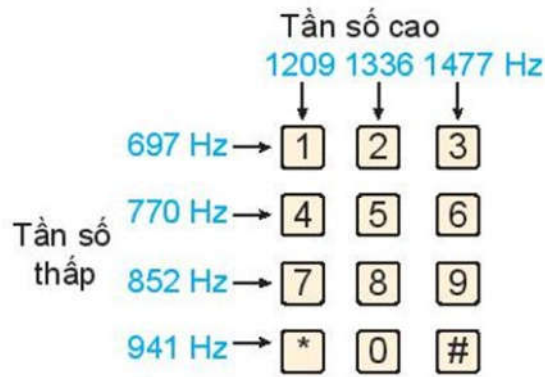
$$\text{Tốc độ xe là: } 50\text{ km/h} = \frac{50 \cdot 100000}{3600}\text{ cm/s} = \frac{12500}{9}\text{ cm/s}.$$

$$\text{Mỗi vòng bánh xe có chiều dài: } 2\pi R = 2\pi \cdot \frac{55}{2} = 55\pi(\text{cm}).$$

$$\text{Vậy mỗi giây thì bánh xe lăn được số vòng là } \frac{12500}{9} : (55\pi) \approx 8,04 \text{ (vòng)}.$$

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Câu 29. Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).



- a) Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.
b) Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số cosin.

Lời giải

a) $y = \sin(2\pi 770t) + \sin(2\pi 1209t) = \sin(1540\pi t) + \sin(2418\pi t)$

b)

$$\sin(1540\pi t) + \sin(2418\pi t) = 2 \sin \frac{1540\pi t + 2418\pi t}{2} \cos \frac{1540\pi t - 2418\pi t}{2} = 2 \sin(1979\pi t) \cos(-878\pi t)$$

Câu 30. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (cm),$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (cm).$$

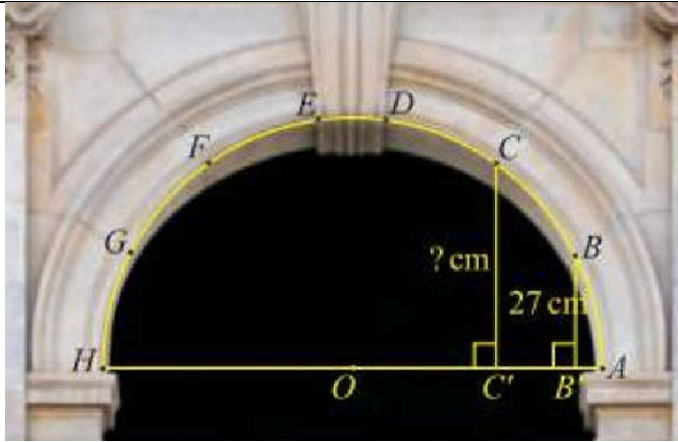
Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2 \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos \frac{\pi}{4} \right] = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Biên độ là $A = 2\sqrt{2}$, pha ban đầu là $\varphi = -\frac{\pi}{12}$

Câu 31. Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chốt ở đỉnh. Nếu biết chiều rộng cổng và khoảng cách từ điểm B đến đường kính AH , làm thế nào để tính được khoảng cách từ điểm C đến AH ?



Lời giải

Do các cung AB, BC bằng nhau nên góc lượng giác $(OC, OB) = (OB, OA)$

Suy ra $(OC, OA) = 2 \cdot (OB, OA)$

Ta có:

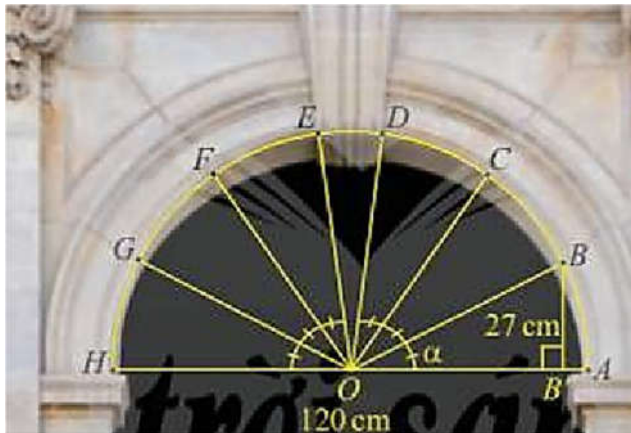
$$BB' = R \cdot \sin(OB, OA)$$

$$CC' = R \cdot \sin(OC, OA)$$

Do ta biết được BB' , đường kính AH nên có thể tính được R và $\sin(OB, OA)$

Từ đó tính được $\sin(OC, OA)$ và biết được khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH .

Câu 32. cho biết vòm cổng rộng 120 cm và khoảng cách từ B đến đường kính AH là 27 cm . Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH . Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 2

Lời giải

Ta có $AH = 120$. Suy ra $R = 120 : 2 = 60(\text{cm})$

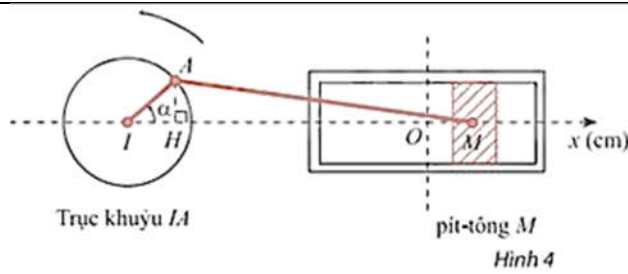
$$\sin \alpha = \frac{BB'}{R} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{319}}{20} \text{ do có } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$CC' = R \cdot \sin 2\alpha = R \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 60 \cdot 2 \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{\sqrt{319}}{20} \approx 48,2(\text{cm})$$

Câu 33. Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi

$\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .



- a) Biết $IA = 8\text{ cm}$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .
- b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3\text{ cm}$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

- a) Khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì M ở vị trí O , H ở vị trí I . Ta có $IO = HM = AM$

$$x_M = IM - OI = IH + HM - OI = IH + AM - AM = IH = IA \cdot \cos \alpha$$

$$x_M = 8 \cos \alpha$$

- b) Sau khi chuyển động 1 phút, trục khuỷu quay được một góc là α

$$\text{Khi đó } x_M = -3\text{ cm}. \text{ Suy ra } \cos \alpha = \frac{-3}{8}$$

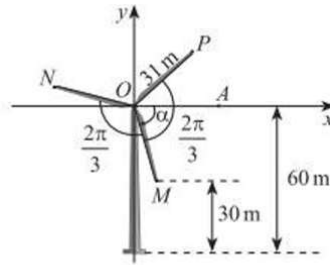
Sau khi chuyển động 2 phút, trục khuỷu quay được một góc là 2α

$$x_M = 8 \cdot \cos 2\alpha = 8 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) = -5,75$$

Câu 34. Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m , độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m , góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α .



Hình 5



- a) Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.
- b) Tính $\sin$ của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

$$\text{a) } \sin \alpha = \frac{-30}{31} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{-30}{31}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{31}$$

$$\text{b) } \sin(OA, ON) = \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \approx 0,27$$

Chiều cao điểm N so với mặt đất là: $60 + 31 \cdot 0,27 = 68,37 \text{ (m)}$

$$\sin(OA, OP) = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{2\pi}{3} + \cos \alpha \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \approx 0,7$$

Chiều cao điểm P so với mặt đất là: $60 + 31 \cdot 0,7 = 81,7 \text{ (m)}$

Câu 35. Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

$$u = 40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t) \quad (V);$$

$$i = 4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t) \quad (A).$$

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

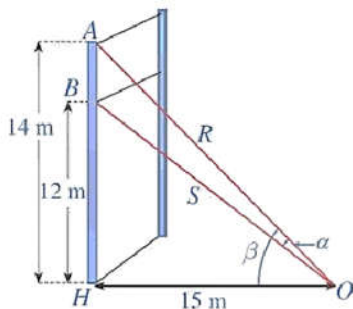
Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đo được tính theo công thức: $P = u \cdot i(W)$. Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có lũy thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= u \cdot i = [40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t)] \cdot [4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)] \\ &= 160 \sin^2(120\pi t) + 10 \sin^2(360\pi t) + 80 \sin(120\pi t) \sin(360\pi t) \\ &= 80[1 - \cos(240\pi t)] + 5[1 - \cos(720\pi t)] + 40[\cos(360\pi t - 120\pi t) - \cos(360\pi t + 120\pi t)] \\ &= 85 - 80 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) + 40 \cos(240\pi t) - 40 \cos(480\pi t) \\ &= 85 - 40 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) - 40 \cos(480\pi t)(W). \end{aligned}$$

Câu 36. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $15m$ (Hình 18).



Hình 18

- Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

- Xét $\triangle AOH$ vuông tại H , ta có: $\tan \beta = \frac{AH}{HO} = \frac{14}{15}$.

Đặt $\widehat{BOH} = \gamma$

Xét $\triangle BOH$ vuông tại H , ta có: $\tan \gamma = \frac{BH}{HO} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \widehat{BOH}) = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{131}{75}} = \frac{10}{131}$$

Vậy $\tan \alpha = \frac{10}{131}$.

- Từ $\tan \alpha = \frac{10}{131}$, để tìm số đo góc α , ta sử dụng máy tính cầm tay ấn lần lượt các nút:

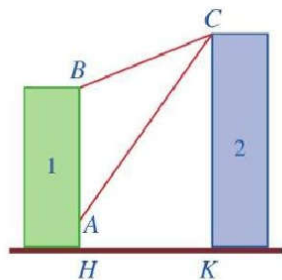
SHIFT tan 1 0 ÷ 1 3 1 =

Ta được kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ là 4° .

Vậy $\alpha \approx 4^\circ$

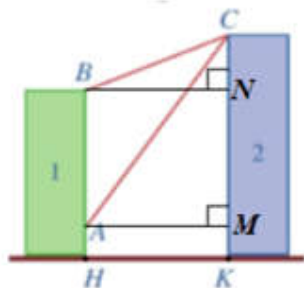
Câu 37. Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20m$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C . Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao

nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32m$, $AH = 6m$, $BH = 24m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

Lời giải



Kẻ $AM \perp CK$, $BN \perp CK$ (hình vẽ) ta có: $BN = AM = HK = 20(m)$

$CN = CK - NK = CK - BH = 32 - 24 = 8(m)$;

$MN = AB = BH - AH = 24 - 6 = 18(m)$

$CM = CN + MN = 8 + 18 = 26(m)$

Đặt $\widehat{BCN} = \alpha$, $\widehat{ACM} = \beta$.

Xét $\triangle BCN$ vuông tại N có: $\tan \alpha = \frac{BN}{CN} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$;

Xét $\triangle ACM$ vuông tại M có: $\tan \beta = \frac{AM}{CM} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$;

Ta có: $\tan \widehat{ACB} = \tan(\widehat{BCN} - \widehat{ACM}) = \tan(\alpha - \beta)$

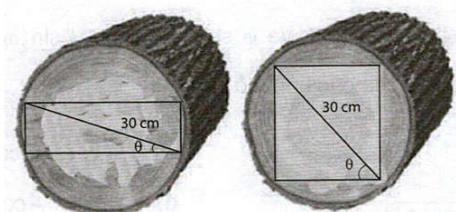
$$\Rightarrow \tan \widehat{ACB} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{10}{13}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{13}} = \frac{45}{76} \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 0,01^\circ$$

Vậy góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất) có số đo xấp xỉ $0,01^\circ$.

Câu 38. Một thanh xà gỗ hình hộp chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính $30cm$.

a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ được tính bởi công thức

$S(\theta) = 450 \sin 2\theta (cm^2)$, ở đó góc θ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.



b) Tìm góc θ để diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ là lớn nhất.

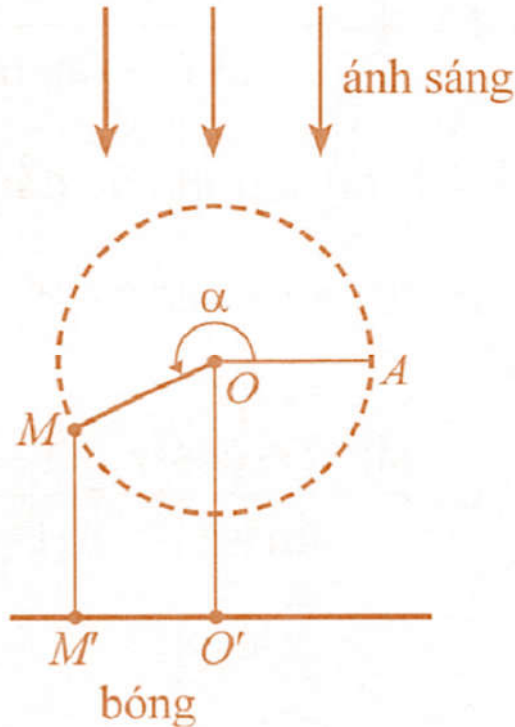
Lời giải

a) Mặt cắt của thanh xà gỗ (hình dưới) là hình chữ nhật có hai kích thước là $AB = 30 \cos \theta$ và $BC = 30 \sin \theta$.

Vậy diện tích mặt cắt là $S = AB \cdot BC = 30 \cdot 30 \sin \theta \cos \theta = 450 \sin 2\theta$.

b) Ta có $S = 450 \sin 2\theta \leq 450$. Vậy diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ lớn nhất khi $\sin 2\theta = 1$ hay góc $\theta = 45^\circ$.

Câu 39. Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10cm ?



Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

$$\text{Ta có } \alpha = \frac{60}{13} \cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}.$$

$$\text{Suy ra } O'M' = |OM \cos \alpha| = \left| 10 \cos \frac{120\pi}{13} \right| \approx 7,5\text{cm}.$$

Câu 40. Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức

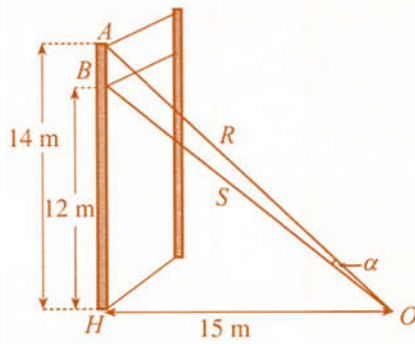
$$d(t) = 4 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right] + 12, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ và } 1 \leq t \leq 365.$$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

$$d(31) = 9,01 \text{ giờ}.$$

Câu 41. Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14m . Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12m . Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15m (Hình 3).



Hình 3

- a) Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
 b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Ta có: $\alpha = \widehat{AOH} - \widehat{BOH}$.

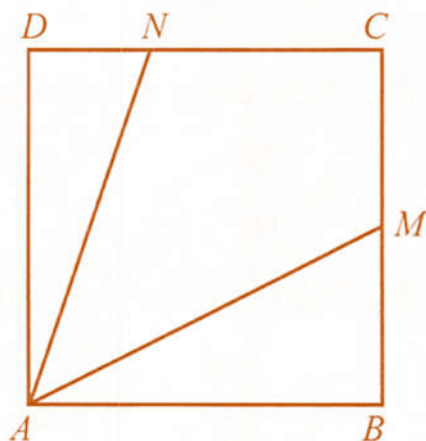
Trong tam giác vuông AOH , $\tan \widehat{AOH} = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}$.

Trong tam giác vuông BOH , $\tan \widehat{BOH} = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \tan(\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \frac{\tan \widehat{AOH} - \tan \widehat{BOH}}{1 + \tan \widehat{AOH} \cdot \tan \widehat{BOH}} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{10}{131}.$$

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

Câu 42. Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN , ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC$, $DN = \frac{1}{3}DC$



Hình 4

- a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.
 b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

a) Trong tam giác vuông ABM , $\tan \widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác vuông ADN , $\tan \widehat{DAN} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$.

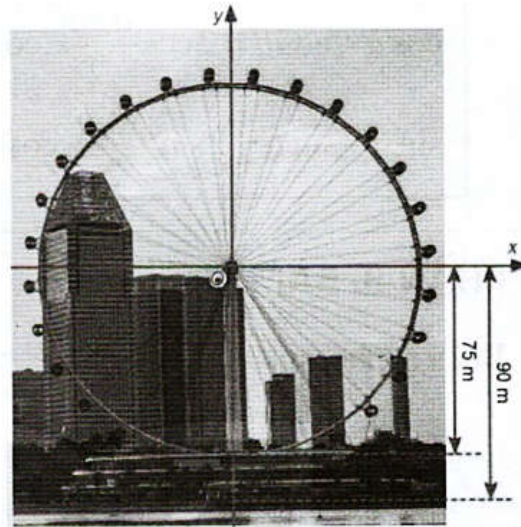
$$\text{Do đó, } \tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \frac{\tan \widehat{BAM} + \tan \widehat{DAN}}{1 - \tan \widehat{BAM} \tan \widehat{DAN}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

b) Do $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 1$ nên $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ$.

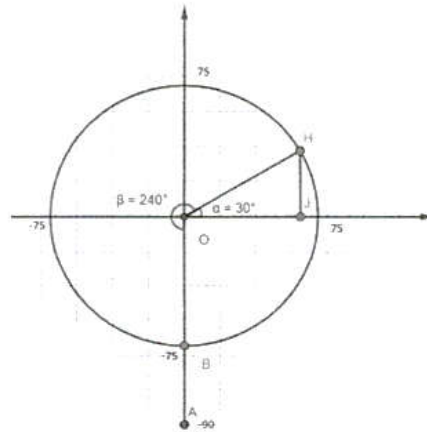
Suy ra $\widehat{MAN} = 90^\circ - (\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 45^\circ$.

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45° .

Câu 43. Một chiếc đu quay có bán kính $75m$, tâm của vòng quay ở độ cao $90m$, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Lời giải



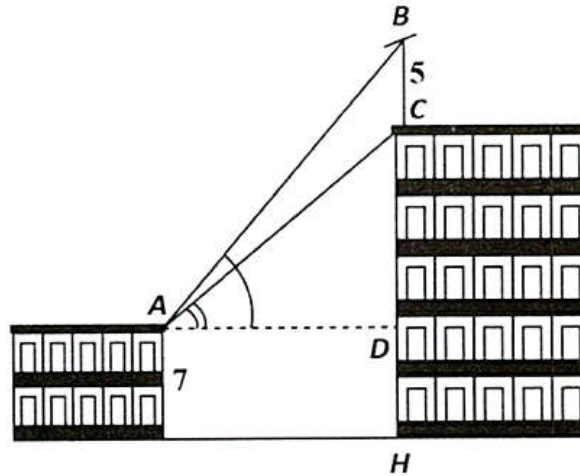
Do tính đối xứng, dù đu quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ, ta đều thấy rằng độ cao của người đó là như nhau sau cùng một khoảng thời gian. Ở đây ta xét đu quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Gắn đu quay có bán kính $75m$, tâm của vòng quay ở độ cao $90m$ vào hệ trục tọa độ Oxy ta được hình bên:

Sau 20 phút quay cabin đi được một góc là $\frac{20}{30} \cdot 360^\circ = 240^\circ$ tức là đến vị trí điểm H .

Khi đó góc $\widehat{HOJ} = 30^\circ$ và $HJ = 30^\circ \cdot OH = 37,5(m)$.

Vậy sau 20 phút quay, người đó ở độ cao $37,5 + 90 = 127,5(m)$.

Câu 44. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của tòa nhà là $18,9m$, hai tòa nhà cách nhau $10m$.

a) Tính $\tan \alpha$;b) Tính góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).**Lời giải**a) Ta có: $AD = 10m$

$$CD = 18,9 - 7 = 11,9m$$

$$BD = BC + CD = 11,9 + 5 = 16,9m$$

$$\tan \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{16,9}{10}$$

$$b) \tan \alpha = \frac{16,9}{10} \Rightarrow \alpha = 59^\circ.$$

Câu 45. Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình: $x_1(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) (cm)$, $x_2(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right) (cm)$. Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\text{Ta có } x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= 3 \cdot 2 \left[\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \right]$$

$$= 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right)$$

Vậy biên độ của dao động là $6 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$. Pha ban đầu của chuyển động là $\frac{5\pi}{24}$.

Câu 46. Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng $9200 km$. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

a) Tính quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ; 1,5 giờ; 3 giờ.b) Sau khoảng bao nhiêu giờ thì X di chuyển được quãng đường $240000 km$?

c) Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, hỏi sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc bao nhiêu rad?

(Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

a) Một vòng đi chuyển của X chính là chu vi đường tròn:

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 9200 = 18400\pi (km).$$

Sau 1 giờ, vệ tinh đi chuyển nửa đường tròn với quãng đường là:

$$\frac{1}{2}C = 9200\pi \approx 28902,65 (km).$$

Sau 1,5 giờ, vệ tinh đi chuyển được $\frac{1,5 \cdot 1}{2}$ đường tròn (hay $\frac{3}{4}$ đường tròn), quãng đường là:

$$\frac{3}{4}C = \frac{3}{4} \cdot 18400\pi = 13800\pi \approx 43353,98 (km).$$

Sau 3 giờ, X đi chuyển được $\frac{3}{2}$ đường tròn, tức là:

$$\frac{3}{2}C = \frac{3}{2} \cdot 18400\pi = 27600\pi \approx 86707,96 (km).$$

b) Số giờ để vệ tinh X thực hiện quãng đường $240000 km$ là: $\frac{240000}{9200\pi} \approx 8,3$ (giờ).

c) Sau 4,5 giờ thì số vòng tròn mà vệ tinh X đi chuyển được là: $\frac{4,5}{2} = \frac{9}{4}$ (vòng).

Số đo góc lượng giác thu được là: $\frac{9}{4} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2} (rad)$.

Câu 47. Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây.

a) Tính theo đơn vị radian độ lớn của góc mà một chất điểm trên bánh xe quay được sau 6 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng $340 mm$. (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

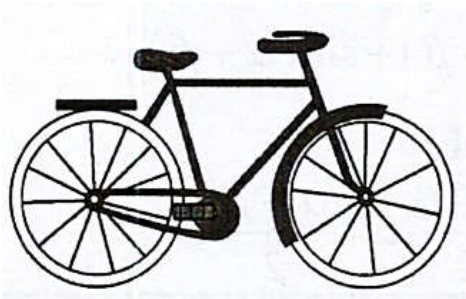
a) Số vòng bánh xe thực hiện được sau 6 giây là $\frac{6 \cdot 25}{10} = 15$; góc thu được tương ứng là $15 \cdot 2\pi = 30\pi$ (rad).

b) Sau 2,35 phút (= 141 giây), số vòng mà bánh xe thực hiện được là:

$$\frac{141 \cdot 25}{10} = 352,5 \text{ vòng. Bán kính bánh xe: } R = 340 mm = 0,34 m.$$

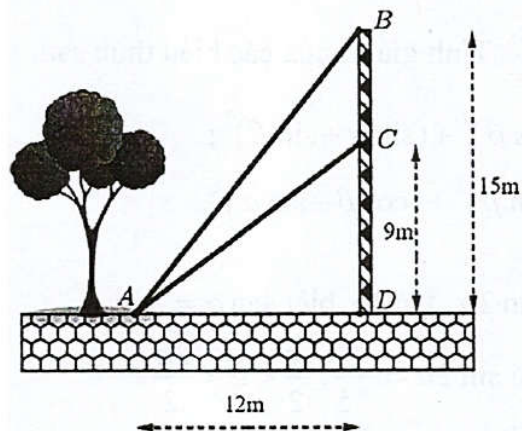
Quãng đường mà người đi xe đạp thực hiện được sau 2,35 phút là:

$$352,5 \cdot 2\pi R = 352,5 \cdot 2\pi \cdot 0,34 = \frac{2397}{10} \pi \approx 753,04 (m).$$



Câu 48. Từ một vị trí A , người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao $15m$, được dựng

vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D . Biết $CD = 9m$ và $AD = 12m$. Tìm góc nhọn $\alpha = \widehat{BAC}$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).



Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}\tan \alpha &= \tan(\widehat{BAD} - \widehat{CAD}) \\ &= \frac{\tan \widehat{BAD} - \tan \widehat{CAD}}{1 + \tan \widehat{BAD} \tan \widehat{CAD}} = \frac{\frac{15}{12} - \frac{9}{12}}{1 + \frac{15}{12} \cdot \frac{9}{12}} = \frac{8}{31}.\end{aligned}$$

Vì vậy $\alpha \approx 14,47^\circ$.

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 49. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kỳ T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

- $A = 3\text{ cm}, \varphi = 0$;
- $A = 3\text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;
- $A = 3\text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Từ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ta có $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Khi đó ta có phương trình li độ là $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$.

a)

- Với $A = 3\text{ cm}$ và $\varphi = 0$ thay vào phương trình li độ $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

- $t = 0$ thì $x = 3 \cos 0 = 3$;
- $t = \frac{T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{2} = 0$;
- $t = \frac{T}{2}$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = 3 \cos \pi = -3$

• $t = \frac{3T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = 3 \cos \frac{3\pi}{2} = 0$;

• $t = T$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = 3 \cos 2\pi = 3$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

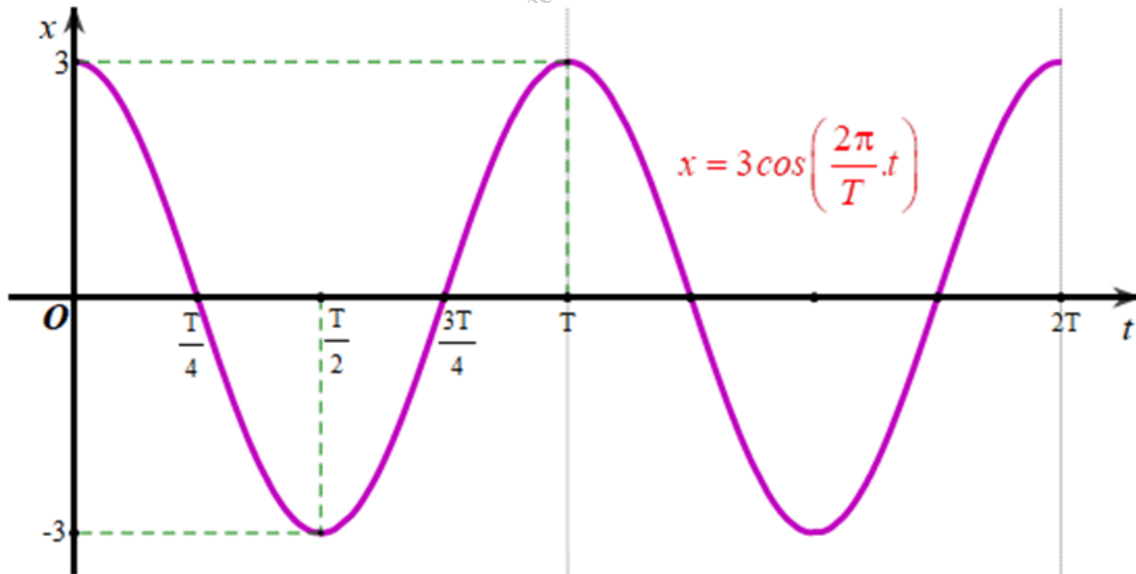
Xét hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ có chu kì là T .

Ta vẽ đồ thị hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ theo bảng sau:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$	3	0	-3	0	3

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T , ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[T; 2T]$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$ như sau:



b) - Với $A = 3 \text{ cm}$ và $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

• $t = 0$ thì $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = 3 \sin 0 = 0$

• $t = \frac{T}{4}$ thì $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = 3 \sin \frac{\pi}{2} = 3$;

$$t = \frac{T}{2} \text{ thì } x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = 3 \sin \pi = 0;$$

$$t = \frac{3T}{4} \text{ thì } x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = 3 \sin \frac{3\pi}{2} = -3;$$

$$t = T \text{ thì } x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = 3 \sin 2\pi = 0.$$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

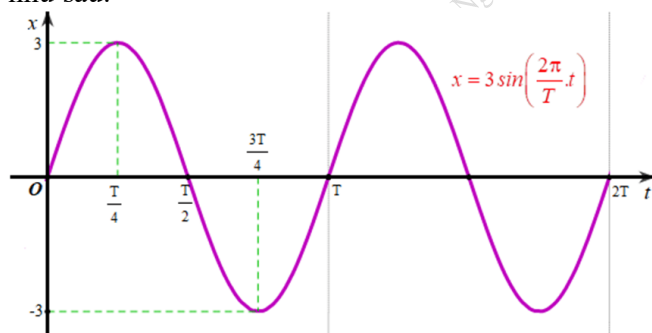
Xét hàm số $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ có chu kì là T .

Ta vẽ đồ thị hàm số $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ theo bảng sau:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$	0	3	0	-3	0

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T , ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[T; 2T]$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$ như sau:



c) - Với $A = 3 \text{ cm}$ và $\varphi = \frac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -3 \cos\left(\pi - \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$t = 0 \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = -3 \sin 0 = 0$$

$$t = \frac{T}{4} \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = -3 \sin \frac{\pi}{2} = -3;$$

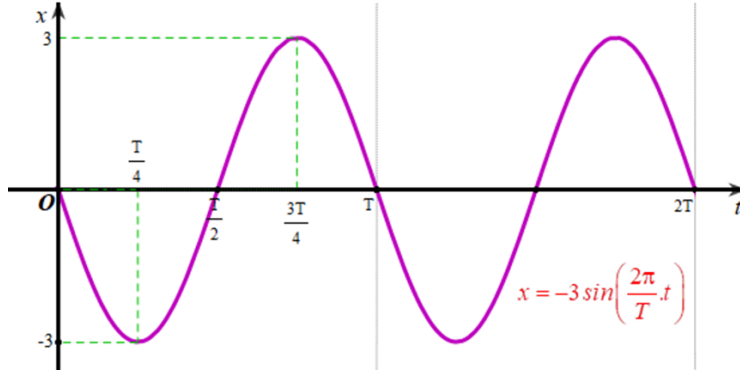
$$t = \frac{T}{2} \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = -3 \sin \pi = 0;$$

$$t = \frac{3T}{4} \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = -3 \sin \frac{3\pi}{2} = 3;$$

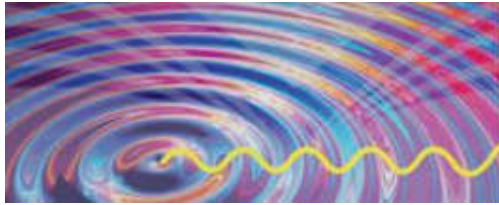
$$t = T \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = -3 \sin 2\pi = 0$$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

Đồ thị hàm số $x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T}, t\right)$ là hình đối xứng với đồ thị hàm số $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ qua trục hoành:



Câu 50. Vì sao mặt cắt của sóng nước trên mặt hồ được gọi là có dạng hình sin?



Lời giải

Vì hình ảnh mặt cắt sóng nước giống với đồ thị của hàm lượng giác $y = \sin x$

Câu 51. Li độ $s(cm)$ của một con lắc đồng hồ theo thời gian t (giây) được cho bởi hàm số $s = 2 \cos \pi t$.

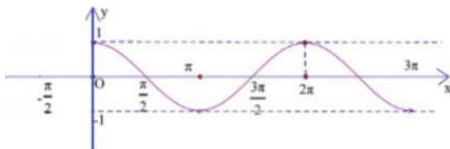
Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 1 giây đầu thì li độ s nằm trong đoạn $[-1; 1](cm)$.



(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Lời giải

Trong 3 giây đầu, $0 \leq t \leq 3$ nên $0 \leq \pi t \leq 3\pi$

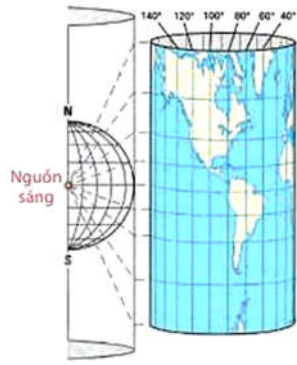


Dựa vào đồ thị hàm số cosin, ta thấy $\cos \pi t = 1$ khi $\pi t = 0$ và $\pi t = 2\pi$

Vậy con lắc có li độ lớn nhất tại các thời điểm $t = 0$ và $t = 2$

Câu 52. Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong Hình 9. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một

điểm có vĩ độ φ° ($-90 < \varphi < 90$) được cho bởi hàm số $y = 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)$ (cm). Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ.



Hình 9

(Theo <https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/>)

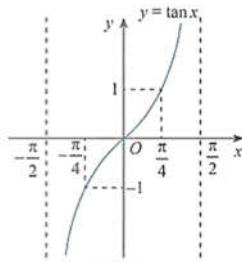
Giải

Vì điểm nằm cách xích đạo không quá 20 cm trên bản đồ nên ta có $-20 \leq y \leq 20$.

$$\text{Khi đó } -20 \leq 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 20 \text{ hay } -1 \leq \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 1.$$

Ta có $-90 < \varphi < 90$ khi và chỉ khi $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{180}\varphi < \frac{\pi}{2}$.

Xét đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (Hình 10).

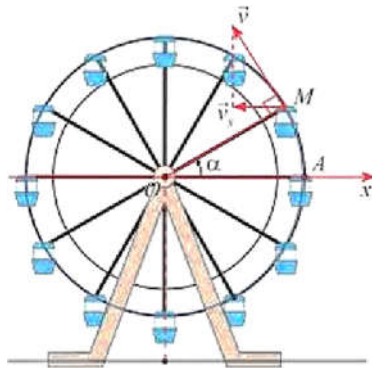


Hình 10

Ta thấy $-1 \leq \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 1$ khi và chỉ khi $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{180}\varphi \leq \frac{\pi}{4}$ hay $-45 \leq \varphi \leq 45$.

Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá 20 cm nằm ở vĩ độ từ -45° đến 45° .

Câu 53. Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha$ (m/s) (Hình 11).



Hình 11

a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .

b) Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

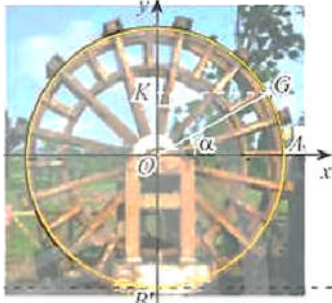
Lời giải

a) Do $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ nên $-0,3 \leq 0,3 \sin \alpha \leq 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3(m)$ và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3(m)$.

b) Dựa vào đồ thị hàm số sin, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), v_x tăng khi $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

Câu 54. Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng $3m$. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



Hình 12

a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng $1,5m$.

Lời giải

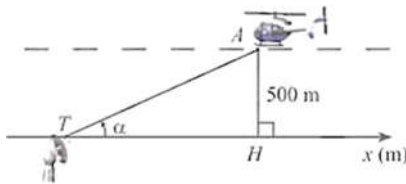
a) $h = 3 + 3 \cdot \sin \alpha$

b) Trong 1 phút đầu, guồng nước quay được 2 vòng. Ta có $0 \leq \alpha \leq 4\pi$

Khi $h = 1,5$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{-1}{2}$.

Khi đó, $\alpha = \frac{7\pi}{6}; \alpha = \frac{11\pi}{6}; \alpha = \frac{19\pi}{6}$ hoặc $\alpha = \frac{23\pi}{6}$

Câu 55. Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao $500m$ theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hình 13

a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .

b) Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào.

Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot \alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \cot \alpha < \sqrt{3}$

Vậy $x_H \in \{-288,7; 866\}$

Câu 56. Giả sử vận tốc v (tính bằng lít/giây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức $v = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3}$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây).

- a) Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.
 b) Biết rằng quá trình hít vào xảy ra khi $v > 0$ và quá trình thở ra xảy ra khi $v < 0$. Trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm nào thì người đó hít vào? người đó thở ra?

Lời giải

a) Thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ chính là một chu kì tuần hoàn của hàm $v(t)$ và là

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \text{ (giây)}$$

Ta có: 1 phút = 60 giây.

Do đó, số chu kì hô hấp trong một phút của người đó là $\frac{60}{6} = 10$ (chu kì).

b) Ta có: $v = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3}$

- $v < 0$ khi $0,85 \sin \frac{\pi t}{3} > 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi t}{3} > 0$

Mà $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, $0 < \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$

- $v < 0$ khi $0,85 \sin \frac{\pi t}{3} < 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi t}{3} < 0$

Mà $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} < 0$

Với $t \in (0; 3)$ ta có $0 < \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$

Với $t \in (3; 5]$ ta có $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} < 0$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm sau 0 giây đến trước 3 giây thì người đó hít vào và khoảng thời điểm sau 3 giây đến 5 giây thì người đó thở ra.

Câu 57. Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$), $\omega t + \varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Dao động điều hoà này có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần).

Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = -5 \cos 4\pi t \text{ (cm)}$.

- a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.
 b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

Lời giải

a) Ta có: $-5 \cos 4\pi t = 5 \cos(4\pi t + \pi)$.

Khi đó vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = 5 \cos(4\pi t + \pi) \text{ (cm)}$ với biên độ dao động là $A = 5 > 0$ và pha ban đầu của dao động là $\varphi = \pi$.

b) Pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây) là $\omega t + \varphi = 4\pi \cdot 2 + \pi = 9\pi$.

Dao động điều hòa có chu kì là $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} = 0.5$, có nghĩa là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần là 0,5 giây. Do đó, trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được $2 : 0,5 = 4$ dao động toàn phần.

Câu 58. Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimet trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

- Tìm chu kì của sóng.
- Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

a) Chu kì của sóng là $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(20) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10} \times 20\right) = 90(\text{cm})$.

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

Câu 59. Độ sâu $h(m)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

(Theo <https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf>)

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Tại thời điểm $t = 2$. Ta có: $h(t) = 0,8 \cdot \cos(0,5 \cdot 2) + 4 = 4,43(m)$

b)

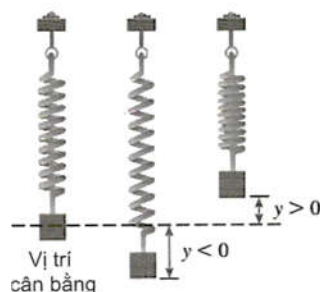
Dựa vào đồ thị hàm số cos:

Những thời điểm tàu không thể hạ thủy là khi $0,8 \cos 0,5t + 4 < 3,6 \Leftrightarrow \cos 0,5t < -0,5$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < 0,5t < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 4,19 < t < 8,38$$

Vậy thời điểm tàu có thể hạ thủy là $(0; 4,19) \cup (8,38; 12)$

Câu 60. Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25 \sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimet còn thời gian t được tính bằng giây.



a) Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.

b) Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.

c) Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.

Lời giải

- a) Hàm số $y = 25 \sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Suy ra chu kỳ dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T = \frac{1}{2}$ giây.
- b) Vì chu kỳ dao động của con lắc là $T = \frac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $f = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hz}$.
- c) Vì phương trình dao động của con lắc là $y = 25 \sin 4\pi t$, nên biên độ dao động của nó là $A = 25 \text{ cm}$. Từ đó, khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $2A = 50 \text{ cm}$.

Câu 61. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài

bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$

ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

- a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.
- b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?
- c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Lời giải

a) - Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có $t = 8 - 6 = 2$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là $S(2) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 2 \right) \right| = 40\sqrt{3} (m)$.

- Tại thời điểm 12 giờ trưa ta có $t = 12 - 6 = 6$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là $S(6) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 6 \right) \right| = 0 (m)$.

Tại thời điểm 12 giờ trưa, Mặt Trời chiếu thẳng đứng từ trên đầu xuống nên toàn bộ toà nhà được chiếu xuống móng của toà nhà.

- Tại thời điểm 2 giờ chiều ta có $t = 14 - 6 = 8$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $S(8) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 8 \right) \right| = \frac{40\sqrt{3}}{3} (m)$.

- Tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối, ta có $t = \left(17 + \frac{3}{4} \right) - 6 = \frac{39}{4}$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối là $S\left(\frac{39}{4}\right) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{39}{4} \right) \right| \approx 59,86 (m)$.

b) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà khi

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right| = 40 \Leftrightarrow \cot \frac{\pi}{12} t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \leq t \leq 12$ nên $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

c) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t \rightarrow 12$, vì vậy $\frac{\pi}{12} t \rightarrow \pi$, do đó $\cot \frac{\pi}{12} t \rightarrow -\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

Câu 62. Hai sóng âm có phương trình lần lượt là

$$f_1(t) = C \sin \omega t \text{ và } f_2(t) = C \sin(\omega t + \alpha).$$

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo ra một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha).$$

- a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng $f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, ở đó A, B là hai hằng số phụ thuộc vào α .
- b) Khi $C = 10$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$.

Lời giải

a) Ta có $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$
 $= C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha) = C \sin \omega t + C(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha)$.
 Vậy $f(t) = C(1 + \cos \alpha) \sin \omega t + C \sin \alpha \cos \omega t = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ với
 $A = C(1 + \cos \alpha), B = C \sin \alpha$.

b) Khi $C = 10$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, ta có

$$f(t) = 10 \sin \omega t + 10 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) = 10 \cdot 2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right).$$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k = 10\sqrt{3}$ và $\varphi = \frac{\pi}{6}$

Câu 63. Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)(cm)$ là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3} \right) (cm) \text{ và } x_2(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{6} \right) (cm).$$

- a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.
- b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Ta có } x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{6} \right) \\ &= 3 \cdot 2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3} \right) + \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{6} \right)}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3} \right) - \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{6} \right)}{2} \\ &= 6 \cos \frac{\frac{\pi}{2} t + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{12} \right). \end{aligned}$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{12} \right)$.

b) Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A = 3\sqrt{2} cm$ và pha ban đầu là $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 64. Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$p(t) = 120 + 15 \cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

- a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.
- b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Lời giải

a) Hàm số $p(t)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $t \pm \frac{1}{75} \in \mathbb{R}$ và

$$p\left(t + \frac{1}{75}\right) = 120 + 15 \cos(150\pi t + 2\pi) = 120 + 15 \cos 150\pi t = p(t).$$

Do đó $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Vì $-1 \leq \cos 150\pi t \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \leq p(t) \leq 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

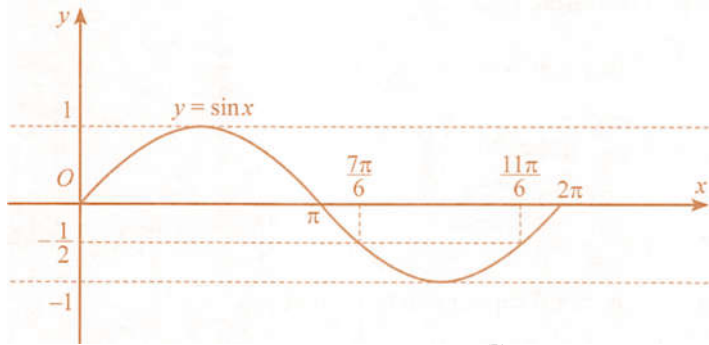
Vậy chỉ số huyết áp của người đó là $135/105$.

Câu 65. Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Trong 4 giây đầu, ta có $0 \leq t \leq 4$, suy ra $0 \leq \frac{\pi}{2}t \leq 2\pi$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2}t$, khi đó $x \in [0; 2\pi]$. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ như sau:



Dựa vào đồ thị trên đoạn $[0; 2\pi]$, ta có:

$$s \leq -\frac{3}{2} \text{ khi } 3 \sin x \leq -\frac{3}{2} \text{ hay } \sin x \leq -\frac{1}{2}, \text{ suy ra } \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}.$$

$$\text{Do đó } \frac{7}{3} \leq t \leq \frac{11}{3}.$$

Câu 66. Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimet, $\omega > 0$. Khi đó, chu kỳ T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

a) $A = 3cm, \varphi = 0$;

b) $A = 3cm, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;

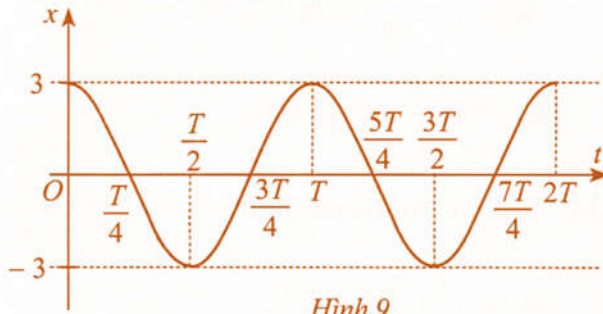
c) $A = 3cm, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

a) Khi $A = 3cm, \varphi = 0$, ta có: $x = 3 \cos(\omega t) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 9:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	3	0	-3	0	3

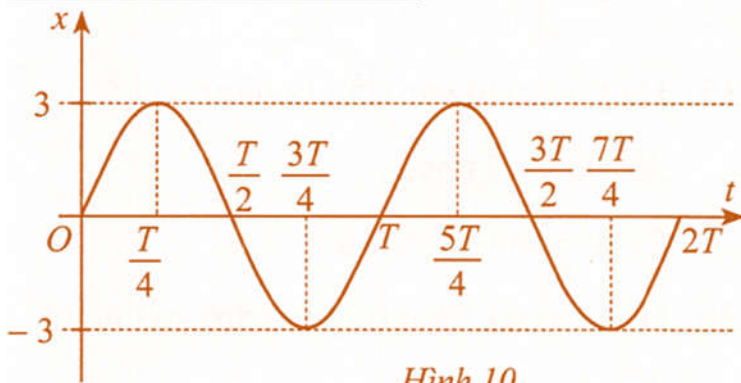


Hình 9

b) Khi $A = 3\text{ cm}$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 10:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	3	0	-3	0

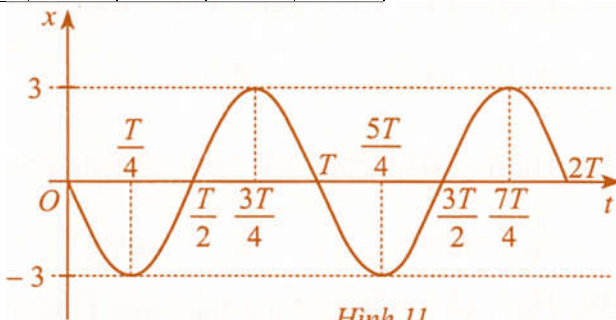


Hình 10

c) Khi $A = 3\text{ cm}$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

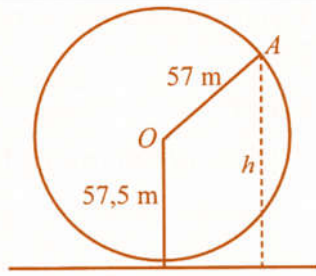
Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 11:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	-3	0	3	0



Hình 11

Câu 67. Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m , trục quay cách mặt đất $57,5\text{ m}$, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách $h(\text{m})$ từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$) (Hình 12).



Hình 12

- a) Tính chu kì của hàm số $h(t)$?
 b) Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?
 c) Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là $86m$?

Lời giải

- a) Vì vòng quay trò chơi quay mỗi vòng hết 15 phút nên chu kì của hàm số $h(t)$ bằng 15 phút.
 b) Khi $t = 0$ thì $h = 57 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 57,5 = 0,5(m)$. Vậy khi đó khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng $0,5m$.
 c) Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ hay $t = 7,5$ (phút); cabin đạt được chiều cao là $86m$ lần đầu tiên khi $t = 5$ (phút).

Câu 68. Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

$$\text{Do } \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] \geq -1 \Rightarrow 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] \geq -3$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \geq 9 \Rightarrow d(t) \geq 9.$$

Vậy thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi:

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow t-80 = 182\left(-\frac{1}{2} + 2k\right) \Leftrightarrow t = 364k - 11, k \in \mathbb{Z}.$$

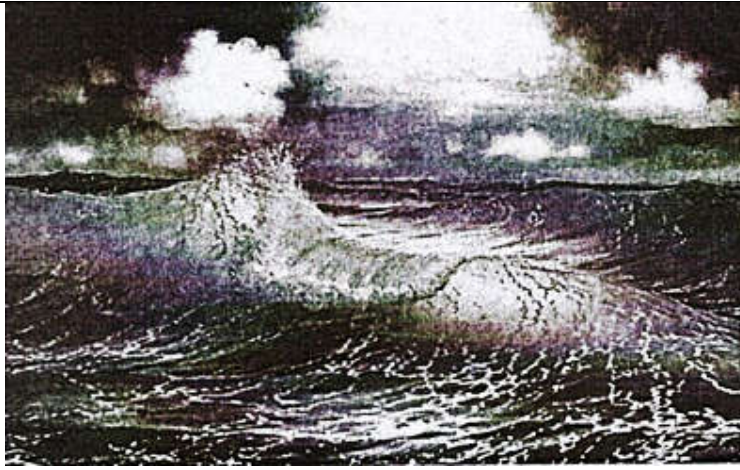
$$\text{Mặt khác: } 0 \leq 364k - 11 \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} \leq k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1 (\text{do } k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow t = 364 - 11 = 353$$

Vậy thành phố T có ít giờ ánh sáng Mặt Trời nhất là 9 giờ khi $t = 353$, tức là vào ngày thứ 353 trong năm.

Câu 69. Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi con sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.

- a) Tìm chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây, 20 giây.
 b) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), hãy tìm thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất. (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

a) Khi $t = 5$, ta có: $h(5) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{8}\right) \approx 69,3(cm)$.

Khi $t = 20$, ta có: $h(20) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 20}{8}\right) = 75(cm)$.

b) Ta có: $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Rightarrow 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 75$ hay $h(t) \leq 75$.

Giá trị lớn nhất của $h(t)$ là 75, khi đó $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{8} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 4 + 16k (k \in \mathbb{Z})$. Vì

$t \in [0; 30] \Rightarrow t \in \{4; 20\}$ (ứng với k bằng 0 và 1).

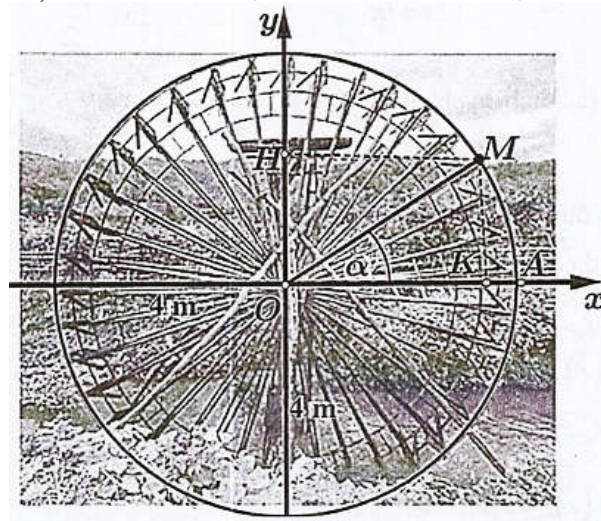
Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì con sóng đạt chiều cao cực đại (là 75cm).

Câu 70. Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là 4m. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (OA, OM)$.

Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

a) Hãy lập hàm số $h(x)$ thể hiện chiều cao của điểm M so với mặt nước theo góc α . Tìm góc α khi điểm M cách mặt nước 6m.

b) Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Lời giải

a) Ta có: $h(x) = 4 + 4 \sin \alpha$. Khi M cách mặt nước 6m thì $h(x) = 6$.

$$\Leftrightarrow 4 + 4 \sin \alpha = 6 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \alpha = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Khi M ở vị trí cao nhất so với mặt nước (tức là $h(x) = 8$) thì $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ (vì chỉ xét 1 vòng quay đầu tiên).

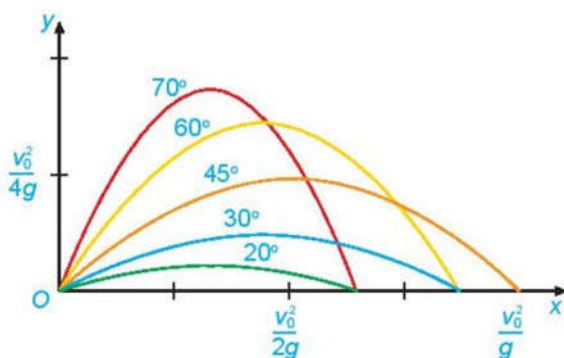
Thời gian thực hiện của guồng nước là: $t = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 40}{2\pi} = 10$ (giây).

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 71. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ đặt tại vị trí khẩu pháo, trục Ox theo hướng khẩu pháo như hình bên. Khi đó, theo Vật lí, ta biết rằng quỹ đạo của quả đạn pháo có dạng đường parabol có phương trình (với g là gia tốc trọng trường) $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$.

Cho $y = 0$ ta được $\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Quả đạn tiếp đất khi $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Ta có $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \leq \frac{v_0^2}{g}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin 2\alpha = 1$.

Giải phương trình $\sin 2\alpha = 1$, ta được $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hay $\alpha = 45^\circ$.

Vậy quả đạn pháo sẽ bay xa nhất khi góc bắn bằng 45° .

Câu 72. Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha).$$



(Theo trang usno.navy.mil).

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

- $F = 0$ (trăng mới);
- $F = 0,25$ (trăng lưỡi liềm);
- $F = 0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);
- $F = 1$ (trăng tròn).

Lời giải

a) Với $F = 0$, ta có $\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Với $F = 0,25$, ta có $\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 0,25 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $\alpha = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Với $F = 0,5$, ta có $\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 0,5 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Với $F = 1$, ta có $\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 73. Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500 \text{ m/s}$ hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn được bắn ra

từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là

gia tốc trọng trường.

- Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m .
- Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Lời giải

Vì $v_0 = 500 \text{ m/s}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ nên ta có phương trình quỹ đạo của quả đạn là

$$y = \frac{-9,8}{2 \times 500^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \text{ hay } y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

a) Quả đạn chạm đất khi $y = 0$, khi đó $y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2500000 \cos^2 \alpha \times \tan \alpha}{49}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2500000 \cos \alpha \sin \alpha}{49}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49}$$

Loại $x = 0$ (đạn pháo chưa được bắn).

Vậy tầm xa mà quả đạn đạt tới là $x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} (m)$.

b) Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo $22000m$ thì $x = 22000m$.

$$\text{Khi đó } \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} = 22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{539}{625}$$

Gọi $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là góc thỏa mãn $\beta = \frac{539}{625}$. Khi đó ta có: $\sin 2\alpha = \sin \beta$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \beta + k2\pi \text{ hoặc } 2\alpha = \pi - \beta + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} + k\pi \text{ hoặc } \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

c) Hàm số $y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$ là một hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có tọa độ đỉnh $I(x_I; y_I)$ là

$$\begin{cases} x_I = -\frac{b}{2a} = -\frac{\tan \alpha}{2 \times \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha}} = \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = f(x_I) = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \right)^2 + \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \tan \alpha \end{cases}$$

Hay $\begin{cases} x_I = \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49} \end{cases}$

Do đó, độ cao lớn nhất của quả đạn là $y_{\max} = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49}$

Ta có $y_{\max} = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49} \leq \frac{625000}{49}$, dấu "=" xảy ra khi $\sin^2 \alpha = 1$ hay $\alpha = 90^\circ$.

Như vậy góc bắn $\alpha = 90^\circ$ thì quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Câu 74. Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hoà là vị trí vật đứng yên, khi đó $x = 0$, ta có

$$2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + k \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

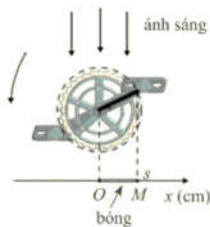
Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0 \leq t \leq 6$ hay

$$0 \leq \frac{2\pi}{15} + k \frac{\pi}{5} \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{90 - 2\pi}{3\pi}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

Câu 75. Trong hình bên, khi bàn đạp xe đạp quay, bóng M của đầu trục quay dao động trên mặt đất quanh điểm O theo phương trình $s = 17 \cos 5\pi t$ với $s(\text{cm})$ là toạ độ của điểm M trên trục Ox và t (giây) là thời gian bàn đạp quay. Làm cách nào để xác định được các thời điểm mà tại đó độ dài bóng OM bằng 10cm ?



Lời giải

Độ dài bóng OM bằng 10cm khi $s = 10$ hoặc $s = -10$.

Khi $s = 10$. Ta có: $17 \cos 5\pi t = 10$

Khi $s = -10$. Ta có: $17 \cos 5\pi t = -10$

Từ đó, ta có thể xác định được các thời điểm t

Câu 76. Quay lại bài toán khởi động, phương trình chuyển động của bóng đầu trục bàn đạp là $x = 17 \cos 5\pi t (\text{cm})$ với t được đo bằng giây. Xác định các thời điểm t mà tại đó độ dài bóng $|x|$ vừa bằng 10cm . Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

Ta có $|x| = 10$

$$\Leftrightarrow |17 \cos 5\pi t| = 10$$

$$\Leftrightarrow 17 \cos 5\pi t = 10 \vee 17 \cos 5\pi t = -10$$

$$\bullet 17 \cos 5\pi t = 10$$

$$\Leftrightarrow 5\pi t = 0,94 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 5\pi t = -0,94 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 0,06 + 0,4k, k \in \mathbb{Z} \vee t = -0,06 + 0,4k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet 17 \cos 5\pi t = -10$$

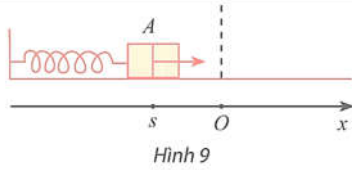
$$\Leftrightarrow 5\pi t = 2,2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 5\pi t = -2,2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 0,14 + 0,4k, k \in \mathbb{Z} \vee t = -0,14 + 0,4k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 77. Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ $s(\text{cm})$ của A trên trục Ox vào thời điểm t

(giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin \left(10t + \frac{\pi}{2} \right)$. Vào các thời điểm nào thì

$$s = -5\sqrt{3} \text{ cm} ?$$



(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Lời giải

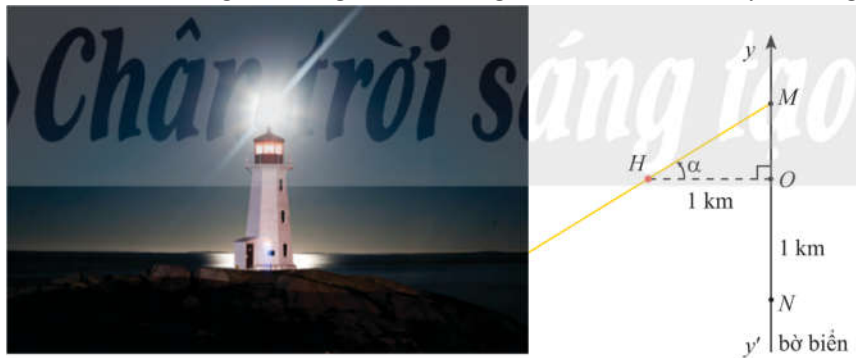
$$\text{Khi: } s = -5\sqrt{3} \text{ thì } 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -5\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 10t + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 78. Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1\text{ km}$. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10} \text{ rad/s}$ và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.



Hình 10

(Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)

a) Ban đầu luồng ánh sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .

b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1(\text{km})$. Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

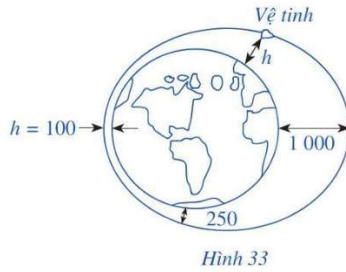
Lời giải

$$\text{a) } y_M = \tan \frac{\pi}{10} t$$

$$\text{b) Khi } y_N = -1 \text{ ta có } \tan \frac{\pi}{10} t = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{10} t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{15}{2} + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là đường elip (Hình 33). Độ cao $h(\text{km})$ của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450 \cos \frac{\pi}{50} t$

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021), trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Tại thời điểm t bằng bao nhiêu thì vệ tinh cách mặt đất $1000 \text{ km}; 250 \text{ km}; 100 \text{ km}$?



Lời giải

- Để vệ tinh cách mặt đất 1000 km thì $550 + 450 \cos \frac{\pi}{50} t = 1000$

$$\Leftrightarrow 450 \cos \frac{\pi}{50} t = 450 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{50} t = k2\pi (k \in \mathbb{Z}, t \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow t = k2\pi \cdot \frac{50}{\pi} = 100k (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tại các thời điểm $t = 100k$ (với $k \in \mathbb{Z}, t \geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 1000 km.

- Để vệ tinh cách mặt đất 250 km thì $550 + 450 \cos \frac{\pi}{50} t = 250$

$$\Leftrightarrow 450 \cos \frac{\pi}{50} t = -300 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{50} t \approx 2,3 + k2\pi \\ \frac{\pi}{50} t \approx -2,3 + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}, t \geq 0)$$

(Dùng máy tính cầm tay (chuyển về chế độ "radian") bấm liên tiếp $\boxed{SHIFT} \boxed{\cos} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{=}$ ta được kết quả gần đúng là 2,3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \approx \frac{115}{\pi} + 100k \\ t \approx -\frac{115}{\pi} + 100k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}, t \geq 0)$$

Vậy tại các thời điểm $t \approx \pm \frac{115}{\pi} + 100k$ (với $k \in \mathbb{Z}, t \geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 250 km.

- Để vệ tinh cách mặt đất 100 km thì $550 + 450 \cos \frac{\pi}{50} t = 100$

$$\Leftrightarrow 450 \cos \frac{\pi}{50} t = -450$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = -1$$

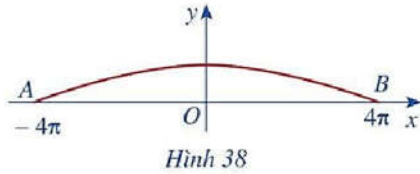
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{50} t = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}, t \geq 0).$$

$$\Leftrightarrow t = 50 + 100k (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tại các thời điểm $t = 50 + 100k$ (với $k \in \mathbb{Z}, t \geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 100 km.

Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải một trong các phương trình có dạng: $\sin x = m, \cos x = m, \tan x = m, \cot x = m$, trong đó x là ẩn số, m là số thực cho trước. Các phương trình đó là các phương trình lượng giác cơ bản.

Câu 79. Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2 \cdot \cos \frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 38.



Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $12,5m$.

Lời giải

Với mỗi điểm M nằm trên mặt cầu, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M .

Xét phương trình: $4,2 \cdot \cos \frac{x}{8} = 3 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{8} = \frac{5}{7}$. Do $x \in [-4\pi; 4\pi]$ nên $\frac{x}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó, ta có: $\cos \frac{x}{8} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{x}{8} \approx \pm 0,775$, suy ra $\left|\frac{x}{8}\right| < 0,78 \Leftrightarrow |x| < 6,24$.

Do sà lan có thể đi qua được gầm cầu nên chiều rộng của khối hàng hoá là: $2|x| < 12,48 < 12,5(m)$.

Câu 80. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$.

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Lời giải

a) Để thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3 \sin \left(\frac{\pi}{182}(t-80) \right) + 12 = 12$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{182}(t-80) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t-80 = 182k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 80 + 182k (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < 80 + 182k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -80 < 182k \leq 285 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{40}{91} < k \leq \frac{285}{182} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0; 1\}$$

Với $k = 0$ thì $t = 80 + 182 \cdot 0 = 80$;

Với $k = 1$ thì $t = 80 + 182 \cdot 1 = 262$

Vậy thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 trong năm.

b) Để thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t - 80 = -91 + 364k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = -11 + 364k (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < -11 + 364k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 11 < 364k \leq 376 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11}{364} < k \leq \frac{94}{91} \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Với $k = 1$ thì $t = -11 + 364 \cdot 1 = 353$.

Vậy thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 353 trong năm.

c) Để thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12 = 15$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t - 80 = 91 + 364k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 171 + 364k (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < 171 + 364k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -171 < 364k \leq 194 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{171}{364} < k \leq \frac{97}{182} \end{cases} \Leftrightarrow k = 0$$

Với $k = 0$ thì $t = 171 + 364 \cdot 0 = 171$.

Vậy thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 171 trong năm.

Câu 81. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời

gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân

bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m; 0m$?



Hình 39

Lời giải

- Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 3 m thì:

$$\left| 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] \right| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 3 \\ 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 1 \\ \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} (2t-1) = k2\pi \\ \frac{\pi}{3} (2t-1) = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-1 = 6k \\ 2t-1 = 3+6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 6k+1 \\ 2t = 6k+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3k + \frac{1}{2} \\ t = 3k + 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots\}$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} t \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{13}{2}; \dots \right\} \\ t \in \{2; 5; 8; \dots\} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right\}.$$

Vậy $t \in \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right)$ (giây) thì khoảng cách h là 3 m.

- Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 0 m thì:

$$\left| 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] \right| = 0 \Leftrightarrow 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} (2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} (2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2t-1 = \frac{3}{2} + 3k$$

$$\Leftrightarrow 2t = \frac{5}{2} + 3k \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k.$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots\}$, khi đó $t \in \left\{ \frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots \right\}.$

Vậy $t \in \left\{ \frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots \right\}$ (giây) thì khoảng cách h là 0 m.

Câu 82. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12$

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021). Tìm t để độ sâu của mực nước là:

- a) $15m$;
- b) $9m$;
- c) $10,5m$.

Lời giải

a) Để độ sâu của mực nước là $15m$ thì:

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 = 15 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = -\frac{6}{\pi} + 12k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq -\frac{6}{\pi} + 12k < 24$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\pi} \leq 12k < 24 + \frac{6}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \leq k < 2 + \frac{1}{2\pi}$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2\}$.

$$\text{Với } k = 1 \text{ thì } t = -\frac{6}{\pi} + 12.1 \approx 10,09 \text{ (giờ);}$$

$$\text{Với } k = 2 \text{ thì } t = -\frac{6}{\pi} + 12.2 \approx 22,09 \text{ (giờ).}$$

Vậy lúc 10,09 giờ và 22,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 15 m.

b) Để độ sâu của mực nước là $9m$ thì:

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 = 9 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = 6 - \frac{6}{\pi} + 12k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq 6 - \frac{6}{\pi} + 12k < 24$$

$$\Leftrightarrow -6 + \frac{6}{\pi} \leq 12k < 18 + \frac{6}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \leq k < \frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi}$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

$$\text{Với } k = 0 \text{ thì } t = 6 - \frac{6}{\pi} + 12.0 \approx 4,09 \text{ (giờ);}$$

$$\text{Với } k = 1 \text{ thì } t = 6 - \frac{6}{\pi} + 12.1 \approx 16,09 \text{ (giờ).}$$

Vậy lúc 4,09 giờ và 16,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 9 m.

c) Để độ sâu của mực nước là $10,5m$ thì:

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 = 10,5$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{6} + 1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi t}{6} + 1 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 - \frac{6}{\pi} + 12k \quad (1) \\ t = -4 - \frac{6}{\pi} + 12k \quad (2) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Do $0 \leq t < 24$ nên (1) ta có: $0 \leq 4 - \frac{6}{\pi} + 12k < 24$

$$\Leftrightarrow -4 + \frac{6}{\pi} \leq 12k < 20 + \frac{6}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi} \leq k < \frac{5}{3} + \frac{1}{2\pi}$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Với $k = 0$ thì $t = 4 - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 0 \approx 2,09$ (giờ);

Với $k = 1$ thì $t = 4 - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 1 \approx 14,09$ (giờ).

- Do $0 \leq t < 24$ nên từ (2) ta có: $0 \leq -4 - \frac{6}{\pi} + 12k < 24$

$$\Leftrightarrow 4 + \frac{6}{\pi} \leq 12k < 28 + \frac{6}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi} \leq k < \frac{7}{3} + \frac{1}{2\pi}$$

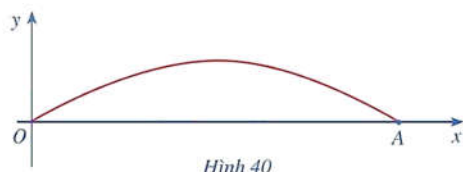
Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2\}$.

Với $k = 1$ thì $t = -4 - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 1 \approx 6,09$ (giờ);

Với $k = 2$ thì $t = -4 - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 2 \approx 18,09$ (giờ).

Vậy lúc 2,09 giờ, 6,09 giờ, 14,09 giờ và 18,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 10,5 m.

Câu 83. Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.



a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA . Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $13,1 \text{ m}$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là $9m$ sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $4,3m$.

Lời giải

a) Hai vị trí O và A là hai vị trí chân cầu, tại hai vị trí này ta có: $y = 0$

$$\Leftrightarrow 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = 9k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Quan sát đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ cắt trục hoành tại điểm O và A liên tiếp nhau với $x \geq 0$.

Xét $k = 0$, ta có $x_1 = 0$;

Xét $k = 1$, ta có $x_2 = 9\pi$.

Mà $x_1 = 0$ nên đây là hoành độ của O , do đó $x_2 = 9\pi$ là hoành độ của điểm A .

Khi đó $OA = 9\pi \approx 28,3$.

Vậy chiều rộng của con sông xấp xỉ $28,3m$.

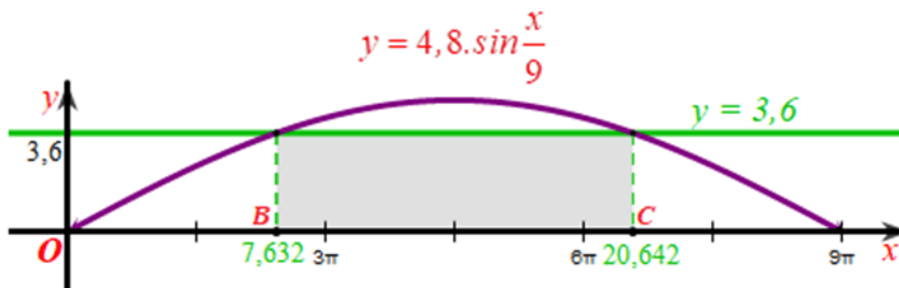
b) Do sà lan có độ cao $3,6m$ so với mực nước sông nên khi sà lan đi qua gầm cầu thì ứng với $y = 3,6$.

$$\Leftrightarrow 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9} = 3,6 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} \approx 0,848 + k2\pi \\ \frac{x}{9} \approx \pi - 0,848 + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 7,632 + 18k\pi \\ x \approx 9\pi - 7,632 + 18k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Xét $k = 0$, ta có $x_1 \approx 7,632$; $x_2 \approx 20,642$.

Ta biểu diễn các giá trị x vừa tìm được trên hệ trục tọa độ vẽ đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ như sau:

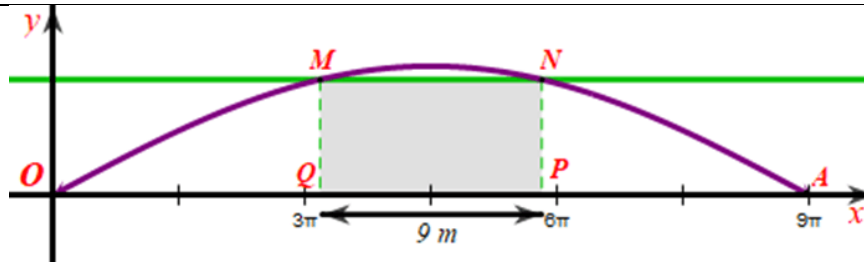


Khi đó để sà lan có thể đi qua được gầm cầu thì khối hàng hóa có độ cao $3,6m$ phải có chiều rộng nhỏ hơn độ dài đoạn thẳng BC trên hình vẽ.

Mà $BC \approx 20,642 - 7,632 = 13,01(m) < 13,1(m)$.

Vậy chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $13,1m$.

c) Giả sử sà lan chở khối hàng được mô tả bởi hình chữ nhật $MNPQ$:



Khi đó $QP = 9$; $OA = 28,3$ và $OQ = PA$.

$$\text{Mà } OQ + QP + PA = OA \Rightarrow OQ + 9 + OQ \approx 28,3 \Rightarrow OQ \approx 9,65$$

$$\text{Khi đó } y_M = 4,8 \cdot \sin \frac{x_M}{9} = 4,8 \cdot \sin \frac{OQ}{9} \approx 4,8 \cdot \sin \frac{9,65}{9} \approx 4,22(m) < 4,3(m).$$

Vậy để sà lan có thể đi qua được gầm cầu thì chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $4,3\text{ m}$.

Câu 84. Cho vận tốc $v(\text{cm/s})$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức

$$v = -3 \sin \left(1,5t + \frac{\pi}{3} \right).$$

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
- Vận tốc con lắc bằng $1,5\text{ cm/s}$.

Lời giải

$$\text{a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất khi } \sin \left(1,5t + \frac{\pi}{3} \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

b) Khi $v = 1,5$ Ta có:

$$\sin \left(1,5t + \frac{\pi}{3} \right) = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{-\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

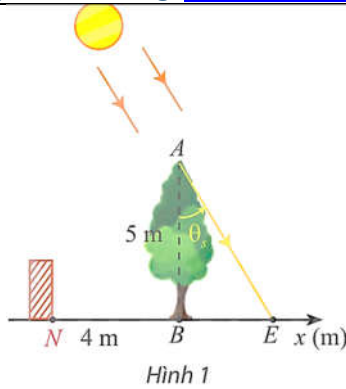
Câu 85. Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m . Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_s = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày

$$\text{theo công thức } \theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t-12)\text{rad}$$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

(Theo <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle>)

- Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t .
- Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với tọa độ là $x_N = -4(m)$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Lời giải

a) $x_E = 5 \tan \frac{\pi}{12} (t - 12)$

b) Do $6 < t < 18$ nên $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{12} (t - 12) < \frac{\pi}{2}$

Dựa vào đồ thị hàm tan:

Bóng cây phủ qua tường rào khi $x_E < -4 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{12} (t - 12) < \frac{-4}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12} (t - 12) < -0,67 \Leftrightarrow t < 9,4$

Vậy thời điểm bóng cây phủ qua hàng rào là $6 < t < 9,4$

Câu 86. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $p(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$,

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

a) Tìm chu kỳ của hàm số $p(t)$.

b) Tìm số nhịp tim mỗi phút.

c) Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Lời giải

a) Chu kỳ của hàm số $p(t)$ là $T = \frac{2\pi}{160\pi} = \frac{1}{80}$

b) Thời gian giữa hai lần tim đập là $T = \frac{1}{80}$ (phút)

Số nhịp tim mỗi phút là $1 : \frac{1}{80} = 80$ nhịp.

c) Ta có: $-1 \leq \sin(160\pi t) \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

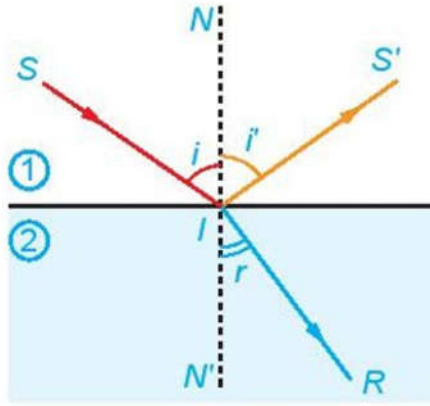
$\Leftrightarrow -25 \leq 25 \sin(160\pi t) \leq 25$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 115 + (-25) \leq 115 + 25 \sin(160\pi t) \leq 115 + 25$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow 90 \leq p(t) \leq 140$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

Do đó, chỉ số huyết áp của người này là $\frac{140}{90}$ và chỉ số huyết áp của người này cao hơn mức bình thường.

Câu 87. Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình.



Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$.

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Lời giải

Theo bài ra ta có: $i = 50^\circ$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1,33$, thay vào $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$ ta được:

$$\frac{\sin 50^\circ}{\sin r} = \frac{1,33}{1} \quad (DKXD: \sin r \neq 0)$$

$$\Rightarrow \sin r = \frac{\sin 50^\circ}{1,33}$$

$$\Leftrightarrow \sin r \approx 0,57597 \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$\Leftrightarrow \sin r \approx \sin(35^\circ 10')$$

$$\Leftrightarrow r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \vee r \approx 180^\circ - 35^\circ 10' + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

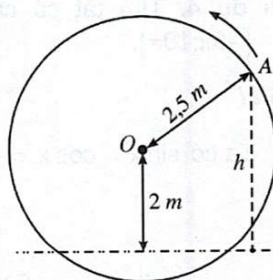
$$\Leftrightarrow r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \vee r \approx 144^\circ 50' + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $0^\circ < r < 90^\circ$ nên $r \approx 35^\circ 10'$.

Vậy góc khúc xạ $r \approx 35^\circ 10'$.

Câu 88. Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right)$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

a) Khi nào chiếc gầu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

Lời giải

a) Vì $-1 \leq \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 1$ nên $-2,5 \leq 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 2,5$ và do đó ta có

$$-0,5 = 2 - 2,5 \leq 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 2 + 2,5 = 4,5 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, gầu ở vị trí cao nhất khi $\sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy gầu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ phút.

Tương tự, gầu ở vị trí thấp nhất khi

$$\sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy gầu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm $0, 1, 2, 3, \dots$ phút.

b) Gầu cách mặt nước $2m$ khi $2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = 2$

$$\Leftrightarrow \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4}\right) = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy chiếc gầu cách mặt nước $2m$ lần đầu tiên tại thời điểm $x = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 89. Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right), t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin \left(\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right) \leq 1$ nên $-2,83 \leq 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right) \leq 2,83$, do đó

$$9,17 = 12 - 2,83 \leq 12 + 2,83 \sin \left(\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right) \leq 12 + 2,83 = 14,83 \forall t \in \mathbb{R}.$$

a) Ngày thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right] = -1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365} (t - 80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{45}{4} + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 1$, suy ra $t = -\frac{45}{4} + 365 = 353,75$. Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm, tức

là khoảng ngày 20 tháng 12 thì thành phố A sẽ có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất.

b) Ngày thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right] = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365} (t - 80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 171,25 + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$, suy ra $t = 171,25$. Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 6 thì thành phố A sẽ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

c) Thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu

$$12 + 2,83 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right] = 10 \Leftrightarrow \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right] = -\frac{200}{283} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{365} (t - 80) \approx -0,78 + k2\pi \\ \frac{2\pi}{365} (t - 80) \approx 3,93 + k2\pi \end{cases}$$

Từ đó ta được
$$\begin{cases} t \approx 34,69 + 365k \\ t \approx 308,30 + 365k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$
 Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$ suy ra $t \approx 34,69$ hoặc $t \approx 308,30$. Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm, tức là ngày 3 tháng 2 và ngày thứ 308 của năm, tức là ngày 4 tháng 11 thành phố A sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.

Câu 90. Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100mmHg.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120mmHg.

Lời giải

a) Huyết áp là 100mmHg khi

$$P(t) = 100 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3k}{7} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3k}{7} < 1 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{7}{3} \Leftrightarrow k \in \{1; 2\} \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 2 lần huyết áp là 100 mmHg.

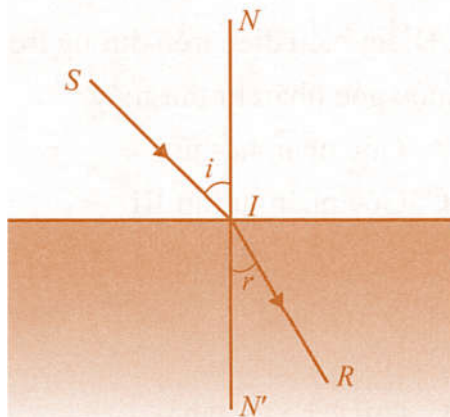
b) Huyết áp là 120mmHg khi

$$P(t) = 120 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 120 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0 \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 1 lần huyết áp là 120 mmHg.

Câu 91. Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30° . Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu?



Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin r} \text{ nên } \sin r = \frac{\sin 60^\circ \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{4}. \text{ Suy ra } r = 37,76^\circ.$$

Câu 92. Một quả bóng được ném xiên một góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) từ mặt đất với tốc độ $v_0(m/s)$. Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

- Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu $10m/s$ và góc ném là 30° so với phương ngang.
- Nếu tốc độ ban đầu của bóng là $10m/s$ thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là $5m$?

Lời giải

- $d = 5\sqrt{3} \approx 8,66(m)$;
- $d = 5 \Leftrightarrow \frac{10^2 \cdot \sin 2\alpha}{10} = 5 \Leftrightarrow 10 \sin 2\alpha = 5 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$
 $\Leftrightarrow 2\alpha = 30^\circ \text{ hoặc } 2\alpha = 150^\circ \Leftrightarrow \alpha = 15^\circ \text{ hoặc } \alpha = 75^\circ.$

Câu 93. Chiều cao $h(m)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

- Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?
- Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao $40m$ lần đầu tiên?

Lời giải

- $50m$;
- $12,5$ giây.

Câu 94. Vận tốc $v_1(cm/s)$ của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc $v_2(cm/s)$ của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

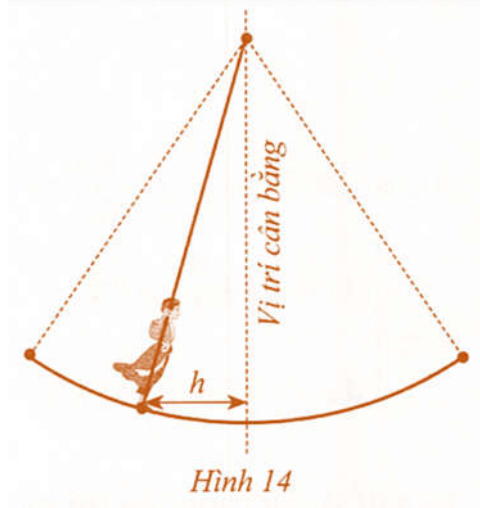
$$v_1(t) = -4 \cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ và } v_2(t) = 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right). \text{ Xác định các thời điểm } t \text{ mà tại đó:}$$

- Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng $2cm/s$;
- Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

Lời giải

- $t = \frac{5\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$ và $t = \frac{13\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$;
- $t = \frac{19\pi}{16} + k\frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$ và $t = \frac{13\pi}{32} + k\frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{N}.$

Câu 95. Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 14). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian $t(s)$ (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m; 0m$?



Giải

Do $-1 \leq \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 1$ nên $-3 \leq 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] \leq 3$ hay $-3 \leq d \leq 3$. Do đó, $0 \leq |d| \leq 3$.

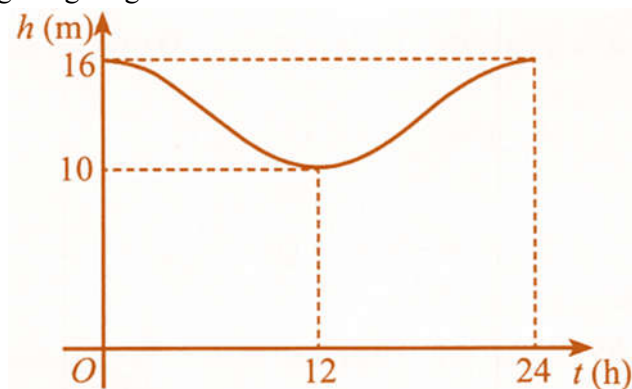
Vậy $h=3$ khi $|d|=3$ hay $\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0; h=0$ khi $|d|=0$ hay

$\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow t = \frac{5+6k}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$.

Câu 96. Mức nước cao nhất tại một cảng biển là $16m$ khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mức nước thấp nhất là $10m$. Đồ thị ở Hình 15 mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm.



Hình 15

Biết chiều cao của mực nước $h(m)$ theo thời gian $t(h)$ ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức

$h = m + a \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a .

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là $11,5m$.

Lời giải

a) Chiều cao của mực nước cao nhất là $m+a$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=1$ và thấp nhất bằng $m-a$ khi

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-1. \text{ Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} m+a=16 \\ m-a=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13 \\ a=3. \end{cases}$$

b) Từ câu a ta có công thức: $h=13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Do chiều cao của mực nước là $11,5m$ nên

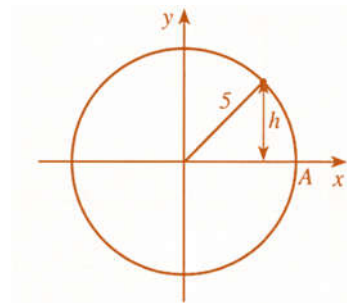
$$13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12}t=\frac{2\pi}{3}+k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t=8+24k \\ t=-8+24k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có $t=8$ (h) và $t=16$ (h).

Câu 97. Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính $5cm$. Khoảng cách $h(cm)$ từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h=|y|$, trong đó

$y=a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây ($t \geq 0$) và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16).



Hình 16

a) Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?

b) Tìm giá trị của a .

c) Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h=2,5cm$ và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.

Lời giải

a) Xét $h=0$ hay $a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)=0 \Leftrightarrow t=5k$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq 0$.

Ta nhận thấy, từ thời điểm ban đầu, cứ sau 5 giây, khoảng cách từ chất điểm đến trục hoành lại bằng 0. Suy ra sau mỗi 5 giây, chất điểm chuyển động được nửa vòng. Vậy chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây.

b) Do chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây nên khi $t=2,5$ giây thì chất điểm chuyển động được một phần tư vòng theo chiều dương, suy ra tại $t=2,5$ ta có

$$y=|y|=h=5 \Leftrightarrow a\sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{5}{2}\right)=5 \Leftrightarrow a=5.$$

c) Từ kết quả câu b, ta có: $y=5\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$. Do $h=2,5cm$ và chất điểm nằm ở dưới trục hoành nên $y=-2,5$. Với $y=-2,5$, ta có:

$$5 \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = -2,5 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{5}t = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{\pi}{5}t = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-5+60k}{6} \\ t = \frac{35+60k}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Với vòng quay đầu tiên thì $0 \leq t \leq 10$, do đó $t = \frac{35}{6}, t = \frac{55}{6}$.

Vậy tại thời điểm $t = \frac{35}{6}$ giây, $t = \frac{55}{6}$ giây thì chất điểm ở vị trí có $h = 2,5 \text{ cm}$ và nằm ở dưới trục hoành.

Câu 98. Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên.

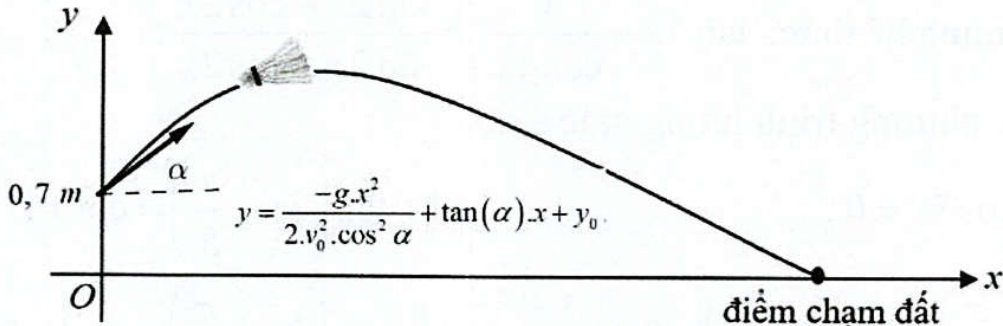
Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , chọn điểm có tọa độ $(O; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của

cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là: $y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$; trong đó:

- g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8 \text{ m/s}^2$);
- α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất);
- v_0 là vận tốc ban đầu của cầu;
- y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.

Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68 \text{ m}$. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? (biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,7 \text{ m}$ so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là 8 m/s , bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



Lời giải

Với $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, vận tốc ban đầu $v_0 = 8 \text{ m/s}$, phương trình quỹ đạo của cầu:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

Khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là $6,68 \text{ m}$; nghĩa là $x = 6,68 \text{ m}$.

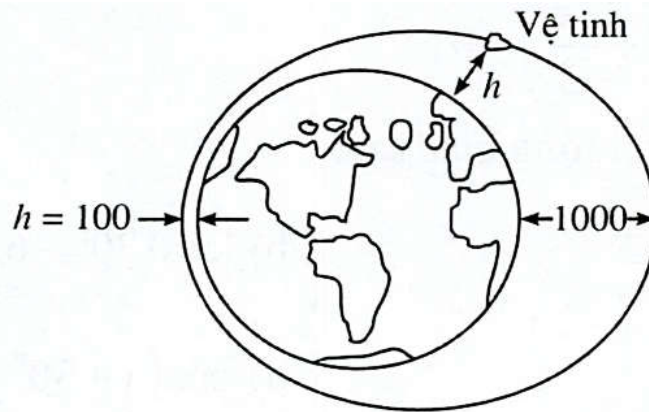
Ta có:
$$\frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128} (1 + \tan^2 \alpha) + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha \approx 1,378 \\ \tan \alpha \approx 0,576 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \approx 54,04^\circ \\ \alpha \approx 29,97^\circ \end{cases}$$

Vậy người chơi đã phát cầu một góc gần 54° hoặc gần 30° so với mặt đất.

Câu 99. Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao h (tính bằng kilômét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức

$h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta

cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó?

Lời giải

Ta có phương trình: $550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t = 250 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = -\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{50} t \approx 2,3 + k2\pi \\ \frac{\pi}{50} t \approx -2,3 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 36,61 + k100 \\ t \approx -36,61 + k100 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, tại thời điểm $t \approx 36,61$ (phút) thì ta có thể thực hiện thí nghiệm đó.

Câu 100. Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = -2 \sin \left(\frac{\pi t}{6} \right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định các thời điểm vật có li độ bằng 1 cm .

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hoà là vị trí vật đứng yên, khi đó $x = 0$, ta có:

$$-2 \sin \left(\frac{\pi t}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} = k\pi \Leftrightarrow t = 6k.$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 10 giây, tức là $0 \leq t \leq 10$ hay $0 \leq 6k \leq 10 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{10}{6}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 10 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 2 lần.

Câu 101. Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức $h = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + 8$.

Tìm t để độ sâu của mực nước là:

- a) 8 m ;
- b) $6,5 \text{ m}$.

Lời giải

a) Ta có: $h = 8 \Leftrightarrow 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 8 = 8 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

$$\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = 1 + 6k, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy vào lúc $1h, 7h, 13h, 19h$ thì độ sâu của mực nước là $8m$.

b) Ta có: $h = 6,5 \Leftrightarrow 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 8 = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} + 2k \\ \frac{t}{6} + \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} + 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 + 12k \\ t = -6 + 12k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $0 \leq t < 24$ nên $0 \leq 2 + 12k < 24 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k < \frac{11}{6} \Leftrightarrow k \in \{0; 1\} \Rightarrow t = 2h; 14h$

Mà $0 \leq t < 24$ nên $0 \leq -6 + 12k < 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq k < \frac{5}{2} \Leftrightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow t = 6h; 18h$

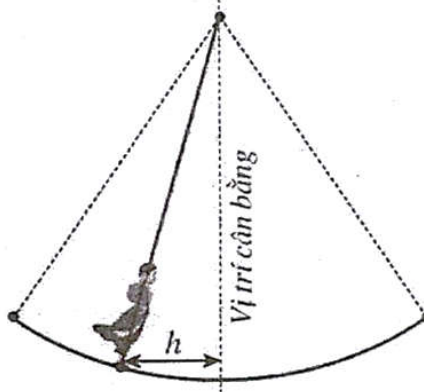
Vậy vào lúc $2h, 6h, 14h, 18h$ thì độ sâu của mực nước là $6,5m$.

Câu 102. Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$; trong đó t là

thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng.

a) Trong 10 giây đầu tiên, thời điểm nào vật ở xa vị trí cân bằng nhất?

b) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?



Lời giải

a) Ta có $h = |x| = \left|1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)\right| \leq 1,5$.

Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là $h = 1,5m$.

Khi đó $\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t\pi}{4} = k2\pi \\ \frac{t\pi}{4} = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8k \\ t = 4 + 8k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy trong 10 giây đầu tiên thì vật ở xa vị trí cân bằng nhất tại các thời điểm $t = 0, t = 4, t = 8$ (giây).

b) Khi vật ở vị trí cân bằng thì $x = 0 \Leftrightarrow 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{t\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 2 + 4k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật ở vị trí cân bằng tại các thời điểm $t = 2, t = 6, t = 10, t = 14, t = 18$ (giây); tức là có 5 lần vật qua vị trí cân bằng.

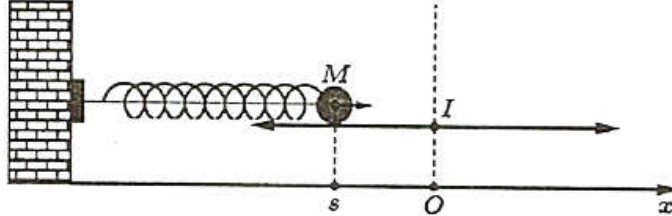
Câu 103. Một vật M được gắn vào đầu lò xo và dao động quanh vị trí cân bằng I , biết rằng O là hình chiếu vuông góc của I trên trục Ox , tọa độ điểm M trên Ox tại thời điểm t (giây) là đại lượng s (đơn vị:

cm) được tính bởi công thức $s = 8,6 \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right)$

a) Tìm khoảng cách từ vật đến vị trí cân bằng tại thời điểm $t = 3$ giây.

b) Thời điểm nào trong khoảng 2 giây đầu tiên thì $s = 4,3 cm$?

(Các kết quả gần đúng trong bài được làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

a) Khi $t = 3$ thì $s = 8,6 \sin\left(8.3 + \frac{\pi}{2}\right) \approx 3,65(cm)$.

Vậy vật cách vị trí cân bằng một khoảng xấp xỉ $3,65 cm$.

b) Khi $s = 4,3$ thì $8,6 \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) = 4,3 \Rightarrow \sin\left(8t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 8t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4} \\ t = \frac{\pi}{24} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $t \in (0; 2)$ nên có 5 giá trị t thỏa mãn là: $t_1 \approx 0,65s; t_2 \approx 1,44s; t_3 \approx 0,13s; t_4 \approx 0,92s; t_5 \approx 1,7s$.

CHỦ ĐỀ 2. Dãy số - Cấp số cộng - Cấp số nhân

- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

NỘI DUNG CÂU HỎI

Dãy số

Câu 1. Một vật chuyển động đều với vận tốc $20m/s$. Hãy viết các số chỉ quãng đường (đơn vị: mét) vật chuyển động được lần lượt trong thời gian 1 giây, 2 giây, 3 giây, 4 giây, 5 giây theo hàng ngang.

Câu 2. Năm 2020, số dân của một thành phố trực thuộc tỉnh là khoảng 500 nghìn người. Người ta ước tính rằng số dân của thành phố đó sẽ tăng trưởng với tốc độ khoảng 2% mỗi năm. Khi đó số dân P_n (nghìn người) của thành phố đó sau n năm, kể từ năm 2020, được tính bằng công thức $P_n = 500(1 + 0,02)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2030, số dân của thành phố đó là khoảng bao nhiêu nghìn người?

Câu 3. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng.

Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25; n \geq 2.$$

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Câu 4. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

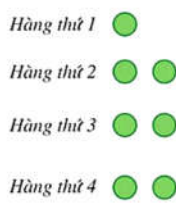
Câu 5. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

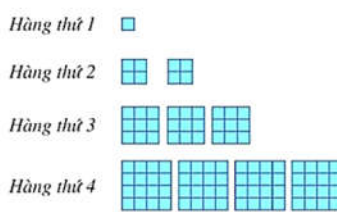
a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

Câu 6. a) Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ trong Hình 1. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n) .



Hình 1



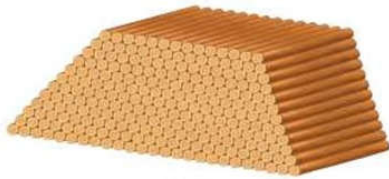
Hình 2

b) Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong Hình 2 (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n) .

Câu 7. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

- Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.
- Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.
- Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

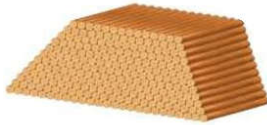
Câu 8. Một chõng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 1). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:



Hình 1

- Viết công thức số hạng tổng quát u_n .
- Viết hệ thức truy hồi.

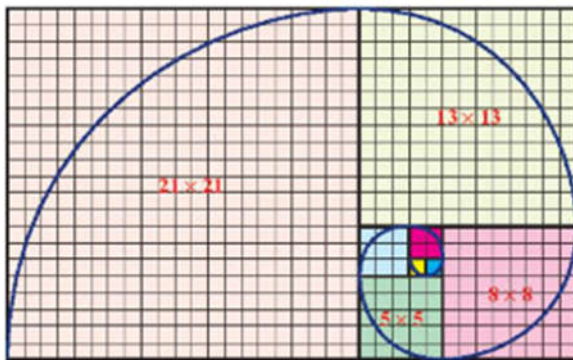
Câu 9. Một chõng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 2).



Hình 2

- Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chõng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.
- Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chõng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

Câu 10. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình 3. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Hình 3

Câu 11. Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

- Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3 . Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n .
- Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Câu 12. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Câu 13. Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n \text{ (tỉ đồng)}$$

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

Câu 14. Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200 \left(1 + \frac{0,03}{4} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Câu 15. Vi khuẩn E.Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E.Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E.Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể?

Câu 16. Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.

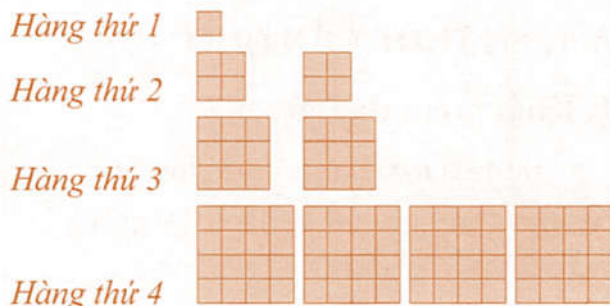
b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Câu 17. Một con chó con nặng 0,4 kg khi mới sinh và sau mỗi tuần tuổi khối lượng của nó tăng thêm 24%. Giả sử u_n (kg) là khối lượng của con chó vào cuối tuần tuổi thứ n .

a) Viết lần lượt các công thức tính u_2, u_3 . Từ đó dự đoán công thức của u_n .

b) Con chó nặng bao nhiêu kilôgam khi được sáu tuần tuổi?

Câu 18. Gọi u_n là tổng diện tích các hình vuông có ở hàng thứ n trong Hình (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích).



a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4 .

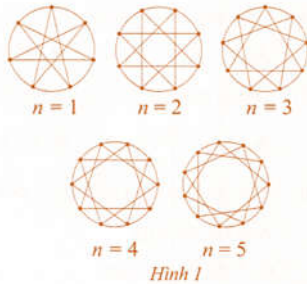
b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Câu 19. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

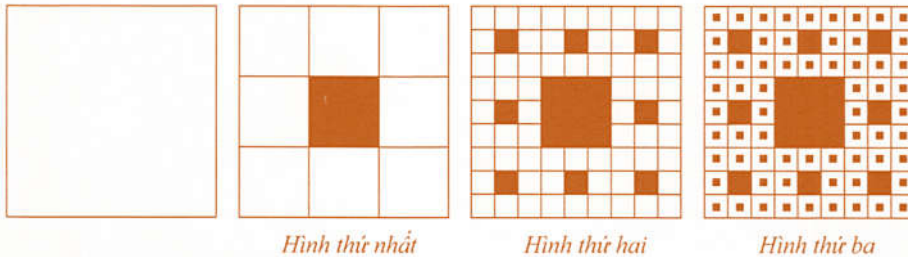
- b) Tính số tiền chi có trong ngân hàng sau 3 tháng.
c) Dự đoán công thức của P_n .

Câu 20. Với mỗi số nguyên dương n , lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình 1. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n) .



Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n .

Câu 21. Một hình vuông có diện tích bằng 1 đơn vị diện tích. Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại.



- a) Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba.
b) Dự đoán công thức tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n .

Câu 22. Bà Hoa gửi vào một ngân hàng số tiền 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm theo hình thức lãi kép, kì hạn 1 tháng. Số tiền (triệu đồng) của bà Hoa sau n tháng được tính theo công thức

$$T_n = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12} \right)^n.$$

Hỏi số tiền bà Hoa nhận được sau 1 tháng, 2 tháng, và 14 tháng là bao nhiêu?

Câu 23. Vào đầu mỗi tháng, ông An đều gửi vào ngân hàng số tiền cố định 30 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% /tháng.

- a) Tính số tiền ông An có được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai và sau tháng thứ ba.
b) Giả sử (T_n) là dãy số thể hiện số tiền của ông An có được sau tháng thứ n . Dự đoán công thức cho T_n .

CẤP SỐ CỘNG

Câu 24. Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Tính tổng số ghế của nhà hát đó.

Câu 25. Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

Câu 26. Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Câu 27. Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Câu 28. Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Câu 29. Ruộng bậc thang là một hình thức canh tác có nhiều ở khu vực Tây Bắc và Đông Bắc Việt Nam. Hình ảnh ruộng bậc thang thể hiện nét đẹp văn hoá, là công trình nghệ thuật độc đáo của đồng bào vùng cao phía Bắc. Ruộng bậc thang ở một số nơi đã trở thành những địa chỉ tham quan du lịch đầy hấp dẫn của du khách trong nước và quốc tế.



Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất nằm ở độ cao 1250m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,2m.

Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 10 có độ cao là bao nhiêu so với mực nước biển?

Câu 30. Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế,... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70800000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Câu 31. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức: $x_n = 75 + 5(n - 1)$.

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Câu 32. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

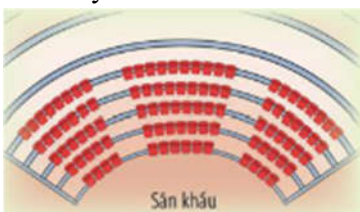
Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

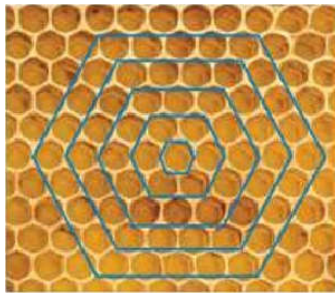
Câu 33. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Tính từ sân khấu, số lượng ghế của các hàng tăng dần như trong hình minh hoạ dưới đây.



Bạn hãy đếm và nêu nhận xét về số ghế của năm hàng đầu tiên.

Làm thế nào để biết được số ghế của một hàng bất kì và tính được tổng số ghế có trong rạp hát đó?

Câu 34. Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ ba, các ong thợ sẽ tạo ra 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục (Hình 2). Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có, tìm công sai của cấp số cộng này.



Hình 2

Câu 35. Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế,... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng (Hình 4).



Hình 4

- Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.
- Tính tổng số ghế có trong rạp.

Câu 36. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là $45\text{ cm}, 43\text{ cm}, 41\text{ cm}, \dots, 31\text{ cm}$.



Hình 5

- Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
- Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

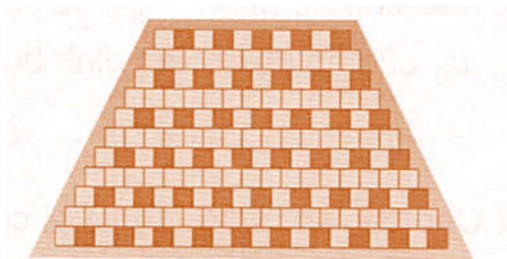
Câu 37. Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: $16; 48; 80; 112; 144; \dots$ (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

- Tính công sai của cấp số cộng trên.
- Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Câu 38. Ở một loài thực vật lưỡng bội, tình trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm . Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene $aabb$ có chiều cao 100 cm . Hỏi cây cao nhất với kiểu gene $AABB$ có chiều cao bao nhiêu?

Câu 39. Một hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật như vậy. Có tất cả 27 hàng ghế. Hỏi hội trường đó có bao nhiêu ghế?

Câu 40. Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng $2,4\text{ m}$ ở đáy và rộng $1,2\text{ m}$ ở đỉnh (hình vẽ bên).



Các viên gạch hình vuông có kích thước $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?

Câu 41. Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

- Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?
- Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

Câu 42. Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chỗ ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

Câu 43. Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la?

Câu 44. Bác Hưng quyết định tham gia một chương trình bơi lội để duy trì sức khỏe. Bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó.

- Tìm công thức truy hồi cho số phút T_n mà bác ấy bơi vào ngày thứ n của chương trình.
- Tìm sáu số hạng đầu của dãy số T_n .
- Tìm công thức tổng quát của dãy số (T_n) .
- Bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ bao nhiêu của chương trình?
- Tính tổng thời gian bác Hưng bơi sau 30 ngày đầu của chương trình.

Câu 45. Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao 950 m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là $1,5\text{ m}$. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?



Câu 46. Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau: Năm thứ nhất: 240 triệu;

Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Câu 47. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Câu 48. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

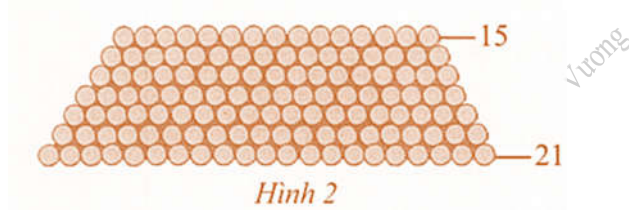
Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em nên chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Câu 49. Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

Câu 50. Các khúc gỗ được xếp như Hình 2. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc,..., lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.



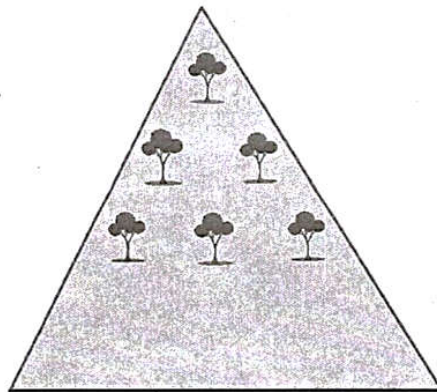
Câu 51. Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1,3,5,... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp như hình bên). Hỏi hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?





Câu 53. Trong một khán phòng có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liên sau nhiều hơn dãy trước đó 4 ghế, hỏi khán phòng đó có tất cả bao nhiêu ghế?

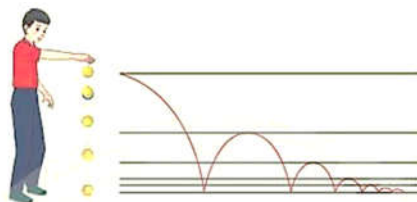
Câu 54. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác theo cách sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, và cứ như thế mỗi hàng sau sẽ có nhiều hơn hàng ngay trước đó 1 cây. Hỏi tổng số hàng cây trong khu vườn bằng bao nhiêu?



Câu 55. Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá của mét khoan đầu tiên là 100 nghìn đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30 nghìn đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người cần khoan một giếng sâu 20m để lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bao nhiêu nghìn đồng?

CẤP SỐ NHÂN

Câu 56. Một quả bóng rơi từ một vị trí có độ cao 120cm . Khi chạm đất, nó luôn nảy lên độ cao bằng một nửa độ cao của lần rơi trước đó.



Gọi $u_1 = 120$ là độ cao của lần rơi đầu tiên và $u_2; u_3; \dots; u_n; \dots$ là độ cao của các lần rơi kế tiếp. Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy (u_n) và tìm điểm đặc biệt của dãy số đó.

Câu 57. Một công ty tuyển một chuyên gia về công nghệ thông tin với mức lương năm đầu là 240 triệu đồng và cam kết sẽ tăng thêm 5% lương mỗi năm so với năm liền trước đó. Tính tổng số lương mà chuyên gia đó nhận được sau khi làm việc cho công ty 10 năm (làm tròn đến triệu đồng).

Câu 58. Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Câu 59. Một nhà máy tuyển thêm công nhân vào làm việc trong thời hạn ba năm và đưa ra hai phương án lựa chọn về lương như sau:

- Phương án 1: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 500 nghìn đồng.
 - Phương án 2: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 5%.
- Với phương án nào thì tổng lương nhận được sau ba năm làm việc của người công nhân sẽ lớn hơn?

Câu 60. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Câu 61. Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Câu 62. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kế trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

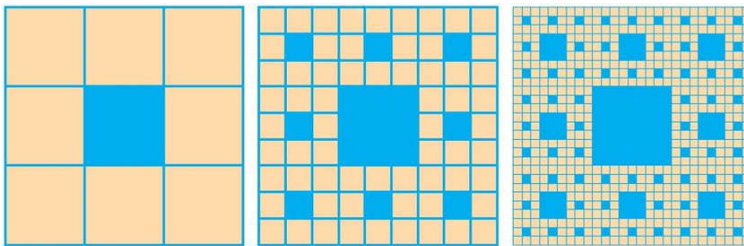
Câu 63. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Câu 64. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Câu 65. Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16cm.

- a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.
- b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Câu 66. Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1. Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?



Hình 2.1

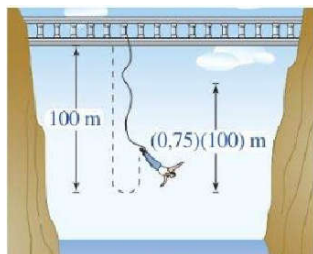
Câu 67. Vi khuẩn E.coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần.
(Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, 2010)
Giả sử lúc đầu có 100 vi khuẩn E.coli.

Hỏi có bao nhiêu vi khuẩn E.coli sau 180 phút?



Hình ảnh phóng to của vi khuẩn E.coli

- Câu 68.** Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14%/năm. (Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)
Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.
- Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
 - Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.
- Câu 69.** Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/ năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).
- Câu 70.** Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).
- Câu 71.** Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1%/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.
- Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.
 - Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.
- Câu 72.** Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).
- Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.
 - Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.
 - Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?
- Câu 73.** Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



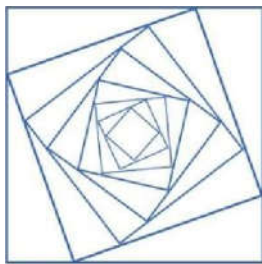
Hình 3

Câu 74. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây,... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Câu 75. Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Câu 76. Một khay nước có nhiệt độ $23^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C

Câu 77. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Câu 78. Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/ năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Câu 79. Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Câu 80. Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân.



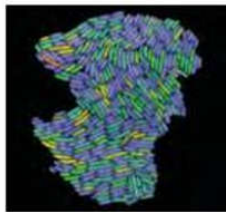
Hình 1

Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là $415Hz$ và $466Hz$ (theo: [https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_\(nốt_nhạc\)](https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt_nhạc))). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 81. Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210>). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

- a) 690 ngày;
- b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Câu 82. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Hình 2

Câu 83. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

- Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.
- Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022 ?

Câu 84. Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là 9m.



(Hình 3)

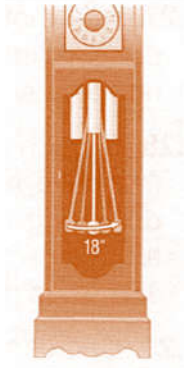
- Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba.
- Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.

Câu 85. Giả sử một quần thể động vật ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/ năm, xuất cư là 2%/ năm, tử vong là 8%/ năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau hai năm.

Câu 86. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La Trung là 400 Hz và tần số của phím La Cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ>). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Câu 87. Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo Niên giám thống kê năm 2020). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

Câu 88. Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm ($H \cdot 2.1$).



Hình 2.1

Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

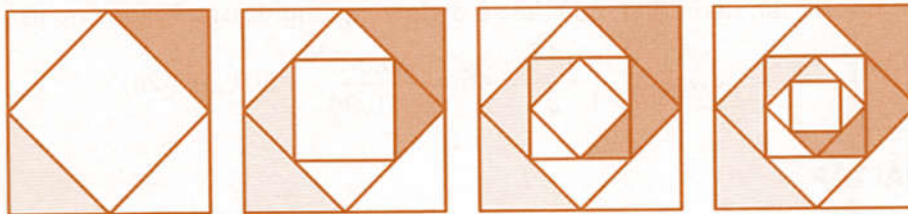
- Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?
- Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?
(Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 89. Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

Câu 90. Nếu một kĩ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5%, thì mức lương của người kĩ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

Câu 91. Để tích lũy tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích lũy này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích lũy được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Câu 92. Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16cm. Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới).



Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.

Câu 93. Anh Nam là một cầu thủ bóng đá chuyên nghiệp. Anh vừa kí hợp đồng 5 năm với một câu lạc bộ với mức lương năm khởi điểm là 300 triệu đồng. Chủ tịch câu lạc bộ đưa ra cho anh Nam ba phương án về lương như sau:

- Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng.
- Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.
- Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Em hãy tính giúp anh Nam xem với phương án lương nào thì tổng lương sau 5 năm của anh Nam là lớn nhất?

Câu 94. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.



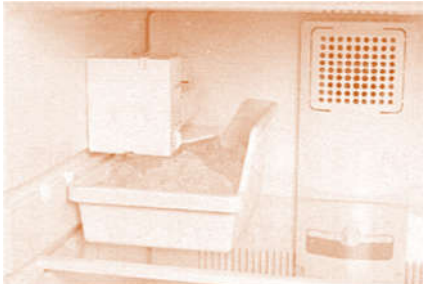
Câu 95. Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8% / năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

Câu 96. Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài 100m . Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

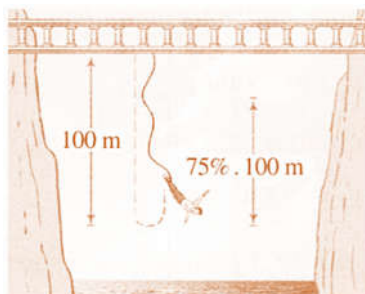
Câu 97. Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là $6144m^2$. Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng, biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.



Câu 98. Một khay nước có nhiệt độ $20^{\circ}C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm đi 25% . Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.



Câu 99. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100m . Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3).



Hình 3

Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 100. Anh Dũng kí hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

Câu 101. Một công ty mua một chiếc máy với giá 1 tỉ 200 triệu đồng. Công ty nhận thấy, trong vòng 5 năm đầu, tốc độ khấu hao là 25% / năm (tức là sau mỗi một năm, giá trị còn lại của chiếc máy bằng 75% giá trị của năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của chiếc máy đó sau 1 năm, 2 năm.

b) Sau 5 năm, giá trị của chiếc máy đó còn khoảng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 102. Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Hỏi sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả bao nhiêu điều ước?

Câu 103. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ polonium 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính khối lượng còn lại của 20 gam polonium 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Câu 104. Ông Minh gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng lãi suất 7% /năm. Giả sử trong khoảng thời gian gửi tiền ông Minh không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà ông nhận được là bao nhiêu (đơn vị: đồng, tính kết quả gần đúng đến hàng nghìn)?

Câu 105. Theo báo cáo của Chính phủ, dân số của nước ta tính đến tháng 12 năm 2018 là 95,93 triệu người, nếu tỉ lệ tăng trưởng dân số trung bình hàng năm là 1,33% thì dân số nước ta vào tháng 12 năm 2025 là bao nhiêu? (Tính theo đơn vị triệu người, làm tròn đến hàng phần trăm)

LỜI GIẢI THAM KHẢO

DẤY SỐ

Câu 1. Một vật chuyển động đều với vận tốc 20 m/s . Hãy viết các số chỉ quãng đường (đơn vị: mét) vật chuyển động được lần lượt trong thời gian 1 giây, 2 giây, 3 giây, 4 giây, 5 giây theo hàng ngang.

Lời giải

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 1 giây là: $20.1 = 20\text{ (m)}$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 2 giây là: $20.2 = 40\text{ (m)}$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 3 giây là: $20.3 = 60\text{ (m)}$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 4 giây là: $20.4 = 80\text{ (m)}$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 5 giây là: $20.5 = 100\text{ (m)}$.

Vậy các số chỉ quãng đường (đơn vị: mét) vật chuyển động được lần lượt trong thời gian 1 giây, 2 giây, 3 giây, 4 giây, 5 giây theo hàng ngang là: 20, 40, 60, 80, 100.

Câu 2. Năm 2020, số dân của một thành phố trực thuộc tỉnh là khoảng 500 nghìn người. Người ta ước tính rằng số dân của thành phố đó sẽ tăng trưởng với tốc độ khoảng 2% mỗi năm. Khi đó số dân P_n (nghìn người) của thành phố đó sau n năm, kể từ năm 2020, được tính bằng công thức $P_n = 500(1 + 0,02)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2030, số dân của thành phố đó là khoảng bao nhiêu nghìn người?

Lời giải

Ở đây ta có $n = 2030 - 2020 = 10$. Vậy số dân của thành phố đó vào năm 2030 sẽ là $P_{10} = 500 \cdot (1,02)^{10} \approx 609$ (nghìn người)

Câu 3. Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng.

Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có:

$$s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25; n \geq 2.$$

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Lời giải

a) Số hạng tổng quát của dãy số là: $s_n = 200 + 25(n-1) = 175 + 25n$

Lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty: $175 + 25 \cdot 5 = 300$ (triệu đồng)

b) Ta có: $s_{n+1} = 175 + 25(n+1) = 200 + 25n > s_n$ suy ra (s_n) là dãy số tăng

Ý nghĩa: Tiền lương của anh Thanh sẽ được tăng dần hàng năm

Câu 4. Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Lời giải

a) Số tiền ông An nhận được sau 1 tháng: $A_1 = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^1 = 100,5$ (triệu đồng)

Số tiền ông An nhận được sau 2 tháng: $A_2 = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^2 = 101,0025$ (triệu đồng)

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm: $A_{12} = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{12} = 106,1678$ (triệu đồng)

Câu 5. Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi A_n ($n \in \mathbb{N}$) là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

Lời giải

a) Ta có: $A_0 = 100$

$$A_1 = 100 + 100 \times 0.008 - 2 = 98.8$$

$$A_2 = 98.8 + 98.8 \times 0.008 - 2 = 97.59$$

$$A_3 = 97.59 + 97.59 \times 0.008 - 2 = 96.37$$

$$A_4 = 96.37 + 96.37 \times 0.008 - 2 = 95.14$$

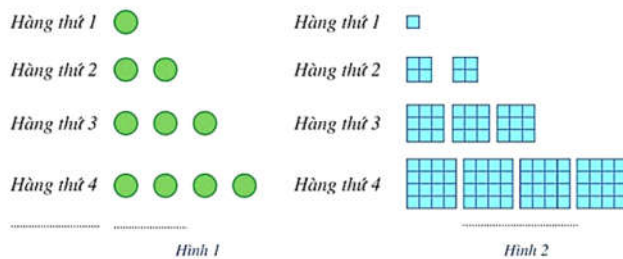
$$A_5 = 95.14 + 95.14 \times 0.008 - 2 = 93.90$$

$$A_6 = 93.90 + 93.90 \times 0.008 - 2 = 92.65$$

Vậy sau 6 tháng số tiền chị Hương còn nợ là 92.65 triệu đồng

b) Hệ thức truy hồi: $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} \times 0.008 - 2 = 1.008A_{n-1} - 2$ (triệu đồng)

Câu 6. a) Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ trong Hình 1. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n) .



b) Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong Hình 2 (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n) .

Lời giải

a) Số chấm ở hàng thứ nhất là: $u_1 = 1$;

Số chấm ở hàng thứ hai là: $u_2 = 2$;

Số chấm ở hàng thứ ba là: $u_3 = 3$;

Số chấm ở hàng thứ tư là: $u_4 = 4$;

Vậy số chấm ở hàng thứ n là: $u_n = n$.

b) Diện tích của các ô màu ở hàng thứ nhất là: $v_1 = 1 = 1^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ hai là: $v_2 = 8 = 2^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ ba là: $v_3 = 27 = 3^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ tư là: $v_4 = 64 = 4^3$;

Vậy diện tích của các ô màu ở hàng thứ n là: $v_n = n^3$.

Câu 7. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

Lời giải

a) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là:

$$P_1 = 100 + 100 \cdot 0,5\% + 6 = 100,5 + 6 \text{ (triệu đồng)}$$

b) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$$P_2 = 100,5 + 6 + (100,5 + 6) \cdot 0,5\% + 6 = (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 = 100,5(1 + 0,5\%) + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$$P_3 = (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6] \cdot 0,5\% + 6$$

$$= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^2 + 6(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6$$

c) Số tiền chi có trong ngân hàng sau 4 tháng là:

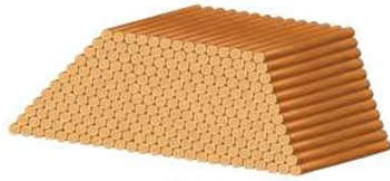
$$P_4 = (100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6] \cdot 0,5\% + 6$$

$$= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6$$

Số tiền chi có trong ngân hàng sau n tháng là:

$$P_n = 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-1} + 6(1 + 0,5\%)^{n-1} + 6(1 + 0,5\%)^{n-2} + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-3} + \dots + 6; n \in \mathbb{N}^*.$$

Câu 8. Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 1). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:



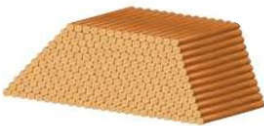
Hình 1

- Viết công thức số hạng tổng quát u_n .
- Viết hệ thức truy hồi.

Lời giải

- $u_n = 13 + n$
- $\begin{cases} u_1 = 14 \\ u_n = u_{n-1} + 1 \end{cases}$

Câu 9. Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 2).



Hình 2

- Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.
- Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

Lời giải

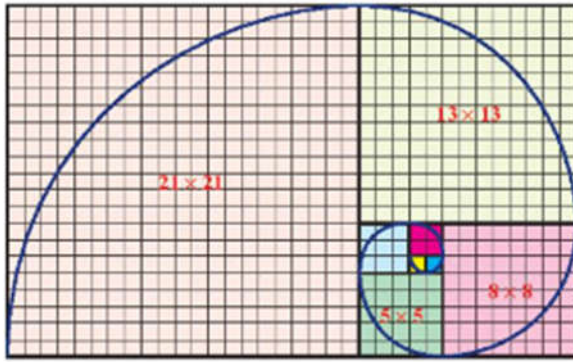
- Ta có: $u_n = 26 - n > u_{n+1} = 26 - n - 1 = 25 - n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm

- Ta có: $v_n = 13 + n < v_{n+1} = 13 + n + 1 = 14 + n$

Vậy dãy số (v_n) là dãy số tăng

Câu 10. Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình 3. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Hình 3

Lời giải

$$u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = 2; u_4 = 3; u_5 = 5; u_6 = 8; u_7 = 13; u_8 = 21$$

$$\text{Ta có dãy số } (u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

Câu 11. Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3 . Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n .

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Lời giải

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_1 = A_0(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_0 - 120000 \text{ (đồng)}$$

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_2 = A_1(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_1 - 120000 \text{ (đồng)}$$

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_3 = A_2(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_2 - 120000 \text{ (đồng)}$$

Tương tự, vào cuối năm thứ $n (n \geq 1)$, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_n = A_{n-1}(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_{n-1} - 120000 \text{ (đồng)}$$

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$A_1 = 10180000; \quad A_2 = 10365400;$$

$$A_3 = 10556362; \quad A_4 = 10753053.$$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10753053 đồng.

Câu 12. Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Lời giải

Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là

$$T_1 = 50 \cdot 75\% = 37,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là

$$T_2 = T_1 \cdot 75\% = 28,125 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là

$$T_3 = T_2 \cdot 75\% = 21,0938 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là

$$T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15,8203 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là

$$T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11,8652 \text{ (triệu đồng)}.$$

Chú ý. Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là

$$T_n = T_1 \cdot (0,75)^{n-1} \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 13. Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n \text{ (tỉ đồng)}$$

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

Lời giải

Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$$A_5 = 2,5 \cdot (1,035)^5 = 2,9692 \text{ (tỉ đồng)}.$$

Câu 14. Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200 \left(1 + \frac{0,03}{4} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.

b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Lời giải

a) Ba số hạng đầu của dãy số là $A_1 = 201,5; A_2 = 203,0113; A_3 = 204,5338$.

b) Chú ý rằng 2 năm bằng 8 quý, tức là $n = 8$. Do đó, sau 2 năm số tiền bác An nhận được là $A_8 = 212,3198$ triệu đồng.

Câu 15. Vi khuẩn E.Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E.Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E.Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể?

Lời giải

Giả sử ban đầu có 1 vi khuẩn E.Coli.

Sau 20 phút lần một, số vi khuẩn là $1 \cdot 2 = 2$.

Sau 20 phút lần hai, số vi khuẩn là $2 \cdot 2 = 2^2$.

Sau 20 phút lần ba, số vi khuẩn là $2^2 \cdot 2 = 2^3$.

Sau 20 phút lần bốn, số vi khuẩn là $2^3 \cdot 2 = 2^4$.

Tương tự như vậy sau 12 giờ (bằng $3 \cdot 12$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$$2^{3 \cdot 12} = 2^{36} \approx 6,87 \cdot 10^{10} \text{ (con)}.$$

Sau 48 giờ (bằng $3 \cdot 48 = 144$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$$2^{144} \approx 2,23 \cdot 10^{43} \text{ (con)}.$$

Câu 16. Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.

b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Lời giải

a) Gọi $u_0 = 1,0 \cdot 10^9$ là số vi khuẩn tại thời điểm ban đầu và u_n là số vi khuẩn trước lần dùng thuốc thứ n .

Do mỗi liều thuốc được sử dụng sau bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \cdot 10^8$ vi khuẩn và giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25% nên ta có

$$u_{n+1} = (u_n - 4,0 \cdot 10^8) + 25\% \cdot u_n = 1,25u_n - 4,0 \cdot 10^8.$$

b) Ta tính u_5 như sau:

$$u_1 = 1,0 \cdot 10^9;$$

$$u_2 = 1,25u_1 - 4,0 \cdot 10^8 = 8,5 \cdot 10^8$$

$$u_3 = 1,25u_2 - 4,0 \cdot 10^8 = 6,625 \cdot 10^8;$$

$$u_4 = 1,25u_3 - 4,0 \cdot 10^8 = 4,28125 \cdot 10^8;$$

$$u_5 = 1,25u_4 - 4,0 \cdot 10^8 = 1,3515625 \cdot 10^8.$$

Vậy số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm là 135156250 con.

Câu 17. Một con chó con nặng $0,4\text{kg}$ khi mới sinh và sau mỗi tuần tuổi khối lượng của nó tăng thêm 24%. Giả sử u_n (kg) là khối lượng của con chó vào cuối tuần tuổi thứ n .

a) Viết lần lượt các công thức tính u_2, u_3 . Từ đó dự đoán công thức của u_n .

b) Con chó nặng bao nhiêu kilôgam khi được sáu tuần tuổi?

Lời giải

a) Giả sử u_n (kg) là khối lượng của con chó vào cuối tuần tuổi thứ n .

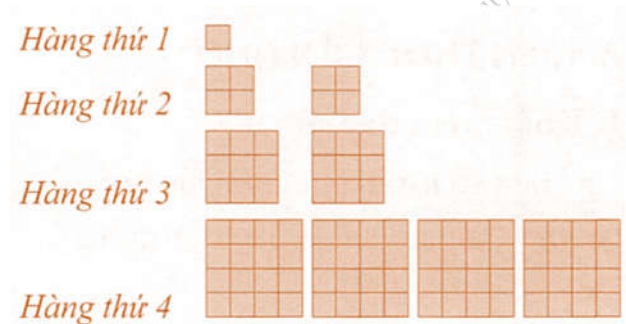
Ta có $u_1 = 0,4; u_2 = u_1 + u_1 \cdot 24\% = u_1(1 + 24\%); u_3 = u_2 + u_2 \cdot 24\% = u_1(1 + 24\%)^2$.

Tương tự, ta có $u_n = u_1(1 + 24\%)^{n-1} \forall n \geq 1$.

b) Sau sáu tuần tuổi thì con chó nặng là

$$u_6 = 0,4 \cdot (1 + 24\%)^5 = 1,17(\text{kg}).$$

Câu 18. Gọi u_n là tổng diện tích các hình vuông có ở hàng thứ n trong Hình (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích).



a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4 .

b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

a) $u_1 = 1; u_2 = 8; u_3 = 27; u_4 = 64$.

b) Ta có: $u_1 = 1^3; u_2 = 2^3; u_3 = 3^3; u_4 = 4^3$. Do đó, dự đoán $u_n = n^3$.

Câu 19. Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n .

Lời giải

a) Số tiền cả gốc và lãi chị Mai có được sau 1 tháng (khi chưa gửi thêm 6 triệu đồng) là:

$$100 + 100 \cdot \frac{0,5}{100} = 100 \cdot 1,005 = 100,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là: $100,5 + 6 = 106,5$ (triệu đồng).

b) Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$$106,5 \cdot 1,005 + 6 = 113,0325 \text{ (triệu đồng)}. \text{ Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 3 tháng là:}$$

$$113,0325 \cdot 1,005 + 6 = 119,5976625 \text{ (triệu đồng)}.$$

c) Ta có: $P_1 = 100 \cdot 1,005 + 6$;

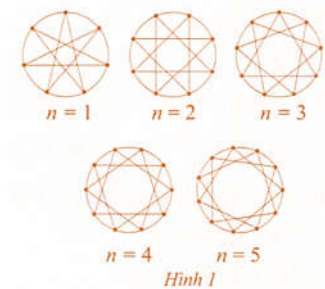
$$P_2 = P_1 \cdot 1,005 + 6 = (100 \cdot 1,005 + 6) \cdot 1,005 + 6 = 100 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6$$

$$P_3 = P_2 \cdot 1,005 + 6 = (100 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6) \cdot 1,005 + 6 \\ = 100 \cdot 1,005^3 + 6 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6; \dots$$

Cứ như thế, ta dự đoán được công thức của P_n :

$$P_n = 100 \cdot 1,005^n + 6 \cdot 1,005^{n-1} + 6 \cdot 1,005^{n-2} + \dots + 6 \\ = 100 \cdot 1,005^n + 6 \cdot (1,005^{n-1} + 1,005^{n-2} + \dots + 1).$$

Câu 20. Với mỗi số nguyên dương n , lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình 1. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n) .



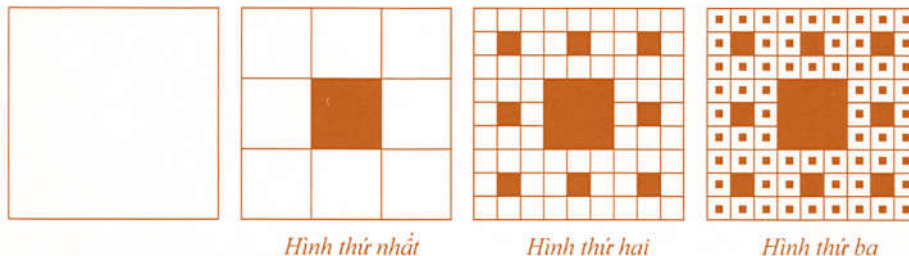
Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n .

Lời giải

Ta thấy đường tròn được chia thành $n+6$ cung bằng nhau và mỗi cung có số đo bằng $\left(\frac{360}{n+6}\right)^\circ$.

Do mỗi điểm được nối với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn nên góc ở đỉnh của mỗi ngôi sao là góc nội tiếp chắn $n+6-2 \cdot 3 = n$ cung bằng nhau đó. Suy ra số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao là $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{360}{n+6} \cdot n = \frac{180n}{n+6}$.

Câu 21. Một hình vuông có diện tích bằng 1 đơn vị diện tích. Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại.



a) Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba.

b) Dự đoán công thức tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n .

Lời giải

a) Diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ nhất, hình thứ hai, hình thứ ba lần lượt là:

$$1 - \left(\frac{8}{9}\right) = \frac{1}{9}; 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{17}{81}; 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{217}{729}.$$

b) Gọi S_n là diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n . Ta có: $S_n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$.

Câu 22. Bà Hoa gửi vào một ngân hàng số tiền 200 triệu đồng với lãi suất 5% một năm theo hình thức lãi kép, kì hạn 1 tháng. Số tiền (triệu đồng) của bà Hoa sau n tháng được tính theo công thức

$$T_n = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^n. \text{ Hỏi số tiền bà Hoa nhận được sau 1 tháng, 2 tháng, và 14 tháng là bao nhiêu?}$$

Lời giải

Sau 1 tháng, số tiền bà Hoa nhận được là: $T_1 = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^1 \approx 200,83$ (triệu đồng)

Sau 2 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_2 = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^2 \approx 201,67$ (triệu đồng);

Sau 14 tháng, số tiền bà nhận được là: $T_{14} = 200 \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{14} \approx 211,99$ (triệu đồng).

Câu 23. Vào đầu mỗi tháng, ông An đều gửi vào ngân hàng số tiền cố định 30 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% /tháng.

a) Tính số tiền ông An có được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai và sau tháng thứ ba.

b) Giả sử (T_n) là dãy số thể hiện số tiền của ông An có được sau tháng thứ n . Dự đoán công thức cho T_n .

Lời giải

a) Số tiền ông An có được:

Sau tháng thứ nhất là: $T_1 = 30 + 30 \cdot \frac{0,6}{100} = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) = 30,18$ (triệu đồng).

Sau tháng thứ hai: $T_2 = 30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) + \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)\right] \frac{0,6}{100}$
 $= \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)\right] \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^2$
 $\approx 60,54$ (triệu đồng)

Sau tháng thứ ba: $T_3 = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^2 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^3$

b) Cách tìm T_n là: $T_n = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^2 + \dots + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^n$.

CẤP SỐ CỘNG

Câu 24. Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Tính tổng số ghế của nhà hát đó.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng của nhà hát lập thành một cấp số cộng, gồm 25 số hạng, với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$. Tổng các số hạng này là

$$S_{25} = u_1 + u_2 + \dots + u_{25} = \frac{25}{2} [2u_1 + (25-1)d] = \frac{25}{2} [2 \cdot 16 + 24 \cdot 2] = 1000.$$

Vậy nhà hát đó có tổng cộng 1000 ghế.

Câu 25. Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

Lời giải

Số tiền lương trong 10 năm của anh Nam lập thành một cấp số cộng, gồm 10 số hạng, với số hạng đầu là $u_1 = 100$ và công sai $d = 20$. Tổng các số hạng này là:

$$S_{10} = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = \frac{10}{2} [2u_1 + (10-1)20] = \frac{10}{2} (2 \times 100 + 9 \times 20) = 1900 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy tổng số tiền lương anh Nam nhận sau 10 năm là 1900 triệu đồng

Câu 26. Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá của chiếc xe sau n năm là: $u_n = 680 - 55(n-1)$

Vậy sau 5 năm sử dụng giá của chiếc xe là: $u_5 = 680 - 55(5-1) = 460$ (triệu đồng)

Câu 27. Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có:

$$870 = S_n = \frac{n}{2} [2 \times 15 + (n-1) \times 3] = \frac{n}{2} (27 + 3n)$$

Do đó $27n + 3n^2 - 1740 = 0$, suy ra $n = 20, n = -29$ (loại)

Vậy cần phải thiết kế 20 hàng ghế

Câu 28. Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

Lời giải

Dân số mỗi năm của thành phố lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1200$, công sai $d = 30$

Dân số mỗi năm có dạng tổng quát là: $u_n = 1200 + 30(n-1)$

Dân số của năm 2030 tức $n = 11; u_{11} = 1200 + 30(11-1) = 1500$ (nghìn người)

Câu 29. Ruộng bậc thang là một hình thức canh tác có nhiều ở khu vực Tây Bắc và Đông Bắc Việt Nam. Hình ảnh ruộng bậc thang thể hiện nét đẹp văn hoá, là công trình nghệ thuật độc đáo của đồng bào vùng cao phía Bắc. Ruộng bậc thang ở một số nơi đã trở thành những địa chỉ tham quan du lịch đầy hấp dẫn của du khách trong nước và quốc tế.



Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất nằm ở độ cao 1250m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,2m.

Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 10 có độ cao là bao nhiêu so với mực nước biển?

Lời giải

Ta có thửa ruộng thấp nhất có độ cao $u_1 = 1250\text{ m}$ so với mực nước biển.

Thửa ruộng ở bậc thứ hai cao hơn so với mực nước biển là: $u_2 = 1250 + 1,2\text{ (m)}$.

Thửa ruộng ở bậc thứ ba cao hơn so với mực nước biển là: $u_3 = 1250 + 1,2 + 1,2 = 1250 + 2.1,2\text{ (m)}$.

Thửa ruộng ở bậc thứ 10 cao hơn so với mực nước biển là: $u_{10} = 1250 + 9.1,2 = 1260,8\text{(m)}$

Câu 30. Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế,... Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70800000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 20$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng.

Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là: $S_{20} = \frac{[2 \cdot 20 + (20 - 1) \cdot 1] \cdot 20}{2} = 590$.

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên số vé bán ra là 590.

Vậy giá tiền của một vé là: $70800000 : 590 = 120000$ (đồng).

Câu 31. Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức: $x_n = 75 + 5(n - 1)$.

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) Chiều cao 3 năm tuổi của một đứa trẻ phát triển bình thường là: $x_3 = 75 + 5(3 - 1) = 85\text{(cm)}$

b) Ta có: $x_{n+1} = 75 + 5(n + 1 - 1) = 75 + 5n$

Xét hiệu $x_{n+1} - x_n = 75 + 5n - [75 + 5(n - 1)] = 5$

Do đó (x_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $x_1 = 75$ và công sai $d = 5$

Câu 32. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

+) Theo phương án 1: Gọi (u_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 1 qua mỗi năm. Dãy số (u_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = 120 + (n - 1) \cdot 18$.

+) Theo phương án 2: Gọi (v_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 2 qua từng quý. Dãy số (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d = 1,8$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là $v_n = 24 + (n - 1) \cdot 1,8$.

a) Khi kí hợp đồng 3 năm tương đương với 12 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_3 = 120 + (3-1) \cdot 18 = 156$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm là:

$$S_3 = \frac{3 \cdot (120 + 156)}{2} = 414 \text{ (triệu đồng).}$$

+) Theo phương án 2: $u_{12} = 24 + (12-1) \cdot 1,8 = 43,8$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (24 + 43,8)}{2} = 406,8 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 3 năm thì nên theo phương án 1.

b) Khi kí hợp đồng 10 năm tương đương với 40 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_{10} = 120 + (10-1) \cdot 18 = 282$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm là:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (120 + 282)}{2} = 2010 \text{ (triệu đồng).}$$

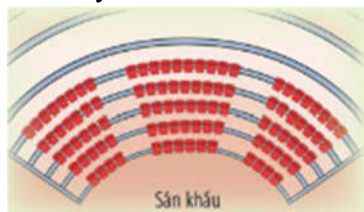
+) Theo phương án 2: $u_{40} = 24 + (40-1) \cdot 1,8 = 94,2$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm tương ứng với 40 quý là:

$$S_{40} = \frac{40 \cdot (24 + 94,2)}{2} = 2364 \text{ (triệu đồng).}$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 10 năm thì nên theo phương án 2.

Câu 33. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Tính từ sân khấu, số lượng ghế của các hàng tăng dần như trong hình minh hoạ dưới đây.



Bạn hãy đếm và nêu nhận xét về số ghế của năm hàng đầu tiên.

Làm thế nào để biết được số ghế của một hàng bất kì và tính được tổng số ghế có trong rạp hát đó?

Lời giải

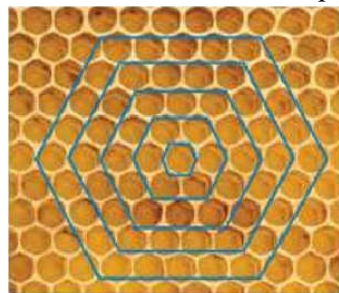
Số ghế của 5 hàng đầu tiên là: $u_1 = 14; u_2 = 17; u_3 = 20; u_4 = 23; u_5 = 26$

Số ghế hàng sau hơn số ghế hàng liền trước là 3 ghế

Số ghế của một hàng bất kì là: $u_n = 14 + 3n$

Tổng số ghế trong rạp là: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

Câu 34. Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ ba, các ong thợ sẽ tạo ra 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục (Hình 2). Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có, tìm công sai của cấp số cộng này.



Hình 2

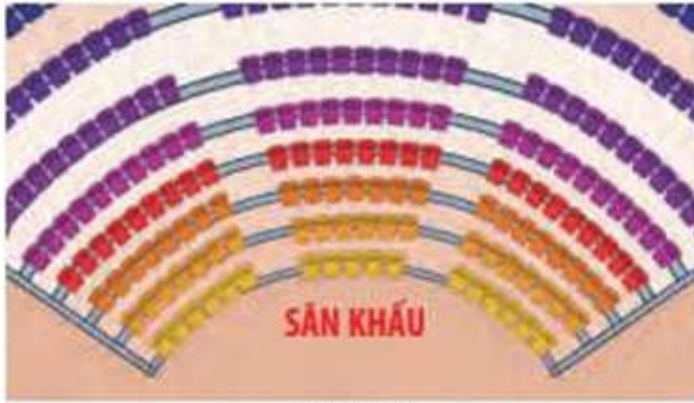
Lời giải

Số ô trên các vòng là: $u_1 = 6; u_2 = 12; u_3 = 18$

Ta thấy $u_{n+1} = u_n + 6$

Vậy các ô trên vòng tạo thành cấp số cộng có công sai là 6

Câu 35. Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế,... cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng (Hình 4).



Hình 4

- a) Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.
- b) Tính tổng số ghế có trong rạp.

Lời giải

Ta có: $u_1 = 17; u_2 = 20; u_3 = 23$

Suy ra $d = 3$ và $u_n = 17 + (n-1) \cdot 3 = 3n + 14$

a) $u_{20} = 3 \cdot 20 + 14 = 74$

b) $S_{20} = \frac{20(17+74)}{2} = 910$

Câu 36. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là $45\text{ cm}, 43\text{ cm}, 41\text{ cm}, \dots, 31\text{ cm}$.



Hình 5

- a) Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
- b) Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Lời giải

a) Chiều dài các thanh ngang là dãy cấp số cộng có số hạng đầu là 45, công sai là -2

$$u_n = 45 - 2(n-1) = 47 - 2n$$

Khi $u_n = 31 \Leftrightarrow n = 8$

Vậy cái thang có 8 bậc

b) $S_8 = \frac{8 \cdot (45 + 31)}{2} = 304$

Vậy chiều dài thanh gỗ là 304 cm

Câu 37. Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

a) Tính công sai của cấp số cộng trên.

b) Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Công sai của cấp số cộng trên là: $d = 32$

$$b) S_{10} = \frac{10 \cdot [2 \cdot 16 + (10-1) \cdot 32]}{2} = 1600$$

Vậy tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là 1600 feet

Câu 38. Ở một loài thực vật lưỡng bội, tình trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm . Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene $aabb$ có chiều cao 100 cm . Hỏi cây cao nhất với kiểu gene $AABB$ có chiều cao bao nhiêu?

Lời giải

Cây với kiểu gene $AABB$ có chiều cao là: $100 + 5 \cdot 4 = 120(\text{cm})$

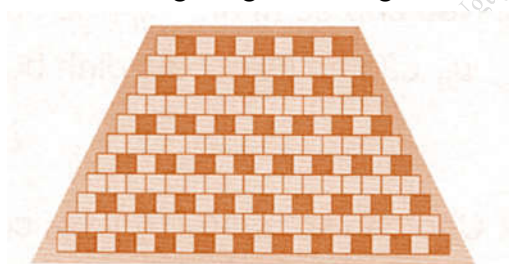
Câu 39. Một hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật như vậy. Có tất cả 27 hàng ghế. Hỏi hội trường đó có bao nhiêu ghế?

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n . Vì hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba, ... nên dãy số (u_n) lập thành cấp số cộng có $u_1 = 35$ và công sai $d = 2$. Suy ra tổng số ghế của hội trường với 27 hàng ghế là

$$S_{27} = \frac{(2u_1 + 26d) \cdot 27}{2} = 1647 (\text{ghế})$$

Câu 40. Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng $2,4\text{ m}$ ở đáy và rộng $1,2\text{ m}$ ở đỉnh (hình vẽ bên).



Các viên gạch hình vuông có kích thước $10\text{ cm} \times 10\text{ cm}$ phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?

Lời giải

Đổi $2,4\text{ m} = 240\text{ cm}$; $1,2\text{ m} = 120\text{ cm}$.

Số viên gạch ở hàng đầu tiên (ứng với đáy lớn) là $u_1 = 240 : 10 = 24$.

Số viên gạch ở hàng trên cùng (ứng với đáy nhỏ) là

$$u_n = 120 : 10 = 12.$$

Vì mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó nên ta thu được cấp số cộng có công sai $d = -1$.

$$\text{Như vậy } u_n = 12 = u_1 + (n-1)(-1) \Rightarrow n = 13.$$

Vậy số viên gạch hình vuông cần thiết để ốp hết bức tường đó là

$$S_{13} = \frac{(u_1 + u_{13})13}{2} = 234 (\text{viên gạch}).$$

Câu 41. Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

- a) Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?
- b) Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

Lời giải

Công thức của cấp số cộng biểu thị số viên gạch cho mỗi bậc cầu thang như sau:

$$u_1 = 100, u_{n+1} = u_n + (-2), \forall n \geq 2.$$

a) Ta tính $u_{30} = u_1 + (30-1)(-2) = 42$.

b) Ta tính $S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{30}{2}[2 \cdot 100 + (30-1)(-2)] = 2130$.

Như vậy, ta cần 2130 viên gạch để xây cầu thang.

Câu 42. Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chỗ ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với $S_n = 2040$, $u_1 = 10, d = 4$ để tìm

$$n, \text{ ta được } 2040 = S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 10 + (n-1)4].$$

Suy ra $n = 30$, tức là góc khán đài đó có 30 hàng ghế.

Câu 43. Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với

$$S_n = 319200, u_1 = 35000, d = 1400,$$

$$319200 = S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 35000 + (n-1) \cdot 1400].$$

Suy ra $n = 8$.

Vậy sau 8 năm làm việc thì tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la.

Câu 44. Bác Hưng quyết định tham gia một chương trình bơi lội để duy trì sức khỏe. Bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó.

- a) Tìm công thức truy hồi cho số phút T_n mà bác ấy bơi vào ngày thứ n của chương trình.
- b) Tìm sáu số hạng đầu của dãy số T_n .
- c) Tìm công thức tổng quát của dãy số (T_n) .
- d) Bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ bao nhiêu của chương trình?
- e) Tính tổng thời gian bác Hưng bơi sau 30 ngày đầu của chương trình.

Lời giải

Gọi T_n là số phút mà bác Hưng bơi vào ngày thứ n của chương trình.

a) Do bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó nên ta có hệ thức truy hồi sau $T_1 = 10, T_{n+1} = T_n + 2 \forall n \geq 1$.

b) Sáu số hạng đầu của dãy số là

$$T_1 = 10; T_2 = 12; T_3 = 14; T_4 = 16; T_5 = 18; T_6 = 20.$$

c) Theo định nghĩa dãy số T_n là cấp số cộng có $T_1 = 10$ và công sai $d = 2$.

Suy ra, công thức tổng quát của dãy số là $T_n = T_1 + (n-1)d = 8 + 2n \quad \forall n \geq 1$.

d) Ta có $T_n \geq 60 \Leftrightarrow 8 + 2n \geq 60 \Leftrightarrow n \geq 26$.

Vậy bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ 26 của chương trình.

e) Tổng thời gian bác Hưng bơi trong 30 ngày đầu của chương trình là

$$S_{30} = \frac{[2T_1 + (30-1)d]30}{2} = 1170(\text{phút}).$$

Câu 45. Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao $950m$ so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là $1,5m$. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?



Lời giải

Kí hiệu u_n là chiều cao so với mực nước biển của thửa ruộng ở bậc thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 950$ và $d = 1,5$.

Ta có $u_{12} = u_1 + 11d = 950 + 11 \cdot 1,5 = 966,5$.

Vậy thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao $966,5m$ so với mực nước biển.

Câu 46. Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau: Năm thứ nhất: 240 triệu;

Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương của bác Tư nhận được vào năm thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng có $u_1 = 240$ và $d = 12$.

Ta có $u_{11} = u_1 + 10d = 240 + 10 \cdot 12 = 360$.

Vậy vào năm thứ 11, số tiền lương một năm của bác Tư là 360 triệu đồng.

Câu 47. Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 20$ và $d = 1$.

Tổng số ghế có trong rạp hát là: $S_{20} = \frac{20 \cdot [2 \cdot 20 + (20-1) \cdot 1]}{2} = 590$ (ghế).

Tổng số tiền vé thu được là: $590 \cdot 60000 = 35400000$ (đồng).

Câu 48. Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em nên chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

Ở phương án trả lương thứ nhất, số tiền lương mỗi năm người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 120$, công sai $d = 18$.

Ở phương án trả lương thứ hai, số tiền lương mỗi quý người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 24$, công sai $d' = 1,8$.

a) Nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 1 là tổng 3 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S_3 = \frac{(2u_1 + 2d) \cdot 3}{2} = 3u_1 + 3d = 3 \cdot 120 + 3 \cdot 18 = 414 \text{ (triệu đồng)}.$$

Do 1 năm có 4 quý nên tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 2 là tổng 12 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S'_{12} = \frac{(2v_1 + 11d') \cdot 12}{2} = 12v_1 + 66d' = 12 \cdot 24 + 66 \cdot 1,8 = 406,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì em nên chọn phương án 1.

b) Nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 1 bằng:

$$S_{10} = \frac{(2u_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 10u_1 + 45d = 10 \cdot 120 + 45 \cdot 18 = 2010 \text{ (triệu đồng)}.$$

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 2 bằng:

$$S'_{40} = \frac{(2v_1 + 39d') \cdot 40}{2} = 40v_1 + 780d' = 40 \cdot 24 + 780 \cdot 1,8 = 2364 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì em nên chọn phương án 2.

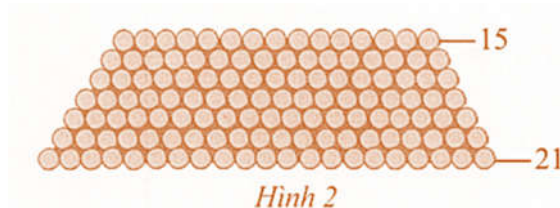
Câu 49. Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

Lời giải

Lúc 1 giờ đêm, toà tháp đánh 1 tiếng chuông; lúc 2 giờ đêm, toà tháp đánh 2 tiếng chuông;...; lúc 12h trưa, toà tháp đánh 12 tiếng chuông. Ngoài ra, mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông (có 11 lần như thế từ 1 giờ đến 12 giờ).

Vậy tổng số tiếng chuông là: $S = (1 + 2 + 3 + \dots + 12) + 1 \cdot 11 = 89$

Câu 50. Các khúc gỗ được xếp như Hình 2. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc,..., lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.



Lời giải

Tổng số khúc gỗ được xếp là: $15 + 16 + \dots + 21 = \frac{(21+15) \cdot 7}{2} = 126$.

Câu 51. Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1,3,5,... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp như hình bên). Hỏi hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?

**Lời giải**

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng liên tiếp của cấp số cộng:

$$S_n = \frac{n}{2}[2u_1 + (n-1)d] \Leftrightarrow 900 = \frac{n}{2}[2 \cdot 1 + (n-1) \cdot 2] \Leftrightarrow n^2 = 900 \Rightarrow n = 30.$$

Vậy hàng dưới cùng có $u_{30} = 1 + 29 \cdot 2 = 59$ hộp sữa.

Câu 52. Một ngôi nhà hình kim tự tháp (có gạch nâu ốp bên ngoài) được bao quanh bởi rất nhiều cây cối và là nơi tuyệt vời để nghỉ mát mùa hè; ngôi nhà có chiều dài, chiều rộng là $6,8m$, chiều cao là $2,72m$. Khi xây dựng ngôi nhà, người chủ đã tính toán số viên gạch nâu hình hộp chữ nhật cần ốp tường; biết hàng trên ít hơn hàng dưới 1 viên, hàng trên cùng là 1 viên, kích thước viên gạch nâu hình hộp chữ nhật là $0,2m - 0,08m - 1m$. Hãy dự tính số viên gạch nâu ốp tường cả bốn mặt của ngôi nhà.

**Lời giải**

Một bức tường có $2,72:0,08 = 34$ hàng gạch.

Số gạch ở mỗi hàng tạo thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

$$\text{Số viên gạch trên một bức tường là } S_{34} = 34 \cdot 1 + \frac{34 \cdot 33}{2} \cdot 1 = 595 \text{ viên gạch.}$$

Vì 4 mặt đều bằng nhau nên có $4 \cdot 595 = 2380$ viên gạch người chủ dự tính đặt mua.

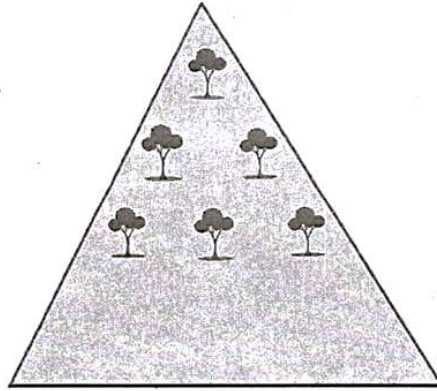
Câu 53. Trong một khán phòng có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liên sau nhiều hơn dãy trước đó 4 ghế, hỏi khán phòng đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, \dots, u_{30}$ lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai, ..., dãy ghế thứ ba mươi. Khi đó, (u_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 15$, công sai $d = 4$ (trong đó $1 \leq n \leq 30$). Gọi S_{30} là tổng số

$$\text{ghế trong khán phòng. Ta có: } S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{30}{2}[2u_1 + (30-1)d] = 15(2 \cdot 15 + 29 \cdot 4) = 2190.$$

Câu 54. Người ta trồng 465 cây trong một khu vườn hình tam giác theo cách sau: Hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, và cứ như thế mỗi hàng sau sẽ có nhiều hơn hàng ngay trước đó 1 cây. Hỏi tổng số hàng cây trong khu vườn bằng bao nhiêu?



Lời giải

Số cây trên mỗi hàng lập thành một cấp số cộng (u_n) với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

$$\text{Tổng số cây trồng được là: } S_n = 465 \Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} = 465 \Leftrightarrow n^2 + n - 930 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 30 \text{ (nhận)} \\ n = -31 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Vậy số hàng cây trong khu vườn là 30 hàng.

Câu 55. Một cơ sở khoan giếng đưa ra định mức giá như sau: Giá của mét khoan đầu tiên là 100 nghìn đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 30 nghìn đồng so với giá của mét khoan ngay trước đó. Một người cần khoan một giếng sâu 20m để lấy nước dùng cho sinh hoạt của gia đình. Hỏi sau khi hoàn thành việc khoan giếng, gia đình đó phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng số tiền bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Gọi u_n là giá của mét khoan thứ n , trong đó $1 \leq n \leq 20$.

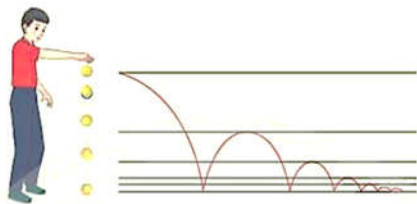
Khi đó, (u_n) là cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$ và công sai $d = 30$.

Số tiền mà gia đình phải thanh toán cho cơ sở khoan giếng là:

$$S_{20} = u_1 + u_2 + \dots + u_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = \frac{20(2.100 + 19.30)}{2} = 7700 \text{ (nghìn đồng)}.$$

CẤP SỐ NHÂN

Câu 56. Một quả bóng rơi từ một vị trí có độ cao 120cm. Khi chạm đất, nó luôn nảy lên độ cao bằng một nửa độ cao của lần rơi trước đó.



Gọi $u_1 = 120$ là độ cao của lần rơi đầu tiên và $u_2; u_3; \dots; u_n; \dots$ là độ cao của các lần rơi kế tiếp.

Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy (u_n) và tìm điểm đặc biệt của dãy số đó.

Lời giải

$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$$

$$u_4 = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$$

$$u_5 = \frac{1}{2} \cdot 15 = \frac{15}{2}$$

Dãy số có mỗi số hạng đều bằng một nửa số hạng đứng liền trước.

Câu 57. Một công ty tuyển một chuyên gia về công nghệ thông tin với mức lương năm đầu là 240 triệu đồng và cam kết sẽ tăng thêm 5% lương mỗi năm so với năm liền trước đó. Tính tổng số lương mà chuyên gia đó nhận được sau khi làm việc cho công ty 10 năm (làm tròn đến triệu đồng).

Lời giải

Lương hằng năm (triệu đồng) của chuyên gia lập thành một cấp số nhân, với số hạng đầu $u_1 = 240$ và công bội $q = 1,05$. Tổng số lương của chuyên gia đó sau 10 năm chính là tổng của 10

$$\text{số hạng đầu của cấp số nhân này và bằng } S_{10} = \frac{u_1(1-q^{10})}{1-q} = \frac{240[1-(1,05)^{10}]}{1-1,05} \approx 3019.$$

Vậy tổng số lương (làm tròn đến triệu đồng) của chuyên gia đó sau 10 năm là 3019 triệu đồng hay 3,019 tỉ đồng.

Câu 58. Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Lời giải

Số vi khuẩn mỗi giờ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5000$ và công bội $q = 1.08$

Công thức tổng quát: $u_n = 5000 \times 1.08^{n-1}$

Sau 5 giờ số vi khuẩn là: $u_5 = 5000 \times 1.08^{5-1} = 5161$ (con vi khuẩn)

Câu 59. Một nhà máy tuyển thêm công nhân vào làm việc trong thời hạn ba năm và đưa ra hai phương án lựa chọn về lương như sau:

- Phương án 1: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 500 nghìn đồng.

- Phương án 2: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 5%.

Với phương án nào thì tổng lương nhận được sau ba năm làm việc của người công nhân sẽ lớn hơn?

Lời giải

Theo phương án 1, tiền lương mỗi quý sẽ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5 \times 3 = 15$, công sai $d = 0.5 \times 3 = 1.5$

Công thức tổng quát là: $u_n = 15 + 1.5(n-1)$

Sau 3 năm làm việc (tương ứng với 12 quý) lương của người nông dân là:

$$\frac{12}{2} [2 \times 15 + (12-1) \times 1.5] = 279 \text{ (triệu đồng)}$$

Theo phương án 2, tiền lương mỗi quý sẽ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5 \times 3 = 15$, công bội $q = 1.05$

Công thức tổng quát là: $u_n = 15 \times 1.05^{n-1}$

$$\text{Sau 3 năm làm việc lương của người nông dân là: } \frac{15(1-1.05^{12})}{1-1.05} = 238.757 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy theo phương án 1 thì tổng lương nhận được của người nông dân là cao hơn

Câu 60. Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá trị của chiếc máy ủi mỗi năm lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 3 và công bội $q = 0.8$.

Giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm sử dụng là: $u_5 = 3 \times 0.8^{5-1} = 0.1875$ (tỷ đồng)

Câu 61. Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Lời giải

Dân số hằng năm lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 97 và công bội $q = 1.0091$

Dân số của quốc gia đó năm 2030 (tức $n = 11$) là $u_{11} = 97 \times 1.0091^{11-1} = 106.197$ (triệu người)

Câu 62. Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở ngày thứ nhất là 50mg, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kế trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải

Lượng thuốc trong máu mỗi ngày của bệnh nhân lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 50 và công bội $q = 0.5$

Tổng lượng thuốc trong máu 10 ngày liên tiếp chính là tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân này

$$\text{và bằng: } S_n = \frac{50[1 - (0.5)^{10}]}{1 - 0.5} = 99.902(\text{mg})$$

Câu 63. Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Lời giải

Lúc 1 giờ đồng hồ đánh 1 tiếng chuông.

Lúc 2 giờ đồng hồ đánh 2 tiếng chuông

Lúc 12 giờ trưa đồng hồ đánh 12 tiếng chuông.

Do đó, từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh số tiếng chuông là: $1 + 2 + 3 + \dots + 11 + 12$

Đây là tổng 12 số hạng của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Vậy tổng số tiếng chuông đồng hồ trong khoảng thời gian từ 0 đến 12 giờ trưa là:

$$S_{12} = \frac{12 \times (1 + 12)}{2} = 78$$

Câu 64. Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Lời giải

Số tế bào phân chia sau mỗi 20 phút tạo thành cấp số nhân với số hạng đầu là 2, công bội là 2

Sau 24 giờ (tức $n = (24 \times 60) : 20 = 72$) tế bào ban đầu phân chia thành số tế bào là:

$$u_{72} = 2 \times 2^{71} = 4.722 \times 10^{21}$$

Suy ra ba số cần tìm là 18, 7, -4 hoặc 3, 7, 11

Câu 65. Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân 0,5m. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao 16cm.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Lời giải

a) Mỗi bậc thang cao $16\text{ cm} = 0,16\text{ m}$.

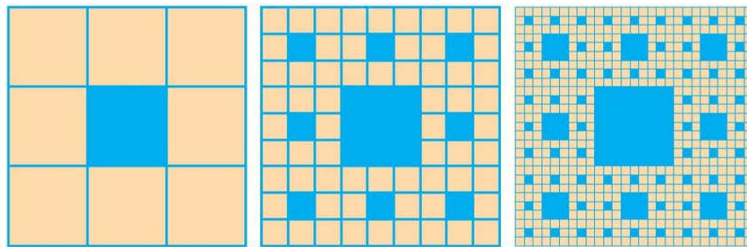
$\Rightarrow n$ bậc thang cao $0,16n(\text{m})$

Vì mặt bằng sàn cao hơn mặt sân $0,5\text{ m}$ nên công thức tính độ cao của bậc n so với mặt sân sẽ là:

$$h_n = (0,5 + 0,16n)(\text{m})$$

b) Độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân ứng với $n = 25$ là: $h_{25} = 0,5 + 0,16.25 = 4,5(\text{m})$

Câu 66. Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1. Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?



Hình 2.1

Lời giải

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ nhất là: $\frac{1}{9}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^0

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ hai là: $\frac{1}{9^2}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^1

...

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ năm là: $\frac{1}{9^5}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^4

Tổng diện tích các ô vuông màu xanh là: $\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} \times 8^1 + \dots + \frac{1}{9^5} \times 8^4 = 0.445$

Câu 67. Vi khuẩn E.coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần.

(Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, 2010)

Giả sử lúc đầu có 100 vi khuẩn E.coli.

Hỏi có bao nhiêu vi khuẩn E.coli sau 180 phút?



Hình ảnh phóng to của vi khuẩn E.coli

Lời giải

Số lượng vi khuẩn lúc đầu $Q_0 = 100$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi đầu tiên (sau $20 = 1.20$ phút) là: $Q_1 = 100.2 = 200$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ hai (sau $40 = 2 \cdot 20$ phút) là: $Q_2 = 100 \cdot 2 \cdot 2 = 100 \cdot 2^2 = 400$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ ba (sau $60 = 3 \cdot 20$ phút) là: $Q_3 = 100 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 100 \cdot 2^3 = 800$ (vi khuẩn).

Tổng quát: Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ n (sau $n \cdot 20$ phút) là: $Q_n = 100 \cdot 2^n$ (vi khuẩn).

Vì vậy số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ 9 (sau $180 = 9 \cdot 20$ phút) là: $Q_9 = 100 \cdot 2^9 = 51200$ (vi khuẩn).

Câu 68. Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14%/năm.

(Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là: $u_1 = 97,6 + 97,6 \cdot 0,0114 = 97,6 \cdot (1 + 0,0114) = 97,6 \cdot 1,0114 \approx 98,7$ (triệu người).

b) Gọi u_n là dân số của Việt Nam sau n năm.

Do tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,14% nên ta có:
$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,0114 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,0114) \\ &= u_{n-1} \cdot 1,0114, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 97,6 \cdot 1,0114$, công bội $q = 1,0114$.

Vậy dân số của Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020 là: $u_n = 97,6 \cdot 1,0114 \cdot 1,0114^{n-1} = 97,6 \cdot 1,0114^n$ (triệu người).

Câu 69. Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6%/năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).

Lời giải

Số tiền ban đầu $T_1 = 100$ (triệu đồng).

Số tiền sau 1 năm bác Linh thu được là: $T_2 = 100 + 100 \cdot 6\% = 100 \cdot (1 + 6\%)$ (triệu đồng)

Số tiền sau 2 năm bác Linh thu được là: $T_3 = 100 \cdot (1 + 6\%) + 100 \cdot (1 + 6\%) \cdot 6\% = 100 \cdot (1 + 6\%)^2$ (triệu đồng)

Số tiền sau 3 năm bác Linh thu được là: $T_4 = 100 \cdot (1 + 6\%)^2 + 100 \cdot (1 + 6\%)^2 \cdot 6\% = 100 \cdot (1 + 6\%)^3$ (triệu đồng)

Số tiền sau n năm bác Linh thu được chính là một cấp số nhân với số hạng đầu $T_1 = 100$ và công bội $q = 1 + 6\%$ có số hạng tổng quát là:

$T_{n+1} = 100 \cdot (1 + 6\%)^n$ (triệu đồng).

Câu 70. Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n .

Ta có: $u_1 = 60$;

$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,08 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,08) = u_{n-1} \cdot 1,08$.

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1,08$.

Áp dụng công thức tính tổng S_n , ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm

$$\text{là: } S_{10} = \frac{60(1-1,08^{10})}{1-1,08} \approx 869,194 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 71. Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1%/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Ta có dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_0 = 2$ triệu dân và công sai $q = 1\%$. Khi đó số hạng tổng quát của $u_n = 2 \cdot (1+1\%)^{n-1}$ (triệu dân).

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là:

$$u_{10} = 2 \cdot (1+1\%)^{10-1} \approx 2,19 \text{ (triệu dân)}.$$

Câu 72. Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.

b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

a) Sau 1 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_1 = 800 - 800 \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%) = 768 \text{ (triệu đồng)}.$$

Sau 2 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_2 = 800 \cdot (1 - 4\%) - 800 \cdot (1 - 4\%) \cdot 4\% = 800 \cdot (1 - 4\%)^2 = 737,28 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Gọi (u_n) là giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

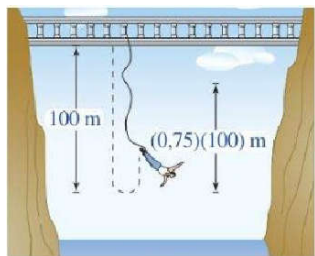
Dãy số (u_n) tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu là giá trị đầu của ô tô là $u_0 = 800$ triệu đồng và công bội $q = 1 - 4\%$.

Khi đó công thức tổng quát để tính $u_n = 800 \cdot (1 - 4\%)^n$.

c) Sau 10 năm sử dụng giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_{10} = 800 \cdot (1 - 4\%)^{10} \approx 531,87 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 73. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài 100m. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Hình 3

Lời giải

Gọi (u_n) là độ dài dây kéo sau n lần rơi xuống ($n \in \mathbb{N}$)

Ta có: $u_0 = 100(m)$

Sau lần rơi đầu tiên độ dài dây kéo còn lại là: $u_1 = 100 \cdot 75\%(m)$.

Sau cú nhảy tiếp theo độ dài dây kéo còn lại là: $u_2 = 100.75\%.75\% = 100.(75\%)^2 (m)$.

Dãy số này lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là 100 và công bội $q = 0,75\%$, có công thức tổng quát $(u_n) = 100.(0,75\%)^{n-1} (m)$. Tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên

$$\text{và lại rơi xuống là: } S_{10} = \frac{100(1 - (75\%)^{10})}{1 - 75\%} \approx 377,5(m)$$

Câu 74. Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây,... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử người ta đã trồng được n hàng.

Số cây ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Tổng số cây ở n hàng cây là:

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = 4950$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 9900 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 99 \vee n = -100 (L)$$

Vậy có 99 hàng cây được trồng theo cách trên.

Câu 75. Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn mỗi tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Lời giải

Diện tích mặt đáy tháp là $u_1 = 12288(m^2)$.

Diện tích mặt sàn tầng 2 là: $u_2 = 12288 \cdot \frac{1}{2} = 6144(m^2)$.

...

Gọi diện tích mặt sàn tầng n là u_n với $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân là $u_1 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$, có số hạng tổng quát là:

$$u_n = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Diện tích mặt tháp trên cùng chính là mặt tháp thứ 11 nên ta có:

$$u_{11} = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11-1} = 12(m^2)$$

Câu 76. Một khay nước có nhiệt độ $23^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C

Lời giải

Gọi u_n là nhiệt độ của khay nước đó sau n giờ (đơn vị độ C) với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_1 = 23; u_2 = 23 - 23.20\% = 23.(1 - 20\%) = 23.80\%; u_3 = 23.80\%.80\% = 23.(80\%)^2; \dots$

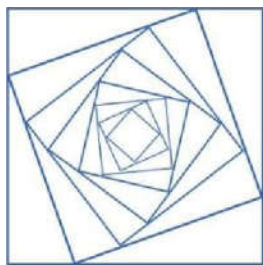
Suy ra dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 23$ và công bội $q = 80\%$ có số hạng tổng quát $u_n = 23.(80\%)^{n-1}$ độ C

Vậy sau 6 giờ thì nhiệt độ của khay là $u_6 = 23.(80\%)^5 \approx 7,5^\circ C$.

Câu 77. Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp

tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Lời giải

Độ dài cạnh của hình vuông đầu tiên là: $a_1 = 4$.

Độ dài cạnh của hình vuông thứ n là: a_n .

Độ dài cạnh của hình vuông thứ $n+1$ là: $a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{10}}{4}\right) \cdot a_n$.

$$\text{Suy ra: } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

Vậy (a_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 78. Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12%/năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Lời giải

Gọi (u_n) là số tiền sau mỗi tháng ông An còn nợ ngân hàng.

Lãi suất mỗi tháng là 1%.

Ta có:

$$u_1 = 1000000000 \text{ đồng.}$$

$$u_2 = u_1 + u_1 \cdot 1\% - a = u_1(1+1\%) - a \text{ (đồng)}$$

$$u_3 = u_1(1+1\%) - a + [u_1(1+1\%) - a] \cdot 1\% - a = u_1(1+1\%)^2 - a(1+1\%) - a$$

...

$$u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - a(1+1\%)^{n-2} - a(1+1\%)^{n-3} - a(1+1\%)^{n-4} - \dots - a.$$

Ta thấy dãy $a(1+1\%)^{n-2}; a(1+1\%)^{n-3}; a(1+1\%)^{n-4}; \dots; a$ lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = a$ và công bội $q = 99\%$ có tổng $n-2$ số hạng đầu là:

$$S_{n-2} = \frac{a(1-(99\%)^{n-2})}{1-99\%} = 100a[1-(99\%)^{n-2}].$$

$$\text{Suy ra } u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - 100a[1-(99\%)^{n-2}].$$

Vì sau 2 năm bằng 24 tháng thì ông An trả xong số tiền nên $n = 24$ và $u_{24} = 0$. Do đó ta có:

$$u_{24} = u_1(1+1\%)^{23} - 100a[1-(99\%)^{22}] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1000000000 \cdot (99\%)^{23} - 100a[1-(99\%)^{22}] = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 40006888,25$$

Vậy mỗi tháng ông An phải trả 40006888,25 đồng.

Câu 79. Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Lời giải

Dân số qua các năm là:

$$u_{2011} = P$$

$$u_{2012} = P + aP = P(1 + a) = u_{2011} \cdot (1 + a)$$

$$u_{2013} = P(1 + a) + aP(1 + a) = P(1 + a)^2 = u_{2012} \cdot (1 + a)$$

.....

$$u_{n+1} = u_n(1 + a)$$

Vậy dân số các năm tạo thành cấp số nhân có công bội là $1 + a$

Câu 80. Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân.



Hình 1

Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là 415 Hz và 466 Hz (theo: [https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_\(nốt_nhạc\)](https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt_nhạc))). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Do tần số của ba phím Sol, La, Si tạo thành cấp số nhân nên gọi tần số 3 phím lần lượt là: a, aq, aq^2

Ta có: $a = 415$ và $aq^2 = 466$. Nên $q = 1,06$

Suy ra: $aq = 440$

Vậy tần số của phím La là 440 Hz

Câu 81. Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210>). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

- a) 690 ngày;
- b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Lời giải

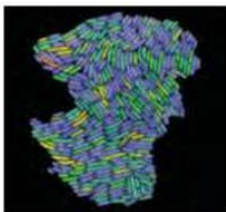
a) Sau $690 = 138 \cdot 5$ ngày, tức là sau 5 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là:

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1,25 \text{ (gam)}$$

b) Sau $7314 = 138 \cdot 53$ ngày, tức là sau 53 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là:

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{53} = 4,44 \cdot 10^{-15} \text{ (gam)}$$

Câu 82. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Hình 2

Lời giải

$$\text{Tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút là: } S_{20} = \frac{20 \cdot [1 - 2^{20}]}{1 - 2} = 20971500$$

Câu 83. Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022 ?

Lời giải

Dân số của thành phố từ năm 2022 lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $1 + 0,0075 = 1,0075$

Dân số của thành phố vào năm n là: $u_n = 2,1 \cdot 1,0075^{n-2022}$

a) $u_{2032} = 2,1 \cdot 1,0075^{2032-2022} = 2,26$

b) Khi $u_n = 2 \cdot u_{2022} \Leftrightarrow 1,0075^{n-2022} = 2 \Leftrightarrow n = 2115$

Vậy đến năm 2115, dân số thành phố gấp đôi so với năm 2022

Câu 84. Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là 9m.



(Hình 3)

a) Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba.

b) Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.

Lời giải

Độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ nhất là $u_1 = 9$

Độ cao các lần nảy lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = 0,6; u_n = 9 \cdot 0,6^{n-1}$

a) $u_3 = 9 \cdot 0,6^{3-1} = 3,24$

b) $S_5 = \frac{5 \cdot [1 - 0,6^5]}{1 - 0,6} = 11,528$

Câu 85. Giả sử một quần thể động vật ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12%/ năm, xuất cư là 2%/ năm, tử vong là 8%/ năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau hai năm.

Lời giải

Số cá thể của quần thể qua các năm tạo thành cấp số nhân có công bội là: $q = 1 + 0,12 - 0,02 - 0,08 = 1,02$

Số cá thể sau hai năm là: $110000 \cdot 1,02^2 = 114444$ (cá thể)

Câu 86. Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La Trung là 400 Hz và tần số của phím La Cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: <https://>

vi.wikipedia.org/wiki/Organ). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

$$\text{Ta có: } q^{12} = \frac{800}{400} = 2$$

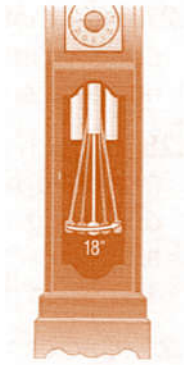
$$\text{Suy ra: } q = 1,06$$

Câu 87. Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo Niên giám thống kê năm 2020). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

Lời giải

$$\text{Ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là: } 97,6 \cdot (1 + 0,0114)^{20} = 122,4 \text{ (triệu người)}$$

Câu 88. Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46cm (H. 2.1).



Hình 2.1

Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

- a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?
b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?
(Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Do lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46cm, sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0,98$.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 46 \cdot 0,98^9 \approx 38,35(cm)$.

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S_{15} = u_1 \frac{1 - q^{15}}{1 - q} = 46 \cdot \frac{1 - 0,98^{15}}{1 - 0,98} \approx 601,29(cm).$$

Câu 89. Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

Lời giải

Gọi u_n là số người bị bệnh ở cuối tuần thứ n . Vì có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 5$ và công bội $q = 4$. Suy ra số người bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh ở cuối tuần 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 5 \cdot 4^9 = 1310720$ (người).

Câu 90. Nếu một kỹ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5%, thì mức lương của người kỹ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà người kĩ sư đó nhận được ở năm thứ n . Vì người kĩ sư được công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5% nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 180$ và công bội $q = 1 + 5\% = 1,05$. Khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty thì mức lương năm của người kĩ sư đó là $u_6 = u_1 q^5 = 229,73$ (triệu đồng)

Câu 91. Để tích lũy tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích lũy này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích lũy được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Hoa có trong chương trình tích lũy ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n). Kí hiệu $a = 0,5$ triệu đồng, $r = 0,5\%$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 1 là $u_1 = a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 2 là $u_2 = u_1(1+r) + a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 3 là

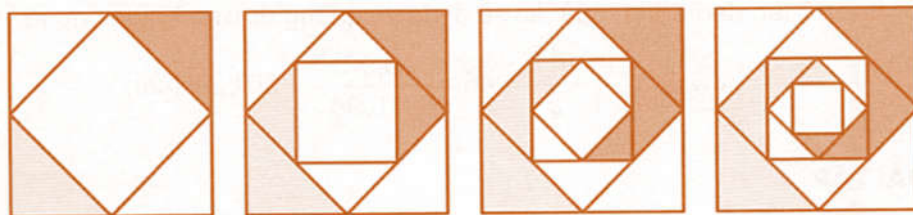
$$u_3 = u_2(1+r) + a = a(1+r)^2 + a(1+r) + a.$$

Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng n là

$$u_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a = a \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180, cô ấy sẽ tích lũy được $u_{180} = a \frac{(1+r)^{180} - 1}{r} = 145,41$ (triệu đồng). Khi đó, tuổi của con gái cô Hoa là $3 + 180 : 12 = 18$ tuổi.

Câu 92. Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16 cm. Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới).



Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.

Lời giải

Gọi u_n là diện tích hai tam giác được tô màu ở lần thực hiện thứ n . Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ban đầu.

Ở lần 1 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2}$ nên $u_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2}$ và độ dài cạnh hình vuông sau đó là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ở lần 2 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_2 = \frac{a^2}{2^3}$.

Ở lần 3 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_3 = \frac{a^2}{2^4}$.

Như vậy, dãy số (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = \frac{a^2}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy tổng diện tích sau năm lần thực hiện là $S_5 = u_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 124 (cm^2)$.

Chú ý. Diện tích cần tính bằng diện tích hình vuông ngoài cùng trừ đi diện tích hình vuông trong cùng rồi chia 2.

Câu 93. Anh Nam là một cầu thủ bóng đá chuyên nghiệp. Anh vừa kí hợp đồng 5 năm với một câu lạc bộ với mức lương năm khởi điểm là 300 triệu đồng. Chủ tịch câu lạc bộ đưa ra cho anh Nam ba phương án về lương như sau:

- Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng.
- Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.
- Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Em hãy tính giúp anh Nam xem với phương án lương nào thì tổng lương sau 5 năm của anh Nam là lớn nhất?

Lời giải

Ta tính tổng tiền lương của anh Nam theo từng phương án:

- Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$$5 \cdot 300 + 5 \cdot 50 = 1750 \text{ (triệu đồng)}$$

- Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$$300 + 300 \cdot (1+10\%) + 300 \cdot (1+10\%)^2 + 300 \cdot (1+10\%)^3 + 300(1+10\%)^4 = 1831,53 \text{ (triệu đồng)}.$$

- Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$$300 + 330 + 360 + 390 + 420 = 1800 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy anh Nam nên sử dụng Phương án 2 để nhận được tổng lương sau 5 năm là cao nhất.

Câu 94. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.



Lời giải

Ta có: 2 giờ = 120 phút = 6.20 phút. Do đó, sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n-1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 200$ và $q = 2$.

$$\text{Ta có } u_7 = u_1 \cdot q^6 = 200 \cdot 2^6 = 12800.$$

Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

Câu 95. Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8% / năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

Lời giải

Khoảng 215892500 đồng.

Câu 96. Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài 100m. Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

Lời giải

$$S_{10} = \frac{80(1-0,8^{10})}{1-0,8} \approx 357,05(m).$$

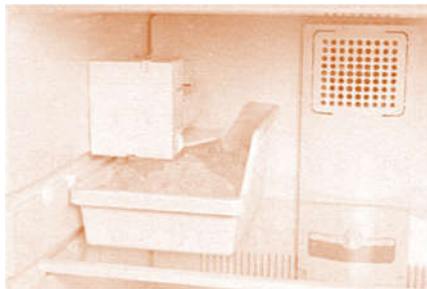
Câu 97. Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là $6144m^2$. Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng, biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.



Lời giải

$$u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 6144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 12(m^2).$$

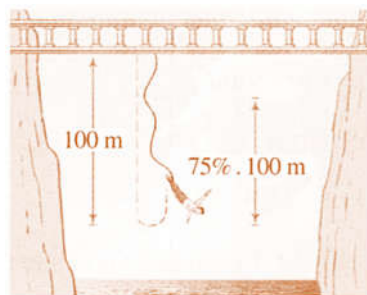
Câu 98. Một khay nước có nhiệt độ $20^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm đi 25%. Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.



Lời giải

$$u_5 = u_1 \cdot q^4 = 20 \cdot 0,75^4 \approx 6,33^\circ C.$$

Câu 99. Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài $100m$. Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3).



Hình 3

Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi $u_1(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ nhất, ta có: $u_1 = 100$; $v_1(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ nhất, ta có: $v_1 = 100 \cdot 0,75 = 75$

$u_2(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ hai, ta có: $u_2 = v_1 = 0,75u_1$;

$v_2(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ hai, ta có: $v_2 = 0,75u_2 = 0,75v_1$.

Như vậy, ta có hai cấp số nhân đều có công bội $0,75$ là: $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ và $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ với $u_1 = 100$ và $v_1 = 75$.

$$\text{Ta có: } u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right); v_1 + v_2 + \dots + v_{10} = 75 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right).$$

Vậy quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên (tính từ lúc bắt đầu nhảy) là:

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{10}) + (v_1 + v_2 + \dots + v_{10}) = 175 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right) \approx 661(m).$$

Câu 100. Anh Dũng kí hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

Lời giải

1912 triệu đồng.

Câu 101. Một công ty mua một chiếc máy với giá 1 tỉ 200 triệu đồng. Công ty nhận thấy, trong vòng 5 năm đầu, tốc độ khấu hao là 25% / năm (tức là sau mỗi một năm, giá trị còn lại của chiếc máy bằng 75% giá trị của năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của chiếc máy đó sau 1 năm, 2 năm.

b) Sau 5 năm, giá trị của chiếc máy đó còn khoảng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Giá trị của máy sau 1 năm, 2 năm lần lượt là:

$$1200 \cdot 0,75 = 900 \text{ (triệu đồng); } 1200 \cdot 0,75^2 = 675 \text{ (triệu đồng).}$$

b) Sau 5 năm, giá trị chiếc máy đó còn là: $1200 \cdot 0,75^5 \approx 285$ (triệu đồng).

Câu 102. Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: "Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay". Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Hỏi sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả bao nhiêu điều ước?

Lời giải

Ngày thứ nhất Aladin ước 3 điều.

Ngày thứ hai Aladin ước $2 \cdot 3$ điều.

Ngày thứ ba Aladin ước $2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3$ điều.

Ngày thứ tư Aladin ước $2 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3$ điều. ...

Ngày thứ 10 Aladin ước $2^9 \cdot 3$ điều.

$$\text{Vậy sau 10 ngày Aladin đã ước: } 3(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9) = 3 \left(\frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} \right) = 3069 \text{ điều.}$$

Câu 103. Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ polonium 210 là 138 ngày (nghĩa là sau 138 ngày khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa). Tính khối lượng còn lại của 20 gam polonium 210 sau 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Lời giải

Gọi u_n (gam) là khối lượng còn lại của 20 gam polonium 210 sau n chu kỳ bán rã. Ta có 7314 ngày gồm 53 chu kỳ bán rã. Theo đề bài ra, ta cần tính u_{53} .

Từ giả thiết suy ra đây (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = \frac{20}{2} = 10$ và công bội $q = 0,5$. Suy ra

$$u_n = 10 \cdot (0,5)^{n-1}.$$

$$\text{Do đó } u_{53} = 10 \cdot (0,5)^{52} \approx 2,22 \cdot 10^{-15}.$$

Câu 104. Ông Minh gửi số tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng lãi suất 7% /năm. Giả sử trong khoảng thời gian gửi tiền ông Minh không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi, hỏi sau 10 năm thì tổng số tiền cả vốn lẫn lãi mà ông nhận được là bao nhiêu (đơn vị: đồng, tính kết quả gần đúng đến hàng nghìn)?

Lời giải

Gọi r là lãi suất tiền gửi theo năm: $r = 0,07$ / năm; tiền gửi là 10^8 (đồng).

Sau năm thứ nhất, số tiền người gửi nhận được là:

$$10^8 + 10^8 r = 10^8 (1 + r).$$

Sau năm thứ hai, số tiền người gửi nhận được là:

$$10^8 (1 + r) + 10^8 (1 + r) r = 10^8 (1 + r)(1 + r) = 10^8 (1 + r)^2.$$

Theo quy luật đó, ta thấy số tiền mà ông Minh nhận được sau n năm là số hạng thứ n của một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 10^8 (1 + r)$, công bội $q = 1 + r$.

Sau năm thứ n , ông Minh nhận được số tiền:

$$u_n = 10^8 (1 + r)^n.$$

Sau 10 năm, số tiền ông Minh nhận được:

$$u_{10} = 10^8 (1 + 0,07)^{10} \approx 196715000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 105. Theo báo cáo của Chính phủ, dân số của nước ta tính đến tháng 12 năm 2018 là 95,93 triệu người, nếu tỉ lệ tăng trưởng dân số trung bình hằng năm là 1,33% thì dân số nước ta vào tháng 12 năm 2025 là bao nhiêu? (Tính theo đơn vị triệu người, làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Theo tỉ lệ tăng trưởng 1,33% thì:

- Tháng 12 năm 2019, dân số nước ta là:

$$u_1 = 95,93 + 95,93 \cdot \frac{1,33}{100} = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) \text{ (triệu người)}.$$

- Tháng 12 năm 2020, dân số nước ta là:

$$\begin{aligned} u_2 &= 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) + 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) \cdot \frac{1,33}{100} \\ &= 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) \left(1 + \frac{1,33}{100} \right) = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right)^2 \text{ (triệu người)}. \end{aligned}$$

- Theo quy luật đó, ta biết dân số nước ta vào tháng 12 năm thứ n kể từ năm 2019 được tính theo công thức

$$u_n = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right)^n \text{ (triệu người)}.$$

- Vậy vào tháng 12 năm 2025 (tức $n = 2025 - 2018 = 7$), dân số nước ta là:

$$u_7 = 95,93 \left(1 + \frac{1,33}{100} \right)^7 \approx 105,23 \text{ (triệu người)}.$$

CHỦ ĐỀ 3. QUAN HỆ SONG SONG

- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

NỘI DUNG CÂU HỎI

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1. Hãy giải thích tại sao trong thực tiễn có nhiều đồ vật được thiết kế gồm ba chân như chân đỡ máy ảnh, giá treo tranh, kiềng ba chân treo nồi,...



Câu 2. Căng một sợi dây sao cho hai đầu của sợi dây nằm trên mặt bàn. Khi đó, sợi dây có nằm trên mặt bàn hay không?



Câu 3. Chấm phạt đền trên sân bóng đá cho ta hình ảnh về một điểm thuộc một mặt phẳng. Hãy tìm thêm các ví dụ khác cũng gọi cho ta hình ảnh đó.



Câu 4. Chiếc xà ngang đặt tựa lên hai điểm A, B của trụ nhảy thể hiện hình ảnh của một đường thẳng đi qua hai điểm đó. Có thể tìm được một đường thẳng khác cũng đi qua hai điểm A, B hay không?



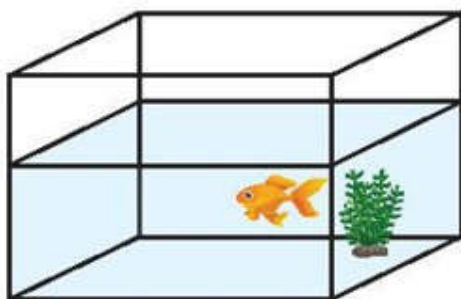
Câu 5. Trong Hình 4.4 là một khối rubik có bốn đỉnh và bốn mặt, mỗi mặt là một tam giác.



Hình 4.4

- a) Đặt khối rubik sao cho ba đỉnh của mặt màu đỏ đều nằm trên mặt bàn. Khi đó, mặt màu đỏ của khối rubik có nằm trên mặt bàn hay không?
b) Có thể đặt khối rubik sao cho bốn đỉnh của nó đều nằm trên mặt bàn hay không?

Câu 6. Trong Hình 4.7, mặt nước và thành bể có giao nhau theo đường thẳng hay không?



Hình 4.7

Câu 7. Để tránh cho cửa ra vào không bị va đập vào các đồ dùng xung quanh (do mở cửa quá mạnh hoặc do gió to đập cửa), người ta thường sử dụng một phụ kiện là hít cửa nam châm. Hãy giải thích tại sao khi cửa được hút tới vị trí của nam châm thì cánh cửa được giữ cố định.



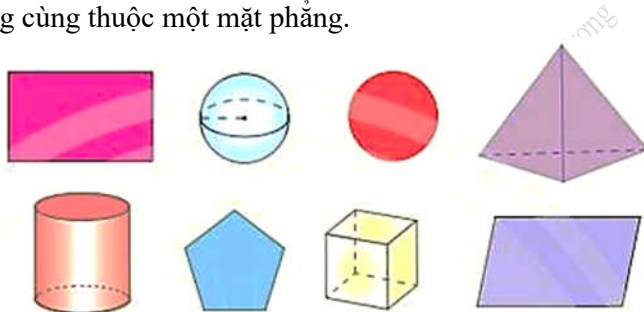
Câu 8. Tại các nhà hàng, khách sạn, nhân viên phục vụ bàn thường xuyên phải bưng bê nhiều khay, đĩa đồ ăn khác nhau. Một trong những nguyên tắc nhân viên cần nhớ là khay phải được bưng bằng ít nhất 3 ngón tay. Hãy giải thích tại sao.



Câu 9. Bàn cắt giấy là một dụng cụ được sử dụng thường xuyên ở các cửa hàng photo-copy. Bàn cắt giấy gồm hai phần chính: phần bàn hình chữ nhật có chia kích thước giấy và phần dao cắt có một đầu được cố định vào bàn. Hãy giải thích tại sao khi sử dụng bàn cắt giấy thì các đường cắt luôn là đường thẳng.



Câu 10. Môn học Hình học phẳng tìm hiểu tính chất của các hình cùng thuộc một mặt phẳng. Môn học Hình học không gian tìm hiểu tính chất của các hình trong không gian, những hình này có thể chứa những điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.



Hãy phân loại các hình sau thành hai nhóm hình khác nhau.

Câu 11. Mặt bàn, mặt bảng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Hãy chỉ thêm các ví dụ khác về hình ảnh một phần của mặt phẳng.



Câu 12. Quan sát Hình 5 và cho biết muốn gác một cây sào tập nhảy cao, người ta cần dựa nó vào mấy điểm trên hai cọc đỡ.



Hình 5

Câu 13. Quan sát Hình 7 và cho biết giá đỡ máy ảnh tiếp đất tại mấy điểm. Tại sao giá đỡ máy ảnh thường có ba chân?



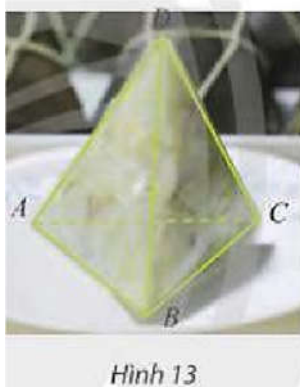
Hình 7

Câu 14. Quan sát Hình 10 và cho biết người thợ mộc kiểm tra mặt bàn có phẳng hay không bằng một cây thước thẳng như thế nào.



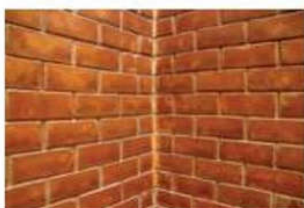
Hình 10

Câu 15. Quan sát Hình 13 và cho biết bốn đỉnh A, B, C, D của cái bánh giò có cùng nằm trên một mặt phẳng hay không.



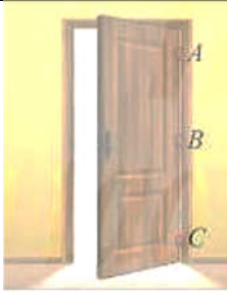
Hình 13

Câu 16. Quan sát Hình 14 và mô tả phần giao nhau của hai bức tường.



Hình 14

Câu 17. Tại sao muốn cánh cửa đóng mở được êm thì các điểm gắn bản lề A, B, C của cánh cửa và mặt tường (Hình 19) phải cùng nằm trên một đường thẳng?



Hình 19

Câu 18. Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.



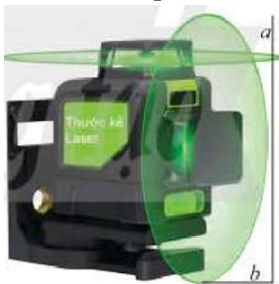
Hình 28

Câu 19. Trong xây dựng, người ta thường dùng máy quét tia laser để kẻ các đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà. Tìm giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi các tia laser OA và OB với các mặt tường trong Hình 29.



Hình 29

Câu 20. Thước laser phát ra tia laser, khi tia này quay sẽ tạo ra mặt phẳng ánh sáng (Hình 41).



Hình 41

Giải thích tại sao các thước kẻ laser lại giúp người thợ xây dựng kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà.

Câu 21. Sân vận động Old Trafford (Hình 2) ở thành phố Manchester, có biệt danh là "Nhà hát của những giấc mơ", với sức chứa 75635 người, là sân vận động lớn thứ hai ở Vương quốc Anh.

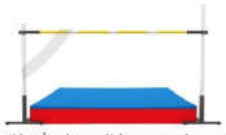


(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 2

Quan sát Hình 2 và cho biết, mặt sân vận động thường được làm phẳng hay cong.

Câu 22. Hình 9 là hình ảnh xà ngang trong môn nhảy cao.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 9

Quan sát Hình 9 và cho biết ta cần bao nhiêu điểm đỡ để giữ cố định được xà ngang đó.

Câu 23. Quan sát Hình 10. Đó là hình ảnh bếp củi với kiềng ba chân. "Kiềng ba chân" là vật dụng bằng sắt, có hình vòng cung được gắn ba chân, dùng để đặt nồi lên khi nấu bếp. Bếp củi và kiềng ba chân là hình ảnh hết sức quen thuộc với nhiều gia đình ở Việt Nam. Vì sao kiềng ba chân khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh?



Hình 10

Câu 24. Hình 13 minh họa người thợ đang kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà. Hãy cho biết người thợ kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà bằng cách nào.



Hình 13

Câu 25. Giải thích tại sao:

a) Chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại địa hình mà vẫn đứng vững (Hình 14).



Hình 14

b) Bàn, ghế bốn chân thường hay bị cập kênh.

Câu 26. Hình 15 mô tả một phần của phòng học.

Nếu coi bức tường chứa bảng và sàn nhà là hình ảnh của hai mặt phẳng thì giao của hai mặt phẳng đó là gì?



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)
Hình 15

Câu 27. Hình 25 là hình ảnh của khối rubik tam giác (Pyraminx). Quan sát Hình 25 và trả lời các câu hỏi:



Hình 25

- Khối rubik tam giác có bao nhiêu đỉnh? Các đỉnh có cùng nằm trong một mặt phẳng không?
- Khối rubik tam giác có bao nhiêu mặt? Mỗi mặt của khối rubik tam giác là những hình gì?

Câu 28. Khi trát tường, dụng cụ không thể thiếu của người thợ là thước dẹt dài (Hình 28). Công dụng của thước dẹt này là gì? Giải thích.



Hình 28

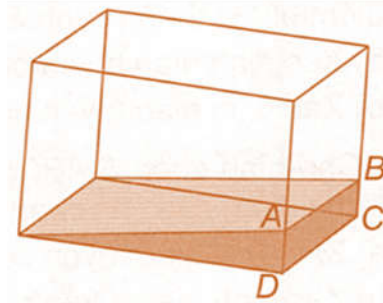
Câu 29. Hình 29 là hình ảnh của chặn giấy bằng gỗ có bốn mặt phân biệt là các tam giác. Vẽ hình biểu diễn của chặn giấy bằng gỗ đó.



Hình 29

Câu 30. Đánh dấu một điểm trên mép của tờ giấy AB và dùng kéo cắt một đường bất kì đi qua điểm đó (trong khi cắt không xoay kéo). Hãy giải thích vì sao đường cắt nhận được trên tờ giấy luôn là đường thẳng.

Câu 31. Bạn Huy đổ nước màu vào một chiếc bể cá có các mặt đều làm bằng kính phẳng. Sau một vài hôm nước bay hơi một phần và để lại trên thành bể các vết màu như trong Hình 4.5.



Hình 4.5

Huy quan sát thấy rằng, dù bề mặt có hình dạng như thế nào, miễn là các mặt đều phẳng, thì vết màu trên mỗi thành bề mặt đều là các đường thẳng. Hãy giải thích vì sao.

Câu 32. Một số chiếc bàn có thiết kế khung sắt là hai hình chữ nhật có thể xoay quanh một trục, mặt bàn là một tấm gỗ phẳng được đặt lên phần khung như trong Hình 4.6.



Hình 4.6

Tính chất hình học nào giải thích việc mặt bàn có thể được giữ cố định bởi khung sắt? (Giả sử khung sắt chắc chắn và được đặt cân đối).

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Câu 33. Quan sát bốn tuyến đường trong Hình 4.13 và trả lời các câu hỏi sau:



Hình 4.13

- Hai tuyến đường nào giao nhau?
- Hai tuyến đường nào không giao nhau?
- Hai tuyến đường nào song song?

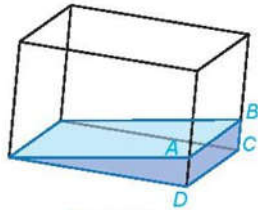
Câu 34. Một chiếc gậy được đặt một đầu dựa vào tường và đầu kia trên mặt sàn (H.4.20).



Hình 4.20

Hỏi có thể đặt chiếc gậy đó song song với một trong các mép tường hay không?

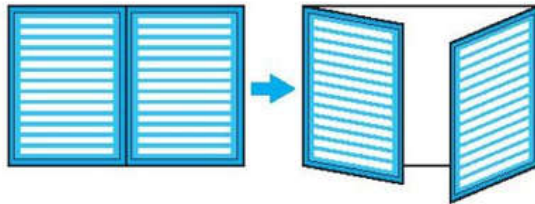
Câu 35. Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như Hình 4.26.



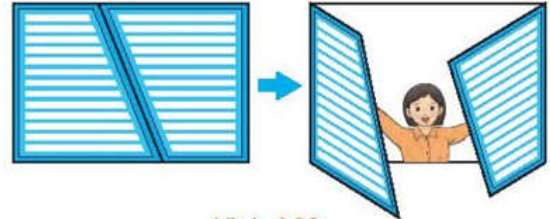
Hình 4.26

Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.

Câu 36. (Đố vui) Khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau (H.4.29). Hãy giải thích tại sao.



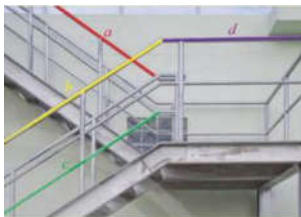
Hình 4.29



Hình 4.30

Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang như Hình 4.30 thì có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau hay không?

Câu 37. Mô tả vị trí giữa các cặp đường thẳng a và b , b và c , c và d có trong hình bên.



Câu 38. Hãy chỉ ra các ví dụ về hai đường thẳng song song, cắt nhau và chéo nhau trong hình cầu sắt ở Hình 6.

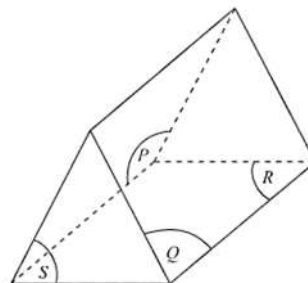


Hình 6

Câu 39. Một chiếc lều (Hình 16a) được minh họa như Hình 16b.



a)

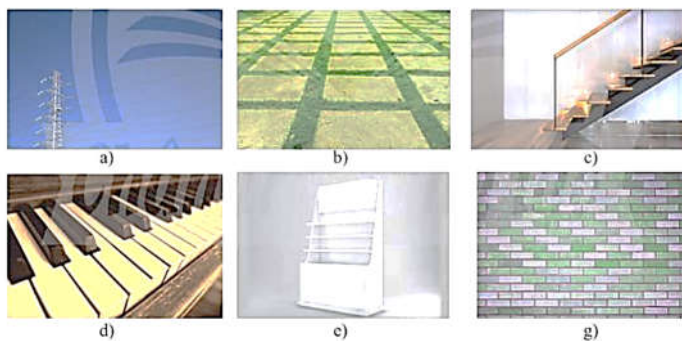


b)

Hình 16

- Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến song song.
- Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến đồng quy.

Câu 40. Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



Hình 18

Câu 41. Trong thực tế, ta quan sát thấy nhiều hình ảnh gợi nên những đường thẳng song song với nhau. Chẳng hạn các cột treo cờ của tổ chức và các nước thành viên ASEAN (Hình 30).

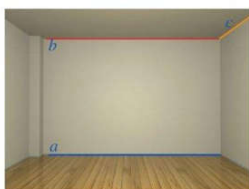


(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 30

Hai đường thẳng song song trong không gian có tính chất gì?

Câu 42. Quan sát một phần căn phòng (Hình 35), hãy cho biết vị trí tương đối của các cặp đường thẳng a và b ; a và c ; b và c .



Hình 35

Câu 43. Quan sát phòng học của lớp và nêu lên hình ảnh của hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau.

Câu 44. Quan sát Hình 43 và cho biết vị trí tương đối của hai trong ba cột tuabin gió có trong hình.



Hình 43

Câu 45. Một chiếc thang được đặt sao cho hai đầu của chân thang dựa vào tường, hai đầu còn lại nằm trên sàn nhà ($H \cdot 4 \cdot 12$).



Hình 4.12

Biết rằng chiếc thang có dạng hình chữ nhật, hãy giải thích vì sao hai đầu của chân thang nằm trên sàn nhà lại cách đều đường chân tường.

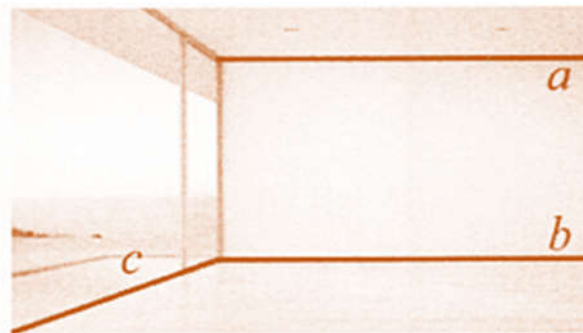
Câu 46. Bạn Hà lấy một tờ giấy hình chữ nhật và gấp tờ giấy sao cho hai mép của tờ giấy song song với nhau (H.4.13).



Hình 4.13

Hà thấy rằng dù gấp thế nào thì đường nếp gấp vẫn luôn song song với hai mép của tờ giấy. Hãy giải thích vì sao.

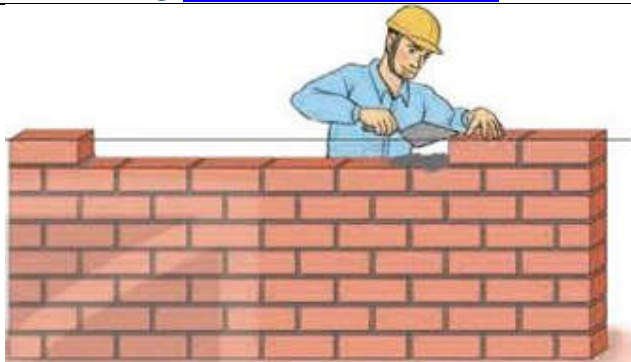
Câu 47. Quan sát hình căn phòng (Hình 16), hãy cho biết vị trí tương đối của các cặp đường thẳng a và b ; a và c ; b và c .



Hình 16

Đường thẳng và mặt phẳng song song

Câu 47. Khi xây tường gạch, người thợ thường bắt đầu với Việc xây các Viên gạch dẫn, sau đó căng dây nhợ dọc theo cạnh của các Viên gạch dẫn đó để làm chuẩn rồi mới xây các Viên gạch tiếp theo. Việc sử dụng dây căng như vậy có tác dụng gì? Toán học mô tả vị trí giữa dây căng, các mép gạch với mặt đất như thế nào?



Câu 48. Quan sát hình ảnh khung thành bóng đá và nhận xét vị trí của xà ngang, cột dọc, thanh chống và thanh bên của khung thành với mặt đất.



Câu 49. Bạn Nam quan sát thấy dù cửa ra vào được mở ở vị trí nào thì mép trên của cửa luôn song song với một mặt phẳng cố định. Hãy cho biết đó là mặt phẳng nào và giải thích tại sao.



Câu 50. Hãy chỉ ra trong Hình 9 các đường thẳng lần lượt nằm trong, song song, cắt mặt phẳng sàn nhà.



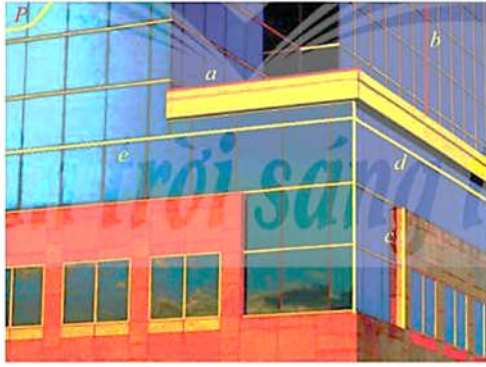
Hình 9

Câu 51. Làm thế nào để đặt cây thước kẻ a để nó song song với các trang của một cuốn sách?



Hình 18

Câu 52. Mô tả vị trí tương đối của các đường thẳng a, b, c, d, e với mặt phẳng (P) là mặt trước của toà nhà (Hình 19).



Hình 19

Câu 53. Trong thực tiễn, ta thường gặp nhiều đồ dùng, vật thể gọi nên hình ảnh đường thẳng song song với mặt phẳng. Chẳng hạn, thanh barrier song song với mặt đường (Hình 44).



Hình 44

Câu hỏi khởi động. Thế nào là đường thẳng song song với mặt phẳng trong không gian?

Câu 54. Quan sát các xà ngang trên sân tập thể dục ở Hình 47. Hãy cho biết vị trí tương đối của các xà ngang đó với mặt sân



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 47

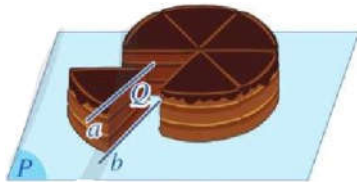
Câu 55. Trong Hình 56, hai mặt tường của căn phòng gọi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến b , mép cột gọi nên hình ảnh đường thẳng a . Cho biết đường thẳng a có song song với giao tuyến b hay không?



Hình 56

Câu 56. Trong phòng học của lớp, hãy nêu những hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng.

Câu 57. Trong Hình 57, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gọi nên hình ảnh mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (P) ; mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b trong đó a song song với mặt phẳng (P) . Cho biết hai đường thẳng a, b có song song với nhau hay không.



Hình 57

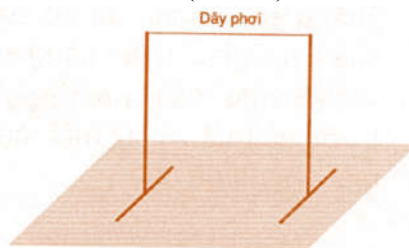
Câu 58. Một tấm bảng hình chữ nhật được đặt dựa vào tường như trong Hình 4.18.



Hình 4.18

Hãy giải thích vì sao mép trên của tấm bảng song song với mặt đất, mép dưới của tấm bảng song song với mặt tường.

Câu 59. Để dựng dây phơi quần áo, bác Việt lắp hai thanh sắt thẳng đứng có chiều dài bằng nhau trên mặt đất và căng dây nối hai đầu còn lại của hai thanh sắt (H.4.19).



Hình 4.19

Khi đó, dây phơi có song song với mặt đất không? Giải thích vì sao.

Câu 60. Một người thợ đang cố gắng đặt tấm kính $ABCD$ (mép AB không song song với CD) dựa vào tường sao cho mép kính CD song song với đường chân tường, còn mép kính AB nằm hoàn toàn trên tường. Sau một hồi loay hoay, người thợ vẫn không thể đặt được tấm kính như mong muốn. Hãy giải thích tại sao.



Hình 4.33

Có cách nào đặt tấm kính để một mép kính song song với đường chân tường, một mép kính khác nằm hoàn toàn trên tường không?

Câu 61. Trong các không gian hẹp, người ta thường thiết kế tủ đựng quần áo có cánh cửa trượt. Tủ này bao gồm khoang tủ, cánh cửa trượt và hai đường ray trượt cho mép trên và mép dưới cánh cửa (Hình 25). Biết rằng cánh cửa trượt có dạng hình chữ nhật và có thể kéo trượt bình thường, khi đó bạn Minh nói: "Đường ray trượt ở mép trên cửa song song với mặt đáy của tủ quần áo". Em hãy cho biết phát biểu của bạn Minh đúng hay sai? Vì sao?



Hình 25

Hai mặt phẳng song song

Câu 62. Các đầu bếp chuyên nghiệp luôn có kỹ năng dùng dao điều luyện để thái thức ăn như rau, củ, thịt, cá,... thành các miếng đều nhau và đẹp mắt. Các nhát cắt cần tuân thủ nguyên tắc gì để đạt được điều đó?



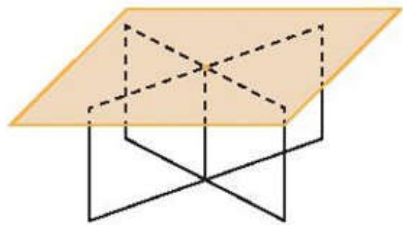
Câu 63. Các mặt bậc thang trong Hình 4.40 gợi nên hình ảnh về các mặt phẳng không có điểm chung.



Hình 4.40

Hãy tìm thêm một số ví dụ khác cũng gợi nên hình ảnh đó.

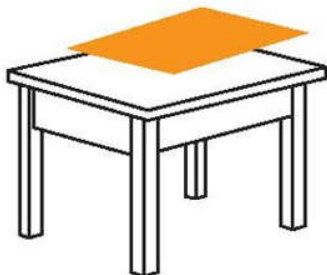
Câu 64. Một chiếc bàn có phần chân là hai khung sắt hình chữ nhật có thể xoay quanh một trục như trong Hình 4.43.



Hình 4.43

Khi mặt bàn được đặt lên phần chân bàn thì mặt bàn luôn song song với mặt đất. Hãy giải thích tại sao.

Câu 65. Đặt một tấm bìa cứng lên một góc của mặt bàn nằm ngang (H.4.44) sao cho mặt bìa song song với mặt đất. Khi đó mặt bìa có trùng với mặt bàn hay không?

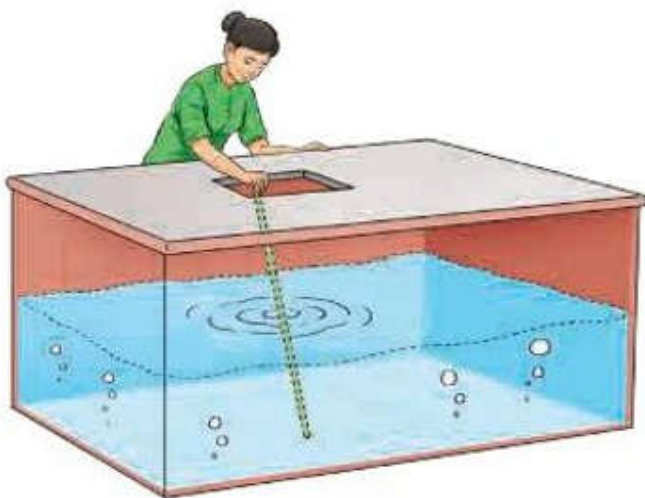


Hình 4.44

Câu 66. Hình ảnh nào dưới đây gợi nên hình ảnh về hình lăng trụ có đáy là hình bình hành?



Câu 67. Để xác định mực nước trong một chiếc bể có dạng hình hộp, bác Hà đặt một thanh gỗ đủ dài vào trong bể sao cho một đầu của thanh gỗ dựa vào mép của nắp bể, đầu còn lại nằm trên đáy bể (H.4.53).



Hình 4.53

Sau đó bác Hà rút thanh gỗ ra ngoài và tính tỉ lệ giữa độ dài của phần thanh gỗ bị ngâm trong nước và độ dài của cả thanh gỗ. Tỉ lệ này chính bằng tỉ lệ giữa mực nước và chiều cao của bể. Hãy giải thích vì sao.

Câu 68. Cầu thang xương cá là dạng cầu thang có hình dáng tương tự như những đốt xương cá, thường có những bậc cầu thang với khoảng mở lớn, tạo được sự nhẹ nhàng và thoáng đãng cho không gian sống. Trong Hình 4.55, phần mép của mỗi bậc thang nằm trên tường song song với nhau. Hãy giải thích tại sao.



Hình 4.55

Câu 69. Bề mặt trên của mỗi bậc thang này được đặt như thế nào so với mặt đất?



Câu 70. Tìm một số mặt phẳng song song có trong hình chụp căn phòng ở Hình 4.



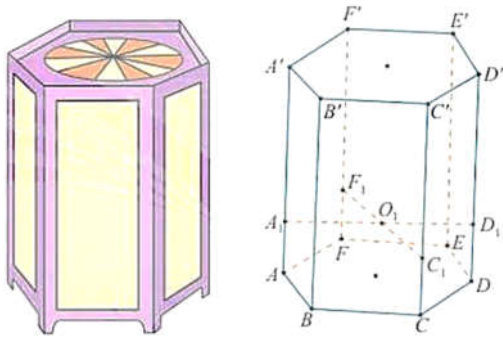
Hình 4

Câu 71. Khi dùng dao cắt các lớp bánh (Hình 11), giả sử bề mặt của các lớp bánh là các mặt phẳng song song và con dao được xem như mặt phẳng (P) , nêu kết luận về các giao tuyến tạo bởi (P) với các bề mặt của các lớp bánh. Giải thích.



Hình 11

Câu 72. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF \cdot A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (Hình 19).



Hình 19

- Xác định giao tuyến của $mp(A_1D_1, F_1C_1)$ với các mặt bên của lăng trụ.
- Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70\text{ cm}$. Tính CC_1 và C_1C' .

Câu 73. Chỉ ra các mặt phẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các mặt phẳng song song trong thực tế.



a)



b)

Hình 20

Câu 74. Khi cắt một chiếc bánh ga-tô hình hộp, Thuý nhận thấy vết cắt ở mặt trên và mặt dưới của bánh gọi nên hình ảnh về hai đường thẳng song song với nhau. Hỏi nhận xét của Thuý có đúng không? Vì sao?

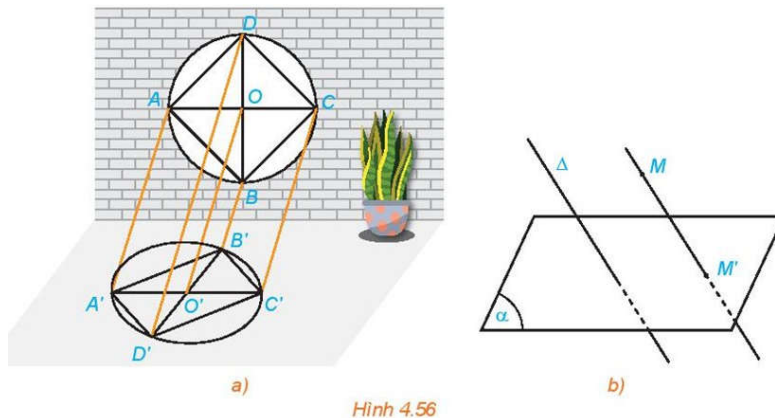
Câu 75. Một chiếc bình nước hình trụ được đặt trên bàn, lượng nước trong bình bằng đúng một nửa dung tích của bình. Hoàng đặt một chiếc ống hút vào trong bình sao cho một đầu của ống hút chạm vào đáy bình còn một đầu chạm vào miệng bình. Hoàng nói rằng độ dài của phần ống hút bị ướt bằng $\frac{1}{3}$ độ dài của toàn bộ ống hút. Hỏi Hoàng nói đúng hay sai? Vì sao?

PHÉP CHIẾU SONG SONG

Câu 76. Trong bóng đá, công nghệ Goal-line được sử dụng để xác định xem bóng đã hoàn toàn vượt qua vạch vôi hay chưa, từ đó giúp trọng tài đưa ra quyết định về một bàn thắng có được ghi hay không. Yếu tố hình học nào cho ta biết quả bóng đã vượt qua vạch vôi hay chưa?



Câu 77. Một khung cửa sổ có dạng hình tròn với các chấn song tạo thành hình vuông $ABCD$, hai đường chéo của hình vuông cắt nhau tại O . Dưới ánh mặt trời, khung cửa và các chấn song đổ bóng lên sàn nhà (H.4.56a). Quan sát hình vẽ và trả lời các câu hỏi sau:

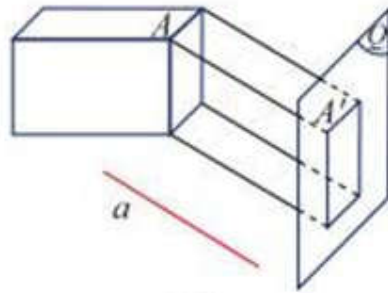


Hình 4.56

- Các đường thẳng nối mỗi điểm A, B, C với bóng A', B', C' có đôi một song song hay không?
- Làm thế nào để xác định được bóng đổ trên sàn nhà của mỗi điểm trên khung cửa sổ?

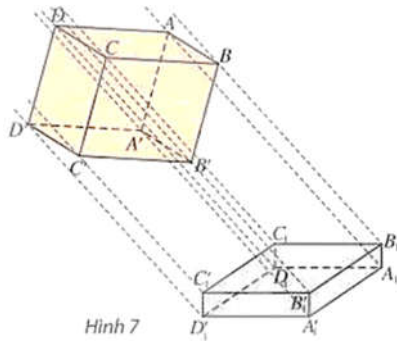
Câu 78. Trong hình ảnh mở đầu, khi một bàn thắng được ghi thì hình chiếu của quả bóng trên mặt đất theo phương thẳng đứng có vị trí như thế nào với vạch vôi?





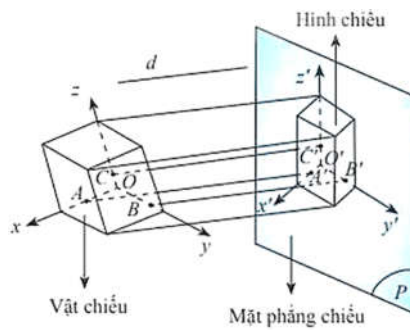
Hình 2

Câu 84. Quan sát Hình 7 và cho biết các tia nắng song song đã tạo ra hình chiếu của hình hộp như thế nào trên nền nhà.



Hình 7

Câu 85. Vẽ hình biểu diễn của:



Hình 11

- Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều;
- Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều;
- Hình hộp.

Câu 86. Hình 78 mô tả bóng nắng của một lan can cầu đường bộ trên mặt đường, tức là hình chiếu của lan can qua phép chiếu song song lên mặt đường. Thanh lan can gọi nên hình ảnh đường thẳng nối các điểm A, B, C , ở đó B nằm giữa A và C . Gọi các điểm A', B', C' lần lượt là bóng nắng của các điểm A, B, C trên mặt đường.

Quan sát Hình 78 và cho biết:



Hình 78

- a) Các điểm A', B', C' có thẳng hàng hay không. Nếu có, điểm B' có nằm giữa hai điểm A' và C' hay không;
b) Bóng nắng của thanh lan can là hình gì.

Câu 87. Hình 79 mô tả bóng nắng của chiếc thang gỗ trên bức tường, tức là hình chiếu của chiếc thang đó qua phép chiếu song song lên bức tường. Các thanh gỗ ngang gợi nên hình ảnh các đường thẳng song song với nhau.

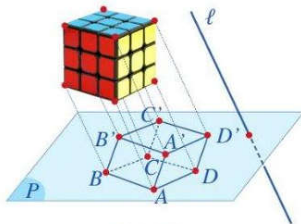
Quan sát Hình 79 và cho biết bóng của các đường thẳng song song đó có là các đường thẳng song song hay không.



Hình 79

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Câu 88. Cho khối rubik không có điểm chung nào với mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P) . Hãy xác định ảnh của khối rubik qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ (Hình 84).



Hình 84

Câu 89. Vẽ hình biểu diễn của các vật trong Hình 89 và Hình 90.

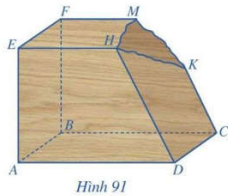


Hình 89



Hình 90

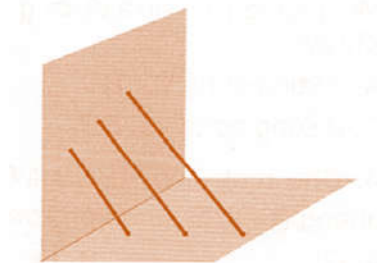
Câu 90. Một khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD) // (EFMH), CK // DH$. Khối gỗ bị hỏng một góc (Hình 91). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối theo mặt phẳng (R) đi qua K và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.



Hình 91

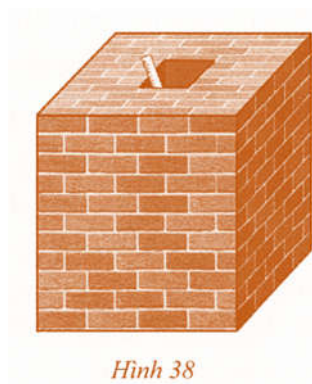
- a) Hãy giúp bác thợ mộc xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ để cắt được chính xác.
 b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm DH, BF với mặt phẳng (R) . Biết $BF = 60\text{ cm}, DH = 75\text{ cm}, CK = 40\text{ cm}$. Tính FJ .

Câu 91. Ba chiếc gậy thẳng được đặt dựa vào tường và đôi một song song với nhau (H.4.32). Giải thích vì sao nếu ba đầu gậy trên tường thẳng hàng thì ba đầu gậy trên mặt sàn cũng thẳng hàng.



Hình 4.32

Câu 92. Phần trong của một bể đựng nước được xây có dạng hình hộp như Hình 38. Để xác định tỉ số của độ cao mực nước trong bể với chiều cao của lòng bể, bạn Minh làm như sau: "Lấy một thanh thước thẳng đủ dài cắm vào bể sao cho một đầu chạm đáy bể và để thước tựa vào mép dưới của thành miệng bể, đánh dấu điểm tựa. Sau đó rút thước lên, tính tỉ số độ dài của phần thước chìm trong nước và độ dài của phần thước từ điểm được đánh dấu đến điểm đầu chạm đáy bể. Tỉ số đó chính bằng tỉ số của độ cao mực nước trong bể với chiều cao của lòng bể". Bạn Minh làm có đúng không? Vì sao?



Hình 38

CHỦ ĐỀ 3. QUAN HỆ SONG SONG

- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

LỜI GIẢI THAM KHẢO

ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1. Hãy giải thích tại sao trong thực tiễn có nhiều đồ vật được thiết kế gồm ba chân như chân đỡ máy ảnh, giá treo tranh, kiềng ba chân treo nồi,...



Lời giải

Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng. Do đó, khi thiết kế các đồ vật gồm ba chân như chân đỡ máy ảnh, giá treo tranh, kiềng ba chân treo nồi,... ta thấy các đồ vật này có thể đứng thẳng mà không bị đổ trên các bề mặt bởi vì các ba chân của các đồ vật này giống như 3 điểm không thẳng hàng.

Câu 2. Căng một sợi dây sao cho hai đầu của sợi dây nằm trên mặt bàn. Khi đó, sợi dây có nằm trên mặt bàn hay không?



Lời giải

Căng một sợi dây sao cho hai đầu của sợi dây nằm trên mặt bàn. Khi đó, sợi dây nằm trên mặt bàn.

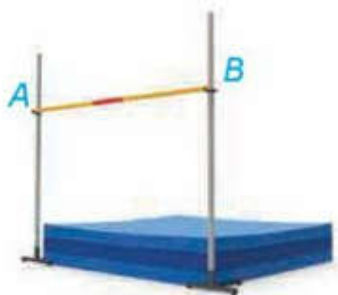
Câu 3. Châm phật đèn trên sân bóng đá cho ta hình ảnh về một điểm thuộc một mặt phẳng. Hãy tìm thêm các ví dụ khác cũng gọi cho ta hình ảnh đó.



Lời giải

- Một cục nam châm tròn nhỏ gắn trên mặt bảng cho ta hình ảnh về một điểm thuộc mặt phẳng;
- Một chiếc đầu đinh được gắn vào mặt bàn khi đinh đóng vào bàn cho ta hình ảnh về một điểm thuộc mặt phẳng;

Câu 4. Chiếc xà ngang đặt tựa lên hai điểm A, B của trụ nhảy thể hiện hình ảnh của một đường thẳng đi qua hai điểm đó. Có thể tìm được một đường thẳng khác cũng đi qua hai điểm A, B hay không?



Lời giải

Không thể tìm được đường thẳng nào khác đi qua hai điểm A, B đã cho ngoài đường thẳng tạo bởi xà ngang.

Câu 5. Trong Hình 4.4 là một khối rubik có bốn đỉnh và bốn mặt, mỗi mặt là một tam giác.



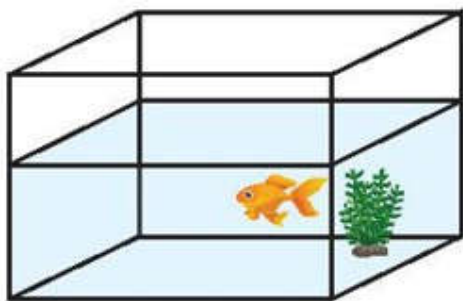
Hình 4.4

- a) Đặt khối rubik sao cho ba đỉnh của mặt màu đỏ đều nằm trên mặt bàn. Khi đó, mặt màu đỏ của khối rubik có nằm trên mặt bàn hay không?
- b) Có thể đặt khối rubik sao cho bốn đỉnh của nó đều nằm trên mặt bàn hay không?

Lời giải

- a) Khi đặt khối rubik sao cho ba đỉnh của mặt màu đỏ đều nằm trên mặt bàn, mặt màu đỏ của khối rubik nằm trên mặt bàn.
- b) Không thể đặt khối rubik sao cho 4 đỉnh của nó đều nằm trên mặt bàn.

Câu 6. Trong Hình 4.7, mặt nước và thành bể có giao nhau theo đường thẳng hay không?



Hình 4.7

Lời giải

Trong Hình 4.7, mặt nước và thành bể giao nhau theo đường thẳng.

Câu 7. Để tránh cho cửa ra vào không bị va đập vào các đồ dùng xung quanh (do mở cửa quá mạnh hoặc do gió to đập cửa), người ta thường sử dụng một phụ kiện là hít cửa nam châm. Hãy giải thích tại sao khi cửa được hút tới vị trí của nam châm thì cánh cửa được giữ cố định.



Lời giải

Phụ kiện hít cửa nam châm đại diện cho 1 điểm cố định, một cạnh của cánh cửa đại diện cho một đường thẳng không chứa điểm phụ kiện hít cửa nam châm. Chính vì vậy có một mặt phẳng được xác định khi phụ kiện hít cửa và một cạnh của cánh cửa, khi đó cánh cửa luôn được giữ giữa cố định.

Câu 8. Tại các nhà hàng, khách sạn, nhân viên phục vụ bàn thường xuyên phải bưng bê nhiều khay, đĩa đồ ăn khác nhau. Một trong những nguyên tắc nhân viên cần nhớ là khay phải được bưng bằng ít nhất 3 ngón tay. Hãy giải thích tại sao.



Lời giải

Ba đầu ngón tay minh họa cho 3 điểm phân biệt không thẳng hàng. Theo tính chất thừa nhận, có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng. Khi đó, mỗi khay, đĩa đồ ăn đại diện cho một mặt phẳng đi qua ba điểm ở đầu ngón tay làm cho khay, đĩa đồ ăn được giữ vững bằng phẳng.

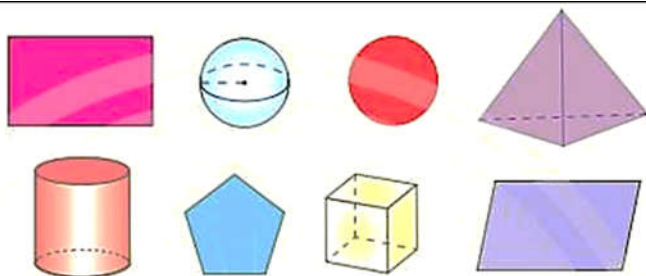
Câu 9. Bàn cắt giấy là một dụng cụ được sử dụng thường xuyên ở các cửa hàng photo-copy. Bàn cắt giấy gồm hai phần chính: phần bàn hình chữ nhật có chia kích thước giấy và phần dao cắt có một đầu được cố định vào bàn. Hãy giải thích tại sao khi sử dụng bàn cắt giấy thì các đường cắt luôn là đường thẳng.



Lời giải

Phần dao cắt có một đầu được gắn cố định vào bàn, giấy cắt được đặt lên phần bàn hình chữ nhật, khi cắt mặt phẳng cắt giao với mặt phẳng giấy theo một giao tuyến là phần đường cắt nên nó luôn là một đường thẳng.

Câu 10. Môn học Hình học phẳng tìm hiểu tính chất của các hình cùng thuộc một mặt phẳng. Môn học Hình học không gian tìm hiểu tính chất của các hình trong không gian, những hình này có thể chứa những điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.



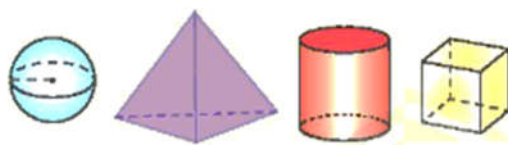
Hãy phân loại các hình sau thành hai nhóm hình khác nhau.

Lời giải

Nhóm Hình học phẳng:



Nhóm Hình học không gian:



Câu 11. Mặt bàn, mặt bảng cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Hãy chỉ thêm các ví dụ khác về hình ảnh một phần của mặt phẳng.



Nguyễn Bảo Vương

Lời giải

Mặt đất, Trang giấy, Gương,...

Câu 12. Quan sát Hình 5 và cho biết muốn gác một cây sào tập nhảy cao, người ta cần dựa nó vào mấy điểm trên hai cọc đỡ.



Hình 5

Lời giải

2 điểm

Câu 13. Quan sát Hình 7 và cho biết giá đỡ máy ảnh tiếp đất tại mấy điểm. Tại sao giá đỡ máy ảnh thường có ba chân?



Hình 7

Lời giải

Giá đỡ máy ảnh tiếp đất tại 3 điểm.

Giá đỡ máy ảnh có 3 chân để giữ được cân bằng và đỡ được máy ảnh bên trên.

Câu 14. Quan sát Hình 10 và cho biết người thợ mộc kiểm tra mặt bàn có phẳng hay không bằng một cây thước thẳng như thế nào.

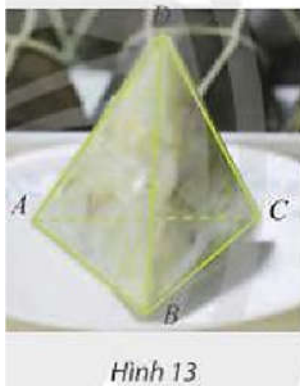


Hình 10

Lời giải

Người thợ mộc rê thước trên mặt bàn. Khi đó, nếu rê thước mà có 1 điểm thuộc cạnh thước nhưng không thuộc mặt bàn thì bàn đó chưa phẳng và ngược lại

Câu 15. Quan sát Hình 13 và cho biết bốn đỉnh A, B, C, D của cái bánh giò có cùng nằm trên một mặt phẳng hay không.

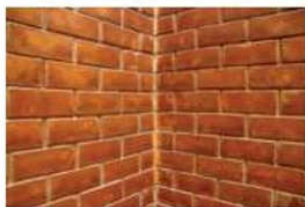


Hình 13

Lời giải

Bốn đỉnh A, B, C, D không cùng nằm trên một mặt phẳng

Câu 16. Quan sát Hình 14 và mô tả phần giao nhau của hai bức tường.



Hình 14

Lời giải

Phần giao nhau của hai bức tường là một đường thẳng

Câu 17. Tại sao muốn cánh cửa đóng mở được êm thì các điểm gắn bản lề A, B, C của cánh cửa và mặt tường (Hình 19) phải cùng nằm trên một đường thẳng?



Hình 19

Lời giải

Các điểm trên bản lề phải nằm trên một đường thẳng để mặt phẳng cánh cửa tiếp xúc với mặt phẳng tường qua 1 đường thẳng. Khi đó, cánh cửa đóng mở được êm hơn

Câu 18. Giải thích tại sao ghế bốn chân có thể bị khập khiễng còn ghế ba chân thì không.



Hình 28

Lời giải

Nếu 4 điểm tại chân ghế không thuộc một mặt phẳng ta có thể xác định được 4 mặt phẳng nên ghế 4 chân có thể bị khập khiễng nếu các chân ghế không cân bằng.

Còn với ghế 3 chân, ta chỉ xác định được duy nhất một mặt phẳng đi qua 3 điểm chân ghế nên ghế ba chân không thể khập khiễng

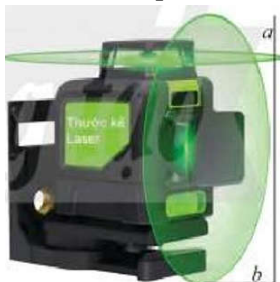
Câu 19. Trong xây dựng, người ta thường dùng máy quét tia laser để kẻ các đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà. Tìm giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi các tia laser OA và OB với các mặt tường trong Hình 29.



Hình 29

Giao tuyến của mặt phẳng được tạo bởi các tia laser OA và OB với các mặt tường là AC và BC

Câu 20. Thước laser phát ra tia laser, khi tia này quay sẽ tạo ra mặt phẳng ánh sáng (Hình 41).



Hình 41

Giải thích tại sao các thước kẻ laser lại giúp người thợ xây dựng kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà.

Lời giải

Do tia laser tạo ra một mặt phẳng, mặt phẳng này giao với mặt phẳng tường hoặc sàn nhà tại một đường thẳng.

Do đó có thể giúp người thợ kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà

Câu 21. Sân vận động Old Trafford (Hình 2) ở thành phố Manchester, có biệt danh là "Nhà hát của những giấc mơ", với sức chứa 75635 người, là sân vận động lớn thứ hai ở Vương quốc Anh.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

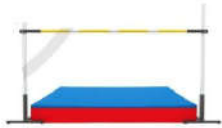
Hình 2

Quan sát Hình 2 và cho biết, mặt sân vận động thường được làm phẳng hay cong.

Lời giải:

Mặt của sân vận động là mặt phẳng.

Câu 22. Hình 9 là hình ảnh xà ngang trong môn nhảy cao.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 9

Quan sát Hình 9 và cho biết ta cần bao nhiêu điểm đỡ để giữ cố định được xà ngang đó.

Lời giải:

Dựa vào Hình 9, cần có 2 điểm đỡ để giữ cố định được xà ngang.

Câu 23. Quan sát Hình 10. Đó là hình ảnh bếp củi với kiềng ba chân. "Kiềng ba chân" là vật dụng bằng sắt, có hình vòng cung được gắn ba chân, dùng để đặt nồi lên khi nấu bếp. Bếp củi và kiềng ba chân là hình ảnh hết sức quen thuộc với nhiều gia đình ở Việt Nam. Vì sao kiềng ba chân khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh?



Hình 10

Lời giải

Vì ba điểm chân kiềng sẽ luôn luôn nằm trên một mặt phẳng.

Câu 24. Hình 13 minh họa người thợ đang kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà. Hãy cho biết người thợ kiểm tra độ phẳng của mặt sàn nhà bằng cách nào.



Hình 13

Giải

Người thợ đặt thước kẻ dài lên mặt sàn nhà ở các vị trí khác nhau. Nếu thước đó luôn áp sát mặt sàn (không bị cập kênh) thì mặt sàn là phẳng.

Câu 25. Giải thích tại sao:

a) Chân máy ảnh có thể đặt ở hầu hết các loại địa hình mà vẫn đứng vững (Hình 14).



Hình 14

b) Bàn, ghế bốn chân thường hay bị cập kênh.

Giải

a) Giá đỡ ba chân của máy ảnh khi đặt trên mặt đất không bị cập kênh vì theo Tính chất 2, ba điểm không thẳng hàng nào cũng xác định một mặt phẳng.

b) Bàn, ghế bốn chân thường hay bị cập kênh vì theo Tính chất 3, bốn điểm có thể không cùng nằm trên một mặt phẳng.

Câu 26. Hình 15 mô tả một phần của phòng học.

Nếu coi bức tường chứa bảng và sàn nhà là hình ảnh của hai mặt phẳng thì giao của hai mặt phẳng đó là gì?



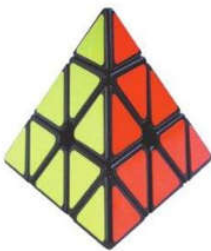
(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 15

Lời giải:

Giao giữa bức tường chứa bảng với nền nhà là một đường thẳng.

Câu 27. Hình 25 là hình ảnh của khối rubik tam giác (Pyraminx). Quan sát Hình 25 và trả lời các câu hỏi:



Hình 25

a) Khối rubik tam giác có bao nhiêu đỉnh? Các đỉnh có cùng nằm trong một mặt phẳng không?

b) Khối rubik tam giác có bao nhiêu mặt? Mỗi mặt của khối rubik tam giác là những hình gì?

Lời giải

a) Khối rubik tam giác có 4 đỉnh. Các đỉnh không cùng nằm trong một mặt phẳng.

b) Khối rubik tam giác có 4 mặt. Mỗi mặt của khối rubik tam giác là hình tam giác.

Câu 28. Khi trát tường, dụng cụ không thể thiếu của người thợ là thước dẹt dài (Hình 28). Công dụng của thước dẹt này là gì? Giải thích.



Hình 28

Lời giải

Công dụng của thước dẹt: Kiểm tra xem mặt tường đã phẳng chưa.

⇒Áp thước vào mặt tường, nếu toàn bộ thước áp khít vào mặt tường thì mặt tường đã được trát phẳng, nếu thước không khít vào mặt tường thì cần bổ sung thêm vữa trát vào phần chưa khít đó.

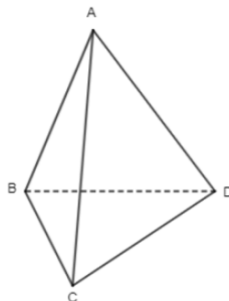
Câu 29. Hình 29 là hình ảnh của chặn giấy bằng gỗ có bốn mặt phân biệt là các tam giác. Vẽ hình biểu diễn của chặn giấy bằng gỗ đó.



Hình 29

Lời giải:

Hình biểu diễn của chặn giấy bằng gỗ là:

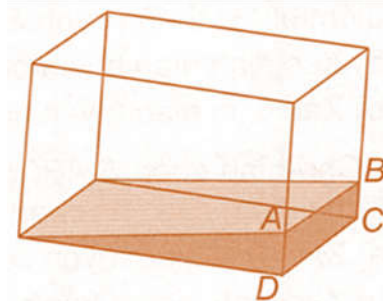


Câu 30. Đánh dấu một điểm trên mép của tờ giấy AB và dùng kéo cắt một đường bất kì đi qua điểm đó (trong khi cắt không xoay kéo). Hãy giải thích vì sao đường cắt nhận được trên tờ giấy luôn là đường thẳng.

Lời giải

Đường cắt là giao tuyến của hai mặt phẳng: mặt phẳng chứa tờ giấy và mặt phẳng tạo bởi hai lưỡi kéo. Do đó đường cắt luôn là đường thẳng.

Câu 31. Bạn Huy đổ nước màu vào một chiếc bể cá có các mặt đều làm bằng kính phẳng. Sau một vài hôm nước bay hơi một phần và để lại trên thành bể các vết màu như trong Hình 4.5.



Hình 4.5

Huy quan sát thấy rằng, dù bề cá có hình dạng như thế nào, miễn là các mặt đều phẳng, thì vết màu trên mỗi thành bề đều là các đường thẳng. Hãy giải thích vì sao.

Lời giải

Vết màu trên mỗi thành bề là giao tuyến của hai mặt phẳng: mặt phẳng tạo bởi thành bề và mặt nước. Do đó vết màu luôn là đường thẳng.

Câu 32. Một số chiếc bàn có thiết kế khung sắt là hai hình chữ nhật có thể xoay quanh một trục, mặt bàn là một tấm gỗ phẳng được đặt lên phần khung như trong Hình 4.6.



Hình 4.6

Tính chất hình học nào giải thích việc mặt bàn có thể được giữ cố định bởi khung sắt? (Giả sử khung sắt chắc chắn và được đặt cân đối).

Lời giải

Mặt bàn có thể được đỡ cố định bằng khung sắt dựa theo tính chất: một mặt phẳng được hoàn toàn xác định khi biết nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Câu 33. Quan sát bốn tuyến đường trong Hình 4.13 và trả lời các câu hỏi sau:



Hình 4.13

- a) Hai tuyến đường nào giao nhau?
- b) Hai tuyến đường nào không giao nhau?
- c) Hai tuyến đường nào song song?

Lời giải

Quan sát Hình 4.13 ta thấy:

- a) Hai tuyến đường mũi tên màu đỏ và mũi tên màu vàng giao nhau.
- b) Hai tuyến đường mũi tên màu xanh dương và màu xanh lá cây không giao nhau.
- c) Hai tuyến đường mũi tên màu xanh dương và mũi tên màu đỏ song song.

Câu 34. Một chiếc gậy được đặt một đầu dựa vào tường và đầu kia trên mặt sàn (H.4.20).



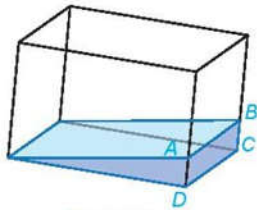
Hình 4.20

Hỏi có thể đặt chiếc gậy đó song song với một trong các mép tường hay không?

Lời giải

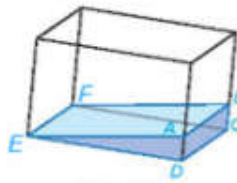
Ta không thể đặt chiếc gậy đó song song với một trong các mép tường vì điểm đầu gậy chạm với sàn và 4 điểm góc của tường là các điểm không đồng phẳng nên đường thẳng tạo bởi chiếc gậy và một trong các mép tường là hai đường thẳng chéo nhau.

Câu 35. Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như Hình 4.26.



Hình 4.26

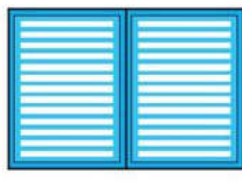
Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.

Lời giải

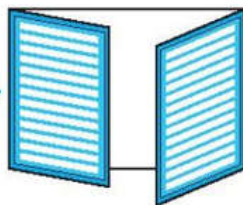
Giả sử mặt phẳng $(ABFE)$ là mặt nước, mặt phẳng $(EFCD)$ là mặt đáy của bể kính và $(ABCD)$ là một mặt bên của bể kính.

Ba mặt phẳng $(ABFE)$, $(EFCD)$ và $(ABCD)$ là ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo các giao tuyến EF , AB và CD . Vì $DC \parallel EF$ (do đáy của bể là hình chữ nhật) nên ba đường thẳng EF , AB và CD đôi một song song. Vậy đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.

Câu 36. (Đố vui) Khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau (H.4.29). Hãy giải thích tại sao.



Hình 4.29

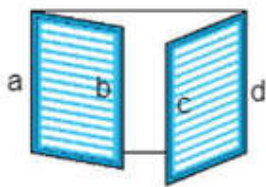


Hình 4.30

Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang như Hình 4.30 thì có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau hay không?

Lời giải

+) Mỗi cánh cửa ở Hình 4.29 đều có dạng hình chữ nhật nên các cạnh đối diện của mỗi cánh cửa song song với nhau.



Khi đó ta có $a \parallel b$ và $c \parallel d$.

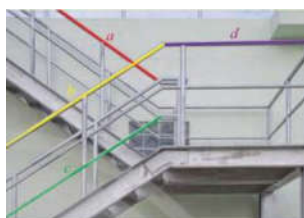
Lại có các đường thẳng a và d là đường thẳng giao tuyến giữa khung cửa và cánh cửa nên $a \parallel d$.

Do vậy, bốn đường thẳng a, b, c, d luôn đôi một song song với nhau.

Vậy khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau.

+) Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang như Hình 4.30 thì không có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau.

Câu 37. Mô tả vị trí giữa các cặp đường thẳng a và b, b và c, c và d có trong hình bên.



Lời giải

2 đường thẳng a và b nằm chéo nhau

2 đường thẳng b và c song song với nhau

2 đường thẳng c và d nằm chéo nhau

Câu 38. Hãy chỉ ra các ví dụ về hai đường thẳng song song, cắt nhau và chéo nhau trong hình cầu sắt ở Hình 6.



Hình 6

Lời giải

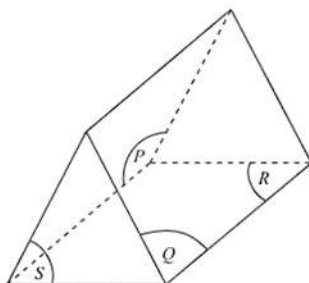
Hai thanh sắt đối diện nhau qua hai bên cầu song song với nhau

Thanh sắt nằm ở mái cầu và thanh sắt nằm ở thành cầu chéo nhau

Câu 39. Một chiếc lều (Hình 16a) được minh họa như Hình 16b.



a)



b)

Hình 16

a) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến song song.

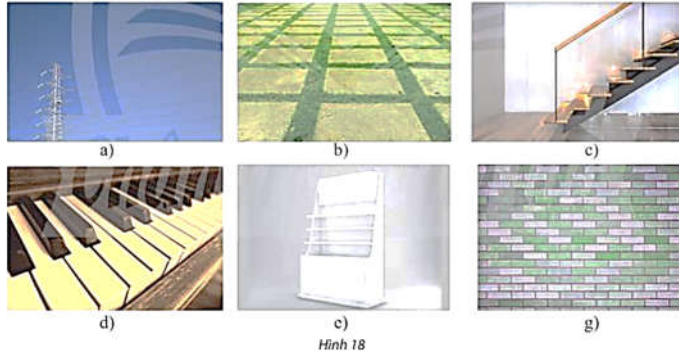
b) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo ba giao tuyến đồng quy.

Lời giải

a) Ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo giao tuyến song song là: (P) , (Q) , (R)

b) Ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo giao tuyến đồng quy là: (P) , (R) , (S)

Câu 40. Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



Hình 18

Lời giải

Hình a : Các dây điện song song với nhau

Hình b : Các mép của viên gạch lát sàn song song với nhau

Hình c : Các mép của bậc thang song song với nhau

Hình d : Các mép của phím đàn piano song song với nhau

Hình e : Các mép của từng ngăn kệ song song với nhau

Hình g : Các mép của viên gạch tường song song với nhau

Một số ví dụ khác về đường thẳng song song: Các gáy của quyển sách trong chồng sách, Các mép của chân bàn thẳng đứng,...

Câu 41. Trong thực tế, ta quan sát thấy nhiều hình ảnh gợi nên những đường thẳng song song với nhau. Chẳng hạn các cột treo cờ của tổ chức và các nước thành viên ASEAN (Hình 30).



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

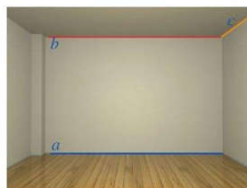
Hình 30

Hai đường thẳng song song trong không gian có tính chất gì?

Lời giải

Hai đường thẳng song song trong không gian là hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung.

Câu 42. Quan sát một phần căn phòng (Hình 35), hãy cho biết vị trí tương đối của các cặp đường thẳng a và b ; a và c ; b và c .



Hình 35

Lời giải:

– Hai đường thẳng a và b cùng nằm trong một mặt phẳng là tường nhà và hai đường thẳng này song song với nhau.

– Hai đường thẳng a và c không cùng nằm trên một mặt phẳng do đó hai đường thẳng này chéo nhau.

Câu 43. Quan sát phòng học của lớp và nêu lên hình ảnh của hai đường thẳng song song, cắt nhau, chéo nhau.

Lời giải:

Gợi ý những hình ảnh hai đường thẳng song song: Hai rìa mép thước thẳng, hai đường viền bàn đối nhau, đường viền chân tường và đường viền trần nhà (trong cùng một bức tường), hai đường viền bảng đối nhau,...

Gợi ý những hình ảnh về hai đường thẳng cắt nhau: Hai rìa mép thước kề nhau, hai đường viền bảng kề nhau, đường góc tường và đường chân tường (trong cùng một bức tường),...

Gợi ý những hình ảnh về hai đường thẳng chéo nhau: Đường chéo của bàn học với đường góc tường, đường chéo của bảng và đường viền chân tường trong bức tường kề với bức tường chứa bảng,...

Câu 44. Quan sát Hình 43 và cho biết vị trí tương đối của hai trong ba cột tuabin gió có trong hình.



Hình 43

Lời giải:

Vị trí tương đối của hai trong ba cột tuabin có trong hình là hai đường thẳng song song.

Câu 45. Một chiếc thang được đặt sao cho hai đầu của chân thang dựa vào tường, hai đầu còn lại nằm trên sàn nhà ($H \cdot 4 \cdot 12$).



Hình 4.12

Biết rằng chiếc thang có dạng hình chữ nhật, hãy giải thích vì sao hai đầu của chân thang nằm trên sàn nhà lại cách đều đường chân tường.

Lời giải

Áp dụng định lý về ba đường giao tuyến cho ba mặt phẳng: mặt sàn nhà, mặt chân tường và mặt phẳng tạo bởi bốn đầu của chân thang. Từ đó suy ra đường thẳng đi qua hai đầu của chân thang trên sàn nhà song song với đường chân tường.

Câu 46. Bạn Hà lấy một tờ giấy hình chữ nhật và gấp tờ giấy sao cho hai mép của tờ giấy song song với nhau (H.4.13).



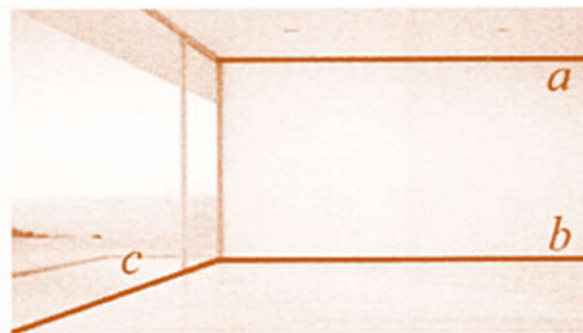
Hình 4.13

Hà thấy rằng dù gấp thế nào thì đường nếp gấp vẫn luôn song song với hai mép của tờ giấy. Hãy giải thích vì sao.

Lời giải

Hai nửa của tờ giấy có thể coi như hai mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song là hai mép giấy. Đường nếp gấp chính là giao tuyến của hai mặt phẳng này nên nó song song với hai mép giấy.

Câu 47. Quan sát hình căn phòng (Hình 16), hãy cho biết vị trí tương đối của các cặp đường thẳng a và b ; a và c ; b và c .



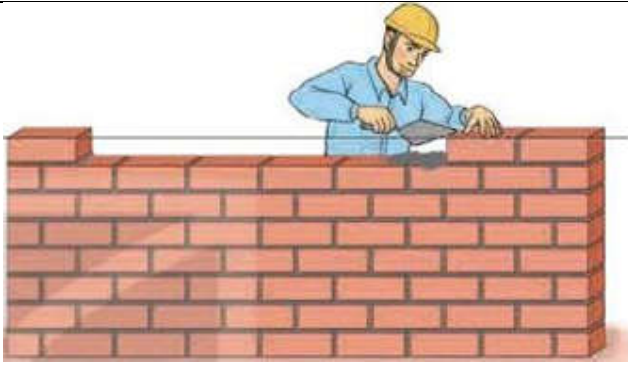
Hình 16

Lời giải

a và b song song; a và c chéo nhau; b và c cắt nhau.

Đường thẳng và mặt phẳng song song

Câu 47. Khi xây tường gạch, người thợ thường bắt đầu với Việc xây các Viên gạch dẫn, sau đó căng dây nhợ dọc theo cạnh của các Viên gạch dẫn đó để làm chuẩn rồi mới xây các Viên gạch tiếp theo. Việc sử dụng dây căng như vậy có tác dụng gì? Toán học mô tả vị trí giữa dây căng, các mép gạch với mặt đất như thế nào?



Lời giải

Sau bài học này ta sẽ giải quyết được vấn đề trên như sau:

Dây nhợ được căng dọc theo cạnh của các Viên gạch dẫn, lúc này dây nhợ sẽ là một đường thẳng song song với mặt đất. Khi người thợ tiếp tục xây các Viên gạch tiếp theo theo dây nhợ thì hàng gạch tiếp theo sẽ thẳng hàng và bằng, đảm bảo độ thẳng đứng và bằng phẳng cho tường được xây ra.

Toán học mô tả vị trí giữa dây căng, các mép gạch với mặt đất là các đường thẳng song song với mặt phẳng.

Câu 48. Quan sát hình ảnh khung thành bóng đá và nhận xét vị trí của xà ngang, cột dọc, thanh chống và thanh bên của khung thành với mặt đất.



Lời giải

Từ hình vẽ ta thấy:

- Xà ngang nằm phía trên và không có điểm chung với mặt đất
- Cột dọc thẳng đứng và có 1 điểm chung với mặt đất
- Thanh chống nằm xiên và có 1 điểm chung với mặt đất
- Thanh bên nằm hoàn toàn trên mặt đất, có vô số điểm chung với mặt đất.

Câu 49. Bạn Nam quan sát thấy dù cửa ra vào được mở ở vị trí nào thì mép trên của cửa luôn song song với một mặt phẳng cố định. Hãy cho biết đó là mặt phẳng nào và giải thích tại sao.



Lời giải

Cánh cửa có dạng hình chữ nhật nên mép trên cửa song song với mép dưới cửa. Mà mép dưới của cửa luôn tạo với mặt sàn một đường thẳng, do đó mép trên của cửa luôn song song với mặt sàn nhà.

Câu 50. Hãy chỉ ra trong Hình 9 các đường thẳng lần lượt nằm trong, song song, cắt mặt phẳng sàn nhà.



Hình 9

Lời giải

Các mép của tấm thảm nằm trong mặt phẳng sàn nhà

Các mép bàn, mép tủ song song với mặt phẳng sàn nhà

Các cạnh bàn, cạnh giường, cạnh tủ cắt mặt phẳng sàn nhà

Câu 51. Làm thế nào để đặt cây thước kẻ a để nó song song với các trang của một cuốn sách?



Hình 18

Lời giải

Để cây thước a song song với các trang của một cuốn sách, ta đặt a song song với 1 dòng kẻ của cuốn sách hoặc với mép cuốn sách

Câu 52. Mô tả vị trí tương đối của các đường thẳng a, b, c, d, e với mặt phẳng (P) là mặt trước của toà nhà (Hình 19).



Hình 19

Lời giải

Đường thẳng a, e nằm trong mặt phẳng (P)

Đường thẳng b, c song song với mặt phẳng (P)

Đường thẳng d cắt mặt phẳng (P)

Câu 53. Trong thực tiễn, ta thường gặp nhiều đồ dùng, vật thể gọi nên hình ảnh đường thẳng song song với mặt phẳng. Chẳng hạn, thanh barrier song song với mặt đường (Hình 44).



Hình 44

Câu hỏi khởi động. Thế nào là đường thẳng song song với mặt phẳng trong không gian?

Lời giải

Sau bài học này, chúng ta sẽ giải quyết được câu hỏi trên như sau:

Đường thẳng song song với mặt phẳng trong không gian là đường thẳng song song với một đường thẳng khác nằm trong mặt phẳng đó.

Câu 54. Quan sát các xà ngang trên sân tập thể dục ở Hình 47. Hãy cho biết vị trí tương đối của các xà ngang đó với mặt sàn



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 47

Lời giải

Vị trí tương đối của xà ngang với mặt sàn là đường thẳng song song với mặt phẳng.

Câu 55. Trong Hình 56, hai mặt tường của căn phòng gọi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến b , mép cột gọi nên hình ảnh đường thẳng a . Cho biết đường thẳng a có song song với giao tuyến b hay không?



Hình 56

Lời giải:

Ta có: $a \parallel (P)$; $a \parallel (Q)$; $(P) \cap (Q) = b$.

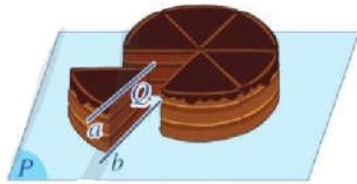
Do đó theo hệ quả định lý 2 ta có $a \parallel b$.

Câu 56. Trong phòng học của lớp, hãy nêu những hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng.

Lời giải

Gợi ý những hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng: đường chân tường và trần nhà; mép cột tường và bức tường; ...

Câu 57. Trong Hình 57, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gọi nên hình ảnh mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (P) ; mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b trong đó a song song với mặt phẳng (P) . Cho biết hai đường thẳng a, b có song song với nhau hay không.



Hình 57

Lời giải

Ta có: $a \parallel (P)$; $a \subset (Q)$; $(P) \cap (Q) = b$.

Do đó theo định lý 2, $a \parallel b$.

Vậy hai đường thẳng a, b song song với nhau.

Câu 58. Một tấm bảng hình chữ nhật được đặt dựa vào tường như trong Hình 4.18.

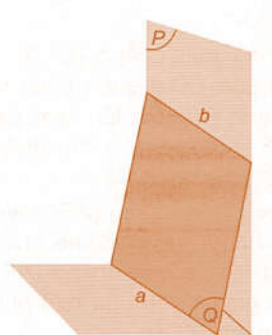


Hình 4.18

Hãy giải thích vì sao mép trên của tấm bảng song song với mặt đất, mép dưới của tấm bảng song song với mặt tường.

Lời giải

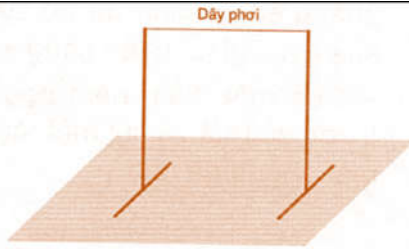
(H.4.54)



Hình 4.54

Gọi (P) là mặt tường và (Q) là mặt bảng. Gọi a là mép dưới của bảng và b là mép trên thì b nằm trong (P) . Vì bảng có dạng hình chữ nhật nên $a \parallel b$, do đó $a \parallel (P)$, tức là mép dưới của bảng song song với mặt tường. Giải thích tương tự suy ra mép trên của bảng song song với mặt đất.

Câu 59. Để dựng dây phơi quần áo, bác Việt lắp hai thanh sắt thẳng đứng có chiều dài bằng nhau trên mặt đất và căng dây nối hai đầu còn lại của hai thanh sắt (H.4.19).

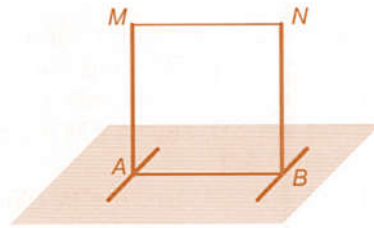


Hình 4.19

Khi đó, dây phơi có song song với mặt đất không? Giải thích vì sao.

Lời giải

(H.4.55)



Hình 4.55

Gọi hai đầu của hai thanh sắt trên mặt đất là A, B và hai đầu tương ứng còn lại là M, N thì $AM \parallel BN$ và $AM = BN$, suy ra $ABNM$ là hình bình hành. Vì vậy $MN \parallel AB$ và do đó dây phơi (nối hai điểm M, N) song song với mặt đất (chứa đường thẳng AB).

Câu 60. Một người thợ đang cố gắng đặt tấm kính $ABCD$ (mép AB không song song với CD) dựa vào tường sao cho mép kính CD song song với đường chân tường, còn mép kính AB nằm hoàn toàn trên tường. Sau một hồi loay hoay, người thợ vẫn không thể đặt được tấm kính như mong muốn. Hãy giải thích tại sao.



Hình 4.33

Có cách nào đặt tấm kính để một mép kính song song với đường chân tường, một mép kính khác nằm hoàn toàn trên tường không?

Lời giải

Áp dụng định lý ba đường giao tuyến cho ba mặt phẳng gồm: mặt đất, mặt tường và mặt kính. Khi đó ba giao tuyến là mép chân tường và hai mép kính AB, CD . Vì AB không song song với CD nên ba giao tuyến đồng quy, vì vậy không thể đặt tấm kính sao cho mép CD song song với đường chân tường. Có thể đặt tấm kính sao cho mép kính BC nằm trên tường và mép kính AD nằm trên mặt đất. Khi đó cả hai mép kính đều song song với đường chân tường.

Câu 61. Trong các không gian hẹp, người ta thường thiết kế tủ đựng quần áo có cánh cửa trượt. Tủ này bao gồm khoang tủ, cánh cửa trượt và hai đường ray trượt cho mép trên và mép dưới cánh cửa (Hình 25). Biết rằng cánh cửa trượt có dạng hình chữ nhật và có thể kéo trượt bình thường, khi đó bạn Minh nói: "Đường ray trượt ở mép trên cửa song song với mặt đáy của tủ quần áo". Em hãy cho biết phát biểu của bạn Minh đúng hay sai? Vì sao?



Hình 25

Lời giải

Phát biểu của bạn Minh là đúng. Vì cánh cửa là hình chữ nhật và có thể kéo trượt bình thường nên đường ray trên và đường ray dưới của cánh cửa song song với nhau. Đường ray dưới có thể xem là đường thẳng thuộc mặt đáy của tủ. Vì vậy đường ray trượt ở mép trên cánh cửa song song với mặt đáy của tủ quần áo.

Hai mặt phẳng song song

Câu 62. Các đầu bếp chuyên nghiệp luôn có kỹ năng dùng dao điêu luyện để thái thức ăn như rau, củ, thịt, cá,... thành các miếng đều nhau và đẹp mắt. Các nhát cắt cần tuân thủ nguyên tắc gì để đạt được điều đó?

**Lời giải**

Sau bài học này ta giải quyết được câu hỏi trên như sau:

Các nhát cắt cần tuân thủ nguyên tắc là nằm trong các mặt phẳng song song với nhau.

Câu 63. Các mặt bậc thang trong Hình 4.40 gọi nên hình ảnh về các mặt phẳng không có điểm chung.



Hình 4.40

Hãy tìm thêm một số ví dụ khác cũng gọi nên hình ảnh đó.

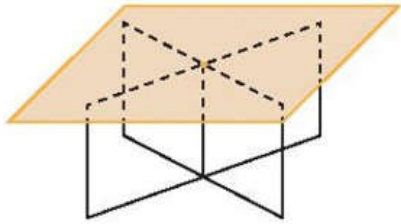
Lời giải

- Các mặt của từng tầng trong giá để dép gọi nên hình ảnh về các mặt phẳng không có điểm chung.



- Mặt sàn và mặt trần nhà bằng gợi nên hình ảnh về các mặt phẳng không có điểm chung.
- Hai mặt đối diện của hộp diêm gợi nên hình ảnh về các mặt phẳng không có điểm chung.

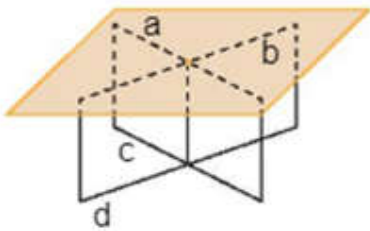
Câu 64. Một chiếc bàn có phân chân là hai khung sắt hình chữ nhật có thể xoay quanh một trục như trong Hình 4.43.



Hình 4.43

Khi mặt bàn được đặt lên phân chân bàn thì mặt bàn luôn song song với mặt đất. Hãy giải thích tại sao.

Lời giải



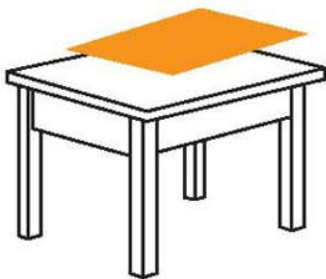
Đặt tên các đường thẳng như trong hình vẽ dưới đây.

Vì các khung sắt có dạng hình chữ nhật nên các cạnh đối diện của khung sắt song song với nhau, do đó $a \parallel c$ và $b \parallel d$.

Vì c và d là các đường thẳng của chân bàn nằm trên mặt đất, nên $a \parallel c$ thì đường thẳng a song song với mặt đất và $b \parallel d$ thì đường thẳng b song song với mặt đất.

Mặt phẳng bàn chứa hai đường thẳng cắt nhau a và b cùng song song với mặt đất nên mặt phẳng bàn song song với mặt đất.

Câu 65. Đặt một tấm bìa cứng lên một góc của mặt bàn nằm ngang (H.4.44) sao cho mặt bìa song song với mặt đất. Khi đó mặt bìa có trùng với mặt bàn hay không?



Hình 4.44

Lời giải

Mặt bàn nằm ngang thì song song với mặt đất. Khi tấm bìa cứng được đặt lên một góc của mặt bàn nằm ngang sao cho mặt bìa song song với mặt bàn thì mặt bìa trùng với mặt bàn.

Câu 66. Hình ảnh nào dưới đây gợi nên hình ảnh về hình lăng trụ có đáy là hình bình hành?

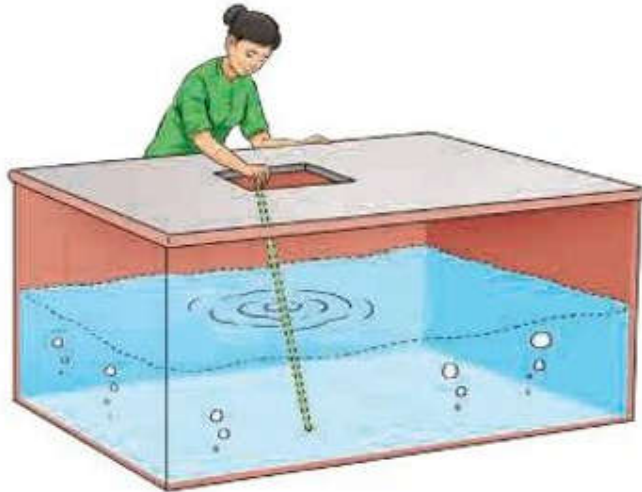


Lời giải

Hình ảnh thứ hai từ trái sang phải trong HD6 gợi nên hình ảnh về hình lăng trụ có đáy là hình bình hành.



Câu 67. Để xác định mực nước trong một chiếc bể có dạng hình hộp, bác Hà đặt một thanh gỗ đủ dài vào trong bể sao cho một đầu của thanh gỗ dựa vào mép của nắp bể, đầu còn lại nằm trên đáy bể (H.4.53).



Hình 4.53

Sau đó bác Hà rút thanh gỗ ra ngoài và tính tỉ lệ giữa độ dài của phần thanh gỗ bị ngâm trong nước và độ dài của cả thanh gỗ. Tỉ lệ này chính bằng tỉ lệ giữa mực nước và chiều cao của bể. Hãy giải thích vì sao.

Lời giải

Vì bể nước có dạng hình hộp nên nắp bể và đáy bể nằm trong hai mặt phẳng song song. Khi mặt nước yên lặng thì mặt nước, nắp bể và đáy bể nằm trong ba mặt phẳng đôi một song song. Khi đó, thanh gỗ và chiều cao của bể đóng vai trò như hai đường thẳng phân biệt cắt ba mặt phẳng đôi một song song trên. Vậy áp dụng định lý Thalés trong không gian, ta khẳng định được tỉ lệ giữa mực nước và chiều cao của bể chính là tỉ lệ giữa độ dài của phần thanh gỗ bị ngâm trong nước và độ dài của cả thanh gỗ.

Câu 68. Cầu thang xương cá là dạng cầu thang có hình dáng tương tự như những đốt xương cá, thường có những bậc cầu thang với khoảng mở lớn, tạo được sự nhẹ nhàng và thoáng đãng cho không gian sống. Trong Hình 4.55, phần mép của mỗi bậc thang nằm trên tường song song với nhau. Hãy giải thích tại sao.



Hình 4.55

Lời giải

Các bậc cầu thang là các mặt phẳng song song với nhau từng đôi một, mặt phẳng tường cắt mỗi mặt phẳng là các bậc của cầu thang theo các giao tuyến là phần mép của mỗi bậc cầu thang nằm trên tường nên các giao tuyến này song song với nhau.

Câu 69. Bề mặt trên của mỗi bậc thang này được đặt như thế nào so với mặt đất?



Lời giải

Bề mặt trên của mỗi bậc thang được đặt song song so với mặt đất

Câu 70. Tìm một số mặt phẳng song song có trong hình chụp căn phòng ở Hình 4.



Hình 4

Lời giải:

Một số cặp mặt phẳng song song là: mặt kệ sách và mặt đất; hai mặt của quyển sách;...

Câu 71. Khi dùng dao cắt các lớp bánh (Hình 11), giả sử bề mặt của các lớp bánh là các mặt phẳng song song và con dao được xem như mặt phẳng (P) , nêu kết luận về các giao tuyến tạo bởi (P) với các bề mặt của các lớp bánh. Giải thích.

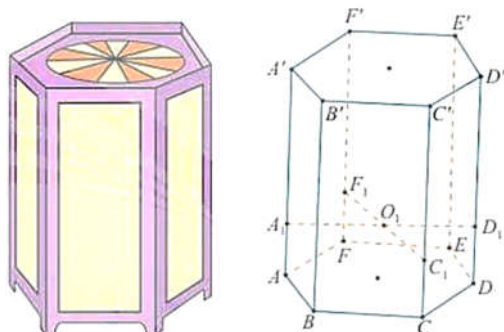


Hình 11

Lời giải

Giao tuyến tạo bởi (P) và các lớp bánh song song với nhau. Bởi vì giao tuyến tạo bởi mặt phẳng (P) và các mặt phẳng song song nhau sẽ song song với nhau.

Câu 72. Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF \cdot A'B'C'D'E'F'$, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (Hình 19).



Hình 19

a) Xác định giao tuyến của $mp(A_1D_1, F_1C_1)$ với các mặt bên của lăng trụ.

b) Cho biết $A'A_1 = 6AA_1$ và $AA' = 70cm$. Tính CC_1 và C_1C' .

Lời giải:

a) Do mặt phẳng $(A_1C_1D_1F_1)$ chứa hai đường thẳng cắt nhau A_1D_1 và C_1F_1 và cùng song song với mặt phẳng $(ABCDEF)$

Nên $(A_1C_1D_1F_1) // (ABCDEF)$

Gọi B_1, E_1 lần lượt là giao của mặt phẳng $(A_1C_1D_1F_1)$ với BB' và EE'

Ta có giao tuyến của $(A_1C_1D_1F_1)$ với các mặt bên của lăng trụ là

$A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1, F_1A_1$

b) Ta có: $A'A_1 = 6AA_1; AA' = 70$ nên $AA_1 = 10$

Do $(ACC'A')$ cắt hai mặt phẳng $(A_1C_1D_1F_1) // (ABCDEF)$ lần lượt tại A_1C_1 và AC nên $A_1C_1 // AC$

Mà $AA_1 // CC_1$ nên tứ giác AA_1C_1C là hình bình hành.

Suy ra $CC_1 = AA_1 = 10$

Mà $CC' = AA' = 70$

Nên $C_1C' = 70 - 10 = 60$

Câu 73. Chỉ ra các mặt phẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các mặt phẳng song song trong thực tế.



a)



b)

Hình 20

Lời giải

Trong hình a: các mặt tấm pin điện năng lượng mặt trời song song với nhau

Trong hình b: Các mặt của toà nhà song song với nhau

Một số ví dụ khác về mặt phẳng song song: mặt của các bậc cầu thang, mặt phẳng của các bức tường đối diện nhau

Câu 74. Khi cắt một chiếc bánh ga-tô hình hộp, Thuý nhận thấy vết cắt ở mặt trên và mặt dưới của bánh gọi nên hình ảnh về hai đường thẳng song song với nhau. Hỏi nhận xét của Thuý có đúng không? Vì sao?

Lời giải

Khi Thuý cắt bánh thì lưỡi dao di chuyển tạo thành một mặt phẳng cắt hai mặt trên và dưới của chiếc bánh. Vì mặt trên và mặt dưới của chiếc bánh song song với nhau nên các vết cắt (chính là giao tuyến của mặt phẳng cắt và hai mặt bánh) song song với nhau.

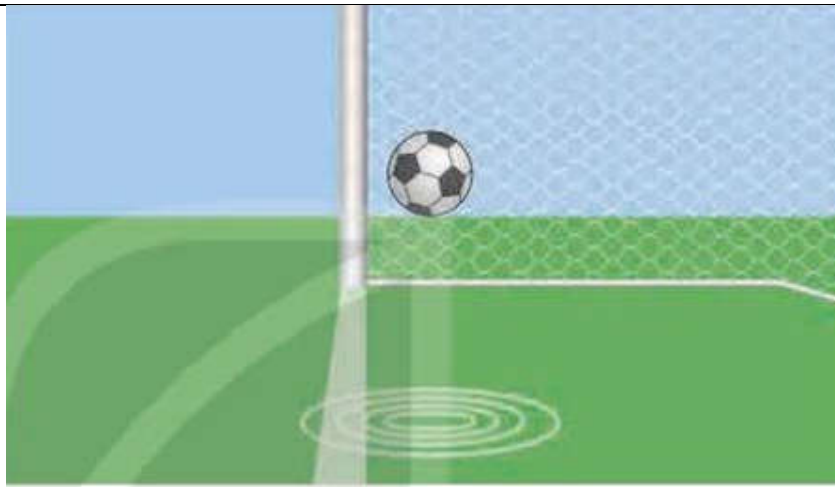
Câu 75. Một chiếc bình nước hình trụ được đặt trên bàn, lượng nước trong bình bằng đúng một nửa dung tích của bình. Hoàng đặt một chiếc ống hút vào trong bình sao cho một đầu của ống hút chạm vào đáy bình còn một đầu chạm vào miệng bình. Hoàng nói rằng độ dài của phần ống hút bị ướt bằng $\frac{1}{3}$ độ dài của toàn bộ ống hút. Hỏi Hoàng nói đúng hay sai? Vì sao?

Lời giải

Hoàng nói sai. Theo định lí Thalès trong không gian thì độ dài của phần ống bị ướt bằng $\frac{1}{2}$ độ dài của toàn bộ ống hút.

PHÉP CHIẾU SONG SONG

Câu 76. Trong bóng đá, công nghệ Goal-line được sử dụng để xác định xem bóng đã hoàn toàn vượt qua vạch vôi hay chưa, từ đó giúp trọng tài đưa ra quyết định về một bàn thắng có được ghi hay không. Yếu tố hình học nào cho ta biết quả bóng đã vượt qua vạch vôi hay chưa?



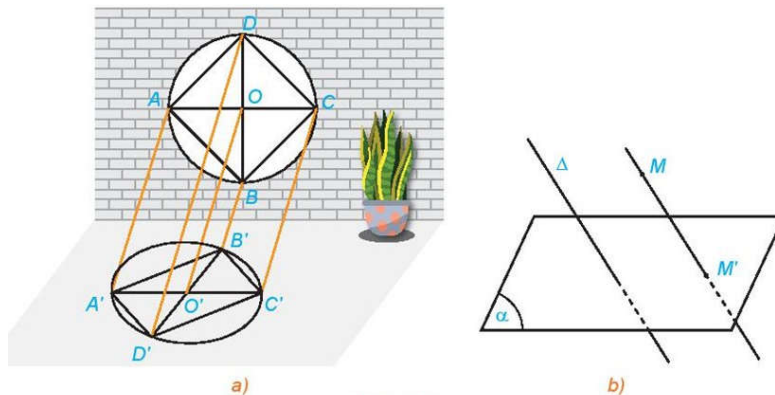
Một bàn thắng được ghi.

Lời giải

Sau bài học này ta sẽ giải quyết bài toán trên như sau:

Khi một bàn thắng được ghi thì hình chiếu của quả bóng trên mặt đất theo phương thẳng đứng có vị trí ở phía sau vạch vôi, tức là hình chiếu này nằm trong khung thành. Do đó, yếu tố hình học liên quan đến phép chiếu song song cho ta biết quả bóng đã vượt qua vạch vôi hay chưa.

Câu 77. Một khung cửa sổ có dạng hình tròn với các chấn song tạo thành hình vuông $ABCD$, hai đường chéo của hình vuông cắt nhau tại O . Dưới ánh mặt trời, khung cửa và các chấn song đổ bóng lên sàn nhà (H.4.56a). Quan sát hình vẽ và trả lời các câu hỏi sau:



Hình 4.56

- Các đường thẳng nối mỗi điểm A, B, C với bóng A', B', C' có đôi một song song hay không?
- Làm thế nào để xác định được bóng đổ trên sàn nhà của mỗi điểm trên khung cửa sổ?

Lời giải

- Các đường thẳng nối mỗi điểm A, B, C với bóng A', B', C' đôi một song song với nhau.
- Để xác định được bóng đổ trên sàn nhà của mỗi điểm trên khung cửa sổ ta sử dụng phép chiếu song song.

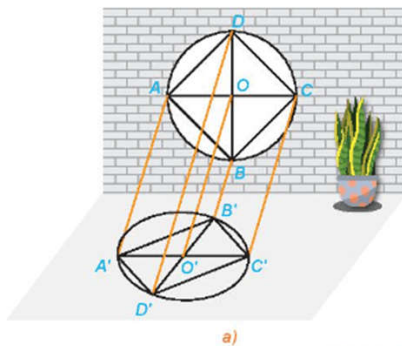
Câu 78. Trong hình ảnh mở đầu, khi một bàn thắng được ghi thì hình chiếu của quả bóng trên mặt đất theo phương thẳng đứng có vị trí như thế nào với vạch vôi?



Lời giải

Trong hình ảnh mở đầu, khi một bàn thắng được ghi thì hình chiếu của quả bóng trên mặt đất theo phương thẳng đứng nằm phía trong vạch vôi về phía bên trong khung thành.

Câu 79. Quan sát hình ảnh khung cửa sổ trong Hình 4.56a và cho biết hình biểu diễn của hình tam giác, hình vuông, hình tròn là hình gì?



Lời giải:

Quan sát hình ảnh khung cửa sổ trong Hình 4.56a, ta thấy:

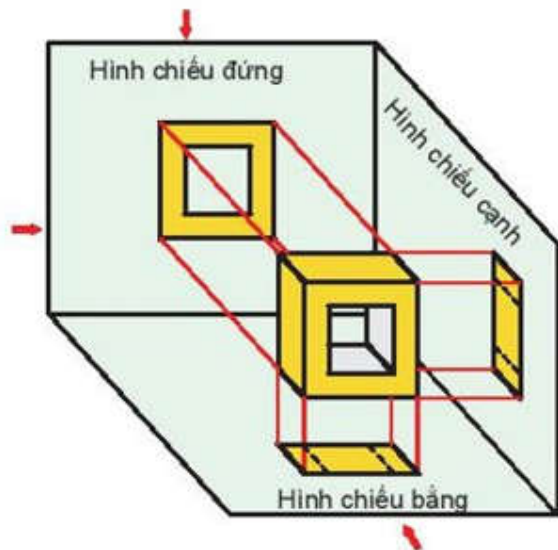
- Hình biểu diễn của hình tam giác là hình tam giác;
- Hình biểu diễn của hình vuông là hình bình hành;
- Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.

Khi hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì hình biểu diễn của hình phẳng đó có các tính chất sau:

- Hình biểu diễn của một tam giác (cân, đều, vuông) là một tam giác;
- Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành;
- Hình biểu diễn của hình thang $ABCD$ với $AB \parallel CD$ là một hình thang $A'B'C'D'$ với

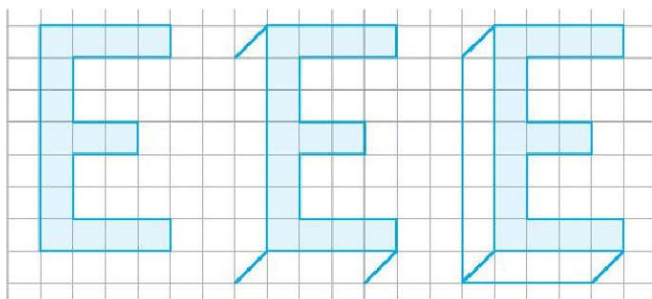
$$A'B' \parallel C'D' \text{ thoả mãn } \frac{AB}{CD} = \frac{A'B'}{C'D'};$$

- Hình biểu diễn của hình tròn là hình elip.

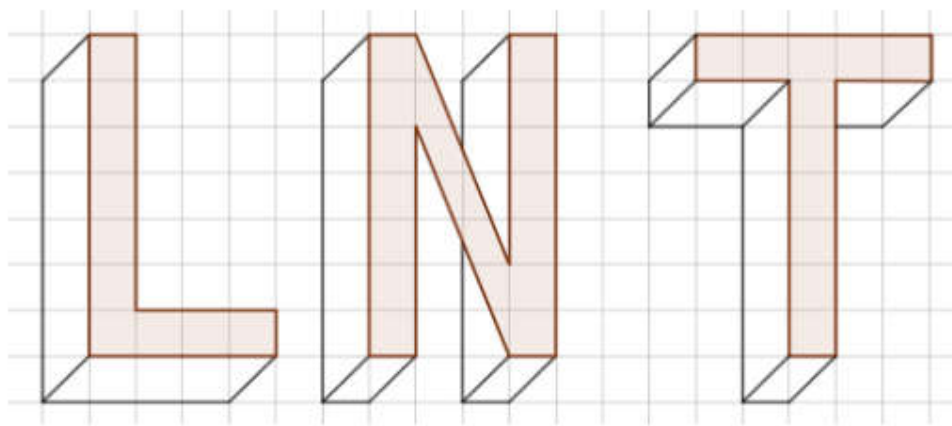


Hình chiếu bằng, hình chiếu đứng, hình chiếu cạnh của một vật thể (môn Công nghệ 8 và Công nghệ 10) chính là hình biểu diễn của vật thể đó.

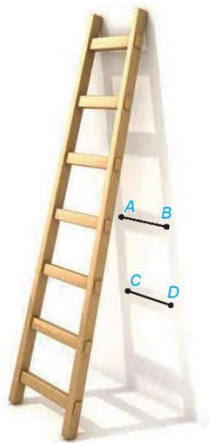
Câu 80. Phép chiếu song song có thể được sử dụng để vẽ dạng nổi (hay dạng 3D) của chữ cái như trong hình dưới đây. Theo phương pháp đó hãy vẽ dạng nổi của một số chữ cái quen thuộc như L, N, T,...



Lời giải



Câu 81. Trong hình bên, AB và CD là bóng của hai thanh chắn của một chiếc thang dưới ánh mặt trời.

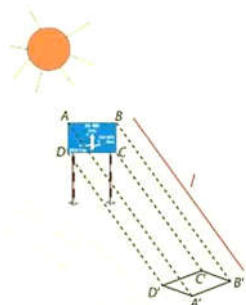


Hãy giải thích tại sao AB song song với CD .

Lời giải

AB và CD là bóng của hai thanh chắn của một chiếc thang dưới ánh mặt trời. Khi đó AB và CD là hình chiếu song song của hai thanh chắn của một chiếc thang lên tường (do mặt trời chiếu xuống tường các tia sáng song song). Mà hai thanh chắn của một chiếc thang thì song song với nhau, do đó theo tính chất của phép chiếu song song ta suy ra AB song song với CD .

Câu 82. Các tia nắng song song theo phương l khi chiếu tới biển báo giao thông hình chữ nhật $ABCD$ tạo thành bóng trên mặt đường (xem hình bên).



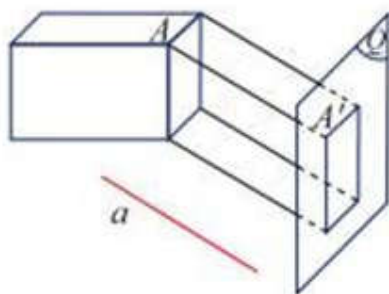
Bóng của biển báo này có dạng hình gì? Tại sao?

Lời giải

Bóng của biển báo này có dạng hình bình hành.

Bởi vì góc lệch của mặt trời khiến các cạnh kề nhau của bóng không còn vuông góc với nhau nữa nhưng các cạnh đối diện vẫn song song với nhau và bằng nhau

Câu 83. Tìm phương chiếu, mặt phẳng chiếu của phép chiếu song song được mô tả trong Hình 2.

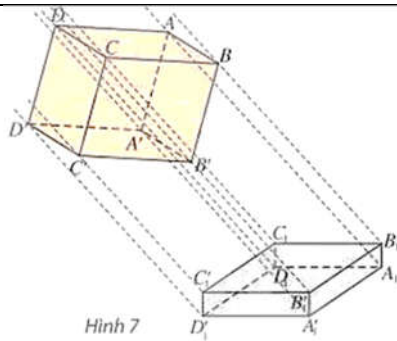


Hình 2

Lời giải:

phương chiếu a , mặt phẳng chiếu (Q)

Câu 84. Quan sát Hình 7 và cho biết các tia nắng song song đã tạo ra hình chiếu của hình hộp như thế nào trên nền nhà.



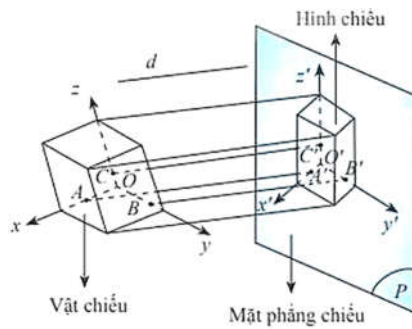
Hình 7

Lời giải:

Các tia nắng song song tạo thành hình đa giác $A_1B_1C_1D_1.A'_1B'_1C'_1D'_1$ trên nền nhà

Hình biểu diễn của một hình $\mathcal{H}$ trong không gian là hình chiếu song song của $\mathcal{H}$ trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

Câu 85. Vẽ hình biểu diễn của:

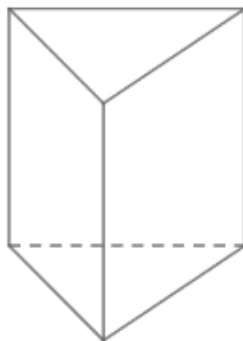


Hình 11

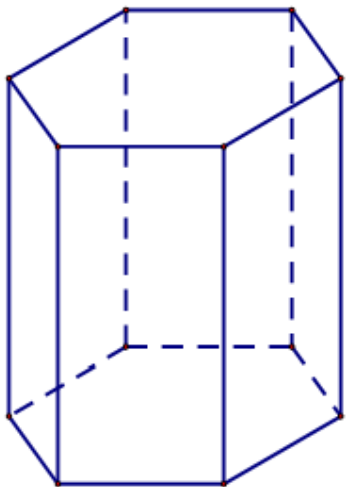
- Hình lăng trụ có đáy là tam giác đều;
- Hình lăng trụ có đáy là lục giác đều;
- Hình hộp.

Lời giải

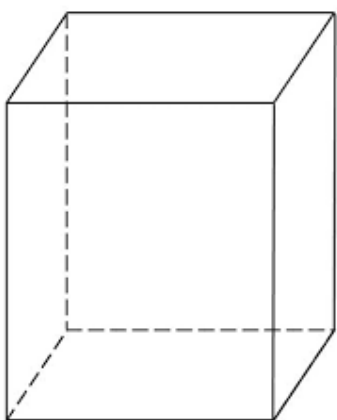
a)



b)



c)



Câu 86. Hình 78 mô tả bóng nắng của một lan can cầu đường bộ trên mặt đường, tức là hình chiếu của lan can qua phép chiếu song song lên mặt đường. Thanh lan can gọi nên hình ảnh đường thẳng nối các điểm A, B, C , ở đó B nằm giữa A và C . Gọi các điểm A', B', C' lần lượt là bóng nắng của các điểm A, B, C trên mặt đường.

Quan sát Hình 78 và cho biết:



Hình 78

- Các điểm A', B', C' có thẳng hàng hay không. Nếu có, điểm B' có nằm giữa hai điểm A' và C' hay không;
- Bóng nắng của thanh lan can là hình gì.

Lời giải

- Quan sát Hình 78, ta thấy các điểm A', B', C' thẳng hàng và điểm B' nằm giữa hai điểm A' , C' .
- Bóng nắng của thanh lan can là đường thẳng.

Câu 87. Hình 79 mô tả bóng nắng của chiếc thang gỗ trên bức tường, tức là hình chiếu của chiếc thang đó qua phép chiếu song song lên bức tường. Các thanh gỗ ngang gợi nên hình ảnh các đường thẳng song song với nhau.

Quan sát Hình 79 và cho biết bóng của các đường thẳng song song đó có là các đường thẳng song song hay không.



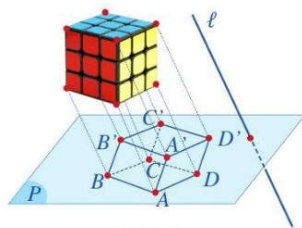
Hình 79

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Lời giải

Quan sát Hình 79, ta thấy bóng của các đường thẳng song song là các đường thẳng song song.

Câu 88. Cho khối rubik không có điểm chung nào với mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P) . Hãy xác định ảnh của khối rubik qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ (Hình 84).



Hình 84

Lời giải

Trường hợp 1: Đặt rubik sao cho các cạnh bên của rubik song song hoặc trùng với đường thẳng ℓ . Khi đó hình chiếu của rubik trên $mp(P)$ là hình thoi.

Trường hợp 2: Đặt rubik sao cho các cạnh bên của rubik không song song hoặc trùng với đường thẳng ℓ .

Khi đó hình chiếu của rubik trên $mp(P)$ là hình lục giác.

Câu 89. Vẽ hình biểu diễn của các vật trong Hình 89 và Hình 90.



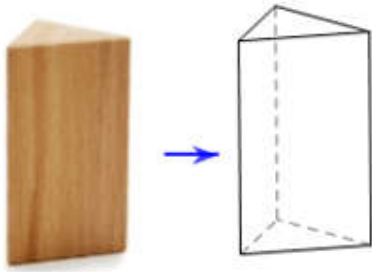
Hình 89



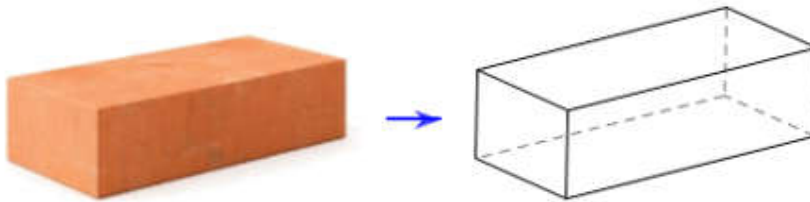
Hình 90

Lời giải

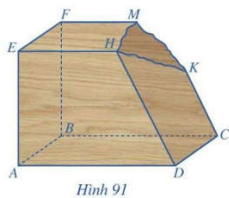
Hình biểu diễn khối gỗ trong Hình 89:



Hình biểu diễn viên gạch trong Hình 90:



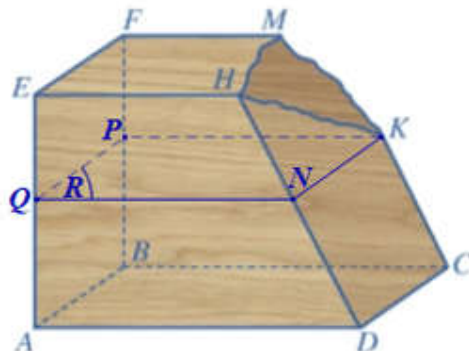
Câu 90. Một khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD) \parallel (EFMH)$, $CK \parallel DH$. Khối gỗ bị hỏng một góc (Hình 91). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối theo mặt phẳng (R) đi qua K và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.



- a) Hãy giúp bác thợ mộc xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ để cắt được chính xác.
b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm DH, BF với mặt phẳng (R) . Biết $BF = 60\text{ cm}$, $DH = 75\text{ cm}$, $CK = 40\text{ cm}$. Tính FJ .

Lời giải

a)



Trong $mp(CDHK)$, qua K vẽ đường thẳng song song với CD , cắt DH tại N . Trong $mp(BCKF)$, qua K vẽ đường thẳng song song với BC , cắt BF tại P . Ta có: $NK \parallel CD$, mà $CD \subset (ABCD)$ nên $NK \parallel (ABCD)$. $KP \parallel BC$, mà $BC \subset (ABCD)$ nên $KP \parallel (ABCD)$. NK, KP cắt nhau tại K trong $mp(NPK)$.

Do đó $(NPK) \parallel (ABCD)$.

Khi đó $mp(R)$ qua K và song song với $(ABCD)$ chính là $mp(NPK)$. Trong $mp(ADHE)$, qua N vẽ đường thẳng song song với AD , cắt AE tại Q . Khi đó $mp(R)$ là $mp(NKPQ)$.

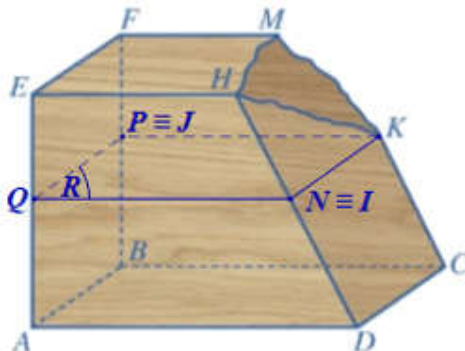
Vậy: $(NKPQ) \cap (ADHE) = QN$;

$(NKPQ) \cap (CDHK) = NK$;

$(NKPQ) \cap (BCKF) = KP$;

$(NKPQ) \cap (ABFE) = PQ$.

b)



Ta có: DH cắt NK tại N , mà $NK \subset (R)$ nên giao điểm của DH và (R) là điểm N .

Theo bài, I là giao điểm của DH và (R) nên điểm I và điểm N trùng nhau.

Tương tự ta cũng có điểm J trùng với điểm P .

Ta có: $(ABCD) \parallel (EFMH)$ và $(R) \parallel (ABCD)$ nên $(EFMH) \parallel (R) \parallel (ABCD)$.

Lại có, hai cát tuyến FB, HD cắt ba mặt phẳng song song $(EFMH)$, (R) , $(ABCD)$ lần lượt tại F, J, B và

H, I, D nên theo định lý Thalès ta có: $\frac{FJ}{HI} = \frac{FB}{HD}$.

Mặt khác, trong $mp(CDKH)$, tứ giác $CDIK$ có $CK \parallel DI$ (do $CK \parallel DH$) và $IK \parallel CD$

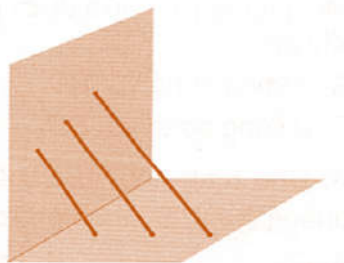
Do đó $CDIK$ là hình bình hành, suy ra $DI = CK = 40\text{ cm}$.

Khi đó $HI = DH - DI = 75 - 40 = 35(\text{cm})$.

Vì vậy, từ $\frac{FJ}{HI} = \frac{FB}{HD}$ ta có: $\frac{FJ}{35} = \frac{60}{75}$, suy ra $FJ = \frac{35 \cdot 60}{75} = 28(\text{cm})$.

Vậy $FJ = 28\text{ cm}$.

Câu 91. Ba chiếc gậy thẳng được đặt dựa vào tường và đôi một song song với nhau (H.4.32). Giải thích vì sao nếu ba đầu gậy trên tường thẳng hàng thì ba đầu gậy trên sàn cũng thẳng hàng.



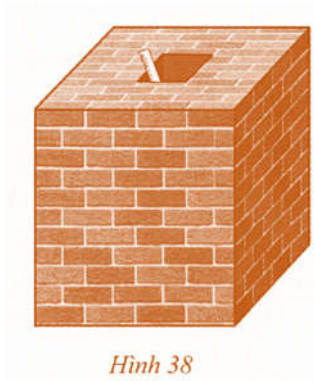
Hình 4.32

Lời giải

Gọi d là đường thẳng song song với ba chiếc gậy và (P) là mặt sàn. Khi đó ba đầu gậy trên sàn chính là hình chiếu của ba đầu gậy trên tường qua phép chiếu lên mặt phẳng (P) theo phương d . Vì phép chiếu song song bảo toàn tính thẳng hàng của các điểm nên nếu ba đầu gậy trên tường thẳng hàng thì ba đầu gậy trên sàn cũng thẳng hàng.

Câu 92. Phần trong của một bể đựng nước được xây có dạng hình hộp như Hình 38. Để xác định tỉ số của độ cao mực nước trong bể với chiều cao của lòng bể, bạn Minh làm như sau: "Lấy một thanh thước thẳng đủ dài cắm vào bể sao cho một đầu chạm đáy bể và để thước tựa vào mép dưới của thành miệng bể, đánh dấu

điểm tựa. Sau đó rút thước lên, tính tỉ số độ dài của phần thước chìm trong nước và độ dài của phần thước từ điểm được đánh dấu đến điểm đầu chạm đáy bể. Tỉ số đó chính bằng tỉ số của độ cao mực nước trong bể với chiều cao của lòng bể”. Bạn Minh làm có đúng không? Vì sao?

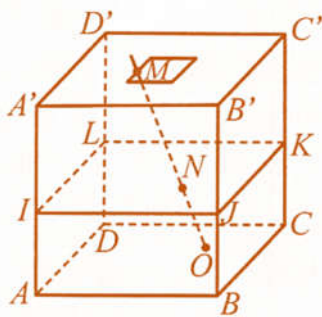


Hình 38

Lời giải

Bạn Minh làm như vậy là đúng. Giả sử phần trong bể nước và thước được biểu diễn bởi hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$ và đường thẳng MO . Mặt nước được biểu diễn bởi mặt phẳng $(IJKL)$ (Hình 65). Khi đó $(ABCD), (A'B'C'D'), (IJKL)$ đôi một song song, áp dụng định lí Thalès trong không gian ta

$$\text{có: } \frac{AI}{MN} = \frac{IA}{NO} = \frac{AA'}{OM} \Rightarrow \frac{IA}{AA'} = \frac{NO}{OM}.$$



Hình 65

CHỦ ĐỀ 4. GIỚI HẠN HÀM SỐ

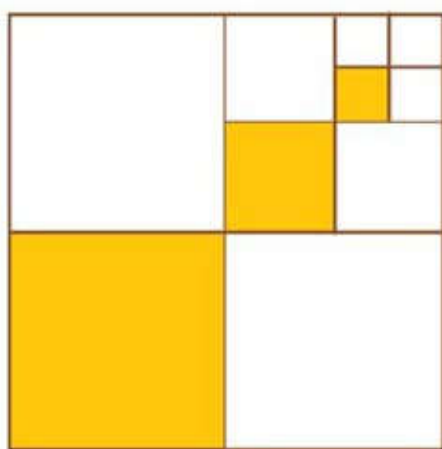
- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

NỘI DUNG CÂU HỎI

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Câu 1. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n . Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

Câu 2. Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái (H.5.2).



Hình 5.2

Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.

- Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- Tìm $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Câu 3. Để đơn giản, ta giả sử Achilles chạy với vận tốc $100 km/h$, vận tốc của rùa là $1 km/h$ và khoảng cách ban đầu $a = 100(km)$.

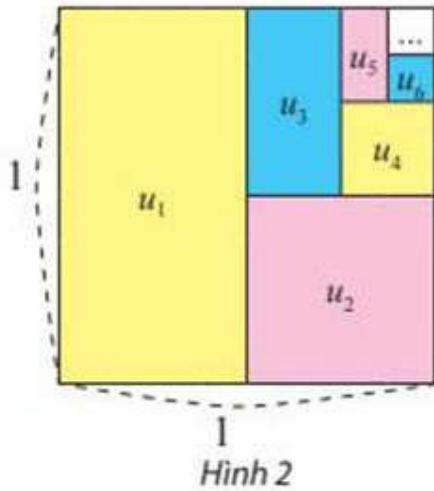
- Tính thời gian $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ tương ứng để Achilles đi từ A_1 đến A_2 , từ A_2 đến $A_3, \dots$, từ A_n đến $A_{n+1}, \dots$
- Tính tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}, \dots$, tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa.
- Sai lầm trong lập luận của Zeno là ở đâu?

Câu 4. Một loại vi khuẩn được nuôi cấy với số lượng ban đầu là 50. Sau mỗi chu kỳ 4 giờ, số lượng của chúng sẽ tăng gấp đôi.

- Dự đoán công thức tính số vi khuẩn u_n sau chu kỳ thứ n .
- Sau bao lâu, số lượng vi khuẩn sẽ vượt con số 10000?

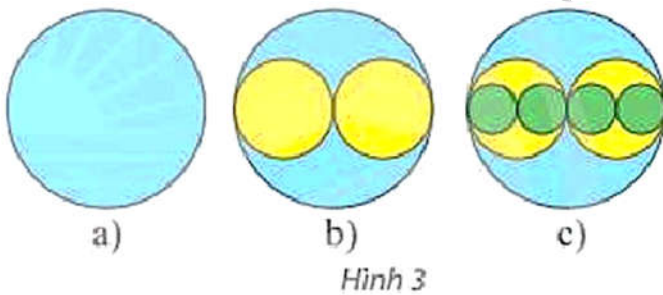
Câu 5. Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc $150mg$. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Câu 6. Từ một hình vuông có cạnh bằng 1, tô màu một nửa hình vuông, rồi tô màu một nửa hình còn lại, và cứ tiếp tục như vậy (xem Hình 2).



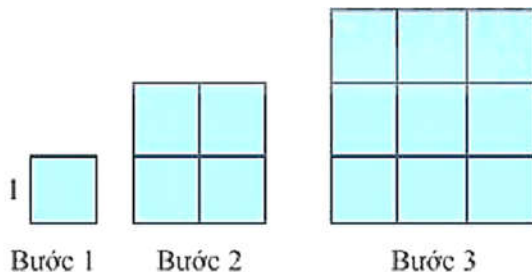
- Xác định diện tích u_k của phần hình được tô màu lần thứ k ($k = 1, 2, 3, \dots$).
- Tính tổng diện tích S_n của phần hình được tô màu sau lần tô thứ n ($n = 1, 2, 3, \dots$).
- Tìm giới hạn $\lim S_n$ và so sánh giới hạn này với diện tích hình vuông ban đầu.

Câu 7. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính R (cm) như Hình 3a.



Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.

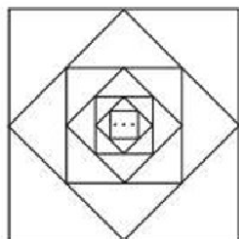
Câu 8. Dựng một dãy hình vuông bằng cách ghép từ các hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1 đơn vị độ dài) theo các bước như Hình 4. Kí hiệu u_n (đơn vị diện tích) là diện tích hình vuông dựng được ở bước thứ n .



- Với n như thế nào thì u_n vượt quá 10000; 1000000 ?

b) Cho hình có diện tích S . Với n như thế nào thì u_n vượt quá S ?

Câu 9. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



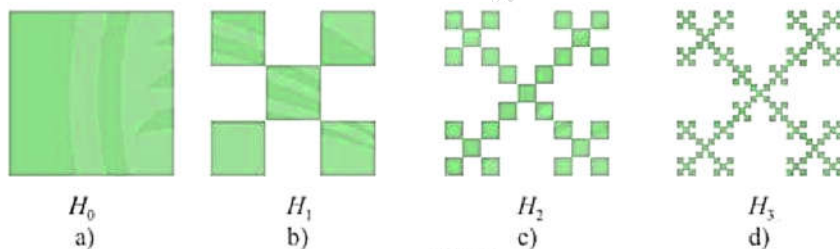
Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính $a_n, S_n (n=1, 2, 3, \dots)$ và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và $Q_n (n=1, 2, 3, \dots)$ và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

Câu 10. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình 6a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình 6b). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình 6c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình $H_n (n=1, 2, 3, \dots)$.



Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}; \dots$

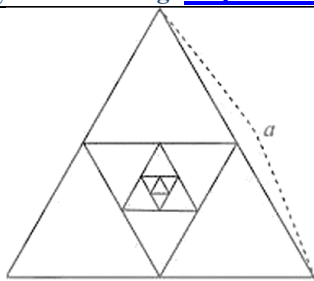
Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ chu vi $\lim p_n$).

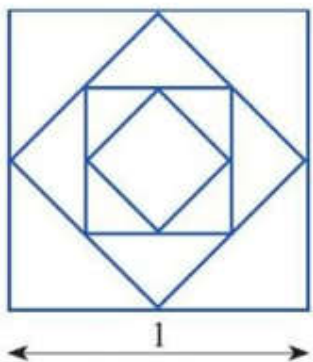
Câu 11. Cho tam giác đều có cạnh bằng a , gọi là tam giác H_1 . Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2 . Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình 1). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$



Hình 1

Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.

Câu 12. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như Hình 3.



Hình 3

Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

- Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n ;
- Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Câu 13. Có 1kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kỳ bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n .

- Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .
- Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.
- Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Câu 14. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (Hình 18).



Hình 18

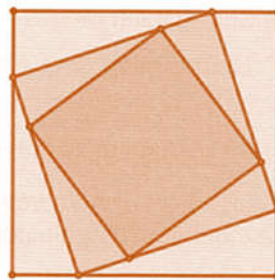
Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

Câu 15. Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 3 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3, \dots, A_nB_nC_n, \dots$. Kí hiệu s_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$.

a) Tính s_n .

b) Tính tổng $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$

Câu 16. Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a . Chia mỗi cạnh của hình vuông này thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2 . Lặp lại cách làm như trên với hình vuông H_2 để được hình vuông H_3 .

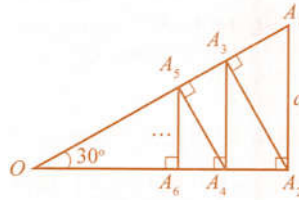


Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$. Gọi s_n là diện tích của hình vuông H_n .

a) Tính s_n .

b) Tính tổng $T = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$

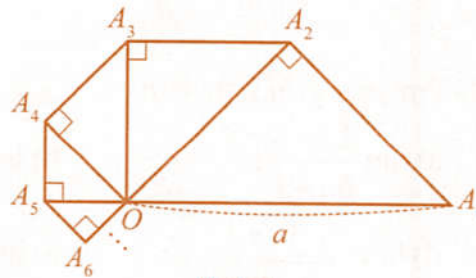
Câu 17. Cho tam giác OA_1A_2 vuông tại $A_2, A_1A_2 = a$ và $\widehat{A_1OA_2} = 30^\circ$. Hạ các đường vuông góc $A_2A_3 \perp OA_1; A_3A_4 \perp OA_2; A_4A_5 \perp OA_1; \dots$. Tiếp tục quá trình này, ta nhận được đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo a .



Hình 1

Câu 18. Tại một nhà máy, người ta đo được rằng 80% lượng nước sau khi sử dụng được xử lý và tái sử dụng. Với $100m^3$ ban đầu được sử dụng lần đầu tại nhà máy, khi quá trình xử lý và tái sử dụng lặp lại mãi mãi, nhà máy sử dụng được tổng lượng nước là bao nhiêu?

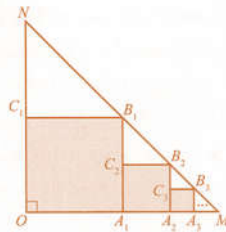
Câu 19. Cho tam giác OA_1A_2 vuông cân tại A_2 có cạnh huyền OA_1 bằng a . Bên ngoài tam giác OA_1A_2 , vẽ tam giác OA_2A_3 vuông cân tại A_3 . Tiếp theo, bên ngoài tam giác OA_2A_3 , vẽ tam giác OA_3A_4 vuông cân tại A_4 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta vẽ được một dãy các hình tam giác vuông cân (Hình 2).



Hình 2

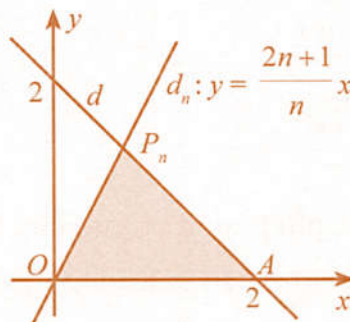
Tính độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$

Câu 20. Cho tam giác OMN vuông cân tại O , $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN , vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON . Trong tam giác A_1MB_1 , vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình 3). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Hình 3

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $d: x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d_n: y = \frac{2n+1}{n}x$ tại điểm $P_n (n \in \mathbb{N}^*)$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n . Tìm $\lim S_n$.



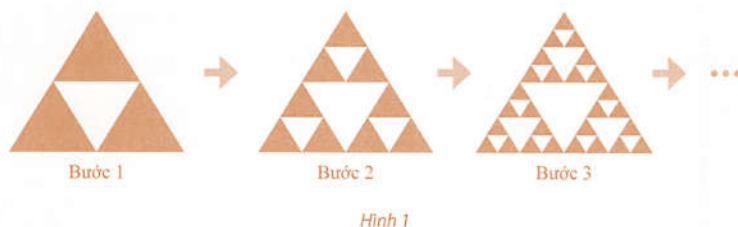
Hình 4

Câu 22. Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1, ta thực hiện lần lượt các bước như sau:

Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).

Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n , bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$). Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Câu 23. Biết rằng, từ vị trí A , một mũi tên bay với tốc độ $10m/s$ hướng thẳng tới bia mục tiêu đặt ở vị trí B cách vị trí A một khoảng bằng $10m$ (Hình 2). Một nhà thông thái lập luận như sau: "Để đến được B , trước hết mũi tên phải đến trung điểm A_1 của AB . Tiếp theo, nó phải đến trung điểm A_2 của A_1B . Tiếp nữa, nó phải đến trung điểm A_3 của A_2B . Cứ tiếp tục như vậy, vì không bao giờ hết các trung điểm nên mũi tên không thể bay đến được bia mục tiêu ở B ".



Lập luận trên có đúng không? Nếu không, hãy chỉ ra chỗ sai lầm.

Câu 24. Một mẫu chất phóng xạ $^{210}_{84}Po$ có khối lượng ban đầu $m_0 = 42(mg)$, nhưng cứ sau một khoảng thời gian $T = 138$ ngày thì khối lượng chất đó giảm đi một nửa (T được gọi là chu kỳ bán rã). Gọi u_n là khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ sau n chu kỳ bán rã.

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

b) Tính giới hạn của dãy số (u_n) và cho biết ý nghĩa của giới hạn đó.

Câu 25. Từ độ cao $100m$, người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n .

a) Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n) .

b) Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n) .

c) Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n . Tính S_n , nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng đi chuyển được là bao nhiêu?

Câu 26. Cho tam giác T_1 có diện tích bằng 1. Giả sử có tam giác T_2 đồng dạng với tam giác T_1 , tam giác T_3 đồng dạng với tam giác T_2 , ..., tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$ ($k > 1$).

Khi n tiến tới vô cùng, tính tổng diện tích của tất cả các tam giác theo k .

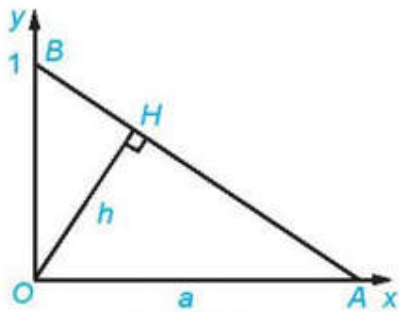
GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Câu 27. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công

$$\text{thức } m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Câu 28. Cho tam giác vuông OAB với $A = (a; 0)$ và $B = (0; 1)$ như Hình 5.5. Đường cao OH có độ dài là h .



Hình 5.5

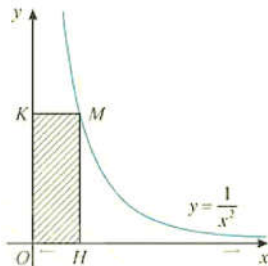
- Tính h theo a .
- Khi điểm A dịch chuyển về O , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?
- Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

Câu 29. Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng

thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$).

Tính $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$.

Câu 30. Quan sát hình bên, cho biết hình chữ nhật $OHMK$ thay đổi nhưng điểm M luôn nằm trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x^2}$ ($x > 0$). Diện tích hình chữ nhật sẽ thay đổi như thế nào khi điểm H tiến gần đến gốc tọa độ? Khi H tiến xa sang phía bên phải thì sao?



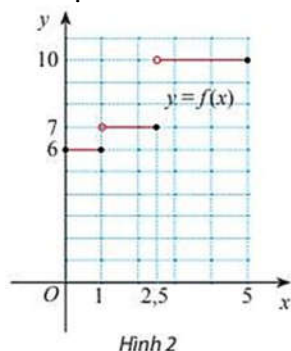
Câu 31. Giá cước vận chuyển bưu kiện giữa hai thành phố do một đơn vị cung cấp được cho bởi bảng sau:

Khối lượng bưu kiện (100 gam)	Giá cước cận vùng (nghìn đồng)
đến 1	6
trên 1 đến 2,5	7
từ 2,5 đến 5	10
...	...

Nếu chỉ xét trên khoảng từ 0 đến 5 (tính theo 100 gam) thì hàm số giá cước (tính theo nghìn đồng)

$$\text{xác định như sau: } f(x) = \begin{cases} 6 & \text{khi } x \in (0;1] \\ 7 & \text{khi } x \in (1;2,5] \\ 10 & \text{khi } x \in (2,5;5]. \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số như Hình 2.



- a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì sao cho $x_n \in (1;2,5)$ và $\lim x_n = 1$. Tìm $\lim f(x_n)$.
b) Giả sử (x'_n) là dãy số bất kì sao cho $(x'_n) \in (0;1)$ và $\lim x'_n = 1$. Tìm $\lim f(x'_n)$.
c) Nhận xét về kết quả ở a) và b).

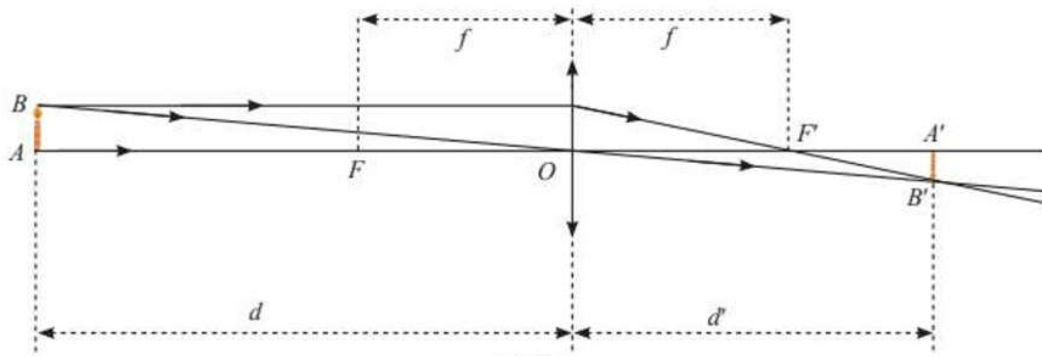
Câu 32. Một cái hồ đang chứa $200m^3$ nước mặn với nồng độ muối $10kg/m^3$. Người ta ngọt hoá nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $2m^3$ / phút.

- a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.
b) Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Câu 33. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

- a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là $C(t) = \frac{30t}{400+t}$ (gam/lít).
b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

Câu 34. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (Hình 5).



Hình 5

Ta có công thức: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ hay $d' = \frac{df}{d-f}$.

Xét hàm số $g(d) = \frac{df}{d-f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

a) $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d)$;

b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d)$.

Câu 35. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 36. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

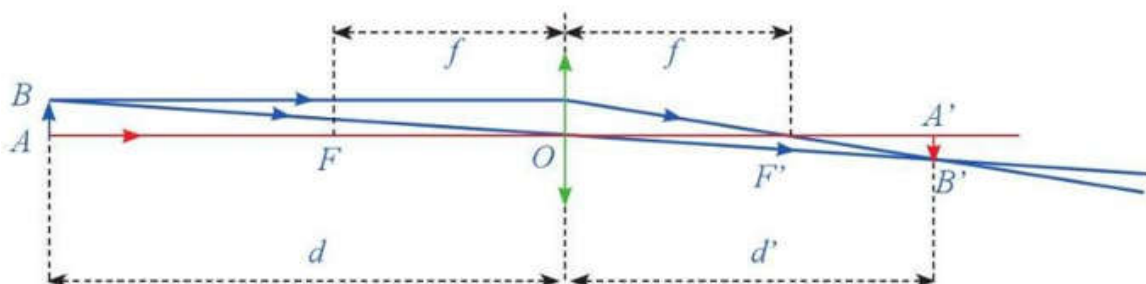
b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 37. Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$.

Câu 38. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như Hình 19. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.



Hình 19

a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.

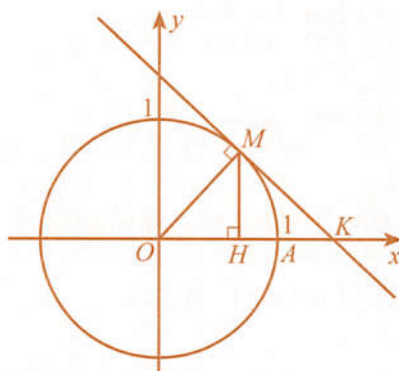
b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Câu 39. Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 55$ (triệu đồng).

a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.

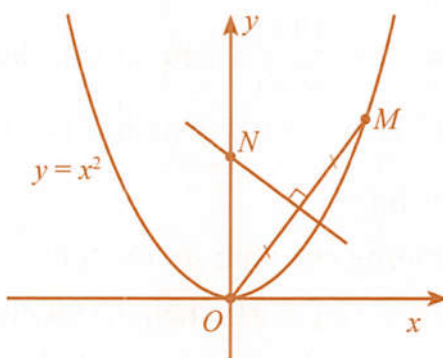
b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

Câu 40. Cho điểm $M(t; \sqrt{1-t^2})$, $0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



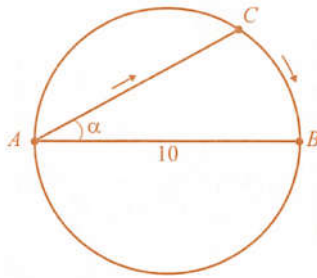
Hình 1

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(t; t^2)$, $t > 0$, nằm trên đường parabol $y = x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N . Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O ?



Hình 2

Câu 42. Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10m$, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình 4).



Hình 4

Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.

a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha)$ và $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} S(\alpha)$.

Câu 43. Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$, trong đó $v(m/s)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v \rightarrow 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 44. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người).

Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là $V_{tb} = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính

$\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Câu 45. Một bể chứa 5000l nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25l/phút.

a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị: g/l) là $C(t) = \frac{30t}{200+t}$.

b) Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

Câu 46. Hàm Heaviside có dạng $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái

tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$.

Tính $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t), \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$.

Câu 47. Một cái hồ chứa 600l nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30 g/l vào hồ với tốc độ 15l/phút.

a) Tính nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Nồng độ muối trong hồ sẽ thế nào khi t dần về dương vô cùng?

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 48. Một người lái xe từ địa điểm A đến địa điểm B trong thời gian 3 giờ. Biết quãng đường từ A đến B dài 180 km . Chứng tỏ rằng có ít nhất một thời điểm trên hành trình, xe chạy với vận tốc 60 km/h .

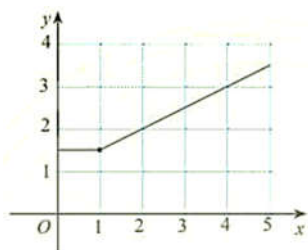
Câu 49. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11000 đồng

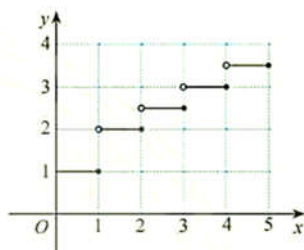
a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Câu 50. Hai đồ thị ở hai hình dưới đây cho biết phí gửi xe y của ô tô con (tính theo 10 nghìn đồng) theo thời gian gửi x (tính theo giờ) của hai bãi xe. Có nhận xét gì về sự thay đổi của số tiền phí phải trả theo thời gian gửi ở mỗi bãi xe?



a) Bãi xe A



b) Bãi xe B

Câu 51. Tại một xưởng sản xuất bột đá thạch anh, giá bán (tính theo nghìn đồng) của x (kg) bột đá thạch anh được tính theo công thức sau: $P(x) = \begin{cases} 4,5x & \text{khi } 0 < x \leq 400 \\ 4x + k & \text{khi } x > 400 \end{cases}$ (k là một hằng số)

a) Với $k = 0$, xét tính liên tục của hàm số $P(x)$ trên $(0; +\infty)$.

b) Với giá trị nào của k thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$?

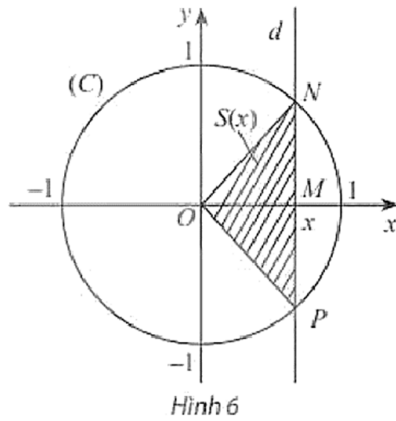
Câu 52. Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường $x(\text{km})$ cho loại xe 4 chỗ như sau:

**Hình 5**

$$T(x) = \begin{cases} 10000 & \text{khi } 0 < x \leq 0,7 \\ 10000 + (x - 0,7) \cdot 14000 & \text{khi } 0,7 < x \leq 20 \\ 280200 + (x - 20) \cdot 12000 & \text{khi } x > 20. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) tâm O , bán kính bằng 1. Một đường thẳng d thay đổi, luôn vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x ($-1 < x < 1$) và cắt đường tròn (C) tại các điểm N và P (xem Hình 6).



- a) Viết biểu thức $S(x)$ biểu thị diện tích của tam giác ONP .
- b) Hàm số $y = S(x)$ có liên tục trên $(-1; 1)$ không? Giải thích.
- c) Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} S(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x)$.

Câu 54. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200000 & \text{khi } 4 < x \leq 24 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Câu 55. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó

$$\text{là } F(r) = \begin{cases} \frac{GMr}{R^3} & \text{khi } 0 < r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0; +\infty)$ không?

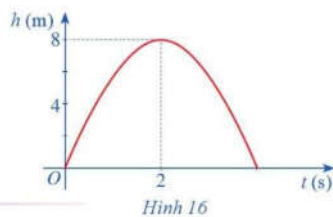
Câu 56. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ 10°C , mỗi phút tăng 2°C trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút 3°C trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $^\circ\text{C}$) trong

$$\text{tủ theo thời gian } t \text{ (tính theo phút) có dạng } T(t) = \begin{cases} 10 + 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 60 \\ k - 3t & \text{khi } 60 < t \leq 100 \end{cases} \quad (k \text{ là hằng số}).$$

Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của k .

Câu 57. Hình 16 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó

$$h(t) = -2t^2 + 8t.$$



- a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.
- b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t)$.

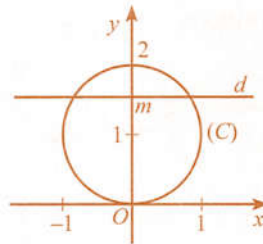
Câu 58. Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

Câu 59. Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0 < t \leq 4$). Viết công thức xác định hàm số $y = P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0; 4]$.

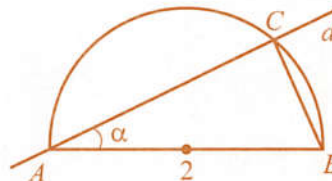
Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1$. Với mỗi số thực m , gọi $Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $d: y = m$ với đường tròn (C) . Viết công thức xác định hàm số $y = Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?



Hình 2

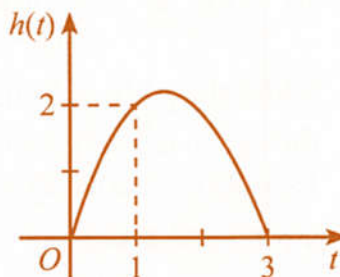
Câu 61. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A , cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $(0; \frac{\pi}{2})$ và tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha)$, $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.



Hình 3

Câu 62. Hình 5 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = at^2 + bt$.



Hình 5

a) Dựa vào đồ thị, tìm a, b .

b) Chứng minh rằng hàm số $h(t)$ liên tục trên khoảng $(0; 3)$.

c) Với m thuộc $(0; 3)$, tính $\lim_{t \rightarrow m} h(t)$. Cho biết ý nghĩa của kết quả.

Câu 63. Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng.

- a) Vẽ đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.
 b) Hàm số đó có liên tục trên $[0; +\infty)$ không?
 c) Giá trị $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$ có tồn tại không? Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người có giảm đi không?

Câu 64. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

Khối lượng đến 250g	Mức cước (đồng)
Đến 20g	4000
Trên 20g đến 100g	6000
Trên 100g đến 250g	8000

- a) Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.
 b) Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

Câu 65. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200000 & \text{khi } 4 < x < 24 \end{cases} \text{ . Xét tính liên tục của hàm số } C(x) \text{ .}$$

Câu 66. Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số $v(t) = \begin{cases} 10 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ t^2 - 5t + 10 & \text{khi } t > 5 \end{cases}$, trong đó $v(t)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Hỏi hàm $v(t)$ có liên tục tại điểm $t = 5$ hay không?

LỜI GIẢI THAM KHẢO

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

Câu 1. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống một mặt sàn. Sau mỗi lần chạm sàn, quả bóng nảy lên độ cao bằng $\frac{2}{3}$ độ cao trước đó. Giả sử rằng quả bóng luôn chuyển động vuông góc với mặt sàn và quá trình này tiếp diễn vô hạn lần. Giả sử u_n là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng sau lần nảy lên thứ n . Chứng minh rằng dãy số (u_n) có giới hạn là 0.

Lời giải

Một quả bóng cao su được thả từ độ cao $5m$ xuống mặt sàn, sau lần chạm sàn đầu tiên, quả bóng nảy lên một độ cao là $u_1 = \frac{2}{3} \cdot 5$.

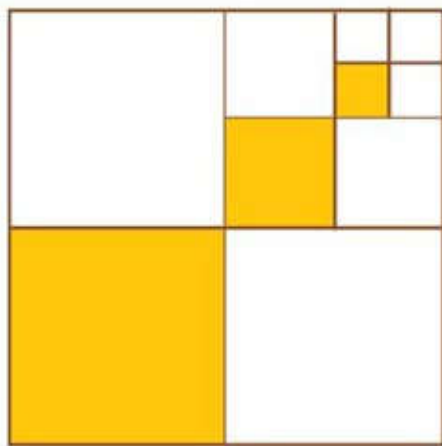
Tiếp đó, bóng rơi từ độ cao u_1 xuống mặt sàn và nảy lên độ cao là $u_2 = \frac{2}{3}u_1 = \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 5\right) = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2$.

Tiếp đó, bóng rơi từ độ cao u_2 xuống mặt sàn và nảy lên độ cao là $u_3 = \frac{2}{3}u_2 = \frac{2}{3} \cdot \left(5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2\right) = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$ và cứ tiếp tục như vậy.

Sau lần chạm sàn thứ n , quả bóng nảy lên độ cao là $u_n = 5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Ta có: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$, do đó, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, suy ra điều phải chứng minh.

Câu 2. Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái (H.5.2).



Hình 5.2

Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.

a) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

b) Tìm $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Lời giải

a) Ta có: u_1 là độ dài cạnh của hình vuông được tô màu tạo từ việc chia hình vuông cạnh 1 thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau, do đó $u_1 = \frac{1}{2}$.

Cứ tiếp tục như thế, ta được: $u_2 = \frac{1}{2}u_1, u_3 = \frac{1}{2}u_2, \dots, u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}, \dots$

Do vậy, độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Do đó, tổng của n số hạng đầu là $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Ta có: $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 - 0 = 1$.

Câu 3. Để đơn giản, ta giả sử Achilles chạy với vận tốc 100 km/h , vận tốc của rùa là 1 km/h và khoảng cách ban đầu $a = 100(\text{km})$.

a) Tính thời gian $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ tương ứng để Achilles đi từ A_1 đến A_2 , từ A_2 đến $A_3, \dots$, từ A_n đến $A_{n+1}, \dots$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày đầu tiên là 150mg .

Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5% .

Do đó, lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ hai là $150 + 150 \cdot 5\% = 150(1 + 0,05)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ ba là $150 + 150(1 + 0,05) \cdot 5\% = 150 + 150(0,05 + 0,05^2) = 150(1 + 0,05 + 0,05^2)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ tư là $150 + 150(1 + 0,05 + 0,05^2) \cdot 5\% = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3)$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ năm là $150 + 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3) \cdot 5\% = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4)$
 $= 157,8946875(\text{mg})$.

Cứ tiếp tục như vậy, ta ước tính lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài là

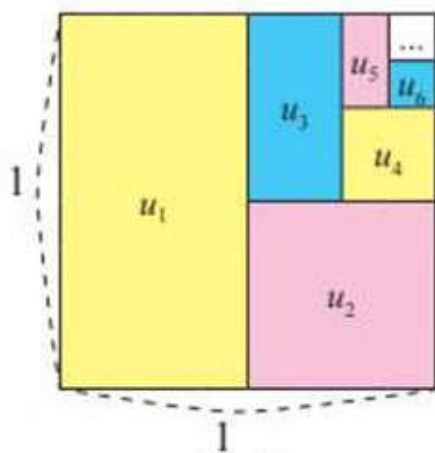
$$S = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + \dots)$$

Lại có $1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 0,05$.

$$\text{Do đó, } 1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + \dots = \frac{u_1}{1 - q} = \frac{1}{1 - 0,05} = \frac{20}{19}.$$

$$\text{Suy ra } S = 150 \cdot \frac{20}{19} = \frac{400}{361}.$$

Câu 6. Từ một hình vuông có cạnh bằng 1, tô màu một nửa hình vuông, rồi tô màu một nửa hình còn lại, và cứ tiếp tục như vậy (xem Hình 2).



Hình 2

- Xác định diện tích u_k của phần hình được tô màu lần thứ $k (k = 1, 2, 3, \dots)$.
- Tính tổng diện tích S_n của phần hình được tô màu sau lần tô thứ $n (n = 1, 2, 3, \dots)$.
- Tìm giới hạn $\lim S_n$ và so sánh giới hạn này với diện tích hình vuông ban đầu.

Lời giải:

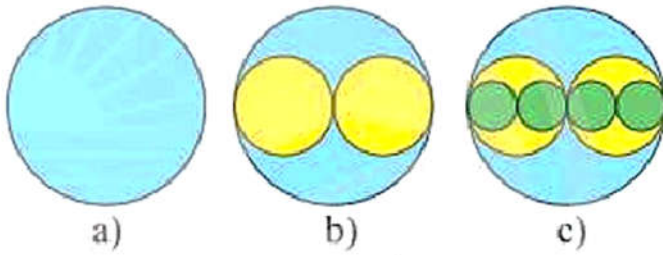
$$\text{a) } u_k = \frac{1}{2^k}$$

$$\text{b) } S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{\frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right]}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

c) $\lim S_n = \lim \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = \lim 1 - \lim \frac{1}{2^n} = 1 - 0 = 1$

Ta thấy $\lim S_n$ bằng diện tích hình vuông ban đầu

Câu 7. Từ tờ giấy, cắt một hình tròn bán kính $R(\text{cm})$ như Hình 3a.



Hình 3

Tiếp theo, cắt hai hình tròn bán kính $\frac{R}{2}$ rồi chồng lên hình tròn đầu tiên như Hình 3b. Tiếp theo, cắt bốn hình tròn bán kính $\frac{R}{4}$ rồi chồng lên các hình trước như Hình 3c. Cứ thế tiếp tục mãi. Tính tổng diện tích của các hình tròn.

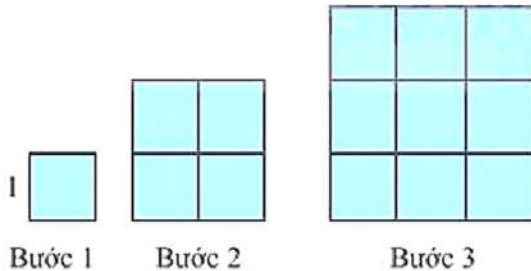
Lời giải:

Tổng diện tích các hình tròn là: $S = R^2 + 2 \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{R}{4}\right)^2 + \dots = R^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right)$

Ta có: $\lim \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

Vậy $S = 2R^2$

Câu 8. Dựng một dãy hình vuông bằng cách ghép từ các hình vuông đơn vị (cạnh bằng 1 đơn vị độ dài) theo các bước như Hình 4. Kí hiệu u_n (đơn vị diện tích) là diện tích hình vuông dựng được ở bước thứ n .



Hình 4

a) Với n như thế nào thì u_n vượt quá 10000; 1000000 ?

b) Cho hình có diện tích S . Với n như thế nào thì u_n vượt quá S ?

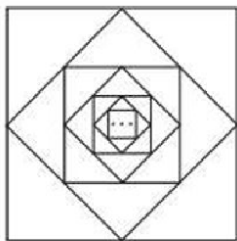
Lời giải:

Ta có: $u_n = n^2$

a) $u_n > 10000$ khi $n > 100$, $u_n > 1000000$ khi $n > 1000$

b) $u_n > S$ khi $n > \sqrt{S}$

Câu 9. Từ hình vuông đầu tiên có cạnh bằng 1 (đơn vị độ dài), nối các trung điểm của bốn cạnh để có hình vuông thứ hai. Tiếp tục nối các trung điểm của bốn cạnh của hình vuông thứ hai để được hình vuông thứ ba. Cứ tiếp tục làm như thế, nhận được một dãy hình vuông (xem Hình 5).



Hình 5

a) Kí hiệu a_n là diện tích của hình vuông thứ n và S_n là tổng diện tích của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính $a_n, S_n (n=1, 2, 3, \dots)$ và tìm $\lim S_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng diện tích của các hình vuông).

b) Kí hiệu p_n là chu vi của hình vuông thứ n và Q_n là tổng chu vi của n hình vuông đầu tiên. Viết công thức tính p_n và $Q_n (n=1, 2, 3, \dots)$ và tìm $\lim Q_n$ (giới hạn này nếu có được gọi là tổng chu vi của các hình vuông).

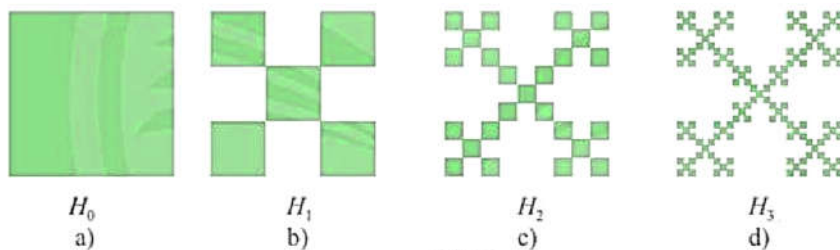
Lời giải:

$$\text{a) } a_n = \frac{1}{2^{n-1}}; S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{b) } p_n = 4 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}}; Q_n = 4 + 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 4 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \dots + 4 \cdot \frac{1}{(\sqrt{2})^{n-1}} = 4 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} \approx 13,66$$

Câu 10. Xét quá trình tạo ra hình có chu vi vô cực và diện tích bằng 0 như sau:

Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng 1 đơn vị độ dài (xem Hình 6a). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 (xem Hình 6b). Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông, rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 (xem Hình 6c). Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình $H_n (n=1, 2, 3, \dots)$.



Hình 6

Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3^2}; \dots$

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}$.

a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.

b) Tính chu vi p_n của H_n và tính $\lim p_n$.

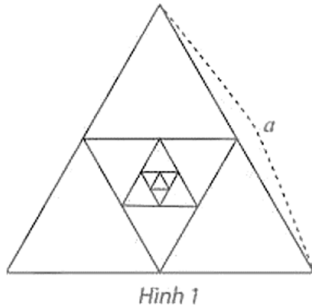
(Quá trình trên tạo nên một hình, gọi là một fractal, được coi là có diện tích $\lim S_n$ chu vi $\lim p_n$).

Lời giải:

$$\text{a) } S_n = 5^n \cdot \left(\frac{1}{3^n}\right)^2 = \frac{5^n}{9^n} = \left(\frac{5}{9}\right)^n; \lim S_n = \lim \left(\frac{5}{9}\right)^n = 0$$

b) $p_n = 5^n \cdot 4 \cdot \frac{1}{3^n} = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n$; $\lim p_n = \lim 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^n = +\infty$

Câu 11. Cho tam giác đều có cạnh bằng a , gọi là tam giác H_1 . Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành tam giác H_2 . Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành tam giác H_3 (Hình 1). Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$



Tính tổng chu vi và tổng diện tích các tam giác của dãy.

Lời giải:

Cạnh của các tam giác $H_1, H_2, H_3, \dots$ lần lượt là: $a; \frac{1}{2}a, \frac{1}{2^2}a, \dots$

Tổng chu vi của các tam giác là:

$$C = 3 \cdot a + 3 \cdot \frac{1}{2}a + 3 \cdot \frac{1}{2^2}a + \dots = 3a \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots\right) = 3a \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$$

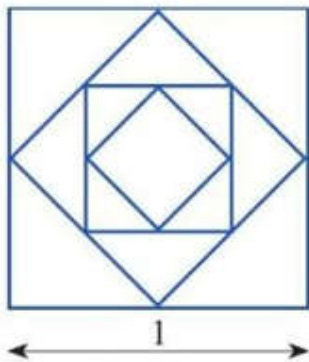
Diện tích tam giác H_1 là $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$

Diện tích tam giác H_2 bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác H_1 ; Diện tích tam giác H_3 bằng $\frac{1}{4}$ diện tích tam giác H_2 ;...

Tổng diện tích các tam giác là:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots\right) = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

Câu 12. Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như Hình 3.



Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.

a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n ;

b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Lời giải

a) Gọi S_n là diện tích của hình vuông thứ n .

Ta có: $S_1 = 1; S_2 = \frac{1}{2}; S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots$

Dãy (S_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ có công thức tổng quát là:

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

b) Ta có: $|q| = \left|\frac{1}{2}\right| < 1$ nên dãy (S_n) trên lập thành một cấp số nhân lùi hạn nên ta có:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Vậy tổng diện tích của các hình vuông là 2 (đvdt).

Câu 13. Có 1kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kỳ bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n .

a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .

b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.

c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn $10^{-6}g$.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots$

Suy ra (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{2}$ có số hạng tổng quát là: $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Ta có: $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.

c) Đổi $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} kg = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 g$

Để chất phóng xạ bé hơn $10^{-6}(g)$ thì $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 31$.

Vậy cần ít nhất 30 chu kỳ tương ứng với 720000 năm khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người.

Câu 14. Từ độ cao 55,8 m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (Hình 18).



Hình 18

Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.

Lời giải:

Gọi (u_n) là dãy số thể hiện quãng đường di chuyển của quả bóng sau mỗi lần chạm đất.

Ta có: $u_1 = 55,8, u_2 = \frac{1}{10} \cdot u_1; u_3 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot u_1; \dots; u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \cdot u_1$.

Khi đó dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 55,8$ và công bội $q = \frac{1}{10}$ thỏa mãn $|q| < 1$.

$$\text{Suy ra } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{55,8}{1 - \frac{1}{10}} = 62(m).$$

Vậy tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần là $62m$.

Câu 15. Cho tam giác $A_1B_1C_1$ có diện tích là 3 (đơn vị diện tích). Dựng tam giác $A_2B_2C_2$ bằng cách nối các trung điểm của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình này, ta có các tam giác $A_3B_3C_3, \dots, A_nB_nC_n, \dots$. Kí hiệu s_n là diện tích của tam giác $A_nB_nC_n$.

a) Tính s_n .

b) Tính tổng $s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$

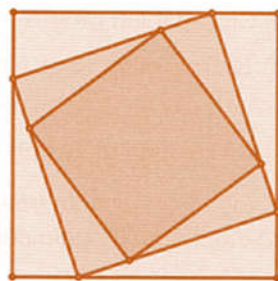
Lời giải

Theo cách xác định tam giác $A_2B_2C_2$, ta có $s_2 = \frac{1}{4} s_1$. Tương tự, $s_3 = \frac{1}{4} s_2, \dots$,

$$s_n = \frac{1}{4} s_{n-1} \Rightarrow s_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} s_1 = 3 \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}.$$

$$\text{Từ đó } s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots = \frac{3}{1 - \frac{1}{4}} = 4.$$

Câu 16. Cho hình vuông H_1 có cạnh bằng a . Chia mỗi cạnh của hình vuông này thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông H_2 . Lặp lại cách làm như trên với hình vuông H_2 để được hình vuông H_3 .



Tiếp tục quá trình trên ta nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$. Gọi s_n là diện tích của hình vuông H_n .

a) Tính s_n .

b) Tính tổng $T = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots$

Lời giải

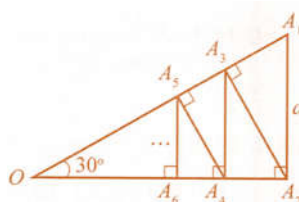
Cạnh của hình vuông H_2 là $a_2 = \sqrt{\left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{8}}a$.

Khi đó $s_2 = \frac{5}{8}a^2 = \frac{5}{8}s_1$.

Lí luận tương tự, ta có $s_3 = \frac{5}{8}s_2, \dots, s_n = \frac{5}{8}s_{n-1} = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}a^2$. Từ đó

$$T = s_1 + s_2 + \dots + s_n + \dots = a^2 \left[1 + \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} + \dots \right] = \frac{8a^2}{3}.$$

Câu 17. Cho tam giác OA_1A_2 vuông tại A_2 , $A_1A_2 = a$ và $\widehat{A_1OA_2} = 30^\circ$. Hạ các đường vuông góc $A_2A_3 \perp OA_1$; $A_3A_4 \perp OA_2$; $A_4A_5 \perp OA_1$; ... Tiếp tục quá trình này, ta nhận được đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo a .



Hình 1

Giải

Các góc $\widehat{A_1A_2A_3}, \widehat{A_2A_3A_4}, \widehat{A_3A_4A_5}, \dots$ đều bằng góc $\widehat{A_1OA_2}$ nên đều có số đo 30° .

$$A_2A_3 = A_1A_2 \cdot \cos 30^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_3A_4 = A_2A_3 \cdot \cos 30^\circ = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2;$$

$$A_4A_5 = A_3A_4 \cdot \cos 30^\circ = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3; \dots$$

Vậy độ dài các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ và công bội bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

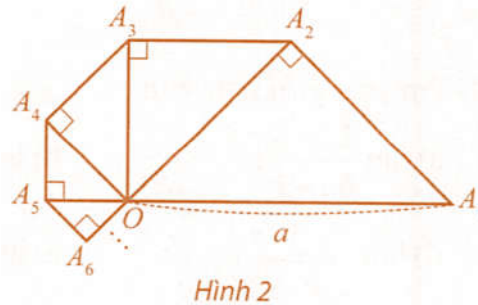
Từ đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$ là $l = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}(2 + \sqrt{3})}{2^2 - (\sqrt{3})^2} = a(3 + 2\sqrt{3})$

Câu 18. Tại một nhà máy, người ta đo được rằng 80% lượng nước sau khi sử dụng được xử lí và tái sử dụng. Với $100m^3$ ban đầu được sử dụng lần đầu tại nhà máy, khi quá trình xử lí và tái sử dụng lặp lại mãi mãi, nhà máy sử dụng được tổng lượng nước là bao nhiêu?

Lời giải

$$100 + 100 \cdot 0,8 + 100 \cdot (0,8)^2 + 100 \cdot (0,8)^3 + \dots = 100 \cdot \frac{1}{1 - 0,8} = 500 (m^3).$$

Câu 19. Cho tam giác OA_1A_2 vuông cân tại A_2 có cạnh huyền OA_1 bằng a . Bên ngoài tam giác OA_1A_2 , vẽ tam giác OA_2A_3 vuông cân tại A_3 . Tiếp theo, bên ngoài tam giác OA_2A_3 , vẽ tam giác OA_3A_4 vuông cân tại A_4 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta vẽ được một dãy các hình tam giác vuông cân (Hình 2).



Hình 2

Tính độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$

Lời giải

Ta có các góc $\widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, \widehat{A_3OA_4}, \dots$ đều bằng 45° . Ta có:

$$A_1A_2 = OA_2 = OA_1 \cdot \cos 45^\circ = a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_2A_3 = OA_3 = OA_2 \cdot \cos 45^\circ = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2;$$

$$A_3A_4 = OA_4 = OA_3 \cdot \cos 45^\circ = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3; \dots$$

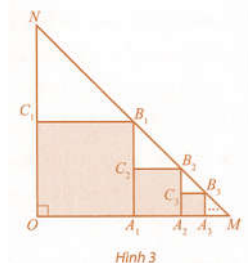
Vậy độ dài các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

và công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$ là

$$l = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (2 + \sqrt{2}) = a(1 + \sqrt{2}).$$

Câu 20. Cho tam giác OMN vuông cân tại O , $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN , vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON . Trong tam giác A_1MB_1 , vẽ

hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình 3). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Hình 3

Lời giải

Độ dài cạnh của các hình vuông lần lượt là $a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2; a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3; \dots$

Diện tích của các hình vuông lần lượt là

$$S_1 = a_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

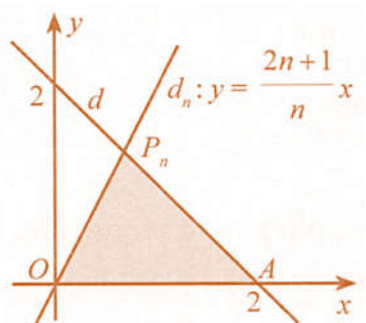
$$S_2 = a_2^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$S_3 = a_3^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \dots$$

Các diện tích $S_1, S_2, S_3, \dots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = \frac{1}{4}$ và công bội bằng $\frac{1}{4}$.

Do đó, tổng diện tích các hình vuông là $S = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Câu 21. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $d: x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d_n: y = \frac{2n+1}{n}x$ tại điểm $P_n (n \in \mathbb{N}^*)$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n . Tìm $\lim S_n$.



Hình 4

Lời giải

$$A(2;0); P_n\left(\frac{2n}{3n+1}; \frac{4n+2}{3n+1}\right); OA = 2; AP_n = \frac{4n+2}{3n+1} \cdot \sqrt{2}; \widehat{OAP_n} = 45^\circ.$$

$$S_n = \frac{1}{2} OA \cdot AP_n \cdot \sin \widehat{OAP} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4n+2}{3n+1} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4n+2}{3n+1}$$

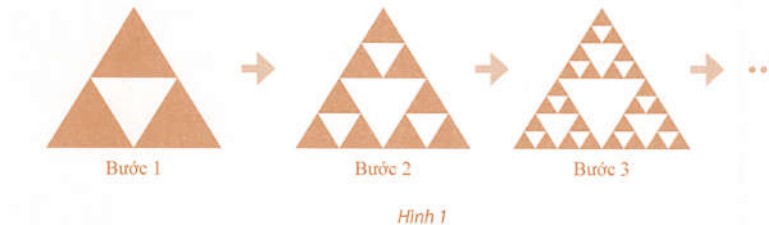
$$\lim S_n = \lim \frac{4n+2}{3n+1} = \lim \frac{4 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{4}{3}$$

Câu 22. Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1, ta thực hiện lần lượt các bước như sau:

Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).

Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n , bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$). Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Hình 1
Lời giải

$$S = \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + 3^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots$$

Đây là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{4}$, công bội $q = \frac{3}{4}$, nên $S = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1$.

Câu 23. Biết rằng, từ vị trí A , một mũi tên bay với tốc độ $10m/s$ hướng thẳng tới bia mục tiêu đặt ở vị trí B cách vị trí A một khoảng bằng $10m$ (Hình 2). Một nhà thông thái lập luận như sau: "Để đến được B , trước hết mũi tên phải đến trung điểm A_1 của AB . Tiếp theo, nó phải đến trung điểm A_2 của A_1B . Tiếp nữa, nó phải đến trung điểm A_3 của A_2B . Cứ tiếp tục như vậy, vì không bao giờ hết các trung điểm nên mũi tên không thể bay đến được bia mục tiêu ở B ".



Lập luận trên có đúng không? Nếu không, hãy chỉ ra chỗ sai lầm.

Lời giải

Thời gian để mũi tên bay từ A đến A_1 là $\frac{1}{2}$ giây, từ A_1 đến A_2 là $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ giây, từ A_2 đến A_3 là $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$, ...

Tổng thời gian bay của mũi tên là $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots (*)$

Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công bội bằng $\frac{1}{2}$.

Do đó, tổng này bằng $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ (giây).

Như vậy, mũi tên đến bia mục tiêu sau 1 giây.

Lập luận của nhà thông thái không đúng, sai lầm ở chỗ cho rằng tổng ở (*) không phải là một số hữu hạn.

Câu 24. Một mẫu chất phóng xạ $^{210}_{84}\text{Po}$ có khối lượng ban đầu $m_0 = 42(\text{mg})$, nhưng cứ sau một khoảng thời gian $T = 138$ ngày thì khối lượng chất đó giảm đi một nửa (T được gọi là chu kỳ bán rã). Gọi u_n là khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ sau n chu kỳ bán rã.

- Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .
- Tính giới hạn của dãy số (u_n) và cho biết ý nghĩa của giới hạn đó.

Lời giải

a) Vì cứ sau 1 chu kỳ bán rã thì khối lượng mẫu chất phóng xạ giảm một nửa nên (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = 21$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Khi đó, số hạng tổng quát của dãy số (u_n) là: $u_n = \frac{42}{2^n}$.

b) Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{42}{2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 42 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 42 \cdot 0 = 0$. Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ càng dần về 0, nghĩa là sau một khoảng thời gian đủ dài thì khối lượng còn lại của mẫu chất phóng xạ là rất nhỏ (đến mức không đáng kể).

Câu 25. Từ độ cao 100 m , người ta thả một quả bóng cao su xuống đất. Giả sử cứ sau mỗi lần chạm đất, quả bóng nảy lên một độ cao bằng $\frac{1}{4}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi h_n là độ cao quả bóng đạt được ở lần nảy thứ n .

- Tìm số hạng tổng quát của dãy số (h_n) .
- Tính giới hạn của dãy số (h_n) và nêu ý nghĩa giới hạn của dãy số (h_n) .
- Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường đi được của quả bóng từ lúc bắt đầu thả quả bóng đến khi quả bóng chạm đất lần thứ n . Tính S_n , nếu quá trình này cứ tiếp tục diễn ra mãi thì tổng quãng đường quả bóng đi chuyển được là bao nhiêu?

Lời giải

a) Theo đề bài, $h_n = \frac{1}{4} h_{n-1}$ nên (h_n) là một cấp số nhân với $h_1 = 25$, công bội $q = \frac{1}{4}$. Suy ra số hạng tổng quát của dãy số (h_n) : $h_n = \frac{100}{4^n}$.

b) Ta có: $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100}{4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} 100 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 100 \cdot 0 = 0$. Từ giới hạn đó, ta rút ra được ý nghĩa: Khi n càng dần tới vô cực thì độ cao của quả bóng đạt được sau khi nảy ngày càng nhỏ và độ cao đó dần tới 0.

c) Ta có: $S_n = 100 + 2 \cdot \left(\frac{100}{4} + \frac{100}{4^2} + \frac{100}{4^3} + \dots + \frac{100}{4^n}\right)$

Nếu quá trình bóng nảy cứ tiếp tục diễn ra mãi, tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 100 + 2 \cdot \left(\frac{100}{4} + \frac{100}{4^2} + \frac{100}{4^3} + \dots + \frac{100}{4^n} + \dots\right)$$

Vì $\frac{100}{4}; \frac{100}{4^2}; \frac{100}{4^3}; \dots; \frac{100}{4^n}; \dots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \frac{100}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{4} < 1$ nên

ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 100 + 2 \cdot \frac{\frac{100}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{500}{3}$. Vậy tổng quãng đường quả bóng di chuyển được là $\frac{500}{3}\text{ m}$. đường quả

bóng di chuyển được là $\frac{500}{3}\text{ m}$.

Câu 26. Cho tam giác T_1 có diện tích bằng 1. Giả sử có tam giác T_2 đồng dạng với tam giác T_1 , tam giác T_3 đồng dạng với tam giác $T_2, \dots$, tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k} (k > 1)$. Khi n tiến tới vô cùng, tính tổng diện tích của tất cả các tam giác theo k .

Lời giải

Kí hiệu diện tích tam giác T_n là S_n .

Vì tam giác T_n đồng dạng với tam giác T_{n-1} với tỉ số đồng dạng $\frac{1}{k}$ nên diện tích tam giác T_n bằng $\frac{1}{k^2}$ diện tích tam giác T_{n-1} hay $S_n = \frac{1}{k^2} S_{n-1}$.

Vì $k > 1$ nên $\frac{1}{k^2} < 1$. Vậy $S_1; S_2; \dots; S_{n-1}; \dots$ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có $S_1 = 1$ và công bội

$$q = \frac{1}{k^2}.$$

Khi đó, tổng diện tích của tất cả các tam giác nếu n tiến tới vô cùng là:

$$S = S_1 + S_2 + \dots + S_{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{k^2}} = \frac{k^2}{k^2 - 1}$$

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

Câu 27. Trong Thuyết tương đối của Einstein, khối lượng của vật chuyển động với vận tốc v cho bởi công

thức $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$,

trong đó m_0 là khối lượng của vật khi nó đứng yên, c là vận tốc ánh sáng. Chuyện gì xảy ra với khối lượng của vật khi Albert Einstein (1879–1955) vận tốc của vật gần với vận tốc ánh sáng?

Lời giải

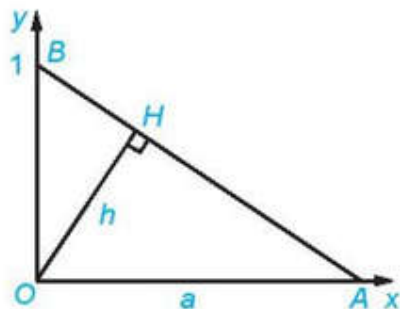
Sau bài học này ta sẽ giải quyết được bài toán trên như sau:

Từ công thức khối lượng $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, ta thấy m là một hàm số của v , với tập xác định là nửa

khoảng $[0; c)$. Rõ ràng khi v tiến gần tới vận tốc ánh sáng, tức là $v \rightarrow c$, ta có $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \rightarrow 0$. Do đó

$\lim_{v \rightarrow c^-} m(v) = +\infty$, nghĩa là khối lượng m của vật trở nên vô cùng lớn khi vận tốc của vật gần tới vận tốc ánh sáng.

Câu 28. Cho tam giác vuông OAB với $A = (a; 0)$ và $B = (0; 1)$ như Hình 5.5. Đường cao OH có độ dài là h .



Hình 5.5

- a) Tính h theo a .
 b) Khi điểm A dịch chuyển về O , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?
 c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox , điểm H thay đổi thế nào? Tại sao?

Lời giải

a) Ta có: $A = (a; 0) \Rightarrow OA = a; B = (0; 1) \Rightarrow OB = 1$

Tam giác OAB vuông tại O có đường cao OH nên ta có $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}$

$$\text{Do đó, } \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{1^2} \Rightarrow h = \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 1}}.$$

b) Khi điểm A dịch chuyển về O , ta có $OA = a = 0$, suy ra $h = 0$, do đó điểm H dịch chuyển về điểm O .

c) Khi A dịch chuyển ra vô cực theo chiều dương của trục Ox , ta có $OA = a \rightarrow +\infty$.

$$\text{Ta có: } \lim_{a \rightarrow +\infty} h = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + 1}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{a^2}{a^2 \left(1 + \frac{1}{a^2}\right)}} = \lim_{a \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{a^2}}} = 1.$$

Do đó, điểm H dịch chuyển về điểm B .

Câu 29. Cho hàm số $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ (hàm Heaviside, thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$).

Tính $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$ và $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t)$.

Lời giải

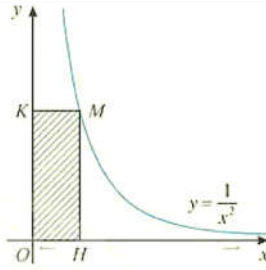
Với dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n < 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 0$.

$$\text{Do đó } \lim_{t \rightarrow 0^-} H(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0.$$

Tương tự, với dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n > 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 1$.

$$\text{Do đó } \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} H(t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 = 1.$$

Câu 30. Quan sát hình bên, cho biết hình chữ nhật $OHMK$ thay đổi nhưng điểm M luôn nằm trên đồ thị của hàm số $y = \frac{1}{x^2} (x > 0)$. Diện tích hình chữ nhật sẽ thay đổi như thế nào khi điểm H tiến gần đến gốc tọa độ? Khi H tiến xa sang phía bên phải thì sao?



Lời giải:

$$S_{OMHK} = OH \cdot OK = x_H \cdot y_H = x_H \cdot \frac{1}{x_H^2} = \frac{1}{x_H}$$

Khi H tiến đến gần gốc toạ độ, tức là x_H càng nhỏ. Vậy diện tích $OMHK$ càng lớn

Khi H tiến xa sang phía bên phải, tức là x_H càng lớn. Vậy diện tích $OMHK$ càng nhỏ

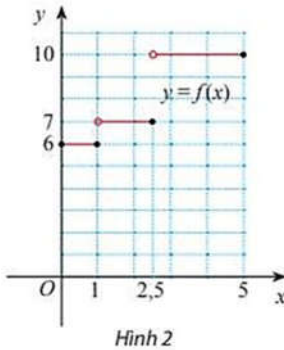
Câu 31. Giá cước vận chuyển bưu kiện giữa hai thành phố do một đơn vị cung cấp được cho bởi bảng sau:

Khối lượng bưu kiện (100 gam)	Giá cước cận vùng (nghìn đồng)
đến 1	6
trên 1 đến 2,5	7
từ 2,5 đến 5	10
...	...

Nếu chỉ xét trên khoảng từ 0 đến 5 (tính theo 100 gam) thì hàm số giá cước (tính theo nghìn đồng)

$$\text{xác định như sau: } f(x) = \begin{cases} 6 & \text{khi } x \in (0; 1] \\ 7 & \text{khi } x \in (1; 2,5] \\ 10 & \text{khi } x \in (2,5; 5]. \end{cases}$$

Đồ thị của hàm số như Hình 2.



a) Giả sử (x_n) là dãy số bất kì sao cho $x_n \in (1; 2,5)$ và $\lim x_n = 1$. Tìm $\lim f(x_n)$.

b) Giả sử (x'_n) là dãy số bất kì sao cho $(x'_n) \in (0; 1)$ và $\lim x'_n = 1$. Tìm $\lim f(x'_n)$.

c) Nhận xét về kết quả ở a) và b).

Lời giải:

a) Với $x_n \in (1; 2,5)$ thì $\lim f(x_n) = 7$

b) Với $x'_n \in (0; 1)$ thì $\lim f(x'_n) = 6$

c) Với $x_n \in (1; 2,5)$ thì $\lim f(x_n) = f(x)$ khi $x \in (1; 2,5)$

Với $x'_n \in (0; 1)$ thì $\lim f(x'_n) = f(x)$ khi $x \in (0; 1)$

Câu 32. Một cái hồ đang chứa $200m^3$ nước mặn với nồng độ muối $10kg/m^3$. Người ta ngọt hoá nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $2m^3$ / phút.

- a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.
 b) Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.

Lời giải:

$$\begin{aligned} \text{a) } C(t) &= \frac{10.200}{200+2t} = \frac{1000}{100+t} \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} C(t) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2000}{100+2t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1000}{t}}{\frac{100}{t}+1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1000}{t}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{100}{t} + 1 \right)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1000}{t}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{100}{t} + 1} = \frac{0}{0+1} = 0 \end{aligned}$$

Vậy khi t càng lớn và tiến tới $+\infty$ thì nồng độ muối tiến tới 0

Câu 33. Trong hồ có chứa 6000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 30 gam/lít vào hồ với tốc độ 15 lít/phút.

- a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{30t}{400+t} \text{ (gam/lít)}.$$

- b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu $t \rightarrow +\infty$.

Lời giải:

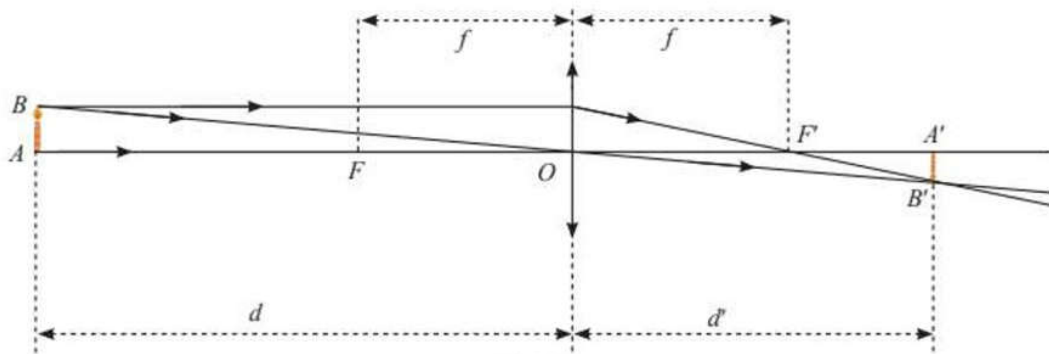
- a) Sau thời gian t , số lít nước bơm vào hồ là: $15t$ (lít)

Trong $15t$ lít nước biển có lượng muối: $30.15t = 450t$ (gam)

$$\text{Nồng độ muối trong hồ sau thời gian } t \text{ phút: } C(t) = \frac{450t}{6000+15t} = \frac{30t}{400+t}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30t}{400+t} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30}{\frac{400}{t}+1} = \frac{30}{0+1} = 30$$

Câu 34. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính (Hình 5).



Hình 5

Ta có công thức: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ hay $d' = \frac{df}{d-f}$.

Xét hàm số $g(d) = \frac{df}{d-f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

- a) $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d)$;
 b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d)$.

Lời giải:

a) Ta có: $\lim_{d \rightarrow f^+} df = f^2 > 0$; $\lim_{d \rightarrow f^+} \frac{1}{d-f} = +\infty$

Suy ra: $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = \lim_{d \rightarrow f^+} \left[df \cdot \frac{1}{d-f} \right] = +\infty$

Vậy khi vật tiến gần tới tiêu điểm thì ảnh càng lớn và tiến tới $+\infty$

b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{df}{d-f} = \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{f}{1-\frac{f}{d}} = \frac{f}{1-0} = f$

Vậy khi vật ở rất xa, tiến tới $+\infty$ thì ảnh của vật nằm trên tiêu điểm

Câu 35. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải:

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t \left(1 + \frac{4}{t} \right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50}{1 + \frac{4}{t}} = 50$.

Ý nghĩa: Tối đa một nhân viên chỉ có thể lắp được 50 bộ phận mỗi ngày.

Câu 36. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải:

a) Chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm là:

$\bar{C}(x) = \frac{50000 + 105x}{x}$ (sản phẩm).

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50000 + 105x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{50000}{x} + 105 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{50000}{x} + 105 \right) = 105$.

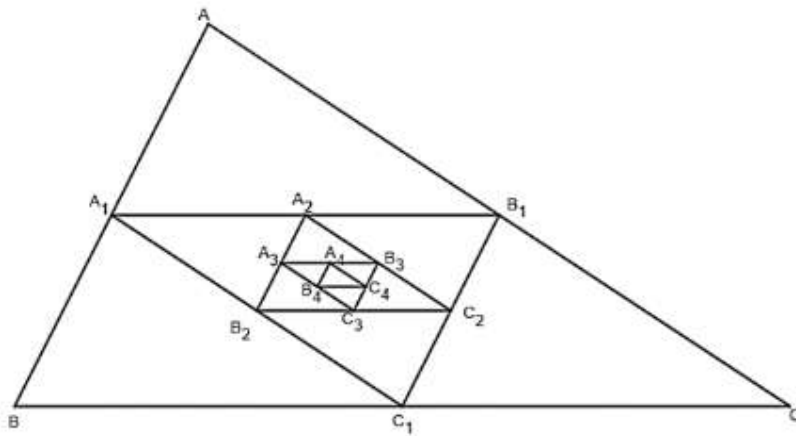
Ý nghĩa: Khi số sản phẩm sản xuất ra ngày càng nhiều thì chi phí trung bình chỉ tối đa là 105 nghìn đồng.

Câu 37. Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$, ... Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$.

a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Lời giải



a)

+) (p_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$ Ta có: $p_1 = p_{\Delta ABC} = a + a + a = 3a$;

$$p_2 = p_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3a) = \frac{1}{2} \cdot p_1$$

$$p_3 = p_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (3a) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot p_1; \dots; p_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot p_1; \dots$$

Suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (3a) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (3a) = 0 \cdot 3a = 0$$

+) (S_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$ Gọi h là chiều cao của tam giác ABC và $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Ta có: } S_1 = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah; S_2 = S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}ah\right) = \frac{1}{4} \cdot S_1;$$

$$S_3 = S_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{4} \cdot \frac{h}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}ah\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot S_1; \dots; S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot S_1; \dots$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot S_1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}ah\right) = 0 \cdot \frac{1}{2}ah = 0$$

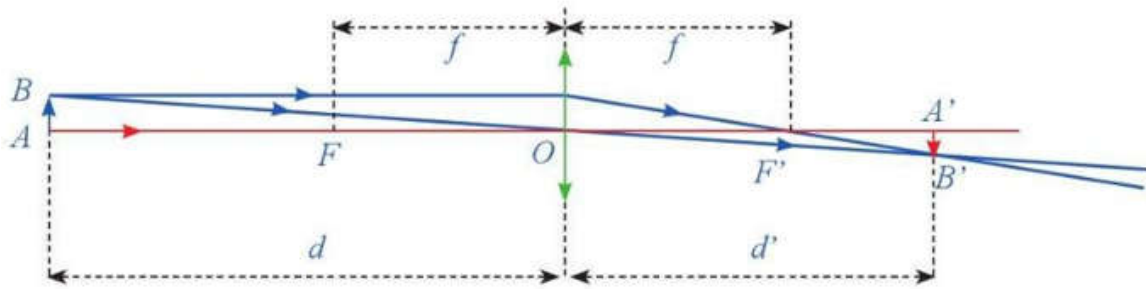
b) +) Ta có (p_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = 3a$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ thỏa

$$\text{mãn } |q| < 1 \text{ có tổng: } P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$$

+) Ta cũng có (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = \frac{1}{2}ah$ và công bội $q = \frac{1}{4}$

$$\text{thỏa mãn } |q| < 1 \text{ có tổng: } S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{\frac{1}{2}ah}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}ah$$

Câu 38. Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là f . Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ một vật thật AB và từ ảnh $A'B'$ của nó tới quang tâm O của thấu kính như Hình 19. Công thức thấu kính là $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$.



Hình 19

- a) Tìm biểu thức xác định hàm số $d' = \varphi(d)$.
 b) Tìm $\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d)$, $\lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d)$ và $\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d)$. Giải thích ý nghĩa của các kết quả tìm được.

Lời giải:

a) Ta có: $\frac{1}{d'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{d} \Leftrightarrow \frac{1}{d'} = \frac{d-f}{df} \Leftrightarrow d' = \frac{df}{d-f}$.

b) Ta có:

$$\lim_{d \rightarrow f^+} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d-f} = +\infty; \lim_{d \rightarrow f^-} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f^-} \frac{df}{d-f} = -\infty;$$

$$\lim_{d \rightarrow f} \varphi(d) = \lim_{d \rightarrow f} \frac{df}{d-f} = \infty.$$

Giải thích ý nghĩa: Khi khoảng cách của vật tới thấu kính mà gần với tiêu cự thì khoảng cách ảnh của vật đến thấu kính ra xa vô tận nên lúc đó bằng mắt thường mình không nhìn thấy.

Câu 39. Một đơn vị sản xuất hàng thủ công ước tính chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2x + 55$ (triệu đồng).

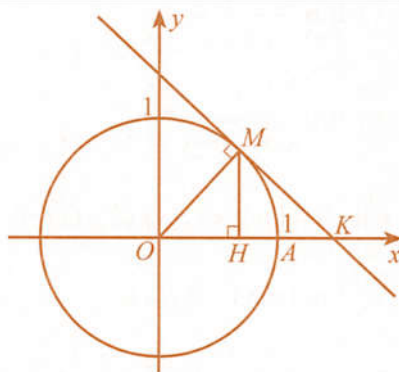
- a) Tìm hàm số $f(x)$ biểu thị chi phí trung bình để sản xuất mỗi đơn vị sản phẩm.
 b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Giới hạn này có ý nghĩa gì?

Lời giải

a) $f(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{2x+55}{x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Khi số lượng sản phẩm sản xuất được càng lớn thì chi phí trung bình để sản xuất một đơn vị sản phẩm càng gần với 2 (triệu đồng).

Câu 40. Cho điểm $M(t; \sqrt{1-t^2})$, $0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Hình 1

Lời giải

Điểm M dần đến điểm A khi $t \rightarrow 1^-$. Do đó, ta cần tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{HK}{HA}$.

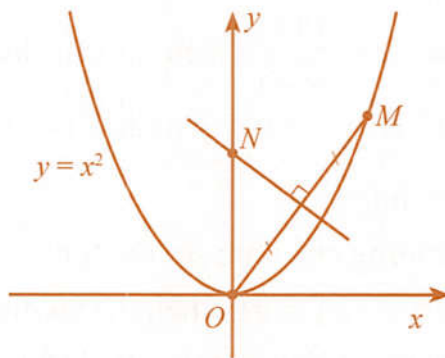
Ta có $H(t;0)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M nhận $\overrightarrow{OM} = (t; \sqrt{1-t^2})$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình là $d: t(x-t) + \sqrt{1-t^2}(y - \sqrt{1-t^2}) = 0$.

Thay $y=0$ vào phương trình của d ta nhận được $x = \frac{1}{t}$. Suy ra $K\left(\frac{1}{t}; 0\right)$.

Ta có: $HA = 1-t$; $HK = \frac{1}{t} - t = \frac{1-t^2}{t}$; $\frac{HK}{HA} = \frac{1-t^2}{t(1-t)} = \frac{1+t}{t}$; $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{HK}{HA} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1+t}{t} = \frac{1+1}{1} = 2$.

Vậy khi điểm M dần đến điểm A thì giá trị của tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến 2.

Câu 41. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(t; t^2)$, $t > 0$, nằm trên đường parabol $y = x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N . Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O ?



Hình 2

Lời giải

Trung điểm của đoạn thẳng OM là $I\left(\frac{t}{2}; \frac{t^2}{2}\right)$.

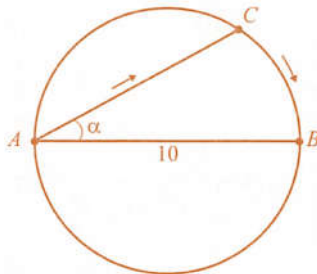
Đường trung trực của OM nhận vector $\overrightarrow{OM} = (t; t^2)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình

$d: t\left(x - \frac{t}{2}\right) + t^2\left(y - \frac{t^2}{2}\right) = 0$. Thay $x=0$ vào phương trình của d , ta nhận được $y = \frac{1}{2}(1+t^2)$. Suy ra $N\left(0; \frac{1}{2}(1+t^2)\right)$.

Điểm M dần đến điểm O khi t dần đến 0^+ . Ta có $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}(1+t^2) = \frac{1}{2}$.

Suy ra khi điểm M dần đến điểm O thì điểm N dần đến điểm $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Câu 42. Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10m$, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$, rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình 4).



Hình 4

Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.

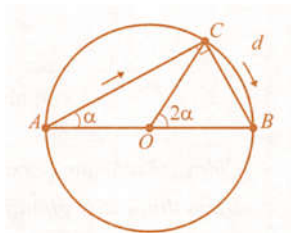
a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha)$ và $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha)$.

Lời giải

Kí hiệu O là tâm hình tròn.



a) Do tam giác ABC vuông tại C nên $AC = AB \cos \alpha = 10 \cos \alpha (m)$.

Ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\alpha$. Suy ra độ dài cung CB là $l = OB \cdot \widehat{BOC} = 5 \cdot 2\alpha = 10\alpha (m)$.

Quãng đường di chuyển (tính theo m) của người đó là

$$S(\alpha) = AC + l = 10 \cos \alpha + 10\alpha = 10(\alpha + \cos \alpha) \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

b) Do các hàm số $y = \alpha$ và $y = \cos \alpha$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = S(\alpha)$ liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 10(\alpha + \cos \alpha) = 10 \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \cos \alpha \right) \\ &= 10(0+1) = 10. \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 10(\alpha + \cos \alpha) = 10 \left(\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \alpha + \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \cos \alpha \right) \\ &= 10 \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = 5\pi \end{aligned}$$

Câu 43. Số lượng xe ô tô vào một đường hầm được cho bởi công thức $f(v) = \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264}$, trong đó $v(m/s)$ là vận tốc trung bình của các xe khi đi vào đường hầm. Tính $\lim_{v \rightarrow 20} f(v)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta có: $\lim_{v \rightarrow 20} \frac{290,4v}{0,36v^2 + 13,2v + 264} = \frac{\lim_{v \rightarrow 20} 290,4v}{\lim_{v \rightarrow 20} 0,36v^2 + \lim_{v \rightarrow 20} 13,2v + \lim_{v \rightarrow 20} 264} = \frac{290,4 \cdot 20}{0,36 \cdot 20^2 + 13,2 \cdot 20 + 264} \approx 9.$

Từ kết quả đó, ta thấy lưu lượng xe vào hầm ở thời điểm vận tốc trung bình của các xe đạt $20 m/s$ là khoảng 9 xe ô tô trong $1s$.

Câu 44. Sau khi phát hiện một bệnh dịch, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên biến đổi theo một hàm số thời gian (tính theo ngày) là $g(t) = 45t^2 - t^3$ (người).

Tốc độ trung bình gia tăng người bệnh giữa hai thời điểm t_1, t_2 là $V_{tb} = \frac{g(t_2) - g(t_1)}{t_2 - t_1}$. Tính

$\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10}$ và cho biết ý nghĩa của kết quả tìm được.

Lời giải

Ta có: $\lim_{t \rightarrow 10} \frac{g(t) - g(10)}{t - 10} = \lim_{t \rightarrow 10} \frac{45t^2 - t^3 - 45 \cdot 10^2 + 10^3}{t - 10}$
 $= \lim_{t \rightarrow 10} \frac{45(t - 10)(t + 10) - (t - 10)(t^2 + 10t + 100)}{t - 10}$
 $= \lim_{t \rightarrow 10} (-t^2 + 35t + 350) = 600$

Từ kết quả trên, ta thấy tốc độ gia tăng người bệnh ngày tại thời điểm $t = 10$ (ngày) là 600 người/ngày.

Câu 45. Một bể chứa 5000l nước tinh khiết. Nước muối có chứa 30 gam muối trên mỗi lít nước được bơm vào bể với tốc độ 25l/phút.

a) Chứng minh rằng nồng độ muối của nước trong bể sau t phút (tính bằng khối lượng muối chia thể tích nước trong bể, đơn vị: g/l) là $C(t) = \frac{30t}{200+t}$.

b) Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả đó.

Lời giải

a) Sau t phút thì lượng muối trong bể là $30 \cdot 25 \cdot t = 750t(g)$ và thể tích nước trong bể là $5000 + 25t(l)$. Vậy nồng độ muối của nước trong bể sau t phút là:

$$C(t) = \frac{750t}{5000 + 25t} = \frac{30t}{200 + t} (g/l).$$

b) Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{200 + t} = 30$. Theo kết quả đó, ta thấy khi lượng nước trong bể tăng theo thời gian đến vô hạn thì nồng độ muối của nước sẽ tăng dần đến giá trị $30 g/l$, tức là xấp xỉ nồng độ muối của loại nước muối cho thêm vào bể.

Câu 46. Hàm Heaviside có dạng $H(t) = \begin{cases} 0 & \text{nếu } t < 0 \\ 1 & \text{nếu } t \geq 0 \end{cases}$ thường được dùng để mô tả việc chuyển trạng thái

tắt/mở của dòng điện tại thời điểm $t = 0$.

Tính $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(t), \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t)$.

Lời giải

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n < 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 0$.

Khi đó: $\lim_{t \rightarrow 0^-} H(x) = \lim_{t \rightarrow 0^-} H(t_n) = 0$.

Xét dãy số (t_n) bất kì sao cho $t_n > 0$ và $t_n \rightarrow 0$, ta có $H(t_n) = 1$.

Khi đó: $\lim_{t \rightarrow 0^+} H(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} H(t_n) = 1$.

Câu 47. Một cái hồ chứa 600l nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối 30 g/l vào hồ với tốc độ 15l/phút.

a) Tính nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Nồng độ muối trong hồ sẽ thế nào khi t dần về dương vô cùng?

Lời giải

a) Sau t phút bơm nước vào hồ thì lượng nước là $600 + 15t$ (l) và lượng muối có được là $30.15t$ (g).

Nồng độ muối của nước là: $C(t) = \frac{30.15t}{600 + 15t} = \frac{30t}{40 + t}$ (g/l).

b) Khi t dần về dương vô cùng, ta có:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{40 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t \left(\frac{40}{t} + 1 \right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30}{\frac{40}{t} + 1} = 30 \text{ (g/l)}$$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 48. Một người lái xe từ địa điểm A đến địa điểm B trong thời gian 3 giờ. Biết quãng đường từ A đến B dài 180km. Chứng tỏ rằng có ít nhất một thời điểm trên hành trình, xe chạy với vận tốc 60 km/h.

Lời giải

Áp dụng định lí: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f(a)f(b) < 0$ thì tồn tại ít nhất một điểm $c \in (a; b)$ sao cho $f(c) = 0$.

Câu 49. Một bảng giá cước taxi được cho như sau:

Giá mở cửa (0,5 km đầu)	Giá cước các km tiếp theo đến 30 km	Giá cước từ km thứ 31
10000 đồng	13500 đồng	11000 đồng

a) Viết công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển.

b) Xét tính liên tục của hàm số ở câu a.

Lời giải

a) Gọi x (km, $x > 0$) là quãng đường khách di chuyển và y (đồng) là số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển x .

Với $x \leq 0,5$, ta có $y = 10000$.

Với $0,5 < x \leq 30$, ta có: $y = 10000 + 13500(x - 0,5)$ hay $y = 13500x + 3250$.

Với $x > 30$, ta có: $y = 10000 + 13500.29,5 + 11000(x - 30)$ hay $y = 11000x + 78250$.

Vậy công thức hàm số mô tả số tiền khách phải trả theo quãng đường di chuyển là

$$y = \begin{cases} 10000, & 0 < x \leq 0,5 \\ 13500x + 3250, & 0,5 < x \leq 30 \\ 11000x + 78250, & x > 30 \end{cases}$$

b) +) Với $0 < x < 0,5$ thì $y = 10000$ là hàm hằng nên nó liên tục trên $(0; 0,5)$.

+) Với $0,5 < x < 30$ thì $y = 13500x + 3250$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(0,5; 30)$.

+) Với $x > 30$ thì $y = 11000x + 78250$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(30; +\infty)$.

+) Ta xét tính liên tục của hàm số tại $x = 0,5$ và $x = 30$.

- Tại $x = 0,5$, ta có $y(0,5) = 10000$;

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^-} y = \lim_{x \rightarrow 0,5^-} 10000 = 10000;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^+} y = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} (13500x + 3250) = 13500 \cdot 0,5 + 3250 = 10000$$

Do đó, $\lim_{x \rightarrow 0,5^-} y = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} y = \lim_{x \rightarrow 0,5} y = y(0,5)$ nên hàm số liên tục tại $x = 0,5$.

- Tại $x = 30$, ta có: $y(30) = 13500 \cdot 30 + 3250 = 408250$;

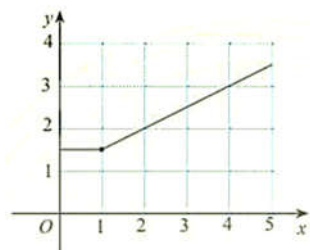
$$\lim_{x \rightarrow 30^-} y = \lim_{x \rightarrow 30^-} (13500x + 3250) = 13500 \cdot 30 + 3250 = 408250$$

$$\lim_{x \rightarrow 30^+} y = \lim_{x \rightarrow 30^+} (11000x + 78250) = 11000 \cdot 30 + 78250 = 408250$$

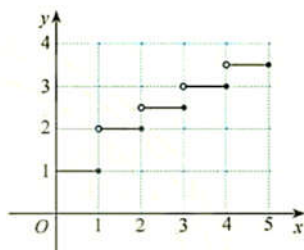
Do đó, $\lim_{x \rightarrow 30^-} y = \lim_{x \rightarrow 30^+} y = \lim_{x \rightarrow 30} y = y(30)$ nên hàm số liên tục tại $x = 30$.

Vậy hàm số ở câu a liên tục trên $(0; +\infty)$.

Câu 50. Hai đồ thị ở hai hình dưới đây cho biết phí gửi xe y của ô tô con (tính theo 10 nghìn đồng) theo thời gian gửi x (tính theo giờ) của hai bãi xe. Có nhận xét gì về sự thay đổi của số tiền phí phải trả theo thời gian gửi ở mỗi bãi xe?



a) Bãi xe A



b) Bãi xe B

Lời giải

Tại bãi xe A: trong 1 giờ đầu số tiền phí gửi giữ nguyên, sau đó tăng dần đều theo thời gian.

Tại bãi xe B: Cứ sau 1 giờ, tiền gửi lại tăng thêm 1 số không cố định

Câu 51. Tại một xưởng sản xuất bột đá thạch anh, giá bán (tính theo nghìn đồng) của x (kg) bột đá thạch anh được tính theo công thức sau: $P(x) = \begin{cases} 4,5x & \text{khi } 0 < x \leq 400 \\ 4x + k & \text{khi } x > 400 \end{cases}$ (k là một hằng số)

a) Với $k = 0$, xét tính liên tục của hàm số $P(x)$ trên $(0; +\infty)$.

b) Với giá trị nào của k thì hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$?

Lời giải:

a) Với $k = 0$. Xét:

$$\lim_{x \rightarrow 400^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 400^-} 4,5x = 4,5 \cdot 400 = 1800$$

$$\lim_{x \rightarrow 400^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 400^+} 4x = 4 \cdot 400 = 1600$$

Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 400} P(x)$ và hàm số $P(x)$ không liên tục tại $x_0 = 400$

Vậy hàm số $P(x)$ không liên tục trên $(0; +\infty)$

b) Để hàm số $P(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ thì hàm số phải liên tục tại $x_0 = 400$ hay $\lim_{x \rightarrow 400} P(x) = P(400)$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 400^-} P(x) = \lim_{x \rightarrow 400^-} 4,5x = 4,5 \cdot 400 = 1800$$

$$\lim_{x \rightarrow 400^+} P(x) = \lim_{x \rightarrow 400^+} (4x + k) = 4 \cdot 400 + k = 1600 + k$$

Để tồn tại $\lim_{x \rightarrow 400} P(x)$ thì $1800 = 1600 + k$. Suy ra $k = 200$

Câu 52. Một hãng taxi đưa ra giá cước $T(x)$ (đồng) khi đi quãng đường x (km) cho loại xe 4 chỗ như sau:



Hình 5

$$T(x) = \begin{cases} 10000 & \text{khi } 0 < x \leq 0,7 \\ 10000 + (x - 0,7) \cdot 14000 & \text{khi } 0,7 < x \leq 20 \\ 280200 + (x - 20) \cdot 12000 & \text{khi } x > 20. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$.

Lời giải:

$T(x) = 10000$ với $0 < x \leq 0,7$ là hàm số đa thức nên nó liên tục trên $(0; 0,7)$

$T(x) = 10000 + (x - 0,7) \cdot 14000$ với $0,7 < x \leq 20$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(0,7; 20)$

$T(x) = 280200 + (x - 20) \cdot 12000$ với $x > 20$ là hàm đa thức nên nó liên tục trên $(20; +\infty)$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 0,7^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^-} 10000 = 10000$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,7^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 0,7^+} [10000 + (x - 0,7) \cdot 14000] = 10000$$

$$\text{Suy ra: } \lim_{x \rightarrow 0,7} T(x) = T(0,7)$$

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại $0,7$

$$\lim_{x \rightarrow 20^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20^-} [10000 + (x - 0,7) \cdot 14000] = 280200$$

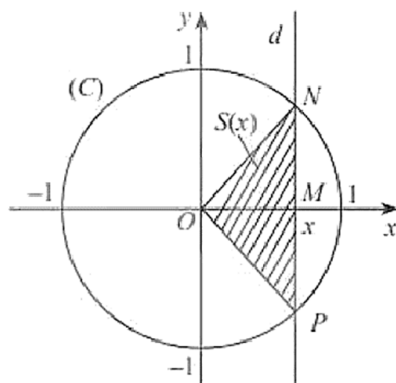
$$\lim_{x \rightarrow 20^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 20^+} [280200 + (x - 20) \cdot 12000] = 280200$$

$$\text{Suy ra: } \lim_{x \rightarrow 20} T(x) = T(20)$$

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục tại 20

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$

Câu 53. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn (C) tâm O , bán kính bằng 1. Một đường thẳng d thay đổi, luôn vuông góc với trục hoành, cắt trục hoành tại điểm M có hoành độ x ($-1 < x < 1$) và cắt đường tròn (C) tại các điểm N và P (xem Hình 6).



Hình 6

- a) Viết biểu thức $S(x)$ biểu thị diện tích của tam giác ONP .
 b) Hàm số $y = S(x)$ có liên tục trên $(-1;1)$ không? Giải thích.
 c) Tìm các giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} S(x)$ và $\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x)$.

Lời giải:

$$a) S(x) = |x_m| \cdot |y_m| = |x| \cdot \sqrt{1-x^2}$$

b) Hàm số $y = |x|$ liên tục tại mọi điểm $x \in \mathbb{R}$

Hàm số $y = \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$

Vậy hàm số $S(x) = |x| \cdot \sqrt{1-x^2}$ liên tục trên khoảng $(-1;1)$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1^-} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (|x| \cdot \sqrt{1-x^2}) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} S(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (|x| \cdot \sqrt{1-x^2}) = 0$$

Câu 54. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$$C(x) = \begin{cases} 60000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200000 & \text{khi } 4 < x \leq 24 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Lời giải:

$C(x) = 60000$ khi $x \in (0;2)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(0;2)$

$C(x) = 100000$ khi $x \in (2;4)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(2;4)$

$C(x) = 200000$ khi $x \in (4;24)$ nên hàm số $C(x)$ liên tục trên $(4;24)$

Ta có:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} C(x) = 60000$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} C(x) = 100000$$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 2} C(x)$ hay hàm số $C(x)$ không liên tục tại 2

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} C(x) = 100000$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^+} C(x) = 200000$$

Vậy không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 4} C(x)$ hay hàm số $C(x)$ không liên tục tại 4

Câu 55. Lực hấp dẫn do Trái Đất tác dụng lên một đơn vị khối lượng ở khoảng cách r tính từ tâm của nó

$$\text{là } F(r) = \begin{cases} \frac{GM}{R^3} & \text{khi } 0 < r < R \\ \frac{GM}{r^2} & \text{khi } r \geq R, \end{cases}$$

trong đó M là khối lượng, R là bán kính của Trái Đất, G là hằng số hấp dẫn. Hàm số $F(r)$ có liên tục trên $(0;+\infty)$ không?

Lời giải:

$$\lim_{r \rightarrow R^-} F(r) = \lim_{r \rightarrow R^-} \frac{GM}{R^3} = \frac{GM}{R^3} = \frac{GM}{R^2}$$

$$\lim_{r \rightarrow R^+} F(r) = \lim_{r \rightarrow R^+} \frac{GM}{r^2} = \frac{GM}{R^2}$$

Suy ra: $\lim_{r \rightarrow R} F(r) = F(R)$. Hay hàm số $F(r)$ liên tục tại $r_0 = R$

$F(r) = \frac{GMr}{R^3}$ khi $0 < r < R$ nên hàm $F(r)$ liên tục trên $(0; R)$

$F(r) = \frac{GM}{r^3}$ khi $r > R$ nên hàm $F(r)$ liên tục trên $(R; +\infty)$

Vậy hàm số $F(r)$ liên tục trên $(0; +\infty)$

Câu 56. Trong một phòng thí nghiệm, nhiệt độ trong tủ sấy được điều khiển tăng từ $10^\circ C$, mỗi phút tăng $2^\circ C$ trong 60 phút, sau đó giảm mỗi phút $3^\circ C$ trong 40 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ (tính theo $^\circ C$) trong

tủ theo thời gian t (tính theo phút) có dạng $T(t) = \begin{cases} 10 + 2t & \text{khi } 0 \leq t \leq 60 \\ k - 3t & \text{khi } 60 < t \leq 100 \end{cases}$ (k là hằng số).

Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của k .

Lời giải:

$T(t)$ liên tục trên tập xác định nên $T(t)$ liên tục tại $t = 60$. Hay $\lim_{t \rightarrow 60} T(t) = T(60)$

$$\lim_{t \rightarrow 60^-} T(t) = \lim_{t \rightarrow 60^-} (10 + 2t) = 130$$

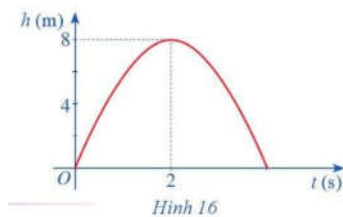
$$\lim_{t \rightarrow 60^+} T(t) = \lim_{t \rightarrow 60^+} (k - 3t) = k - 180$$

$$T(60) = 10 + 2 \cdot 60 = 130$$

$$\text{Suy ra: } k - 180 = 130.$$

$$\text{Do đó, } k = 310$$

Câu 57. Hình 16 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = -2t^2 + 8t$.



a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t)$.

Lời giải

a) Hàm số $h(t) = -2t^2 + 8t$ là hàm đa thức nên liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hàm số khi t tiến dần đến 2 thì $h(t)$ dần đến 8.

$$\text{Vậy } \lim_{t \rightarrow 2} (-2t^2 + 8t) = 8.$$

Câu 58. Một điểm dịch vụ trông giữ xe ô tô thu phí 30 nghìn đồng trong giờ đầu tiên và thu thêm 20 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo.

a) Viết hàm số $f(x)$ mô tả số tiền phí theo thời gian trông giữ.

b) Xét tính liên tục của hàm số này.

Lời giải

$$a) f(x) = \begin{cases} 30 & \text{nếu } 0 < x \leq 1 \\ 10 + 20x & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$$

b) Hàm số này liên tục trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 59. Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này

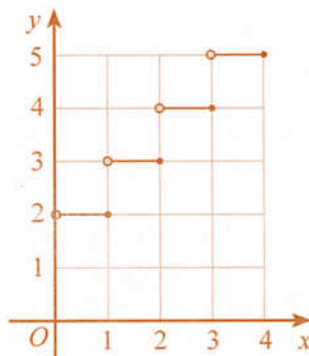
trong t giờ (với $0 < t \leq 4$). Viết công thức xác định hàm số $y = P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0; 4]$.

Lời giải

Hàm số $P(t)$ trên $(0; 4]$ có công thức:

$$P(t) = \begin{cases} 2 & \text{khi } 0 < t \leq 1 \\ 3 & \text{khi } 1 < t \leq 2 \\ 4 & \text{khi } 2 < t \leq 3 \\ 5 & \text{khi } 3 < t \leq 4 \end{cases} \quad (P \text{ tính theo chục nghìn đồng, } t \text{ tính theo giờ}).$$

Đồ thị của hàm số $P(t)$ như Hình 1.



Hình 1

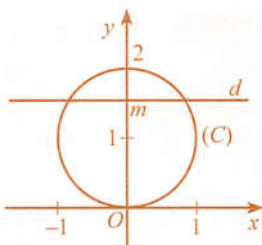
Trên mỗi nửa khoảng $(0; 1]$, $(1; 2]$, $(2; 3]$ và $(3; 4]$, hàm số đều có dạng $P(t) = c$ (c là hằng số) nên hàm số liên tục trên mỗi khoảng này.

Ta có $\lim_{t \rightarrow 1^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 2 = 2$; $\lim_{t \rightarrow 1^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 3 = 3$. Do $\lim_{t \rightarrow 1^-} P(t) \neq \lim_{t \rightarrow 1^+} P(t)$ nên hàm số không liên tục tại điểm $t = 1$.

Tương tự, chỉ ra được hàm số không liên tục tại các điểm $t = 2$ và $t = 3$.

Vậy hàm số liên tục trên các nửa khoảng $(0; 1]$, $(1; 2]$, $(2; 3]$ và $(3; 4]$; gián đoạn tại các điểm $t = 1, t = 2$ và $t = 3$.

Câu 60. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho đường tròn $(C): x^2 + (y-1)^2 = 1$. Với mỗi số thực m , gọi $Q(m)$ là số giao điểm của đường thẳng $d: y = m$ với đường tròn (C) . Viết công thức xác định hàm số $y = Q(m)$. Hàm số này không liên tục tại các điểm nào?



Hình 2

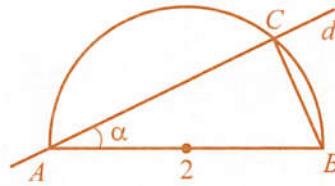
Lời giải

$$Q(m) = \begin{cases} 0 & \text{khi } m < 0 \text{ hay } m > 2 \\ 1 & \text{khi } m = 0 \text{ hay } m = 2 \\ 2 & \text{khi } 0 < m < 2 \end{cases}$$

Hàm số không liên tục tại các điểm $m = 0$ và $m = 2$.

Câu 61. Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A , cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$.

Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha), \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.



Hình 3

Lời giải

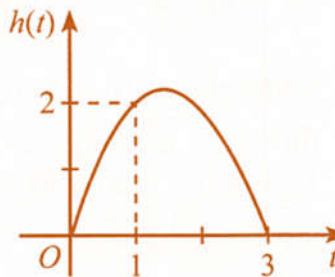
$$S(\alpha) = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha = \sin 2\alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do các hàm số $y = \sin 2\alpha$ đều liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số $y = S(\alpha)$ liên tục trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sin 2\alpha = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 2\alpha = 0.$$

Câu 62. Hình 5 biểu thị độ cao $h(m)$ của một quả bóng được đá lên theo thời gian $t(s)$, trong đó $h(t) = at^2 + bt$.



Hình 5

- Dựa vào đồ thị, tìm a, b .
- Chứng minh rằng hàm số $h(t)$ liên tục trên khoảng $(0;3)$.
- Với m thuộc $(0;3)$, tính $\lim_{t \rightarrow m} h(t)$. Cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

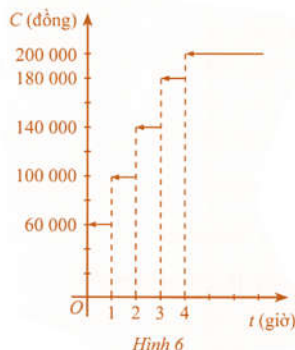
- Dựa vào Hình 5 ta thấy quỹ đạo quả bóng đi qua điểm có tọa độ $(3;0)$ và $(1;2)$. Suy ra $a = -1, b = 3$.
- Từ câu a, ta có: $h(t) = -t^2 + 3t$. Vì $h(t)$ là hàm đa thức nên $h(t)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, mà $(0;3) \subset \mathbb{R}$ nên $h(t)$ liên tục trên $(0;3)$.
- Với $m \in (0;3)$, ta có: $\lim_{t \rightarrow m} h(t) = \lim_{t \rightarrow m} (-t^2 + 3t) = -m^2 + 3m = h(m)$. Khi dần tới thời điểm m bất kì thuộc $(0;3)$ thì quả bóng dần đạt độ cao $h(m)$.

Câu 63. Một bãi đỗ xe tính phí 60000 đồng cho giờ đầu tiên (hoặc một phần của giờ đầu tiên) và thêm 40000 đồng cho mỗi giờ (hoặc một phần của mỗi giờ) tiếp theo, tối đa là 200000 đồng.

- Vẽ đồ thị hàm số $C = C(t)$ biểu thị chi phí theo thời gian đỗ xe.
- Hàm số đó có liên tục trên $[0; +\infty)$ không?
- Giá trị $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$ có tồn tại không? Khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người có giảm đi không?

Lời giải

a) Đồ thị hàm số $C = C(t)$ được thể hiện trong Hình 6.



Hình 6

b) Từ đồ thị ta thấy hàm số bị gián đoạn tại $t = 1$ (giờ); $t = 2$ (giờ); $t = 3$ (giờ); $t = 4$ (giờ) nên hàm số không liên tục trên $[0; +\infty)$.

c) Từ đồ thị ta có:

$\lim_{t \rightarrow 3^-} C(t) = 180000$, $\lim_{t \rightarrow 3^+} C(t) = 140000$. Vì $\lim_{t \rightarrow 3^-} C(t) \neq \lim_{t \rightarrow 3^+} C(t)$ nên không tồn tại $\lim_{t \rightarrow 3} C(t)$.

Nhận thấy khi một người có thời gian đỗ xe tăng dần đến 3 giờ và một người có thời gian đỗ xe giảm dần đến 3 giờ thì chênh lệch chi phí giữa hai người luôn là $180000 - 140000 = 40000$ (đồng), như vậy chênh lệch chi phí giữa hai người không giảm đi.

Câu 64. Theo quyết định số 2019/QĐ-BĐVN ngày 01/11/2018 của Tổng công ty Bưu điện Việt Nam, giá cước dịch vụ Bưu chính phổ cập đối với dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp trong nước có khối lượng đến 250 g như trong bảng sau:

Khối lượng đến 250g	Mức cước (đồng)
Đến 20g	4000
Trên 20g đến 100g	6000
Trên 100g đến 250g	8000

a) Hãy biểu diễn số tiền phải trả khi sử dụng dịch vụ thư cơ bản và bưu thiếp theo khối lượng của thư cơ bản và bưu thiếp.

b) Hàm số trên có liên tục trên tập xác định hay không?

Lời giải

a) Ta có hàm số: $f(x) = \begin{cases} 4000 & \text{nếu } 0 < x \leq 20 \\ 6000 & \text{nếu } 20 < x \leq 100 \\ 8000 & \text{nếu } 100 < x \leq 250 \end{cases}$

b) Tập xác định của hàm số trên là $(0; 250]$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 20^-} f(x) = 4000$, $\lim_{x \rightarrow 20^+} f(x) = 6000$. Suy ra không tồn tại $\lim_{x \rightarrow 20} f(x)$. Do đó, hàm số không liên tục tại $x = 20$. Vậy hàm số không liên tục trên tập xác định $(0; 250]$.

Câu 65. Một bãi đậu xe ô tô đưa ra giá $C(x)$ (đồng) khi thời gian đậu xe là x (giờ) như sau:

$C(x) = \begin{cases} 60000 & \text{khi } 0 < x \leq 2 \\ 100000 & \text{khi } 2 < x \leq 4 \\ 200000 & \text{khi } 4 < x < 24 \end{cases}$. Xét tính liên tục của hàm số $C(x)$.

Lời giải

Với x thuộc các khoảng $(0; 2)$, $(2; 4)$, $(4; 24)$ thì hàm số $C(x)$ là hàm hằng nên hàm số liên tục.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 2$:

Vì $C(2) = 60000$ và $\lim_{x \rightarrow 2^-} C(x) = 60000$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} C(x) = 100000$ nên hàm số không liên tục tại điểm $x = 2$.

Xét tính liên tục của hàm số tại điểm $x = 4$:

Vì $C(4) = 100000$ và $\lim_{x \rightarrow 4^-} C(x) = 100000$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} C(x) = 200000$ nên hàm số không liên tục tại điểm $x = 4$.

Vậy hàm số $C(x)$ liên tục trên mỗi khoảng $(0; 2)$, $(2; 4)$, $(4; 24)$ và nó gián đoạn tại hai điểm $x = 2, x = 4$.

Câu 66. Một chất điểm chuyển động với tốc độ được cho bởi hàm số $v(t) = \begin{cases} 10 & \text{khi } 0 \leq t \leq 5 \\ t^2 - 5t + 10 & \text{khi } t > 5 \end{cases}$,

trong đó $v(t)$ được tính theo đơn vị m/s và t được tính theo giây. Hỏi hàm $v(t)$ có liên tục tại điểm $t = 5$ hay không?

Lời giải

Ta có: $v(5) = 10$ và $\lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^-} 10 = 10$; $\lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} (t^2 - 5t + 10) = 10$.

Suy ra $v(5) = \lim_{t \rightarrow 5} v(t)$.

Vậy hàm số $v(t)$ liên tục tại điểm $t = 5$.

Nguyễn Bảo Vương

CHỦ ĐỀ 5. ĐẠO HÀM

- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

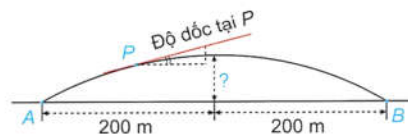
NỘI DUNG CÂU HỎI

Câu 1. Giải bài toán trong tình huống mở đầu (bỏ qua sức cản của không khí và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 2. Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$ (H.9.4). Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang như Hình 9.5). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Hình 9.4. Cầu vượt thép tại nút giao Nguyễn Văn Cừ quận Long Biên, Hà Nội (Ảnh: cand.com.vn)



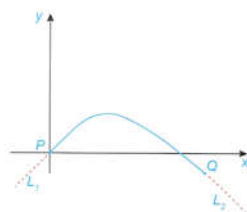
Hình 9.5

Câu 3. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $19,6m/s$ thì độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Câu 4. Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol (H.9.6a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q (H.9.6b). Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.



Hình 9.6a



Hình 9.6b

- Tìm c .
- Tính $y'(0)$ và tìm b .
- Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là $40m$. Tìm a .
- Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q .

Câu 5. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500$.

a) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

b) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

c) Tìm chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100

Câu 6. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là

$$C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500.$$

a) Tính $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$.

b) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm.

Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.

c) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

Câu 7. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8m/s^2$.

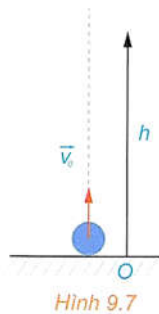
a) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3(s)$.

b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của vật tại thời điểm đó bằng $39,2(m/s)$.

Câu 8. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = t^3 - 4t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 3$ giây và $t = 5$ giây.

Câu 9. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20m/s$. Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi phóng được cho bởi công thức sau:

$h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9,8m/s^2$ là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.



Câu 10. Một vật chuyển động có phương trình $s(t) = 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)(m)$, với t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc của vật khi $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 11. Ta đã biết, độ pH của một dung dịch được xác định bởi $pH = -\log[H^+]$, ở đó $[H^+]$ là nồng độ (mol/lit) của ion hydrogen. Tính tốc độ thay đổi của pH đối với nồng độ $[H^+]$.

Câu 12. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

a) Tại thời điểm $t = 5$ giây;

b) Khi vật chạm đất.

Câu 13. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5\sin(4\pi t)$, trong đó s tính bằng centimet và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Câu 14. Công thức $T = Ae^{rt}$ được dùng để tính tổng số tiền vốn và lãi mà người gửi nhận được sau thời gian t kể từ thời điểm người đó gửi tiết kiệm A đồng theo thể thức "lãi kép liên tục" với lãi suất r / năm. Trong đó, A và T tính theo đồng, t tính theo năm và t có thể nhận giá trị thực bất kì. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của T (làm tròn đến hàng đơn vị) khi $A = 2000000, r = 0,05$ và

a) $t = \frac{1}{4}$

b) $t = \frac{1}{365}$.

Câu 15. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% / năm và theo thể thức lãi kép liên tục. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau

a) 1 ngày;

b) 30 ngày.

(Luôn coi một năm có 365 ngày.)

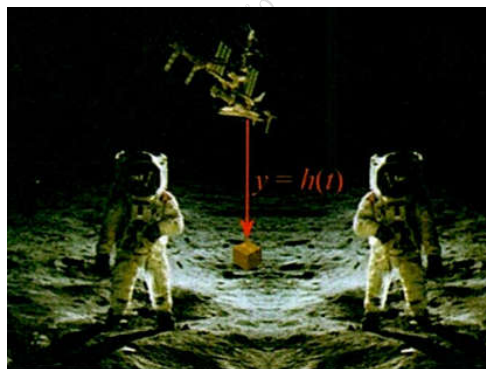
Câu 16. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

Câu 17. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5%/năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau một năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức

a) lãi kép với kì hạn 6 tháng;

b) lãi kép liên tục.

Câu 18. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t) = 0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t = 2$.



Hình 4

(Nguồn: <https://www.britannica.com/place/Moon>)

Câu 19. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây.

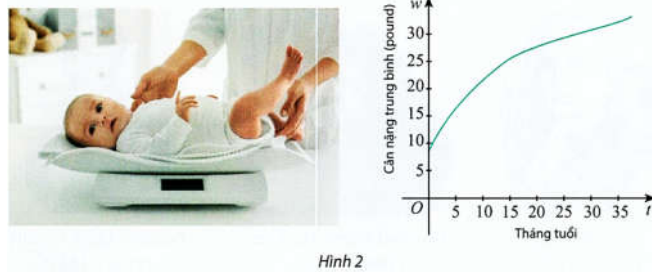
a) Tính vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm t .

b) Đạo hàm $v'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi của vận tốc theo thời gian, còn gọi là gia tốc của chuyển động, kí hiệu $a(t)$. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Câu 20. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

Câu 21. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

Câu 22. Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (nguồn: https://www.cdc.gov/growthcharts/data/who/GrChrt_Boys). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.



Câu 23. Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng nhanh thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

Câu 24. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật được thả rơi từ độ cao $200m$ phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính:

- Quãng đường vật đã rơi;
- Gia tốc của vật.

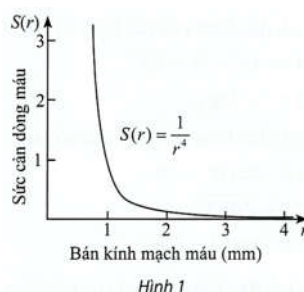
Câu 25. Một viên sỏi rơi từ độ cao $44,1m$ thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính:

- Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$;
- Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

Câu 26. Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật khi $t = 1$.

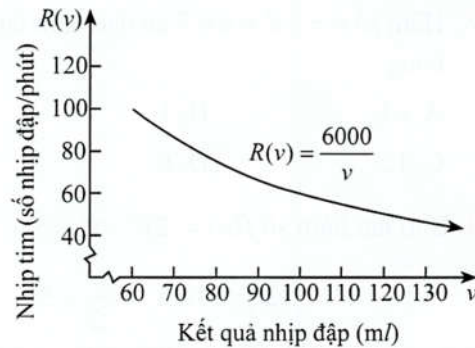
Câu 27. Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$, trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 12$.

Câu 28. Hàm số $S(r) = \frac{1}{r^4}$ có thể được sử dụng để xác định sức cản S của dòng máu trong mạch máu có bán kính r (tính theo milimét) (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21 st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r = 0,8$.



Câu 29. Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$.

Câu 30. Hàm số $R(v) = \frac{6000}{v}$ có thể được sử dụng để xác định nhịp tim R của một người mà tim của người đó có thể đẩy đi được $6000ml$ máu trên mỗi phút và vml máu trên mỗi nhịp đập (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$.
Kết quả nhịp đập (ml)

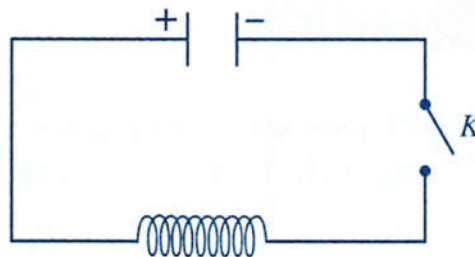


Hình 2

Câu 31. Một vật dao động theo phương trình $f(x) = \cos x$, trong đó x là thời gian tính theo giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $x_0 = 2(s)$.

Câu 32. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196m/s$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm mà tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8m/s^2$)?

Câu 33. Cho mạch điện như Hình 5.



Hình 5

Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 . Khi đóng khoá K , tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8}(C)$ và $\omega = 10^6 \pi(rad/s)$. Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6(s)$ (tính chính xác đến $10^{-5}mA$).

Câu 34. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$.

Câu 35. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}(s)$.

Câu 36. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động $s(t) = 2 + 196t - 4,9t^2$, trong đó $t \geq 0, t$ (s) là thời gian chuyển động, $s(m)$ là độ cao so với mặt đất.

- Sau bao lâu kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao $1962m$?
- Tính vận tốc tức thời của viên đạn khi viên đạn đạt được độ cao $1962m$.
- Tại thời điểm viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng $98m/s$ thì viên đạn đang ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

Câu 37. Năm 2001, dân số Việt Nam khoảng 78690000 người. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn là 1,7% thì ước tính số dân Việt Nam sau x năm kể từ năm 2001 được tính theo hàm số sau:

$f(x) = 7,869e^{0,017x}$ (chục triệu người). Tốc độ gia tăng dân số (chục triệu người/năm) sau x năm kể từ năm 2001 được xác định bởi hàm số $f'(x)$.

- Tìm hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001 .
- Tính tốc độ gia tăng dân số Việt Nam theo đơn vị chục triệu người/năm vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), nêu ý nghĩa của kết quả đó.

Câu 38. Trong thuyết động học phân tử chất khí, với một khối khí lí tưởng, các đại lượng áp suất $p(Pa)$, thể tích $V(m^3)$, nhiệt độ $T(K)$, số mol $n(mol)$ liên hệ với nhau theo phương trình: $pV = nRT$, trong đó $R = 8,31(J/mol.K)$ là hằng số.

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái lí tưởng có áp suất không đổi $p = 10^5 Pa$. Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

Câu 39. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

Câu 40. Một mạch dao động điện từ LC có lượng điện tích dịch chuyển qua tiết diện thẳng của dây xác định bởi hàm số $Q(t) = 10^{-5} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, Q tính bằng Coulomb. Tính

cường độ dòng điện tức thời $I(A)$ trong mạch tại thời điểm $t = \frac{\pi}{1500}(s)$, biết $I(t) = Q'(t)$.

Câu 41. Năm 2010, dân số ở một tỉnh D là 1038229 người. Tính đến năm 2015, dân số của tỉnh đó là 1153600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức $S(N) = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số $S'(N)$. Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

Câu 42. Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vật cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 20t - \frac{5}{2}t^2$, trong đó $s(m)$ là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, $t(s)$ là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \leq t \leq 4$).

- Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh. Hãy cho biết xe ô tô trên có chạy quá tốc độ hay không, biết tốc độ giới hạn cho phép là $70km/h$.
- Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm?

Câu 43. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $v_0(m/s)$ (bỏ qua sức cản của không khí) thì độ cao h của vật (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ (g là gia tốc trọng trường). Tìm vận tốc của vật khi chạm đất.

Câu 44. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức $s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 45. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 16t + 15$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$.

Câu 46. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 4$.

Câu 47. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Câu 48. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

Câu 49. Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình $s = 100 + 2t - t^2$ trong đó thời gian được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

- Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng 0 ?
- Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3s$.

Câu 50. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^3 + 75t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$.

Câu 51. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = 200(x - 2)(17 - x)$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

Câu 52. Xét một chuyển động có phương trình $s = 4 \cos 2\pi t$.

- Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t .
- Tính gia tốc tức thời tại thời điểm t .

Câu 53. Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau: $x(t) = 4 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, ở đó x tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 9.9

Câu 54. Một vật chuyển động thẳng có phương trình $s = 2t^2 + \frac{1}{2}t^4$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây).

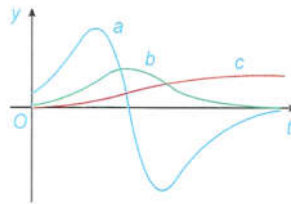
Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.

Câu 55. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi $s(t) = 10 + 0,5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 56. Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, ở đó s tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

- A. $4,5 \text{ cm/s}^2$.
- B. $5,5 \text{ cm/s}^2$.
- C. $6,3 \text{ cm/s}^2$.
- D. $7,1 \text{ cm/s}^2$.

Câu 57. Hình 9.10 biểu diễn đồ thị của ba hàm số. Hàm số thứ nhất là hàm vị trí của một chiếc ô tô, hàm số thứ hai biểu thị vận tốc và hàm số thứ ba biểu thị gia tốc của ô tô đó. Hãy xác định đồ thị của mỗi hàm số này và giải thích.



Hình 9.10

Câu 58. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

- a) Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.
- b) Tại những thời điểm nào vật đứng yên?
- c) Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.
- d) Tính tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.
- e) Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

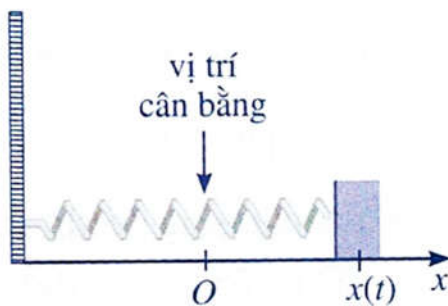
Câu 59. Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$.

- a) Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(s)$.
- b) Tính gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(s)$.

Câu 60. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm:

- a) Tại thời điểm $t = 3(s)$;
- b) Tại thời điểm mà $s(t) = 7(m)$.

Câu 61. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình 7, có phương trình chuyển động $x(t) = 4 \sin t$, trong đó t tính bằng giây và $x(t)$ tính bằng centimét.



Hình 7

a) Tìm phương trình theo thời gian của vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc.

b) Tính vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{3}$ (s). Tại thời điểm đó, con lắc di chuyển theo chiều dương hay chiều âm của trục Ox ?

Câu 62. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 2t + t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng m/s . Tìm gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3$ (s);

b) Tại thời điểm mà vận tốc của chất điểm bằng $8m/s$.

Câu 63. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4\cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.

a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm t (s).

b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0.

Câu 64. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 4$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s).

Câu 65. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 6\sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s).

Câu 66. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 5$ (s).

b) Tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chất điểm bằng $-1m/s$.

Câu 67. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 3\sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s).

Câu 68. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 2\sin\left(6t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ (s).

Câu 69. Kính viễn vọng không gian Hubble được triển khai vào ngày 24 tháng 4 năm 1990, bởi tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong nhiệm vụ này từ khi xuất phát tại $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy nhiên liệu rắn bị loại bỏ ở $t = 126 (s)$ được xác định theo phương trình sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083(ft/s).$$

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Tính gia tốc tức thời của tàu con thoi trên tại thời điểm $t = 100 (s)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Câu 70. Sau khi uống đồ uống có cồn, nồng độ cồn trong máu tăng lên rồi giảm dần được xác định bằng hàm số $C(t) = 1,35te^{-2,802t}$, trong đó $C(mg/ml)$ là nồng độ cồn, $t (h)$ là thời điểm đo tính từ ngay sau khi uống 15ml đồ uống có cồn.

(Nguồn: P. Wilkinson et al., Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State, 1977)

Giả sử một người uống hết nhanh 15ml đồ uống có cồn. Tính tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3 (h)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần triệu).

Câu 71. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 15 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong

đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 72. Độ cao (tính bằng mét) của một vật rơi tự do sau t giây là $h(t) = 400 - 4,9t^2$. Giá trị tuyệt đối của vận tốc của vật khi nó chạm đất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) là

A. $88,5 m/s$.

B. $86,7 m/s$.

C. $89,4 m/s$.

D. $90 m/s$.

Câu 73. Chuyển động của một vật có phương trình $s = 5 + \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, ở đó s tính bằng centimét và

thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

A. $4,5 cm/s^2$.

B. $5,5 cm/s^2$.

C. $6,3 cm/s^2$.

D. $7,1 cm/s^2$.

Câu 74. Vị trí của một vật chuyển động (tính bằng mét) sau t giây được xác định bởi

$$s = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t, t > 0. \text{ Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc } v = 20 m/s \text{ là}$$

A. $140 m/s^2$.

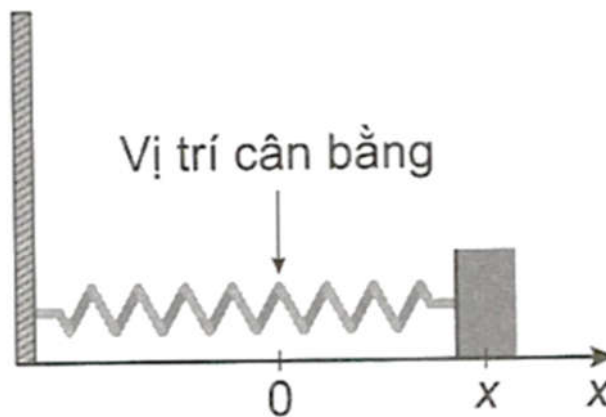
B. $120 m/s^2$.

C. $130 m/s^2$.

D. $100 m/s^2$.

Câu 75. Một vật gắn trên lò xo chuyển động theo phương ngang trên một mặt phẳng nhẵn (H.9.1). Phương trình chuyển động của vật được cho bởi $x = 8 \sin\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, với t tính bằng giây và x tính bằng centimét.

Tìm vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất). Vật chuyển động theo hướng nào tại thời điểm đó?



Hình 9.1

Câu 76. Vị trí chuyển động của một vật trên đường thẳng được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 3t^3 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật đó khi $t = 1$.

Câu 77. Một người gửi tiết kiệm 20 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% / năm theo thể thức lãi kép liên tục. Tính số tiền người đó nhận được sau:

- a) 1 tháng;
- b) 1 năm.

Câu 78. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Tính sau thời gian ngắn nhất (theo năm) để số tiền người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Câu 79. Số lượng vi khuẩn trong một phòng thí nghiệm A được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Tính thời gian kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con?

Câu 80. Người ta sử dụng công thức $S = A \cdot e^{n \cdot r}$ để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó A là số dân của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau n năm và r là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là 78685800 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 1,2%. Hãy tính xem dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

Câu 81. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tính thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu)?

Câu 82. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

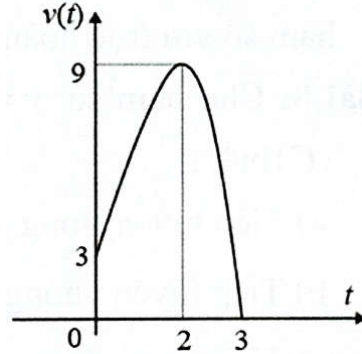
Câu 83. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Câu 84. Một vật dao động điều hòa có phương trình $x = 2 \sin \pi t$ (x tính bằng cm, t tính bằng giây). Tính thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Câu 85. Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1(m)$, t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$.

Câu 86. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Câu 87. Một chuyển động có vận tốc được biểu diễn theo đồ thị hình bên. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1(s)$.



Câu 88. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $S(t)(km)$ là hàm số phụ thuộc theo biến t (giây) theo biểu thức sau $s(t) = e^{t^2+3} + 2t \cdot e^{3t+1}(km)$. Tính vận tốc của tên lửa sau 1 giây?

Câu 89. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 7$, trong đó $t \geq 0$.

Tìm giá trị của vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm:

- a) Tại thời điểm $t = 3$;
- b) Tại thời điểm mà $s = 5$.

Câu 90. Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3$ (kết quả khảo sát trong 12 tháng liên tục).

Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất vào ngày thứ mấy?

Câu 91. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Câu 92. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Câu 93. Một chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động khi quãng đường đạt được $9m$.

Câu 94. Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường đi được trong t giây tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$.

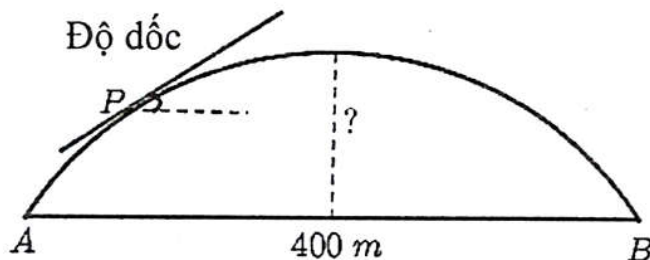
Câu 95. Một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao $461,3m$ xuống mặt đất, với phương trình chuyển động $s(t) = 4,9t^2$. Tính vận tốc của

quả bóng khi nó chạm đất, bỏ qua sức cản không khí. (Đơn vị m/s , kết quả gần đúng làm tròn đến hàng phần chục)

Câu 96. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $7\%/$ năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi (làm tròn đến hàng phần nghìn) mà người đó nhận được sau 1 năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức:

- Lãi kép với kì hạn 6 tháng;
- Lãi kép liên tục.

Câu 97. Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Câu 98. Anh Bình gửi tiết kiệm khoản tiền 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $6\%/$ năm. Tính số tiền lãi (đơn vị đồng, làm tròn đến hàng đơn vị) mà anh Bình nhận được sau 1 năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức:

- Lãi kép với kì hạn 3 tháng;
- Lãi kép liên tục.

Câu 99. Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây và Q được tính theo Culông. Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4(s)$.

Câu 100. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất, biết độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi phương trình $h(t) = 24,5t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Câu 101. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3 \sin 2t + 2 \cos 2t$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của chất điểm trong t giây tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm đó khi $t = \frac{\pi}{4}$.

Câu 102. Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Tìm:

- Tốc độ và gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$.
- Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $16m/s^2$.
- Thời điểm t (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 103. Dân số (tính theo nghìn người) của một thành phố được cho bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$, trong đó t (được tính bằng năm) là khoảng thời gian kể từ năm 2015. Tìm tốc độ tăng dân số trong năm 2025 của thành phố đó.

Câu 104. Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ ở thời điểm $t = 2$.

Câu 105. Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = 4 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right) (m)$, với t là thời gian tính bằng

giây. Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần ngàn):

- Vận tốc của vật tại thời điểm khi $t = 5(s)$.
- Gia tốc của vật tại thời điểm khi $t = 5(s)$.

Câu 106. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 4(cm)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng $0(cm/s)$.

Câu 107. Cân nặng trung bình của một em bé trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,00076t^3 - 0,06t^2 + 1,8t + 8,2$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound. Tính tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi.

Câu 108. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C) . Tìm hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) .

Câu 109. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

- Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.
- Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 1$ giây và $t = 3$ giây.
- Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Câu 1. Giải bài toán trong tình huống mở đầu (bỏ qua sức cản của không khí và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Phương trình chuyển động rơi tự do của quả bóng là $s = f(t) = \frac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc rơi tự do,

lấy $g = 9,8 m/s^2$). Do vậy, vận tốc của quả bóng tại thời điểm t là $v(t) = f'(t) = gt = 9,8t$.

Mặt khác, vì chiều cao của toà nhà là $461,3m$ nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1 , với $f(t_1) = 461,3$.

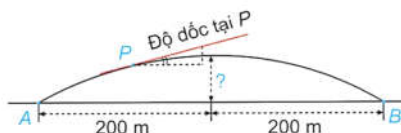
Từ đó, ta có: $4,9t_1^2 = 461,3 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{461,3}{4,9}}$ (giây).

Vậy vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là $v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8 \cdot \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \approx 95,1(m/s)$.

Câu 2. Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$ (H.9.4). Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang như Hình 9.5). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



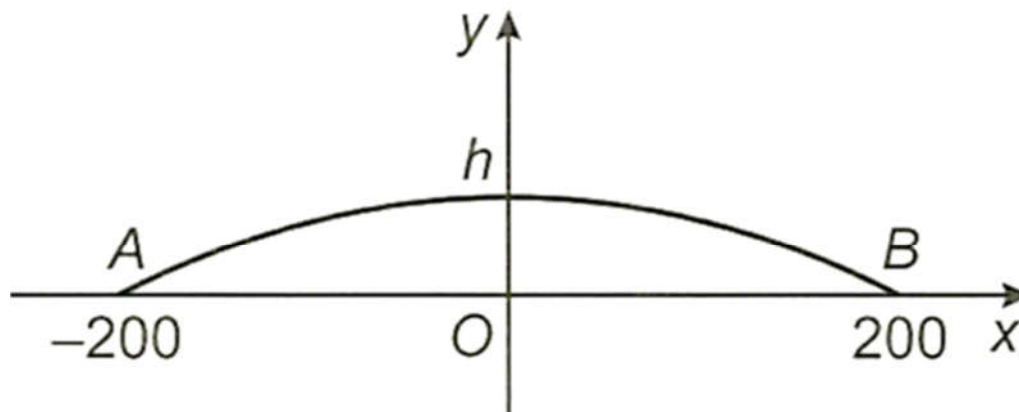
Hình 9.4. Cầu vượt thép tại nút giao Nguyễn Văn Cừ quận Long Biên, Hà Nội (Ảnh: cand.com.vn)



Hình 9.5

Lời giải

Chọn hệ trục Oxy (như hình vẽ).



Ta có $A(-200;0), B(200;0)$. Gọi chiều cao giới hạn của cầu là $h(h > 0)$. Đỉnh cầu có tọa độ $(0;h)$.

Phương trình parabol của cầu là: $y = -\frac{h}{200^2}x^2 + h$. Ta có: $y' = -\frac{2h}{200^2}x$.

Suy ra hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là: $k = y' = -\frac{2h}{200^2}x, -200 \leq x \leq 200$. Do đó:

$|k| = \frac{2h}{200^2} |x| \leq \frac{2h}{200^2} \cdot 200 = \frac{h}{100}$. Vì độ dốc của cầu không quá 10° nên ta có:

$$\frac{h}{100} \leq \tan 10^\circ \Leftrightarrow h \leq 100 \tan 10^\circ \approx 17,6.$$

Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu tới mặt đường là 17,6 m.

Câu 3. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $19,6 \text{ m/s}$ thì độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = 19,6t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải

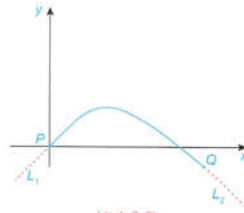
Khi vật chạm đất thì $h = 0$, tức là $19,6t - 4,9t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0, t = 4 = t_1$.

Ta có: $h'(t) = 19,6 - 9,8t$. Vậy vận tốc của vật khi chạm đất là $v(4) = h'(4) = -19,6 \text{ m/s}$.

Câu 4. Một kĩ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol (H.9.6a), đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q (H.9.6b). Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.



Hình 9.6a



Hình 9.6b

- Tìm c .
- Tính $y'(0)$ và tìm b .
- Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là $40m$. Tìm a .
- Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q .

Lời giải

- Ta có: $c = y(0) = 0$.
- Ta tính được $y' = 2ax + b$. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị tại điểm P là $y'(0) = b = 0,5$.
- Do khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40 nên hoành độ điểm Q là 40. Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị tại điểm Q là $y'(40) = 80a + b = -0,75$. Do $b = 0,5$ nên $a = -\frac{1}{64}$. Vậy phương trình parabol là: $y = -\frac{1}{64}x^2 + \frac{1}{2}x$.
- Chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q là: $|y(0) - y(40)| = 5(m)$.

Câu 5. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là $C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500$.

- Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.
- Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.
- Tìm chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100

Lời giải

- Hàm chi phí biên là:

$$\begin{aligned} C'(Q) &= \lim_{Q \rightarrow Q+1} \frac{(Q^2 + 80Q + 3500) - ((Q+1)^2 + 80(Q+1) + 3500)}{Q - (Q+1)} \\ &= \lim_{Q \rightarrow Q+1} \frac{Q^2 + 80Q + 3500 - (Q^2 + 2Q + 1 + 80Q + 80 + 3500)}{-1} \\ &= \lim_{Q \rightarrow Q+1} \frac{Q^2 + 80Q + 3500 - Q^2 - 82Q - 3581}{-1} = \lim_{Q \rightarrow Q+1} (2Q + 80) = 2Q + 80 \end{aligned}$$

- $C'(90) = 2.90 + 80 = 260$ (USD)

Ý nghĩa kết quả tìm được: Chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 89 sản phẩm lên 90 sản phẩm là 260 (USD)

- Chi phí sản xuất máy vô tuyến thứ 100 là: $C(100) = 100^2 + 80.100 + 3500 = 143000$ (USD)

Câu 6. Giả sử chi phí C (USD) để sản xuất Q máy vô tuyến là

$$C(Q) = Q^2 + 80Q + 3500.$$

- Tính $\frac{\Delta C}{\Delta Q}$.

- b) Ta gọi chi phí biên là chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ Q sản phẩm lên $Q+1$ sản phẩm. Giả sử chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tìm hàm chi phí biên.
- c) Tìm $C'(90)$ và giải thích ý nghĩa kết quả tìm được.

Lời giải

a) Xét ΔQ là số gia của biến số tại điểm Q . Ta có:

$$\begin{aligned}\Delta C &= C(Q + \Delta Q) - C(Q) = (Q + \Delta Q)^2 + 80(Q + \Delta Q) + 3500 - Q^2 - 80Q - 3500 \\ &= 2Q \cdot \Delta Q + (\Delta Q)^2 + 80\Delta Q.\end{aligned}$$

$$\text{Suy ra: } \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{2Q \cdot \Delta Q + (\Delta Q)^2 + 80\Delta Q}{\Delta Q} = 2Q + \Delta Q + 80.$$

$$\text{b) Ta thấy: } \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} (2Q + \Delta Q + 80) = 2Q + 80.$$

Vậy hàm chi phí biên là: $C'(Q) = 2Q + 80$.

c) Ta có: $C'(90) = 2 \cdot 90 + 80 = 260$. Dựa vào kết quả đó, ta thấy chi phí gia tăng để sản xuất thêm 1 sản phẩm từ 90 sản phẩm lên 91 sản phẩm là 260 USD.

Câu 7. Một vật rơi tự do có phương trình chuyển động là $s(t) = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

- a) Tìm vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3(\text{s})$.
- b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của vật tại thời điểm đó bằng $39,2(\text{m/s})$.

Lời giải

Xét Δt là số gia của biến số tại điểm t .

Ta có:

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t) = \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (t + \Delta t)^2 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot t^2 = 4,9[2t\Delta t + (\Delta t)^2]. \text{ Suy ra:}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{4,9[2t\Delta t + (\Delta t)^2]}{\Delta t} = 9,8t + 4,9\Delta t.$$

$$\text{Ta thấy: } \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (9,8t + 4,9\Delta t) = 9,8t.$$

Vậy $v(t) = s'(t) = 9,8t$.

a) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ (s) là:

$$v(3) = 9,8 \cdot 3 = 29,4(\text{m/s}).$$

b) Theo đề bài, ta có: $v(t) = 9,8t = 39,2 \Leftrightarrow t = 4$.

Vậy vận tốc tức thời của vật đạt $39,2 \text{ m/s}$ tại thời điểm $t = 4$ (s).

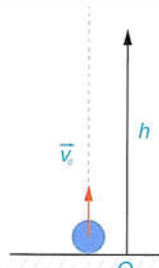
Câu 8. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = t^3 - 4t^2 + 4t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 3$ giây và $t = 5$ giây.

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây là $v(3) = s'(3) = 7 \text{ m/s}$. Tương tự, $v(5) = 39 \text{ m/s}$.

Câu 9. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Trong Vật lý, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi phóng được cho bởi công thức sau:

$h = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.



Hình 9.7

Lời giải

Phương trình chuyển động của vật là $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$.

Vận tốc của vật tại thời điểm t được cho bởi $v(t) = h' = v_0 - g t$.

Vật đạt độ cao cực đại tại thời điểm $t_1 = \frac{v_0}{g}$, tại đó vận tốc bằng $v(t_1) = v_0 - g t_1 = 0$.

Vật chạm đất tại thời điểm t_2 mà $h(t_2) = 0$ nên ta có:

$$v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 = 0 \Leftrightarrow t_2 = 0 \text{ (loại); } t_2 = \frac{2v_0}{g}.$$

Khi chạm đất, vận tốc của vật là $v(t_2) = v_0 - g t_2 = -v_0 = -20 \text{ (m/s)}$.

Dấu âm của $v(t_2)$ thể hiện độ cao của vật giảm với vận tốc 20 m/s (tức là chiều chuyển động của vật ngược với chiều dương đã chọn).

Câu 10. Một vật chuyển động có phương trình $s(t) = 4 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right) \text{ (m)}$, với t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc của vật khi $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Ta có:

$$s'(t) = -4 \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right) \left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right)' = -8\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{8}\right). \text{ Vận tốc của vật khi } t = 5 \text{ giây là}$$

$$v(5) = s'(5) = -8\pi \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{8}\right) = 9,6 \text{ (m/s)}.$$

Câu 11. Ta đã biết, độ pH của một dung dịch được xác định bởi $pH = -\log[H^+]$, ở đó $[H^+]$ là nồng độ (mol/lít) của ion hydrogen. Tính tốc độ thay đổi của pH đối với nồng độ $[H^+]$.

Lời giải

Tốc độ thay đổi của pH với nồng độ $[H^+]$ là đạo hàm của pH , tức là:

$$\left(-\log[H^+]\right)' = -\frac{\left([H^+]\right)'}{[H^+] \ln 10} = -\frac{1}{[H^+] \ln 10}.$$

Câu 12. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

- Tại thời điểm $t = 5$ giây;
- Khi vật chạm đất.

Lời giải

a) Vận tốc của vật rơi tự do tại thời điểm t giây là $v(t) = h'(t) = -9,8t \text{ (m/s)}$.

Tại thời điểm $t = 5$ giây, vận tốc của vật là: $v(5) = -9,8 \cdot 5 = -49 \text{ (m/s)}$.

b) Khi vật chạm đất thì $h(t) = 0$, tức là $100 - 4,9t^2 = 0 \Leftrightarrow t = t_1 = \frac{10}{\sqrt{4,9}}$.

Vận tốc của vật khi chạm đất là: $v(t_1) = -9,8t_1 = -20\sqrt{4,9} \approx -44,3(m/s)$.

Ở đây, dấu âm trong các kết quả tính vận tốc thể hiện vật chuyển động thẳng đứng xuống dưới (ngược với chiều dương).

Câu 13. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5\sin(4\pi t)$, trong đó s tính bằng centimet và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc của hạt sau t giây là: $v(t) = s'(t) = 0,5(4\pi)' \cos(4\pi t) = 2\pi \cos(4\pi t)(cm/s)$.

Với mọi t , $|\cos(4\pi t)| \leq 1$ nên $|v(t)| \leq 2\pi$, $|v(t)| = 2\pi$ tại các thời điểm t mà $4\pi t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{k}{4}$ với k là số nguyên, $k \geq 0$. Vậy vận tốc cực đại của hạt là $2\pi(cm/s)$.

Câu 14. Công thức $T = Ae^{rt}$ được dùng để tính tổng số tiền vốn và lãi mà người gửi nhận được sau thời gian t kể từ thời điểm người đó gửi tiết kiệm A đồng theo thể thức "lãi kép liên tục" với lãi suất r / năm. Trong đó, A và T tính theo đồng, t tính theo năm và t có thể nhận giá trị thực bất kì. Sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của T (làm tròn đến hàng đơn vị) khi $A = 2000000$, $r = 0,05$ và

a) $t = \frac{1}{4}$

b) $t = \frac{1}{365}$.

Lời giải

a) $T = 2000000 \cdot e^{0,05 \cdot \frac{1}{4}} = 2000000 \cdot e^{0,0125} \approx 2025157$ (đồng).

b) $T = 2000000 \cdot e^{0,05 \cdot \frac{1}{365}} \approx 2000274$ (đồng).

Câu 15. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 5 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% / năm và theo thể thức lãi kép liên tục. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau

a) 1 ngày;

b) 30 ngày.

(Luôn coi một năm có 365 ngày.)

Lời giải

a) Tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau 1 ngày là: $5000000 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{1}{365}} = 5000822$ (đồng)

b) Tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau 30 ngày là: $5000000 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{30}{365}} = 5024718$ (đồng)

Câu 16. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 4t^3 + 6t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chuyển động là: $v(t) = s'(t) = 12t^2 + 6$. Khi $t = 2$; $v(2) = 12 \cdot 2^2 + 6 = 54$

Câu 17. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 5%/năm. Tính tổng số tiền vốn và lãi mà người đó nhận được sau một năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức

a) lãi kép với kì hạn 6 tháng;

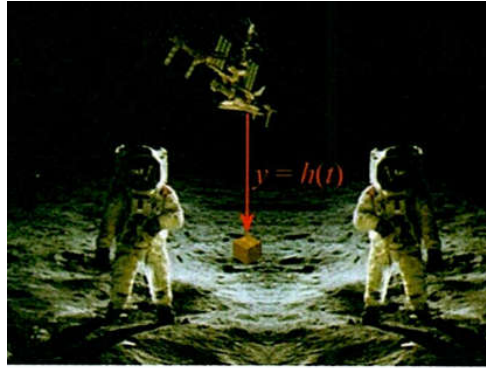
b) lãi kép liên tục.

Lời giải

a) Tổng số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm là: $T = 10000000 \left(1 + \frac{0,05}{2}\right)^2 = 10506250$ (đồng)

b) Tổng số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm là: $T = 10000000e^{0,05} = 10512711$ (đồng)

Câu 18. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $h(t) = 0,81t^2$, với t được tính bằng giây và h tính bằng mét. Hãy tính vận tốc tức thời của vật được thả rơi tự do trên Mặt Trăng tại thời điểm $t = 2$.



Hình 4

(Nguồn: <https://www.britannica.com/place/Moon>)

Lời giải

Vận tốc tức thời của vật là: $v(t) = h'(t) = 1,62t$. Tại thời điểm $t = 2$ thì $v(2) = 1,62 \cdot 2 = 3,24$

Câu 19. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây.

a) Tính vận tốc tức thời $v(t)$ tại thời điểm t .

b) Đạo hàm $v'(t)$ biểu thị tốc độ thay đổi của vận tốc theo thời gian, còn gọi là gia tốc của chuyển động, kí hiệu $a(t)$. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Lời giải

a) $v(t) = s'(t) = 6t^2 + 4$

b) $v'(t) = 12t + 4$

Ta có: $v'(2) = 12 \cdot 2 + 4 = 28$

Câu 20. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = 2t - 4; s''(t) = 2$.

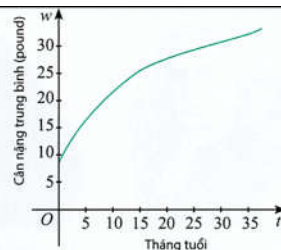
Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $s''(4) = 2 \text{ m/s}^2$.

Câu 21. Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

Lời giải

$v(t) = s'(t) = 9,8t$. Gia tốc rơi của hòn sỏi là $v'(t) = 9,8$

Câu 22. Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (nguồn: https://www.cdc.gov/growthcharts/data/who/GrChrt_Boys). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.



Hình 2

Lời giải

Tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái là: $w'(t) = 0,002274t^2 - 0,1192t + 1,82$

Khi $t = 10$, ta có: $w'(10) = 0,002274 \cdot 10^2 - 0,1192 \cdot 10 + 1,82 = 0,8554$

Câu 23. Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là

$C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số

$x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng nhanh thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

Lời giải

Tốc độ tăng của chi phí theo thời gian là

$$\begin{aligned} C'(t) &= C'(x) \cdot x'(t) = \left(\sqrt{5x^2 + 60} \right)' \cdot (20t + 40)' \\ &= (5x^2 + 60)' \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5x^2 + 60}} \cdot 20 = 10x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5x^2 + 60}} \cdot 20 \\ &= 100x \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{5x^2 + 60}} = 100(20t + 40) \cdot \frac{1}{\sqrt{5(20t + 40)^2 + 60}} \end{aligned}$$

$$\text{Khi } t = 4 \text{ thì } C'(4) = 100(20 \cdot 4 + 40) \cdot \frac{1}{\sqrt{5(20 \cdot 4 + 40)^2 + 60}} = 44,7$$

Câu 24. Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật được thả rơi từ độ cao 200m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính:

- Quãng đường vật đã rơi;
- Gia tốc của vật.

Lời giải

a) Khi $t = 2$ thì $s(t) = 0,81 \cdot 2^2 = 3,24(m)$

b) Ta có: $v(t) = s'(t) = 1,62t$

Gia tốc của vật là $v'(t) = 1,62$

Câu 25. Một viên sỏi rơi từ độ cao 44,1m thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính:

- Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$;
- Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

Lời giải

Vận tốc rơi của viên sỏi là: $v(t) = s'(t) = 9,8t$

a) Khi $t = 2$ thì $v(2) = 9,8 \cdot 2 = 19,6(m/s)$

b) Khi viên sỏi chạm đất thì $s(t) = 44,1$

$$\text{Hay } 4,9t^2 = 44,1 \Leftrightarrow t = 3$$

$$\text{Ta có } v(3) = 9,8 \cdot 3 = 29,4(m/s)$$

Câu 26. Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức

$s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét.

Tính vận tốc và gia tốc của vật khi $t = 1$.

Lời giải

Vận tốc của vật là: $v(t) = s'(t) = 6t^2 + 4$

Gia tốc của vật là $v'(t) = 12t$

Khi $t = 1$ thì $v(1) = 6 \cdot 1^2 + 4 = 10$; $v'(1) = 12 \cdot 1 = 12$

Câu 27. Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được cho bởi công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$, trong đó t là thời gian được tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 12$.

Lời giải

Tốc độ tăng trưởng dân số là:

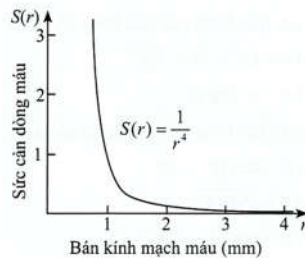
$$P'(t) = \frac{(500t)'(t^2 + 9) - 500t(t^2 + 9)'}{(t^2 + 9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{500 \cdot (t^2 + 9) - 500t \cdot 2t}{(t^2 + 9)^2}$$

$$P'(t) = \frac{4500 - 500t^2}{(t^2 + 9)^2}$$

$$\text{Khi } t = 12 \text{ thì } P'(12) = \frac{4500 - 500 \cdot 12^2}{(12^2 + 9)^2} = -2,88$$

Câu 28. Hàm số $S(r) = \frac{1}{r^4}$ có thể được sử dụng để xác định sức cản S của dòng máu trong mạch máu có bán kính r (tính theo milimét) (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21 st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r = 0,8$.



Hình 1

Lời giải

Tốc độ thay đổi của S là

$$S'(r) = (r^{-4})' \cdot \frac{-1}{(r^4)^2} = 4r^3 \cdot \frac{-1}{r^8} = \frac{-4}{r^5}$$

$$\text{Khi } r = 0,8 \text{ thì } S'(0,8) = \frac{-4}{0,8^5} = -12,2$$

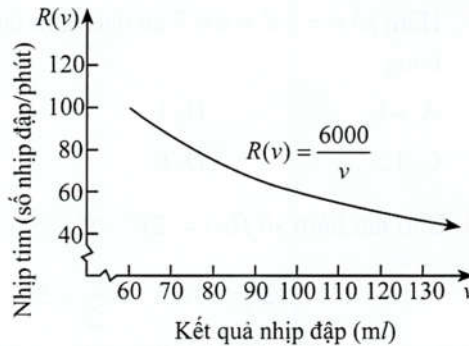
Câu 29. Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$.

(Nguồn: <https://www.algebra.com/algebra/homework/Trigonometry-basics/Trigonometry-basics.faq.question.1111985.html>)

Lời giải

Tốc độ thay đổi của nhiệt độ là: $T'(t) = -0,2t + 1,2$. Khi $t = 1,5$ thì $T'(1,5) = -0,2 \cdot 1,5 + 1,2 = 0,9$

Câu 30. Hàm số $R(v) = \frac{6000}{v}$ có thể được sử dụng để xác định nhịp tim R của một người mà tim của người đó có thể đẩy đi được $6000ml$ máu trên mỗi phút và vml máu trên mỗi nhịp đập (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$.
Kết quả nhịp đập (ml)



Hình 2

Lời giải

Tốc độ thay đổi của nhịp tim là $R'(v) = \frac{-6000}{v^2}$. Khi $v = 80$ thì $R'(v) = \frac{-6000}{80^2} = -0,9375$

Câu 31. Một vật dao động theo phương trình $f(x) = \cos x$, trong đó x là thời gian tính theo giây. Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $x_0 = 2(s)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của dao động: $f'(x) = -\sin x$

Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $x_0 = 2(s)$: $f'(2) = -\sin(2) = 0,91(m/s)$

Câu 32. Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196m/s$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm mà tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8m/s^2$)?

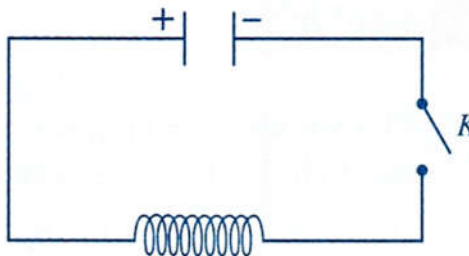
Lời giải

Cho Ox theo phương thẳng đứng, chiều hướng từ mặt đất lên trời, gốc O là vị trí viên đạn được bắn lên, khi đó phương trình chuyển động của viên đạn là: $y = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ ($g = 9,8m/s^2$)

Ta có vận tốc tại thời điểm t là: $v = y'(t) = v_0 - gt$

Do đó: $v = 0 \Rightarrow v_0 - gt = 0 \Leftrightarrow t = \frac{v_0}{g} = \frac{196}{9.8} = 20(s)$

Câu 33. Cho mạch điện như Hình 5.



Hình 5

Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 . Khi đóng khoá K , tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ

độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8}(C)$ và $\omega = 10^6 \pi (rad/s)$. Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6(s)$ (tính chính xác đến $10^{-5} mA$).

Lời giải

$$I(t) = q'(t) = (Q_0 \sin \omega t)' = Q_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t$$

Cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6(s)$ là: $I(6) = Q_0 \cdot \omega \cdot \cos \omega t = 10^{-8} \cdot 10^6 \pi \cdot \cos 10^6 \pi \cdot 6 = 0,01\pi(A)$

Câu 34. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 2t^2 + 4t + 1$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t) = s'(t) = t^2 - 4t + 4$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$ là:

$$v(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 1(m/s).$$

Câu 35. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}(s)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t) = s'(t) = 18 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}(s)$ là:

$$v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 18 \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -9\sqrt{2}(cm/s).$$

Câu 36. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động $s(t) = 2 + 196t - 4,9t^2$, trong đó $t \geq 0, t$ (s) là thời gian chuyển động, $s(m)$ là độ cao so với mặt đất.

- Sau bao lâu kể từ khi bắn thì viên đạn đạt được độ cao $1962m$?
- Tính vận tốc tức thời của viên đạn khi viên đạn đạt được độ cao $1962m$.
- Tại thời điểm viên đạn đạt vận tốc tức thời bằng $98m/s$ thì viên đạn đang ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

Lời giải

a) Khi viên đạn đạt được độ cao $1962m$, ta có phương trình:

$$1962 = 2 + 196t - 4,9t^2 \Leftrightarrow t = 20. \text{ Vậy sau } 20s \text{ kể từ lúc bắn thì viên đạn đạt được độ cao } 1962m.$$

b) Vận tốc tức thời của viên đạn tại thời điểm t là: $v(t) = s'(t) = 196 - 9,8t$.

Viên đạn đạt được độ cao $1962m$ vào thời điểm $t = 20$ (s) kể từ lúc bắn, khi đó vận tốc tức thời của viên đạn là: $v(20) = 196 - 9,8 \cdot 20 = 0(m/s)$.

c) Viên đạn có vận tốc tức thời bằng $98m/s$ thì ta có phương trình:

$$v(t) = 196 - 9,8t = 98 \Leftrightarrow t = 10. \text{ Khi đó viên đạn đang ở độ cao là: } s(10) = 2 + 196 \cdot 10 - 4,9 \cdot 10^2 = 1472(m).$$

Câu 37. Năm 2001, dân số Việt Nam khoảng 78690000 người. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn là 1,7% thì ước tính số dân Việt Nam sau x năm kể từ năm 2001 được tính theo hàm số sau:

$f(x) = 7,869e^{0,017x}$ (chục triệu người). Tốc độ gia tăng dân số (chục triệu người/năm) sau x năm kể từ năm 2001 được xác định bởi hàm số $f'(x)$.

a) Tìm hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001.

b) Tính tốc độ gia tăng dân số Việt Nam theo đơn vị chục triệu người/năm vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười), nêu ý nghĩa của kết quả đó.

Lời giải

a) Ta có:

$$f'(x) = 7,869 \cdot (0,017x)' \cdot e^{0,017x} = 7,869 \cdot 0,017 \cdot e^{0,017x} = 0,133773e^{0,017x} \cdot 71$$

Vậy hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001 là:

$$f'(x) = 0,133773e^{0,017x}. \quad \text{b) Ta có: } x = 2023 - 2001 = 22.$$

Tốc độ gia tăng dân số Việt Nam vào năm 2023 là:

$$f'(22) = 0,133773e^{0,017 \cdot 22} \approx 0,2 \quad (\text{chục triệu người/năm})$$

Theo kết quả trên thì dân số nước ta tăng thêm khoảng 2 triệu người trong năm 2023.

Câu 38. Trong thuyết động học phân tử chất khí, với một khối khí lí tưởng, các đại lượng áp suất $p(Pa)$, thể tích $V(m^3)$, nhiệt độ $T(K)$, số mol $n(mol)$ liên hệ với nhau theo phương trình: $pV = nRT$, trong đó $R = 8,31(J / mol.K)$ là hằng số.

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái lí tưởng có áp suất không đổi $p = 10^5 Pa$. Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

Lời giải

Thay $p = 10^5, n = 8, R = 8,31$ vào phương trình trên ta có:

$10^5 V = 8,31 \cdot 8 \cdot T \Leftrightarrow V = 6,648 \cdot 10^{-4} T$. Khi đó $V'(T) = 6,648 \cdot 10^{-4}$. Vậy tốc độ thay đổi thể tích của khối khí lúc có nhiệt độ T là $6,648 \cdot 10^{-4} (m^3 / K)$.

Câu 39. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t (s) là: $v(t) = s'(t) = t^2 - 6t + 8$.

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$ là:

$$v(5) = 5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 3(m / s).$$

Câu 40. Một mạch dao động điện từ LC có lượng điện tích dịch chuyển qua tiết diện thẳng của dây xác định bởi hàm số $Q(t) = 10^{-5} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, Q tính bằng Coulomb. Tính

cường độ dòng điện tức thời $I(A)$ trong mạch tại thời điểm $t = \frac{\pi}{1500}(s)$, biết $I(t) = Q'(t)$.

Lời giải

Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm t (s) là:

$$I(t) = Q'(t) = 10^{-5} \cdot 2000 \cos\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right) = 0,02 \cos\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Cường độ dòng điện tức thời trong mạch tại thời điểm $t = \frac{\pi}{1500}(s)$ là:

$$I\left(\frac{\pi}{1500}\right) = 0,02 \cos\left(2000 \cdot \frac{\pi}{1500} + \frac{\pi}{3}\right) = 0,01(A).$$

Câu 41. Năm 2010, dân số ở một tỉnh D là 1038229 người. Tính đến năm 2015, dân số của tỉnh đó là 1153600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức $S(N) = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số $S'(N)$. Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

Lời giải

Tính từ năm 2010 đến năm 2015, chọn năm 2010 làm mốc, ta có:

$$1153600 = 1038229 \cdot e^{5r} \Rightarrow r \approx 0,021.$$

Khi đó, ta có: $S(N) \approx 1038229 \cdot e^{0,021N}$, suy ra tốc độ gia tăng dân số vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 là:

$$S'(N) \approx 0,021 \cdot 1038229 \cdot e^{0,021N} = 21802,809 \cdot e^{0,021N}.$$

Tốc độ gia tăng dân số tính D vào năm 2023 (sau 13 năm từ năm 2010) là:

$$S'(13) \approx 21802,809 \cdot e^{0,021 \cdot 13} \approx 28647 \text{ (người/năm)}.$$

Câu 42. Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vật cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 20t - \frac{5}{2}t^2$, trong đó $s(m)$ là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, $t(s)$ là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \leq t \leq 4$).

a) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh. Hãy cho biết xe ô tô trên có chạy quá tốc độ hay không, biết tốc độ giới hạn cho phép là 70 km/h .

b) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm?

Lời giải

a) Vận tốc tức thời của ô tô tại thời điểm $t(s)$ là: $v(t) = s'(t) = 20 - 5t$.

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh ($t = 0(s)$) là:

$$v(0) = 20 - 5 \cdot 0 = 20(m/s). \text{ Ta có: } 20 m/s = 72 km/h > 70 km/h.$$

Suy ra ô tô trên đã chạy quá tốc độ giới hạn cho phép.

b) Khi xảy ra va chạm, ô tô đã đi được 20,4 m kể từ khi đạp phanh nên

$$20,4 = 20t - \frac{5}{2}t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1,2 \\ t = 6,8 \end{cases} \text{ Vì } 0 \leq t \leq 4 \text{ nên } t = 1,2 (s).$$

Vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm ($t = 1,2(s)$) là:

$$v(1,2) = 20 - 5 \cdot 1,2 = 14(m/s).$$

Câu 43. Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là $v_0(m/s)$ (bỏ qua sức cản của không khí) thì độ cao h của vật (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$ (g là gia tốc trọng trường). Tìm vận tốc của vật khi chạm đất.

Lời giải

$$\text{Tại thời điểm vật chạm đất: } h = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = 0(t > 0).$$

$$\text{Giải phương trình ta được } t = \frac{2v_0}{g}.$$

$$\text{Vận tốc của vật khi chạm đất là } v = h'\left(\frac{2v_0}{g}\right) = -v_0.$$

Câu 44. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức $s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimet và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

$$\text{Vận tốc của hạt sau } t \text{ giây là: } v(t) = s'(t) = 4\pi\sqrt{2} \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right).$$

$$\text{Vận tốc cực đại của hạt là: } v_{\max} = 4\pi\sqrt{2} \approx 17,8 m/s, \text{ đạt được khi:}$$

$$\left| \cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right) \right| = 1 \text{ hay } t = \frac{5}{24} + \frac{k}{4}, k \in \mathbb{N}.$$

Câu 45. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 16t + 15$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = (-2t^2 + 16t + 15)' = (-2.2t + 16) = -4t + 16$.

Vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 3$ là $s'(3) = -4.3 + 16 = 4(m/s)$.

Câu 46. Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 4$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = 4t + 5, s'(4) = 21 m/s$.

Câu 47. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^2 + 15t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = -2.2t + 15 = -4t + 15$, suy ra $s''(t) = -4$.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$ lần lượt là $s'(2) = 7 m/s$ và $s''(2) = -4 m/s^2$.

Câu 48. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.

Lời giải

Ta có $P'(x) = -2.200x + 12800 = -400x + 12800$.

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm là $P'(12) = -400.12 + 12800 = 8000$.

Câu 49. Một chất điểm chuyển động thẳng có phương trình $s = 100 + 2t - t^2$ trong đó thời gian được tính bằng giây và s được tính bằng mét.

a) Tại thời điểm nào chất điểm có vận tốc bằng 0?

b) Tìm vận tốc và gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 3s$.

Lời giải

a) $s'(t) = 2 - 2t$

$s'(t) = 0 \Rightarrow 2 - 2t = 0 \Rightarrow t = 1$.

Vận tốc chất điểm bằng 0 khi $t = 1s$.

b) Khi $t = 3s$.

$s'(3) = 2 - 2.3 = -4(m/s)$;

$s''(3) = -2 \Rightarrow a(3) = -2 m/s^2$.

Vậy khi $t = 3s$ thì vận tốc của vật là $-4 m/s$. Gia tốc của vật là $-2 m/s^2$.

Câu 50. Một chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = -2t^3 + 75t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = -6t^2 + 75$ suy ra $s''(t) = -12t$.

Vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $s'(3) = 21$ và $s''(3) = -36$.

Câu 51. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = 200(x - 2)(17 - x)$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

Lời giải

Ta có $P'(x) = -400x + 3800$.

Tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm là $P'(30) = -8200$.

Câu 52. Xét một chuyển động có phương trình $s = 4 \cos 2\pi t$.

a) Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t .

b) Tính gia tốc tức thời tại thời điểm t .

Lời giải

a) Để tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t , ta tính đạo hàm cấp nhất của $s(t)$ theo t :

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = -8\pi \sin(2\pi t)$$

b) Để tính gia tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t , ta tính đạo hàm cấp hai của $s(t)$ theo t

$$: a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = -16\pi^2 \cos(2\pi t)$$

Câu 53. Chuyển động của một vật gắn trên con lắc lò xo (khi bỏ qua ma sát và sức cản không khí) được cho bởi phương trình sau: $x(t) = 4 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, ở đó x tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây.

Tìm gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 9.9

Lời giải

Vận tốc của vật tại thời điểm t là $v(t) = x'(t) = -\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cdot 4 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -8\pi \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$.

Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm t

$$\text{là } a(t) = v'(t) = -8\pi \left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right)' \cdot \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2 \cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Tại thời điểm $t = 5$ giây, gia tốc của vật là

$$a(5) = -16\pi^2 \cos\left(10\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -16\pi^2 \cos\frac{\pi}{3} \approx -79 \text{ (cm/s}^2\text{)}.$$

Câu 54. Một vật chuyển động thẳng có phương trình $s = 2t^2 + \frac{1}{2}t^4$ (s tính bằng mét, t tính bằng giây).

Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 4t + 2t^3$. Gia tốc của vật tại thời điểm t giây là: $a(t) = s''(t) = 4 + 6t^2$.

Tại thời điểm $t = 4$ giây, gia tốc của vật là: $a(4) = 4 + 6 \cdot 4^2 = 100 \text{ (m/s}^2\text{)}.$

Câu 55. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi $s(t) = 10 + 0,5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 0,5 \left(2\pi t + \frac{\pi}{5} \right)' \cos \left(2\pi t + \frac{\pi}{5} \right) = \pi \cos \left(2\pi t + \frac{\pi}{5} \right)$. Gia tốc của hạt tại thời điểm t giây là:

$$a(t) = s''(t) = -\pi \left(2\pi t + \frac{\pi}{5} \right)' \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{5} \right) = -2\pi^2 \sin \left(2\pi t + \frac{\pi}{5} \right).$$

Tại thời điểm $t = 5$ giây, gia tốc của hạt là: $a(5) = -2\pi^2 \sin \left(10\pi + \frac{\pi}{5} \right) = -11,6 \left(\text{cm} / \text{s}^2 \right)$.

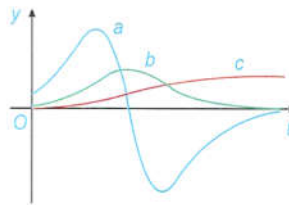
Câu 56. Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = \sin \left(0,8\pi t + \frac{\pi}{3} \right)$, ở đó s tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

- A. $4,5 \text{ cm} / \text{s}^2$.
- B. $5,5 \text{ cm} / \text{s}^2$.
- C. $6,3 \text{ cm} / \text{s}^2$.
- D. $7,1 \text{ cm} / \text{s}^2$.

Lời giải

Chọn C

Câu 57. Hình 9.10 biểu diễn đồ thị của ba hàm số. Hàm số thứ nhất là hàm vị trí của một chiếc ô tô, hàm số thứ hai biểu thị vận tốc và hàm số thứ ba biểu thị gia tốc của ô tô đó. Hãy xác định đồ thị của mỗi hàm số này và giải thích.



Hình 9.10

Lời giải

Vận dụng ý nghĩa cơ học của đạo hàm, đạo hàm cấp hai và lưu ý rằng một hàm đồng biến (tương ứng, nghịch biến) trên một khoảng nếu đạo hàm dương (tương ứng, âm). Giải. Từ ý nghĩa cơ học của đạo hàm, ta biết rằng đạo hàm của hàm vị trí là hàm vận tốc, đạo hàm của hàm vận tốc là hàm gia tốc, và một hàm số đồng biến (tương ứng, nghịch biến) trên một khoảng nào đó nếu đạo hàm của nó dương (tương ứng, âm) trên khoảng đó.

Trên hình vẽ ta thấy: Hàm số c luôn đồng biến, tức là đạo hàm của nó phải luôn không âm, do đó hàm số b là đạo hàm của hàm số c ; hàm số b đồng biến trên khoảng mà hàm số a dương và nghịch biến trên khoảng mà hàm số a âm, do đó hàm số a là đạo hàm của hàm số b .

Vậy hàm số a là hàm gia tốc, hàm số b là hàm vận tốc và hàm số c là hàm vị trí của ô tô.

Câu 58. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

- a) Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.
- b) Tại những thời điểm nào vật đứng yên?
- c) Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.
- d) Tính tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.
- e) Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

Lời giải

Ta có: $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$ và $a(t) = s''(t) = 6t - 12$.

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giây là $v(2) = -3 \text{ m} / \text{s}$.

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $v(4) = 9 \text{ m} / \text{s}$.

b) Vật đứng yên khi vận tốc triệt tiêu, tức là $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = 3$.

Vậy tại thời điểm 1 giây hoặc 3 giây thì vật đứng yên.

c) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $a(4) = 12 \left(m/s^2 \right)$.

d) Ta có: $v(t) = 3t^2 - 12t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = 3$.

Do đó, ta cần tính riêng rẽ quãng đường vật đi được trong từng khoảng thời gian $[0;1]$, $[1;3]$, $[3;5]$.

Từ thời điểm $t = 0$ giây đến thời điểm $t = 1$ giây, vật đi được quãng đường là: $|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4m$.

Từ thời điểm $t = 1$ giây đến thời điểm $t = 3$ giây, vật đi được quãng đường là: $|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4m$.

Từ thời điểm $t = 3$ giây đến thời điểm $t = 5$ giây, vật đi được quãng đường là:

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20m.$$

Vậy tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là: $4 + 4 + 20 = 28m$.

e) Xét $a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Khi $t \in [0;2)$ thì gia tốc âm, tức là vật giảm tốc.

Khi $t \in (2,5]$ thì gia tốc dương, tức là vật tăng tốc.

Câu 59. Một vật rơi tự do theo phương thẳng đứng có phương trình chuyển động $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó g là gia tốc rơi tự do, $g \approx 9,8m/s^2$.

a) Tính vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(s)$.

b) Tính gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t_0 = 2(s)$.

Lời giải

a) Vận tốc của vật là: $v(t) = gt \Rightarrow v(2) \approx 9,8 \cdot 2 \approx 19,6(m/s)$

b) Gia tốc của vật là: $a(t) = g \Rightarrow a(2) \approx 9,8 \left(m/s^2 \right)$

Câu 60. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 8t + 1$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3(s)$;

b) Tại thời điểm mà $s(t) = 7(m)$.

Lời giải

Vận tốc tức thời tại thời điểm t : $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 8$

Gia tốc tức thời tại thời điểm t : $a(t) = v'(t) = 6t - 6$

a) Tại thời điểm $t = 3(s)$

- Vận tốc tức thời là: $v(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 17(m/s)$

- Gia tốc tức thời là: $a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 \left(m/s^2 \right)$

b) Tại thời điểm chất điểm di chuyển được $7(m)$ ta có:

$$t^3 - 3t^2 + 8t + 1 = 7$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 8t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 8t - 6 = 0$$

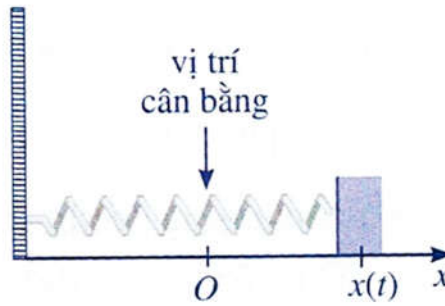
$$\Leftrightarrow t = 1$$

Với $t = 1$

Vận tốc tức thời là: $v(1) = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 5(m/s)$

Gia tốc tức thời là: $a(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \left(m/s^2 \right)$

Câu 61. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát như Hình 7, có phương trình chuyển động $x(t) = 4\sin t$, trong đó t tính bằng giây và $x(t)$ tính bằng centimet.



Hình 7

- a) Tìm phương trình theo thời gian của vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc.
 b) Tính vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{3}$ (s). Tại thời điểm đó, con lắc di chuyển theo chiều dương hay chiều âm của trục Ox ?

Lời giải

a) Vận tốc tức thời tại thời điểm t : $v(t) = x' = 4 \cos t$

Gia tốc tức thời tại thời điểm t : $a(t) = v'(t) = -4 \sin t$

b) Tại thời điểm $t = \frac{2\pi}{3}$ (s)

- Vận tốc tức thời là: $v\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4 \cos \frac{2\pi}{3} = -2$

- Gia tốc tức thời là: $a\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4 \sin \frac{2\pi}{3} = -2\sqrt{3}$

- Tại thời điểm đó, con lắc đang di chuyển theo hướng ngược chiều dương

Câu 62. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 2t + t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng m/s . Tìm gia tốc tức thời của chất điểm:

- a) Tại thời điểm $t = 3$ (s);
 b) Tại thời điểm mà vận tốc của chất điểm bằng $8m/s$.

Lời giải

Gia tốc tức thời của chất điểm: $a(t) = 2t + 2$

a) Tại thời điểm $t = 3$ (s), gia tốc tức thời của chất điểm là: $a(3) = 2 \cdot 3 + 2 = 8 (m/s^2)$

b) Tại thời điểm mà vận tốc có chất điểm bằng $8m/s$, ta có: $2t + t^2 = 8 \Leftrightarrow t^2 + 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 (TM) \\ t = -4 (L) \end{cases}$

Với $t = 2 \Rightarrow a(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 6$

Câu 63. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 3$, trong đó t tính bằng giây và x tính bằng centimét.

- a) Tìm vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của con lắc tại thời điểm t (s).
 b) Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0.

Lời giải

a) Vận tốc tức thời của con lắc: $v(t) = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$

Gia tốc tức thời của con lắc: $a(t) = -4\pi^2 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$

b) Tại vận tốc tức thời của con lắc bằng 0, ta có:

$$-4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \pi t - \frac{2\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

$$\bullet t = \frac{2}{3} \Rightarrow a(t) = -4\pi^2 \cos\left(\pi \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3}\pi\right) = -4\pi^2$$

Câu 64. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 4$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = t^2 - 6t + 5$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là:

$s''(t) = 2t - 6$. Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$ là:

$$s''(3) = 2 \cdot 3 - 6 = 0 \left(m / s^2 \right).$$

Câu 65. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây,

$s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}(s)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } s'(t) = 18 \cos\left(3t + \frac{\pi}{4}\right).$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t(s)$ là: $s''(t) = -54 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}(s)$ là:

$$s''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -54 \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right) = -27\sqrt{2} \left(cm / s^2 \right).$$

Câu 66. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 5(s)$.

b) Tại thời điểm mà vận tốc tức thời của chất điểm bằng $-1 m / s$.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = t^2 - 6t + 8, s''(t) = 2t - 6$.

a) Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5(s)$ là: $s''(5) = 4 \left(m / s^2 \right)$.

b) Theo giả thiết, $s'(t) = t^2 - 6t + 8 = -1 \Leftrightarrow t = 3(s)$.

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3(s)$ là: $s''(3) = 0 \left(m / s^2 \right)$.

Câu 67. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 3 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây,

$s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}(s)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } s''(t) = -3 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right).$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}(s)$ là:

$$s''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-3}{2} (cm/s^2).$$

Câu 68. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 2 \sin\left(6t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính vận tốc tức thời và gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}(s)$.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 12 \cos\left(6t + \frac{\pi}{4}\right), s''(t) = -72 \sin\left(6t + \frac{\pi}{4}\right)$.

Vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}(s)$ là:

$$s'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 12 \cos\left(6 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 6\sqrt{2} (cm/s).$$

Gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}(s)$ là:

$$s''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -72 \sin\left(6 \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 36\sqrt{2} (cm/s^2).$$

Câu 69. Kính viễn vọng không gian Hubble được triển khai vào ngày 24 tháng 4 năm 1990, bởi tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong nhiệm vụ này từ khi xuất phát tại $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy nhiên liệu rắn bị loại bỏ ở $t = 126 (s)$ được xác định theo phương trình sau:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 (ft/s).$$

(Nguồn: James Stewart, Calculus)

Tính gia tốc tức thời của tàu con thoi trên tại thời điểm $t = 100 (s)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm $t(s)$ là:

$$a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t + 23,61 (ft/s^2).$$

Gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm $t = 100 (s)$ là:

$$a(100) = 0,003906 \cdot 100^2 - 0,18058 \cdot 100 + 23,61 = 44,612 (ft/s^2).$$

Câu 70. Sau khi uống đồ uống có cồn, nồng độ cồn trong máu tăng lên rồi giảm dần được xác định bằng hàm số $C(t) = 1,35te^{-2,802t}$, trong đó $C(mg/ml)$ là nồng độ cồn, $t (h)$ là thời điểm đo tính từ ngay sau khi uống 15ml đồ uống có cồn.

(Nguồn: P. Wilkinson et al., Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State, 1977)

Giả sử một người uống hết nhanh 15ml đồ uống có cồn. Tính tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3 (h)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần triệu).

Lời giải

Ta có: $C'(t) = 1,35e^{-2,802t} - 3,7827te^{-2,802t}$. Vậy tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn tức thời trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3(h)$ là:

$$C'(3) = 1,35e^{-2,802 \cdot 3} - 3,7827 \cdot 3e^{-2,802 \cdot 3} \approx -0,002235 \left(\frac{mg}{ml}\right).$$

Câu 71. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 15 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 3$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Gia tốc của hạt tại thời điểm t là: $a(t) = s''(t) = -16\pi^2 \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$. Tại thời điểm $t = 3$ giây, gia tốc của hạt là:

$$a = -16\pi^2 \sqrt{2} \sin\left(12\pi + \frac{\pi}{6}\right) \approx -111,7 \text{ m/s}^2$$

Câu 72. Độ cao (tính bằng mét) của một vật rơi tự do sau t giây là $h(t) = 400 - 4,9t^2$. Giá trị tuyệt đối của vận tốc của vật khi nó chạm đất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) là

- A. $88,5 \text{ m/s}$.
- B. $86,7 \text{ m/s}$.
- C. $89,4 \text{ m/s}$.
- D. 90 m/s .

Lời giải

Chọn A

Câu 73. Chuyển động của một vật có phương trình $s = 5 + \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, ở đó s tính bằng centimét và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

- A. $4,5 \text{ cm/s}^2$.
- B. $5,5 \text{ cm/s}^2$.
- C. $6,3 \text{ cm/s}^2$.
- D. $7,1 \text{ cm/s}^2$.

Lời giải

Chọn C

Câu 74. Vị trí của một vật chuyển động (tính bằng mét) sau t giây được xác định bởi $s = t^4 - 4t^3 - 20t^2 + 20t, t > 0$. Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc $v = 20 \text{ m/s}$ là

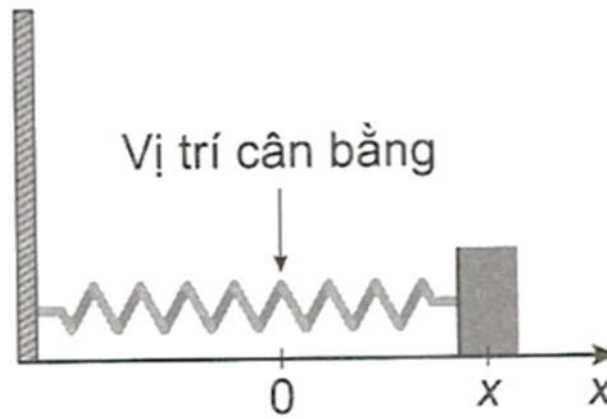
- A. 140 m/s^2 .
- B. 120 m/s^2 .
- C. 130 m/s^2 .
- D. 100 m/s^2 .

Lời giải

Chọn A

Câu 75. Một vật gắn trên lò xo chuyển động theo phương ngang trên một mặt phẳng nhẵn (H.9.1). Phương trình chuyển động của vật được cho bởi $x = 8 \sin\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, với t tính bằng giây và x tính bằng centimét.

Tìm vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất). Vật chuyển động theo hướng nào tại thời điểm đó?



Hình 9.1

Lời giải

Vận tốc và gia tốc của vật tại thời điểm t là:

$$v(t) = x'(t) = 8\pi\sqrt{2} \cos\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$a(t) = x''(t) = -16\pi^2 \sin\left(\sqrt{2}\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Tại $t = 5$ giây, vận tốc và gia tốc của vật là $v = -10,5 m/s$ và $a = 150,8 m/s^2$. Khi ấy vật đang chuyển động theo hướng từ phải sang trái (hướng tới vách chắn cố định).

Câu 76. Vị trí chuyển động của một vật trên đường thẳng được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 3t^3 + 5t + 2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật đó khi $t = 1$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = 9t^2 + 5$, vận tốc $s'(1) = 14$.

Gia tốc $s''(t) = 18t$, gia tốc $s''(1) = 18$.

Câu 77. Một người gửi tiết kiệm 20 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6% / năm theo thể thức lãi kép liên tục. Tính số tiền người đó nhận được sau:

- a) 1 tháng;
- b) 1 năm.

Lời giải

Ta có $r = 6\% = 0,06$; 1 tháng $= \frac{1}{12}$ năm.

Công thức tính tổng số tiền lãi và vốn sau t năm là $T = A \cdot e^{rt}$

a) Số tiền người đó nhận được sau 1 tháng là $S = 20 \cdot 10^6 \cdot e^{0,06 \cdot \frac{1}{12}} \approx 20100250$ đồng.

b) Số tiền người đó nhận được sau 1 năm là $S = 20 \cdot 10^6 \cdot e^{0,06 \cdot 1} \approx 21236730$ đồng.

Câu 78. Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng với lãi suất 7,5% / năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Tính sau thời gian ngắn nhất (theo năm) để số tiền người đó thu được (cả số tiền gửi ban đầu và lãi) gấp đôi số tiền đã gửi ban đầu, giả định trong khoảng thời gian này lãi suất không thay đổi và người đó không rút tiền ra?

Lời giải

Giả sử số tiền người đó gửi vào ngân hàng là A . Sau n năm số tiền người đó nhận được là $2A$.

Áp dụng công thức $S = Ae^{0,075t}$ ta có $2A \leq A \cdot e^{0,075t}$

$$\Leftrightarrow 0,075t \geq \ln 2 \Leftrightarrow t \geq \approx 9,24.$$

Người đó phải gửi ít nhất 10 năm thì số tiền thu được gấp đôi số tiền ban đầu.

Câu 79. Số lượng vi khuẩn trong một phòng thí nghiệm A được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Tính thời gian kể từ lúc ban đầu, số lượng loại vi khuẩn A là 20 triệu con?

Lời giải

$$\text{Ta có } s(3) = 625 \text{ nghìn con} \Rightarrow s(0) \cdot 2^3 = 625 \Rightarrow s(0) = \frac{625}{8} \text{ nghìn con.}$$

$$\text{Để số lượng vi khuẩn là 20 triệu con} \Rightarrow s(0) \cdot 2^t = 20000 \Rightarrow 2^t = 20000 : \frac{625}{8}$$

$$\Rightarrow 2^t = 2^8 \Rightarrow t = 8.$$

Vậy thời gian để số vi khuẩn đạt 20 triệu con là 8 phút.

Câu 80. Người ta sử dụng công thức $S = A \cdot e^{nr}$ để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó A là số dân của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau n năm và r là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là 78685800 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 1,2%. Hãy tính xem dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

Lời giải

Theo công thức tăng trưởng mũ: $S = A \cdot e^{nr}$

$$\Rightarrow 110000000 = 78685800 \cdot e^{1,2\% \cdot n} \Leftrightarrow n = \frac{1}{1,2\%} \ln \frac{110000000}{78685800} \approx 27,91$$

$\Rightarrow$ Sau 28 năm thì dân số Việt Nam đạt 110 triệu người.

Vậy dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm 2029.

Câu 81. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tính thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu)?

Lời giải

$$\text{Ta có } v(t) = s'(t) = -3t^2 + 9t + 1 \text{ có đồ thị là Parabol, do đó } v(t)_{\max} \Leftrightarrow t = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}.$$

Câu 82. Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Vận tốc v của vật được tính theo công thức: $v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 9$.

$$\text{Ta có: } t^2 - 2t + 9 = (t-1)^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow v \geq 8.$$

Vậy vận tốc nhỏ nhất của vật là $8(m/s)$ đạt được tại thời điểm $t = 1$ (giây).

Câu 83. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Lời giải

Gia tốc chuyển động tại $t = 3s$ là $s''(3)$

$$\text{Ta có: } s'(t) = 3t^2 - 6t + 9; s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12 m/s^2.$$

Câu 84. Một vật dao động điều hòa có phương trình $x = 2 \sin \pi t$ (x tính bằng cm , t tính bằng giây). Tính thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Lời giải

Gia tốc của vật bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động

$$\text{Ta có: } x' = 2\pi \cos \pi t \Rightarrow a(t) = x''(t) = -2\pi^2 \sin \pi t$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin \pi t \leq 1 \Leftrightarrow -2\pi^2 \leq -2\pi^2 \sin \pi t \leq 2\pi^2 \Leftrightarrow -2\pi^2 \leq a(t) \leq 2\pi^2$$

$$\text{Gia tốc lớn nhất khi } \sin \pi t = -1 \Leftrightarrow \pi t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} + 2k$$

$$\text{Với } k = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}(l); k = 1 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

Vậy tại $t = \frac{3}{2}$ giây là thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Câu 85. Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1(m)$, t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$.

Lời giải

$$S = f(t) = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 6t + 2$$

$$\Rightarrow a(t) = f''(t) = 12t^2 - 18t - 6$$

$$\text{Gia tốc của vật tại thời điểm } t = 3s \text{ là } a(3) = 12.3^2 - 18.3 - 6 = 48m/s^2.$$

Câu 86. Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

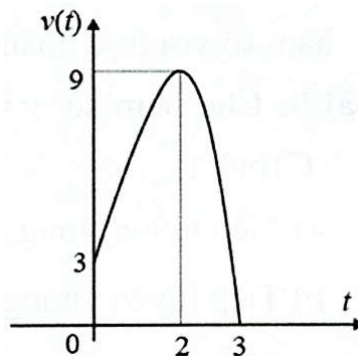
$$\text{Vận tốc của chất điểm có phương trình là: } v = s' = -3t^2 + 2t + 1.$$

$$\text{Vận tốc của chất điểm đạt GTLN khi } t = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Gia tốc của chất điểm có phương trình là: } s'' = -6t + 2.$$

$$\text{Tại thời điểm vận tốc đạt GTLN thì gia tốc bằng } s''\left(\frac{1}{3}\right) = 0.$$

Câu 87. Một chuyển động có vận tốc được biểu diễn theo đồ thị hình bên. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1(s)$.

**Lời giải**

Đồ thị của vận tốc là một Parabol có phương trình $v(t) = at^2 + bt + c$.

Trên hình vẽ đồ thị qua các điểm $(0;3), (2;9), (3;0)$ nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 6 \\ 9a + 3b + -3 \Leftrightarrow \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 11 \\ c = 3 \end{cases}.$$

Do đó phương trình của vận tốc là $v(t) = -4t^2 + 11t + 3$.

Vậy gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1(s)$ là: $a(1) = v'(1) = 3$ (Casio)

Câu 88. Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $S(t)(km)$ là hàm số phụ thuộc theo biến t (giây) theo biểu thức sau $s(t) = e^{t^2+3} + 2t \cdot e^{3t+1}(km)$. Tính vận tốc của tên lửa sau 1 giây?

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 2t \cdot e^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6t \cdot e^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^4 + 2 \cdot e^4 + 6e^4 = 10e^4 (km/s)$$

Câu 89. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 3t^2 + 3t + 7$, trong đó $t \geq 0$.

Tìm giá trị của vận tốc tức thời, gia tốc tức thời của chất điểm:

a) Tại thời điểm $t = 3$;

b) Tại thời điểm mà $s = 5$.

Lời giải

Vận tốc của chất điểm là $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 6t + 3$.

Gia tốc của chất điểm là $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

a) Tại thời điểm $t = 3s$, vận tốc tức thời $v(3) = 3 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + 3 = 12(m/s)$

Gia tốc tức thời của chất điểm là $a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12(m/s^2)$

b) Tại thời điểm mà $s = 5 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 3t + 7 = 5 \Leftrightarrow t^3 - 3t^2 + 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Vận tốc tức thời $v(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 3 = 3(m/s)$

Gia tốc tức thời của chất điểm là $a(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6(m/s^2)$

Câu 90. Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3$ (kết quả khảo sát trong 12 tháng liên tục).

Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất vào ngày thứ mấy?

Lời giải

$$\text{Ta có } f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3 \Rightarrow f'(t) = 70t - 5t^2 (t > 0)$$

Vì $f'(t)$ có đồ thị là một parabol có bề lõm quay xuống nên đạt giá trị cực đại tại $t = -\frac{70}{2(-5)} = 7$. Vậy vào ngày thứ 7 tốc độ truyền bệnh là nhanh nhất.

Câu 91. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Lời giải

$$\text{Ta có: } v = S' = -3t^2 + 6t + 9 \text{ và } a = S'' = -6t + 6$$

$$\text{Gia tốc triệt tiêu khi } S'' = 0 \Leftrightarrow -6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

$$\text{Khi đó vận tốc của chuyển động là } S'(1) = -3 \cdot 1^2 + 6 \cdot 1 + 9 = 12(m/s)$$

Câu 92. Một chất điểm chuyển động theo quy luật $s(t) = -t^3 + 6t^2$ với t là thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động, $s(t)$ là quãng đường đi được trong khoảng thời gian t . Tính thời điểm t tại đó vận tốc đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải

Ta có: $v(t) = S'(t) = -3t^2 + 12t$

$v(t)$ có đồ thị là một parabol có bề lõm quay xuống, nên $v(t)$ đạt giá trị lớn nhất tại $t = -\frac{12}{2 \cdot (-3)} = 2$. Vậy vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 2.

Câu 93. Một chuyển động xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời của chuyển động khi quãng đường đạt được $9m$.

Lời giải

$$s = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 = 9 \Leftrightarrow \frac{1}{2}t^2 + 3t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

Ta có $v(t) = s'(t) = t + 3$ do đó vận tốc tức thời của chuyển động tại $t = 2$ là: $v(2) = 5$.

Câu 94. Một chất điểm chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{2}t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường đi được trong t giây tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$.

Lời giải

Vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 5$ là:

$$s'(5) = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{s(t) - s(5)}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{25}{2}}{t - 5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{2}(t-5)(t+5)}{t-5} = \lim_{t \rightarrow 5} \frac{1}{2}(t+5) = 5.$$

Vậy $v(5) = s'(5) = 5(m/s)$.

Câu 95. Một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao $461,3m$ xuống mặt đất, với phương trình chuyển động $s(t) = 4,9t^2$. Tính vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất, bỏ qua sức cản không khí. (Đơn vị m/s , kết quả gần đúng làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Với bất kì t_0 , ta có:

$$s'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{4,9t^2 - 4,9t_0^2}{t - t_0} = \lim_{t \rightarrow t_0} 4,9(t + t_0) = 9,8t_0.$$

Do đó, vận tốc của quả bóng tại thời điểm t là $v(t) = s'(t) = 9,8t$.

Mặt khác, vì chiều cao của toà tháp là $461,3m$ nên quả bóng sẽ chạm đất tại thời điểm t_1 .

$$\text{Từ đó, ta có: } 4,9t_1^2 = 461,3 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \text{ (giây).}$$

Vậy vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất là:

$$v(t_1) = 9,8t_1 = 9,8 \cdot \sqrt{\frac{461,3}{4,9}} \approx 95,1(m/s).$$

Câu 96. Một người gửi tiết kiệm khoản tiền 100 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $7\%/năm$. Tính tổng số tiền vốn và lãi (làm tròn đến hàng phần nghìn) mà người đó nhận được sau 1 năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức:

- a) Lãi kép với kì hạn 6 tháng;
b) Lãi kép liên tục.

Lời giải

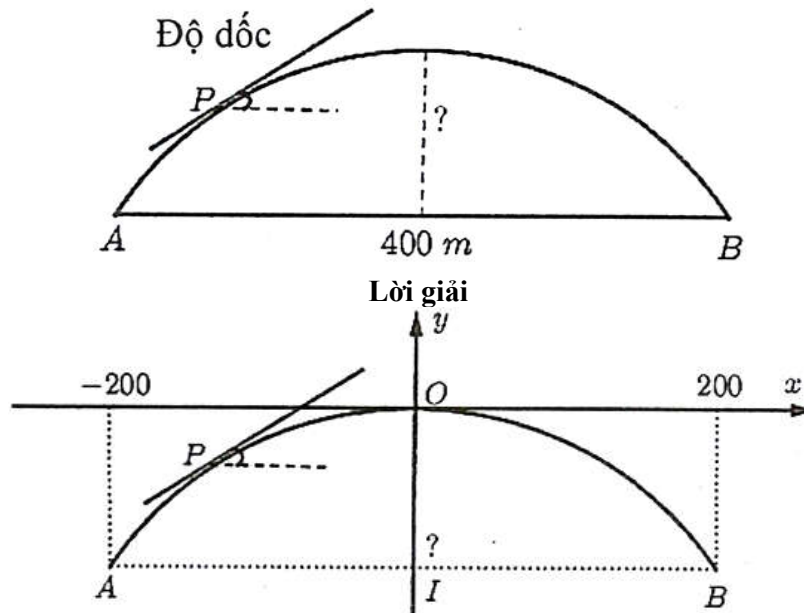
a) Số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm theo thể thức lãi kép với kì hạn 6 tháng là:

$$T = A \cdot \left(1 + \frac{r}{2}\right)^2 = 100(1 + 3,5\%)^2 = 107,123 \text{ (triệu đồng)}$$

b) Theo công thức lãi kép liên tục $T = A \cdot e^{rt}$, số tiền vốn và lãi người đó nhận được sau một năm là:

$$T = 100 \cdot e^{7\% \cdot 1} = 107,251 \text{ (triệu đồng)}$$

Câu 97. Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $400m$. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, sao cho đỉnh cầu là gốc tọa độ và mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $y = -ax^2$ (với a là hằng số dương).

Hệ số góc của tiếp tuyến của parabol bằng $k = y'(x_0) = -2ax_0, -200 \leq x_0 \leq 200$.

Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu (độ dốc dương) là $|k| = 2a|x| \leq 400a$.

Vì độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° nên ta có:

$$400a \leq \tan 10^\circ \Leftrightarrow a \leq \frac{4,408174518}{10000}.$$

Chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là đoạn OI , cũng chính là độ lớn của tung độ điểm B khi a đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Do đó, } OI = |-a \cdot 200^2| = 17,6(m).$$

Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là $17,6m$.

Câu 98. Anh Bình gửi tiết kiệm khoản tiền 50 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $6\%/năm$. Tính số tiền lãi (đơn vị đồng, làm tròn đến hàng đơn vị) mà anh Bình nhận được sau 1 năm, nếu tiền lãi được tính theo thể thức:

- a) Lãi kép với kì hạn 3 tháng;
b) Lãi kép liên tục.

Lời giải

a) Số tiền vốn và lãi anh Bình nhận được sau một năm theo thể thức lãi kép với kì hạn 3 tháng là:

$$T = A \left(1 + \frac{r}{4} \right)^4 = 50 \cdot 10^6 (1 + 1,5\%)^4 \approx 53068178 \text{ (đồng)}$$

Số tiền lãi anh Bình nhận được sau một năm gần bằng với:

$$53068178 - 50000000 = 3068178 \text{ (đồng)}$$

b) Theo công thức lãi kép liên tục $T = A \cdot e^{rt}$, số tiền vốn và lãi anh Bình nhận được sau một năm là

$$T = 50 \cdot 10^6 \cdot e^{6\% \cdot 1} \approx 53091827 \text{ (đồng)}.$$

Số tiền lãi anh Bình nhận được sau một năm gần bằng với:

$$53091827 - 50000000 = 3091827 \text{ (đồng)}$$

Câu 99. Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây và Q được tính theo Culông. Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4(s)$.

Lời giải

Ta có: $Q'(t) = (2t^2 + t)' = 4t + 1$ nên cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4(s)$ là $Q'(4) = 4 \cdot 4 + 1 = 17(C/s)$

Câu 100. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất, biết độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi phương trình $h(t) = 24,5t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

Lời giải

Khi vật chạm đất thì $h = 0 \Leftrightarrow 24,5t - 4,9t^2 = 0 \Rightarrow t = 5$.

Ta có: $v(t) = h'(t) = 24,5 - 9,8t$ nên tốc độ của vật tại thời điểm nó chạm đất $t = 5$ là

$$v(5) = |h'(5)| = |24,5 - 9,8 \cdot 5| = 24,5(m/s)$$

Câu 101. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3 \sin 2t + 2 \cos 2t$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của chất điểm trong t giây tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm đó khi $t = \frac{\pi}{4}$.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 3(\sin 2t)' + 2(\cos 2t)' = 6 \cos 2t - 4 \sin 2t$.

Và $s''(t) = 6(\cos 2t)' - 4(\sin 2t)' = -12 \sin 2t - 8 \cos 2t$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ là:

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = s''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -12 \left[\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] - 8 \left[\cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] = -12$$

Câu 102. Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Tìm:

a) Tốc độ và gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $16 m/s^2$.

c) Thời điểm t (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 7$ và $s''(t) = 6t - 6$.

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là: $v(2) = s'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 7 = 7(m/s)$.

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là: $a(2) = v'(2) = s''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6(m/s^2)$.

b) Vận tốc của chuyển động bằng $16 m/s^2$ tại thời điểm t nghĩa là:

$$v(t) = s'(t) = 16 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 7 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là: $a(3) = v'(3) = s''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12(m/s^2)$.

c) Vận tốc của chuyển động có phương trình $v(t) = 3t^2 - 6t + 7$ là một parabol, có đỉnh

$S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1; 4)$ và hệ số $a = 3 > 0$ nên hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $t = 1$.

Vậy tại thời điểm $t = 1$ thì vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4(m/s)$.

Câu 103. Dân số (tính theo nghìn người) của một thành phố được cho bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$, trong

đó t (được tính bằng năm) là khoảng thời gian kể từ năm 2015. Tìm tốc độ tăng dân số trong năm 2025 của thành phố đó.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thành phố đó (tính bằng nghìn người/năm), ta có:

$$f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}.$$

Từ năm 2015 đến năm 2025 nghĩa là $t = 10$.

Vậy tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 10$ là:

$$f'(10) = \frac{120}{(10+5)^2} = \frac{8}{15} \approx 0,533 \text{ (nghìn người/năm)}$$

Câu 104. Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức

$T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ ở thời điểm $t = 2$.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số T biểu thị tốc độ thay đổi của nhiệt độ.

Ta có: $T'(t) = -0,2t + 1,2$.

Vậy tốc độ thay đổi nhiệt độ tại thời điểm $t = 2$ là:

$$T'(2) = -0,2 \cdot 2 + 1,2 = 0,8 (^{\circ}F / \text{ngày}).$$

Câu 105. Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = 4 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)(m)$, với t là thời gian tính bằng

giây. Tính (làm tròn kết quả đến hàng phần ngàn):

a) Vận tốc của vật tại thời điểm khi $t = 5(s)$.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm khi $t = 5(s)$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = -8\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$ và $s''(t) = -16\pi^2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$.

a) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5(s)$ là:

$$s'(5) = -8\pi \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{12}\right) \approx 6,505(m/s).$$

b) Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 5(s)$ là:

$$s''(5) = -16\pi^2 \cos\left(10\pi - \frac{\pi}{12}\right) \approx -152,533(m/s^2)$$

Câu 106. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương

trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 4(cm)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tìm thời điểm mà

vận tốc tức thời của con lắc bằng $0(cm/s)$.

Lời giải

Ta có: $v(t) = x' = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right)$.

Thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 nghĩa là $v(t) = 0$

$$\Leftrightarrow -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi t - \frac{2\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} + k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy các thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 là:

$$t = \frac{2}{3} + k (k \in \mathbb{Z})(s)$$

Câu 107. Cân nặng trung bình của một em bé trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,00076t^3 - 0,06t^2 + 1,8t + 8,2$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound. Tính tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi.

Lời giải

$$\text{Ta có: } w'(t) = \frac{57}{25000}t^2 - \frac{3}{25}t + 1,8.$$

Tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi là:

$$w'(15) = \frac{57}{25000} \cdot 15^2 - \frac{3}{25} \cdot 15 + 1,8 = 0,513 \text{ (pound/tháng)}$$

Câu 108. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C) . Tìm hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) .

Lời giải

Gọi điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ là tọa độ tiếp điểm và $y' = -3x^2 + 6x + 9$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là $y'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 + 9$.

Ta thấy, hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là một hàm số có đồ thị là một parabol, có đỉnh

$$S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1; 12) \text{ và hệ số } a = -3 < 0 \text{ nên hàm số có giá trị lớn nhất bằng 12 tại } x_0 = 1.$$

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến là $y'(1) = 12$

Câu 109. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

a) Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.

b) Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 1$ giây và $t = 3$ giây.

c) Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

Lời giải

$$\text{Ta có } v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9 \text{ và } a(t) = s''(t) = 6t - 12.$$

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giây là: $v(2) = s'(2) = -3(m/s)$.

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là: $v(4) = s'(4) = 9(m/s)$.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 1$ giây là: $a(1) = s''(1) = -6(m/s^2)$.

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ giây là: $a(3) = s''(3) = 6(m/s^2)$.

c) Xét trong 5 giây đầu tiên, tức là $t \in (0; 5)$.

Biểu thức vận tốc có dạng tam thức bậc hai với hệ số $a = 3 > 0$ và có hai nghiệm

$$\text{Mặt khác, biểu thức gia tốc là đa thức bậc nhất nên } \begin{cases} a(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (2; 5) \\ a(t) < 0 \Leftrightarrow t \in (0; 2) \end{cases}.$$

Lại có khi vật tăng tốc ứng với $a.v > 0$ và khi vật giảm tốc ứng với $a.v < 0$, Vậy vật tăng tốc trong hai khoảng $t \in (1; 2), t \in (3; 5)$ và vật giảm tốc trong hai khoảng $t \in (0; 1), t \in (2; 3)$.

Nguyễn Bảo Vương

- **BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11**
- |FanPage: **Nguyễn Bảo Vương**

LUY THUA VS SO MU THUC

a) Khối lượng của Trái Đất khoảng 5980000000000000000000 kg;
b) Khối lượng của hạt proton khoảng 0,000 00000000000000000000167262 kg.
(Theo Vật lí 12, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020)

Câu 3. Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau: $A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^N$. Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

a) Ở một vùng biển cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng 95% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Tìm giá trị của hằng số a .

b) Tại độ sâu 15 m ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Facebook **Nguyễn Vương** <https://www.facebook.com/phong.baovuong> Trang 1

Câu 7. Chu kì dao động (tính bằng giây) của một con lắc có chiều dài L (tính bằng mét) được cho bởi

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}.$$

Nếu một con lắc có chiều dài $19,6m$, hãy tính chu kì T của con lắc này (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 8. Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương của chu kì quỹ đạo p (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tinh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo là một đường elip với Mặt Trời nằm ở một tiêu điểm) bằng lập phương của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU).

a) Tính p theo d .

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 9. Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất).

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008).

a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hoả là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là bao nhiêu?

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày).

(Kết quả của câu a và câu b tính theo đơn vị triệu dặm và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 10. Trong mẫu của một sinh vật đã chết T năm, tỉ số R của carbon phóng xạ còn lại và carbon không phóng xạ còn lại có thể được ước tính bằng công thức $R = A \cdot (2,7)^{-\frac{T}{8033}}$. Trong đó A là tỉ số của carbon phóng xạ và carbon không phóng xạ trong cơ thể sống (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Tính tỉ số $\frac{R}{A}$ trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 2000 năm; sau 8000 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 11. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hoả quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Câu 12. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hoả quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Câu 13. Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

Câu 14. Trong khoa học, người ta thường phải ghi các số rất lớn hoặc rất bé. Để tránh phải viết và đếm quá nhiều chữ số 0, người ta quy ước cách ghi các số dưới dạng $A \cdot 10^m$, trong đó $1 \leq A \leq 10$ và m là số nguyên.

Khi một số được ghi dưới dạng này, ta nói nó được ghi dưới dạng kí hiệu khoa học.

Chẳng hạn, khoảng cách 149600000 km từ Trái Đất đến Mặt Trời được ghi dưới dạng kí hiệu khoa học là $1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$.

Ghi các đại lượng sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

- [illegible]

Câu 15. Tại một vùng biển, giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.



Hình 2

- a) Tại độ sâu $1m$, cường độ ánh sáng gấp bao nhiêu lần I_0 ?
- b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $2m$ gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu $10m$? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.

Câu 16. Với một chi vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng $1m^2$ và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7} m$. Đồng xu 5000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3} m$. Cần chõng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

Câu 17. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

- a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.
b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

Câu 18. Cường độ ánh sáng tại độ sâu $h(m)$ dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h = I_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{h}{4}}$,

trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

- a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?
b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $3m$ gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu $6m$?

Câu 19. Giả sử số tiền gốc là A , lãi suất là $r\%$ / kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm) thì tổng số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n$. Bà Hạnh gửi 100 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8% / năm. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

Câu 20. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

Câu 21. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 8%/ năm. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo.

Số tiền người đó nhận sau n năm sẽ được tính theo công thức $T_n = 100(1+r)^n$ (triệu đồng), trong đó $r(\%)$ là lãi suất và n là số năm gửi tiền.

a) Hỏi sau 5 năm gửi tiền ở ngân hàng, người đó thu về số tiền bao nhiêu?

b) Hỏi số tiền lãi thu được của người đó sau 10 năm là bao nhiêu?

(Các kết quả trong bài được tính chính xác đến hàng phần trăm)

Câu 22. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5 m^3$. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây lấy gỗ trong khu rừng này là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm không khai thác, khu rừng sẽ có số mét khối gỗ là bao nhiêu?

Câu 23. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau 10 phút thì số lượng vi khuẩn A là bao nhiêu?

LOGART

Câu 24. Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng, với lãi suất không đổi là 6% một năm. Khi đó sau n năm gửi thì tổng số tiền bác An thu được (cả vốn lẫn lãi) cho bởi công thức sau:

$$A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n \text{ (triệu đồng)}.$$

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, tổng số tiền bác An thu được là không dưới 150 triệu đồng?

Câu 25. Cô Hương gửi tiết kiệm 100 triệu đồng với lãi suất 6% một năm.

a) Tính số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm, nếu lãi suất được tính theo một trong các thể thức sau:

- Lãi kép kì hạn 12 tháng;
- Lãi kép kì hạn 1 tháng;
- Lãi kép liên tục.

b) Tính thời gian cần thiết để cô Hương thu được số tiền (cả vốn lẫn lãi) là 150 triệu đồng nếu gửi theo thể thức lãi kép liên tục (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 26. Độ pH của một dung dịch hoá học được tính theo công thức: $pH = -\log[H^+]$, trong đó

$[H^+]$ là nồng độ (tính theo mol/lít) của các ion hydrogen. Giá trị pH nằm trong khoảng từ 0 đến 14. Nếu $pH < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $pH > 7$ thì dung dịch có tính base, còn nếu $pH = 7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng $0,01 \text{ mol/l}$.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ pH bằng 7,4.

Câu 27. Biết thời gian cần thiết (tính theo năm) để tăng gấp đôi số tiền đầu tư theo thể thức lãi kép liên tục với lãi suất không đổi r mỗi năm được cho bởi công thức sau: $t = \frac{\ln 2}{r}$. Tính thời gian cần thiết để tăng gấp đôi một khoản đầu tư khi lãi suất là 6% mỗi năm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Câu 28. Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là $a = 15500(5 - \log p)$ trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal).

Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao khoảng 8850 m so với mực nước biển.

Câu 29. Mức cường độ âm L đo bằng deciben (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau: $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$ trong đó $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ là cường độ

âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là ngưỡng nghe).

Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

- Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} \text{ W / m}^2$.
- Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} \text{ W / m}^2$.

Câu 30. Trong Hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen tính bằng mol/lít. Nếu $pH < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $pH > 7$ thì dung dịch có tính base và nếu $pH = 7$ thì dung dịch là trung tính.

- Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng $0,001 \text{ mol / l}$.
- Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ pH bằng 8.
- Khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen của dung dịch thay đổi thế nào?

Câu 31. Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương N viết trong hệ thập phân được cho bởi công thức $[\log N] + 1$, ở đó $[\log N]$ là phần nguyên của số thực dương $\log N$. Tìm số các chữ số của 2^{2023} khi viết trong hệ thập phân.

Câu 32. Khi gửi tiết kiệm P (đồng) theo thể thức trả lãi kép định kì với lãi suất mỗi kì là r (r cho dưới dạng số thập phân) thì số tiền A (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau t kì gửi là $A = P(1+r)^t$ (đồng). Tính thời gian gửi tiết kiệm cần thiết để số tiền ban đầu tăng gấp đôi.

Câu 33. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau bao lâu người đó nhận được ít nhất 120 triệu đồng?

Câu 34. Nồng độ cồn trong máu (BAC) là chỉ số dùng để đo lượng cồn trong máu của một người. Chẳng hạn, BAC 0,02% hay $0,2 \text{ mg / ml}$, nghĩa là có 0,02 g cồn trong 100ml máu. Nếu một người với BAC bằng 0,02% có nguy cơ bị tai nạn ô tô cao gấp 1,4 lần so với một người không uống rượu, thì nguy cơ tương đối của tai nạn với BAC 0,02% là 1,4. Nghiên cứu y tế gần đây cho thấy rằng nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn khi đang lái ô tô có thể được mô hình hoá bằng một phương trình có dạng

$$R = e^{kx},$$

trong đó $x(\%)$ là nồng độ cồn trong máu và k là một hằng số.

- Nghiên cứu chỉ ra rằng nguy cơ tương đối của một người bị tai nạn với BAC bằng 0,02% là 1,4. Tìm hằng số k trong phương trình.
- Nguy cơ tương đối là bao nhiêu nếu nồng độ cồn trong máu là 0,17% ?
- Tìm BAC tương ứng với nguy cơ tương đối là 100.
- Giả sử nếu một người có nguy cơ tương đối từ 5 trở lên sẽ không được phép lái xe, thì một người có nồng độ cồn trong máu từ bao nhiêu trở lên sẽ không được phép lái xe?

Câu 35. Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

Câu 36. Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (Nguồn: Câu hỏi và bài tập vi sinh học, NXB ĐHSP, 2008). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6 \cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 37. Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong

khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ (mol/L) trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết $pH = -\log[H^+]$.

Câu 38. Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ của $^{14}_6C$ có trong mẫu vật tại thời điểm t (năm) (so với thời điểm ban đầu $t = 0$), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ $H = H_0 e^{-\lambda t}$ (đơn vị là Becquerel, kí hiệu Bq) với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ, $T = 5730$ (năm) (Nguồn: Vật lí 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2014). Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là 0,215 Bq. Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là 0,250 Bq. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 39. Trong hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydrogen) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là $0,0001 \text{ mol/L}$. Dung dịch này có tính acid, kiềm hay trung tính?

b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B . Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

Câu 40. a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L . Tính độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Câu 41. Độ pH của một dung dịch hoá học được tính theo công thức:

$pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ (tính theo mol/lít) của các ion hydrogen. Giá trị pH nằm trong khoảng từ 0 đến 14. Nếu $pH < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $pH > 7$ thì dung dịch có tính base, còn nếu $pH = 7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng $0,001 \text{ mol/lit}$.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ $pH = 7,5$.

Câu 42. Dung dịch A có nồng độ H^+ là $0,00001 \text{ mol/L}$ và dung dịch B có nồng độ H^+ là $0,00000001 \text{ mol/L}$.

a) Tìm độ pH của mỗi dung dịch trên. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn?

b) Dung dịch nào có tính kiềm, dung dịch nào có tính acid?

Câu 43. Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây, các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và giả sử tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

Câu 44. a) Hãy tính độ pH của bia và rượu biết rằng nồng độ H^+ của bia và rượu theo thứ tự là 0,00008 và 0,0004.

b) Cho ba dung dịch A, B, C có nồng độ H^+ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Chứng minh rằng độ pH của ba dung dịch A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm công sai của cấp số cộng đó.

Câu 45. Cường độ một trận động đất M (độ Richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỉ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, một trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ rung chấn mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)?

HAM SỐ MŨ – KLOGARIT

Câu 46. Sự tăng trưởng dân số được ước tính theo công thức tăng trưởng mũ sau:

$A = Pe^{rt}$, trong đó P là dân số của năm lấy làm mốc, A là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào năm 2020, dân số Việt Nam khoảng 97,34 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là 0,91% (theo danso.org). Nếu tỉ lệ tăng dân số này giữ nguyên, hãy ước tính dân số Việt Nam vào năm 2050.

Câu 47. Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0,015t}$.

- Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$.
- Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

Câu 48. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1)$, $0 \leq t \leq 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Câu 49. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$$

trong đó m_0 là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm ban đầu $t = 0$, $m(t)$ là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kì bán rã (là thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết rằng đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã khoảng 9 giờ. Từ khối lượng plutonium-234 ban đầu là 100g, hãy tính khối lượng plutonium-234 còn lại sau:

- 9 giờ;
 - 1 ngày.
- (Kết quả tính theo gam và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 50. Nếu một ô kính ngăn khoảng 3% ánh sáng truyền qua nó thì phần trăm ánh sáng p truyền qua n ô kính liên tiếp được cho gần đúng bởi hàm số sau:

$$p(n) = 100 \cdot (0,97)^n.$$

- Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 10 ô kính?
 - Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 25 ô kính?
- (Kết quả ở câu a và câu b được làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 51. Số tiền ban đầu 120 triệu đồng được gửi tiết kiệm với lãi suất năm không đổi là 6%. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) thu được sau 5 năm nếu nó được tính lãi kép:

- hàng quý;
- hàng tháng;
- liên tục.

(Kết quả được tính theo đơn vị triệu đồng và làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Câu 52. Chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức:

$$m = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}.$$

- a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?
b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

Câu 53. Trong Vật lí, mức cường độ âm (tính bằng deciben, kí hiệu là dB) được tính bởi công thức

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}, \text{ trong đó } I \text{ là cường độ âm tính theo } W/m^2 \text{ và } I_0 = 10^{-12} W/m^2 \text{ là cường độ âm chuẩn, tức}$$

là cường độ âm thấp nhất mà tai người có thể nghe được.

- a) Tính mức cường độ âm của một cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm là $10^{-7} W/m^2$.
b) Khi cường độ âm tăng lên 1000 lần thì mức cường độ âm (đại lượng đặc trưng cho độ to nhỏ của âm) thay đổi thế nào?

Câu 54. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong

đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã là 138 ngày (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 55. Lốc xoáy là hiện tượng một luồng không khí xoáy tròn mở rộng ra từ một đám mây dông xuống tới mặt đất (Hình 10). Các cơn lốc xoáy thường có sức tàn phá rất lớn. Tốc độ S (dặm/giờ) của gió gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93 \log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy di chuyển được.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Hãy tính tốc độ của gió ở gần tâm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường là:

- a) 5 dặm;
b) 10 dặm.



Hình 10

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Câu 56. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A.e^{rt}$, trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số là 0,93%/năm (Nguồn: <https://danso.org/viet-nam>). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 57. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là

tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 58. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $pH = -\log[H^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[H^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau: Mẫu 1: $[H^+] = 8 \cdot 10^{-7}$; Mẫu 2: $[H^+] = 2 \cdot 10^{-9}$.

Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

Câu 59. Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6% / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right).$$

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 60. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 61. Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6% / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right).$$

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 62. Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của $^{14}_6C$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử $^{14}_6C$ giảm đi một nửa.

a) Gọi m_0 là khối lượng của $^{14}_6C$ tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của $^{14}_6C$ tại thời điểm t (năm).

b) Một cây còn sống có lượng $^{14}_6C$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng $^{14}_6C$ trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng $^{14}_6C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 63. Mức cường độ âm $L(dB)$ được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó $I(W/m^2)$ là cường

độ âm. Tai người có thể nghe được âm có cường độ âm từ $10^{-12} W/m^2$ đến $10 W/m^2$. Tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được.

Câu 64. Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số 1,05% / năm (nguồn: <https://www.worldmeters.info/world-population>). Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức:

$P(t) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^t$ (tỉ người) (*). Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và vào năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7).

Câu 65. Khối lượng vi khuẩn của một mẻ nuôi cấy sau t giờ kể từ thời điểm ban đầu được cho bởi công thức $M(t) = 50.1,06^t$ (g).

(Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 101)

- Tìm khối lượng vi khuẩn tại thời điểm bắt đầu nuôi cấy (gọi là khối lượng ban đầu).
- Tính khối lượng vi khuẩn sau 2 giờ và sau 10 giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Khối lượng vi khuẩn tăng dần hay giảm dần theo thời gian? Tại sao?

Câu 66. Trong âm học, mức cường độ âm được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ (dB) là đơn vị mức

cường độ âm, đọc là đêxiben), trong đó I là cường độ âm tính theo W / m^2 và $I_0 = 10^{-12} W / m^2$ là cường độ âm chuẩn (cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được).

(Nguồn: Vật lý 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52,53)

- Mức cường độ âm L thấp nhất mà tai người có thể nghe được là bao nhiêu?
- Cuộc trò chuyện có cường độ âm $10^{-9} W / m^2$ thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
- Cường độ âm tại một khu văn phòng nằm trong miền từ $10^{-7} W / m^2$ đến $5 \cdot 10^{-6} W / m^2$ (tức là $10^{-7} \leq I \leq 5 \cdot 10^{-6}$). Mức cường độ âm tại khu văn phòng này nằm trong khoảng nào? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Câu 67. Mức cường độ âm được tính theo công thức như ở Ví dụ 6.

- Tiếng thì thầm có cường độ âm $I = 10^{-10} W / m^2$ thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
- Để nghe trong thời gian dài mà không gây hại cho tai, âm thanh phải có cường độ không vượt quá 100000 lần cường độ của tiếng thì thầm. Âm thanh không gây hại cho tai khi nghe trong thời gian dài phải ở mức cường độ âm như thế nào?

Câu 68. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số ($a > 0$) và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: <https://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

- Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.
- Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .
- Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Câu 69. Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển

của một vị trí trong không trung (tính bằng kilômét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa - đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: <https://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6>)

- Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?
- Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Câu 70. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t (mg)$, trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

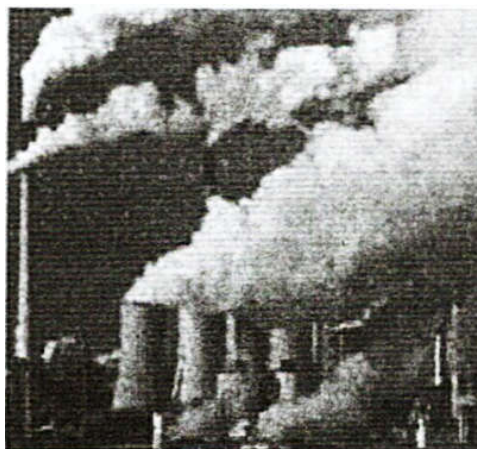
a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$?

b) Biết rằng bệnh nhân đã uống $100mg$ thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn $80mg$. Hãy xác định giá trị của D_0 và a .

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

Câu 71. Ông Quý dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất $6,5\%$ một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Quý gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

Câu 72. Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái Đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế Thế giới), khi nhiệt độ Trái Đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái Đất tăng thêm $2^\circ C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3% ; còn khi nhiệt độ Trái Đất tăng thêm $5^\circ C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10% . Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái Đất tăng thêm $t^\circ C$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k \cdot a^t$, trong đó k, a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái Đất tăng thêm bao nhiêu $^\circ C$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20% ?



Câu 73. Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau ba năm thì ông An được tăng lương 40% . Hỏi sau tròn 20 năm đi làm, tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

Câu 74. Dân số thế giới được tính theo công thức $S = A \cdot e^{nr}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Cho biết năm 2005 Việt Nam có khoảng 80902400 người và tỉ lệ tăng dân số là $1,47\%$ một năm. Như vậy, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi thì tối thiểu đến năm bao nhiêu dân của Việt Nam có khoảng 93713000 người?

Câu 75. Người ta phân tích nồng độ H^+ của hai loại dung dịch A và B thì biết rằng dung dịch A có nồng độ H^+ lớn hơn nồng độ H^+ của dung dịch B . Hỏi độ pH của dung dịch nào lớn hơn?

Câu 76. Trong vật lí, sự phân rã các chất phóng xạ được cho bởi công thức:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$$
 Trong đó, m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kì bán rã.

Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã 138 ngày. Giả sử lúc đầu có 100 Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến phần nghìn).

Câu 77. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức:

$$M(t) = 75 - 20\ln(t+1), 0 \leq t \leq 12 \text{ (đơn vị: \%)}$$

a) Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

b) Đến tháng thứ mấy thì nhóm học sinh đó nhớ được khoảng một nửa danh sách các loài động vật đã xem?

PHUONG TRINH -BPT

Câu 78. Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hoá bằng công thức: $V(t) = 780 \cdot (0,905)^t$. Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc ô tô đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 79. Áp suất khí quyển p (tính bằng kilôpascal, viết tắt là kPa) ở độ cao h (so với mực nước biển,

tính bằng km) được tính theo công thức sau: $\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7}$

(Theo britannica.com)

a) Tính áp suất khí quyển ở độ cao 4 km.

b) Ở độ cao trên 10 km thì áp suất khí quyển sẽ như thế nào?

Câu 80. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm

là: $A = 500 \cdot (1 + 0,075)^n$ (triệu đồng).

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Câu 81. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N(t) = 500e^{0,4t}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con?

Câu 82. Giả sử nhiệt độ $T(^{\circ}C)$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 25 + 70e^{-0,5t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}C$?

Câu 83. Tính nồng độ ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

Câu 84. Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ

còn giá trị là $A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$.

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?

b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là bao nhiêu?

c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

Câu 85. Giả sử quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có: $N(t) = N_0 e^{rt}$, trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ.

Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi:

- Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là khoảng bao nhiêu con?
- Sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi?

Câu 86. Vào năm 1938, nhà vật lí Frank Benford đã đưa ra một phương pháp để xác định xem một bộ số đã được chọn ngẫu nhiên hay đã được chọn theo cách thủ công. Nếu bộ số này không được chọn ngẫu nhiên thì công thức Benford sau sẽ được dùng ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của bộ số đó:

$$P = \log \frac{d+1}{d}.$$

Chẳng hạn, xác suất để chữ số đầu tiên là 9 bằng khoảng 4,6% (thay $d = 9$ trong công thức Benford để tính P).

- Viết công thức tìm chữ số d nếu cho trước xác suất P .
- Tìm chữ số có xác suất bằng 9,7% được chọn.
- Tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1.

Câu 87. Dân số thế giới năm 2020 là khoảng 7,79 tỉ người và tăng với tốc độ khoảng 1,05% mỗi năm (theo danso.org). Giả sử tốc độ tăng này không đổi. Khi đó mô hình $P(t) = 7,79 \cdot (1,0105)^{t-2020}$ có thể dùng để ước tính dân số thế giới (theo đơn vị tỉ người) vào năm t .

- Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người?
- Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 10 tỉ người?

Câu 88. Áp suất khí quyển p lên một vật giảm khi độ cao tăng dần. Giả sử áp suất này (tính bằng milimét thủy ngân) được biểu diễn theo độ cao h (tính bằng kilômét) so với mực nước biển bằng công thức $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h}$.

- Một máy bay đang chịu áp suất khí quyển 320 mmHg. Tìm độ cao của máy bay đó.
- Một người đứng trên đỉnh của một ngọn núi và chịu áp suất khí quyển 667 mmHg. Tìm chiều cao của ngọn núi này.

Câu 89. Giả sử giá trị còn lại V (triệu đồng) của một chiếc ô tô nào đó sau t năm được cho bằng công thức $V(t) = 730 \cdot (0,82)^t$.

- Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng?
 - Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng?
- (Kết quả của câu a và câu b được tính tròn năm).

Câu 90. Giả sử tổng chi phí hoạt động (đơn vị tỉ đồng) trong một năm của một công ty được tính bằng công thức $C(t) = 90 - 50e^{-t}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm kể từ khi công ty được thành lập. Tính chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

Câu 91. Nhắc lại rằng độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $pH = -\log[H^+]$, ở đó $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen của dung dịch tính bằng mol/lít. Biết rằng máu của người bình thường có độ pH từ 7,30 đến 7,45. Hỏi nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn nào?

Câu 92. Nhắc lại rằng mức cường độ âm (đo bằng dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, trong đó I

là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

- Tính cường độ âm của âm thanh tàu điện ngầm có mức cường độ âm là 100 dB.

b) Âm thanh trên một tuyến đường giao thông có mức cường độ âm thay đổi từ 70 dB đến 85 dB. Hỏi cường độ âm thay đổi trong đoạn nào?

Câu 93. Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình hằng năm là 4% thì chi phí C cho việc mua một loại hàng hoá hoặc sử dụng một dịch vụ nào đó sẽ được mô hình hoá bằng công thức: $C(t) = P(1 + 0,04)^t$,

trong đó t là thời gian (tính bằng năm) kể từ thời điểm hiện tại và P là chi phí hiện tại cho hàng hoá hoặc dịch vụ đó. Giả sử hiện tại chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô là 800 nghìn đồng. Hãy ước tính chi phí cho mỗi lần thay dầu ô tô sau 5 năm nữa (kết quả tính theo đơn vị nghìn đồng và làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 94. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu m_0 được cho bởi

công thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu kỳ bán rã của chất

đó. Biết rằng chất phóng xạ polonium-210 có chu kỳ bán rã là 138 ngày. Từ khối lượng polonium-210 ban đầu 100g, sau bao lâu khối lượng còn lại là:

a) 50g ?

b) 10g ?

(Kết quả tính theo ngày và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 95. Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian (tính bằng cent) giữa hai nốt nhạc có tần số

a và b là $n = 1200 \cdot \log_2 \frac{a}{b}$

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008)

a) Tìm khoảng thời gian tính bằng cent khi tần số thay đổi từ 443 Hz về 415 Hz.

b) Giả sử khoảng thời gian là 55 cent và tần số đầu là 225 Hz, hãy tìm tần số cuối cùng.

Câu 96. Dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là $A = 98564407$ người.

(Nguồn: <https://danso.org/viet-nam>)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Việt Nam là $r = 0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2021) ước tính theo công thức: $S = A \cdot e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số Việt Nam vượt quá 110 triệu người?

Câu 97. Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị:

W / m^2) là cường độ âm (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Mức cường độ âm ở một khu dân cư được quy định là dưới 60 dB. Hỏi cường độ âm ở khu vực đó phải dưới bao nhiêu W / m^2 ?

Câu 98. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là $x\%$ /năm ($x > 0$). Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x , biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Câu 99. Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở Ví dụ 14, hãy tính cường độ âm mà tai người có thể chịu đựng được, biết rằng giá trị cực đại của mức cường độ âm mà tai người có thể chịu đựng được là 130 dB.

Câu 100. Trong một trận động đất, năng lượng giải toả E (đơn vị: Jun, kí hiệu J) tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức: $\log E \approx 11,4 + 1,5M$.

(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021)

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter.

b) Năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng bao nhiêu lần năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter?

Câu 101. Trong cây cối có chất phóng xạ ^{14}C . Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ của nó bằng 86% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết

chu kỳ bán rã của $^{14}_6C$ là $T = 5730$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t được cho bởi công

thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ

(Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021).

Câu 102. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kỳ hạn là 12 tháng với lãi suất là 6% / năm. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm? Biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Câu 103. Độ pH của đất thích hợp cho trồng hoa hồng là từ 6,5 đến 7. Tính nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ của đất để thích hợp cho trồng hoa hồng.

Câu 104. Người ta nuôi cấy vi khuẩn *Bacillus subtilis* trong nồi lên men và thu được số liệu sau: Lúc ban đầu, số tế bào /1ml dịch nuôi là $2 \cdot 10^2$. Sau 13 giờ, số tế bào / 1ml dịch nuôi là $3,33 \cdot 10^9$. Biết vi khuẩn *Bacillus subtilis* sinh trưởng trong điều kiện hoàn toàn tối ưu và sinh sản theo hình thức tự nhân đôi. Hỏi sau bao nhiêu phút, vi khuẩn *Bacillus subtilis* tự nhân đôi một lần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 105. Tốc độ của gió S (dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93 \log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy đó đi chuyển được.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Tính quãng đường cơn lốc xoáy đã đi chuyển được, biết tốc độ của gió ở gần tâm bằng 140 dặm/giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 106. Dân số thành phố Hà Nội năm 2022 khoảng 8,4 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Hà Nội không đổi và bằng $r = 1,04\%$. Biết rằng, sau t năm dân số Hà Nội (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức: $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số của Hà Nội vượt quá 10 triệu người?

Câu 107. Mức cường độ âm $L(dB)$ được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó $I (W / m^2)$ là cường độ âm. Để đảm bảo sức khỏe cho công nhân, mức cường độ âm trong một nhà máy phải giữ sao cho không vượt quá 85dB. Hỏi cường độ âm của nhà máy đó phải thỏa mãn điều kiện nào để đảm bảo sức khỏe cho công nhân?

Câu 108. Số lượng của một loài vi khuẩn sau x giờ được tính bởi công thức $f(x) = Ae^{rx}$, trong đó, A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$). Biết số vi khuẩn ban đầu là 1000 con và sau 10 giờ tăng trưởng thành 5000 con.

- Tính tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn.
- Hỏi sau khoảng bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng vi khuẩn ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 109. Với nước biển có nồng độ muối 30%, nhiệt độ $T(^{\circ}C)$ của nước biển được tính bởi công thức $T = 7,9 \ln(1,0245 - d) + 61,84$, ở đó $d (g / cm^3)$ là khối lượng riêng của nước biển.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết vùng biển khơi mặt ở một khu vực có nồng độ muối 30% và nhiệt độ là $8^{\circ}C$. Tính khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó (làm tròn kết quả đến hàng phần chục nghìn).

Câu 110. Cường độ của một trận động đất, kí hiệu là M (độ Richter), được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, ở đó A là biên độ rung chấn tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số phụ thuộc vào từng khu vực)

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org/wiki/Độ_Richter)

Vào hồi 12 giờ 14 phút trưa ngày 27/07/2020, tại khu vực huyện Mộc Châu, Sơn La xảy ra trận động đất thứ nhất với cường độ 5,3 độ Richter. Trong vòng 20 tiếng đồng hồ, Sơn La đã xảy ra liên tiếp 7 trận động đất. Đến 8 giờ 26 phút sáng 28/07/2020, trận động đất thứ bảy xảy ra với cường độ 4 độ Richter.

(Nguồn: <https://plo.vn/7-tran-dong-dat-lien-tiep-o-son-la-trong-vong-20-tieng-dong-ho-post585443.html>)

Biết rằng biên độ chuẩn được dùng cho cả tỉnh Sơn La. Hỏi biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng mấy lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 111. Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là $M_0(g)$ thì khối lượng carbon-14 còn

lại (tính theo gam) sau t năm được tính theo công thức $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ (g), trong đó $T = 5730$ (năm) là

chu kỳ bán rã của carbon-14. Nghiên cứu hoá thạch của một sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong hoá thạch là $5 \cdot 10^{-13} g$. Nhờ biết tỉ lệ khối lượng của carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể sinh vật sống, người ta xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể lúc sinh vật chết là $M_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}(g)$. Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (Làm tròn kết quả đến hàng trăm.)

Câu 112. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là

$M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu kỳ bán rã của chất. Đồng vị

plutonium-234 có chu kỳ bán rã là 9 giờ.

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Plutonium/#section=AtomicMass-Half-Life-and-Decay>)
Từ khối lượng ban đầu 200 g, sau bao lâu thì khối lượng plutonium-234 còn lại là:

- a) 100 g ?
- b) 50 g ?
- c) 20 g ?

Câu 113. Nước chanh có độ pH bằng 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 114. Nước uống đạt tiêu chuẩn phải có độ pH nằm trong khoảng từ 6,5 đến 8,5 (theo Quy chuẩn Việt Nam QCVN 01:2009/BYT). Nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng nào?

Câu 115. Chất phóng xạ polonium-210 có chu kỳ bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng

polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}}$ (g).

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium/#section=AtomicMass-Half-Life-and-Decay>)

- a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?
- b) Sau bao lâu thì còn lại 40 g polonium-210?

Câu 116. Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) (dB)$, trong đó I là

cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

(Nguồn: Vật lý 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

- a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học có mức cường độ âm là 50 dB. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?
- b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ 75 dB đến 90 dB. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

Câu 117. Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1000 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện ra số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày.

- a) Công thức $P(t) = P_0 \cdot a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Xác định các tham số P_0 và a ($a > 0$). Làm tròn a đến hàng phần trăm.
- b) Sau 5 ngày thì số lượng vi khuẩn bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng trăm.
- c) Sau bao nhiêu ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 118. Nhắc lại rằng, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L . Nồng độ H^+ trong dung dịch cho biết độ acid của dung dịch đó.

- a) Dung dịch acid A có độ pH bằng 1,9; dung dịch $acidB$ có độ pH bằng 2,5. Dung dịch nào có độ acid cao hơn và cao hơn bao nhiêu lần?
- b) Nước cất có nồng độ H^+ là $10^{-7} mol/L$. Nước chảy ra từ một vòi nước có độ pH từ 6,5 đến 6,7 thì có độ acid cao hay thấp hơn nước cất?

Câu 119. Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kỳ bán rã là $T = 703800000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng

Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng Uranium-235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

Câu 120. Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililit nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 9000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 6000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1000?

Câu 121. Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L . Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A ?

Câu 122. Công thức $M = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ cho biết khối lượng của một chất phóng xạ sau thời gian t kể từ thời điểm nào đó (gọi là thời điểm ban đầu), M_0 là khối lượng ban đầu, T là chu kỳ bán rã của chất phóng xạ đó (cứ sau mỗi chu kỳ, khối lượng của chất phóng xạ giảm đi một nửa). Trong một phòng thí nghiệm, với khối lượng 200 g radon ban đầu, sau 16 ngày, chỉ còn lại 11 g. Chu kỳ bán rã của radon bằng bao nhiêu?

Câu 123. Công thức $\log x = 11,8 + 1,5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng x tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương 10^{-7} jun) với độ lớn M theo thang Richter của một trận động đất.

- a) Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp bao nhiêu lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter?
- b) Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng nào?

Câu 124. Dân số ở một địa phương được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{r \cdot t}$, trong đó A không đổi là dân số của năm 2023, S là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Hỏi đến năm nào thì dân số ở địa phương đó sẽ đạt gấp đôi dân số năm 2023? Biết $r = 1,13\%/năm$.

Câu 125. Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hoá bằng công thức: $V(t) = A \cdot (0,905)^t$, trong đó A là giá xe (tính theo triệu đồng) lúc mới mua. Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Biết $A = 780$ (triệu đồng).

Câu 126. Anh Hưng gửi tiết kiệm khoản tiền 700 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm theo hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để anh Hưng thu được ít nhất 1 tỉ đồng (cả vốn lẫn lãi). Cho biết công thức lãi kép là $T = A \cdot (1+r)^n$, trong đó A là tiền vốn, T là tiền vốn và lãi nhận được sau n năm, r là lãi suất/năm.

Câu 127. Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm. Mức cường độ âm ở một khu dân cư được quy định là dưới $60 dB$. Hỏi cường độ âm của khu vực đó phải dưới bao nhiêu W/m^2 ?

Câu 128. Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 6 giờ có 2000 con. Hỏi ít nhất bao nhiêu giờ, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con?

Câu 129. Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là:

$$A = P \left(1 - \frac{r}{100} \right)^n$$

- a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?
b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau ba năm chỉ còn lại 80 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của ba năm đó là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?
c) Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là 6% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

Câu 130. Dân số nước ta năm 2022 ước tính là 99200000 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta không đổi là $r = 0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số nước ta vượt 120 triệu người?

Câu 131. Một người gửi tiết kiệm 10 tỉ đồng theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng với lãi suất 7% một năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng?

Câu 132. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, bác Thảo đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng số tiền là 500 triệu đồng với lãi suất $r < 0$ cho kỳ hạn một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi năm trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho năm sau (theo thể thức lãi kép). Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác đã thanh toán hợp đồng ngân hàng với số tiền là 599823000 đồng. Hỏi bác Thảo đã vay ngân hàng với lãi suất r là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Câu 133. Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức mũ như sau

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}} \right), \text{ với } t \text{ là khoảng thời gian tính bằng giờ và } Q_0 \text{ là dung lượng nạp tối đa. Hãy tính thời}$$

gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn pin cho đến khi điện thoại đạt được 80% dung lượng pin tối đa (làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 134. Giả sử nhiệt độ $T(^{\circ}C)$ của một vật giảm dần theo thời gian được cho bởi công thức:

$$T = 25 + 70 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}, \text{ trong đó thời gian } t \text{ được tính bằng phút.}$$

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}C$ (làm tròn đến hàng phần chục)?

Câu 135. Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right), \text{ trong đó } I \text{ (đơn vị: } W/m^2) \text{ là cường độ âm. Hãy tính mức cường độ âm mà tai người}$$

có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12} W/m^2$ đến $10^1 W/m^2$.

LỜI GIẢI THAM KHẢO

LUY THUA VS SO MU THUC

Câu 1. Một số dương x được gọi là viết dưới dạng kí hiệu khoa học nếu $x = a \cdot 10^m$, ở đó $1 \leq a < 10$ và m là một số nguyên. Hãy viết các số liệu sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

a) Khối lượng của Trái Đất khoảng 59800000000000000000000 kg;

b) Khối lượng của hạt proton khoảng 0,000 000000000000000000000000167262 kg.

(Theo Vật lí 12, Nhà xuất bản Giáo dục Việt Nam, 2020)

Lời giải

a) $5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$.

b) $1,67262 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Câu 2. Ngân hàng thường tính lãi suất cho khách hàng theo thể thức lãi kép theo định kì, tức là nếu đến kì hạn người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kì kế tiếp. Nếu một người gửi số tiền P với lãi suất r mỗi kì thì sau N kì, số tiền người đó thu được (cả vốn lẫn lãi) được tính theo công thức lãi kép sau: $A = P(1+r)^N$.

Bác Minh gửi tiết kiệm số tiền 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng với lãi suất 6% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) bác Minh thu được sau 3 năm.

Lời giải

Số tiền cả vốn lẫn lãi bác Minh thu được sau 3 năm là

$$100 \cdot (1 + 6\%)^3 \approx 119,19 \text{ (triệu đồng)}$$

Câu 3. Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N

kì gửi cho bởi công thức sau: $A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{Nn}$. Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì

hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

Lời giải

Do bác An gửi tiết kiệm với kì hạn 6 tháng nên $n = 2$.

Sau 2 năm thì bác An được 4 lần tính lãi.

$$\text{Số tiền thu được của bác An sau 2 năm là } 120 \cdot \left(1 + \frac{5\%}{2} \right)^4 \approx 132,46 \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 4. Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á khoảng 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

Lời giải

Sau 20 năm thì dân số nước đó là $19 \cdot 2^{\frac{20}{30}} = 19 \cdot 2^{\frac{2}{3}} \approx 30$ (triệu người).

Câu 5. Giả sử cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$,

trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển,

a là một hằng số dương,

d là độ sâu tính từ mặt nước biển (tính bằng mét).

a) Ở một vùng biển cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng 95% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Tìm giá trị của hằng số a .

b) Tại độ sâu 15m ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Từ giả thiết, ta có $d = 1$ và $I = \frac{95}{100} I_0$.

Thay vào biểu thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được: $a^d = \frac{I}{I_0} = \frac{95}{100}$.

Mà $d = 1$ nên $a = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$. Vậy $a = \frac{19}{20}$.

b) Từ giả thiết, ta có $d = 15$.

Thay $d = 15$ và $a = \frac{19}{20}$ vào công thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được:

$$\frac{I}{I_0} = a^d = \left(\frac{19}{20}\right)^{15} \approx 0,46$$

Như vậy, tại độ sâu 15m ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng khoảng 46% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển.

Câu 6. Giả sử một lọ nuôi cấy có 100 con vi khuẩn lúc ban đầu và số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi sau mỗi 2 giờ. Khi đó số vi khuẩn N sau t (giờ) sẽ là $N = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ (con). Hỏi sau $3\frac{1}{2}$ giờ sẽ có bao nhiêu con vi khuẩn?

Lời giải

Thay $t = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ (giờ) vào công thức ta được số vi khuẩn sau $3\frac{1}{2}$ giờ là

$$N = 100 \cdot 2^{\frac{7}{2}} = 100 \cdot 2^{\frac{7}{4}} \approx 336 \text{ (con)}.$$

Câu 7. Chu kì dao động (tính bằng giây) của một con lắc có chiều dài L (tính bằng mét) được cho bởi $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}$. Nếu một con lắc có chiều dài 19,6m, hãy tính chu kì T của con lắc này (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Thay $L = 19,6$ vào công thức ta được chu kì dao động của con lắc là

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}} = 2\pi\sqrt{\frac{19,6}{9,8}} \approx 8,9 \text{ (giây)}.$$

Câu 8. Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương của chu kì quỹ đạo p (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tinh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo là một đường elip với Mặt Trời nằm ở một tiêu điểm) bằng lập phương của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU).

a) Tính p theo d .

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Theo định luật thứ ba của Kepler, ta có:

$$p^2 = d^3 \text{ hay } p = \sqrt{d^3}.$$

b) Thay $p = 29,46$ vào công thức $p = \sqrt{d^3}$, ta được $d \approx 9,54 AU$.

Câu 9. Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất).

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008).

a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hỏa là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là bao nhiêu?

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày).

(Kết quả của câu a và câu b tính theo đơn vị triệu dặm và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Thay $t = 687$ vào công thức ta được khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6 \cdot 687^2} \approx 141,48 \text{ (triệu dặm)}.$$

b) Thay $t = 365$ vào công thức ta được khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là:

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} \approx 92,81 \text{ (triệu dặm)}.$$

Câu 10. Trong mẫu của một sinh vật đã chết T năm, tỉ số R của carbon phóng xạ còn lại và carbon không phóng xạ còn lại có thể được ước tính bằng công thức $R = A \cdot (2,7)^{-\frac{T}{8033}}$. Trong đó A là tỉ số của carbon phóng xạ và carbon không phóng xạ trong cơ thể sống (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Tính tỉ số $\frac{R}{A}$ trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 2000 năm; sau 8000 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Tỉ số $\frac{R}{A}$ trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 2000 năm là: $\frac{R}{A} = (2,7)^{-\frac{2000}{8033}} \approx 0,78$.

Tỉ số $\frac{R}{A}$ trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 8000 năm là: $\frac{R}{A} = (2,7)^{-\frac{8000}{8033}} \approx 0,37$.

Câu 11. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải

Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất số năm Trái Đất là: $P = d^{\frac{3}{2}} = 1,52^{\frac{3}{2}} \approx 1,87 (AU)$

Câu 12. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng

thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải

Thời gian để Sao Hoả quay quanh Mặt Trời là:

$$P = d^{\frac{3}{2}} = 1,52^{\frac{3}{2}} \approx 1,874 \text{ (năm Trái Đất)}.$$

Câu 13. Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

Lời giải

Công thức tính khối lượng của chất phóng xạ đó còn lại sau t năm là:

$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}}$ (g). Khối lượng của chất đỏ còn lại sau 120 năm là:

$$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{25}} \approx 0,359(g).$$

Câu 14. Trong khoa học, người ta thường phải ghi các số rất lớn hoặc rất bé. Để tránh phải viết và đếm quá nhiều chữ số 0, người ta quy ước cách ghi các số dưới dạng $A \cdot 10^m$, trong đó $1 \leq A \leq 10$ và m là số nguyên.

Khi một số được ghi dưới dạng này, ta nói nó được ghi dưới dạng kí hiệu khoa học.

Chẳng hạn, khoảng cách 149600000 km từ Trái Đất đến Mặt Trời được ghi dưới dạng kí hiệu khoa học là $1,496 \cdot 10^8 \text{ km}$.

Ghi các đại lượng sau dưới dạng kí hiệu khoa học:

- [illegible]

Lời giải

- a) Vận tốc ánh sáng trong chân không là $2,9979 \cdot 10^8 \text{ m/s}$
b) Khối lượng nguyên tử oxygen là $2,657 \cdot 10^{-26} \text{ kg}$

Câu 15. Tại một vùng biển, giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.



Hình 2

- a) Tại độ sâu 1 m , cường độ ánh sáng gấp bao nhiêu lần I_0 ?
b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 2 m gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu 10 m ? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.

Lời giải

- a) Tại $d = 1$; ta có $I = I_0 \cdot 10^{-0,3 \cdot 1} = I_0 \cdot 10^{-0,3}$.

Vậy cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ gấp $10^{-0,3}$ lần I_0

b) Tại $d = 2$; ta có $I = I_0 \cdot 10^{-0,3,2}$.

Tại $d = 10$; ta có $I = I_0 \cdot 10^{-0,3,10}$

Cường độ ánh sáng tại độ sâu $2m$ gấp

$$10^{-0,3,2} : 10^{-0,3,10} = 10^{-0,3,2 - (-0,3,10)} = 10^{0,3,8} = 251,19 \text{ lần so với tại độ sâu } 10m$$

Câu 16. Với một chi vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng $1m^2$ và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7}m$. Đồng xu 5000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3}m$. Cần chong bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

Lời giải

Để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng, ta cần chong số lá vàng là:

$$2,2 \cdot 10^{-3} : (1,94 \cdot 10^{-7}) = 11300$$

Câu 17. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

Lời giải

a) Sau 2 năm: $t = 2$. Ta có: $P(2) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = 315$ (triệu đồng)

Sau 2 năm 3 tháng: $t = 2,25$. Ta có: $P(2,25) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2,25}{3}} = 297$ (triệu đồng)

b) Sau 1 năm sử dụng: $P(1) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 397$

Vậy sau 1 năm sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng $397 : 500 \cdot 100$ so với ban đầu

Câu 18. Cường độ ánh sáng tại độ sâu $h(m)$ dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$,

trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu $3m$ gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu $6m$?

Lời giải

a) $\frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,84 = 84\%$.

b) $\frac{I_3}{I_6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3-6}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} \approx 1,68$ (lần).

Câu 19. Giả sử số tiền gốc là A , lãi suất là $r\%$ / kì hạn gửi (có thể là tháng, quý hay năm) thì tổng số tiền nhận được cả gốc và lãi sau n kì hạn gửi là $A(1+r)^n$. Bà Hạnh gửi 100 triệu vào tài khoản định kỳ tính lãi kép với lãi suất là 8% / năm. Tính số tiền lãi thu được sau 10 năm.

Lời giải

Áp dụng công thức tính lãi kép, sau 10 năm số tiền cả gốc và lãi bà Hạnh thu về là :

$$A(1+r)^n = 100(1+0,08)^{10} \approx 215,892 \text{ triệu đồng.}$$

Suy ra số tiền lãi bà Hạnh thu về sau 10 năm là $215,892 - 100 = 115,892$ triệu đồng.

Câu 20. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

Lời giải

Ta có: $s(3) = s(0) \cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{8} = 78,125$ nghìn con.

Do đó $s(t) = 10$ triệu con = 10000 nghìn con khi:

$$10000 = s(0) \cdot 2^t \Rightarrow 2^t = \frac{10000}{78,125} = 128 = 2^7 \Rightarrow t = 7 \text{ phút.}$$

Câu 21. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 8%/ năm. Biết rằng nếu người đó không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn để tính lãi cho năm tiếp theo. Số tiền người đó nhận sau n năm sẽ được tính theo công thức $T_n = 100(1+r)^n$ (triệu đồng), trong đó $r(\%)$ là lãi suất và n là số năm gửi tiền.

a) Hỏi sau 5 năm gửi tiền ở ngân hàng, người đó thu về số tiền bao nhiêu?

b) Hỏi số tiền lãi thu được của người đó sau 10 năm là bao nhiêu?

(Các kết quả trong bài được tính chính xác đến hàng phần trăm)

Lời giải

a) Số tiền người đó nhận sau 5 năm là: $T_5 = 100 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^5 \approx 146,93$ (triệu đồng).

b) Số tiền người đó nhận sau 10 năm là: $T_{10} = 100 \left(1 + \frac{8}{100}\right)^{10} \approx 215,89$ (triệu đồng).

Số tiền lãi sau 10 năm gửi tiền xấp xỉ là: $215,89 - 100 = 115,89$ (triệu đồng).

Câu 22. Một khu rừng có trữ lượng gỗ là $4 \cdot 10^5 m^3$. Biết tốc độ sinh trưởng của các cây lấy gỗ trong khu rừng này là 4% mỗi năm. Hỏi sau 5 năm không khai thác, khu rừng sẽ có số mét khối gỗ là bao nhiêu?

Lời giải

Nếu trữ lượng gỗ của khu rừng ban đầu là A thì sau năm thứ nhất, lượng gỗ có được là $A + Ar = A(1+r)$ với r là tốc độ tăng trưởng mỗi năm.

Sau năm thứ hai, lượng gỗ có được là $A(1+r) + A(1+r) \cdot r = A(1+r)^2$.

Theo phương pháp quy nạp, ta chứng minh được công thức tính lượng gỗ trong khu rừng là $T_n = A(1+r)^n$ với A là lượng gỗ ban đầu, r là tốc độ tăng trưởng mỗi năm và n là số năm tăng trưởng của rừng.

Vậy sau 5 năm, lượng gỗ trong khu rừng là:

$$T_5 = 4 \cdot 10^5 \left(1 + \frac{4}{100}\right)^5 = 486661,161 (m^3)$$

Câu 23. Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0) \cdot 2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau 10 phút thì số lượng vi khuẩn A là bao nhiêu?

Lời giải

Sau 3 phút, số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con nên $s(3) = s(0) \cdot 2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{2^3} = \frac{625000}{8} = 78125$ (tức

là ban đầu có 78125 con vi khuẩn A trong phòng thí nghiệm).

Sau 10 phút, số lượng vi khuẩn là: $s(10) = 78125 \cdot 2^{10} = 80 \cdot 10^6$ (con).

LOGART

Câu 24. Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng, với lãi suất không đổi là 6% một năm. Khi đó sau n năm gửi thì tổng số tiền bác An thu được (cả vốn lẫn lãi) cho bởi công thức sau:

$$A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n \text{ (triệu đồng)}.$$

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, tổng số tiền bác An thu được là không dưới 150 triệu đồng?

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n = 100 \cdot 1,06^n.$$

$$\text{Với } A = 150, \text{ ta có: } 100 \cdot 1,06^n = 150 \text{ hay } 1,06^n = 1,5, \text{ tức là } n = \log_{1,06} 1,5 \approx 6,96.$$

Vì gửi tiết kiệm kì hạn 12 tháng (tức là 1 năm) nên n phải là số nguyên. Do đó ta chọn $n = 7$.

Vậy sau ít nhất 7 năm thì bác An nhận được số tiền ít nhất là 150 triệu đồng.

Câu 25. Cô Hương gửi tiết kiệm 100 triệu đồng với lãi suất 6% một năm.

a) Tính số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm, nếu lãi suất được tính theo một trong các thể thức sau:

- Lãi kép kì hạn 12 tháng;
- Lãi kép kì hạn 1 tháng;
- Lãi kép liên tục.

b) Tính thời gian cần thiết để cô Hương thu được số tiền (cả vốn lẫn lãi) là 150 triệu đồng nếu gửi theo thể thức lãi kép liên tục (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

a) Số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm nếu lãi suất được tính theo hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng là $100 \cdot (1 + 6\%) = 106$ (triệu đồng).

Số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm nếu lãi suất được tính theo hình thức lãi kép kì hạn 1

$$\text{tháng là } 100 \left(1 + \frac{6\%}{12} \right)^{12} \approx 106,17 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số tiền cô Hương thu được (cả vốn lẫn lãi) sau 1 năm nếu lãi suất được tính theo hình thức lãi kép liên tục là $100 \cdot e^{6\% \cdot 1} \approx 106,18$ (triệu đồng).

b) Số tiền (cả vốn lẫn lãi) cô Hương có được sau n năm gửi ngân hàng theo hình thức lãi kép liên tục là $100 \cdot e^{6\% \cdot n}$.

$$\text{Ta có: } 150 = 100 \cdot e^{0,06n}.$$

$$\text{Suy ra } 0,06n = \ln 1,5 \text{ hay } n \approx 6,76 \text{ năm}$$

Vậy cô Hương phải gửi ngân hàng ít nhất 7 năm thì số tiền cô Hương thu được là 150 triệu đồng.

Câu 26. Độ pH của một dung dịch hoá học được tính theo công thức: $pH = -\log[H^+]$, trong đó

$[H^+]$ là nồng độ (tính theo mol/lít) của các ion hydrogen. Giá trị pH nằm trong khoảng từ 0 đến 14. Nếu $pH < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $pH > 7$ thì dung dịch có tính base, còn nếu $pH = 7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng $0,01 \text{ mol/l}$ ít.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ pH bằng 7,4.

Lời giải

a) Khi $[H^+] = 0,01$, ta có: $pH = -\log 0,01 = -\log 10^{-2} = 2$.

b) Nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $[H^+] = 10^{-7,4}$.

Câu 27. Biết thời gian cần thiết (tính theo năm) để tăng gấp đôi số tiền đầu tư theo thể thức lãi kép liên tục với lãi suất không đổi r mỗi năm được cho bởi công thức sau: $t = \frac{\ln 2}{r}$. Tính thời gian cần thiết để tăng gấp đôi một khoản đầu tư khi lãi suất là 6% mỗi năm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Ta có: $r = 6\% = 0,06$. Do đó thời gian cần thiết để tăng gấp đôi khoản đầu tư là

$$t = \frac{\ln 2}{r} = \frac{\ln 2}{0,06} \approx 11,6 \text{ (năm)}.$$

Câu 28. Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là $a = 15500(5 - \log p)$ trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal).

Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao khoảng 8850 m so với mực nước biển.

Lời giải

Ta có: $15500(5 - \log p) = 8850 \Leftrightarrow \log p \approx 4,43$.

Áp suất không khí ở đỉnh Everest là $p \approx 10^{4,43} \approx 26915,35 \text{ (Pa)}$.

Câu 29. Mức cường độ âm L đo bằng deciben (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W / m^2) được định nghĩa như sau: $L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$ trong đó $I_0 = 10^{-12} W / m^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là ngưỡng nghe).

Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

- a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} W / m^2$.
- b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} W / m^2$.

Lời giải

a) Mức cường độ âm của cuộc trò chuyện có cường độ $I = 10^{-7} W / m^2$ là

$$10 \cdot \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^5 = 50 \text{ (dB)}.$$

b) Mức cường độ âm của giao thông thành phố có cường độ $I = 10^{-3} W / m^2$ là

$$10 \cdot \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \cdot \log 10^9 = 90 \text{ (dB)}$$

Câu 30. Trong Hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log [H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen tính bằng mol/lít. Nếu $pH < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $pH > 7$ thì dung dịch có tính base và nếu $pH = 7$ thì dung dịch là trung tính.

- a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng $0,001 \text{ mol / l}$.
- b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ pH bằng 8.
- c) Khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen của dung dịch thay đổi thế nào?

Lời giải

a) Thay $[H^+] = 0,001$ vào công thức, ta được $pH = -\log [H^+] = -\log 0,001 = 3$.

Vậy độ pH của dung dịch bằng 3.

b) Thay $pH = 8$ vào công thức, ta được $8 = -\log [H^+]$, do đó $[H^+] = 10^{-8} \text{ mol / l}$.

Vậy nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $[H^+] = 10^{-8}$.

c) Thay vào công thức ta thấy khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen giảm đi 10 lần.

Câu 31. Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương N viết trong hệ thập phân được cho bởi công thức $[\log N] + 1$, ở đó $[\log N]$ là phần nguyên của số thực dương $\log N$. Tìm số các chữ số của 2^{2023} khi viết trong hệ thập phân.

Lời giải

Số chữ số của 2^{2023} là: $[\log 2^{2023}] + 1 = [2023 \cdot \log 2] + 1 = 609$.

Câu 32. Khi gửi tiết kiệm P (đồng) theo thể thức trả lãi kép định kì với lãi suất mỗi kì là r (r cho dưới dạng số thập phân) thì số tiền A (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau t kì gửi là $A = P(1+r)^t$ (đồng). Tính thời gian gửi tiết kiệm cần thiết để số tiền ban đầu tăng gấp đôi.

Lời giải

Để số tiền ban đầu tăng gấp đôi thì $A = 2P$.

Thay $A = 2P$ vào công thức lãi kép ta có:

$2P = P(1+r)^t$, suy ra $(1+r)^t = 2$, là $t = \log_{1+r} 2$ (năm)

Câu 33. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau bao lâu người đó nhận được ít nhất 120 triệu đồng?

Lời giải

Lãi suất năm là 8% nên lãi suất kì hạn 6 tháng sẽ là $r = 4\% = 0,04$.

Thay $P = 100$; $r = 0,04$ và $A = 120$ vào công thức $A = P(1+r)^t$, ta được:

$120 = 100(1+0,04)^t$. Suy ra $1,2 = 1,04^t$, hay $t = \log_{1,04} 1,2 \approx 4,65$.

Vậy sau 5 kì gửi tiết kiệm kì hạn 6 tháng, tức là sau 30 tháng, người đó sẽ nhận được ít nhất 120 triệu đồng.

Câu 34. Nồng độ cồn trong máu (BAC) là chỉ số dùng để đo lượng cồn trong máu của một người. Chẳng hạn, BAC 0,02% hay $0,2\text{mg/ml}$, nghĩa là có 0,02g cồn trong 100ml máu. Nếu một người với BAC bằng 0,02% có nguy cơ bị tai nạn ô tô cao gấp 1,4 lần so với một người không uống rượu, thì nguy cơ tương đối của tai nạn với BAC 0,02% là 1,4. Nghiên cứu y tế gần đây cho thấy rằng nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn khi đang lái ô tô có thể được mô hình hoá bằng một phương trình có dạng

$$R = e^{kx},$$

trong đó $x(\%)$ là nồng độ cồn trong máu và k là một hằng số.

a) Nghiên cứu chỉ ra rằng nguy cơ tương đối của một người bị tai nạn với BAC bằng 0,02% là 1,4. Tìm hằng số k trong phương trình.

b) Nguy cơ tương đối là bao nhiêu nếu nồng độ cồn trong máu là 0,17% ?

c) Tìm BAC tương ứng với nguy cơ tương đối là 100.

d) Giả sử nếu một người có nguy cơ tương đối từ 5 trở lên sẽ không được phép lái xe, thì một người có nồng độ cồn trong máu từ bao nhiêu trở lên sẽ không được phép lái xe?

Lời giải

a) Thay $R = 1,4$ và $x = 0,02\%$ vào công thức, ta được: $1,4 = e^{k \cdot \frac{0,02}{100}}$.

Suy ra $k \approx 1682,36$.

b) $R = e^{1682,36 \cdot \frac{0,17}{100}} \approx 17,46$.

c) Thay $R = 100$ vào công thức, ta được: $100 = e^{1682,36x}$. Suy ra $x \approx 0,27\%$.

d) Với $R \geq 5$ thì $x \geq 0,096\%$, tức là một người có nồng độ cồn trong máu từ khoảng 0,096% trở lên thì không được lái xe.

Câu 35. Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

Lời giải

$pH = -\log[H^+] = -\log 8 \cdot 10^{-8} \approx 7,1 \Rightarrow$ Độ pH không phù hợp cho tôm sú phát triển.

Câu 36. Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (Nguồn: Câu hỏi và bài tập vi sinh học, NXB ĐHSP, 2008). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6 \cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Số lượng tế bào đạt đến khối lượng Trái đất là: $N = 6 \cdot 10^{27} : 5 \cdot 10^{-13} = 1,2 \cdot 10^{17}$

Số lần phân chia: $N = N_0 \cdot 2^n \Rightarrow n = \frac{\lg N - \lg N_0}{\lg 2} = \frac{\lg 1,2 \cdot 10^{17} - \lg 5 \cdot 10^{-13}}{\lg 2} \approx 97,6$

Thời gian cần thiết là: $97,6 : 3 = 32,5$ (giờ)

Câu 37. Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ (mol/L) trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết $pH = -\log[H^+]$.

Lời giải

Độ pH của đầm đó là: $pH = -\log[H^+] = -\log(8 \cdot 10^{-8}) \approx 7,097$.

Do $7,097 < 7,2$ nên đầm đó không thích hợp cho tôm sú phát triển.

Câu 38. Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ của $^{14}_6C$ có trong mẫu vật tại thời điểm t (năm) (so với thời điểm ban đầu $t = 0$), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ $H = H_0 e^{-\lambda t}$ (đơn vị là Becquerel, kí hiệu Bq) với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ, $T = 5730$ (năm) (Nguồn: Vật lí 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2014). Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là 0,215 Bq. Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là 0,250 Bq. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi t là độ tuổi của mẫu gỗ cổ.

Ta có: $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với $H = 0,215$; $H_0 = 0,250$; $\lambda = \frac{\ln 2}{5730}$.

Từ đó, $\lambda t = \ln \frac{H_0}{H} = \ln \frac{0,250}{0,215} \approx 0,1508$. Vậy $t \approx \frac{0,1508}{\lambda} \approx 1247$.

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó xấp xỉ 1247 năm.

Câu 39. Trong hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydrogen) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là $0,0001 \text{ mol/L}$. Dung dịch này có tính acid, kiềm hay trung tính?

b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B.

Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

Lời giải

a) $pH = -\log 0,0001 = -\log 10^{-4} = 4 \log 10 = 4$.

Do $4 < 7$ nên dung dịch có tính acid.

b) Kí hiệu pH_A, pH_B lần lượt là độ pH của hai dung dịch A và B ; $[H^+]_A, [H^+]_B$ lần lượt là nồng độ của hai dung dịch A và B . Ta có $pH_A = -\log[H^+]_A = -\log(2[H^+]_B) = -\log 2 - \log[H^+]_B = -\log 2 + pH_B$.

Suy ra $pH_B - pH_A = \log 2 \approx 0,301$.

Vậy dung dịch B có độ pH lớn hơn và lớn hơn khoảng $0,301$.

Câu 40. a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L . Tính độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Lời giải

a) độ pH của nước cất là: $-\log 10^{-7} = 7$

b) độ pH của dung dịch là: $-\log(20 \cdot 10^{-7}) = 5,7$

Câu 41. Độ pH của một dung dịch hoá học được tính theo công thức:

$pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ (tính theo mol/lít) của các ion hydrogen. Giá trị pH nằm trong khoảng từ 0 đến 14. Nếu $pH < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $pH > 7$ thì dung dịch có tính base, còn nếu $pH = 7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng $0,001 \text{ mol/lit}$.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ $pH = 7,5$.

Lời giải

a) Khi $[H^+] = 0,001$, ta có: $pH = -\log 0,001 = -\log 10^{-3} = 3$.

b) Nồng độ ion hydrogen trong dung dịch đó là $[H^+] = 10^{-7,5}$.

Câu 42. Dung dịch A có nồng độ H^+ là $0,00001 \text{ mol/L}$ và dung dịch B có nồng độ H^+ là $0,00000001 \text{ mol/L}$.

a) Tìm độ pH của mỗi dung dịch trên. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn?

b) Dung dịch nào có tính kiềm, dung dịch nào có tính acid?

Lời giải

a) Độ pH của dung dịch A là $pH_A = -\log[H^+]_A = -\log 0,00001 = 5$.

Độ pH của dung dịch B là $pH_B = -\log[H^+]_B = -\log 0,00000001 = 8$.

Nồng độ pH của dung dịch B là lớn hơn của dung dịch A ($8 > 5$).

b) Vì $pH_A = 5 < 7$ nên dung dịch A có tính acid.

Vì $pH_B = 8 > 7$ nên dung dịch B có tính kiềm.

Câu 43. Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây, các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và giả sử tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

Lời giải

Số lượng bèo ban đầu chiếm 0,04 diện tích mặt hồ.

Sau 1 tuần số lượng bèo là $0,04 \times 3$ diện tích mặt hồ.

Sau 2 tuần số lượng bèo là $0,04 \times 3^2$ diện tích mặt hồ.

Sau n tuần số lượng bèo là $0,04 \times 3^n$ diện tích mặt hồ.

Để bèo phủ kín mặt hồ thì: $0,04 \times 3^n = 1 \Rightarrow 3^n = 25 \Rightarrow n = \log_3 25$ (tuần).

Số ngày tương ứng là $7n = 7 \log_3 25 \approx 20,51$ (ngày).

Vậy sau ít nhất 21 ngày thì bèo hoa dâu sẽ phủ kín mặt hồ.

Câu 44. a) Hãy tính độ pH của bia và rượu biết rằng nồng độ H^+ của bia và rượu theo thứ tự là 0,00008 và 0,0004.

b) Cho ba dung dịch A, B, C có nồng độ H^+ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân có công bội bằng 2. Chứng minh rằng độ pH của ba dung dịch A, B, C theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Tìm công sai của cấp số cộng đó.

Lời giải

a) Độ pH của bia là $pH_b = -\log 0,00008 \approx 4,01$.

Độ pH của rượu là $pH_r = -\log 0,0004 \approx 3,4$.

b)

Gọi $[H^+]_A, [H^+]_B, [H^+]_C$ lần lượt là nồng độ H^+ của ba dung dịch A, B, C .

Gọi pH_A, pH_B, pH_C theo thứ tự là độ pH của ba dung dịch A, B, C .

Theo giả thiết, ta có: $[H^+]_B = 2[H^+]_A, [H^+]_C = 2[H^+]_B$.

Suy ra

$$pH_B - pH_A = -\log[H^+]_B - (-\log[H^+]_A) = \log \frac{[H^+]_A}{[H^+]_B} = \log \frac{[H^+]_A}{2[H^+]_A} = \log \frac{1}{2}$$

$$pH_C - pH_B = -\log[H^+]_C - (-\log[H^+]_B) = \log \frac{[H^+]_B}{[H^+]_C} = \log \frac{[H^+]_B}{2[H^+]_B} = \log \frac{1}{2}$$

Vì $pH_B - pH_A = pH_C - pH_B = \log \frac{1}{2}$ nên pH_A, pH_B, pH_C theo thứ tự lập thành một cấp số cộng có công sai bằng $\log \frac{1}{2}$

Câu 45. Cường độ một trận động đất M (độ Richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỉ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, một trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ rung chấn mạnh hơn gấp 4 lần. Hỏi cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu (kết quả được làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải

Gọi M_1, M_2 lần lượt là cường độ của trận động đất ở San Francisco và ở Nam Mỹ. Trận động đất ở San Francisco có cường độ là 8 độ Richter nên:

$M_1 = \log A - \log A_0 \Leftrightarrow 8 = \log A - \log A_0$. Trận động đất ở Nam Mỹ có biên độ là $4A$, khi đó cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là:

$$M_2 = \log(4A) - \log A_0 = \log 4 + (\log A - \log A_0) = \log 4 + 8 \approx 8,602. \text{ (độ Richter)}$$

HAM SỐ MU – KLOGARIT

Câu 46. Sự tăng trưởng dân số được ước tính theo công thức tăng trưởng mũ sau:

$A = Pe^{rt}$, trong đó P là dân số của năm lấy làm mốc, A là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Biết rằng vào năm 2020, dân số Việt Nam khoảng 97,34 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là 0,91% (theo danso.org). Nếu tỉ lệ tăng dân số này giữ nguyên, hãy ước tính dân số Việt Nam vào năm 2050.

Lời giải

Từ năm 2020 tới năm 2050 là 30 năm.

Ước tính dân số Việt Nam vào năm 2050 là $97,34 \cdot e^{0,91\% \cdot 30} \approx 127,9$ (triệu người).

Câu 47. Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0,015t}$.

- a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$.
b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

Lời giải

- a) Khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$ là $m(0) = 13 \cdot e^0 = 13(kg)$.
b) Khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 45$ là $m(45) = 13 \cdot e^{-0,015 \cdot 45} \approx 6,62(kg)$.

Câu 48. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), 0 \leq t \leq 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Lời giải

Khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng là
 $M(6) = 75 - 20 \cdot \ln(6+1) \approx 36,08\%$.

Câu 49. Trong Vật lý, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$$

trong đó m_0 là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm ban đầu $t = 0$, $m(t)$ là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kỳ bán rã (là thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết rằng đồng vị plutonium-234 có chu kỳ bán rã khoảng 9 giờ. Từ khối lượng plutonium-234 ban đầu là 100 g, hãy tính khối lượng plutonium-234 còn lại sau:

- a) 9 giờ; b) 1 ngày.
(Kết quả tính theo gam và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

- a) Thay $t = 9, T = 9, m_0 = 100$ vào công thức, ta được:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{9}{9}} = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50(g).$$

- b) Do 1 ngày = 24 giờ nên thay $t = 24, T = 9, m_0 = 100$ vào công thức, ta được:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{24}{9}} \approx 15,75(g).$$

Câu 50. Nếu một ô kính ngăn khoảng 3% ánh sáng truyền qua nó thì phần trăm ánh sáng p truyền qua n ô kính liên tiếp được cho gần đúng bởi hàm số sau:

$$p(n) = 100 \cdot (0,97)^n.$$

- a) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 10 ô kính?
b) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 25 ô kính?
(Kết quả ở câu a và câu b được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

- a) $p(10) = 100 \cdot (0,97)^{10} \approx 74\%$.
b) $p(25) = 100 \cdot (0,97)^{25} \approx 47\%$.

Câu 51. Số tiền ban đầu 120 triệu đồng được gửi tiết kiệm với lãi suất năm không đổi là 6%. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) thu được sau 5 năm nếu nó được tính lãi kép:

- a) hàng quý;
b) hàng tháng;
c) liên tục.

(Kết quả được tính theo đơn vị triệu đồng và làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Để giải câu a và câu b , ta sử dụng công thức lãi kép theo định kì để tính tổng số tiền thu được

$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^t$, trong đó P là số tiền vốn ban đầu, r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân), n là số kì tính lãi trong một năm và t là số kì gửi.

a) Ta có: $P = 120, r = 6\% = 0,06, n = 4, t = 20$. Thay vào công thức trên, ta được:

$$A = 120 \left(1 + \frac{0,06}{4} \right)^{20} = 120 \cdot 1,015^{20} \approx 161,623 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Ta có: $P = 120, r = 6\% = 0,06, n = 12, t = 60$. Thay vào công thức trên, ta được:

$$A = 120 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{60} = 120 \cdot 1,005^{60} \approx 161,862 \text{ (triệu đồng)}.$$

c) Ta sử dụng công thức lãi kép liên tục $A = Pe^{rt}$, ở đây r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân) và t là số năm gửi tiết kiệm.

Ta có: $P = 120, r = 6\% = 0,06, t = 5$ nên

$$A = 120 \cdot e^{0,06 \cdot 5} = 120 \cdot e^{0,3} \approx 161,983 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 52. Chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức:

$$m = 25 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{1600}}.$$

a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

Lời giải

$$a) m(0) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 25(g).$$

$$b) m(2500) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2500}{1600}} \approx 8,46(g).$$

Câu 53. Trong Vật lí, mức cường độ âm (tính bằng deciben, kí hiệu là dB) được tính bởi công thức

$$L = 10 \log \frac{I}{I_0}, \text{ trong đó } I \text{ là cường độ âm tính theo } W/m^2 \text{ và } I_0 = 10^{-12} W/m^2 \text{ là cường độ âm chuẩn, tức}$$

là cường độ âm thấp nhất mà tai người có thể nghe được.

a) Tính mức cường độ âm của một cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm là $10^{-7} W/m^2$.

b) Khi cường độ âm tăng lên 1000 lần thì mức cường độ âm (đại lượng đặc trưng cho độ to nhỏ của âm) thay đổi thế nào?

Lời giải

a) Mức cường độ âm của cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm $10^{-7} W/m^2$ là

$$L = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 50(dB).$$

$$b) \text{ Ta có: } 10 \log \frac{1000I}{I_0} = 10 \cdot \left(\log 1000 + \log \frac{I}{I_0} \right) = 30 + 10 \log \frac{I}{I_0}.$$

Vậy mức cường độ âm tăng lên $30dB$.

Câu 54. Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức: $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$; trong

đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời

điểm t và T là chu kì bán rã (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kì bán rã là 138 ngày (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày là: $m(100) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{100}{138}} \approx 60,5(g)$.

Câu 55. Lốc xoáy là hiện tượng một luồng không khí xoáy tròn mở rộng ra từ một đám mây dông xuống tới mặt đất (Hình 10). Các cơn lốc xoáy thường có sức tàn phá rất lớn. Tốc độ S (dặm/giờ) của gió gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức: $S = 93 \log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy di chuyển được.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Hãy tính tốc độ của gió ở gần tâm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường là:

a) 5 dặm;

b) 10 dặm.



Hình 10

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Lời giải

a) Tốc độ của gió ở gần tâm khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường 5 dặm là:

$$S = 93 \log 5 + 65 \approx 130 \text{ (dặm/giờ)}$$

b) Tốc độ của gió ở gần tâm khi cơn lốc xoáy di chuyển được quãng đường 10 dặm là:

$$S = 93 \log 10 + 65 = 158 \text{ (dặm/giờ)}$$

Câu 56. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A.e^{rt}$, trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số là 0,93%/năm (Nguồn: <https://danso.org/viet-nam>). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Dân số năm 2030 là $S = A.e^{r \cdot t} = 98564407 \cdot e^{9,0,93\%} \approx 107169341$ (người)

Câu 57. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng, tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trong 2 ngày, em học sinh nhớ được: $f(t) = c(1 - e^{-kt}) = 25 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 2}) \approx 8$ (đơn vị)

Trong 8 ngày, em học sinh nhớ được: $f(t) = c(1 - e^{-kt}) = 25 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 8}) \approx 20$ (đơn vị)

Câu 58. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $pH = -\log[H^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[H^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau: Mẫu 1: $[H^+] = 8 \cdot 10^{-7}$; Mẫu 2: $[H^+] = 2 \cdot 10^{-9}$.

Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

Lời giải

$$+ \text{Mau 1: } pH = -\log[H^+] = -\log(8 \cdot 10^{-7}) = -\log 8 - \log 10^{-7} = -\log 8 + 7 \log 10 = -\log 8 + 7 = -3 \log 2 + 7$$

$$+ \text{Mau 2: } pH = -\log[H^+] = -\log(2 \cdot 10^{-9}) = -\log 2 - \log 10^{-9} = -\log 2 + 9$$

$$o \quad 3 \log 2 > \log 2 \Rightarrow -3 \log 2 < -\log 2 \Rightarrow -3 \log 2 + 7 < -\log 2 + 9 \Rightarrow -3 \log 2 < -\log 2 + 9$$

$\Rightarrow$ Độ pH của mẫu 2 lớn hơn độ pH của mẫu 1.

Câu 59. Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right). \text{ Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài}$$

khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

$$\text{Số năm người đó được cả vốn lẫn lãi là 15 triệu đồng là: } y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right) = \log_{1,06} \left(\frac{15}{10} \right) \approx 7 \text{ (năm)}$$

Câu 60. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Sau 2 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$$f(2) = 25 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 2}) \approx 8 \text{ (đơn vị kiến thức).}$$

Sau 8 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$$f(8) = 25 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 8}) \approx 20 \text{ (đơn vị kiến thức).}$$

Câu 61. Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right). \text{ Hỏi sau ít nhất}$$

bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng sau ít nhất số năm là:

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{15}{10} \right) \approx 7 \text{ (năm).}$$

Câu 62. Các nhà khoa học xác định được chu kỳ bán rã của ${}^{14}_6C$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử ${}^{14}_6C$ giảm đi một nửa.

- a) Gọi m_0 là khối lượng của ${}^{14}_6C$ tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của ${}^{14}_6C$ tại thời điểm t (năm).
- b) Một cây còn sống có lượng ${}^{14}_6C$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ${}^{14}_6C$ trong cây phân rã theo chu kỳ bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng ${}^{14}_6C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

$$a) m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$$

- b) Tỉ lệ phần trăm lượng ${}^{14}_6C$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là:

$$\frac{m(2000)}{m_0} \cdot 100\% = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}} \cdot 100\% \approx 78,5\%.$$

Câu 63. Mức cường độ âm $L(dB)$ được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó $I(W/m^2)$ là cường độ âm. Tai người có thể nghe được âm có cường độ âm từ $10^{-12} W/m^2$ đến $10 W/m^2$. Tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được.

Lời giải

Mức cường độ âm tai người có thể nghe được từ $0dB$ đến $130dB$.

Câu 64. Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số 1,05% / năm (nguồn: <https://www.worldmeters.info/world-population>). Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức:

$P(t) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^t$ (tỉ người) (*). Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và vào năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7).

Lời giải

Năm 2025 ứng với $t = 5$ nên có dân số thế giới là $P(5) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^5 \approx 8,213$ (tỉ người).

Năm 2030 ứng với $t = 10$ nên có dân số thế giới là $P(10) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^{10} \approx 8,653$ (tỉ người).

Câu 65. Khối lượng vi khuẩn của một mẻ nuôi cấy sau t giờ kể từ thời điểm ban đầu được cho bởi công thức $M(t) = 50 \cdot 1,06^t$ (g).

(Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 101)

- a) Tìm khối lượng vi khuẩn tại thời điểm bắt đầu nuôi cấy (gọi là khối lượng ban đầu).
- b) Tính khối lượng vi khuẩn sau 2 giờ và sau 10 giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- c) Khối lượng vi khuẩn tăng dần hay giảm dần theo thời gian? Tại sao?

Lời giải

a) Khối lượng vi khuẩn tại thời điểm bắt đầu nuôi cấy là: $M(0) = 50 \cdot 1,06^0 = 50$

b) Khối lượng vi khuẩn sau 2 giờ là: $M(2) = 50 \cdot 1,06^2 = 56,18$

Khối lượng vi khuẩn sau 10 giờ là: $M(10) = 50 \cdot 1,06^{10} = 89,54$

c) Do $1,06 > 1$ nên hàm số $M(t)$ đồng biến

Do đó, khối lượng vi khuẩn tăng dần theo thời gian

Câu 66. Trong âm học, mức cường độ âm được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) (dB)$ là đơn vị mức

cường độ âm, đọc là đêxiben), trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ là cường độ âm chuẩn (cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được).

(Nguồn: Vật lý 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52,53)

- Mức cường độ âm L thấp nhất mà tai người có thể nghe được là bao nhiêu?
- Cuộc trò chuyện có cường độ âm $10^{-9} W/m^2$ thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
- Cường độ âm tại một khu văn phòng nằm trong miền từ $10^{-7} W/m^2$ đến $5 \cdot 10^{-6} W/m^2$ (tức là $10^{-7} \leq I \leq 5 \cdot 10^{-6}$). Mức cường độ âm tại khu văn phòng này nằm trong khoảng nào? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Lời giải

a) Khi $I = I_0$ thì $L = 10 \log 1 = 0 (dB)$. Vậy mức cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được là $0 dB$.

b) Khi $I = 10^{-9} W/m^2$, ta có $L = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \log 10^3 = 30 \log 10 = 30 (dB)$.

c) Với $I = 10^{-7} W/m^2$, $L = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log 10^5 = 50 \log 10 = 50 (dB)$.

Với $I = 5 \cdot 10^{-6} W/m^2$, $L = 10 \log \frac{5 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log (5 \cdot 10^6) = 10(6 + \log 5) \approx 67 (dB)$.

Hàm số $y = \log x$ đồng biến nên hàm số $y = 10 \log x$ cũng đồng biến.

Do đó, từ $10^{-7} \leq I \leq 5 \cdot 10^{-6}$ suy ra $50 \leq L \leq 67$.

Vậy mức cường độ âm tại khu văn phòng nằm trong khoảng từ $50 dB$ đến $67 dB$.

Câu 67. Mức cường độ âm được tính theo công thức như ở Ví dụ 6.

- Tiếng thì thầm có cường độ âm $I = 10^{-10} W/m^2$ thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
- Để nghe trong thời gian dài mà không gây hại cho tai, âm thanh phải có cường độ không vượt quá 100000 lần cường độ của tiếng thì thầm. Âm thanh không gây hại cho tai khi nghe trong thời gian dài phải ở mức cường độ âm như thế nào?

Lời giải

a) Vì $1,3 > 1$ nên hàm số $y = 1,3^x$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà $0,7 > 0,6$ nên $1,3^{0,7} > 1,3^{0,6}$

b) Vì $0,75 < 1$ nên hàm số $y = 0,75^x$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Mà $-2,3 > -2,4$ nên $0,75^{-2,3} > 0,75^{-2,4}$

Câu 68. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số ($a > 0$) và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: <https://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

- Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.
- Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu $1m$ bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .
- Tại độ sâu $20m$, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Lời giải

a) Vì cường độ ánh sáng giảm dần theo độ sâu, tức là hàm số $I = I_0 a^d$ nghịch biến

Do đó, $0 < a < 1$

b) Khi $d = 1$, ta có $0,95I_0 = I_0 \cdot a^1$

Suy ra $a = 0,95$

c) Khi $d = 20$. Ta có $I = I_0 \cdot 0,95^{20} = 0,36I_0$

Vậy tại độ sâu $20m$ thì $I = 36$

Câu 69. Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng kilômét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa - đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: <https://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6>)

- a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?
- b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B . Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải

a) Khi $P = \frac{1}{2}P_0$ thì $h = -19,4 \cdot \log \frac{\frac{1}{2}P_0}{P_0} = 5,84(km)$

b) Ta có $P_A = \frac{4}{5}P_B$

Ta có:

$$\begin{aligned} h_A - h_B &= -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} + 19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0} = -19,4 \left(\log \frac{P_A}{P_0} - \log \frac{P_B}{P_0} \right) \\ &= -19,4 \log \frac{\frac{P_A}{P_0}}{\frac{P_B}{P_0}} = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_B} = -19,4 \cdot \log \frac{4}{5} = 1,88 \end{aligned}$$

Vậy ngọn núi A cao hơn ngọn núi B 1,88 km

Câu 70. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t (mg)$, trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

- a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$?
- b) Biết rằng bệnh nhân đã uống 100mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80mg. Hãy xác định giá trị của D_0 và a .
- c) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

Lời giải

a) Do lượng thuốc trong cơ thể giảm dần, nên hàm số $D(t)$ nghịch biến, do đó $0 < a < 1$.

b) $D_0 = 100, a = \frac{80}{100} = 0,8$.

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc còn $D(5) = 100 \cdot 0,8^5$. Tỷ lệ lượng thuốc đã giảm so với lượng thuốc ban đầu là

$$\frac{D_0 - D(5)}{D_0} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8^5}{100} \approx 0,6723 \approx 67,23\%.$$

Câu 71. Ông Quý dự định gửi vào ngân hàng một số tiền với lãi suất 6,5% một năm. Biết rằng, cứ sau mỗi năm số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu. Tính số tiền tối thiểu x (triệu đồng, $x \in \mathbb{N}$) ông Quý gửi vào ngân hàng để sau 3 năm số tiền lãi đủ mua một chiếc xe gắn máy trị giá 30 triệu đồng.

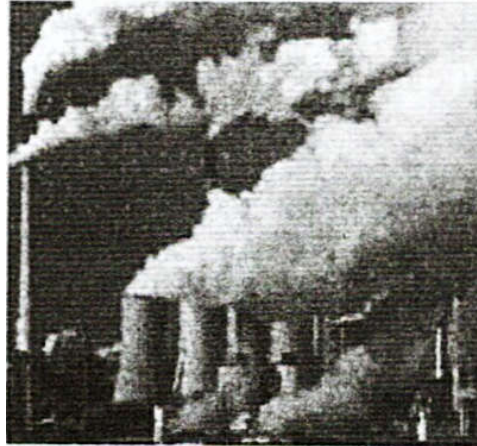
Lời giải

Công thức lãi kép $T = A(1+r)^n$

Tiền lãi ông Quý có sau 3 năm sẽ là tiền gốc lẫn lãi trừ đi số tiền gốc ban đầu Ta có:

$$A(1+6,5\%)^3 - A \geq 30 \Leftrightarrow A \geq \frac{30}{(1+6,5\%)^3 - 1} \approx 144,26 \text{ triệu.}$$

Câu 72. Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái Đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế Thế giới), khi nhiệt độ Trái Đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái Đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái Đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái Đất tăng thêm $t^{\circ}\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k \cdot a^t$, trong đó k, a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái Đất tăng thêm bao nhiêu $^{\circ}\text{C}$ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 20%?



Lời giải

Theo bài ta có $\begin{cases} k \cdot a^2 = 3\% \\ k \cdot a^5 = 10\% \end{cases}$ (1). Ta cần tìm t sao cho $k \cdot a^t = 20\%$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow k = \frac{3\%}{a^2} \text{ và } a^3 = \frac{10}{3} \Rightarrow a = \sqrt[3]{\frac{10}{3}}$$

$$\Rightarrow \frac{3\%}{a^2} \cdot a^t = 20\% \Rightarrow a^{t-2} = \frac{20}{3} \Rightarrow t-2 = \log_a \frac{20}{3} \Rightarrow t = 2 + \log_{\sqrt[3]{\frac{10}{3}}} \frac{20}{3} \approx 6,7.$$

Câu 73. Ông An bắt đầu đi làm với mức lương khởi điểm là 1 triệu đồng một tháng. Cứ sau ba năm thì ông An được tăng lương 40%. Hỏi sau tròn 20 năm đi làm, tổng tiền lương ông An nhận được là bao nhiêu (làm tròn đến hai chữ số thập phân sau dấu phẩy)?

Lời giải

Số tiền ông An kiếm được trong 3 năm đầu là: $3 \cdot 12 = 36$ triệu đồng.

Số tiền ông An có được sau 18 năm đi làm là:

$$S_1 = 36 + 36 \cdot (1 + 40\%)^1 + \dots + 36 \cdot (1 + 40\%)^5 + 36 \cdot (1 + 4\%)^6$$

Số tiền ông An nhận sau 2 năm cuối (năm thứ 19 và 20) là $S_2 = 2 \cdot 12 \cdot (1 + 4\%)^6$

Do đó tổng số tiền ông An thu được là:

$$S = 36 \cdot \frac{1 - (1,4)^6}{1 - 1,4} + 24 \cdot (1,4)^6 \approx 768,37 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 74. Dân số thế giới được tính theo công thức $S = A \cdot e^{nr}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm. Cho biết năm 2005 Việt Nam có khoảng 80902400 người và tỉ lệ tăng dân số là 1,47% một năm. Như vậy, nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi thì tối thiểu đến năm bao nhiêu dân của Việt Nam có khoảng 93713000 người?

Lời giải

$$\text{Ta có: } S = A \cdot e^{nr} \Leftrightarrow e^{nr} = \frac{S}{A} \Leftrightarrow nr = \ln \frac{S}{A} \Leftrightarrow n = \frac{1}{r} \ln \frac{S}{A}$$

với $S = 93713700$ người; $A = 80902400$ người; $r = \frac{1,47}{100} = 0,0147 / \text{năm}$.

$$\text{Suy ra } n = \frac{1}{0,0147} \ln \frac{93713000}{80902400} \approx 10.$$

Vậy tối thiểu đến năm 2015 thì dân số của Việt Nam có khoảng 93713000 người.

Câu 75. Người ta phân tích nồng độ H^+ của hai loại dung dịch A và B thì biết rằng dung dịch A có nồng độ H^+ lớn hơn nồng độ H^+ của dung dịch B . Hỏi độ pH của dung dịch nào lớn hơn?

Lời giải

$$\text{Độ } pH \text{ của dung dịch } A \text{ là: } pH_A = -\log [H^+]_A = \log \left([H^+]_A \right)^{-1} = \log \frac{1}{[H^+]_A}.$$

$$\text{Độ } pH \text{ của dung dịch } B \text{ là: } pH_B = -\log [H^+]_B = \log \left([H^+]_B \right)^{-1} = \log \frac{1}{[H^+]_B}.$$

Xét hàm số $y = \log x$ có cơ số $10 > 1$ nên hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\text{Mặt khác } [H^+]_A > [H^+]_B > 0 \Rightarrow 0 < \frac{1}{[H^+]_A} < \frac{1}{[H^+]_B}.$$

$$\text{Vì vậy } \log \frac{1}{[H^+]_A} < \log \frac{1}{[H^+]_B}.$$

Vậy độ pH của dung dịch B lớn hơn độ pH của dung dịch A .

Câu 76. Trong vật lí, sự phân rã các chất phóng xạ được cho bởi công thức:

$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ Trong đó, m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kỳ bán rã.
Hạt nhân Poloni (Po) là chất phóng xạ α có chu kỳ bán rã 138 ngày. Giả sử lúc đầu có 100 Poloni. Tính khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày theo đơn vị gam (làm tròn kết quả đến phần nghìn).

Lời giải

Khối lượng Poloni còn lại sau 100 ngày là:

$$m(100) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{100}{138}} \approx 60,515(g).$$

Câu 77. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức:

$$M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), 0 \leq t \leq 12 \text{ (đơn vị: \%)}$$

a) Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

b) Đến tháng thứ mấy thì nhóm học sinh đó nhớ được khoảng một nửa danh sách các loài động vật đã xem?

Lời giải

a) Sau 6 tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó là:

$$M(6) = 75 - 20 \ln(6+1) \approx 36,08\%.$$

b) Theo giả thiết, học sinh nhớ được một nửa danh sách các loài vật, tức là

$$M(t) = 50(\%)$$

Ta có:

$$50 = 75 - 20 \ln(t+1) \Leftrightarrow \ln(t+1) = \frac{5}{4} \Leftrightarrow t+1 = e^{\frac{5}{4}} \Leftrightarrow t \approx 2,49 \text{ (tháng)}.$$

Vậy qua tháng thứ 3 khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh là 50 (%).

Câu 78. Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hoá bằng công thức: $V(t) = 780 \cdot (0,905)^t$. Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc ô tô đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Ta cần tìm t sao cho $V(t) \leq 300 \Leftrightarrow 780 \cdot (0,905)^t \leq 300 \Leftrightarrow (0,905)^t \leq \frac{5}{13} \Leftrightarrow t \geq \log_{0,905} \frac{5}{13} \approx 9,6$.

Vậy sau khoảng 10 năm sử dụng, giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng.

Câu 79. Áp suất khí quyển p (tính bằng kilôpascal, viết tắt là kPa) ở độ cao h (so với mực nước biển, tính bằng km) được tính theo công thức sau: $\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7}$

(Theo britannica.com)

a) Tính áp suất khí quyển ở độ cao 4 km.

b) Ở độ cao trên 10 km thì áp suất khí quyển sẽ như thế nào?

Lời giải

a) Ta có: $\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{4}{7}$, từ đó: $\frac{p}{100} = e^{-\frac{4}{7}} \Leftrightarrow p = 100e^{-\frac{4}{7}} \approx 56,47(kPa)$.

b) Khi ở độ cao trên 10 km thì $h > 10$, do đó:

$\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7} < -\frac{10}{7} \Leftrightarrow 0 < \frac{p}{100} < e^{-\frac{10}{7}} \Leftrightarrow 0 < p < 100 \cdot e^{-\frac{10}{7}} \approx 23,97(kPa)$.

Vậy áp suất khí quyển sẽ nhỏ hơn 23,97 kPa.

Câu 80. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là: $A = 500 \cdot (1 + 0,075)^n$ (triệu đồng).

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Lời giải

Để có được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) thì

$500 \cdot 1,075^n \geq 800 \Leftrightarrow 1,075^n \geq 1,6 \Leftrightarrow n \geq \log_{1,075} 1,6 \approx 6,5$ (năm)

Vậy cần tối thiểu 7 năm gửi tiết kiệm thì bác An thu được ít nhất 800 triệu đồng.

Câu 81. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau: $N(t) = 500e^{0,4t}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con?

Lời giải

Số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con khi và chỉ khi

$N(t) \geq 80000 \Leftrightarrow 500e^{0,4t} \geq 80000 \Leftrightarrow e^{0,4t} \geq 160 \Leftrightarrow t \geq \ln 160 : 0,4 \approx 12,69$ (giờ)

Vậy sau khoảng 12,69 giờ thì số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con.

Câu 82. Giả sử nhiệt độ $T(^{\circ}C)$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 25 + 70e^{-0,5t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút.

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}C$?

Lời giải

a) Nhiệt độ T_0 ban đầu của vật ứng với nhiệt độ tại thời điểm $t = 0$, từ đó ta được

$$T_0 = T(0) = 25 + 70e^{-0,5 \cdot 0} = 25 + 70 = 95(^{\circ}C). 16$$

b) Nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}C$ khi t thỏa mãn phương trình

$$25 + 70e^{-0,5t} = 30 \Leftrightarrow e^{-0,5t} = \frac{1}{14} \Leftrightarrow -0,5t = \ln \frac{1}{14} \Leftrightarrow t = 2 \ln 14 \approx 5,278.$$

Vậy sau khoảng 5,28 phút thì nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}C$.

Câu 83. Tính nồng độ ion hydrogen (tính bằng mol/lít) của một dung dịch có độ pH là 8.

Lời giải

Do nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ pH là 8 nên

$$-\log[H^+] = 8 \Leftrightarrow [H^+] = 10^{-8}. \text{ Vậy nồng độ ion hydrogen của một dung dịch là } 10^{-8} \text{ mol / lít.}$$

Câu 84. Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ

$$\text{còn giá trị là } A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n.$$

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?

b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là bao nhiêu?

c) Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

Lời giải

a) Nếu tỉ lệ lạm phát 8% một năm thì 100 triệu đồng sau 2 năm sức mua sẽ còn lại là

$$A = 100 \cdot (1 - 0,08)^2 = 84,649 \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{b) Ta có: } 100 \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^2 = 90 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{r}{100}\right)^2 = \frac{9}{10} \Leftrightarrow 1 - \frac{r}{100} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow r = 100 \left(1 - \frac{3\sqrt{10}}{10}\right) \approx 5.$$

Vậy tỉ lệ lạm phát khoảng 5% một năm.

c) Với tỉ lệ lạm phát 5% một năm thì với số tiền P ban đầu sau n năm sức mua còn lại là

$$A = P \cdot (1 - 0,05)^n. \text{ Theo giả thiết, ta có:}$$

$$P \cdot (1 - 0,05)^n = \frac{P}{2} \Leftrightarrow 0,95^n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n = \log_{0,95} \frac{1}{2} \approx 13,51.$$

Vậy với tỉ lệ lạm phát 5% một năm sau khoảng 14 năm thì sức mua chỉ còn lại một nửa.

Câu 85. Giả sử quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có: $N(t) = N_0 e^{rt}$, trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ.

Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi:

a) Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là khoảng bao nhiêu con?

b) Sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi?

Lời giải

a) Ta có: $800 = 500e^{r \cdot 1} \Leftrightarrow r = \ln 1,6 \approx 0,47$. Vậy số lượng vi khuẩn sau 5 giờ là

$$N = N(5) = 500e^{5 \ln 1,6} = 500 \cdot 1,6^5 = 5242,88; \text{ tức là khoảng } 5242 \text{ con.}$$

$$\text{b) Ta có: } 2 \cdot 500 = 500e^{t \ln 1,6} = 500 \cdot 1,6^t \Leftrightarrow 1,6^t = 2 \Leftrightarrow t = \log_{1,6} 2 \approx 1,47.$$

Vậy sau khoảng 1,47 giờ thì số lượng vi khuẩn sẽ tăng gấp đôi.

Câu 86. Vào năm 1938, nhà vật lý Frank Benford đã đưa ra một phương pháp để xác định xem một bộ số đã được chọn ngẫu nhiên hay đã được chọn theo cách thủ công. Nếu bộ số này không được chọn ngẫu nhiên thì công thức Benford sau sẽ được dùng ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của bộ số đó:

$$P = \log \frac{d+1}{d}.$$

Chẳng hạn, xác suất để chữ số đầu tiên là 9 bằng khoảng 4,6% (thay $d = 9$ trong công thức Benford để tính P).

- Viết công thức tìm chữ số d nếu cho trước xác suất P .
- Tìm chữ số có xác suất bằng 9,7% được chọn.
- Tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1.

Lời giải

a) Ta có: $P = \log \frac{d+1}{d} \Leftrightarrow \frac{d+1}{d} = 10^P \Leftrightarrow d = \frac{1}{10^P - 1}.$

b) Nếu $P = 9,7\%$ thì $d = \frac{1}{10^{9,7\%} - 1} \approx 4$. Vậy số được chọn là 4.

c) Xác suất để chữ số đầu tiên là 1 là $P = \log \frac{1+1}{1} = \log 2 \approx 30,1\%.$

Câu 87. Dân số thế giới năm 2020 là khoảng 7,79 tỉ người và tăng với tốc độ khoảng 1,05% mỗi năm (theo danso.org). Giả sử tốc độ tăng này không đổi. Khi đó mô hình $P(t) = 7,79 \cdot (1,0105)^{t-2020}$ có thể dùng để ước tính dân số thế giới (theo đơn vị tỉ người) vào năm t .

- Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người?
- Theo mô hình này, khi nào dân số thế giới đạt 10 tỉ người?

Lời giải

- a) Dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người khi t thỏa mãn phương trình:

$$\begin{aligned} 7,79 \cdot (1,0105)^{t-2020} &= 8,5 \\ \Leftrightarrow 1,0105^{t-2020} &= \frac{8,5}{7,79} \\ \Leftrightarrow t - 2020 &= \log_{1,0105} \frac{8,5}{7,79} \\ \Leftrightarrow t &= 2020 + \log_{1,0105} \frac{8,5}{7,79} \approx 2028,35. \end{aligned}$$

Vậy theo mô hình đã cho thì đến năm 2029 dân số thế giới đạt 8,5 tỉ người.

- b) Dân số thế giới là 10 tỉ người khi t thỏa mãn phương trình:

$$\begin{aligned} 7,79 \cdot (1,0105)^{t-2020} &= 10 \\ \Leftrightarrow (1,0105)^{t-2020} &= \frac{10}{7,79} \\ \Leftrightarrow t - 2020 &= \log_{1,0105} \frac{10}{7,79} \\ \Leftrightarrow t &= 2020 + \log_{1,0105} \frac{10}{7,79} \approx 2043,91. \end{aligned}$$

Vậy theo mô hình đã cho thì đến năm 2044 dân số thế giới đạt 10 tỉ người.

Câu 88. Áp suất khí quyển p lên một vật giảm khi độ cao tăng dần. Giả sử áp suất này (tính bằng milimét thủy ngân) được biểu diễn theo độ cao h (tính bằng kilômét) so với mực nước biển bằng công thức $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h}$.

- a) Một máy bay đang chịu áp suất khí quyển 320mmHg. Tìm độ cao của máy bay đó.

b) Một người đứng trên đỉnh của một ngọn núi và chịu áp suất khí quyển 667mmHg . Tìm chiều cao của ngọn núi này.

Lời giải

a) Giải phương trình $760e^{-0,145h} = 320$, ta tìm được $h \approx 5,965\text{ km}$.

Vậy độ cao của máy bay là khoảng $5,965\text{ km}$.

b) Giải phương trình $760e^{-0,145h} = 667$, ta tìm được $h \approx 0,9\text{ km}$.

Vậy chiều cao của ngọn núi là khoảng $0,9\text{ km}$.

Câu 89. Giả sử giá trị còn lại V (triệu đồng) của một chiếc ô tô nào đó sau t năm được cho bằng công thức $V(t) = 730 \cdot (0,82)^t$.

a) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng?

b) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng?

(Kết quả của câu a và câu b được tính tròn năm).

Lời giải

a) Giải phương trình $730 \cdot (0,82)^t = 500$, ta được $t \approx 1,91$ năm.

Vậy chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng sau khoảng 2 năm.

b) Giải phương trình $730 \cdot (0,82)^t = 200$, ta được $t \approx 6,52$ năm.

Vậy chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng sau khoảng 7 năm.

Câu 90. Giả sử tổng chi phí hoạt động (đơn vị tỉ đồng) trong một năm của một công ty được tính bằng công thức $C(t) = 90 - 50e^{-t}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm kể từ khi công ty được thành lập. Tính chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Chi phí hoạt động của công ty đó vào năm thứ 10 sau khi thành lập là:

$$C(10) = 90 - 50e^{-10} \approx 89,998 \text{ (tỉ đồng)}$$

Câu 91. Nhắc lại rằng độ pH của một dung dịch được tính bằng công thức $pH = -\log[H^+]$, ở đó $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen của dung dịch tính bằng mol/lít. Biết rằng máu của người bình thường có độ pH từ 7,30 đến 7,45. Hỏi nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn nào?

Lời giải

$$\text{Ta có: } 7,30 \leq -\log[H^+] \leq 7,45$$

$$\Leftrightarrow -7,30 \geq \log[H^+] \geq -7,45$$

$$\Leftrightarrow 10^{-7,30} \geq [H^+] \geq 10^{-7,45}.$$

Vậy nồng độ ion hydrogen trong máu người bình thường nhận giá trị trong đoạn $[5,01 \cdot 10^{-8}; 3,55 \cdot 10^{-8}]$.

Câu 92. Nhắc lại rằng mức cường độ âm (đo bằng dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, trong đó I

là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

a) Tính cường độ âm của âm thanh tàu điện ngầm có mức cường độ âm là 100 dB.

b) Âm thanh trên một tuyến đường giao thông có mức cường độ âm thay đổi từ 70 dB đến 85 dB. Hỏi cường độ âm thay đổi trong đoạn nào?

Lời giải

a) Giải phương trình $100 = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, ta tìm được $I = 0,01$.

$$\text{b) Ta có: } 70 \leq 10 \log \frac{1}{10^{-12}} \leq 85.$$

Giải bất phương trình này, ta được $10^{-5} \leq I \leq 10^{-3,5}$.

Trang 44 Fanpage Nguyễn Bảo Vương <https://www.facebook.com/tracnghiemtoanthpt489/>

$\Leftrightarrow 0,0093t > \ln \frac{110000000}{98564407}$. Suy ra $t > 11,803$. Vậy sau 12 năm tính từ mốc năm 2021, tức là từ năm 2033 trở đi, dân số Việt Nam vượt quá 110 triệu người.

Câu 97. Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Mức cường độ âm ở một khu dân cư được quy định là dưới $60 dB$. Hỏi cường độ âm ở khu vực đó phải dưới bao nhiêu W/m^2 ?

Lời giải

$$\text{Ta có: } L < 60 \Leftrightarrow 10 \log \frac{I}{10^{-12}} < 60 \Leftrightarrow \log \frac{I}{10^{-12}} < 6 \Leftrightarrow \log I - \log 10^{-12} < 6$$

$$\Leftrightarrow \log I + 12 < 6 \Leftrightarrow \log I < -6 \Leftrightarrow I < 10^{-6}.$$

Vậy cường độ âm ở khu vực đó phải dưới $10^{-6} (W/m^2)$.

Câu 98. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là $x\%/năm$ ($x > 0$). Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x , biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

$$100 \times (1+x)^3 = 119,1016 \Leftrightarrow (1+x)^3 = 1,191016 \Leftrightarrow 1+x = 1,06 \Leftrightarrow x = 0,6(\%)$$

Câu 99. Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở Ví dụ 14, hãy tính cường độ âm mà tai người có thể chịu đựng được, biết rằng giá trị cực đại của mức cường độ âm mà tai người có thể chịu đựng được là $130 dB$.

Lời giải

$$\text{Công thức tính mức cường độ âm: } L = \log \frac{I}{I_0}$$

Mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được là:

$$L_1 = \log \frac{10^{-12}}{10^{-12}} = 0(B)$$

$$L_2 = \log \frac{10}{10^{-12}} = 13(B)$$

Vậy mức cường độ âm mà tai người nghe được $0(B) - 13(B)$

Câu 100. Trong một trận động đất, năng lượng giải toả E (đơn vị: Jun, kí hiệu J) tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức: $\log E \approx 11,4 + 1,5M$.

(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021)

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter.

b) Năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng bao nhiêu lần năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter?

Lời giải

a) Năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter là:

$$\log E \approx 11,4 + 1,5M \approx 11,4 + 1,5 \cdot 5 \approx 18,9 \Rightarrow E \approx 10^{18,9} \approx 7,9 \cdot 10^{18}$$

b) Năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter là:

$$\log E \approx 11,4 + 1,5M \approx 11,4 + 1,5 \cdot 8 \approx 23,4 \Rightarrow E \approx 10^{23,4} \approx 2,5 \cdot 10^{23}$$

Năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng 31645 lần năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter

Câu 101. Trong cây cối có chất phóng xạ $^{14}_6C$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ của nó bằng 86% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của $^{14}_6C$ là $T = 5730$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t được cho bởi công

thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ

(Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021).

Lời giải

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5730}$$

$$H = H_0 e^{-\lambda t} = 0,86 H_0 \cdot e^{\frac{\ln 2}{5730} t} \Leftrightarrow 0,86 \cdot e^{\frac{\ln 2}{5730} t} = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln 2}{5730} t} = \frac{50}{43} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{5730} t = \ln \frac{50}{43} \Leftrightarrow t \approx 1246,8 \text{ (nam)}$$

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ là: 1246,8 năm

Câu 102. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là 6% / năm. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất bao nhiêu năm? Biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

Gọi x là số năm người đó gửi tiền trong ngân hàng.

Số tiền cả gốc và lãi người đó có được sau x năm được tính bởi công thức:

$S = 100 \cdot 1,06^x$. Để có được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì

$100 \cdot 1,06^x > 130 \Leftrightarrow 1,06^x > 1,3 \Leftrightarrow x > \log_{1,06} 1,3$. Suy ra $x > 4,503$. Do kì hạn gửi là 12 tháng nên để rút được số tiền cả gốc và lãi nhiều hơn 130 triệu đồng thì người đó phải gửi ít nhất 5 năm.

Câu 103. Độ pH của đất thích hợp cho trồng hoa hồng là từ 6,5 đến 7. Tính nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ của đất để thích hợp cho trồng hoa hồng.

Lời giải

Ta có: $6,5 < -\log[H^+] < 7 \Leftrightarrow -7 < \log[H^+] < -6,5 \Leftrightarrow 10^{-7} < [H^+] < 10^{-6,5}$.

Vậy nồng độ của ion hydrogen $[H^+]$ của đất trong khoảng $(10^{-7}; 10^{-6,5})$ thì thích hợp để trồng hoa hồng.

Câu 104. Người ta nuôi cấy vi khuẩn Bacillus subtilis trong nồi lên men và thu được số liệu sau: Lúc ban đầu, số tế bào /1ml dịch nuôi là $2 \cdot 10^2$. Sau 13 giờ, số tế bào / 1ml dịch nuôi là $3,33 \cdot 10^9$. Biết vi khuẩn Bacillus subtilis sinh trưởng trong điều kiện hoàn toàn tối ưu và sinh sản theo hình thức tự nhân đôi. Hỏi sau bao nhiêu phút, vi khuẩn Bacillus subtilis tự nhân đôi một lần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi T (phút) là thời gian để vi khuẩn Bacillus subtilis tự nhân đôi một lần. Theo giả thiết, ta có:

$$3,33 \cdot 10^9 = 2 \cdot 10^2 \cdot 2^{\frac{13 \cdot 60}{T}} \Leftrightarrow \frac{13 \cdot 60}{T} = \log_2(1,665 \cdot 10^7).$$

Suy ra $T \approx 33$ phút.

Câu 105. Tốc độ của gió S (dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức:

$S = 93 \log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy đó di chuyển được.

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Tính quãng đường cơn lốc xoáy đã di chuyển được, biết tốc độ của gió ở gần tâm bằng 140 dặm/giờ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

6,4 dặm.

Câu 106. Dân số thành phố Hà Nội năm 2022 khoảng 8,4 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Hà Nội không đổi và bằng $r = 1,04\%$. Biết rằng, sau t năm dân số Hà Nội (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức: $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số của Hà Nội vượt quá 10 triệu người?

Lời giải

Ta có: $8,4e^{0,0104t} > 10 \Leftrightarrow t > \frac{\ln 10 - \ln 8,4}{0,0104}$. Suy ra $t > 16,764$. Vậy sau khoảng 17 năm tính từ mốc năm

2022, tức là từ năm 2039 thì dân số Hà Nội vượt quá 10 triệu người.

Câu 107. Mức cường độ âm $L(\text{dB})$ được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó $I (\text{W} / \text{m}^2)$ là cường độ âm. Để đảm bảo sức khỏe cho công nhân, mức cường độ âm trong một nhà máy phải giữ sao cho không vượt quá 85 dB . Hỏi cường độ âm của nhà máy đó phải thỏa mãn điều kiện nào để đảm bảo sức khỏe cho công nhân?

Lời giải

Cường độ âm của nhà máy đó không vượt quá $10^{-3,5} (\text{W} / \text{m}^2)$.

Câu 108. Số lượng của một loài vi khuẩn sau x giờ được tính bởi công thức $f(x) = Ae^{rx}$, trong đó, A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$). Biết số vi khuẩn ban đầu là 1000 con và sau 10 giờ tăng trưởng thành 5000 con.

a) Tính tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn.

b) Hỏi sau khoảng bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng vi khuẩn ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Theo giả thiết, ta có: $1000e^{10r} = 5000 \Leftrightarrow e^{10r} = 5$.

Suy ra tỉ lệ tăng trưởng của vi khuẩn là: $r = \frac{\ln 5}{10}$.

b) Khi số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần so với số lượng vi khuẩn ban đầu thì ta có phương trình:

$$Ae^{rx} = 10A \Leftrightarrow e^{rx} = 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{r}. \text{ Thay } r = \frac{\ln 5}{10} \text{ ta có: } x = \frac{\ln 10}{\frac{\ln 5}{10}} \approx 14.$$

Vậy sau khoảng 14 giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần.

Câu 109. Với nước biển có nồng độ muối 30%, nhiệt độ $T (^\circ \text{C})$ của nước biển được tính bởi công thức

$$T = 7,9 \ln(1,0245 - d) + 61,84, \text{ ở đó } d (\text{g} / \text{cm}^3) \text{ là khối lượng riêng của nước biển.}$$

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

Biết vùng biển khơi mặt ở một khu vực có nồng độ muối 30% và nhiệt độ là 8°C . Tính khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó (làm tròn kết quả đến hàng phần chục nghìn).

Lời giải

Theo giả thiết, với $T = 8$ ta có phương trình:

$$7,9 \ln(1,0245 - d) + 61,84 = 8 \Leftrightarrow \ln(1,0245 - d) = \frac{-2692}{395}$$

$$\Leftrightarrow 1,0245 - d = e^{\frac{-2692}{395}} \Leftrightarrow d = 1,0245 - e^{\frac{-2692}{395}}.$$

Suy ra khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó là: $d \approx 1,0234 \text{ g} / \text{cm}^3$.

Câu 110. Cường độ của một trận động đất, kí hiệu là M (độ Richter), được cho bởi công thức

$M = \log A - \log A_0$, ở đó A là biên độ rung chấn tối đa đo được bằng địa chấn kế và A_0 là biên độ chuẩn (hằng số phụ thuộc vào từng khu vực)

(Nguồn: https://vi.wikipedia.org/wiki/Độ_Richter)

Vào hồi 12 giờ 14 phút trưa ngày 27/07/2020, tại khu vực huyện Mộc Châu, Sơn La xảy ra trận động đất thứ nhất với cường độ 5,3 độ Richter. Trong vòng 20 tiếng đồng hồ, Sơn La đã xảy ra liên tiếp 7 trận động đất. Đến 8 giờ 26 phút sáng 28/07/2020, trận động đất thứ bảy xảy ra với cường độ 4 độ Richter.

(Nguồn: <https://plo.vn/7-tran-dong-dat-lien-tiep-o-son-la-trong-vong-20-tieng-dong-ho-post585443.html>)

Biết rằng biên độ chuẩn được dùng cho cả tỉnh Sơn La. Hỏi biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng mấy lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Cường độ trận động đất thứ nhất là: $M_1 = \log A_1 - \log A_0 = 5,3$.

Cường độ trận động đất thứ bảy là: $M_7 = \log A_7 - \log A_0 = 4$.

Do đó, ta có:

$$M_1 - M_7 = \log A_1 - \log A_7 = 1,3 \Leftrightarrow \log \frac{A_1}{A_7} = 1,3 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_7} = 10^{1,3}. \text{ Suy ra } \frac{A_1}{A_7} \approx 20.$$

Vậy biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ nhất gấp khoảng 20 lần biên độ rung chấn tối đa của trận động đất thứ bảy.

Câu 111. Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là $M_0(g)$ thì khối lượng carbon-14 còn

lại (tính theo gam) sau t năm được tính theo công thức $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ (g), trong đó $T = 5730$ (năm) là

chu kỳ bán rã của carbon-14. Nghiên cứu hoá thạch của một sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong hoá thạch là $5 \cdot 10^{-13} g$. Nhờ biết tỉ lệ khối lượng của carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể sinh vật sống, người ta xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể lúc sinh vật chết là $M_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}(g)$. Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (Làm tròn kết quả đến hàng trăm.)

Lời giải

Gọi t là thời gian từ lúc sinh vật chết đến nay. Ta có:

$$5 \cdot 10^{-13} = 1,2 \cdot 10^{-12} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = \frac{5}{12} \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12} \\ \Leftrightarrow t = T \log_{\frac{1}{2}} \frac{5}{12} = -5730 \cdot \log_2 \frac{5}{12} \approx 7237 \approx 7200.$$

Vậy sinh vật này sống cách đây khoảng 7200 năm.

Câu 112. Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là

$$M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}, \text{ trong đó } t \text{ là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và } T \text{ là chu kỳ bán rã của chất. Đồng vị}$$

plutonium-234 có chu kỳ bán rã là 9 giờ.

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Plutonium\#section=AtomicMass-Half-Life-and-Decay>)

Từ khối lượng ban đầu 200 g, sau bao lâu thì khối lượng plutonium-234 còn lại là:

a) 100 g ?

b) 50 g ?

c) 20 g ?

Lời giải

$$M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{M(t)}{M_0}$$

$$\text{a) Khi } M(t) = 100 \text{ thì } t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{100}{200} = 9 \text{ (giờ)}$$

$$\text{b) Khi } M(t) = 50 \text{ thì } t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{50}{200} = 18 \text{ (giờ)}$$

$$\text{c) Khi } M(t) = 20 \text{ thì } t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{20}{200} = 30 \text{ (giờ)}$$

Câu 113. Nước chanh có độ pH bằng 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

Kí hiệu x, y lần lượt là nồng độ H^+ trong nước chanh và giấm. Theo giả thiết, ta có

$$2,4 = -\log x \text{ và } 3 = -\log y. \text{ Suy ra } x = 10^{-2,4} \text{ và } y = 10^{-3}. \text{ Suy ra } \frac{x}{y} = \frac{10^{-2,4}}{10^{-3}} = 10^{0,6} \approx 3,98.$$

Vậy nồng độ H^+ của nước chanh gấp 3,98 lần nồng độ H^+ của giấm.

Câu 114. Nước uống đạt tiêu chuẩn phải có độ pH nằm trong khoảng từ 6,5 đến 8,5 (theo Quy chuẩn Việt Nam QCVN 01:2009/BYT). Nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng nào?

Lời giải

$$\text{Ta có: } 6,5 \leq pH \leq 8,5 \Leftrightarrow 6,5 \leq -\log x \leq 8,5 \Leftrightarrow 3,2 \cdot 10^{-9} \leq x \leq 3,2 \cdot 10^{-7}$$

Vậy nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng từ $3,2 \cdot 10^{-9}$ tới $3,2 \cdot 10^{-7}$

Câu 115. Chất phóng xạ polonium-210 có chu kỳ bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng

$$\text{polonium-210 còn lại sau } t \text{ ngày được tính theo công thức } M(t) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} (g).$$

(Nguồn: <https://pubchem.ncbi.nlm.nih.gov/element/Polonium\#section=Atomic-Mass-Half-Life-and-Decay>)

a) Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?

b) Sau bao lâu thì còn lại 40 g polonium-210?

Lời giải

$$\text{a) Khối lượng polonium-210 còn lại sau 2 năm (730 ngày) là: } M(2) = 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{730}{138}} = 2,56(g)$$

$$\text{b) } M(t) = 40 \text{ khi } 100 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} = 40 \Leftrightarrow t = 182,4.$$

Vậy sau 182,4 ngày còn lại 40 g polonium-210

Câu 116. Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right) (dB)$, trong đó I là

cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} W/m^2$.

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52)

a) Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học có mức cường độ âm là 50 dB. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?

b) Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ 75 dB đến 90 dB. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

Lời giải

$$\text{a) Khi } L = 50 \text{ thì } 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 50 \Leftrightarrow I = 10^{-7}$$

Vậy cường độ âm của giọng nói giáo viên là $10^{-7} W/m^2$

$$\text{b) Khi } L = 75 \text{ thì } 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 75 \Leftrightarrow I = 3,2 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Khi } L = 90 \text{ thì } 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) = 90 \Leftrightarrow I = 10^{-3}$$

Vậy cường độ âm trong nhà xưởng thay đổi từ $3,2 \cdot 10^{-5}$ đến 10^{-3}

Câu 117. Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1000 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện ra số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày.

- a) Công thức $P(t) = P_0 \cdot a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Xác định các tham số P_0 và $a(a > 0)$. Làm tròn a đến hàng phần trăm.
- b) Sau 5 ngày thì số lượng vi khuẩn bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng trăm.
- c) Sau bao nhiêu ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Ta có: $P(t) = 1000 \cdot 1,25^{\frac{t}{2}} = 1000 \cdot \left(1,25^{\frac{1}{2}}\right)^t = 1000 \cdot 1,12^t$

Vậy $P_0 = 1000; a = 1,12$

b) Sau 5 ngày, ta có: $P(5) = 1000 \cdot 1,12^5 = 1800$

c) Khi $P(t) = 2P_0$ thì $1000 \cdot 1,12^t = 2 \cdot 1000$

Suy ra $t = 6,2$

Câu 118. Nhắc lại rằng, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L . Nồng độ H^+ trong dung dịch cho biết độ acid của dung dịch đó.

- a) Dung dịch acid A có độ pH bằng 1,9; dung dịch acid B có độ pH bằng 2,5. Dung dịch nào có độ acid cao hơn và cao hơn bao nhiêu lần?
- b) Nước cất có nồng độ H^+ là $10^{-7} mol/L$. Nước chảy ra từ một vòi nước có độ pH từ 6,5 đến 6,7 thì có độ acid cao hay thấp hơn nước cất?

Lời giải

a) Nồng độ H^+ của dung dịch A là: $10^{-1,9}$

Nồng độ H^+ của dung dịch B là: $10^{-2,5}$

Suy ra nồng độ acid của dung dịch A cao hơn dung dịch B $\frac{10^{-1,9}}{10^{-2,5}} = 3,98$

b) Nước chảy ra từ vòi có nồng độ H^+ từ $10^{-6,7}$ đến $10^{-6,5}$

Vậy nước đó có độ acid cao hơn nước cất

Câu 119. Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kỳ bán rã là $T = 703800000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng

Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng Uranium-235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

Lời giải

Khi $M = 90 g$, ta có phương trình:

$$90 = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}} = 0,9 \Leftrightarrow \frac{t}{T} = \log_{\frac{1}{2}} 0,9$$
$$\Leftrightarrow t = T \cdot \log_{\frac{1}{2}} 0,9 \approx 106979777 \text{ (năm)}.$$

Câu 120. Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililit nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 9000 vi khuẩn và

sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 6000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1000?

Lời giải

$$6000 = 9000 \cdot 10^{-2\alpha} \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \log \frac{2}{3} = \frac{1}{2} \log \frac{3}{2}$$

$$9000 \cdot 10^{-\alpha t} \leq 1000 \Leftrightarrow 10^{-\alpha t} \leq \frac{1}{9} \Leftrightarrow -\alpha t \leq \log \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow t \geq -\frac{2}{\alpha} \log \frac{1}{3} = -\frac{2}{\frac{1}{2} \log \frac{3}{2}} \cdot \log \frac{1}{3} = \frac{4 \log 3}{\log \frac{3}{2}} \approx 10,8 \text{ (giờ)}.$$

Câu 121. Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L . Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A ?

Lời giải

$$\text{Ta có: } pH_A = -\log x_A; pH_B = -\log x_B$$

$$\Rightarrow pH_A - pH_B = -\log x_A + \log x_B = \log \frac{x_B}{x_A}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \log \frac{x_B}{x_A} = 0,7 \Rightarrow \frac{x_B}{x_A} = 10^{0,7} \approx 5 \text{ (lần)}.$$

Câu 122. Công thức $M = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ cho biết khối lượng của một chất phóng xạ sau thời gian t kể từ thời

điểm nào đó (gọi là thời điểm ban đầu), M_0 là khối lượng ban đầu, T là chu kỳ bán rã của chất phóng xạ đó (cứ sau mỗi chu kỳ, khối lượng của chất phóng xạ giảm đi một nửa). Trong một phòng thí nghiệm, với khối lượng 200 g radon ban đầu, sau 16 ngày, chỉ còn lại 11 g. Chu kỳ bán rã của radon bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$11 = 200 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{16}{T}} \Leftrightarrow \frac{16}{T} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{11}{200} = \log_2 \frac{200}{11} \Leftrightarrow T = \frac{16}{\log_2 \frac{200}{11}} \approx 3,8 \text{ (ngày)}.$$

Câu 123. Công thức $\log x = 11,8 + 1,5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng x tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương 10^{-7} jun) với độ lớn M theo thang Richter của một trận động đất.

a) Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp bao nhiêu lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter?

b) Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng nào?

Lời giải

a) Gọi x_1, x_2 (erg) lần lượt là năng lượng tạo ra của hai trận động đất có độ lớn lần lượt là $M_1 = 5, M_2 = 3$ (độ Richter).

$$\text{Ta có: } \log x_1 = 11,8 + 1,5M_1; \log x_2 = 11,8 + 1,5M_2$$

$$\Rightarrow \log x_1 - \log x_2 = 1,5(M_1 - M_2) \Rightarrow \log \frac{x_1}{x_2} = 3 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 10^3 = 1000.$$

$$\text{b) } 11,8 + 1,5 \cdot 4 \leq \log x \leq 11,8 + 1,5 \cdot 6 \Rightarrow 17,8 \leq \log x \leq 20,8 \Rightarrow 10^{17,8} \leq x \leq 10^{20,8}.$$

Câu 124. Dân số ở một địa phương được ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{r \cdot t}$, trong đó A không đổi là dân số của năm 2023, S là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Hỏi đến năm nào thì dân số ở địa phương đó sẽ đạt gấp đôi dân số năm 2023? Biết $r = 1,13\%$ / năm.

Lời giải

Dân số đạt gấp đôi nghĩa là $S = 2A$, ta có:

$$2A = A \cdot e^{1,13\% \cdot t} \Leftrightarrow e^{1,13\% \cdot t} = 2 \Leftrightarrow 1,13\% \cdot t = \ln_e 2 \Leftrightarrow t = \frac{\ln 2}{1,13\%} \approx 61,34 \text{ (do } e > 1 \text{)}.$$

Vậy sau 62 năm tức đến năm 2085 thì dân số ở địa phương đó sẽ gấp đôi dân số năm 2023.

Câu 125. Giả sử giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc ô tô sau t năm sử dụng được mô hình hoá bằng công thức: $V(t) = A \cdot (0,905)^t$, trong đó A là giá xe (tính theo triệu đồng) lúc mới mua. Hỏi nếu theo mô hình này, sau bao nhiêu năm sử dụng thì giá trị của chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). Biết $A = 780$ (triệu đồng).

Lời giải

Ta có: $V(t) \leq 300 \Leftrightarrow 780 \cdot (0,905)^t \leq 300$

$$\Leftrightarrow (0,905)^t \leq \frac{5}{13} \Leftrightarrow t \geq \log_{0,905} \left(\frac{5}{13} \right) \approx 9,6 \text{ (do } 0 < 0,905 < 1 \text{)}.$$

Vậy sau khoảng 10 năm sử dụng, giá trị chiếc xe đó còn lại không quá 300 triệu đồng.

Câu 126. Anh Hưng gửi tiết kiệm khoản tiền 700 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất 7%/năm theo hình thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để anh Hưng thu được ít nhất 1 tỉ đồng (cả vốn lẫn lãi). Cho biết công thức lãi kép là $T = A \cdot (1+r)^n$, trong đó A là tiền vốn, T là tiền vốn và lãi nhận được sau n năm, r là lãi suất/năm.

Lời giải

Ta có: $T \geq 1000 \Leftrightarrow 700(1+7\%)^n \geq 1000 \Leftrightarrow 1,07^n \geq \frac{10}{7}$

$$\Leftrightarrow n \geq \log_{1,07} \left(\frac{10}{7} \right) \approx 5,27 \text{ (do } 1,07 > 1 \text{)}.$$

Vậy thời gian gửi tiết kiệm phải ít nhất 6 năm thì anh Hưng mới thu được ít nhất 1 tỉ đồng.

Câu 127. Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm. Mức cường độ âm ở một khu dân cư được quy định là dưới $60dB$. Hỏi cường độ âm của khu vực đó phải dưới bao nhiêu W/m^2 ?

Lời giải

Ta có: $L < 60 \Leftrightarrow 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) < 60 \Leftrightarrow \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) < 6$

$$\Leftrightarrow \frac{I}{10^{-12}} < 10^6 \Leftrightarrow I < 10^{-6} \text{ (do } 10 > 1 \text{)}.$$

Vậy cường độ âm ở khu vực đó phải dưới $10^{-6} (W/m^2)$.

Câu 128. Số lượng của một loài vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 6 giờ có 2000 con. Hỏi ít nhất bao nhiêu giờ, kể từ lúc bắt đầu, số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con?

Lời giải

Ta có: $A = 500, S(360) = 2000, 6 \text{ giờ} = 360 \text{ phút}$.

Sau 6 giờ số lượng vi khuẩn là 2000 con, tức là: $2000 = 500 \cdot e^{r \cdot 360}$

$$\Leftrightarrow e^{r \cdot 360} = 4 \Leftrightarrow r = \frac{\ln 4}{360} \text{ (do } e > 1 \text{)}.$$

Số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con, nghĩa là: $500 \cdot e^{\frac{\ln 4}{360} \cdot t} \geq 120000$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{\ln 4}{360}t} \geq 240 \Leftrightarrow \frac{\ln 4}{360} \cdot t \geq \ln 240 \Leftrightarrow t \geq \frac{360 \cdot \ln 240}{\ln 4} \approx 1423,24 \text{ (phút)}.$$

Vậy sau ít nhất 24 (giờ) thì số lượng vi khuẩn đạt ít nhất 120000 con.

Câu 129. Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng).

Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là:

$$A = P \left(1 - \frac{r}{100} \right)^n$$

- a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?
 b) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau ba năm chỉ còn lại 80 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của ba năm đó là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?
 c) Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là 6% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

Lời giải

- a) Giả thiết cho $P = 100$ triệu đồng, $r\% = 7\%$, $n = 2$ năm.

$$\text{Ta có: } A = 100 \cdot 10^6 \left(1 - \frac{7}{100} \right)^2 = 86490000 \text{ đồng}.$$

Vậy sau hai năm sức mua còn lại của 100000000 là 86490000 đồng.

- b) Giả thiết cho $P = 100$ triệu đồng, $A = 80$ triệu đồng, $n = 3$ năm.

$$\text{Ta có: } 80 = 100 \left(1 - \frac{r}{100} \right)^3 \Leftrightarrow 1 - \frac{r}{100} = \sqrt[3]{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow r \approx 7,17.$$

Vậy tỉ lệ lạm phát trung bình của ba năm là $r\% \approx 7,17\%$.

- c) Giả thiết cho $P = X$ triệu đồng, $A = \frac{X}{2}$ triệu đồng, $r\% = 6\%$.

$$\text{Ta có: } \frac{X}{2} = X \left(1 - \frac{6}{100} \right)^n \Leftrightarrow (0,94)^n = \frac{1}{2} \Leftrightarrow n \approx 11,2 \text{ (năm)}.$$

Vậy sau khoảng 12 năm sức mua của số tiền còn lại là một nửa.

Câu 130. Dân số nước ta năm 2022 ước tính là 99200000 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta không đổi là $r = 0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số nước ta vượt 120 triệu người?

Lời giải

Xét bất phương trình:

$$\begin{aligned} 99200000 \cdot e^{0,93\% \cdot t} > 120000000 &\Leftrightarrow e^{0,93\% \cdot t} > \frac{75}{62} \Leftrightarrow 0,93\% \cdot t > \ln \left(\frac{75}{62} \right) \\ &\Leftrightarrow t > 20,468. \end{aligned}$$

Vậy từ năm 2043 trở đi thì dân số nước ta vượt quá 120 triệu người.

Câu 131. Một người gửi tiết kiệm 10 tỉ đồng theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng với lãi suất 7% một năm và lãi hằng năm được nhập vào vốn. Sau ít nhất bao nhiêu năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng?

Lời giải

Theo công thức lãi kép: $T = A(1+r)^n$, số tiền người đó nhận được sau n năm là:

$$T = 10 \cdot 10^9 (1 + 7\%)^n = 10^{10} \cdot 1,07^n \text{ (đồng)}$$

Để nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng thì

$$T = 10^{10} \cdot 1,07^n > 12 \cdot 10^9 \Leftrightarrow 1,07^n > \frac{6}{5} \Leftrightarrow n > \log_{1,07} \left(\frac{6}{5} \right) \approx 2,695.$$

Vậy sau ít nhất 3 năm người đó nhận được số tiền nhiều hơn 12 tỉ đồng.

Câu 132. Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, bác Thảo đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng số tiền là 500 triệu đồng với lãi suất $r < 0$ cho kỳ hạn một năm. Điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi năm trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho năm sau (theo thể thức lãi kép). Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, bác đã thanh toán hợp đồng ngân hàng với số tiền là 599823000 đồng. Hỏi bác Thảo đã vay ngân hàng với lãi suất r là bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần nghìn)?

Lời giải

Ta có: $A = 500$ triệu đồng, lãi suất r / năm, $n = 2$ năm, $T = 599823000$ đồng.

Theo công thức lãi kép, ta có:

$$T = A(1+r)^n \Leftrightarrow 599823000 = 500000000(1+r)^2$$

$$\Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{599823}{500000}} - 1 \approx 0,095.$$

Vậy lãi suất mà bác Thảo vay ngân hàng là xấp xỉ 9,5%.

Câu 133. Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức mũ như sau

$$Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}} \right), \text{ với } t \text{ là khoảng thời gian tính bằng giờ và } Q_0 \text{ là dung lượng nạp tối đa. Hãy tính thời}$$

gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn pin cho đến khi điện thoại đạt được 80% dung lượng pin tối đa (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Theo giả thiết, ta có phương trình:

$$\frac{80}{100} Q_0 = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{3t}{2}} \right) \Rightarrow e^{-\frac{3t}{2}} = \frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{3t}{2} = -\ln 5 \Rightarrow t \approx 1,07 \text{ giờ}$$

Vậy thời gian nạp pin của điện thoại là khoảng 1,07 giờ.

Câu 134. Giả sử nhiệt độ $T(^{\circ}C)$ của một vật giảm dần theo thời gian được cho bởi công thức:

$$T = 25 + 70 \cdot e^{-\frac{1}{2}t}, \text{ trong đó thời gian } t \text{ được tính bằng phút.}$$

a) Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.

b) Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}C$ (làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải

a) Nhiệt độ ban đầu của vật ứng với mốc thời gian $t=0$ là:

$$T = 25 + 70 \cdot e^0 = 95^{\circ}C.$$

Vậy nhiệt độ ban đầu của vật là $95^{\circ}C$.

b) Nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}C$ nghĩa là:

$$25 + 70 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} = 30 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}t} = \frac{1}{14} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}t = -\ln 14 \Leftrightarrow t = 2 \cdot \ln 14 \approx 5,3.$$

Vậy sau khoảng khoảng 5,3 phút thì nhiệt độ của vật còn lại $30^{\circ}C$.

Câu 135. Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức

$$L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right), \text{ trong đó } I \text{ (đơn vị: } W/m^2) \text{ là cường độ âm. Hãy tính mức cường độ âm mà tai người}$$

có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12} W/m^2$ đến $10^1 W/m^2$.

Lời giải

Ta có:

$$10^{-12} \leq I \leq 10^1 \Leftrightarrow \frac{10^{-12}}{10^{-12}} \leq \frac{I}{10^{-12}} \leq \frac{10^1}{10^{-12}}$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq \frac{I}{10^{-12}} \leq 10^{13} \Leftrightarrow \log 1 \leq \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \leq \log 10^{13}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right) \leq 130 \text{ (do } 10 > 1)$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq L \leq 130.$$

Vậy mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được là từ $0dB$ đến $130dB$.

Nguyễn Bảo Vương

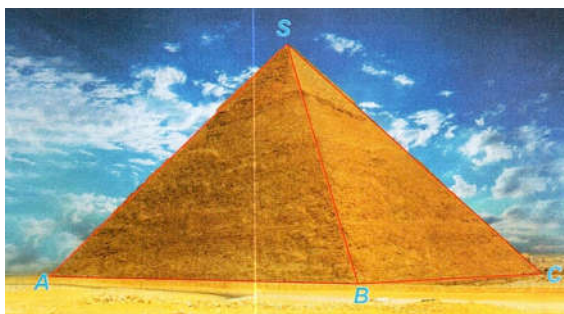
CHỦ ĐỀ 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

NỘI DUNG CÂU HỎI

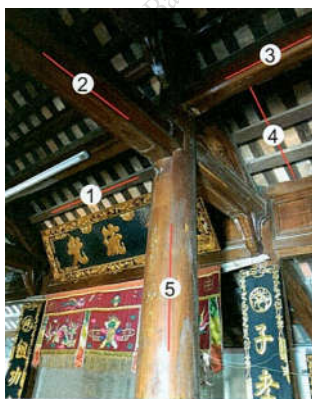
HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

Câu 1. Kim tự tháp Kheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219m (kích thước hiện nay). (Theo britannica.com). Tính (gần đúng) góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (H.7.4).



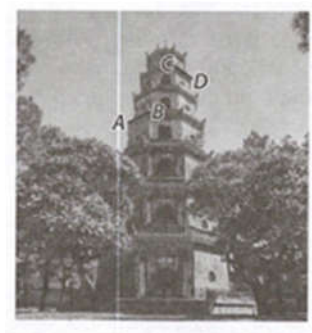
Hình 7.4

Câu 2. Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện: hoành, quá giang, xà cái, rui, cột tương ứng được đánh số 1,2,3,4,5 như trong Hình 7.8 , những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?

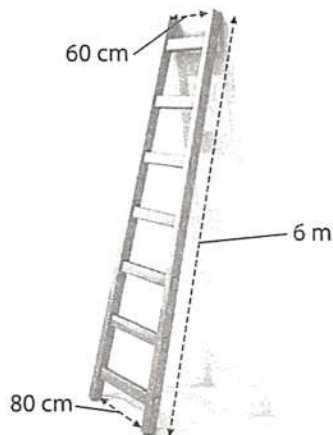


Hình 7.8

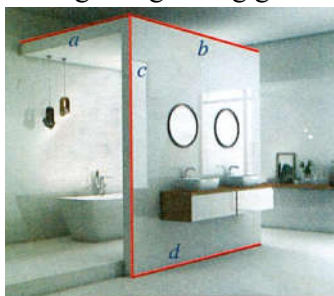
Câu 3. Tháp Phước Duyên ở Chùa Thiên Mụ (Huế) cao bảy tầng, sàn của mỗi tầng đều là hình bát giác đều. Hãy tính góc giữa hai cạnh AB và CD được thể hiện trên hình sau:



Câu 4. Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao 6 m , hai chân thang cách nhau 80 cm , hai ngọn thang cách nhau 60 cm . Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

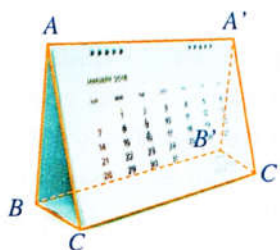


Câu 5. Hình 6 gợi nên hình ảnh 5 cặp đường thẳng vuông góc. Hãy chỉ ra 5 cặp đường thẳng đó.



Hình 6

Câu 6. Trong Hình 7 cho $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ACC'A'$ là các hình chữ nhật.

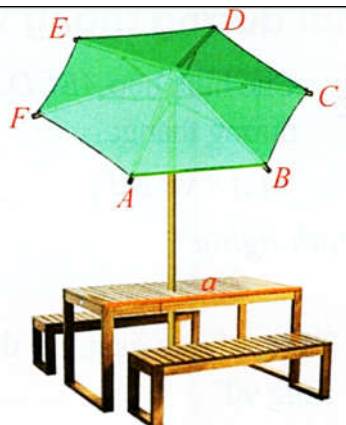


Hình 7

Chứng minh rằng $AB \perp CC'$, $AA' \perp BC$.

Câu 7. Bạn Hoa nói rằng: "Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b vuông góc với nhau". Bạn Hoa nói đúng hay sai? Vì sao?

Câu 8. Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$ song song với mặt bàn và có cạnh AB song song với cạnh bàn a (Hình 5).



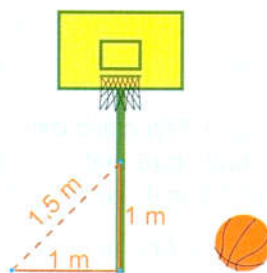
Hình 5

Tính số đo góc hợp bởi đường thẳng a lần lượt với các đường thẳng AF , AE và AD .

ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG

Câu 9. Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

Câu 10. Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột $1m$ đến một điểm trên cột, cách chân cột $1m$ được kết quả là $1,5m$ (H.7.27). Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?

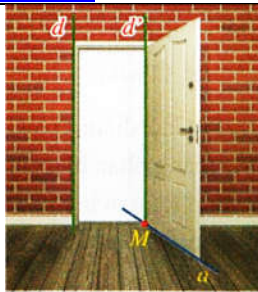


Hình 7.27

Câu 11. Một chiếc cột được dựng trên nền sân phẳng. Gọi O là điểm đặt chân cột trên mặt sân và M là điểm trên cột cách chân cột $40cm$. Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm A và B đều cách O là $30cm$ (A, B, O không thẳng hàng). Người ta đo độ dài MA và MB đều bằng $50cm$. Hỏi theo các số liệu trên, chiếc cột có vuông góc với mặt sân hay không?

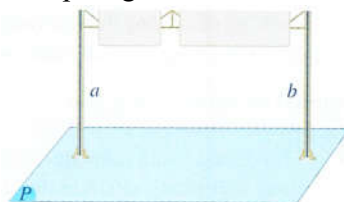
Câu 12. Một cây cột được dựng trên một sân phẳng. Người ta thả dây dọi và ngắm thấy cột song song với dây dọi. Hỏi có thể khẳng định rằng cây cột vuông góc với sân hay không? Vì sao?

Câu 13. Hình 17 mô tả một cửa gỗ có dạng hình chữ nhật, ở đó nẹp cửa và mép dưới cửa lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng d và a . Điểm M là vị trí giao giữa mép gắn bản lề và mép dưới của cửa. Hãy giải thích tại sao khi quay cánh cửa, mép dưới cửa là những đường thẳng a luôn nằm trên mặt phẳng đi qua điểm M cố định và vuông góc với đường thẳng d .



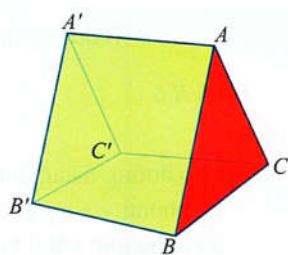
Hình 17

Câu 14. Quan sát Hình 30 (hai cột của biển báo, mặt đường), cho biết hình đó gợi nên tính chất nào về quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.



Hình 30

Câu 15. Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy (Hình 24). Cho biết $AB = AC = 2,4m$; $BC = 2m$; $AA' = 3m$.

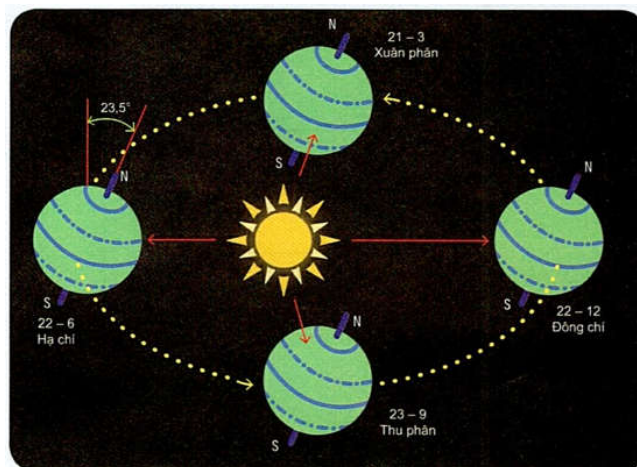


Hình 24

- Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC ; $A'B'$ và AC .
- Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$.

PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Câu 16. Tâm Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là một đường elip nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm. Trong quá trình chuyển động, Trái Đất lại quay quanh trục Bắc Nam. Trục này có phương không đổi và luôn tạo với mặt phẳng chứa quỹ đạo một góc khoảng $66,5^\circ$. (Theo nationalgeographic.org).



Hình 7.41

- a) Giải thích vì sao hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo (P) cũng có phương không đổi.
 b) Giải thích vì sao có hai thời điểm trong năm mà tại đó hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng (P) thuộc đường thẳng nối tâm Mặt Trời và tâm Trái Đất.

Câu 17. Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. Góc cất cánh của nó là góc giữa đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Hai máy bay cất cánh và bay thẳng với cùng độ lớn vận tốc trong 5 phút đầu, với các góc cất cánh lần lượt là $10^\circ, 15^\circ$. Hỏi sau 1 phút kể từ khi cất cánh, máy bay nào ở độ cao so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) lớn hơn?

Chú ý. Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

Câu 18. Hãy nêu cách đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí và một thời điểm.

Chú ý. Góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời lúc giữa trưa với mặt phẳng nằm ngang tại vị trí đó được gọi là góc Mặt Trời. Giữa trưa là thời điểm ban ngày mà tâm Mặt Trời thuộc mặt phẳng chứa kinh tuyến đi qua điểm đang xét. Góc Mặt Trời ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất.

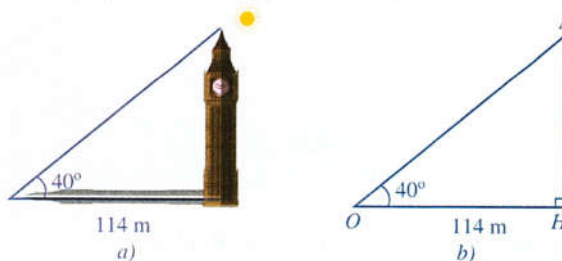
Câu 19. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng $10m$ và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $12m$ và tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

Câu 20. Một chiếc cột cao $3m$ được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài $5m$. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 21. Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60° . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài $10m$. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

Câu 22. Bài toán đo chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp.

Để ước lượng chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp, người ta đo góc giữa tia nắng chiếu qua đỉnh tháp và mặt đất, đo chiều dài của bóng tháp trên mặt đất, từ đó ước lượng được chiều cao của tháp. Giả sử khi tia nắng tạo với mặt đất một góc 40° , chiều dài của bóng tháp là $114m$ (Hình 34a). Tính chiều cao của tháp theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 34

Câu 23. Giả sử ở những giây đầu tiên sau khi cất cánh, máy bay chuyển động theo một đường thẳng tạo với mặt đất một góc 20° và có tốc độ $200km/h$. Tính độ cao của máy bay so với mặt đất theo đơn vị mét sau khi máy bay rời khỏi mặt đất 2 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

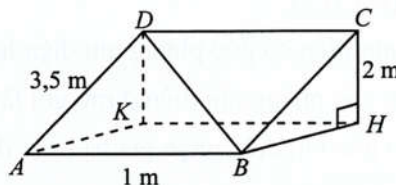
Câu 24. Dốc là đoạn đường thẳng nối hai khu vực hay hai vùng có độ cao khác nhau. Độ dốc được xác định bằng góc giữa dốc và mặt phẳng nằm ngang, ở đó độ dốc lớn nhất là 100% , tương ứng với góc 90° (độ dốc 10% tương ứng với góc 9°). Giả sử có hai điểm A, B nằm ở độ cao lần lượt là $200m, 220m$ so với mực nước biển và đoạn dốc AB dài $120m$. Độ dốc đó bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Câu 25. Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở Hình 20 có các ống hấp nhiệt chân không dài $1,8\text{ m}$ được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài $1,2\text{ m}$. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 20

Câu 26. Một tấm ván hình chữ nhật $ABCD$ được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật lên khỏi hố sâu 2 m . Cho biết $AB = 1\text{ m}$, $AD = 3,5\text{ m}$. Tính góc giữa đường thẳng BD và đáy hố.



Hình 3

HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

Câu 27. Trong cửa sổ ở Hình 7.56, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính 80 cm , bản lề được đính ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d ; khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tính số đo của góc nhị diện có hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa cánh, khung cửa khi $d = 40\text{ cm}$.



Hình 7.56

Câu 28. Từ một tấm tôn hình chữ nhật, tại 4 góc bác Hùng cắt bỏ đi 4 hình vuông có cùng kích thước và sau đó hàn gắn các mép tại các góc như Hình 7.65. Giải thích vì sao bằng cách đó, bác Hùng nhận được chiếc thùng không nắp có dạng hình hộp chữ nhật.



Hình 7.65

Câu 29. Hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8m$; $OA = 2,8m$; $OB = 4m$.



Hình 7.72

- Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
- Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.
- Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5m$. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

Câu 30. Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mái nhà, mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Câu 31. Một ngôi nhà có hai mái trước, sau có dạng là các hình chữ nhật $ABCD, ABMN$, $AD = 4m$, $AN = 3m$, $DN = 5m$. Tính góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà đó (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



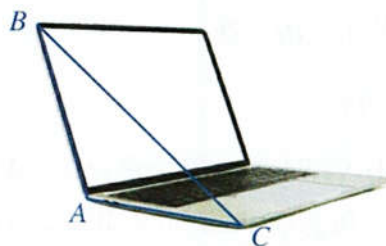
Câu 32. Một viên bi được thả lăn trên một mặt phẳng nằm nghiêng (so với mặt phẳng nằm ngang). Coi viên bi chịu tác dụng của hai lực chính là lực hút của Trái Đất (theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) và phản lực, vuông góc với mặt phẳng nằm nghiêng, hướng lên trên. Giải thích vì sao viên bi di chuyển trên một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng nằm nghiêng và mặt phẳng nằm ngang.

Câu 33. Trong các công trình xây dựng nhà ở, độ dốc mái được hiểu là độ nghiêng của mái khi hoàn thiện so với mặt phẳng nằm ngang. Khi thi công, mái nhà cần một độ nghiêng nhất định để đảm bảo thoát nước tốt tránh gây ra tình trạng đọng nước hay thấm dột. Quan sát Hình 40 và cho biết góc nhị diện nào phản ánh độ dốc của mái.



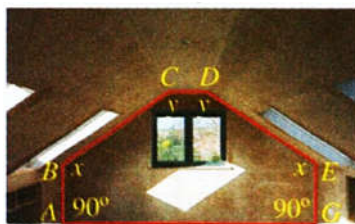
Hình 40

Câu 34. Trong Hình 42, máy tính xách tay đang mở gợi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của màn hình máy tính. Tính độ mở của màn hình máy tính đó, biết tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = AC = 30\text{ cm}$ và $BC = 30\sqrt{3}\text{ cm}$.



Hình 42

Câu 35. Trong Hình 43, xét các góc nhị diện có góc phẳng nhị diện tương ứng là $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$ trong cùng mặt phẳng. Lục giác $ABCDEG$ nằm trong mặt phẳng đó có $AB = GE = 2\text{ m}, BC = DE, \widehat{A} = \widehat{G} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{E} = x, \widehat{C} = \widehat{D} = y$. Biết rằng khoảng cách từ C và D đến AG là $4\text{ m}, AG = 12\text{ m}, CD = 1\text{ m}$. Tìm x, y (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 43

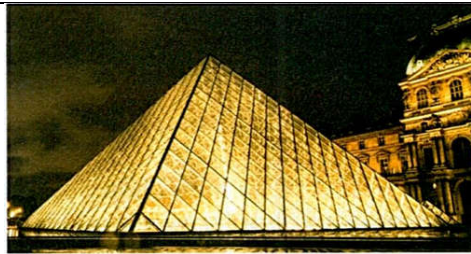
Câu 36. Quan sát ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ ở Hình 57, chỉ ra hai cặp mặt phẳng mà mỗi cặp gồm hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Hãy sử dụng kí hiệu để viết những kết quả đó.



Hình ảnh mô phỏng vệ tinh LOTUSat-1
(Nguồn: JICA Việt Nam)
Hình 57

Câu 37. Hình 19 minh họa một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là $1,2\text{ m}$. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?

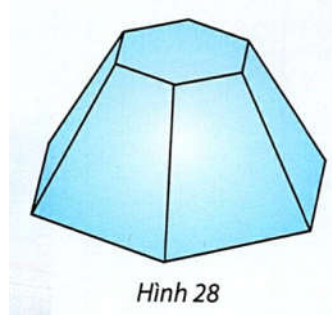
Câu 38. Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là $21,6\text{ m}$ và cạnh đáy dài 34 m . Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của kim tự tháp.



Hình 29

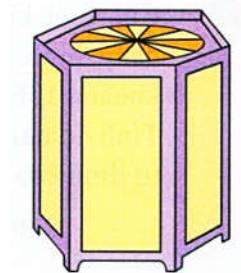
(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre_Pyramid)

Câu 39. Một người cần sơn tất cả các mặt của một cái bục để đặt tượng có dạng hình chóp cụt lục giác đều có cạnh đáy lớn $1m$, cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng $0,7m$. Tính tổng diện tích cần sơn.



Hình 28

Câu 40. Một chiếc lồng đèn kéo quân có dạng hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy bằng $10cm$ và cạnh bên bằng $30cm$ (Hình 20). Tính tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn đó.



Hình 20

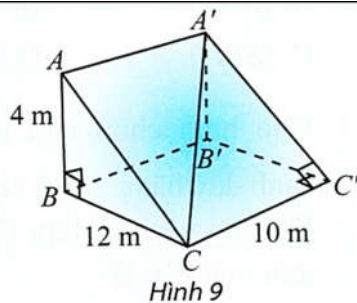
Câu 41. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.



Hình 8

(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Memphis_Pyramid)

Câu 42. Một con dộc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như trong Hình 9.

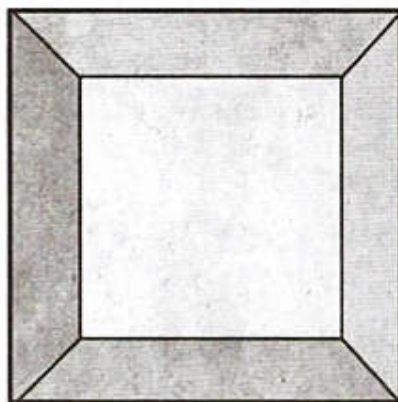


Hình 9

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng CA' và $(CC'B'B)$.

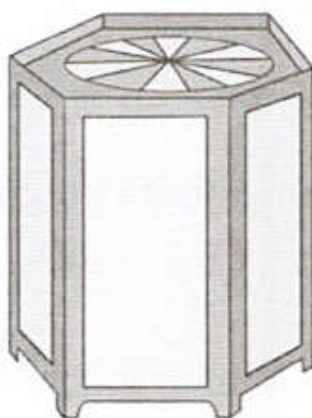
b) Tính số đo góc nhị diện cạnh CC' .

Câu 43. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cắt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng $2m$, đáy nhỏ có cạnh bằng $1m$ và cạnh bên bằng $2m$ (Hình 14). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.



Hình 14

Câu 44. Một hộp đèn treo trên trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều (hình 15), cạnh đáy bằng $10cm$ và cạnh bên bằng $50cm$. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



Hình 15

KHOẢNG CÁCH

Câu 45. Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung không chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng $2,28m$. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc.

Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 15° so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa

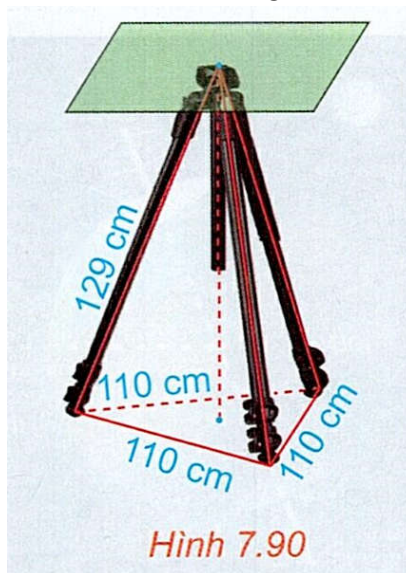
thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21m đi qua hay không?



Hình 7.82. Tại đầu một số cầu vượt ta có thể bắt gặp khung không chế chiều cao.

Câu 46. Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110 cm . Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài 129 cm .



Hình 7.90

Câu 47. Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.

Câu 48. Một chiếc máy bay cất cánh từ một điểm thuộc mặt đất phẳng nằm ngang. Trong 3 phút đầu máy bay bay với vận tốc 500 km/h và theo đường thẳng tạo với mặt đất một góc 15° . Hỏi sau 2 phút, máy bay ở độ cao bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Câu 49. Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người ta dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Vì sao?

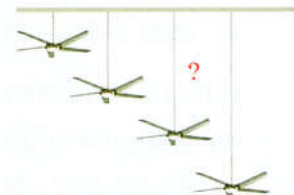
Câu 50. nh ảnh một đường thẳng. Khoảng cách giữa hai chân cột đèn liên tiếp đo được là 5 m . Tại sao có thể nói khoảng cách giữa hai cột đèn đó là 5 m ?

Câu 51. Hình 76 gợi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Cột gỗ cao 4,2 m. Khoảng cách giữa (P) và (Q) là bao nhiêu mét?



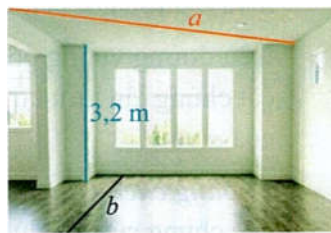
Hình 76

Câu 52. Một quạt trần có bề dày của thân quạt là 20 cm . Người ta muốn treo quạt sao cho khoảng cách từ đỉnh quạt đến sàn nhà là $2,5\text{ m}$. Hỏi phải làm cán quạt dài bao nhiêu? Cho biết trần nhà cao $3,6\text{ m}$.



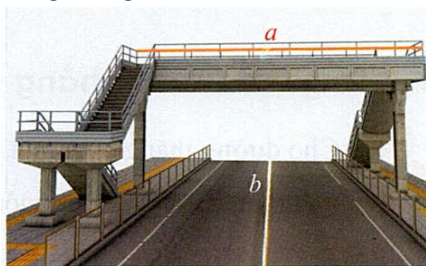
Hình 3

Câu 53. Một căn phòng có trần cao $3,2\text{ m}$. Tính khoảng cách giữa một đường thẳng a trên trần nhà và đường thẳng b trên sàn nhà.



Hình 10

Câu 54. Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình 22) có mặt sàn cầu cách mặt đường $3,5\text{ m}$, khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là $0,8\text{ m}$. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .



Hình 22

THỂ TÍCH

Câu 55. Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (H.7.98). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng 30 cm , 60 cm , cạnh bên của sọt dài 50 cm . Tính thể tích của sọt.



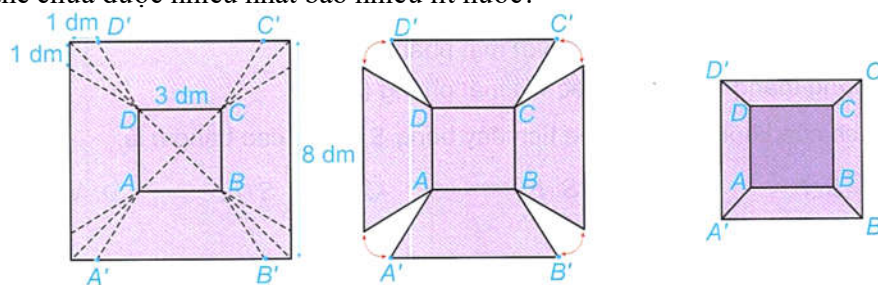
Hình 7.98

Câu 56. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh 8 dm , bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình 7.99.

a) Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.

b) Tính cạnh bên của thùng.

c) Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?



Hình 7.99

Câu 57. Một thùng nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$, $AB = 5m$, $AA' = 3m$, $AD = 4m$.

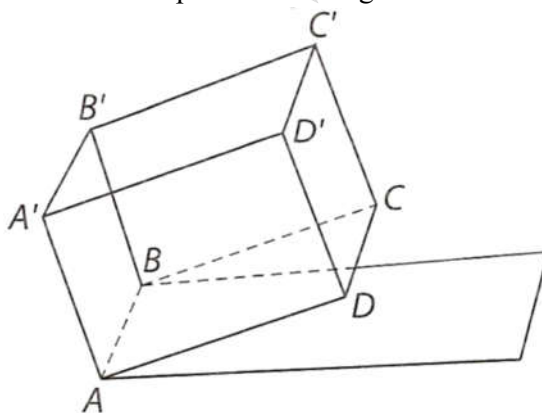
Đáy bể là hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang.

a) Giải thích vì sao khi nước trong bể phẳng lặng, thì phần nước đó ứng với một khối hộp chữ nhật.

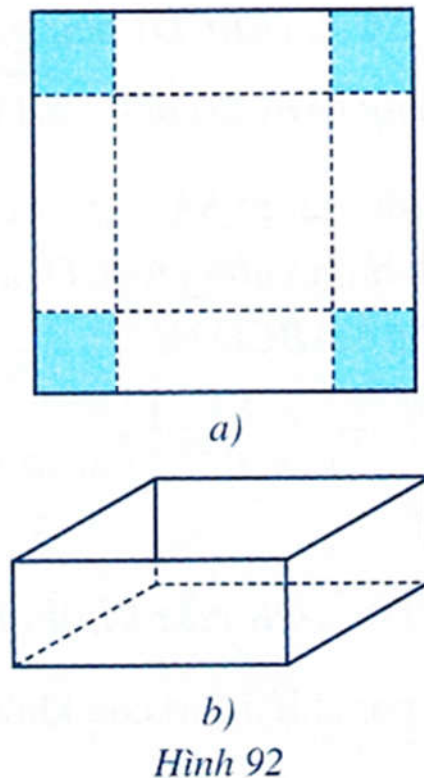
b) Tính mức nước trong bể (khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể) khi thể tích phần nước trong bể là $40m^3$.

Câu 58. Người ta cắt bỏ bốn hình vuông cùng kích thước ở bốn góc của một tấm tôn hình vuông có cạnh $1m$ để gò lại thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông cần bỏ đi có độ dài bằng bao nhiêu để thùng hình hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

Câu 59. Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ được đặt trên một mái nhà nghiêng so với mặt đất nằm ngang góc 10° , $AB = 1m$, $AD = 1,5m$, $AA' = 1m$. Đáy bể là hình chữ nhật $ABCD$. Các điểm A, B cùng ở độ cao $5m$ (so với mặt đất), các điểm C, D ở độ cao lớn hơn so với độ cao của các điểm A, B . Khi nước trong bể phẳng lặng người ta đo được khoảng cách giữa đường mép nước ở mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy của bể là $80cm$. Tính thể tích của phần nước trong bể.



Câu 60. Từ một tấm bìa hình vuông (Hình 92a), người ta cắt ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $6cm$, rồi gấp hình hộp chữ nhật (Hình 92b). Tính cạnh của tấm bìa ban đầu, biết rằng thể tích của chiếc hộp bằng $600cm^3$.



Câu 61. Một thùng đựng rác có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với hai cạnh đáy lần lượt dài $2dm$ và $3dm$, chiều cao bằng $4dm$. Tính thể tích của thùng đựng rác.

Câu 62. Một chiếc bánh chưng có dạng khối hộp chữ nhật với kích thước ba cạnh là $15cm$, $15cm$ và $6cm$. Tính thể tích của chiếc bánh chưng đó.

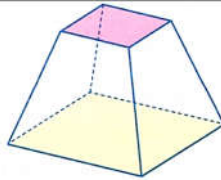
Câu 63. Một miếng pho mát có dạng khối lăng trụ đứng với chiều cao $10cm$ và đáy là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng $12cm$. Tính khối lượng của miếng pho mát theo đơn vị gam, biết khối lượng riêng của loại pho mát đó là $3g/cm^3$.

Câu 64. Một loại đèn đá muối có dạng khối chóp tứ giác đều (Hình 97). Tính theo a thể tích của đèn đá muối đó, giả sử các cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng a .



Hình 97

Câu 65. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 98). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng/ m^3 . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.



Hình 98

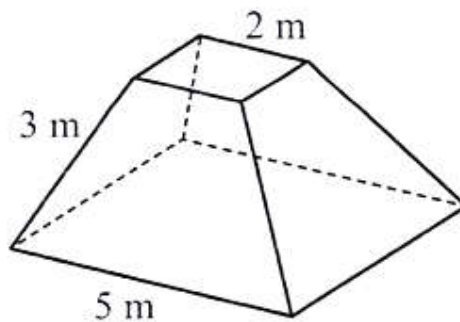
Câu 66. Đền Kukulcan (Hình 101) là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII. Phần thân của đền, không bao gồm ngôi đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cụt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là $55,3m$, chiều cao là $24m$, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là khoảng 47° .

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 101

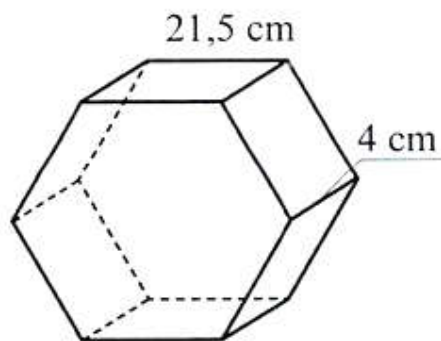
Tính thể tích phần thân của đền có dạng khối chóp cụt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 67. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng $/m^3$. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 46

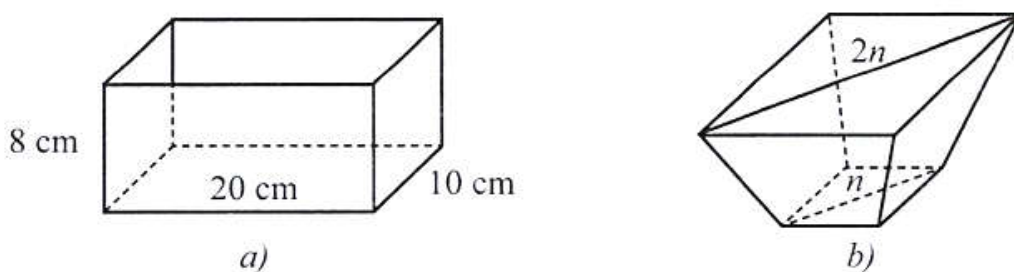
Câu 68. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là $4cm$ và cạnh lục giác dài $21,5cm$. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimet khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 48

Câu 69. Một chì neo câu cá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều được làm hoàn toàn bằng chì có khối lượng 137 g . Biết cạnh đáy nhỏ và cạnh đáy lớn của khối chóp cụt đều dài lần lượt 1 cm và 3 cm , khối lượng riêng của chì bằng $11,3\text{ g/cm}^3$. Tính chiều cao của chì neo câu cá đó theo đơn vị centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

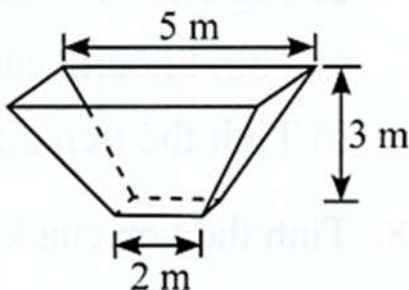
Câu 70. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 20 cm , chiều rộng 10 cm , chiều cao 8 cm (Hình 50a). Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài $n(\text{cm})$, miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n(\text{cm})$ (Hình 50b). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị centimet khối.



Hình 50

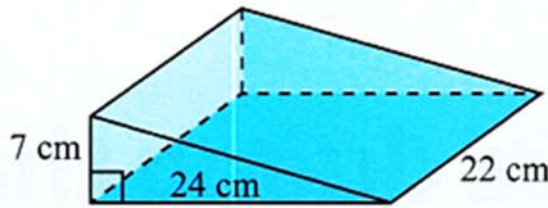
Câu 71. Cắt khối chóp tam giác đều $S.ABC$ với cạnh đáy bằng a và chiều cao $2a$ bởi một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm các cạnh bên. Tính thể tích khối chóp cụt đều được tạo thành.

Câu 72. Tính thể tích của một bồn chứa có dạng khối chóp cụt đều có kích thước được cho như trong Hình 20.



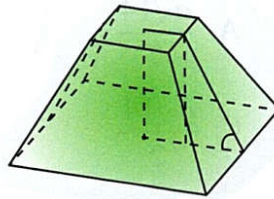
Hình 20

Câu 73. Tính thể tích cái nêm hình lăng trụ đứng có kích thước như trong Hình 21.



Hình 21

Câu 74. Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có hai cạnh đáy là $14m$ và $10m$. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm.



Hình 10

Câu 75. Một chân cột bằng gang có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a , chiều cao $h = 2a$ và bán kính đáy phần trụ rỗng bên trong bằng $\frac{a}{2}$.

- Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.
- Tính thể tích chân cột nói trên theo a .

Câu 76. Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cắt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng $80cm$, đáy nhỏ có cạnh bằng $40cm$ và cạnh bên bằng $80cm$.



Hình 12

Câu 77. Một thùng đựng rác có dạng hình chóp cắt tứ giác đều. Đáy và miệng thùng có độ dài lần lượt là $60cm$ và $120cm$, cạnh bên của thùng dài $100cm$. Tính thể tích của thùng.

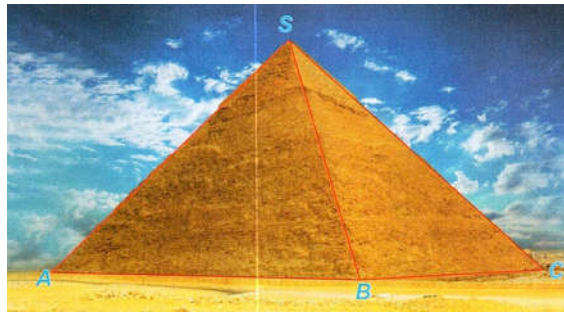
CHỦ ĐỀ 7. QUAN HỆ VUÔNG GÓC

- BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 11
- |FanPage: Nguyễn Bảo Vương

LỜI GIẢI THAM KHẢO

HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

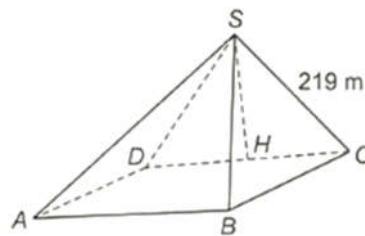
Câu 1. Kim tự tháp Kheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219m (kích thước hiện nay). (Theo britannica.com). Tính (gần đúng) góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (H.7.4).



Hình 7.4

Lời giải

Gọi H là trung điểm của CD thì $CH = 115m$.

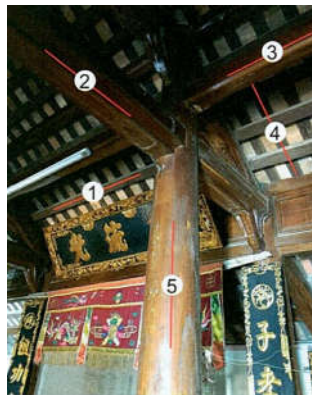


Hình 7.1

Vì $DC \parallel AB$ nên $(SC; AB) = (SC; CD) = \widehat{SCH}$.

Ta có: $\cos \widehat{SCH} = \frac{CH}{SC} = \frac{115}{219} \Rightarrow \widehat{SCH} \approx 58,3^\circ$.

Câu 2. Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện: hoành, quá giang, xà cái, rui, cột tương ứng được đánh số 1,2,3,4,5 như trong Hình 7.8, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?



Hình 7.8

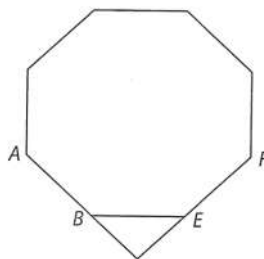
Lời giải

Những cặp đường thẳng sau vuông góc với nhau: hoành (1) và quá giang (2); hoành (1) và rui (4); hoành (1) và cột (5); quá giang (2) và xà cái (3); quá giang (2) và cột (5); xà cái (3) và rui (4); xà cái (3) và cột (5).

Câu 3. Tháp Phước Duyên ở Chùa Thiên Mụ (Huế) cao bảy tầng, sàn của mỗi tầng đều là hình bát giác đều. Hãy tính góc giữa hai cạnh AB và CD được thể hiện trên hình sau:



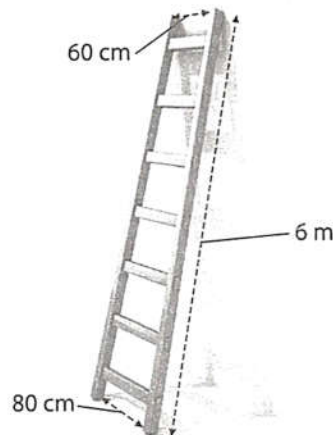
Giải. (H.7.3)



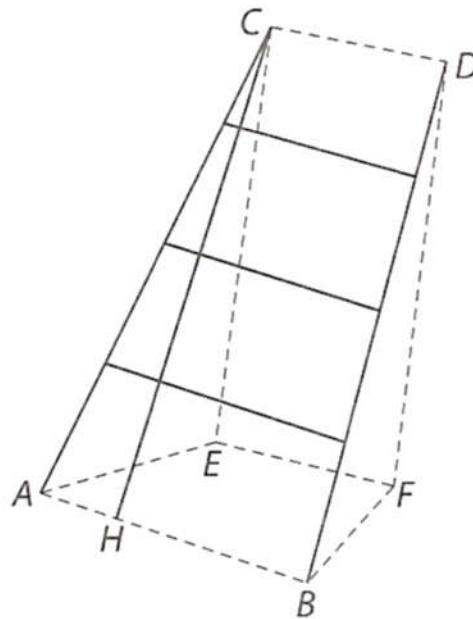
Hình 7.3

Ta có: $CD \parallel EF$ nên $(AB, CD) = (AB, EF)$, với AB , EF là hai cạnh của một hình bát giác đều. Góc ngoài của một bát giác đều bằng $\frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$ nên $(AB, EF) = 90^\circ$, suy ra $(AB, CD) = 90^\circ$.

Câu 4. Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao 6 m , hai chân thang cách nhau 80 cm , hai ngọn thang cách nhau 60 cm . Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải



Hình 7.25

Gọi A, B là hai điểm tại hai vị trí chân thang và C, D là hai điểm tại hai vị trí ngọn thang, EF là đường chân tường.

Ta có $EF \parallel AB$ nên $(EF, AC) = (AB, AC) = \widehat{BAC}$.

Kẻ CH vuông góc với AB tại H , khi đó

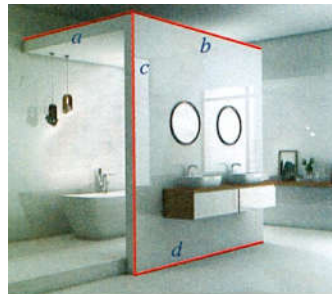
$$AH = \frac{AB - CD}{2} = 10(\text{cm}) = 0,1(\text{m}). \text{ Tam giác } ACH \text{ vuông tại } H \text{ nên}$$

$$\cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} = \frac{0,1}{6} = \frac{1}{60},$$

$$\text{suy ra } \widehat{CAH} \approx 89,05^\circ.$$

Vậy góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang bằng khoảng $89,05^\circ$.

Câu 5. Hình 6 gợi nên hình ảnh 5 cặp đường thẳng vuông góc. Hãy chỉ ra 5 cặp đường thẳng đó.

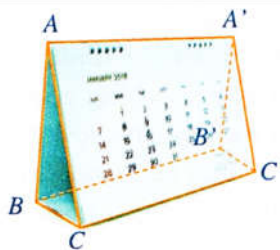


Hình 6

Lời giải

Các cặp đường thẳng vuông góc là: a và b ; a và c ; b và c ; c và d ; a và b

Câu 6. Trong Hình 7 cho $ABB'A'$, $BCC'B'$, $ACC'A'$ là các hình chữ nhật.



Hình 7

Chứng minh rằng $AB \perp CC'$, $AA' \perp BC$.

Lời giải

- Chứng minh $AB \perp CC'$

+ Do $ABB'A'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AB \perp BB'$ (1)

+ Do $BCC'B'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BB' \parallel CC'$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AB \perp CC'$ (đpcm)

Chứng minh tương tự:

+ Do $BCC'B'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BC \perp CC'$

+ Do $AA'C'C$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AA' \parallel CC'$

Từ đó $\Rightarrow AA' \perp BC$ (đpcm)

Câu 7. Bạn Hoa nói rằng: "Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b cùng vuông góc với đường thẳng c thì a và b vuông góc với nhau". Bạn Hoa nói đúng hay sai? Vì sao?

Lời giải

Bạn Hoa nói sai. Vì

+ TH1: a, b, c cùng nằm trong một mặt phẳng.

Theo quan hệ từ vuông góc tới song song: $\begin{cases} a \perp c \\ b \perp c \end{cases} \Rightarrow a \parallel b$

+ TH2: a, b, c nằm khác mặt phẳng. Nếu a và b cùng vuông góc với c thì a, b nằm chéo nhau

Câu 8. Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$ song song với mặt bàn và có cạnh AB song song với cạnh bàn a (Hình 5).



Hình 5

Tính số đo góc hợp bởi đường thẳng a lần lượt với các đường thẳng AF, AE và AD .

Lời giải

Vì $a \parallel AB$ nên góc giữa a và AF là góc giữa AB và AF và bằng 120°

Vì $a \parallel AB$ nên góc giữa a và AE là góc giữa AB và AE và bằng 90°

Vì $a \parallel AB$ nên góc giữa a và AD là góc giữa AB và AD và bằng 60°

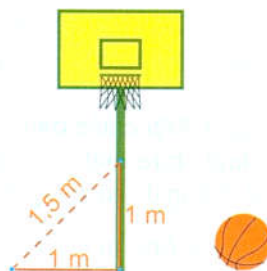
ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

Câu 9. Bạn Vinh thả quả dọi chìm vào thùng nước. Hỏi khi dây dọi căng và mặt nước yên lặng thì đường thẳng chứa dây dọi có vuông góc với mặt phẳng chứa mặt nước trong thùng hay không?

Lời giải

Quả dọi vuông góc với mặt phẳng nước.

Câu 10. Một cột bóng rổ được dựng trên một sân phẳng. Bạn Hùng đo khoảng cách từ một điểm trên sân, cách chân cột $1m$ đến một điểm trên cột, cách chân cột $1m$ được kết quả là $1,5m$ (H.7.27). Nếu phép đo của Hùng là chính xác thì cột có vuông góc với sân hay không? Có thể kết luận rằng cột không có phương thẳng đứng hay không?



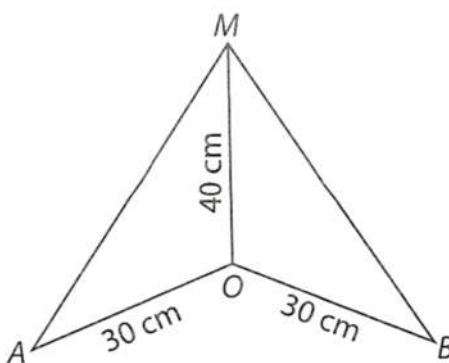
Hình 7.27

Lời giải

Đo chính xác thì cột không vuông góc với mặt sân vì nếu vuông góc với mặt sân thì theo định lý Pythagore, cạnh huyền bằng $\sqrt{2}m$, không phải $1,5m$.

Câu 11. Một chiếc cột được dựng trên nền sân phẳng. Gọi O là điểm đặt chân cột trên mặt sân và M là điểm trên cột cách chân cột $40cm$. Trên mặt sân, người ta lấy hai điểm A và B đều cách O là $30cm$ (A, B, O không thẳng hàng). Người ta đo độ dài MA và MB đều bằng $50cm$. Hỏi theo các số liệu trên, chiếc cột có vuông góc với mặt sân hay không?

Giải. (H.7.6)



Hình 7.6

Ta có: $50^2 = 40^2 + 30^2$ nên $MA^2 = MO^2 + OA^2$ và $MB^2 = MO^2 + OB^2$. Do đó, tam giác MOA và tam giác MOB vuông tại O , hay $MO \perp OA$, $MO \perp OB$. Suy ra $MO \perp (OAB)$. Vậy chiếc cột vuông góc với mặt sân.

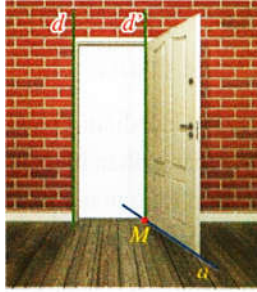
Câu 12. Một cây cột được dựng trên một sân phẳng. Người ta thả dây dọi và ngắm thấy cột song song với dây dọi. Hỏi có thể khẳng định rằng cây cột vuông góc với sân hay không? Vì sao?

Lời giải

Vì dây dọi song song với cây cột và dây dọi vuông góc với mặt phẳng sân nên cây cột vuông góc với mặt phẳng sân.

Câu 13. Hình 17 mô tả một cửa gỗ có dạng hình chữ nhật, ở đó nẹp cửa và mép dưới cửa lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng d và a . Điểm M là vị trí giao giữa mép gắn bản lề và mép dưới của cửa. Hãy

giải thích tại sao khi quay cánh cửa, mép dưới cửa là những đường thẳng a luôn nằm trên mặt phẳng đi qua điểm M cố định và vuông góc với đường thẳng d .

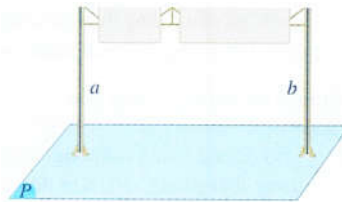


Hình 17

Lời giải:

Vì sàn nhà là một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng d . Mà đường thẳng a luôn nằm trên mặt phẳng đó nên đường thẳng d luôn vuông góc với đường thẳng a .

Câu 14. Quan sát Hình 30 (hai cột của biển báo, mặt đường), cho biết hình đó gợi nên tính chất nào về quan hệ vuông góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.



Hình 30

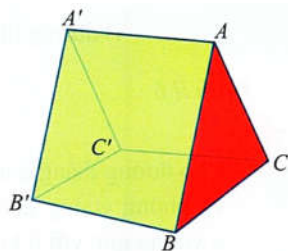
Lời giải

Hình 30 gợi nên tính chất:

Hai đường thẳng song song. Một mặt phẳng vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.

- Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 15. Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy (Hình 24). Cho biết $AB = AC = 2,4m$; $BC = 2m$; $AA' = 3m$.



Hình 24

a) Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và BC ; $A'B'$ và AC .

b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$.

Lời giải

a) Vì $AA' \parallel BB'$ nên góc giữa AA' và BC là góc giữa BB' và BC

Vì cạnh bên vuông góc với đáy nên $BB' \perp BC$. Do đó, $\widehat{B'BC} = 90^\circ$

Vì $A'B' \parallel AB$ nên góc giữa $A'B'$ và AC là góc giữa AB và AC

$$\text{Ta có: } \cos \widehat{BAC} = \frac{2,4^2 + 2,4^2 - 2^2}{2 \cdot 2,4 \cdot 2,4} = \frac{47}{72}$$

$$\text{Nên } \widehat{BAC} = 49,2^\circ$$

b) Kẻ $AH \perp BC$. Vì cạnh bên vuông góc với đáy nên $BB' \perp AH$

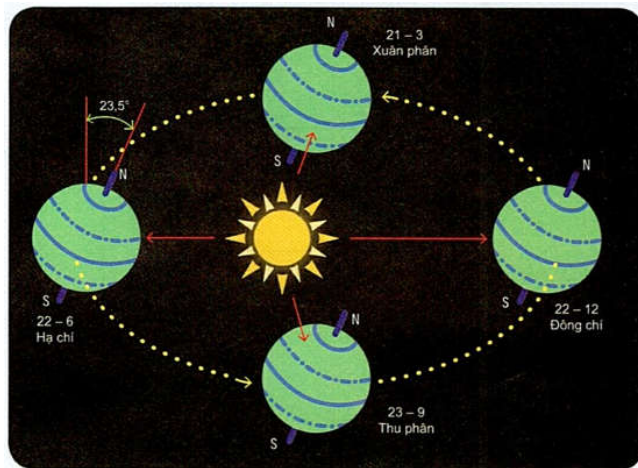
Ta có $AH \perp BB'$, $AH \perp BC$ nên $AH \perp (BCC'B')$

Hình chiếu vuông góc của ABB' lên $(BB'C'C)$ là HBB' .

$$\text{Ta có: } S_{HBB'} = \frac{1}{2} \cdot HB \cdot BB' = \frac{1}{2} \cdot \frac{BC}{2} \cdot BB' = \frac{3}{2}$$

PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG

Câu 16. Tâm Trái Đất chuyển động quanh Mặt Trời theo quỹ đạo là một đường elip nhận tâm Mặt Trời làm tiêu điểm. Trong quá trình chuyển động, Trái Đất lại quay quanh trục Bắc Nam. Trục này có phương không đổi và luôn tạo với mặt phẳng chứa quỹ đạo một góc khoảng $66,5^\circ$. (Theo nationalgeographic.org).



Hình 7.41

- Giải thích vì sao hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng quỹ đạo (P) cũng có phương không đổi.
- Giải thích vì sao có hai thời điểm trong năm mà tại đó hình chiếu của trục Trái Đất trên mặt phẳng (P) thuộc đường thẳng nối tâm Mặt Trời và tâm Trái Đất.

Lời giải

a) Gọi a, b là hai vị trí của trục Trái Đất, $a \perp b$. Gọi a', b' tương ứng là hình chiếu của a, b trên (P) . Hai mặt phẳng (a, a') và (b, b') chứa hai phương tương ứng song song với nhau đó là các phương cùng vuông góc với (P) (phương chiếu) và $a \perp b$. Vì vậy, hai mặt phẳng (a, a') và (b, b') song song với nhau hoặc trùng nhau. Do đó, hai giao tuyến của chúng với (P) là a' và b' cũng song song hoặc trùng nhau.

Lưu ý. Kết luận ở câu a thực chất được rút ra từ tính chất sau của phép chiếu song song: Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song có phương khác phương chiếu thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

b) Hình chiếu của trục Trái Đất lên mặt phẳng (P) có phương cố định. Gọi m là đường thẳng đi qua tâm Mặt Trời và có phương cố định nói trên. Khi đó, hình chiếu của trục Trái Đất xuống (P) thuộc đường thẳng m khi và chỉ khi tâm Trái Đất ở vị trí là giao của m với đường elip quỹ đạo của Trái Đất. Như vậy có hai vị trí thuộc quỹ đạo, ứng với hai thời điểm trong năm mà hình chiếu của trục Trái Đất trên (P) thuộc đường thẳng m (nối tâm Trái Đất và tâm Mặt Trời).

Câu 17. Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. Góc cất cánh của nó là góc giữa đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Hai máy bay cất cánh và bay thẳng với cùng độ lớn vận tốc trong 5 phút đầu, với các góc cất cánh lần lượt là $10^\circ, 15^\circ$. Hỏi sau 1 phút kể từ khi cất cánh, máy bay nào ở độ cao so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) lớn hơn?

Chú ý. Độ cao của máy bay so với mặt đất là khoảng cách từ máy bay (coi là một điểm) đến hình chiếu của nó trên mặt đất.

Lời giải

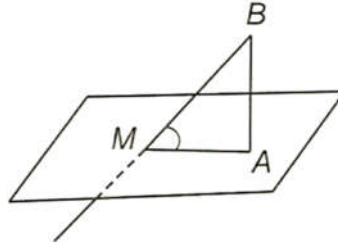
$$\text{Vì } AM = A'M', BM = AM \cdot \sin 10^\circ < A'M' \cdot \sin 15^\circ = B'M'.$$

Câu 18. Hãy nêu cách đo góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời và mặt phẳng nằm ngang tại một vị trí và một thời điểm.

Chú ý. Góc giữa đường thẳng chứa tia sáng mặt trời lúc giữa trưa với mặt phẳng nằm ngang tại vị trí đó được gọi là góc Mặt Trời. Giữa trưa là thời điểm ban ngày mà tâm Mặt Trời thuộc mặt phẳng chứa kinh tuyến đi qua điểm đang xét. Góc Mặt Trời ảnh hưởng tới sự hấp thụ nhiệt từ Mặt Trời của Trái Đất, tạo nên các mùa trong năm trên Trái Đất.

Lời giải

Lấy một cột AB , bóng của cột AB là AM .



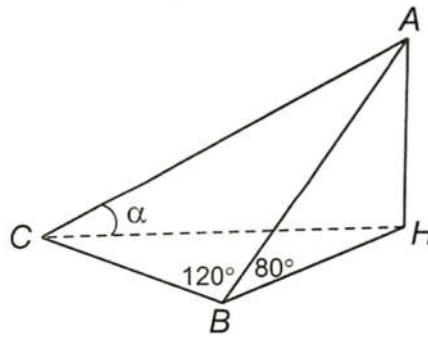
Hình 7.14

$$\text{Khi đó } \tan \widehat{BAM} = \frac{AB}{AM}.$$

Từ đó tính được góc $\widehat{BAM}$.

Câu 19. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng $10m$ và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $12m$ và tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

Lời giải



Hình 7.42

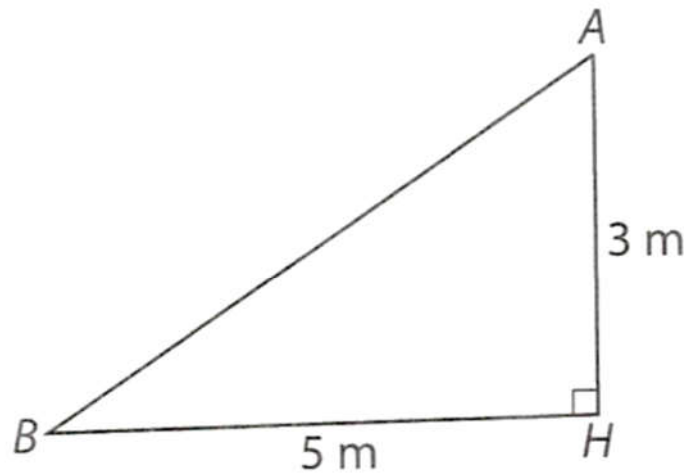
Ta tính được $AC = 2\sqrt{91}m$.

Gọi H là hình chiếu của A trên mặt đất, ta tính được: $AH = 10 \sin 80^\circ (m)$.

$$\text{Góc cần tìm là } \alpha = \widehat{ACH} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{10 \sin 80^\circ}{2\sqrt{91}} \Rightarrow \alpha \approx 31^\circ.$$

Câu 20. Một chiếc cột cao $3m$ được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài $5m$. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Giải. (H.7.9)



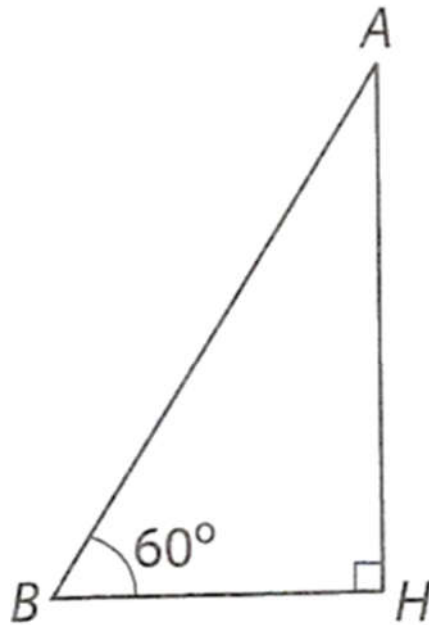
Hình 7.9

Góc giữa tia nắng mặt trời AB và mặt đất là góc ABH . Ta có: $\tan \widehat{ABH} = \frac{AH}{BH} = \frac{3}{5}$, suy ra

$$\widehat{ABH} \approx 30,96^\circ.$$

Câu 21. Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60° . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài $10m$. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimét (lấy giá trị nguyên gần đúng)?

Lời giải



Hình 7.37

Gọi A là vị trí con diều, B là vị trí đầu dây diều trên mặt đất, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt đất.

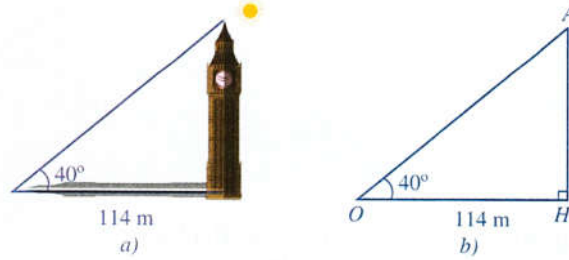
Tam giác ABH vuông tại H , góc ABH bằng 60° và $AB = 10m = 1000cm$.

Ta có: $AH = AB \cdot \sin 60^\circ \approx 866(cm)$.

Câu 22. Bài toán đo chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp.

Để ước lượng chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp, người ta đo góc giữa tia nắng chiếu qua đỉnh tháp và mặt đất, đo chiều dài của bóng tháp trên mặt đất, từ đó ước lượng được chiều cao của tháp. Giả

sử khi tia nắng tạo với mặt đất một góc 40° , chiều dài của bóng tháp là 114 m (Hình 34a). Tính chiều cao của tháp theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 34

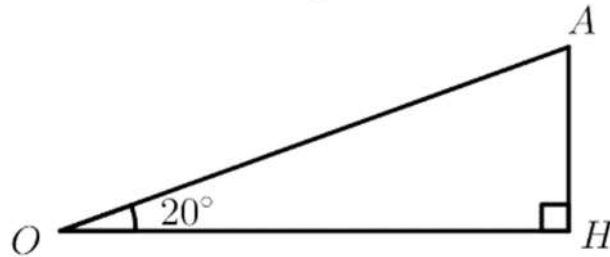
Giải

Xét Hình 34b, độ dài AH chỉ chiều cao của tháp, độ dài OH chỉ chiều dài của bóng tháp, độ lớn của góc AOH chỉ số đo góc giữa tia nắng và mặt đất. Vì tam giác OAH vuông tại H nên

$$AH = OH \cdot \tan \widehat{AOH} = 114 \cdot \tan 40^\circ \approx 95,7(m).$$

Câu 23. Giả sử ở những giây đầu tiên sau khi cất cánh, máy bay chuyển động theo một đường thẳng tạo với mặt đất một góc 20° và có tốc độ 200 km/h . Tính độ cao của máy bay so với mặt đất theo đơn vị mét sau khi máy bay rời khỏi mặt đất 2 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải



$$\text{Đổi } 200\text{ km/h} = \frac{500}{9}\text{ m/s}$$

Mô hình hoá như hình vẽ, với OA là quãng đường máy bay bay được sau 2 giây, OH là độ cao của máy bay so với mặt đất khi máy bay bay được sau 2 giây, độ lớn của góc $\widehat{AOH}$ chỉ số đo góc giữa máy bay với mặt đất.

$$\text{Sau 2 giây máy bay bay được quãng đường là: } \frac{500}{9} \cdot 2 = \frac{1000}{9} (m)$$

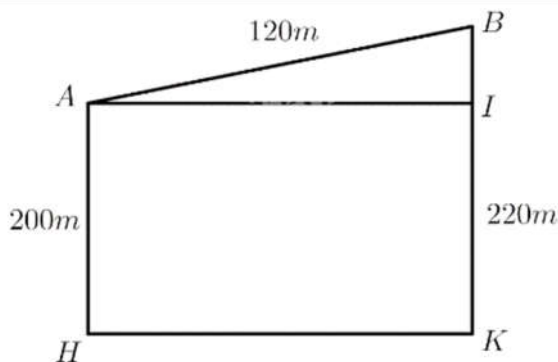
Vì tam giác OAH vuông tại H nên ta có:

$$AH = OA \cdot \sin \widehat{AOH} = \frac{1000}{9} \cdot \sin 20^\circ \approx 38,0(m)$$

Vậy độ cao của máy bay so với mặt đất là 38 mét sau khi máy bay rời khỏi mặt đất 2 giây.

Câu 24. Dốc là đoạn đường thẳng nối hai khu vực hay hai vùng có độ cao khác nhau. Độ dốc được xác định bằng góc giữa dốc và mặt phẳng nằm ngang, ở đó độ dốc lớn nhất là 100% , tương ứng với góc 90° (độ dốc 10% tương ứng với góc 9°). Giả sử có hai điểm A, B nằm ở độ cao lần lượt là $200\text{ m}, 220\text{ m}$ so với mực nước biển và đoạn dốc AB dài 120 m . Độ dốc đó bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải



Mô hình hoá như hình vẽ, với AB là chiều dài con dốc, AH là độ cao của điểm A so với mặt nước biển, BK là độ cao của điểm B so với mặt nước biển, BI là chiều cao của con dốc, độ lớn của góc $\widehat{BAI}$ chỉ độ dốc.

Ta có: $AH = 200, BK = 220, AB = 120$.

$AHKB$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IK = AH = 200 \Rightarrow BI = BK - IK = 220 - 200 = 20$

Vì tam giác ABI vuông tại I nên ta có:

$$\sin \widehat{ABI} = \frac{BI}{AB} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \Rightarrow \widehat{ABI} \approx 9,59^\circ \text{ tương ứng với } 10,66\%$$

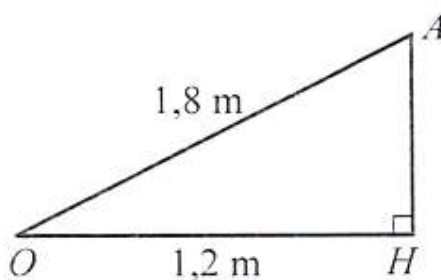
Vậy độ dốc của con dốc đó là 10,66%.

Câu 25. Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời như ở Hình 20 có các ống hấp nhiệt chân không dài 1,8m được đặt trên sân thượng của một toà nhà. Khi tia nắng mặt trời chiếu vuông góc với sân thượng, bóng nắng của các ống hấp nhiệt chân không trên mặt sân dài 1,2 m. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Hình 20

Lời giải



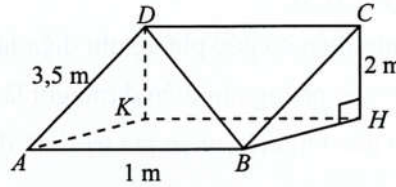
Hình 71

Vẽ OA biểu diễn cho ống hấp nhiệt chân không, OH biểu diễn bóng nắng (hình chiếu vuông góc do tia nắng chiếu vuông góc với mặt sân) của ống đó trên mặt sân. Như vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân bằng $\widehat{AOH}$. Ta có:

$$\cos \widehat{AOH} = \frac{OH}{OA} = \frac{1,2}{1,8} = \frac{2}{3} \Rightarrow \widehat{AOH} \approx 48^\circ.$$

Vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân thượng bằng khoảng 48° .

Câu 26. Một tấm ván hình chữ nhật $ABCD$ được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật lên khỏi hố sâu $2m$. Cho biết $AB = 1m$, $AD = 3,5m$. Tính góc giữa đường thẳng BD và đáy hố.



Hình 3

Lời giải

$$\text{Ta có: } DK = CH = 2, AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \frac{\sqrt{33}}{2}, BK = \sqrt{AK^2 + AB^2} = \frac{\sqrt{37}}{2}, \tan \widehat{DBK} = \frac{DK}{KB}.$$

$$\text{Nên } \widehat{DBK} = 43,4^\circ$$

Góc giữa đường thẳng BD và đáy hố là $43,4^\circ$

HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

Câu 27. Trong cửa sổ ở Hình 7.56, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính $80cm$, bản lề được đính ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d ; khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tính số đo của góc nhị diện có hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa cánh, khung cửa khi $d = 40cm$.



Hình 7.56

Lời giải

Gọi I, J lần lượt là tâm của nửa hình tròn khung cửa và nửa hình tròn cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau, do đó chúng cũng song song với giao tuyến m (qua O) của hai mặt phẳng tương ứng chứa khung và cánh cửa.

Vì O là trung điểm của các cung tròn khung cửa và cánh cửa nên OI vuông góc với đường kính khung cửa, OJ vuông góc với đường kính cánh cửa. Vậy OI, OJ cùng vuông góc với m . Do đó $\widehat{IOJ}$ là một góc phẳng nhị diện của nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa.

Ta có $m \perp OI, m \perp OJ$ nên $m \perp IJ$. Vậy IJ cũng vuông góc với các đường kính cánh cửa và khung cửa.

Do đó $IJ = 40cm$. Mặt khác $OI = OJ = 40cm$, suy ra tam giác OIJ đều và $\widehat{IOJ} = 60^\circ$. Vậy để khoảng cách d giữa đường kính cánh cửa và đường kính khung cửa bằng $40cm$ thì góc nhị diện có hai cạnh tương ứng chứa cánh và khung cửa có số đo là 60° .

Câu 28. Từ một tấm tôn hình chữ nhật, tại 4 góc bác Hùng cắt bỏ đi 4 hình vuông có cùng kích thước và sau đó hàn gắp các mép tại các góc như Hình 7.65. Giải thích vì sao bằng cách đó, bác Hùng nhận được chiếc thùng không nắp có dạng hình hộp chữ nhật.



Hình 7.65

Lời giải

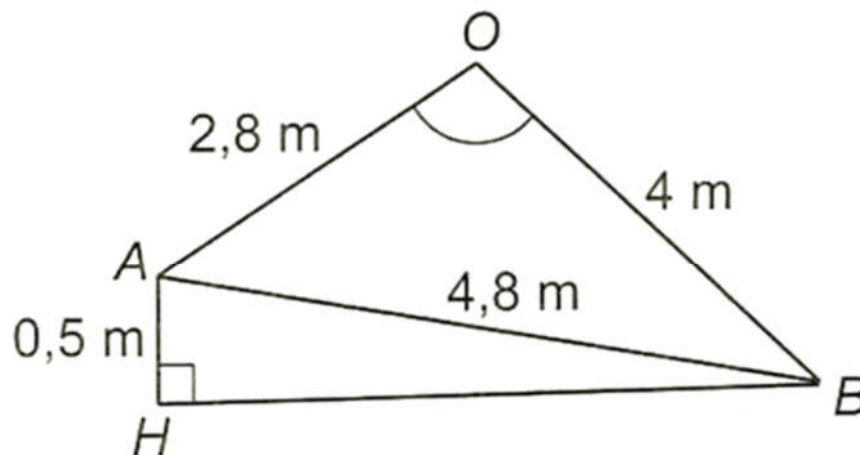
Vận dụng kiến thức về hình hộp chữ nhật để tạo dựng hình thực tế. Thùng có đáy và các mặt bên là các hình chữ nhật. Điều đó cũng kéo theo rằng miệng thùng là một hình chữ nhật (có các cạnh tương ứng song song và bằng cạnh đáy) thuộc mặt phẳng song song với đáy. Vì các cạnh bên của song song với nhau nên thùng là một hình lăng trụ. Mặt khác, mỗi cạnh bên của thùng đều vuông góc với đáy (vì vuông với hai cạnh kề của đáy). Do đó thùng là lăng trụ đứng, hơn nữa, có đáy là hình chữ nhật nên thùng có dạng hình hộp chữ nhật.

Câu 29. Hai mái nhà trong Hình 7.72 là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8m$; $OA = 2,8m$; $OB = 4m$.



Hình 7.72

- Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
- Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.
- Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5m$. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

Lời giải

Hình 7.23

$$a) \cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2 \cdot OA \cdot OB} = \frac{1}{28} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 88^\circ.$$

b) Mặt phẳng (OAB) vuông góc với đường nóc nhà, đường nóc nhà song song với mặt phẳng đất nên mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt phẳng đất.

$$c) \sin \widehat{ABH} = \frac{0,5}{4,8} \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 6^\circ; \cos \widehat{OBA} = \frac{13}{16} \Rightarrow \widehat{OBA} \approx 36^\circ. \text{ Do đó } \widehat{OBH} = \widehat{ABH} + \widehat{OBA} \approx 42^\circ.$$

Câu 30. Độ dốc của mái nhà, mặt sân, con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mái nhà, mặt sân, con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

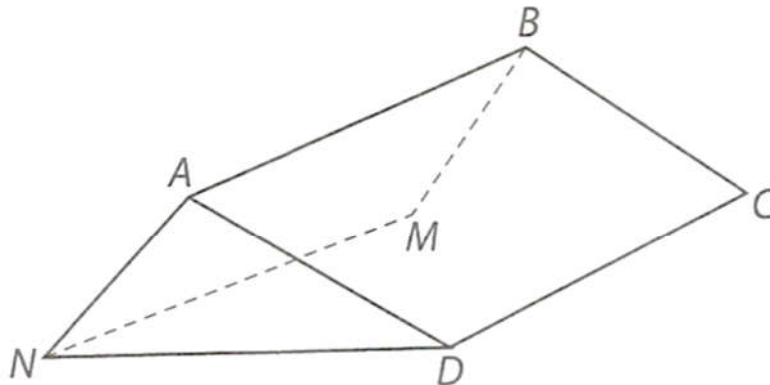
$$\text{Ta có: } \tan \alpha \leq \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha \leq 4,76^\circ.$$

Câu 31. Một ngôi nhà có hai mái trước, sau có dạng là các hình chữ nhật $ABCD, ABMN$, $AD = 4m, AN = 3m, DN = 5m$. Tính góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà đó (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).



Giải. (H.7.13)

Xét tam giác ADN có: $AN^2 + AD^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2 = DN^2$ nên tam giác AND vuông tại A . Mặt khác, góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$ bằng góc DAN . Vậy góc giữa hai mặt phẳng chứa hai mái nhà bằng 90° .

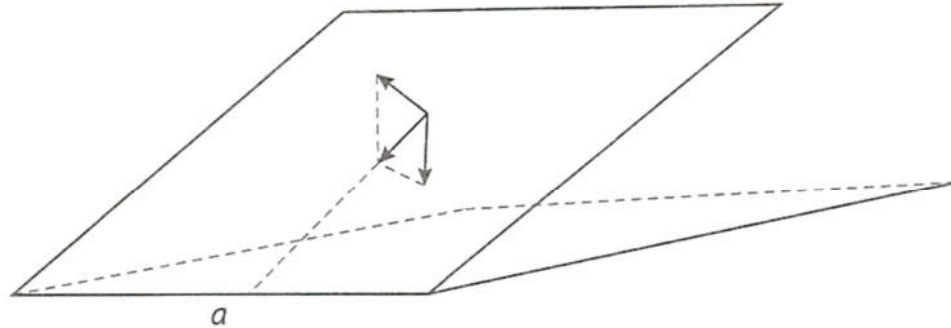


Hình 7.13

Câu 32. Một viên bi được thả lăn trên một mặt phẳng nằm nghiêng (so với mặt phẳng nằm ngang). Coi viên bi chịu tác dụng của hai lực chính là lực hút của Trái Đất (theo phương thẳng đứng, hướng xuống dưới) và phản lực, vuông góc với mặt phẳng nằm nghiêng, hướng lên trên. Giải thích vì sao viên bi di chuyển trên một đường thẳng vuông góc với giao tuyến của mặt phẳng nằm nghiêng và mặt phẳng nằm ngang.

Lời giải

Gọi a là giao tuyến của mặt phẳng nằm ngang và mặt phẳng nằm nghiêng. Phương của lực hút trái đất vuông góc với mặt phẳng nằm ngang, phương của phản lực vuông góc với mặt phẳng nghiêng nên phương của hai lực nói trên đều vuông góc với đường thẳng a , do đó đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) chứa hai phương của hai lực đó. Vì tổng hợp lực của trọng lực và phản lực là một lực có phương nằm trên mặt phẳng (P) nên phương đó vuông góc với a . Do đó, viên bi lăn dọc theo đường thẳng vuông góc với đường thẳng a .

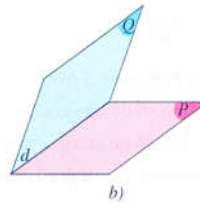


Hình 7.45

Câu 33. Trong các công trình xây dựng nhà ở, độ dốc mái được hiểu là độ nghiêng của mái khi hoàn thiện so với mặt phẳng nằm ngang. Khi thi công, mái nhà cần một độ nghiêng nhất định để đảm bảo thoát nước tốt tránh gây ra tình trạng đọng nước hay thấm dột. Quan sát Hình 40 và cho biết góc nhị diện nào phản ánh độ dốc của mái.



a)



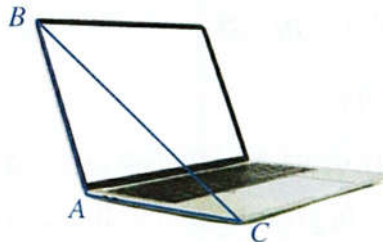
b)

Hình 40

Giải

Giả sử nửa mặt phẳng (P) (minh họa mặt phẳng nằm ngang) và nửa mặt phẳng (Q) (minh họa mái nhà) cắt nhau theo giao tuyến d (Hình 40b). Khi đó góc nhị diện có cạnh là đường thẳng d , hai mặt lần lượt là (P) và (Q) phản ánh độ dốc của mái. Độ dốc đó cũng được phản ánh bởi góc phẳng nhị diện xOy của góc nhị diện trên (Hình 40a).

Câu 34. Trong Hình 42, máy tính xách tay đang mở gợi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của màn hình máy tính. Tính độ mở của màn hình máy tính đó, biết tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = AC = 30\text{ cm}$ và $BC = 30\sqrt{3}\text{ cm}$.



Hình 42

Lời giải

Gọi d là đường thẳng chứa bản lề của máy tính.

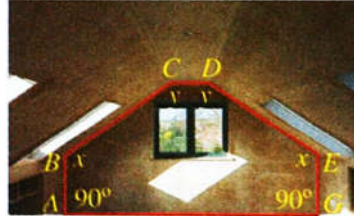
$$d \perp AB, d \perp AC$$

Vậy $\widehat{BAC}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện cần tính.

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có: } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{30^2 + 30^2 - (30\sqrt{3})^2}{2 \cdot 30 \cdot 30} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$$

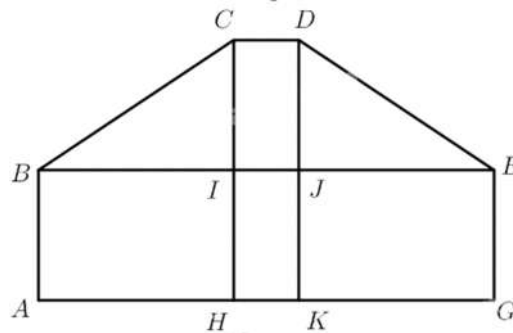
Vậy độ mở của màn hình máy tính bằng 120° .

Câu 35. Trong Hình 43, xét các góc nhị diện có góc phẳng nhị diện tương ứng là $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$ trong cùng mặt phẳng. Lục giác $ABCDEG$ nằm trong mặt phẳng đó có $AB = GE = 2m, BC = DE, \widehat{A} = \widehat{G} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{E} = x, \widehat{C} = \widehat{D} = y$. Biết rằng khoảng cách từ C và D đến AG là $4m, AG = 12m, CD = 1m$. Tìm x, y (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 43

Lời giải



Kẻ $CH \perp AG (H \in AG), DK \perp AG (K \in AG)$

Gọi $I = BE \cap CH, J = BE \cap DK$.

$ABEG$ là hình chữ nhật $\Rightarrow BE = AB = 12$

$CDKH, CDJI$ là hình chữ nhật $\Rightarrow HK = IJ = CD = 1$

$ABIH, EGKJ$ là hình chữ nhật $\Rightarrow IH = JK = AB = 2$

$$AH = GK = BI = EJ = \frac{AG - HK}{2} = \frac{12 - 1}{2} = 5,5$$

$$CH = d(C, AG) = 4 \Rightarrow CI = CH - IH = 4 - 2 = 2$$

$$\triangle BCI \text{ vuông tại } I \Rightarrow \tan \widehat{CBI} = \frac{CI}{BI} = \frac{2}{5,5} = \frac{4}{11} \Rightarrow \widehat{CBI} \approx 19,98^\circ$$

$$\Rightarrow x = \widehat{ABI} + \widehat{CBI} = 90^\circ + 19,98^\circ = 110,0^\circ$$

$$\Rightarrow y = 180^\circ - x = 180^\circ - 110,0^\circ = 70,0^\circ$$

Câu 36. Quan sát ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ ở Hình 57, chỉ ra hai cặp mặt phẳng mà mỗi cặp gồm hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Hãy sử dụng kí hiệu để viết những kết quả đó.



Hình ảnh mô phỏng vệ tinh LOTUSat-1

(Nguồn: JICA Việt Nam)

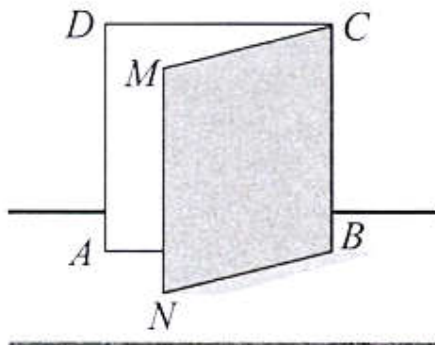
Hình 57

Lời giải

$$(P) \perp (R), (Q) \perp (R)$$

Câu 37. Hình 19 minh họa một cánh cửa và khung cửa. Cánh cửa có dạng hình chữ nhật $BCMN$ và khung cửa có dạng hình chữ nhật $ABCD$, ở đó $AB = BN$. Góc mở cửa là góc nhị diện $[A, BC, N]$. Biết chiều rộng BN của cửa là $1,2m$. Khi góc mở cửa có số đo bằng 60° thì khoảng cách giữa A và N bằng bao nhiêu?

Giải (hình 19)



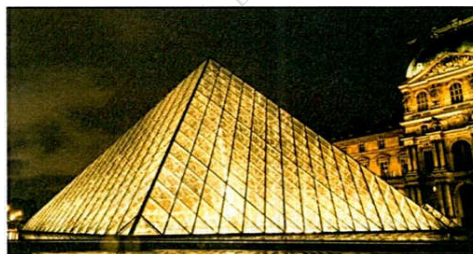
Hình 19

Vì $AB \perp BC$ và $NB \perp BC$ nên góc ABN là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[A, BC, N]$.

Vì góc mở cửa bằng 60° nên số đo góc nhị diện $[A, BC, N]$ bằng 60° , suy ra $\widehat{ABN} = 60^\circ$.

Xét tam giác ABN cân tại B có $BA = BN = 1,2m$ và $\widehat{ABN} = 60^\circ$. Khi đó tam giác ABN đều, suy ra $AN = 1,2m$, hay khoảng cách giữa A và N bằng $1,2m$.

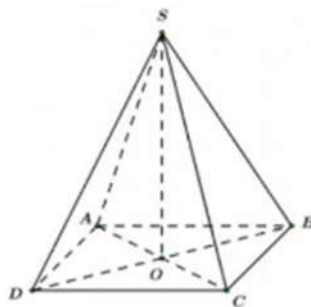
Câu 38. Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là $21,6m$ và cạnh đáy dài $34m$. Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của kim tự tháp.



Hình 29

(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Louvre_Pyramid)

Lời giải

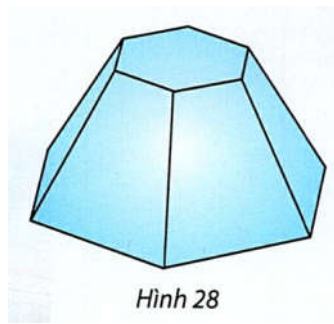


Ta có : $SO = 21,6$; $AB = CB = 34$

$$OA = 34 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2}$$

$$SA = \sqrt{(17\sqrt{2})^2 + 21,6^2} = 32,32(m)$$

Câu 39. Một người cần sơn tất cả các mặt của một cái bục để đặt tượng có dạng hình chóp cắt lục giác đều có cạnh đáy lớn $1m$, cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng $0,7m$. Tính tổng diện tích cần sơn.



Hình 28

Lời giải

$$\text{Diện tích đáy lớn là: } \frac{3\sqrt{3} \cdot 1^2}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy nhỏ là: } \frac{3\sqrt{3} \cdot 0,7^2}{2} = \frac{147\sqrt{3}}{20}$$

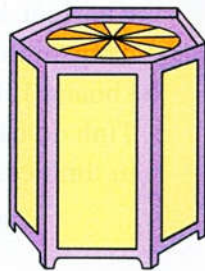
Một mặt bên của hình chóp cắt là hình thang cân có đáy lớn là $1m$, đáy nhỏ là $0,7m$ và cạnh bên là $0,7m$

$$\text{Chiều cao của mặt bên là: } \sqrt{0,7^2 - \left(\frac{1-0,7}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{187}}{20}$$

$$\text{Diện tích một mặt bên là: } \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{187}}{20} \cdot (0,7+1) = 0,58(m^2)$$

$$\text{Tổng diện tích cần sơn là: } \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{147\sqrt{3}}{20} + 6 \cdot 0,58 = 18,8(m^2)$$

Câu 40. Một chiếc lồng đèn kéo quân có dạng hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy bằng $10cm$ và cạnh bên bằng $30cm$ (Hình 20). Tính tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn đó.



Hình 20

Lời giải

$$\text{Tổng diện tích các mặt bên của lồng đèn đó: } 6 \cdot 10 \cdot 30 = 1800(cm^2)$$

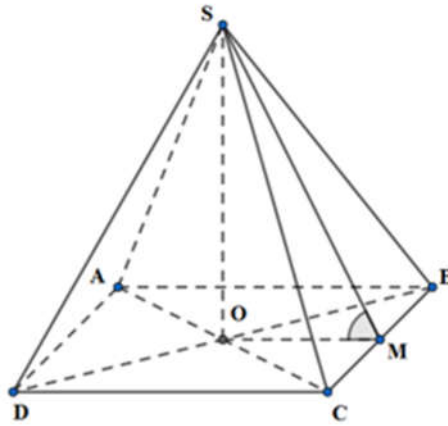
Câu 41. Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.



Hình 8

(Nguồn: https://en.wikipedia.org/wiki/Memphis_Pyramid)

Lời giải



Kẻ $SM \perp BC$

Mà $BC \perp SO$ nên $BC \perp (SOM)$. Suy ra $BC \perp OM$

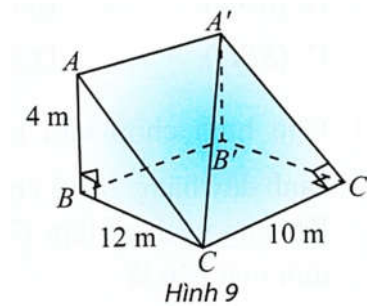
Do đó góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $\widehat{SMO}$

Ta có: $SO = 98; OM = \frac{1}{2} \cdot 180 = 90$

$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = 1,1$. Suy ra $\widehat{SMO} = 47,4^\circ$

Vậy góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $47,4^\circ$

Câu 42. Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng tam giác với kích thước như trong Hình 9.



Hình 9

a) Tính số đo góc giữa đường thẳng CA' và $(CC'B'B)$.

b) Tính số đo góc nhị diện cạnh CC' .

Lời giải

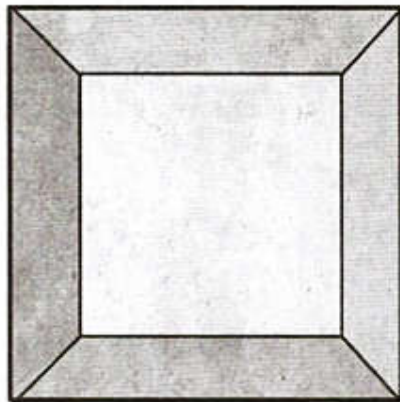
a) Góc giữa CA' và $(CC'B'B)$ là $\widehat{A'CB'}$

Ta có: $CB' = \sqrt{10^2 + 12^2} = 2\sqrt{61}$, $\tan \widehat{A'CB'} = \frac{A'B'}{CB'} = 0,256$. Nên $\widehat{A'CB'} = 14,36^\circ$

b) Góc nhị diện cạnh CC' là $\widehat{ACB}$

Ta có: $\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{3}$. Nên $\widehat{ACB} = 18,4^\circ$.

Câu 43. Người ta cần sơn tất cả các mặt của một khối bê tông hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 2 m , đáy nhỏ có cạnh bằng 1 m và cạnh bên bằng 2 m (Hình 14). Tính tổng diện tích các bề mặt cần sơn.

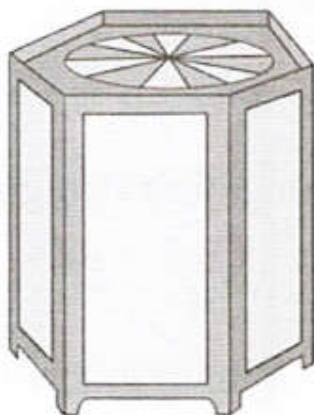


Hình 14

Lời giải

$$S_{tp} = 4 \cdot \frac{\sqrt{15}}{2} \cdot \frac{(2+1)}{2} + 4 + 1 = 5 + 3\sqrt{5} \approx 16,62 (m^2).$$

Câu 44. Một hộp đèn treo trên trần có hình dạng lăng trụ đứng lục giác đều (hình 15), cạnh đáy bằng 10cm và cạnh bên bằng 50cm. Tính tỉ số giữa diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của hộp đèn.



Hình 15

Lời giải

$$\frac{S_{xq}}{S_{\text{day}}} = \frac{6 \cdot 50 \cdot 10}{6 \cdot \frac{10^2 \sqrt{3}}{4}} = \frac{20\sqrt{3}}{3} \approx 11,55.$$

KHOẢNG CÁCH

Câu 45. Ở một con dốc lên cầu, người ta đặt một khung khổng lồ chế chiều cao, hai cột của khung có phương thẳng đứng và có chiều dài bằng 2,28m. Đường thẳng nối hai chân cột vuông góc với hai đường mép dốc.

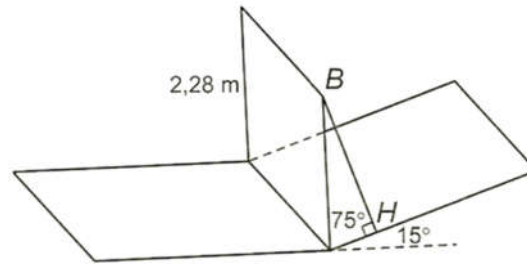
Thanh ngang được đặt trên đỉnh hai cột. Biết dốc nghiêng 15° so phương nằm ngang. Tính khoảng cách giữa thanh ngang của khung và mặt đường (theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

Hỏi cầu này có cho phép xe cao 2,21m đi qua hay không?



Hình 7.82. Tại đầu một số cầu vượt ta có thể bắt gặp khung không chế chiều cao.

Lời giải

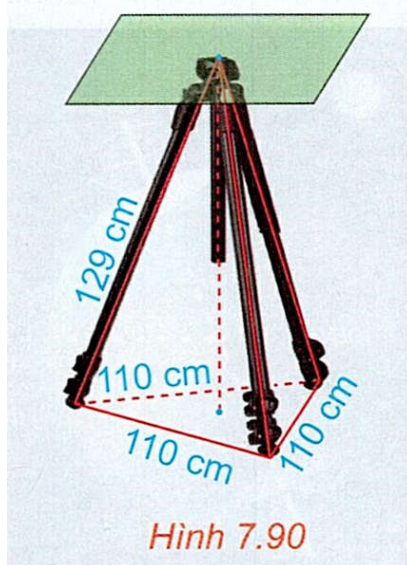


Hình 7.26

Gọi B là một điểm nằm trên thanh ngang và H là hình chiếu vuông góc xuống mặt dốc. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng dốc là $BH = 2,28 \cdot \sin 75^\circ \approx 2,2(m)$.

Do đó, không cho phép xe cao 2,21 m đi qua.

Câu 46. Giá đỡ ba chân ở Hình 7.90 đang được mở sao cho ba gốc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 110 cm. Tính chiều cao của giá đỡ, biết các chân của giá đỡ dài 129 cm.



Hình 7.90

Lời giải

Chiều cao của giá đỡ là $\sqrt{129^2 - \left(\frac{110 \cdot \sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 112(cm)$.

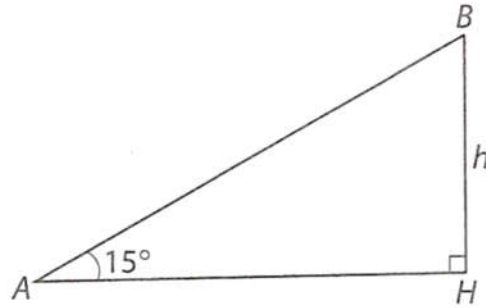
Câu 47. Một bể nước có đáy thuộc mặt phẳng nằm ngang. Trong trường hợp này, độ sâu của bể là khoảng cách giữa mặt nước và đáy bể. Giải thích vì sao để đo độ sâu của bể, ta có thể thả quả dọi chạm đáy bể và đo chiều dài của đoạn dây dọi nằm trong bể nước.

Lời giải

Sợi dây của quả dọi có phương vuông góc với đáy bể và vuông góc với mặt nước.

Câu 48. Một chiếc máy bay cất cánh từ một điểm thuộc mặt đất phẳng nằm ngang. Trong 3 phút đầu máy bay bay với vận tốc 500 km/h và theo đường thẳng tạo với mặt đất một góc 15° . Hỏi sau 2 phút, máy bay ở độ cao bao nhiêu kilômét (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)?

Giải. (H.7.16)



Hình 7.16

Sau 2 phút, máy bay đi được quãng đường là

$$AB = \frac{500}{60} \cdot 2 = \frac{50}{3} (\text{km}). \text{ Sau 2 phút, máy bay ở độ cao là}$$

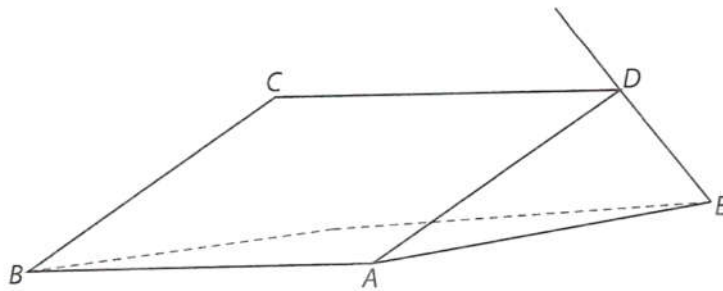
$$h = AB \cdot \sin 15^\circ \approx 4,3 (\text{km}).$$

Câu 49. Trên một mái nhà nghiêng 30° so với mặt phẳng nằm ngang, người ta dựng một chiếc cột vuông góc với mái nhà. Hỏi chiếc cột tạo với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? Vì sao?

Lời giải

Gọi AB là giao tuyến của mặt phẳng mái nhà và mặt phẳng nằm ngang, AD là đường thẳng nằm trên mái nhà và vuông góc với AB , đường thẳng DE là chiếc cột vuông góc với mái nhà, đường thẳng AE nằm trên mặt phẳng nằm ngang, khi đó tam giác ADE vuông tại D , đường thẳng AE là hình chiếu vuông góc của DE trên mặt phẳng nằm ngang, mà góc DAE bằng 30° nên góc giữa hai đường thẳng DE và AE bằng 60° .

Vậy góc giữa đường thẳng DE (chiếc cột) và mặt phẳng nằm ngang bằng góc giữa hai đường DE và AE bằng 60° .



Hình 7.51

Câu 50. Người ta dựng các cột đèn vuông góc với mặt đường, trong đó mỗi cột đèn gọi nên hình ảnh một đường thẳng. Khoảng cách giữa hai chân cột đèn liên tiếp đo được là 5 m . Tại sao có thể nói khoảng cách giữa hai cột đèn đó là 5 m ?

Lời giải

Các cột đèn được dựng thẳng đứng và vuông góc với mặt đường thì chúng song song với nhau. Do đó, đoạn thẳng nối hai chân cột chính là khoảng cách giữa hai đường thẳng song song. Vậy ta có thể nói khoảng cách giữa hai cột đèn đó là 5 m .

Câu 51. Hình 76 gọi nên hình ảnh hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau. Cột gỗ cao $4,2 \text{ m}$. Khoảng cách giữa (P) và (Q) là bao nhiêu mét?

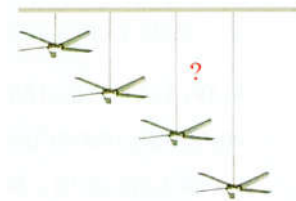


Hình 76

Lời giải

Vì hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau nên khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng khoảng cách cột gỗ. Vậy khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng $4,2\text{ m}$.

Câu 52. Một quạt trần có bề dày của thân quạt là 20 cm . Người ta muốn treo quạt sao cho khoảng cách từ đỉnh quạt đến sàn nhà là $2,5\text{ m}$. Hỏi phải làm cán quạt dài bao nhiêu? Cho biết trần nhà cao $3,6\text{ m}$.

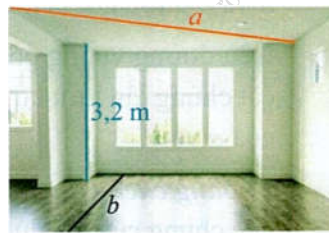


Hình 3

Lời giải

Cán quạt dài: $3,6 - 2,5 - 0,2 = 0,9(m)$

Câu 53. Một căn phòng có trần cao $3,2\text{ m}$. Tính khoảng cách giữa một đường thẳng a trên trần nhà và đường thẳng b trên sàn nhà.

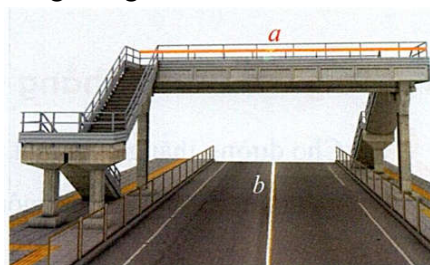


Hình 10

Lời giải

$$d(a, b) = 3,2\text{ m}$$

Câu 54. Một cây cầu dành cho người đi bộ (Hình 22) có mặt sàn cầu cách mặt đường $3,5\text{ m}$, khoảng cách từ đường thẳng a nằm trên tay vịn của cầu đến mặt sàn cầu là $0,8\text{ m}$. Gọi b là đường thẳng kẻ theo tim đường. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng a và b .



Hình 22

Lời giải

$$d(a, b) = 3,5 + 0,8 = 4,3$$

THỂ TÍCH

Câu 55. Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (H.7.98). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng 30cm , 60cm , cạnh bên của sọt dài 50cm . Tính thể tích của sọt.



Hình 7.98

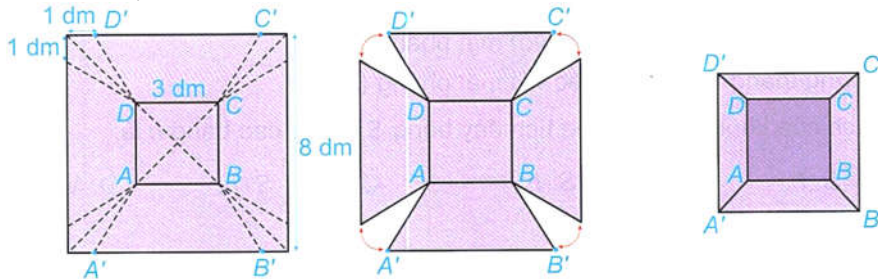
Lời giải

Diện tích mặt đáy lớn là $S_1 = 60^2 (\text{cm}^2)$, diện tích mặt đáy nhỏ là $S_2 = 30^2 (\text{cm}^2)$.

Chiều cao là $h = \sqrt{50^2 - \frac{30^2}{2}} = 5\sqrt{82} (\text{cm})$. Do đó $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}) \approx 95082 (\text{cm}^3)$.

Câu 56. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh 8dm , bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như Hình 7.99.

- Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.
- Tính cạnh bên của thùng.
- Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?



Hình 7.99

Lời giải

a) Vì $AB \parallel A'B' \Rightarrow AB \parallel (A'B'C'D)$, $AD \parallel A'D' \Rightarrow AD \parallel (A'B'C'D)$. Do đó $(ABCD) \parallel (A'B'C'D)$.

b) Cạnh bên của hình chóp cụt bằng $\sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{34}}{2} (\text{dm})$.

c) Xét mặt chứa đường chéo của hình vuông, nó là hình thang cân có chiều cao bằng chiều cao của hình chóp cụt và tính ra được $h = \sqrt{\frac{34}{4} - \frac{18}{4}} = 2 (\text{dm})$.

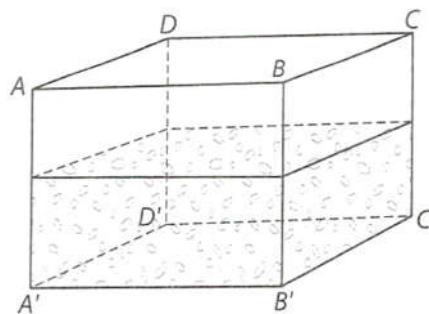
Thể tích cần tìm là $V = 42$ lít.

Câu 57. Một thùng nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$, $AB = 5\text{m}$, $AA' = 3\text{m}$, $AD = 4\text{m}$.

Đáy bể là hình chữ nhật $A'B'C'D'$ được đặt trên một mặt phẳng nằm ngang.

- Giải thích vì sao khi nước trong bể phẳng lặng, thì phần nước đó ứng với một khối hộp chữ nhật.
- Tính mức nước trong bể (khoảng cách từ mặt nước đến đáy bể) khi thể tích phần nước trong bể là 40m^3 .

Giải. (H.7.20)



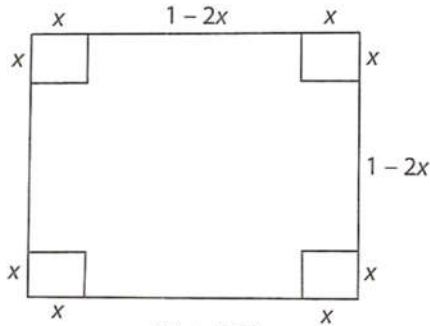
Hình 7.20

a) Vì mặt phẳng chứa bề mặt nước song song với mặt đáy nên phần nước trong bể là khối hình lăng trụ đứng, có đáy $A'B'C'D'$ là hình chữ nhật nên phần nước trong bể là khối hộp chữ nhật.

b) Mức nước trong bể là $h = \frac{40}{4 \cdot 5} = 2(m)$.

Câu 58. Người ta cắt bỏ bốn hình vuông cùng kích thước ở bốn góc của một tấm tôn hình vuông có cạnh $1m$ để gò lại thành một chiếc thùng có dạng hình hộp chữ nhật không nắp. Hỏi cạnh của các hình vuông cần bỏ đi có độ dài bằng bao nhiêu để thùng hình hộp chữ nhật nhận được có thể tích lớn nhất?

Lời giải



Hình 7.59

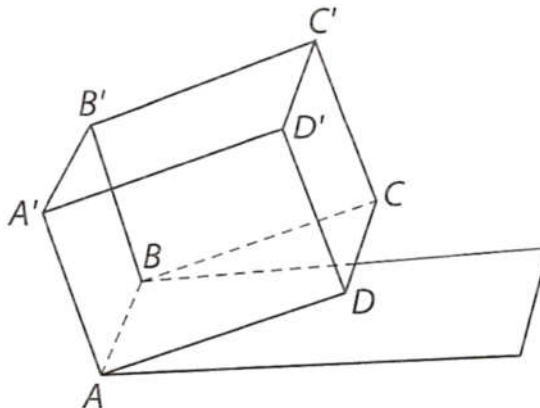
Gọi $x(m)$ là chiều dài cạnh hình vuông nhỏ tại mỗi góc của tấm tôn được cắt bỏ đi (với $0 < x < \frac{1}{2}$). Thể tích hình hộp chữ nhật nhận được là

$$V = (1-2x)^2 \cdot x = \frac{1}{4} \cdot (1-2x) \cdot (1-2x) \cdot 4x \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1-2x+1-2x+4x}{3} \right)^3 = \frac{2}{27}$$

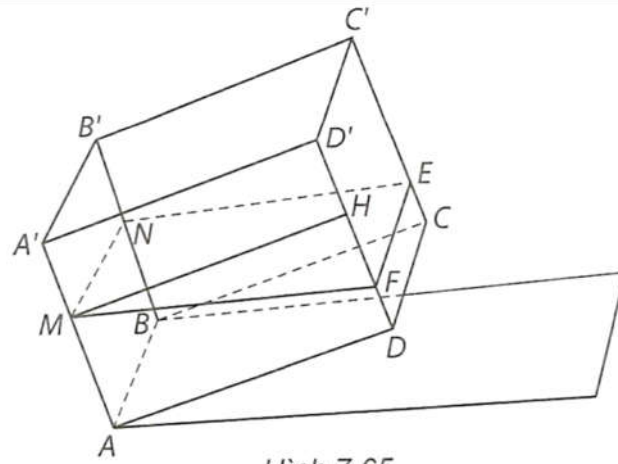
Dấu "=" xảy ra khi $1-2x = 4x \Leftrightarrow x = \frac{1}{6}$.

Vậy để thể tích chiếc thùng là lớn nhất thì các cạnh của hình vuông được cắt bỏ đi là $\frac{1}{6}m$.

Câu 59. Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ được đặt trên một mái nhà nghiêng so với mặt đất nằm ngang góc 10° , $AB = 1m$, $AD = 1,5m$, $AA' = 1m$. Đáy bể là hình chữ nhật $ABCD$. Các điểm A, B cùng ở độ cao $5m$ (so với mặt đất), các điểm C, D ở độ cao lớn hơn so với độ cao của các điểm A, B . Khi nước trong bể phẳng lặng người ta đo được khoảng cách giữa đường mép nước ở mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy của bể là $80cm$. Tính thể tích của phần nước trong bể.



Lời giải



Hình 7.65

Gọi MN là đường mép nước ở trên mặt $(ABB'A')$, EF là đường mép nước trên mặt $(CDD'C')$. Khi đó $ABNM.DCEF$ là một hình chóp cụt. Kẻ MH vuông góc với DD' tại H thì $HF = MH \cdot \tan 10^\circ = \tan 10^\circ (m)$.

Suy ra $DF = DH - HF = AM - HF = 0,8 - \tan 10^\circ \approx 0,62(m)$.

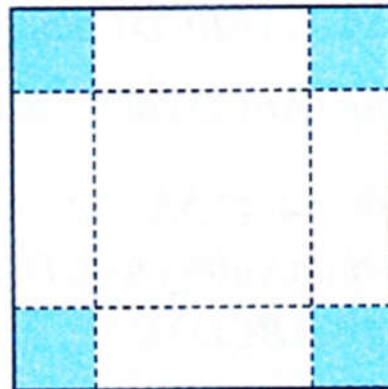
Ta có: $S_1 = S_{DCEF} = DF \cdot CD \approx 0,62(m^2)$; $S_2 = S_{ABNM} = AB \cdot AM = 0,8(m^2)$.

Vậy thể tích phần nước trong bể là

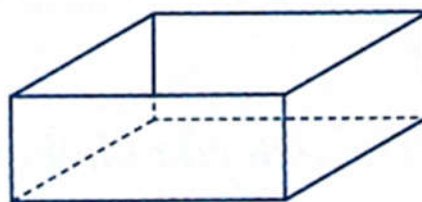
$$V = \frac{1}{3} \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) \cdot AD = \frac{1}{3} \cdot (0,62 + 0,8 + \sqrt{0,62 \cdot 0,8}) \approx 0,71(m^3)$$

Câu 60. Từ một tấm bìa hình vuông (Hình 92a), người ta cắt ở bốn góc của tấm bìa đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $6cm$, rồi gấp hình hộp chữ nhật (Hình 92b). Tính cạnh của tấm bìa ban đầu, biết rằng thể tích của chiếc hộp bằng $600cm^3$.

Giải



a)



b)

Hình 92

Giả sử tấm bìa ban đầu có cạnh $x(cm)$ ($x > 12$). Khi đó:

Đáy của chiếc hộp là hình vuông cạnh $x-12(cm)$ nên diện tích của đáy chiếc hộp là $(x-12)^2 (cm^2)$.

Mà chiều cao của chiếc hộp là $6cm$, suy ra thể tích của chiếc hộp bằng $(x-12)^2 \cdot 6 (cm^3)$.

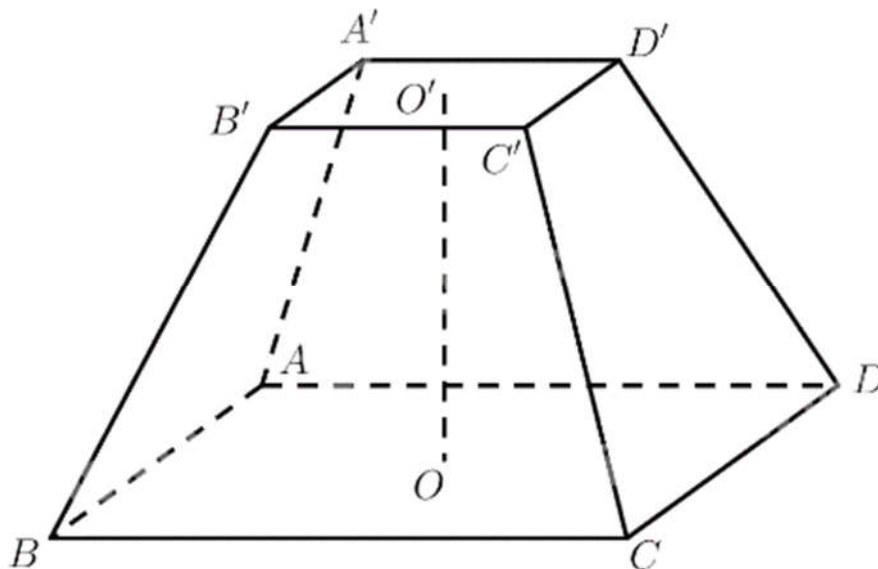
Theo đề bài, thể tích của chiếc hộp bằng $600cm^3$ nên $(x-12)^2 \cdot 6 = 600 \Leftrightarrow (x-12)^2 = 100$.

Với $x > 12$ ta có: $x-12=10 \Leftrightarrow x=22(cm)$.

Vậy độ dài cạnh của tấm bìa ban đầu là $22cm$.

Câu 61. Một thùng đựng rác có dạng khối chóp cắt tứ giác đều với hai cạnh đáy lần lượt dài $2dm$ và $3dm$, chiều cao bằng $4dm$. Tính thể tích của thùng đựng rác.

Lời giải



Diện tích đáy lớn là: $S = AB^2 = 3^2 = 9$

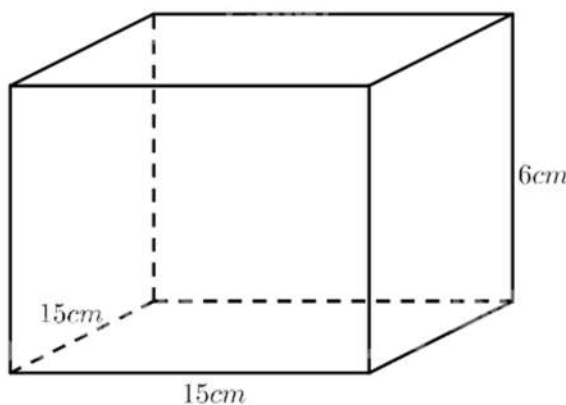
Diện tích đáy bé là: $S' = 2^2 = 4$

Thể tích hình chóp cắt là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 4(9 + \sqrt{9 \cdot 4} + 4) = \frac{76}{3} \approx 25,3 (dm^3)$$

Câu 62. Một chiếc bánh chưng có dạng khối hộp chữ nhật với kích thước ba cạnh là $15cm$, $15cm$ và $6cm$. Tính thể tích của chiếc bánh chưng đó.

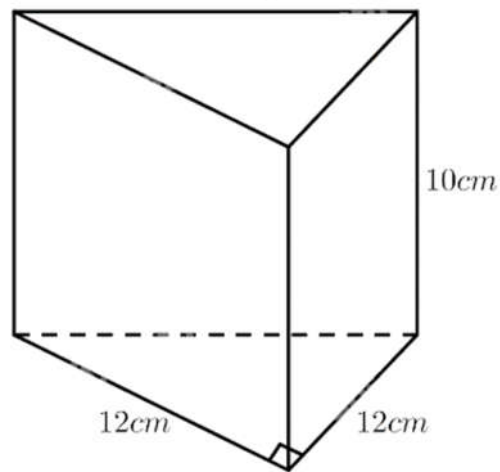
Lời giải



Thể tích của chiếc bánh chưng đó là: $V = 15 \cdot 15 \cdot 6 = 1350 (cm^3)$.

Câu 63. Một miếng pho mát có dạng khối lăng trụ đứng với chiều cao $10cm$ và đáy là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng $12cm$. Tính khối lượng của miếng pho mát theo đơn vị gam, biết khối lượng riêng của loại pho mát đó là $3g/cm^3$.

Lời giải



Diện tích đáy của miếng pho mát là: $S = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 12 = 72 (cm^2)$.

Thể tích của miếng pho mát là: $V = Sh = 72 \cdot 10 = 720 (cm^3)$.

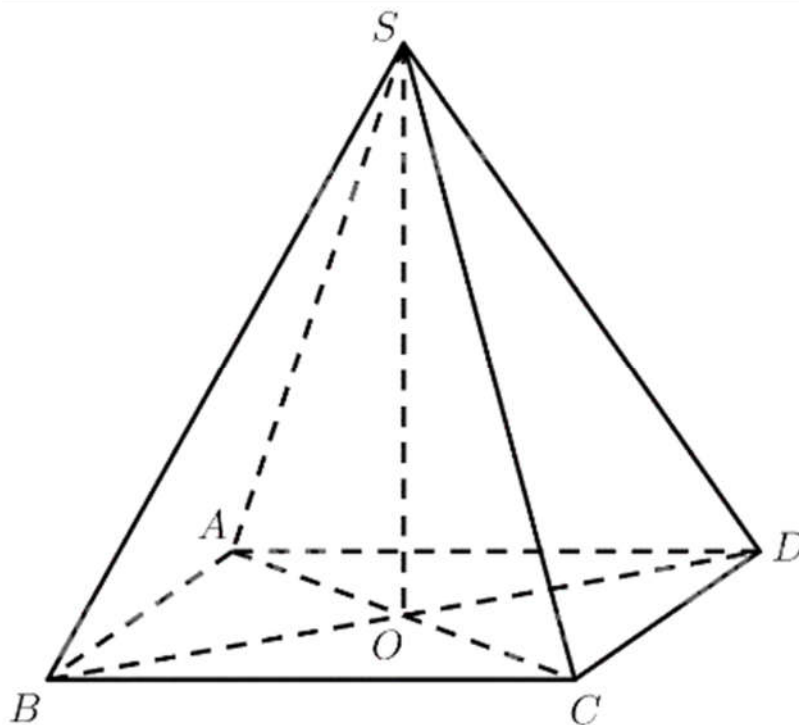
Khối lượng của miếng pho mát là: $m = D \cdot V = 3 \cdot 720 = 2160 (g)$.

Câu 64. Một loại đèn đá muối có dạng khối chóp tứ giác đều (Hình 97). Tính theo a thể tích của đèn đá muối đó, giả sử các cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng a .



Hình 97

Lời giải



Mô hình hoá đèn đá muối bằng hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Gọi O là tâm của đáy.

$$\Delta SAC \text{ cân } S \Rightarrow SO \perp AC$$

$$\Delta SBD \text{ cân } S \Rightarrow SO \perp BD$$

$$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

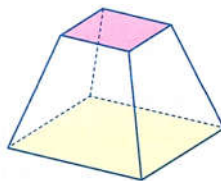
$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta SAO \text{ vuông tại } O \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$S_{ABCD} = AB^2 = a^2$$

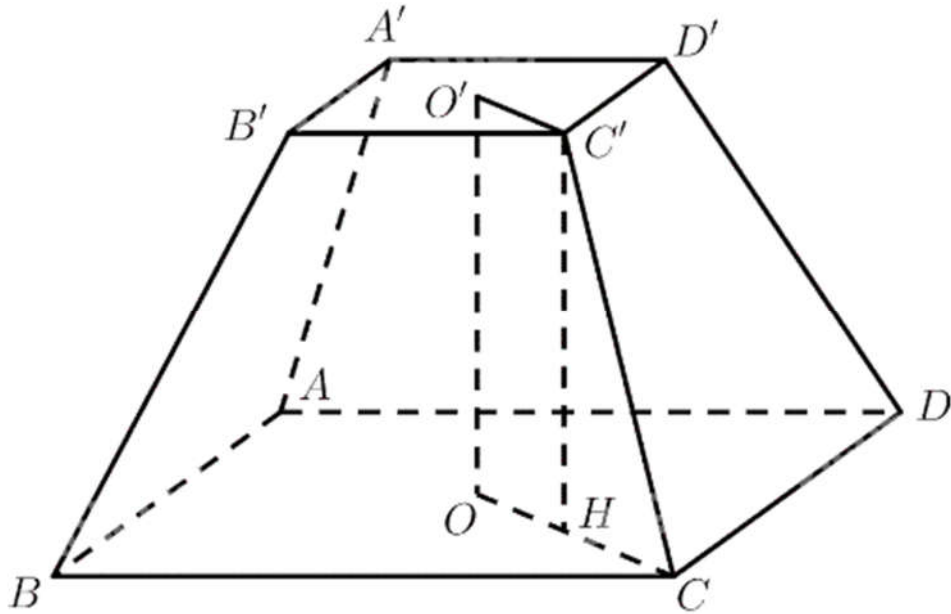
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$$

Câu 65. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 98). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng/ m^3 . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.



Hình 98

Lời giải



Mô hình hoá chân tháp bằng cắt chóp tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ với O, O' là tâm của hai đáy.

Vậy $AB = 5, A'B' = 2, CC' = 3$.

$ABCD$ là hình vuông

$$\Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow CO = \frac{1}{2}AC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$$A'B'C'D' \text{ là hình vuông} \Rightarrow A'C' = \sqrt{A'B'^2 + B'C'^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow C'O' = \frac{1}{2}A'C' = \sqrt{2}$$

Kẻ $C'H \perp OC (H \in OC)$

$$OHC'O' \text{ là hình chữ nhật} \Rightarrow OH = O'C' = \sqrt{2}, OO' = C'H \Rightarrow CH = OC - OH = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta CC'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OO' = C'H = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Diện tích đáy lớn là: } S = AB^2 = 5^2 = 25 (m^2)$$

$$\text{Diện tích đáy bé là: } S' = A'B'^2 = 2^2 = 4 (m^2)$$

Thể tích hình chóp cắt là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} (m^3)$$

$$\text{Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là: } \frac{39\sqrt{2}}{2} \cdot 1470000 \approx 40538432 \text{ (đồng).}$$

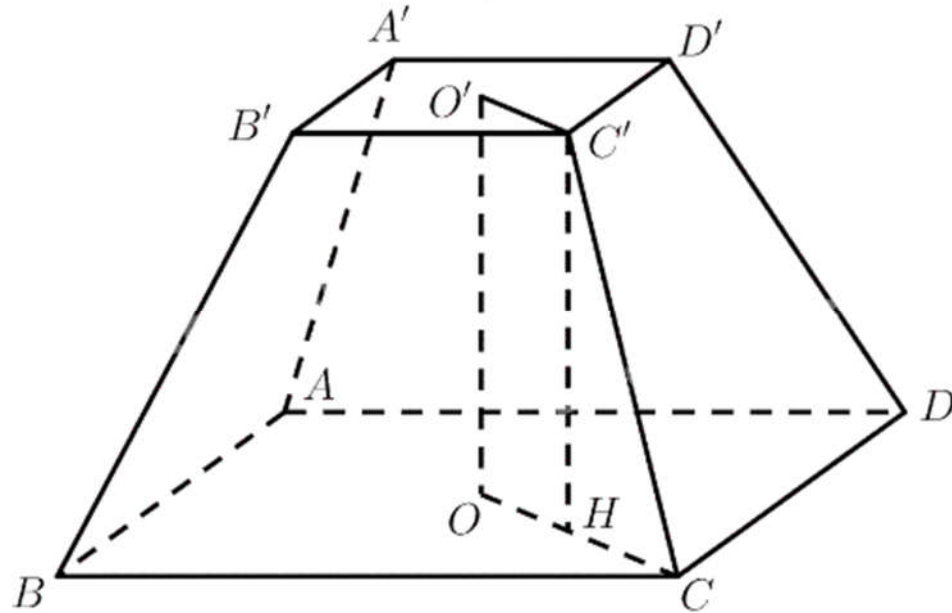
Câu 66. Đền Kukulcan (Hình 101) là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII. Phần thân của đền, không bao gồm ngôi đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cắt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là $55,3m$, chiều cao là $24m$, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là khoảng 47° .

(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Hình 101

Tính thể tích phần thân của đền có dạng khối chóp cắt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải



Mô hình hoá phần thân của đền bằng cắt chóp tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ với O, O' là tâm của hai đáy.

Vậy $AB = 55,3; OO' = 24; (\angle CC', (ABCD)) = 47^\circ$.

$$ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 55,3\sqrt{2} \Rightarrow CO = \frac{1}{2}AC = 27,65\sqrt{2}$$

Kè $C'H \perp OC (H \in OC) \Rightarrow C'H \parallel OO' \Rightarrow C'H \perp (ABCD)$

$$\Rightarrow (\angle CC', (ABCD)) = (\angle CC', CH) = \widehat{HCC'} = 47^\circ$$

$OHC'O'$ là hình chữ nhật $\Rightarrow OO' = C'H = 24, CH = O'C'$

$$\triangle CC'H \text{ vuông tại } H \Rightarrow CH = \frac{C'H}{\tan \widehat{HCC'}} = \frac{24}{\tan 47^\circ} \approx 22,38$$

$$O'C' = OH = CO - CH \approx 16,72 \Rightarrow A'C' = 2O'C' = 33,44$$

$$A'B'C'D' \text{ là hình vuông} \Rightarrow A'B' = \frac{A'C'}{\sqrt{2}} \approx 23,65$$

$$\text{Diện tích đáy lớn là: } S = AB^2 = 55,3^2 = 3058,09 (m^2)$$

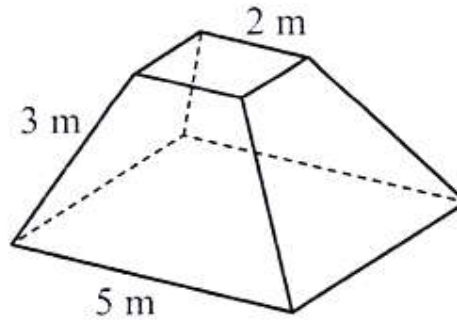
$$\text{Diện tích đáy bé là: } S' = A'B'^2 = 23,65^2 = 545,2225 (m^2)$$

Thể tích hình chóp cắt là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 24(3058,09 + \sqrt{3058,09 \cdot 545,2225} + 545,2225) \approx 39156,53 (m^3)$$

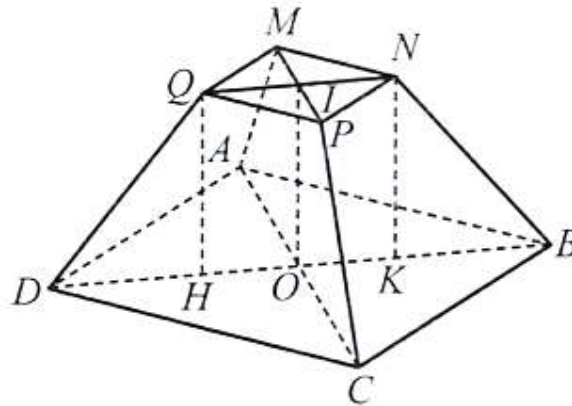
Vậy thể tích phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cắt tứ giác đều đó là $39156,53 (m^3)$

Câu 67. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng $/m^3$. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn).



Hình 46

Giải. (Hình 47)



Hình 47

Giả sử chân tháp là khối chóp cụt tứ giác đều $ABCD.MNPQ$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh $5m$, $MNPQ$ là hình vuông cạnh $2m$, $AM = BN = CP = DQ = 3m$.

Vì DQ, NB cắt nhau nên D, Q, N, B đồng phẳng. Mà $(ABCD) \parallel (MNPQ)$ nên $NQ \parallel BD$.

Gọi I là giao điểm của MP và NQ , O là giao điểm của AC và BD . Khi đó $IO \perp (MNPQ)$, $IO \perp (ABCD)$.

Xét hình thang $QNBD$, gọi H là hình chiếu của Q trên BD , K là hình chiếu của N trên BD . Vì

$IO \perp BD$, $QH \perp BD$, $NK \perp BD$ trong $(QNBD)$ nên $IO \parallel QH \parallel NK$.

Suy ra $QH \perp (MNPQ)$, $QH \perp (ABCD)$ nên QH bằng chiều cao của khối chóp cụt đều.

Ngoài ra, ta có $QH = NK = IO$ và $QD = NB$. Suy ra $\triangle QHD = \triangle NKB$ nên ta có $HD = BK$.

Bên cạnh đó, $QNKH$ là hình chữ nhật nên $QN = HK$. Từ đó ta có:

$$\begin{aligned} HD &= \frac{BD - HK}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2} - \sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{5^2 + 5^2} - \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (m). \end{aligned}$$

Xét tam giác QHD vuông tại H có:

$$QH = \sqrt{QD^2 - HD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (m).$$

Diện tích của hai đáy là: $S_{ABCD} = AB^2 = 5^2 = 25 (m^2)$,

$$S_{MNPQ} = MN^2 = 2^2 = 4 \text{ (m}^2\text{)}.$$

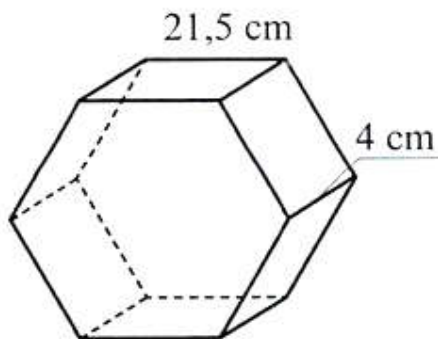
Suy ra thể tích của khối chóp cắt đều là:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}QH \left(S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}} + S_{MNPQ} \right) \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} \text{ (m}^3\text{)}. \end{aligned}$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là:

$$1470000 \cdot \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 40538000 \text{ (đồng)}.$$

Câu 68. Người ta cần đổ bê tông để làm những viên gạch có dạng khối lăng trụ lục giác đều (Hình 48) với chiều cao là 4 cm và cạnh lục giác dài $21,5\text{ cm}$. Tính thể tích bê tông theo đơn vị centimet khối để làm một viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 48

Lời giải

Chia hình lục giác đều trên hai mặt đáy thành 6 hình tam giác đều cạnh $21,5\text{ cm}$. Khi đó diện tích đáy của

viên gạch bằng: $6 \cdot \frac{(21,5)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{5547\sqrt{3}}{8} \text{ (cm}^2\text{)}$. Thể tích bê tông cần dùng bằng thể tích viên gạch, tức

$$\text{là: } 4 \cdot \frac{5547\sqrt{3}}{8} \approx 4803,8 \text{ (cm}^3\text{)}.$$

Câu 69. Một chì neo câu cá có dạng khối chóp cắt tứ giác đều được làm hoàn toàn bằng chì có khối lượng 137 g . Biết cạnh đáy nhỏ và cạnh đáy lớn của khối chóp cắt đều dài lần lượt 1 cm và 3 cm , khối lượng riêng của chì bằng $11,3\text{ g/cm}^3$. Tính chiều cao của chì neo câu cá đó theo đơn vị centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

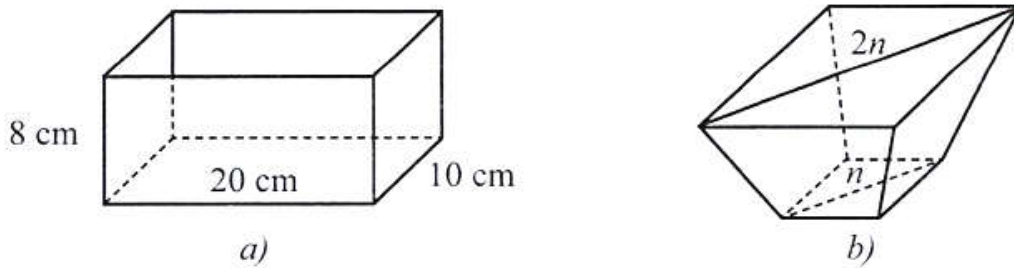
Thể tích của chì neo câu cá bằng $V = \frac{137}{11,3} \text{ (cm}^3\text{)}$.

Vậy chiều cao của chì neo câu cá bằng

$$h = \frac{3V}{1^2 + \sqrt{1^2 \cdot 3^2} + 3^2} = \frac{3 \cdot \frac{137}{11,3}}{13} \approx 2,8 \text{ (cm)}.$$

Câu 70. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước: chiều dài 20 cm , chiều rộng 10 cm , chiều cao 8 cm (Hình 50a). Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cắt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài $n\text{ (cm)}$, miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n\text{ (cm)}$ (Hình 50b). Sau khi đổ, mực

nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Tính thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị centimet khối.



Hình 50

Lời giải

Thể tích nước có trong khay thứ nhất trước khi đổ bằng $20 \cdot 10 \cdot 8 = 1600 (cm^3)$.

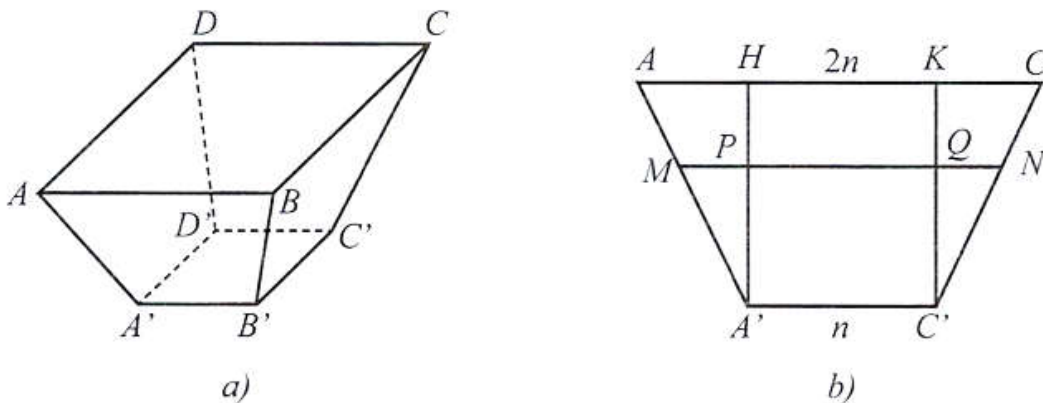
Sau khi đổ, thể tích nước có trong khay thứ hai bằng

$$1600 \cdot \frac{1}{4} = 400 (cm^3)$$

Gọi chiều cao của khay thứ hai là $h (cm)$.

Giả sử khay thứ hai có dạng hình chóp cắt tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ (Hình 87a).

Xét hình thang $ACC'A'$, lấy MN song song với AC ; H, K lần lượt là hình chiếu của A', C' trên AC ; P, Q lần lượt là giao điểm của $A'H$ và MN , $C'K$ và MN (Hình 87b).



Hình 87

Theo giả thiết, mực nước (ngang với MN) trong khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của khay đó, suy ra

$$\frac{A'P}{A'H} = \frac{C'Q}{C'K} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{MP}{AH} = \frac{NQ}{CK} = \frac{2}{3}.$$

Ta có: $AH = CK = \frac{n}{2}$, $HK = n$, nên $MN = \frac{5}{3}n$. Thể tích của nước trong khay thứ hai bằng thể tích khối chóp cắt tứ giác đều với đáy lớn nhận MN là đường chéo và đáy nhỏ nhận $A'C'$ là đường chéo, chiều cao bằng $\frac{2}{3}h$. Vì thể tích nước trong khay thứ hai bằng $400 cm^3$ nên ta có

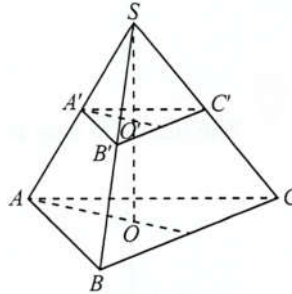
$$\frac{1}{3} \left[\frac{\left(\frac{5}{3}n\right)^2}{2} + \sqrt{\frac{\left(\frac{5}{3}n\right)^2}{2} \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}} \right] \cdot \frac{2}{3}h = \frac{49}{81}n^2h = 400 \Rightarrow n^2h = \frac{32400}{49}.$$

Thể tích của chiếc khay thứ hai bằng

$$V = \frac{h}{3} \left[\frac{(2n)^2}{2} + \sqrt{\frac{(2n)^2}{2} \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2}} \right] = \frac{7}{6}n^2h = \frac{7}{6} \cdot \frac{32400}{49} = \frac{5400}{7} (cm^3)$$

Câu 71. Cắt khối chóp tam giác đều $S.ABC$ với cạnh đáy bằng a và chiều cao $2a$ bởi một mặt phẳng song song với đáy và đi qua trung điểm các cạnh bên. Tính thể tích khối chóp cắt đều được tạo thành.

Giải



Hình 19

Gọi $ABC \cdot A'B'C'$ là khối chóp cắt đều được tạo thành, O và O' lần lượt là tâm của hai đáy ABC và $A'B'C'$ (Hình 19). Ta có:

$$\text{Chiều cao của khối chóp cắt đều là } h = OO' = \frac{SO}{2} = \frac{2a}{2} = a;$$

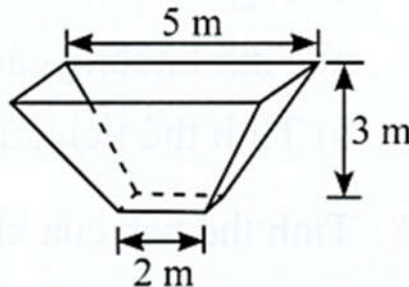
$$\text{Tam giác đều } ABC \text{ có diện tích: } S = \frac{AB^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$\text{Tam giác đều } A'B'C' \text{ có cạnh } A'B' = \frac{AB}{2} \text{ nên có diện tích: } S' = \frac{A'B'^2\sqrt{3}}{4} = \frac{S}{4}.$$

Do đó, thể tích khối chóp cắt đều được tạo thành là:

$$V = \frac{1}{3}h(S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3}a\left(S + \frac{S}{2} + \frac{S}{4}\right) = \frac{7aS}{12} = \frac{7a}{12} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{7a^3\sqrt{3}}{48}.$$

Câu 72. Tính thể tích của một bồn chứa có dạng khối chóp cắt đều có kích thước được cho như trong Hình 20.

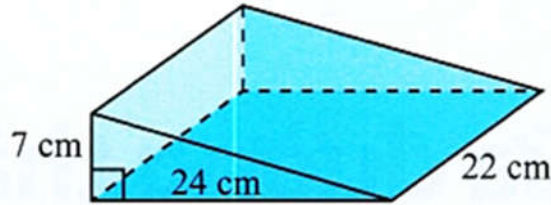


Hình 20

Lời giải

$$\text{Thể tích hình chóp cắt là: } V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \left(5^2 + \sqrt{5^2 \cdot 2^2} + 2^2\right) = 13(m^3)$$

Câu 73. Tính thể tích cái nệm hình lăng trụ đứng có kích thước như trong Hình 21.

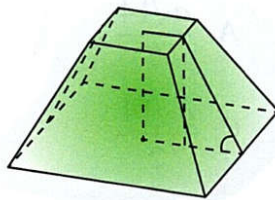


Hình 21

Lời giải

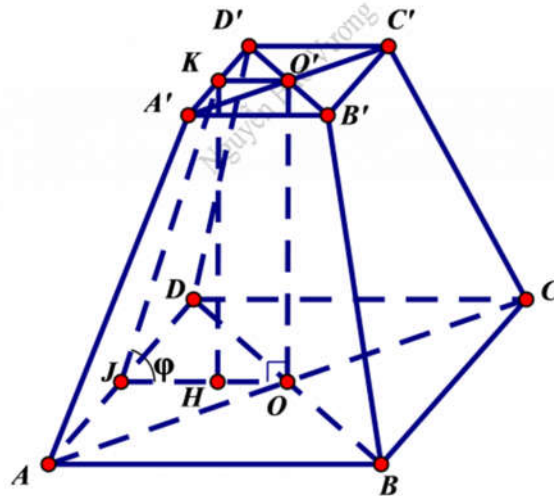
Thể tích cái nôm là $V = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 24 \cdot 22 = 1848 (cm^3)$

Câu 74. Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có hai cạnh đáy là $14m$ và $10m$. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm.



Hình 10

Lời giải



Ta có: $OJ = \frac{1}{2} \cdot 14 = 7$; $OK = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$, suy ra $OH = 5$, $JH = 7 - 5 = 2$.

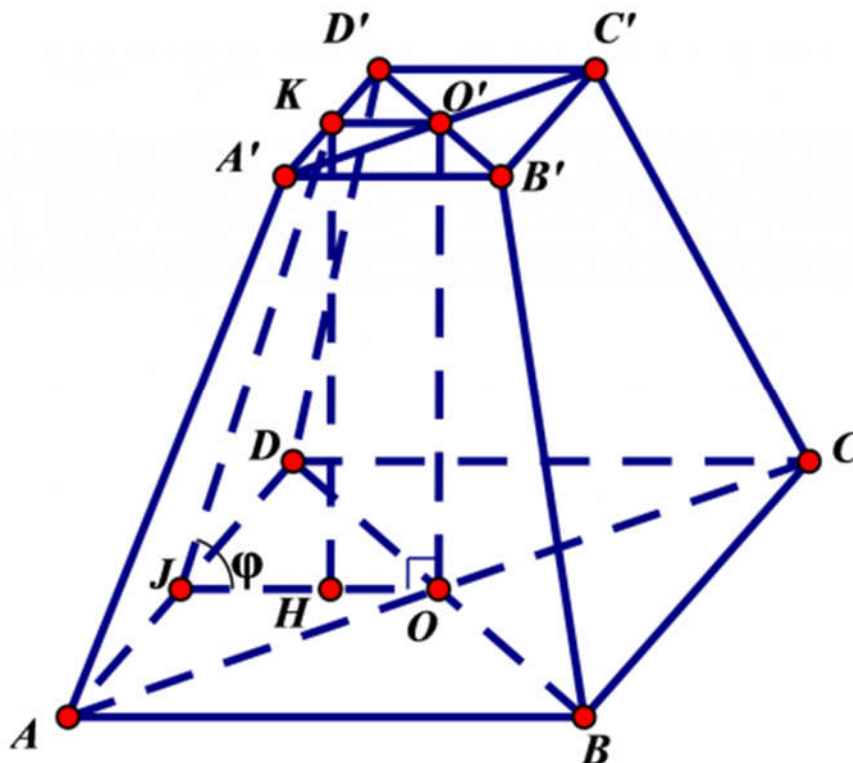
Mặt bên tạo với đáy nhỏ 1 góc $\widehat{OKJ} = 135^\circ$ nên $\widehat{KJH} = 45^\circ$, $KH = OO' = JH \cdot \tan 45^\circ = 2$

Thể tích khối chóp cắt là: $V = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (10^2 + \sqrt{10^2 \cdot 14^2} + 14^2) = 290,7 (m^3)$

Câu 75. Một chân cột bằng gang có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a , chiều cao $h = 2a$ và bán kính đáy phần trụ rỗng bên trong bằng $\frac{a}{2}$.

- Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.
- Tính thể tích chân cột nói trên theo a .

Lời giải



a) Kẻ $OJ \perp AD, O'K \perp A'D', KH \perp OJ$

Ta có: $O'K = OH = \frac{a}{2}$

$OJ = \frac{2a}{2} = a, JH = OJ - OH = \frac{a}{2}, KH = OO' = 2a$

Góc tạo bởi mặt bên và mặt đáy là $\widehat{KIH}$

$\tan \widehat{KIH} = \frac{KH}{JH} = 4$. Vậy $\widehat{KIH} = 76^\circ$

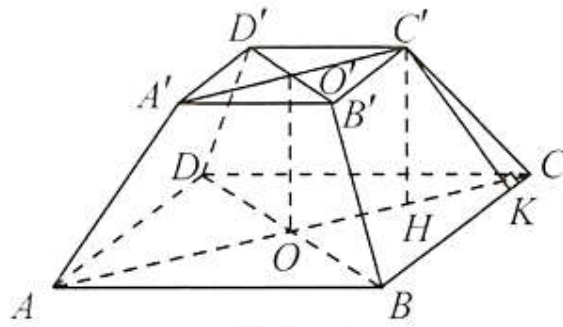
b) Thể tích chân cột là: $\frac{1}{3} \cdot 2a \left(a^2 + \sqrt{a^2 \cdot (2a)^2} + (2a)^2 \right) - 2a \cdot \pi \cdot \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \left(\frac{14}{3} - \frac{\pi}{2} \right) a^3$

Câu 76. Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm , đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm .



Hình 12

Lời giải



Hình 10

Ta có: $OC = 40\sqrt{2}$, $O'C' = 20\sqrt{2}$, suy ra $CH = 20\sqrt{2}$.

Trong tam giác vuông $C'CH$, ta có:

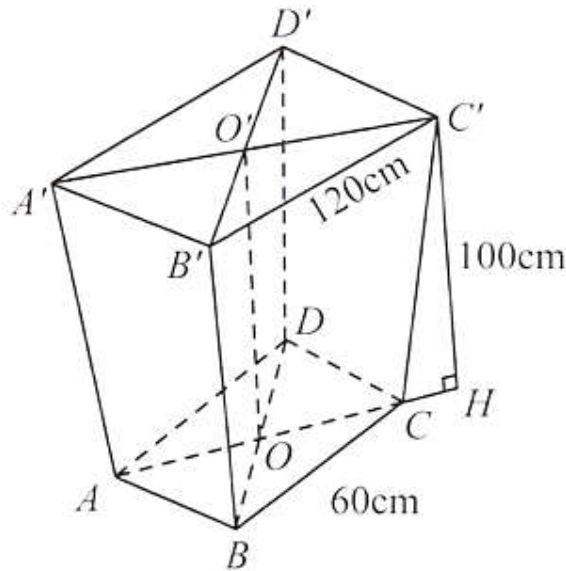
$$C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = 20\sqrt{14}. \text{ Nên } OO' = C'H = 20\sqrt{14}.$$

Thể tích của cái sọt đựng đồ là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 20\sqrt{14} \cdot (6400 + \sqrt{6400 \cdot 1600} + 1600) \approx 279377,08 \text{ cm}^3.$$

Câu 77. Một thùng đựng rác có dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Đáy và miệng thùng có độ dài lần lượt là 60 cm và 120 cm , cạnh bên của thùng dài 100 cm . Tính thể tích của thùng.

Lời giải



Hình 9

Kẻ $C'H \perp AC (H \in AC)$.

$$\text{Có } O'C' = \frac{\sqrt{120^2 + 120^2}}{2} = 60\sqrt{2}.$$

$$OC = \frac{\sqrt{60^2 + 60^2}}{2} = 30\sqrt{2}.$$

$$\Rightarrow CH = O'C' - OC = 30\sqrt{2}.$$

Áp dụng công thức $V = \frac{h}{3} (S + \sqrt{SS'} + S')$, với

$$h = C'H = \sqrt{CC'^2 - CH^2} = \sqrt{100^2 - (30\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{82},$$

$$S = 120^2, S' = 60^2.$$

Ta có:

$$V = \frac{10\sqrt{82}}{3}(120^2 + 120.60 + 60^2) = 84000\sqrt{82} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Nguyễn Bảo Vương