TOÁN TỪ TÂM

BỘ ĐỀ THI
HỌC SINH GIỎI
THỨC THI TỰ LUẬN

TÁC GIẢ
TOÁN TỪ TÂM

MỤC LỤC PHẦN ĐỀ

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ BẾN TRE
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:..

PHẦN ĐỀ

» Câu 1.

(a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

(b) Cho biết hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (với a,b,c là các tham số thực, biết $f'(0)=1, f(3)=29$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

» Câu 2. Ông A thuê thợ làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,5 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá tiền thuê thợ làm mỗi mét vuông cửa là 2000000 đồng. Tính số tiền ông A phải trả cho thợ.

» Câu 3. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 2. Nối các trung điểm A_1,B_1,C_1 của các cạnh BC, CA, AB tương ứng, ta được tam giác đều $A_1B_1C_1$. Tiếp tục nối các trung điểm A_2,B_2,C_2 của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng, ta được tam giác đều $A_2B_2C_2$, thực hiện quá trình này đến vô hạn lần. Gọi S_n là diện tích của tam giác đều $A_nB_nC_n\,(n\in\mathbb{N}, n\ge 1)$. Tính tổng diện tích các tam giác đều $A_nB_nC_n$ thu được.

» Câu 4. Trong một túi có một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu trong đó có 10 chiếc kẹo màu cam, còn lại là kẹo màu vàng. Bạn B lấy ngẫu nhiên một chiếc kẹo từ trong túi, không trả lại. Sau đó, bạn B lại lấy ngẫu nhiên thêm một chiếc kẹo khác từ trong túi. Biết rằng xác suất bạn B lấy được cả hai chiếc kẹo màu cam là $\dfrac{3}{8}$. Hỏi ban đầu trong túi có bao nhiêu chiếc kẹo?

» Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B'$. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa điểm A, có thể tích $V_{(H)}$; (H') là khối đa diện còn lại, có thể tích $V_{(H')}$. Tính tỉ số $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$

» Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y=0$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt trục hoành Ox tại điểm A và cắt đường thẳng d tại điểm B sao cho tam giác ΔAMB vuông cân tại M.

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025

SỞ HÀ NAM

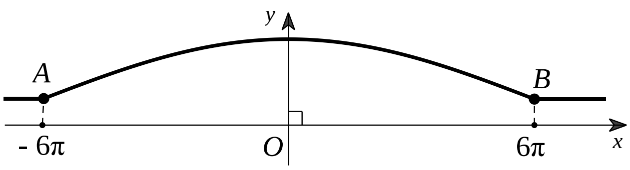
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:...

PHẦN ĐỀ

» Câu 1.

(1) Một chiếc cầu bắc qua sông, mặt dưới gầm cầu có dạng cung AB biểu thị bởi đồ thị hàm số $y=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos\frac{x}{12}+2$ với $x\in\left[-6\pi;6\pi\right]$ trong hệ trục toạ độ Oxy với đơn vị trục là mét (trục Ox mô tả mặt nước sông) như hình minh họa dưới đây:



Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 6 mét so với mặt nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn $12,6$ mét.

(2) Cho phương trình $\sin 3x+\cos 2x-m\sin x=1$ với m là tham số. tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 7 nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};2\pi\right)$.

» Câu 2.

(1) Một quả bóng cao su thả từ độ cao 22,5 mét. Giả sử sau mỗi lần chạm đất quả bóng cao su lại nảy lên độ cao bằng 80% độ cao của lần rơi. Tính chiều dài quãng đường quả bóng cao su di chuyển từ khi được thả đến khi không nảy nữa.

(2) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=2025\\ n\left(u_{n+1}-u_n\right)=2\left(u_n+3\right),\ n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) và tính $\lim\frac{u_n}{n^2}$

» Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=16$. Tính $\lim\limits_{x\to1}\frac{\left(x^2+x\right)f(x)+2}{x-1}$.

» Câu 4. Ba cầu thủ đá phạt đền 11m, mỗi người đá một lần với xác suất ghi bàn tương ứng là x,y và $0,6$ (với $x>y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là $0,976$ và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là $0,336$. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

» Câu 5.

(1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) không đi qua S cắt các cạnh SA,SB,SC,SD lần lượt tại M,N,P,Q sao cho $SA=2SM$ và $SC=3SP$. Tính $\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}$.

(2) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, điểm M nằm trên cạnh AC sao cho $AM = kMC$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với hai đường thẳng AB' và $A'C$. Gọi N là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng BC. Tìm k để $\frac{NB}{NC} = \frac{5}{3}$.

(3) Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi M là một điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$T = \frac{MA^2}{OA^2} + \frac{MB^2}{OB^2} + \frac{MC^2}{OC^2}$.

» Câu 6. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn $\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c} = 6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \sqrt{\frac{a}{a+4bc}} + \sqrt{\frac{b}{b+9ca}} + \sqrt{\frac{c}{c+36ab}}$

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

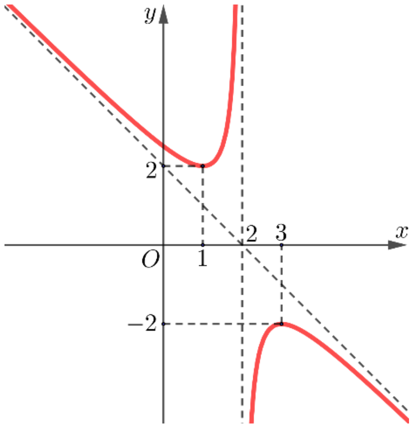
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ HÀ NỘI
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:..

PHẦN ĐỀ

A. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ có đồ thị như hình vẽ



Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

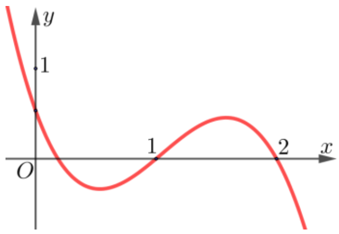
» Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 3cm, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc 45^0. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBM) bằng bao nhiêu centimet?

» Câu 3. Bất phương trình $\log_4 x^2+\log_2(x+3)\le 1+\log_2(2x+3)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

» Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{3}-\cos 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};0\right]$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.*

» Câu 5. Cho hàm số $y=mx^2+(4-m^2)x+n\ln x$ (với m,n là các tham số thực). Biết rằng hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{1}{2}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=1$. Giá trị của m^2+n^2 bằng bao nhiêu?

» Câu 6. Cho $y=f(x)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f(f(x)-1)-3$ có bao nhiêu điểm cực đại?

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2\sqrt{3}$ và $ABC=60^\circ$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $ASB=30^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh SD và α là góc giữa hai đường thẳng AM, CD. Khi đó $\sin\alpha$ bằng bao nhiêu?

» Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1;-2;3), B(2;1;-4)$. Xét điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $2MA^2-3MB^2$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó độ dài đoạn OM bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.*

» Câu 9. Một xưởng sản xuất vận hành từ từ 14h00 đến 22h00 mỗi ngày (không tính các ngày thứ Bảy và Chủ Nhật và ngày lễ), chia 2 ca làm việc với mức lương tương ứng trả cho công nhân theo bảng sau:

Ca	Khoảng thời gian làm việc	Mức lương/giờ
I	Từ 14h00 đến 19h00	60 000 đồng
II	Từ 17h00 đến 22h00	70 000 đồng

Do yêu cầu sản xuất, bộ phận nhân sự đã sắp xếp công nhân làm việc thỏa mãn tất cả các yêu cầu sau:

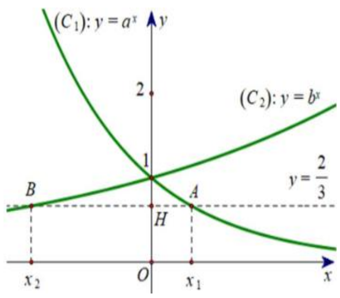
▫Trong khoảng thời gian từ 17h00 đến 19h00: Tổng số công nhân làm việc trong xưởng không được ít hơn 12 người.

▫Trong khoảng thời gian từ 19h00 đến 22h00: Tổng số công nhân làm việc trong xưởng không được nhiều hơn 10 người.

▫Số công nhân làm việc ca II luôn nhiều hơn ít nhất 2 người so với số công nhân làm ca I.

Hỏi tổng số tiền lương tối thiểu trong một ngày làm việc mà xưởng sản xuất trả cho công nhân là bao nhiêu triệu đồng?

» Câu 10. Cho hàm số $y=a^x$ và $y=b^x$ (với a,b là các số thực dương) có đồ thị là các đường cong $(C_1),(C_2)$ như hình vẽ:



Đường thẳng $y=\dfrac{2}{3}$ lần lượt cắt $(C_1),(C_2)$ và trục Oy tại A,B và H. Biết rằng $HB=3HA$, giá trị của tích $a.b^3$ bằng bao nhiêu?

» Câu 11. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\dfrac{2x+m}{x+1}\right|$ trên $[0;1]$ bằng $\dfrac{5}{6}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.*

» Câu 12. Hàm số $y=(x+1)(x+2)^2(x+3)^3...(x+2025)^{2025}$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

» Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(e^{\frac{x}{1013}}+e\right)$. Giá trị của biểu thức $T=f'(1)+f'(2)+...+f'(2025)$ bằng $\dfrac{a}{b}(a;b\in\mathbb{N})$. Tính $a-b$?

» **Câu 14.** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B, $AB = 4cm$, $BC = 6cm$ đường thẳng AA' hợp với đáy một góc 60^0. Biết rằng tam giác ABB' là tam giác vuông tại A, tam giác $B'BC$ là tam giác cân tại B'. Thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ bằng bao nhiêu centimét khối? *Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.*

» **Câu 15.** Anh An bắt đầu tham gia đầu tư vào chứng khoán của công ty X từ ngày 07/01/2023. Hàng năm, công ty X đều trả cổ tức bằng cổ phiếu, số cổ phiếu được nhận định tính theo tỉ lệ trên tổng cổ phiếu hiện có trong tài khoản của mỗi nhà đầu tư. Giá trung bình của cổ phiếu và những thông tin liên quan về quá trình đầu tư của mình được anh An thống kê trong bảng sau.

Ngày	Giá trung bình của mỗi cổ phiếu (đồng)	Tỉ lệ cổ tức bằng cổ phiếu nhận được hàng năm	Số lượng cổ phiếu mua lần đầu (cổ phiếu)	Số lượng cổ phiếu mua thêm (cổ phiếu)
07/01/2023	10 000		10 000	
07/01/2024	15 000	10%		10 000
07/01/2025	13 000	10%		

Ngày 08/01/2025, nếu bán toàn bộ cổ phiếu của công ty X hiện có trong tài khoản của mình với giá bằng giá trung bình của cổ phiếu đó trong ngày 07/01/2025 thì anh An sẽ lãi bao nhiêu tiền?

Giải thích thuật ngữ:

▫**Cổ tức** là khoản lợi nhuận ròng được trả cho mỗi cổ phần, thường được chi trả bằng cổ phiếu hoặc bằng tiền mặt

▫**Giá trung bình của cổ phiếu** trong một ngày giao dịch được tính bằng trung bình cộng của giá cao nhất và giá thấp nhất của cổ phiếu trong ngày giao dịch đó. Đơn vị triệu đồng.

B. Câu hỏi – Trả lời tự luận

» **Câu 16.** Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả điểm M thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến các đường thẳng $\Delta_1 : 2x + y - 5 = 0$ và $\Delta_2 : x + 2y - 4 = 0$ là nhỏ nhất

» **Câu 17.** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ và có $A'; B'; C'$ nằm trong mặt phẳng Oxy. Biết rằng $A(0;2;3)$, điểm B thuộc trục Oz và điểm C có hoành độ dương. Tìm tọa độ điểm C' sao cho $\left|\overrightarrow{C'A} + \overrightarrow{C'B} + 2\overrightarrow{C'C}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

» **Câu 18.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'AB$ là góc nhọn và thỏa mãn các điều kiện $\cos\left[A', AB, C\right] = \dfrac{1}{3}; A'AD = 90°; BAD = 60°\ ; AA' = 2m; AB = AD = 1m$

(a) Tính cosin của góc nhị diện $\left[B', AA', D\right]$.

(b) Một chất điểm xuất phát từ A chuyển động đều trên đoạn thẳng AB với vận tốc $1m/s$, đồng thời một chất điểm khác xuất phát từ D' chuyển động thẳng đều trên đoạn $B'D'$ với vận tốc $2m/s$. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai chất điểm ngắn nhất?

» **Câu 19.** Từ một sợi dây thép thẳng dài $4m$, người ta cắt thành các đoạn thép nhỏ dài $2cm$ và $5cm$. Sau đó ghép thành những hộp hình chữ nhật có cạnh dài $2cm$ hoặc $5cm$. Mỗi hình hộp chữ nhật thành phẩm sẽ được bán làm đồ trang trí.

Có bốn loại hình hộp chữ nhật được tạo ra với thông tin được cho như bảng sau:

Loại hình hộp chữ nhật	Thể tích	Giá bán/1 hình hộp chữ nhật
1	$8\,cm^3$	3 000 đồng
2	$20\,cm^3$	5 000 đồng
3	$50\,cm^3$	6 000 đồng
4	$125\,cm^3$	9 000 đồng

Xét tất cả các phương án cắt sợi dây thép dài $4m$ thành các đoạn $2cm$ và $5cm$, sau đó ghép thành các hình hộp chữ nhật kể trên. Tính tổng số tiền lớn nhất thu được khi bán hết các hình hộp chữ nhật đó.

» Câu 20. Xét các số thực a, b với $b>0$ thỏa mãn hệ thức $e^{a+b}-e^a+2a=1+2\ln\left(e^a+2b+1\right)$. Chứng minh $a+2b-\ln b>\dfrac{1}{2b+1}+3\ln 2$.

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025

SỞ HƯNG YÊN

Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

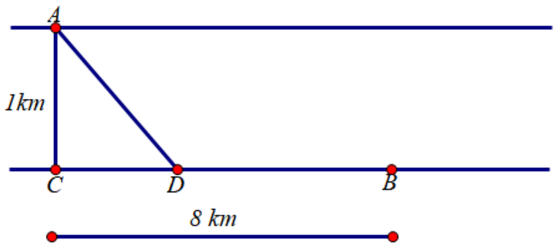
Họ và tên thí sinh:...
SBD:...

PHẦN ĐỀ

» Câu 1.

(1) Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ có hai điểm cực trị $A,B.$ Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox để độ dài đường gấp khúc AMB nhỏ nhất.

(2) Một khúc sông có 2 bờ song song với nhau, khoảng cách giữa hai bờ là $1km$. Một người cần đi từ điểm A bờ bên này đến điểm B bờ bên kia và cách 8 km về phía hạ lưu (như hình vẽ). Người đó phải chèo thuyền từ A với vận tốc 6 km/h đến điểm D bờ bên kia rồi chạy bộ đến B với vận tốc 8 km/h. Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc thuyền. Tìm vị trí điểm D để thời gian cần đi là ít nhất.



(3) Cho x,y là các số thực thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2+xy=1$ và hàm số $f(t)=t^3+3t^2-9t+1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=f\left(\dfrac{2x+y-2}{x-y+3}\right)$.

» Câu 2. Cho ba số dương a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^{-1},\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^{-1},\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

» Câu 3. Giải phương trình $4\sin x+4\sin x.\cos 2x+2\sin 2x-6\cos x-3=0$

» Câu 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos^4 x$ biết $F(0)=0$.

» Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là hai điểm thuộc đoạn thẳng AD' và BD sao cho $AM=DN=x$, $0<x<a\sqrt{2}$. Tìm x theo a để độ dài MN ngắn nhất.

» Câu 6.

(1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Các tam giác SAB,SCD cân tại S và có tổng diện tích hai tam giác này bằng $\dfrac{5a^2}{8}$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SCD). Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC).

(2) Một vật được đặt cân bằng trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)$, $A_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)$. Biết rằng trọng lượng của vật là $500N$. Tìm toạ độ của lực tác dụng lên giá đỡ $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$.

» Câu 7. Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 10 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 11111.

» Câu 8. Giải phương trình sau: $2024^{2025.\log_3(5x-1)}+2024^{-\frac{8100}{x}}=2024^{2025.\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)}+2024^{\frac{8100}{x}}$

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ KIÊN GIANG
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:...

PHẦN ĐỀ

» Câu 1. Giải phương trình $\sin x+\sin 2x=\sin 3x$

» Câu 2. Cho dãy số (u_n) xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=2u_n-n+1 \end{cases}$, $n\geq 1$. Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số (u_n).

» Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

» Câu 4. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $\begin{cases} x_1=6 \\ x_{n+1}=\sqrt{x_n+20} \end{cases}$. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

» Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại $A(1;0)$ và hai điểm B,C, thuộc đường thẳng $\Delta:\ x-y+1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C biết diện tích tam giác ABC bằng $4\sqrt{2}$.

» Câu 6. Từ bãi biển khu du lịch đảo Phú Quốc tỉnh Kiên Giang, ta có thể quan sát và ngắm nhìn thấy hai vị trí B,C (tham khảo hình ảnh). Bằng công cụ đo đạc như thước đo, giác kế, … hãy đề xuất một cách xác định khoảng cách giữa hai vị trí B và C.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $AC=a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) biết rằng góc giữa SC và mặt đáy bằng $30°$

» Câu 8. Có bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau sao cho hai chữ số 1 và 2 luôn đứng cạnh nhau

» Câu 9. **(a)** Trong một buổi thi, giám thị đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi gồm 15 câu hỏi khác nhau, đựng trong 15 phong bì dán kín, có hình thức giống nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi, mỗi thí sinh chọn ngẫu nhiên 5 câu hỏi. An và Bình tham gia buổi thi đó. Biết rằng bộ 15 câu hỏi dành cho các thí sinh là như nhau. Tính xác suất để 5 câu hỏi An chọn và 5 câu hỏi Bình chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau.

(b) Một vận động viên thi môn bắn súng vào bia. Biết rằng xác suất để vận động viên đó bắn trúng vòng 10 là $0,2$; bắn trúng vòng 9 là $0,3$ và bắn trúng vòng 8 là $0,4$. Vận động viên thực hiện bắn hai lần độc lập. Biết rằng vận động viên đạt huy chương vàng nếu được 20 điểm, đạt huy chương bạc nếu được 19 điểm và đạt huy chương đồng nếu được 18 điểm. Tính xác suất để vận động viên đạt được huy chương đồng.

» Câu 10. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $7(x^2+y^2)=25(x+y)$

----------------------------Hết----------------------------

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ KHÁNH HÒA

Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...

SBD:..

PHẦN ĐỀ

» Câu 1. **(a)** Giải phương trình $\cos x\left(\sin x+\cos x-\sin 3x\right)=\sin x\sin 3x$.

(b) Cho dãy số hữu hạn $u_n=\log_{2025}\left(\dfrac{2025n}{2025-n}\right)$, với $n\in\{1;2;3;...;2024\}$. Hãy tính tổng tất cả các số hạng của dãy số trên.

» Câu 2. **(a)** Cho hàm số $y=2(1+m)x^3-3(m+1)x^2+x+\dfrac{m}{2}-1$ (1), (với m là tham số). Chứng minh rằng đồ thị của hàm số (1) luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng với mọi m.

(b) Cho các số thực x, y thỏa mãn $e^{x-3y}+e^{1-xy}+x(1-y)+1=e^{xy-1}+\dfrac{1}{e^{x-3y}}+3y$, (với $x\geq 0$

» Câu 3. **(a)** Giải bất phương trình $\sqrt{\log x+1}+\sqrt{\log x^2-3}+\sqrt{17-\log x^3}\geq 3\sqrt{5}$

(b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\begin{cases}x^2+3y^2=27\\ y^2+yz+z^2=16\\ x^2+3xz+3z^2=75\end{cases}$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2xy+3yz+zx$

» Câu 4. **(a)** Trong một lớp có $(2n+3)$ học sinh, trong đó có 3 em $A,\ B,\ C$. Xếp ngẫu nhiên các học sinh của lớp học vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến $(2n+3)$, mỗi học sinh ngồi một ghế. Biết xác suất để số ghế của 3 em $A,\ B,\ C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng là $\dfrac{17}{1155}$. Tìm số học sinh của lớp học.

(b) Có 35 con thỏ (*bao gồm thỏ trắng và thỏ đen*) được nhốt vào hai chuồng. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng một con thỏ. Biết xác suất bắt được hai con thỏ đen là $\dfrac{247}{300}$. Tính xác suất để bắt được hai con thỏ trắng.

» Câu 5. **(a)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và M là trung điểm của $B'C'$. Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng AM và BC'.

(b) Cho tứ diện đều $ABCD$ và điểm E trên cạnh AD sao cho tan của góc giữa hai mặt phẳng (BCD) và (BCE) bằng $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$. Tính tỉ số thể tích của hai khối tứ diện $ABCE$ và $EBCD$.

(c) Cho tứ diện $ABCD$ có $ACB=60^\circ$ và

$$ACD+BCD=CAD+BAD+BAC=CBD+ABD+ABC=180^\circ$$

Gọi S là diện tích toàn phần của hình tứ diện $ABCD$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của S, biết chu vi tam giác ABC bằng 3

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ QUẢNG BÌNH
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:..
SBD:...

PHẦN ĐỀ

» Câu 1.

(a) Giải phương trình $\dfrac{2(1+\tan x)\tan x}{1+\tan^2 x}=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(b) Một đại lý kinh doanh xe gắn máy với giá mua vào mỗi chiếc xe là 36 triệu đồng và giá bán (ra mỗi chiếc xe là 42 triệu đồng thì số lượng xe bán ra mỗi năm là 720 chiếc. Nếu mỗi chiếc xe khi bán giảm 1 triệu đồng thì số lượng xe bán ra trong năm tăng 180 chiếc. Hỏi đại lý phải bán mỗi chiếc xe bao nhiêu triệu đồng để thu được lợi nhuận cao nhất trong một năm.

» Câu 2.

(a) Tìm m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-(m+2)x+2m+4}{x-2}$ (m là tham số) có hai điểm cực trị A,B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2.

(b) Cho hai số thực dương x,y thỏa mãn $\log_5\left(\dfrac{x+y-1}{2x+3y}\right)\le 4-3x-2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P=6x+2y+\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}+2024$.

» Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A ta lấy điểm S không trùng với A. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD.

(a) Tính thể tích khối tứ diện $ABCH$ khi $SA=2a$.

(b) Tìm giá trị lớn nhất của thế tích khối tứ diện $ACHK$ khi S di động trên d và không trùng với A.

» Câu 4. Ba xạ thủ bắn vào bia, mỗi người bắn một lần với xác suất trúng bia tương ứng là x,y và $0{,}8$ (với $x>y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu xạ thủ bắn trúng bia là $0{,}976$ và xác suất để cả ba xạ thủ bắn trúng bia là $0{,}336$. Tính xác xuất để có đúng hai xạ thủ bắn trúng bia.

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025

SỞ TIỀN GIANG

Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:..
SBD:...

PHẦN ĐỀ

Bài 1.

(1) Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+(2m+3)x+m^2+4m}{x+m}$ có hai điểm cực trị nằm về cùng một phía đối với trục hoành.

(2) Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 60 centimét. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp (xem hình vẽ minh hoạ). Gọi cạnh nhỏ của tam giác vuông bị cắt là x centimét, tìm x (centimét) để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất.

Bài 2.

(1) Giải phương trình: $2\cos\left[\dfrac{\pi}{6}\left(\sin x-13+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\sqrt{3}.$

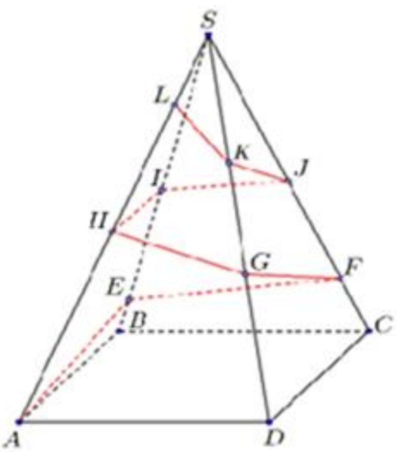
(2) Giải phương trình: $(x+1)\left(4^x+2\right)=3.4^x.$

Bài 3. Trong một hộp có chứa 8 tấm thẻ giống nhau, trên mỗi thẻ chỉ ghi một số thuộc tập $X=\{1;2;3;4;6;7;8;9\}$. Rút ngẫu nhiên từ hộp trên 3 thẻ, tính xác suất của biến cố: "Rút được ba thẻ mà các số ghi trên thẻ đó là số đo ba cạnh của một tam giác tù".

Bài 4. Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1=\sqrt{2},\ u_{n+1}=\dfrac{u_n+\sqrt{2}-1}{1-\left(\sqrt{2}-1\right)u_n},\forall n\in\mathbb{N}$. Tính u_{2025}.

Bài 5.

(1) Người ta cần trang trí cho một kim tự tháp là một hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng 15 mét, $ASB=15^0$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp AEFGHIJKLS (xem hình vẽ minh hoạ), trong đó điểm L cố định và LS = 3 mét. Tính độ dài (mét) ngắn nhất của dây đèn led.



(2) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, biết $AB=a\sqrt{2}$, $SB\perp(ABC)$. Gọi N là trung điểm của BC, Q là điểm thuộc đoạn thẳng SC sao cho $SC=3CQ$ và α là góc giữa SC với (SAB) sao cho $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến (ANQ) theo a.

Bài 6.

(1) Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 5km về phía Đông và 3km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{km}$; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 2km về phía Bắc và 1km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,5\text{km}$. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Giả sử chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc toạ độ O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng từ mặt đất lên trên, đơn vị đo trên các trục là kilômét. Tính tổng khoảng cách nhỏ nhất đó.

(2) Ông X muốn xây dựng một toà nhà thật hoàng tráng cho một công ty. Kiến trúc sư thiết kế toà nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng 40 mét. Ông X yêu cầu kiến trúc sư xây dựng thêm một cây cầu MN bắc qua toà nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C$, điểm cuối thuộc cạnh BC' của lăng trụ) để trang trí bằng những vật liệu quý hiếm với đơn giá 1,5 tỷ đồng trên 1 mét chiều dài. Để giảm chi phí cho cây cầu, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất. Tính số tiền xây cây cầu đó.

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
TP.HỒ CHÍ MINH
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:...

PHẦN ĐỀ

Bài 1.

(1). Cho biết chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ Poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau mỗi chu kỳ 138 ngày thì khối lượng của mẫu vật Poloni 210 chỉ còn lại một nửa.

(a) Tính khối lượng còn lại của 64 gam Poloni 210 sau 552 ngày.

(b) Hỏi sau bao nhiêu ngày thì 64 gam Poloni 210 còn lại 1 gam?

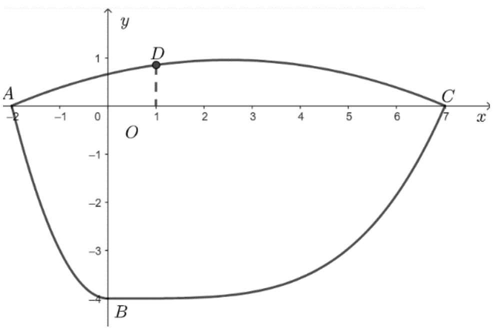
(2). Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm thành các thanh ngang của một cái thang. Biết chiều dài của các thanh ngang để làm cái thang đó (tính từ bậc thang dưới cùng lên) lần lượt là 49 cm, 47 cm, 45 cm,…, 35 cm, 33 cm (mỗi thanh ngang ngắn hơn 2 cm so với thanh ngang bậc dưới liền kề).

(a) Hỏi cái thang đó có bao nhiêu thanh ngang?

(b) Hỏi thanh gỗ cần mua có chiều dài ít nhất là bao nhiêu cm? Biết rằng mỗi lần cắt thanh gỗ thì phần gỗ bị cắt (thành mùn cưa) dài $0{,}5$ cm.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm tất cả điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt trục hoành và (C) lần lượt tại 2 điểm phân biệt $M, N\,(N \neq A)$ thỏa mãn A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài 3. Một công ty thiết kế tròng kính sao cho mỗi phần đường viền của tròng kính là một phần đồ thị của hàm số bậc hai hoặc một phần đồ thị của hàm số bậc bốn rồi ghép chúng lại với nhau như hình vẽ bên dưới (sau đó họ sẽ điều chỉnh theo tỷ lệ phù hợp). Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới, biết rằng $A(-2;0)$, $B(0;-4)$, $C(7;0)$, $D(1;k)$ với $k > 0$.



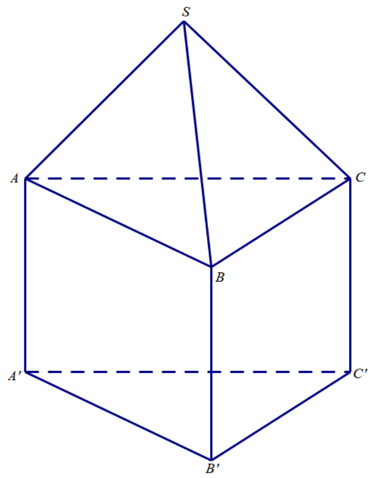
Cho biết đường cong (C_1) đi qua các điểm A, D, C là một phần của đồ thị hàm số bậc hai nào đó, đường cong (C_2) ứng với đường viền nối A với B là một phần của đồ thị hàm số $y = bx^2 + c$ còn đường cong (C_3) ứng với đường viền nối B với C là một phần của đồ thị hàm số $y = mx^4 + n$. Tính k biết diện tích tròng kính đó bằng 33,44 (đơn vị diện tích).

Bài 4. Luật Brenford chỉ ra rằng khi chọn ngẫu nhiên một số liệu trong một bảng số liệu gồm số lượng đủ lớn các số liệu (như độ dài các con sông trên thế giới, số lượng các loài côn trùng trên thế giới…) thì xác suất để chữ số đầu tiên bên trái của số liệu đó là k (với $1 \le k \le 9$) bằng $p_k = \log_{10}\left(1 + \dfrac{1}{k}\right)$.

(a) Chứng minh $p_1 + p_2 + ... + p_9 = 1$ và tìm số k nhỏ nhất để $p_1 + p_2 + ... + p_k \ge \dfrac{3}{4}$.

(b) Một người muốn làm giả số liệu nhầm tưởng rằng các chữ số đầu tiên bên trái của các số liệu trong một bảng số liệu bất kỳ sẽ tuân theo quy tắc ngẫu nhiên từ 1 đến 9 và cùng khả năng xảy ra. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một số liệu trong một bảng số liệu gồm số lượng đủ lớn các số liệu. Chứng minh rằng nếu tính xác suất cho biến cố “chữ số đầu tiên bên trái của số liệu đó lớn hơn 5” thì người muốn làm giả số liệu đó sẽ tính ra kết quả lớn hơn hai lần kết quả khi tính theo Luật Brenford.

Bài 5. Một chi tiết máy được ghép từ hai khối kim loại có dạng khối chóp tam giác $S.ABC$ và khối lăng trụ đứng $A'B'C'.ABC$ như hình vẽ bên. Biết rằng độ dài cạnh bên của hình lăng trụ đứng $A'B'C'.ABC$ là a và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC. Đồng thời chi tiết máy này có đặc điểm như sau:



▫ Các khoảng cách từ S đến các điểm A,B,C bằng nhau và cùng bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ S đến A'

▫ Các góc giữa các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCA)$ với mặt phẳng (ABC) nhau bằng α và $\tan\alpha=\frac{1}{2}\tan\beta$ trong đó β là góc giữa SA' với mặt phẳng $(A'B'C')$. Tính theo a thể tích của chi tiết máy này.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;7;2),B(0;0;10,8)$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN, biết M là điểm thuộc mặt phẳng Oxy thoả mãn $AM=2,5$ và N thuộc mặt phẳng $(\alpha):z-12=0$ thoả mãn $BN=1,3$.

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ THÁI NGUYÊN
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:..
SBD:...

PHẦN ĐỀ

» Câu 1. **(a)** Một rạp chiếu phim có 12 hàng ghế. Hàng ghế thứ nhất có 15 ghế, số ghế ở mỗi hàng sau đều nhiều hơn số ghế ngay trước đó 5 ghế. Tính tổng số ghế của rạp chiếu phim.

(b) Giải phương trình: $\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

» Câu 2. **(a)** Một cơ sở sản xuất nước tinh khiết có năng lực sản xuất không quá 300 mét khối một ngày. Tính toán chi phí sản xuất trong một ngày bao gồm: chi phí nhân công là 5 triệu đồng, chi phí nguyên vật liệu là $0,15$ triệu đồng cho mỗi mét khối được sản xuất và chi phí bảo dưỡng máy móc tỉ lệ thuận với bình phương số mét khối nước được sản xuất trong ngày hôm đó. Nếu trong một ngày cơ sở đó sản xuất được 100 mét khối thì chi phí sản xuất là 25 triệu đồng. Biết rằng giá bán mỗi mét khối nước tinh khiết của cơ sở đó là 350 nghìn đồng. Hỏi mỗi ngày cơ sở đó nên sản xuất bao nhiêu mét khối nước để đạt được lợi nhuận cao nhất?

(b) Xét tính liên tục của hàm số: $f(x)=\begin{cases} x^2-x+4 & \text{khi } x\ge 2 \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{khi } -7<x<2 \end{cases}$ trên khoảng $(-7;+\infty)$

» Câu 3. Cho tập hợp $X=\{5,6,7,8,9\}$. Thái và Nguyên mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên có ba chữ số, đôi một khác nhau, được lập từ tập X. Tính xác suất để trong hai số tự nhiên đó có đúng một số tự nhiên có chữ số 9.

» Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC=a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD, N là giao điểm của đường thẳng SA và mặt phẳng (BCM).

(a) Tính diện tích của tứ giác $BCMN$.

(b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

» Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1=1 \\ u_{n+1}>0, \forall n\in\mathbb{N}^* \\ u_{n+1}^2=2u_n+3, \forall n\in\mathbb{N}^* \end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

» Câu 6. Cho $P(x)$ là đa thức bậc năm có các hệ số tự nhiên sao cho với $x\neq 0$ thì $P(x)=x^6P\left(\frac{1}{x}\right)$ và $P(2)=10P(1)$. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{P(3)}{P(2)}$.

» Câu 7. Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất dạng $4k+1\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ sao cho phương trình $x^3+x+p=y^2$ có nghiệm nguyên dương x,y.

----------------------------Hết----------------------------

MỤC LỤC

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ BẾN TRE
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:..
SBD:...

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

» Câu 1.

(a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

(b) Cho biết hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ (với a,b,c là các tham số thực, biết $f'(0)=1, f(3)=29$ và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Tính giá trị của hàm số tại $x=-2$.

Lời giải

(a) Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{x^2+2x+2}{x+1}$

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Sự biến thiên

$$y'=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Hàm số có hai điểm cực trị $x=0; x=-2$.

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty; \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$, do đó $x=-1$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

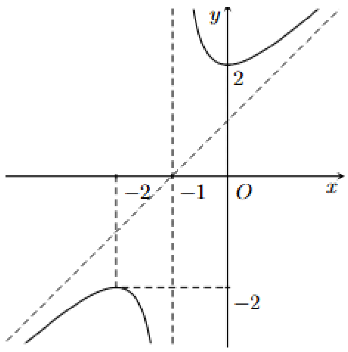
$\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0; \lim\limits_{x\to +\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=0,$

Do đó $y=x+1$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-2	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

Đồ thị hàm số



(b) Cho biết hàm số $y=f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ *(với* a,b,c *là các tham số thực, biết* $f'(0)=1, f(3)=29$ *và đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng* 2. *Tính giá trị của hàm số tại* $x=-2$.

Ta có $y=f\left(x\right)=x^3+ax^2+bx+c$, suy ra $f'\left(x\right)=3x^2+2ax+b$.

$f'\left(0\right)=1\Rightarrow b=1$

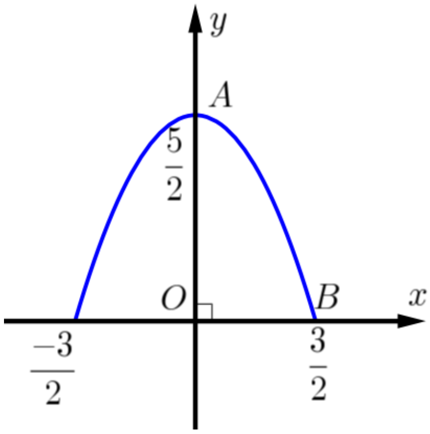
$f\left(3\right)=29\Rightarrow 27+9a+3b+c=29$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2, khi đó $f\left(0\right)=2\Rightarrow c=2$.

Do đó ta có $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{3} \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$ suy ra $y=f\left(x\right)=x^3-\dfrac{1}{3}x^2+x+2\Rightarrow f\left(-2\right)=-\dfrac{28}{3}$.

» Câu 2. Ông A thuê thợ làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,5 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá tiền thuê thợ làm mỗi mét vuông cửa là 2 000 000 đồng. Tính số tiền ông A phải trả cho thợ.

Lời giải



Đặt cái cửa nhà hình parabol vào hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ

Gọi phương trình của parabol là $y=ax^2+bx+c$

Do $\left(P\right)$ đi qua hai điểm $A\left(0;\dfrac{5}{2}\right),B\left(\dfrac{3}{2};0\right)$ và có trục đối xứng là Oy nên

$$\begin{cases} \dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+c=0 \\ \dfrac{-b}{2a}=0 \\ c=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{4}a+\dfrac{3}{2}b+c=0 \\ b=0 \\ c=\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-10}{9} \\ b=0 \\ c=\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Từ đó, suy ra $\left(P\right):y=\dfrac{-10}{9}x^2+\dfrac{5}{2}$

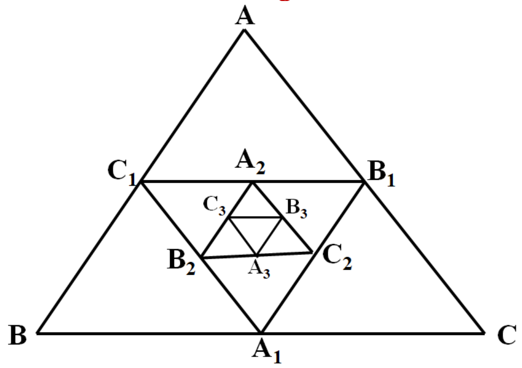
Diện tích phần làm cửa là:

$$S=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|\dfrac{-10}{9}x^2+\dfrac{5}{2}\right|\mathrm{d}x=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{-10}{9}x^2+\dfrac{5}{2}\right)\mathrm{d}x=\left(\dfrac{-10}{27}x^3+\dfrac{5x}{2}\right)\Bigg|_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}=5\left(\mathrm{m}^2\right)$$

Vậy số tiền ông A phải trả là: $5.2000000=10000000$ đồng.

» Câu 3. Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 2. Nối các trung điểm A_1, B_1, C_1 của các cạnh BC, AC, AB tương ứng, ta được tam giác đều $A_1B_1C_1$. Tiếp tục nối các trung điểm A_2, B_2, C_2 của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 tương ứng, ta được tam giác đều $A_2B_2C_2$, thực hiện quá trình này đến vô hạn lần. Gọi S_n là diện tích của tam giác đều $A_nB_nC_n$ $(n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$. Tính tổng diện tích các tam giác đều $A_nB_nC_n$ thu được.

Lời giải



Tam giác đều ABC có cạnh bằng 2 nên có diện tích $S_{\Delta ABC} = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$.

Tam giác đều $A_1B_1C_1$ có cạnh bằng 1 nên có diện tích $S_{\Delta A_1B_1C_1} = \dfrac{1^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

Tam giác đều $A_2B_2C_2$ có cạnh bằng $\dfrac{1}{2}$ nên có diện tích $S_{\Delta A_2B_2C_2} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{16}$.

Tam giác đều $A_3B_3C_3$ có cạnh bằng $\dfrac{1}{4}$ nên có diện tích $S_{\Delta A_3B_3C_3} = \dfrac{\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{\sqrt{3}}{64}$

Tổng diện tích các tam giác đều $A_nB_nC_n$ bằng

$$S = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4^2} + \frac{\sqrt{3}}{4^3} + \ldots \frac{\sqrt{3}}{4^n} + \ldots$$

Các số hạng của tổng lập thành cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = \sqrt{3}; q = \dfrac{1}{4}$

Vậy $S = \dfrac{u_1}{1-q} = \dfrac{\sqrt{3}}{1-\dfrac{1}{4}} = \dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

» Câu 4. Trong một túi có một số chiếc kẹo cùng loại, chỉ khác màu trong đó có 10 chiếc kẹo màu cam, còn lại là kẹo màu vàng. Bạn B lấy ngẫu nhiên một chiếc kẹo từ trong túi, không trả lại. Sau đó, bạn B lại lấy ngẫu nhiên thêm một chiếc kẹo khác từ trong túi. Biết rằng xác suất bạn B lấy được cả hai chiếc kẹo màu cam là $\dfrac{3}{8}$. Hỏi ban đầu trong túi có bao nhiêu chiếc kẹo?

Lời giải

Gọi số kẹo màu vàng là $x\,(x > 0)$.

Không gian mẫu có số phần tử là: $C_{10+x}^1 . C_{9+x}^1 = (10+x)(9+x)$.

Số cách để bạn B lấy được cả hai chiếc kẹo màu cam là: $C_{10}^1.C_9^1 = 90$ (cách).

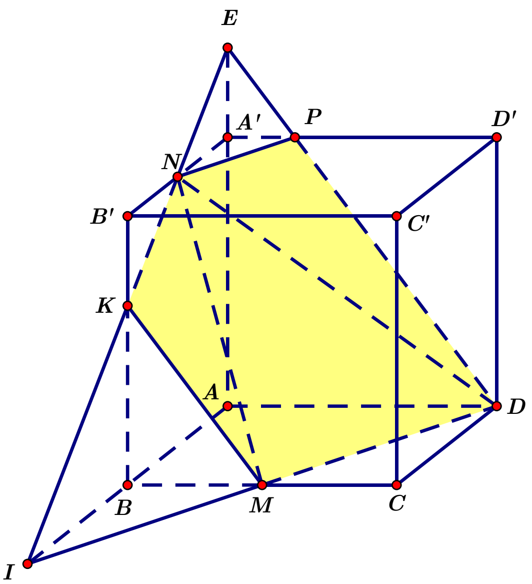
Xác suất để bạn B lấy được cả hai chiếc kẹo màu cam là $P = \dfrac{90}{(x+10)(x+9)} = \dfrac{3}{8}$.

$$\Leftrightarrow 3(x^2+19x+90) = 720 \Leftrightarrow x^2+19x-150 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-6\,(loai) \\ x=25 \end{array}\right..$$

Vậy ban đầu trong túi có số chiếc kẹo là: $10+25=35$ (chiếc).

» Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và $A'B'$. Mặt phẳng (DMN) chia khối lập phương đã cho thành hai khối đa diện. Gọi (H) là khối đa diện chứa điểm A, có thể tích $V_{(H)}$; (H') là khối đa diện còn lại, có thể tích $V_{(H')}$. Tính tỉ số $\dfrac{V_{(H)}}{V_{(H')}}$

Lời giải



Trong $(ABCD)$ gọi $I = DM \cap AB$.

Trong $(ABB'A')$ gọi $K = IN \cap BB'$ và $E = IN \cap A'A$.

Trong $(AA'D'D)$ gọi $P = ED \cap A'D'$.

Khi đó, (DMN) chia khối lập phương thành hai khối lần lượt là khối $A'ABMDPNK$ và khối $B'C'D'CDMKNP$.

$V_{(H)} = V_{A'ABMDPNK} = V_{EAID} - V_{EA'NP} - V_{IBMK}$.

Dễ thấy B là trung điểm của IA, suy ra $IB = a$.

ΔIBK đồng dạng với $\Delta NB'K$ nên $\dfrac{B'K}{BK} = \dfrac{B'N}{IB} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow B'K = \dfrac{1}{2}BK \Rightarrow B'K = \dfrac{1}{3}BB' = \dfrac{a}{3}$

$\Delta EA'N = \Delta KB'N \Rightarrow EA' = B'K = \dfrac{a}{3}$.

$$A'P//AD \Rightarrow \frac{A'P}{AD}=\frac{A'E}{AE}=\frac{\frac{a}{3}}{\frac{a}{3}+a}=\frac{1}{4}\Rightarrow A'P=\frac{a}{4}$$

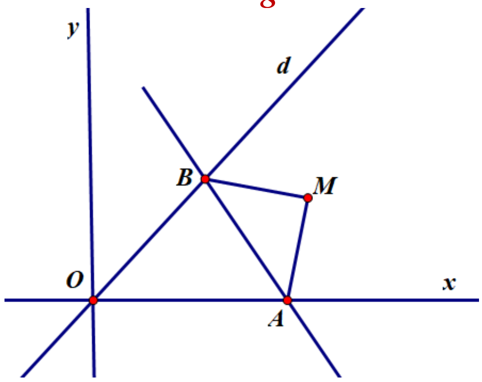
Ta có $V_{(H)}=\frac{1}{6}AE.AI.AD-\frac{1}{6}BK.BI.BM-\frac{1}{6}A'E.A'N.A'P$

$=\frac{1}{6}.\frac{4a}{3}.2a.a-\frac{1}{6}.\frac{2a}{3}.a.\frac{a}{2}-\frac{1}{6}.\frac{a}{3}.\frac{a}{2}.\frac{a}{4}=\frac{55}{144}a^3$

Lại có $V_{ABCD.A'B'C'D'}=a^3$ nên $\frac{V_{(H)}}{V_{(H')}}=\frac{55}{89}$.

» Câu 6. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho đường thẳng $d: x-y=0$ và điểm $M(2;1)$. Viết phương trình đường thẳng Δ cắt trục hoành Ox tại điểm A và cắt đường thẳng d tại điểm B sao cho tam giác ΔAMB vuông cân tại M.

Lời giải



Vì $A\in Ox, B\in d$, ta giả sử tọa độ $A(a;0), B(b;b)\Rightarrow \overrightarrow{MA}=(a-2;-1); \overrightarrow{MB}=(b-2;b-1)$

Theo bài ra, ta có $\begin{cases}\overrightarrow{MA}\perp\overrightarrow{MB}\\ MA=MB\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0\\ MA^2=MB^2\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-2)(b-2)-1(b-1)=0\\ (a-2)^2+1=(b-2)^2+(b-1)^2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-2=\frac{b-1}{b-2}\\ \left(\frac{b-1}{b-2}\right)^2+1=(b-2)^2+(b-1)^2\end{cases}$$ (do $b=2$ không là nghiệm).

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a-2=\frac{b-1}{b-2}\\ \left[(b-1)^2+(b-2)^2\right].\left[1-(b-2)^2\right]=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a-2=\frac{b-1}{b-2}\\ 1-(b-2)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=3\\ a=4\end{cases}\\ \begin{cases}b=1\\ a=2\end{cases}\end{array}\right.$$

Trường hợp 1. $\begin{cases}b=3\\ a=4\end{cases}$ hay $A(4;0), B(3;3)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là đường thẳng đi qua $A(4;0)$ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(-1;3)$ nên có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(3;1)$ là:

$3(x-4)+1(y-0)=0 \Leftrightarrow 3x+y-12=0$

Trường hợp 2. $\begin{cases} b=1 \\ a=2 \end{cases}$ hay $A(2;0), B(1;1)$.

Vậy phương trình đường thẳng Δ là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(-1;1)$ nên có một véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1)$ là:

$1(x-2)+1(y-0)=0 \Leftrightarrow x+y-2=0$

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

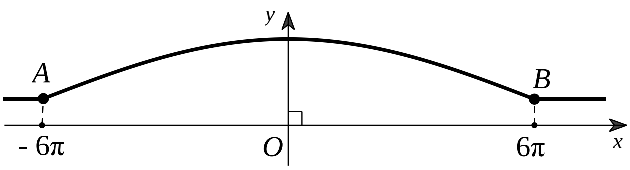
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ HÀ NAM
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:..
SBD:..

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

» Câu 1.

(1) Một chiếc cầu bắc qua sông, mặt dưới gầm cầu có dạng cung AB biểu thị bởi đồ thị hàm số $y=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos\frac{x}{12}+2$ với $x\in[-6\pi;6\pi]$ trong hệ trục toạ độ Oxy với đơn vị trục là mét (trục Ox mô tả mặt nước sông) như hình minh họa dưới đây:

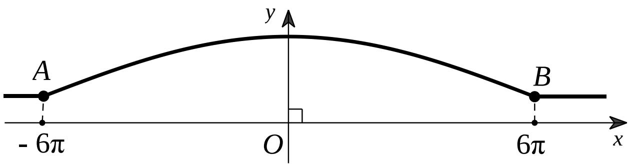



Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 6 mét so với mặt nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn $12,6$ mét.

(2) Cho phương trình $\sin 3x+\cos 2x-m\sin x=1$ với m là tham số. tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 7 nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\frac{\pi}{2};2\pi\right)$.

Lời giải

(1) Một chiếc cầu bắc qua sông, mặt dưới gầm cầu có dạng cung AB biểu thị bởi đồ thị hàm số $y=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos\frac{x}{12}+2$ với $x\in[-6\pi;6\pi]$ trong hệ trục toạ độ Oxy với đơn vị trục là mét (trục Ox mô tả mặt nước sông) như hình minh họa dưới đây:

Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 6 mét so với mặt nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn $12,6$ mét.

Xét điểm $M(x;y)$ nằm trên cung AB, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M.

Xét phương trình $y=\frac{8\sqrt{3}}{3}\cos\left(\frac{x}{12}\right)+2=6\Leftrightarrow\cos\frac{x}{12}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vì $x \in \left[-6\pi ; 6\pi\right] \Rightarrow \dfrac{x}{12} \in \left[-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right]$

Nên ta có $\cos\dfrac{x}{12} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dfrac{x}{12} = \pm\dfrac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \pm 2\pi$ hay $\left|x\right| = 2\pi$

Để sà lan có thể đi qua được gầm cầu đúng quy định thì bề rộng khối hàng là $2\left|x\right| \le 4\pi \approx 12,6$.

Vậy bề rộng tối đa của khối hàng là $12,6$ mét.

(2) *Cho phương trình $\sin 3x + \cos 2x - m\sin x = 1$ với m là tham số. tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có đúng 7 nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} ; 2\pi\right)$.*

$\sin 3x + \cos 2x - m\sin x = 1$

$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x + 1 - 2\sin^2 x - m\sin x = 1$

$\Leftrightarrow 3\sin x - 4\sin^3 x - 2\sin^2 x - m\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \sin x\left(3 - 4\sin^2 x - 2\sin x - m\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ -4\sin^2 x - 2\sin x + 3 - m = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = k\pi \\ -4\sin^2 x - 2\sin x + 3 - m = 0 \end{array}\right.$.

Với $x = k\pi$ có hai nghiệm $x = 0; x = \pi$ thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} ; 2\pi\right)$.

Để phương trình có đúng 7 nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} ; 2\pi\right)$ thì phương trình $-4\sin^2 x - 2\sin x + 3 - m = 0$ phải có 5 nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} ; 2\pi\right)$.

Đặt $t = \sin x \;\; \forall \in \left(-\dfrac{\pi}{2} ; 2\pi\right) \Rightarrow t \in \left[-1;1\right]$ ta có $-4t^2 - 2t + 3 - m = 0 \Leftrightarrow m = -4t^2 - 2t + 3 \;\; (*)$.

Để $-4\sin^2 x - 2\sin x + 3 - m = 0$ phải có 5 nghiệm khác nhau thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2} ; 2\pi\right)$ thì $(*)$ có 1 nghiệm $t \in (-1;0)$ và 1 nghiệm $t \in [0;1)$.

Xét hàm $f(t) = -4t^2 - 2t + 3$ ta có bảng

t	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{4}$	0	1	$+\infty$
$f(t)$	$-\infty$ ↗	1 ↗	$\frac{13}{4}$ ↘	3 ↘	-3 ↘	$-\infty$
					$y=m$	

Để thỏa mãn yêu cầu thì $m \in (1;3]$.

» Câu 2.

(1) Một quả bóng cao su thả từ độ cao 22,5 mét. Giả sử sau mỗi lần chạm đất quả bóng cao su lại nảy lên độ cao bằng 80% độ cao của lần rơi. Tính chiều dài quãng đường quả bóng cao su di chuyển từ khi được thả đến khi không nảy nữa.

(2) Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2025 \\ n(u_{n+1} - u_n) = 2(u_n + 3),\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) và tính $\lim \frac{u_n}{n^2}$

Lời giải

***(1)** Một quả bóng cao su thả từ độ cao 22,5 mét. Giả sử sau mỗi lần chạm đất quả bóng cao su lại nảy lên độ cao bằng 80% độ cao của lần rơi. Tính chiều dài quãng đường quả bóng cao su di chuyển từ khi được thả đến khi không nảy nữa.*

Giả sử quãng đường quả bóng di chuyển xuống và nảy lên lần thứ nhất lần lượt là u_1 và v_1, $(u_1, v_1 > 0)$.

Như vậy, quãng đường quả bóng di chuyển xuống và nảy lên ở các lần sẽ lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn. Cụ thể:

Quãng đường di chuyển xuống của quả bóng lập thành cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với $u_1 = 22{,}5$, công bội $q = 80\% = 0{,}8$.

Quãng đường di chuyển nảy lên của quả bóng lập thành cấp số nhân lùi vô hạn (v_n) với $v_1 = 0{,}8 \times 22{,}5 = 18$ và công bội $q = 0{,}8$

Vậy tổng chiều dài quãng đường quả bóng cao su di chuyển từ khi được thả đến khi không nảy nữa là $S = S_{u_1} + S_{v_1} = \frac{u_1}{1-q} + \frac{v_1}{1-q} = \frac{22{,}5}{1-0{,}8} + \frac{18}{1-0{,}8} = 202{,}5$ (mét).

***(2)** Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2025 \\ n(u_{n+1} - u_n) = 2(u_n + 3),\ n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$. Tìm số hạng tổng quát của dãy số (u_n) và tính $\lim \frac{u_n}{n^2}$*

Từ hệ thức truy hồi $n(u_{n+1} - u_n) = 2(u_n + 3)$ ta có:

$n(u_{n+1} - u_n) = 2(u_n + 3) \Leftrightarrow nu_{n+1} = (n+2)u_n + 6$

$\Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{(n+1)(n+2)} = \frac{u_n}{n(n+1)} + \frac{6}{n(n+1)(n+2)}\ (*)$

Xét dãy $(v_n): v_n = \frac{u_n}{n(n+1)} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \frac{2025}{2} \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$

Khi đó: $(*) \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{6}{n(n+1)(n+2)}$. Tương tự ta có

$v_n - v_{n-1} = \frac{6}{(n-1)n(n+1)}$

.

$v_2 - v_1 = \frac{6}{1.2.3}$

Do đó, ta được $v_{n+1}-v_1=6\left[\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+...+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}\right]=6\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2(n+1)(n+2)}\right]$

$\Leftrightarrow v_{n+1}=1014-\frac{3}{(n+1)(n+2)}\Rightarrow v_n=1014-\frac{3}{n(n+1)}\Leftrightarrow \frac{u_n}{n(n+1)}=1014-\frac{3}{n(n+1)}$

Vậy số hạng tổng quát của dãy (u_n) là $u_n=1014n(n+1)-3,\ \forall n\in\mathbb{N}$

Suy ra $\lim\frac{u_n}{n^2}=\lim\frac{1014n(n+1)-3}{n^2}=\lim\left(1014+\frac{1014}{n}-\frac{3}{n^2}\right)=1014$.

» Câu 3. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=16$. Tính $\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+x)f(x)+2}{x-1}$.

Lời giải

Ta có:

$\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+x)f(x)+x^2+x-x^2-x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1}\frac{(x^2+x)(f(x)+1)-x^2-x+2}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{(x^2+x)(f(x)+1)}{x-1}-\frac{x^2+x-2}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{(x^2+x)(f(x)+1)}{x-1}-\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}\right)$

$=\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{(x^2+x)(f(x)+1)}{x-1}-(x+2)\right)=2.16-3=29$

Vì $\lim\limits_{x\to1}(x^2+x)=2$ và $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)+1}{x-1}=16$.

» Câu 4. Ba cầu thủ đá phạt đền 11m, mỗi người đá một lần với xác suất ghi bàn tương ứng là x,y và $0,6$ (với $x>y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu thủ ghi bàn là $0,976$ và xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là $0,336$. Tính xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn.

Lời giải

Gọi A,B,C lần lượt là các biến cố của ba cầu thủ thứ ghi bàn và $P(A)=x,P(B)=y,P(C)=0,6$. Do A,B,C độc lập.

Ta có:

Xác suất để cả ba cầu thủ đều ghi bàn là:

$P(A.B.C)=P(A).P(B).P(C)=x.y.0,6=0,336\Leftrightarrow xy=0,56$.

Xác suất để cả ba cầu thủ đều không ghi bàn là:

$P(\overline{A}.\overline{B}.\overline{C})=P(\overline{A}).P(\overline{B}).P(\overline{C})=(1-P(A)).(1-P(B)).(1-P(C))=1-0,976$

$\Leftrightarrow 1-0,976=(1-x)(1-y)(1-0,6)\Leftrightarrow 0,024=0,4(1-(x+y)+xy)$

Theo đó ta có: $\begin{cases}x+y=1,5\\xy=0,56\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,8\\y=0,7\end{cases}$ (do $x>y$).

Khi đó xác suất để có đúng hai cầu thủ ghi bàn là:

$P(\overline{A}.B.C\cup A.\overline{B}.C\cup A.B.\overline{C})=P(\overline{A}.B.C)+P(A.\overline{B}.C)+P(A.B.\overline{C})$

$=0,8.0,7(1-0,6)+0,8.(1-0,7).0,6+(1-0,8).0,7.0,6=0,452$.

» Câu 5.

(1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) không đi qua S cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $SA = 2SM$ và $SC = 3SP$. Tính $\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ}$.

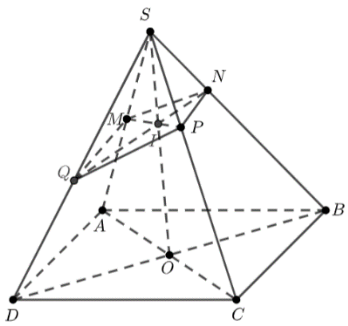
(2) Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, điểm M nằm trên cạnh AC sao cho $AM = kMC$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với hai đường thẳng AB' và $A'C$. Gọi N là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng BC. Tìm k để $\frac{NB}{NC} = \frac{5}{3}$.

(3) Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi M là một điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$T = \frac{MA^2}{OA^2} + \frac{MB^2}{OB^2} + \frac{MC^2}{OC^2}$.

Lời giải

(1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Mặt phẳng (α) không đi qua S cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại M, N, P, Q sao cho $SA = 2SM$ và $SC = 3SP$. Tính $\frac{SB}{SN} + \frac{SD}{SQ}$



Gọi I là giao điểm của SO và MP. Khi đó ba điểm N, I, Q là các điểm chung của hai mặt phẳng phân biệt (SBD) và $(MNPQ)$ nên chúng thẳng hàng.

Xét bài toán tổng quát, đặt $\frac{SA}{SM} = x$, $\frac{SB}{SN} = y$, $\frac{SC}{SP} = z$, $\frac{SD}{SQ} = t$.

Đặt $S_{\Delta SAC} = S$. Ta có $\frac{S_{\Delta SMP}}{S_{\Delta SAC}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SP}{SC} = \frac{1}{x}.\frac{1}{z} = \frac{1}{xz} \Rightarrow S_{\Delta SMP} = \frac{1}{xz}S$ (1)

Vì O là trung điểm của AC nên $S_{\Delta SOA} = S_{\Delta SOC} = \frac{1}{2}S$.

Lại có $\frac{S_{\Delta SIM}}{S_{\Delta SOA}} = \frac{SM}{SA}.\frac{SI}{SO} = \frac{1}{x}.\frac{SI}{SO}$ và $\frac{S_{\Delta SIP}}{S_{\Delta SOC}} = \frac{SP}{SC}.\frac{SI}{SO} = \frac{1}{z}.\frac{SI}{SO}$

Suy ra $S_{\Delta SIM} = \frac{1}{x}.\frac{SI}{SO}.\frac{1}{2}S$ và $S_{\Delta SIP} = \frac{1}{z}.\frac{SI}{SO}.\frac{1}{2}S$, do đó $S_{\Delta SMP} = \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z}\right).\frac{SI}{SO}.\frac{S}{2}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $\frac{SO}{SI} = \frac{x+z}{2}$.

Áp dụng tương tự vào tam giác SBD ta cũng có $\frac{SO}{SI} = \frac{y+t}{2}$.

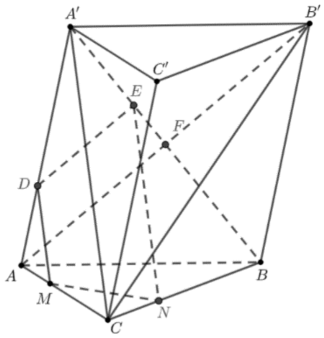
Từ đó ta có $x + z = y + t$.

Áp dụng vào bài toán, ta có $x=2, z=3$ cho nên $\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}=y+t=2+3=5$.

(2) *Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, điểm M nằm trên cạnh AC sao cho $AM=kMC$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với hai đường thẳng AB' và $A'C$. Gọi N là giao điểm của mặt phẳng (P) và đường thẳng BC. Tìm k để $\frac{NB}{NC}=\frac{5}{3}$.*

Qua M vẽ đường thẳng song song với $A'C$, cắt đường thẳng AA' tại D;
Qua D vẽ đường thẳng song song với AB', cắt đường thẳng $A'B$ tại E.
Qua E vẽ đường thẳng song song với $A'C$, cắt BC tại N (chính là giao điểm của mặt phẳng (P) với BC).

Khi đó, mặt phẳng (P) chính là mặt phẳng $(MDEN)$.



Áp dụng định lý Thales trong tam giác ACA', ta có $\frac{AD}{DA'}=\frac{AM}{MC}=k$.

Gọi F là giao điểm của $A'B$ và AB', áp dụng Thales trong tam giác $A'AF$ ta có

$$\frac{A'E}{EF}=\frac{A'D}{DA}=\frac{1}{k}\Rightarrow\frac{BE}{EA'}=2k+1.$$

Áp dụng Thales trong tam giác $BA'C$ ta có $\frac{BN}{NC}=\frac{BE}{EA'}=2k+1$.

Từ giả thiết ta có $2k+1=\frac{5}{3}\Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$.

(3) *Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi M là một điểm bất kì thuộc miền trong tam giác ABC. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=\frac{MA^2}{OA^2}+\frac{MB^2}{OB^2}+\frac{MC^2}{OC^2}$.*

Đặt $OA=a,\ OB=b,\ OC=c$.

Từ giả thiết ta có $\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$ đôi một vuông góc.

Vì M, A, B, C đồng phẳng và M thuộc miền trong ΔABC nên tồn tại các số thực dương x, y, z sao cho $x+y+z=1$ và $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

Ta có $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=(x-1)\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$, suy ra

$$MA^2=(x-1)^2a^2+y^2b^2+z^2c^2\Rightarrow\frac{MA^2}{OA^2}=\frac{x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2}{a^2}-2x+1.$$

Tương tự ta có $\frac{MB^2}{OB^2}=\frac{x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2}{b^2}-2y+1$ và $\frac{MC^2}{OC^2}=\frac{x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2}{c^2}-2z+1$.

Suy ra

$$T=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2\right)-2\left(x+y+z\right)+3$$
$$=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2\right)+1$$

Theo bất đẳng thức B-C-S ta có

$$T=\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\left(x^2a^2+y^2b^2+z^2c^2\right)+1\geq\left(\frac{1}{a}.xa+\frac{1}{b}.yb+\frac{1}{c}.zc\right)^2+1=2.$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases}x+y+z=1\\ \dfrac{xa}{\frac{1}{a}}=\dfrac{yb}{\frac{1}{b}}=\dfrac{zc}{\frac{1}{c}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y+z=1\\ \dfrac{x}{\frac{1}{a^2}}=\dfrac{y}{\frac{1}{b^2}}=\dfrac{z}{\frac{1}{c^2}}\end{cases}$

$\Rightarrow x=\dfrac{\frac{1}{a^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}},y=\dfrac{\frac{1}{b^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}},z=\dfrac{\frac{1}{c^2}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy giá trị nhỏ nhất của T bằng 2.

» Câu 6. Cho a,b,c là các số thực dương thoả mãn $\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{c}=6$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\sqrt{\dfrac{a}{a+4bc}}+\sqrt{\dfrac{b}{b+9ca}}+\sqrt{\dfrac{c}{c+36ab}}$

Lời giải

$$P=\sqrt{\frac{a}{a+4bc}}+\sqrt{\frac{b}{b+9ca}}+\sqrt{\frac{c}{c+36ab}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{4bc}{a}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{9ca}{b}}}+\sqrt{\frac{1}{1+\frac{36ab}{c}}}$$
$$=\sqrt{\frac{1}{1+\left(2\sqrt{\frac{bc}{a}}\right)^2}}+\sqrt{\frac{1}{1+\left(3\sqrt{\frac{ca}{b}}\right)^2}}+\sqrt{\frac{1}{1+\left(6\sqrt{\frac{ab}{c}}\right)^2}}$$

Đặt $x=2\sqrt{\dfrac{bc}{a}},y=3\sqrt{\dfrac{ca}{b}},z=6\sqrt{\dfrac{ab}{c}}\Rightarrow xy=6c;yz=18a;zx=12b.$

Do đó $\dfrac{1}{3a}+\dfrac{1}{2b}+\dfrac{1}{c}=6\Leftrightarrow\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy}=1\Leftrightarrow x+y+z=xyz$ nên tồn tại tam giác ABC sao cho

$$x=\tan A,y=\tan B,z=\tan C.$$

$$P=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 A}}+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 B}}+\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 C}}=\cos A+\cos B+\cos C\leq\frac{3}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}2\sqrt{\dfrac{bc}{a}}=\sqrt{3}\\ 3\sqrt{\dfrac{ca}{b}}=\sqrt{3}\\ 6\sqrt{\dfrac{ab}{c}}=\sqrt{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}bc=3a\\ ca=\dfrac{1}{3}b\\ ab=\dfrac{1}{12}c\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{6}\\ b=\dfrac{1}{4}\\ c=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là $\frac{3}{2}$ khi $\begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{1}{4} \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

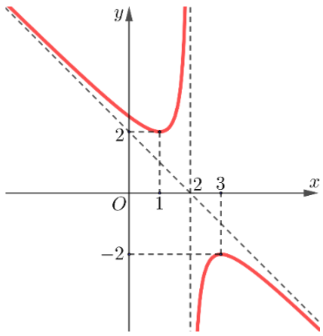
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ HÀ NỘI
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:..
SBD:...

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

A. Câu hỏi – Trả lời ngắn

» Câu 1. Cho hàm số $y=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$ có đồ thị như hình vẽ



Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ *Trả lời:*

-	2		

Từ đồ thị hàm số ta xác định được phương trình đường TCĐ là $x=2$; phương trình đường TCX là $y=-x+2$

Dựa vào hàm số ta xác định được phương trình đường TCĐ là $x=-d$, nên suy ra $d=-2$

Khi đó đường TCX có phương trình $y=ax+2a+b$, nên suy ra $a=-1;b=4$

Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(1;2)\to 2=\dfrac{-1+4+c}{1-2}\to c=-5$

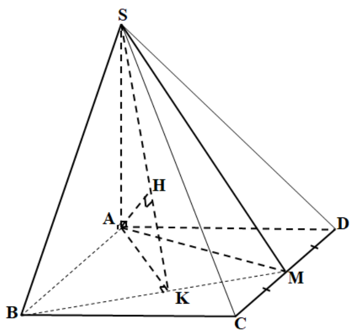
Vậy $a+b+c=-2$.

» Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh 3cm, cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy, đường thẳng SD tạo với mặt đáy một góc 45^0. Gọi M là trung điểm của cạnh CD. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBM) bằng bao nhiêu centimet?

Lời giải

✓ *Trả lời:*

2			



Gọi K là hình chiếu vuông góc của A lên BM và H là hình chiếu vuông góc của A lên SK khi đó $AK\perp BM$ và $AH\perp SK$ khi đó $d(A,(SBM))=AH$.

Có $BM=\sqrt{3^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{5}}{2}(cm)$

$(SD,(ABCD))=SDA=45^0\Rightarrow\Delta SAD$ vuông cân tại A nên $AS=AD=3(cm)$.

Ta có $S_{\Delta ABM}=2.S_{BCM}=3.\frac{3}{2}=\frac{9}{2}(cm^2)$ mà

$S_{\Delta ABM}=\frac{1}{2}AK.BM\Rightarrow AK=\frac{2.S_{\Delta ABM}}{BM}=\frac{2.\frac{9}{2}}{\frac{3\sqrt{5}}{2}}=\frac{6\sqrt{5}}{5}(cm)$

Xét ΔSAK vuông tại A có

$\frac{1}{AH^2}=\frac{1}{AK^2}+\frac{1}{AS^2}=\frac{1}{\left(\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)^2}+\frac{1}{3^2}\Rightarrow AH=2(cm)\Rightarrow d(A,(SBM))=2(cm)$

» Câu 3. Bất phương trình $\log_4 x^2+\log_2(x+3)\le 1+\log_2(2x+3)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

Lời giải

✓ *Trả lời:*

4			

$\log_4 x^2+\log_2(x+3)\le 1+\log_2(2x+3)\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}<x\ne 0\\ \log_2|x|+\log_2(x+3)\le\log_2 2+\log_2(2x+3)\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}<x\ne 0\\ \log_2\left[|x|(x+3)\right]\le\log_2\left[2(2x+3)\right]\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\frac{3}{2}<x\ne 0\\ |x|(x+3)\le 4x+6\,(1)\end{cases}.$

Trường hợp 1: $-\frac{3}{2}<x<0$

$(1)\Leftrightarrow -x(x+3)\le 4x+6\Leftrightarrow -x^2-7x-6\le 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -6\\ x\ge -1\end{array}\right.$.

Kết hợp trường hợp đang xét, ta được $-1\le x<0$.

Trường hợp 2: $x>0$

$(1)\Leftrightarrow x(x+3)\le 4x+6\Leftrightarrow x^2-x-6\le 0\Leftrightarrow -2\le x\le 3$.

Kết hợp trường hợp đang xét, ta được $0<x\le 3$.

Vậy tập nghiệm bất phương trình: $S=[-1;3]\setminus\{0\}$.

Các nghiệm nguyên là: $-1;1;2;3$.

» Câu 4. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{3}-\cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4};0\right]$ bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ *Trả lời:*

-	1	,	4

Ta có $y'=\sqrt{3}+2\sin 2x=0 \Leftrightarrow \sin 2x=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\dfrac{\pi}{3}+k2\pi \\ 2x=\dfrac{4\pi}{3}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+k\pi \end{array}\right. \left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

Mà $x\in\left[-\dfrac{\pi}{4};0\right] \Rightarrow x=-\dfrac{\pi}{6}$.

Ta lại có $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{4}; f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}-\dfrac{1}{2}; f\left(0\right)=-1$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x\sqrt{3}-\cos 2x$ trên đoạn $\left[-\dfrac{\pi}{4};0\right]$ bằng $f\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{\pi\sqrt{3}}{6}-\dfrac{1}{2}$.

» Câu 5. Cho hàm số $y=mx^2+\left(4-m^2\right)x+n\ln x$ (với m,n là các tham số thực). Biết rằng hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{1}{2}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=1$. Giá trị của m^2+n^2 bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời:*** **3 2**

Xét hàm số $y=mx^2+\left(4-m^2\right)x+n\ln x$. Tập xác định: $D=\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $y'=2mx+4-m^2+\dfrac{n}{x}$ và $y''=2m-\dfrac{n}{x^2}$.

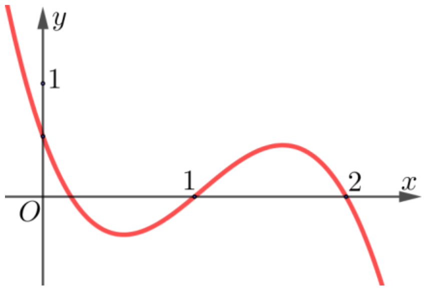
Vì hàm số đạt cực trị tại $x=\dfrac{1}{2}$ và $x=1$ nên ta có: $\begin{cases} y'(1)=0 \\ y'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+4-m^2+n=0 \\ m+4-m^2+2n=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m+4-m^2=0 \\ 2m+4-m^2+n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-4 \end{array}\right. \\ 2m+4-m^2+n=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m=-1 \\ n=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} m=-4 \\ n=-4 \end{cases} \end{array}\right..$$

Với $\begin{cases} m=-1 \\ n=-1 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} y''\left(\dfrac{1}{2}\right)=2>0 \\ y''(1)=-1<0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x=\dfrac{1}{2}$ và đạt cực đại tại điểm $x=1$ (không thỏa yêu cầu bài toán).

* Với $\begin{cases} m=4 \\ n=4 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} y''\left(\dfrac{1}{2}\right)=-8<0 \\ y''(1)=4>0 \end{cases}$ nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x=\dfrac{1}{2}$ và đạt cực tiểu tại điểm $x=1$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán). Vậy $m^2+n^2=4^2+4^2=32$.

» Câu 6. Cho $y=f\left(x\right)$ là hàm số đa thức bậc ba có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $g(x)=f\left(f(x)-1\right)-3$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Lời giải

✓ ***Trả lời:*** **2**

Từ đồ thị hàm số ta suy ra hàm số $f(x)$ có 2 điểm cực trị $x=a$ và $x=b$

Ta có: $g'(x)=f'(x).f'\left(f(x)-1\right)$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f'(x)=0\\f'\left(f(x)-1\right)=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(0;1)\\x=b\in(1;2)\\f(x)-1=a\\f(x)-1=b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=a\in(0;1)\\x=b\in(1;2)\\f(x)=1+a\in(1;2)\\f(x)=1+b\in(2;3)\end{array}\right.$$

Vẽ các đường thẳng $d_1: y=1+a$ và $d_2: y=1+b$ ta suy ra

Phương trình $f(x)=1+a$ có đúng 1 nghiệm $x=x_1\in(-\infty;0)$

Phương trình $f(x)=1+b$ có đúng 1 nghiệm $x=x_2\in(-\infty;x_1)$.

Mặt khác: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\mp\infty$ nên $\lim\limits_{x\to\pm\infty}g(x)=\mp\infty$.

BBT cho hàm số $g(x)$

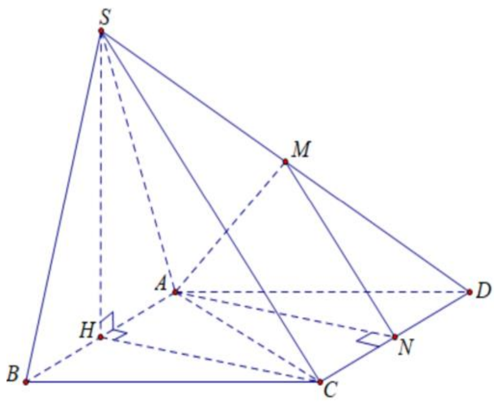
x	$-\infty$		x_2		x_1		a		b		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$+\infty$	↘		↗		↘		↗		↘	$-\infty$

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2\sqrt{3}$ và $ABC=60^\circ$. Mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy và $ASB=30^\circ$. Gọi M là trung điểm cạnh SD và α là góc giữa hai đường thẳng AM,CD. Khi đó $\sin\alpha$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời:*** **1**



Gọi H,N lần lượt là trung điểm của AB,CD. Khi đó ta có

$MN \parallel SC, SC \subset (SHC) \Rightarrow MN \parallel (SHC)$

$AN \parallel HC, HC \subset (SHC) \Rightarrow AN \parallel (SHC)$

$MN \cap AN = N$ và cùng thuộc mp(AMN). Suy ra $(AMN) \parallel (SHC)$.

Ta lại có tam giác ABC đều suy ra góc $HCD = 90^\circ \Rightarrow CD \perp HC$

Mà theo giả thiết mặt bên SAB là tam giác cân đỉnh S, nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy

suy ra $SH \perp (ABCD) \Rightarrow CD \perp SH$.

Suy ra $CD \perp (SHC) \Rightarrow CD \perp (AMN) \Rightarrow CD \perp AM$. Suy ra góc giữa hai đường thẳng AM, CD bằng $\alpha = 90^\circ \Rightarrow \sin\alpha = 1$.

» Câu 8. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(1;-2;3), B(2;1;-4)$. Xét điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho $2MA^2 - 3MB^2$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó độ dài đoạn OM bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.*

Lời giải

✓ *Trả lời:*

8	,	0	6

Điểm M thuộc mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow M(x;y;0)$. Khi đó

$2MA^2 - 3MB^2 = -x^2 - y^2 + 8x + 14y - 35 = 14 - \left[(x-4)^2 + (y-7)^2\right]$.

Mà $(x-4)^2 \geq 0; (y-7)^2 \geq 0 \Rightarrow 14 - \left[(x-4)^2 + (y-7)^2\right] \leq 14$.

Suy ra $2MA^2 - 3MB^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng 14 khi $\begin{cases} x-4=0 \\ y-7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=7 \end{cases} \Rightarrow M(4;7;0)$.

Khi đó $OM = \sqrt{4^2 + 7^2} = \sqrt{65} \approx 8,06$.

» Câu 9. Một xưởng sản xuất vận hành từ từ 14h00 đến 22h00 mỗi ngày (không tính các ngày thứ Bảy và Chủ Nhật và ngày lễ), chia 2 ca làm việc với mức lương tương ứng trả cho công nhân theo bảng sau:

Ca	Khoảng thời gian làm việc	Mức lương/giờ
I	Từ 14h00 đến 19h00	60 000 đồng
II	Từ 17h00 đến 22h00	70 000 đồng

Do yêu cầu sản xuất, bộ phận nhân sự đã sắp xếp công nhân làm việc thỏa mãn tất cả các yêu cầu sau:

▫Trong khoảng thời gian từ 17h00 đến 19h00: Tổng số công nhân làm việc trong xưởng không được ít hơn 12 người.
▫Trong khoảng thời gian từ 19h00 đến 22h00: Tổng số công nhân làm việc trong xưởng không được nhiều hơn 10 người.
▫Số công nhân làm việc ca II luôn nhiều hơn ít nhất 2 người so với số công nhân làm ca I.
Hỏi tổng số tiền lương tối thiểu trong một ngày làm việc mà xưởng sản xuất trả cho công nhân là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

✓ ***Trả lời:***

3	,	9	5

Gọi x,y lần lượt là số công nhân làm việc ca I và ca II $(x,y\geq 0)$

Theo bài ra ta có: $\begin{cases} x+y\geq 12 \\ y\leq 10 \\ y\geq x+2 \end{cases}$

Tổng số tiền lương phải trả trong một ngày làm việc là: $T(x;y)=60.5x+70.5y$ (nghìn đồng)

Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình trên ta thấy tiền lương tối thiểu đạt được tại các điểm $A(2;10),B(5;7),C(8;10)$

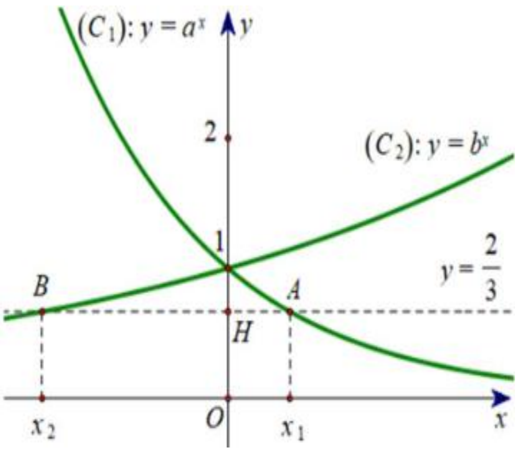
Ta có $T(2;10)=4100$ (nghìn đồng)

$T(5;7)=3950$ (nghìn đồng)

$T(8;10)=5900$ (nghìn đồng)

Vậy tổng số tiền lương tối thiểu trong một ngày làm việc mà xưởng sản xuất trả cho công nhân là 3.950.000 đồng

» Câu 10. Cho hàm số $y=a^x$ và $y=b^x$ (với a,b là các số thực dương) có đồ thị là các đường cong $(C_1),(C_2)$ như hình vẽ:



Đường thẳng $y=\frac{2}{3}$ lần lượt cắt $(C_1),(C_2)$ và trục Oy tại A,B và H. Biết rằng $HB=3HA$, giá trị của tích $a.b^3$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

✓ ***Trả lời:***

1			

Có $A\left(\log_a\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right),H\left(0;\frac{2}{3}\right),B\left(\log_b\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$

Theo bài ra ta có $HB=3HA\Rightarrow \left|\log_b\frac{2}{3}\right|=3\left|\log_a\frac{2}{3}\right|$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\log_b\frac{2}{3}=3\log_a\frac{2}{3}\\ \log_b\frac{2}{3}=-3\log_a\frac{2}{3}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_{\frac{2}{3}}a=3\log_{\frac{2}{3}}b\\ \log_{\frac{2}{3}}a=-3\log_{\frac{2}{3}}b\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=b^3\left(l\right)\\ a=b^{-3}\Rightarrow a.b^3=1\end{array}\right.$$

» Câu 11. Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|\frac{2x+m}{x+1}\right|$ trên $\left[0;1\right]$ bằng $\frac{5}{6}$. Tổng tất cả các phần tử của S bằng bao nhiêu? *Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ ***Trả lời:***

-	1	,	2

Do hàm số $y=f\left(x\right)=\frac{2x+m}{x+1}$ xác định trên $\left[0;1\right]$ nên

$$\max_{\left[0;1\right]}y=\max\left\{\left|f\left(0\right)\right|,\left|f\left(1\right)\right|\right\}=\max\left\{\left|m\right|,\left|\frac{m+2}{2}\right|\right\}$$

+ Nếu $\left|m\right|\geq\left|\frac{m+2}{2}\right|$ thì $\left|m\right|=\frac{5}{6}\Leftrightarrow m=\pm\frac{5}{6}$. Kết hợp điều kiện ta thấy $m=-\frac{5}{6}$ thoả mãn.

+ Nếu $\left|m\right|<\left|\frac{m+2}{2}\right|$ thì $\left|\frac{m+2}{2}\right|=\frac{5}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=-\frac{1}{3}\\ m=-\frac{11}{3}\end{array}\right.$. Kết hợp điều kiện ta thấy $m=-\frac{1}{3}$ thoả mãn.

Vậy $S=\left\{-\frac{5}{6};-\frac{1}{3}\right\}$ nên tổng các phần tử của S là $-\frac{7}{6}$.

» Câu 12. Hàm số $y=\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2\left(x+3\right)^3...\left(x+2025\right)^{2025}$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?

Lời giải

✓ ***Trả lời:***

1	5	1	8

Đặt $f\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2\left(x+3\right)^3...\left(x+2025\right)^{2025}$

Đặt $f_1'=\left(x+2\right)^2.\left(x+3\right)^3...\left(x+2025\right)^{2025}$

$f_2'=2\left(x+2\right)\left(x+1\right)\left(x+3\right)^3...\left(x+2025\right)^{2025}$

$f_3'=3\left(x+3\right)^2\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2\left(x+4\right)^4...\left(x+2025\right)^{2025}$

…

$f_2'=2025\left(x+2025\right)\left(x+1\right)\left(x+2\right)^2\left(x+3\right)^3...\left(x+2024\right)^{2024}$

Suy ra $f'\left(x\right)=\sum_{k=1}^{2025}f_k'$

Dễ dàng thấy rằng, $x=-1$ không là nghiệm của $f'(x)$, còn $x=-2$ là nghiệm đơn, $x=-3$ là nghiệm bội 2, …, $,x=-2025$ là nghiệm bội 2024 của $f'(x)$. Vậy có 1012 nghiệm đơn và bội lẻ.

Mặt khác, nếu trên tập $\mathbb{R}\setminus\{-1;-2;-3;...;-2025\}$ thì

$$f'(x)=f(x).\left(\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}+...+\frac{2025}{x+2025}\right)$$

Đặt $h(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{2}{x+2}+\frac{3}{x+3}+...+\frac{2025}{x+2025}$ khi đó $h'(x)<0$ trên các khoảng xác định và thoả mãn $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=0,\ \lim\limits_{x\to-2025^-}h(x)=-\infty;\ \lim\limits_{x\to-k+}h(x)=-\infty,\ \lim\limits_{x\to-(k+1)^-}h(x)=+\infty\ \ k=\overline{1,2024}$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=0, \lim\limits_{x\to-1^+}h(x)=+\infty$ nên $h(x)=0$ có 2024 nghiệm đơn.

Từ đó, suy ra $f'(x)$ có 3036 nghiệm đơn và bội lẻ. Do đó, hàm ban đầu có 1518 điểm cực tiểu.

» Câu 13. Cho hàm số $f(x)=\ln\left(e^{\frac{x}{1013}}+e\right)$. Giá trị của biểu thức $T=f'(1)+f'(2)+...+f'(2025)$ bằng $\frac{a}{b}(a;b\in\mathbb{N})$. Tính $a-b$?

Lời giải

✓ *Trả lời:*

-	1		

Ta có $f(x)=\ln\left(e^{\frac{x}{1013}}+e\right)=\ln\left(\left(e^2\right)^{\frac{x}{2026}}+e\right)$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1013}.\frac{e^{\frac{x}{1013}}}{e^{\frac{x}{1013}}+e}=\frac{1}{1013}.\frac{\left(e^2\right)^{\frac{x}{2026}}}{\left(e^2\right)^{\frac{x}{2026}}+e}.$$

$$f'(2026-x)=\frac{1}{1013}\frac{\left(e^2\right)^{\frac{2026-x}{2026}}}{\left(e^2\right)^{\frac{2026-x}{2026}}+e}.$$

Suy ra $f'(x)+f'(2026-x)=\frac{1}{1013}\frac{\left(e^2\right)^{\frac{2026-x}{2026}}}{\left(e^2\right)^{\frac{2026-x}{2026}}+e}+\frac{1}{1013}\frac{\left(e^2\right)^{\frac{x}{2026}}}{\left(e^2\right)^{\frac{x}{2026}}+e}=\frac{1}{1013}.$

Khi đó

$$T=f'(1)+f'(2025)+f'(2)+f'(2024)+...+f'(1012)+f'(1014)+f'(1013)$$

$$=\frac{1}{1013}.1012+f'(1013)$$

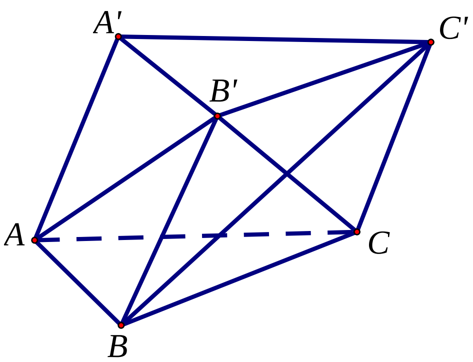
$$=\frac{1012}{1013}+\frac{1}{1013}.\frac{1}{2}=\frac{2025}{2026}\Rightarrow a-b=-1.$$

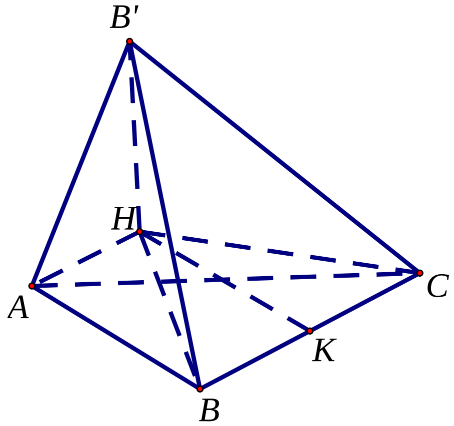
» Câu 14. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB=4cm, BC=6cm$ đường thẳng AA' hợp với đáy một góc 60^0. Biết rằng tam giác ABB' là tam giác vuông tại A, tam giác $B'BC$ là tam giác cân tại B'. Thể tích của khối tứ diện $ABB'C'$ bằng bao nhiêu centimét khối? *Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.*

Lời giải

✓ ***Trả lời:***

3	4	,	6





Gọi H là hình chiếu vuông góc của B' trên mặt phẳng (ABC).

Ta có $AA'// BB'$ nên $(AA',(ABC)) = (BB',(ABC)) = B'BH = 60^0$.

Xét hai tam giác vuông $B'BH$ và $B'CH$ có cạnh $B'H$ chung, $B'B = B'C$ (do tam giác $B'BC$ cân tại B'), do đó $\Delta B'BH = \Delta B'CH$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông), suy ra $HB = HC$.

Xét mặt phẳng (ABC): $HB = HC$ nên H thuộc đường trung trực của đoạn BC.

Gọi K là trung điểm BC, ta có $HKB = KBA = 90^0$. (1)

Lại có $BA \perp B'A$ (tam giác ABB' vuông tại A), $BA \perp B'H$ (do $B'H \perp (ABC)$) suy ra $BA \perp (B'AH) \Rightarrow BA \perp AH$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AHKB$ là hình chữ nhật, do đó $HB = \sqrt{AB^2 + BK^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\Rightarrow B'H = HB.\tan B'BH = HB.\tan 60^0 = 5\sqrt{3}$; $S_{ABC} = \frac{1}{2}BA.BC = 12$.

$$V_{ABB'C'} = \frac{1}{2}V_{C'.ABB'A'} = \frac{1}{2}.\frac{2}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3}B'H.S_{ABC} = 20\sqrt{3} \approx 34,6.$$

» Câu 15. Anh An bắt đầu tham gia đầu tư vào chứng khoán của công ty X từ ngày 07/01/2023. Hàng năm, công ty X đều trả cổ tức bằng cổ phiếu, số cổ phiếu được nhận định tính theo tỉ lệ trên tổng cổ phiếu hiện có trong tài khoản của mỗi nhà đầu tư. Giá trung bình của cổ phiếu và những thông tin liên quan về quá trình đầu tư của mình được anh An thống kê trong bảng sau.

Ngày	Giá trung bình của mỗi cổ phiếu (đồng)	Tỉ lệ cổ tức bằng cổ phiếu nhận được hàng năm	Số lượng cổ phiếu mua lần đầu (cổ phiếu)	Số lượng cổ phiếu mua thêm (cổ phiếu)
07/01/2023	10 000		10 000	
07/01/2024	15 000	10%		10 000
07/01/2025	13 000	10%		

Ngày 08/01/2025, nếu bán toàn bộ cổ phiếu của công ty X hiện có trong tài khoản của mình với giá bằng giá trung bình của cổ phiếu đó trong ngày 07/01/2025 thì anh An sẽ lãi bao nhiêu tiền?

Giải thích thuật ngữ:
▫**Cổ tức** là khoản lợi nhuận ròng được trả cho mỗi cổ phần, thường được chi trả bằng cổ phiếu hoặc bằng tiền mặt
▫**Giá trung bình của cổ phiếu** trong một ngày giao dịch được tính bằng trung bình cộng của giá cao nhất và giá thấp nhất của cổ phiếu trong ngày giao dịch đó. Đơn vị triệu đồng.

Lời giải

✓ *Trả lời:*

6	4	,	6

Số tiền mua cổ phiếu lần đầu ngày 07/01/2023: $10000^2 = 100000000$ đồng
Số tiền mua thêm cổ phiếu ngày 07/01/2024: $10000\text{x}15000 = 150000000$ đồng
Số cổ phiếu sau ngày 07/01/2024 là: $20000 + 20000.10\% = 22000$
Số cổ phiếu sau ngày 07/01/2025 là: $22000 + 22000.10\% = 24200$
Ngày 08/01/2025, nếu bán toàn bộ cổ phiếu của công ty X hiện có trong tài khoản của mình với giá bằng giá trung bình của cổ phiếu đó trong ngày 07/01/2025 thì anh An thu được số tiền là: $24200\text{x}13000 = 314600000$
Số tiền anh An lãi là: $314600000 - 100000000 - 150000000 = 64\,600\,000$ đồng

B. Câu hỏi – Trả lời tự luận

» Câu 16. Cho hàm số $y = \dfrac{2x}{x-1}$ có đồ thị (C). Tìm tất cả điểm M thuộc (C) sao cho tổng khoảng cách từ M đến các đường thẳng $\Delta_1 : 2x + y - 5 = 0$ và $\Delta_2 : x + 2y - 4 = 0$ là nhỏ nhất

Lời giải

Điều kiện: $x \neq 1$

Gọi $M\left(x; \dfrac{2x}{x-1}\right) \in (C)$. Tổng khoảng cách từ M đến Δ_1 và Δ_2 là:

$$P = \frac{\left|2x + \frac{2x}{x-1} - 5\right|}{\sqrt{5}} + \frac{\left|x + \frac{4x}{x-1} - 4\right|}{\sqrt{5}} = \left|\frac{2x^2 - 5x + 5}{\sqrt{5}(x-1)}\right| + \left|\frac{x^2 - x - 4}{\sqrt{5}(x-1)}\right| = \frac{3x^2 - 6x + 9}{\sqrt{5}|x-1|}$$

P nhỏ nhất khi $\dfrac{3x^2 - 6x + 9}{\sqrt{5}|(x-1)|}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 9}{|(x-1)|}$ nhỏ nhất

+ Với $x > 1$, $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 9}{x-1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3x^2 - 6x - 3}{(x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 + \sqrt{2} \\ x = 1 - \sqrt{2} (loai) \end{array}\right.$

Dựa vào BBT của $f(x)$ ta thấy P nhỏ nhất khi $M\left(1+\sqrt{2}; \dfrac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)$

+ Với $x < 1$: $f(x) = \dfrac{3x^2 - 6x + 9}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-3x^2 + 6x + 3}{(x-1)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{2} (loai) \end{array}\right.$

Dựa vào BBT của $f(x)$ ta có P nhỏ nhất khi $M\left(1-\sqrt{2}; \dfrac{2(1-\sqrt{2})}{-\sqrt{2}}\right)$

Vậy có 2 điểm thoả mãn bài toán $M\left(1+\sqrt{2}; \dfrac{2(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}}\right)$ và $M\left(1-\sqrt{2}; \dfrac{2(1-\sqrt{2})}{-\sqrt{2}}\right)$

» Câu 17. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ và có $A';B';C'$ nằm trong mặt phẳng Oxy. Biết rằng $A(0;2;3)$, điểm B thuộc trục Oz và điểm C có hoành độ dương. Tìm tọa độ điểm C' sao cho $\left|\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}+2\overrightarrow{C'C}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

Ta có $A';B';C'$ nằm trong mặt phẳng Oxy có phương trình $z=0$.

Do $(ABC)//(A'B'C')$ nên $(ABC): z=z_0$ mà $A(0;2;3)\in(ABC) \Rightarrow (ABC): z=3$

$\Rightarrow B(0;0;3), C(a;b;3)$ vì điểm C có hoành độ dương nên $a>0$

Mà tam giác ABC đều nên $BC=AC=AB=\sqrt{2}$

$$\begin{cases} a^2+(b-2)^2=4 \\ a^2+b^2=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow C(2;0;3)$$

Gọi $C'(x;y;0) \Rightarrow \overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}+2\overrightarrow{C'C}=(4-4x;2-4y;12)$

$\Rightarrow \left|\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}+2\overrightarrow{C'C}\right|=\sqrt{(4-4x)^2+(2-4y)^2+12^2}$ để $\left|\overrightarrow{C'A}+\overrightarrow{C'B}+2\overrightarrow{C'C}\right|$ đạt giá trị nhỏ nhất

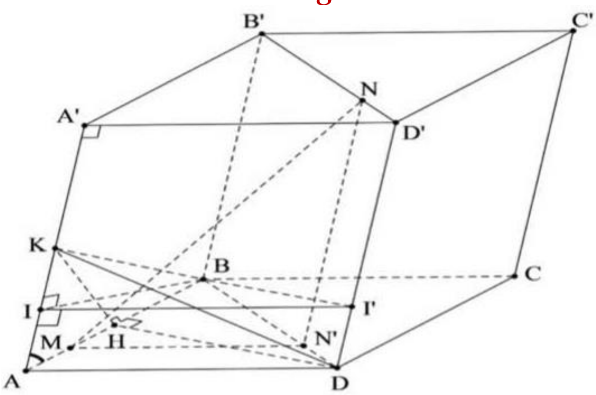
thì $\begin{cases} 4-4x=0 \\ 2-4y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow C'\left(1;\dfrac{1}{2};0\right)$.

» Câu 18. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A'AB$ là góc nhọn và thỏa mãn các điều kiện $\cos[A',AB,C]=\dfrac{1}{3}; A'AD=90°; BAD=60°$; $AA'=2m; AB=AD=1m$

(a) Tính cosin của góc nhị diện $[B',AA',D]$.

(b) Một chất điểm xuất phát từ A chuyển động đều trên đoạn thẳng AB với vận tốc $1m/s$, đồng thời một chất điểm khác xuất phát từ D' chuyển động thẳng đều trên đoạn $B'D'$ với vận tốc $2m/s$. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai chất điểm ngắn nhất?

Lời giải



(a) Tính cosin của góc nhị diện $[B',AA',D]$.

Gọi H là trung điểm của AB, ta có $DH\perp AB$, từ H kẻ đường thẳng $d\perp AB$ cắt AA' tại $K \Rightarrow [A',AB,C]=DHK$

Đặt $AK=x,(x>0) \Rightarrow DK^2=x^2+1$

$KH^2=AK^2-AH^2=x^2-\dfrac{1}{4}$

Áp dụng định lý $Cosin$ cho tam giác KHD ta có

$DK^2 = DH^2 + HK^2 - 2DH.HK.\cos DHK$

$\Leftrightarrow x^2 + 1 = \frac{3}{4} + x^2 - \frac{1}{4} + \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.\sqrt{x^2 - \frac{1}{4}} \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow HK = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow KAH = 60° \Rightarrow \Delta BKA$ đều.

Gọi I là trung điểm của $AK \Rightarrow BI \perp AA'$.

Kẻ $II'//AD\left(I' \in DD'\right)$. Ta có

$\left.\begin{matrix} BI \perp AA' \\ II' \perp AA' \end{matrix}\right\} \Rightarrow AA' \perp (BII') \Rightarrow \left[B', AA', D\right] = BII'$

Lại có $\Delta BIA = \Delta BI'D \Rightarrow BI = BI' \Rightarrow \cos BII' = \frac{BI^2 + II'^2 - BI'^2}{2BI.II'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

(b) *Một chất điểm xuất phát từ A chuyển động đều trên đoạn thẳng AB với vận tốc $1m/s$, đồng thời một chất điểm khác xuất phát từ D' chuyển động thẳng đều trên đoạn $B'D'$ với vận tốc $2m/s$. Hỏi sau bao lâu thì khoảng cách giữa hai chất điểm ngắn nhất?*

Gọi chất điểm 1 là M và chất điểm 2 là N.

Gọi N' là hình chiếu song song của N lên BD theo phương DD'

Ta có $MN + NN' \geq MN' \Leftrightarrow MN + 2 \geq MN'$

Do đó $MN_{\min} \Leftrightarrow MN'_{\min}$. Mà tam giác BDA đều nên $BM = 1 - t$; $BN' = 1 - 2t$

$\Rightarrow NT^2 = (1-2t)^2 + (1-t)^2 - 2(1-2t)(1-t)cos60° = 3t^2 - 3t + 1 = f(t)$

$f(t)_{\min} \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$.

Vậy sau thời gian $t = 0,5(s)$ thì khoảng cách giữa hai chất điểm ngắn nhất

» Câu 19. Từ một sợi dây thép thẳng dài $4m$, người ta cắt thành các đoạn thép nhỏ dài $2cm$ và $5cm$. Sau đó ghép thành những hộp hình chữ nhật có cạnh dài $2cm$ hoặc $5cm$. Mỗi hình hộp chữ nhật thành phẩm sẽ được bán làm đồ trang trí.

Có bốn loại hình hộp chữ nhật được tạo ra với thông tin được cho như bảng sau:

Loại hình hộp chữ nhật	Thể tích	Giá bán/1 hình hộp chữ nhật
1	$8cm^3$	3 000 đồng
2	$20cm^3$	5 000 đồng
3	$50cm^3$	6 000 đồng
4	$125cm^3$	9 000 đồng

Xét tất cả các phương án cắt sợi dây thép dài $4m$ thành các đoạn $2cm$ và $5cm$, sau đó ghép thành các hình hộp chữ nhật kể trên. Tính tổng số tiền lớn nhất thu được khi bán hết các hình hộp chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi số hộp chữ nhật loại 1, 2, 3, 4 lần lượt là a, b, c, d $(a,b,c,d \in \mathbb{N})$.

Ta có $8 = 2.2.2$; $20 = 2.2.5$; $50 = 2.5.5$; $125 = 5.5.5$.

$\Rightarrow 12.a.2 + 8.b.2 + 4.b.5 + 4.c.2 + 8.c.5 + 12.d.5 = 400 - r$

$\Leftrightarrow 24a + 36b + 48c + 60d = 400 - r \Leftrightarrow 6a + 9b + 12c + 15d = 100 - \frac{r}{4}$.

$\Rightarrow (6a+9b+12c+15d)_{\max} = 99$.

Tổng số tiền thu được là $T = 3000a + 5000b + 6000c + 9000d = 500(6a+10b+12c+18d)$ đồng.

$\Rightarrow T = 500(99+b+3d)$ đồng.

Suy ra muốn số tiền lớn nhất thì $b+3d$ lớn nhất.

- $d=6: 6a+9b+12c=9$ suy ra $b_{\max}=1 \Rightarrow T=59000$ đồng.
- $d=5: 6a+9b+12c=24$ suy ra $b_{\max}=0 \Rightarrow T=57000$ đồng.
- $d=4: 6a+9b+12c=39$ suy ra $b_{\max}=3 \Rightarrow T=57000$ đồng.
- $d=3: 6a+9b+12c=54$ suy ra $b_{\max}=6 \Rightarrow T=57000$ đồng.
- $d=2: 6a+9b+12c=69$ suy ra $b_{\max}=7 \Rightarrow T=56000$ đồng.
- $d=1: 6a+9b+12c=84$ suy ra $b_{\max}=8 \Rightarrow T=55000$ đồng.
- $d=0: 6a+9b+12c=99$ suy ra $b_{\max}=11 \Rightarrow T=55000$ đồng.

Vậy tổng số tiền lớn nhất khi bán hết các hộp chữ nhật đó là $T=59000$ đồng.

» Câu 20. Xét các số thực a, b với $b>0$ thỏa mãn hệ thức $e^{a+b}-e^a+2a=1+2\ln\left(e^a+2b+1\right)$. Chứng minh $a+2b-\ln b>\dfrac{1}{2b+1}+3\ln 2$.

Lời giải

$e^{a+b}-e^a+2a=1+2\ln\left(e^a+2b+1\right) \Leftrightarrow e^{a+b}+2(a+b)=e^a+2b+1+2\ln\left(e^a+2b+1\right)$

$\Leftrightarrow e^{a+b}+2(a+b)=e^{\ln\left(e^a+2b+1\right)}+2\ln\left(e^a+2b+1\right)$ (*).

Ta có hàm số $f(t)=e^t+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Suy ra $(*) \Leftrightarrow f(a+b)=f\left(\ln\left(e^a+2b+1\right)\right)$

$\Leftrightarrow a+b=\ln\left(e^a+2b+1\right) \Leftrightarrow e^{a+b}=e^a+2b+1 \Leftrightarrow e^a=\dfrac{2b+1}{e^b-1}$.

$\Rightarrow a=\ln\dfrac{2b+1}{e^b-1}$.

Xét biểu thức $T=a+2b-\ln b-\dfrac{1}{2b+1}-3\ln 2$.

$\Rightarrow T=\ln\dfrac{2b+1}{e^b-1}+2b-\ln b-\dfrac{1}{2b+1}-3\ln 2=\ln\left(\dfrac{2b+1}{2b}.\dfrac{e^b}{e^b-1}\right)+b-\dfrac{1}{2b+1}-2\ln 2$.

$\Rightarrow T=\ln\dfrac{2b+1}{2b}+\ln\dfrac{e^{2b}}{e^b-1}+1-\dfrac{1}{2b+1}-1-2\ln 2 \Rightarrow T=\dfrac{2b}{2b+1}-\ln\dfrac{2b}{2b+1}+\ln\dfrac{e^{2b}}{e^b-1}-1-2\ln 2$.

- Vì $b>0 \Rightarrow \dfrac{2b}{2b+1}=1-\dfrac{1}{2b+1}\in(0;1)$

Xét hàm số $g(x)=x-\ln x, x\in(0;1) \Rightarrow g'(x)=1-\dfrac{1}{x}<0, \forall x\in(0;1)$.

Suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $(0;1) \Rightarrow g(x)>g(1)=1, \forall x\in(0;1)$.

$\Rightarrow \dfrac{2b}{2b+1}-\ln\dfrac{2b}{2b+1}>1, \forall b>0$.

- $\dfrac{e^{2b}}{e^b-1}=e^b+1+\dfrac{1}{e^b-1}=e^b-1+\dfrac{1}{e^b-1}+2\ge 4$.

Suy ra $T > 1 + \ln 4 - 1 + 2\ln 2$ hay $T > 0$.

Vậy $a + 2b - \ln b > \dfrac{1}{2b+1} + 3\ln 2$.

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ HƯNG YÊN
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

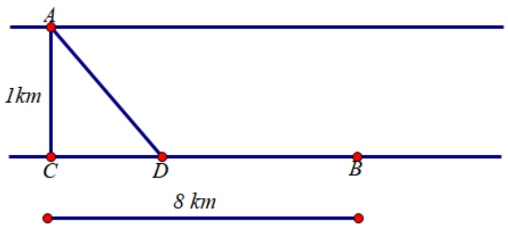
Họ và tên thí sinh:...
SBD:...

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

» Câu 1.

(1) Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ có hai điểm cực trị A,B. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox để độ dài đường gấp khúc AMB nhỏ nhất.

(2) Một khúc sông có 2 bờ song song với nhau, khoảng cách giữa hai bờ là $1km$. Một người cần đi từ điểm A bờ bên này đến điểm B bờ bên kia và cách 8 km về phía hạ lưu (như hình vẽ). Người đó phải chèo thuyền từ A với vận tốc 6 km/h đến điểm D bờ bên kia rồi chạy bộ đến B với vận tốc 8 km/h. Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc thuyền. Tìm vị trí điểm D để thời gian cần đi là ít nhất.



(3) Cho x,y là các số thực thay đổi thỏa mãn $x^2+y^2+xy=1$ và hàm số $f(t)=t^3+3t^2-9t+1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H=f\left(\dfrac{2x+y-2}{x-y+3}\right)$.

Lời giải

***(1)** Đồ thị hàm số $y=x^3-3x+3$ có hai điểm cực trị A,B. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox để độ dài đường gấp khúc AMB nhỏ nhất.*

Ta có: $y=x^3-3x+3 \Rightarrow y'=3x^2-3, y'=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

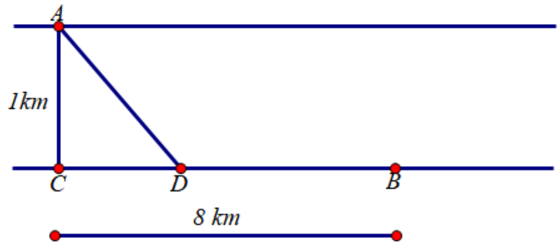
Khi đó đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị là: $A(1;1)$ và $B(-1;5)$.

Độ dài đường gấp khúc AMB bằng: $MA+MB+AB=MA+MB+2\sqrt{5}$.
Do đó độ dài đường gấp khúc AMB nhỏ nhất $\Leftrightarrow MA+MB$ nhỏ nhất.
Gọi $A'(1;-1)$ là điểm đối xứng với A qua trục Ox.

Ta có: $MA+MB=MA'+MB \ge A'B=2\sqrt{10}$.
Suy ra: độ dài đường gấp khúc AMB nhỏ nhất là: $2\sqrt{5}+2\sqrt{10}$.
Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow M=A'B\cap Ox$. Gọi $M(x;0)$, ta có: $\overrightarrow{AM}=(x-1;-1), \overrightarrow{AB}=(-2;4)$.

Ta có $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AB}$ cùng phương $\Leftrightarrow \dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{-1}{4} \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$. Vậy $M\left(\dfrac{3}{2};0\right)$.

***(2)** Một khúc sông có 2 bờ song song với nhau, khoảng cách giữa hai bờ là $1km$. Một người cần đi từ điểm A bờ bên này đến điểm B bờ bên kia và cách 8 km về phía hạ lưu (như hình vẽ). Người đó phải chèo thuyền* *từ A với vận tốc 6 km/h đến điểm D bờ bên kia rồi chạy bộ đến B với vận tốc 8 km/h. Giả sử rằng vận tốc của nước là không đáng kể so với vận tốc thuyền. Tìm vị trí điểm D để thời gian cần đi là ít nhất.*



: $CD = x\left(0 \le x \le 8\right)$. Ta có: $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{1+x^2}, BD = 8 - x$.

Thời gian chèo thuyền từ A đến D là: $t_1 = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{6}$.

Thời gian chạy bộ từ D đến B là: $t_2 = \dfrac{8-x}{8} = 1 - \dfrac{x}{8}$.

Do đó, thời gian đi từ A đến B là: $t = t_1 + t_2 = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{6} + 1 - \dfrac{x}{8}$.

Xét hàm số: $f\left(x\right) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{6} + 1 - \dfrac{x}{8}, x \in \left[0;8\right]$. Ta có: $f'\left(x\right) = \dfrac{x}{6\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{4x - 3\sqrt{1+x^2}}{24\sqrt{1+x^2}}$.

$f'\left(x\right) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x - 3\sqrt{1+x^2}}{24\sqrt{1+x^2}} = 0 \Leftrightarrow 4x = 3\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow 16x^2 = 9 + 9x^2 \Rightarrow x = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

Ta có: $f\left(0\right) \approx 1,67; f\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\right) \approx 1,11; f\left(8\right) \approx 1,34 \Rightarrow \min\limits_{\left[0;8\right]} f\left(x\right) = f\left(\dfrac{3\sqrt{7}}{7}\right) \approx 1,11$.

Vậy D cách C một khoảng $x = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$ thì thời gian cần đi là ít nhất.

(3) *Cho x, y là các số thực thay đổi thỏa mãn $x^2 + y^2 + xy = 1$ và hàm số $f\left(t\right) = t^3 + 3t^2 - 9t + 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $H = f\left(\dfrac{2x+y-2}{x-y+3}\right)$.*

Ta có: $x^2 + y^2 + xy = 1 \Leftrightarrow \left(x + \dfrac{y}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right)^2 = 1$.

Đặt: $t = \dfrac{2x+y-2}{x-y+3} \Leftrightarrow xt - yt + 3t = 2x + y - 2 \Leftrightarrow \left(2-t\right)\left(x + \dfrac{y}{2}\right) + \sqrt{3}t.\dfrac{\sqrt{3}}{2}y = 3t + 2$.

Ta có: $\left|3t+2\right| = \left|\left(2-t\right)\left(x+\dfrac{y}{2}\right) + \sqrt{3}t.\dfrac{\sqrt{3}}{2}y\right| \le \sqrt{\left[\left(2-t\right)^2 + 3t^2\right]\left[\left(x+\dfrac{y}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}y^2\right]}$

$\Leftrightarrow \left|3t+2\right| \le \sqrt{4t^2 - 4t + 4} \Leftrightarrow 5t^2 + 16t \le 0 \Leftrightarrow t \in \left[-\dfrac{16}{5};0\right]$.

Xét hàm số: $f\left(t\right) = t^3 + 3t^2 - 9t + 1, t \in \left[-\dfrac{16}{5};0\right]$.

Ta có: $f'\left(t\right) = 3t^2 + 6t - 9, f'\left(t\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1\left(l\right) \\ t = -3\left(t/m\right) \end{array}\right.$.

Ta có: $f\left(-\dfrac{16}{5}\right)=\dfrac{3469}{125}, f(-3)=28, f(0)=1.$

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức $H=f\left(\dfrac{2x+y-2}{x-y+3}\right)$ là $\dfrac{3469}{125}$.

» Câu 2. Cho ba số dương a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng. Chứng minh rằng ba số $\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^{-1},\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^{-1},\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

Lời giải

Vì a,b,c theo thứ tự lập thành cấp số cộng nên $a+c=2b$.

Để ba số $\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^{-1},\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^{-1},\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng thì

$\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^{-1}+\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}=2\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^{-1}$ hay $\dfrac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}+\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=\dfrac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$ $(*)$

$$(*)\Leftrightarrow\frac{\sqrt{a}+2\sqrt{b}+\sqrt{c}}{\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)}=\frac{2}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}$$

$\Leftrightarrow\sqrt{ac}+a+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ab}+c+\sqrt{ac}=2\sqrt{ab}+2b+2\sqrt{ac}+2\sqrt{bc}\Leftrightarrow a+c=2b$ (luôn đúng)

Vậy ba số $\left(\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^{-1},\left(\sqrt{c}+\sqrt{a}\right)^{-1},\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^{-1}$ theo thứ tự cũng lập thành cấp số cộng.

» Câu 3. Giải phương trình $4\sin x+4\sin x.\cos 2x+2\sin 2x-6\cos x-3=0$

Lời giải

$4\sin x+4\sin x.\cos 2x+2\sin 2x-6\cos x-3=0$

$\Leftrightarrow 4\sin x\left(1+\cos 2x\right)+4\sin x.\cos x-3\left(2\cos x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 4\sin x\left(1+2\cos^2 x-1+\cos x\right)-3\left(2\cos x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 4\sin x\cos x\left(2\cos x+1\right)-3\left(2\cos x+1\right)=0$

$$\Leftrightarrow\left(2\cos x+1\right)\left(2\sin 2x-3\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=-\dfrac{1}{2}\\ \sin 2x=\dfrac{3}{2}\ (\text{VN})\end{array}\right.\Leftrightarrow x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi,\ \left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

» Câu 4. Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x)=\cos^4 x$ biết $F(0)=0$.

Lời giải

Ta có $f(x)=\left(\cos^2 x\right)^2=\left(\dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(1+2\cos 2x+\cos^2 2x\right)$

$\Rightarrow f(x)=\dfrac{1}{8}\left(3+4\cos 2x+\cos 4x\right)$

$F(x)=\dfrac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\sin 4x\right)+C$

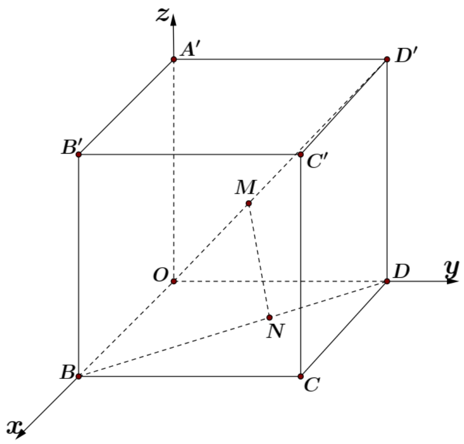
Mà $F(0)=0\Rightarrow C=0$

Vậy $F(x)=\dfrac{1}{8}\left(3x+2\sin 2x+\dfrac{1}{4}\sin 4x\right)$

» Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là hai điểm thuộc đoạn thẳng AD' và BD sao cho $AM=DN=x$, $0<x<a\sqrt{2}$. Tìm x theo a để độ dài MN ngắn nhất.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $A\equiv O(0;0;0)$, các trục Ox,Oy,Oz lần lượt trùng các cạnh AB,AD,AA'. Khi đó: $D'(0;a;a)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a;0)$.



Ta có: $AD'=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$

Vì điểm M là điểm thuộc đoạn thẳng AD' nên $\overrightarrow{AM}=\dfrac{x}{AD'}\cdot\overrightarrow{AD'}=\left(0;\dfrac{x}{\sqrt{2}};\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

Suy ra: $M\left(0;\dfrac{x}{\sqrt{2}};\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$

Vì điểm N là điểm thuộc đoạn thẳng BD nên $\overrightarrow{DN}=\dfrac{x}{BD}\cdot\overrightarrow{DB}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}};-\dfrac{x}{\sqrt{2}};0\right)$

Suy ra: $N\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}};a-\dfrac{x}{\sqrt{2}};0\right)$

Khi đó: $\overrightarrow{MN}=\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}};a-\sqrt{2}x;-\dfrac{x}{\sqrt{2}}\right)$. Suy ra: $MN^2=3x^2-2\sqrt{2}ax+a^2$

Xét hàm số $f(x)=3x^2-2\sqrt{2}ax+a^2$ là hàm số bậc hai có hệ số $a=3>0$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$ (thỏa $0<x<a\sqrt{2}$)

Vậy độ dài MN ngắn nhất khi $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}a$.

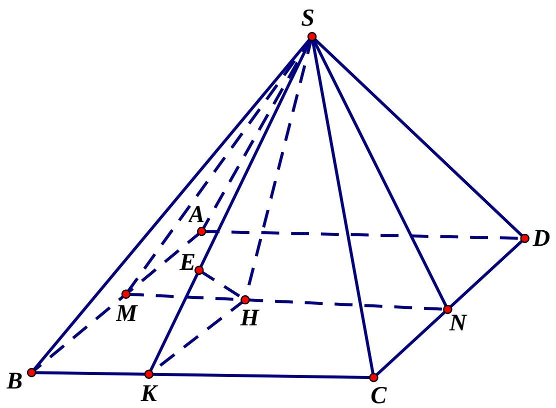
» Câu 6.

(1) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Các tam giác SAB,SCD cân tại S và có tổng diện tích hai tam giác này bằng $\dfrac{5a^2}{8}$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SCD). Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC).

(2) Một vật được đặt cân bằng trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)$, $A_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2};-\dfrac{1}{2};0\right)$. Biết rằng trọng lượng của vật là $500N$. Tìm toạ độ của lực tác dụng lên giá đỡ $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$.

Lời giải

(1) *Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Các tam giác SAB, SCD cân tại S và có tổng diện tích hai tam giác này bằng $\dfrac{5a^2}{8}$. Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (SCD). Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SBC).*



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Dễ thấy $CD \perp MN$, mà ΔSCD cân tại S nên $CD \perp SN$, suy ra $CD \perp (SMN)$.

$\Rightarrow (ABCD) \perp (SMN) \Rightarrow MN \perp SH, (H \in MN)$

Mà $(SAB) \cap (SCD) = d$, với $d \,//\, CD \,//\, AB$, mà $CD \perp (SMN) \Rightarrow d \perp (SMN)$.

Suy ra góc $((SAB);(SCD)) = MSN = 90°$ vì $(SAB) \perp (SCD) \Rightarrow SM^2 + SN^2 = MN^2 = a^2$ (2)

Hơn nữa $S_{SAB} + S_{SCD} = \dfrac{5a^2}{8} \Rightarrow \dfrac{1}{2}a(SM + SN) = \dfrac{5a^2}{8} \Rightarrow SM + SN = \dfrac{5a}{4}$ (1)

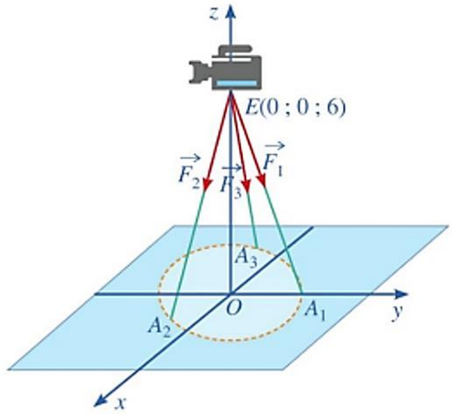
(1),(2) $\Rightarrow (SM+SN)^2 = \dfrac{25a^2}{16} \Rightarrow SM.SN = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{25a^2}{16} - a^2\right) = \dfrac{9a^2}{32}$

Khi đó $\dfrac{1}{SH^2} = \dfrac{1}{SM^2} + \dfrac{1}{SN^2} = \dfrac{SM^2 + SN^2}{(SM.SN)^2} = \dfrac{a^2}{\left(\dfrac{9a^2}{32}\right)^2} \Rightarrow SH^2 = \left(\dfrac{9a}{32}\right)^2 \Rightarrow SH = \dfrac{9a}{32}$.

Gọi K là hình chiếu của H trên BC và E hình chiếu của H trên SK thì $HE \perp (SBC)$.

$\dfrac{1}{HE^2} = \dfrac{1}{SH^2} + \dfrac{1}{HK^2} = \dfrac{1024}{81a^2} + \dfrac{4}{a^2} = \dfrac{1348}{81a^2} \Rightarrow HE = \dfrac{9a}{\sqrt{1348}}$. Vậy $d(H,(SBC)) = HE = \dfrac{9a}{\sqrt{1348}}$.

(2) *Một vật được đặt cân bằng trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $E(0;0;6)$ và các điểm tiếp xúc với mặt* *đất của ba chân lần lượt là* $A_1(0;1;0)$, $A_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$, $A_3\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$. *Biết rằng trọng lượng của vật là* $500\,N$. *Tìm toạ độ của lực tác dụng lên giá đỡ* $\vec{F_1}, \vec{F_2}, \vec{F_3}$.



Ta có: $\overrightarrow{EA_1}=(0;1;-6);\overrightarrow{EA_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right);\overrightarrow{EA_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};-6\right)$.

$\Rightarrow EA_1=EA_2=EA_3=\sqrt{37}\Rightarrow\left|\vec{F_1}\right|=\left|\vec{F_2}\right|=\left|\vec{F_3}\right|$ vì vật cân bằng và trọng lực của vật tác dụng đều lên 3 chân của giá đỡ.

Do đó: $\vec{F_1}=k\overrightarrow{EA_1}=(0;k;-6k)$; $\vec{F_2}=k\overrightarrow{EA_2}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k;-\frac{1}{2}k;-6k\right)$,

$\vec{F_3}=k\overrightarrow{EA_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}k;-\frac{1}{2}k;-6k\right)$

$\Rightarrow\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=(0;0;-18k)$.

Mà $\vec{F_1}+\vec{F_2}+\vec{F_3}=\vec{P}=(0;0;-500)\Rightarrow-18k=-500\Leftrightarrow k=\frac{250}{9}$.

Vậy $\vec{F_1}=\left(0;\frac{250}{9};\frac{-100}{3}\right);\vec{F_2}=\left(\frac{125\sqrt{3}}{9};-\frac{125}{9};\frac{-500}{3}\right);\vec{F_3}=\left(-\frac{125\sqrt{3}}{9};-\frac{125}{9};\frac{-100}{3}\right)$.

» Câu 7. Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 10 chữ số đôi một khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập A. Tính xác suất để số được chọn chia hết cho 11111.

Lời giải

Số phần tử không ggian mẫu: $n(\Omega)=9.9!=3265920$.

Gọi số cần tìm có dạng: $\overline{a_1a_2\ldots a_{10}}, a_1\neq 0$, $a_i, a_j(i\neq j)$ đôi một khác nhau và chia hết cho 11111

Ta có $\overline{a_1a_2\ldots a_{10}}=\overline{a_1a_2\,a_3a_4a_5}.10^5+\overline{a_6a_7\,a_8a_9\,a_{10}}$, với a_6 có thể bằng 0.

» Vì 10^5 chia cho 11111 dư 1

Nên suy ra $\overline{a_1a_2\,a_3a_4a_5}+\overline{a_6a_7\,a_8a_9\,a_{10}}$ chia hết cho 11111 **(1)**

» Vì $0+1+2+3+...+9=45$ chia hết cho 9

Nên suy ra $\overline{a_1a_2\,a_3a_4a_5}+\overline{a_6a_7\,a_8a_9\,a_{10}}$ chia hết cho 9 **(2)**

Từ **(1)** và **(2)** suy ra $\overline{a_1a_2\,a_3a_4a_5}.+\overline{a_6a_7\,a_8a_9\,a_{10}}$ chia hết cho 99999.

Vì $0<\overline{a_1a_2\,a_3a_4a_5}+\overline{a_6a_7\,a_8a_9\,a_{10}}<2.99999 \Rightarrow \overline{a_1a_2\,a_3a_4a_5}+\overline{a_6a_7\,a_8a_9\,a_{10}}=99999$.

Vậy suy ra: $a_1+a_6=a_2+a_7=a_3+a_8=a_4+a_9=a_5+a_{10}=9$.

Ta thấy: a_1 có 9 cách chọn, a_2 có 8 cách chọn, a_3 có 6 cách chọn, a_4 có 4 cách chọn, a_5 có 2 cách chọn. và có duy nhất 1 cách chọn $a_6, a_7, a_8, a_9, a_{10}$.

Vậy ta có $n(A)=9.8.6.4.2=3456$.

Vậy $P(A)=\dfrac{3456}{3265920}=\dfrac{1}{945}$.

» Câu 8. Giải phương trình sau: $2024^{2025.\log_3(5x-1)}+2024^{-\frac{8100}{x}}=2024^{2025.\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)}+2024^{\frac{8100}{x}}$

Lời giải

Điều kiện: $x>\dfrac{1}{5}$.

Phương trình: $2024^{2025.\log_3(5x-1)}+2024^{-\frac{8100}{x}}=2024^{2025.\log_{\frac{1}{3}}(5x-1)}+2024^{\frac{8100}{x}}$ (1)

$\Leftrightarrow 2024^{2025.\log_3(5x-1)}-2024^{-2025.\log_3(5x-1)}=2024^{\frac{8100}{x}}-2024^{-\frac{8100}{x}}$

Xét hàm số $f(t)=2024^t-2024^{-t}$

$\Rightarrow f'(t)=2024^t\ln 2024+2024^{-t}\ln 2024>0, \forall t$.

$\Rightarrow f(t)$ đồng biến $\forall t\in\mathbb{R}$.

Phương trình (1) có dạng: $f\left(2025.\log_3(5x-1)\right)=f\left(\dfrac{8100}{x}\right)$

$\Rightarrow 2025.\log_3(5x-1)=\dfrac{8100}{x} \Leftrightarrow \log_3(5x-1)=\dfrac{4}{x}$ (2)

Hàm số $y=\log_3(5x-1)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$, $y=\dfrac{4}{x}$ nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{5};+\infty\right)$.

Ta thấy $x=2$ là một nghiệm của phương trình (2), do đó phương trình (2) có nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ KIÊN GIANG
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:..

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

» Câu 1. Giải phương trình $\sin x+\sin 2x=\sin 3x$

Lời giải

$\sin x+\sin 2x=\sin 3x \Leftrightarrow \sin 2x=\sin 3x-\sin x$

$\Leftrightarrow \sin 2x=2\cos 2x\sin x \Leftrightarrow 2\sin x\left(\cos 2x-\cos x\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin x=0 \\ \cos 2x-\cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=m2\pi \\ x=\dfrac{n2\pi}{3} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{m2\pi}{3} \end{array}\right.\left(k;m\in\mathbb{Z}\right)$$

Vậy phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} x=k\pi \\ x=\dfrac{m2\pi}{3} \end{array}\right.\left(k;m\in\mathbb{Z}\right)$.

» Câu 2. Cho dãy số $\left(u_n\right)$ xác định bởi công thức $\begin{cases} u_1=2 \\ u_{n+1}=2u_n-n+1 \end{cases}$, $n\ge 1$. Xác định công thức số hạng tổng quát của dãy số $\left(u_n\right)$.

Lời giải

Ta thấy: $u_{n+1}=2u_n-n+1$

$u_{n+1}-\left(n+1\right)=2u_n-2n=2.\left(u_n-n\right)=2.2.\left[u_{n-1}-\left(n-1\right)\right]=2^2.\left[u_{n-1}-\left(n-1\right)\right]$

….

$u_{n+1}-\left(n+1\right)=2^{n-1}.\left(u_1-1\right)=2^{n-1}$

$u_{n+1}=2^{n-1}+n+1$

Vậy số hạng tổng quát của dãy số $\left(u_n\right)$ là $u_{n+1}=2^{n-1}+n+1,\ n\ge 1$

» Câu 3. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 \end{cases}$

Lời giải

$\begin{cases} x+y+\sqrt{x^2-y^2}=12 & (1) \\ y\sqrt{x^2-y^2}=12 & (2) \end{cases}$. Điều kiện: $x^2\ge y^2$.

Từ (2) suy ra $y>0$. Do đó $\begin{cases} x>0 \\ x>y \end{cases}$.

Thay (2) vào (1) ta được $x+y+\sqrt{x^2-y^2}=y\sqrt{x^2-y^2}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+y}\left(\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}\right)=\sqrt{x+y}.y.\sqrt{x-y}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}=y\sqrt{x-y}$

$\Leftrightarrow \dfrac{2y}{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}=y\sqrt{x-y}\Leftrightarrow 2=\sqrt{x^2-y^2}-x+y\Leftrightarrow \sqrt{x^2-y^2}=2+x-y\ (3)$

Thay (3) vào (1) ta được $x+y+2+x-y=12\Leftrightarrow x=5$

Thay $x=5$ vào (2) ta được $y^2(25-y^2)=144\Leftrightarrow y^4-25y^2+144=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y^2=16\\ y^2=9\end{array}\right.\Rightarrow \left[\begin{array}{l}y=4\\ y=3\end{array}\right.$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(5;4)$ và $(5;3)$.

» Câu 4. Cho dãy số (x_n) được xác định bởi $\begin{cases}x_1=6\\ x_{n+1}=\sqrt{x_n+20}\end{cases}$. Chứng minh dãy số (x_n) có giới hạn. Tìm giới hạn đó.

Lời giải

Trước hết, bằng quy nạp ta chứng minh $x_n>5$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$ (1). Thật vậy:

+ Ta có $x_1=6$ thoả mãn (1).

+ Giả sử $5<x_k\le 6$, ta có $x_{k+1}=\sqrt{x_k+20}>\sqrt{5+20}=5$.

Như vậy, $5<x_n\le 6$ với $\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Mặt khác, từ (1) ta có

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n+20}-x_n=\frac{(x_n+20)-x_n^2}{\sqrt{x_n+20}+x_n}=\frac{(x_n+4)(5-x_n)}{\sqrt{x_n+20}+x_n}<0\Rightarrow x_{n+1}<x_n,\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Suy ra (x_n) là dãy giảm.

Dãy (x_n) giảm và bị chặn dưới nên có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=L$, ta có $L\ge 5$ (2).

Từ giả thiết $x_{n+1}=\sqrt{x_n+20}\Rightarrow L=\sqrt{L+20}\Rightarrow L^2-L-20=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l}L=-4\\ L=5.\end{array}\right.$

Từ (2) ta có $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=L=5$.

Vậy dãy số (x_n) có giới hạn và $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=5$.

» Câu 5. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC cân tại $A(1;0)$ và hai điểm B,C, thuộc đường thẳng Δ: $x-y+1=0$. Xác định tọa độ các đỉnh B và C biết diện tích tam giác ABC bằng $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC.

Do ΔABC cân tại A nên đường thẳng AI vuông góc với BC nên có véc tơ pháp tuyến là $\vec{n}=(1;1)$.

Phương trình đường thẳng AI: $x+y-1=0$.

Tọa độ I là nghiệm hệ $\begin{cases}x+y-1=0\\ x-y+1=0\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\ y=1\end{cases}\Rightarrow I(0;1)$

Ta có $AI=\sqrt{2}$. Theo bài ra $S_{ABC}=4\sqrt{2}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}AI.BC=4\sqrt{2}\Leftrightarrow BC=8$

Gọi $B(b;b+1)$ I là trung điểm của BC nên $C(-b;-b+1)$.

Khi đó $BC = 8 \Leftrightarrow 4\sqrt{2}|b| = 8 \Leftrightarrow |b| = \sqrt{2} \Leftrightarrow b = \pm\sqrt{2}$.

Vậy $B\left(\sqrt{2};\sqrt{2}+1\right), C\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}+1\right)$ hoặc $C\left(\sqrt{2};\sqrt{2}+1\right), B\left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}+1\right)$.

» Câu 6. Từ bãi biển khu du lịch đảo Phú Quốc tỉnh Kiên Giang, ta có thể quan sát và ngắm nhìn thấy hai vị trí B, C (tham khảo hình ảnh). Bằng công cụ đo đạc như thước đo, giác kế, … hãy đề xuất một cách xác định khoảng cách giữa hai vị trí B và C.

(Hình ảnh từ https://vnexpress.net/cam-nang-du-lich-phu-quoc-4106697.html)

Lời giải

Chọn vị trí đặt máy đo khoảng cách, góc tại A.
Chọn phương ngang Ax.

Xác định góc $BAx = \alpha; CAx = \beta$.

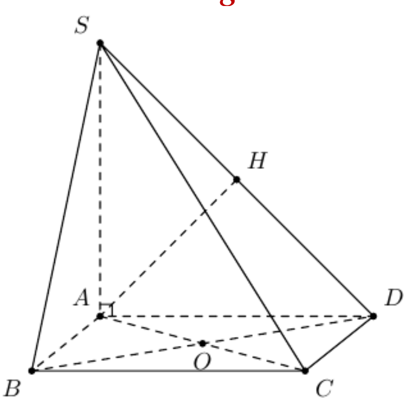
Xác định khoảng cách $AB = m; AC = n$.

Suy ra góc $BAC = \alpha - \beta = \gamma$.
Áp dụng định lí Cô-sin trong tam giác ABC có

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos BAC} = \sqrt{m^2 + n^2 - 2.m.n.\cos\gamma}$.

» Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O, $AC = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (SCD) biết rằng góc giữa SC và mặt đáy bằng $30°$

Lời giải



Trong (SAD) kẻ $AH \perp SD$ (1) với $H \in SD$.

Mặt khác $\left.\begin{matrix} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{matrix}\right\rangle \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SCD) \Rightarrow \mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$.

Ta có $\mathrm{d}(O,(SCD)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SCD)) = AH$;

Theo bài $(SC,(ABCD)) = (SC, AC) = SCA = 30°$.

Khi đó $SA = AC.\tan SCA = a\sqrt{2}.\tan 30° = \frac{a\sqrt{6}}{3}$; $AD = a$.

Suy ra $AH = \frac{SA.AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}.a}{\sqrt{\frac{6a^2}{9} + a^2}} = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Vậy $\mathrm{d}(O,(SCD)) = \frac{1}{2}\mathrm{d}(A,(SCD)) = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{10}}{10}$.

» Câu 8. Có bao nhiêu số tự nhiên có năm chữ số đôi một khác nhau sao cho hai chữ số 1 và 2 luôn đứng cạnh nhau

Lời giải

Gọi số tự nhiên có 5 chữ số đôi một khác nhau là: $\overline{abcde}$

Trường hợp 1: xếp số 1 và 2 nằm ở vị trí đầu $\overline{12cde}$ hoặc $\overline{21cde}$ có: $2.A_8^3$

Trường hợp 2: xếp số 1 và 2 nằm ở vị trí: $\overline{a12de}$ hoặc $\overline{a21de}$ có: $2.7.A_7^2$

Trường hợp 3: xếp số 1 và 2 nằm ở vị trí $\overline{ab12e}$ hoặc $\overline{ab21e}$ có: $2.7.A_7^2$

Trường hợp 4: xếp số 1 và 2 nằm ở vị trí đầu $\overline{abc12}$ hoặc $\overline{abc21}$ có: $2.7.A_7^2$

Vậy có tất cả: $3.2.7.A_7^2 + 2A_8^3 = 2436$ số

» Câu 9.

(a) Trong một buổi thi, giám thị đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi gồm 15 câu hỏi khác nhau, đựng trong 15 phong bì dán kín, có hình thức giống nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi, mỗi thí sinh chọn ngẫu nhiên 5 câu hỏi. An và Bình tham gia buổi thi đó. Biết rằng bộ 15 câu hỏi dành cho các thí sinh là như nhau. Tính xác suất để 5 câu hỏi An chọn và 5 câu hỏi Bình chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau.

(b) Một vận động viên thi môn bắn súng vào bia. Biết rằng xác suất để vận động viên đó bắn trúng vòng 10 là $0,2$; bắn trúng vòng 9 là $0,3$ và bắn trúng vòng 8 là $0,4$. Vận động viên thực hiện bắn hai lần độc lập. Biết rằng vận động viên đạt huy chương vàng nếu được 20 điểm, đạt huy chương bạc nếu được 19 điểm và đạt huy chương đồng nếu được 18 điểm. Tính xác suất để vận động viên đạt được huy chương đồng.

Lời giải

(a) Trong một buổi thi, giám thị đưa cho mỗi thí sinh một bộ câu hỏi gồm 15 câu hỏi khác nhau, đựng trong 15 phong bì dán kín, có hình thức giống nhau, mỗi phong bì đựng 1 câu hỏi, mỗi thí sinh chọn ngẫu nhiên 5 câu hỏi. An và Bình tham gia buổi thi đó. Biết rằng bộ 15 câu hỏi dành cho các thí sinh là như nhau. Tính xác suất để 5 câu hỏi An chọn và 5 câu hỏi Bình chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau.

Giả sử An chọn 5 câu hỏi từ 15 câu hỏi một cách tuỳ ý, số cách chọn của An là C_{15}^5. Sau khi An đã chọn, để 5 câu hỏi của Bình không trùng với An, Bình phải chọn 5 câu hỏi từ

10 câu hỏi còn lại, số cách chọn đó là C_{10}^5. Do đó xác suất để bộ câu hỏi của Bình không có câu nào trùng với An là: $P=\frac{C_{10}^5}{C_{15}^5}$.

Vậy xác suất để 5 câu hỏi An chọn và 5 câu hỏi Bình chọn có ít nhất 1 câu hỏi giống nhau là: $1-P=1-\frac{C_{10}^5}{C_{15}^5}=\frac{131}{143}$.

(b) *Một vận động viên thi môn bắn súng vào bia. Biết rằng xác suất để vận động viên đó bắn trúng vòng 10 là 0,2; bắn trúng vòng 9 là 0,3 và bắn trúng vòng 8 là 0,4. Vận động viên thực hiện bắn hai lần độc lập. Biết rằng vận động viên đạt huy chương vàng nếu được 20 điểm, đạt huy chương bạc nếu được 19 điểm và đạt huy chương đồng nếu được 18 điểm. Tính xác suất để vận động viên đạt được huy chương đồng.*

Gọi A,B,C tương ứng là các biến cố:
"Vận động viên bắn trúng vòng 10 ",
"Vận động viên bắn trúng vòng 9",
"Vận động viên bắn trúng vòng 8".
Gọi G là biến cố: "Vận động viên đạt được huy chương đồng";
U là biến cố: "Vận động viên hai lần bắn trúng vòng 9 ",
V là biến cố: "Vận động viên một lần bắn trúng vòng 10, một lần bắn trúng vòng 8 ".
Ta có: $G=U\cup V$.
$P(U)=P(B)\cdot P(B)=0,3\cdot 0,3=0,09$.
$P(V)=P(AC)+P(CA)=0,2\cdot 0,4+0,4\cdot 0,2=0,16$.
Do U và V xung khắc nên $P(G)=P(U)+P(V)=0,09+0,16=0,25$.

» Câu 10. Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình $7\left(x^2+y^2\right)=25(x+y)$

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow 7x^2-25x+7y^2-25y=0$ (*)

$\Delta_x=25^2-4.7.\left(7y^2-25y\right)=625-196y^2+700y$,

PT (*) có nghiệm khi $\Delta\ge 0\Leftrightarrow 625-196y^2+700y\ge 0\Leftrightarrow \frac{25-25\sqrt{2}}{14}\le y\le\frac{25+25\sqrt{2}}{14}$

Vì $y\in\mathbb{Z}$ nên $y\in\{4;3;2;1\}$.

Với $y=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\approx 4,1857\\ x\approx -0,614\end{array}\right.$ (loại vì không phải nghiệm nguyên dương).

Với $y=2\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x\approx 4,3019\\ x\approx -0,7305\end{array}\right.$ (loại vì không phải nghiệm nguyên dương).

Với $y=3\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=4(TM)\\ x=-\frac{3}{7}\,(KTM)\end{array}\right.$.

Với $y=4\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=3(TM)\\ x=\frac{4}{7}\,(KTM)\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 2 cặp nghiệm nguyên dương $(x;y)=\{(3;4);(4;3)\}$

-----------------------------Hết-----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ KHÁNH HÒA
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:..

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

» Câu 1.

(a) Giải phương trình $\cos x(\sin x+\cos x-\sin 3x)=\sin x\sin 3x$.

(b) Cho dãy số hữu hạn $u_n=\log_{2025}\left(\frac{2025n}{2025-n}\right)$, với $n\in\{1;2;3;...;2024\}$. Hãy tính tổng tất cả các số hạng của dãy số trên.

Lời giải

(a) Giải phương trình $\cos x(\sin x+\cos x-\sin 3x)=\sin x\sin 3x$.

$$\cos x(\sin x+\cos x-\sin 3x)=\sin x\sin 3x$$
$$\Leftrightarrow \cos x(\sin x+\cos x)-\sin 3x(\sin x+\cos x)=0$$
$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\cos x-\sin 3x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\sin x+\cos x=0 & (a)\\ \cos x-\sin 3x=0 & (b)\end{array}\right.$$
$$(a)\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0\Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi, k\in Z$$
$$(b)\Leftrightarrow \sin 3x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right., k\in Z$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{\pm\frac{\pi}{4}+k\pi;\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}\right\}$.

(b) Cho dãy số hữu hạn $u_n=\log_{2025}\left(\frac{2025n}{2025-n}\right)$, *với* $n\in\{1;2;3;...;2024\}$. *Hãy tính tổng tất cả các số hạng của dãy số trên.*

$$u_n=\log_{2025}\left(\frac{2025n}{2025-n}\right)$$
$$=\log_{2025}2025n-\log_{2025}(2025-n)=1+\log_{2025}n-\log_{2025}(2025-n)$$

Do đó

$$u_1=1+\log_{2025}1-\log_{2025}2024$$
$$u_2=1+\log_{2025}2-\log_{2025}2023$$
$$u_3=1+\log_{2025}3-\log_{2025}2022$$
....
$$u_{2023}=1+\log_{2025}2023-\log_{2025}2$$
$$u_{2024}=1+\log_{2025}2024-\log_{2025}1$$

Suy ra $u_1+u_2+u_3+...+u_{2024}=2024$.

» **Câu 2.**

(a) Cho hàm số $y=2(1+m)x^3-3(m+1)x^2+x+\frac{m}{2}-1$ (1), (với m là tham số). Chứng minh rằng đồ thị của hàm số (1) luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng với mọi m.

(b) Cho các số thực x, y thỏa mãn $e^{x-3y}+e^{1-xy}+x(1-y)+1=e^{xy-1}+\frac{1}{e^{x-3y}}+3y$, (với $x\ge 0$). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x-2y+3$.

Lời giải

***(a)** Cho hàm số $y=2(1+m)x^3-3(m+1)x^2+x+\frac{m}{2}-1$ (1), (với m là tham số). Chứng minh rằng đồ thị của hàm số (1) luôn đi qua 3 điểm cố định thẳng hàng với mọi m.*

Giả sử điểm $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định thuộc đồ thị hàm số đã cho.

Khi đó $y=2(1+m)x^3-3(m+1)x^2+x+\frac{m}{2}-1 \Leftrightarrow m\left(2x^3-3x^2+\frac{1}{2}\right)+2x^3-3x^2+x-1=y$.

Suy ra $\begin{cases}2x^3-3x^2+\frac{1}{2}=0\\ y=2x^3-3x^2+x-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\\ x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\\ x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\\ y=2x^3-3x^2+x-1\end{cases}$.

Với $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ suy ra $y=\frac{-2+\sqrt{3}}{2}$.

Với $x=\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ suy ra $y=\frac{-2-\sqrt{3}}{2}$.

Với $x=\frac{1}{2}$ suy ra $y=-1$.

Đặt $M_1\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2};\frac{-2+\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{-2-\sqrt{3}}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{1}{2};-1\right)$.

Ta có $\overrightarrow{M_1M_2}=\left(-\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$; $\overrightarrow{M_1M_3}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{M_1M_2}=2\overrightarrow{M_1M_3}$.
Do đó ba điểm M_1, M_2, M_3 thẳng hàng với mọi giá trị m.

***(b)** Cho các số thực x, y thỏa mãn $e^{x-3y}+e^{1-xy}+x(1-y)+1=e^{xy-1}+\frac{1}{e^{x-3y}}+3y$, (với $x\ge 0$). Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T=x-2y+3$.*

Ta có $e^{x-3y}+e^{1-xy}+x(1-y)+1=e^{xy-1}+\frac{1}{e^{x-3y}}+3y$.

Suy ra $e^{x-3y}-\frac{1}{e^{x-3y}}+x-3y=e^{xy-1}-\frac{1}{e^{xy-1}}+xy-1$.

Xét hàm số $f(t)=e^t-\dfrac{1}{e^t}+t$, với mọi $t\in\mathbb{R}$.

Ta có $f'(t)=e^t+e^{-t}+1>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$.

Suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $x-3y=xy-1\Leftrightarrow y=\dfrac{x+1}{x+3}$.

Thay vào biểu thức $T=x-2y+3\Rightarrow T=x-2\cdot\dfrac{x+1}{x+3}+3$.

Ta có $T'=1-\dfrac{4}{(x+3)^2}$; $T'=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x+3=2\\x+3=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-5\end{array}\right.$.

Bảng biến thiên

x	0		$+\infty$
T'		$+$	
T	$\dfrac{7}{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $\dfrac{7}{3}$ khi $x=0$; $y=\dfrac{1}{3}$.

» Câu 3.

(a) Giải bất phương trình $\sqrt{\log x+1}+\sqrt{\log x^2-3}+\sqrt{17-\log x^3}\ge 3\sqrt{5}$

(b) Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $\begin{cases}x^2+3y^2=27\\y^2+yz+z^2=16\\x^2+3xz+3z^2=75\end{cases}$. Tìm giá trị của biểu thức $P=2xy+3yz+zx$

Lời giải

(a) Giải bất phương trình $\sqrt{\log x+1}+\sqrt{\log x^2-3}+\sqrt{17-\log x^3}\ge 3\sqrt{5}$

Điều kiện: $\dfrac{3}{2}\le\log x\le\dfrac{17}{3}$

Đặt $t=\log x$. Bất phương trình đã cho có dạng: $\sqrt{t+1}+\sqrt{2t-3}+\sqrt{17-3t}\ge 3\sqrt{5}$

Đặt $f(t)=\sqrt{t+1}+\sqrt{2t-3-3}+\sqrt{17-3t}$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2t-3}}-\dfrac{3}{2\sqrt{17-3t}}$.

Khi đó $f'(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2t-3}}-\dfrac{3}{2\sqrt{17-3t}}=0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2t-3}}=\dfrac{3}{2\sqrt{17-3t}}\ (*)$

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{1}{2\sqrt{t+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{2t-3}}\ \Rightarrow g'(t)<0,\forall t\in\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{17}{3}\right]$.

$h(t)=\dfrac{3}{2\sqrt{17-3t}}\Rightarrow h'(t)>0,\forall t\in\left[\dfrac{3}{2};\dfrac{17}{3}\right]$

Từ đây suy ra phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất, lại có $g(4)=h(4)$ nên phương trình $(*)$ có nghiệm duy nhất $t=4$.

Ta có bảng biến thiên như sau:

t	$\frac{3}{2}$		4		$\frac{17}{3}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$f\left(\frac{3}{2}\right)$	$\nearrow$	$3\sqrt{5}$	$\searrow$	$f\left(\frac{17}{3}\right)$

Ta có: $f\left(t\right)\le 3\sqrt{5},\ \forall t\in\left[\frac{3}{2};\frac{17}{3}\right]$. Theo bài ra ta lại có: $f\left(t\right)\ge 3\sqrt{5}$.

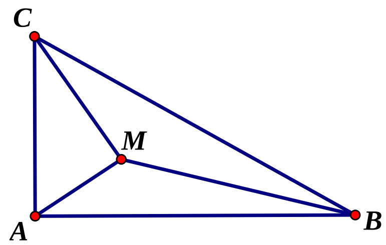
Nên $f\left(t\right)=3\sqrt{5}\Leftrightarrow t=4\Leftrightarrow \log x=4\Leftrightarrow x=10^4$.

(b) *Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn* $\begin{cases} x^2+3y^2=27 \\ y^2+yz+z^2=16 \\ x^2+3xz+3z^2=75 \end{cases}$. *Tìm giá trị của biểu thức*

$P=2xy+3yz+zx$

Ta có: $\begin{cases} x^2+3y^2=27 \\ y^2+yz+z^2=16 \\ x^2+3xz+3z^2=75 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+y^2=9 \\ y^2+yz+z^2=16 \\ \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+xz+z^2=25 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+y^2=9 \\ y^2+z^2-2yz\cos 120^0=16 \\ \left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+z^2-2.\frac{x}{\sqrt{3}}.z.\cos 150^0=25 \end{cases}$

Ta chuyển bài toán ra dạng hình học như sau: Cho tam giác ABC có $AB=4$, $AC=3$, $BC=5$. M là điểm thuộc miền trong tam giác ABC sao cho $MC=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $MA=y$, $MB=z$, $AMC=90^0$, $AMB=120^0$, $BMC=150^0$.



Khi đó, $S_{\Delta ABC}=S_{\Delta AMC}+S_{\Delta AMB}+S_{\Delta BMC}=\frac{1}{2}.3.4=6$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{x}{\sqrt{3}}.y+\frac{1}{2}.y.z.\sin 120^0+\frac{1}{2}.\frac{x}{\sqrt{3}}.z.\sin 150^0=6\Leftrightarrow \frac{x.y}{2\sqrt{3}}+\frac{y.z\sqrt{3}}{4}+\frac{xz}{4\sqrt{3}}=6$

$\Leftrightarrow 2xy+3yz+xz=24\sqrt{3}$.

Vậy $P=2xy+3yz+xz=24\sqrt{3}$.

» Câu 4.

(a) Trong một lớp có $\left(2n+3\right)$ học sinh, trong đó có 3 em A, B, C. Xếp ngẫu nhiên các học sinh của lớp học vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến $\left(2n+3\right)$, mỗi học sinh ngồi một

ghế. Biết xác suất để số ghế của 3 em $A,\ B,\ C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng là $\frac{17}{1155}$.
Tìm số học sinh của lớp học.

(b) Có 35 con thỏ (*bao gồm thỏ trắng và thỏ đen*) được nhốt vào hai chuồng. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng một con thỏ. Biết xác suất bắt được hai con thỏ đen là $\frac{247}{300}$. Tính xác suất để bắt được hai con thỏ trắng.

Lời giải

***(a)** Trong một lớp có $(2n+3)$ học sinh, trong đó có 3 em $A,\ B,\ C$. Xếp ngẫu nhiên các học sinh của lớp học vào dãy ghế được đánh số từ 1 đến $(2n+3)$, mỗi học sinh ngồi một ghế. Biết xác suất để số ghế của 3 em $A,\ B,\ C$ theo thứ tự lập thành cấp số cộng là $\frac{17}{1155}$. Tìm số học sinh của lớp học.*

Số cách các xếp học sinh vào ghế là $(2n+3)!$

Nhận xét rằng nếu ba số tự nhiên $a,\ b,\ c$ lập thành một cấp số cộng thì $a+c=2b$ nên $a+c$ là số chẵn. Như vậy a,c phải cùng chẵn hoặc cùng lẻ. Từ 1 đến $(2n+3)$ có $n+1$ số chẵn và $n+2$ số lẻ. Muốn có một cách xếp học sinh thỏa số ghế của $A,\ B,\ C$ theo thứ tự lập thành một cấp số cộng ta sẽ tiến hành như sau:

Bước 1: chọn hai ghế có số thứ tự cùng chẵn hoặc cùng lẻ rồi xếp A và C vào, sau đó xếp B vào ghế chính giữa. Bước này có $A_{n+1}^2+A_{n+2}^2$ cách.

Bước 2: xếp chỗ cho $2n$ học sinh còn lại. Bước này có $(2n)!$ cách. Như vậy số cách xếp thỏa yêu cầu này là $\left(A_{n+1}^2+A_{n+2}^2\right).(2n)!$

Ta có phương trình: $\frac{\left(A_{n+1}^2+A_{n+2}^2\right).(2n)!}{(2n+3)!}=\frac{17}{1155}\Leftrightarrow\frac{n(n+1)+(n+1)(n+2)}{(2n+1)(2n+2)(n+3)}=\frac{17}{1155}$

$\Leftrightarrow 68n^2-1019n-1104=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=16\\ n=-\frac{69}{68}\end{array}\right.$.

Vậy số học sinh của lớp là 35.

***(b)** Có 35 con thỏ (bao gồm thỏ trắng và thỏ đen) được nhốt vào hai chuồng. Bắt ngẫu nhiên mỗi chuồng một con thỏ. Biết xác suất bắt được hai con thỏ đen là $\frac{247}{300}$. Tính xác suất để bắt được hai con thỏ trắng.*

Gọi số thỏ ở chuồng thứ nhất là x khi đó số thỏ ở chuồng thứ hai là $35-x$

Số phần tử không gian mẫu là $C_x^1.C_{35-x}^1$

Gọi a là số thỏ đen ở chuồng thứ nhất; b là số thỏ đen ở chuồng thứ hai (a,b nguyên dương).

Không giảm tính tổng quát giả sử $a\ge b$.

Ta có xác suất bắt được hai con thỏ đen là

$\frac{C_a^1.C_b^1}{C_x^1.C_{35-x}^1}=\frac{247}{300}\Leftrightarrow\frac{ab}{x(35-x)}=\frac{247}{300}$

$$\Rightarrow \begin{cases} ab \vdots 247\left(=19.13=247.1\right) \\ x\left(35-x\right) \vdots 300 \\ a,b<35 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=19 \\ b=13 \\ x\left(35-x\right)=300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=19 \\ b=13 \\ x=20 \end{cases}$$

Vậy xác suất để bắt được hai con thỏ lông trắng là $\dfrac{1.2}{300}=\dfrac{1}{150}$.

» Câu 5.

(a) Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và M là trung điểm của $B'C'$. Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng AM và BC'.

(b) Cho tứ diện đều $ABCD$ và điểm E trên cạnh AD sao cho tan của góc giữa hai mặt phẳng (BCD) và (BCE) bằng $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$. Tính tỉ số thể tích của hai khối tứ diện $ABCE$ và $EBCD$.

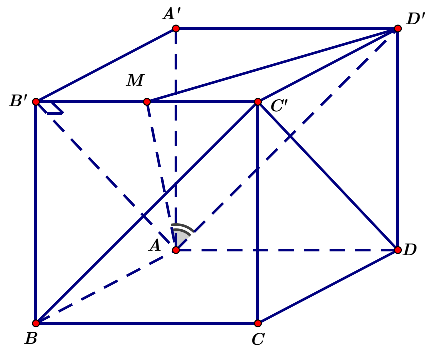
(c) Cho tứ diện $ABCD$ có $ACB=60^\circ$ và

$$ACD+BCD=CAD+BAD+BAC=CBD+ABD+ABC=180^\circ$$

Gọi S là diện tích toàn phần của hình tứ diện $ABCD$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của S, biết chu vi tam giác ABC bằng 3

Lời giải

***(a)** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ và M là trung điểm của $B'C'$. Tìm số đo góc giữa hai đường thẳng AM và BC'.*



Đặt $AB=1$. Vì $BC'//AD'$ nên

$(AM,BC')=(AM;AD')=MAD'$

Xét $\Delta AB'M$ vuông tại B: $AM^2=B'M^2+B'A^2=\dfrac{1}{4}+2=\dfrac{9}{4}$

Xét $\Delta C'D'M$ vuông tại C':

$D'M^2=C'M^2+C'D'^2=\dfrac{1}{4}+1=\dfrac{5}{4}$

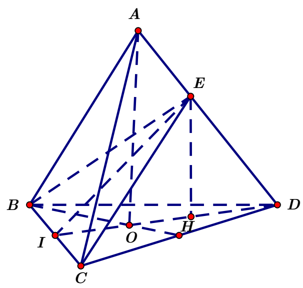
Hình vuông $AA'D'D$ cạnh bằng 1 nên $AD'^2=2$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác AMD' ta có:

$$\cos MAD'=\frac{AM^2+AD'^2-MD'^2}{2.AM.AD'}=\frac{\frac{9}{4}+2-\frac{5}{4}}{2.\frac{3}{2}.\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow MAD'=45^\circ$$

Vậy $(AM;BC')=45^\circ$

***(b)** Cho tứ diện đều $ABCD$ và điểm E trên cạnh AD sao cho tan của góc giữa hai mặt phẳng (BCD) và (BCE) bằng $\dfrac{5\sqrt{2}}{7}$. Tính tỉ số thể tích của hai khối tứ diện $ABCE$ và $EBCD$.*



Đặt $AB = 1$. Gọi O là tâm của ΔBCD, vì tứ diện $ABCD$ đều nên $AO \perp (BCD)$.

Gọi H là hình chiếu của E trên $(BCD) \Rightarrow H \in OD$

Gọi I là trung điểm cạnh BC. Khi đó, $((EBC);(DBC)) = EIH$.

Dễ thấy $\frac{V_{AEBC}}{V_{DEBC}} = \frac{AE}{DE}$. Đặt: $DE = x$, ta có: $EH // AO$ nên

$$\frac{DH}{DO} = \frac{ED}{AD} \Leftrightarrow \frac{DH}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{x}{1} \Leftrightarrow DH = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow HE = \sqrt{ED^2 - DE^2} = \sqrt{x^2 - \frac{x^2}{3}} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

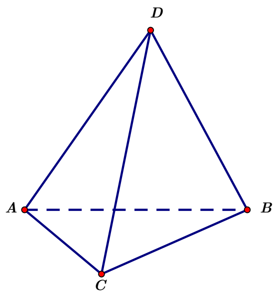
Xét ΔIHE vuông tại H: $\tan EIH = \frac{EH}{IH} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{7} = \frac{\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{2}}{7} - \frac{5\sqrt{2}x}{7\sqrt{3}} = \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{5\sqrt{3}}{12}$

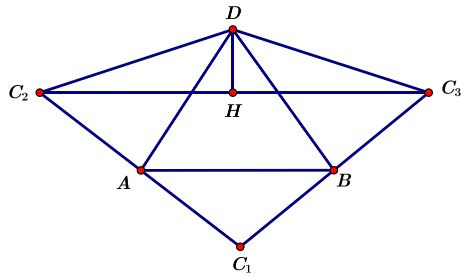
Khi đó: $AE = 1 - \frac{5\sqrt{3}}{12}$. Vậy $\frac{V_{AEBC}}{V_{DEBC}} = \frac{1 - \frac{5\sqrt{3}}{12}}{\frac{5\sqrt{3}}{12}} = \frac{4\sqrt{3}}{5} - 1$

(c) Cho tứ diện $ABCD$ có $ACB = 60°$ và

$$ACD + BCD = CAD + BAD + BAC = CBD + ABD + ABC = 180°$$

Gọi S là diện tích toàn phần của hình tứ diện $ABCD$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của S, biết chu vi tam giác ABC bằng 3





Cắt tứ diện $ABCD$ theo các cạnh DC, BC, AC và trải tứ diện $ABCD$ xuống (ABD) như sau: $\Delta ACB \to \Delta AC_1B$, $\Delta ACD \to \Delta AC_2B$, $\Delta DCB \to DC_3B$

$CAD + BAD + BAC = C_2AD + BAD + BAC_1 = 180°$ nên C_2, A, C_1 thẳng hàng

$C_3BD + ABD + ABC_1 = 180°$ nên C_1, B, C_3 thẳng hàng.

$\Rightarrow ACD + BCD = AC_2D + BC_3D = 180°$ suy ra tứ giác nội tiếp $C_1C_2DC_3$.

Suy ra $C_2DC_3 = 180° - AC_1B = 180° - ACB = 120°$

Diện tích toàn phần của tứ diện $ABCD$ bằng diện tích tứ giác $C_1C_2DC_3$

Đặt $CA = x$, $CB = y$, theo định lí cosin, suy ra $AB = \sqrt{x^2 + y^2 - xy}$.

Khi đó $\sqrt{x^2 + y^2 - xy} + x + y = 3$ $(*)$

$C_1C_2 = 2AB = 2\sqrt{x^2 + y^2 - xy}$.

Ta có: $S_{C_1C_2DC_3} = S_{C_1C_2C_3} + S_{DC_2C_3} = \frac{1}{2}.2x.2y.\sin 60° + \frac{1}{4}C_2C_3^2 \tan 30° = (x+y)^2.\frac{1}{\sqrt{3}}$

Mặt khác, ta có $\sqrt{x^2+y^2-xy} \geq \frac{1}{2}(x+y)$ nên từ $(*)$ suy ra $x+y \leq 2$.

Dấu $"="$ xảy ra khi $x=y$.

Từ đó ta suy ra $S_{C_1C_2DC_3} \leq \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Vậy giá trị lớn nhất của diện tích toàn phần là $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ QUẢNG BÌNH
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:...

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

» Câu 1.

(a) Giải phương trình $\dfrac{2(1+\tan x)\tan x}{1+\tan^2 x}=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

(b) Một đại lý kinh doanh xe gắn máy với giá mua vào mỗi chiếc xe là 36 triệu đồng và giá bán ra mỗi chiếc xe là 42 triệu đồng thì số lượng xe bán ra mỗi năm là 720 chiếc. Nếu mỗi chiếc xe khi bán giảm 1 triệu đồng thì số lượng xe bán ra trong năm tăng 180 chiếc. Hỏi đại lý phải bán mỗi chiếc xe bao nhiêu triệu đồng để thu được lợi nhuận cao nhất trong một năm.

Lời giải

***(a)** Giải phương trình* $\dfrac{2(1+\tan x)\tan x}{1+\tan^2 x}=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Điều kiện $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq \dfrac{\pi}{2}+k\pi$.

Ta có $\dfrac{2(1+\tan x)\tan x}{1+\tan^2 x}=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x\left(\dfrac{\sin x+\cos x}{\cos x}\right)\dfrac{\sin x}{\cos x}=\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow 2(\sin x+\cos x)\sin x=\sin x+\cos x$

$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(2\sin x-1)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ 2\sin x-1=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=0\\ \sin x=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm $x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi;\ x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi;\ x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$.

***(b)** Một đại lý kinh doanh xe gắn máy với giá mua vào mỗi chiếc xe là 36 triệu đồng và giá bán ra mỗi chiếc xe là 42 triệu đồng thì số lượng xe bán ra mỗi năm là 720 chiếc. Nếu mỗi chiếc xe khi bán giảm 1 triệu đồng thì số lượng xe bán ra trong năm tăng 180 chiếc. Hỏi đại lý phải bán mỗi chiếc xe bao nhiêu triệu đồng để thu được lợi nhuận cao nhất trong một năm.*

Gọi p (triệu đồng) là giá bán một chiếc xe gắn máy, x là số xe bán được trong một năm.

Theo giả thiết ta có tốc độ thay đổi của x tỷ lệ với tốc độ thay đổi của p nên hàm số $p=p(x)$ là hàm bậc nhất.

Với giá bán 1 chiếc xe $p_1 = 42$ triệu đồng ứng với $x_1 = 720$ chiếc và với giá bán 1 chiếc xe $p_2 = 41$ triệu đồng ứng với $x_2 = 720 + 180 = 900$. Do đó đường thẳng $p = ax + b$ đi qua hai điểm $A(720;42)$ và $B(900;41) \Rightarrow p = -\frac{1}{180}x + 46$.

Hàm doanh thu $R(x) = px = -\frac{1}{180}x^2 + 46x$

Hàm chi phí $C(x) = 36x$.

Hàm lợi nhuận $L(x) = R(x) - C(x) = -\frac{1}{180}x^2 + 46x - 36x = -\frac{1}{180}x^2 + 10x$

Ta có $L'(x) = -\frac{1}{90}x + 10; L'(x) = -\frac{1}{90}x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 900$ ta có bảng biến thiên

x	36		900		$+\infty$
L'		+	0	−	
L		↗		↘	

Từ bảng biến thiên ta có lợi nhuận lớn nhất khi bán được 900 chiếc xe. Khi đó giá bán một chiếc xe là $p = 41$ triệu đồng.

» Câu 2.

(a) Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - (m+2)x + 2m + 4}{x - 2}$ (m là tham số) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2.

(b) Cho hai số thực dương x, y thỏa mãn $\log_5\left(\frac{x+y-1}{2x+3y}\right) \le 4 - 3x - 2y$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 6x + 2y + \frac{4}{x} + \frac{9}{y} + 2024$.

Lời giải

***(a)** Tìm m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - (m+2)x + 2m + 4}{x - 2}$ (m là tham số) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng 2.*

$$y' = \frac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm só là: $A(0;-m-2), B(4;6-m)$

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là: $(\Delta): y = 2x - m - 2$

Khoảng cách từ điểm O đến $(\Delta): y = 2x - m - 2$ là: $\frac{|m+2|}{\sqrt{5}}$

Độ dài $AB = 4\sqrt{5}$

Diện tích tam giác OAB là: $S = \frac{1}{2}.4\sqrt{5}.\frac{|m+2|}{\sqrt{5}} = 2|m+2|$

Theo giả thiết: $S=2 \Leftrightarrow |m+2|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-1 \\ m=-3 \end{array}\right.$

(b) Cho hai số thực dương x,y *thỏa mãn* $\log_5\left(\dfrac{x+y-1}{2x+3y}\right)\le 4-3x-2y$. *Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức* $P=6x+2y+\dfrac{4}{x}+\dfrac{9}{y}+2024$.

$$\log_5\left(\frac{x+y-1}{2x+3y}\right)\le 4-3x-2y \Leftrightarrow \log_5\left[5(x+y-1)\right]+5(x+y-1)\le \log_5(2x+3y)+2x+3y$$

Xét hàm số: $f(t)=\log_5 t+t\ (t>0)$; $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 5}+1>0\ (\forall t>0)$

Nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$,

Vậy $\log_5\left[5(x+y-1)\right]+5(x+y-1)\le \log_5(2x+3y)+2x+3y \Rightarrow 5(x+y-1)\le 2x+3y$

$5(x+y-1)\le 2x+3y \Leftrightarrow 3x+2y-5\le 0 \Rightarrow 3x+2y\le 5$

$$P=6x+2y+\frac{4}{x}+\frac{9}{y}+2024=-(3x+2y)+9x+\frac{4}{x}+4y+\frac{9}{y}+2024\ge -5+12+12+2024=2043$$

Dấu bằng xảy ra khi: $\begin{cases} 3x+2y=5 \\ 9x=\dfrac{4}{x} \\ 4y=\dfrac{9}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ y=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

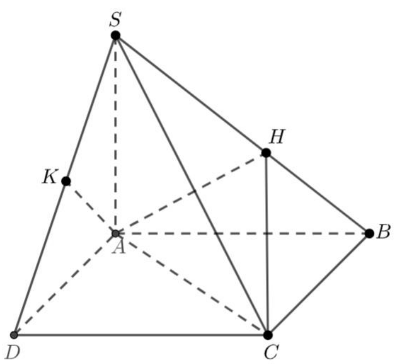
Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức là: 2043.

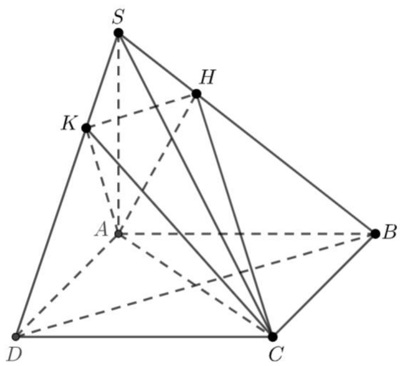
» Câu 3. Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, trên đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại A ta lấy điểm S không trùng với A. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD.

(a) Tính thể tích khối tứ diện $ABCH$ khi $SA=2a$.

(b) Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$ khi S di động trên d và không trùng với A.

Lời giải





(a) Tính thể tích khối tứ diện $ABCH$ *khi* $SA=2a$.

Trong tam giác SAB vuông tại A, có AH là đường cao, do đó

$\dfrac{HB}{SB}=\dfrac{HB.SB}{SB^2}=\dfrac{AB^2}{SA^2+AB^2}=\dfrac{a^2}{4a^2+a^2}=\dfrac{1}{5}$.

Thể tích khối tứ diện $ABCH$ bằng

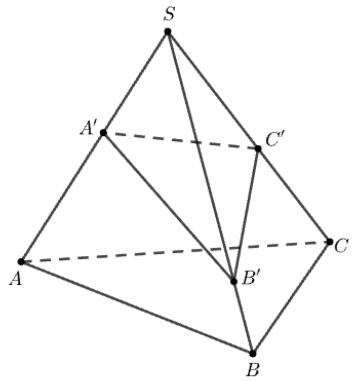
$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot \mathrm{d}\left(H;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{3}\cdot S_{\Delta ABC}\cdot\frac{HB}{SB}.\mathrm{d}\left(S;\left(ABC\right)\right)=\frac{1}{3}S_{\Delta ABC}\cdot\frac{1}{5}\cdot SA$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1}{5}\cdot 2a=\frac{1}{15}a^3.$$

(b) Tìm giá trị lớn nhất của thể tích khối tứ diện $ACHK$ khi S di động trên d và không trùng với A.

» Chứng minh bài toán phụ:

Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi A',B',C' lần lượt là các điểm trên các cạnh SA,SB,SC. Khi đó $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.



Thật vậy, ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{V_{A'.SB'C'}}{V_{A.SBC}}=\frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(A',\left(SB'C'\right)\right).S_{\Delta SB'C'}}{\frac{1}{3}\mathrm{d}\left(A,\left(SBC\right)\right).S_{\Delta SBC}}=\frac{\mathrm{d}\left(A',\left(SB'C'\right)\right)}{\mathrm{d}\left(A,\left(SBC\right)\right)}.\frac{S_{\Delta SB'C'}}{S_{\Delta SBC}}$

$$=\frac{\mathrm{d}\left(A',\left(SB'C'\right)\right)}{\mathrm{d}\left(A,\left(SBC\right)\right)}.\frac{\frac{1}{2}SB'.SC'.\sin B'SC'}{\frac{1}{2}SB.SC.\sin BSC}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}.$$

Đặt $SA=x,\ x>0$ và thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng $V=\frac{1}{3}.x.a^2$.

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AH nên $\frac{SH}{SB}=\frac{SH.SB}{SB^2}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{x^2}{x^2+a^2}$.

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AK nên $\frac{SK}{SD}=\frac{SK.SD}{SD^2}=\frac{SA^2}{SD^2}=\frac{x^2}{x^2+a^2}$.

Ta có

$$\frac{V_{S.AHK}}{V_{S.ABD}}=\frac{SA}{SA}.\frac{SH}{SB}.\frac{SK}{SD}=\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)^2.$$

$$\frac{V_{S.HCK}}{V_{S.BCD}}=\frac{SH}{SB}.\frac{SC}{SC}.\frac{SK}{SD}=\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)^2.$$

$$\frac{V_{S.AHC}}{V_{S.ABC}}=\frac{SH}{SB}=\frac{x^2}{x^2+a^2}\Rightarrow\frac{V_{ABCH}}{V_{S.ABC}}=1-\frac{V_{S.AHC}}{V_{S.ABC}}=\frac{a^2}{x^2+a^2};$$

$$\frac{V_{S.AKC}}{V_{S.ADC}}=\frac{SK}{SD}=\frac{x^2}{x^2+a^2}\Rightarrow\frac{V_{ADCK}}{V_{S.ADC}}=1-\frac{V_{S.AKC}}{V_{S.ADC}}=\frac{a^2}{x^2+a^2}.$$

Vì $V_{S.ABD}=V_{S.BCD}=V_{S.ABC}=V_{S.ADC}=\dfrac{1}{2}V$ nên

$$V_{ACHK}=V-V_{S.AHK}-V_{S.HCK}-V_{ABCH}-V_{ADCK}=V-2.\frac{V}{2}.\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)^2-2.\frac{V}{2}.\frac{a^2}{x^2+a^2}$$

$$=V.\left(1-\frac{x^4}{\left(x^2+a^2\right)^2}-\frac{a^2}{x^2+a^2}\right)=\frac{1}{3}xa^2.\frac{x^2a^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}=\frac{1}{3}.\frac{x^3a^4}{\left(x^2+a^2\right)^2}.$$

Đặt $t=\dfrac{x}{a}$, $t>0$, ta có $V=\dfrac{a^3}{3}.\dfrac{t^3}{\left(t^2+1\right)^2}$.

Xét hàm $f(t)=\dfrac{t^3}{\left(t^2+1\right)^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2\left(3-t^2\right)}{\left(t^2+1\right)^3}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=\sqrt{3}\in(0;+\infty)$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(t)=\dfrac{t^3}{\left(t^2+1\right)^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$:

t	0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{16}$	$\searrow$	

Từ bảng biến thiên ta có $\max f(t)=\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\Rightarrow \max V_{ACHK}=\dfrac{a^3}{3}.\dfrac{3\sqrt{3}}{16}=\dfrac{a^3\sqrt{3}}{16}$.

» Câu 4. Ba xạ thủ bắn vào bia, mỗi người bắn một lần với xác suất trúng bia tương ứng là x,y và $0,8$ (với $x>y$). Biết xác suất để ít nhất một trong ba cầu xạ thủ bắn trúng bia là $0,976$ và xác suất để cả ba xạ thủ bắn trúng bia là $0,336$. Tính xác xuất để có đúng hai xạ thủ bắn trúng bia.

Lời giải

Gọi A_i là biến cố: “Người thứ i bắn trúng bia” với $i=\overline{1;3}$.

Ta có các A_i độc lập với nhau và $P(A_1)=x$, $P(A_2)=y$ và $P(A_3)=0,8$.

Gọi A là biến cố: “Có ít nhất một trong ba xạ thủ bắn trúng bia”

B là biến cố: “Cả ba ba xạ thủ bắn trúng bia”

C là biến cố: “Có đúng hai xạ thủ bắn trúng bia”

Ta có $\overline{A}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\Rightarrow P\left(\overline{A}\right)=P\left(\overline{A_1}\right)\cdot P\left(\overline{A_2}\right)\cdot P\left(\overline{A_3}\right)=(1-0,8)(1-x)(1-y)$

$P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-0,2(1-x)(1-y)=0,976$

Suy ra $(1-x)(1-y)=\dfrac{3}{25}\Leftrightarrow xy-x-y=-\dfrac{22}{25}$ $\quad(1)$

Tương tự $B = A_1A_2A_3 \Rightarrow P(B) = P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) = 0,8xy = 0,336 \Rightarrow xy = \frac{21}{50}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases} xy = \frac{21}{50} \\ x + y = \frac{13}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,7 \\ y = 0,6 \end{cases}$.

Ta có $C = \overline{A_1}A_2A_3 \cup A_1\overline{A_2}A_3 \cup A_1A_2\overline{A_3}$

$\Rightarrow P(C) = P(\overline{A_1})\cdot P(A_2)\cdot P(A_3) + P(A_1)\cdot P(\overline{A_2})\cdot P(A_3) + P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(\overline{A_3})$

$\Rightarrow P(C) = (1-x)y\cdot 0,8 + x(1-y)\cdot 0,8 + xy\cdot 0,2 = 0,452$.

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ TIỀN GIANG
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

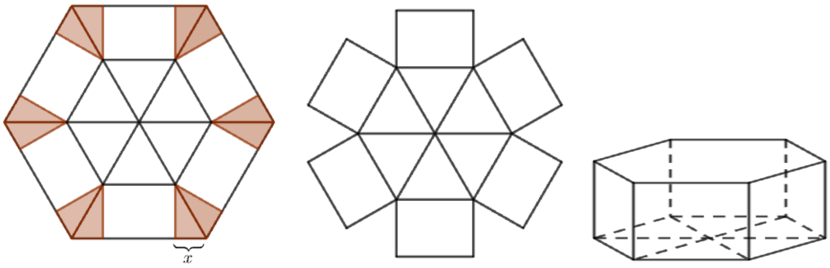
Họ và tên thí sinh:...
SBD:...

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1.

(1) Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+(2m+3)x+m^2+4m}{x+m}$ có hai điểm cực trị nằm về cùng một phía đối với trục hoành.

(2) Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 60 centimét. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp (xem hình vẽ minh hoạ). Gọi cạnh nhỏ của tam giác vuông bị cắt là x centimét, tìm x (centimét) để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất.



Lời giải

(1) *Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+(2m+3)x+m^2+4m}{x+m}$ có hai điểm cực trị nằm về cùng một phía đối với trục hoành.*

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{-m\}$.

Ta có $y'=\dfrac{(2x+2m+3)(x+m)-\left[x^2+(2m+3)x+m^2+4m\right]}{(x+m)^2}=\dfrac{x^2+2mx+m^2-m}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt, tức là $m^2-(m^2-m)=m>0$.

Khi đó, y' có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2 thoả mãn $\begin{cases}x_1+x_2=-2m\\x_1x_2=m^2-m\end{cases}$.

Hàm đã cho có dạng $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $y'=\dfrac{u'(x)v(x)-v'(x)u(x)}{[v(x)]^2}$.

$y'(x_1)=0\Rightarrow u'(x_1)v(x_1)-v'(x_1)u(x_1)=0\Rightarrow\dfrac{u(x_1)}{v(x_1)}=\dfrac{u'(x_1)}{v'(x_1)}$.

Tương tự, ta cũng có $\dfrac{u(x_2)}{v(x_2)}=\dfrac{u'(x_2)}{v'(x_2)}$.

Suy ra toạ độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho là $A(x_1;2x_1+2m+3)$, $B(x_2;2x_2+2m+3)$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số nằm về cùng một phía đối với trục hoành khi và chỉ khi

$(2x_1+2m+3)(2x_2+2m+3)>0 \Leftrightarrow 4x_1x_2+2(2m+3)(x_1+x_2)+(2m+3)^2>0$

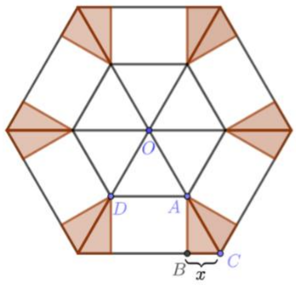
$\Leftrightarrow 4(m^2-m)-2(2m+3)2m+(2m+3)^2>0$

$\Leftrightarrow -4m+9>0 \Leftrightarrow m<\dfrac{9}{4}$.

Kết hợp điều kiện (*) ta có tập hợp các giá trị nguyên cần tìm của m là $\{1;2\}$.

(2) *Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 60 centimét. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp (xem hình vẽ minh hoạ). Gọi cạnh nhỏ của tam giác vuông bị cắt là x centimét, tìm x (centimét) để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất.*

Kí hiệu các điểm như hình vẽ:



Khối lăng trụ lục giác đều được tạo thành có đáy là lục giác đều, cạnh đáy $AD=60-2x$, chiều cao $AB=BC\tan 60^\circ = x\sqrt{3}$.

Thể tích khối lục giác đều trên bằng

$$V=\frac{6.(60-2x)^2\sqrt{3}}{4}.x\sqrt{3}=9.(30-x)(30-x).2x\le 9.\left(\frac{30-x+30-x+2x}{3}\right)^3=9.20^3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $30-x=2x \Leftrightarrow x=10$.

Vậy thể tích khối lục giác đều lớn nhất khi $x=10$ cm.

Bài 2.

(1) Giải phương trình: $2\cos\left[\dfrac{\pi}{6}\left(\sin x-13+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\sqrt{3}$.

(2) Giải phương trình: $(x+1)(4^x+2)=3.4^x$.

Lời giải

(1) *Giải phương trình:* $2\cos\left[\dfrac{\pi}{6}\left(\sin x-13+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\sqrt{3}$.

$$2\cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x-13+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\sqrt{3}\Leftrightarrow\cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x-13+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\cos\left[\frac{\pi}{6}\left(\sin x-13+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]=\cos\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}\frac{\pi}{6}\left(\sin x-13+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}+k2\pi & (a)\\ \frac{\pi}{6}\left(\sin x-13+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}+k2\pi & (b)\end{array}\right.$$

$$(a)\Leftrightarrow\frac{1}{6}\left(\sin x-13+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{1}{6}+2k\Leftrightarrow\sin x=14-\frac{\sqrt{2}}{2}+12k$$

Vì $-1\le\sin x\le1\Rightarrow-1\le14-\frac{\sqrt{2}}{2}+12k\le1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}-30}{24}\le k\le\frac{\sqrt{2}-26}{24}$

Mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\varnothing.$

$$(a)\Leftrightarrow\frac{1}{6}\left(\sin x-13+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{1}{6}+2k\Leftrightarrow\sin x=12-\frac{\sqrt{2}}{2}+12k$$

Vì $-1\le\sin x\le1\Rightarrow-1\le12-\frac{\sqrt{2}}{2}+12k\le1\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2}-26}{24}\le k\le\frac{\sqrt{2}-22}{24}$

Mà $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k=-1\Rightarrow\sin x=\frac{-\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{4}+l2\pi\\ x=\frac{5\pi}{4}+l2\pi\end{array}\right..$

(2) *Giải phương trình:* $(x+1)(4^x+2)=3.4^x.$

$(x+1)(4^x+2)=3.4^x\Leftrightarrow(x+1)(4^x+2)-3.4^x=0\Leftrightarrow(x-2)4^x+2\text{x}+2=0\,(1)$

Xét hàm số

$f(x)=(x-2)4^x+2\text{x}+2,x\in\mathbb{R}.$

Ta có: $f'(x)=4^x\left[1+(x-2)\ln4\right]+2;\ f''(x)=(4^x\ln4)\left[2+(x-2)\ln4\right]$

$f''(x)=0\Leftrightarrow2+(x-2)\ln4=0\Leftrightarrow x=2-2\log_4e.$

Do $f''(x)$ có nghiệm duy nhất nên $f'(x)$ có tối đa 2 nghiệm, do đó $f(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm.

Ta có $f(0)=0;f(1)=0;f\left(\frac{1}{2}\right)=0$. Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là

$S=\left\{0;\frac{1}{2};1\right\}.$

Bài 3. Trong một hộp có chứa 8 tấm thẻ giống nhau, trên mỗi thẻ chỉ ghi một số thuộc tập $X=\{1;2;3;4;6;7;8;9\}$. Rút ngẫu nhiên từ hộp trên 3 thẻ, tính xác suất của biến cố: "Rút được ba thẻ mà các số ghi trên thẻ đó là số đo ba cạnh của một tam giác tù".

Lời giải

$n(\Omega)=C_8^3=56$

Gọi ba cạnh của tam giác tù là a,b,c $\left(a>b>c;a,b,c\in\{1,2,3,4,6,7,8,9\}\right)$

Khi đó ta có: $\begin{cases} b+c>a \\ b^2+c^2<a^2 \end{cases}$ với $a,b,c\in\{1,2,3,4,6,7,8,9\}$

Trường hợp 1. $a=9$

+) Nếu $b=8$ thì $c\in\{2;3;4\}$

+) Nếu $b=7$ thì $c\in\{3;4\}$

+) Nếu $b=6$ thì $c\in\{4\}$

Trường hợp này có 6 cách chọn.

Trường hợp 2. $a=8$

+) Nếu $b=7$ thì $c\in\{2;3\}$

+) Nếu $b=6$ thì $c\in\{3;4\}$

Trường hợp này có 4 cách chọn.

Trường hợp 3. $a=7$

+) Nếu $b=6$ thì $c\in\{2;3\}$

Trường hợp này có 2 cách chọn.

Trường hợp 4. $a=6$

+) Nếu $b=4$ thì $c\in\{3\}$

Trường hợp này có 1 cách chọn.

Trường hợp 5. $a=4$

+) Nếu $b=3$ thì $c\in\{2\}$

Trường hợp này có 1 cách chọn.

Gọi A: "Rút được ba thẻ mà các số ghi trên thẻ đó là số đo ba cạnh của một tam giác tù".

Khi đó:

$n(A)=6+4+2+1+1=14$

$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{14}{56}=\dfrac{1}{4}=0,25$

Bài 4. Cho dãy (u_n) xác định bởi $u_1=\sqrt{2}$, $u_{n+1}=\dfrac{u_n+\sqrt{2}-1}{1-\left(\sqrt{2}-1\right)u_n}, \forall n\in\mathbb{N}$. Tính u_{2025}.

Lời giải

Ta có: $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$. Đặt $u_1=\sqrt{2}=\tan\alpha$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ta sẽ chứng minh $u_n=\tan\left(\alpha+(n-1)\dfrac{\pi}{8}\right), \forall n\in\mathbb{N}$.

Thật vậy, công thức trên đúng với $n=1$. Giả sử $u_k=\tan\left(\alpha+(k-1)\dfrac{\pi}{8}\right), k\in\mathbb{N}$

Khi đó: $u_{k+1}=\dfrac{u_k+\sqrt{2}-1}{1-\left(\sqrt{2}-1\right)u_k}=\dfrac{\tan\left(\alpha+(k-1)\dfrac{\pi}{8}\right)+\tan\dfrac{\pi}{8}}{1-\tan\left(\alpha+(k-1)\dfrac{\pi}{8}\right).\tan\dfrac{\pi}{8}}=\tan\left(\alpha+(k-1)\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi}{8}\right)$

Suy ra $u_{k+1} = \tan\left(\alpha + k\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Do đó theo phương pháp quy nạp toán học thì: $u_n = \tan\left(\alpha + (n-1)\dfrac{\pi}{8}\right), \forall n \in \mathbb{N}$

Vậy $u_{2025} = \tan(\alpha + 253\pi) = \tan\alpha = \sqrt{2}$.

✓ **Cách 2:**

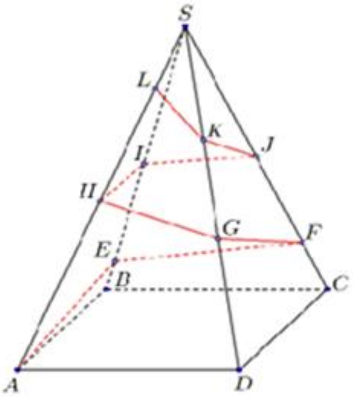
Đặt $v_n = \dfrac{1-(\sqrt{2}-1)u_n}{u_n+\sqrt{2}-1}$ khi đó ta có $v_{n+1} = \dfrac{1-(\sqrt{2}-1)u_{n+1}}{u_{n+1}+\sqrt{2}-1}$

Từ đó suy ra $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n}$

Lại có $v_1 = \dfrac{1-(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}-1}$ và $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n}$ suy ra $v_1 = v_{2025}$ do đó $u_1 = u_{2025} \Rightarrow u_{2025} = \sqrt{2}$.

Bài 5.

(1) Người ta cần trang trí cho một kim tự tháp là một hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng 15 mét, $ASB = 15^0$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp AEFGHIJKLS (xem hình vẽ minh hoạ), trong đó điểm L cố định và LS = 3 mét. Tính độ dài (mét) ngắn nhất của dây đèn led.



(2) Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, biết $AB = a\sqrt{2}$, $SB \perp (ABC)$. Gọi N là trung điểm của BC, Q là điểm thuộc đoạn thẳng SC sao cho $SC = 3CQ$ và α là góc giữa SC với (SAB) sao cho $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến (ANQ) theo a.

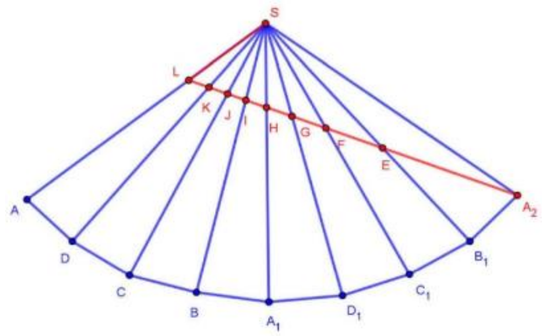
Lời giải

***(1)** Người ta cần trang trí cho một kim tự tháp là một hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên bằng 15 mét, $ASB = 15^0$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp AEFGHIJKLS (xem hình vẽ minh hoạ), trong đó điểm L cố định và LS = 3 mét. Tính độ dài (mét) ngắn nhất của dây đèn led.*

Trải các mặt (cạnh) của hình chóp ra mặt phẳng (2 lần), ta có:

+ SA_1, SA_2 là vị trí của SA ở lần trải thứ 1 và thứ 2.

+ SD_1, SC_1, SB_1 là vị trí của SD, SC, SB ở lần trải thứ 2.



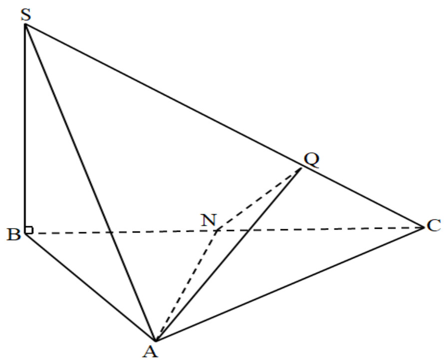
Do $ASB = 15^0$nên $ASD = 15^0$. Suy ra $ASA_2 = 120^0$. Khi đó, độ dài đường gấp khúc AEFGHIJKLS ngắn nhất khi $A, E, F, G, H, I, J, K, L$ thẳng hàng, tức là $A_2, E, F, G, H, I, J, K, L$ thẳng hàng. Ta có

$$LA_2^2 = SL^2 + SA_2{}^2 - 2.SL.SA_2.cos120^0 = 3^2 + 15^2 - 2.3.15.\left(-\frac{1}{2}\right) = 279.$$

Suy ra $LA_2 = 3\sqrt{31}$. Khi đó độ dài ngắn nhất của đèn led là $SA_2 = SL + LA_2 = 3 + 3\sqrt{31}(m)$.

Vậy độ dài ngắn nhất của dây đèn led là $3 + 3\sqrt{31}(m)$.

(2) *Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A, biết $AB = a\sqrt{2}$, $SB \perp (ABC)$. Gọi N là trung điểm của BC, Q là điểm thuộc đoạn thẳng SC sao cho $SC = 3CQ$ và α là góc giữa SC với (SAB) sao cho $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Tính khoảng cách từ điểm S đến (ANQ) theo a.*



Vì ΔABC vuông cân tại A và có $AB = a\sqrt{2}$ nên $BC = 2a$.

Có $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBA) \Rightarrow AC \perp SA \Rightarrow \left(SC, (SAB)\right) = ASC = \alpha$

$$SC = \frac{AC}{\sin\alpha} = a\sqrt{6} \Rightarrow QC = \frac{a\sqrt{6}}{3},\ SB = \sqrt{SC^2 - BC^2} = a\sqrt{2},$$

$$AQ = \sqrt{QC^2 + AC^2 - 2QC.AC.cosACQ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vì $AQ^2 + CQ^2 = \left(\frac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 = 2a^2 = AC^2 \Rightarrow AQ \perp SC$.(1)

Có $cosBCS = \frac{\sqrt{6}}{3} \Rightarrow NQ = \sqrt{QC^2 + NC^2 - 2.QC.NC.cosBCS} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Vì $NQ^2 + QC^2 = \frac{3a^2}{9} + \frac{6a^2}{9} = a^2 = NC^2 \Rightarrow NQ \perp SC$.(2)

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (ANQ) \Rightarrow d(S,(ANQ)) = SQ = \dfrac{2a\sqrt{6}}{3}$.

Bài 6.

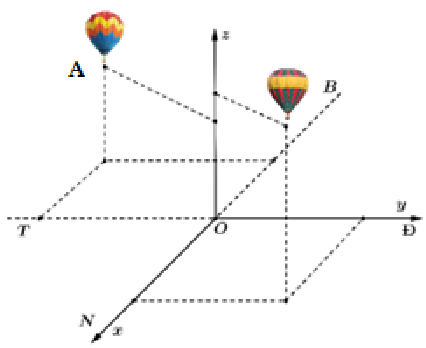
(1) Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 5km về phía Đông và 3km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất $0{,}8\text{km}$; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 2km về phía Bắc và 1km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0{,}5\text{km}$. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Giả sử chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc toạ độ O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng từ mặt đất lên trên, đơn vị đo trên các trục là kilômét. Tính tổng khoảng cách nhỏ nhất đó.

(2) Ông X muốn xây dựng một toà nhà thật hoàng tráng cho một công ty. Kiến trúc sư thiết kế toà nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng 40 mét. Ông X yêu cầu kiến trúc sư xây dựng thêm một cây cầu MN bắc qua toà nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C$, điểm cuối thuộc cạnh BC' của lăng trụ) để trang trí bằng những vật liệu quý hiếm với đơn giá 1,5 tỷ đồng trên 1 mét chiều dài. Để giảm chi phí cho cây cầu, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất. Tính số tiền xây cây cầu đó.

Lời giải

(1) *Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 5km về phía Đông và 3km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất $0{,}8\text{km}$; chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 2km về phía Bắc và 1km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0{,}5\text{km}$. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai khinh khí cầu là nhỏ nhất. Giả sử chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc toạ độ O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng từ mặt đất lên trên, đơn vị đo trên các trục là kilômét. Tính tổng khoảng cách nhỏ nhất đó.*

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (tham khảo hình vẽ), đơn vị đo lấy theo kilômét.



Chiếc khinh khí cầu thứ nhất và thứ hai ở vị trí A,B ta có $A(3;5;0,8),B(-2;-1;0,5)$.

Gọi C là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (Oxy), khi đó $C(-2;-1;-0,5)$.

Giả sử $I=AC\cap(Oxy)$. Gọi M là điểm bất kì thuộc mặt (Oxy). Yêu cầu của bài toán tương đương với tìm giá trị nhỏ nhất của $MA+MC$.

Do $MA+MB=MA+MC\geq AC$ nên giá trị $MA+MC$ nhỏ nhất khi và chỉ khi M thuộc đoạn thẳng AC, hay $M\equiv I$.

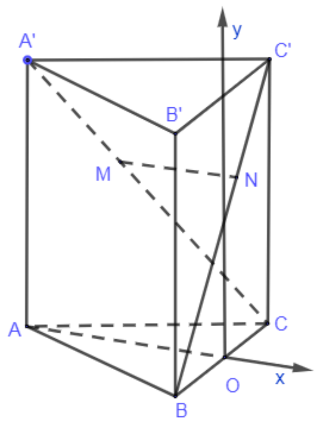
$\overrightarrow{AC}=(-5;-6;-1,3)$; $I\in(Oxy)\Rightarrow I(x;y;0)\Rightarrow\overrightarrow{AI}=(x-3;y-5;-0,8)$

$\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AI}$ cùng phương nên $\dfrac{x-3}{-5}=\dfrac{y-5}{-6}=\dfrac{-0,8}{-1,3}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{13}\\y=\dfrac{17}{13}\end{cases}$.

Vậy $MA+MC$ nhỏ nhất bằng $AC=\sqrt{62,69}$ mét khi $M\equiv I\left(\dfrac{-1}{13};\dfrac{17}{13};0\right)$.

(2) *Ông X muốn xây dựng một toà nhà thật hoàng tráng cho một công ty. Kiến trúc sư thiết kế toà nhà có hình dạng là một khối lăng trụ tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy và bằng 40 mét. Ông X yêu cầu kiến trúc sư xây dựng thêm một cây cầu MN bắc qua toà nhà (điểm đầu thuộc cạnh $A'C$, điểm cuối thuộc cạnh BC' của lăng trụ) để trang trí bằng những vật liệu quý hiếm với đơn giá 1,5 tỷ đồng trên 1 mét chiều dài. Để giảm chi phí cho cây cầu, kiến trúc sư phải chọn vị trí cây cầu sao cho MN ngắn nhất. Tính số tiền xây cây cầu đó.*

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ như hình vẽ.



Ta có $A\left(0;-20\sqrt{3};0\right);A'\left(0;-20\sqrt{3};40\right);B(20;0;0);$

$C(-20;0;0),C'(-20;0;40)$.

Vì điểm M thuộc đoạn $A'C$ và điểm N thuộc đoạn BC' nên

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{OC}+m\overrightarrow{CA'}\Rightarrow M\left(-20-20m;20\sqrt{3}m;-40m\right)$

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{OB}+n\overrightarrow{BC'}\Rightarrow N(20-40n;0;40n)$

Do đó $\overrightarrow{MN}=\left(40+20m-40n;20\sqrt{3}m;40m+40n\right)$

Khi đó $\overrightarrow{MN}^2=20^2\left[(2+m-n)^2+3m^2+(2n+2m)^2\right]$

Khi đó MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{12}{7}$ khi $m=\dfrac{2}{7};n=-\dfrac{5}{7}$.

Do đo vị trí của M và N là: $M\left(-\dfrac{40}{7};\dfrac{40\sqrt{3}}{7};-\dfrac{80}{7}\right)$ và $N\left(\dfrac{340}{7};0;-\dfrac{200}{7}\right)$.

Số tiền xây cây cầu là: $\dfrac{12}{7}.1,5\approx 2.6$ (tỉ đồng).

----------------------------Hết----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
TP.HỒ CHÍ MINH
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:..

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

Bài 1.

(1). Cho biết chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ Poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau mỗi chu kỳ 138 ngày thì khối lượng của mẫu vật Poloni 210 chỉ còn lại một nửa.

(a) Tính khối lượng còn lại của 64 gam Poloni 210 sau 552 ngày.

(b) Hỏi sau bao nhiêu ngày thì 64 gam Poloni 210 còn lại 1 gam?

(2). Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm thành các thanh ngang của một cái thang. Biết chiều dài của các thanh ngang để làm cái thang đó (tính từ bậc thang dưới cùng lên) lần lượt là $49\text{ cm},\ 47\text{ cm},\ 45\text{ cm},\ldots,\ 35\text{ cm},\ 33\text{ cm}$ (mỗi thanh ngang ngắn hơn 2 cm so với thanh ngang bậc dưới liền kề).

(a) Hỏi cái thang đó có bao nhiêu thanh ngang?

(b) Hỏi thanh gỗ cần mua có chiều dài ít nhất là bao nhiêu cm? Biết rằng mỗi lần cắt thanh gỗ thì phần gỗ bị cắt (thành mùn cưa) dài $0,5\text{ cm}$.

Lời giải

(1). Cho biết chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ Poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau mỗi chu kỳ 138 ngày thì khối lượng của mẫu vật Poloni 210 chỉ còn lại một nửa.

Kí hiệu u_n (gam) là khối lượng còn lại của 64 gam Poloni sau n chu kì bán rã.

Sau 1 chu kì bán rã thì $u_1=\dfrac{64}{2}=32$ (gam).

(a) Tính khối lượng còn lại của 64 gam Poloni 210 sau 552 ngày.

Ta có 552 ngày gồm $\dfrac{552}{138}=4$ chu kì bán rã. Như thế, theo đề bài, ta cần tính u_4.

Từ giả thiết của bài toán suy ra dãy số (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1=32$ và công bội $q=\dfrac{1}{2}$. Do đó $u_4=u_1.q^{n-1}=32.\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=4$ (gam).

(b) Hỏi sau bao nhiêu ngày thì 64 gam Poloni 210 còn lại 1 gam?

Để $u_n=1\Leftrightarrow 32.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=1\Leftrightarrow n=6.$

Vậy 64 gam Poloni 210 còn lại 1 gam sau $6.138=828$ ngày.

(2). Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm thành các thanh ngang của một cái thang. Biết chiều dài của các thanh ngang để làm cái thang đó (tính từ bậc thang dưới cùng lên) lần lượt là $49\text{ cm},\ 47\text{ cm},\ 45\text{ cm},\ldots,\ 35\text{ cm},\ 33\text{ cm}$ (mỗi thanh ngang ngắn hơn 2 cm so với thanh ngang bậc dưới liền kề).

Dãy số $49;47;45;\ldots;33$ là một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1=49$ và công sai $d=-2$.

(a) Hỏi cái thang đó có bao nhiêu thanh ngang?

Xét $u_n=33\Leftrightarrow u_1+(n-1)d=33\Leftrightarrow 49+(n-1).(-2)=33\Leftrightarrow n=9.$

Vậy cái thang đó có 9 thanh ngang.

b) Hỏi thanh gỗ cần mua có chiều dài ít nhất là bao nhiêu cm *? Biết rằng mỗi lần cắt thanh gỗ thì phần gỗ bị cắt (thành mùn cưa) dài* $0,5$ cm.

Tổng chiều dài các thanh ngang là $S_9 = \dfrac{n(u_1+u_9)}{2} = \dfrac{9(49+33)}{2} = 369$ cm.

Vì mỗi lần cắt mất $0,5$ cm nên có 8 lần cắt (9 thanh tạo ra từ 8 vết cắt)

Suy ra mất thêm $8.0,5 = 4$ cm.

Vậy thanh gỗ cần mua có chiều dài ít nhất là $369+4=373$ cm.

Bài 2. Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm tất cả điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt trục hoành và (C) lần lượt tại 2 điểm phân biệt $M, N\ (N \neq A)$ thỏa mãn A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Lời giải

Giả sử điểm $A(a;a^3-3a) \in (C)$; $y' = 3x^2 - 3$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại A:

$y = (3a^2-3)(x-a) + a^3 - 3a \Leftrightarrow y = (3a^2-3)x - 2a^3$

Tiếp tuyến cắt trục hoành tại điểm: $M\left(\dfrac{2a^3}{3a^2-3};0\right)$

Tiếp tuyến cắt đồ thị hàm số (C) tại N thỏa mãn hệ: $\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ y = (3a^2-3)x - 2a^3 \end{cases}$

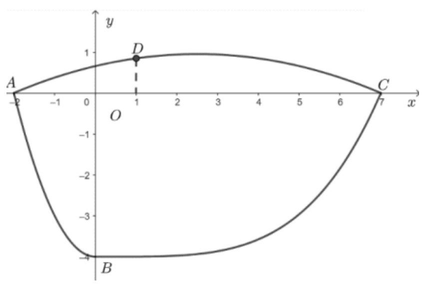
$\Rightarrow x^3 - 3x = (3a^2-3)x - 2a^3 \Leftrightarrow (x-a)^2(x+2a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a (l) \\ x = -2a \end{array}\right.$

Vậy điểm $N(-2a;-8a^3+6a)$

Do A là trung điểm MN nên: $\begin{cases} \dfrac{2a^3}{3a^2-3} - 2a = 2a \\ -8a^3 + 6a = 2a^3 - 6a \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0(l) \\ a = \dfrac{\sqrt{30}}{5} \\ a = -\dfrac{\sqrt{30}}{5} \end{array}\right.$

Vậy có 2 điểm A thỏa: $A_1\left(\dfrac{\sqrt{30}}{5};-\dfrac{9\sqrt{30}}{25}\right)$; $A_2\left(-\dfrac{\sqrt{30}}{5};\dfrac{9\sqrt{30}}{25}\right)$

Bài 3. Một công ty thiết kế tròng kính sao cho mỗi phần đường viền của tròng kính là một phần đồ thị của hàm số bậc hai hoặc một phần đồ thị của hàm số bậc bốn rồi ghép chúng lại với nhau như hình vẽ bên dưới (sau đó họ sẽ điều chỉnh theo tỷ lệ phù hợp). Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới, biết rằng $A(-2;0)$, $B(0;-4)$, $C(7;0)$, $D(1;k)$ với $k>0$.



Cho biết đường cong (C_1) đi qua các điểm A, D, C là một phần của đồ thị hàm số bậc hai nào đó, đường cong (C_2) ứng với đường viền nối A với

B là một phần của đồ thị hàm số $y=bx^2+c$ còn đường cong (C_3) ứng với đường viền nối B với C là một phần của đồ thị hàm số $y=mx^4+n$. Tính k biết diện tích tròng kính đó bằng 33,44 (đơn vị diện tích).

Lời giải

(C_2) đi qua A,B nên ta có $c=-4;b=1$. Vì vậy $(C_2):y=x^2-4$.

(C_3) đi qua B,C nên ta có $n=-4;m=\dfrac{4}{7^4}$. Vì vậy $(C_3):y=\dfrac{4}{7^4}x^4-4$.

(C_1) cắt Ox tại hai điểm A,C nên $(C_1):y=a(x+2)(x-7)$ hay $(C_1):y=a(x^2-5x-14)$.

Diện tích tròng kính đó bằng $S=\int\limits_{-2}^{7}a(x^2-5x-14)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{0}(-x^2+4)\mathrm{d}x+\int\limits_{0}^{7}\left(-\dfrac{4}{7^4}x^4+4\right)\mathrm{d}x$

Do diện tích tròng kính bằng 33,44 nên có $a=-\dfrac{856}{18225}$.

Vậy $(C_1):y=-\dfrac{856}{18225}(x^2-5x-14)$.

$D\in(C_1)\Leftrightarrow k=\dfrac{1712}{2025}$.

Bài 4. Luật Brenford chỉ ra rằng khi chọn ngẫu nhiên một số liệu trong một bảng số liệu gồm số lượng đủ lớn các số liệu (như độ dài các con sông trên thế giới, số lượng các loài côn trùng trên thế giới…) thì xác suất để chữ số đầu tiên bên trái của số liệu đó là k (với $1\le k\le 9$) bằng $p_k=\log_{10}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

(a) Chứng minh $p_1+p_2+...+p_9=1$ và tìm số k nhỏ nhất để $p_1+p_2+...+p_k\ge\dfrac{3}{4}$.

(b) Một người muốn làm giả số liệu nhầm tưởng rằng các chữ số đầu tiên bên trái của các số liệu trong một bảng số liệu bất kỳ sẽ tuân theo quy tắc ngẫu nhiên từ 1 đến 9 và cùng khả năng xảy ra. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một số liệu trong một bảng số liệu gồm số lượng đủ lớn các số liệu. Chứng minh rằng nếu tính xác suất cho biến cố "chữ số đầu tiên bên trái của số liệu đó lớn hơn 5" thì người muốn làm giả số liệu đó sẽ tính ra kết quả lớn hơn hai lần kết quả khi tính theo Luật Brenford.

Lời giải

(a) Chứng minh $p_1+p_2+...+p_9=1$ và tìm số k nhỏ nhất để $p_1+p_2+...+p_k\ge\dfrac{3}{4}$.

$$p_1+p_2+...+p_9=l\text{og}_{10}2+l\text{og}_{10}\frac{3}{2}+...+l\text{og}_{10}\frac{10}{9}$$

$$=l\text{og}_{10}\left(2\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times...\frac{10}{9}\right)=l\text{og}_{10}(10)=1.$$

$p_1=\log_{10}2\approx0,301;p_1+p_2\approx0,477;p_1+p_2+p_3\approx0,564;\ p_1+p_2+p_3+p_4\approx0,62$

$p_1=\log_{10}2\approx0,301;p_1+p_2\approx0,477;p_1+p_2+p_3\approx0,564;\ p_1+p_2+p_3+p_4\approx0,699$

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5=\log_{10}6\approx0,778>\dfrac{3}{4}=0,75.$

Vậy số k nhỏ nhất để $p_1+p_2+...+p_k\ge\dfrac{3}{4}$ là $k=5$.

(b) Một người muốn làm giả số liệu nhầm tưởng rằng các chữ số đầu tiên bên trái của các số liệu trong một bảng số liệu bất kỳ sẽ tuân theo quy tắc ngẫu nhiên từ 1 đến 9 và cùng khả năng xảy ra. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một số liệu trong một bảng số liệu gồm số lượng đủ lớn các số liệu. Chứng minh rằng nếu tính xác suất cho biến cố "chữ số đầu tiên bên trái của số liệu đó lớn hơn 5" thì người muốn làm giả số liệu đó sẽ tính ra kết quả lớn hơn hai lần kết quả khi tính theo Luật Brenford.

Nếu các chữ số đầu tiên phân bố đều, xác suất mỗi chữ số là $\frac{1}{9}$.

Xác suất chữ số đầu tiên lớn hơn 5 là $P(k>5)=\frac{4}{9}$. Theo Luật Brenford, xác suất này là

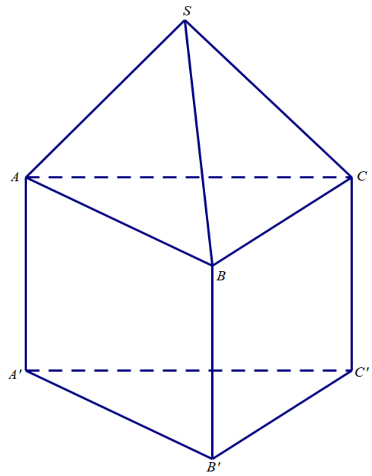
$$\sum_{k=6}^{9} p_k=\log_{10}\left(\frac{7}{6}\right)+\log_{10}\left(\frac{8}{7}\right)+\log_{10}\left(\frac{9}{8}\right)+\log_{10}\left(\frac{10}{9}\right)=\log_{10}\left(\frac{10}{6}\right)\approx 0,22184$$

$$P(k>5)=\frac{4}{9}>2.\log_{10}\left(\frac{10}{6}\right).$$

Bài 5. Một chi tiết máy được ghép từ hai khối kim loại có dạng khối chóp tam giác $S.ABC$ và khối lăng trụ đứng $A'B'C'.ABC$ như hình vẽ bên. Biết rằng độ dài cạnh bên của hình lăng trụ đứng $A'B'C'.ABC$ là a và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC. Đồng thời chi tiết máy này có đặc điểm như sau:

▫ Các khoảng cách từ S đến các điểm A,B,C bằng nhau và cùng bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ S đến A'

▫ Các góc giữa các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCA)$ với mặt phẳng (ABC) nhau bằng α và $\tan\alpha=\frac{1}{2}\tan\beta$ trong đó β là góc giữa SA' với mặt phẳng $(A'B'C')$. Tính theo a thể tích của chi tiết máy này.



Lời giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của S lên (ABC).

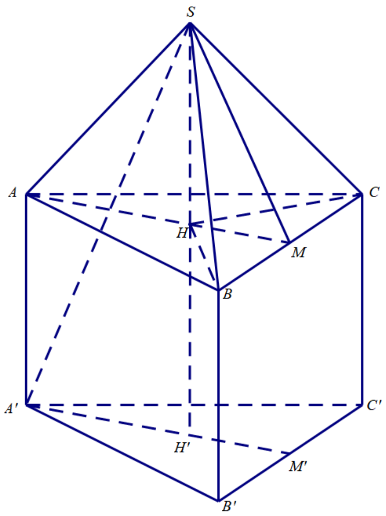
Vì $SA=SB=SC$ nên $HA=HB=HC\Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Mặt khác góc giữa các mặt phẳng $(SAB),(SBC),(SCA)$ với (ABC) bằng nhau nên hình chóp $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều.

Gọi M là trung điểm của BC, ta có: $((SBC),(ABC))=SMH$.

Gọi H' là hình chiếu vuông góc điểm S lên $(A'B'C')$.

Khi đó: $(SA',(A'B'C'))=SA'H'$.



Ta có: $\begin{cases} SMH=\alpha \\ S'A'H'=\beta \end{cases}\Rightarrow \tan SMH=\frac{1}{2}\tan S'A'H'.$

Ta có:

$$\begin{cases} \tan SMH = \dfrac{SH}{HM} \\ \tan SA'H' = \dfrac{SH'}{A'H'} \end{cases} \Rightarrow \frac{SH}{HM} = \frac{1}{2}.\frac{SH'}{A'H'} = \frac{1}{2}.\frac{SH'}{2HM} \Rightarrow SH = \frac{1}{4}SH' \Rightarrow SH = \frac{1}{3}HH' = \frac{a}{3}.$$

Đặt $AB = x \Rightarrow AH = A'H' = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $\begin{cases} SA = \sqrt{SH^2 + AH^2} = \sqrt{\dfrac{a^2}{9} + \dfrac{3x^2}{9}} = \dfrac{\sqrt{a^2+3x^2}}{3} \\ SA' = \sqrt{SH'^2 + A'H'^2} = \sqrt{\dfrac{16a^2}{9} + \dfrac{3x^2}{9}} = \dfrac{\sqrt{16a^2+3x^2}}{3} \end{cases}$.

Theo giả thiết:

$SA' = 2SA \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{16a^2+3x^2}}{3} = 2.\dfrac{\sqrt{a^2+3x^2}}{3} \Leftrightarrow \sqrt{16a^2+3x^2} = 2.\sqrt{a^2+3x^2} \Leftrightarrow x = \dfrac{2a\sqrt{3}}{3}$.

Ta có: $\begin{cases} V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{3}.\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{27} \\ V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a.\left(\dfrac{2a\sqrt{3}}{3}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3} \end{cases}$.

Vậy thể tích của chi tiết máy là: Đặt $V = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{27} + \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{10a^3\sqrt{3}}{27}$.

Bài 6. Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(0;7;2), B(0;0;10,8)$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN, biết M là điểm thuộc mặt phẳng Oxy thoả mãn $AM = 2,5$ và N thuộc mặt phẳng $(\alpha): z - 12 = 0$ thoả mãn $BN = 1,3$.

Lời giải

Gọi I là hình chiếu của A trên mặt phẳng Oxy.

Suy ra $I(0;7;0)$

Ta có $IM = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = 1,5$.

Suy ra M thuộc đường tròn $(I;1,5)$ trong Oxy

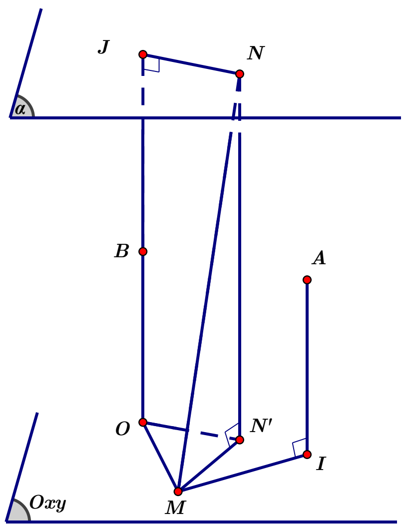
Gọi J là hình chiếu của B trên mặt phẳng (α).

Suy ra $J(0;0;12)$

Ta có $JN = \sqrt{1,3^2 - 1,2^2} = 0,5$.

Suy ra N thuộc đường tròn $(J;0,5)$ trong $(\alpha): z - 12 = 0$.

Gọi N' là hình chiếu của N trên Oxy.



Ta có $MN = \sqrt{N'M^2 + N'N^2} = \sqrt{N'M^2 + 144}$.

» Ta có $ON' + N'M + MI \geq OM + MI \geq OI$ nên $N'M \geq 7 - 0,5 - 1,5 = 5$ (do $ON' = JN = 0,5$).

Suy ra $MN \geq \sqrt{5^2 + 144} = 13$.

Khi $M(0;5,5;0), N(0;0,5;12)$ thì $MN = 13$. Vậy $\min MN = 13$.

» Ta có $N'O + OI + IM \geq N'I + IM \geq N'M$ nên $N'M \leq 7 + 0,5 + 1,5 = 9$.

Suy ra $MN \le \sqrt{9^2 + 144} = 15$.

Khi $M(0;-8,5;0), N(0;-0,5;12)$ thì $MN = 15$. Vậy $\max MN = 15$.

-----------------------------Hết-----------------------------

TOAN TU TAM

ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2024 – 2025
SỞ THÁI NGUYÊN
Thời gian làm bài 90 phút, không kể thời gian phát đề

Họ và tên thí sinh:...
SBD:...

PHẦN LỜI GIẢI CHI TIẾT

» Câu 1.

(a) Một rạp chiếu phim có 12 hàng ghế. Hàng ghế thứ nhất có 15 ghế, số ghế ở mỗi hàng sau đều nhiều hơn số ghế ngay trước đó 5 ghế. Tính tổng số ghế của rạp chiếu phim.

(b) Giải phương trình: $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

(a) *Một rạp chiếu phim có 12 hàng ghế. Hàng ghế thứ nhất có 15 ghế, số ghế ở mỗi hàng sau đều nhiều hơn số ghế ngay trước đó 5 ghế. Tính tổng số ghế của rạp chiếu phim.*

Theo đề bài thì 12 hàng ghế trong rạp chiếu phim lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1=15$ và công sai $d=5$.

Tổng số ghế của rạp chiếu phim là tổng của 12 hàng ghế.

Vậy $S_{12}=\dfrac{12}{2}\cdot\left[2\cdot 15+(12-1)\cdot 5\right]=510$ (ghế)

(b) *Giải phương trình:* $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ta có:

$$VT=\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sin 3x.\cos\frac{\pi}{4}-\cos 3x.\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 3x-\cos 3x)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(3\sin x-4\sin^3 x-4\cos^3 x+3\cos x\right)$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[3(\sin x+\cos x)-4\left(\sin^3 x+\cos^3 x\right)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)\left[3-4\left(\sin^2 x-\sin x.\cos x+\cos^2 x\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)(2\sin 2x-1)$$

$$VP=\sin 2x.\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{4}+\cos x.\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin 2x.(\sin x+\cos x)$$

Do đó $\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin 2x.\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x+\cos x)(2\sin 2x-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}.\sin 2x.(\sin x+\cos x).$$

$$\Leftrightarrow (\sin x+\cos x)(\sin 2x-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x+\cos x=0\\ \sin 2x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x=-1\\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi\\ x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có các nghiệm là: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2}\left(k\in\mathbb{Z}\right)$.

» Câu 2.

(a) Một cơ sở sản xuất nước tinh khiết có năng lực sản xuất không quá 300 mét khối một ngày. Tính toán chi phí sản xuất trong một ngày bao gồm: chi phí nhân công là 5 triệu đồng, chi phí nguyên vật liệu là $0,15$ triệu đồng cho mỗi mét khối được sản xuất và chi phí bảo dưỡng máy móc tỉ lệ thuận với bình phương số mét khối nước được sản xuất trong ngày hôm đó. Nếu trong một ngày cơ sở đó sản xuất được 100 mét khối thì chi phí sản xuất là 25 triệu đồng. Biết rằng giá bán mỗi mét khối nước tinh khiết của cơ sở đó là 350 nghìn đồng. Hỏi mỗi ngày cơ sở đó nên sản xuất bao nhiêu mét khối nước để đạt được lợi nhuận cao nhất?

(b) Xét tính liên tục của hàm số: $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2-x+4 & \text{khi } x\ge 2\\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{khi} -7<x<2\end{cases}$ trên khoảng $\left(-7;+\infty\right)$

Lời giải

***(a)** Một cơ sở sản xuất nước tinh khiết có năng lực sản xuất không quá 300 mét khối một ngày. Tính toán chi phí sản xuất trong một ngày bao gồm: chi phí nhân công là 5 triệu đồng, chi phí nguyên vật liệu là $0,15$ triệu đồng cho mỗi mét khối được sản xuất và chi phí bảo dưỡng máy móc tỉ lệ thuận với bình phương số mét khối nước được sản xuất trong ngày hôm đó. Nếu trong một ngày cơ sở đó sản xuất được 100 mét khối thì chi phí sản xuất là 25 triệu đồng. Biết rằng giá bán mỗi mét khối nước tinh khiết của cơ sở đó là 350 nghìn đồng. Hỏi mỗi ngày cơ sở đó nên sản xuất bao nhiêu mét khối nước để đạt được lợi nhuận cao nhất?*

Gọi số mét khối nước cơ sở đó sản xuất được là $x\left(m^3\right)$ với $0<x\le 300$

Theo giả thiết ta có tổng chi phí để sản xuất $x\left(m^3\right)$ là $C\left(x\right)=5+0,15x+kx^2$.

Vì trong một ngày cơ sở đó sản xuất được 100 mét khối thì chi phí sản xuất là 25 triệu đồng.

Suy ra $25=5+0,15.100+k.100^2\Leftrightarrow k=\dfrac{1}{2000}$.

Vậy hàm chi phí là $C\left(x\right)=\dfrac{1}{2000}x^2+0,15x+5$.

Doanh thu mà cơ sở đó sản xuất được $x\left(m^3\right)$ là $0,35x$

Lợi luận là $L\left(x\right)=0,35.x-\left(\dfrac{1}{2000}x^2+0,15x+5\right)=-\dfrac{1}{2000}x^2+0,2x-5$

$L'\left(x\right)=-\dfrac{x}{1000}+0,2$

$L'\left(x\right)=0\Leftrightarrow -\dfrac{x}{1000}+0,2=0\Leftrightarrow x=200$

x	0		200		300
$L'(x)$		+	0	−	
$L(x)$	−5	↗	15	↘	10

Từ bảng biến thiên, mỗi ngày cơ sở nên sản xuất 200 mét khối nước để đạt lợi nhuận cao nhất.

(b) *Xét tính liên tục của hàm số:* $f(x)=\begin{cases} x^2-x+4 & \text{khi } x\ge 2 \\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{khi } -7<x<2 \end{cases}$ *trên khoảng* $(-7;+\infty)$.

* Với $x\ge 2 \Rightarrow f(x)=x^2-x+4$ suy ra hàm số liên tục trên $(2;+\infty)$.

* Với $-7<x<2 \Rightarrow f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}$ suy ra hàm số liên tục trên $(-7;2)$.

* Ta có $x=2\in TXD$

+) $f(2)=6$ (1).

+) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\left(x^2-x+4\right)=6$ (2).

+) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}{\left(\sqrt{x+7}-3\right)\left(\sqrt{x+7}+3\right)}=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\sqrt{x+7}+3\right)=6$ (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra hàm số $f(x)$ liên tục tại $x=2$.

Vậy hàm số $f(x)$ liên tục trên khoảng $(-7;+\infty)$.

» Câu 3. Cho tập hợp $X=\{5,6,7,8,9\}$. Thái và Nguyên mỗi bạn viết ngẫu nhiên lên bảng một số tự nhiên có ba chữ số, đôi một khác nhau, được lập từ tập X. Tính xác suất để trong hai số tự nhiên đó có đúng một số tự nhiên có chữ số 9.

Lời giải

Số các số tự nhiên có ba chữ số khác nhau có thể lập từ tập X là: $C_5^3.3!=60$.

Số các số có chứa chữ số 9 là: $1.C_4^2.3!=36$.

Số các số không chứa chữ số 9 là: $60-36=24$.

Thái và Nguyên viết hai số tự nhiên lên bảng có $60\times 60=3600$ cách.

Hai số tự nhiên được viết có đúng một số tự nhiên có chữ số 9, xảy ra hai trường hợp:

Trường hợp 1. Thái viết một số có chữ số 9 và Nguyên viết một số không có chữ số 9 có: $36\times 24=864$ cách.

Trường hợp 2. Thái viết một số không có chữ số 9 và Nguyên viết một số có chữ số 9 có: $24\times 36=864$ cách.

Vậy xác suất để hai số tự nhiên có đúng một số chứa chữ số 9 là: $\dfrac{864+864}{3600}=0.48$.

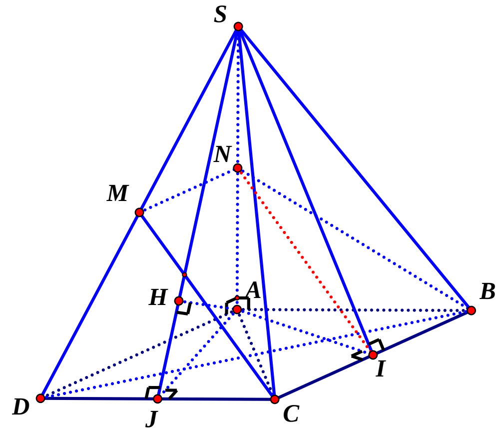
» Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $AC=a$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA=2a$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD, N là giao điểm của đường thẳng SA và mặt phẳng (BCM).

(a) Tính diện tích của tứ giác $BCMN$.

(b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.

Lời giải

(a) Tính diện tích của tứ giác $BCMN$.



Dễ thấy $(MBC)\cap(SAD)=MN$.

Do (MBC), (SAD) lần lượt chứa hai đường thẳng song song AD, BC nên $MN \parallel AD \parallel BC$.

Vậy tứ giác $BCMN$ là hình thang.

Từ A kẻ $AI \perp BC$ (I là trung điểm BC, Do tam giác ABC đều),

mà $SA\perp(ABCD)$ suy ra $SI\perp BC \Rightarrow BC\perp(SAI)$.

Suy ra $BC\perp NI$, hay NI là đường cao của hình thang $BCMN$.

Có $BC=a; MN=\dfrac{1}{2}AD=\dfrac{a}{2};\ NI=\sqrt{AN^2+AI^2}=\sqrt{a^2+\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\dfrac{a\sqrt{7}}{2}$.

Suy ra $S_{BCMN}=\dfrac{1}{2}(MN+BC).NI=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{2}+a\right).\dfrac{a\sqrt{7}}{2}=\dfrac{3\sqrt{7}a^2}{8}$.

***(b)** Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CM.*

Có (SCD) đi qua CM và song song AB nên $d(AB,CM)=d(AB,(SCD))=d(A,(SCD))$.

Từ A kẻ $AJ\perp CD$ (J là trung điểm CD do tam giác ACD đều), kẻ $AH\perp SJ$.

Suy ra $AH\perp(SCD)$. Vậy $d(A,(SCD))=AH$.

Có $\dfrac{1}{AH^2}=\dfrac{1}{AJ^2}+\dfrac{1}{AS^2}=\dfrac{4}{3a^2}+\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{19}{12a^2}$. Suy ra $d(AB,CM)=\dfrac{a\sqrt{12}}{\sqrt{19}}=\dfrac{2a\sqrt{57}}{19}$.

» Câu 5. Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases}u_1=1\\ u_{n+1}>0,\forall n\in\mathbb{N}^*\\ u_{n+1}^2=2u_n+3,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\end{cases}$. Chứng minh rằng dãy số (u_n) là dãy số tăng và bị chặn.

Lời giải

Ta có $u_{n+1}^2=2u_n+3\Rightarrow u_{n+1}=\sqrt{2u_n+3},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta chứng minh bằng quy nạp $u_n<u_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $u_1=1;u_2=\sqrt{5}$ nên $u_1<u_2$.

Giả sử $u_k<u_{k+1}$ với $k\in\mathbb{N}^*$, khi đó

$$u_{k+2}-u_{k+1}=\sqrt{2u_{k+1}+3}-\sqrt{2u_k+3}=\frac{2(u_{k+1}-u_k)}{\sqrt{2u_{k+1}+3}+\sqrt{2u_k+3}}>0\Rightarrow u_{k+1}<u_{k+2}.$$

Vậy $u_n<u_{n+1},\forall n\in\mathbb{N}^*$. Suy ra dãy số (u_n) là dãy số tăng.

Ta chứng minh bằng quy nạp $u_n<3,\forall n\in\mathbb{N}^*$.

Ta có $u_1=1\Rightarrow u_1<3$. Giả sử $u_k<3,k\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó $u_{k+1}=\sqrt{2u_k+3}<\sqrt{2.3+3}=3\Rightarrow u_{k+1}<3$.

Vậy $u_n<3,\forall n\in\mathbb{N}^*$ hay (u_n) là dãy số bị chặn trên.

Mặt khác (u_n) là dãy số tăng nên (u_n) là dãy số bị chặn.

» **Câu 6.** Cho $P(x)$ là đa thức bậc năm có các hệ số tự nhiên sao cho với $x \neq 0$ thì $P(x)=x^6P\left(\frac{1}{x}\right)$ và $P(2)=10P(1)$. Tìm giá trị lớn nhất của $\frac{P(3)}{P(2)}$.

Lời giải

$P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$

$\Rightarrow x^6P\left(\frac{1}{x}\right)=fx^6+ex^5+dx^4+cx^3+bx^2+ax$

Do $P(x)=x^6P\left(\frac{1}{x}\right)\Rightarrow\begin{cases}f=0\\a=e\\b=d\end{cases}$

$P(x)=ax^5+bx^4+cx^3+bx^2+ax$

$P(2)=10P(1)\Rightarrow c=7a\Rightarrow P(x)=ax^5+bx^4+7ax^3+bx^2+ax$

$\frac{P(3)}{P(2)}=\frac{435a+90b}{90a+20b}=\frac{435+90t}{90+20t}, t=\frac{b}{a}$

$=\frac{9}{2}+\frac{30}{90+20t}\leq\frac{9}{2}+\frac{30}{90}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=0\Leftrightarrow b=0$

$P(x)=ax^5+7ax^3+ax, a\in\mathbb{N}, a\neq 0.$

» **Câu 7.** Tìm số nguyên tố p nhỏ nhất dạng $4k+1\left(k\in\mathbb{N}^*\right)$ sao cho phương trình $x^3+x+p=y^2$ có nghiệm nguyên dương x,y.

Lời giải

Ta có $x^3+x+p=y^2\Leftrightarrow x\left(x^2+1\right)=y^2-p$ (1).

Vì phương trình đã cho có nghiệm nguyên nên y^2-p chia hết cho x^2+1.

» Với $k=1\Rightarrow p=5$.

Khi đó (1) viết lại $x\left(x^2+1\right)=y^2-5$. Vì $x\left(x^2+1\right)$ luôn là số chẵn nên y^2 là số lẻ, hay $y=2k_1+1; y_1\in\mathbb{N}^*$.

Khi đó (1) được viết lại $x\left(x^2+1\right)=4\left(k_1^2+k_1-1\right)$ (2)

Nếu $x=4x_1\left(x_1\in\mathbb{N}^*\right)$ thì $4x_1\left(16x_1^2+1\right)=4\left(k_1^2+k_1-1\right)\Leftrightarrow x_1\left(16x_1^2+1\right)=k_1^2+k_1-1$.

Điều này không xảy ra vì vế trái luôn là số chẵn trong khi vế phải luôn là số lẻ.

Nếu $x=4x_1+1\left(x_1\in\mathbb{N}^*\right)$ thì $\left(4x_1+1\right)\left(16x_1^2+16x_1+2\right)=4\left(k_1^2+k_1-1\right)$

$\Leftrightarrow\left(4x_1+1\right)\left(8x_1^2+8x_1+1\right)=2\left(k_1^2+k_1-1\right)$.

Điều này cũng không xảy ra vì vế trái luôn là số lẻ trong khi vế phải luôn là số chẵn.

Nếu $x=4x_1+2\left(x_1\in\mathbb{N}^*\right)$ thì $\left(4x_1+2\right)\left(16x_1^2+16x_1+5\right)=4\left(k_1^2+k_1-1\right)$

$\Leftrightarrow\left(2x_1+1\right)\left(16x_1^2+16x_1+5\right)=2\left(k_1^2+k_1-1\right)$.

Điều này cũng không xảy ra vì vế trái luôn là số lẻ trong khi vế phải luôn là số chẵn.

Nếu $x = 4x_1 + 3\left(x_1 \in \mathbb{N}^*\right)$ thì $\left(4x_1 + 3\right)\left(16x_1^2 + 24x_1 + 10\right) = 4\left(k_1^2 + k_1 - 1\right)$

$\Leftrightarrow \left(4x_1 + 3\right)\left(8x_1^2 + 12x_1 + 5\right) = 2\left(k_1^2 + k_1 - 1\right)$.

Điều này cũng không xảy ra vì vế trái luôn là số lẻ trong khi vế phải luôn là số chẵn.

» Với $k = 3 \Rightarrow p = 13$.

Khi đó (1) viết lại $x\left(x^2 + 1\right) + 13 = y^2$.

Nếu $x = 1$ thì $y^2 = 15$ loại.

Nếu $x = 2$ thì $y^2 = 23$ loại.

Nếu $x = 3$ thì $y^2 = 43$ loại.

Nếu $x = 4$ thì $y^2 = 81$ nên $y = 9$.

Suy ra $p = 13$ thì phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Vậy số nguyên tố nhỏ nhất thỏa mãn là $p = 13$.

----------------------------Hết----------------------------