CHƯƠNG 6 HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 01 HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

a) Định nghĩa: Cho một tập hợp **khác rỗng** $D \subset \mathbb{R}$.

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

- Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x.
- Tập hợp D gọi là tập xác định của hàm số.
- Tập tất cả các giá trị y nhận được gọi là tập giá trị của hàm số thì ta nói $T = \left\{ f\left(x\right) | x \in D \right\}$ là tập giá trị của $f\left(x\right)$ trên D.

Chú ý:

- Cho $K \subset D$ thì ta nói $T_K = \left\{ f\left(x\right) | x \in K \right\}$ là tập giá trị của $f\left(x\right)$ trên K.
- Khi y là hàm số của x, ta có thể viết $y = f\left(x\right), y = g\left(x\right), \ldots$

b) Cách cho hàm số:

- Hàm số cho bằng công thức $y = f\left(x\right)$

  Tập xác định của hàm số $y = f\left(x\right)$ là tập hợp tất cả các giá trị của x để $f\left(x\right)$ có nghĩa.
- Hàm số cho bằng nhiều công thức.
- Hàm số không cho bằng công thức.

2 Đồ thị hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M\left(x; f\left(x\right)\right)$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi x thuộc D hay ta có thể diễn tả bằng: $M\left(x_0; y_0\right) \in \left(G\right) \Leftrightarrow y_0 = f\left(x_0\right)$ với $x_0 \in D$.

Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ là một đường. Khi đó ta có $y = f\left(x\right)$ là phương trình của đường đó.

3 Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

a) Khái niệm: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên K.

- Hàm số $y=f\left(x\right)$ gọi là đồng biến (hay tăng) trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) < f\left(x_2\right).$$

- Hàm số $y=f\left(x\right)$ gọi là nghịch biến (hay giảm) trên K nếu:

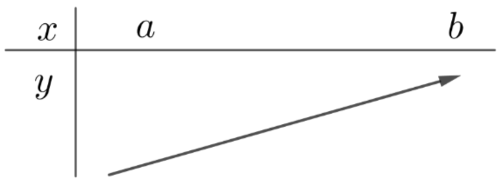
$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 < x_2 \Rightarrow f\left(x_1\right) > f\left(x_2\right).$$

b) Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

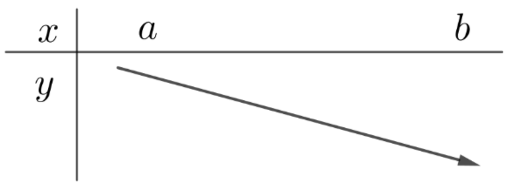
- Hàm số $y=f\left(x\right)$ đồng biến trên $\left(a;b\right)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên khoảng đó.
- Hàm số $y=f\left(x\right)$ nghịch biến trên $\left(a;b\right)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.

c) Bảng biến thiên: Hàm số $y=f\left(x\right)$ xác định trên $\left(a;b\right)$.

- Xét chiều biến thiên của hàm số là tìm khoảng tăng, giảm của hàm số.
- Kết quả đó được tổng kết trong một bảng gọi là bảng biến thiên
- Đồ thị hàm số đồng biến trên $\left(a;b\right)$ là một đường "đi lên" trong khoảng $\left(a;b\right)$.



- Đồ thị hàm số nghịch biến trên $\left(a;b\right)$ là một đường "đi xuống" trong khoảng $\left(a;b\right)$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số

Phương pháp: Để tìm tập xác định của hàm số ta cần nhớ như sau

⊕ $\dfrac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \neq 0$

⊕ $\sqrt{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$

⊕ $\dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ xác định $\Leftrightarrow g(x) > 0$

Bài toán chứa tham số: Cho hàm $y = f(x,m)$. Tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số xác định trên tập K.

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của hàm số theo m. Gọi D là tập xác định của hàm số.

Bước 2: Hàm số xác định trên tập K khi và chỉ khi $K \subset D$.

Chú ý: Cho A là biểu thức luôn có nghĩa:

- Hàm số $y = \dfrac{A}{f(x,m)}$ xác định trên $K \Leftrightarrow f(x,m) = 0$ vô nghiệm trên K.
- Hàm số $y = \sqrt{f(x,m)}$ xác định trên $K \Leftrightarrow f(x,m) \geq 0\ \forall x \in K$
- Hàm số $y = \dfrac{A}{\sqrt{f(x,m)}}$ xác định trên $K \Leftrightarrow f(x,m) > 0\ \forall x \in K$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = 2x^3 - 3x^2 + 2025$

b) $y = \dfrac{2x-1}{1-x}$

c) $y = \dfrac{1}{x^2 + 4x + 5}$

d) $y = \dfrac{2x-1}{x^2 - 3x + 2}$

e) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 5}$

f) $y = \dfrac{2x}{x^2 - 4x - 5}$

g) $y = \dfrac{2}{\sqrt{4 - x^2}}$

h) $y = \dfrac{x+2}{x^2 - 9} - \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

i) $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}} - \sqrt{3 - 2x} + 1$

j) $y = \dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2 - x - 2}$

k) $y = \dfrac{\sqrt{x-1} - \sqrt{4 - x^2}}{x^2 - x - 2}$

l) $y = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{5-2x}} - \dfrac{x}{x^2 - 5x + 6}$

Bài tập 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{3x-2}$

b) $y = \sqrt{x^2+1}$

c) $y = \sqrt{-2x+1} - \sqrt{x-1}$

d) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x-3}$

e) $y = \sqrt{x + 3 + 2\sqrt{x+2}} + \sqrt{2 - x^2 + 2\sqrt{1 - x^2}}$

f) $y = \sqrt{x + \sqrt{x^2 - x + 1}}$

Bài tập 3: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-m}$. Tìm các giá trị của m để hàm số có tập xác định là $[2;+\infty)$

Bài tập 5: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x-5m+6}}{x+m-1}$. Tìm các giá trị của m để hàm số xác định trên $(0;+\infty)$

Bài tập 6: Cho hàm số $y=\sqrt{m-x}+\sqrt{2x-m+1}$. Tìm các giá trị của m để hàm số xác định trên $(0;1)$.

Bài tập 7: Cho hàm số $y=\sqrt{x^4+4x^3+(m+5)x^2+4x+4+m}$. Tìm các giá trị của m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Bài tập 8: Với giá trị nào của m thì hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2-2x-3-m}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m\le -4$. **B.** $m<-4$. **C.** $m>0$. **D.** $m<4$.

Bài tập 9: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y=\sqrt{-2x+3m+2}+\dfrac{x+1}{x+2m-4}$ xác định trên $(-\infty;-2)$.

Bài tập 10: Tập tất cả các giá trị m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}}+\sqrt{x-m}$ có tập xác định khác tập rỗng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3+3x^2-1$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2}{x}$. **C.** $y=\dfrac{2x+3}{x^2}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $(1;+\infty)$.

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ là

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x^2-5x-6}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;6\}$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1;-6\}$ **C.** $D=\{-1;6\}$ **D.** $D=\{1;-6\}$

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-4)}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$ **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;\pm2\}$

Câu 6: Tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{3x-1}$ là

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=[0;+\infty)$. **C.** $D=\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x-1}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Câu 8: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{19x+5}{18x-90}$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm5\}$. **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Câu 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{2x-9}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{9}{2}\right\}$. **B.** $D=\left(-\infty;\dfrac{9}{2}\right]$. **C.** $D=\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right)$. **D.** $D=\left[\dfrac{9}{2};+\infty\right)$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x+2}}{x^2+x-12}$.

A. $D=[-2;+\infty)\setminus\{-4\}$. **B.** $D=[-2;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-4;3\}$. **D.** $D=[-2;+\infty)\setminus\{3\}$.

Câu 11: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{2x-1}{4x-2}$. **B.** $y=\sqrt{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2}{|x^3+1|}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$.

Câu 12: Tập tất cả các giá trị m để hàm số $y=\sqrt{x-2m}+\sqrt{m-x}$ xác định trên khoảng $(2;3)$.

A. $\frac{3}{2} \le m \le 2$. **B.** $m \in \varnothing$. **C.** $m > 2$. **D.** $m \le \frac{3}{2}$.

Câu 13: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{x+2} - \sqrt{x+3}$.

A. $D = [-3;+\infty)$. **B.** $D = [-2;+\infty)$. **C.** $D = \mathbb{R}$. **D.** $D = [2;+\infty)$.

Câu 14: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \sqrt{2-x} - \frac{4}{\sqrt{x+4}}$.

A. $D = [-4;2]$. **B.** $D = (-4;2]$. **C.** $D = [-4;2)$. **D.** $D = (-2;4]$.

Câu 15: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{4-x} + \sqrt{x+2}}{x^2 - x - 12}$ là

A. $[-2;4]$. **B.** $(-3;-2) \cup (-2;4)$. **C.** $(-2;4)$. **D.** $[-2;4)$.

Câu 16: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{5-2x}}{(x-2)\sqrt{x-1}}$ là

A. $\left(1;\frac{5}{2}\right] \setminus \{2\}$. **B.** $\left(\frac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(1;\frac{5}{2}\right) \setminus \{2\}$. **D.** $\left(1;\frac{5}{2}\right)$.

Câu 17: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} + \sqrt{x+3}$.

A. $[-1;+\infty)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $[-3;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2x-5}} + \sqrt{9-x}$ là

A. $D = \left(\frac{5}{2};9\right]$. **B.** $D = \left(\frac{5}{2};9\right)$. **C.** $D = \left[\frac{5}{2};9\right)$. **D.** $D = \left[\frac{5}{2};9\right]$.

Câu 19: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1} - \frac{3x-1}{(x^2-4)\sqrt{5-x}}$.

A. $[1;5] \setminus \{2\}$. **B.** $(-\infty;5]$. **C.** $[1;5) \setminus \{2\}$. **D.** $[1;+\infty) \setminus \{2;5\}$.

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{-3x+8} + x & \text{khi } x < 2 \\ \sqrt{x+7} + 1 & \text{khi } x \ge 2 \end{cases}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. **C.** $\left(-\infty;\frac{8}{3}\right]$. **D.** $[-7;+\infty)$.

Câu 21: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+2} + \frac{x^3}{4|x| - 3}$

A. $D = [-2;+\infty)$.

B. $D = [-2;+\infty) \setminus \left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$.

C. $D = \left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$.

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{3x+5}{x-1} - 4}$ là $(a;b]$ với a,b là các số thực. Tính tổng $a+b$.

A. $a+b=-8$. **B.** $a+b=-10$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=10$.

Câu 23: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x-2m+1}$ xác định trên nửa khoảng $(0;1]$.

A. $\left[\begin{array}{l} m \le \frac{1}{2} \\ m \ge 1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m \le \frac{1}{2} \\ m > 1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{2} \\ m \ge 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m < \frac{1}{2} \\ m > 1 \end{array}\right.$.

Câu 24: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - 2x - m}}$ xác định trên $[2;3]$.

A. $m < 0$. **B.** $0 < m < 3$. **C.** $m \le 0$. **D.** $m \ge 3$.

Câu 25: Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{\sqrt{x^2 - m^2}}{2\sqrt{m-1}}$ xác định với mọi $x \in (3;+\infty)$

A. $1 < m \le 3$. **B.** $0 < m < 3$. **C.** $m \le 0$. **D.** $m \ge 3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số: $y = \dfrac{mx}{\sqrt{x - m + 2} - 1}$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

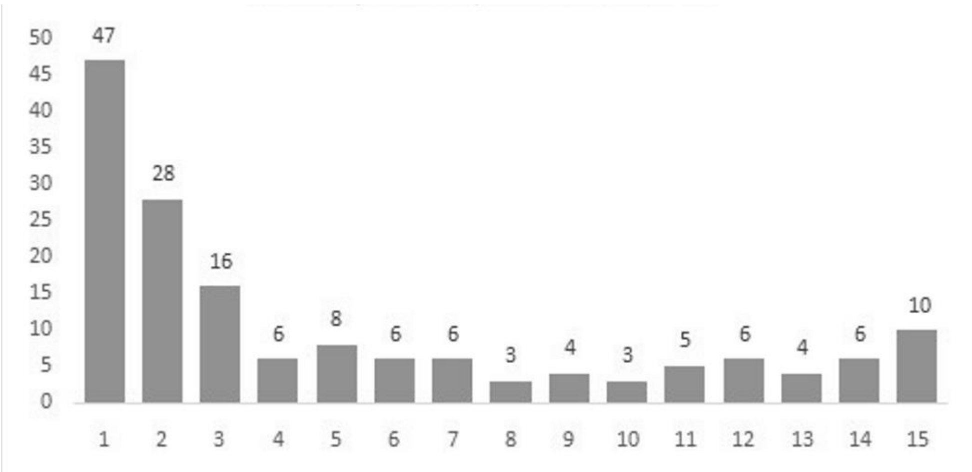
a) Với $m = 1$ thì tập xác định của hàm số là $D = [-1;+\infty) \setminus \{0\}$.

b) Giá trị của m để đồ thị hàm số qua điểm $A(1;1)$ là $m = \dfrac{-3 \pm \sqrt{17}}{2}$.

c) Tập xác định của hàm số là $D = [m-2;+\infty) \setminus \{m-1\}$.

d) Giá trị nguyên dương của m để hàm số xác định trên $(0;1)$ là $m \in \{1;2\}$.

Câu 2: Biểu đồ dưới đây cho biết số ca nhiễm Covid-19 của thành phố Hồ Chí Minh theo tuần năm 2023



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số ca nhiễm Covid-19 trong mỗi tuần tương ứng là một hàm số.

b) Gọi y là số ca nhiễm Covid-19 theo tuần, x là tuần tương ứng (x, y nguyên dương). Hàm số theo biểu đồ trên có dạng $y = f(x)$. Khi đó tập giá trị của hàm số trên là $T = \{3;4;5;6;8;10;16;28;47\}$.

c) Số ca nhiễm tuần thứ nhất là 50 ca.

d) Gọi y là số ca nhiễm Covid-19 theo tuần, x là tuần tương ứng (x, y nguyên dương). Hàm số theo biểu đồ trên có dạng $y = f(x)$. Khi đó điểm $(5;11)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 3: Cho hàm số hàm số $f(x) = \sqrt{a+2x} + \sqrt{a+3-x}$ (với a là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} a+2x \ge 0 \\ a+3-x \ge 0 \end{cases}$.

b) Với $a = 1$, hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 1+2x \ge 0 \\ 2-x \ge 0 \end{cases}$.

c) Với $a = 2$, tập xác định của hàm số là $D = [-1;5]$.

d) Với $a = 3$, tập xác định của hàm số là D. Khi đó tập hợp $D \cap [1;8]$ có 6 giá trị nguyên.

Câu 4: Cho hai hàm số $f(x) = \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}; g(x) = \dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $g(x) = \dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ xác định khi và chỉ khi $x + 4 \ge 0$.

b) Tập xác định của hàm số $f(x) = \sqrt{5+x} + \sqrt{5-x}$ là $D_1 = [-5;5]$

c) Tập xác định của hàm số $g(x) = \dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ là $D_2 = (-4;+\infty)$

d) Gọi $D_1; D_2$ lần lượt là tập xác định của các hàm số $f(x); g(x)$.

Khi đó $(D_1 \cap D_2) \setminus (1;6) = (-4;1]$.

Câu 5: Cho hai hàm số $\begin{cases} f(x) = (m-2)x + 1 \\ g(x) = \dfrac{2}{x^2 - 5x + 9} \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $g(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

b) Khi $m > 2$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $\dfrac{8}{11}$.

d) Khi $m = \dfrac{11}{6}$ thì đồ thị hàm số của $f(x)$ và $g(x)$ cùng đi qua điểm $\left(2;\dfrac{2}{3}\right)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Hàm số $y=\dfrac{x^2-7x+8}{x^2-3x+1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{a;b\};a\ne b.$ Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $Q=a^3+b^3-4ab.$

Câu 2: Một cửa hàng nhân dịp Noel đã đồng loạt giảm giá các sản phẩm. Trong đó có chương trình nếu mua một gói kẹo thứ hai trở đi sẽ được giảm 10% so với giá ban đầu. Biết giá gói đầu là 60000 đồng. Bạn An có 500000 đồng. Hỏi bạn An có thể mua tối đa bao nhiêu gói kẹo?

Câu 3: Một người cần đặt một tiệc cưới ước tính khoảng 30 đến 35 bàn. Nhà hàng thứ nhất đề nghị anh nay đóng tiền cố định 20 triệu đồng, sau khi tiệc cưới diễn ra sẽ đóng khoản còn lại với số tiền 2 triệu đồng/1 bàn. Nhà hàng thứ hai đề nghị anh đóng tiền cố định 10 triệu đồng, sau khi tiệc cưới diễn ra sẽ đóng khoản còn lại với số tiền 2,5 triệu/1 bàn. Nếu anh này nên lựa chọn nhà hàng thứ nhất thì phải trả số tiền trong $[a;b],a,b>0,a,b$ có đơn vị triệu đồng. Nếu anh này chọn nhà hàng thứ hai thì phải trả số tiền trong $[c;d],c,d>0,c,d$ có đơn vị là triệu đồng. Tính $a+b+c+d$.(kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 4: Giá thuê xe ô tô tự lái là 1,2 triệu đồng một ngày cho hai ngày đầu tiên và 900 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo. Tổng số tiền T phải trả là một hàm số của số ngày x mà khách thuê xe. Biết công thức của hàm số $T=T(x)$ và tập xác định của hàm số là $[a;+\infty]$. Tính $a+\dfrac{T(1)}{1000}$.

Câu 5: Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t)=-t^2+2t+3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây $(t\ge 0)$. Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất?

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2019x+2020}{x^2-2x+21-2m}$, với m là tham số. Tìm số các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Phương pháp: Có hai phương pháp để giải dạng toán này như sau:

Phương pháp 1:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2: Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$. Tính $f(x_1) - f(x_2)$.

- Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số đã cho đồng biến (tăng).
- Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số đã cho nghịch biến (giảm).

Phương pháp 2:

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2: Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$. Lập tỉ số $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

- Nếu $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ thì hàm số đã cho đồng biến (tăng).
- Nếu $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến (giảm)

Lưu ý: Đối với các bài toán chứa tham số thì ta vẫn áp dụng kiến thức đã nêu và tìm tham số theo yêu cầu đề bài

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x) = x + 2025$ trên khoảng

a) $(-\infty; 0)$ b) $(0; +\infty)$

Bài tập 2: Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 7$ trên khoảng

a) $(-\infty; 0)$ b) $(0; +\infty)$

Bài tập 3: Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ trên khoảng:

a) $(-\infty; 1)$ b) $(1; +\infty)$

Bài tập 4: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = (2m+3)x + m + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Bài tập 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-3; 3]$ để hàm số $f(x) = (m+1)x + m - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Bài tập 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Bài tập 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x$. **B.** $y = -2x$. **C.** $y = 2x$. **D.** $y = \frac{1}{2}x$

Câu 2: Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{3}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Khẳng định nào sao đây là đúng?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

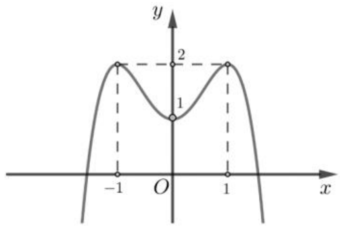
A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

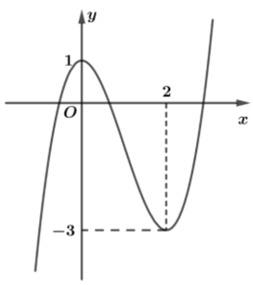
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 5: Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.

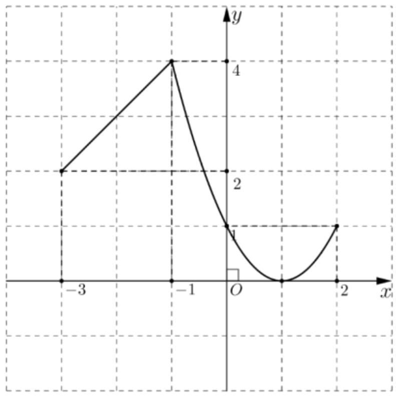


Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $[-3;2]$ và có đồ thị như hình vẽ sau.



Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 7: Trong các hàm số sau, hàm số nào giảm trên khoảng $(0;1)$?

A. $y=x^2$. **B.** $y=x^3$. **C.** $y=\dfrac{1}{x}$. **D.** $y=\sqrt{x}$.

Câu 8: Cho hàm số $y=(16-m^2)x+3$ Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

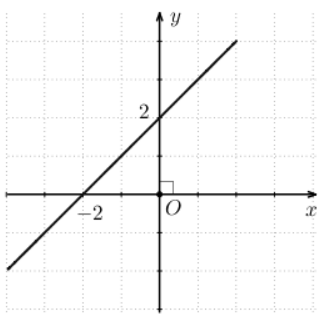
Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2023]$ để hàm số $y=(m^2-4)x+2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 4040. **B.** 4044. **C.** Vô số. **D.** 2020.

Câu 10: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y=2x+1$. **B.** $y=-x+3$. **C.** $y=-3x$. **D.** $y=-2x+5$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)=ax+b$ có đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $f(0)>f(2023)$. **B.** $f(2022)>f(2023)$.

C. $f(2022)<f(2023)$. **D.** $f(-2022)<f(-2023)$.

Câu 12: Bác Anh dùng $24m$ dây thép gai để rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau. Diện tích lớn nhất của mảnh vườn mà bác Anh có thể rào được là:

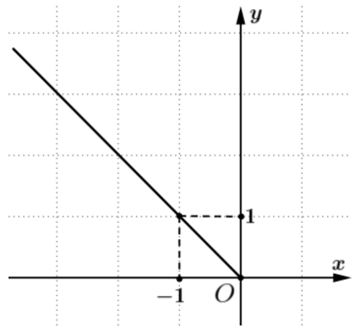
A. $9m^2$. **B.** $12m^2$. **C.** $48m^2$. **D.** $36m^2$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=4-3x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **D.** Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Câu 14: Đồ thị hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=|x|$. **B.** $y=-x$.

C. $y=|x|$ với $x<0$. **D.** $y=-x$ với $x<0$.

Câu 15: Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x)=\frac{x-3}{x+5}$ trên khoảng $(-\infty;-5)$ và trên khoảng $(-5;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-5)$, đồng biến trên $(-5;+\infty)$.

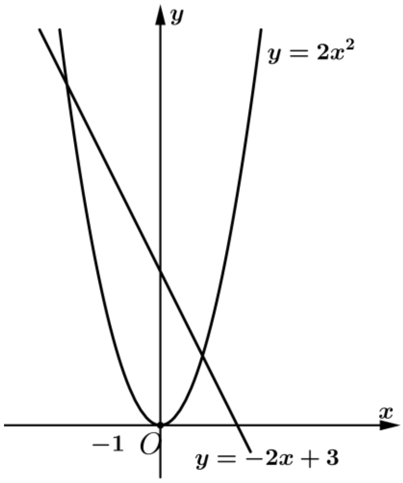
B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-5)$, nghịch biến trên $(-5;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-5;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-5;+\infty)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho đồ thị các hàm số $y=-2x+3; y=2x^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



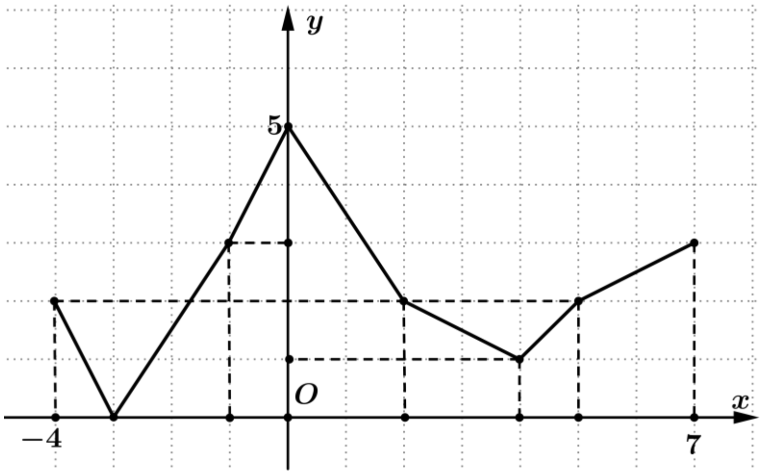
a) Đồ thị hàm số $y=-2x+3$ là một đường cong

b) Đồ thị hàm số $y=-2x+3$ cắt đồ thị hàm số $y=2x^2$ tại hai điểm

c) Đồ thị của hàm số $y=-2x+3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

d) Đồ thị hàm số $y=2x^2$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường gấp khúc như hình bên, mỗi ô tương ứng một đơn vị. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Tập giá trị hàm số $T=[-4;7]$

b) Ta thấy điểm $(-4;2),(4;1)$ thuộc đồ thị hàm số, điểm $(2;3)$ không thuộc đồ thị hàm số.

c) Ta có: $f(-1)=3, f(5)=2$.

d) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng: $(-3;0),(4;7)$; hàm số nghịch biến trên các khoảng: $(-4;-3),(0;4)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} 8 & \text{khi } x<0 \\ 8-2x & \text{khi } 0\le x\le 2 \\ x^2 & \text{khi } x>2 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

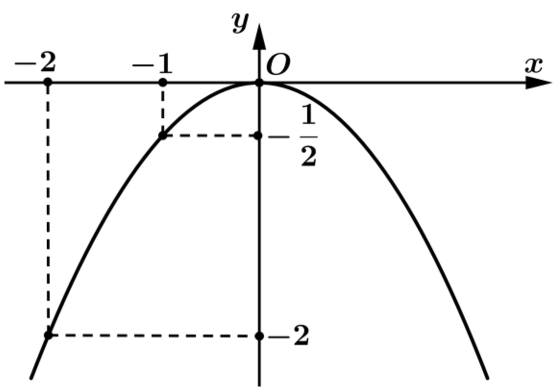
a) $f(-1).f(1)=48$

b) Điểm $A(0;0)$ thuộc đồ thị hàm số.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

d) $f\left(\frac{3}{2}\right)=f(5)$

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Điểm $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị của hàm số.

b) Hàm số $f\left(x\right)$ nghịch biến trên khoảng $\left(0;+\infty\right)$.

c) Hàm số $f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-2;0\right)$.

d) Tập giá trị của hàm số là $\mathbb{R}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $f\left(x\right)=\begin{cases} x-4 & \text{khi } x\ge 0 \\ x^2-4x+1 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $f\left(m^2\right)+f\left(-2\right)=18$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $\left[-20;20\right]$ để hàm số $f\left(x\right)=\left(2m-1\right)x+m+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Câu 3: Anh T cần đặt một tiệc cưới ước tính khoảng 30 đến 35 bàn.
Nhà hàng 1 đề nghị anh T đóng tiền cố định 20 triệu đồng, sau khi tiệc cưới diễn ra sẽ đóng khoản còn lại với số tiền 2 triệu đồng/1 bàn.
Nhà hàng 2 đề nghị anh T đóng tiền cố định 10 triệu đồng, sau khi tiệc cưới diễn ra sẽ đóng khoản còn lại với số tiền 2,5 triệu/1 bàn.
Để tiết kiệm được chi phí cho tiệc cưới, anh T nên lựa chọn nhà hàng n (giả sử rằng chất lượng phục vụ hai nhà hàng trên là ngang nhau)? Giá trị n bằng bao nhiêu?

-----------------HẾT-----------------

BÀI 02 HÀM SỐ BẬC HAI

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x là biến số còn a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý:

Khi $a = 0$ và $b \neq 0$ thì hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y = bx + c$.

Khi $a = b = 0$ thì hàm số trở thành hàm hằng $y = c$.

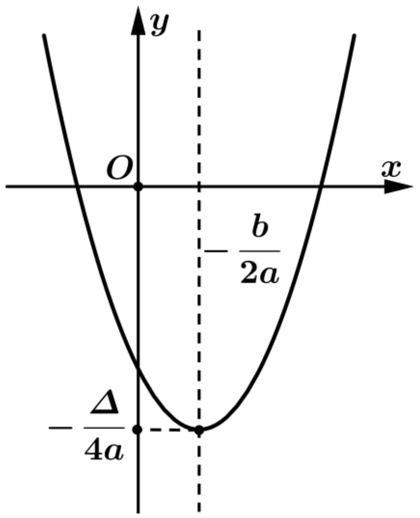
2 Đồ thị hàm số bậc hai

a) Đồ thị hàm số $y = ax^2$ với $a \neq 0$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, có trục đối xứng là trục tung (là đường thẳng $x = 0$). Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$ và quay xuống dưới nếu $a < 0$.

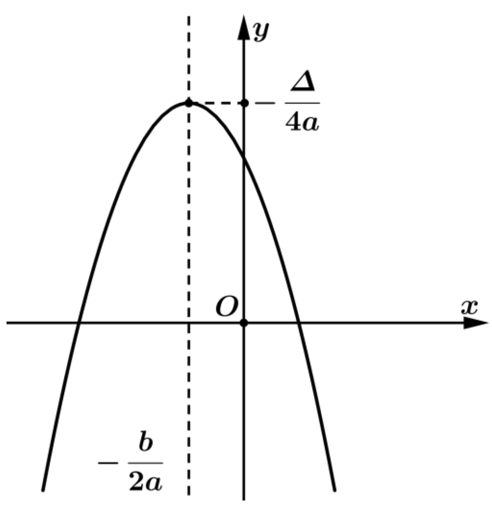
b) Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ là một parabol có:

- Đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
- Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Bề lõm hướng lên trên nếu $a > 0$, hướng xuống dưới nếu $a < 0$.
- Giao điểm với trục tung là $M(0; c)$.
- Số giao điểm với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Đồ thị hàm số bậc hai:



$a > 0$



$a < 0$

Bảng biến thiên của hàm số bậc hai:

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

$a>0$

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

$a<0$

- Khi $a>0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$.
- Khi $a<0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$.

3 Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai

Để vẽ đường parabol $y=ax^2+bx+c$ ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Bước 2: Vẽ trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}$

Bước 3: Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol

Bước 4: Vẽ parabol

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định và vẽ đồ thị hàm số bậc hai

Phương pháp: Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (xác định các tham số a, b, c)

Dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c
Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$
- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a} = x_0$
- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = x_I \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = y_I \end{cases}$

Trên $\mathbb{R}$ thì ta có:

- Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này giá trị lớn nhất $f(x)$ là $-\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$
- Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a > 0$. Lúc này giá trị nhỏ nhất $f(x)$ là $-\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$, biết:

a) (P) qua $M(1;5)$,có trục đối xứng là $x = -\dfrac{1}{4}$

b) $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{11}{2}\right)$ là đỉnh của (P)

c) (P) đi qua $A(1;-1)$, $B(2;3)$, $C(-1;-3)$

d) Hoành độ đỉnh (P) bằng -3 và (P) qua $M(-2;1)$

Bài tập 2: Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các tham số, biết rằng hàm số ấy đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x = -2$ và có đồ thị đi qua điểm $M(1;-1)$.

Bài tập 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y = mx^2 - 2mx - 3m - 2$ $(m \neq 0)$ cắt đường thẳng $y = 3x - 1$ tại đỉnh của nó.

Bài tập 4: Biết đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c$, $(a,b,c \in \mathbb{R}; a \neq 0)$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$

Tìm hàm số đã cho.

Bài tập 5: Cho Parabol $(P): y = x^2 + mx + n$ (m,n tham số). Xác định m,n để (P) nhận đỉnh $I(2;-1)$.

Bài tập 6: Cho Parabol: $y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(2;0)$ và (P) cắt trục Oy tại điểm $M(0;-1)$. Khi đó

Parabol có hàm số là

Bài tập 7: Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c\left(1\right)$ biết đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Bài tập 8: Tìm phương trình của Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A\left(0;-1\right)$, $B\left(1;-1\right)$, $C\left(-1;1\right)$.

Bài tập 9: Cho parabol $\left(P\right): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A\left(1;4\right), B\left(-1;-4\right)$ và $C\left(-2;-11\right)$. Tìm tọa độ đỉnh của $\left(P\right)$.

Bài tập 10: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = x^2 - 2x$.

Bài tập 11: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$.

Bài tập 12: Cho hàm số $y = -x^2 + 2x + 3$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $\left(P\right)$ của hàm số.

b) Tìm các giá trị của x để $y > 0$ và $y < 0$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ có đồ thị (P). Đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

A. $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{b}{a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **C.** $I\left(\frac{b}{2a};\frac{\Delta}{4a}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{b}{2a};\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 2: Cho parabol $(P): y=3x^2-2x+1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P)?

A. $I(0;1)$. **B.** $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Câu 3: Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ là đường thẳng nào dưới đây?

A. $x=-\frac{b}{2a}$. **B.** $x=-\frac{c}{2a}$. **C.** $x=-\frac{\Delta}{4a}$. **D.** $x=\frac{b}{2a}$.

Câu 4: Tọa độ đỉnh của parabol $y=-2x^2-4x+6$ là

A. $I(-1;8)$. **B.** $I(1;0)$. **C.** $I(2;-10)$. **D.** $I(-1;6)$.

Câu 5: Parabol $y=-x^2+2x+3$ có phương trình trục đối xứng là

A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Câu 6: Biết hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a+b+c$.

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 7: Gọi S là tập các giá trị $m\neq 0$ để parabol $(P): y=mx^2+2mx+m^2+2m$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y=x+7$. Tính tổng các giá trị của tập S

A. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Câu 8: Hàm số bậc hai nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1;-4)$?

A. $y=-x^2+5x-8$. **B.** $y=-2x^2+10x-12$.

C. $y=x^2-5x$. **D.** $y=-2x^2+5x+\frac{1}{2}$.

Câu 9: Cho parabol (P) có phương trình $y=ax^2+bx+c$. Tìm $a+b+c$, biết (P) đi qua điểm $A(0;3)$ và có đỉnh $I(-1;2)$.

A. $a+b+c=6$ **B.** $a+b+c=5$ **C.** $a+b+c=4$ **D.** $a+b+c=3$

Câu 10: Parabol $y=ax^2+bx+c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x=-2$ và đi qua $A(0;6)$ có phương trình là

A. $y=\frac{1}{2}x^2+2x+6$. **B.** $y=x^2+2x+6$. **C.** $y=x^2+6x+6$. **D.** $y=x^2+x+4$.

Câu 11: Parabol $y=ax^2+bx+2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ có phương trình là

A. $y=x^2+x+2$. **B.** $y=2x^2+x+2$. **C.** $y=2x^2+2x+2$ **D.** $y=x^2+2x$

Câu 12: Cho parabol $(P): y = x^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(-1;3)$. Khi đó

A. $b = -1$. **B.** $b = 1$. **C.** $b = 3$. **D.** $b = -2$.

Câu 13: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên dưới đây. Đáp án nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = x^2 + 2x - 2$. **B.** $y = x^2 - 2x - 2$. **C.** $y = x^2 + 3x - 2$. **D.** $y = -x^2 - 2x - 2$.

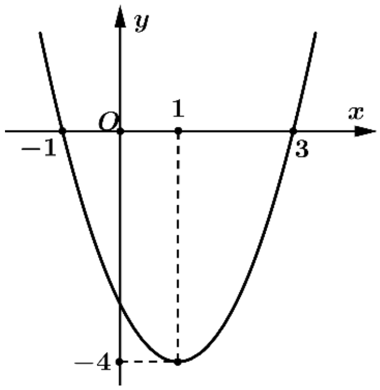
Câu 14: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$. Khi đó $4a + 2b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 15: Biết hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a + b + c$.

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 16: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là:

A. -9. **B.** 9. **C.** -6. **D.** 6.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = -(x-a)(x-b)$ có đồ thị là (P) $(a < b)$. Biết (P) có đỉnh $I(1;4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a + 2b = 1$.

b) Đường thẳng $(d): y = x + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt

c) $f(x) > 0\ \forall x \in (-1;2)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[-\frac{1}{2};2\right]$ là $\frac{7}{4}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ có đồ thị là parabol (P). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

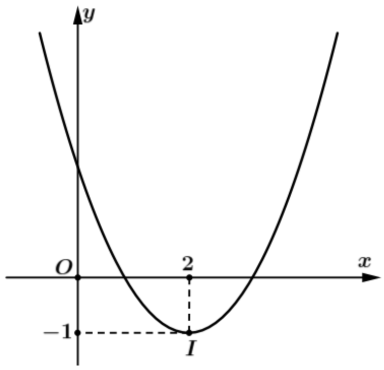
a) Nếu (P) đi qua gốc tọa độ O thì $b = 0$.

b) Nếu (P) có trục đối xứng là $x = 2$ thì $4a - b = 0$.

c) Nếu (P) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 thì $a + b + c = 0$.

d) Nếu (P) có đỉnh $S(2;-3)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 thì $a - b + c = 6$.

Câu 3: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (P) có đồ thị như hình vẽ.



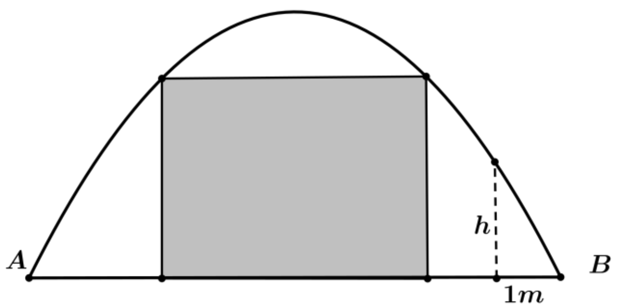
a) (P) có tung độ đỉnh bằng 2.

b) (P) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ trái dấu.

c) $y > 2\ \forall x < 0$.

d) (P) đi qua điểm $M\left(3;\dfrac{-1}{4}\right)$

Câu 4: Một chiếc cổng hình parabol, người ta muốn thiết kế một cái cửa hình chữ nhật được tô màu như hình vẽ dưới đây:



Biết cổng cao 4 m, rộng 8 m, cửa rộng bằng một nửa chiều rộng của cổng và cách đều hai chân cổng. Một người đứng dưới cổng cánh B một khoảng 1m và đo được chiều cao của cổng tại chỗ đó là h.

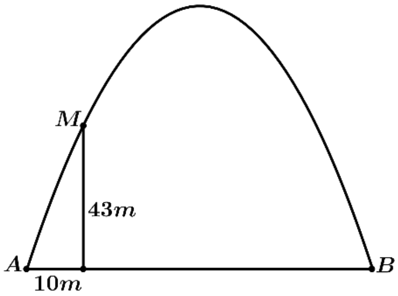
a) Cổng có hình parabol với phương trình $(P): y = ax^2 + bx + c\,(a < 0)$

b) Chiều rộng của cừa bằng 4 mét

c) $h = 1,5\,\text{m}$.

d) Người thiết kế muốn sơn bề mặt cửa, biết giá sơn cửa là 150000 đồng trên một mét vuông. Giá tiền phải sơn toàn bộ cửa là 1850000 đồng.

Câu 5: Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng $162\,\text{m}$. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao $43\,\text{m}$ so với mặt đất (Điểm M) người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn $10\,\text{m}$. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Cổng có hình dạng Parabol đi qua điểm có tọa độ $M(43;10)$.

b) Đặt chân 1 cột của cổng trùng với gốc tọa độ. Trục đối xứng của của parabol là $x = 80(m)$.

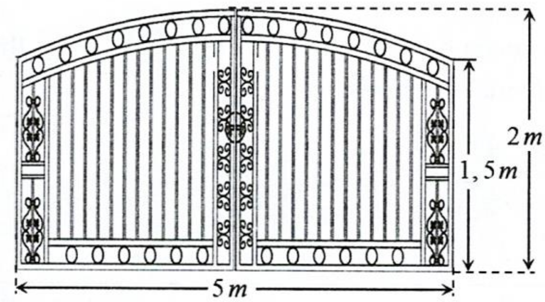
c) Phương trình Parabol của cổng Arch tại thành phố St Louis là $y = -\dfrac{43}{1520}x^2 + \dfrac{3483}{760}x$

d) Độ cao của cổng Arch là $185,6(m)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một người nông dân thả 1000 con cá giống vào hồ nuôi vừa mới đào. Biết rằng sau mỗi năm thì số lượng cá trong hồ tăng thêm x lần số lượng cá ban đầu và x không đổi. Bằng cách thay đổi kĩ thuật nuôi và thức ăn cho cá. Hỏi sau hai năm để số cá trong hồ là 36000 con thì tốc độ tăng số lượng cá trong hồ là bao nhiêu? Biết tốc độ tăng mỗi năm là không đổi.

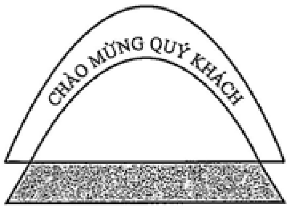
Câu 2: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên của cửa sắt là một Parabol $y = ax^2 + bx + c$. Biết $a + b + c = \dfrac{48}{25}$ tính abc.



Câu 3: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe

đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Câu 4: Tại một buổi khai trương, người ta làm một cổng chào có đường viền trong của mặt cắt là đường parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng là $4,5\,\text{m}$. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đât (điêm H) là $1,8\,\text{m}$ và khoảng cách từ điểm H tới chân cổng gần nhất là 1 m. Hãy tính chiều cao của cổng chào đó (tính theo đường viền trong) theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Câu 5: Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng BC là $9\,\text{m}$. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK = 1,6\,\text{m}$ và khoảng cách từ K tới chân cổng gần nhất là $BK = 0,5\,\text{m}$. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 6: Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau:

An nói: Tớ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Đại học Bách khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng là $0,5\,\text{m}$ là $2,93\,\text{m}$. Từ đó tớ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là $12\,\text{m}$.

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác. Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Đại học Bách Khoa Hà Nội.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số bậc hai

Phương pháp: Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$.

- Xác định hệ số a và tính $-\dfrac{b}{2a}$.
- Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

Bài toán có chứa tham số thì ta có thể làm như sau: Cho hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$.

- Trường hợp $a=0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b>0 \end{cases}$.
- Trường hợp $a>0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ (m;n)\subset\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right) \end{cases}$.
- Trường hợp $a<0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ (m;n)\subset\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right) \end{cases}$.

Lưu ý:
Việc tìm điều kiện để hàm số $y=ax^2+bx+c$ nghịch biến trên khoảng $(m;n)$ được làm tương tự.
Có thể dựa vào định nghĩa tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để thực hiện các bài toán trên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $f(x)=x^2-2x+3$ b) $f(x)=-2x^2+3x-3$

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số $\dfrac{m^2+1}{2m}$ để hàm số $y=-x^2+2mx+1$ đồng biến trên $(-\infty;3)$.

Bài tập 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số bậc hai $y=-4x^2+4mx-m^2+2$ nghịch biến trên $(-2;+\infty)$.

Bài tập 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=(m^2+1)x^2-4mx+1$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Bài tập 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^2-(m^2+1)x+3$ đồng biến trên $(1;+\infty)$

Bài tập 6: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^2+2(m-1)x+2m+1$ nghịch biến trên $(-1;2)$

Bài tập 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=(m-2)x^2-2mx+m+2025$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Bài tập 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=mx^2-(2m+1)x+3$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Bài tập 9: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hóa hình parabol (minh họa như hình vẽ dưới đây) có chiều rộng $d=8$ mét và ciều cao $h=8$ mét. Hỏi phải đặt một chậu cây cảnh có chiều cao $2,88$ mét cách mép cửa một khoảng bao nhiêu mét để ngọn cây không chạm vào thành cửa?

Bài tập 10: Cho hàm số: $y = f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ với $a,\ b,\ c$ là các tham số $\left(a > 0\right)$. Biết rằng $f\left(x\right)$ đồng biến trên khoảng $\left(-2;+\infty\right)$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \dfrac{6a^2}{5a^2 + 2ab + b^2}$.

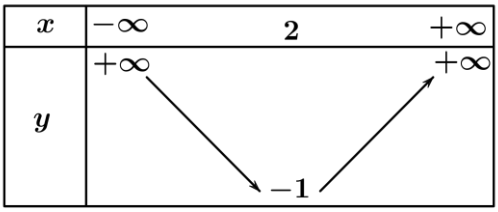
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $y=-x^2+2x+3$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

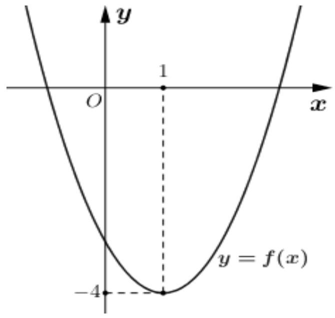
Câu 2: Hàm số $y=f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:



Hỏi hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?



A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^2-2(m-1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

A. $m\le 1$. **B.** $m>2$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m>1$.

Câu 5: Hàm số $y=-3x^2+6x-1$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Câu 6: Hàm số $y=ax^2+bx+c\ \ (a>0)$ đồng biến trong khoảng nào sau đậy?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\Delta}{4a};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 7: Hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a>0)$ nghịch biến trong khoảng nào sau đậy?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\Delta}{4a};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^2+4x+1$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Trên khoảng $(-\infty;1)$ hàm số đồng biến.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

C. Trên khoảng $(3;+\infty)$ hàm số nghịch biến.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

Câu 9: Hàm số $y=x^2-4x+11$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;+\infty)$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2)$

Câu 10: Khoảng đồng biến của hàm số $y=x^2-4x+3$là:

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Câu 11: Khoảng nghịch biến của hàm số $y=x^2-4x+3$là

A. $(-\infty;-4)$. **B.** $(-\infty;-4)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Câu 12: Cho hàm số $y=-x^2+4x+3$. Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 13: Hàm số $f(x)=x^2-2x+3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

Câu 14: Hàm số $y=-3x^2+x-2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{6};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{6};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{6}\right)$.

Câu 15: Cho hàm số $y=-x^2+6x-1$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;6)$ **D.** $(6;+\infty)$

Câu 16: Cho hàm số $y=x^2-3mx+m^2+1$ (1), m là tham số. Khi $m=1$ hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số *m* để hàm số $y=x^2-2(m+1)x-3$ đồng biến trên khoảng $(4;2018)$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của b để hàm số $y=x^2+2(b+6)x+4$ đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

A. $b\ge 0$. **B.** $b=-12$. **C.** $b\ge -12$. **D.** $b\ge -9$.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=-2x^2+(m-1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m\le 3$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\le 5$. **D.** $m>5$.

Câu 20: Hàm số $y=2x^2+4x-2025$

A. Đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 21: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$?

A. $y=\sqrt{2}x^2+1$. **B.** $y=-\sqrt{2}x^2+1$. **C.** $y=\sqrt{2}(x+1)^2$. **D.** $y=-\sqrt{2}(x+1)^2$.

Câu 22: Hàm số $y=-x^2+2(m-1)x+3$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ khi giá trị m thỏa mãn:

A. $m\le 0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $0<m\le 2$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai $(P): y=ax^2+bx+c\,(a\ne 0)$ có đồ thị là đường parabol có đỉnh $I(1;-4)$ và cắt trục hoành tại 2 điểm $A(-1;0)$ và $B(3;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Parabol có trục đối xứng là $x=1$.

b) Parabol có bề lõm quay lên trên.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Giá trị của $2a+b+2c=6$

Câu 2: Cho hàm số bậc hai $y=x^2-4x+1\,(P)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có hệ số $b=-4$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -3.

d) Đường thẳng $y=-2$ cắt (P) tại hai điểm $A(x_A;y_A),B(x_B;y_B)\,(x_A<x_B)$ và ${x_A}^2-{x_B}^2=-10$

Câu 3: Một khách sạn có 50 phòng. Nếu mỗi phòng cho thuê với giá 400 nghìn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá lên 20 nghìn đồng thì có thêm hai phòng bỏ trống không có người thuê. Giám đốc khách sạn muốn tăng giá thuê phòng một ngày và đã chọn giá mới để cho thuê mỗi phòng một ngày là x (nghìn đồng). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện của x là $x\ge 400$.

b) Giá thuê phòng chênh lệch sau khi tăng là: $x-400$ (nghìn đồng).

c) Số lượng phòng cho thuê giảm đi khi chọn mức giá thuê phòng mới là: $\dfrac{x-400}{20}.2=\dfrac{x-400}{10}$ (phòng).

d) Thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất khi giá thuê phòng một ngày là $x=440$ (nghìn đồng).

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^2+800x-120000$ có đồ thị là parabol (P). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Trục đối xứng của (P) có phương trình $x = 400$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;400)$ và đồng biến trên khoảng $(400;+\infty)$.

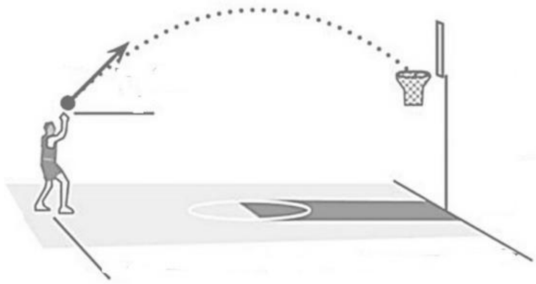
d) Giả sử lợi nhuận của một công ty được biểu thị bởi hàm số $f(x) = -x^2 + 800x - 120000$ (nghìn đồng) với x là số lượng sản phẩm. Để công ty không bị lỗ thì $200 < x < 600$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một người nông dân thả 1000 con cá giống vào hồ nuôi vừa mới đào. Biết rằng sau mỗi năm thì số lượng cá trong hồ tăng thêm x lần số lượng cá ban đầu và x không đổi. Bằng cách thay đổi kĩ thuật nuôi và thức ăn cho cá. Hỏi sau hai năm để số cá trong hồ là 36000 con thì tốc độ tăng số lượng cá trong hồ là bao nhiêu? Biết tốc độ tăng mỗi năm là không đổi.

Câu 2: Một người đang chơi cầu lông có khuynh hướng phát cầu với góc $30°$ (so với mặt đất). Hãy tính khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa), biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0,8$ mét so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là 6 (m/s) (bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng)

Câu 3: Một vận động viên bóng rổ đứng ném bóng vào rổ. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là hình parabol có phướng trình $y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$. Biết quả bóng đạt vị trí cao nhất là 3 mét sau khi vận động viên ném 2 giây. Sau một giây nén ra, quả bóng cao hơn đầu vận động viên 2 mét. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đồng biến trên $(-\infty;d)$ và nghịch biến trên $(d;+\infty)$. Tính giá trị của $2024 + d$.



Câu 4: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol có phương trình $f(t) = at^2 + bt + c\,(a \neq 0)$ trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oht, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao tính bằng mét của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,5$ mét. Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 7 mét và 2 giây sau khi đá lên nó đạt độ cao $6,5$ mét. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên trên $(-\infty;d)$ và nghịch biến trên $(d;+\infty)$. Tính giá trị $12d$.

Câu 5: Một cửa hàng sách mua sách từ nhà xuất bản với giá 50 (nghìn đồng)/cuốn. Cửa hàng ước tính rằng, nếu bán một cuốn sách với giá x nghìn đồng thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(150 - x)$ cuốn sách. Hỏi cửa hàng bán một cuốn sách giá bao nhiêu nghìn đồng thì mỗi tháng sẽ tăng lợi nhuận nhất.

Câu 6: Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao 75 mét so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 mét. Các dây cáp có hình dạng đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

-----------------HẾT-----------------

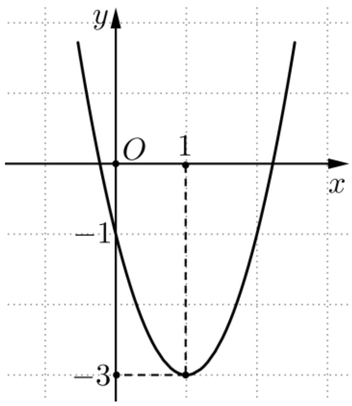
Dạng 3: Đọc đồ thị và bảng biến thiên của hàm số bậc hai

Phương pháp: Để đọc đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ ta cần xác định các yếu tố sau:

- Xác định được tọa độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$
- Xác định được hệ số a, từ đó suy ra khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số
- Xác định giao điểm (nếu có) của đồ thị hàm số với các trục tọa độ

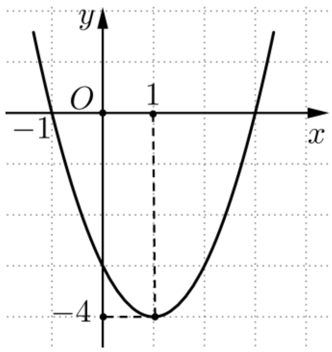
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau

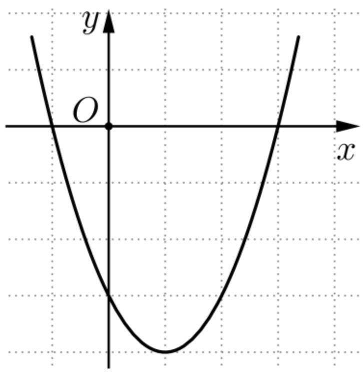


Tìm phương trình của parabol.

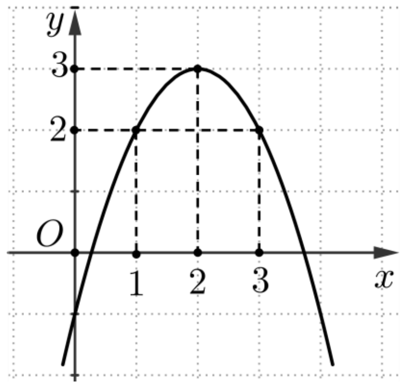
Bài tập 2: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Tính $2a + b + 2c$



Bài tập 3: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như bên. Xác định dấu của các hệ số a, b, c



Bài tập 4: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên



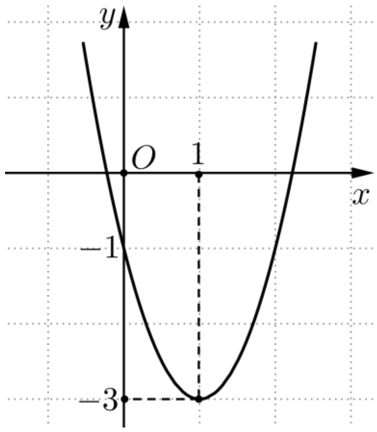
Xác định hàm số bậc hai $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

Bài tập 5: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

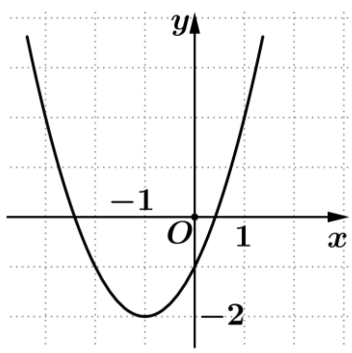
x	0	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	-1 ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Xác định dấu của a, b, c.

Bài tập 6: Cho parabol $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình sau. Tính $a + b + c$

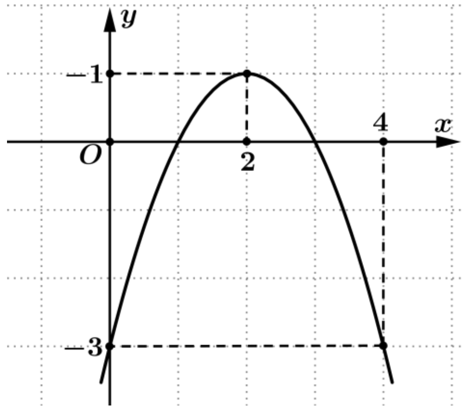


Bài tập 7: Hàm số $y = x^2 + 2x - 1$ có đồ thị như hình bên. Dựa vào đồ thị tìm các giá trị m để phương trình $x^2 + 2x + m = 0$ vô nghiệm.



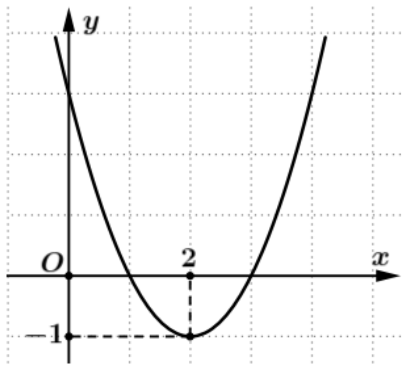
Bài tập 8: Tìm các giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $x^2-2|x|+1-m=0$ có bốn nghiệm phân biệt?

Bài tập 9: Cho đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-3$ có đồ thị như hình vẽ sau



Từ đồ thị trên hãy suy ra đồ thị của hàm số $y=\left|-x^2+4x-3\right|$

Bài tập 10: Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $\left|f(x)\right|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Bảng biến thiên của hàm số $y=-x^2+2x-1$ là:

A.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y			0		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

B.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y			-1		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

C.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			0		

D.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			-1		

Câu 2: Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y=-x^2+2x+2$?

A.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			-1		

B.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y			-1		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

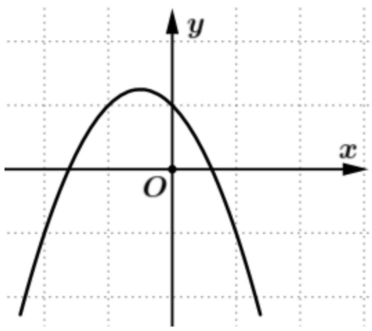
C.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y			3		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

D.

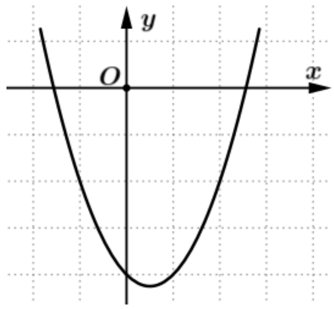
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$				$+\infty$
		$\searrow$		$\nearrow$	
			3		

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ có hệ số a là:



A. $a>0$. **B.** $a<0$. **C.** $a=1$. **D.** $a=2$.

Câu 4: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a>0,\ b<0,\ c<0$. **B.** $a>0,\ b<0,\ c>0$. **C.** $a>0,\ b>0,\ c>0$. **D.** $a<0,\ b<0,\ c<0$.

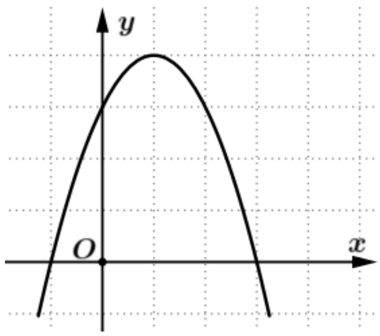
Câu 5: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

x	0	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	-1 ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Xác định dấu của a, b, c.

A. $a<0,b<0,c>0$. **B.** $a<0,b>0,c>0$. **C.** $a<0,b>0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c<0$.

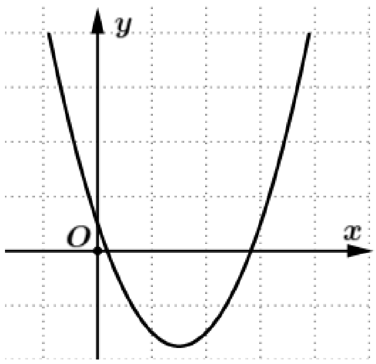
Câu 6: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

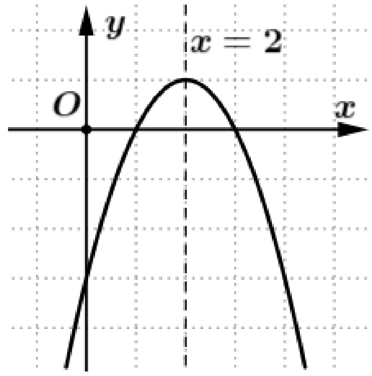
A. $a>0$, $b>0$, $c>0$. **B.** $a>0$, $b<0$, $c<0$. **C.** $a<0$, $b<0$, $c>0$. **D.** $a<0$, $b>0$, $c>0$.

Câu 7: Cho đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $a>0,b=0,c>0$. **B.** $a>0,b>0,c>0$. **C.** $a>0,b<0,c>0$. **D.** $a<0,b>0,c>0$.

Câu 8: Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?



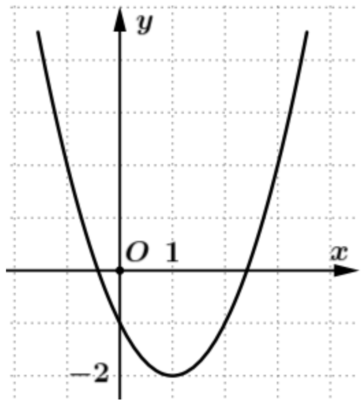
A. $y=-x^2+4x-3$. **B.** $y=-x^2-4x-3$. **C.** $y=-2x^2-x-3$. **D.** $y=x^2-4x-3$.

Câu 9: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	-4	↗ $+\infty$

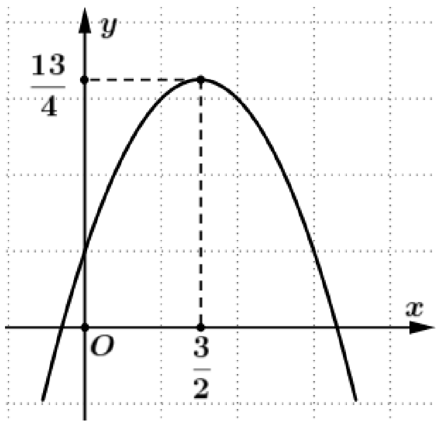
A. $y=x^2-4x$. **B.** $y=x^2+4x$. **C.** $y=-x^2+4x$. **D.** $y=-x^2-4x$.

Câu 10: Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các phương án A;B;C;D sau đây?



A. $y=x^2+2x-1$. **B.** $y=x^2+2x-2$. **C.** $y=2x^2-4x-2$. **D.** $y=x^2-2x-1$.

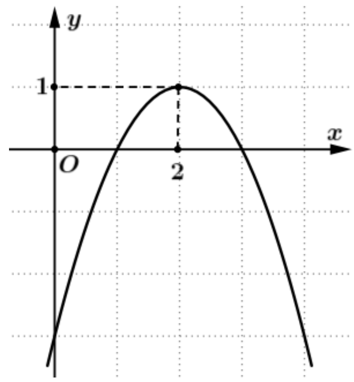
Câu 11: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol như hình vẽ.



Hỏi parabol có phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

A. $y=x^2+3x-1$. **B.** $y=x^2-3x-1$. **C.** $y=-x^2-3x-1$. **D.** $y=-x^2+3x+1$.

Câu 12: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên dưới



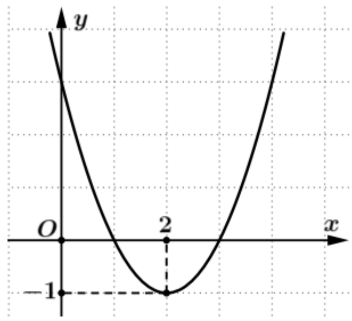
A. $y=-x^2+2x-3$. **B.** $y=-x^2+4x-3$. **C.** $y=x^2-4x+3$. **D.** $y=x^2-2x-3$.

Câu 13: Bảng biến thiên sau đây là bảng biến thiên của hàm số nào?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$

A. $y=x^2+4x$. **B.** $y=-x^2-4x-8$. **C.** $y=-x^2-4x+8$. **D.** $y=-x^2-4x$.

Câu 14: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây ?

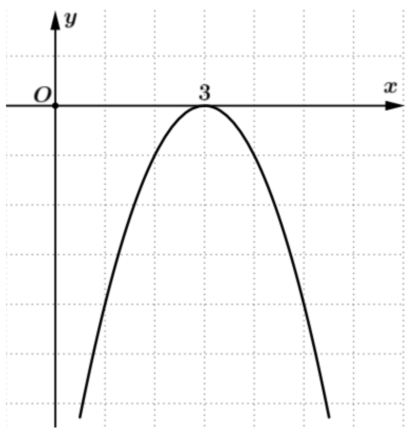


Giá trị của tổng $T=4a+2b+c$ là :

A. $T=2$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=4$. **D.** $T=3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai (P): $y=-x^2+6x-9$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



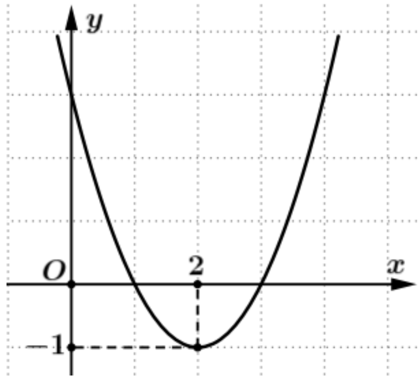
a) Đồ thị hàm số (P) phía dưới trục hoành.

b) Đồ thị hàm số (P) đi qua điểm $A(1;-4)$.

c) Phương trình $f(x)+2m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt nếu $m>\frac{1}{2}$.

d) Với $m>\frac{1}{2}$ thì đồ thị (P) cắt đường thẳng $y=1-2m$ tại hai điểm phân biệt $M(x_M;y_M)$ và $N(x_N;y_N)$. Biểu thức $P=x_My_N+x_Ny_M+4m^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -3.

Câu 2: Cho hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ (P) có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



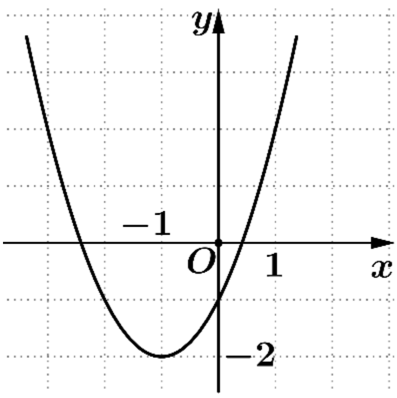
a) (P) có tung độ đỉnh bằng 2.

b) (P) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ trái dấu.

c) $y>2$ $\forall x<0$.

d) (P) đi qua điểm $M\left(3;\frac{-1}{4}\right)$

Câu 3: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



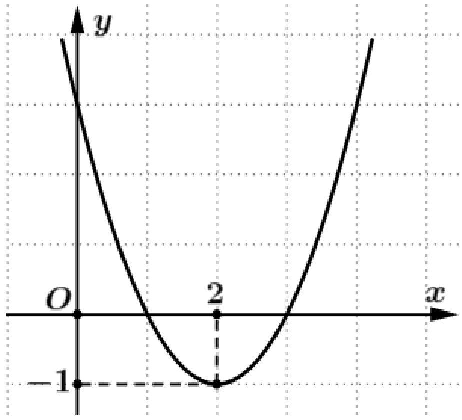
a) $a>0$.

b) Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt.

c) $b > 0$ và $c < 0$.

d) Phương trình $ax^2 + bx + c = 2$ có hai nghiệm trái dấu.

Câu 4: Cho Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c \ (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Parabol có hệ số $a > 0$.

b) Parabol có trục đối xứng $x = 2$ và có tọa độ đỉnh là $I(2;-1)$.

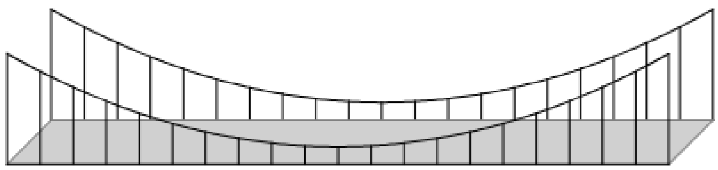
c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

d) Phương trình của Parabol là $y = x^2 - 4x + 2$.

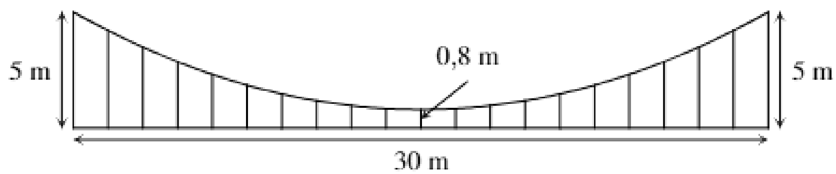
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol có phương trình $y = \frac{-3}{1000}x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc Oy (mét) là độ cao của vật so với mặt đất. Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O. Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 2: Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.



Hình vẽ cầu dây văng



Hình chiếu đứng của cầu dây văng

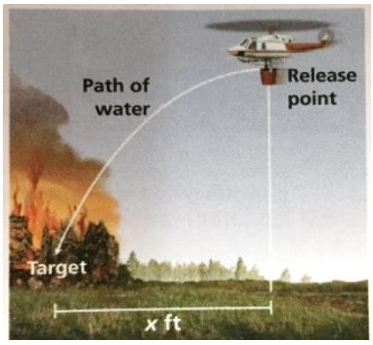
Dựa vào bản vẽ ở Hình, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên biết:

Dây dài nhất là 5 mét, dây ngắn nhất là 0,8 mét. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

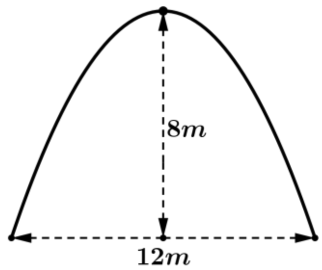
Nhịp cầu dài 30 mét.

Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.

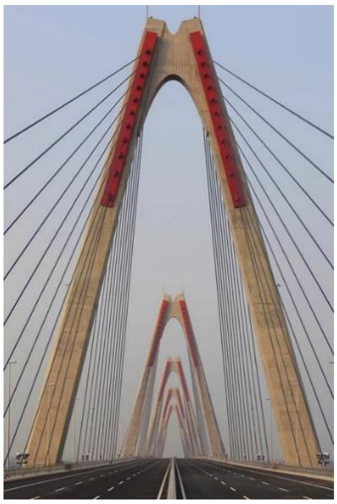
Câu 3: Một máy bay trực thăng cứu hộ bay ở độ cao 500 (feet) so với mặt đất, đang chuẩn bị phun nước vào một đám cháy rừng từ trên không. Độ cao h (feet) của nước so với mặt đất tính theo thời gian t (s) kể từ lúc máy bay phun ra là một hàm số bậc 2. Tại thời điểm 5s sau nước phun thì tới được phía trên đám cháy đang bốc lửa cao 90m. Tính khoảng cách từ đám cháy đến máy bay theo phương ngang biết rằng khoảng cách theo phương ngang tính từ điểm cháy đến máy bay là $x = 85$ (ft)



Câu 4: Một đường hầm xuyên thẳng qua núi và có mặt cắt là một parabol (thông số như hình bên). Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang 6 mét đi vào vị trí chính giữa miệng hầm. Biết chiều cao h của xe tải thoả mãn $a < h < b$ để có thể đi vào cửa hầm mà không chạm tường. Tính $a + b$



Câu 5: Cầu Nhật Tân bắc qua sông Hồng được xem là chiếc cầu dây văng dài nhất Việt Nam. Cầu có 5 trụ tháp chính kết nối các nhịp dây văng nâng đỡ toàn bộ phần chính của cây cầu, cũng là để tượng trưng cho 5 cửa ô cổ kính của Hà Nội. Mỗi trụ tháp được kiến trúc tạo dáng mĩ thuật phía trong bằng đường cong tựa như một parabol. Giả sử biết độ rộng của mặt đường khoảng 43 mét. Một người đã dùng dây dọi (không giãn) gắn lên thành trụ cầu ở vị trí B và điều chỉnh độ dài dây dọi để quả nặng vừa chạm đất (khi lặng gió), sau đó đo được chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là 1,87 mét và khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là 20 cm. Nếu dùng dữ liệu tự thu thập được và tính toán theo cách ở trên thì người này sẽ ước tính được độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là bao nhiêu?



Câu 6: Sức mạnh động cơ (tính bằng đơn vị mã lực) sinh ra từ máy của một canô ở tốc độ quay r vòng/ phút được xác định bởi hàm số: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$. Vậy sức mạnh lớn nhất của động cơ này đạt được là bao nhiêu? Khi đó, động cơ phải quay bao nhiêu vòng/ phút

-----------------HẾT-----------------

Dạng 4: Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và các bài toán liên quan đến hàm số bậc hai

Phương pháp: Xét hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$ ta cần xác định các yếu tố sau:

- Xác định được tọa độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$
- Xác định được hệ số a, từ đó suy ra khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số
- Vẽ bảng biến thiên để xét các yếu tố cần tìm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị là (P).

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P).

b) Nhận xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $(0;3)$.

c) Tìm tập hợp giá trị x sao cho $y \leq 0$.

d) Tìm các khoảng của tập xác định để đồ thị (P) nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y = 8$.

e) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y = 7x^2 - 3x + 10$

b) $y = -2x^2 - x + 1$.

c) $y = x^2 - 3x$ với $0 \leq x \leq 2$

d) $y = -x^2 - 4x + 3$ với $0 \leq x \leq 4$.

e) $y = x(x+1)(x-2)(x-3)$

f) $y = (2x-1)^2 - 4|2x-1| + 3$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$.

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 13.

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2x^2 + x - 3$ là

A. -3. **B.** -2. **C.** $\frac{-21}{8}$. **D.** $\frac{-25}{8}$.

Câu 3: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{12}$

B. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{12}$

C. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{3}$

D. Hàm số $y = -3x^2 + x + 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{3}$.

Câu 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -3x^2 + 2x + 1$ trên đoạn $[1;3]$ là:

A. $\frac{4}{5}$ **B.** 0 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** -20

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2|x|$ là:

A. 1 **B.** 0 **C.** -1 **D.** -2

Câu 6: Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x \le 2 \\ 2x - 12 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x \in [-1;4]$. Tính $M + m$.

A. -14. **B.** -13. **C.** -4. **D.** -9.

Câu 7: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ bằng 1 khi giá trị của tham số m là:

A. $m = \pm 4$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m \in \varnothing$.

Câu 8: Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $m \in [-1;0)$. **B.** $m \in \left(\frac{3}{2};5\right)$. **C.** $m \in \left(-\frac{5}{2};-1\right)$. **D.** $m \in \left(0;\frac{3}{2}\right)$.

Câu 9: Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2x + 2m + 3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng -3.

A. $m = 0$. **B.** $m = -9$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = -3$.

Câu 10: Cho hàm số $y = 2x^2 - 3(m+1)x + m^2 + 3m - 2$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất.

A. $m = -2$ **B.** $m = 1$ **C.** $m = 3$ **D.** $m = 5$

Câu 11: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in [-10;-4)$ để đường thẳng $d: y = -(m+1)x + m + 2$ cắt parabol $(P): y = x^2 + x - 2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?

A. 6 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 8

Câu 12: Cho hàm số $y = x^2 + 3x$ có đồ thị (P). Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y = x + m^2$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn AB nằm trên đường thẳng $d': y = 2x + 3$. Tổng bình phương các phần tử của S là:

A. 6. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 13: Cho hàm số $y = 2x^2 - 3x - 5$. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y = 4x + m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; x_2)$ thỏa mãn $2x_1^2 + 2x_2^2 = 3x_1x_2 + 7$ là

A. -10. **B.** 10. **C.** -6. **D.** 9.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y = mx + 3 - 2m$ cắt parabol $y = x^2 - 3x - 5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

A. $m < -3$. **B.** $-3 < m < 4$. **C.** $m < 4$. **D.** $m \le 4$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = -(x-a)(x-b)$ có đồ thị là (P) $(a < b)$. Biết (P) có đỉnh $I(1;4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a^2 + b^2 = 9$.

b) Đường thẳng $(d): y = x + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

c) $f(x) > 0\ \forall x \in (-1;2)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[-\frac{1}{2};2\right]$ là $\frac{7}{4}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = -x^2 + 6x - 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đồ thị của hàm số là parabol có đỉnh $I(3;-4)$.

b) $y < 0$ khi $x \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3.

d) Đường thẳng $d: y = 4x - m$ cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt khi $m > 4$.

Câu 3: Cho hàm số $y = -x^2 + 2x - 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

b) Đồ thị của hàm số là parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y_{\max} = -4$ khi $x = 1$.

Câu 4: Một hòn đá được ném lên theo phương thẳng đứng. Khi bỏ qua sức cản không khí, chuyển động của hòn đá tuân theo phương trình $y=-6t^2+12t+18$. Ở đây $t=0$ là thời điểm được ném lên, $y(t)$ có đơn vị: mét là độ cao của hòn đá tại thời điểm $t(s)$ sau khi ném. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Quỹ đạo chuyển động của hòn đá là một parabol.

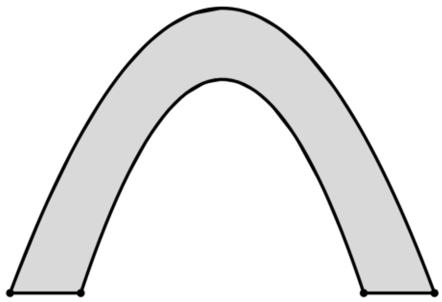
b) Sau $1,5$ giây thì hòn đá đạt độ cao lớn nhất.

c) Độ cao lớn nhất của hòn đá là 25 mét.

d) Sau 3 giây thì hòn đá chạm đất.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol (như hình vẽ) sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng BC là 9 mét. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK=1,6$ mét và khoảng cách từ K tới chân cổng gần nhất là $BK=0,5$ mét. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

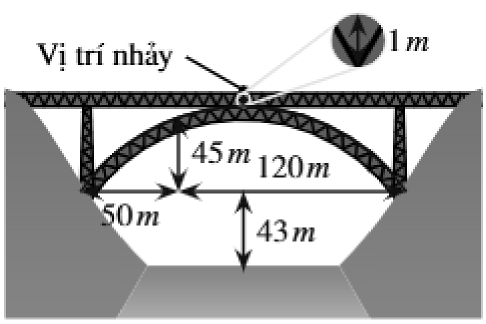


Câu 2: Chị Huyền dùng 40 m lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau. Tìm chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Huyền có thể rào được.

Câu 3: Một quả bóng được ném lên trên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu $14,7$ (m/s). Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) có thể mô tả bởi phương trình $h(t)=-4,9t^2+14,7t$. Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

Câu 4: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Câu 5: Nhảy bungee là một trò chơi mạo hiểm. Trong trò chơi này, người chơi đứng ở vị trí trên cao,thắt dây an toàn và nhảy xuống. Sợi dây này có tính đàn hồi và được tính toán chiều dài để nó kéo người chơi lại khi gần chạm đất (hoặc mặt nước). Chiếc cầu trong Hình 1 có bộ phận chống đỡ dạng parabol. Một người muốn thực hiện một cú nhảy bungee từ giữa cầu xuống với dây an toàn.



Người này cần trang bị sợi dây an toàn dài bao nhiêu? Biết rằng chiều dài của sợi dây đó bằng một phần ba khoảng cách từ vị trí bắt đầu nhảy đến mặt nước.

Câu 6: Một công ty sản xuất một sản phẩm bán cho các đại lí bán lẻ trên toàn quốc. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán: $p(x)=1000-50x$ trong đó $p(x)$(triệu đồng) là giá bán lẻ mỗi sản phẩm mà tại giá bán này x sản phẩm được bán ra. Tìm doanh thu lớn nhất mà công ty đạt được.

-----------------HẾT-----------------

BÀI 03 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tam thức bậc hai

Định nghĩa: Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$, trong đó a,b,c là những hệ số, $a\neq 0$.

Nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

Biệt thức $\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=b'^2-ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

2 Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ \left(a\neq 0\right),\Delta=b^2-4ac$.

- Nếu $\Delta<0$ thì $f\left(x\right)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta=0$ thì $f\left(x\right)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\neq -\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta>0$ thì $f\left(x\right)$ luôn:
  Cùng dấu với hệ số a khi $x\in\left(-\infty;x_1\right)\cup\left(x_2;+\infty\right)$
  Trái dấu với hệ số a khi $x\in\left(x_1;x_2\right)$.

Trong đó $x_1.x_2$ *là hai nghiệm của* $f\left(x\right)$.

- Khi $\Delta>0$, dấu của $f\left(x\right)$ và a là: "trong trái ngoài cùng"

Cách xét dấu của tam thức bậc hai:

- **Bước 1:** Tính và xác định dấu của biệt thức Δ
- **Bước 2:** Xác định nghiệm của $f\left(x\right)$ (nếu có)
- **Bước 3:** Xác định dấu của hệ số a
- **Bước 4:** Xác định dấu của $f\left(x\right)$

Chú ý: Khi xét dấu của tam thức bậc hai, ta có thể dùng biệt thức thu gọn Δ' thay cho biệt thức Δ.

Nhận xét: Cho tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$.

$\oplus$ $ax^2+bx+c>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta<0\end{cases}$ $\oplus$ $ax^2+bx+c<0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta<0\end{cases}$

$\oplus$ $ax^2+bx+c\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$ $\oplus$ $ax^2+bx+c\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\ \Delta\leq 0\end{cases}$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Biến đổi biểu thức về các tam thức bậc hai và vận dụng các định lí về dấu của tam thức bậc hai.

- **Bước 1:** Tính và xác định dấu của biệt thức Δ
- **Bước 2:** Xác định nghiệm của $f(x)$ (nếu có)
- **Bước 3:** Xác định dấu của hệ số a
- **Bước 4:** Xác định dấu của $f(x)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $3x^2-2x+1$

b) $-x^2+4x+5$

c) $4x^2+4x+1$

d) $2x^2-6x+\dfrac{9}{2}$

e) $3x^2-2x-8$

f) $-x^2+2x-1$

Bài tập 2: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x)=2x^2+x+6$

b) $f(x)=4x^2-4x+1$

c) $f(x)=x^2-\dfrac{3}{2}x-1$

d) $f(x)=(4-3x)(x^2-5x+6)$

e) $f(x)=(1-\sqrt{2})x^2-2x+1+\sqrt{2}$

f) $f(x)=-0,3x^2+x-1,5$

g) $f(x)=x^2+(\sqrt{5}-1)x-\sqrt{5}$

h) $f(x)=\sqrt{3}x^2+(\sqrt{3}+1)x+1$

Bài tập 3: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f(x)=(x+3)(2x^2+5x+2)$

b) $f(x)=(x^2-7x+12)(1-x)$

c) $f(x)=\dfrac{2x-x^2}{3+x}$

d) $f(x)=\dfrac{2x^2-9x+7}{4-x^2}$

e) $f(x)=x^2-2x+5.$

f) $f(x)=x^2-5x-6.$

g) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+3}{x-1}.$

h) $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-4}$

g) $f(x)=x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$

h) $f(x)=\dfrac{2x-5}{4x^2-19x+12}$

Bài tập 4: Tìm x để biểu thức $P(x)=(x-1)(x^3-4x)-(x+2)(x^3+3x-2)$ nhận giá trị dương.

Bài tập 5: Một công ty du lịch thấy rằng khi bán tour chất lượng cao Hà Nội - TP Hồ Chí Minh trong 5 ngày 4 đêm với giá là x triệu đồng thì doanh thu F (tính theo đơn vị triệu đồng) sẽ là $F(x)=-10x^2+410x.$ Với đơn giá nào của tour thì doanh thu từ việc bán tour vượt mức 4 tỉ đồng?

Bài tập 6: Một quán buffet báo giá cho đoàn khách như sau: 10 khách đầu tiên có giá là 300000 đồng/ người. Nếu có nhiều hơn 10 người thì cứ thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/ người cho toàn bộ đoàn khách. Số người của nhóm khách nhiều nhất là bao nhiêu thì quán không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực cho bữa ăn này 3000000 đồng?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Với giá trị x nào sau đây thì tam thức $y = x^2 - 2x - 3$ nhận giá trị dương ?

A. $x = -1$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 0$.

Câu 2: Tam thức $y = 235x^2 + 87x - 197$ có hai nghiệm phân biệt vì

A. $\Delta < 0$. **B.** $a.c < 0$. **C.** $a.c > 0$. **D.** $b.c < 0$.

Câu 3: Với giá trị nào của tham số m thì biểu thức $y = mx^2 - 4x - 8$ là tam thức bậc hai có nghiệm kép?

A. $m > -\frac{1}{2}$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m < \frac{1}{2}$. **D.** $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 4: Tìm tổng các giá trị của tham số m để biểu thức $y = -(m+2)x^2 - (m^2 - 1)x + 3m$ là tam thức bậc hai có nghiệm $x = -1$?

A. -2. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 4.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a \in [-100;100]$ để tam thức $y = x^2 - ax + 1$ có hai nghiệm dương phân biệt?

A. 98. **B.** 99. **C.** 97. **D.** 100.

Câu 6: Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có nghiệm?

A. $b \in \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$. **B.** $b \in \left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$.

C. $b \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right] \cup \left[2\sqrt{3}; +\infty\right)$. **D.** $b \in \left(-\infty; -2\sqrt{3}\right) \cup \left(2\sqrt{3}; +\infty\right)$.

Câu 7: Giá trị nào của m thì biểu thức $y = (m-3)x^2 + (m+3)x - (m+1)$ (1) là tam thức bậc hai vô nghiệm?

A. $m \in \left(-\infty; -\frac{3}{5}\right) \cup (1; +\infty) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in \left(-\frac{3}{5}; +\infty\right)$.

C. $m \in \left(-\frac{3}{5}; 1\right)$. **D.** $m \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Câu 8: Tam thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi $x < 2$?

A. $x^2 - 5x + 6$. **B.** $16 - x^2$. **C.** $x^2 - 2x + 3$. **D.** $-x^2 + 5x - 6$.

Câu 9: Tam thức $-x^2 - 3x - 4$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x < -4$ hoặc $x > -1$. **B.** $x < 1$ hoặc $x > 4$.

C. $-4 < x < -4$. **D.** $x \in \mathbb{R}$.

Câu 10: Tam thức $y = x^2 - 12x - 13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x < -13$ hoặc $x > 1$. **B.** $x < -1$ hoặc $x > 13$. **C.** $-13 < x < 1$. **D.** $-1 < x < 13$.

Câu 11: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x^2 - 6x + 8$ không dương?

A. $[2;3]$. **B.** $(-\infty;2] \cup [4;+\infty)$. **C.** $[2;4]$. **D.** $[1;4]$.

Câu 12: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x) = x^2 + 9 - 6x$ luôn dương?

A. $\mathbb{R} \setminus \{3\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Câu 13: Khi xét dấu biểu thức $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-1}$ ta có

A. $f\left(x\right)>0$ khi $-7<x<-1$ hoặc $1<x<3$.

B. $f\left(x\right)>0$ khi $x<-7$ hoặc $-1<x<1$ hoặc $x>3$.

C. $f\left(x\right)>0$ khi $-1<x<0$ hoặc $x>1$.

D. $f\left(x\right)>0$ khi $x>-1$.

Câu 14: Tìm x để $f\left(x\right)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$ không âm.

A. $(1;3]$. **B.** $(1;2]\cup[3;+\infty)$. **C.** $[2;3]$. **D.** $(-\infty;1)\cup[2;3]$.

Câu 15: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f\left(x\right)=x\left(5x+2\right)-x\left(x^2+6\right)$ không dương?

A. $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **B.** $[1;4]$. **C.** $(1;4)$. **D.** $[0;1]\cup[4;+\infty)$

Câu 16: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f\left(x\right)=x\left(x^2-1\right)$ không âm?

A. $(-\infty;-1)\cup[1;+\infty)$. **B.** $[-1;0]\cup[1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1]\cup[0;1)$. **D.** $[-1;1]$.

Câu 17: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x^2+4x+3}$ không dương?

A. $S=(-\infty;1)$.

B. $S=(-3;-1)\cup[1;+\infty)$.

C. $S=(-\infty;-3)\cup(-1;1]$.

D. $S=(-3;1)$.

Câu 18: Khi xét dấu biểu thức $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-1}$ ta có

A. $f\left(x\right)>0$ khi $-7<x<-1$ hoặc $1<x<3$.

B. $f\left(x\right)>0$ khi $x<-7$ hoặc $-1<x<1$ hoặc $x>3$.

C. $f\left(x\right)>0$ khi $-1<x<0$ hoặc $x>1$.

D. $f\left(x\right)>0$ khi $x>-1$.

Câu 19: Tìm số nguyên lớn nhất của x để đa thức $f\left(x\right)=\dfrac{x+4}{x^2-9}-\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{4x}{3x-x^2}$ luôn âm.

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Câu 20: Một khung dây thép hình chữ nhật có chiều dài 16 cm và chiều rộng 11 cm được uốn lại thành khung hình chữ nhật mới có kích thước $(16+x)$ và $(11-x)$cm. Với x nằm trong khoảng nào thì diện tích của khung sau khi uốn tăng lên?

A. $(-5;0)$.

B. $(-\infty;-5)\cup(0;+\infty)$.

C. $(-16;11)$.

D. $(-\infty;-16)\cup(11;+\infty)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho các biểu thức $f(x)=-4x^2+3x+1$; $g(x)=x^3+3x^2-1$; $h(x)=2x^2-3x+1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có hai biểu thức là tam thức bậc hai

b) Nghiệm tam thức $f(x)$ là $x=1; x=-\frac{1}{3}$.

c) Tam thức $h(x)$ không âm khi $x\le\frac{1}{2}\vee x\ge 1$.

d) $h(x)\ge m;\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $m<-\frac{1}{8}$.

Câu 2: Cho các tam thức bậc hai $f(x)=x^2+5x+6$; $g(x)=x^2+6x+9$; $h(x)=-x^2+4x-4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tam thức $g(x)$ không âm $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Tam thức $h(x)$ âm $\forall x\in\mathbb{R}$.

c) Tam thức $f(x)$ không âm khi $2\le x\le 3$.

d) Tam thức $f(x)-h(x)$ luôn dương $\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 3: Cho $f(x)=-x^2+2(m-1)x+m-3$ (m là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m=1$ thì $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Khi $m>3$ thì $f(x)$ có hai nghiệm trái dấu.

c) Khi $m\in(-1;2)$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt.

d) Khi $m\in[-1;2]$ thì $f(x)\le 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 4: Cho phương trình $f(x)=mx^2-(4m+1)x+4m+2$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m=0$ thì $f(x)=0$ vô nghiệm.

b) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-\frac{1}{4}<m<0$.

c) Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

d) Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa $x_1<1<x_2$ khi $-2<m<0$.

Câu 5: Cho tam thức $f(x)=x^2-mx+m+3$, với m là tham số thực. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m=2$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt.

b) Khi $m=2$ thì tam thức luôn âm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Khi $m=-2$ thì tam thức luôn không âm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Có 7 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ luôn xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một công ty du lịch báo giá tiền cho chuyến đi du lịch của một nhóm khách như sau: Nếu có 30 khách thì giá vé là 300000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 30 khách thì cứ thêm 1 người giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ khách. Giả sử nhóm du lịch có hơn 30 khách. Gọi x là số lượng khác từ người thứ 31 trở đi và chi phí công ty bỏ ra cho nhóm khách du lịch là 10080000 đồng. Số lượng khách thêm vào lớn nhất là là bao nhiêu người thì công ty không bị lỗ.

Câu 2: Một cửa hàng kinh doanh xăng dầu. Kế toán của cửa hàng đã tính toán lợi nhuận khi bán xăng A95 hàng ngày theo công thức sau $y=-86x^2+86000x-18146000$, trong đó x là số lít xăng A95 được bán ra. y lợi nhuận thu được theo đơn vị đồng. Hỏi cửa hàng bán tối thiểu bao nhiêu lít xăng thì sẽ có lợi nhuận.

Câu 3: Một chú thỏ đen chạy đuổi theo một chú thỏ trắng ở vị trí cách nó 100 m. Biết rằng, quãng đường chú thỏ đen chạy được biểu thị bởi công thức $s(t)=8t+5t^2$(m), trong đó t (giây) là thời gian tính từ thời điểm chú thỏ đen bắt đầu chạy, và chú thỏ trắng chạy với vận tốc không đổi là 3 (m/s). Tại những thời điểm $t \in (a;+\infty)$ thì chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng. Tính $2a+8$

Câu 4: Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2+300Q+200000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng. Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm $Q \in [a;b]$ để không bị lỗ. Tính $a+b$

Câu 5: Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách như sau: 50 khách đầu tiên có giá 300000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm một người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ hành khách. Biết chi phí thực sự của chuyến đi là 15080000 đồng. Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu để công ty không bị lỗ?

Câu 6: Một quả bóng được đá lên từ mặt đất, biết rằng chiều cao y (mét) của quả bóng so với mặt đất được biểu diễn bởi một hàm số bậc hai theo thời gian t (giây). Sau 3 giây kể từ lúc được đá lên quả bóng đạt chiều cao tối đa là 21 m và bắt đầu rơi xuống. Hỏi thời điểm t lớn nhất là bao nhiêu ($t \in \mathbb{Z}$) để quả bóng vẫn đang ở độ cao trên 10 m so với mặt đất?

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Bất phương trình bậc hai một ẩn

Phương pháp: Để giải bất phương trình bậc hai ta dựa vào việc xét dấu tam thức bậc hai

- **Bước 1:** Xét dấu tam thức bậc hai ở vế trái.
- **Bước 2:** Chọn những giá trị của x làm cho vế trái dương hoặc âm tùy theo chiều của bất phương trình.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2+2x+1<0$

b) $-36x^2+12x-1\geq 0$

c) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$

d) $\left(x^2-x\right)^2+3\left(x^2-x\right)+2\geq 0$

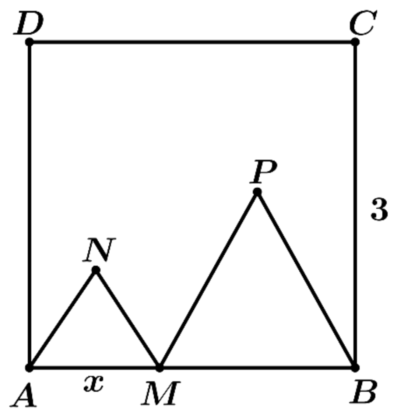
e) $\dfrac{x^2+x-1}{x-2}>\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{x^3-2x}{x^2-3x+2}$

f) $\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)\leq 3\left(x^2+4x+4\right)$

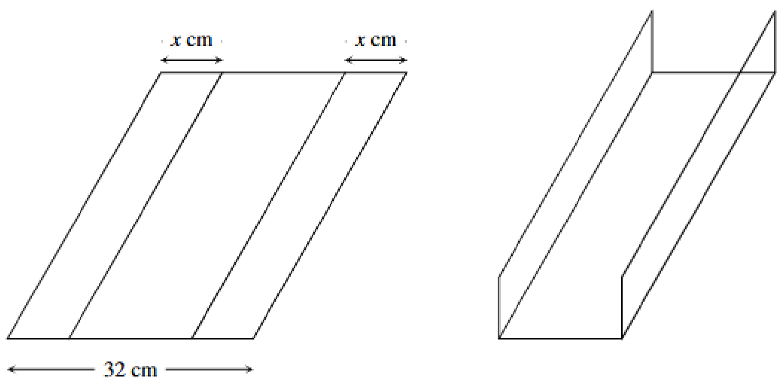
g) $x^2-8x+7\geq 0$

h) $x^2-4x+4>0$

Bài tập 2: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3 và một điểm M di động trên cạnh AB sao cho $AM=x$. Dựng các tam giác đều AMN và MBP nằm bên trong hình vuông $ABCD$. Tìm các giá trị của x sao cho tổng diện tích của hai tam giác đều bé hơn một phần tư diện tích hình vuông $ABCD$.



Bài tập 3: Một người muốn uốn tấm tôn phẳng hình chữ nhật có bề ngang 32 cm, thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đố thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình vẽ. Biết rằng diện tích mặt cắt ngang của rãnh nước phải lớn hơn hoặc bằng tổng $120\,\text{cm}^2$. Hỏi độ cao tối đa của rãnh dẫn nước là bao nhiêu cm?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các bất phương trình sau, với m là tham số, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn?

A. $mx^2 - 2x + 1 \geq 0$. **B.** $(m^2+1)x^2 + 3x + m \geq 0$.

C. $x^3 + 3x - 1 \leq 0$. **D.** $(x-1)x^2 \geq 2$.

Câu 2: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $S = [-2;3]$. **B.** $S = (-2;3)$.

C. $S = (-\infty;-2) \cup (3;+\infty)$. **D.** $S = (-\infty;-2] \cup [3;+\infty)$.

Câu 3: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ là

A. $S = \mathbb{R}$. **B.** $S = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. **C.** $S = (0;+\infty)$. **D.** $S = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Câu 4: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Nghiệm của bất phương trình $f(x) \leq 0$ là

A. $x \in (0;+\infty)$. **B.** $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **C.** $x \in \mathbb{R}$. **D.** $x \in \varnothing$.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 4x - 4 \geq 0$ là

A. $S = \mathbb{R}$. **B.** $S = \varnothing$. **C.** $S = \{2\}$. **D.** $S = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2 + 4x + 5 \geq 0$ là

A. $S = [-1;5]$. **B.** $S = [-5;1]$.

C. $S = (-\infty;-1] \cup [5;+\infty)$. **D.** $S = (-\infty;-5] \cup [1;+\infty)$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $4x^2 + 3x + 2022 > 0$ là

A. $S = \mathbb{R}$. **B.** $S = \varnothing$. **C.** $S = \{0\}$. **D.** $S = \mathbb{R} \setminus \{2022\}$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $x^2 + x - 1 \geq 2x^2 - 7$ là

A. $S=[-2;3]$. **B.** $S=\varnothing$.

C. $S=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$.

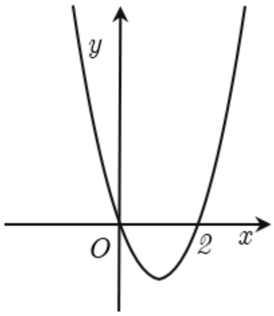
Câu 9: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2x^2-3x-15\le 0$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Câu 10: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $x^2-8x+7\ge 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào **không** là tập con của S ?

A. $(-\infty;0]$. **B.** $[6;+\infty)$. **C.** $[8;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1]$.

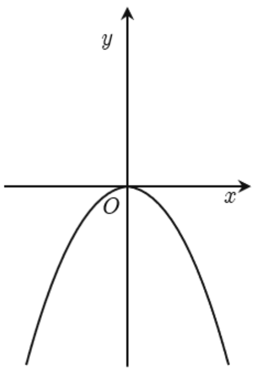
Câu 11: Cho đồ thị của hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ:



Nghiệm của bất phương trình $f(x)>0$ là

A. $x\in(-\infty;0)\cup(2;+\infty)$. **B.** $x\in(0;2)$. **C.** $x\in\mathbb{R}$. **D.** $x\in(2;+\infty)$.

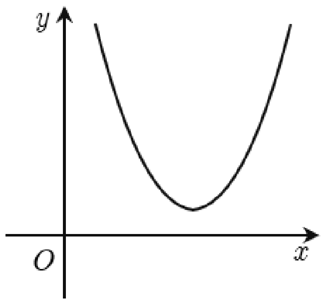
Câu 12: Cho đồ thị của hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ:



Nghiệm của bất phương trình $f(x)\ge 0$ là

A. $x=0$. **B.** $x\in(0;2)$. **C.** $x\in\mathbb{R}$. **D.** $x\in(2;+\infty)$.

Câu 13: Cho đồ thị của hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ:



Nghiệm của bất phương trình $f(x)\ge 0$ là

A. $x=0$. **B.** $x\in(0;2)$. **C.** $x\in\mathbb{R}$. **D.** $x\in(2;+\infty)$.

Câu 14: Một quả bóng được ném thẳng lên cao từ độ cao 1,5*m* so với mặt đất với vận tốc 10 m/s. Độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) sau *t* giây được xác định bởi hàm số $h(t)=-3,5t^2+7t+1,5$. Khoảng thời gian bóng ở độ cao trên 4 *m* là (làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân)

A. Từ $0,37s$ đến $1,43s$. **B.** Từ $0,47s$ đến $1,53s$.

C. Từ $0,77s$ đến $1,77s$. **D.** Từ $0,57s$ đến $1,73s$.

Câu 15: Tổng chi phí T (đơn vị : nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T=Q^2+20Q+3600$; giá bán của một sản phẩm là 150 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo có lãi (giả thiết các sản phẩm được bán hết)

A. $(50;70)$. **B.** $(40;90)$. **C.** $(55;90)$. **D.** $(40;100)$.

Câu 16: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+5x-4\le 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào **không** là tập con của S ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $[1;+\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=mx^2-4x-1$, với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên của $m\in(-20;23)$ để $f(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 15. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 11.

Câu 18: Nghiệm của bất phương trình $(x^2+x-6)\sqrt{2x^2-1}<0$ là

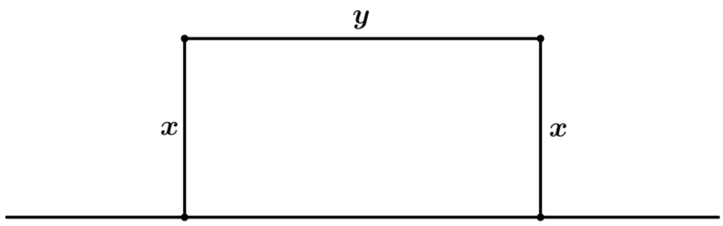
A. $\left(1;\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

C. $\left(-3;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$. **D.** $(-\infty;-5]\cup\left[5;\frac{17}{5}\right]\cup\{3\}$.

Câu 19: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-2x-3}{3x^2-x+2}<0$ là khoảng $(a;b)$ giá trị biểu thức $a+b$ bằng.

A. -5. **B.** -1. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 20: Thầy Huy có 45 m lưới muốn rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, Thầy Huy chỉ cần rào 3 cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x (như hình vẽ) để diện tích mảnh vườn không bé hơn $100m^2$?



A. 19. **B.** 18. **C.** 20. **D.** 21.

Câu 21: Cho hàm số $y=mx^2-3(m+2)x+2m+1$ (*m* là tham số). Các giá trị của *m* để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B sao cho gốc tọa độ O nằm giữa A và B là:

A. $m<0$. **B.** $m>-\frac{1}{2}$. **C.** $-\frac{1}{2}<m<0$. **D.** $m\le-\frac{1}{2}$ hoặc $m\ge 0$

Câu 22: Phương trình $(m+2)x^2-2mx+m^2+6m=0$ có đúng hai nghiệm x_1,x_2 thoả $2<x_1<x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $-3<m<-2$. **B.** $m>1$. **C.** $-5<m<-3$. **D.** $-2<m<1$.

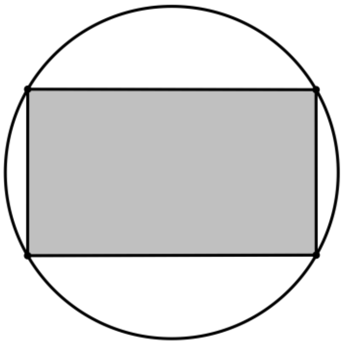
Câu 23: Cho hàm số $f(x)=-x^2-2(m-1)x+2m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x)>0$ với $\forall x\in(0;1)$.

A. $m>1$. **B.** $m<\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\ge 1$. **D.** $m\ge\dfrac{1}{2}$.

Câu 24: Cho bất phương trình $x^2-6x+\sqrt{-x^2+6x-8}+m-1\ge 0$. Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[2;4]$.

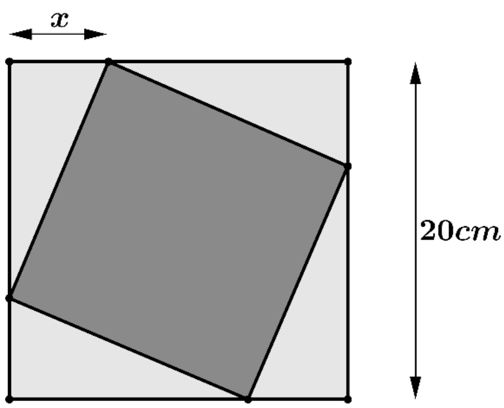
A. $m\ge\dfrac{35}{4}$. **B.** $m\le 9$. **C.** $m\le\dfrac{35}{4}$. **D.** $m\ge 9$.

Câu 25: Người ta muốn thiết kế một vườn hoa hình chữ nhật nội tiếp trong một mảnh đất hình tròn đường kính bằng 4 m (như hình vẽ). Diện tích S trồng hoa lớn nhất bằng bao nhiêu?



A. $S=8\,\text{m}^2$. **B.** $S=64\,\text{m}^2$. **C.** $S=4\,\text{m}^2$. **D.** $S=16\,\text{m}^2$.

Câu 26: Một viên gạch hình vuông có cạnh thay đổi được đặt nội tiếp trong một hình vuông có cạnh bằng 20 cm, tạo thành bốn tam giác xung quanh như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của x để diện tích viên gạch không vượt quá $208\,\text{cm}^2$.



A. $8\le x\le 12$. **B.** $6\le x\le 14$. **C.** $12\le x\le 14$. **D.** $12\le x\le 18$.

Câu 27: Một quả bóng được ném qua lưới với chiều cao 3 mét theo quỹ đạo được mô tả bằng hàm số $y=f(x)=-0,2x^2+2x+1,5$ trong đó y (tính bằng mét) là chiều cao của quả bóng so với mặt đất, x được (tính bằng mét) là khoảng cách từ nơi đứng ném đến lưới theo phương ngang. Hỏi người đó phải đứng gần lưới nhất với khoảng cách là bao nhiêu để bóng bay cao hơn lưới (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

A. $9,18$ mét. **B.** 1 mét. **C.** $0,82$ mét. **D.** 9 mét.

Câu 28: Một của hàng bán gạo loại A ước tính lợi nhuận một ngày được tính theo công thức $t(x)=-10x^2+250x-500$ trong đó t được tính theo đơn vị là nghìn đồng là lợi nhuận một ngày, x được tính theo đơn vị là nghìn đồng là giá bán 1kg gạo loại A. Hỏi cửa hàng phải bán với giá bao nhiêu để lợi nhuận một ngày khi bán loại gạo đó trên 1000000 đồng.

A. Trên 10000 đồng một kg.

B. Trong khoảng từ 10000 đến 15000 đồng một kg.

C. Trên 15000 đồng một kg.

D. Dưới 10000 đồng một kg.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Nhân viên công ty thiết kế A ước tính lợi nhuận y (đồng) khi kinh doanh x mặt hàng bàn ghế được tính bởi công thức $f(x)=-x^2+375x-33750$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tam thức $f(x)=-x^2+375x-33750$ có biệt thức $\Delta>0$.

b) Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm $x=150$ và $x=225$.

c) Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		150		225		$+\infty$
$f(x)$		+	0	–	0	+	

d) Công ty có lãi khi bán từ 150 sản phẩm đến 225 sản phẩm.

Câu 2: Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{-10}{-x^2+2x+3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $-x^2+2x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=3\end{array}\right.$.

b) Với $x\in(-1;3)$ thì $-x^2+2x+3>0$.

c) Với $x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$ thì $-x^2+2x+3<0$.

d) Với $x\in(-1;3)$ thì $f(x)>0$.

Câu 3: Cho tam thức bậc hai $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+m}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m=2$ thì tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Khi $\begin{cases}m\neq-1\\m\neq-4\end{cases}$, $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

c) Khi $m=2$ thì tập nghiệm của bất phương trình $f(x)>0$ là $(1;2)$.

d) Khi $m=-1$ thì tập nghiệm của bất phương trình $f(x)\geq0$ là $(-\infty;-1)\cup[2;+\infty)$

Câu 4: Cho $f\left(x\right)=\left(-x^2+3x\right)\left(2x^2+1\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$

b) $2x^2+1>0,\forall x\in\mathbb{R}$

c) $f\left(x\right)>0,\forall x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(3;+\infty\right)$

d) $f\left(x\right)<0,\forall x\in\left(0;3\right)$

Câu 5: Cho $f\left(x\right)=x^2-2\left(m-1\right)x+m^2-4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $m=1$ thì $f\left(x\right)$ không phải là tam thức bậc hai.

b) Khi $m=3$ thì bất phương trình $f\left(x\right)\le 0$ có tập nghiệm chứa hữu hạn giá trị nguyên.

c) Phương trình $f\left(x\right)=0$ có hai nghiệm trái dấu với $\forall m\in\left(a;b\right)$. Khi đó $a+b=0$

d) $f\left(x\right)$ nhận giá trị không dương trên khoảng $\left[a;b\right]$ có $b-a=5$ khi $m>1$.

Câu 6: Một công ty Du lịch sinh thái thông báo giá tiền khi tham gia chuyến tham quan của một nhóm khách du lịch được cho như sau:

Số khách	**20 khách đầu tiên**	**từ khách thứ 21 trở đi**
Giá tiền	30 USD/người	Giảm 1 USD/người cho toàn bộ khách trong nhóm

Gọi x là số lượng khách từ người thứ 21 trở đi của nhóm. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số khách tham quan chuyến du lịch trên là $20-x$.

b) Giá vé của mỗi người là $30-x$.

c) Doanh thu của công ty được tính bởi công thức $-x^2+10x+600$.

d) Biết chi phí của chuyến tham quan mà công ty phải chịu là 400 USD. Khi đó, nếu số khách từ người thứ 21 trở lên của nhóm nhiều hơn 20 người thì công ty có lãi.

Lời giải

a) Sai: Số khách tham quan chuyến du lịch trên là $20+x$

b) Đúng: Vì cứ có thêm 1 người thì giá vé sẽ giảm 1 USD/người cho toàn bộ khách trong nhóm nên giá vé của mỗi người là $30-x$.

c) Đúng: Doanh thu của công ty là $\left(20+x\right)\left(30-x\right)=-x^2+10x+600$.

d) Sai: Lợi nhuận của công ty là $y=-x^2+10x+600-400=-x^2+10x+200$.

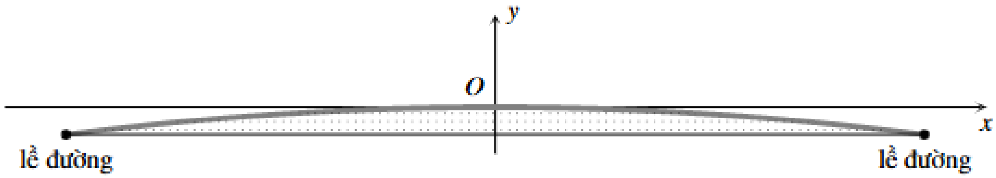
Công ty có lãi khi $y>0\Leftrightarrow -x^2+10x+200>0\Leftrightarrow -10<x<20$. Vì $x\ge 0$ nên $0\le x<20$.

Do đó, nếu số khách từ người thứ 21 trở lên của nhóm ít hơn 20 người thì công ty mới có lãi.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tổng chi phí P (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm được biểu diễn bởi biểu thức $P = x^2 + 30x + 3300$. Giá bán một sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong $[a;b]$ để đảm bảo nhà sản xuất không bị lỗ (giả sử các sản phẩm được bán hết). Tính $a+b$

Câu 2: Mặt căt ngang của mặt đường thường có dạng hình parabol đê nước mưa dê dàng thoát sang hai bên. Mặt cắt ngang của một con đường được mô tả bằng hàm số $y = -0,006x^2$ với gốc tọa độ đặt tại tim đường và đơn vị đo là mét như hình bên dưới.



Với chiều rộng của đường như thế nào thì tim đường cao hơn lề đường không quá 15 cm?

Câu 3: Độ cao (tính bằng mét) của một quả bóng (trong môn bóng đá) khi cầu thủ sút phạt so với xà ngang của khung thành khi bóng di chuyển được x mét theo phương ngang được mô phỏng bằng hàm số $k(x) = -0,2x^2 + 3x - 3$. Biết tằng $x \in (a;b)$ thì bóng nằm cao hơn so với xà ngang của khung thành. Tính $b-a$ (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

Câu 4: Một khung dây thép hình chữ nhật với chiều dài 30 cm và chiều rộng 20 cm được uốn lại thành hình chữ nhật mới với kích thước $(30-x)$ cm và $(20+x)$ cm. Biết rằng $x \in (a;b)$ thì diện tích của khung sau khi uốn tăng lên. Tính $a+b$.

Câu 5: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đầy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Doanh nghiệp phải định giá bán mới là x (đồng) để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ tăng. Biết rằng $x \in [a;b]$ thì lợi nhuận sẽ tăng lên. Tính $a+b$.

Câu 6: Sức mạnh động cơ (tính bằng đơn vị mã lực) sinh ra từ máy của một canô ở tốc độ quay r vòng/phút được xác định bởi hàm số: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$. Vậy sức mạnh của động cơ này tăng lên khi tốc độ quay $r \le 400a$. Tính $a+200$.

----------------HẾT----------------

BÀI 04 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

Ta tiến hành giải phương trình theo các bước sau:

- **Bước 1:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.
- **Bước 2:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

Hoặc ta có thể xét: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2+bx+c\ge 0 \\ dx^2+ex+f\ge 0 \\ ax^2+bx+c=dx^2+ex+f \end{cases}$

2 Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

Ta tiến hành giải phương trình theo các bước sau:

- **Bước 1:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.
- **Bước 2:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

Hoặc ta có thể xét: $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e \Leftrightarrow \begin{cases} dx+e\ge 0 \\ ax^2+bx+c=(dx+e)^2 \end{cases}$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Giải phương trình quy về phương trình bậc hai

Phương pháp: Ta thực hiện như sau:

Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

- **Bước 1:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc hai hoặc bậc nhất.
- **Bước 2:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

Hoặc $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}\Leftrightarrow\begin{cases}ax^2+bx+c\ge 0\\ dx^2+ex+f\ge 0\\ ax^2+bx+c=dx^2+ex+f\end{cases}$

Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

- **Bước 1:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc hai hoặc bậc nhất.
- **Bước 2:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

Hoặc $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e\Leftrightarrow\begin{cases}dx+e\ge 0\\ ax^2+bx+c=(dx+e)^2\end{cases}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2+6x+3}=\sqrt{2x^2-5x+3}$

b) $\sqrt{2x^2-3x+1}=\sqrt{x^2+2x-3}$

c) $\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{x^2-4x+3}$

d) $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{1-x}$

e) $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{1+x}$

f) $\sqrt{3x^2-4x-1}=\sqrt{2x^2-4x+3}$

g) $\sqrt{2x^2-4x-2}=\sqrt{x^2-x-2}$

h) $\sqrt{3x^2-6x+1}=\sqrt{-2x^2-9x+1}$

i) $\sqrt{2x^2-3x-5}=\sqrt{x^2-7}$

j) $\sqrt{3x^2+6x+3}=\sqrt{2x^2-5x+3}$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{-x^2+9x-5}=x$

b) $\sqrt{3x^2+6x+3}=2x+1$

c) $\sqrt{2x^2-3x+1}=x-1$

d) $\sqrt{3-3x-x^2}=x$

e) $\sqrt{3x^2-4x+4}=3x+2$

f) $\sqrt{x-1}=x-3$

g) $\sqrt{2x-3}=x-3$

h) $x-\sqrt{2x+7}=-4$

i) $\sqrt{2x^2-5x-9}=x-1$

j) $\sqrt{2x^2+x+3}=1-x$

k) $\sqrt{3x^2-13x+14}=x-3$

l) $\sqrt{-x^2+9x-5}=x$

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a) $\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-3}=0$

b) $\left(x^2+5x+4\right)\sqrt{x+3}=0$

c) $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$

d) $2\sqrt{x+5}+1=x+\sqrt{x+5}$

e) $(x-1)\sqrt{5x+1}=x^2-1$

f) $(x-3)\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)=0$

g) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$

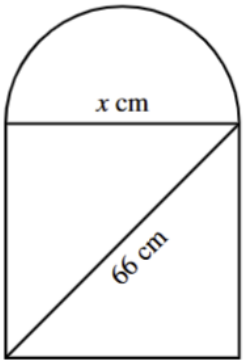
h) $x^2-2x-8=4\sqrt{(4-x)(x+2)}$

i) $2\sqrt{x^2-8x}=x^2-8x-3$

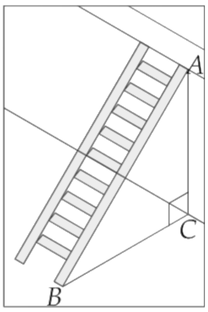
j) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

Bài tập 4: Người ta muốn thiết kế một vườn hoa hình chữ nhật nội tiếp trong một miếng đất hình tròn có đường kính bằng $50\,\text{m}$. Xác định kích thước vườn hoa hình chữ nhật để tổng quãng đường đi xung quanh vườn hoa đó là $140\,\text{m}$.

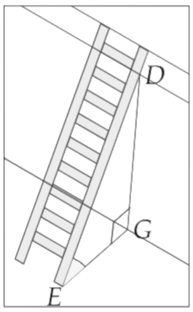
Bài tập 5: Mặt cắt đứng của cột cây số trên quốc lộ có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật (xem hình bên). Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài $66\,\text{cm}$. Tìm kích thước của hình chữ nhật, biết rằng diện tích của phần nửa hình tròn bằng 0,3 lần diện tích của phần hình chữ nhật. Lấy $\pi=3{,}14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.



Bài tập 6: Để leo lên một bức tường, bác Dũng dùng một chiếc thang cao hơn bức tường đó $2\,\text{m}$. Ban đầu, bác Dũng đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào mép trên của bức tường .



Hình a)



Hình b)

Sau đó, bác Dũng dịch chuyển chân thang vào gần chân bức tường thêm 1m thì bác Dũng nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc 45°. Bức tường cao bao nhiêu mét?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{1+x}$ là:

A. $\varnothing$ **B.** $\{-3\}$ **C.** $\{1;-3\}$. **D.** $\{1\}$.

Câu 2: Phương trình $\sqrt{x^2+2x-3}=5-x$ có nghiệm là $x=\dfrac{a}{b}$. Khi đó $a+2b$ bằng:

A. 10. **B.** 33. **C.** 17. **D.** 13.

Câu 3: Tổng các nghiệm của phương trình $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x(x+3)}$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** -3. **D.** 2.

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{4x^2+12x+13}=3$ là

A. $T=\{1;2\}$. **B.** $T=\{-1;3\}$. **C.** $T=\phi$. **D.** $T=\left\{-1;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $3(x-2)\sqrt{x^2+1}=x^2+x-6$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 6: Phương trình nào dưới đây có dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$?

A. $3x^2-5=0$. **B.** $\sqrt{x^2+2x-4}=x$.

C. $\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{1-2x+2x^2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}=x$.

Câu 7: Giá trị nào là nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+x+11}=\sqrt{-2x^2-13x+16}$?

A. $x=-5$. **B.** $x=\dfrac{1}{3}$. **C.** $x=\dfrac{1}{3}$ hoặc $x=-5$. **D.** $x=-1$.

Câu 8: Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2-x-3}=\sqrt{x^2-x+1}$ là

A. 0. **B.** $-\sqrt{2}$. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 9: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{2x^2+x}=\sqrt{-x+2x^2}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** vô số.

Câu 10: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2022x^2-2021x+2}=\sqrt{2022x^2-2021x-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Câu 11: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{-x^2+3x-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 12: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2+x+2}=\sqrt{x^2+x+3}$. Tổng các phần tử của S là

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 3.

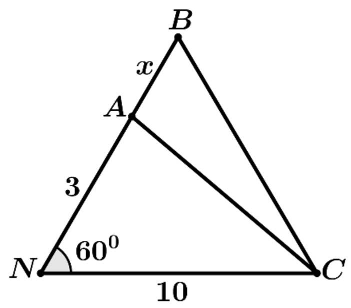
Câu 13: Tập tất cả các nghiệm của phương trình $2\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{4x^2+8x-12}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Câu 14: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2+3x+m}=\sqrt{x^2-2x+4}$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 16.

Câu 15: Khoảng cách từ nhà An ở vị trí N đến cột điện C là 10m. Từ nhà, An đi x mét theo phương tạo với NC một góc $60°$ đến vị trí A sau đó đi tiếp 3m đến vị trí B như hình dưới. Tìm giá trị gần giá trị x nhất để $AC = \frac{8}{9}BC$.



A. $7{,}1$. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 9.

Câu 16: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$ là

A. $S = \varnothing$. **B.** $S = \{2\}$. **C.** $S = \{6;2\}$. **D.** $S = \{6\}$.

Câu 17: Số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x-3$ là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Câu 18: Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x-1} = x-2$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 19: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x-2} = x$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 20: Phương trình $\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{2x+1}-x\right) = 0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 21: Giá trị nào sau đây là nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-4} = x-2$?

A. $x = 0$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = -2$. **D.** $x = 2$.

Câu 22: Phương trình $\sqrt{3x+8} = 3$ có tập nghiệm là:

A. $S = \{1\}$. **B.** $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$. **C.** $S = \left\{\frac{-5}{3}\right\}$. **D.** $S = \varnothing$.

Câu 23: Giá trị nào sau đây là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-3} = x-3$?

A. $x = -6$. **B.** $x = 2$. **C.** $x = 6$. **D.** $x = -2$.

Câu 24: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2-4x+5} = -\sqrt{x+1}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** vô số nghiệm. **D.** 1.

Câu 25: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{x^2-2} = x+2$ là:

A. $S = \left\{\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $S = \left\{\frac{-3}{2}\right\}$. **C.** $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$. **D.** $S = \varnothing$.

Câu 26: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{x^2-2} = x+2$ là:

A. $x = \frac{1}{2}$. **B.** $x = 1{,}5$. **C.** $x = \frac{3}{2}$. **D.** $x = -\frac{3}{2}$.

Câu 27: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{20x^2+10x-3} = \sqrt{x^2-7x-1}$ là:

A. $S=\left\{-1;\frac{-2}{19}\right\}$. **B.** $S=\{-1\}$. **C.** $S=\left\{\frac{-2}{19}\right\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Câu 28: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2-x+1}=\sqrt{x+3}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** vô số nghiệm. **D.** 1.

Câu 29: Nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x-2}=0$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-3;-1)$.

Câu 30: Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2+7x+13}=5$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 12.

Câu 31: Nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2-4x+22}+x-3=-x+2$ không thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-3;1)$.

Câu 32: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2+5x+7}=\sqrt{x+15}$ là

A. 5. **B.** -5. **C.** -1. **D.** 1.

Câu 33: Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{5x^2+25x+13}=\sqrt{20x^2-9x+28}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1]$.

Câu 34: Tổng các nghiệm của phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

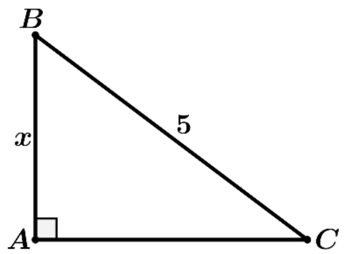
Câu 35: Giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2-x-2m}=x+2$ có 2 nghiệm phân biệt là $m\in(a;b]$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-\frac{1}{8}$. **B.** $S=\frac{81}{8}$. **C.** $S=5$. **D.** $S=\frac{41}{8}$.

Câu 36: Cho phương trình $\sqrt{2x^2-6x+m}=x-1$. Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất

A. $m>4$. **B.** $4<m<5$. **C.** $3<m<4$. **D.** $\left[\begin{array}{l}m<4\\m=5\end{array}\right.$.

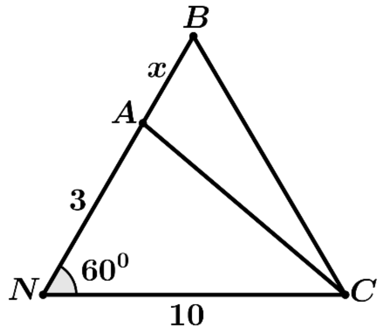
Câu 37: Cho tam giác ABC vuông tại A như hình bên dưới có: $AB=x$; $BC=5$.



Tập các giá trị của x để chu vi của tam giác ABC bằng 12 là:

A. $\{3\}$. **B.** $\{4\}$. **C.** $\{3;4\}$. **D.** $\{2;3\}$.

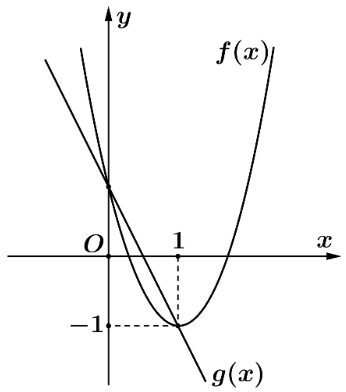
Câu 38: Khoảng cách từ nhà An ở vị trí N đến cột điện C là $10\,\text{m}$. Từ nhà An đi x mét theo phương tạo với NC một góc $60°$ đến vị trí A sau đó đi tiếp $3\,\text{m}$ đến vị trí B như hình bên dưới



Tìm x để khoảng cách $BC = 2AN$. Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần mười.

A. $4,4$. **B.** $4,5$. **C.** $4,6$. **D.** $4,7$.

Câu 39: Cho hai hàm số $y = f\left(x\right)$ và $y = g\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ



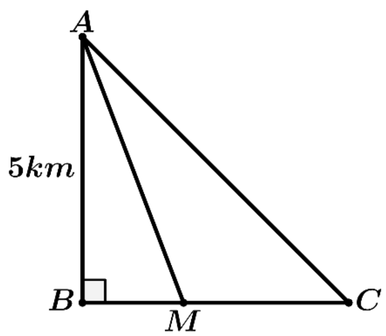
Phương trình $\sqrt{f\left(x\right)} = \sqrt{g\left(x\right)}$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$. **B.** $x = 0$. **C.** $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$. **D.** $x = 2$.

Câu 40: Cho hàm số $y = f\left(x\right)$ là hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol nhận điểm $I\left(1;2\right)$ làm đỉnh và đi qua điểm $A\left(0;3\right)$. Phương trình $\sqrt{f\left(x\right)} = x+1$ có số nghiệm là?

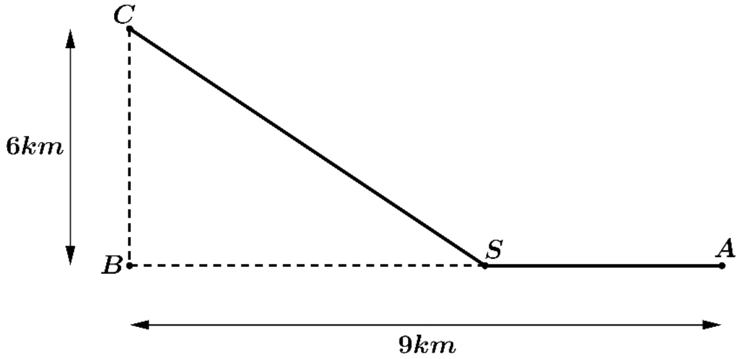
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 41: Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB = 5$ km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến địa điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Người canh hải đăng đã tìm được cách đặt vị trí của M để thời gian đến kho nhanh nhất là $\dfrac{5\sqrt{5}+14}{12}(\text{h})$. Khi đó vị trí điểm M cách B một khoảng bằng bao nhiêu km?



A. 5,5 km . **B.** $2\sqrt{5}$ km . **C.** $\sqrt{5}$ km . **D.** 4,5 km

Câu 42: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta đã xác định được một ví trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB có số tiền chi phí thấp nhất là 2.340.000.000 đồng. Khi đó khoảng cách AD bằng bao nhiêu km, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.



A. 7 km . **B.** 6 km. **C.** 7.5 km. **D.** 6.5 km.

Câu 43: Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 1 cm . Tính diện tích tam giác biết chu vi tam giác là 12 cm.

A. 10cm^2. **B.** 6cm^2. **C.** 15cm^2. **D.** 12cm^2.

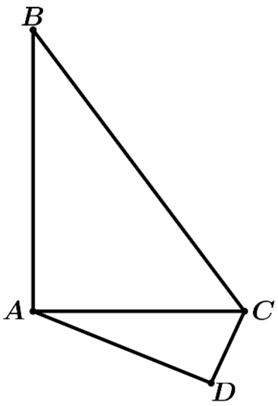
Câu 44: Một tam giác vuông có một cạnh góc vuông kém cạnh huyền 2 cm . Tính diện tích tam giác biết chu vi tam giác là 24cm .

A. 24cm^2. **B.** 14cm^2. **C.** 20cm^2. **D.** 48cm^2.

Câu 45: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB \perp CD$, $AB = 3$, $BC = 5$, $CD = 1$, $DA = \sqrt{5}$. Gọi H là giao điểm của AB và CD. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

A. 5cm^2. **B.** 4cm^2. **C.** 6cm^2. **D.** 3cm^2.

Câu 46: Cho tứ giác $ABCD$ có $BAC = ADC = 90°$ như hình vẽ. Độ dài cạnh AB gấp ba lần độ dài cạnh AD, độ dài cạnh AD kém độ dài cạnh AC một đơn vị. Tính độ dài cạnh AD để độ dài cạnh AB gấp bốn lần độ dài cạnh CD.

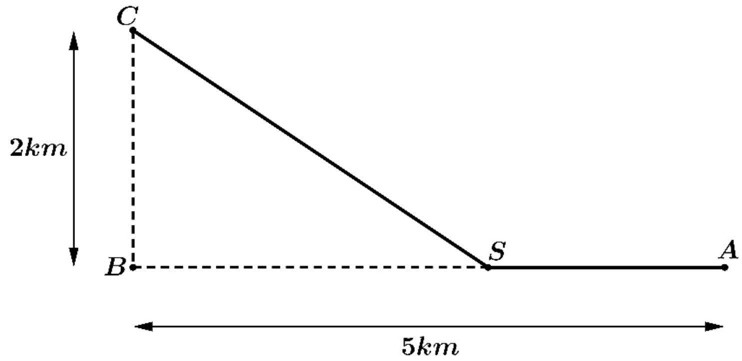


A. 5. **B.** $3\sqrt{2}$. **C.** 4 . **D.** 3 .

Câu 47: Cho tứ giác $ABCD$ có AB và CD vuông góc biết $AB = 2, BC = 13, CD = 8, AD = 5$. Tính diện tích của tứ giác $ABCD$.

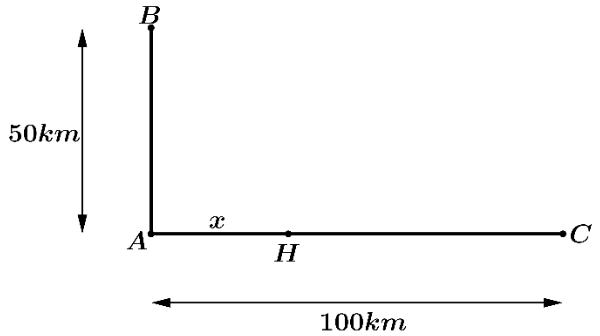
A. 12. **B.** 24. **C.** 36. **D.** 48.

Câu 48: Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C. Tiền công thiết kế mỗi kilômét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 2 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 17 triệu đồng. Tính số kilômét đường dây đã thiết kế (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



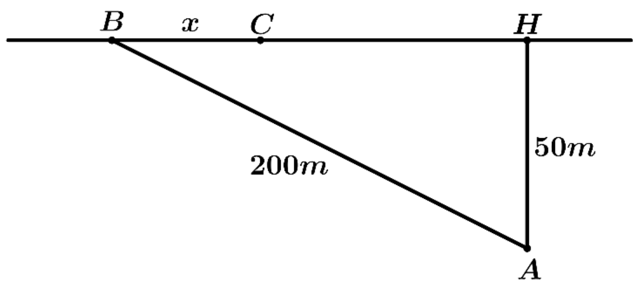
A. $5{,}5$ km. **B.** $5{,}6$ km. **C.** $5{,}7$ km. **D.** $5{,}4$ km.

Câu 49: Một tỉnh nọ có thành phố A đã có bến xe trung tâm, hai huyện xa nhất của tỉnh là huyện B (cách thành phố A 50 km về phía bắc) và huyện C (cách thành phố A 100km về phía tây). Tỉnh này muốn đặt thêm một bến xe H nữa nằm trên trục đường đi từ thành phố A đến huyện C sao cho khoảng cách từ bến xe H đến huyện B và C là như nhau. Hỏi H phải cách thành phố A bao xa?



A. 36,5 km. **B.** 37,5 km. **C.** 38,5 km. **D.** 39,5 km.

Câu 50: Trên đường từ nhà đến trường, bạn A thường đón bạn B đi học cùng. Nhà bạn B và đường cách nhau 50m và có một bãi đất trống xen giữa. Khi nhìn thấy bạn A còn cách mình 200m thì B bắt đầu đi bộ ra điểm C bên đường với vận tốc 5km/h, giả sử vận tốc của A đạp xe là 15km/h, xác định khoảng cách từ B đến C để hai bạn gặp nhau mà không ai phải chờ ai (làm tròn đến hàng phần nghìn)



A. 0,267 km. **B.** 0,168 km. **C.** 0,435 km. **D.** 0,132 km.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho phương trình $\sqrt{-2x^2-2x+11}=\sqrt{-x^2+3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases}-2x^2-2x+11\ge 0\\ -x^2+3\ge 0\end{cases}$.

b) Bình phương hai vế ta được $-2x^2-2x+11=-x^2+3$.

c) Phương trình đã cho tương đương với phương trình $x^2+2x-8=0$.

d) Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Câu 2: Cho phương trình $\sqrt{3x^2+5x-13}=x+1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $3x^2+5x-13\ge 0$.

b) Bình phương hai vế ta được $3x^2+5x-13=x^2+1^2$.

c) Phương trình đã cho có 1 nghiệm.

d) Tổng bình các nghiệm của phương trình đã cho bằng $\frac{65}{4}$.

Câu 3: Cho phương trình $(x-2)\sqrt{2x^2+4}=x^2-4\ (*)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình $(*)$ là $x\ge 2$.

b) Phương trình có 3 nghiệm.

c) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 5.

d) Các nghiệm của phương trình là các số chẵn.

Câu 4: Cho phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

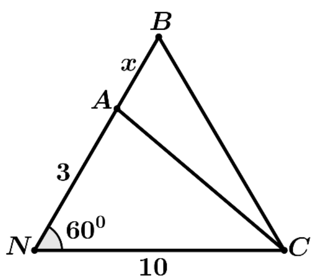
a) Điều kiện của phương trình là $x\ge -\frac{7}{2}$

b) Phương trình có nghiệm $x=1$.

c) Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

d) Tích các nghiệm của phương trình bằng -6.

Câu 5: Khoảng cách từ nhà An ở vị trí N đến cột điện C là 10 m. Từ nhà An đi x (m) theo phương tạo bởi NC một góc $60°$ đến vị trí A sau đó đi tiếp 3(m) đến vị trí B như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



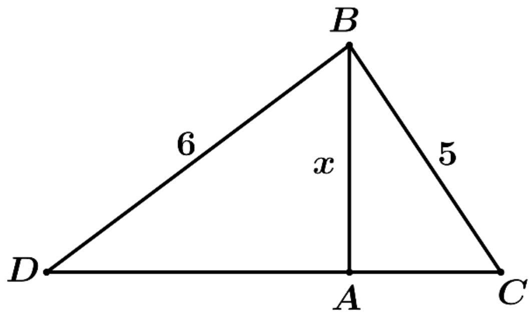
a) $BN = x + 3\,(\text{m})$

b) $AC = \sqrt{x^2 - 10x + 100}$.

c) $BC = \sqrt{x^2 - 10x + 99}$

d) Để $BC = 2AN$ thì giá trị của x thuộc khoảng $(5;6)$.

Câu 6: Cho tam giác ABC và ABD cùng vuông tại A như hình vẽ. Có $AB = x, BC = 5, BD = 6$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



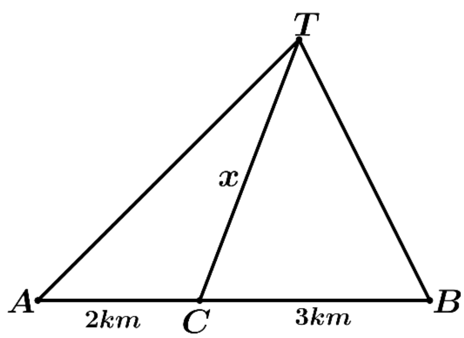
a) $AC = \sqrt{25 - x^2}$

b) $AD = \sqrt{36 - x^2}$

c) Chỉ có một giá trị của x để chu vi tam giác ABC bằng 12.

d) Để $AD = 2AC$ thì giá trị của x thuộc khoảng $(4;5)$.

Câu 7: Một con tàu T rời cảng C và chuyển động theo phương tạo với bờ biển một góc $60°$. Trên bờ biển có hai đài quan sát A và B nằm về hai phía của cảng C và lần lượt cách cảng một khoảng là $2\,\text{km}$ và $3\,\text{km}$ (như hình vẽ). Đặt $TC = x\ (x > 0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $TB = \sqrt{x^2 - 3x + 9}$.

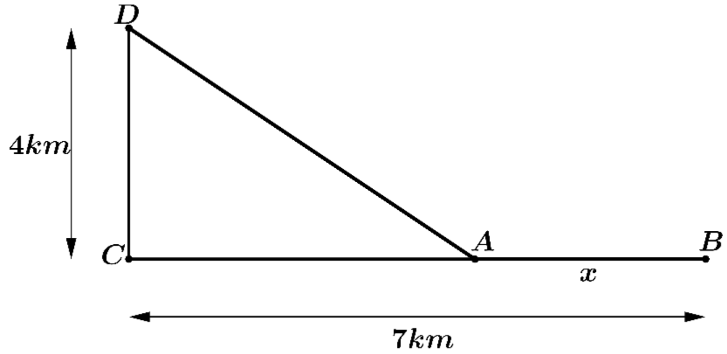
b) $TCA = 120^\circ$.

c) Phương trình khoảng cách từ tàu T đến hai đài quan sát bằng nhau là

$$\sqrt{x^2 - 3x + 9} = \sqrt{x^2 + 2x + 3}.$$

d) $x = 2$.

Câu 8: Cho hòn đảo D cách bờ 4 km $\left(CD = 4\text{ km}\right)$. Ngôi làng B cách C một khoảng 7 km. Nhà nước muốn xây dựng một trạm y tế trên đất liền, sao cho có thể phục vụ được cho dân cư cả đảo D và làng B. Biết trung bình vận tốc di chuyển tàu cứu thương là 100 (km/h), xe cứu thương là 80 (km/h). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



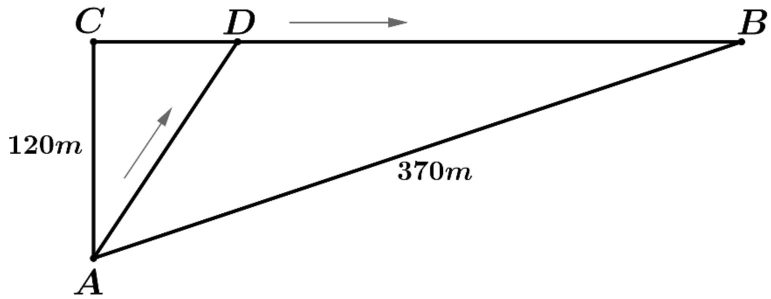
a) Giả sử trạm y tế đặt ở điểm A trên hình $AB = x$ (km) thì $x > 0$.

b) Khi $AB = x$ thì $AC = 7 - x$ (km).

c) Thời gian đi từ D đến A là $\dfrac{\sqrt{x^2 - 14x + 55}}{100}$

d) $AB = 4$ (km)

Câu 9: Một chú thỏ ngày nào cũng ra bờ suối ở vị trí A, cách cửa hang của mình tại vị trí B là 370 mét để uống nước, sau đó chú thỏ sẽ đến vị trí C cách vị trí A 120 mét để ăn cỏ rồi trở về hang. Tuy nhiên, hôm nay sau khi uống nước ở bờ suối, chú thỏ không đến vị trí C như mọi ngày mà chạy đến vị trí D để tìm cà rốt rồi mới trở về hang (xem hình bên dưới). Biết rằng, tổng thời gian chú thỏ chạy từ vị trí A đến vị trí D rồi về hang là 30 giây (không kể thời gian tìm cà rốt), trên đoạn AD chú thỏ chạy với vận tốc là 13 (m/s), trên đoạn BD chú thỏ chạy với vận tốc là 15 (m/s). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



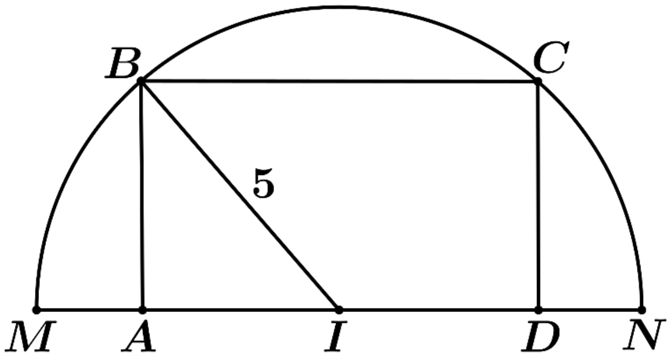
a) Gọi thời gian chú thỏ chạy trên đoạn AD là $x\left(0 < x < 30\right)$ (giây) thì khi đó thời gian chú thỏ chạy trên đoạn BD là $30 - x$ (giây).

b) $AD = 13x$ (m).

c) $BD = 15\left(30 - x\right)$ (m).

d) Khoảng cách giữa hai vị trí C và D bằng 100 m.

Câu 10: Xét nửa đường tròn đường kính $MN = 10$. Xét điểm B (không trùng hai điểm M, N) di động trên nửa đường tròn và hình chiếu của B trên đoạn MN là điểm A, vẽ hình chữ nhật $ABCD$ với C cũng thuộc nửa đường tròn. Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ bằng 22.



a) Đặt $IA = x \in (0;5) \Rightarrow AD = 2x$.

b) Độ dài cạnh: $AB = \sqrt{5^2 + x^2}$.

c) Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là : $4x + 2\sqrt{5^2 - x^2}$.

d) Khoảng cách giữa hai điểm I, A bằng 4 hoặc bằng $\frac{24}{5}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Điều kiện của phương trình $x - \sqrt{2x-5} = 4$ là $x \in \left[\frac{a}{b}; +\infty\right); b > 0;$ $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 2: Phương trình $\sqrt{x-3} - \sqrt{3x-15} = 0$ có nghiệm là $x = \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ phân số $\frac{m}{n}$ tối giản. Giá trị $m.n$ bằng bao nhiêu?

Câu 3: Phương trình $\sqrt{3-2x} = x+1$ có một nghiệm dạng $x_0 = a + \sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên. Giá trị biểu thức $T = 2a + 3b$ bằng bao nhiêu ?

Câu 4: Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2 - 7x - 5} = |x-4|$

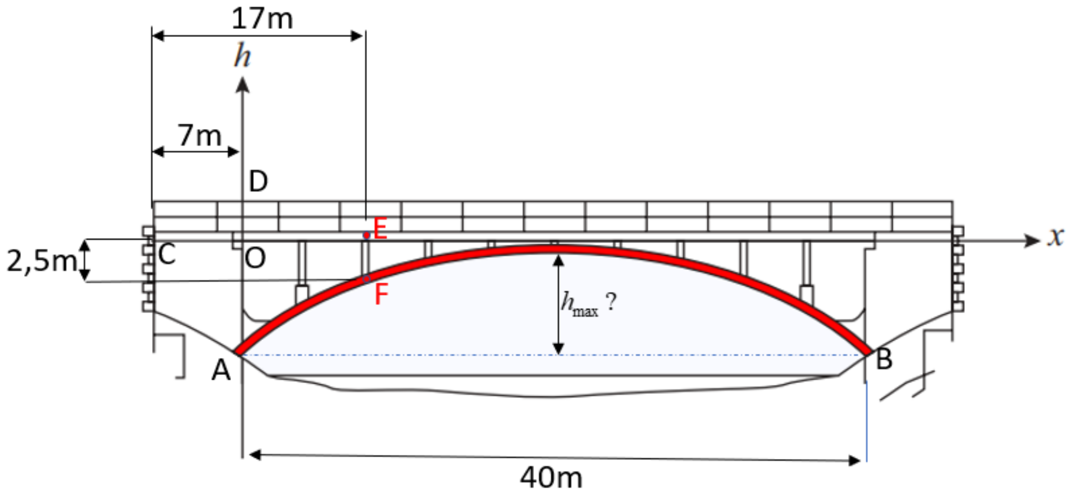
Câu 5: Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 50m. Người ta dùng hết $140m$ hàng rào để rào khu đất đó. Tính diện tích của mảnh vườn (đơn vị: m^2).

Câu 6: Một hoa văn trang trí có hình dạng một hình chữ nhật nội tiếp trong một hình tròn có đường kính là 10 cm. Người ta dùng dây kim loại để trang trí viền của hình chữ nhật và hết 28cm dây. Gọi x, y là kích thước hai cạnh của hình chữ nhật đó. Tính giá trị biểu thức $20x.y$.

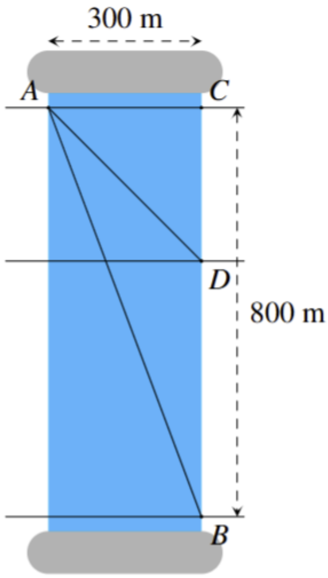
Câu 7: Bác An có một mảnh đất hình tam giác vuông có cạnh huyền bằng $100\,m$. Bác đã dùng $240m$ hàng rào để rào mảnh đất và trồng hoa. Biết mỗi mét vuông trồng hoa hết 10.000 đồng. Tính số tiền bác An đầu tư để trồng hoa (đơn vị là triệu đồng)

Câu 8: Bác An có một tấm lưới hình chữ nhật dài 200 mét. Bác muốn dùng tấm lưới để làm 1 cái chuồng lợn hình chữ nhật cạnh bờ sông. Chuồng không cần phải rào chắn ở phía bờ sông. Xác định chiều dài của chuồng để diện tích chuồng lớn nhất mà bác An có thể xây dựng.

Câu 9: Một chiếc cầu được bắc qua sông. Để trợ lực cho cây cầu, người ta làm một vòm đỡ cong hình parabol (màu đỏ). Với hệ trục toạ độ xOh được gắn vào như hình vẽ, biết rằng khoảng cách giữa 2 chân của vòm đỡ là $AB = 40$ m. Khoảng cách từ chân cầu (điểm C) tới điểm O là 7 m. Tại một điểm cách chân cầu (điểm C) 17 m, người ta đo được khoảng cách từ mặt cầu xuống vòm đỡ là $2,5$ m. Tìm chiều cao tối đa $h_{\max}$ của vòm đỡ (khoảng cách từ đỉnh vòm đến đường thẳng AB).



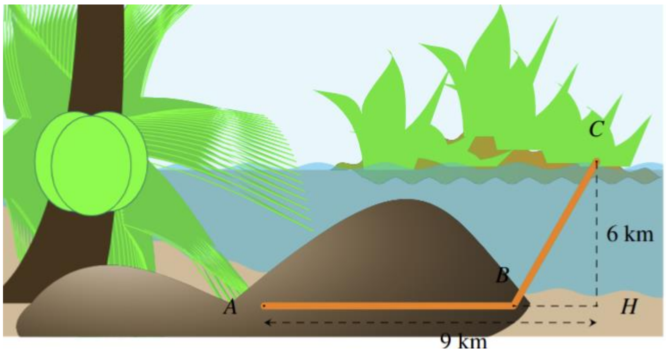
Câu 10: Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D, sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng 800 m như hình. Vận tốc chèo thuyền là 6 (km/h), vận tốc chạy bộ là 10 (km/h) và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là $7,2$ phút.



Câu 11: Bác Việt sống và làm việc tại trạm hải đăng cách bờ biển 4 km. Hằng tuần bác chèo thuyền vào vị trí gần nhất trên bờ biển là bến Bính để nhận hàng hoá do cơ quan cung cấp. Tuần này, do trục trặc về vận chuyển nên toàn bộ số hàng vẫn đang nằm ở thôn Hoành, bên bờ biển cách bến Bính $9,25$ km và sẽ được anh Nam vận chuyển trên con đường dọc bờ biển tới bến Bính bằng xe kéo. Bác Việt đã gọi điện thống nhất với anh Nam là họ sẽ gặp nhau ở vị trí nào đó giữa bến Bính và thôn Hoành để hai người có mặt tại đó cùng lúc, không mất thời gian chờ nhau. Hỏi vị trí hai người dự định gặp nhau cách bến Bính bao nhiêu km? Biết rằng vận tốc kéo xe của anh Nam là 5 km/h và thuyền của bác Việt di chuyển với vận tốc 4 km/h. Ngoài ra giả thiết rằng đường bờ

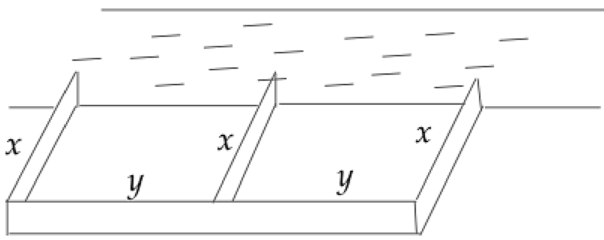
biển từ thôn Hoành đến bến Bính là đường thẳng và bác Việt cũng luôn chèo thuyền tới một điểm trên bờ biển theo một đường thẳng.

Câu 12: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm C trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Để thực hiện, công ty dự định xây dựng phần đường ống trên bờ từ A đến B và đường ống dưới nước từ B đến C (hình vẽ).



Biết giá để xây đường ống trên bờ là 50.000U SD mỗi km, và 130.000U SD mỗi km để xây dưới nước. Xác định đoạn đường từ A đến B để tổng chi phí xây dựng lăp đặt từ A đến C khoảng 1.170.000 USD.

Câu 13: Ông Tư có khu đất trống dọc bờ sông. Dịp này ông bỏ ra 15 triệu đồng làm hàng rào hình chữ E để phân làm hai mảnh vườn hình chữ nhật bằng nhau trồng rau và trồng hoa có kích thước như hình bên dưới. Đối với mặt hàng rào song song bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Để xây dựng được hàng rào hình chữ E như yêu cầu đề bài thì giá trị x thỏa mãn $a < x < b$. Giá trị của b bằng bao nhiêu?



----------------HẾT----------------

CHƯƠNG 6 HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

BÀI 01 HÀM SỐ

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

a) Định nghĩa: Cho một tập hợp **khác rỗng** $D \subset \mathbb{R}$.

Nếu với mỗi giá trị của x thuộc tập hợp số D có một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một hàm số.

- Ta gọi x là biến số và y là hàm số của x.
- Tập hợp D gọi là tập xác định của hàm số.
- Tập tất cả các giá trị y nhận được gọi là tập giá trị của hàm số thì ta nói $T = \left\{ f\left(x\right) | x \in D \right\}$ là tập giá trị của $f\left(x\right)$ trên D.

Chú ý:

- Cho $K \subset D$ thì ta nói $T_K = \left\{ f\left(x\right) | x \in K \right\}$ là tập giá trị của $f\left(x\right)$ trên K.
- Khi y là hàm số của x, ta có thể viết $y = f\left(x\right), y = g\left(x\right), \ldots$

b) Cách cho hàm số:

- Hàm số cho bằng công thức $y = f\left(x\right)$

  Tập xác định của hàm số $y = f\left(x\right)$ là tập hợp tất cả các giá trị của x để $f\left(x\right)$ có nghĩa.
- Hàm số cho bằng nhiều công thức.
- Hàm số không cho bằng công thức.

2 Đồ thị hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ xác định trên tập D là tập hợp tất cả các điểm $M\left(x; f\left(x\right)\right)$ trên mặt phẳng toạ độ với mọi x thuộc D hay ta có thể diễn tả bằng: $M\left(x_0; y_0\right) \in \left(G\right) \Leftrightarrow y_0 = f\left(x_0\right)$ với $x_0 \in D$.

Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y = f\left(x\right)$ là một đường. Khi đó ta có $y = f\left(x\right)$ là phương trình của đường đó.

3 Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

a) Khái niệm: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên K.

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là đồng biến (hay tăng) trên K nếu:

$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

- Hàm số $y = f(x)$ gọi là nghịch biến (hay giảm) trên K nếu:

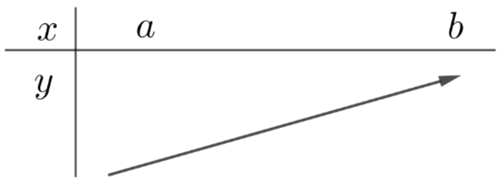
$$\forall x_1, x_2 \in K \text{ và } x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

b) Mô tả hàm số đồng biến, hàm số nghịch biến bằng đồ thị

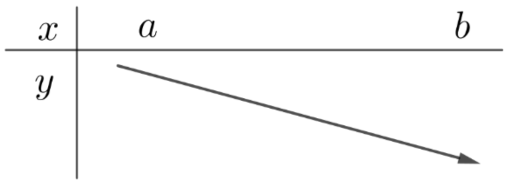
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên khoảng đó.
- Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.

c) Bảng biến thiên: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a;b)$.

- Xét chiều biến thiên của hàm số là tìm khoảng tăng, giảm của hàm số.
- Kết quả đó được tổng kết trong một bảng gọi là bảng biến thiên
- Đồ thị hàm số đồng biến trên $(a;b)$ là một đường "đi lên" trong khoảng $(a;b)$.



- Đồ thị hàm số nghịch biến trên $(a;b)$ là một đường "đi xuống" trong khoảng $(a;b)$



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tập xác định của hàm số

Phương pháp: Để tìm tập xác định của hàm số ta cần nhớ như sau

⊕ $\dfrac{1}{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\neq 0$

⊕ $\sqrt{f(x)}$ xác định $\Leftrightarrow f(x)\geq 0$

⊕ $\dfrac{f(x)}{\sqrt{g(x)}}$ xác định $\Leftrightarrow g(x)>0$

Bài toán chứa tham số: Cho hàm $y=f(x,m)$. Tìm tất cả các giá trị tham số m để hàm số xác định trên tập K.

Bước 1: Tìm điều kiện xác định của hàm số theo m. Gọi D là tập xác định của hàm số.

Bước 2: Hàm số xác định trên tập K khi và chỉ khi $K\subset D$.

Chú ý: Cho A là biểu thức luôn có nghĩa:

- Hàm số $y=\dfrac{A}{f(x,m)}$ xác định trên $K\Leftrightarrow f(x,m)=0$ vô nghiệm trên K.
- Hàm số $y=\sqrt{f(x,m)}$ xác định trên $K\Leftrightarrow f(x,m)\geq 0\ \forall x\in K$
- Hàm số $y=\dfrac{A}{\sqrt{f(x,m)}}$ xác định trên $K\Leftrightarrow f(x,m)>0\ \forall x\in K$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=2x^3-3x^2+2025$

b) $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$

c) $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$

d) $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$

e) $y=\dfrac{x+2}{x^2-5}$

f) $y=\dfrac{2x}{x^2-4x-5}$

g) $y=\dfrac{2}{\sqrt{4-x^2}}$

h) $y=\dfrac{x+2}{x^2-9}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$

i) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x}}-\sqrt{3-2x}+1$

j) $y=\dfrac{\sqrt{2x-1}}{x^2-x-2}$

k) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{4-x^2}}{x^2-x-2}$

l) $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{5-2x}}-\dfrac{x}{x^2-5x+6}$

Lời giải

a) $y=2x^3-3x^2+2025$

Hàm số là hàm đa thức nên xác định $\forall x\in\mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

b) $y=\dfrac{2x-1}{1-x}$

Hàm số xác định khi $1-x\neq 0\Leftrightarrow x\neq 1$ nên tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

c) $y=\dfrac{1}{x^2+4x+5}$

Ta có $x^2+4x+5=(x+2)^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

d) $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$

Hàm số xác định khi $x^3-3x+2\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\x^2+x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\\begin{cases}x\neq 1\\x\neq -2\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\x\neq -2\end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$.

e) Điều kiện: $x^2-5\neq 0\Leftrightarrow x\neq\pm\sqrt{5}$ nên tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm\sqrt{5}\}$.

f) Điều kiện: $x^2-4x-5\neq 0\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq -1\\x\neq 5\end{cases}$ nên tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;5\}$.

g) Điều kiện: $4-x^2>0\Leftrightarrow -2<x<2$ nên tập xác định của hàm số là $D=(-2;2)$.

h) Điều kiện: $\begin{cases}x^2-9\neq 0\\x>1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq\pm 3\\x>1\end{cases}$ nên tập xác định của hàm số là $D=(1;+\infty)\setminus\{3\}$.

i) Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\3-2x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\leq\dfrac{3}{2}\end{cases}$ nên tập xác định của hàm số là $D=\left(0;\dfrac{3}{2}\right]$.

j) Điều kiện: $\begin{cases}2x-1\geq 0\\x^2-x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq\dfrac{1}{2}\\x\neq -1\\x\neq 2\end{cases}$ nên tập xác định của hàm số là $D=\left[\dfrac{1}{2};+\infty\right)\setminus\{2\}$.

k) Điều kiện: $\begin{cases}x-1\geq 0\\4-x^2\geq 0\\x^2-x-2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\-2\leq x\leq 2\\x\neq -1\\x\neq 2\end{cases}$ nên tập xác định của hàm số là $D=[1;2)$.

l) Điều kiện: $\begin{cases}x-1\geq 0\\5-2x>0\\x^2-5x+6\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 1\\x<\dfrac{5}{2}\\x\neq 3\\x\neq 2\end{cases}$ nên tập xác định của hàm số là $D=\left[1;\dfrac{5}{2}\right)\setminus\{2\}$.

Bài tập 2: Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{3x-2}$

b) $y=\sqrt{x^2+1}$

c) $y=\sqrt{-2x+1}-\sqrt{x-1}$

d) $y=\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x-3}$

e) $y=\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$

f) $y=\sqrt{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

Lời giải

a) Hàm số xác định khi $3x-2\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \dfrac{2}{3}$ nên tập xác định của hàm số là $D=\left[\dfrac{2}{3};+\infty\right)$.

b) Ta có $x^2+1>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

c) Hàm số xác định khi $\begin{cases}-2x+3\ge 0\\ x-1\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le \dfrac{3}{2}\\ x\ge 1\end{cases} \Leftrightarrow 1\le x\le \dfrac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

d) Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-2x+1\ge 0\\ x-3\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2\ge 0\\ x-3\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ x\ge 3\end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[3;+\infty)$.

e) Ta có $y=\sqrt{x+3+2\sqrt{x+2}}+\sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$

$=\sqrt{\left(\sqrt{x+2}+1\right)^2}+\sqrt{\left(\sqrt{1-x^2}+1\right)^2}=\left|\sqrt{x+2}+1\right|+\left|\sqrt{1-x^2}+1\right|=\sqrt{x+2}+\sqrt{1-x^2}+2$.

Hàm số xác định khi

$$\begin{cases}x+2\ge 0\\ 1-x^2\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -2\\ (1-x)(1+x)\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\ge -2\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}1-x\ge 0\\ 1+x\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}1-x\le 0\\ 1+x\le 0\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\ge -2\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\le 1\\ x\ge -1\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 1\\ x\le -1\end{cases}\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow -1\le x\le 1.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-1;1]$.

f) Hàm số xác định khi $\begin{cases}x^2-x+1\ge 0\\ x+\sqrt{x^2-x+1}\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\\ \sqrt{x^2-x+1}\ge -x\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-x+1}\ge -x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-x<0\\ x^2-x+1\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}-x\ge 0\\ x^2-x+1\ge x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-x<0\\ \begin{cases}-x\ge 0\\ -x+1\ge 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0\\ \begin{cases}x\le 0\\ x\ge 1\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>0\\ x\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\mathbb{R}.$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

Bài tập 3: Cho hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2+x+m}$. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là $x^2+x+m\ne 0$.

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2+x+m \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow x^2+x+m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta<0 \Leftrightarrow 1-4m<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{1}{4}$.

Bài tập 4: Cho hàm số $y=\sqrt{2x-m}$. Tìm các giá trị của m để hàm số có tập xác định là $[2;+\infty)$

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là $2x-m \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{m}{2}$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D=\left[\dfrac{m}{2};+\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow \dfrac{m}{2}=2 \Leftrightarrow m=4$.

Bài tập 5: Cho hàm số $y=\dfrac{\sqrt{3x-5m+6}}{x+m-1}$. Tìm các giá trị của m để hàm số xác định trên $(0;+\infty)$

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases}3x-5m+6 \geq 0\\ x+m-1 \neq 0\end{cases} \begin{cases}x \geq \dfrac{5m-6}{3}\\ x \neq 1-m\end{cases} (*)$

Hàm số xác định trên $(0;+\infty)$

$\Leftrightarrow (*)$ có nghiệm đúng với mọi $x \in (0;+\infty)$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{5m-6}{3} \leq 0\\ 1-m \notin (0;+\infty)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5m-6 \leq 0\\ 1-m \leq 0\end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq \dfrac{6}{5}$.

Bài tập 6: Cho hàm số $y=\sqrt{m-x}+\sqrt{2x-m+1}$. Tìm các giá trị của m để hàm số xác định trên $(0;1)$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases}m-x \geq 0\\ 2x-m+1 \geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \leq m\\ x \geq \dfrac{m-1}{2}\end{cases} (*)$

Hàm số xác định trên $(0;1)$

$\Leftrightarrow (*)$ nghiệm đúng với mọi $x \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases}m \geq 1\\ \dfrac{m-1}{2} \leq 0\end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Bài tập 7: Cho hàm số $y=\sqrt{x^4+4x^3+(m+5)x^2+4x+4+m}$. Tìm các giá trị của m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta có $x^4+4x^3+(m+5)x^2+4x+4+m=(x^2+1)\left[(x+2)^2+m\right]$

Điều kiện xác định của hàm số là: $(x+2)^2+m \geq 0\,(*)$

Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow (*)$ nghiệm đúng với mọi $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 \geq -m\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 0 \geq -m \Leftrightarrow m \geq 0$.

Bài tập 8: Với giá trị nào của m thì hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x^2-2x-3-m}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

A. $m \le -4$. **B.** $m < -4$. **C.** $m > 0$. **D.** $m < 4$.

Lời giải

Hàm số $y = \dfrac{2x+1}{x^2 - 2x - 3 - m}$ xác định trên $\mathbb{R}$ khi phương trình $x^2 - 2x - 3 - m = 0$ vô nghiệm

Hay $\Delta' = m + 4 < 0 \Leftrightarrow m < -4$.

Bài tập 9: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{-2x+3m+2} + \dfrac{x+1}{x+2m-4}$ xác định trên $(-\infty;-2)$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} -2x+3m+2 \ge 0 \\ x+2m-4 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{3m+2}{2} \\ x \ne 4-2m \end{cases}$.

Hàm số xác định trên $(-\infty;-2) \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \le \dfrac{3m+2}{2} \\ 4-2m \notin (-\infty;-2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \le 3m+2 \\ 4-2m \ge -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \ge -2 \\ m \le 3 \end{cases}$.

Bài tập 10: Tập tất cả các giá trị m để hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{-x^2-2x+3}} + \sqrt{x-m}$ có tập xác định khác tập rỗng.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} -x^2-2x+3 > 0 \\ x-m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < x < 1 \\ x \ge m \end{cases}$

Để hàm số có tập xác định khác tập rỗng thì $m < 1$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y=x^3+3x^2-1$. **B.** $y=\dfrac{x^2+2}{x}$. **C.** $y=\dfrac{2x+3}{x^2}$. **D.** $y=\dfrac{x+2}{x-1}$.

Lời giải

Hàm số $y=x^3+3x^2-1$ là hàm đa thức bậc ba nên tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 2: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ là:

A. $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **D.** $(1;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x-1\neq0\Leftrightarrow x\neq1$

Vậy tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-1}$ là $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Câu 3: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x+2}{(x-3)^2}$ là

A. $(-\infty;3)$. **B.** $(3;+\infty)$. **C.** $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Điều kiện: $x-3\neq0\Leftrightarrow x\neq3$ nên tập xác định: $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 4: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{3-x}{x^2-5x-6}$ là

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;6\}$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{1;-6\}$ **C.** $D=\{-1;6\}$ **D.** $D=\{1;-6\}$

Lời giải

Điều kiện $x^2-5x-6\neq0\Rightarrow\begin{cases}x\neq-1\\x\neq6\end{cases}$ nên $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;6\}$.

Câu 5: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\dfrac{x+1}{(x+1)(x^2-4)}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$ **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm2\}$ **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;2\}$ **D.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;\pm2\}$

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases}x+1\neq0\\x^2-4\neq0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq-1\\x\neq\pm2\end{cases}$. Vậy $D=\mathbb{R}\setminus\{-1;\pm2\}$.

Câu 6: Tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{3x-1}$ là

A. $D=(0;+\infty)$. **B.** $D=[0;+\infty)$. **C.** $D=\left[\dfrac{1}{3};+\infty\right)$. **D.** $D=\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Hàm số $y=\sqrt{3x-1}$ xác định $\Leftrightarrow 3x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{1}{3}$ nên $D=\left[\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Câu 7: Tập xác định của hàm số $y=\frac{3x+4}{\sqrt{x-1}}$ là

A. $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **<u>C</u>.** $(1;+\infty)$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ \sqrt{x-1}\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\ge 0 \\ x-1\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(1;+\infty)$.

Cách khác: Điều kiện xác định của hàm số là $x-1>0 \Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=(1;+\infty)$.

Câu 8: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\frac{19x+5}{18x-90}$ là

A. $D=\mathbb{R}$. **B.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-5\}$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{\pm 5\}$. **<u>D</u>.** $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $18x-90\ne 0 \Leftrightarrow x\ne 5$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\{5\}$.

Câu 9: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{2x-9}$.

A. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{9}{2}\right\}$. **B.** $D=\left(-\infty;\frac{9}{2}\right]$. **C.** $D=\left(\frac{9}{2};+\infty\right)$. **<u>D</u>.** $D=\left[\frac{9}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $2x-9\ge 0 \Leftrightarrow x\ge \frac{9}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[\frac{9}{2};+\infty\right)$.

Câu 10: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\frac{\sqrt{x+2}}{x^2+x-12}$.

A. $D=[-2;+\infty)\setminus\{-4\}$. **B.** $D=[-2;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}\setminus\{-4;3\}$. **<u>D</u>.** $D=[-2;+\infty)\setminus\{3\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x^2+x-12\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ne -4 \\ x\ne 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ne 3 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-2;+\infty)\setminus\{3\}$.

Câu 11: Hàm số nào trong các hàm số dưới đây có tập xác định là $\mathbb{R}$?

A. $y=\dfrac{2x-1}{4x-2}$. **B.** $y=\sqrt{x-1}$. **C.** $y=\dfrac{x^2}{\left|x^3+1\right|}$. **D.** $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$.

Lời giải

Xét từng phương án:

A. Hàm số $y=\dfrac{2x-1}{4x-2}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$: loại.

B. Hàm số $y=\sqrt{x-1}$ có tập xác định là $D=[1;+\infty)$: loại.

C. Hàm số $y=\dfrac{x^2}{\left|x^3+1\right|}$ có tập xác định là $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$: loại.

D. Vì $x^2-2x+2=(x-1)^2+1\neq 0, \forall x\in\mathbb{R}$ nên hàm số có $y=\dfrac{x-1}{x^2-2x+2}$ tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 12: Tập tất cả các giá trị m để hàm số $y=\sqrt{x-2m}+\sqrt{m-x}$ xác định trên khoảng $(2;3)$.

A. $\dfrac{3}{2}\le m\le 2$. **B.** $m\in\varnothing$. **C.** $m>2$. **D.** $m\le\dfrac{3}{2}$.

Lời giải

Hàm số $y=\sqrt{x-m}+\sqrt{2m-x}$ có nghĩa khi $\begin{cases}x-m\ge 0\\2m-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge m\\x\le 2m\end{cases}$.

Để hàm xác định trên khoảng $(2;3)\Leftrightarrow 2m\le 2<3\le m\Leftrightarrow\begin{cases}m\le 1\\m\ge 3\end{cases}\Leftrightarrow m\in\varnothing$.

Câu 13: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{x+2}-\sqrt{x+3}$.

A. $D=[-3;+\infty)$. **B.** $D=[-2;+\infty)$. **C.** $D=\mathbb{R}$. **D.** $D=[2;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}x+2\ge 0\\x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow x\ge -2.$

Vậy $D=[-2;+\infty)$.

Câu 14: Tìm tập xác định D của hàm số $y=\sqrt{2-x}-\dfrac{4}{\sqrt{x+4}}$.

A. $D=[-4;2]$. **B.** $D=(-4;2]$. **C.** $D=[-4;2)$. **D.** $D=(-2;4]$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}2-x\ge 0\\x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le 2\\x>-4\end{cases}$ nên $D=(-4;2]$.

Câu 15: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{4-x}+\sqrt{x+2}}{x^2-x-12}$ là

A. $[-2;4]$. **B.** $(-3;-2)\cup(-2;4)$. **C.** $(-2;4)$. **D.** $[-2;4)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 4-x\ge 0 \\ x+2\ge 0 \\ x^2-x-12\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4 \\ x\ge -2 \\ x\ne -3 \\ x\ne 4 \end{cases} \Leftrightarrow -2\le x<4$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=[-2;4)$

Câu 16: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\sqrt{5-2x}}{(x-2)\sqrt{x-1}}$ là

A. $\left(1;\dfrac{5}{2}\right]\setminus\{2\}$. **B.** $\left(\dfrac{5}{2};+\infty\right)$. **C.** $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)\setminus\{2\}$. **D.** $\left(1;\dfrac{5}{2}\right)$.

Lời giải

Hàm số có điều kiện xác định là: $\begin{cases} 5-2x\ge 0 \\ x-2\ne 0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le \dfrac{5}{2} \\ x\ne 2 \\ x>1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1<x\le \dfrac{5}{2} \\ x\ne 2 \end{cases}$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=\left(1;\dfrac{5}{2}\right]\setminus\{2\}$.

Câu 17: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}$.

A. $[-1;+\infty)$. **B.** $[-2;+\infty)$. **C.** $[-3;+\infty)$. **D.** $[0;+\infty)$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ x+2\ge 0 \\ x+3\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x\ge -2 \\ x\ge -3 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge -1$

Câu 18: Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{2x-5}}+\sqrt{9-x}$ là

A. $D=\left(\dfrac{5}{2};9\right]$. **B.** $D=\left(\dfrac{5}{2};9\right)$. **C.** $D=\left[\dfrac{5}{2};9\right)$. **D.** $D=\left[\dfrac{5}{2};9\right]$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 9-x\ge 0 \\ 2x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 9 \\ x>\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{5}{2}<x\le 9$ nên tập xác định: $D=\left(\dfrac{5}{2};9\right]$.

Câu 19: Tìm tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-1}-\dfrac{3x-1}{(x^2-4)\sqrt{5-x}}$.

A. $[1;5]\setminus\{2\}$. **B.** $(-\infty;5]$. **C.** $[1;5)\setminus\{2\}$. **D.** $[1;+\infty)\setminus\{2;5\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x-1\ge 0 \\ \left(x^2-4\right)\sqrt{5-x}\ne 0 \\ 5-x\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in[1;5)\setminus\{2\}$.

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y=f\left(x\right)=\begin{cases} \sqrt{-3x+8}+x & \text{khi} \quad x<2 \\ \sqrt{x+7}+1 & \text{khi} \quad x\ge 2 \end{cases}$ là

A. $\mathbb{R}$. **B.** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$. **C.** $\left(-\infty;\frac{8}{3}\right]$. **D.** $[-7;+\infty)$.

Lời giải

Câu 21: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x+2}+\dfrac{x^3}{4|x|-3}$

A. $D=[-2;+\infty)$.

B. $D=[-2;+\infty)\setminus\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$.

C. $D=\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$.

D. $D=\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$.

Lời giải

Điều kiện xác dịnh của hàm số $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ 4|x|-3\ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -2 \\ x\ne -\frac{3}{4} \\ x\ne \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow D=[-2;+\infty)\setminus\left\{-\frac{3}{4};\frac{3}{4}\right\}$.

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-1}-4}$ là $(a;b]$ với a,b là các số thực. Tính tổng $a+b$.

A. $a+b=-8$. **B.** $a+b=-10$. **C.** $a+b=8$. **D.** $a+b=10$.

Lời giải

Ta có $y=\sqrt{\dfrac{3x+5}{x-1}-4}=\sqrt{\dfrac{3x+5-4(x-1)}{x-1}}=\sqrt{\dfrac{-x+9}{x-1}}$.

Điều kiện xác định của hàm số:

$$\begin{cases} x-1\ne 0 \\ \dfrac{-x+9}{x-1}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{-x+9}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} -x+9\ge 0 \\ x-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} -x+9\le 0 \\ x-1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\le 9 \\ x>1 \end{cases} (TM) \\ \begin{cases} x\ge 9 \\ x<1 \end{cases} (L) \end{array}\right. \Leftrightarrow 1<x\le 9.$$

Tập xác định: $D=(1;9]$ nên $a=1,b=9\Rightarrow a+b=10$.

Câu 23: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{x+1}{x-2m+1}$ xác định trên nửa khoảng $(0;1]$.

A. $\left[\begin{array}{l} m\le \frac{1}{2} \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l} m\le \frac{1}{2} \\ m>1 \end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m<\frac{1}{2} \\ m\ge 1 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<\frac{1}{2} \\ m>1 \end{array}\right.$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $x-2m+1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2m-1$.

Hàm số xác định trên $(0;1] \Leftrightarrow 2m-1\notin(0;1] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2m-1\le 0\\ 2m-1>1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}m\le \dfrac{1}{2}\\ m>1\end{array}\right.$.

Câu 24: Tìm giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x-m}}$ xác định trên $[2;3]$.

A. $m<0$. **B.** $0<m<3$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge 3$.

Lời giải

Điều kiện: $x^2-2x-m>0, \forall x\in[2;3] \Leftrightarrow (x-1)^2>m+1, \forall x\in[2;3]$ $(*)$

Ta có: $2\le x\le 3 \Rightarrow 1\le x-1\le 2 \Rightarrow 1\le (x-1)^2\le 4$

$\Rightarrow (x-1)^2\ge 1, \forall x\in[2;3]$, dấu bằng xảy ra khi $x=2$ $(**)$.

Từ $(*)$ và $(**)$, ta suy ra: $m+1<1 \Leftrightarrow m<0$. Vậy $m<0$.

Câu 25: Tìm tập hợp tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y=\dfrac{\sqrt{x^2-m^2}}{2\sqrt{m-1}}$ xác định với mọi $x\in(3;+\infty)$

A. $1<m\le 3$. **B.** $0<m<3$. **C.** $m\le 0$. **D.** $m\ge 3$.

Lời giải

Điều kiện: $m>1$.

Do đó điều kiện của x: $x\in(-\infty;-m]\cup[m;+\infty)$.

Hàm số xác định với mọi $x\in(3\,;\,+\infty) \Leftrightarrow (3;+\infty)\subset(-\infty;-m]\cup[m;+\infty) \Leftrightarrow m\le 3$.

Kết hợp điều kiện $m>1$ ta được $1<m\le 3$

Vậy hàm số xác định với mọi $x\in(3\,;\,+\infty)$ khi và chỉ khi $1<m\le 3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số: $y=\dfrac{mx}{\sqrt{x-m+2}-1}$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với $m=1$ thì tập xác định của hàm số là $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

b) Giá trị của m để đồ thị hàm số qua điểm $A(1;1)$ là $m=\dfrac{-3\pm\sqrt{17}}{2}$.

c) Tập xác định của hàm số là $D=[m-2;+\infty)\setminus\{m-1\}$.

d) Giá trị nguyên dương của m để hàm số xác định trên $(0;1)$ là $m\in\{1;2\}$.

Lời giải

a) Đúng: Với $m=1$ ta có $y=\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-1}$. Hàm số xác định khi $\begin{cases}x+1\ge 0\\ \sqrt{x+1}-1\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -1\\ x\ne 0\end{cases}$.

Vậy $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$.

b) Sai: Vì $A(1;1)$ thuộc đồ thị nên thay tọa độ điểm $A(1;1)$ và phương trình của đồ thị hàm số ta có

$$1=\frac{m}{\sqrt{1-m+2}-1}\Leftrightarrow\sqrt{3-m}-1=m\Leftrightarrow\sqrt{3-m}=m+1$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1\ge 0\\ 3-m=m^2+2m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ge -1\\ m^2+3m-2=0\end{cases}\Leftrightarrow m=\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$$

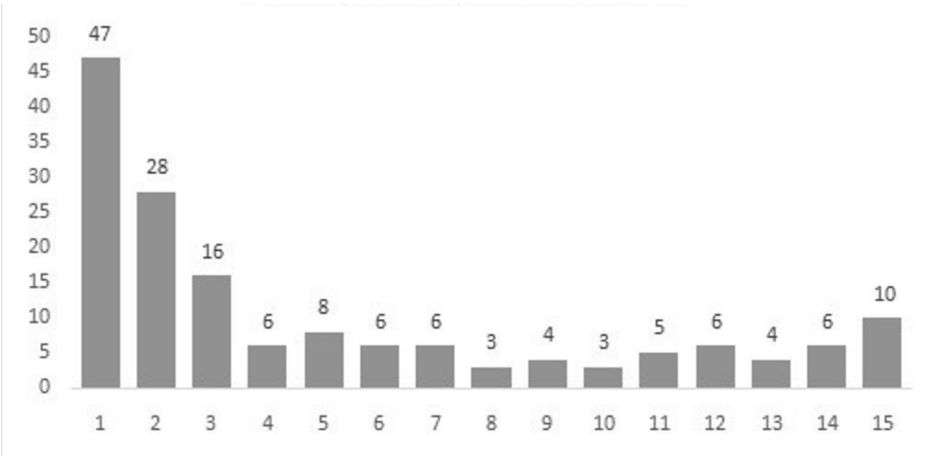
c) Đúng: Hàm số xác định khi $\begin{cases}\sqrt{x-m+2}-1\ne 0\\ x-m+2\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x-m+2\ne 1\\ x\ge m-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne m-1\\ x\ge m-2\end{cases}$.

Vậy $D=[m-2;+\infty)\setminus\{m-1\}$.

d) Đúng: Ta có $D=[m-2;+\infty)\setminus\{m-1\}$. Để hàm số xác định trên $(0;1)$ khi và chỉ khi

$\left[\begin{array}{l}(0;1)\subset[m-2;m-1)\\ (0;1)\subset(m-1;+\infty)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m-1\le 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=2\\ m\le 1\end{array}\right.$. Vậy $m\in\{1;2\}$.

Câu 2: Biểu đồ dưới đây cho biết số ca nhiễm Covid-19 của thành phố Hồ Chí Minh theo tuần năm 2023



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số ca nhiễm Covid-19 trong mỗi tuần tương ứng là một hàm số.

b) Gọi y là số ca nhiễm Covid-19 theo tuần, x là tuần tương ứng (x,y nguyên dương). Hàm số theo biểu đồ trên có dạng $y=f(x)$. Khi đó tập giá trị của hàm số trên là $T=\{3;4;5;6;8;10;16;28;47\}$.

c) Số ca nhiễm tuần thứ nhất là 50 ca.

d) Gọi y là số ca nhiễm Covid-19 theo tuần, x là tuần tương ứng (x, y nguyên dương). Hàm số theo biểu đồ trên có dạng $y = f(x)$. Khi đó điểm $(5;11)$ thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Lời giải

a) Đúng: Số ca nhiễm Covid-19 trong mỗi tuần tương ứng là một hàm số.

b) Đúng: Ta có tập giá trị của hàm số trên là $T = \{3;4;5;6;8;10;16;28;47\}$.

c) Sai: Dựa vào biểu đồ ta có số ca nhiễm tuần thứ nhất là 47 ca.

d) Sai: Ta có điểm $(5;11)$ không thuộc thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$.

Câu 3: Cho hàm số hàm số $f(x) = \sqrt{a+2x} + \sqrt{a+3-x}$ (với a là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} a+2x \geq 0 \\ a+3-x \geq 0 \end{cases}$.

b) Với $a = 1$, hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 2-x \geq 0 \end{cases}$.

c) Với $a = 2$, tập xác định của hàm số là $D = [-1;5]$.

d) Với $a = 3$, tập xác định của hàm số là D. Khi đó tập hợp $D \cap [1;8]$ có 6 giá trị nguyên.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} a+2x \geq 0 \\ a+3-x \geq 0 \end{cases}$

b) Sai: Với $a = 1$: $f(x) = \sqrt{1+2x} + \sqrt{4-x}$. Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 1+2x \geq 0 \\ 4-x \geq 0 \end{cases}$

c) Đúng: Với $a = 2$: $f(x) = \sqrt{2+2x} + \sqrt{5-x}$

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 2+2x \geq 0 \\ 5-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 5$

Tập xác định của hàm số là $D = [-1;5]$

d) Đúng: Với $a = 3$: $f(x) = \sqrt{3+2x} + \sqrt{6-x}$

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\begin{cases} 3+2x \geq 0 \\ 6-x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{3}{2} \\ x \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x \leq 6$

Tập xác định của hàm số là $D = \left[-\frac{3}{2};6\right]$. Suy ra $D \cap [1;8] = [1;6]$ có 6 giá trị nguyên

Câu 4: Cho hai hàm số $f(x)=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}; g(x)=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $g(x)=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ xác định khi và chỉ khi $x+4\ge 0$.

b) Tập xác định của hàm số $f(x)=\sqrt{5+x}+\sqrt{5-x}$ là $D_1=[-5;5]$

c) Tập xác định của hàm số $g(x)=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ là $D_2=(-4;+\infty)$

d) Gọi $D_1;D_2$ lần lượt là tập xác định của các hàm số $f(x);g(x)$.

Khi đó $(D_1\cap D_2)\setminus(1;6)=(-4;1]$.

Lời giải

a) Sai: Hàm số $g(x)=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ xác định khi và chỉ khi $x+4>0$.

b) Đúng: Hàm số $f(x)$ xác định khi và chỉ khi $\begin{cases}5+x\ge 0\\5-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -5\\x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow -5\le x\le 5$

Tập xác định của hàm số $f(x)$ là $D_1=[-5;5]$.

c) Đúng: Hàm số $g(x)=\dfrac{3x+4}{\sqrt{x+4}}$ xác định khi và chỉ khi $x+4>0\Leftrightarrow x>-4$

Tập xác định của hàm số $g(x)$ là $D_2=(-4;+\infty)$.

d) Đúng : Hàm số $f(x)$ xác định khi và chỉ khi

$\begin{cases}5+x\ge 0\\5-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge -5\\x\le 5\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-5;5]\Rightarrow D_1=[-5;5]$.

Hàm số $g(x)$ xác định khi và chỉ khi $x+4>0\Leftrightarrow x>-4\Rightarrow D_2=(-4;+\infty)$.

Suy ra $D_1\cap D_2=(-4;5]$. Vậy $(D_1\cap D_2)\setminus(1;6)=(-4;5]\setminus(1;6)=(-4;1]$.

Câu 5: Cho hai hàm số $\begin{cases}f(x)=(m-2)x+1\\g(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+9}\end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $g(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$.

b) Khi $m>2$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $\dfrac{8}{11}$.

d) Khi $m=\frac{11}{6}$ thì đồ thị hàm số của $f\left(x\right)$ và $g\left(x\right)$ cùng đi qua điểm $\left(2;\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

a) Đúng: Xét hàm số $g\left(x\right)=\frac{2}{x^2-5x+9}$

Điều kiện xác định: $x^2-5x+9\ne 0$ (có $\Delta=b^2-4ac=\left(-5\right)^2-4.1.9=-11<0$ nên phương trình vô nghiệm). Do đó hàm số xác định $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Sai: Hàm số $f\left(x\right)=\left(m-2\right)x+1$ nghịch biến khi $m-2<0\Leftrightarrow m<2$.

c) Đúng: Ta có $g\left(x\right)=x^2-5x+9=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{11}{4}\ge\frac{11}{4}\Rightarrow\frac{2}{x^2-5x+9}\le\frac{2}{\frac{11}{4}}=\frac{8}{11}$.

Suy ra $\frac{2}{x^2-5x+9}=\frac{8}{11}\Leftrightarrow x=\frac{5}{2}$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $f\left(x\right)=\frac{2}{x^2-5x+9}$ bằng $\frac{8}{11}$.

d) Đúng: Thay $x=2$ vào hàm số $g\left(x\right)$, ta có: $g\left(x\right)=\frac{2}{2^2-5.2+9}=\frac{2}{3}\Rightarrow\left(2;\frac{2}{3}\right)\in g(x)$

Mặt khác: $\left(2;\frac{2}{3}\right)\in f\left(x\right)\Leftrightarrow\frac{2}{3}=\left(m-2\right).2+1\Leftrightarrow m=\frac{11}{6}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Hàm số $y=\frac{x^2-7x+8}{x^2-3x+1}$ có tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\left\{a;b\right\};a\ne b.$ Khi đó hãy tính giá trị biểu thức $Q=a^3+b^3-4ab.$

Lời giải

Hàm số $y=\frac{x^2-7x+8}{x^2-3x+1}$ xác định khi: $x^2-3x+1\ne 0$.

Gọi a,b là 2 nghiệm của phương trình $x^2-3x+1=0$.

Theo Vi-et có $\begin{cases}a+b=3\\a.b=1\end{cases}$ có $Q=a^3+b^3-4ab=\left(a+b\right)^3-3ab\left(a+b\right)-4ab=27-3.3-4=14$

Vậy $Q=14$.

Câu 2: Một cửa hàng nhân dịp Noel đã đồng loạt giảm giá các sản phẩm. Trong đó có chương trình nếu mua một gói kẹo thứ hai trở đi sẽ được giảm 10% so với giá ban đầu. Biết giá gói đầu là 60000 đồng. Bạn An có 500000 đồng. Hỏi bạn An có thể mua tối đa bao nhiêu gói kẹo?

Lời giải

Xét một người mua x gói kẹo (x nguyên dương). Khi đó: Gói thứ nhất người đó trả 60000 đồng.

Số gói kẹo còn lại là $x-1$ và người đó chỉ phải trả: $60000-10\%60000=54000$ đồng (mỗi gói).

Vậy số tiền phải trả khi mua kẹo được tính theo công thức

$y=60000+(x-1).54000=54000x+6000$.

Số tiền bạn An dùng mua kẹo phải không quá 500000 đồng suy ra:

$54000x+6000\le 500000 \Rightarrow x\le \dfrac{247}{27}\approx 9{,}148$.

Vậy với số tiền hiện có, bạn An chỉ có thể mua được tối đa 9 gói kẹo.

Câu 3: Một người cần đặt một tiệc cưới ước tính khoảng 30 đến 35 bàn. Nhà hàng thứ nhất đề nghị anh nay đóng tiền cố định 20 triệu đồng, sau khi tiệc cưới diễn ra sẽ đóng khoản còn lại với số tiền 2 triệu đồng/1 bàn. Nhà hàng thứ hai đề nghị anh đóng tiền cố định 10 triệu đồng, sau khi tiệc cưới diễn ra sẽ đóng khoản còn lại với số tiền 2,5 triệu/1 bàn. Nếu anh này nên lựa chọn nhà hàng thứ nhất thì phải trả số tiền trong $[a;b], a,b>0, a,b$ có đơn vị triệu đồng. Nếu anh này chọn nhà hàng thứ hai thì phải trả số tiền trong $[c;d], c,d>0, c,d$ có đơn vị là triệu đồng. Tính $a+b+c+d$.(kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi x là số bàn tiệc thực tế trong đám cưới (x nguyên dương và $x\in[30;35]$) và y (triệu đồng) là số tiền mà người đó phải trả cho nhà hàng.

Nếu đăng ký tại nhà hàng thứ nhất, người đó sẽ trả tiền theo công thức: $y=2x+20$.

Với $x\in[30;35]$ thì $y\in[80;90]$, tức là người đó phải trả khoản tiền khoảng 80 triệu đến 90 triệu cho nhà hàng thứ nhất.

Nếu đăng ký tại nhà hàng thứ hai, người đó sẽ trả tiền theo công thức: $y=2{,}5x+10$.

Với $x\in[30;35]$ thì $y\in[85;97{,}5]$, tức là người đó phải trả khoản tiền khoảng 85 triệu đến 97,5 triệu cho nhà hàng thứ hai.

Vậy $a+b+c+d=80+90+85+97{,}5=352{,}5\approx 353$.

Câu 4: Giá thuê xe ô tô tự lái là 1,2 triệu đồng một ngày cho hai ngày đầu tiên và 900 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo. Tổng số tiền T phải trả là một hàm số của số ngày x mà khách thuê xe. Biết công thức của hàm số $T=T(x)$ và tập xác định của hàm số là $[a;+\infty]$. Tính $a+\dfrac{T(1)}{1000}$.

Lời giải

Ta có công thức của hàm số $T=T(x)$ là $T(x)=\begin{cases}1200000x \ khi \ 0\le x\le 2\\ 2400000+900000(x-2) \ khi \ x>2\end{cases}$

Suy ra tập xác định của hàm số là $D=[0;+\infty)\Rightarrow a=0$

Lại có $T(1)=1200000 \Rightarrow a+\dfrac{T(1)}{1000}=1200$.

Câu 5: Một quả bóng được ném vào không trung có chiều cao tính từ lúc bắt đầu ném ra được cho bởi công thức $h(t)=-t^2+2t+3$ (tính bằng mét), t là thời gian tính bằng giây $(t \geq 0)$. Hãy tính xem sau bao lâu quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất?

Lời giải

Khi quả bóng rơi xuống mặt đất thì $h(t)=0 \Rightarrow -t^2+2t+3=0 \Leftrightarrow t=-1$ (loại) hoặc $t=3$ (nhận).

Vậy sau 3 giây quả bóng sẽ rơi xuống mặt đất.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)=\dfrac{2019x+2020}{x^2-2x+21-2m}$, với m là tham số. Tìm số các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số $f(x)$ xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^2-2x+21-2m \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow$ Phương trình $x^2-2x+21-2m=0$ vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta'=1-(21-2m)<0 \Leftrightarrow m<10$.

Vì m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3;...; 8; 9\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên dương của m thỏa đề bài.

-----------------**HẾT**-----------------

Dạng 2: Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Phương pháp: Có hai phương pháp để giải dạng toán này như sau:

Phương pháp 1:
Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số.
Bước 2: Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$. Tính $f(x_1) - f(x_2)$.

- Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ thì hàm số đã cho đồng biến (tăng).
- Nếu $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ thì hàm số đã cho nghịch biến (giảm).

Phương pháp 2:
Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số.
Bước 2: Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$. Lập tỉ số $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$.

- Nếu $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0$ thì hàm số đã cho đồng biến (tăng).
- Nếu $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến (giảm)

Lưu ý: Đối với các bài toán chứa tham số thì ta vẫn áp dụng kiến thức đã nêu và tìm tham số theo yêu cầu đề bài

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x) = x + 2025$ trên khoảng

a) $(-\infty; 0)$ b) $(0; +\infty)$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$,
Ta có $f(x_1) - f(x_2) = x_1 + 2025 - x_2 - 2025 = x_1 - x_2$

a) Trên khoảng $(-\infty; 0)$

Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty; 0)$ và $x_1 < x_2$ thì $x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

b) Trên khoảng $(0; +\infty)$

Với mọi $x_1, x_2 \in (0; +\infty)$ và $x_1 < x_2$ thì $x_1 - x_2 < 0 \Rightarrow f(x_1) - f(x_2) < 0$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Bài tập 2: Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 7$ trên khoảng

a) $(-\infty; 0)$ b) $(0; +\infty)$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.
Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$,
Ta có $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - 7 - x_2^2 + 7 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$

a) Trên khoảng $(-\infty;0)$

Với mọi $x_1,x_2 \in (-\infty;0)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_1 - x_2 < 0$ và $x_1 + x_2 < 0$.

Suy ra $f(x_1) - f(x_2) > 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

b) Trên khoảng $(0;+\infty)$

Với mọi $x_1,x_2 \in (0;+\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_1 - x_2 < 0$ và $x_1 + x_2 > 0$.

Suy ra $f(x_1) - f(x_2) < 0$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Bài tập 3: Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ trên khoảng:

a) $(-\infty;1)$ b) $(1;+\infty)$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Với mọi $x_1,x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, ta có: $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{x_1}{x_1-1} - \dfrac{x_2}{x_2-1} = \dfrac{x_2 - x_1}{(x_1-1)(x_2-1)}$.

a) Trên khoảng $(-\infty;1)$

Với mọi $x_1,x_2 \in (-\infty;1)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_2 - x_1 > 0$ và $x_1 < 1$, $x_2 < 1$.

Suy ra $f(x_1) - f(x_2) > 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

b) Trên khoảng $(1;+\infty)$

Với mọi $x_1,x_2 \in (1;+\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_2 - x_1 < 0$ và $x_1 > 1$, $x_2 > 1$.

Suy ra $f(x_1) - f(x_2) > 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Bài tập 4: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = (2m+3)x + m + 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Với mọi $x_1,x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\left[(2m+3)x_1 + m + 3\right] - \left[(2m+3)x_2 + m + 3\right]}{x_1 - x_2} = 2m+3.$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 2m + 3 < 0 \Leftrightarrow m < -\dfrac{3}{2}$.

Bài tập 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-3;3]$ để hàm số $f(x) = (m+1)x + m - 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Với mọi $x_1,x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, ta có:

$$\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{\left[(m+1)x_1 + m - 2\right] - \left[(m+1)x_2 + m - 2\right]}{x_1 - x_2} = m+1.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ và $m \in [-3;3]$ nên $m \in \{0;1;2;3\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Bài tập 6: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Lời giải

Xét $D = (1;2)$

Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$, ta có: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$

$= \dfrac{\left[-x_1^2 + (m-1)x_1 + 2\right] - \left[-x_2^2 + (m-1)x_2 + 2\right]}{x_1 - x_2}$

$= \dfrac{-(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (m-1)(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -(x_1 + x_2) + m - 1$.

Hàm số nghịch biến trên $(1;2)$

$\Leftrightarrow -(x_1 + x_2) + m - 1 < 0$, $\forall x_1, x_2 \in (1;2) \Leftrightarrow m < (x_1 + x_2) + 1 \quad (1)$

Ta có $x_1, x_2 \in (1;2) \Leftrightarrow (x_1 + x_2) + 1 > 3 \quad (2)$

Từ $(1) \& (2) \Rightarrow m \leq 3$.

Bài tập 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \dfrac{m}{x-2}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

Tập xác định $D = (-\infty;2) \cup (2;+\infty)$.

Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(-\infty;2)$

Ta có: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{\dfrac{m}{x_1 - 2} - \dfrac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \dfrac{-m}{(x_1 - 2).(x_2 - 2)}$

Do $x_1 < -2, x_2 < -2$ nên $(x_1 + 2)(x_2 + 2) > 0$,

Từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$ thì $m > 0$.

Gọi x_1, x_2 là hai giá trị phân biệt tùy ý thuộc $(2;+\infty)$

Ta có: $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \dfrac{\dfrac{m}{x_1 - 2} - \dfrac{m}{x_2 - 2}}{x_1 - x_2} = \dfrac{-m}{(x_1 - 2).(x_2 - 2)}$

Do $x_1 > 2, x_2 > 2$ nên $(x_1 - 2)(x_2 - 2) > 0$,

Từ đó suy ra để hàm số nghịch biến trên $(-\infty;2)$ thì $m > 0$.

Tóm lại $m > 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên từng khoảng xác định.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các hàm số sau, hàm số nào nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x$. **B.** $y = -2x$. **C.** $y = 2x$. **D.** $y = \frac{1}{2}x$

Lời giải

Hàm số $y = ax + b$ với $a \neq 0$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $a < 0$.

Câu 2: Xét sự biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{3}{x}$ trên khoảng $(0;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

B. Hàm số vừa đồng biến, vừa nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

D. Hàm số không đồng biến, không nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Lời giải

$\forall x_1, x_2 \in (0;+\infty): x_1 \neq x_2$

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{3}{x_2} - \frac{3}{x_1} = \frac{-3(x_2 - x_1)}{x_2 x_1} \Rightarrow \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{x_2 x_1} < 0$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình bên dưới. Khẳng định nào sao đây là đúng?

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

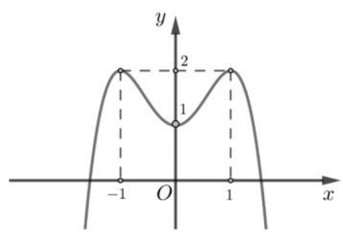
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên: khoảng $(-\infty;0)$ có mũi tên hướng lên, diễn tả hàm số đồng biến.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



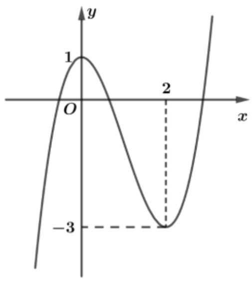
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Vì đồ thị hàm số đi lên khi $x\in(0;1)$ nên chọn đáp án B

Câu 5: Cho hàm số có đồ thị như hình bên dưới.



Khẳng định nào sau đây là đúng?

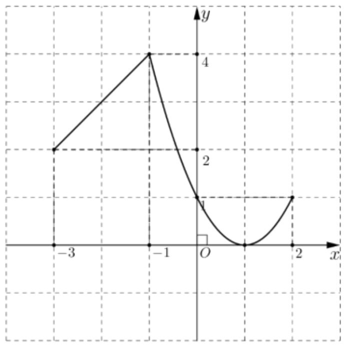
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;3)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Trên khoảng $(0;2)$, đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải nên hàm số nghịch biến.

Câu 6: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên đoạn $[-3;2]$ và có đồ thị như hình vẽ sau.



Khẳng định nào dưới đây là khẳng định **sai**?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;-1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;0)$.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;2)$ và $(-3;-1)$. Trên khoảng $(-3;0)$ hàm số không nghịch biến.

Câu 7: Trong các hàm số sau, hàm số nào giảm trên khoảng $(0;1)$?

A. $y=x^2$. **B.** $y=x^3$. **C.** $y=\dfrac{1}{x}$. **D.** $y=\sqrt{x}$.

Lời giải

Với $0<x_1<x_2<1$, ta thấy $f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{1}{x_2}=\dfrac{x_2-x_1}{x_1x_2}>0\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$.

Suy ra hàm số $y = f(x) = \dfrac{1}{x}$ là hàm số giảm trên khoảng $(0;1)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = (16 - m^2)x + 3$ Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 7. **B.** 9. **C.** 6. **D.** 3.

Lời giải

Hàm số $y = (16 - m^2)x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow 16 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{1;2;3\}$.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2022;2023]$ để hàm số $y = (m^2 - 4)x + 2m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 4040. **B.** 4044. **C.** Vô số. **D.** 2020.

Lời giải

Hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0 \to m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m > 2 \\ m < -2 \end{array}\right.$

$\xrightarrow[m \in [-2022;2022]]{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-2022;-2021;-2020;...;-3\} \cup \{3;4;5;...;2022\}$.

Vậy có $2.(2022 - 3 + 1) = 2.2020 = 4040$ giá trị nguyên của m cần tìm.

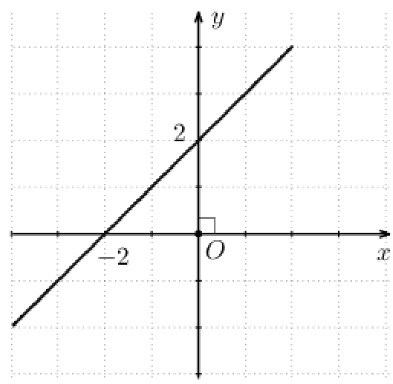
Câu 10: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = 2x + 1$. **B.** $y = -x + 3$. **C.** $y = -3x$. **D.** $y = -2x + 5$.

Lời giải

Ta đã biết hàm số $y = ax + b$ đồng biến khi $a > 0$ và nghịch biến khi $a < 0$. Do đó hàm số $y = 2x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = ax + b$ có đồ thị như hình vẽ



Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $f(0) > f(2023)$. **B.** $f(2022) > f(2023)$.

C. $f(2022) < f(2023)$. **D.** $f(-2022) < f(-2023)$.

Lời giải

Ta có dựa vào đồ thị của hàm số $f(x)=ax+b$ nên hàm số $f(x)=ax+b$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $f(2022)<f(2023)$ là khẳng định đúng.

Câu 12: Bác Anh dùng $24m$ dây thép gai để rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau. Diện tích lớn nhất của mảnh vườn mà bác Anh có thể rào được là:

A. $9m^2$. **B.** $12m^2$. **C.** $48m^2$. **<u>D</u>.** $36m^2$.

Lời giải

Gọi chiều rộng của mảnh vườn là $x(m)$. Do chu vi của mảnh vườn không đổi là $24m$ và nửa chu vi của mảnh vườn là $12m$ nên chiều dài của mảnh vườn là $12-x(m)$.

Khi đó diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là:

$S(x)=x(12-x)=-x^2+12x=-(x^2-12x+36)+36=-(x-6)^2+36\le 36$

Vậy diện tích lớn nhất của mảnh vườn mà bác Anh có thể rào được là $36m^2$.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)=4-3x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)$.

<u>B</u>. Hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{4};+\infty\right)$.

Lời giải

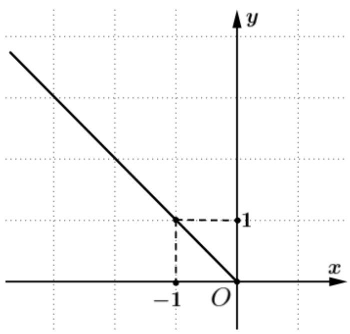
Tập xác định: $D=\mathbb{R}$. Với mọi $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ và $x_1<x_2$

Ta có $f(x_1)-f(x_2)=(4-3x_1)-(4-3x_2)=-3(x_1-x_2)>0$.

Suy ra $f(x_1)>f(x_2)$. Do đó, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác: $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)\subset\mathbb{R}$ nên hàm số cũng nghịch biến trên $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$.

Câu 14: Đồ thị hình vẽ là đồ thị của một hàm số trong bốn hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D dưới đây. Hỏi hàm số đó là hàm số nào?



A. $y=|x|$. **B.** $y=-x$.

C. $y=|x|$ với $x<0$. **<u>D</u>.** $y=-x$ với $x<0$.

Lời giải

Đồ thị hàm số nằm hoàn toàn "bên trái" trục tung.

Đồ thị hàm số đi xuống từ trái sang phải $\longrightarrow a < 0$.

Câu 15: Xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $f(x) = \dfrac{x-3}{x+5}$ trên khoảng $(-\infty;-5)$ và trên khoảng $(-5;+\infty)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty;-5)$, đồng biến trên $(-5;+\infty)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty;-5)$, nghịch biến trên $(-5;+\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-5;+\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty;-5)$ và $(-5;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $f(x_1) - f(x_2) = \left(\dfrac{x_1-3}{x_1+5}\right) - \left(\dfrac{x_2-3}{x_2+5}\right)$

$= \dfrac{(x_1-3)(x_2+5)-(x_2-3)(x_1+5)}{(x_1+5)(x_2+5)} = \dfrac{8(x_1-x_2)}{(x_1+5)(x_2+5)}$.

Với mọi $x_1,\ x_2 \in (-\infty;-5)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 < -5 \\ x_2 < -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+5 < 0 \\ x_2+5 < 0 \end{cases}$.

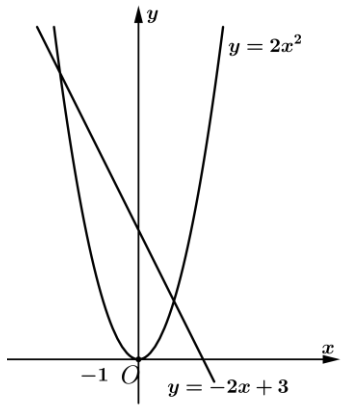
Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{8}{(x_1+5)(x_2+5)} > 0 \longrightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-5)$.

Với mọi $x_1,\ x_2 \in (-5;+\infty)$ và $x_1 < x_2$. Ta có $\begin{cases} x_1 > -5 \\ x_2 > -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+5 > 0 \\ x_2+5 > 0 \end{cases}$.

Suy ra $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} = \dfrac{8}{(x_1+5)(x_2+5)} > 0 \longrightarrow f(x)$ đồng biến trên $(-5;+\infty)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho đồ thị các hàm số $y = -2x+3; y = 2x^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Đồ thị hàm số $y=-2x+3$ là một đường cong

b) Đồ thị hàm số $y=-2x+3$ cắt đồ thị hàm số $y=2x^2$ tại hai điểm

c) Đồ thị của hàm số $y=-2x+3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

d) Đồ thị hàm số $y=2x^2$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Lời giải

a) Sai: Đồ thị hàm số $y=-2x+3$ là một đường thẳng

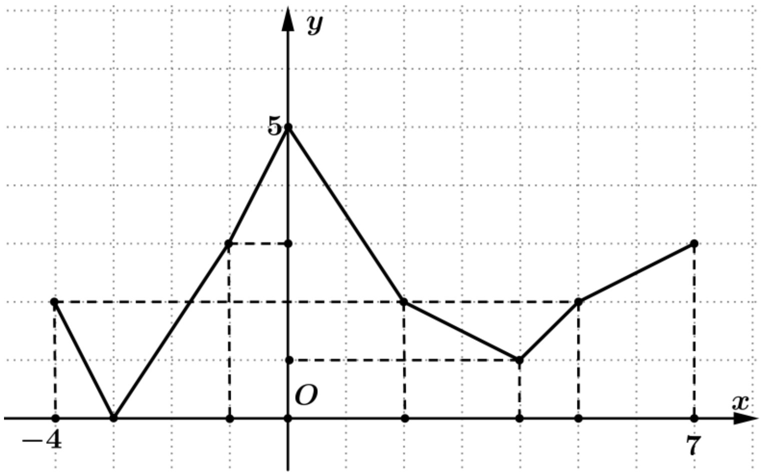
b) Đúng: Đồ thị hàm số $y=-2x+3$ cắt đồ thị hàm số $y=2x^2$ tại hai điểm

c) Đúng: Dựa vào đồ thị ta có: Đồ thị của hàm số $y=-2x+3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

d) Sai: Đồ thị hàm số $y=2x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

.

Câu 2: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị là đường gấp khúc như hình bên, mỗi ô tương ứng một đơn vị. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Tập giá trị hàm số $T=[-4;7]$

b) Ta thấy điểm $(-4;2),(4;1)$ thuộc đồ thị hàm số, điểm $(2;3)$ không thuộc đồ thị hàm số.

c) Ta có: $f(-1)=3, f(5)=2$.

d) Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng: $(-3;0),(4;7)$; hàm số nghịch biến trên các khoảng: $(-4;-3),(0;4)$.

Lời giải

a) Sai: Tập xác định hàm số: $D=[-4;7]$ và tập giá trị hàm số: $T=[0;5]$

b) Đúng: Ta thấy điểm $(-4;2),(4;1)$ thuộc đồ thị hàm số, điểm $(2;3)$ không thuộc đồ thị hàm số.

c) Đúng: Ta có: $f(-1)=3, f(5)=2$.

d) Đúng: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng: $(-3;0),(4;7)$; hàm số nghịch biến trên các khoảng: $(-4;-3),(0;4)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)=\begin{cases} 8 & \text{khi } x<0 \\ 8-2x & \text{khi } 0\le x\le 2 \\ x^2 & \text{khi } x>2 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(-1).f(1)=48$

b) Điểm $A(0;0)$ thuộc đồ thị hàm số.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

d) $f\left(\frac{3}{2}\right)=f(5)$

Lời giải

a) Đúng: Ta có $x=1$ thỏa mãn $0\le x\le 2$

Nên $f(1)=8-2.1=6$ và $x=-1$ thỏa mãn $x<0$ nên $f(-1)=8$.

Suy ra $f(-1).f(1)=8.6=48$

b) Sai: Ta có $x=0$ thỏa mãn $0\le x\le 2$ nên $f(0)=8-2.0=8$.

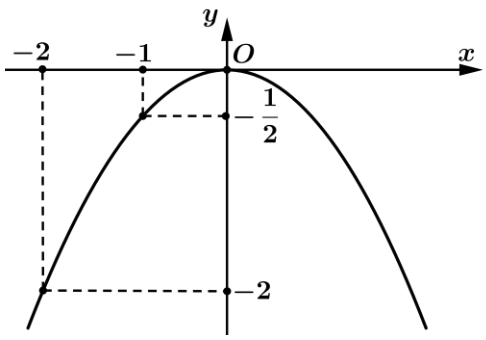
Điểm thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$ là điểm $B(0;8)$ nên điểm $A(0;0)$ không thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$.

c) Sai: Trên khoảng $(0;2)$ hàm số $y=f(x)=8-2x$ là hàm số bậc nhất với hệ số $a=-2<0$

Nên hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

d) Đúng: Ta có có $x=\frac{3}{2}$ thỏa mãn $0\le x\le 2$ nên $f\left(\frac{3}{2}\right)=8-2.\frac{3}{2}=5$ và $x=\sqrt{5}$ thỏa mãn $x>2$ nên $f\left(\sqrt{5}\right)=\left(\sqrt{5}\right)^2=5$. Suy ra $f\left(\frac{3}{2}\right)=f\left(\sqrt{5}\right)=5$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Điểm $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị của hàm số.

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

c) Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

d) Tập giá trị của hàm số là $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Sai: Từ đồ thị, ta thấy: Điểm $B\left(-1;-\frac{1}{2}\right)$ thuộc đồ thị hàm số nên điểm $A\left(-1;\frac{1}{2}\right)$ không thuộc đồ thị của hàm số.

b) Đúng: Từ đồ thị, ta thấy: Trên khoảng $(0;+\infty)$, hàm số có đồ thị là đường đi xuống nên hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

c) Đúng: Từ đồ thị, ta thấy: Trên khoảng $(-2;0)$, hàm số có đồ thị là đường đi lên nên hàm số đồng biến trên $(-2;0)$.

d) Sai: Từ đồ thị, ta thấy: Tập giá trị của hàm số là $(-\infty;0]$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $f(x)=\begin{cases} x-4 & \text{khi } x\geq 0 \\ x^2-4x+1 & \text{khi } x<0 \end{cases}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để $f(m^2)+f(-2)=18$.

Lời giải

Với $x=m^2\geq 0$ ta có: $f(m^2)=m^2-4$.

Với $x=-2<0$ ta có: $f(-2)=(-2)^2-4(-2)+1=13$.

Khi đó: $f(m^2)+f(-2)=18 \Leftrightarrow (m^2-4)+13=18 \Leftrightarrow m=\pm 3$.

Vậy $m=\pm 3$ thỏa mãn.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-20;20]$ để hàm số $f(x)=(2m-1)x+m+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Lời giải

Xét $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ với mọi $x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1\neq x_2$.

Ta có: $f(x_2)-f(x_1)=[(2m-1)x_2+m+3]-[(2m-1)x_1+m+3]=(2m-1)(x_2-x_1)$.

Suy ra: $T=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=2m-1$.

Điều kiện để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ là $T=2m-1>0 \Rightarrow m>\dfrac{1}{2}$. Vậy với $m>\dfrac{1}{2}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$. Khi đó có 20 giá trị nguyên của m

Câu 3: Anh T cần đặt một tiệc cưới ước tính khoảng 30 đến 35 bàn.
Nhà hàng 1 đề nghị anh T đóng tiền cố định 20 triệu đồng, sau khi tiệc cưới diễn ra sẽ đóng khoản còn lại với số tiền 2 triệu đồng/1 bàn.
Nhà hàng 2 đề nghị anh T đóng tiền cố định 10 triệu đồng, sau khi tiệc cưới diễn ra sẽ đóng khoản còn lại với số tiền 2,5 triệu/1 bàn.
Để tiết kiệm được chi phí cho tiệc cưới, anh T nên lựa chọn nhà hàng n (giả sử rằng chất lượng phục vụ hai nhà hàng trên là ngang nhau)? Giá trị n bằng bao nhiêu?

Lời giải

Gọi x là số bàn tiệc thực tế trong đám cưới (x nguyên dương và $x\in[30;35]$)

Và y (triệu đồng) là số tiền mà người đó phải trả cho nhà hàng.

Nếu đăng ký tại nhà hàng 1, anh T sẽ trả tiền theo công thức: $y=2x+20$.

Với $x\in[30;35]$ thì $y\in[80;90]$, tức là anh T phải trả khoản tiền khoảng 80 triệu đến 90 triệu cho nhà hàng thứ nhất.

Nếu đăng ký tại nhà hàng 2, anh T sẽ trả tiền theo công thức: $y=2,5x+10$.

Với $x \in [30;35]$ thì $y \in [85;97,5]$, tức là anh T phải trả khoản tiền khoảng 85 triệu đến 97,5 triệu cho nhà hàng thứ hai.

Vậy, nếu chất lượng phục vụ hai nhà hàng là tương đương, anh T nên chọn nhà hàng 1 để tiết kiệm một khoản chi phí tiệc cưới.

-----------------HẾT-----------------

BÀI 02 HÀM SỐ BẬC HAI

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số bậc hai

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y = ax^2 + bx + c,$ trong đó x là biến số còn a, b, c là các hằng số và $a \neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý:

Khi $a = 0$ và $b \neq 0$ thì hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y = bx + c$.

Khi $a = b = 0$ thì hàm số trở thành hàm hằng $y = c$.

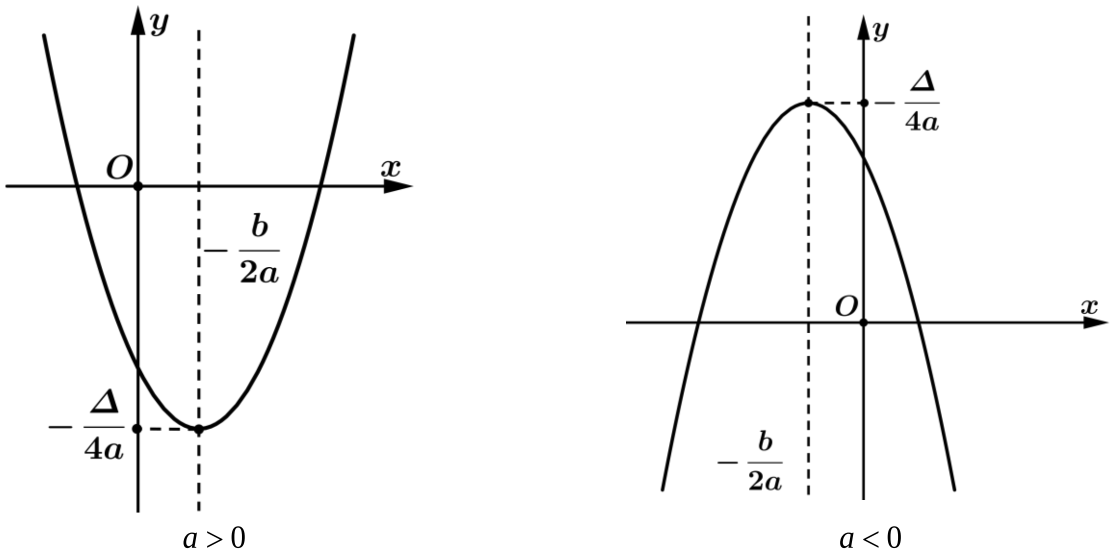
2 Đồ thị hàm số bậc hai

a) Đồ thị hàm số $y = ax^2$ với $a \neq 0$ là một parabol có đỉnh là gốc tọa độ, có trục đối xứng là trục tung (là đường thẳng $x = 0$). Parabol này quay bề lõm lên trên nếu $a > 0$ và quay xuống dưới nếu $a < 0$.

b) Đồ thị hàm số $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ là một parabol có:

- Đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; -\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.
- Trục đối xứng là đường thẳng $x = -\dfrac{b}{2a}$.
- Bề lõm hướng lên trên nếu $a > 0$, hướng xuống dưới nếu $a < 0$.
- Giao điểm với trục tung là $M(0; c)$.
- Số giao điểm với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$.

Đồ thị hàm số bậc hai:



Bảng biến thiên của hàm số bậc hai:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↗ $+\infty$

$a>0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

$a<0$

- Khi $a>0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$.
- Khi $a<0$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$ và nghịch biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$.

3 Cách vẽ đồ thị hàm số bậc hai

Để vẽ đường parabol $y=ax^2+bx+c$ ta tiến hành theo các bước sau:

Bước 1: Xác định toạ độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$

Bước 2: Vẽ trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}$

Bước 3: Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) và một vài điểm đặc biệt trên parabol

Bước 4: Vẽ parabol

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định và vẽ đồ thị hàm số bậc hai

Phương pháp: Để xác định hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ (xác định các tham số a, b, c)

Dựa vào giả thiết để lập nên các phương trình (hệ phương trình) ẩn là a, b, c

Việc lập nên các phương trình nêu ở trên thường sử dụng đến các kết quả sau:

- Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(x_0; y_0) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0)$
- Đồ thị hàm số có trục đối xứng $x = x_0 \Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a} = x_0$
- Đồ thị hàm số có đỉnh là $I(x_I; y_I) \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = x_I \\ -\dfrac{\Delta}{4a} = y_I \end{cases}$

Trên $\mathbb{R}$ thì ta có:

- Hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow a < 0$. Lúc này giá trị lớn nhất $f(x)$ là $-\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$
- Hàm số $f(x)$ có giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow a > 0$. Lúc này giá trị nhỏ nhất $f(x)$ là $-\dfrac{\Delta}{4a} = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xác định parabol $(P): y = ax^2 + bx + 2$, biết:

a) (P) qua $M(1;5)$,có trục đối xứng là $x = -\dfrac{1}{4}$

b) $I\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{11}{2}\right)$ là đỉnh của (P)

c) (P) đi qua $A(1;-1)$, $B(2;3)$, $C(-1;-3)$

d) Hoành độ đỉnh (P) bằng -3 và (P) qua $M(-2;1)$

Lời giải

a) Ta có: $\begin{cases} a + b + 2 = 5 \\ -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ a = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow (P): y = 2x^2 + x + 2$

b) Ta có : $\begin{cases} -\dfrac{2}{2a} = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{4 + 8c}{-8} = \dfrac{11}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = 5 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -2x^2 - 2x + 5$

c) Ta có: $\begin{cases} a.1^2 + b.1 + c = -1 \\ a.2^2 + b.2 + c = 3 \\ a.(-1)^2 + b(-1) + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow (P): y = x^2 + x - 3.$

d) Ta có: $\begin{cases} -\dfrac{-4}{2a}=-3 \\ 4a+8+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4=6a \\ 4a+c=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ c=-\dfrac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow (P): y=-\dfrac{2}{3}x^2-4x-\dfrac{13}{3}$.

Bài tập 2: Xác định hàm số $y=ax^2+bx+c$ với a, b, c là các tham số, biết rằng hàm số ấy đạt giá trị lớn nhất bằng 5 tại $x=-2$ và có đồ thị đi qua điểm $M(1;-1)$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}$.

Trên $\mathbb{R}$, do hàm số $y=ax^2+bx+c$ đạt giá trị lớn nhất nên $a<0$.

Do đó theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} -\dfrac{b}{2a}=-2 \\ 4a-2b+c=5 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{2}{3} \\ b=-\dfrac{8}{3} \\ c=\dfrac{7}{3} \end{cases}$ (nhận).

Vậy hàm số cần tìm là $y=-\dfrac{2}{3}x^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{7}{3}$.

Bài tập 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để parabol $(P): y=mx^2-2mx-3m-2$ $(m\neq 0)$ cắt đường thẳng $y=3x-1$ tại đỉnh của nó.

Lời giải

Đỉnh của (P) là $I(1;-4m-2)$.

Theo giả thiết, I thuộc đường thẳng $y=3x-1$ nên $-4m-2=3.1-1 \Leftrightarrow m=-1$.

Vậy $m=-1$.

Bài tập 4: Biết đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a,b,c\in\mathbb{R};a\neq 0)$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$

Tìm hàm số đã cho.

Lời giải

Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ đi qua điểm $A(2;1)$ và có đỉnh $I(1;-1)$ nên có hệ phương trình

$\begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ -\dfrac{b}{2a}=1 \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a+2b+c=1 \\ b=-2a \\ a+b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-2a \\ -a+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ b=-4 \\ a=2 \end{cases}$. Vậy $y=2x^2-4x+1$.

Bài tập 5: Cho Parabol $(P): y=x^2+mx+n$ (m,n tham số). Xác định m,n để (P) nhận đỉnh $I(2;-1)$.

Lời giải

Parabol $(P): y=x^2+mx+n$ nhận $I(2;-1)$ là đỉnh, khi đó ta có:

$\begin{cases} 4+2m+n=-1 \\ -\dfrac{m}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m+n=-5 \\ m=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=3 \\ m=-4 \end{cases}$. Vậy $m=-4, n=3$.

Bài tập 6: Cho Parabol: $y=ax^2+bx+c$ có đỉnh $I(2;0)$ và (P) cắt trục Oy tại điểm $M(0;-1)$. Khi đó

Parabol có hàm số là

Lời giải

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c \longrightarrow$ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a}; c - \dfrac{b^2}{4a}\right)$

Theo bài ra, ta có có đỉnh $I(2;0) \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{2a} = 2 \\ c - \dfrac{b^2}{4a} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = 4ac \end{cases} \quad (1)$

Lại có cắt Oy tại điểm $M(0;-1)$ suy ra $y(0) = -1 \Leftrightarrow c = -1 \quad (2)$

Từ, suy ra $\begin{cases} b = -4a \\ b^2 = -a \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ b^2 = b \\ c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{4} \\ b = 1;\ c = -1 \end{cases} \Rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x^2 + x - 1$

Bài tập 7: Xác định hàm số $y = ax^2 + bx + c(1)$ biết đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2.

Lời giải

Do đồ thị của nó có đỉnh $I\left(\dfrac{3}{2}; \dfrac{1}{4}\right)$ và cắt trụ hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên ta có

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{9}{4}a + \dfrac{3}{2}b + c = \dfrac{1}{4} \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + b = 0 \\ 9a + 6b + 4c = 1 \\ 4a + 2b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases}. \text{ Vậy } y = -x^2 + 3x - 2$$

Bài tập 8: Tìm phương trình của Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua $A(0;-1)$, $B(1;-1)$, $C(-1;1)$.

Lời giải

Ta có: Vì $A, B, C \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = a.0^2 + b.0 + c \\ -1 = a.(1)^2 + b.(1) + c \\ 1 = a.(-1)^2 + b.(-1) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$. Vậy $(P): y = x^2 - x - 1$.

Bài tập 9: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1;4), B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$. Tìm tọa độ đỉnh của (P).

Lời giải

$(P): y = ax^2 + bx + c$ đi qua ba điểm $A(1;4), B(-1;-4)$ và $C(-2;-11)$ suy ra

$$\begin{cases} a + b + c = 4 \\ a - b + c = -4 \\ 4a - 2b + c = -11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow (P): y = -x^2 + 4x + 1.$$

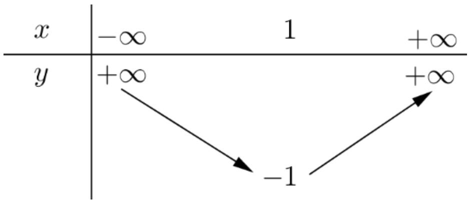
Hoành độ của đỉnh của (P) là $x=\frac{-b}{2a}=2$. Suy ra tung độ của đỉnh của (P) là

$y=-2^2+4.2+1=5$.

Bài tập 10: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$.

Lời giải

Ta có $a=1$, $b=-2$, $c=3$. Suy ra toạ độ đỉnh là $I(1;-1)$.



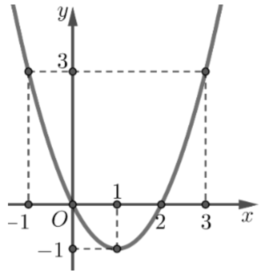
Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(1;-1)$ và trục đối xứng là $x=1$.

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

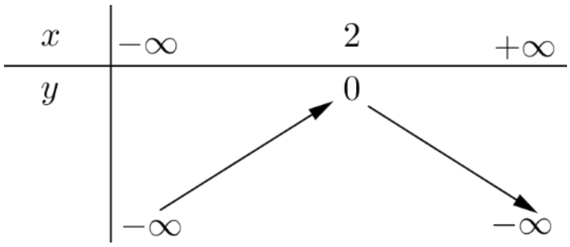
Ta có đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$ là



Bài tập 11: Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-2$.

Lời giải

Ta có $a=-\frac{1}{2}$, $b=2$, $c=-2$. Suy ra toạ độ đỉnh là $I(2;0)$.



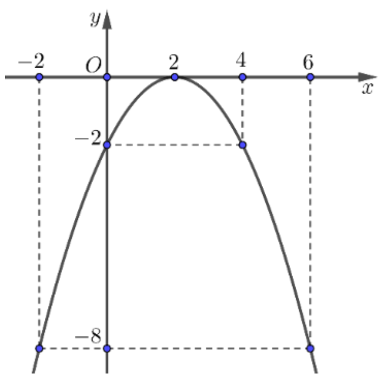
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(2;0)$ và trục đối xứng là $x=2$.

Bảng giá trị

x	-2	0	2	4	6
y	-8	-2	0	-2	-8

Ta có đồ thị của hàm số $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-2$ là



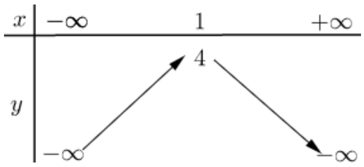
Bài tập 12: Cho hàm số $y=-x^2+2x+3$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị (P) của hàm số.

b) Tìm các giá trị của x để $y>0$ và $y<0$.

Lời giải

a) Ta có $a=-1$, $b=2$, $c=3$. Suy ra toạ độ đỉnh là $I(1;4)$.



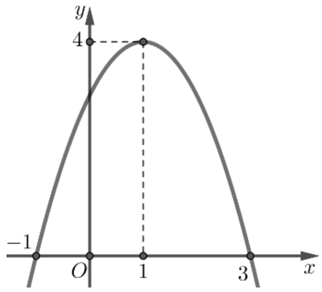
Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(1;4)$ và trục đối xứng là $x=1$.

Bảng giá trị

x	-1	0	1	2	3
y	0	3	4	3	0

Ta có đồ thị của hàm số $y=-x^2+2x+3$ là



b) Từ đồ thị ta thấy để $y>0$ thì $x\in(-1;3)$ và $y<0$ thì $x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ có đồ thị (P). Đỉnh của (P) được xác định bởi công thức nào?

A. $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **B.** $I\left(-\frac{b}{a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$. **C.** $I\left(\frac{b}{2a};\frac{\Delta}{4a}\right)$. **D.** $I\left(-\frac{b}{2a};\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải

Đỉnh của parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ là điểm $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

Câu 2: Cho parabol $(P): y=3x^2-2x+1$. Điểm nào sau đây là đỉnh của (P)?

A. $I(0;1)$. **B.** $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **C.** $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. **D.** $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Lời giải

Hoành độ đỉnh của $(P): y=3x^2-2x+1$ là $x=-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}\Rightarrow y=3\left(\frac{1}{3}\right)^2-2.\frac{1}{3}+1=\frac{2}{3}$.

Vậy $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$.

Câu 3: Trục đối xứng của đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a\neq 0)$ là đường thẳng nào dưới đây?

A. $x=-\frac{b}{2a}$. **B.** $x=-\frac{c}{2a}$. **C.** $x=-\frac{\Delta}{4a}$. **D.** $x=\frac{b}{2a}$.

Lời giải

Câu 4: Tọa độ đỉnh của parabol $y=-2x^2-4x+6$ là

A. $I(-1;8)$. **B.** $I(1;0)$. **C.** $I(2;-10)$. **D.** $I(-1;6)$.

Lời giải

Tọa độ đỉnh của parabol $y=-2x^2-4x+6$ là $\begin{cases} x=-\frac{-4}{2.(-2)}=-1 \\ y=-2.(-1)^2-4.(-1)+6=8 \end{cases} \Rightarrow I(-1;8)$.

Câu 5: Parabol $y=-x^2+2x+3$ có phương trình trục đối xứng là

A. $x=-1$. **B.** $x=2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Parabol $10m$ có trục đối xứng là đường thẳng $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ x-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x\neq 5 \end{cases}$ $[-2;+\infty)$.

Câu 6: Biết hàm số bậc hai $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a+b+c$.

A. 3. **B.** $\frac{3}{2}$. **<u>C</u>.** 2. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} a-b+c=0 \\ -\frac{b}{2a}=1 \\ a+b+c=2 \end{cases}$. với $a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a-b+c=0 \\ b=-2a \\ a+b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=-\frac{1}{2} \\ c=\frac{3}{2} \end{cases}$

Vậy hàm bậc hai cần tìm là $y=-\frac{1}{2}x^2+x+\frac{3}{2}$

Câu 7: Gọi S là tập các giá trị $m \neq 0$ để parabol $(P): y=mx^2+2mx+m^2+2m$ có đỉnh nằm trên đường thẳng $y=x+7$. Tính tổng các giá trị của tập S

<u>A</u>. -1. **B.** 1. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Khi $m \neq 0$ thì $(P): y=mx^2+2mx+m^2+2m$ có đỉnh là $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow I(-1;m^2+m)$

Vì đỉnh nằm trên đường thẳng $y=x+7$ nên

$m^2+m=-1+7 \Leftrightarrow m^2+m-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=2 \\ m=-3 \end{array}\right.(TM)$

Vậy tổng các giá trị của tập S: $2+(-3)=-1$.

Câu 8: Hàm số bậc hai nào sau đây có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1;-4)$?

A. $y=-x^2+5x-8$. **<u>B</u>.** $y=-2x^2+10x-12$.

C. $y=x^2-5x$. **D.** $y=-2x^2+5x+\frac{1}{2}$.

Lời giải

Hàm số bậc hai cần tìm có phương trình: $y=ax^2+bx+c\,(a \neq 0)$

Hàm số bậc hai có đồ thị là parabol có đỉnh là $S\left(\frac{5}{2};\frac{1}{2}\right)$ và đi qua $A(1;-4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a}=\frac{5}{2} \\ \frac{-\Delta}{4a}=\frac{1}{2} \\ a+b+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-b}{2a}=\frac{5}{2} \\ \frac{-b^2+4ac}{4a}=\frac{1}{2} \\ a+b+c=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-5a \\ \frac{-25a^2+4a(4a-4)}{4a}=\frac{1}{2} \\ c=4a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=10 \\ c=-12 \end{cases}$$

Câu 9: Cho parabol (P) có phương trình $y = ax^2 + bx + c$. Tìm $a + b + c$, biết (P) đi qua điểm $A(0;3)$ và có đỉnh $I(-1;2)$.

A. $a+b+c=6$ **B.** $a+b+c=5$ **C.** $a+b+c=4$ **D.** $a+b+c=3$

Lời giải

Parabol (P) đi qua điểm $A(0;3) \Rightarrow c = 3$.

Parabol (P) có đỉnh $I(-1;2) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-b}{2a} = -1 \\ a - b + 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ a - 2a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c = 6$.

Câu 10: Parabol $y = ax^2 + bx + c$ đạt cực tiểu bằng 4 tại $x = -2$ và đi qua $A(0;6)$ có phương trình là

A. $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$. **B.** $y = x^2 + 2x + 6$. **C.** $y = x^2 + 6x + 6$. **D.** $y = x^2 + x + 4$.

Lời giải

Ta có: $-\dfrac{b}{2a} = -2 \Rightarrow b = 4a$.

Mặt khác: $A, I \in (P) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = a.(-2)^2 + b.(-2) + c \\ 6 = a.(0)^2 + b.(0) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4.a - 2b = -2 \\ c = 6 \end{cases}$

Kết hợp, ta có : $\begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 2 \\ c = 6 \end{cases}$. Vậy $(P): y = \dfrac{1}{2}x^2 + 2x + 6$.

Câu 11: Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ có phương trình là

A. $y = x^2 + x + 2$. **B.** $y = 2x^2 + x + 2$. **C.** $y = 2x^2 + 2x + 2$ **D.** $y = x^2 + 2x$

Lời giải

Parabol $y = ax^2 + bx + 2$ đi qua hai điểm $M(1;5)$ và $N(-2;8)$ nên ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} 5 = a.1^2 + b.1 + 2 \\ 8 = a.(-2)^2 + b.(-2) + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 3 \\ 4a - 2b = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases}$. Vậy hàm số cần tìm là $y = 2x^2 + x + 2$.

Câu 12: Cho parabol $(P): y = x^2 + bx + 1$ đi qua điểm $A(-1;3)$. Khi đó

A. $b = -1$. **B.** $b = 1$. **C.** $b = 3$. **D.** $b = -2$.

Lời giải

Thay tọa độ $A(-1;3)$ vào $(P): y = x^2 + bx + 1$. Ta được: $3 = (-1)^2 - b + 1 \Leftrightarrow b = -1$.

Câu 13: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có bảng biến thiên dưới đây. Đáp án nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

A. $y = x^2 + 2x - 2$. **B.** $y = x^2 - 2x - 2$. **C.** $y = x^2 + 3x - 2$. **D.** $y = -x^2 - 2x - 2$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta có $a > 0$ và đỉnh $I(-1;-3)$ nên $-\dfrac{b}{2a} = -1$.

Câu 14: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$. Khi đó $4a + 2b$ bằng

A. -1. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Do parabol $H : AB$ có trục đối xứng là đường thẳng $AB = 10$ nên $y = -\dfrac{1}{3}x^2$ $HA = HB = 5$

$B(x_B; y_B) \Rightarrow x_B = 5 \Rightarrow y_B = -\dfrac{25}{3} \Rightarrow OH = |y_B| = \dfrac{25}{3}$.

Câu 15: Biết hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là một đường Parabol đi qua điểm $A(-1;0)$ và có đỉnh $I(1;2)$. Tính $a + b + c$.

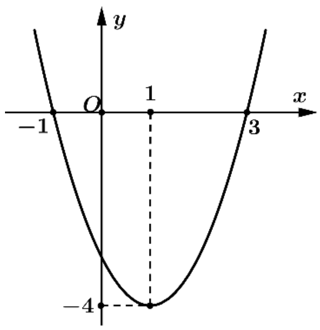
A. 3. **B.** $\dfrac{3}{2}$. **C.** 2. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có hệ: $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ -\dfrac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \end{cases}$. với $a \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 0 \\ b = -2a \\ a + b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

Vậy hàm bậc hai cần tìm là $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x + \dfrac{3}{2}$

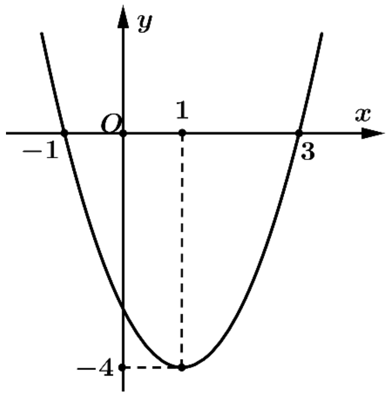
Câu 16: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Khi đó $2a + b + 2c$ có giá trị là:

A. -9. **B.** 9. **C.** -6. **D.** 6.

Lời giải



Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1;0), B(1;-4), C(3;0)$

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$

Khi đó: $2a + b + 2c = 2.1 - 2 + 2(-3) = -6.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = -(x-a)(x-b)$ có đồ thị là (P) $(a < b)$. Biết (P) có đỉnh $I(1;4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a + 2b = 1$.

b) Đường thẳng $(d): y = x + 1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt

c) $f(x) > 0 \ \forall x \in (-1;2)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[-\frac{1}{2};2\right]$ là $\frac{7}{4}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $(P): y = -x^2 + (a+b)x - ab$

Vì (P) có đỉnh $I(1;4)$ nên ta có: $\begin{cases} 4 = -1 + (a+b) - ab \\ \dfrac{a+b}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab = -3 \\ a + b = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases} \end{array}\right.$. Vì $a < b \Rightarrow a + 2b = 5$.

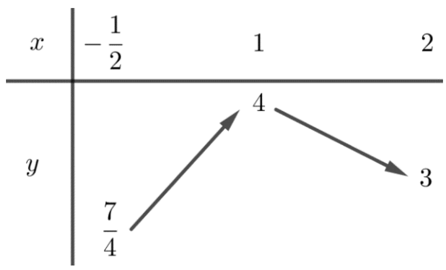
b) Đúng: Ta có: $(P): y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) $-x^2+2x+3=x+1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=2 \end{array}\right.$ nên đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

c) Đúng: Ta có: $f(x)>0 \Leftrightarrow -(x+1)(x-3)>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1>0 \\ x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1<0 \\ x-3>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>-1 \\ x<3 \end{cases} \\ \begin{cases} x<-1 \\ x>3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1<x<3$$

d) Đúng: Vì $(P): y=-x^2+2x+3$ có đỉnh $I(1;4)$ và bề lõm quay xuống nên ta có bảng biến thiên sau:



Dựa vào bảng biến thiên.

Câu 2: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c\,(a\neq 0)$ có đồ thị là parabol (P). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu (P) đi qua gốc tọa độ O thì $b=0$.

b) Nếu (P) có trục đối xứng là $x=2$ thì $4a-b=0$.

c) Nếu (P) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1 thì $a+b+c=0$.

d) Nếu (P) có đỉnh $S(2;-3)$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 thì $a-b+c=6$.

Lời giải

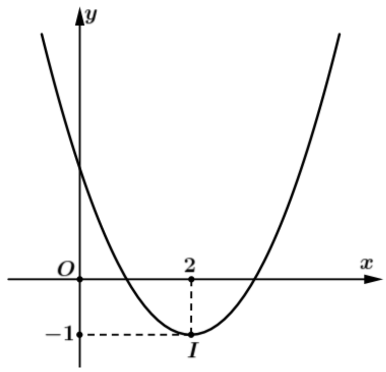
a) Sai: (P) đi qua gốc tọa độ O $\Leftrightarrow 0=a.0^2+b.0+c \Leftrightarrow c=0$.

b) Sai: (P) có trục đối xứng $x=-\dfrac{b}{2a}=2 \Leftrightarrow -b=4a \Leftrightarrow 4a+b=0$.

c) Đúng: $x=1, y=0 \Rightarrow a+b+c=0$.

d) Đúng: Đỉnh $S(2;-3)$ và đi qua $(0;1)$ nên $\begin{cases} 4a+b=0 \\ 4a+2b+c=-3 \\ c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow a-b+c=6$.

Câu 3: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (P) có đồ thị như hình vẽ.



a) (P) có tung độ đỉnh bằng 2.

b) (P) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ trái dấu.

c) $y > 2\ \forall x < 0$.

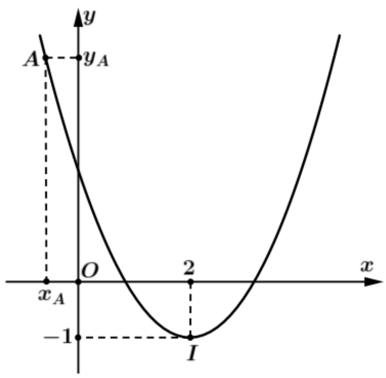
d) (P) đi qua điểm $M\left(3;\dfrac{-1}{4}\right)$

Lời giải

a) Sai: (P) có tung độ đỉnh bằng -1.

b) Sai: Dựa vào hình vẽ thấy (P) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ dương,

c) Đúng: Dựa vào hình vẽ:



Ta có với mọi $x_A < 0 \Rightarrow y_A > 2$.

d) Đúng: Ta có tung độ giao điểm bằng $2 \Rightarrow c = 2$.

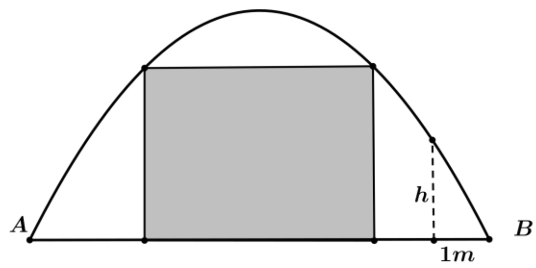
Hoành độ đỉnh $x_I = 2 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow 4a + b = 0 \quad (1)$

Ta có: $y(2) = 4a + 2b + 2 = -1 \Rightarrow 4a + 2b = -3\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = -3 \end{cases}$ suy ra (P): $y = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 2$

Với $x=3 \Rightarrow y(3)=\frac{3}{4}3^2-3.3+2=-\frac{1}{4}$ do đó (P) đi qua điểm $M\left(3;\frac{-1}{4}\right)$.

Câu 4: Một chiếc cổng hình parabol, người ta muốn thiết kế một cái cửa hình chữ nhật được tô màu như hình vẽ dưới đây:



Biết cổng cao 4 m, rộng 8 m, cửa rộng bằng một nửa chiều rộng của cổng và cách đều hai chân cổng. Một người đứng dưới cổng cánh B một khoảng 1 m và đo được chiều cao của cổng tại chỗ đó là h .

a) Cổng có hình parabol với phương trình $(P): y=ax^2+bx+c(a<0)$

b) Chiều rộng của cừa bằng 4 mét

c) $h=1,5$ m.

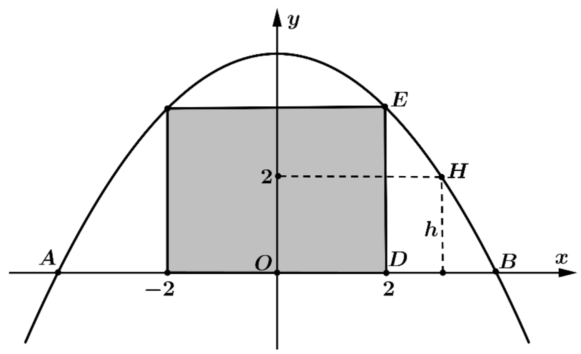
d) Người thiết kế muốn sơn bề mặt cửa, biết giá sơn cửa là 150000 đồng trên một mét vuông. Giá tiền phải sơn toàn bộ cửa là 1850000 đồng.

Lời giải

a) Đúng: Cổng hình parabol có bề lõm hướng xuống nên có phương trình $y=ax^2+bx+c\ (a<0)$

b) Đúng: Vì cổng rộng 8 m mà cửa rộng bằng một nửa chiều rộng của cổng nên cửa có chiều rộng 4 m.

c) Sai: Dựng hệ trục Oxy như hình vẽ :



Khi đó (P) có đỉnh $I(0;4)$, suy ra $\begin{cases} c=4 \\ \frac{-b}{2a}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=4 \\ b=0 \end{cases}$ suy ra $(P): y=ax^2+4$.

Theo đề cổng có chiều rộng là $8m$ nên (P) đi qua điểm $B(4;0)$ suy ra $16a=4 \Rightarrow a=\frac{-1}{4}$

Do đó $(P): y = \frac{-1}{4}x^2 + 4$.

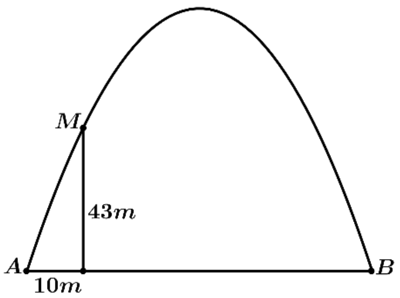
Vị trí người đứng cách B 1m nên (P) đi qua điểm $H(3;h) \Rightarrow h = \frac{-1}{4}.3^2 + 4 = 1,75$.

d) Sai: Vì cửa rộng $4m$ nên $D(2;0)$ và (P) đi qua điểm $E(2;y_E) \Rightarrow y_E = \frac{-1}{4}.2^2 + 4 = 3$

Do đó cửa cao 3m suy ra cửa có hình chữ nhật có diện tích $3.4 = 12\,m^2$

Suy ra giá tiền sơn toàn bộ bề mặt cửa là $12.150000 = 1800000$ nghìn đồng.

Câu 5: Cổng Arch tại thành phố St Louis của Mỹ có hình dạng là một parabol (hình vẽ). Biết khoảng cách giữa hai chân cổng bằng 162m. Trên thành cổng, tại vị trí có độ cao 43m so với mặt đất (Điểm M) người ta thả một sợi dây chạm đất (dây căng thẳng theo phương vuông góc với mặt đất). Vị trí chạm đất của đầu sợi dây này cách chân cổng A một đoạn 10m. Giả sử các số liệu trên là chính xác. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Cổng có hình dạng Parabol đi qua điểm có tọa độ $M(43;10)$.

b) Đặt chân 1 cột của cổng trùng với gốc tọa độ. Trục đối xứng của của parabol là $x = 80(m)$.

c) Phương trình Parabol của cổng Arch tại thành phố St Louis là $y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}x$

d) Độ cao của cổng Arch là $185,6(m)$

Lời giải

a) Đúng: Cổng có hình dạng Parabol đi qua điểm có tọa độ $M(43;10)$.

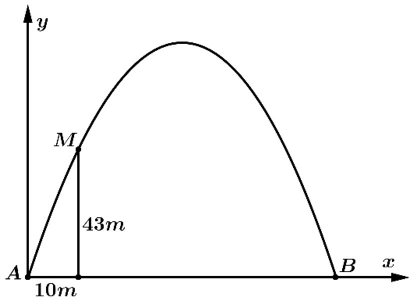
b) Sai: Đặt chân 1 cột của cổng trùng với gốc tọa độ. Khoảng cách 2 chân cột là 162 (m)

Trục đối xứng của của parabol là $x = 81(m)$.

c) Đúng: Phương trình Parabol có dạng: $y = ax^2 + bx$ và đi qua các điểm $B(162;0)$ và $M(10;43)$

nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases} 162^2a + 162b = 0 \\ 100a + 10b = 43 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{43}{1520} \\ b = \frac{3483}{760} \end{cases} \Rightarrow (P): y = -\frac{43}{1520}x^2 + \frac{3483}{760}x$.

d) Đúng: Đặt cổng (Parabol) vào hệ tọa độ như sau:



Phương trình Parabol có dạng: $y=ax^2+bx$ và đi qua các điểm $B(162;0)$ và $M(10;43)$ nên ta có hệ phương trình: $\begin{cases}162^2a+162b=0\\100a+10b=43\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{43}{1520}\\b=\dfrac{3483}{760}\end{cases}$.

Khi đó ta có $(P): y=-\dfrac{43}{1520}x^2+\dfrac{3483}{760}x$.

Chiều cao của cổng bằng tung độ đỉnh của (P) là: $y_{\max}=y\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=y\left(\dfrac{3483}{43}\right)\approx 185,6$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một người nông dân thả 1000 con cá giống vào hồ nuôi vừa mới đào. Biết rằng sau mỗi năm thì số lượng cá trong hồ tăng thêm x lần số lượng cá ban đầu và x không đổi. Bằng cách thay đổi kĩ thuật nuôi và thức ăn cho cá. Hỏi sau hai năm để số cá trong hồ là 36000 con thì tốc độ tăng số lượng cá trong hồ là bao nhiêu? Biết tốc độ tăng mỗi năm là không đổi.

Lời giải

Sau một năm số lượng cá trong hồ là $1000+1000x=1000(1+x)$ (con).

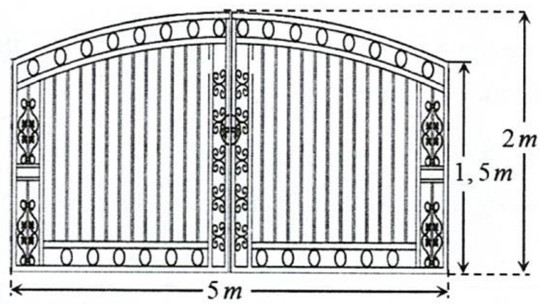
Sau hai năm số lượng cá trong hồ là $1000(1+x)+1000(1+x)x=1000(1+x)^2$ (con).

Điều kiện $x>0$. Để số lượng cá trong hồ sau hai năm là 36000 thì ta có:

$$1000(1+x)^2=36000\Leftrightarrow(1+x)^2=36\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=5\\x=-7\,(l)\end{array}\right.$$

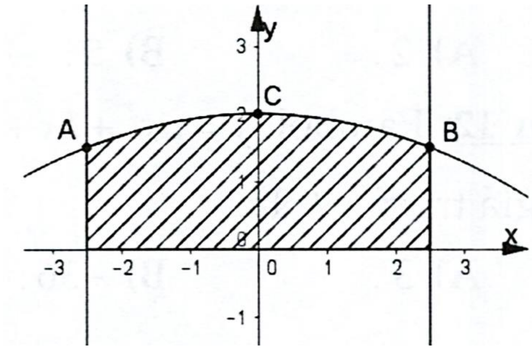
Vậy tốc độ tăng thêm số lượng cá trong hồ sau mỗi năm là 5 lần số lượng cá ban đầu.

Câu 2: Ông An muốn làm cửa rào sắt có hình dạng và kích thước như hình vẽ bên, biết đường cong phía trên của cửa sắt là một Parabol $y=ax^2+bx+c$. Biết $a+b+c=\dfrac{48}{25}$ tính abc.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Trong đó $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$.

Do Parabol đi qua các điểm $A(-2,5;1,5), B(2,5;1,5), C(0;2)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a(-2,5)^2 + b(-2,5) + c = 1,5 \\ a(2,5)^2 + b(2,5) + c = 1,5 \\ c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{25} \\ b = 0 \\ c = 2 \end{cases}$$. Vậy $abc = 0$.

Câu 3: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Lời giải

Gọi x triệu đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \le x \le 4)$.

Khi đó: Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

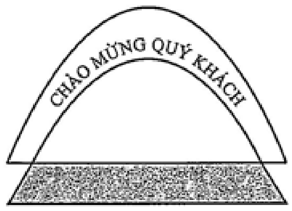
$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$ có bảng biến thiên

Vậy $\max\limits_{[0;4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

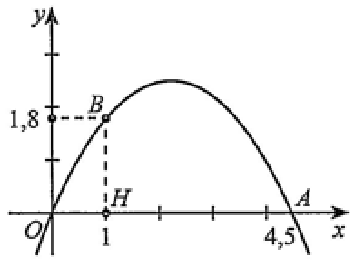
Câu 4: Tại một buổi khai trương, người ta làm một cổng chào có đường viền trong của mặt cắt là đường parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng là $4,5$ m. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đât (điêm H) là $1,8$ m và khoảng cách từ điểm H tới chân cổng gần nhất là 1 m. Hãy tính chiều cao của cổng chào đó (tính theo đường viền trong) theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Lời giải

Chọn hệ trục tọ độ sao cho gốc toạ độ O trùng một chân của cổng, trục hoành nằm trên đường nối hai chân cổng (đơn vị trên các trục tính theo mét). Gọi hàm số bậc hai có đồ thị chứa đường viền trong của cổng chào trên là $y = ax^2 + bx + c$.

Từ giả thiết bài toán ta có đồ thị hàm số đi qua các điểm $O(0;0), A(4,5;0), B(1;1,8)$.



Hình 10

Thay toạ độ các điểm trên vào hàm số, ta được $c = 0$ và hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4,5^2 a + 4,5b = 0 \\ 1^2 a + 1b = 1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-18}{35} \\ b = \dfrac{81}{35}. \end{cases}$$ suy ra ta có hàm số: $y = \dfrac{-18}{35}x^2 + \dfrac{81}{35}x$.

Từ đó đỉnh của đồ thị hàm số trên có tung độ là $\dfrac{-18}{35} \cdot \left(\dfrac{9}{4}\right)^2 + \dfrac{81}{35} \cdot \dfrac{9}{4} \approx 2,6$.

Vậy chiều cao của cổng là khoảng 2,6 m.

Câu 5: Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng BC là 9 m. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK = 1,6$ m và khoảng cách từ K tới chân cổng gần nhất là $BK = 0,5$ m. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Lấy hệ trục toạ độ Oxy sao cho vị trí B trùng với gốc O, trục Ox nằm trên đường nối chân hai cổng, C nằm trên tia Ox (đơn vị trên các trục tính theo mét).

Khi đó cổng ra vào là một phần của đồ thị hàm số $y=\frac{-32}{85}x^2+\frac{288}{85}x$.

Đỉnh của đồ thị hàm số trên có tung độ là khoảng 7,6.

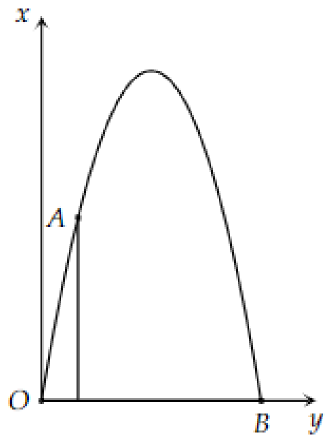
Vậy chiều cao của cổng là khoảng $7{,}6$ m.

Câu 6: Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau:
An nói: Tớ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Đại học Bách khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là 8 m và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng là $0{,}5$ m là $2{,}93$ m. Từ đó tớ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là 12 m.

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác. Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Đại học Bách Khoa Hà Nội.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đặt tại gốc tọa độ, chân còn lại đặt trên tia Ox. Khi đó cổng parabol là một phần của đồ thị hàm số dạng $y=ax^2+bx$ (do parabol đi qua gốc tọa độ nên hệ số tự do bằng 0).



Parabol đi qua các điểm có tọa độ $B(8;0)$ và $A(0{,}5;2{,}93)$.

Thay tọa độ của A,B vào hàm số ta có: $\begin{cases} 0=a.8^2+b.8 \\ 2{,}93=a.0{,}5^2+b.0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{-293}{375} \\ b=\frac{2344}{375} \end{cases}$

Suy ra có hàm số $y=\frac{-293}{375}x^2+\frac{2344}{375}x$

Hàm số có đỉnh $I\left(4;\frac{4688}{375}\right)$ suy ra chiều cao của cổng là $\frac{4688}{375}\approx 12,5\,\text{m}$.

----------------HẾT----------------

Dạng 2: Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số bậc hai

Phương pháp: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$.

- Xác định hệ số a và tính $-\dfrac{b}{2a}$.
- Xác định các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

Bài toán có chứa tham số thì ta có thể làm như sau: Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$.

- Trường hợp $a = 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b > 0 \end{cases}$.
- Trường hợp $a > 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (m;n) \subset \left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right) \end{cases}$.
- Trường hợp $a < 0$: Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ (m;n) \subset \left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right) \end{cases}$.

Lưu ý:
Việc tìm điều kiện để hàm số $y = ax^2 + bx + c$ nghịch biến trên khoảng $(m;n)$ được làm tương tự.
Có thể dựa vào định nghĩa tính đồng biến, nghịch biến của hàm số để thực hiện các bài toán trên.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét sự biến thiên của các hàm số sau:

a) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ b) $f(x) = -2x^2 + 3x - 3$

Lời giải

a) Ta có: $a = 1 > 0$ và $-\dfrac{b}{2a} = 1$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$.

b) Ta có $a = -2 < 0$ và $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3}{4}$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right)$ và ngh biến trên khoảng $\left(\dfrac{3}{4};+\infty\right)$.

Bài tập 2: Tìm tất cả các giá trị của tham số $\dfrac{m^2+1}{2m}$ để hàm số $y = -x^2 + 2mx + 1$ đồng biến trên $(-\infty;3)$.

Lời giải

Ta có $a = -1 < 0$ và $-\dfrac{b}{2a} = m$ nên hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty;m)$.

Do vậy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow -\dfrac{b}{2a} \geq 3 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Bài tập 3: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số bậc hai $y=-4x^2+4mx-m^2+2$ nghịch biến trên $\left(-2;+\infty\right)$.

Lời giải

Ta có $a=-4<0$ và $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m}{2}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\dfrac{m}{2};+\infty\right)$.

Do vậy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{m}{2}\le -2 \Leftrightarrow m\le -4$.

Bài tập 4: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left(m^2+1\right)x^2-4mx+1$ nghịch biến trên $\left(-\infty;1\right)$.

Lời giải

Ta có $a=m^2+1>0$ và $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{2m}{m^2+1}$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{2m}{m^2+1}\right)$.

Do vậy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{2m}{m^2+1}\ge 1 \Leftrightarrow \left(m-1\right)^2\le 0 \Leftrightarrow m=1$

Bài tập 5: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^2-\left(m^2+1\right)x+3$ đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$

Lời giải

Ta có: $a=m$ và $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{m^2+1}{2m}$ với $m\ne 0$.

Trường hợp $m=0$: Hàm số đã cho trở thành $y=-x+3$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên không thể đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$ tức $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Trường hợp $m<0$: Ta có $a=m<0$ nên hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$\dfrac{m^2+1}{2m}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thấy hàm số không thể đồng biến trên $\left(1;+\infty\right)$ tức $m<0$ bị loại.

Trường hợp $m>0$: Ta có $a=m>0$ nên hàm số có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		$\dfrac{m^2+1}{2m}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thấy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \dfrac{1+m^2}{2m}\le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 1+m^2\le 2m \end{cases} \Leftrightarrow m=1$.

Bài tập 6: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y=mx^2+2(m-1)x+2m+1$ nghịch biến trên $(-1;2)$

Lời giải

Ta có: $a=m$ và $-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1-m}{m}$ với $m\ne 0$.

Trường hợp $m=0$: Hàm số đã cho trở thành $y=-2x+1$, là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng nghịch biến trên $(-1;2)$ tức $m=0$ thỏa mãn yêu cầu của bài toán.

Trường hợp $m<0$: Ta có $a=m<0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{1-m}{m};+\infty\right)$

Do vậy yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow \dfrac{1-m}{m}\le -1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{m}\le 0$ đúng với $m<0$.

Trường hợp $m>0$: Ta có $a=m>0$ nên hàm số nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{1-m}{m}\right)$.

Do vậy yêu cầu của bài toán $\dfrac{1-m}{m}\ge 2 \Leftrightarrow \dfrac{1-3m}{m}\ge 0 \Leftrightarrow m\le \dfrac{1}{3}$.

Bài tập 7: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=(m-2)x^2-2mx+m+2025$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Lời giải

Trường hợp $m=2 \Rightarrow y=-4x+2019$, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ nên nghịch biến trên $(-\infty;3)$. Tức $m=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp $m\ne 2$: Dựa vào sự biến thiên hàm bậc hai ta thấy $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;3) \Leftrightarrow \begin{cases} m-2>0 \\ \dfrac{m}{m-2}\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow 2<m\le 3$.

Từ các trường hợp trên suy ra: $2\le m\le 3$.

Bài tập 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=f(x)=mx^2-(2m+1)x+3$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Lời giải

Trường hợp $m=0 \Rightarrow f(x)=-x+3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ tức $m=0$ không thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trường hợp $m>0$: $f(x)$ đồng biến trên $\left(\dfrac{2m+1}{2m};+\infty\right)$.

Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(2;3) \Leftrightarrow \dfrac{2m+1}{2m} \le 2 \Leftrightarrow 2m+1 \le 4m \Leftrightarrow m \ge \dfrac{1}{2}$.

Trường hợp $m<0$: $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{2m+1}{2m}\right)$.

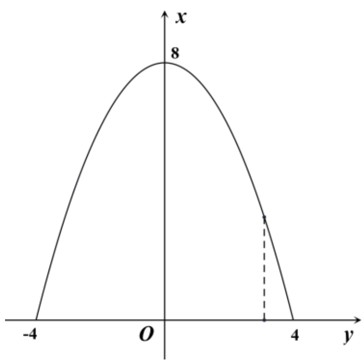
Do đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(2;3) \Leftrightarrow \dfrac{2m+1}{2m} \ge 3 \Leftrightarrow 2m+1 \le 6m \Leftrightarrow m \ge \dfrac{1}{4}$ (không thỏa mãn $m<0$).

Từ các trường hợp trên suy ra $m \ge \dfrac{1}{2}$.

Bài tập 9: Vòm cửa lớn của một trung tâm văn hóa hình parabol (minh họa như hình vẽ dưới đây) có chiều rộng $d=8$ mét và ciều cao $h=8$ mét. Hỏi phải đặt một chậu cây cảnh có chiều cao $2{,}88$ mét cách mép cửa một khoảng bao nhiêu mét để ngọn cây không chạm vào thành cửa?

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Từ hình ảnh đồ thị ta xác định được phương trình của parabol là: $y=-\dfrac{1}{2}x^2+8$.

Giả sử vị trí để ngọn cây chạm vào thành cửa cách mép cửa là $4-x(m)$ $(0 \le x < 4)$.

Khi đó chiều cao của cây chính là tung độ của ngọn cây nên ta có:

$$2{,}88=-\frac{1}{2}x^2+8 \Leftrightarrow x^2=10{,}24 \Leftrightarrow x=3{,}2 \Rightarrow 4-x=0{,}8.$$

Vậy phải đặt chậu cây cách mép cửa một khoảng lớn hơn $0{,}8$ mét.

Bài tập 10: Cho hàm số: $y=f(x)=ax^2+bx+c$ với $a,\, b,\, c$ là các tham số $(a>0)$. Biết rằng $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$. Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\dfrac{6a^2}{5a^2+2ab+b^2}$.

Lời giải

Do $a>0$ nên $f(x)$ đồng biến trên $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$

Từ đây hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-2;+\infty)\Leftrightarrow \dfrac{-b}{2a}\le -2 \Leftrightarrow \dfrac{b}{a}\ge 4$.

Ta có $P=\dfrac{6a^2}{5a^2+2ab+b^2}=\dfrac{6}{\left(\dfrac{b}{a}\right)^2+2\left(\dfrac{b}{a}\right)+5}=\dfrac{6}{t^2+2t+5}$ với $t=\dfrac{b}{a}\ge 4$.

Dễ thấy $t^2+2t+5=(t+1)^2+4\ge 29 \quad \forall t\ge 4$. Dấu bằng xảy ra khi $t=4$.

Do đó $maxP=\dfrac{6}{29}$ đạt được khi $\dfrac{b}{a}=4$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Hàm số $y=-x^2+2x+3$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-\infty;1)$. **C.** $(-1;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1)$.

Lời giải

Hàm số $y=x^2+2x+5$ với hệ số $a=-1<0$; $-\dfrac{b}{2a}=1$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 2: Hàm số $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

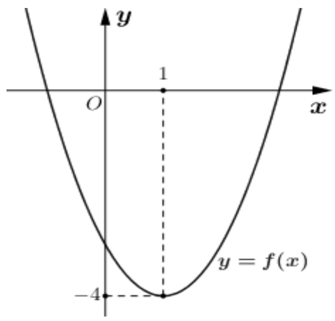
Hỏi hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

A. $(-\infty;-1)$. **B.** $(-1;+\infty)$. **C.** $(2;+\infty)$. **D.** $(-\infty;2)$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số ta thấy trên khoảng $(2;+\infty)$h àm số tăng nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?



A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có: từ trái qua phải:

Trên $(-\infty;1)$: Đồ thị hàm số đi xuống, do vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty;1)$.

Trên $(1;+\infty)$: Đồ thị hàm số đi lên, do vậy hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$.

Câu 4: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y=x^2-2(m-1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

A. $m\le 1$. **B.** $m>2$. **C.** $m\ge 3$. **D.** $m>1$.

Lời giải

Ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;m-1)$, đồng biến trên khoảng $(m-1;+\infty)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ thì $2\le m-1\Leftrightarrow m\ge 3$

Câu 5: Hàm số $y=-3x^2+6x-1$ đồng biến trên khoảng

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;+\infty)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Lời giải

Ta có $a=-3<0,-\dfrac{b}{2a}=1\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $(-\infty;1)$.

Câu 6: Hàm số $y=ax^2+bx+c\ \ (a>0)$ đồng biến trong khoảng nào sau đậy?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\Delta}{4a};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải

Hệ số $a>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$.

Câu 7: Hàm số $y=ax^2+bx+c$, $(a>0)$ nghịch biến trong khoảng nào sau đậy?

A. $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$. **B.** $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\dfrac{\Delta}{4a};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

Lời giải

Hệ số $a>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Câu 8: Cho hàm số $y=-x^2+4x+1$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Trên khoảng $(-\infty;1)$ hàm số đồng biến.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

C. Trên khoảng $(3;+\infty)$ hàm số nghịch biến.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4;+\infty)$ và đồng biến trên khoảng $(-\infty;4)$.

Lời giải

Đỉnh của parabol: $x_I=-\dfrac{b}{2a}=2$. Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y		$\nearrow$	5	$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra khẳng định **D** sai.

Câu 9: Hàm số $y = x^2 - 4x + 11$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $(-2;+\infty)$ **B.** $(-\infty;+\infty)$ **C.** $(2;+\infty)$ **D.** $(-\infty;2)$

Lời giải

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	7	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Câu 10: Khoảng đồng biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$là:

A. $(-\infty;-2)$. **B.** $(-\infty;2)$. **C.** $(-2;+\infty)$. **D.** $(2;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$có $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$.

Vì vậy hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 11: Khoảng nghịch biến của hàm số $y = x^2 - 4x + 3$là

A. $(-\infty;-4)$. **B.** $(-\infty;-4)$. **C.** $(-\infty;2)$. **D.** $(-2;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y = x^2 - 4x + 3$có hệ số $a = 1 > 0$ nên đồng biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$.

Vì vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = -x^2 + 4x + 3$. Chọn khẳng định đúng.

A. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. **B.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

C. Hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

Lời giải

Do $a = -1$ nên hàm số đồng biến trên $(-\infty;2)$ nghịch biến trên $(2;+\infty)$.

Câu 13: Hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1;+\infty)$. **B.** $(-2;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $\left(\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Ta có hàm số $(P): y = f(x) = x^2 - 2x + 3$ là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1$ nên (P) có bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh của parabol $x_I = \frac{-b}{2a} = 1$. Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Câu 14: Hàm số $y = -3x^2 + x - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $\left(\frac{1}{6};+\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty;-\frac{1}{6}\right)$. **C.** $\left(-\frac{1}{6};+\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty;\frac{1}{6}\right)$.

Lời giải

Hàm số $(P): y = f(x) = -3x^2 + x - 2$ có tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Mặt khác: $a = -3$, đỉnh S có hoành độ $x = \frac{1}{6}$.

Vậy hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trong khoảng $\left(\frac{1}{6};+\infty\right)$.

Câu 15: Cho hàm số $y = -x^2 + 6x - 1$. Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;3)$ **B.** $(3;+\infty)$ **C.** $(-\infty;6)$ **D.** $(6;+\infty)$

Lời giải

Ta có $a = -1 < 0, \frac{-b}{2a} = \frac{-6}{2.(-1)} = 3$ suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;3)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^2 - 3mx + m^2 + 1$ (1), m là tham số. Khi $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng nào?

A. $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$. **B.** $\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$. **C.** $\left(-\infty;\frac{1}{4}\right)$. **D.** $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Lời giải

Khi $m = 1$ thì hàm số trở thành $y = x^2 - 3x + 2$ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đỉnh $I\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{4}\right)$. Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
y	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{4}$	↗ $+\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2(m+1)x - 3$ đồng biến trên khoảng $(4;2018)$?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Lời giải

Hàm số có $a=1>0,\dfrac{-b}{2a}=m+1$ nên đồng biến trên khoảng $(m+1;+\infty)$.

Do đó để hàm số đồng biến trên khoảng $(4;2018)$ thì ta phải có

$(4;2018)\subset(m+1;+\infty)\Leftrightarrow m+1\le 4\Leftrightarrow m\le 3$.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của *m* thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị của b để hàm số $y=x^2+2(b+6)x+4$ đồng biến trên khoảng $(6;+\infty)$.

A. $b\ge 0$. **B.** $b=-12$. **C.** $b\ge -12$. **D.** $b\ge -9$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=x^2+2(b+6)x+4$ là hàm số bậc hai có hệ sô $a=1>0$, $-\dfrac{b}{2a}=-b-6$ nên có bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-(b+6)$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f(-(b+6))$	↗ $+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có:

Hàm số đồng biến trên $(6;+\infty)$ thì $\Leftrightarrow(6;+\infty)\subset(-b-6;+\infty)\Leftrightarrow -b-6\le 6\Leftrightarrow b\ge -12$.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x)=-2x^2+(m-1)x+3$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

A. $m\le 3$. **B.** $m\in\mathbb{R}$. **C.** $m\le 5$. **D.** $m>5$.

Lời giải

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\dfrac{m-1}{4};+\infty\right)$.

Do đó, hàm số đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ $\Leftrightarrow\dfrac{m-1}{4}\le 1\Leftrightarrow m\le 5$.

Câu 20: Hàm số $y=2x^2+4x-2025$

A. Đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

B. Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

C. Đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

D. Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Lời giải

Hàm số $y=ax^2+bx+c$ với $a>0$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a};+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\frac{b}{2a}\right)$.

Áp dụng: Ta có $-\frac{b}{2a}=-1$. Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 21: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$?

A. $y=\sqrt{2}x^2+1$. **B.** $y=-\sqrt{2}x^2+1$. **C.** $y=\sqrt{2}(x+1)^2$. **D.** $y=-\sqrt{2}(x+1)^2$.

Lời giải

Ta có $y=-\sqrt{2}(x+1)^2=-\sqrt{2}x^2-2\sqrt{2}x-\sqrt{2}$ nên $-\frac{b}{2a}=-1$ và có $a<0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

Câu 22: Hàm số $y=-x^2+2(m-1)x+3$ nghịch biến trên $(1;+\infty)$ khi giá trị m thỏa mãn:

A. $m\le 0$. **B.** $m>0$. **C.** $m\le 2$. **D.** $0<m\le 2$

Lời giải

Đồ thị hàm số có trục đối xứng là đường $x=m-1$. Đồ thị hàm số đã cho có hệ số x^2 âm nên sẽ đồng biến trên $(-\infty;m-1)$ và nghịch biến trên $(m-1;+\infty)$. Theo đề, cần: $m-1\le 1\Leftrightarrow m\le 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai $(P): y=ax^2+bx+c\,(a\ne 0)$ có đồ thị là đường parabol có đỉnh $I(1;-4)$ và cắt trục hoành tại 2 điểm $A(-1;0)$ và $B(3;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Parabol có trục đối xứng là $x=1$.

b) Parabol có bề lõm quay lên trên.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Giá trị của $2a+b+2c=6$

Lời giải

a) Đúng: Đồ thị là đường parabol có đỉnh $I(1;-4)$ nên có trục đối xứng là $x=1$.

b) Đúng: Đồ thị là đường parabol có đỉnh $I(1;-4)$ và cắt trục hoành tại 2 điểm $A(-1;0)$ và $B(3;0)$ nên $a>0$ nên parabol có bề lõm quay lên trên.

c) Đúng: Đồ thị là đường parabol có đỉnh $I(1;-4)$ và $a>0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Sai: $(P): y = ax^2 + bx + c\,(a \neq 0)$

$I(1;-4) \in (P)$ ta có phương trình $a + b + c = -4 \quad (1)$

$A(-1;0) \in (P)$ ta có phương trình $a - b + c = 0 \quad (2)$

$B(3;0) \in (P)$ ta có phương trình $9a + 3b + c = 0 \quad (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} a+b+c=-4 \\ a-b+c=0 \\ 9a+3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-3 \end{cases}$

Giá trị của $2a + b + 2c = 2.1 + (-2) + 2.(-3) = -6$

Câu 2: Cho hàm số bậc hai $y = x^2 - 4x + 1\,(P)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có hệ số $b = -4$.

b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -3.

d) Đường thẳng $y = -2$ cắt (P) tại hai điểm $A(x_A;y_A), B(x_B;y_B)$ $(x_A < x_B)$ và ${x_A}^2 - {x_B}^2 = -10$

Lời giải

a) Đúng: Hàm số đã cho là hàm bậc hai có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Đúng: Ta có: $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2} = 2$ do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

c) Đúng: Ta có $y(2) = 2^2 - 4.2 + 1 = -3$ và $a = 1 > 0$ nên (P) cóa bề lõm hướng lên trên. Do đó hàm số có giá trị nhỏ nhất là -3.

d) Sai : Phương trình hoành độ giao điểm của Parabol và đường thẳng $y = -2$ là:

$$x^2 - 4x + 1 = -2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = 3.$$

Với $x_A = 1; x_B = 3 \Rightarrow {x_A}^2 - {x_B}^2 = 1 - 9 = -8$.

Câu 3: Một khách sạn có 50 phòng. Nếu mỗi phòng cho thuê với giá 400 nghìn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá lên 20 nghìn đồng thì có thêm hai phòng bỏ trống không có người thuê. Giám đốc khách sạn muốn tăng giá thuê phòng một ngày và đã chọn giá mới để cho thuê mỗi phòng một ngày là x (nghìn đồng). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện của x là $x \geq 400$.

b) Giá thuê phòng chênh lệch sau khi tăng là: $x - 400$ (nghìn đồng).

c) Số lượng phòng cho thuê giảm đi khi chọn mức giá thuê phòng mới là: $\frac{x-400}{20}.2=\frac{x-400}{10}$ (phòng).

d) Thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất khi giá thuê phòng một ngày là $x=440$ (nghìn đồng).

Lời giải

a) Đúng: Giám đốc khách sạn muốn chọn giá mới để cho thuê phòng một ngày là x (nghìn đồng). Điều kiện $x\ge 400$.

b) Đúng: Giá thuê phòng chênh lệch sau khi tăng là: $x-400$ (nghìn đồng).

c) Đúng: Số lượng phòng cho thuê giảm đi khi chọn mức giá thuê phòng mới là: $\frac{x-400}{20}.2=\frac{x-400}{10}$ (phòng).

d) Sai: Số phòng cho thuê với giá x là: $50-\frac{x-400}{10}=\frac{900-x}{10}$.

Tổng thu trong ngày là: $x.\left(\frac{900-x}{10}\right)=-\frac{x^2}{10}+90x$. Xét hàm số $f\left(x\right)=-\frac{x^2}{10}+90x$ với $x\ge 400$.

Bảng biến thiên:

x	400		450		$+\infty$
$f(x)$			20250		
	20000	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f\left(x\right)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=450$.

Như vậy nếu cho thuê giá 450 nghìn đồng thì khách sạn có doanh thu cao nhất trong ngày

Câu 4: Cho hàm số $y=-x^2+800x-120000$ có đồ thị là parabol $\left(P\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Trục đối xứng của $\left(P\right)$ có phương trình $x=400$.

c) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;400\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(400;+\infty\right)$.

d) Giả sử lợi nhuận của một công ty được biểu thị bởi hàm số $f\left(x\right)=-x^2+800x-120000$ (nghìn đồng) với x là số lượng sản phẩm. Để công ty không bị lỗ thì $200<x<600$.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số đã cho là hàm số bậc hai nên có tập xác định là $\mathbb{R}$

b) Đúng: Trục đối xứng của (P) có phương trình $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{800}{2.(-1)}=400$.

c) Đúng: Ta có $a=-1$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;400)$ và nghịch biến trên khoảng $(400;+\infty)$

d) Sai: Để công ty không bị lỗ thì $f(x)\ge 0 \Leftrightarrow -x^2+800x-120000\ge 0 \Leftrightarrow 200\le x\le 600$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một người nông dân thả 1000 con cá giống vào hồ nuôi vừa mới đào. Biết rằng sau mỗi năm thì số lượng cá trong hồ tăng thêm x lần số lượng cá ban đầu và x không đổi. Bằng cách thay đổi kĩ thuật nuôi và thức ăn cho cá. Hỏi sau hai năm để số cá trong hồ là 36000 con thì tốc độ tăng số lượng cá trong hồ là bao nhiêu? Biết tốc độ tăng mỗi năm là không đổi.

Lời giải

Sau một năm số lượng cá trong hồ là $1000+1000x=1000(1+x)$ (con).

Sau hai năm số lượng cá trong hồ là $1000(1+x)+1000(1+x)x=1000(1+x)^2$ (con).

Điều kiện $x>0$. Để số lượng cá trong hồ sau hai năm là 36000 thì ta có:

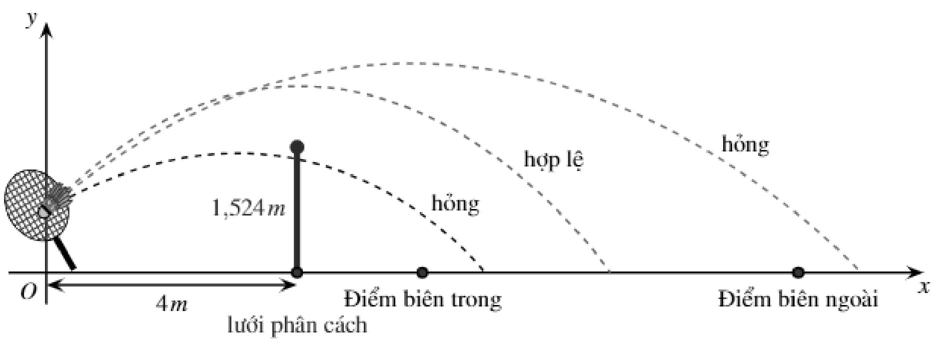
$$1000(1+x)^2=36000 \Leftrightarrow (1+x)^2=36 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=-7(l) \end{array}\right.$$

Vậy tốc độ tăng thêm số lượng cá trong hồ sau mỗi năm là 5 lần số lượng cá ban đầu.

Câu 2: Một người đang chơi cầu lông có khuynh hướng phát cầu với góc 30° (so với mặt đất). Hãy tính khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa), biết cầu rời mặt vợt ở độ cao $0{,}8$ mét so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là 6 (m/s) (bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng)

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ (vị trí rơi của cầu thuộc trục hoành và vị trí cầu rời mặt vợt thuộc trục tung)

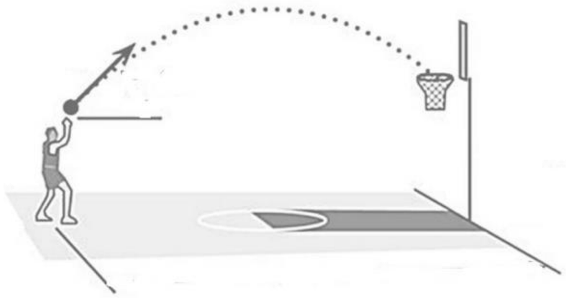


Với $g=9{,}8\,(\text{m/s}^2)$ góc phát cầu $\alpha=30^\circ$, vận tốc ban đầu $v_0=8\,(\text{m/s})$, phương trình quỹ đạo của cầu: $y=-\frac{4{,}9}{27}x^2+\frac{\sqrt{3}}{3}x+0{,}8$

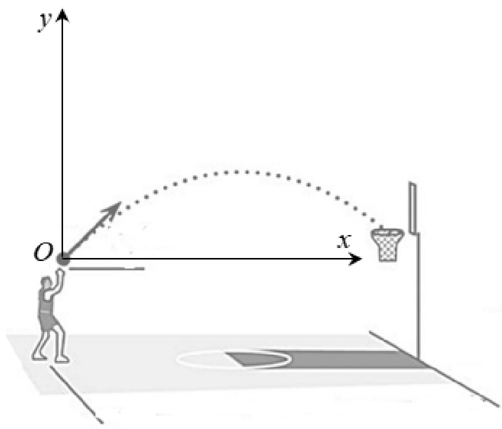
Vị trí cầu rơi chạm đất là giao điểm của parabol và trục hoành nên giải phương trình $-\dfrac{4,9}{27}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{3}x+0,8=0$ ta được $x_1\approx 4,22, x_2\approx -1,04$.

Giá trị nghiệm dương cho ta khoảng cách từ vị trí người chơi cầu lông đến vị trí cầu rơi chạm đất là 4,22 m.

Câu 3: Một vận động viên bóng rổ đứng ném bóng vào rổ. Quỹ đạo chuyển động của quả bóng là hình parabol có phướng trình $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$. Biết quả bóng đạt vị trí cao nhất là 3 mét sau khi vận động viên ném 2 giây. Sau một giây nén ra, quả bóng cao hơn đầu vận động viên 2 mét. Biết rằng hàm số $y=ax^2+bx+c$ đồng biến trên $\left(-\infty;d\right)$ và nghịch biến trên $\left(d;+\infty\right)$. Tính giá trị của $2024+d$.



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:

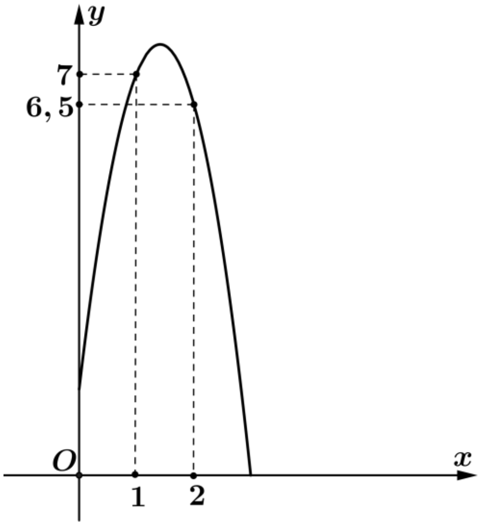
Theo giả thiết ta có $\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=2\\4a+2b+c=3\\a+b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+b=0\\4a+2b+c=3\\a+b+c=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=4\\c=-1\end{cases}\Rightarrow f\left(x\right)=-x^2+4x-1$

Lại có: $a=-1<0,-\dfrac{b}{2a}=2\Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;2\right)$ và nghịch biến trên $\left(2;+\infty\right)$

Suy ra $d=2\Rightarrow 2024+d=2026$

Câu 4: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một phần của cung parabol có phương trình $f\left(t\right)=at^2+bt+c\left(a\neq 0\right)$ trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oht, trong đó t là thời gian tính bằng giây kể từ khi quả bóng được đá lên, h là độ cao tính bằng mét của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,5$ mét. Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 7 mét và 2 giây sau khi đá lên nó đạt độ cao $6,5$ mét. Hàm số $f(t)$ đồng biến trên trên $(-\infty;d)$ và nghịch biến trên $(d;+\infty)$. Tính giá trị $12d$.

Lời giải



Theo giả thiết ta có $\begin{cases} f(0)=1,5 \\ f(1)=7 \\ f(2)=6,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1,5 \\ a+b+c=7 \\ 4a+2b+c=6,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=\dfrac{17}{2} \\ c=\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow f(t)=-3t^2+\dfrac{17}{2}t+\dfrac{3}{2}$

Vì $a=-3<0, -\dfrac{b}{2a}=\dfrac{17}{12} \Rightarrow$ hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{17}{12}\right)$, nghịch biến trên $\left(\dfrac{17}{12};+\infty\right)$

Suy ra $d=\dfrac{17}{12} \Rightarrow 12d=17$

Câu 5: Một cửa hàng sách mua sách từ nhà xuất bản với giá 50 (nghìn đồng)/cuốn. Cửa hàng ước tính rằng, nếu bán một cuốn sách với giá x nghìn đồng thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(150-x)$ cuốn sách. Hỏi cửa hàng bán một cuốn sách giá bao nhiêu nghìn đồng thì mỗi tháng sẽ tăng lợi nhuận nhất.

Lời giải

Gọi $T(x)$ là số tiền lãi của cửa hàng mỗi tháng

Ta có $T(x)=(150-x)(x-50)=-x^2+200x-7500$

Đồ thị $T(x)$ là đường parabol có đỉnh $I(100;2500)$

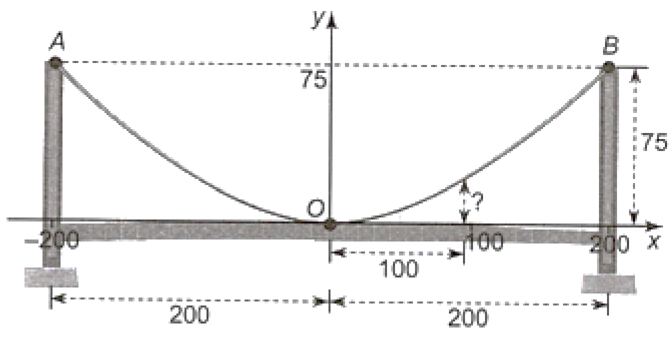
Do đó lợi nhuận tăng nhất khi bán cuốn sách với giá 100 nghìn đồng.

Câu 6: Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao 75 mét so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 mét. Các dây cáp có hình dạng đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy như Hình 6.13: Trục Ox dọc theo mặt của cây cầu, trục Oy vuông góc với trục Ox tại tâm của cây cầu. Khi đó các dây cáp có hình dạng đường parabol có bề lõm hướng lên trên và đỉnh của parabol là gốc $O(0;0)$.

Vì thế ta giả sử công thức của parabol là**:** $y = ax^2, a > 0$.



Hình 6.13

Theo giả thiết, cây cầu có trụ tháp đôi cao 75 m so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 m nên ta có các điểm $A(-200;75)$ và $B(200;75)$ thuộc parabol.

Khi đó ta có: $75 = a.200^2 \Rightarrow a = \dfrac{3}{1600}$.

Do đó phương trình của parabol là: $y = \dfrac{3}{1600}x^2$.

Với $x = 100$ ta có $y = \dfrac{3}{1600}.100^2 \approx 19$.

Vậy chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m là 19 mét.

----------------HẾT----------------

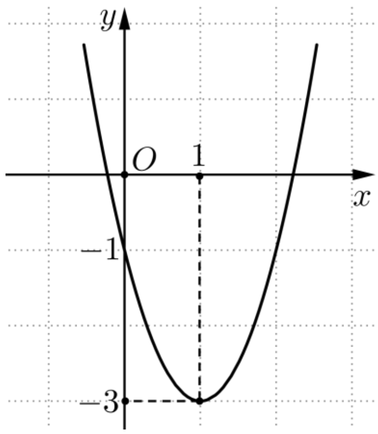
Dạng 3: Đọc đồ thị và bảng biến thiên của hàm số bậc hai

Phương pháp: Để đọc đồ thị hoặc bảng biến thiên của hàm số bậc hai $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ ta cần xác định các yếu tố sau:

- Xác định được tọa độ đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$
- Xác định được hệ số a, từ đó suy ra khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số
- Xác định giao điểm (nếu có) của đồ thị hàm số với các trục tọa độ

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho parabol $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình sau



Tìm phương trình của parabol.

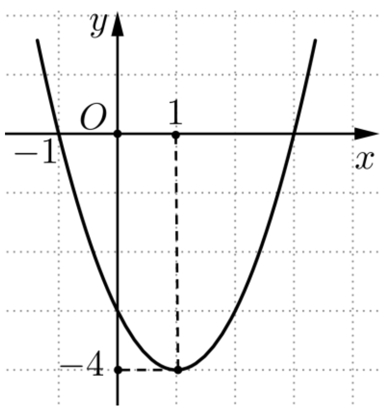
Lời giải

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $\left(0\,;-1\right)$ nên $c=-1$.

Tọa độ đỉnh $I\left(1\,;-3\right)$, ta có phương trình: $\begin{cases}-\frac{b}{2a}=1\\ a.1^2+b.1-1=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2a+b=0\\ a+b=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ b=-4\end{cases}$.

Vậy parabol cần tìm là: $y=2x^2-4x-1$.

Bài tập 2: Cho parabol $\left(P\right):y=ax^2+bx+c,\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình bên. Tính $2a+b+2c$

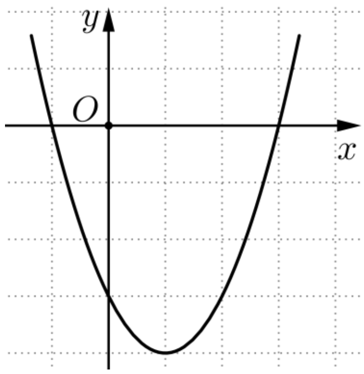


Lời giải

Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ đi qua các điểm $A(-1;\ 0)$, $B(1;\ -4)$, $C(3;\ 0)$ nên có hệ phương trình: $\begin{cases} a - b + c = 0 \\ a + b + c = -4 \\ 9a + 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -3 \end{cases}$.

Khi đó: $2a + b + 2c = 2.1 - 2 + 2(-3) = -6$.

Bài tập 3: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như bên.



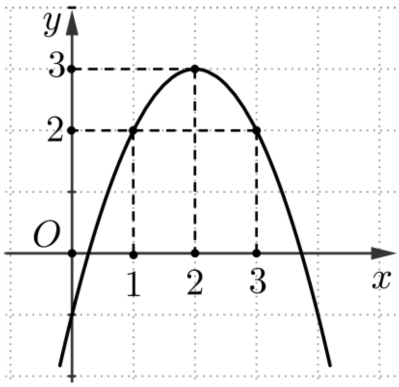
Xác định dấu của các hệ số a, b, c

Lời giải

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ $(= c)$ âm nên $c < 0$.

Đồ thị hướng bề lõm lên trên nên $a > 0$, hoành độ đỉnh $\left(= \dfrac{-b}{2a}\right)$ dương nên ta có thể suy ra được $\dfrac{-b}{2a} > 0, a > 0 \Rightarrow b < 0$.

Bài tập 4: Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình bên



Xác định hàm số bậc hai $(P): y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$

Lời giải

Vì đồ thị hàm số đi qua các điểm $(0;-1)$, $(1;2)$, $(2;3)$ nên thay vào phương trình Parabol ta có

$$\begin{cases} a.0+b.0+c=-1 \\ a+b+c=2 \\ 4a+2b+c=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=-1 \end{cases} \Rightarrow y=-x^2+4x-1.$$

Bài tập 5: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c,(a\neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0;+\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

x	0	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	-1 $\nearrow$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$\searrow$ $-\infty$

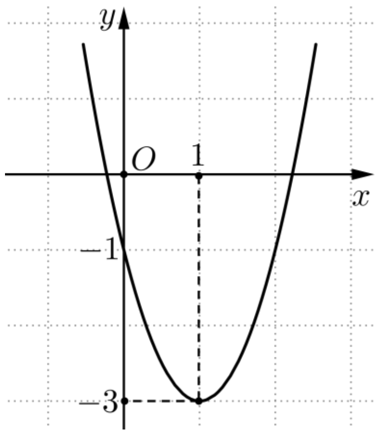
Xác định dấu của a, b, c.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Parabol (P) có bề lõm quay xuống dưới; hoành độ đỉnh dương;

cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng – 1 nên $\begin{cases} a<0 \\ \dfrac{-b}{2a}>0 \\ c=-1<0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ b>0 \\ c<0 \end{cases}.$

Bài tập 6: Cho parabol $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình sau. Tính $a+b+c$



Lời giải

Do đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 nên suy ra $c=-1$ (1)

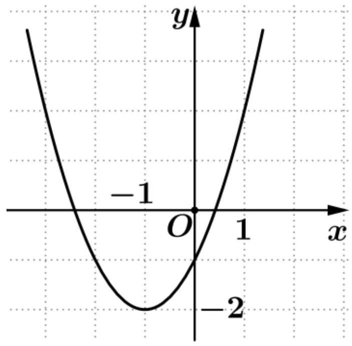
Đồ thị có tọa độ đỉnh $I\left(\dfrac{-b}{2a};\dfrac{-\Delta}{4a}\right)\equiv I(1;-3)$ nên ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{-b}{2a}=1 \\ \dfrac{-\Delta}{4a}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ \Delta=12a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ b^2-4ac-12a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-2a \\ 4a^2-4ac-12a=0 \end{cases} \quad (2)$$

Từ và ta có hệ phương trình $\begin{cases} c=-1 \\ b=-2a \\ 4a^2-8a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=-1 \end{cases}$ nên $a+b+c=-3$

Ta được parabol có phương trình là $y=2x^2-4x-1$.

Bài tập 7: Hàm số $y=x^2+2x-1$ có đồ thị như hình bên. Dựa vào đồ thị tìm các giá trị m để phương trình $x^2+2x+m=0$ vô nghiệm.



Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2+2x+m=0 \Leftrightarrow x^2+2x-1=-m-1$ $(*)$

Số nghiệm của phương trình $(*)$ chính là số giao điểm của parabol $y=x^2+2x+1$ và đường thẳng $y=-m-1$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m>1$.

Bài tập 8: Tìm các giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $x^2-2|x|+1-m=0$ có bốn nghiệm phân biệt?

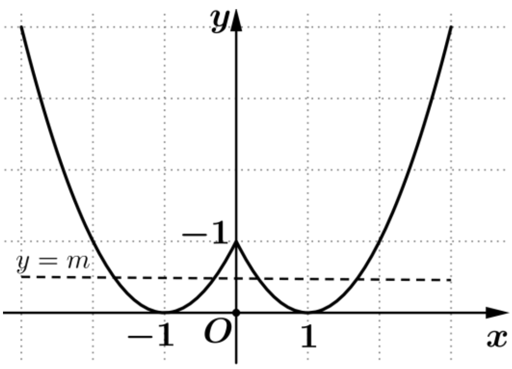
Lời giải

Ta có: $x^2-2|x|+1-m=0 \Leftrightarrow x^2-2|x|+1=m$ $(*)$. Số nghiệm của $(*)$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=x^2-2|x|+1$ và đường thẳng $y=m$. Dễ thấy hàm số $y=x^2-2|x|+1$ là một hàm số chẵn, do đó có đồ thị đối xứng qua trục *Oy*. Mặt khác ta có $y=x^2-2|x|+1=x^2-2x+1$ với $x \ge 0$. Từ đó ta có cách vẽ đồ thị hàm số $y=x^2-2|x|+1$ như sau:

Bước 1: Vẽ đồ thị hàm số $y=x^2-2x+1$

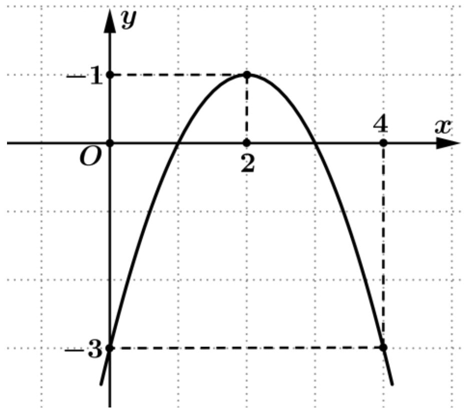
Bước 2: Xóa phần nằm bên trái trục tung của đồ thị hàm số $y=x^2-2x+1$

Bước 3: Lấy đối xứng phần nằm bên phải trục tung của đồ thị hàm số $y=x^2-2x+1$ qua trục tung.



Quan sát trên đồ thị ta thấy đường thẳng $y=m$ cắt đồ thị hàm số $y=x^2-2|x|+1$ tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<1$. Suy ra không có giá trị nguyên nào của *m* để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

Bài tập 9: Cho đồ thị hàm số $y=-x^2+4x-3$ có đồ thị như hình vẽ sau



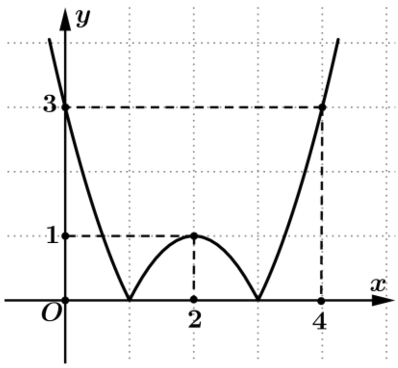
Từ đồ thị trên hãy suy ra đồ thị của hàm số $y=\left|-x^2+4x-3\right|$

Lời giải

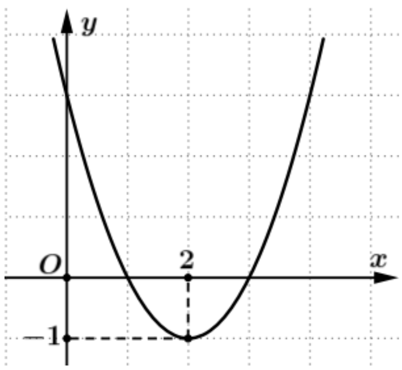
Đồ thị hàm số $y=\left|f\ \ x\right|$ gồm hai phần

Phần 1: ứng với $y\geq 0$ của đồ thị $y=f\ \ x$.

Phần 2: lấy đối xứng phần $y<0$ của đồ thị $y=f\ \ x$ qua trục Ox .

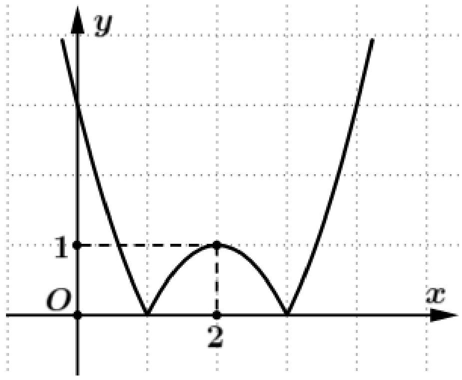


Bài tập 10: Cho hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ. Với những giá trị nào của tham số m thì phương trình $\left|f(x)\right|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt.



Lời giải

Số nghiệm của phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ là số giao điểm của đồ thị $y=\left|f\left(x\right)\right|$ và đường thẳng $y=m$. Ta có đồ thị hàm số $y=\left|f\left(x\right)\right|$ như hình vẽ dưới đây.

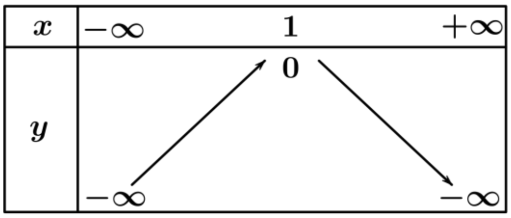


Do đó phương trình $\left|f\left(x\right)\right|=m$ có đúng 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $0<m<1$.

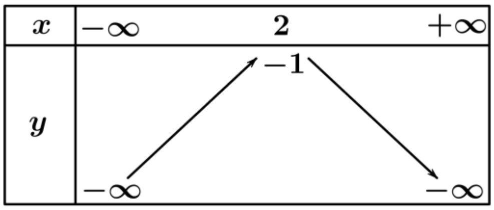
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

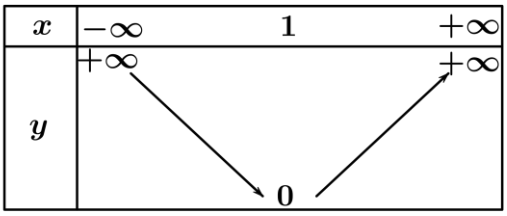
Câu 1: Bảng biến thiên của hàm số $y=-x^2+2x-1$ là:

A. 

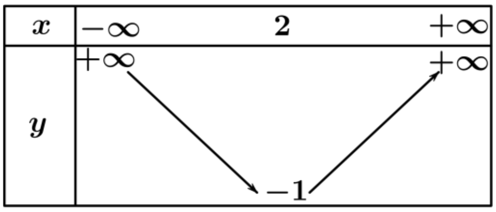
.

B. 

.

C. 

.

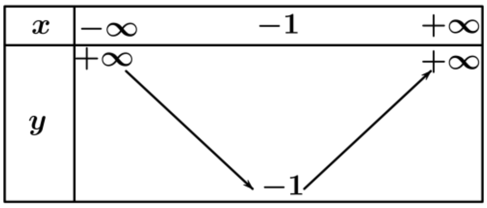
D. 

.

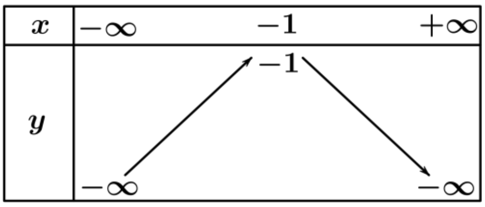
Lời giải

Xét hàm số $y=-x^2+2x-1$ có $a=-1<0$ và tọa độ đỉnh $I(1;0)$.

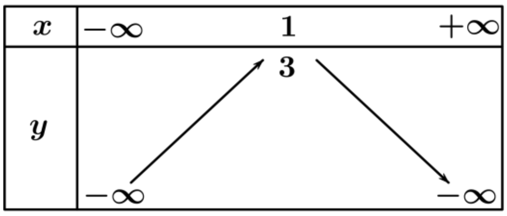
Câu 2: Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số $y=-x^2+2x+2$?

A. 

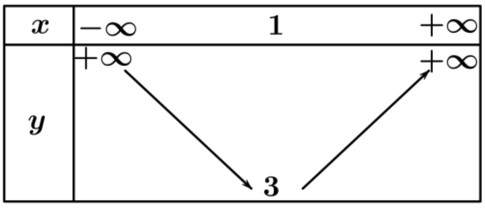
.

B. 

.

C. 

.

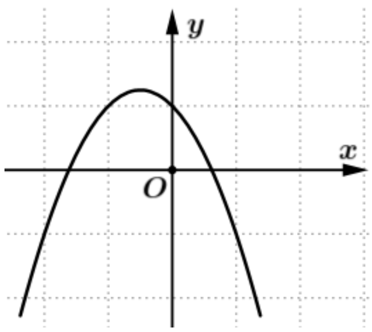
D. 

.

Lời giải

Xét hàm số $y=-x^2+2x+2$ có tọa độ đỉnh $I(1;3)$.

Câu 3: Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ có hệ số a là:

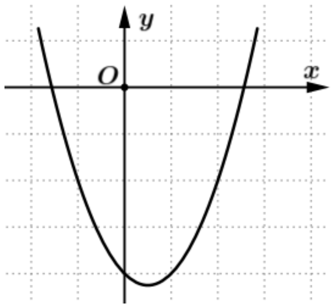


A. $a > 0$. **B.** $a < 0$. **C.** $a = 1$. **D.** $a = 2$.

Lời giải

Bề lõm hướng xuống $a < 0$.

Câu 4: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên dưới. Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $a > 0,\ b < 0,\ c < 0$. **B.** $a > 0,\ b < 0,\ c > 0$. **C.** $a > 0,\ b > 0,\ c > 0$. **D.** $a < 0,\ b < 0,\ c < 0$.

Lời giải

Parabol có bề lõm quay lên $\Rightarrow a > 0$. Parabol cắt trục tung tại điểm có tung độ âm nên $c < 0$

Câu 5: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ như hình vẽ dưới đây:

x	0	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
y	-1 ↗	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	↘ $-\infty$

Xác định dấu của a, b, c.

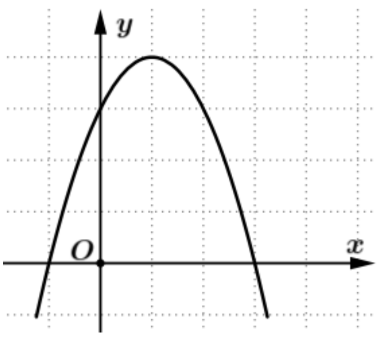
A. $a < 0, b < 0, c > 0$. **B.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **C.** $a < 0, b > 0, c > 0$. **D.** $a < 0, b > 0, c < 0$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta có: Parabol (P) có bề lõm quay xuống dưới; hoành độ đỉnh dương;

cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng – 1 nên $\begin{cases} a < 0 \\ \dfrac{-b}{2a} > 0 \\ c = -1 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0 \\ b > 0 \\ c < 0 \end{cases}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình bên.



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a>0$, $b>0$, $c>0$. **B.** $a>0$, $b<0$, $c<0$. **C.** $a<0$, $b<0$, $c>0$. **D.** $a<0$, $b>0$, $c>0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, nhận thấy:

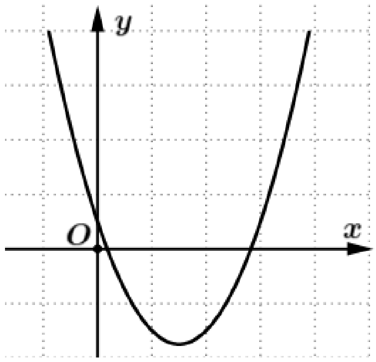
Đồ thị hàm số là một parabol có bề lõm quay xuống dưới nên $a<0$.

Đồ thị cắt trục tung tại tung độ bằng c nên $c>0$.

Đồ thị cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ $x_1=-1$ và $x_2=3$ nên x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ mà theo Vi-et $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=2 \Leftrightarrow b=-2a \Rightarrow b>0$.

Vậy $a<0$, $b>0$, $c>0$.

Câu 7: Cho đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Mệnh đề nào sau đây đúng?



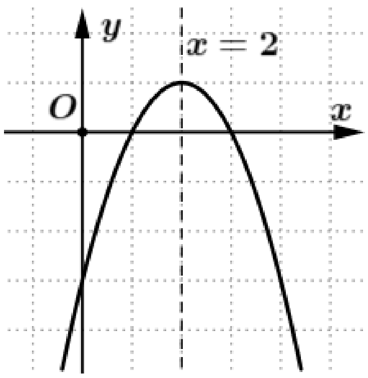
A. $a>0, b=0, c>0$. **B.** $a>0, b>0, c>0$. **C.** $a>0, b<0, c>0$. **D.** $a<0, b>0, c>0$.

Lời giải

Từ dáng đồ thị ta có $a>0$. Đồ thị cắt trục Oy tại điểm có tung độ dương nên $c>0$.

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a}>0$ mà $a>0$ suy ra $b<0$.

Câu 8: Hàm số nào có đồ thị như hình vẽ bên dưới?

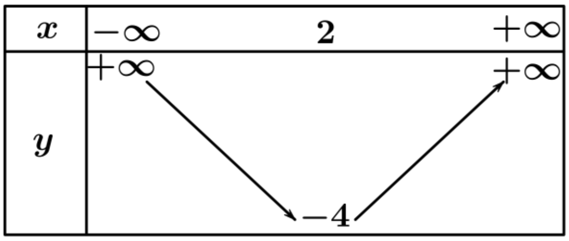


A. $y=-x^2+4x-3$. **B.** $y=-x^2-4x-3$. **C.** $y=-2x^2-x-3$. **D.** $y=x^2-4x-3$.

Lời giải

Đồ thị có bề lõm quay xuống dưới nên $a<0$ và có trục đối xứng: $x=2$.

Câu 9: Bảng biến thiên sau là của hàm số nào?

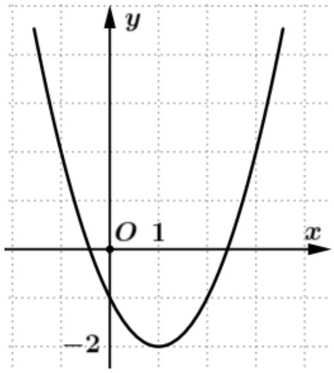


A. $y = x^2 - 4x$. **B.** $y = x^2 + 4x$. **C.** $y = -x^2 + 4x$. **D.** $y = -x^2 - 4x$.

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra hệ số $a > 0$ và toạ độ đỉnh $I = (2;-4)$

Câu 10: Đồ thị trong hình vẽ dưới đây là của hàm số nào trong các phương án A;B;C;D sau đây?

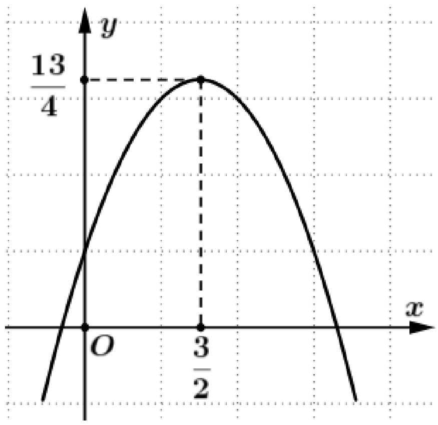


A. $y = x^2 + 2x - 1$. **B.** $y = x^2 + 2x - 2$. **C.** $y = 2x^2 - 4x - 2$. **D.** $y = x^2 - 2x - 1$.

Lời giải

Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -1 . Hoành độ của đỉnh là $x_I = -\dfrac{b}{2a} = 1$

Câu 11: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol như hình vẽ.



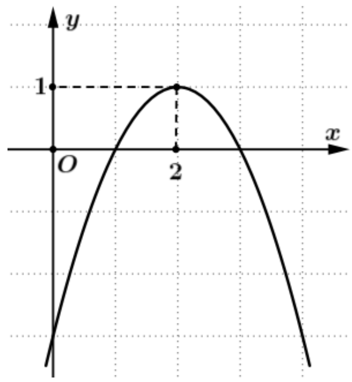
Hỏi parabol có phương trình nào trong các phương trình dưới đây?

A. $y = x^2 + 3x - 1$. **B.** $y = x^2 - 3x - 1$. **C.** $y = -x^2 - 3x - 1$. **D.** $y = -x^2 + 3x + 1$.

Lời giải

Đồ thị hàm số là parabol có bề lõm quay xuống nên hệ số $a < 0$. Đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ dương.

Câu 12: Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên dưới



A. $y=-x^2+2x-3$. **B.** $y=-x^2+4x-3$. **C.** $y=x^2-4x+3$. **D.** $y=x^2-2x-3$.

Lời giải

Đồ thị trên là của hàm số bậc hai với hệ số $a<0$ và có tọa độ đỉnh là $I(2;1)$. Vậy đồ thị đã cho là đồ thị của hàm số $y=-x^2+4x-3$.

Câu 13: Bảng biến thiên sau đây là bảng biến thiên của hàm số nào?

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$ ↗	-4	↘ $-\infty$

A. $y=x^2+4x$. **B.** $y=-x^2-4x-8$. **C.** $y=-x^2-4x+8$. **D.** $y=-x^2-4x$.

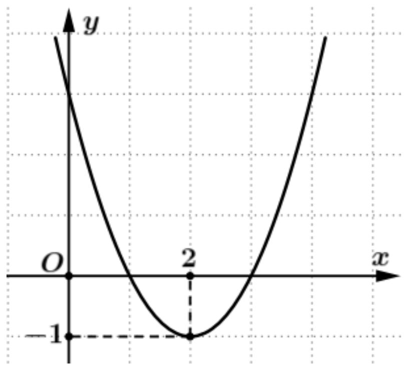
Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy:

Parabol có bề lõm quay lên trên nên hệ số $a<0$

Parabol có đỉnh $I(-2;-4)$ nên thay $x=-2; y=-4$ nhận thấy chỉ có đáp án B thỏa mãn.

Câu 14: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây ?



Giá trị của tổng $T=4a+2b+c$ là :

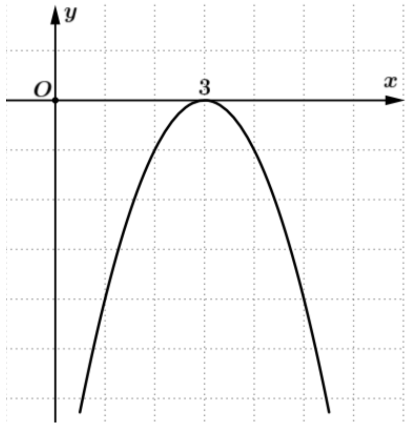
A. $T=2$. **B.** $T=-1$. **C.** $T=4$. **D.** $T=3$.

Lời giải

Đồ thị đã cho đi qua điểm $I(2;-1)$ ta có: $4a+2b+c=-1$. Vậy $T=-1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai (P): $y=-x^2+6x-9$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Đồ thị hàm số (P) phía dưới trục hoành.

b) Đồ thị hàm số (P) đi qua điểm $A(1;-4)$.

c) Phương trình $f(x)+2m-1=0$ có hai nghiệm phân biệt nếu $m>\frac{1}{2}$.

d) Với $m>\frac{1}{2}$ thì đồ thị (P) cắt đường thẳng $y=1-2m$ tại hai điểm phân biệt $M(x_M;y_M)$ và $N(x_N;y_N)$. Biểu thức $P=x_My_N+x_Ny_M+4m^2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -3.

Lời giải

a) Đúng: Ta có parabol tiếp xúc với trục hoành và nằm phía dưới trục hoành.

b) Đúng: Ta có $y(1)=-1^2+6.1-9=-4 \Rightarrow$ parabol đi qua điểm $A(1;-4)$.

c) Đúng: Xét phương trình $f(x)+2m-1=0$

$\Leftrightarrow -x^2+6x-9+2m-1=0 \Leftrightarrow -x^2+6x-10+2m=0\ (1)$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì $\Delta'>0 \Leftrightarrow 9+(-10+2m)>0 \Leftrightarrow 2m-1>0 \Rightarrow m>\frac{1}{2}$

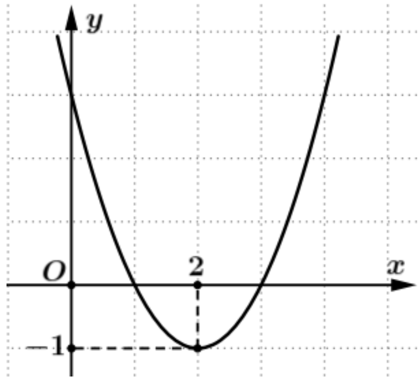
d) Sai: Xét phương trình $f(x)=1-2m \Leftrightarrow -x^2+6x-10+2m=0$.

Suy ra $M(x_M;1-2m)$, $N(x_N;1-2m)$

Xét $P=x_My_N+x_Ny_M+4m^2=(1-2m)(x_M+x_N)+4m^2=6(1-2m)+4m^2=4m^2-12m+6$

Xét hàm bậc hai $f(m)=4m^2-12m+6$ có đỉnh $\left(\frac{3}{2};-3\right)$ và đồ thị là parabol có bề lõm hướng lên, suy ra $f(m)\geq -3$ hay P đạt giá trị nhỏ nhất bằng -3 khi $m=\frac{3}{2}$.

Câu 2: Cho hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ (P) có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) (P) có tung độ đỉnh bằng 2.

b) (P) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ trái dấu.

c) $y > 2\ \forall x < 0$.

d) (P) đi qua điểm $M\left(3;\dfrac{-1}{4}\right)$

Lời giải

a) Sai: (P) có tung độ đỉnh bằng -1.

b) Sai: Dựa vào hình vẽ thấy (P) cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ dương.

c) Đúng: Dựa vào hình vẽ. Ta có với mọi $x_A < 0 \Rightarrow y_A > 2$.

d) Đúng: Ta có tung độ giao điểm bằng $2 \Rightarrow c = 2$.

Hoành độ đỉnh $x_I = 2 \Rightarrow \dfrac{-b}{2a} = 2 \Rightarrow 4a + b = 0 \quad (1)$

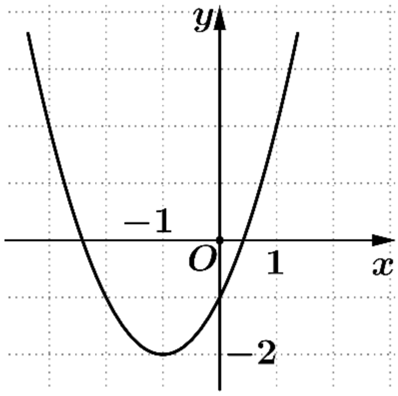
Khi đó: $y(2) = 4a + 2b + 2 = -1 \Rightarrow 4a + 2b = -3\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} a = \dfrac{3}{4} \\ b = -3 \end{cases}$ suy ra (P): $y = \dfrac{3}{4}x^2 - 3x + 2$

Với $x = 3 \Rightarrow y(3) = \dfrac{3}{4}3^2 - 3.3 + 2 = -\dfrac{1}{4}$.

Do đó (P) đi qua điểm $M\left(3;\dfrac{-1}{4}\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $a>0$.

b) Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt.

c) $b>0$ và $c<0$.

d) Phương trình $ax^2+bx+c=2$ có hai nghiệm trái dấu.

Lời giải

a) Đúng: Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ là một parabol có bề lõm hướng lên trên nên $a>0$.

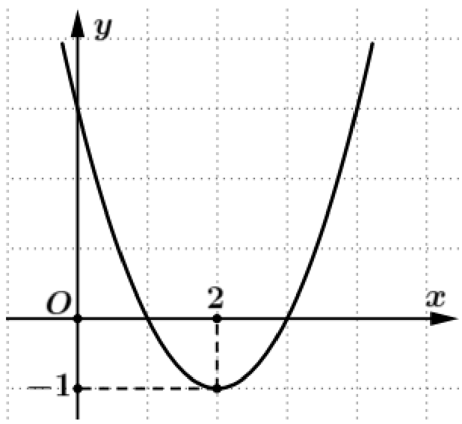
b) Đúng: Đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt nên phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm phân biệt.

c) Đúng: Hoành độ đỉnh $x=-\dfrac{b}{2a}<0\Rightarrow b>0$ (vì $a>0$)

Đồ thị cắt trụ tung tại điểm có tung độ âm nên $c<0$.

d) Đúng: Đường thẳng nằm ngang $y=2$ cắt đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ tại hai điểm có hoành độ trái dấu nên hương trình $ax^2+bx+c=2$ có hai nghiệm trái dấu.

Câu 4: Cho Parabol $\left(P\right):y=ax^2+bx+c\ \left(a\neq 0\right)$ có đồ thị như hình vẽ.



a) Parabol có hệ số $a>0$.

b) Parabol có trục đối xứng $x=2$ và có tọa độ đỉnh là $I\left(2;-1\right)$.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

d) Phương trình của Parabol là $y=x^2-4x+2$.

Lời giải

a) Đúng: Quan sát đồ thị hàm số ta thấy Parabol có bề lõm quay lên trên do đó Parabol có hệ số $a>0$.

b) Đúng: Parabol có trục đối xứng $x=2$ và tọa độ đỉnh là $I(2;-1)$.

c) Đúng: Ta thấy trên khoảng $(2;+\infty)$ đồ thị hàm thị đi lên từ trái qua phải nên hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

d) Sai: Đồ thị hàm thị đã cho cắt trục tung tại điểm $A(0;3)\Rightarrow c=3\Rightarrow y=ax^2+bx+3$

Đồ thị hàm số có tọa độ đỉnh là $I(2;-1)$ nên ta có hệ

$$\begin{cases}4a+2b+3=-1\\ -\dfrac{b}{2a}=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4a+2b+3=-1\\ b=-4a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=1\\ b=-4\end{cases}$$

Vậy phương trình của Parabol là $y=x^2-4x+3$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol có phương trình $y=\dfrac{-3}{1000}x^2+x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc Oy (mét) là độ cao của vật so với mặt đất. Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O. Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

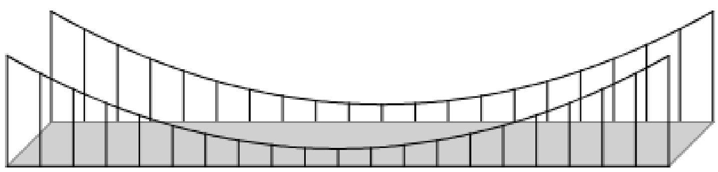
Lời giải

Điểm chạm đất sau khi bay của vật có tọa độ $A(a;0)$ với a là số thực dương.

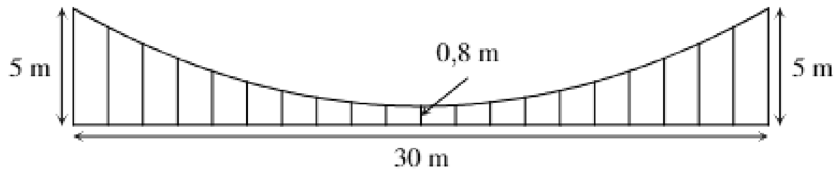
Ta có: $0=\dfrac{-3}{1000}x^2+x\Leftrightarrow x_1=0;x_2=\dfrac{1000}{3}$ suy ra: $a=\dfrac{1000}{3}$

Vậy khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O là: $\dfrac{1000}{3}\approx 333$ mét.

Câu 2: Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.



Hình vẽ cầu dây văng



Hình chiếu đứng của cầu dây văng

Dựa vào bản vẽ ở Hình, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên biết:

Dây dài nhất là 5 mét, dây ngắn nhất là $0,8$ mét. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

Nhịp cầu dài 30 mét.

Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.

Lời giải

Gọi $y = ax^2 + bx + c$ là công thức của hàm số có đồ thị là thành cầu.

Khi đó độ dài dây cáp dọc ở mỗi mặt bên là tung độ của điểm biểu diễn tương ứng.

Ở mỗi mặt: có 21 dây cáp dọc tương ứng cho 20 khoảng cách giữa chúng

Khoảng cách giữa hai dây cáp liền kề là: $30:20 = 1,5$ mét

Khi đó: $x_0 = 0; x_1 = 1,5; x_2 = 3; x_3 = 4,5; \ldots; x_n = 1,5.n$

Dễ thấy các điểm có tọa độ $(0;5), (x_{10};0,8), (x_{20};5)$ thuộc đồ thị hàm số.

(Trong đó: $x_{10} = 10.1,5 = 15; x_{20} = 20.1,5 = 30$) suy ra: $f(0) = a.0^2 + b.0 + c = 5 \Leftrightarrow c = 5$

Mặt khác: $f(1) = a.10^2 + b.10 + c = 0,8 \Leftrightarrow 100a + 10b + 5 = 0,8$

Ta lại có $f(2) = a.30^2 + b.30 + c = 5 \Leftrightarrow 900a + 30b + 5 = 5$

Giải hệ phương trình $\begin{cases} 100a + 10b + 5 = 0,8 \\ 900a + 30b + 5 = 5 \end{cases}$ ta được $a = \dfrac{21}{1000}; b = -\dfrac{63}{100}$

Như vậy $y = \dfrac{21}{1000}x^2 - \dfrac{63}{100}x + 5$

Gọi $y_0, y_1, y_2, \ldots y_{20}$ là tung độ của các điểm có hoành độ lần lượt là $x_0, x_1, x_2, \ldots x_{20}$

Ta có: $y_0 = 5$

$$y_1 = \frac{21}{1000}.1,5^2 - \frac{63}{100}.1,5 + 5$$

$$y_2 = \frac{21}{1000}.(2.1,5)^2 - \frac{63}{100}.(2.1,5) + 5 = 2^2.\frac{21}{1000}.1,5^2 - 2.\frac{63}{100}.1,5 + 5$$

$$y_n = \frac{21}{1000}.(n.1,5)^2 - \frac{63}{100}\cdot(2.1,5) + 5 = n^2.\frac{21}{1000}.1,5^2 - n.\frac{63}{100}.1,5 + 5$$

$$T = y_0 + y_1 + y_2 + \ldots + y_{20} = 5 + \frac{21}{1000}.1,5^2.\left(1+2^2+\ldots+20^2\right) - \frac{63}{100}.1,5.\left(1+2+\ldots+20\right) + 5.20$$

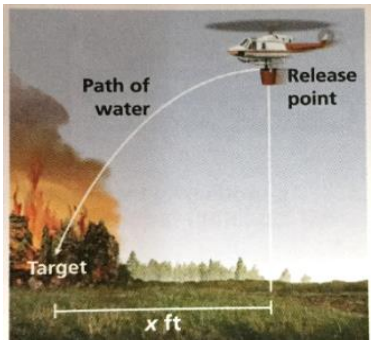
Mặt khác: $1+2^2+\ldots+20^2 = 2870; 1+2+\ldots+20 = 210$

$$\Rightarrow T = 5 + \frac{21}{1000}.1,5^2.2870 - \frac{63}{100}.1,5.210 + 5.20 \approx 42,16 \text{ mét}$$

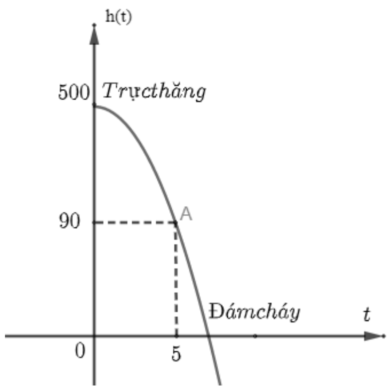
Tổng chiều dài của các dây cáp dọc ở hai mặt bên là: $42,16.2 = 84,3$ mét

Vậy chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên là $84,3$ mét.

Câu 3: Một máy bay trực thăng cứu hộ bay ở độ cao 500 (feet) so với mặt đất, đang chuẩn bị phun nước vào một đám cháy rừng từ trên không. Độ cao h (feet) của nước so với mặt đất tính theo thời gian t (s) kể từ lúc máy bay phun ra là một hàm số bậc 2. Tại thời điểm 5s sau nước phun thì tới được phía trên đám cháy đang bốc lửa cao 90m. Tính khoảng cách từ đám cháy đến máy bay theo phương ngang biết rằng khoảng cách theo phương ngang tính từ điểm cháy đến máy bay là $x = 85$ (ft)



Lời giải



Chọn hệ trục Oth như hình vẽ với góc tọa độ O là vị trí trên mặt đất thẳng đứng với trực thăng Gọi $(P): h(t) = at^2 + bt + c$.

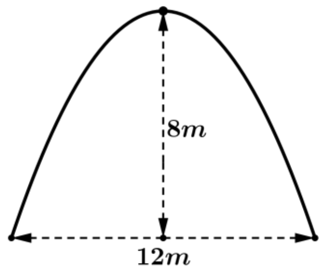
Ta có hàm số bậc 2 này có đỉnh $I(0;500)$ và qua $A(5;90)$

Khi đó: $\Leftrightarrow \begin{cases} I(0;500) \in (P) \\ -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ A(5;90) \in (P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 500 \\ -\dfrac{b}{2a} = 0 \\ 25a + 5b + c = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{82}{5} \\ b = 0 \\ c = 500 \end{cases}$ suy ra $h(t) = -\dfrac{82}{5}t^2 + 500$

Khi nước chạm đất thì $h(t)=0 \Leftrightarrow -\frac{82}{5}t^2+500=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\frac{25\sqrt{82}}{41}\approx 5,52s \\ t=-\frac{25\sqrt{82}}{41}(L) \end{array}\right.$

Vậy khoảng cách theo phương ngang từ đám cháy đến máy bay là $x=85.t\approx 469$ (ft).

Câu 4: Một đường hầm xuyên thẳng qua núi và có mặt cắt là một parabol (thông số như hình bên). Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang 6 mét đi vào vị trí chính giữa miệng hầm. Biết chiều cao h của xe tải thoả mãn $a<h<b$ để có thể đi vào cửa hầm mà không chạm tường. Tính $a+b$



Lời giải

Parabol có phương trình dạng $y=ax^2+bx$

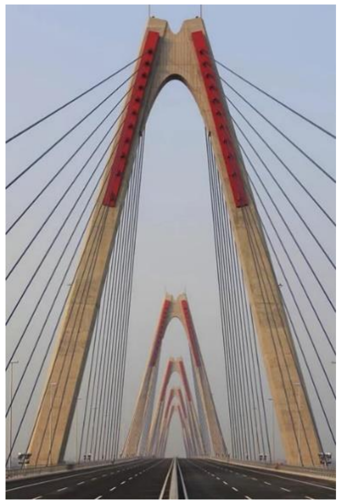
Theo đề bài ta có parabol đi qua các điểm $(12;0)$ và $(6;8)$.

Ta có hệ phương trình $\begin{cases} 144a+12b=0 \\ 36a+6b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{2}{9} \\ b=\frac{8}{3} \end{cases}$ suy ra $y=-\frac{2}{9}x^2+\frac{8}{3}x$.

Do chiếc xe tải có chiều ngang 6 mét đi vào vị trí chính giữa hầm nên xe sẽ chạm tường tại điểm $A(3;6)$ và điểm $B(9;6)$. Khi đó chiều cao của xe là 6 mét.

Vậy điều kiện để xe tải có thể đi vào hầm mà không chạm tường là $0<h<6 \Rightarrow a+b=6$.

Câu 5: Cầu Nhật Tân bắc qua sông Hồng được xem là chiếc cầu dây văng dài nhất Việt Nam. Cầu có 5 trụ tháp chính kết nối các nhịp dây văng nâng đỡ toàn bộ phần chính của cây cầu, cũng là để tượng trưng cho 5 cửa ô cổ kính của Hà Nội. Mỗi trụ tháp được kiến trúc tạo dáng mĩ thuật phía trong bằng đường cong tựa như một parabol. Giả sử biết độ rộng của mặt đường khoảng 43 mét. Một người đã dùng dây dọi (không giãn) gắn lên thành trụ cầu ở vị trí B và điều chỉnh độ dài dây dọi để quả nặng vừa chạm đất (khi lặng gió), sau đó đo được chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là 1,87 mét và khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là 20 cm. Nếu dùng dữ liệu tự thu thập được và tính toán theo cách ở trên thì người này sẽ ước tính được độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là bao nhiêu?

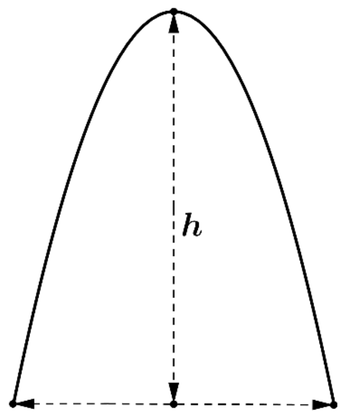


Lời giải

Để giải quyết vấn đề thực tiễn này bằng toán học, ta dùng đồ thị hàm số bậc hai để mô phỏng cho đường biên mặt trong của trụ cầu. Từ công thức của hàm số tìm được ứng với đồ thị, ta tính độ cao cần tìm.

Bước 1: Lựa chọn mô hình toán học

Dùng đồ thị hàm số bậc hai mô phỏng cho đường biên mặt trong của trụ cầu như hình:



Bước 2: Phát biểu bài toán

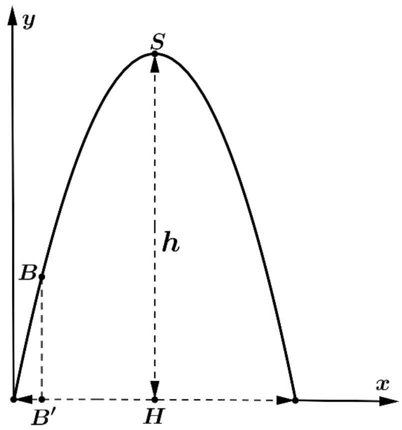
Trong hệ trục toạ độ Oxy tung độ đỉnh S của parabol là bao nhiêu?

Bước 3: Giải quyết bài toán toán học

Trước hết ta tìm công thức hàm số bằng cách:

Đo khoảng cách OA giữa hai chân trụ của cầu, từ đó xác định toạ độ điểm A, H (với H là trung điểm của OA).

Chọn một điểm B cụ thể trên thành trụ cầu, xác định hình chiếu B' trên mặt đường rồi đo BB' và OB'. Từ đây, xác định toạ độ điểm B.



Tìm hàm số bậc hai có công thức tổng quát: $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị hàm số này qua gốc toạ độ và hai điểm A, B.

Sau cùng tính tung độ đỉnh S.

Bước 4: Trả lời kết quả cho vấn đề thực tế

Ước lượng kết quả độ cao từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường (có thể làm tròn tung độ đỉnh S đến đơn vị mét).

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ đi qua gốc toạ độ $O(0;0)$ nên $c = 0$ suy ra công thức hàm số là $ax^2 + bx$.

Mặt khác đồ thị hàm số qua 2 điểm $A(43;0), B(0,2;1,87)$ nên ta có hệ phương trình:

$\begin{cases} a.(0,2)^2 + b.0,2 = 1,87 \\ a.43^2 + b.43 = 0 \end{cases}$ suy ra $a = -\dfrac{187}{856}; b = \dfrac{8041}{856}$ nên có hàm số $y = -\dfrac{187}{856}x^2 + \dfrac{8041}{856}x$.

Hình chiếu của đỉnh S trên trục hoành là H nên

$$y_S = f(x_S) = f(x_H) = f\left(\frac{x_A}{2}\right) = f\left(\frac{43}{2}\right) \approx 100,98.$$

Vậy độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là khoảng 101mét

(Lưu ý: Kết quả này là giả định theo số liệu do người này tự thu thập, không ảnh hưởng đến độ cao thật trong thực tế).

Câu 6: Sức mạnh động cơ (tính bằng đơn vị mã lực) sinh ra từ máy của một canô ở tốc độ quay r vòng/ phút được xác định bởi hàm số: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$. Vậy sức mạnh lớn nhất của động cơ này đạt được là bao nhiêu? Khi đó, động cơ phải quay bao nhiêu vòng/ phút

Lời giải

Ta có: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$ là hàm số bậc 2 có tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Tọa độ đỉnh $I(4000;160)$

Bảng biến thiên:

r	$-\infty$		4000		$+\infty$
$p(r)$	$-\infty$	$\nearrow$	160	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy sức mạnh lớn nhất của động cơ là 160 mã lực đạt được tại 4000 vòng/phút.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 4: Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất và các bài toán liên quan đến hàm số bậc hai

Phương pháp: Xét hàm số bậc hai $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ ta cần xác định các yếu tố sau:

- Xác định được tọa độ đỉnh $I\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$
- Xác định được hệ số a, từ đó suy ra khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số
- Vẽ bảng biến thiên để xét các yếu tố cần tìm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hàm số $y=x^2-4x+3$ có đồ thị là $\left(P\right)$.

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $\left(P\right)$.

b) Nhận xét sự biến thiên của hàm số trong khoảng $\left(0;3\right)$.

c) Tìm tập hợp giá trị x sao cho $y\le 0$.

d) Tìm các khoảng của tập xác định để đồ thị (P) nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y=8$.

e) Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2;1\right]$.

Lời giải

a) Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị $\left(P\right)$. Tọa độ đỉnh $I\left(2;-1\right)$; trục đối xứng $x=2$.

Hệ số $a=1>0$: bề lõm quay lên trên.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;2\right)$ và đồng biến trên khoảng $\left(2;+\infty\right)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A\left(0;3\right)$, cắt trục hoành tại hai điểm $B\left(1;0\right)$ và $C\left(3;0\right)$.

b) Ta có $\left(0;3\right)=\left(0;2\right)\cup\left\{2\right\}\cup\left(2;3\right)$.

Trên khoảng $\left(0;2\right)$ hàm số nghịch biến, tại $x=2$ thì hàm số đạt giá trị bằng -1, trên khoảng $\left(2;3\right)$ hàm số đồng biến.

c) Dựa vào đồ thị, ta thấy tập hợp các giá trị của x để $y\le 0$ (đồ thị hàm số nằm phía dưới trục hoành) là $1\le x\le 3$.

d) Ta thấy đồ thị $\left(P\right)$ cắt đường thẳng $y=8$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 5.

Do đó để đồ thị $\left(P\right)$ nằm hoàn toàn phía trên đường thẳng $y=8$ thì $x\in(-\infty;-1)$ hoặc $x\in(5;+\infty)$

e) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1;2\right)$ nên nghịch biến trên đoạn $[-2;1]$.

Giá trị lớn nhất của hàm số trên đoạn $\left[-2;1\right]$ đạt tại $x=-2$, khi đó $y_{\max}=y\left(-2\right)=15$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[-2;1]$ đạt tại $x=1$, khi đó $y_{\min}=y(1)=0$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau:

a) $y=7x^2-3x+10$

b) $y=-2x^2-x+1$.

c) $y=x^2-3x$ với $0\le x\le 2$

d) $y=-x^2-4x+3$ với $0\le x\le 4$.

e) $y=x(x+1)(x-2)(x-3)$

f) $y=(2x-1)^2-4|2x-1|+3$.

Lời giải

a) Hàm số $y=7x^2-3x+10$ có $a=7>0$ nên y đạt giá trị bé nhất tại đỉnh.

Suy ra $y_{\min}=-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{271}{8}$ và không tồn tại giá trị lớn nhất.

b) Hàm số $y=-2x^2-x+1$ có $a=-2<0$ nên y đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh.

Suy ra $y_{\max}=-\dfrac{\Delta}{4a}=\dfrac{9}{8}$ và không tồn tại giá trị nhỏ nhất.

c) Hàm số $y=x^2-3x$ có $a=1>0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{3}{2}\in[0;2]$.

Vậy $\min y=f\left(\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{9}{4};\max y=\max\{f(0);f(2)\}=\max\{0;-2\}=0$.

d) Hàm số $y=-x^2-4x+3$ có $a=-1<0$ nên bề lõm hướng xuống.

Hoành độ đỉnh $x_I=-\dfrac{b}{2a}=-2\notin[0;4]$. Ta có $f(4)=-29;f(0)=3$.

Vậy $\min y=f(4)=-29;\max y=f(0)=3$.

e) Ta có $y=x(x+1)(x-2)(x-3)=[x(x-2)].[(x+1)(x-3)]=(x^2-2x)(x^2-2x-3)$.

Đặt $t=x^2-2x+1=(x-1)^2\ge 0$, ta được $y=f(t)=(t-1)(t-4)=t^2-5t+4\ (t\ge 0)$.

Hàm số $y=t^2-5t+4$ có $a=1>0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I=-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{5}{2}\in[0;+\infty)$.

Do đó $\min y=\min f(t)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=-\dfrac{9}{4}$ đạt được khi $(x-1)^2=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow x=\dfrac{2\pm\sqrt{10}}{2}$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất.

f) Đặt $t=|2x-1|\ge 0$ thì $y=t^2-4t+3, t\ge 0$.

Hàm số $y=t^2-4t+3$ có $a=1>0$ nên bề lõm hướng lên.

Hoành độ đỉnh $x_I=-\dfrac{b}{2a}=2\in[0;+\infty)$.

Do đó $\min y=\min f(t)=f(2)=-1$ đạt được khi $|2x-1|=2\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$ hoặc $x=\dfrac{3}{2}$.

Hàm số không có giá trị lớn nhất.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=x^2-4x+1$.

A. -3. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 13.

Lời giải

Ta có: $y=x^2-4x+1=(x-2)^2-3\ge -3$. Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $x=2$.

Vậy hàm số đã cho đạt giá trị nhỏ nhất là -3 tại $x=2$.

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^2+x-3$ là

A. -3. **B.** -2. **C.** $\frac{-21}{8}$. **D.** $\frac{-25}{8}$.

Lời giải

Ta có: $y=2x^2+x-3=2\left(x+\frac{1}{4}\right)-\frac{25}{8}\ge\frac{-25}{8}$

Khi đó: $y=\frac{-25}{8}$ khi $x=\frac{-1}{4}$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=2x^2+x-3$ là $\frac{-25}{8}$.

Câu 3: Khẳng định nào dưới đây đúng?

A. Hàm số $y=-3x^2+x+2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{12}$

B. Hàm số $y=-3x^2+x+2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{12}$

C. Hàm số $y=-3x^2+x+2$ có giá trị lớn nhất bằng $\frac{25}{3}$

D. Hàm số $y=-3x^2+x+2$ có giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{25}{3}$.

Lời giải

Ta có $\Delta=1^2-4.(-3).2=25$. Vì $a=-3<0$ nên hàm số có giá trị lớn nhất là: $\frac{-\Delta}{4a}=\frac{25}{12}$.

Câu 4: Giá trị lớn nhất của hàm số $y=-3x^2+2x+1$ trên đoạn $[1;3]$ là:

A. $\frac{4}{5}$ **B.** 0 **C.** $\frac{1}{3}$ **D.** -20

Lời giải

Ta có $-\frac{b}{2a}=\frac{1}{3}$ và $a=-3<0$. Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.

Mặt khác $[1;3]\subset\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$. Do đó trên đoạn $[1;3]$ hàm số đạt giá trị lớn nhất tại điểm $x=1$, tức là $\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(1)=0$.

Câu 5: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 - 2|x|$ là:

A. 1 **B.** 0 **C.** -1 **D.** -2

Lời giải

Cách 1: Đặt $t = |x|, t \geq 0$.

Hàm số $f(t) = t^2 - 2t$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $t = 1 > 0$.

Vậy hàm số $y = x^2 - 2|x|$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1 khi $|x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Cách 2: Ta có: $y = x^2 - 2|x| = (|x| - 1)^2 - 1 \geq -1\ \forall x$; $y = -1 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

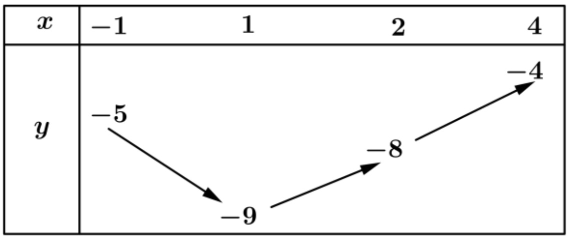
Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1.

Câu 6: Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 - 2x - 8 & \text{khi } x \leq 2 \\ 2x - 12 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x \in [-1; 4]$. Tính $M + m$.

A. -14. **B.** -13. **C.** -4. **D.** -9.

Lời giải

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên ta có $M = -4, m = -9$. Vậy $M + m = -4 + (-9) = -13$.

Câu 7: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ bằng 1 khi giá trị của tham số m là:

A. $m = \pm 4$. **B.** $m = 4$. **C.** $m = \pm 2$. **D.** $m \in \varnothing$.

Lời giải

Hàm số $y = x^2 + 2mx + 5$ có $a = 1 > 0$ nên hàm số đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Theo đề bài ta có $y\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = 1 \Leftrightarrow y(-m) = 1 \Leftrightarrow m^2 - 2m^2 + 5 = 1 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

Câu 8: Giá trị của tham số m để hàm số $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2$ có giá trị nhỏ nhất bằng -10 trên $\mathbb{R}$ thuộc khoảng nào trong các khoảng sau đây?

A. $m \in [-1; 0)$. **B.** $m \in \left(\dfrac{3}{2}; 5\right)$. **C.** $m \in \left(-\dfrac{5}{2}; -1\right)$. **D.** $m \in \left(0; \dfrac{3}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có $y = x^2 - 2mx + m^2 - 3m - 2 = (x - m)^2 - 3m - 2 \geq -3m - 2\ \forall x \in \mathbb{R}$.

Đẳng thức xảy ra khi $x=m$ nên $\min_{\mathbb{R}} y=-3m-2$. Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -3m-2=-10 \Leftrightarrow m=\frac{8}{3}$

Câu 9: Tìm m để hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ có giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng -3.

A. $m=0$. **B.** $m=-9$. **C.** $m=1$. **D.** $m=-3$.

Lời giải

Ta có hàm số $y=x^2-2x+2m+3$ có hệ số $a=1>0, b=-2$

Trục đối xứng là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}=1$

Hàm số đồng biến trên đoạn $[2;5]$ suy ra giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[2;5]$ bằng $f(2)$.

Theo giả thiết $f(2)=-3 \Leftrightarrow 2m+3=-3 \Leftrightarrow m=-3$.

Câu 10: Cho hàm số $y=2x^2-3(m+1)x+m^2+3m-2$, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số là lớn nhất.

A. $m=-2$ **B.** $m=1$ **C.** $m=3$ **D.** $m=5$

Lời giải

Hàm số bậc hai với hệ số $a=2>0$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x=-\frac{b}{2a}=\frac{3(m+1)}{4}$

Mặt khác: $y_{\min}=y\left(\frac{3(m+1)}{4}\right)=-\frac{1}{8}m^2+\frac{3}{4}m-\frac{25}{8}=-\frac{1}{8}(m-3)^2-2\le -2$.

Dấu bằng xảy ra khi $m=3$.

Câu 11: Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên $m\in[-10;-4)$ để đường thẳng $d: y=-(m+1)x+m+2$ cắt parabol $(P): y=x^2+x-2$ tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung?

A. 6 **B.** 5 **C.** 7 **D.** 8

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$x^2+x-2=-(m+1)x+m+2 \Leftrightarrow x^2+(m+2)x-m-4=0$ $(*)$.

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt nằm về cùng một phía đối với trục tung khi và chỉ khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt cùng dấu $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ P>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2+8m+20>0\\ -m-4>0\end{cases} \Leftrightarrow m<-4$.

Vậy có 6 giá trị m nguyên trong nửa khoảng $[-10;-4)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 12: Cho hàm số $y=x^2+3x$ có đồ thị (P). Gọi S là tập hợp các giá trị của tham số m để đường thẳng $d: y=x+m^2$ cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm I của đoạn AB nằm trên đường thẳng $d': y=2x+3$. Tổng bình phương các phần tử của S là:

A. 6. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2+3x=x+m^2 \Leftrightarrow x^2+2x-m^2=0$.

Để d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Delta'>0 \Leftrightarrow 1+m^2>0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Gọi $x_1; x_2$ là 2 nghiệm của phương trình, khi đó $A(x_1;x_1+m^2)$, $B(x_2;x_2+m^2)$

$\Rightarrow I\left(\dfrac{x_1+x_2}{2};\dfrac{x_1+x_2+2m^2}{2}\right)$

Theo Vi ét ta có $x_1+x_2=-2;\ x_1.x_2=-m^2$ nên $I(-1;m^2-1)$.

Vì I thuộc d' nên $m^2-1=1 \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2}$.

Câu 13: Cho hàm số $y=2x^2-3x-5$. Giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) cắt đường thẳng $y=4x+m$ tại hai điểm phân biệt $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;x_2)$ thỏa mãn $2x_1^2+2x_2^2=3x_1x_2+7$ là

A. -10. **B.** 10. **C.** -6. **D.** 9.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $2x^2-3x-5=4x+m \Leftrightarrow 2x^2-7x-5-m=0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\Delta=(-7)^2-4.2(-m-5)>0 \Leftrightarrow 8m+89>0$

$\Leftrightarrow m>-\dfrac{89}{8}$.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của nên theo Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{7}{2} \\ x_1.x_2=\dfrac{-5-m}{2} \end{cases}$.

$2x_1^2+2x_2^2=3x_1x_2+7 \Leftrightarrow 2(x_1+x_2)^2-7x_1x_2-7=0 \quad \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{7}{2}\right)^2-7.\left(\dfrac{-5-m}{2}\right)-7=0$

$\Leftrightarrow 70+7m=0 \Leftrightarrow m=-10$. Vậy $m=-10$ là giá trị cần tìm.

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị m để đường thẳng $y=mx+3-2m$ cắt parabol $y=x^2-3x-5$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

A. $m<-3$. **B.** $-3<m<4$. **C.** $m<4$. **D.** $m\le 4$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-3x-5=mx+3-2m \Leftrightarrow x^2-(m+3)x+2m-8=0$ $(*)$

Đường thẳng cắt parabol tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow a.c<0 \Leftrightarrow 2m-8<0 \Leftrightarrow m<4$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc hai $y=f(x)=-(x-a)(x-b)$ có đồ thị là (P) $(a<b)$. Biết (P) có đỉnh $I(1;4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a^2+b^2=9$.

b) Đường thẳng $(d): y=x+1$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

c) $f(x)>0\ \forall x\in(-1;2)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[-\frac{1}{2};2\right]$ là $\frac{7}{4}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $(P): y=-x^2+(a+b)x-ab$

Vì (P) có đỉnh $I(1;4)$ nên ta có: $\begin{cases}4=-1+(a+b)-ab\\ \frac{a+b}{2}=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=-3\\ a+b=2\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=-1\\ b=3\end{cases}\\ \begin{cases}a=3\\ b=-1\end{cases}\end{array}\right.$

Vì $a<b\Rightarrow a^2+b^2=10$.

b) Đúng: Ta có: $(P): y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) $-x^2+2x+3=x+1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right.$ nên đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

c) Đúng: Ta có: $f(x)>0\Leftrightarrow-(x+1)(x-3)>0\Leftrightarrow(x+1)(x-3)<0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1>0\\ x-3<0\end{cases}\\ \begin{cases}x+1<0\\ x-3>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1\\ x<3\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\ x>3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow-1<x<3$

d) Đúng: Vì $(P): y=-x^2+2x+3$ có đỉnh $I(1;4)$ và bề lõm quay xuống và $\min y=\frac{7}{4}$

Câu 2: Cho hàm số $y=-x^2+6x-5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đồ thị của hàm số là parabol có đỉnh $I(3;-4)$.

b) $y<0$ khi $x\in(-\infty;1)\cup(5;+\infty)$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 3.

d) Đường thẳng $d: y = 4x - m$ cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt khi $m > 4$.

Lời giải

a) Sai : Đồ thị của hàm số là parabol có đỉnh $I(3;4)$.

b) Đúng: $y < 0 \Rightarrow -x^2 + 6x - 5 < 0$ khi $x \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty)$.

c) Sai: Xét hàm số $y = f(x) = -x^2 + 6x - 5$ có hệ số $a < 0$

Giá trị lớn nhất của hàm số $y = -x^2 + 6x - 5$ là $y = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(3) = 4$.

d) Đúng: Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng d và đồ thị (P) là:

$-x^2 + 6x - 5 = 4x - m \Leftrightarrow x^2 - 2x + 5 = m.$

Xét vế trái $y = f(x) = x^2 - 2x + 5$ có $a > 0$ suy ra $y = f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = f(1) = 4$ là giá trị nhỏ nhất.

Vậy đường thẳng $d: y = 4x - m$ cắt đồ thị (P) tại 2 điểm phân biệt khi $m > 4$

Câu 3: Cho hàm số $y = -x^2 + 2x - 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

b) Đồ thị của hàm số là parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.

c) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y_{\max} = -4$ khi $x = 1$.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Hàm số bậc hai $y = -x^2 + 2x - 5\,(a = -1, b = 2, c = -5); -\dfrac{b}{2a} = 1$.

Đồ thị của hàm số là parabol có trục đối xứng là đường thẳng $x = 1$.

c) Sai: Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-4	$\searrow$	$-\infty$

Kết luận: Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số là $y_{\max} = -4$, khi $x = 1$. Hàm số không có giá trị nhỏ nhất.

Câu 4: Một hòn đá được ném lên theo phương thẳng đứng. Khi bỏ qua sức cản không khí, chuyển động của hòn đá tuân theo phương trình $y=-6t^2+12t+18$. Ở đây $t=0$ là thời điểm được ném lên, $y(t)$ có đơn vị: mét là độ cao của hòn đá tại thời điểm $t(s)$ sau khi ném. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Quỹ đạo chuyển động của hòn đá là một parabol.

b) Sau $1,5$ giây thì hòn đá đạt độ cao lớn nhất.

c) Độ cao lớn nhất của hòn đá là 25 mét.

d) Sau 3 giây thì hòn đá chạm đất.

Lời giải

a) Đúng: Chuyển động của hòn đá có phương trình $y=-6t^2+12t+18$ là hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của hòn đá là một parabol.

b) Sai: Hòn đá đạt độ cao lớn nhất ứng với $t=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{12}{2(-6)}=1$ nên sau 1 giây hòn đá đạt độ cao lớn nhất.

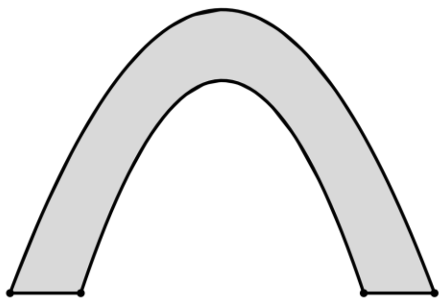
c) Sai: Độ cao lớn nhất của hòn đá là $y(1)=-6.1^2+12.1+18=24$ mét.

d) Đúng: Hòn đá chạm đất khi $y(t)=0 \Leftrightarrow -6t^2+12t+18=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3(nhan) \\ t=-1\,(loai) \end{array}\right.$

Do đó sau 3 giây hòn đá chạm đất.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol (như hình vẽ) sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng BC là 9 mét. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK=1,6$ mét và khoảng cách từ K tới chân cổng gần nhất là $BK=0,5$ mét. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho vị trí B trùng với gốc O, trục Ox nằm trên đường nối chân hai cổng, C nằm trên tia Ox (đơn vị trên các trục tính theo mét).

Khi đó cổng ra vào là một phần của parabol có phương trình $y=f(x)=-\dfrac{32}{85}x^2+\dfrac{288}{85}x$

Đỉnh của parabol có tung độ là $7,6$. Vậy chiều cao của cổng là khoảng $7,6$ mét.

Câu 2: Chị Huyền dùng $40\,\text{m}$ lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau. Tìm chiều dài của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Huyền có thể rào được.

Lời giải

Gọi x là chiều rộng của mảnh vườn hình chữ nhật khi đó chiều dài của mảnh vườn là $20-x$

Khi đó diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là $S=x(20-x)=-x^2+20x$.

Xét hàm số $S(x)=-x^2+20x\ (x>0)$ là hàm số bậc hai có $a=-1<0 \Rightarrow S_{Max}=f(10)=100$

Vậy chiều dại của mảnh vườn là $20-x=20-10=10(m)$.

Câu 3: Một quả bóng được ném lên trên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu 14,7 (m/s). Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) có thể mô tả bởi phương trình $h(t)=-4,9t^2+14,7t$. Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Vì độ cao của quả bóng được mô tả bởi hàm số bậc hai $h(t)=-4,9t^2+14,7t$ nên nó đạt độ cao lớn nhất tại đỉnh của parabol.Lại có đỉnh của parabol là $I(1,5;11,025) \Rightarrow h_{Max} \approx 11(m)$.

Câu 4: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Lời giải

Gọi x triệu đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá $(0 \le x \le 4)$.

Khi đó: Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31-x-27=4-x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600+200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là:

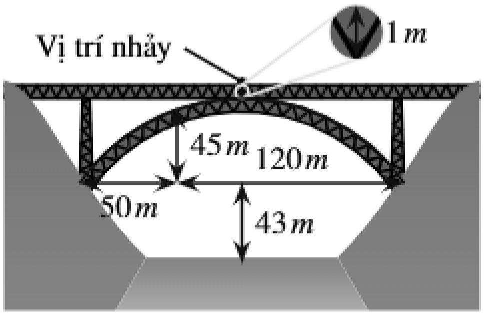
$$f(x)=(4-x)(600+200x)=-200x^2+200x+2400.$$

Xét hàm số $f(x)=-200x^2+200x+2400$ trên đoạn $[0;4]$ có bảng biến thiên

Vậy $\max\limits_{[0;4]} f(x)=2450 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

Câu 5: Nhảy bungee là một trò chơi mạo hiểm. Trong trò chơi này, người chơi đứng ở vị trí trên cao, thắt dây an toàn và nhảy xuống. Sợi dây này có tính đàn hồi và được tính toán chiều dài để nó kéo người chơi lại khi gần chạm đất (hoặc mặt nước). Chiếc cầu trong Hình 1 có bộ phận chống đỡ dạng parabol. Một người muốn thực hiện một cú nhảy bungee từ giữa cầu xuống với dây an toàn. Người này cần trang bị sợi dây an toàn dài bao nhiêu? Biết rằng chiều dài của sợi dây đó bằng một phần ba khoảng cách từ vị trí bắt đầu nhảy đến mặt nước.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Gọi $y = f\left(x\right) = ax^2 + bx + c$ là hàm số có đồ thị là ảnh của bộ phận chống đỡ

S là đỉnh của parabol dưới vị trí nhảy 1 mét và A, B là các điểm như hình vẽ.

Ta có $A\left(48;46,2\right), B\left(165;0\right)$.

Vì các điểm O, A, B đều thuộc đồ thị hàm số nên ta có:

$$\begin{cases} c = 0 \\ 48^2 a + 48b = 46,2 \\ 165a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{77}{9360} \\ b = \dfrac{847}{624} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(x\right) = -\dfrac{77}{9360}x^2 + \dfrac{847}{624}x$$

Đỉnh $S\left(82,5;56\right)$. Khoảng cách từ vị trí bắt đầu nhảy đến mặt nước là $1 + 56 + 43 = 100\left(m\right)$

Vậy chiều dài của sợi dây đó là $\dfrac{100}{3} \approx 33,3$.

Câu 6: Một công ty sản xuất một sản phẩm bán cho các đại lí bán lẻ trên toàn quốc. Bộ phận tài chính của công ty đưa ra hàm giá bán: $p\left(x\right) = 1000 - 50x$ trong đó $p\left(x\right)$(triệu đồng) là giá bán lẻ mỗi sản phẩm mà tại giá bán này x sản phẩm được bán ra. Tìm doanh thu lớn nhất mà công ty đạt được.

Lời giải

Ta có hàm doanh thu là $R\left(x\right) = x.p\left(x\right) = x\left(1000 - 50x\right) = -50x^2 + 1000x$

Hàm doanh thu là một đường parabol có $a = -50 < 0$ nên doanh thu lớn nhất tại đỉnh của parabol.

Lại có đỉnh của parabol là $I\left(10;5000\right)$. Vậy doanh thu lớn nhất là 5000.

----------------HẾT----------------

BÀI 03 DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Tam thức bậc hai

Định nghĩa: Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$, trong đó a,b,c là những hệ số, $a\neq 0$.

Nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

Biệt thức $\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=b'^2-ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

2 Dấu của tam thức bậc hai

Cho tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ \left(a\neq 0\right),\Delta=b^2-4ac$.

- Nếu $\Delta<0$ thì $f\left(x\right)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.
- Nếu $\Delta=0$ thì $f\left(x\right)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\neq-\dfrac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta>0$ thì $f\left(x\right)$ luôn:
  Cùng dấu với hệ số a khi $x\in\left(-\infty;x_1\right)\cup\left(x_2;+\infty\right)$
  Trái dấu với hệ số a khi $x\in\left(x_1;x_2\right)$.

Trong đó $x_1.x_2$ là hai nghiệm của $f\left(x\right)$.

- Khi $\Delta>0$, dấu của $f\left(x\right)$ và a là: "trong trái ngoài cùng"

Cách xét dấu của tam thức bậc hai:

- **Bước 1:** Tính và xác định dấu của biệt thức Δ
- **Bước 2:** Xác định nghiệm của $f\left(x\right)$ (nếu có)
- **Bước 3:** Xác định dấu của hệ số a
- **Bước 4:** Xác định dấu của $f\left(x\right)$

Chú ý: Khi xét dấu của tam thức bậc hai, ta có thể dùng biệt thức thu gọn Δ' thay cho biệt thức Δ.

Nhận xét: Cho tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$.

$\oplus$ $ax^2+bx+c>0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta<0\end{cases}$ $\oplus$ $ax^2+bx+c<0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta<0\end{cases}$

$\oplus$ $ax^2+bx+c\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\\Delta\leq 0\end{cases}$ $\oplus$ $ax^2+bx+c\leq 0,\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\begin{cases}a<0\\\Delta\leq 0\end{cases}$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp: Biến đổi biểu thức về các tam thức bậc hai và vận dụng các định lí về dấu của tam thức bậc hai.

- **Bước 1:** Tính và xác định dấu của biệt thức Δ
- **Bước 2:** Xác định nghiệm của $f(x)$ (nếu có)
- **Bước 3:** Xác định dấu của hệ số a
- **Bước 4:** Xác định dấu của $f(x)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét dấu của các tam thức bậc hai sau:

a) $3x^2-2x+1$ b) $-x^2+4x+5$

c) $4x^2+4x+1$ d) $2x^2-6x+\dfrac{9}{2}$

e) $3x^2-2x-8$ f) $-x^2+2x-1$

Lời giải

a) Ta có $\Delta'=-2<0$ và $a=3>0$. Suy ra $3x^2-2x+1>0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Ta có: $-x^2+4x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=5 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$-x^2+4x+5$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra: $-x^2+4x+5>0 \Leftrightarrow x\in(-1;5)$ và $-x^2+4x+5<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(5;+\infty)$.

c) Tam thức bậc hai $f(x)=4x^2+4x+1$ có $\Delta=0$, nghiệm kép $x_0=-\dfrac{1}{2}$ và hệ số $a=4>0$

Khi đó $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\dfrac{1}{2}\right\}$.

d) Ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-6x+\dfrac{9}{2}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\dfrac{3}{2}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Suy ra: $f(x)>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{3}{2}\right\}$.

e) Ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{4}{3} \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$-\frac{4}{3}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra: $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ và $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)$.

f) Ta có: $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow -x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Suy ra: $f\left(x\right)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

Bài tập 2: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f\left(x\right)=2x^2+x+6$

b) $f\left(x\right)=4x^2-4x+1$

c) $f\left(x\right)=x^2-\frac{3}{2}x-1$

d) $f\left(x\right)=\left(4-3x\right)\left(x^2-5x+6\right)$

e) $f\left(x\right)=\left(1-\sqrt{2}\right)x^2-2x+1+\sqrt{2}$

f) $f\left(x\right)=-0,3x^2+x-1,5$

g) $f\left(x\right)=x^2+\left(\sqrt{5}-1\right)x-\sqrt{5}$

h) $f\left(x\right)=\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1$

Lời giải

a) $f\left(x\right)=2x^2+x+6$ có $\Delta=-47<0$, hệ số $a=2>0$ nên $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}$.

b) $f\left(x\right)=4x^2-4x+1$ có $\Delta=0$, hệ số $a=4>0$ nên $f\left(x\right)>0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$.

c) $f\left(x\right)=x^2-\frac{3}{2}x-1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-\frac{1}{2}, x_2=2$, hệ số $a=1>0$ nên .

$f\left(x\right)>0,\forall x\in\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$. và $f\left(x\right)<0,\forall x\in\left(-\frac{1}{2};2\right)$.

d) $f\left(x\right)=\left(4-3x\right)\left(x^2-5x+6\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{4}{3}\\x=2\\x=3\end{array}\right.$.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		2		3		$+\infty$
$4-3x$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
x^2-5x+6		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có, bảng xét dấu:

Vậy $f\left(x\right)>0,\forall x\in\left(-\infty;\frac{4}{3}\right)\cup\left(2;3\right)$ và $f\left(x\right)<0,\forall x\in\left(\frac{4}{3};2\right)\cup\left(3;+\infty\right)$.

e) $f\left(x\right)=\left(1-\sqrt{2}\right)x^2-2x+1+\sqrt{2}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=1, x_2=\frac{1+\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=-3-2\sqrt{2}$,

Hệ số $a=1-\sqrt{2}<0$ nên $f\left(x\right)<0,\forall x\in\left(-\infty;-3-2\sqrt{2}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$

và $f\left(x\right)>0,\forall x\in\left(-3-2\sqrt{2};1\right)$.

f) $f\left(x\right)=-0,3x^2+x-1,5$ có $\Delta=-\dfrac{4}{5}<0$, hệ số $a=-0,3<0$ nên $f\left(x\right)<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

g) $f\left(x\right)=x^2+\left(\sqrt{5}-1\right)x-\sqrt{5}$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=1,x_2=-\sqrt{5}$, hệ số $a=1>0$

Nên $f\left(x\right)>0,\forall x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$ và $f\left(x\right)<0,\forall x\in\left(-\sqrt{5};1\right)$

h) $f\left(x\right)=\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{3}+1\right)x+1$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-1,x_2=\dfrac{-1}{\sqrt{3}}$, hệ số $a=\sqrt{3}>0$

Nên $f\left(x\right)>0,\forall x\in\left(-\infty;-1\right)\cup\left(\dfrac{-1}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ và $f\left(x\right)<0,\forall x\in\left(-1;\dfrac{-1}{\sqrt{3}}\right)$.

Bài tập 3: Xét dấu các biểu thức sau:

a) $f\left(x\right)=\left(x+3\right)\left(2x^2+5x+2\right)$

b) $f\left(x\right)=\left(x^2-7x+12\right)\left(1-x\right)$

c) $f\left(x\right)=\dfrac{2x-x^2}{3+x}$

d) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-9x+7}{4-x^2}$

e) $f\left(x\right)=x^2-2x+5$.

f) $f\left(x\right)=x^2-5x-6$.

g) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x+3}{x-1}$.

h) $f\left(x\right)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2-4}$

g) $f\left(x\right)=x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$

h) $f\left(x\right)=\dfrac{2x-5}{4x^2-19x+12}$

Lời giải

a) Cho $x+3=0\Leftrightarrow x=-3$; $2x^2+5x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{1}{2}\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x^2+5x+2$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Kết luận:

$f\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-2;-\dfrac{1}{2}\right)$; $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=-3;x=-2;x=-\dfrac{1}{2}$.

$f\left(x\right)>0\Leftrightarrow x\in\left(-3;-2\right)\cup\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right)$.

b) Cho $x^2-7x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=4\end{array}\right.$; $1-x=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		3		4		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	
$x^2-7x+12$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận:

$f\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(1;3\right)\cup\left(4;+\infty\right)$; $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x=1;x=3;x=4$.

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;1)\cup(3;4)$.

c) Cho $2x-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$; $3+x=0 \Leftrightarrow x=-3$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-3		0		2		$+\infty$
$3+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$2x-x^2$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	

Kết luận:

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-3;0)\cup(2;+\infty)$; $f(x)=0 \Leftrightarrow x=0; x=2$.

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(0;2)$; $f(x)$ không xác định khi và chỉ khi $x=-3$.

d) Cho $2x^2-9x+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{7}{2} \end{array}\right.$; $4-x^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		1		2		$\frac{7}{2}$		$+\infty$
$2x^2-9x+7$		$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$4-x^2$		$-$	0	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$f(x)$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

Kết luận:

$f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(1;2)\cup\left(\frac{7}{2};+\infty\right)$; $f(x)=0 \Leftrightarrow x=1; x=\frac{7}{2}$.

$f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(-2;1)\cup\left(2;\frac{7}{2}\right)$; $f(x)$ không xác định khi và chỉ khi $x=-2; x=2$.

e) Ta có $\Delta'=-4<0$ và $a=1>0$ nên $f(x)>0, \forall x\in\mathbb{R}$.

f) Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=6 \end{array}\right.$.

Do $a=1>0$ nên $\begin{cases} f(x)>0, \forall x\in(-\infty;-1)\cup(6;+\infty) \\ f(x)<0, \forall x\in(-1;6) \end{cases}$

g) Ta có $g(x)=x^2+4x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

$h(x)=x-1=0 \Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$h(x)$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $\begin{cases} f(x)>0, \forall x\in(-3;-1)\cup(1;+\infty) \\ f(x)<0, \forall x\in(-\infty;-3)\cup(-1;1) \end{cases}$

h) Ta có $2x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1}{2} \\ x = 1 \end{array}\right.$; $x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Bảng xét dấu $f(x)$

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		1		2		$+\infty$
$2x^2-x-1$		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-4		$+$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

i) Ta có $x - \dfrac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4} = \dfrac{-x^3 + 2x^2 + 5x - 6}{-x^2 + 3x + 4} = \dfrac{(x-1)(-x^2 + x + 6)}{-x^2 + 3x + 4}$

Ta có $-x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 \\ x = 3 \end{array}\right.$, $-x^2 + 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = 4 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		1		3		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$-x^2+x+6$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	|	$-$	
$-x^2+3x+4$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$x-\dfrac{x^2-x+6}{-x^2+3x+4}$		$-$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$	

Suy ra $x - \dfrac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ dương khi và chỉ khi $x \in (-2;-1) \cup (1;3) \cup (4;+\infty)$,

$x - \dfrac{x^2 - x + 6}{-x^2 + 3x + 4}$ âm khi và chỉ khi $x \in (-\infty;-2) \cup (-1;1) \cup (3;4)$.

j) Điều kiện xác định: $4x^2 - 19x + 12 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 4 \\ x \neq \dfrac{3}{4} \end{cases}$.

Ta có $2x - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$, $4x^2 - 19x + 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{2}$		4		$+\infty$
$2x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$4x^2-19x+12$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{2x-5}{4x^2-19x+12}$		$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	

Vậy $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$; $f(x)$ không xác định tại $\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = \dfrac{3}{4} \end{array}\right.$.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{2}\right) \cup (4;+\infty)$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left(-\infty;\dfrac{3}{4}\right) \cup \left(\dfrac{5}{2};4\right)$.

Bài tập 4: Tìm x để biểu thức $P(x)=(x-1)(x^3-4x)-(x+2)(x^3+3x-2)$ nhận giá trị dương.

Lời giải

Ta có: $P(x)=x(x-1)(x-2)(x+2)-(x+2)(x^3+3x-2)$

$=(x+2)\left[x(x-1)(x-2)-(x^3+3x-2)\right]=(x+2)(x^3-3x^2+2x-x^3-3x+2)$

$=(x+2)(-3x^2-x+2)$. Cho $x+2=0\Leftrightarrow x=-2$; $-3x^2-x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=\dfrac{2}{3}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		-1		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Khi đó: $(-2<x<-1)\vee\left(x>\dfrac{2}{3}\right)$.

Bài tập 5: Một công ty du lịch thấy rằng khi bán tour chất lượng cao Hà Nội - TP Hồ Chí Minh trong 5 ngày 4 đêm với giá là x triệu đồng thì doanh thu F (tính theo đơn vị triệu đồng) sẽ là $F(x)=-10x^2+410x$. Với đơn giá nào của tour thì doanh thu từ việc bán tour vượt mức 4 tỉ đồng?

Lời giải

Doanh thu vượt mức 4 tỉ đồng tức là $F(x)=-10x^2+410x>4000$

Hay $-10x^2+410x-4000>0\Leftrightarrow 10(16-x)(x-25)>0\Leftrightarrow 16<x<25$.

Vậy với đơn giá tuor từ 16 triệu đồng đến 25 triệu đồng sẽ giúp công ty có được doanh thu vượt mức là 4 tỉ đồng.

Bài tập 6: Một quán buffet báo giá cho đoàn khách như sau: 10 khách đầu tiên có giá là 300000 đồng/ người. Nếu có nhiều hơn 10 người thì cứ thêm 1 người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/ người cho toàn bộ đoàn khách. Số người của nhóm khách nhiều nhất là bao nhiêu thì quán không bị lỗ? Biết rằng chi phí thực cho bữa ăn này 3000000 đồng?

Lời giải

Gọi x là số lượng khách từ người thứ 11 trở lên của đoàn $x\in\mathbb{N}^*$.

Thêm 1 người thì giá vé giảm 5000 đồng/ người, vậy giá còn: $(300000-5000.1)$ đồng/ người cho toàn bộ đoàn khách.

Thêm x người thì giá còn: $(300000-5000.x)$ đồng/ người cho toàn bộ đoàn khách.

Doanh thu theo x: $(10+x).(300000-5000.x)$ đồng.

Do chi phí thực tổ chức bữa tiệc là 3000000 đồng để quán không bị lỗi thì doanh thu phải lớn hơn hoặc bằng 3000000 đồng: $(10+x).(300000-5000.x)\ge 3000000$

$(10+x).(300000-5000.x)\ge 3000000\Leftrightarrow 3000000-50000x+300000x-50000x^2\ge 3000000$

$\Leftrightarrow -50000x^2+250000x\ge 0\quad\Leftrightarrow -50000x(x-5)\ge 0\Leftrightarrow 0\le x\le 5$

Kết hợp với điều kiện $x>0$ ta được : $0<x\le 5$.

Vậy số người nhóm khách nhiều nhất là 15 thì quán sẽ không bị lỗ.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Với giá trị x nào sau đây thì tam thức $y = x^2 - 2x - 3$ nhận giá trị dương ?

A. $x = -1$. **B.** $x = 4$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 0$.

Lời giải

Ta có $y(4) = 4^2 - 2.4 - 3 = 5 > 0$.

Câu 2: Tam thức $y = 235x^2 + 87x - 197$ có hai nghiệm phân biệt vì

A. $\Delta < 0$. **B.** $a.c < 0$. **C.** $a.c > 0$. **D.** $b.c < 0$.

Lời giải

Ta có $\Delta = b^2 - 4ac > 0, \forall a.c < 0$. Khi đó tam thức đã cho có hai nghiệm phân biệt.

Câu 3: Với giá trị nào của tham số m thì biểu thức $y = mx^2 - 4x - 8$ là tam thức bậc hai có nghiệm kép?

A. $m > -\dfrac{1}{2}$. **B.** $m = \dfrac{1}{2}$. **C.** $m < \dfrac{1}{2}$. **D.** $m = -\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\Delta' = 4 + 8m$.

Để tam thức đã cho có nghiệm kép thì $\Delta' = 0 \Leftrightarrow 4 + 8m = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{1}{2}$.

Câu 4: Tìm tổng các giá trị của tham số m để biểu thức $y = -(m+2)x^2 - (m^2 - 1)x + 3m$ là tam thức bậc hai có nghiệm $x = -1$?

A. -2. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Điều kiện: $m \neq -2$.

Ta có $y(-1) = 0 \Leftrightarrow -(m+2) + (m^2 - 1) + 3m = 0 \Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = -1 \\ m = 3 \end{array}\right.$.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của $a \in [-100;100]$ để tam thức $y = x^2 - ax + 1$ có hai nghiệm dương phân biệt?

A. 98. **B.** 99. **C.** 97. **D.** 100.

Lời giải

Ta có $\Delta = a^2 - 4$.

Để tam thức $y = x^2 - ax + 1$ có hai nghiệm dương phân biệt thì

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4 > 0 \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a < -2 \\ a > 2 \end{array}\right. \\ a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 2.$$

$a \in [-100;100] \Rightarrow$ Có 98 giá trị nguyên của a thỏa mãn.

Câu 6: Cho tam thức bậc hai $f(x) = x^2 - bx + 3$. Với giá trị nào của b thì tam thức $f(x)$ có nghiệm?

A. $b \in \left[-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right]$. **B.** $b \in \left(-2\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$.

C. $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right]\cup\left[2\sqrt{3};+\infty\right)$. **D.** $b\in\left(-\infty;-2\sqrt{3}\right)\cup\left(2\sqrt{3};+\infty\right)$.

Lời giải

Ta có $f(x)=x^2-bx+3$ có nghiệm khi $\Delta\ge 0\Leftrightarrow b^2-12\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b\le -2\sqrt{3}\\ b\ge 2\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Câu 7: Giá trị nào của m thì biểu thức $y=(m-3)x^2+(m+3)x-(m+1)$ (1) là tam thức bậc hai vô nghiệm?

A. $m\in\left(-\infty;-\frac{3}{5}\right)\cup(1;+\infty)\setminus\{3\}$. **B.** $m\in\left(-\frac{3}{5};+\infty\right)$.

C. $m\in\left(-\frac{3}{5};1\right)$. **D.** $m\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Lời giải

Ta có (1) là tam thức bậc hai vô nghiệm khi $\begin{cases}a\ne 0\\ \Delta'<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 3\\ 5m^2-2m-3<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\ne 3\\ -\frac{3}{5}<m<1\end{cases}$.

Câu 8: Tam thức nào sau đây nhận giá trị âm với mọi $x<2$?

A. x^2-5x+6. **B.** $16-x^2$. **C.** x^2-2x+3. **D.** $-x^2+5x-6$.

Lời giải

Cách 1: Ta có $y=x^2-5x+6=(x-2)(x-3)<0\Leftrightarrow 2<x<3$ (loại A);

$y=16-x^2=(4-x)(4+x)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<-4\\ x>4\end{array}\right.$ (loại B)

$y=x^2-2x+3=(x-1)^2+2>0,\forall x$ (loại C)

$y=-x^2+5x-6=-(x-2)(x-3)<0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x<2\\ x>3\end{array}\right.$ (Chọn D)

Cách 2: Thay $x=0$ vào từng đáp án; chỉ có D thỏa mãn $-6<0$ (đúng).

Câu 9: Tam thức $-x^2-3x-4$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-4$ hoặc $x>-1$. **B.** $x<1$ hoặc $x>4$.

C. $-4<x<-4$. **D.** $x\in\mathbb{R}$.

Lời giải

Cách 1: $y=-x^2-3x-4$ nhận giá trị âm khi $-x^2-3x-4<0\Leftrightarrow-\left(x^2+2.\frac{3}{2}x+\frac{9}{4}+\frac{7}{4}\right)<0$

$\Leftrightarrow-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{7}{4}<0,\forall x\in\mathbb{R}$.

Câu 10: Tam thức $y=x^2-12x-13$ nhận giá trị âm khi và chỉ khi

A. $x<-13$ hoặc $x>1$. **B.** $x<-1$ hoặc $x>13$. **C.** $-13<x<1$. **D.** $-1<x<13$.

Lời giải

$y=x^2-12x-13$ nhận giá trị âm tức là $x^2-12x-13<0 \Leftrightarrow (x+1)(x-13)<0$

$\Leftrightarrow -1<x<13$.

Câu 11: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x)=x^2-6x+8$ không dương?

A. $[2;3]$. **B.** $(-\infty;2]\cup[4;+\infty)$. **C.** $[2;4]$. **D.** $[1;4]$.

Lời giải

Để $f(x)$ không dương thì $x^2-6x+8\le 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)\le 0$

Lập bảng xét dấu $f(x)$ ta thấy để $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in[2;4]$

Câu 12: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì đa thức $f(x)=x^2+9-6x$ luôn dương?

A. $\mathbb{R}\setminus\{3\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(3;+\infty)$. **D.** $(-\infty;3)$.

Lời giải

Ta có $x^2+9-6x>0 \Leftrightarrow (x-3)^2>0 \Leftrightarrow x\ne 3$.

Vậy $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Câu 13: Khi xét dấu biểu thức $f(x)=\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-1}$ ta có

A. $f(x)>0$ khi $-7<x<-1$ hoặc $1<x<3$.

B. $f(x)>0$ khi $x<-7$ hoặc $-1<x<1$ hoặc $x>3$.

C. $f(x)>0$ khi $-1<x<0$ hoặc $x>1$.

D. $f(x)>0$ khi $x>-1$.

Lời giải

Ta có: $x^2+4x-21=0 \Leftrightarrow x=-7; x=3$ và $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Lập bảng xét dấu ta có

$f(x)>0$ khi $x<-7$ hoặc $-1<x<1$ hoặc $x>3$.

Câu 14: Tìm x để $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}$ không âm.

A. $(1;3]$. **B.** $(1;2]\cup[3;+\infty)$. **C.** $[2;3]$. **D.** $(-\infty;1)\cup[2;3]$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x\ne 1$. Khi đó ta có: $\dfrac{x^2-5x+6}{x-1}\ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-1}\ge 0$

Ta có: $(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.; x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $x \in (1;2] \cup [3;+\infty)$.

Câu 15: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì $f(x) = x(5x+2) - x(x^2+6)$ không dương?

A. $(-\infty;1] \cup [4;+\infty)$. **B.** $[1;4]$. **C.** $(1;4)$. **D.** $[0;1] \cup [4;+\infty)$

Lời giải

$x(5x+2) - x(x^2+6) \le 0 \Leftrightarrow x(x^2-5x+4) \ge 0$

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$x-4$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vậy $x \in [0;1] \cup [4;+\infty)$.

Câu 16: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f(x) = x(x^2-1)$ không âm?

A. $(-\infty;-1) \cup [1;+\infty)$. **B.** $[-1;0] \cup [1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;-1] \cup [0;1)$. **D.** $[-1;1]$.

Lời giải

Cho $x(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Căn cứ bảng xét dấu ta được $x \in [-1;0] \cup [1;+\infty)$

Câu 17: Với x thuộc tập hợp nào dưới đây thì nhị thức $f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x^2+4x+3}$ không dương?

A. $S=\left(-\infty;1\right)$. **B.** $S=\left(-3;-1\right)\cup\left[1;+\infty\right)$.

C. $S=\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-1;1\right]$. **D.** $S=\left(-3;1\right)$.

Lời giải

$f\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x^2+4x+3}$.

Ta có $x-1=0\Leftrightarrow x=1$ và $x^2+4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-3\\x=-1\end{array}\right.$

Bảng xét dấu $f\left(x\right)$:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$\|\|$	$+$ $\|\|$ $-$	0	$+$

Vậy $f\left(x\right)\le 0$ khi $x\in\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-1;1\right]$. Vậy $x\in\left(-\infty;-3\right)\cup\left(-1;1\right]$

Câu 18: Khi xét dấu biểu thức $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+4x-21}{x^2-1}$ ta có

A. $f\left(x\right)>0$ khi $-7<x<-1$ hoặc $1<x<3$.

B. $f\left(x\right)>0$ khi $x<-7$ hoặc $-1<x<1$ hoặc $x>3$.

C. $f\left(x\right)>0$ khi $-1<x<0$ hoặc $x>1$.

D. $f\left(x\right)>0$ khi $x>-1$.

Lời giải

Ta có: $x^2+4x-21=0\Leftrightarrow x=-7;x=3$ và $x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1$. Lập bảng xét dấu ta có

$f\left(x\right)>0$ khi $x<-7$ hoặc $-1<x<1$ hoặc $x>3$.

Câu 19: Tìm số nguyên lớn nhất của x để đa thức $f\left(x\right)=\dfrac{x+4}{x^2-9}-\dfrac{2}{x+3}-\dfrac{4x}{3x-x^2}$ luôn âm.

A. $x=2$. **B.** $x=1$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Điều kiện $\begin{cases}x^2-9\ne0\\x+3\ne0\\3x-x^2\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne3\\x\ne-3\\x\ne0\end{cases}$.

Ta có $\frac{x+4}{x^2-9}-\frac{2}{x+3}-\frac{4x}{3x-x^2}<0 \Leftrightarrow \frac{x+4}{x^2-9}-\frac{2}{x+3}<\frac{4x}{3x-x^2}$

$\Leftrightarrow \frac{(x+4)-2(x-3)+4(x+3)}{(x-3)(x+3)}<0 \Leftrightarrow \frac{3x+22}{(x-3)(x+3)}<0$.

Bảng xét dấu :

x	$-\infty$		$-\frac{22}{3}$		-3		3		$+\infty$
$x-3$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$3x+22$		$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	||	$-$	||	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu ta có $x\in\left(-\infty,-\frac{22}{3}\right)\cup(-3,3)$. Vậy $x=2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 20: Một khung dây thép hình chữ nhật có chiều dài 16 cm và chiều rộng 11 cm được uốn lại thành khung hình chữ nhật mới có kích thước $(16+x)$ và $(11-x)$cm. Với x nằm trong khoảng nào thì diện tích của khung sau khi uốn tăng lên?

A. $(-5;0)$. **B.** $(-\infty;-5)\cup(0;+\infty)$.

C. $(-16;11)$. **D.** $(-\infty;-16)\cup(11;+\infty)$.

Lời giải

Diện tích của khung dây thép khi chưa uốn là: $16.11=176\left(cm^2\right)$.

Diện tích của khung dây thép khi đã uốn là: $(16+x)(11-x)=176-5x-x^2$.

Như vậy diện tích của khung sau khi uốn tùy thuộc vào giá trị của hàm số $f(x)=x^2+5x$

Xét tam thức bậc hai $f(x)=x^2+5x$ có hai nghiệm phân biệt $x_1=-5;x_2=0$.

Ta có: $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-5;0)$ thì diện tích khung hình sau khi uốn lớn hơn trước khi uốn (tăng lên).

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho các biểu thức $f(x)=-4x^2+3x+1$; $g(x)=x^3+3x^2-1$; $h(x)=2x^2-3x+1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có hai biểu thức là tam thức bậc hai

b) Nghiệm tam thức $f(x)$ là $x=1;x=-\frac{1}{3}$.

c) Tam thức $h(x)$ không âm khi $x\le\frac{1}{2}\vee x\ge 1$.

d) $h(x)\ge m;\forall x\in\mathbb{R}$ khi và chi khi $m<-\frac{1}{8}$.

Lời giải

a) Đúng: Có hai biểu thức là tam thức bậc hai là $f(x)=-4x^2+3x+1$ và $h(x)=2x^2-3x+1$

b) Sai: Ta có: $f(x)=0 \Leftrightarrow -4x^2+3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{-1}{4} \end{array}\right.$

c) Đúng: Ta có $h(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$h(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Tam thức $h(x)$ không âm khi $x \le \frac{1}{2} \vee x \ge 1$

d) Sai: $h(x) \ge m; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2-3x+1 \ge m; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 2x^2-3x+1-m \ge 0; \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta \le 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 3^2-4.2.(1-m) \le 0 \Leftrightarrow m \le -\frac{1}{8}$.

Câu 2: Cho các tam thức bậc hai $f(x)=x^2+5x+6$; $g(x)=x^2+6x+9$; $h(x)=-x^2+4x-4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tam thức $g(x)$ không âm $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Tam thức $h(x)$ âm $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Tam thức $f(x)$ không âm khi $2 \le x \le 3$.

d) Tam thức $f(x)-h(x)$ luôn dương $\forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $a=1>0; \Delta=6^2-4.1.9=0 \Rightarrow g(x) \ge 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Đúng: Ta có $a=-1<0; \Delta=4^2-4.(-1).(-4)=0 \Rightarrow h(x)<0; \forall x \ne 2$.

c) Sai: Ta có $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu $h(x)$:

x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x)$ không âm khi $x \le 2 \vee x \ge 3$.

d) Đúng: $f(x) - h(x) = 2x^2 + x + 10$

Ta có $a = 2 > 0; \Delta = 1^2 - 4.2.10 = -79 < 0 \Rightarrow f(x) - h(x) = 2x^2 + x + 10 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 3: Cho $f(x) = -x^2 + 2(m-1)x + m - 3$ (m là tham số). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m = 1$ thì $f(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Khi $m > 3$ thì $f(x)$ có hai nghiệm trái dấu.

c) Khi $m \in (-1; 2)$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt.

d) Khi $m \in [-1; 2]$ thì $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đúng: Khi $m = 1$ thì $f(x) = -x^2 - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

b) Đúng: $f(x)$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow ac < 0 \Leftrightarrow -1.(m-3) < 0 \Leftrightarrow m > 3$.

c) Sai: Tam thức có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 - (-1).(m-3) > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < -1 \\ m > 2 \end{array}\right.$.

Vậy $m \in (-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

d) Đúng: $f(x) \le 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < 0 \\ m^2 - m - 2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \le 0 \Leftrightarrow -1 \le m \le 2$.

Câu 4: Cho phương trình $f(x) = mx^2 - (4m+1)x + 4m + 2$ với m là tham số. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m = 0$ thì $f(x) = 0$ vô nghiệm.

b) Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi $-\frac{1}{4} < m < 0$.

c) Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt với mọi m.

d) Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2$ khi $-2 < m < 0$.

Lời giải

a) Sai: Khi $m = 0$ thì $f(x) = -x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$

b) Sai: Phương trình có 2 nghiệm trái dấu khi và chỉ khi

$a.c < 0 \Leftrightarrow (4m+2).m < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0$.

c) Sai: Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt phải là phương trình bậc 2.

Do đó $m \neq 0$; $f(x) = mx^2 - (4m+1)x + 4m + 2$.

$\Delta = b^2 - 4ac = (4m+1)^2 - 4m(4m+2) = 1 > 0$.

Do đó phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 với $m \neq 0$.

d) Sai: Phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < 1 < x_2$ khi và chỉ khi

$$f(1).m < 0 \Leftrightarrow (m+1).m < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+1>0 \\ m<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m+1<0 \\ m>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m>-1 \\ m<0 \end{cases} \\ \begin{cases} m<-1 \\ m>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -1 < m < 0.$$

Câu 5: Cho tam thức $f(x) = x^2 - mx + m + 3$, với m là tham số thực. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m = 2$ thì tam thức có hai nghiệm phân biệt.

b) Khi $m = 2$ thì tam thức luôn âm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

c) Khi $m = -2$ thì tam thức luôn không âm với $\forall x \in \mathbb{R}$.

d) Có 7 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ luôn xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$

Lời giải

a) Sai: Khi $m = 2$ ta có phương trình $x^2 - 2x + 5 = 0$ vô nghiệm.

b) Sai: Khi $m = 2$ ta có $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 > 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Đúng: Khi $m = -2$ ta có $x^2 + 2x + 5 \geq 0\ \forall x \in \mathbb{R}$.

d) Sai: Hàm số $y = \dfrac{1}{\sqrt{f(x)}}$ xác định $\Leftrightarrow f(x) > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R}$

$\Delta = m^2 - 4(m+3) < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 12 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 6$.

Vậy có 5 giá trị nguyên dương của tham số m.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một công ty du lịch báo giá tiền cho chuyến đi du lịch của một nhóm khách như sau: Nếu có 30 khách thì giá vé là 300000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 30 khách thì cứ thêm 1 người giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ khách. Giả sử nhóm du lịch có hơn 30 khách. Gọi x là số lượng khác từ người thứ 31 trở đi và chi phí công ty bỏ ra cho nhóm khách du lịch là 10080000 đồng. Số lượng khách thêm vào lớn nhất là là bao nhiêu người thì công ty không bị lỗ.

Lời giải

Khi thêm x người thì giá vé sẽ là $300000 - 5000x$ đồng/người

Số khách của nhóm du lịch là: $30+x$; Doanh thu mà công ty thu được của nhóm khách du lịch: $T=(300000-5000x).(30+x)$.

Lợi nhuận của công ty thu được: $F=(300000-5000x).(30+x)-10080000$

Công ty không bị lỗ khi lợi nhuận không âm,

suy ra : $F=(300000-5000x).(30+x)-10080000\geq 0 \Leftrightarrow -5000x^2+150000x-1080000\geq 0$

$12\leq x\leq 18$. Vậy số khách thêm vào không quá 18 thì công ty sẽ có lợi nhuận

Câu 2: Một cửa hàng kinh doanh xăng dầu. Kế toán của cửa hàng đã tính toán lợi nhuận khi bán xăng A95 hàng ngày theo công thức sau $y=-86x^2+86000x-18146000$, trong đó x là số lít xăng A95 được bán ra. y lợi nhuận thu được theo đơn vị đồng. Hỏi cửa hàng bán tối thiểu bao nhiêu lít xăng thì sẽ có lợi nhuận.

Lời giải

Xét tam thức bậc hai $f(x)=-86x^2+86000x-18146000$. Điều kiện $x>0, x\in\mathbb{Z}$

Nhận thấy $f(x)=0$ có hai nghiệm là $x_1\approx 302{,}5;\quad x_2\approx 697{,}5$ và hệ số $a=-86<0$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Vì x là số nguyên dương nên:

Cửa hàng có lợi nhuận khi và chỉ khi $f(x)>0$ tức là $303\leq x\leq 697$.

Cửa hàng không có lợi nhuận khi và chỉ khi $f(x)<0$ tức là $x\leq 302$ hoặc $x\geq 698$.

Vậy cửa hàng có lợi nhuận khi bán từ 303 đến 697 lít. Do đó cửa hàng bán tối thiểu 303 lít xăng thì sẽ có lợi nhuận.

Câu 3: Một chú thỏ đen chạy đuổi theo một chú thỏ trắng ở vị trí cách nó 100 m. Biết rằng, quãng đường chú thỏ đen chạy được biểu thị bởi công thức $s(t)=8t+5t^2$ (m), trong đó t (giây) là thời gian tính từ thời điểm chú thỏ đen bắt đầu chạy, và chú thỏ trắng chạy với vận tốc không đổi là 3 (m/s). Tại những thời điểm $t\in(a;+\infty)$ thì chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng. Tính $2a+8$

Lời giải

Giả sử vị trí ban đầu của chú thỏ đen là $s=0$ (m) và thời điểm ban đầu là $t=0$ (giây).

Quãng đường của chú thỏ trắng chạy được tại thời điểm t là $f(t)=100+3t$ (m).

Để chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng thì $s(t)>f(t)$

hay $8t+5t^2>100+3t \Rightarrow 5t^2+5t-100>0 \Rightarrow t(4;+\infty)$ (vì $t>0$).

Vậy tại những thời điểm $t \in (4;+\infty)$ thì chú thỏ đen chạy trước chú thỏ trắng $\Rightarrow 2a+8=16$

Câu 4: Bộ phận nghiên cứu thị trường của một xí nghiệp xác định tổng chi phí để sản xuất Q sản phẩm là $Q^2+300Q+200000$ (nghìn đồng). Giả sử giá mỗi sản phẩm bán ra thị trường là 1200 nghìn đồng. Xí nghiệp cần sản xuất số sản phẩm $Q \in [a;b]$ để không bị lỗ. Tính $a+b$

Lời giải

Lợi nhuận của xí nghiệp khi bán hết Q sản phẩm là:

$1200Q-(Q^2+300Q+200000)=-Q^2+900Q-200000$.

Để xí nghiệp không bị lỗ thì $-Q^2+900Q-200000 \ge 0 \Leftrightarrow 400 \le Q \le 500$.

$\Rightarrow Q \in [400;500] \Rightarrow \begin{cases} a=400 \\ b=500 \end{cases} \Rightarrow a+b=900$.

Câu 5: Một công ty du lịch thông báo giá tiền cho chuyến đi tham quan của một nhóm khách như sau: 50 khách đầu tiên có giá 300000 đồng/người. Nếu có nhiều hơn 50 người đăng kí thì cứ có thêm một người, giá vé sẽ giảm 5000 đồng/người cho toàn bộ hành khách. Biết chi phí thực sự của chuyến đi là 15080000 đồng. Số người của nhóm khách du lịch nhiều nhất là bao nhiêu để công ty không bị lỗ?

Lời giải

Với số lượng khách là $(50+x)$ người thì mỗi khách sẽ trả một khoản tiền $(300000-5000x)$ đồng.

Vậy tổng số tiền công ty thu được trong chuyến du lịch đó là:

$T(x)=(50+x)(300000-5000x)=-5000x^2+50000x+15000000$ (đồng).

Xét tam thức bậc hai: $f(x)=T(x)-15080000=-5000x^2+50000x-80000$.

$\Delta>0$, $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt là 2 và 8. bảng xét dấu $f(x)$:

x	$-\infty$		2		8		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

Kết luận: $f(x) \ge 0$ khi $x \in [2;8]$. Vậy nếu số khách tối đa là 58 người $(x=8)$ thì công ty sẽ không lỗ khi tổ chức chuyến du lịch này.

Câu 6: Một quả bóng được đá lên từ mặt đất, biết rằng chiều cao y (mét) của quả bóng so với mặt đất được biểu diễn bởi một hàm số bậc hai theo thời gian t (giây). Sau 3 giây kể từ lúc được đá lên quả bóng đạt chiều cao tối đa là 21 m và bắt đầu rơi xuống. Hỏi thời điểm t lớn nhất là bao nhiêu ($t \in \mathbb{Z}$) để quả bóng vẫn đang ở độ cao trên 10 m so với mặt đất?

Lời giải

Xét hàm số bậc hai $y=at^2+bt+c (a \ne 0)$.

Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} c=0 \\ -\dfrac{b}{2a}=3 \\ 9a+3b+c=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ 6a+b=0 \\ 9a+3b=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{7}{3} \\ b=14 \\ c=0 \end{cases}$.

Vì vậy $y=-\dfrac{7}{3}t^2+14t$.

Ta cần xét: $y=-\dfrac{7}{3}t^2+14t>10$ hay $-\dfrac{7}{3}t^2+14t-10>0$.

Đặt $f(t)=-\dfrac{7}{3}t^2+14t-10$; cho $f(t)=0 \Rightarrow t_1=\dfrac{21-\sqrt{231}}{7}, t_2=\dfrac{21+\sqrt{231}}{7}$.

Bảng xét dấu $f(t)$:

t	$-\infty$		t_1		t_2		$+\infty$
$f(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Kết luận: $f(t)>0$ khi $t_1<t<t_2$ hay $\underbrace{\dfrac{21-\sqrt{231}}{7}}_{\approx 0,83}<t<\underbrace{\dfrac{21+\sqrt{231}}{7}}_{\approx 5,17}$.

Vì t nguyên nên $t\in[1;5]$. Do vậy giá trị $t=5$ thỏa mãn đề bài.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Bất phương trình bậc hai một ẩn

Phương pháp: Để giải bất phương trình bậc hai ta dựa vào việc xét dấu tam thức bậc hai

- **Bước 1:** Xét dấu tam thức bậc hai ở vế trái.
- **Bước 2:** Chọn những giá trị của x làm cho vế trái dương hoặc âm tùy theo chiều của bất phương trình.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các bất phương trình sau:

a) $-3x^2+2x+1<0$

b) $-36x^2+12x-1\ge 0$

c) $y=\sqrt{x^2-2x+5}$

d) $\left(x^2-x\right)^2+3\left(x^2-x\right)+2\ge 0$

e) $\dfrac{x^2+x-1}{x-2}>\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{x^3-2x}{x^2-3x+2}$

f) $\left(x^2-4\right)\left(x^2+2x\right)\le 3\left(x^2+4x+4\right)$

g) $x^2-8x+7\ge 0$

h) $x^2-4x+4>0$

Lời giải

a) Tam thức $f\left(x\right)=-3x^2+2x+1$ có $a=-3<0$ và có hai nghiệm $x_1=-\dfrac{1}{3};\ x_2=1$

($f\left(x\right)$ cùng dấu với hệ số a).

Suy ra $-3x^2+2x+1<0\Leftrightarrow x<-\dfrac{1}{3}$ hoặc $x>1$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup\left(1;+\infty\right)$.

b) Tam thức $f\left(x\right)=-36x^2+12x-1$ có $a=-36<0$ và $\Delta=0$

$f\left(x\right)$ trái dấu với hệ số a nên $f\left(x\right)$ âm với $\forall x\ne\dfrac{1}{6}$ và $f\left(\dfrac{1}{6}\right)=0$

Suy ra $-36x^2+12x-1\ge 0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left\{\dfrac{1}{6}\right\}$.

c) Điều kiện: $x^2-2x+5\ge 0$

Xét tam thức vế trái có $\Delta'=-4<0$ và $a=1>0$ nên $x^2-2x+5>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $D=\mathbb{R}$.

d) Ta có $\left(x^2-x\right)^2+3\left(x^2-x\right)+2\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x\le -2\\x^2-x\ge -1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x+2\le 0\\x^2-x+1\ge 0\end{array}\right.\Leftrightarrow$ đúng $\forall x$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình $T=\mathbb{R}$.

e) Bất phương trình $\Leftrightarrow\dfrac{\left(x^2+x-1\right)\left(x^2-x\right)-\left(x-2\right)+x\left(x^3-2\right)}{x\left(x^2-3x+2\right)}>0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2}{x\left(x^2-3x+2\right)}>0 \Leftrightarrow x\left(x^2-3x+2\right)>0 \Leftrightarrow 0<x<1 \vee x>2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=\left(0;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

f) Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(x+2\right)^2\left(x^2-2x\right)\le 3\left(x+2\right)^2$

$\Leftrightarrow \left(x+2\right)^2\left(x^2-2x-3\right)\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x^2-2x-3\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow x=-2 \vee -1\le x\le 3$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=\left[-1;3\right]\cup\left\{-2\right\}$.

g) Xét $f\left(x\right)=x^2-8x+7 \Rightarrow f\left(x\right)$ là một tam thức bậc hai nên $f\left(x\right)\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 7\end{array}\right.$

Suy ra $x^2-8x+7\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 7\end{array}\right.$.

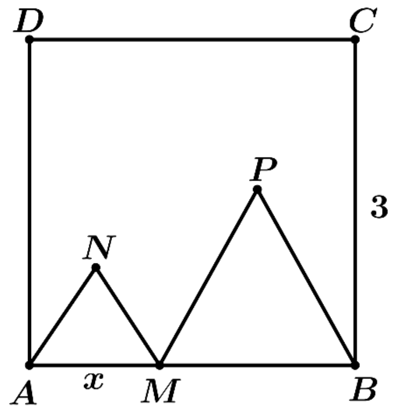
Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(-\infty;1\right]\cup\left[7;+\infty\right)$.

h) Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
x^2-4x+4		$+$	0	$+$	

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\mathbb{R}\setminus\left\{2\right\}$.

Bài tập 2: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 3 và một điểm M di động trên cạnh AB sao cho $AM=x$. Dựng các tam giác đều AMN và MBP nằm bên trong hình vuông $ABCD$. Tìm các giá trị của x sao cho tổng diện tích của hai tam giác đều bé hơn một phần tư diện tích hình vuông $ABCD$.



Lời giải

Ta có $AM=x, 0<x<3$ nên $MB=3-x$.

Tính được $S_{AMN}=\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}; S_{MBP}=\dfrac{\left(3-x\right)^2\sqrt{3}}{4}$.

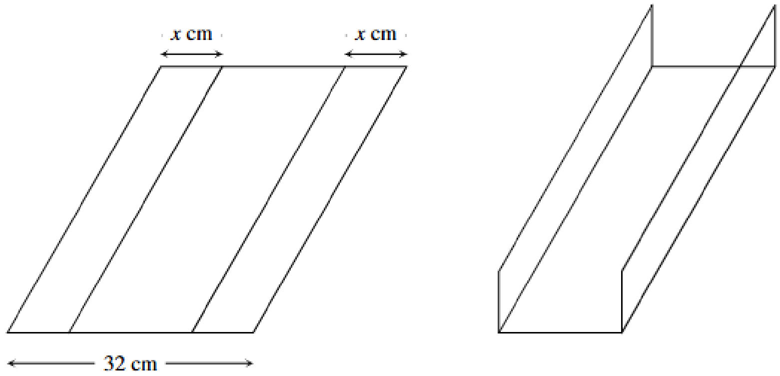
Do đó tổng diện tích của hai tam giác đều là $\dfrac{x^2\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\left(3-x\right)^2\sqrt{3}}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(2x^2-6x+9\right)$.

Mà $S_{ABCD} = 3^2 = 9$ nên theo giả thiết ta có bất phương trình $\frac{\sqrt{3}}{4}\left(2x^2 - 6x + 9\right) < \frac{9}{4}$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 9 - 3\sqrt{3} < 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2}$ (thỏa điều kiện).

Vậy $\frac{3-\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2} < x < \frac{3+\sqrt{6\sqrt{3}-9}}{2}$.

Bài tập 3: Một người muốn uốn tấm tôn phẳng hình chữ nhật có bề ngang 32 cm, thành một rãnh dẫn nước bằng cách chia tấm tôn đó thành ba phần rồi gấp hai bên lại theo một góc vuông như hình vẽ. Biết rằng diện tích mặt cắt ngang của rãnh nước phải lớn hơn hoặc bằng tổng $120\,\text{cm}^2$. Hỏi độ cao tối đa của rãnh dẫn nước là bao nhiêu cm?



Lời giải

Bề ngang còn lại của tấm tôn sau khi gập thành rãnh dẫn nước: $32 - 2x$ (cm).

Diện tích mặt cắt ngang rãnh dẫn nước: $S = x(32 - 2x) = -2x^2 + 32x$.

Theo giả thiết: $S \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x \geq 120 \Leftrightarrow -2x^2 + 32x - 120 \geq 0$.

Xét $-2x^2 + 32x - 120 = 0 \Leftrightarrow x = 6 \vee x = 10$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		6		10		$+\infty$
$-2x^2 + 30x - 120$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ta có: $-2x^2 + 32x - 120 \geq 0 \Leftrightarrow x \in [6;10]$.

Vậy rãnh dẫn nước chỉ đạt yêu cầu khi độ cao tối đa của nó là $10\,\text{cm}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các bất phương trình sau, với m là tham số, bất phương trình nào là bất phương trình bậc hai một ẩn?

A. $mx^2-2x+1\ge 0$.

B. $(m^2+1)x^2+3x+m\ge 0$.

C. $x^3+3x-1\le 0$.

D. $(x-1)x^2\ge 2$.

Lời giải

Bất phương trình $(m^2+1)x^2+3x+m\ge 0$ là bất phương trình bậc hai một ẩn

Có dạng $ax^2+bx+c\ge 0$ với $a=m^2+1\ne 0,\forall m\in\mathbb{R}$, $b=3$, $c=m$.

Câu 2: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x)\ge 0$ là

A. $S=[-2;3]$.

B. $S=(-2;3)$.

C. $S=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

D. $S=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình $f(x)\ge 0$ là $S=[-2;3]$.

Câu 3: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x)<0$ là

A. $S=\mathbb{R}$.

B. $S=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

C. $S=(0;+\infty)$.

D. $S=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình $f(x)<0$ là $S=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

Câu 4: Cho tam thức bậc hai $f(x)$ có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Nghiệm của bất phương trình $f(x)\le 0$ là

A. $x\in(0;+\infty)$. **B.** $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. **C.** $x\in\mathbb{R}$. **<u>D</u>.** $x\in\varnothing$.

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu, ta có nghiệm của bất phương trình $f(x)\le 0$ là $x\in\varnothing$.

Câu 5: Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+4x-4\ge 0$ là

A. $S=\mathbb{R}$. **B.** $S=\varnothing$. **<u>C</u>.** $S=\{2\}$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow -x^2+4x-4=0\Leftrightarrow x=2$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\{2\}$.

Câu 6: Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+4x+5\ge 0$ là

<u>A</u>. $S=[-1;5]$. **B.** $S=[-5;1]$.

C. $S=(-\infty;-1]\cup[5;+\infty)$. **D.** $S=(-\infty;-5]\cup[1;+\infty)$.

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow -x^2+4x+5=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\x=5\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-1;5]$.

Câu 7: Tập nghiệm của bất phương trình $4x^2+3x+2022>0$ là

<u>A</u>. $S=\mathbb{R}$. **B.** $S=\varnothing$. **C.** $S=\{0\}$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\{2022\}$.

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow 4x^2+3x+2022=0\Leftrightarrow x\in\varnothing$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\mathbb{R}$.

Câu 8: Tập nghiệm của bất phương trình $x^2+x-1\ge 2x^2-7$ là

A. $S=[-2;3]$. **B.** $S=\varnothing$.

C. $S=(-\infty;-2]\cup[3;+\infty)$. **D.** $S=\mathbb{R}\setminus\{-2;3\}$.

Lời giải

Bất phương trình $x^2+x-1\ge 2x^2-7 \Leftrightarrow x^2-x-6\le 0$

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-x-6=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=[-2;3]$.

Câu 9: Số nghiệm nguyên của bất phương trình $2x^2-3x-15\le 0$ là

A. 6. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 7.

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow 2x^2-3x-15=0\Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{129}}{4}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$\frac{3-\sqrt{129}}{4}$		$\frac{3+\sqrt{129}}{4}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu, tập nghiệm của bất phương trình đã cho là $S=\left[\dfrac{3-\sqrt{129}}{4};\dfrac{3+\sqrt{129}}{4}\right]$.

Vậy các nghiệm nguyên của bpt là $-2;-1;0;1;2;3$.

Câu 10: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $x^2-8x+7\ge 0$. Trong các tập hợp sau, tập nào **không** là tập con của S?

A. $(-\infty;0]$. **B.** $[6;+\infty)$. **C.** $[8;+\infty)$. **D.** $(-\infty;-1]$.

Lời giải

Đặt vế trái của bất phương trình là $f(x)$.

Ta có: $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow x^2-8x+7=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=7\end{array}\right.$.

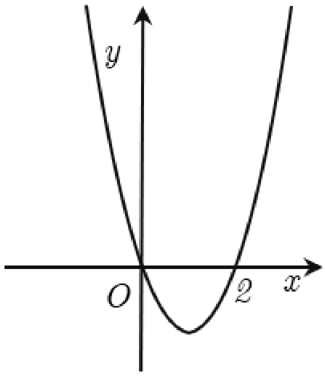
Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
$f\left(x\right)$		+	0	$-$	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu, ta có tập nghiệm của bpt đã cho là $S=\left(-\infty;1\right]\cup\left[7;+\infty\right)$.

Vậy $\left[6;+\infty\right)\not\subset S$.

Câu 11: Cho đồ thị của hàm số bậc hai $f\left(x\right)$ như hình vẽ:



Nghiệm của bất phương trình $f\left(x\right)>0$ là

A. $x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

B. $x\in\left(0;2\right)$.

C. $x\in\mathbb{R}$.

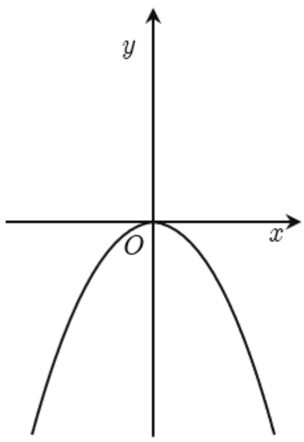
D. $x\in\left(2;+\infty\right)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $f\left(x\right)$ như hình vẽ ta thấy phần đồ thị nằm phía trên trục hoành khi $x<0$ hay $x>2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình $f\left(x\right)>0$ là $x\in\left(-\infty;0\right)\cup\left(2;+\infty\right)$.

Câu 12: Cho đồ thị của hàm số bậc hai $f\left(x\right)$ như hình vẽ:



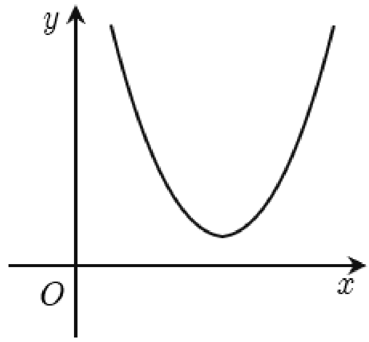
Nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $x=0$. **B.** $x \in (0;2)$. **C.** $x \in \mathbb{R}$. **D.** $x \in (2;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ ta thấy đồ thị nằm phía dưới trục hoành và đi qua điểm $O(0;0)$. Vì thế, nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $x=0$.

Câu 13: Cho đồ thị của hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ:



Nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là

A. $x=0$. **B.** $x \in (0;2)$. **C.** $x \in \mathbb{R}$. **D.** $x \in (2;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số bậc hai $f(x)$ như hình vẽ ta thấy đồ thị nằm hoàn toàn phía trên trục hoành. Do đó, nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $x \in \mathbb{R}$.

Câu 14: Một quả bóng được ném thẳng lên cao từ độ cao 1,5*m* so với mặt đất với vận tốc 10 *m/s*. Độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) sau *t* giây được xác định bởi hàm số $h(t) = -3,5t^2 + 7t + 1,5$. Khoảng thời gian bóng ở độ cao trên 4 *m* là (làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân)

A. Từ $0,37s$ đến $1,43s$. **B.** Từ $0,47s$ đến $1,53s$.
C. Từ $0,77s$ đến $1,77s$. **D.** Từ $0,57s$ đến $1,73s$.

Lời giải

Khi quả bóng ở độ cao trên 4m nghĩa là :

$$h(t) > 4 \Leftrightarrow -3,5t^2 + 7t + 1,5 > 4 \Leftrightarrow -3,5t^2 + 7t - 2,5 > 0 \Leftrightarrow 0,47 \approx \frac{7-\sqrt{14}}{7} < t < \frac{7+\sqrt{14}}{4} \approx 1,53$$

Khoảng thời gian bóng ở độ cao trên 4 *m* là từ $0,47s$ đến $1,53s$.

Câu 15: Tổng chi phí T (đơn vị : nghìn đồng) để sản xuất Q sản phẩm được cho bởi biểu thức $T = Q^2 + 20Q + 3600$; giá bán của một sản phẩm là 150 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong khoảng nào để đảm bảo có lãi (giả thiết các sản phẩm được bán hết)

A. $(50;70)$. **B.** $(40;90)$. **C.** $(55;90)$. **D.** $(40;100)$.

Lời giải

Tổng lợi nhuận là $150Q-\left(Q^2+20Q+3600\right)=-Q^2+130Q-3600$

Để có lãi thì $-Q^2+130Q-3600>0 \Leftrightarrow 40<Q<90$.

Câu 16: Gọi S là tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+5x-4\le 0$. Trong các tập hợp sau đây, tập nào **không** là tập con của S ?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(4;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1]$. **D.** $[1;+\infty)$.

Lời giải

Ta có $-x^2+5x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu vế trái của bất phương trình

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
VT		$-$	0	$+$	0	$-$	

Suy ra $S=(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$

Câu 17: Cho hàm số $f(x)=mx^2-4x-1$, với m là tham số. Có bao nhiêu số nguyên của $m\in(-20;23)$ để $f(x)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$?

A. 15. **B.** 10. **C.** 8. **D.** 11.

Lời giải

Trường hợp 1: Với $m=0$ thì khi đó: $f(x)=-4x-1<0 \Leftrightarrow x>-\frac{1}{4}$.

Vậy $m=0$ không thỏa yêu cầu bài toán.

Trường hợp 2: Với $m\ne 0$ thì $f(x)<0, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ \Delta'<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<0 \\ 4+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow m<-4.$

Kết hợp với số nguyên $m\in(-20;\,23)$ suy ra $m\in\{-19;-18;...;-5\}$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 18: Nghiệm của bất phương trình $\left(x^2+x-6\right)\sqrt{2x^2-1}<0$ là

A. $\left(1;\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup(2;+\infty)$. **B.** $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

C. $\left(-3;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$. **D.** $(-\infty;-5]\cup\left[5;\frac{17}{5}\right]\cup\{3\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định $2x^2-1\ge 0$

Với $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ không thỏa mãn bất phương trình.

Với $x<-\frac{\sqrt{2}}{2}\vee x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ thì $\sqrt{2x^2-1}>0$

Bất phương trình tương đương: $x^2+x-6<0\Leftrightarrow -3<x<2$.

Kết hợp điều kiện ta được: $S=\left(-3;-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{2}}{2};2\right)$.

Câu 19: Biết tập nghiệm của bất phương trình $\frac{x^2-2x-3}{3x^2-x+2}<0$ là khoảng $(a;b)$ giá trị biểu thức $a+b$ bằng.

A. -5. **B.** -1. **C.** 5. **<u>D</u>.** 2.

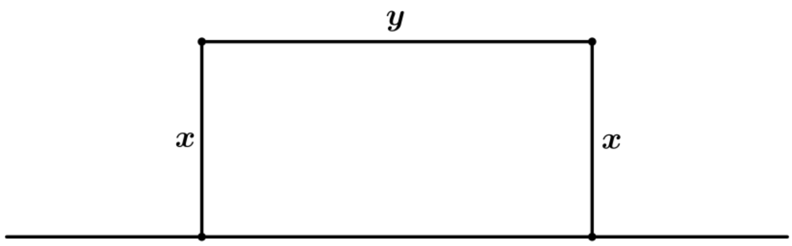
Lời giải

Đặt $f(x)=3x^2-x+2,\ f(x)$ có $\begin{cases}\Delta=1-24=-23<0\\ a=3>0\end{cases}\Rightarrow f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\frac{x^2-2x-3}{3x^2-x+2}<0\Leftrightarrow x^2-2x-3<0\Leftrightarrow -1<x<3\Leftrightarrow x\in(-1;3)\Rightarrow a=-1,b=3$.

Vậy $a+b=2$.

Câu 20: Thầy Huy có $45m$ lưới muốn rào một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau, biết rằng một cạnh là tường, Thầy Huy chỉ cần rào 3 cạnh còn lại của hình chữ nhật để làm vườn. Có bao nhiêu giá trị nguyên của x (như hình vẽ) để diện tích mảnh vườn không bé hơn $100m^2$?



A. 19. **<u>B</u>.** 18. **C.** 20. **D.** 21.

Lời giải

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật có độ dài là x,y (như hình vẽ); $0<x,y<45$.

Ta có $2x+y=45\Rightarrow y=45-2x$.

Diện tích hình chữ nhật là

$$S=xy=x(45-2x)=-2x^2+45x\ge 100\Leftrightarrow -2x^2+45x-100\ge 0\Leftrightarrow \frac{5}{2}\le x\le 20.$$

Khi đó: $x\in\{3;4;...;20\}$.

Câu 21: Cho hàm số $y=mx^2-3(m+2)x+2m+1$ (m là tham số). Các giá trị của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B sao cho gốc tọa độ O nằm giữa A và B là:

A. $m<0$. **B.** $m>-\frac{1}{2}$. **<u>C</u>.** $-\frac{1}{2}<m<0$. **D.** $m\le-\frac{1}{2}$ hoặc $m\ge 0$

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $mx^2-3(m+2)x+2m+1=0$

Điều kiện để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A,B sao cho gốc tọa độ O nằm giữa A và B là $x_A.x_B<0 \Leftrightarrow \dfrac{2m+1}{m}<0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2}<m<0$.

Câu 22: Phương trình $(m+2)x^2-2mx+m^2+6m=0$ có đúng hai nghiệm x_1,x_2 thoả $2<x_1<x_2$. Hãy chọn kết quả đúng trong các kết quả sau

A. $-3<m<-2$. **B.** $m>1$. **C.** $-5<m<-3$. **D.** $-2<m<1$.

Lời giải

Để phương trình $(m+2)x^2-2mx+m^2+6m=0$ có đúng hai nghiệm x_1,x_2 thoả $2<x_1<x_2$.

$\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta'>0\\ m+2\neq 0\\ x_2>x_1>2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2-(m+2)(m^2+6m)>0\\ m\neq -2\\ (x_1-2)+(x_2-2)>0\\ (x_1-2)(x_2-2)>0\end{cases}$. Theo Vi-et ta có $\begin{cases}x_1+x_2=\dfrac{2m}{m+2}\\ x_1.x_2=\dfrac{m^2+6m}{m+2}\end{cases}$.

$\Rightarrow \begin{cases}m(-m^2-7m-12)>0\\ m\neq -2\\ \dfrac{2m}{m+2}-4>0\\ \dfrac{m^2+6m}{m+2}-2.\dfrac{2m}{m+2}+4>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}-3<m<0\\ m<-4\end{array}\right.\\ m\neq -2\\ -4<m<-2\\ m>-4\end{cases} \Leftrightarrow -3<m<-2$.

Câu 23: Cho hàm số $f(x)=-x^2-2(m-1)x+2m-1$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $f(x)>0$ với $\forall x\in(0;1)$.

A. $m>1$. **B.** $m<\dfrac{1}{2}$. **C.** $m\geq 1$. **D.** $m\geq\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $f(x)>0$, $\forall x\in(0;1) \Leftrightarrow -x^2-2(m-1)x+2m-1>0$, $\forall x\in(0;1)$.

$\Leftrightarrow -2m(x-1)>x^2-2x+1$, $\forall x\in(0;1)$ $(*)$.

Vì $x\in(0;1)\Rightarrow x-1<0$ nên $(*)\Leftrightarrow -2m<\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}=x-1=g(x)$, $\forall x\in(0;1)$.

$\Leftrightarrow -2m\leq g(0)=-1 \Leftrightarrow m\geq\dfrac{1}{2}$.

Câu 24: Cho bất phương trình $x^2-6x+\sqrt{-x^2+6x-8}+m-1\geq 0$. Xác định m để bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[2;4]$.

A. $m\geq\dfrac{35}{4}$. **B.** $m\leq 9$. **C.** $m\leq\dfrac{35}{4}$. **D.** $m\geq 9$.

Lời giải

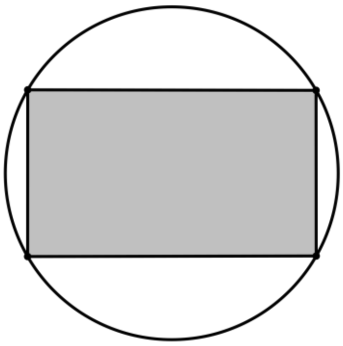
Điều kiện: $-x^2+6x-8\ge 0 \Leftrightarrow x\in[2;4]$.

Đặt $t=\sqrt{-x^2+6x-8}=\sqrt{1-(x-3)^2}$ $(0\le t\le 1)$ suy ra $x^2-6x=-8-t^2$.

Ta có bất phương trình $-8-t^2+t+m-1\ge 0 \Leftrightarrow m\ge t^2-t+9$ (*).

Xét $f(t)=t^2-t+9$ trên $[0;1]$. Để bất phương trình đã cho nghiệm đúng $\forall x\in[2;4]$ thì bất phương trình $(*)$ nghiệm đúng với mọi $t\in[0;1] \Leftrightarrow m\ge 9$.

Câu 25: Người ta muốn thiết kế một vườn hoa hình chữ nhật nội tiếp trong một mảnh đất hình tròn đường kính bằng 4 m (như hình vẽ). Diện tích S trồng hoa lớn nhất bằng bao nhiêu?



A. $S=8\,\text{m}^2$. **B.** $S=64\,\text{m}^2$. **C.** $S=4\,\text{m}^2$. **D.** $S=16\,\text{m}^2$.

Lời giải

Gọi độ dài một cạnh hình chữ nhật cần tìm là x ($m, 0<x<4$).

Ta có, độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là: $\sqrt{16-x^2}$ (m).

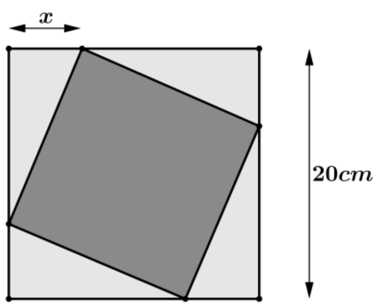
Do đó diện tích vườn hoa hình chữ nhật là $S=x\sqrt{16-x^2}$ (m^2).

Khi đó: $S^2=x^2.(16-x^2)=64-(x^4-16x^2+64)=64-(x^2-8)^2\le 64$ suy ra $S\le 8$.

Vậy diện tích vườn hoa lớn nhất là $8m^2$ khi và chỉ khi $x^2=8\Rightarrow x=2\sqrt{2}\,(m)$.

Khi đó các cạnh của hình chữ nhật đều có độ dài là $2\sqrt{2}\,m$, tức hình chữ nhật là hình vuông cạnh $2\sqrt{2}$ m.

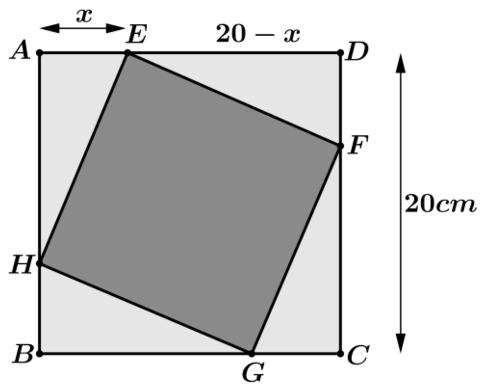
Câu 26: Một viên gạch hình vuông có cạnh thay đổi được đặt nội tiếp trong một hình vuông có cạnh bằng 20 cm, tạo thành bốn tam giác xung quanh như hình vẽ. Tìm tất cả các giá trị của x để diện tích viên gạch không vượt quá $208\,\text{cm}^2$.



A. $8 \le x \le 12$. **B.** $6 \le x \le 14$. **C.** $12 \le x \le 14$. **D.** $12 \le x \le 18$.

Lời giải

Gọi E, F, G, H là bốn đỉnh của viên gạch hình vuông nội tiếp trong hình vuông $ABCD$ có cạnh 20 cm như hình vẽ:



Ta có cạnh viên gạch là $EF = \sqrt{x^2 + (20-x)^2} = \sqrt{2x^2 - 40x + 400}$.

Diện tích của viên gạch là: $EF^2 = 2x^2 - 40x + 400$.

Theo đề ta có diện tích viên gạch không vượt quá 208 cm^2.

$\Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 400 \le 208 \Leftrightarrow 2x^2 - 40x + 192 \le 0 \Leftrightarrow 8 \le x \le 12$.

Câu 27: Một quả bóng được ném qua lưới với chiều cao 3 mét theo quỹ đạo được mô tả bằng hàm số $y = f(x) = -0,2x^2 + 2x + 1,5$ trong đó y (tính bằng mét) là chiều cao của quả bóng so với mặt đất, x được (tính bằng mét) là khoảng cách từ nơi đứng ném đến lưới theo phương ngang. Hỏi người đó phải đứng gần lưới nhất với khoảng cách là bao nhiêu để bóng bay cao hơn lưới (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

A. 9,18 mét. **B.** 1 mét. **C.** 0,82 mét. **D.** 9 mét.

Lời giải

Theo yêu cầu bài toán thì chiều cao của quả bóng phải cao hơn 3 mét để có thể bay cao hơn lưới. Khi đó ta được bất phương trình $-0,2x^2 + 2x + 1,5 > 3 \quad (*)$.

Giải bất phương trình $(*)$ ta được $\dfrac{10-\sqrt{70}}{2} \approx 0,82 < x < \dfrac{10+\sqrt{70}}{2} \approx 9,18$.

Vậy người đó phải đứng gần lưới nhất với khoảng cách xấp xỉ 0,82 mét.

Câu 28: Một của hàng bán gạo loại A ước tính lợi nhuận một ngày được tính theo công thức $t(x) = -10x^2 + 250x - 500$ trong đó t được tính theo đơn vị là nghìn đồng là lợi nhuận một ngày, x được tính theo đơn vị là nghìn đồng là giá bán 1kg gạo loại A. Hỏi cửa hàng phải bán với giá bao nhiêu để lợi nhuận một ngày khi bán loại gạo đó trên 1000000 đồng.

A. Trên 10000 đồng một kg.

B. Trong khoảng từ 10000 đến 15000 đồng một kg.

C. Trên 15000 đồng một kg.

D. Dưới 10000 đồng một kg.

Lời giải

Theo yêu cầu bài toán thì lợi nhuận một ngày khi bán loại gạo đó trên 1000000 đồng.

Nên ta được bất phương trình: $-10x^2+250x-500>1000 \quad (*)$

(lưu ý x được tính theo đơn vị là nghìn đồng)

Giải bất phương trình $(*)$ ta được $10<x<15$.

Vậy cửa hàng phải bán với giá trong khoảng từ 10000 đến 15000 đồng một kg.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Nhân viên công ty thiết kế A ước tính lợi nhuận y (đồng) khi kinh doanh x mặt hàng bàn ghế được tính bởi công thức $f(x)=-x^2+375x-33750$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tam thức $f(x)=-x^2+375x-33750$ có biệt thức $\Delta>0$.

b) Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm $x=150$ và $x=225$.

c) Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		150		225		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) Công ty có lãi khi bán từ 150 sản phẩm đến 225 sản phẩm.

Lời giải

a) Đúng: $\Delta=375^2-4.(-1).(-33750)=5625>0$.

b) Đúng: $f(x)=0 \Leftrightarrow -x^2+375x-33750=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=150 \\ x=225 \end{array}\right.$.

c) Sai: Bảng xét dấu của $f(x)$ là

x	$-\infty$		150		225		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d) Sai: Công ty có lãi khi $f(x)>0 \Leftrightarrow 150<x<225$.

Vì $x\in\mathbb{Z} \Rightarrow 151\le x\le 224$.

Vậy công ty có lãi khi bán từ 151 sản phẩm đến 224 sản phẩm.

Câu 2: Cho biểu thức $f(x)=\dfrac{-10}{-x^2+2x+3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $-x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

b) Với $x \in (-1;3)$ thì $-x^2+2x+3>0$.

c) Với $x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$ thì $-x^2+2x+3<0$.

d) Với $x \in (-1;3)$ thì $f(x)>0$.

Lời giải

Ta có: $-x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Xét dấu của $-x^2+2x+3$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$-x^2+2x-3$		-	0	+	0	-	
$f(x)$		+	||	-	||	+	

a) Đúng: Ta có: $-x^2+2x+3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

b) Đúng: Qua bảng biến thiên ta có $-x^2+2x+3>0$ với $x \in (-1;3)$.

c) Đúng: Qua bảng biến thiên ta có $-x^2+2x+3<0$ với $x \in (-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$

d) Qua bảng biến thiên ta có $f(x)>0$ với $x \in (-1;3)$

Câu 3: Cho tam thức bậc hai $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+m}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m=2$ thì tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

b) Khi $\begin{cases} m \neq -1 \\ m \neq -4 \end{cases}$, $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

c) Khi $m=2$ thì tập nghiệm của bất phương trình $f(x)>0$ là $(1;2)$.

d) Khi $m=-1$ thì tập nghiệm của bất phương trình $f(x)\geq 0$ là $(-\infty;-1)\cup[2;+\infty)$

Lời giải

a) Sai: Khi $m=2$ thì hàm số luôn xác định trên $\mathbb{R}$

b) Đúng: $f(x)=0 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Thử lại $x=1; x=2$ ta thấy $x^2+m\neq 0$ với mọi $\begin{cases} m\neq -1 \\ m\neq -4 \end{cases}$

c) Sai: Khi $m=2$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2}$

$f(x)>0 \Leftrightarrow x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<1 \end{array}\right.$

d) Đúng: Khi $m=-1$ thì $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$. Khi đó bảng xét dấu của $f(x)$ như sau

x	$-\infty$		-1		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	||	$+$	
$f(x)$		$+$	||	$-$	||	$-$	0	$+$	

Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x\geq 2 \end{array}\right.$

Câu 4: Cho $f(x)=\left(-x^2+3x\right)\left(2x^2+1\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

b) $2x^2+1>0, \forall x\in\mathbb{R}$

c) $f(x)>0, \forall x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$

d) $f(x)<0, \forall x\in(0;3)$

Lời giải

a) Đúng: Xét $f(x)=0 \Leftrightarrow \left(-x^2+3x\right)\left(2x^2+1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -x^2+3x=0 \\ 2x^2+1=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$-x^2+3x$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$2x^2+1$		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

b) Đúng: Vì $x^2\geq 0 \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow 2x^2+1\geq 1>0 \forall x\in\mathbb{R}$

c) Sai: Từ bảng xét dấu ta thấy $f(x)>0 \Leftrightarrow x\in(0;3)$

d) Sai: $f(x)<0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;0)\cup(3;+\infty)$

Câu 5: Cho $f(x)=x^2-2(m-1)x+m^2-4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu $m=1$ thì $f(x)$ không phải là tam thức bậc hai.

b) Khi $m=3$ thì bất phương trình $f(x)\le 0$ có tập nghiệm chứa hữu hạn giá trị nguyên.

c) Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm trái dấu với $\forall m\in(a;b)$. Khi đó $a+b=0$

d) $f(x)$ nhận giá trị không dương trên khoảng $[a;b]$ có $b-a=5$ khi $m>1$.

Lời giải

a) Sai: Nếu $m=1$ thì $f(x)=x^2-3$ là tam thức bậc hai.

b) Sai: Khi: $m=3 \Rightarrow f(x)=x^2-4x+5$ khi đó $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x^2-4x+5\le 0, VN$.

c) Đúng: Phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow m^2-4<0 \Leftrightarrow -2<m<2$.

d) Sai: $f(x)\le 0 \Leftrightarrow x\in[x_1;x_2]$ với $x_1;x_2$ là 2 nghiệm của phương trình $f(x)=0$.

$f(x)$ nhận giá trị không dương trên khoảng $[a;b]$

$\Leftrightarrow [a;b]=[x_1;x_2] \Rightarrow |x_2-x_1|=5 \Leftrightarrow 4(m-1)^2-4(m^2-4)=25 \Leftrightarrow -8m+7=0 \Leftrightarrow m=\frac{7}{8}$.

Câu 6: Một công ty Du lịch sinh thái thông báo giá tiền khi tham gia chuyến tham quan của một nhóm khách du lịch được cho như sau:

Số khách	**20 khách đầu tiên**	**từ khách thứ 21 trở đi**
Giá tiền	30 USD/người	Giảm 1 USD/người cho toàn bộ khách trong nhóm

Gọi x là số lượng khách từ người thứ 21 trở đi của nhóm. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số khách tham quan chuyến du lịch trên là $20-x$.

b) Giá vé của mỗi người là $30-x$.

c) Doanh thu của công ty được tính bởi công thức $-x^2+10x+600$.

d) Biết chi phí của chuyến tham quan mà công ty phải chịu là 400 USD. Khi đó, nếu số khách từ người thứ 21 trở lên của nhóm nhiều hơn 20 người thì công ty có lãi.

Lời giải

a) Sai: Số khách tham quan chuyến du lịch trên là $20+x$

b) Đúng: Vì cứ có thêm 1 người thì giá vé sẽ giảm 1 USD/người cho toàn bộ khách trong nhóm nên giá vé của mỗi người là $30-x$.

c) Đúng: Doanh thu của công ty là $(20+x)(30-x)=-x^2+10x+600$.

d) Sai: Lợi nhuận của công ty là $y=-x^2+10x+600-400=-x^2+10x+200$.

Công ty có lãi khi $y>0 \Leftrightarrow -x^2+10x+200>0 \Leftrightarrow -10<x<20$.

Vì $x\geq 0$ nên $0\leq x<20$.

Do đó, nếu số khách từ người thứ 21 trở lên của nhóm ít hơn 20 người thì công ty mới có lãi.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tổng chi phí P (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm được biểu diễn bởi biểu thức $P=x^2+30x+3300$. Giá bán một sản phẩm là 170 nghìn đồng. Số sản phẩm được sản xuất trong $[a;b]$ để đảm bảo nhà sản xuất không bị lỗ (giả sử các sản phẩm được bán hết). Tính $a+b$

Lời giải

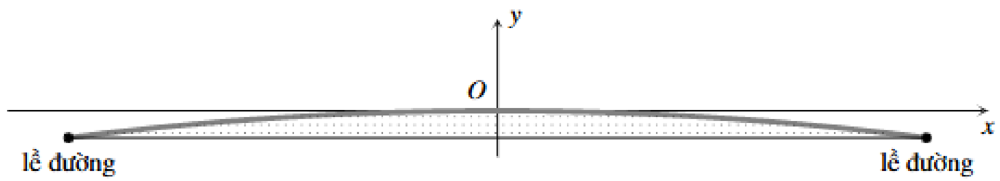
Khi bán hết x sản phẩm thì số tiền thu được là: $170x$ (nghìn đồng).
Điều kiện để nhà sản xuất không bị lỗ là: $170x\geq x^2+30x+3300 \Leftrightarrow x^2-140x+3300\leq 0$.
Xét $x^2-140x+3300=0 \Rightarrow x=30 \vee x=110$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		30		110		$+\infty$
$x^2-140x+3300$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ta có: $x^2-140x+3300\leq 0 \Leftrightarrow x\in[30;110]$.
Vậy nếu nhà sản xuất làm ra từ 30 đến 110 sản phẩm thì họ sẽ không bị lỗ.
$\Rightarrow \begin{cases} a=30 \\ b=110 \end{cases} \Rightarrow a+b=140$.

Câu 2: Mặt cắt ngang của mặt đường thường có dạng hình parabol để nước mưa dễ dàng thoát sang hai bên. Mặt cắt ngang của một con đường được mô tả bằng hàm số $y=-0{,}006x^2$ với gốc tọa độ đặt tại tim đường và đơn vị đo là mét như hình bên dưới.



Với chiều rộng của đường như thế nào thì tim đường cao hơn lề đường không quá 15 cm?

Lời giải

Gọi chiều rộng của đường là $2a$ thì tọa độ của lề đường là $(a;y(a))$ và $(-a;y(-a))$

Do parabol đối xứng qua trục Oy nên $y(a)=y(-a)$

Độ cao chênh lệch giữa tim đường và lề đường là $|y(0)-y(a)|$

Theo đề bài độ cao này không quá $0{,}15$ m, tức là $|y(0)-y(a)|\leq 0{,}15 \Leftrightarrow y(0)-y(a)\leq 0{,}15$

$\Leftrightarrow 0-(-0{,}006a^2)\leq 0{,}15 \Leftrightarrow 0{,}006a^2\leq 0{,}15 \Leftrightarrow -5\leq a\leq 5$.

Vì a là chiều rộng một bên của đường nên $a>0$ suy ra $0<a\leq 5$
Khi đó chiều rộng của đường không quá 10 m.

Câu 3: Độ cao (tính bằng mét) của một quả bóng (trong môn bóng đá) khi cầu thủ sút phạt so với xà ngang của khung thành khi bóng di chuyển được x mét theo phương ngang được mô phỏng bằng hàm số $k(x)=-0,2x^2+3x-3$. Biết tằng $x\in(a;b)$ thì bóng nằm cao hơn so với xà ngang của khung thành. Tính $b-a$ (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có $k(x)=-0,2x^2+3x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{15-\sqrt{165}}{2}\approx 1,08\\ x=\dfrac{15+\sqrt{165}}{2}\approx 13,92\end{array}\right.$

Ta có bảng xét dấu của $k(x)$

x	$-\infty$		1,08		13,92		$+\infty$
$k(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy bóng nằm cao hơn so với xà ngang của khung thành khi $k(x)>0$ tức là

$x\in(1,08;13,92)\Rightarrow\begin{cases}a=1,08\\ b=13,92\end{cases}\Rightarrow b-a=13,92-1,08\approx 12,8$.

Câu 4: Một khung dây thép hình chữ nhật với chiều dài 30 cm và chiều rộng 20 cm được uốn lại thành hình chữ nhật mới với kích thước $(30-x)$ cm và $(20+x)$cm. Biết rằng $x\in(a;b)$ thì diện tích của khung sau khi uốn tăng lên. Tính $a+b$.

Lời giải

Ta có điều kiện: $-20<x<30$

Diện tích hình chữ nhật lúc sau là: $S=(30-x).(20+x)=-x^2+10x+600\text{ cm}^2$.

Diện tích hình chữ nhật lúc đầu là 600 cm^2

Đặt $f(x)=-x^2+10x+600-600=-x^2+10x$.

Khi đó: $f(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=10\end{array}\right.$ nên ta có bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$		0		10		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Diện tích của khung sau khi uốn tăng lên khi $f(x)>0\Leftrightarrow x\in(0;10)\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b=10\end{cases}\Rightarrow a+b=10$.

Câu 5: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đầy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Doanh nghiệp phải định giá bán mới là x (đồng) để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ tăng. Biết rằng $x\in[a;b]$ thì lợi nhuận sẽ tăng lên. Tính $a+b$.

Lời giải

Gọi x đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá $(0\le x\le 4)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31-x-27=4-x$.

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600+200x$.

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu dược trong một năm là:

$$f\left(x\right)=\left(4-x\right)\left(600+200x\right)=-200x^2+200x+2400.$$

Xét hàm số $f\left(x\right)=-200x^2+200x+2400$ trên đoạn [0;4]

Tập xác định: $D=R$. Đỉnh $I\left(\frac{1}{2};2450\right)$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		4		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2400	$\nearrow$	2450	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy lợi nhuận tăng lên khi $x\in\left[0;\frac{1}{2}\right]\Rightarrow\begin{cases}a=0\\b=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow a+b=0.5$.

Câu 6: Sức mạnh động cơ (tính bằng đơn vị mã lực) sinh ra từ máy của một canô ở tốc độ quay r vòng/ phút được xác định bởi hàm số: $p\left(r\right)=-0.000025\text{r}^2+0.2r-240$. Vậy sức mạnh của động cơ này tăng lên khi tốc độ quay $r\le 400a$. Tính $a+200$.

Lời giải

Ta có: $p\left(r\right)=-0.000025\text{r}^2+0.2r-240$ là hàm số bậc hai

Tập xác định: $D=R$ **có** đỉnh $I\left(4000;160\right)$ và bảng biến thiên:

r	$-\infty$		4000		$+\infty$
$p(r)$	$-\infty$	$\nearrow$	160	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy sức mạnh của động cơ ltăng lên khi:

$$r\le 4000\Rightarrow 400a=4000\Leftrightarrow a=10\Rightarrow a+200=210$$

-----------------HẾT-----------------

BÀI 04 PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC 2

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

Ta tiến hành giải phương trình theo các bước sau:

- **Bước 1:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.
- **Bước 2:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

Hoặc ta có thể xét: $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2+bx+c\ge 0 \\ dx^2+ex+f\ge 0 \\ ax^2+bx+c=dx^2+ex+f \end{cases}$

2 Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

Ta tiến hành giải phương trình theo các bước sau:

- **Bước 1:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.
- **Bước 2:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

Hoặc ta có thể xét: $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e \Leftrightarrow \begin{cases} dx+e\ge 0 \\ ax^2+bx+c=(dx+e)^2 \end{cases}$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Giải phương trình quy về phương trình bậc hai

Phương pháp: Ta thực hiện như sau:

Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

- **Bước 1:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc hai hoặc bậc nhất.
- **Bước 2:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

Hoặc $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}\Leftrightarrow\begin{cases}ax^2+bx+c\ge 0\\ dx^2+ex+f\ge 0\\ ax^2+bx+c=dx^2+ex+f\end{cases}$

Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

- **Bước 1:** Bình phương hai vế, rút gọn rồi giải phương trình bậc hai hoặc bậc nhất.
- **Bước 2:** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

Hoặc $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e\Leftrightarrow\begin{cases}dx+e\ge 0\\ ax^2+bx+c=(dx+e)^2\end{cases}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{3x^2+6x+3}=\sqrt{2x^2-5x+3}$

b) $\sqrt{2x^2-3x+1}=\sqrt{x^2+2x-3}$

c) $\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{x^2-4x+3}$

d) $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{1-x}$

e) $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{1+x}$

f) $\sqrt{3x^2-4x-1}=\sqrt{2x^2-4x+3}$

g) $\sqrt{2x^2-4x-2}=\sqrt{x^2-x-2}$

h) $\sqrt{3x^2-6x+1}=\sqrt{-2x^2-9x+1}$

i) $\sqrt{2x^2-3x-5}=\sqrt{x^2-7}$

j) $\sqrt{3x^2+6x+3}=\sqrt{2x^2-5x+3}$

Lời giải

a) Ta có : $\sqrt{3x^2+6x+3}=\sqrt{2x^2-5x+3}\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+6x+3\ge 0\\ 2x^2-5x+3\ge 0\\ 3x^2+6x+3=2x^2-5x+3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\\ x^2+11x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le 1\\ x\ge\dfrac{3}{2}\end{array}\right.\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-11\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=-11\end{array}\right..$$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S=\{0;-11\}$

b) $\sqrt{2x^2-3x+1}=\sqrt{x^2+2x-3} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2-3x+1\ge 0 \\ x^2+2x-3\ge 0 \\ 2x^2-3x+1=x^2+2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le \frac{1}{2} \\ x\ge 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x\le -3 \\ x\ge 1 \end{array}\right. \\ x^2-5x+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le -3 \\ x\ge 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S=\{1;4\}$.

c) Ta có: $\sqrt{3+2x-x^2}=\sqrt{x^2-4x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2x-x^2\ge 0 \\ x^2-4x+3\ge 0 \\ 3+2x-x^2=x^2-4x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \\ 2x^2-6x=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1\le x\le 3 \\ \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge 3 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S=\{0;3\}$

d) Ta có $\sqrt{x^2-4x+3}=\sqrt{1-x}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x\ge 0 \\ x^2-4x+3=1-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ x^2-3x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

e) Ta có: $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+x\ge 0 \\ x^2+3x-2=1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

f) $\sqrt{3x^2-4x-1}=\sqrt{2x^2-4x+3} \Rightarrow 3x^2-4x-1=2x^2-4x+3$

$\Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình đã cho, ta thấy cả hai đều thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-2;2\}$.

g) Bình phương hai vế của phương trình ta được: $2x^2-4x-2=x^2-x-2$

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x=0$

Từ đó tìm được $x=0$ hoặc $x=3$

Thay lần lượt hai giá trị này vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=3$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$.

h) Bình phương hai vế của phương trình ta được $3x^2-6x+1=-2x^2-9x+1$.

Sau khi thu gọn ta được $5x^2+3x=0$.

Từ đó tìm được $x=0$ hoặc $x=-\frac{3}{5}$.

Thay lần lượt hai giá trị này vào phương trình đã cho, ta thấy $x=0$ và $x=-\frac{3}{5}$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{0;-\frac{3}{5}\right\}$

i) Bình phương hai vế của phương trình ta được $2x^2-3x-5=x^2-7$.

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x+2=0$.

Từ đó tìm được $x=1$ hoặc $x=2$.

Thay lần lượt giá trị này vào phương trình đã cho, ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\varnothing$.

j) Ta có : $\sqrt{3x^2+6x+3}=\sqrt{2x^2-5x+3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+6x+3\ge 0 \\ 2x^2-5x+3\ge 0 \\ 3x^2+6x+3=2x^2-5x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge \frac{3}{2} \end{array}\right. \\ x^2+11x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\le 1 \\ x\ge \frac{3}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-11 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-11 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có tập nghiệm: $S=\{0;-11\}$

Bài tập 2: Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{-x^2+9x-5}=x$

b) $\sqrt{3x^2+6x+3}=2x+1$

c) $\sqrt{2x^2-3x+1}=x-1$

d) $\sqrt{3-3x-x^2}=x$

e) $\sqrt{3x^2-4x+4}=3x+2$

f) $\sqrt{x-1}=x-3$

g) $\sqrt{2x-3}=x-3$

h) $x-\sqrt{2x+7}=-4$

i) $\sqrt{2x^2-5x-9}=x-1$

j) $\sqrt{2x^2+x+3}=1-x$

k) $\sqrt{3x^2-13x+14}=x-3$

l) $\sqrt{-x^2+9x-5}=x$

Lời giải

a) Ta có $\sqrt{-x^2+9x-5}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ -x^2+9x-5=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x^2-9x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{41}}{4}$.

Vậy phương trình trên có 2 nghiệm.

b) Ta có : $\sqrt{3x^2+6x+3}=2x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1\ge 0 \\ 3x^2+6x+3=4x^2+4x+1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{3}\ l \\ x = 1 + \sqrt{3}\ n \end{array}\right. \end{cases}.$$

c) $\sqrt{2x^2 - 3x + 1} = x - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 \ge 0 \\ 2x^2 - 3x + 1 = (x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ x^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 1.$

d) Ta có $\sqrt{3 - 3x - x^2} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 3 - 3x - x^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ 2x^2 + 3x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{-3 + \sqrt{33}}{4}$

Vậy phương trình trên chỉ có một nghiệm.

e) Ta có: $\sqrt{3x^2 - 4x + 4} = 3x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 2 \ge 0 \\ 3x^2 - 4x + 4 = (3x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{2}{3} \\ 6x^2 + 16x = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -\dfrac{2}{3} \\ x = 0, x = -\dfrac{8}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0\}$.

f) $\sqrt{x-1} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ x - 1 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x - 1 = x^2 - 6x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 5$$

Vậy phương trình có nghiệm $x = 5$.

g) Ta có: $\sqrt{2x-3} = x - 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 3 \ge 0 \\ 2x - 3 = (x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ 2x - 3 = x^2 - 6x + 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x^2 - 8x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = 6$. Vậy $S = \{6\}$.

h) Phương trình $x - \sqrt{2x+7} = -4 \Leftrightarrow x + 4 = \sqrt{2x+7} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4 \ge 0 \\ (x+4)^2 = 2x + 7 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -4 \\ x^2 + 6x + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -3.$$

i) Bình phương hai vế của phương trình ta được: $2x^2 - 5x - 9 = x^2 - 2x + 1$.

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x-10=0$. Từ đó tìm được $x=-2$ hoặc $x=5$.
Thay lần lượt vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=5$ thỏa mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=5$.

j) Bình phương hai vế của phương trình ta được $2x^2+x+3=1-2x+x^2$
Sau khi thu gọn ta được $x^2+3x+2=0$. Từ đó tìm được $x=-1$ hoặc $x=-2$
Thay lần lượt vào phương trình đã cho, ta thấy $x=-1$ hoặc $x=-2$ thỏa mãn.
Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-1;-2\}$.

k) Bình phương hai vế của phương trình ta được $3x^2-13x+14=x^2-6x+9$.

Sau khi thu gọn ta được $2x^2-7x+5=0$. Từ đó tìm được $x=1$ hoặc $x=\frac{5}{2}$.

Thay lần lượt vào phương trình đã cho, ta thấy không có giá trị nào thỏa mãn.
Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\varnothing$.

l) Ta có $\sqrt{-x^2+9x-5}=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ -x^2+9x-5=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2x^2-9x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{9\pm\sqrt{41}}{4}$.

Vậy phương trình trên có 2 nghiệm.

Bài tập 3: Giải các phương trình sau:

a) $\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-3}=0$

b) $\left(x^2+5x+4\right)\sqrt{x+3}=0$

c) $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$

d) $2\sqrt{x+5}+1=x+\sqrt{x+5}$

e) $(x-1)\sqrt{5x+1}=x^2-1$

f) $(x-3)\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)=0$

g) $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$

h) $x^2-2x-8=4\sqrt{(4-x)(x+2)}$

i) $2\sqrt{x^2-8x}=x^2-8x-3$

j) $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$

Lời giải

a) Ta có: $\left(x^2-3x+2\right)\sqrt{x-3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2-3x+2=0 \\ x\ge 3 \end{cases} \\ x-3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right. \\ x\ge 3 \end{cases} \\ x=3 \end{array}\right. \Leftrightarrow x=3$.

b) Điều kiện: $x\ge -3$.

Ta có: $\left(x^2+5x+4\right)\sqrt{x+3}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+5x+4=0 \\ x+3=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1\,(N) \\ x=-4\,(L) \\ x=-3\,(N) \end{array}\right.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

c) Điều kiện: $10-x^2\ge 0 \Leftrightarrow -\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10}$. Khi đó: $(x+3)\sqrt{10-x^2}=x^2-x-12$

$\Leftrightarrow (x+3)\sqrt{10-x^2}=(x+3)(x-4) \Leftrightarrow (x+3)\left(\sqrt{10-x^2}-x+4\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ \sqrt{10-x^2}=x-4 \end{array}\right. \Rightarrow x=-3.$

Vì phương trình $\sqrt{10-x^2}=x-4$ vô nghiệm với mọi x thoả $-\sqrt{10}\le x\le\sqrt{10}$.

d) Phương trình $2\sqrt{x+5}+1=x+\sqrt{x+5}\Leftrightarrow\sqrt{x+5}=x-1\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x+5=x^2-2x+1\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x^2-3x-4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=4\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=4.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x=4\in(-2;10)$.

e) Điều kiện: $x\ge-\frac{1}{5}$.

Phương trình $(x-1)\sqrt{5x+1}=x^2-1\Leftrightarrow(x-1)\left(\sqrt{5x+1}-x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ \sqrt{5x+1}=x+1\ (*)\end{array}\right.$

Phương trình $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\ 5x+1=x^2+2x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\ x^2-3x=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-1\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\ x=3\end{array}\right.$

f) Điều kiện xác định: $4-x^2\ge 0\Leftrightarrow-2\le x\le 2$.

Ta có $(x-3)\left(\sqrt{4-x^2}-x\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x=3 & (L)\\ \sqrt{4-x^2}=x & (*)\end{array}\right.$.

Phương trình $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ 4-x^2=x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\ x=\pm\sqrt{2}\end{cases}\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$.

Vậy $S=\left\{\sqrt{2}\right\}$.

g) Điều kiện: $\begin{cases}3x+7\ge 0\\ x+1\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge-\frac{7}{3}\\ x\ge-1\end{cases}\Leftrightarrow x\ge-1$.

Ta có: $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2\Leftrightarrow\sqrt{3x+7}=\sqrt{x+1}+2$.

$\Leftrightarrow 3x+7=x+1+4+4\sqrt{x+1}\Leftrightarrow 4\sqrt{x+1}=2x+2\Leftrightarrow(x+1)-2\sqrt{x+1}=0$.

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=0\\ \sqrt{x+1}=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=3\end{array}\right.$ (nhận).

h) Đặt $t=\sqrt{-x^2+2x+8}\,(t\ge 0)$ khi đó phương trình trở thành: $-t^2=4t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=0\\ t=-4(L)\end{array}\right.$.

Với $t=0\Rightarrow\sqrt{-x^2+2x+8}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\ x=-2\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có hai nghiệm.

i) Đặt $t=\sqrt{x^2-8x}$, $t\ge 0$ thì phương trình trở thành $2t=t^2-3 \Leftrightarrow t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1\,(L) \\ t=3\,(N) \end{array}\right.$

Với $t=3 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-8x}=3 \Leftrightarrow x^2-8x-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=9 \\ x=-1 \end{array}\right.$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình bằng 8.

j) Ta có $(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6 \Leftrightarrow x^2+5x-2-3\sqrt{x^2+5x+2}=0$.

Đặt $t=\sqrt{x^2+5x+2}$ $(t\ge 0)$. Khi đó, phương trình trở thành: $t^2-4-3t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} t=-1 & (l) \\ t=4 & (n) \end{array}\right.$.

Với $t=4 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+5x+2}=4 \Leftrightarrow x^2+5x+2=16 \Leftrightarrow x^2+5x-14=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-7 \end{array}\right.$.

Bài tập 4: Người ta muốn thiết kế một vườn hoa hình chữ nhật nội tiếp trong một miếng đất hình tròn có đường kính bằng $50\,\text{m}$. Xác định kích thước vườn hoa hình chữ nhật để tổng quãng đường đi xung quanh vườn hoa đó là $140\,\text{m}$.

Lời giải

Đặt độ dài một cạnh của hình chữ nhật là x (m) với $(0<x<50)$

Vì độ dài đường chéo hình chữ nhật bằng đường kính hình tròn nên độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật đó là: $\sqrt{2500-x^2}$ (m).

Khi đó, tổng quãng đường đi xung quanh vườn hoa bằng chu vi hình chữ nhật là:

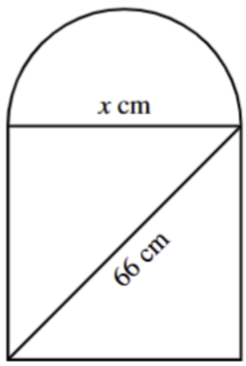
$$2\left(\sqrt{2500-x^2}+x\right)=140\,\text{(m)}.$$

Giải phương trình trên ta có: $x=40$ (m) hoặc $x=30$ (m).

Nếu $x=40$ (m) thì độ dài cạnh còn lại là 30 (m) và ngược lại.

Vậy kích thước vườn hoa là 30×40 (m).

Bài tập 5: Mặt cắt đứng của cột cây số trên quốc lộ có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật (xem hình bên). Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài 66 cm. Tìm kích thước của hình chữ nhật, biết rằng diện tích của phần nửa hình tròn bằng 0,3 lần diện tích của phần hình chữ nhật. Lấy $\pi=3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.



Lời giải

Gọi đường kính của nửa hình tròn là x (cm) với $x>0$.

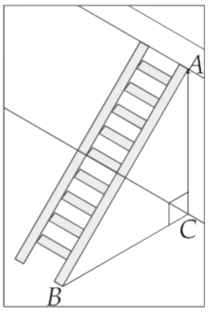
Độ dài cạnh bên của hình chữ nhật là $\sqrt{66^2-x^2}$ và diện tích nửa hình tròn là $\dfrac{3,14x^2}{8}$.

Diện tích hình chữ nhật là $x\sqrt{66^2-x^2}$ nên theo giả thiết ta có:

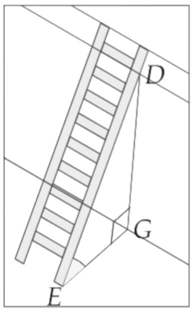
$$\frac{3,14x^2}{8}=0,3x\sqrt{66^2-x^2}\Leftrightarrow 157x=120\sqrt{66^2-x^2}\Leftrightarrow x^2=\frac{62726400}{39049}\Leftrightarrow x\approx \pm 40,08.$$

Vậy kích thước của hình chữ nhật khoảng $40,08\times 52,44$ (cm).

Bài tập 6: Để leo lên một bức tường, bác Dũng dùng một chiếc thang cao hơn bức tường đó 2 m. Ban đầu, bác Dũng đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó vừa chạm đúng vào mép trên của bức tường .



Hình a)



Hình b)

Sau đó, bác Dũng dịch chuyển chân thang vào gần chân bức tường thêm 1m thì bác Dũng nhận thấy thang tạo với mặt đất một góc $45°$. Bức tường cao bao nhiêu mét?

Lời giải

Gọi chiều cao bức tường là x (m) với $x>0$.

Khi đặt chiếc thang mà đầu trên của chiếc thang đó chạm đúng vào mép trên của bức tường thì khoảng cách chân thang đến chân tường là $\sqrt{(x+2)^2-x^2}$ (m).

Khi thang tạo với mặt đất một góc 45° thì khoảng cách từ chân thang đến chân tường là x (m).

Theo đề bài ta có phương trình: $\sqrt{(x+2)^2-x^2}=x+1$.

Giải phương trình trên ta có: $x=3$(m) với $x>0$. Vậy chiều cao bức tường là 3 m.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{1+x}$ là:

A. $\varnothing$ **B.** $\{-3\}$ **C.** $\{1;-3\}$. **D.** $\{1\}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^2+3x-2}=\sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases}1+x\ge 0\\ x^2+3x-2=1+x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge -1\\ x^2+2x-3=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1$.

Câu 2: Phương trình $\sqrt{x^2+2x-3}=5-x$ có nghiệm là $x=\dfrac{a}{b}$. Khi đó $a+2b$ bằng:

A. 10. **B.** 33. **C.** 17. **D.** 13.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^2+2x-3}=5-x \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+2x-3\ge 0\\ 5-x\ge 0\\ x^2+2x-3=(5-x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 1\end{array}\right.\\ x\le 5\\ 12x=28\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x\le -3\\ x\ge 1\end{array}\right.\\ x\le 5\\ x=\dfrac{7}{3}\end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{3}$.

Vậy $a=7;b=3$. Suy ra $a+2b=13$.

Câu 3: Tổng các nghiệm của phương trình $(x+5)(2-x)=3\sqrt{x(x+3)}$ bằng

A. 3. **B.** 4. **C.** -3. **D.** 2.

Lời giải

Phương trình tương đương $-x^2-3x+10=3\sqrt{x^2+3x}$. Đặt $t=\sqrt{x^2+3x}, t\ge 0$.

Phương trình đưa về dạng: $-t^2+10=3t \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=2(n)\\ t=-5(l)\end{array}\right.$

Khi đó: $t=2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3x}=2 \Leftrightarrow x^2+3x=4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=1\end{array}\right.$. Vậy tổng $S=-4+1=-3$

Câu 4: Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{4x^2+12x+13}=3$ là

A. $T=\{1;2\}$. **B.** $T=\{-1;3\}$. **C.** $T=\phi$. **D.** $T=\left\{-1;-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^2+2x+2}=\sqrt{(x+1)^2+1}\ge 1, \forall x\in\mathbb{R}$

Khi đó: $\sqrt{4x^2+12x+13}=\sqrt{(2x+3)^2+4}\ge 2, \forall x\in\mathbb{R}$

Suy ra $\begin{cases} x^2+2x+2=1 \\ 4x^2+12x+13=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow x \in \varnothing$. Vậy phương trình vô nghiệm.

Câu 5: Số nghiệm của phương trình $3(x-2)\sqrt{x^2+1}=x^2+x-6$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **<u>D</u>.** 3.

Lời giải

Phương trình đã cho có dạng: $3(x-2)\sqrt{x^2+1}=x^2+x-6 \Leftrightarrow (x-2)\left(x+3-3\sqrt{x^2+1}\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ x+3-3\sqrt{x^2+1}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ 3\sqrt{x^2+1}=x+3 \quad (*) \end{array}\right.$

Ta thấy $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ 9\left(x^2+1\right)=(x+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3 \\ 8x^2-6x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{3}{4} \end{array}\right.$.

Vậy phương trình có 3 nghiệm là $x=0, x=2, x=\dfrac{3}{4}$.

Câu 6: Phương trình nào dưới đây có dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$?

A. $3x^2-5=0$. **B.** $\sqrt{x^2+2x-4}=x$.

<u>C</u>. $\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{1-2x+2x^2}$. **D.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}=x$.

Lời giải

Phương trình có dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$ là $\sqrt{4x^2+1}=\sqrt{1-2x+2x^2}$.

Câu 7: Giá trị nào là nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+x+11}=\sqrt{-2x^2-13x+16}$?

A. $x=-5$. **B.** $x=\dfrac{1}{3}$. **<u>C</u>.** $x=\dfrac{1}{3}$ hoặc $x=-5$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình ta được: $x^2+x+11=-2x^2-13x+16$

$\Rightarrow 3x^2+14x-5=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$ hoặc $x=-5$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho ta thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn.

Câu 8: Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2-x-3}=\sqrt{x^2-x+1}$ là

A. 0. **B.** $-\sqrt{2}$. **<u>C</u>.** -2. **D.** 2.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình ta được: $3x^2-x-3=x^2-x+1 \Rightarrow x^2-2=0$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2} \\ x=-\sqrt{2} \end{array}\right.$

Thay các giá trị trên vào phương trình đã cho ta thấy thỏa mãn. Vậy tích các nghiệm bằng -2.

Câu 9: Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm $\sqrt{2x^2+x}=\sqrt{-x+2x^2}$?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** vô số.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình ta được: $2x^2+x=-x+2x^2 \Rightarrow x=0$

Thay giá trị trên vào phương trình đã cho ta thấy thỏa mãn.

Câu 10: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{2022x^2-2021x+2}=\sqrt{2022x^2-2021x-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta nhận được:

$2022x^2-2021x+2=2022x^2-2021x-1 \Rightarrow 3=0$ (Vô lí).

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

Câu 11: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-2x-1}=\sqrt{-x^2+3x-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta nhận được:

$x^2-2x-1=-x^2+3x-1 \Rightarrow 2x^2-5x=0 \Rightarrow x=0$ hoặc $x=\frac{5}{2}$.

Thay lần lượt $x=0$, $x=\frac{5}{2}$ vào phương trình đã cho ta thấy $x=\frac{5}{2}$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 12: Gọi S là tập nghiệm của phương trình $\sqrt{2x^2+x+2}=\sqrt{x^2+x+3}$. Tổng các phần tử của S là

A. 1. **B.** -2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta nhận được

$2x^2+x+2=x^2+x+3 \Rightarrow x^2-1=0 \Rightarrow x=1$ hoặc $x=-1$.

Thử lại ta thấy $x=1$, $x=-1$ thỏa mãn phương trình đã cho, do đó $S=\{1;-1\}$.

Vậy tổng các phần tử của S bằng 0.

Câu 13: Tập tất cả các nghiệm của phương trình $2\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{4x^2+8x-12}$ là

A. $\varnothing$. **B.** $\{0;1\}$. **C.** $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$. **D.** $\mathbb{R}$.

Lời giải

Ta thấy $4x^2+8x-12=4(x^2+2x-3)$ và $x^2+2x-3\ge 0 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

Do đó $2\sqrt{x^2+2x-3}=\sqrt{4x^2+8x-12}$ luôn đúng khi $x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

Suy ra tập nghiệm của phương trình đã cho là $(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)$.

Câu 14: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2+3x+m}=\sqrt{x^2-2x+4}$ có 2 nghiệm phân biệt?

A. 3. **B.** 6. **C.** 10. **D.** 16.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta nhận được

$$2x^2+3x+m=x^2-2x+4 \Rightarrow x^2+5x+m-4=0 \ (1)$$

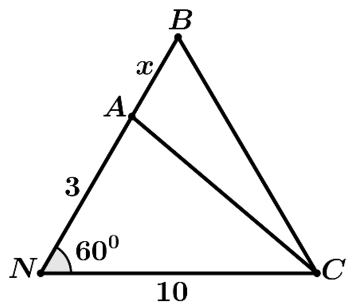
Ta thấy $x^2-2x+4=(x-1)^2+3>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ nên số nghiệm của phương trình (1) bằng số nghiệm của phương trình đã cho.

Suy ra phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta=25-4(m-4)>0 \Leftrightarrow m<\frac{41}{4}.$$

Mà $m\in\mathbb{N}^*$ nên $m\in\{1;2;\ldots;10\}$. Vậy có 10 số nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 15: Khoảng cách từ nhà An ở vị trí N đến cột điện C là 10m. Từ nhà, An đi x mét theo phương tạo với NC một góc 60° đến vị trí A sau đó đi tiếp 3m đến vị trí B như hình dưới. Tìm giá trị gần giá trị x nhất để $AC=\frac{8}{9}BC$.



A. $7{,}1$. **B.** 6. **C.** 12. **D.** 9.

Lời giải

Vì x là khoảng cách AN nên $x>0$.

$AC=\sqrt{AN^2+NC^2-2AN.NC.\cos 60^\circ}=\sqrt{x^2+100-10x}=\sqrt{x^2-10x+100}$

$BC=\sqrt{BN^2+NC^2-2BN.NC.\cos 60^\circ}=\sqrt{(x+3)^2+100-10(x+3)}=\sqrt{x^2-4x+79}$.

Ta có: $AC = \frac{8}{9}BC \Rightarrow \sqrt{x^2 - 10x + 100} = \frac{8}{9}\sqrt{x^2 - 4x + 79}$

$\Rightarrow 81\left(x^2 - 10x + 100\right) = 64\left(x^2 - 4x + 79\right) \Rightarrow 17x^2 - 554x + 3044 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \approx 25,6 \\ x \approx 7 \end{array}\right.$

Vậy $x \approx 25,6$ (m) hoặc $x \approx 7$ (m).

Câu 16: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{2x-3} = x - 3$ là

A. $S = \varnothing$. **B.** $S = \{2\}$. **C.** $S = \{6;2\}$. **D.** $S = \{6\}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{2x-3} = x - 3(*) \Rightarrow 2x - 3 = (x-3)^2 \Rightarrow 2x - 3 = x^2 - 6x + 9$

$\Rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 6 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

Thay lần lượt $x = 6; x = 2$ vào phương trình $(*)$ ta thấy $x = 6$ thoả mãn.

Câu 17: Số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x - 3$ là:

A. 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Số giao điểm giữa đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x - 3$ là số nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm: $\sqrt{3x-4} = x - 3(*) \Rightarrow \left(\sqrt{3x-4}\right)^2 = (x-3)^2$

$\Rightarrow 3x - 4 = x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 - 9x + 13 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{9-\sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{9+\sqrt{29}}{2} \end{array}\right.$.

Thay lần lượt $x = \frac{9+\sqrt{29}}{2}; x = \frac{9-\sqrt{29}}{2}$ vào phương trình $(*)$ ta thấy $x = \frac{9+\sqrt{29}}{2}$ thoả mãn.

Vậy đồ thị hàm số $y = \sqrt{3x-4}$ và đường thẳng $y = x - 3$ có một giao điểm chung.

Câu 18: Tổng các nghiệm (nếu có) của phương trình: $\sqrt{2x-1} = x - 2$ bằng

A. 6. **B.** 1. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{2x-1} = x - 2(*) \Rightarrow 2x - 1 = (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 5 \end{array}\right.$.

Thay lần lượt $x = 1; x = 5$ vào phương trình $(*)$ ta thấy $x = 5$ thoả mãn.

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = 5$.

Câu 19: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{3x-2}=x$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Ta có $\sqrt{3x-2}=x\Rightarrow 3x-2=x^2\Rightarrow x^2-3x+2=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=1\end{array}\right.$.

Thay lần lượt $x=1;x=2$ vào phương trình $(*)$ ta thấy $x=1;x=2$ thoả mãn.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm.

Câu 20: Phương trình $\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{2x+1}-x\right)=0$ có tất cả bao nhiêu nghiệm?

A. 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^2-1}\left(\sqrt{2x+1}-x\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-1}=0\\\sqrt{2x+1}-x=0\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-1=0(1)\\\sqrt{2x+1}=x(2)\end{array}\right.$

Giải (1): $x^2-1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1(n)\\x=-1(l)\end{array}\right.$

Giải (2): $\sqrt{2x+1}=x\Rightarrow 2x+1=x^2\Rightarrow x^2-2x-1=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=1+\sqrt{2}(n)\\x=1-\sqrt{2}(l)\end{array}\right.$

Vậy số nghiệm của phương trình là 2.

Câu 21: Giá trị nào sau đây là nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2-4}=x-2$?

A. $x=0$. **B.** $x=-1$. **C.** $x=-2$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x^2-4}=x-2\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x^2-4=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 2\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow x=2$.

Câu 22: Phương trình $\sqrt{3x+8}=3$ có tập nghiệm là:

A. $S=\{1\}$. **B.** $S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$. **C.** $S=\left\{\frac{-5}{3}\right\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{3x+8}=3\Leftrightarrow 3x+8=9\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\Rightarrow S=\left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Câu 23: Giá trị nào sau đây là nghiệm của phương trình $\sqrt{2x-3}=x-3$?

A. $x=-6$. **B.** $x=2$. **C.** $x=6$. **D.** $x=-2$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{2x-3}=x-3 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ 2x-3=x^2-6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=6 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=6$.

Câu 24: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2-4x+5}=-\sqrt{x+1}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** vô số nghiệm. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \sqrt{-x^2-4x+5}\geq 0 \\ \sqrt{x+1}\geq 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \sqrt{-x^2-4x+5}=-\sqrt{x+1} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{-x^2-4x+5}=0 \\ \sqrt{x+1}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2-4x+5=0 \\ x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-5 \end{array}\right. \\ x=-1 \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing$

Vậy phương trình $\sqrt{-x^2-4x+5}=-\sqrt{x+1}$ vô nghiệm.

Câu 25: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{x^2-2}=x+2$ là:

A. $S=\left\{\frac{3}{2}\right\}$. **B.** $S=\left\{\frac{-3}{2}\right\}$. **C.** $S=\left\{\frac{2}{3}\right\}$. **D.** $S=\varnothing$.

Lời giải

$\sqrt{x^2-2}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x^2-2=x^2+4x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x=\frac{-3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-3}{2}$.

Câu 26: Giá trị nào sau đây không là nghiệm của phương trình $\sqrt{4x+30}-2x-3=0$?

A. $x=\frac{1}{2}$. **B.** $x=1,5$. **C.** $x=\frac{3}{2}$. **D.** $x=-\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{4x+30}-2x-3=0 \Leftrightarrow \sqrt{4x+30}=2x+3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{-3}{2} \\ 4x+30=4x^2+12x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq \frac{-3}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=\frac{-7}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Câu 27: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{20x^2+10x-3}=\sqrt{x^2-7x-1}$ là:

A. $S=\left\{-1;\frac{-2}{19}\right\}$. **B.** $S=\{-1\}$. **C.** $S=\left\{\frac{-2}{19}\right\}$. **D.** $S=\{1\}$.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được: $20x^2+10x-3=x^2-7x-1$

$\Leftrightarrow 19x^2+17x-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=\frac{2}{19} \end{array}\right.$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=-1$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{-1\}$.

Câu 28: Số nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2-x+1}=\sqrt{x+3}$ là

A. 0. **B.** 2. **C.** vô số nghiệm. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{4x^2-x+1}=\sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3\ge 0 \\ 4x^2-x+1=x+3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ 4x^2-2x-2=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -3 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Câu 29: Nghiệm của phương trình $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x-2}=0$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(-2;0)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(-3;-1)$.

Lời giải

Nhận thấy $\begin{cases} \sqrt{x^2+2x}\ge 0 \\ \sqrt{x^2+x-2}\ge 0 \end{cases}$ nên $\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x-2}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2x=0 \\ x^2+x-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2$.

Câu 30: Tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2+7x+13}=5$ là:

A. 3. **B.** 4. **C.** 7. **D.** 12.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$-x^2+7x+13=25$

$\Leftrightarrow -x^2+7x-12=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x=3; x=4$ thỏa mãn.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2+7x+13}=5$ là: $3+4=7$.

Câu 31: Nghiệm của phương trình $\sqrt{-x^2-4x+22}+x-3=-x+2$ không thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(-2;0)$. **B.** $(0;1)$. **C.** $(-1;3)$. **D.** $(-3;1)$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{-x^2-4x+22}+x-3=-x+2 \Leftrightarrow \sqrt{-x^2-4x+22}=-2x+5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{2} \\ -x^2 - 4x + 22 = 4x^2 - 20x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{2} \\ 5x^2 - 16x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{5}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = \dfrac{1}{5} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{5}$$

Câu 32: Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\sqrt{4x^2+5x+7}=\sqrt{x+15}$ là

A. 5. **B.** -5. **C.** -1. **D.** 1.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{4x^2+5x+7}=\sqrt{x+15} \Leftrightarrow \begin{cases} x+15 \ge 0 \\ 4x^2+5x+7 = x+15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -15 \\ 4x^2+4x-8=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -15 \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2 \end{array}\right.$ suy ra $1^2+(-2)^2=5$.

Câu 33: Tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{5x^2+25x+13}=\sqrt{20x^2-9x+28}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $(0;1)$. **B.** $(2;5)$. **C.** $(-1;0)$. **D.** $(0;1]$.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình đã cho, ta được:

$5x^2+25x+13=20x^2-9x+28 \Leftrightarrow 15x^2-34x+15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{3}{5} \\ x=\dfrac{5}{3} \end{array}\right.$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình đã cho, ta thấy $x=\dfrac{3}{5}; x=\dfrac{5}{3}$ thỏa mãn.

Vậy tích các nghiệm của phương trình $\sqrt{5x^2+25x+13}=\sqrt{20x^2-9x+28}$ là: $\dfrac{3}{5}.\dfrac{5}{3}=1$.

Câu 34: Tổng các nghiệm của phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4$ bằng

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4 \Rightarrow (x-2)\sqrt{2x+7}=(x-2)(x+2)$

$\Rightarrow (x-2)\left[\sqrt{2x+7}-(x+2)\right]=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \sqrt{2x+7}=x+2 \quad (1) \end{array}\right.$.

Giải phương trình $(1): \sqrt{2x+7}=x+2 \Rightarrow 2x+7=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Thay lần lượt $x=1; x=2; x=-3$ vào phương trình $(*)$ ta thấy $x=1; x=2$ thoả mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1, x=2$ nên tổng hai nghiệm của phương trình là $1+2=3$.

Câu 35: Giá trị của tham số m để phương trình $\sqrt{2x^2-x-2m}=x+2$ có 2 nghiệm phân biệt là $m\in(a;b]$ với $a,b\in\mathbb{Q}$. Tính $S=a+b$.

A. $S=-\frac{1}{8}$. **B.** $S=\frac{81}{8}$. **C.** $S=5$. **D.** $S=\frac{41}{8}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{2x^2-x-2m}=x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ 2x^2-x-2m=(x+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ x^2-5x-2m-4=0\ (1) \end{cases}$

Phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (1) có hai nghiệm x_1,x_2 phân biệt thỏa mãn $x_1,x_2\geq -2$. Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta=25-4(-2m-4)>0 \\ \frac{x_1+x_2}{2}=\frac{5}{2}>-2 \\ (x_1+2)(x_2+2)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 41+8m>0 \\ x_1x_2+2(x_1+x_2)+4\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-\frac{41}{8} \\ -2m+10\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{41}{8}<m\leq 5.$$

Vậy giá trị tham số m cần tìm là $-\frac{41}{8}<m\leq 5$ suy ra $a=-\frac{41}{8}, b=5$. Vậy $a+b=-\frac{1}{8}$.

Câu 36: Cho phương trình $\sqrt{2x^2-6x+m}=x-1$. Tìm m để phương trình có một nghiệm duy nhất

A. $m>4$. **B.** $4<m<5$. **C.** $3<m<4$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<4 \\ m=5 \end{array}\right.$.

Lời giải

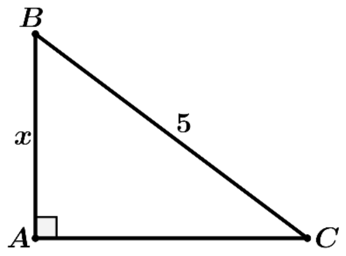
Ta có: $\sqrt{2x^2-6x+m}=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ 2x^2-6x+m=(x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1 \\ x^2-4x-1=-m\ (1) \end{cases}$.

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow (1)$ có nghiệm duy nhất $x\geq 1$.

Số nghiệm của (1) bằng số giao điểm của đường thẳng $y=-m$ và đồ thị hàm số $f(x)=x^2-4x-1$.

Phương trình có nghiệm duy nhất: $\left[\begin{array}{l} -m=-5 \\ -m>-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=5 \\ m<4 \end{array}\right.$.

Câu 37: Cho tam giác ABC vuông tại A như hình bên dưới có: $AB=x$; $BC=5$.



Tập các giá trị của x để chu vi của tam giác ABC bằng 12 là:

A. $\{3\}$. **B.** $\{4\}$. **C.** $\{3;4\}$. **D.** $\{2;3\}$.

Lời giải

Vì x là độ dài của cạnh AB nên $x>0$ nên $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{25-x^2}$

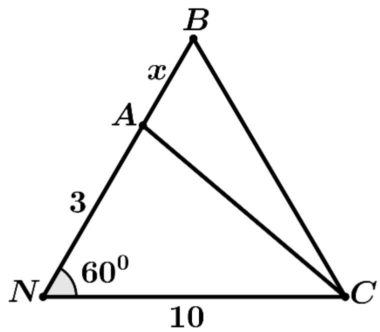
Theo giả thiết ta có $AB+AC+BC=12 \Rightarrow x+5+\sqrt{25-x^2}=12$ $(*)$

$\Rightarrow \sqrt{25-x^2}=7-x \Rightarrow 25-x^2=(7-x)^2 \Rightarrow x=4$ hoặc $x=3$.

Thay lần lượt các giá trị trên vào phương trình $(*)$ ta thấy $x=4$ hoặc $x=3$ thoả mãn.

Vậy $x=3$ hoặc $x=4$ để chu vi tam giác ABC là 12.

Câu 38: Khoảng cách từ nhà An ở vị trí N đến cột điện C là $10\,\text{m}$. Từ nhà An đi x mét theo phương tạo với NC một góc $60°$ đến vị trí A sau đó đi tiếp $3\,\text{m}$ đến vị trí B như hình bên dưới



Tìm x để khoảng cách $BC=2AN$. Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần mười.

A. $4,4$. **B.** $4,5$. **C.** $4,6$. **D.** $4,7$.

Lời giải

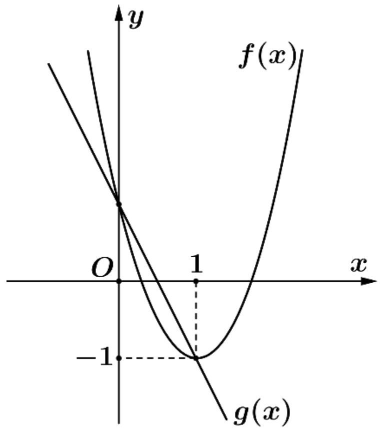
Vì x là khoảng cách AN nên $x\ge 0$. Áp dụng định lí Cosin cho tam giác BNC ta được:

$$BC=\sqrt{BN^2+NC^2-2BN.NC.\cos 60°}=\sqrt{(x+3)^2+100-10(x+3)}=\sqrt{x^2-4x+79}.$$

Ta có: $BC=2AN \Rightarrow \sqrt{x^2-4x+79}=2x \Rightarrow x^2-4x+79=4x^2 \Rightarrow 3x^2+4x-79=0$

$\Rightarrow x\approx 4,5$ hoặc $x\approx -5,8$ và vì $x\ge 0$ nên ta có $x\approx 4,5$. Vậy $x\approx 4,5$.

Câu 39: Cho hai hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Phương trình $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}$ có nghiệm là:

A. $\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-1\end{array}\right.$. **B.** $x=0$. **C.** $\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$. **D.** $x=2$.

Lời giải

Bình phương hai vế của phương trình ta được $f(x)=g(x)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Với $x=2$ ta có $f(2)=g(2)=-1<0$ nên loại $x=2$

Với $x=0$ ta có $f(0)=g(0)=1>0$ nên $x=0$ nhận

Câu 40: Cho hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol nhận điểm $I(1;2)$ làm đỉnh và đi qua điểm $A(0;3)$. Phương trình $\sqrt{f(x)}=x+1$ có số nghiệm là?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

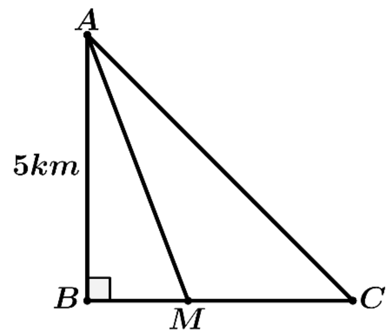
Lời giải

Hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol nhận điểm $I(1;2)$ làm đỉnh và đi qua điểm $A(0;3)$ nên $f(x)=x^2-2x+3$

Phương trình $\sqrt{f(x)}=x+1$ trở thành $\sqrt{x^2-2x+3}=x+1$.

Bình phương hai vế ta được $4x=2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$. Thay $x=\frac{1}{2}$ vào phương trình ta thấy thoả mãn.

Câu 41: Một ngọn hải đăng được đặt tại vị trí A cách bờ biển một khoảng $AB=5\text{ km}$. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí C cách B một khoảng 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ A đến địa điểm M trên bờ biển với vận tốc 4 km/h, rồi đi bộ đến C với vận tốc 6 km/h. Người canh hải đăng đã tìm được cách đặt vị trí của M để thời gian đến kho nhanh nhất là $\frac{5\sqrt{5}+14}{12}(\text{h})$. Khi đó vị trí điểm M cách B một khoảng bằng bao nhiêu km?



A. 5,5 km . **B.** $2\sqrt{5}$ km . **C.** $\sqrt{5}$ km . **D.** 4,5 km

Lời giải

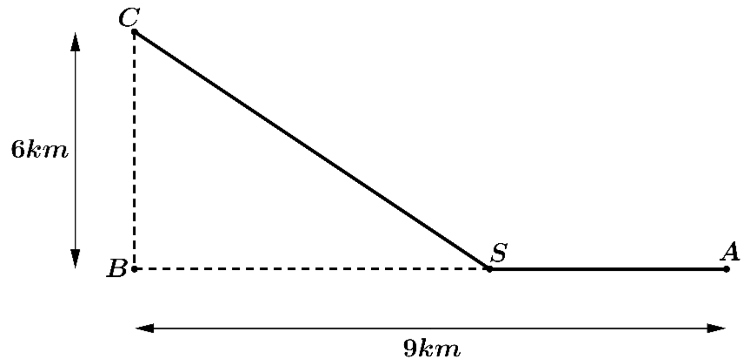
Đặt $BM = x(\text{km})$ $(0 \le x \le 7)$ suy ra $AM = \sqrt{x^2 + 25}$ (km)

Thời gian người đó đi từ A đến M rồi đến C là: $\dfrac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \dfrac{7-x}{6}$

Do thời gian đến kho nhanh nhất là $\dfrac{5\sqrt{5}+14}{12}(\text{h})$ nên ta có phương trình:

$$\frac{\sqrt{x^2+25}}{4} + \frac{7-x}{6} = \frac{5\sqrt{5}+14}{12}(\text{h}) \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2+25} = 2x + 5\sqrt{5} \Leftrightarrow x^2 - 4\sqrt{5}x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 2\sqrt{5}.$$

Câu 42: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn dầu từ một kho A ở trên bờ biển đến một vị trí B trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Gọi C là điểm trên bờ sao cho BC vuông góc với bờ biển. Khoảng cách từ A đến C là 9 km. Người ta đã xác định được một ví trí D trên AC để lắp ống dẫn theo đường gấp khúc ADB có số tiền chi phí thấp nhất là 2.340.000.000 đồng. Khi đó khoảng cách AD bằng bao nhiêu km, biết rằng giá để lắp đặt mỗi km đường ống trên bờ là 100.000.000 đồng và dưới nước là 260.000.000 đồng.



A. 7 km . **B.** 6 km . **C.** 7.5 km . **D.** 6.5 km .

Lời giải

Đặt $AD = x$ km, $x > 0$; $CD = 9 - x$; $BD = \sqrt{36 + (9-x)^2}$

Giá thành lắp đặt là: $100.10^6 x + \sqrt{36+(9-x)^2}.260.10^6 = 10^7\left[10x + 26\sqrt{36+(9-x)^2}\right]$

Do chi phí thấp nhất là 2.340.000000 đồng nên ta có phương trình:

$$10^7\left[10x+26\sqrt{36+(9-x)^2}\right]=234.10^7 \Leftrightarrow 13\sqrt{x^2-18x+117}=117-5x \Leftrightarrow x=6.5$$

Vậy $AD=6.5$ km.

Câu 43: Một tam giác vuông có hai cạnh góc vuông hơn kém nhau 1 cm. Tính diện tích tam giác biết chu vi tam giác là 12 cm.

A. 10cm^2. **<u>B</u>.** 6cm^2. **C.** 15cm^2. **D.** 12cm^2.

Lời giải

Gọi hai cạnh góc vuông lần lượt là $x, x+1(\text{cm})$, điều kiện: $x>0$.

Suy ra cạnh huyền của tam giác là $\sqrt{x^2+(x+1)^2}=\sqrt{2x^2+2x+1}$

Chu vi tam giác là: $x+(x+1)+\sqrt{2x^2+2x+1}=2x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}$.

Ta có phương trình: $2x+1+\sqrt{2x^2+2x+1}=12\ (1) \Leftrightarrow \sqrt{2x^2+2x+1}=11-2x$

$2x^2+2x+1=(11-2x)^2 \Leftrightarrow 2x^2+2x+1=121-44x+4x^2$

$2x^2-46x+120=0 \Leftrightarrow x=20$ hoặc $x=3$

Thay lần lượt $x=20, x=3$ vào phương trình (1), ta có $x=3$ thỏa mãn, $x=20$ không thỏa mãn.

Suy ra các cạnh góc vuông của tam giác là $3(\text{cm}), 4(\text{cm})$.

Vậy diện tích tam giác đã cho là $S=\dfrac{1}{2}.3.4=6\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 44: Một tam giác vuông có một cạnh góc vuông kém cạnh huyền 2 cm. Tính diện tích tam giác biết chu vi tam giác là 24cm.

<u>A</u>. 24cm^2. **B.** 14cm^2. **C.** 20cm^2. **D.** 48cm^2.

Lời giải

Gọi một cạnh góc vuông là $x(\text{cm})$, suy ra cạnh huyền là $x+2\ (\text{cm})$, điều kiện: $x>0$.

Suy ra cạnh góc vuông còn lại là: $\sqrt{(x+2)^2-x^2}=\sqrt{4x+4}$.

Chu vi tam giác là: $x+x+2+\sqrt{4x+4}=2x+2+\sqrt{4x+4}$.

Ta có phương trình: $2x+2+\sqrt{4x+4}=24\ (1) \Leftrightarrow \sqrt{4x+4}=22-2x$

$\Leftrightarrow 4x+4=484-88x+4x^2 \Leftrightarrow 4x^2-92x+480=0 \Leftrightarrow x=15$ hoặc $x=8$

Thay lần lượt $x=15, x=8$ vào phương trình (1), ta có $x=15$ không thỏa mãn, $x=8$ thỏa mãn.

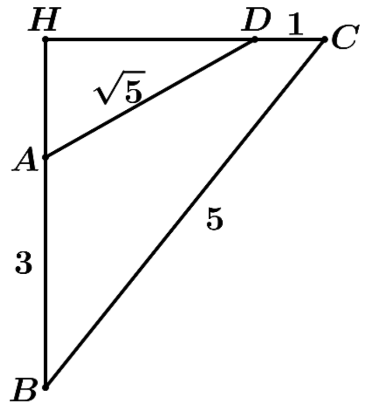
Suy ra các cạnh góc vuông của tam giác là $8(\text{cm}), 6(\text{cm})$.

Vậy diện tích tam giác đã cho là $S=\frac{1}{2}.8.6=24\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 45: Cho tứ giác $ABCD$ có $AB\perp CD$, $AB=3$, $BC=5$, $CD=1$, $DA=\sqrt{5}$. Gọi H là giao điểm của AB và CD. Tính diện tích tứ giác $ABCD$.

A. 5cm^2. **B.** 4cm^2. **C.** 6cm^2. **D.** 3cm^2.

Lời giải



Đặt $x=AH$ nên $HD=\sqrt{5-x^2}$ với kiện: $\begin{cases}x>0\\5-x^2>0\end{cases}\Leftrightarrow 0<x<\sqrt{5}$ $(*)$

Xét tam giác vuông BHC ta có: $HB^2+HC^2=BC^2$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+\left(\sqrt{5-x^2}+1\right)^2=5^2 \Leftrightarrow x^2+6x+9+5-x^2+1+2\sqrt{5-x^2}=25$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{5-x^2}=-6x+10(1)$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $4\left(5-x^2\right)=36x^2-120x+100$

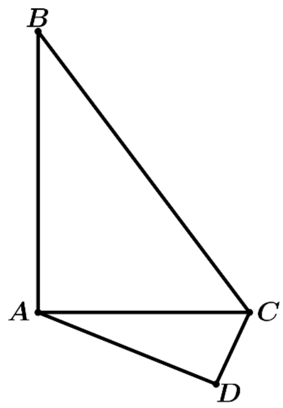
Sau khi thu gọn ta được: $40x^2-120x+80=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình (1) và kết hợp với điều kiện $(*)$ ta thấy $x=1$ thỏa mãn.

Vậy $HA=x=1\Rightarrow HB=4;\ HD=2;\ HD=3$.

Ta có: $S_{ABCD}=S_{BCH}-S_{ADH}=\frac{1}{2}.HB.HC-\frac{1}{2}.HA.HD=\frac{1}{2}.4.3-\frac{1}{2}.1.2=5\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 46: Cho tứ giác $ABCD$ có $BAC=ADC=90^\circ$ như hình vẽ. Độ dài cạnh AB gấp ba lần độ dài cạnh AD, độ dài cạnh AD kém độ dài cạnh AC một đơn vị. Tính độ dài cạnh AD để độ dài cạnh AB gấp bốn lần độ dài cạnh CD.



A. 5. **B.** $3\sqrt{2}$. **<u>C</u>.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Gọi $AD = x \Rightarrow AB = 3x; AC = x+1$ với điều kiện: $x > 0\ (*)$

Ta có: $CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{(x+1)^2 - x^2} = \sqrt{2x+1}$.

Theo giả thiết ta có: $AB = 4CD \Rightarrow 3x = 4.\sqrt{2x+1}\ (1) \Leftrightarrow 9x^2 = 16(2x+1)$

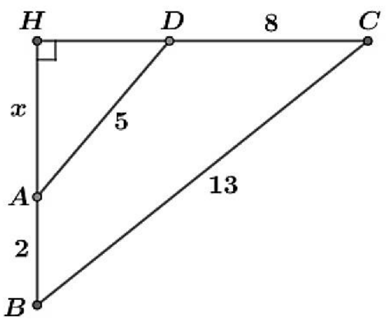
$\Leftrightarrow 9x^2 - 32x - 16 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -\dfrac{4}{9} \end{array}\right.$

Thay lần lượt hai giá trị này của x vào phương trình (1) và kết hợp với điều kiện $(*)$ thì ta thấy $x = 4$ thỏa mãn.

Câu 47: Cho tứ giác $ABCD$ có AB và CD vuông góc biết $AB = 2, BC = 13, CD = 8, AD = 5$. Tính diện tích của tứ giác $ABCD$.

A. 12. **<u>B</u>.** 24. **C.** 36. **D.** 48.

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AB và CD và tam giác HBC vuông tại H.

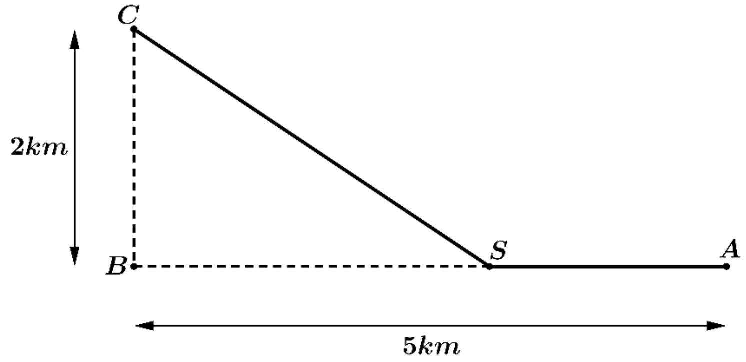
Đặt $AH = x, HB = x+2, HD = \sqrt{5^2 - x^2}, HC = \sqrt{5^2 - x^2} + 8$

Tam giác HBC vuông tại H nên $(x+2)^2 + \left(\sqrt{5^2 - x^2} + 8\right)^2 = 13^2 \Leftrightarrow 4\sqrt{5^2 - x^2} = 19 - x$

Bình phương hai vế ta được $17x^2 - 38x - 39 = 0$. Giải phương trình được $\left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{13}{17} \end{array}\right.$.

Thay vào phương trình để thử lại thì thấy đều thoả mãn. Tuy nhiên so sánh với điều kiện thì chỉ nhận $x = 3$.

Câu 48: Một kĩ sư thiết kế đường dây điện từ vị trí A đến vị trí S và từ vị trí S đến vị trí C. Tiền công thiết kế mỗi kilômét đường dây từ A đến S và từ S đến C lần lượt là 3 triệu đồng và 2 triệu đồng. Biết tổng số tiền công là 17 triệu đồng. Tính số kilômét đường dây đã thiết kế (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



A. 5,5 km. **B.** 5,6 km. **C.** 5,7 km. **D.** 5,4 km.

Lời giải

Đặt $BS = x(0 < x < 5)$. Khi đó $CS = \sqrt{4 + x^2}$; $AS = 5 - x$.

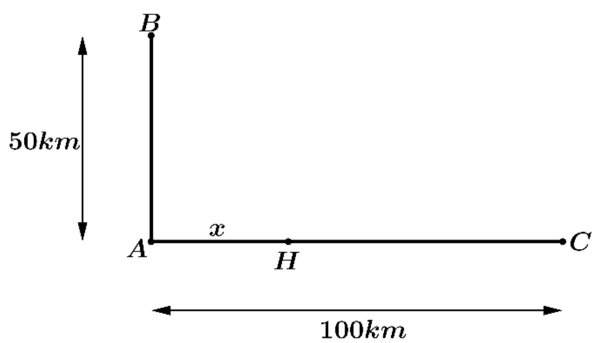
Số kilômet đường dây đã thiết kế $(5 - x) + \sqrt{4 + x^2}$

Ta có phương trình: $3(5 - x) + 2\sqrt{4 + x^2} = 17 \Leftrightarrow 2\sqrt{4 + x^2} = 2 + 3x$

$\Leftrightarrow 5x^2 - 12x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{6 + 4\sqrt{6}}{5}$ $(0 < x < 5)$.

Vậy số kilômet đường dây đã thiết kế là $5,6$ km.

Câu 49: Một tỉnh nọ có thành phố A đã có bến xe trung tâm, hai huyện xa nhất của tỉnh là huyện B (cách thành phố A 50 km về phía bắc) và huyện C (cách thành phố A 100km về phía tây). Tỉnh này muốn đặt thêm một bến xe H nữa nằm trên trục đường đi từ thành phố A đến huyện C sao cho khoảng cách từ bến xe H đến huyện B và C là như nhau. Hỏi H phải cách thành phố A bao xa?



A. 36,5 km. **B.** 37,5 km. **C.** 38,5 km. **D.** 39,5 km.

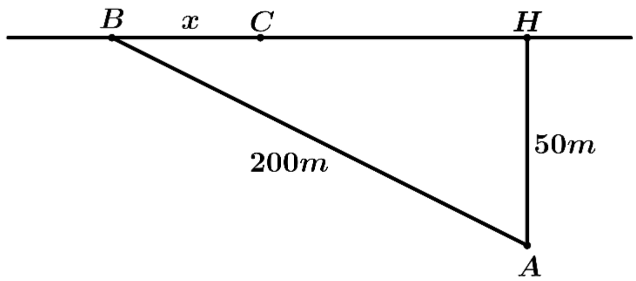
Lời giải

Đặt $AH = x\,(\text{km})\ \left(0 \le x \le 100\right)$; $CH = 100 - x\,(\text{km})$; $BH = \sqrt{x^2 + 50^2}$

Khoảng cách từ H đến B và C là như nhau nên $100 - x = \sqrt{x^2 + 50^2}$

Bình phương hai vế ta được: $200x = 7500 \Leftrightarrow x = 37{,}5\,(\text{km})$.

Câu 50: Trên đường từ nhà đến trường, bạn A thường đón bạn B đi học cùng. Nhà bạn B và đường cách nhau 50m và có một bãi đất trống xen giữa. Khi nhìn thấy bạn A còn cách mình 200m thì B bắt đầu đi bộ ra điểm C bên đường với vận tốc 5km/h, giả sử vận tốc của A đạp xe là 15km/h, xác định khoảng cách từ B đến C để hai bạn gặp nhau mà không ai phải chờ ai (làm tròn đến hàng phần nghìn)



A. 0,267 km. **B.** 0,168 km. **C.** 0,435 km. **D.** 0,132 km.

Lời giải

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống BC nên $AH = 0{,}5\,(\text{km})$; $BH = \dfrac{\sqrt{15}}{20}\,(\text{km})$

Đặt $BC = x\,(\text{km})$ với $0 \le x \le \dfrac{\sqrt{15}}{20}$ $CH = \dfrac{\sqrt{15}}{20} - x\,(\text{km})$

Thời gian bạn B đi đến C là $\dfrac{x}{15}$. Thời gian bạn A đi đến C là $\dfrac{\sqrt{0{,}05^2 + \left(\dfrac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2}}{5}$

Để hai bạn đến C mà không ai phải chờ ai thì $\dfrac{\sqrt{0{,}05^2 + \left(\dfrac{\sqrt{15}}{20} - x\right)^2}}{5} = \dfrac{x}{15}$

Bình phương hai vế ta được: $400x^2 - 45\sqrt{15}x + 18 = 0$

Giải phương trình được hai nghiệm gần đúng là $\left[\begin{array}{l} x \approx 0{,}168 \\ x \approx 0{,}267 \end{array}\right.$

Thay vào phương trình để thử lại thì thấy đều thoả mãn. Tuy nhiên so sánh với điều kiện thì chỉ nhận $x \approx 0{,}168$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho phương trình $\sqrt{-2x^2 - 2x + 11} = \sqrt{-x^2 + 3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} -2x^2-2x+11\ge 0 \\ -x^2+3\ge 0 \end{cases}$.

b) Bình phương hai vế ta được $-2x^2-2x+11=-x^2+3$.

c) Phương trình đã cho tương đương với phương trình $x^2+2x-8=0$.

d) Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

Lời giải

a) Đúng: Ta có điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} -2x^2-2x+11\ge 0 \\ -x^2+3\ge 0 \end{cases}$.

b) Đúng: $\sqrt{-2x^2-2x+11}=\sqrt{-x^2+3}\Rightarrow -2x^2-2x+11=-x^2+3$.

c) Đúng: $\sqrt{-2x^2-2x+11}=\sqrt{-x^2+3}\Rightarrow -2x^2-2x+11=-x^2+3\Rightarrow x^2+2x-8=0$

d) Sai: $\sqrt{-2x^2-2x+11}=\sqrt{-x^2+3}\Rightarrow -2x^2-2x+11=-x^2+3\Rightarrow x^2+2x-8=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-4 \end{array}\right.$

Thay $x=2, x=-4$ vào phương trình ta thấy $x=-4$ thỏa mãn phương trình.

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm.

Câu 2: Cho phương trình $\sqrt{3x^2+5x-13}=x+1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình là $3x^2+5x-13\ge 0$.

b) Bình phương hai vế ta được $3x^2+5x-13=x^2+1^2$.

c) Phương trình đã cho có 1 nghiệm.

d) Tổng bình các nghiệm của phương trình đã cho bằng $\frac{65}{4}$.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện xác định của phương trình là $3x^2+5x-13\ge 0$.

b) Sai: $\sqrt{3x^2+5x-13}=x+1\Rightarrow 3x^2+5x-13=x^2+2x+1$.

c) Sai: $\sqrt{3x^2+5x-13}=x+1\Rightarrow 3x^2+5x-13=x^2+2x+1\Rightarrow 2x^2+3x-14=0\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{7}{2} \\ x=2 \end{array}\right.$

Thay $x=-\frac{7}{2}, x=2$ vào phương trình ta thấy chỉ có $x=2$ thỏa mãn.

d) Sai: Ta có phương trình có nghiệm $x=2$ nên $x^2=4$.

Câu 3: Cho phương trình $(x-2)\sqrt{2x^2+4}=x^2-4\ (*)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện xác định của phương trình $(*)$ là $x \ge 2$.

b) Phương trình có 3 nghiệm.

c) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 5.

d) Các nghiệm của phương trình là các số chẵn.

Lời giải

a) Sai: Vì $x^2+4>0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên điều kiện xác định của phương trình $(*)$ là $x \in \mathbb{R}$.

b) Đúng: Ta có: $(x-2)\sqrt{2x^2+4}=x^2-4$

$$\Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x^2+4}=(x-2)(x+2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=0 \\ \sqrt{2x^2+4}=x+2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \begin{cases} x+2 \ge 0 \\ 2x^2+4=x^2+4x+4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \begin{cases} x \ge -2 \\ x^2-4x=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \begin{cases} x \ge -2 \\ x=0 \vee x=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm phương trình là: $S=\{0;2;4\}$.

c) Sai: Ta có $0+2+4=6$.

d) Đúng: Vì 0 ; 2 ; 4 là các số chẵn

Câu 4: Cho phương trình $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điều kiện của phương trình là $x \ge -\frac{7}{2}$

b) Phương trình có nghiệm $x=1$.

c) Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

d) Tích các nghiệm của phương trình bằng -6.

Lời giải

a) Đúng: Điều kiện $2x+7 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -\frac{7}{2}$

b) Đúng: Thay $x=1$ vào phương trình thấy thoả mãn

c) Sai: Ta có $(x-2)\sqrt{2x+7}=x^2-4 \Leftrightarrow (x-2)\sqrt{2x+7}=(x-2)(x+2)$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left[\sqrt{2x+7}-(x+2)\right]=0.$$

Trường hợp 1: $x-2=0 \Rightarrow x=2$ thử lại vào phương trình ban đầu ta thấy thỏa mãn.

Trường hợp 2: $\sqrt{2x+7}-(x+2)=0 \Rightarrow \sqrt{2x+7}=x+2$.

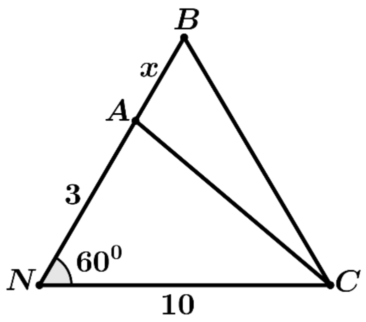
Bình phương hai vế phương trình ta được: $2x+7=(x+2)^2 \Rightarrow x^2+2x-3=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Thử lại vào phương trình ban đầu ta thấy chỉ có giá trị $x=1$ thỏa mãn.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=1, x=2$.

d) Sai: Tích hai nghiệm của phương trình là $1.2=2$

Câu 5: Khoảng cách từ nhà An ở vị trí N đến cột điện C là 10 m. Từ nhà An đi x (m) theo phương tạo bởi NC một góc $60°$ đến vị trí A sau đó đi tiếp 3(m) đến vị trí B như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $BN = x+3\,(\text{m})$

b) $AC = \sqrt{x^2-10x+100}$.

c) $BC = \sqrt{x^2-10x+99}$

d) Để $BC = 2AN$ thì giá trị của x thuộc khoảng $(5;6)$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $BN = BA + AN = x+3\,(\text{m})$.

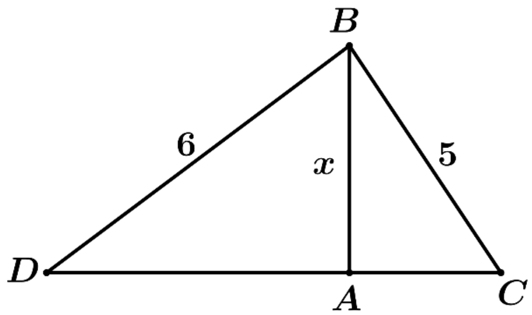
b) Đúng: $AC = \sqrt{AN^2+NC^2-2AN.NC.\cos 60°} = \sqrt{x^2-10x+100}$.

c) Sai: $BC = \sqrt{BN^2+NC^2-2BN.NC.\cos 60°} = \sqrt{(x+3)^2+100-10(x+3)} = \sqrt{x^2-4x+79}$

d) Sai: $BC = 2AN \Rightarrow \sqrt{x^2-4x+79} = 2x \Rightarrow x^2-4x+79 = 4x^2 \Rightarrow 3x^2+4x-79=0$

$\Rightarrow x = \dfrac{-2\pm\sqrt{241}}{3}$. Vì $x>0$ nên ta có $x = \dfrac{-2+\sqrt{241}}{3} \approx 4{,}5 \notin (5;6)$.

Câu 6: Cho tam giác ABC và ABD cùng vuông tại A như hình vẽ. Có $AB = x, BC = 5, BD = 6$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $AC=\sqrt{25-x^2}$

b) $AD=\sqrt{36-x^2}$

c) Chỉ có một giá trị của x để chu vi tam giác ABC bằng 12.

d) Để $AD=2AC$ thì giá trị của x thuộc khoảng $(4;5)$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $AC=\sqrt{BC^2-AB^2}=\sqrt{25-x^2}$.

b) Đúng: Ta có $AD=\sqrt{BD^2-AB^2}=\sqrt{36-x^2}$.

c) Sai: Chu vi tam giác bằng 12 khi $AB+AC+BC=12\Rightarrow x+5+\sqrt{25-x^2}=12$

$\Rightarrow\sqrt{25-x^2}=7-x\ (*)\Rightarrow 25-x^2=49-14x+x^2\Rightarrow 2x^2-14x+24=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=4\\x=3\end{array}\right.$

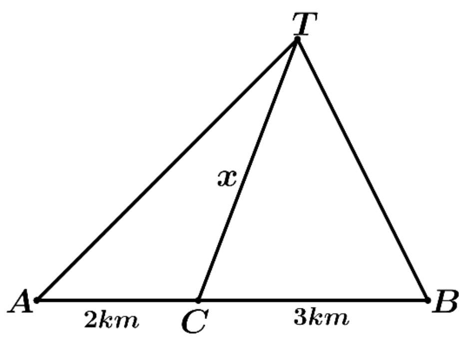
Thay vào $x=3,x=4$ vào phương trình $(*)$ ta thấy cả hai giá trị đều thỏa mãn.

d) Đúng : $AD=2AC\Rightarrow\sqrt{36-x^2}=2\sqrt{25-x^2}\Rightarrow 36-x^2=4\left(25-x^2\right)$

$\Rightarrow 3x^2=46\Rightarrow x=\pm\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$

Thay lần lượt hai giá trị của x và phương trình $(**)$ ta thấy chỉ có $x=\dfrac{8\sqrt{3}}{3}\approx 4,6\in(4;5)$ thỏa mãn.

Câu 7: Một con tàu T rời cảng C và chuyển động theo phương tạo với bờ biển một góc $60°$. Trên bờ biển có hai đài quan sát A và B nằm về hai phía của cảng C và lần lượt cách cảng một khoảng là $2\,\text{km}$ và $3\,\text{km}$ (như hình vẽ). Đặt $TC=x\ (x>0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $TB=\sqrt{x^2-3x+9}$.

b) $\widehat{TCA}=120^{\circ}$.

c) Phương trình khoảng cách từ tàu T đến hai đài quan sát bằng nhau là

$$\sqrt{x^2-3x+9}=\sqrt{x^2+2x+3}.$$

d) $x=2$.

Lời giải

a) Đúng: $TC = x\ (x > 0)$.

Áp dụng định lý cosin ΔTCB ta có:

$$TB = \sqrt{TC^2 + BC^2 - 2TC.BC.\cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 + 3^2 - 2x.3.\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 - 3x + 9}$$

b) Đúng: $TCB + TCA = 180°$ (hai góc kề bù) nên $TCA = 180° - TCB = 180° - 60° = 120°$

c) Sai: $TC = x\ (x > 0)$.

Trong tam giác TCB: $TB = \sqrt{TC^2 + BC^2 - 2TC.BC.\cos 60^\circ} = \sqrt{x^2 + 3^2 - 2x.3.\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 - 3x + 9}$

.

Trong tam giác TCA có $TCA = 180° - 60° = 120°$.

$TA = \sqrt{TC^2 + AC^2 - 2TC.AC.\cos 120^\circ} = \sqrt{x^2 + 2^2 - 2x.2.\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$

Do $TB = TA \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 3x + 9} = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$.

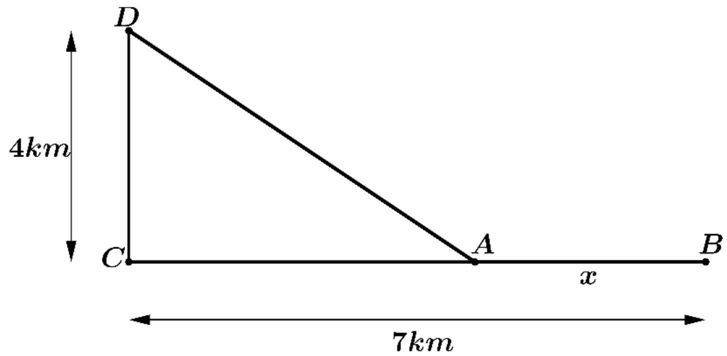
d) Sai: $\sqrt{x^2 - 3x + 9} = \sqrt{x^2 + 2x + 4}$

$\left(\sqrt{x^2 - 3x + 9}\right)^2 = \left(\sqrt{x^2 + 2x + 4}\right)^2 \Rightarrow x^2 - 3x + 9 = x^2 + 2x + 4 \Rightarrow 5x = 5 \Rightarrow x = 1$

Thử $x = 1$ vào phương trình ta được $\sqrt{1^2 - 3.1 + 9} = \sqrt{1^2 + 2.1 + 4} \Leftrightarrow \sqrt{6} = \sqrt{6}$ (đúng).

Vậy $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

Câu 8: Cho hòn đảo D cách bờ $4\,\text{km}$ $(CD = 4\text{ km})$. Ngôi làng B cách C một khoảng $7\,\text{km}$. Nhà nước muốn xây dựng một trạm y tế trên đất liền, sao cho có thể phục vụ được cho dân cư cả đảo D và làng B. Biết trung bình vận tốc di chuyển tàu cứu thương là 100 (km/h), xe cứu thương là 80 (km/h). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Giả sử trạm y tế đặt ở điểm A trên hình $AB = x$ (km) thì $x > 0$.

b) Khi $AB = x$ thì $AC = 7 - x$ (km).

c) Thời gian đi từ D đến A là $\dfrac{\sqrt{x^2-14x+55}}{100}$

d) $AB=4\,(\text{km})$

Lời giải

a) Đúng: Giả sử trạm y tế đặt ở điểm A trên hình $AB=x\,(\text{km})$ thì $x>0$

b) Đúng: Ta có $AB=x$; $BC=7$ nên $AC=7-x\,(\text{km})$

c) Đúng: Áp dụng định lý Pytago trong ΔACD vuông tại C ta có :

$$AD^2=DC^2+AC^2=4^2+(7-x)^2=16+49-14x+x^2=x^2-14x+55 \Rightarrow AD=\sqrt{x^2-14x+55}$$

Thời gian đi từ D đến A là $\dfrac{\sqrt{x^2-14x+65}}{100}$

d) Đúng: Giả sử trạm y tế đặt ở điểm A trên hình $AB=x(x>0)$.

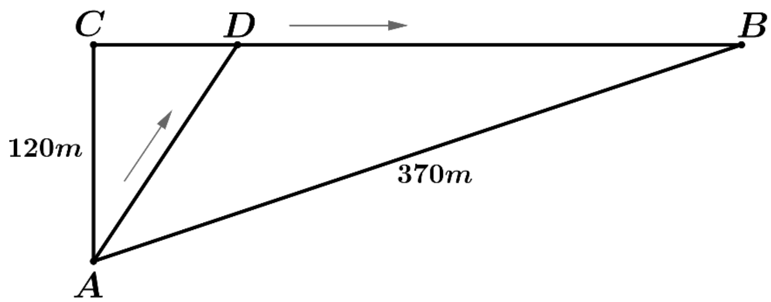
Khi đó $AB=x \Rightarrow CA=7-x \Rightarrow DA=\sqrt{DC^2+CA^2}=\sqrt{4^2+(7-x)^2}=\sqrt{x^2-14x+65}$

Thời gian đi từ D đến A là $\dfrac{\sqrt{x^2-14x+65}}{100}$; thời gian đi từ B đến A là $\dfrac{x}{80}$

Vì thời gian bằng nhau nên $\dfrac{\sqrt{x^2-14x+65}}{100}=\dfrac{x}{80} \Rightarrow x^2-14x+65=\dfrac{25}{16}x^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=4(tm) \\ x=\dfrac{-260}{9}(ktm) \end{array}\right.$

Vậy $AB=4$.

Câu 9: Một chú thỏ ngày nào cũng ra bờ suối ở vị trí A, cách cửa hang của mình tại vị trí B là 370 mét để uống nước, sau đó chú thỏ sẽ đến vị trí C cách vị trí A 120 mét để ăn cỏ rồi trở về hang. Tuy nhiên, hôm nay sau khi uống nước ở bờ suối, chú thỏ không đến vị trí C như mọi ngày mà chạy đến vị trí D để tìm cà rốt rồi mới trở về hang (xem hình bên dưới). Biết rằng, tổng thời gian chú thỏ chạy từ vị trí A đến vị trí D rồi về hang là 30 giây (không kể thời gian tìm cà rốt), trên đoạn AD chú thỏ chạy với vận tốc là 13 (m/s), trên đoạn BD chú thỏ chạy với vận tốc là 15 (m/s). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Gọi thời gian chú thỏ chạy trên đoạn AD là $x(0<x<30)$ (giây) thì khi đó thời gian chú thỏ chạy trên đoạn BD là $30-x$ (giây).

b) $AD = 13x$ (m).

c) $BD = 15(30 - x)$ (m).

d) Khoảng cách giữa hai vị trí C và D bằng 100 m.

Lời giải

a) Đúng: Gọi thời gian chú thỏ chạy trên đoạn AD là $x(0 < x < 30)$ (giây), khi đó thời gian chú thỏ chạy trên đoạn BD là $30 - x$ (giây).

b) Đúng: Quãng đường AD là $13x(m)$.

c) Đúng: $BD = 15(30 - x)$ (m).

d) Sai: Độ dài quãng đường BC là: $\sqrt{370^2 - 120^2} = 350$ (m).

Tam giác ACD vuông tại C nên $CD = \sqrt{(13x)^2 - 120^2}$ (m).

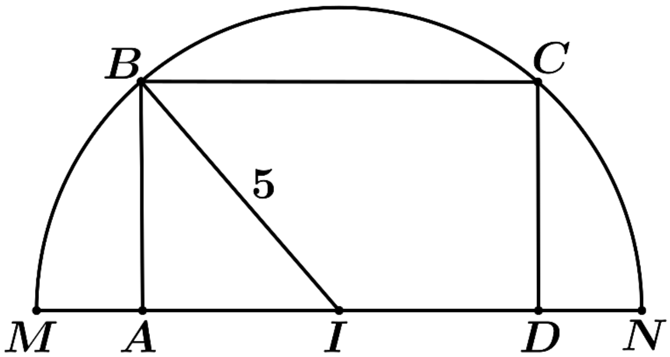
Mặt khác: $CD = BC - BD = 350 - 15(30 - x)$ m.

Do đó ta có: $\sqrt{(13x)^2 - 120^2} = 350 - 15(30 - x)$.

Giải phương trình này và kết hợp với điều kiện $0 < x < 30$ ta nhận $x = 10$ (giây).

Vậy khoảng cách giữa vị trí C và vị trí D là: $350 - 15.(30 - 10) = 50$ m.

Câu 10: Xét nửa đường tròn đường kính $MN = 10$. Xét điểm B (không trùng hai điểm M, N) di động trên nửa đường tròn và hình chiếu của B trên đoạn MN là điểm A, vẽ hình chữ nhật $ABCD$ với C cũng thuộc nửa đường tròn. Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ bằng 22.



a) Đặt $IA = x \in (0;5) \Rightarrow AD = 2x$.

b) Độ dài cạnh: $AB = \sqrt{5^2 + x^2}$.

c) Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là : $4x + 2\sqrt{5^2 - x^2}$.

d) Khoảng cách giữa hai điểm I, A bằng 4 hoặc bằng $\dfrac{24}{5}$.

Lời giải

a) Đặt $IA = x \in (0;5) \Rightarrow AD = 2AI = 2x$.

b) Xét tam giác IAB vuông tại A, ta có: $AB = \sqrt{5^2 - x^2}$.

c) Chu vi hình chữ nhật $ABCD$ là: $2AB + 2AD = 4x + 2\sqrt{5^2 - x^2}$.

d) Ta có Chu vi hình chữ nhật bằng 22:

$2AB + 2AD = 4x + 2\sqrt{5^2 - x^2} = 22 \Leftrightarrow \sqrt{25 - x^2} = 11 - 2x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11 - 2x \ge 0 \\ 25 - x^2 = 121 - 44x + 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{11}{2} \\ 5x^2 - 44x + 96 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{11}{2} \\ x = 4 \vee x = \dfrac{24}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4 \vee x = \frac{24}{5}.$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm I, A bằng 4 hoặc bằng $\dfrac{24}{5}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Điều kiện của phương trình $x - \sqrt{2x-5} = 4$ là $x \in \left[\dfrac{a}{b}; +\infty\right); b > 0;$ $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Giá trị $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Điều kiện của phương trình là $2x - 5 \ge 0 \Rightarrow x \ge \dfrac{5}{2} \Rightarrow x \in \left[\dfrac{5}{2}; +\infty\right)$

Suy ra $a = 5; b = 2 \Rightarrow a + b = 7$.

Câu 2: Phương trình $\sqrt{x-3} - \sqrt{3x-15} = 0$ có nghiệm là $x = \dfrac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}^*$ phân số $\dfrac{m}{n}$ tối giản. Giá trị $m.n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x-3} - \sqrt{3x-15} = 0 \Rightarrow \sqrt{x-3} = \sqrt{3x-15} \Rightarrow x = 6$

Thử lại ta thấy có nghiệm là $x = 6 \Rightarrow m = 6,\ n = 1 \Rightarrow m.n = 6.$.

Câu 3: Phương trình $\sqrt{3-2x} = x + 1$ có một nghiệm dạng $x_0 = a + \sqrt{b}$ với a, b là các số nguyên. Giá trị biểu thức $T = 2a + 3b$ bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Ta có $\sqrt{3-2x} = x + 1 \Rightarrow 3 - 2x = (x+1)^2 \Rightarrow x^2 + 4x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2 + \sqrt{6} \\ x = -2 - \sqrt{6} \end{array}\right.$.

Thử lại ta thấy phương trình có nghiệm là $x = -2 + \sqrt{6}$.

Do đó $a = -2, b = 6$, suy ra $T = 2a + 3b = 14$.

Câu 4: Tính tổng các nghiệm của phương trình $\sqrt{3x^2-7x-5}=|x-4|$

Lời giải

Bình phương hai vế phương trình ta có $3x^2-7x-5=x^2-8x+16$

$\Leftrightarrow 2x^2+x-21=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=-\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$.

Thay $x=3$ vào phương trình, ta được: $1=|-1|$ (thỏa mãn).

Thay $x=-\dfrac{7}{2}$ vào phương trình, ta được: $\dfrac{15}{2}=\left|-\dfrac{15}{2}\right|$ (thỏa mãn).

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $3-\dfrac{7}{2}=-0,5$.

Câu 5: Một mảnh đất hình chữ nhật có độ dài đường chéo là 50m. Người ta dùng hết $140m$ hàng rào để rào khu đất đó. Tính diện tích của mảnh vườn (đơn vị: m^2).

Lời giải

Gọi x (m) là độ dài một cạnh của hình chữ nhật $\Rightarrow$ cạnh còn lại là $\sqrt{50^2-x^2}$

Chu vi của hình chữ nhật là $2\left(\sqrt{50^2-x^2}+x\right)$

Theo giả thiết ta có $2\left(\sqrt{50^2-x^2}+x\right)=140 \Leftrightarrow \sqrt{50^2-x^2}+x=70 \Leftrightarrow \sqrt{50^2-x^2}=70-x$

Bình phương hai vế ta được $x^2-70x+1200=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=30 \\ x=40 \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy hai giá trị này đều thỏa mãn.

Vậy với hai giá trị trên của x thì diện tích của mảnh vườn là $30.40=1200\left(m^2\right)$

Câu 6: Một hoa văn trang trí có hình dạng một hình chữ nhật nội tiếp trong một hình tròn có đường kính là 10cm. Người ta dùng dây kim loại để trang trí viền của hình chữ nhật và hết 28cm dây. Gọi x,y là kích thước hai cạnh của hình chữ nhật đó. Tính giá trị biểu thức $20x.y$.

Lời giải

Ta có đường kính của hình tròn bằng độ dài đường chéo của hình chữ nhật.

Theo giả thiết ta có $y=\sqrt{10^2-x^2}$ và số mét dây kim loại dùng để trang trí bằng chu vi của hình chữ nhật.

Chu vi hình chữ nhật là $2\left(x+\sqrt{10^2-x^2}\right)=28 \Leftrightarrow x+\sqrt{10^2-x^2}=14 \Leftrightarrow \sqrt{10^2-x^2}=14-x$

Giải phương trình ta được $x=6$ hoặc $x=8$.

Vậy $x=6 \Rightarrow y=8$ hoặc $x=8 \Rightarrow y=6$.

Khi đó $20x.y = 20.6.8 = 960$.

Câu 7: Bác An có một mảnh đất hình tam giác vuông có cạnh huyền bằng $100\,m$. Bác đã dùng $240m$ hàng rào để rào mảnh đất và trồng hoa. Biết mỗi mét vuông trồng hoa hết 10.000 đồng. Tính số tiền bác An đầu tư để trồng hoa (đơn vị là triệu đồng)

Lời giải

Gọi x là độ dài một cạnh góc vuông, cạnh còn lại là $\sqrt{100^2 - x^2}$

Ta có $\sqrt{100^2 - x^2} + x + 100 = 240 \Leftrightarrow \sqrt{100^2 - x^2} = 140 - x$

Giải phương trình ta được $x = 60$ hoặc $x = 80$

Diện tích mảnh đất là $S = 60.80 = 4800\,(\text{m}^2)$

Số tiền bác An đầu tư để trồng hoa là $4800 \times 10.000 = 48.000.000$ đồng $= 48$ (triệu đồng).

Câu 8: Bác An có một tấm lưới hình chữ nhật dài 200 mét. Bác muốn dùng tấm lưới để làm 1 cái chuồng lợn hình chữ nhật cạnh bờ sông. Chuồng không cần phải rào chắn ở phía bờ sông. Xác định chiều dài của chuồng để diện tích chuồng lớn nhất mà bác An có thể xây dựng.

Lời giải

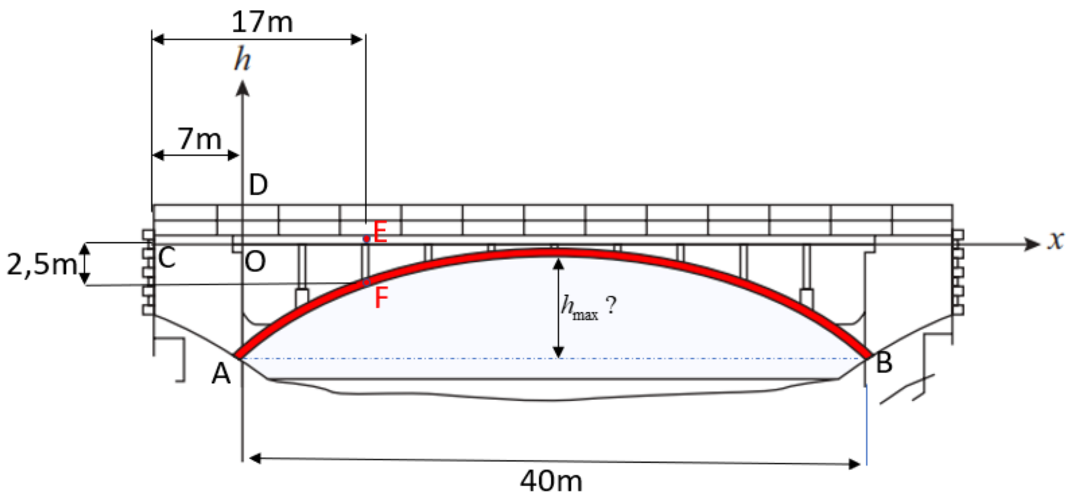
Gọi x $(x>0, m)$ là chiều rộng của chuồng, chiều dài của chuồng là $200-2x$

Diện tích của chuồng là $S = x(200-2x) \Leftrightarrow S = -2x^2 + 200x$

Để diện tich trang trại lớn nhất thì $x = \dfrac{-200}{2.(-2)} = 50$

Chiều dài của chuồng là $200 - 2.50 = 100$

Câu 9: Một chiếc cầu được bắc qua sông. Để trợ lực cho cây cầu, người ta làm một vòm đỡ cong hình parabol (màu đỏ). Với hệ trục toạ độ xOh được gắn vào như hình vẽ, biết rằng khoảng cách giữa 2 chân của vòm đỡ là $AB = 40$ m. Khoảng cách từ chân cầu (điểm C) tới điểm O là 7 m. Tại một điểm cách chân cầu (điểm C) 17 m, người ta đo được khoảng cách từ mặt cầu xuống vòm đỡ là $2,5$m. Tìm chiều cao tối đa $h_{\max}$ của vòm đỡ (khoảng cách từ đỉnh vòm đến đường thẳng AB).



Lời giải

Parabol $h(x)$ có đỉnh nằm trên trục Ox và nằm hoàn toàn dưới trục Ox với hệ toạ độ như hình vẽ nên suy ra phương trình của $h(x)$ có dạng $h(x)=a(x-k)^2$ với $(a<0)$

Do $AB=40$ nên hoành độ của đỉnh parabol là 20. Do đó $k=20$.

Ta có $OE=17-7=10$, suy ra toạ độ điểm F nằm trên parabol là $F(10;-2,5)$

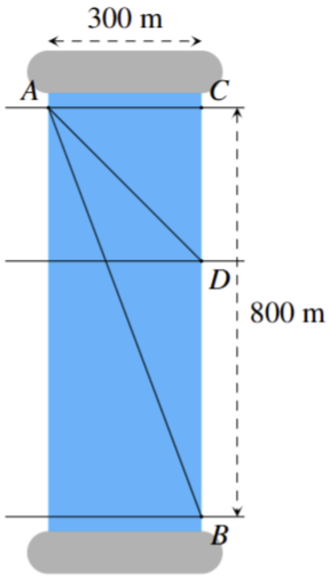
Thay toạ độ $F(10;-2,5)$, $k=20$ vào phương trình parabol ta có: $-\frac{5}{2}=a(10-20)^2 \Leftrightarrow a=\frac{-1}{40}$.

Ta có phương trình parabol $h(x)=\frac{-1}{40}(x-20)^2$.

Độ dài h_{max} của vòm đỡ cũng chính là độ dài đoạn OA.

Ta có $OA=|h(0)|=\left|\frac{-1}{40}(0-20)^2\right|=10\,\text{m}$.

Câu 10: Một người đứng ở điểm A trên một bờ sông rộng 300 m, chèo thuyền đến vị trí D, sau đó chạy bộ đến vị trí B cách C một khoảng $800\,\text{m}$ như hình. Vận tốc chèo thuyền là 6 (km/h), vận tốc chạy bộ là 10 (km/h) và giả sử vận tốc dòng nước không đáng kể. Tính khoảng cách từ vị trí C đến D, biết tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là $7,2$ phút.



Lời giải

Đổi $300\,\text{m}=0,3\,\text{km}$; $800\,\text{m}=0,8\,\text{km}$; $7,2$ phút $=0,12$ giờ

Gọi khoảng cách từ C đến D là x (km) với $0,8>x>0$

Khi đó: $DB=0,8-x$ (km)

Theo định lý Pytago ta có: $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}=\sqrt{0,3^2+(0,8-x)^2}$ (km)

Thời gian đi từ A đến D là: $\dfrac{\sqrt{0,3^2+(0,8-x)^2}}{6}$ giờ

Thời gian đi từ D đến B là: $\dfrac{0,8-x}{10}$ giờ

Tổng thời gian người đó chèo thuyền và chạy bộ từ A đến B là 7,2 phút nên ta có phương trình:

$$\frac{\sqrt{0,3^2+(0,8-x)^2}}{6}+\frac{0,8-x}{10}=0,12 \Leftrightarrow \sqrt{0,3^2+(0,8-x)^2}.5+3.(0,8-x)=0,12.30$$

$$\Leftrightarrow 5.\sqrt{0,3^2+(0,8-x)^2}-3x-1,2=0 \Leftrightarrow 5.\sqrt{0,3^2+(0,8-x)^2}=3x+1,2$$

$$\Leftrightarrow 25.\left[0,3^2+(0,8-x)^2\right]=(3x+1,2)^2 \Leftrightarrow 25.\left(x^2-1,6x+0,73\right)=9x^2+7,2x+1,44$$

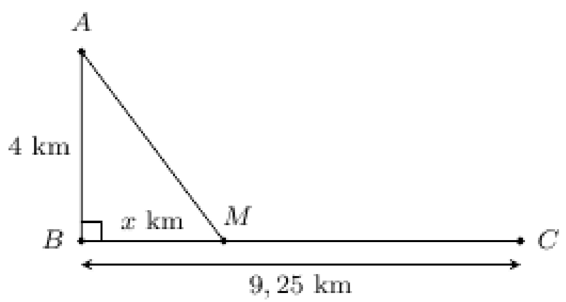
$$\Leftrightarrow 16x^2-47,2x+16,81=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{59+30\sqrt{2}}{40}>0,8(ktm) \\ x=\dfrac{59-30\sqrt{2}}{40}\approx 0,414(tm) \end{array}\right.$$

Ta bình phương được do $x>0 \Rightarrow 3x+1,2>0$ nên khoảng cách từ vị trí C đến D là 414m.

Câu 11: Bác Việt sống và làm việc tại trạm hải đăng cách bờ biển 4 km. Hằng tuần bác chèo thuyền vào vị trí gần nhất trên bờ biển là bến Bính để nhận hàng hoá do cơ quan cung cấp. Tuần này, do trục trặc về vận chuyển nên toàn bộ số hàng vẫn đang nằm ở thôn Hoành, bên bờ biển cách bến Bính $9,25$ km và sẽ được anh Nam vận chuyển trên con đường dọc bờ biển tới bến Bính bằng xe kéo. Bác Việt đã gọi điện thống nhất với anh Nam là họ sẽ gặp nhau ở vị trí nào đó giữa bến Bính và thôn Hoành để hai người có mặt tại đó cùng lúc, không mất thời gian chờ nhau. Hỏi vị trí hai người dự định gặp nhau cách bến Bính bao nhiêu km? Biết rằng vận tốc kéo xe của anh Nam là 5 km/h và thuyền của bác Việt di chuyển với vận tốc 4 km/h. Ngoài ra giả thiết rằng đường bờ biển từ thôn Hoành đến bến Bính là đường thẳng và bác Việt cũng luôn chèo thuyền tới một điểm trên bờ biển theo một đường thẳng.

Lời giải

Ta mô hình hoá bài toán như trong hình vẽ.



Trạm hải đăng ở vị trí A; bến Bính ở B và thôn Hoành ở C. Giả sử bác Việt chèo thuyền cập bến từ A gặp anh Nam ở vị trí M và ta đặt $BM=x$ (km), $(x>0)$.

Khi đó $AM = \sqrt{x^2 + 16}$ nên thời gian mà bác Việt chèo thuyền là $\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{4}$.

Anh Nam đi từ C đến M, khi đó $CM = 9,25 - x$ nên thời gian mà anh Nam kéo xe là $\dfrac{9,25-x}{5}$

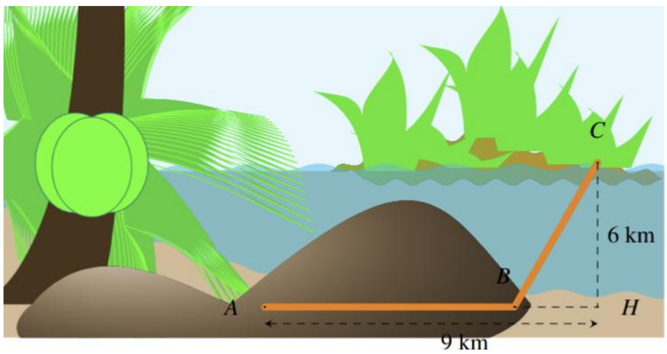
Để hai người không phải chờ nhau thì thời gian chèo thuyền bằng thời gian kéo xe nên ta có phương trình: $\dfrac{\sqrt{x^2+16}}{4} = \dfrac{9,25-x}{5} \Rightarrow 25\left(x^2+16\right) = 16\left(x-9,25\right)^2$

$$\Rightarrow 9x^2 + 296x - 969 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -\dfrac{323}{9} \end{array}\right..$$

Thử lại, kết hợp với điều kiện $x > 0$, ta được $BM = x = 3$ (km).

Vậy vị trí gặp nhau cách bến Bính $3\,\text{km}$.

Câu 12: Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm A trên bờ đến một điểm C trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Để thực hiện, công ty dự định xây dựng phần đường ống trên bờ từ A đến B và đường ống dưới nước từ B đến C (hình vẽ).



Biết giá để xây đường ống trên bờ là 50.000U SD mỗi km, và 130.000U SD mỗi km để xây dưới nước. Xác định đoạn đường từ A đến B để tổng chi phí xây dựng lăp đặt từ A đến C khoảng 1.170.000 USD.

Lời giải

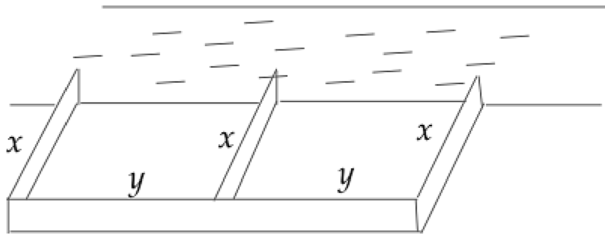
Đặt $x = BH$ với $x \in [0;9]$. Khi đó, ta có: $BC = \sqrt{x^2+36}; AB = 9 - x$.

Chi phí xây dựng ống là: $130000\sqrt{x^2+36} + 50000(9-x)$.

Để chi phí khoảng 1170000, ta có phương trình: $130000\sqrt{x^2+36} + 50000(9-x) = 1170000$

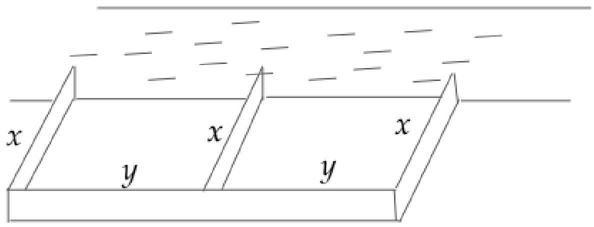
$\Leftrightarrow x = \dfrac{5}{2}$. Vậy $AB = 9 - x = 6,5$ (km).

Câu 13: Ông Tư có khu đất trống dọc bờ sông. Dịp này ông bỏ ra 15 triệu đồng làm hàng rào hình chữ E để phân làm hai mảnh vườn hình chữ nhật bằng nhau trồng rau và trồng hoa có kích thước như hình bên dưới. Đối với mặt hàng rào song song bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60.000 đồng một mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50.000 đồng một mét. Để xây dựng được hàng rào hình chữ E như yêu cầu đề bài thì giá trị x thỏa mãn $a < x < b$. Giá trị của b bằng bao nhiêu?



Lời giải

Các kích thước của hàng rào như hình vẽ (với $x,\ y>0$ và có đơn vị m)



Khi đó chi phí để trả cho nguyên vật liệu làm hàng rào là:

$3x.50000+2y.60000=15000000 \Leftrightarrow 15x+12y=1500 \Rightarrow y=\dfrac{500-5x}{4}$.

Diện tích của khu vườn sau khi được rào lại là $S=x.2y=2x.\dfrac{500-5x}{4}=\dfrac{1}{2}\left(-5x^2+500x\right)$.

Để xây dựng được hàng rào hình chữ E như yêu cầu đề bài thì $S>0 \Leftrightarrow 0<x<100$.

-----------------HẾT-----------------