

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

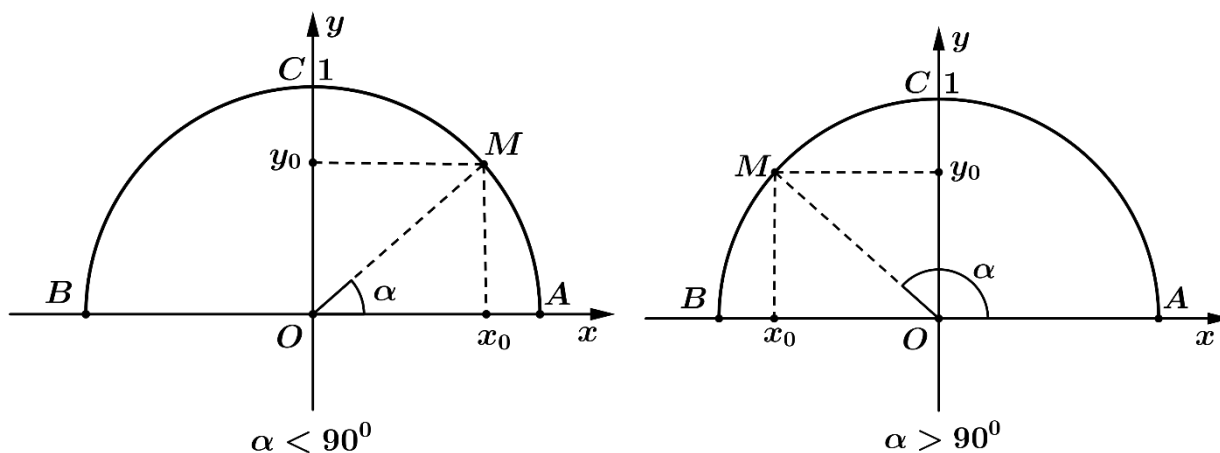
BÀI 01 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Giá trị lượng giác của một góc

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành như hình dưới đây được gọi là nửa đường tròn đơn vị.

Cho trước một góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Khi đó có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\angle xOM = \alpha$.



Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\angle xOM = \alpha$. Khi đó:

- sin của góc α là tung độ y_0 của điểm M được kí hiệu là $\sin \alpha$
- cosin của góc α là hoành độ x_0 của điểm M được kí hiệu là $\cos \alpha$
- Khi $\alpha \neq 90^\circ$ (hay là $x_0 \neq 0$), tang của α là $\frac{y_0}{x_0}$ được kí hiệu là $\tan \alpha$
- Khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$ (hay là $y_0 \neq 0$) côtang của α là $\frac{x_0}{y_0}$ được kí hiệu là $\cot \alpha$.

Từ định nghĩa trên ta có:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ); \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ \text{ và } \alpha \neq 180^\circ); \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} (\alpha \notin \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\})$$

Sau đây là bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt nên nhớ.

α GTLG	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

2 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác

- Hai góc bù nhau:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

- Hai góc phụ nhau:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

3 Các hệ thức lượng giác cơ bản

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$

B // PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính các giá trị của biểu thức lượng giác

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

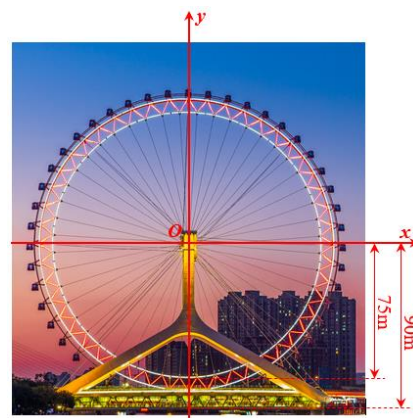
Bài tập 1: Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

- $(2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$
- $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$
- $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

Bài tập 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

- $A = \tan 30^\circ + \cot 30^\circ$
- $B = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$
- $C = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$
- $D = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$
- $E = \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$
- $F = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$
- $G = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$
- $H = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$
- $I = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$
- $J = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 0^\circ \cdot \tan 58^\circ + \frac{5 \tan^2 18^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$
- $K = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \cos^2 17^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$

Bài tập 3: Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m như hình vẽ dưới đây. Thời gian thực hiện mỗi vòng quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay thì sau 20 phút quay người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$. B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$.
 C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$. D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$.

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3} \sin 150^\circ + \cos 135^\circ - \sin 120^\circ$ ta được

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\sqrt{2}$. C. $-\sqrt{2}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 3: Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

- A. 0. B. 2. C. 3. D. 1.

Câu 4: Tổng $\sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \sin^2 7^\circ + \dots + \sin^2 83^\circ + \sin^2 85^\circ + \sin^2 87^\circ$ bằng

- A. 21. B. 23. C. 22. D. 24.

Câu 5: Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Câu 6: Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. -1.

Câu 7: Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{\cos^2 x} + 3 - 2 \tan^2 x$ bằng

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 2.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 9: Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

Câu 10: Biết rằng $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin x \cos x$ bằng

- A. $-\frac{5}{18}$. B. $-\frac{5}{9}$. C. $\frac{5}{18}$. D. $\frac{5}{9}$.

Câu 11: Cho $\tan x - \cot x = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x + \cot^2 x$ bằng

- A. 0. B. 4. C. 6. D. 2.

Câu 12: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1$ bằng

- A. 0. B. 1. C. 3. D. 2.

Câu 13: Biểu thức $\sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$ không phụ thuộc vào a và có giá trị bằng

- A. 6. B. 5. C. 3. D. 4.

Câu 14: Cho $H = \cos(x + 60^\circ) - 5 \cos(120^\circ - x) - 6 \sin(x + 60^\circ) \cdot \cot(x + 60^\circ)$ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $H = -1$. B. $H = \frac{1}{3}$. C. $H = \frac{\pi}{3}$. D. $H = 0$.

Câu 15: Cho $D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $D = 0$. B. $D = 8$. C. $D = 2022$. D. $D = 18$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $A = \tan 2^\circ \tan 3^\circ \tan 4^\circ \dots \tan 87^\circ \tan 88^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Góc có số đo 2° và góc có số đo 88° là hai góc phụ nhau.

b) Biểu thức A được đưa về dạng

$$A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ).$$

c) Ta có $\tan 88^\circ = \cot 2^\circ$.

d) Giá trị của biểu thức A bằng 2.

Câu 2: Cho $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Xét biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với mọi góc a, b ta luôn có $\sin^2 a + \cos^2 b = 1$.

b) Biểu thức $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ được viết lại $2 \sin a \cos a = 1$

c) Biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$ được viết lại $P = 1 - 2 \sin a \cos a$

d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ và biểu thức $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với mọi góc α ta luôn có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

b) Với mọi góc α ta luôn có $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha$.

c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2$.

d) Biểu thức $P = 7$ khi và chỉ khi $m = \pm 3$.

Câu 4: Cho $\sin x + \cos x = m$ và biểu thức $M = \sin x \cdot \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

b) $2M = (\sin x + \cos x)^2 - 1$

c) Biểu thức $\sin x + \cos x = m$ được đưa về dạng $1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$.

d) Khi $M = \frac{1}{4}$ thì $m = \frac{3}{4}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức: $P = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$.

Câu 2: Giá trị của biểu thức $P = 5(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x$ bằng

Câu 3: Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + (\tan \alpha + \cot \alpha)^2$

Câu 4: Cho các góc α, β thỏa mãn $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ và $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin^6 \alpha + \sin^6 \beta + 3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$.

Câu 5: Xạ phẫu Gamma Knife là phương pháp điều trị u não (không cần mở hộp sọ) bằng cách sử dụng bức xạ gamma tập trung, hội tụ chính xác vào tổn thương, không làm hại mô lành. Nếu khối u



của bệnh nhân cách mặt da 6,3 cm, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u 9 cm để tránh làm tổn thương mô thì góc tạo bởi chùm tia với mặt da là β . Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \beta$

Câu 6: Cho $\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \tan^n x$ và $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^n x + \cos^n x$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Câu 7: Guồng nước (cọn nước) được biết đến là một công cụ đặc lực trong sản xuất nông nghiệp của bà con dân tộc Thái ở nước ta.



Chiếc guồng được cấu tạo giống như bánh xe đạp, có đường kính 10 m. Tâm quay ở độ cao 6,5 m. Nan hoa làm bằng loại tre già, có sức chịu đựng trong môi trường ẩm ướt. Vành guồng rộng 50cm, được đặt các phen nửa để cản nước, tạo lực đẩy guồng quay và có gắn các ống bương (lùng) buộc chéo khoảng 30 độ để mức đầy nước khi chìm xuống. Lực đẩy của nước khiến guồng quay liên tục, đến tầm cao nhất định, thì các ống bương bắt đầu đổ nước vào các máng dài. Biết thời gian cọn nước thực hiện 1 vòng quay là 3 phút. Máng nước cao 1 m. Nếu một ống bương đang ở vị trí thấp nhất thì thời gian nó di chuyển đến vị trí máng nước là

-----HẾT-----



Dạng 2: Cho một giá trị lượng giác. Tính các giá trị còn lại**Phương pháp:**

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$

b) Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\tan \alpha$

c) Cho α là góc tù và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính giá trị của biểu thức $3\sin \alpha + 2\cos \alpha$

Bài tập 2: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Biết $\cot \alpha = -a$, $a > 0$. Tính $\cos \alpha$

b) Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

c) Cho $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $P = 2\cos^2 \alpha + 5\sin \alpha \cos \alpha + 1$

d) Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

Bài tập 3: Cho $\tan \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$

Bài tập 4: Cho $\tan a = -3$ ($0^\circ \leq a \leq 180^\circ$). Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cdot \cos a - 2\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cdot \cos a + 4\cos^2 a}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- A. $\cot \alpha = 2$. B. $\cot \alpha = \sqrt{2}$. C. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. D. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Giá trị của biểu thức $P = 3 \cot \alpha + 4 \tan \alpha$ là

- A. 7. B. $-7\sqrt{2}$. C. $7\sqrt{2}$. D. -7.

Câu 3: $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu nếu $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$?

- A. $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 4: Nếu $\tan \alpha = 3$ thì $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

- A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Câu 5: Cho $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của biểu thức $A = |\sin \alpha - \cos \alpha|$ là

- A. $\frac{\sqrt{21} + 2}{25}$. B. $\frac{\sqrt{21} - 2}{5}$. C. $\frac{\sqrt{21} + 2}{5}$. D. $\frac{\sqrt{21} - 2}{25}$.

Câu 6: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $E = \tan \alpha + \cot \alpha$ là

- A. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{9}{4}$.

Câu 7: Cho $\cot \alpha = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + 3 + \tan^2 \alpha$ bằng

- A. $\frac{23}{2}$. B. $\frac{23}{4}$. C. $\frac{23}{8}$. D. 23.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 9: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Biểu thức: $P = \frac{\cos \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{15}{16}$. B. $\frac{15}{4}$. C. $\frac{15}{64}$. D. $\frac{15}{8}$.

Câu 10: Biết rằng $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos x$ bằng

- A. $-\frac{31}{34}$. B. $\frac{31}{34}$. C. $\frac{31}{18}$. D. $-\frac{31}{18}$.

Câu 11: Cho $\tan x = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \cot^2 x + \cos^2 x$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{5}{4}$. D. 5.

Câu 12: Cho $8\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 1 = 0$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^2\alpha + \sin^2\alpha$ bằng

- A. $\frac{113}{120}$. B. $\frac{113}{60}$. C. $\frac{120}{113}$. D. $\frac{60}{113}$.

Câu 13: Biết α là một góc từ 0° đến 180° thỏa mãn $\tan\alpha + \cot\alpha = \frac{5}{2}$ và $\sin\alpha > \cos\alpha$. Tính $\sin\alpha$.

- A. $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\sin\alpha = \frac{2}{3}$. D. $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

Câu 14: Biết α là một góc từ 0° đến 180° thỏa mãn $\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2}{5}$ và $\tan\alpha < 1$. Tính $\tan\alpha$.

- A. $\tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\tan\alpha = \frac{1}{2}$. C. $\tan\alpha = 2$. D. $\tan\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 15: Cho α là góc nhọn và thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $M = \frac{\tan\alpha - 3\cot\alpha + 2}{\tan\alpha + \cot\alpha}$ là

- A. $\frac{2\sqrt{2} - 23}{9}$. B. $\frac{4\sqrt{2} + 23}{9}$. C. $\frac{4\sqrt{2} + 25}{9}$. D. $\frac{4\sqrt{2} - 23}{9}$.

Câu 16: Cho α là góc tù và $\sin\alpha - \cos\alpha = \frac{4}{5}$. Giá trị của $M = \sin\alpha - 2\cos\alpha$ là

- A. $M = \frac{12 - \sqrt{34}}{10}$. B. $M = \frac{4 - 3\sqrt{34}}{10}$. C. $M = \frac{12 + \sqrt{34}}{10}$. D. $M = -\frac{4 + 3\sqrt{34}}{10}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $\sin\alpha = \frac{2}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $0 < \cos\alpha < 1$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
 b) $\sin\alpha$ được đưa về dạng $\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha}$.
 c) Giá trị của $\cot\alpha$ bằng $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.
 d) Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{\sin^2\alpha} + \tan^2\alpha$ bằng 2.

Câu 2: Cho $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$. Xét biểu thức $P = \sin^6\alpha + \cos^6\alpha$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\tan\alpha + \cot\alpha = 2 \Leftrightarrow \tan^2\alpha + \cot^2\alpha = 4$
 b) Biểu thức $\tan\alpha + \cot\alpha = 2$ được đưa về dạng $\frac{1}{\sin\alpha \cos\alpha} = 2$.
 c) Biểu thức P được viết lại $P = 1 + 3\sin^2\alpha \cos^2\alpha$.
 d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và biểu thức $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $\tan \alpha > 0$.
- b) $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0$ được viết lại $(\tan \alpha - 2)(\tan \alpha - 3) = 0$
- c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$.
- d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{91}{9}$.

Câu 4: Cho $\sin x + \cos x = m$ và biểu thức $M = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

- a) Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- b) $M^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 4 \sin \alpha \cos \alpha$
- c) Biểu thức $\sin x + \cos x = m$ được đưa về dạng $1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$.
- d) Giá trị của biểu thức M bằng $-m^2 - 1$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{9(\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha)}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Câu 2: Biết $\sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha + 2 = 0, (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. Giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3} \tan \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha$ bằng

Câu 3: Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước với độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90^\circ - \phi - \left| \cos \left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m \right) 180^\circ \right) \right| . 23,5^\circ$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \leq N \leq 172, m = 1$ nếu $173 \leq N \leq 355, m = 2$ nếu $356 \leq N \leq 365$.

Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20^\circ$ là a° (Công thức tính toán nói trên chính xác tới $\pm 0,5^\circ$). Tính giá trị của biểu thức $P = \tan a + \cot a$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Câu 4: Một quả bóng Golf kể từ lúc được đánh đến lúc chạm mặt đất đã di chuyển được một khoảng cách d (mét) theo phương nằm ngang. Biết rằng $d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}$ trong đó v_0 (m/s) là vận tốc ban đầu của quả bóng, g là gia tốc trọng trường và φ là góc đánh quả bóng so với phương nằm ngang. Tính giá trị của $\cos 2\varphi$, khi $v_0 = 15(m/s), g = 10(m/s^2), d = 18(m)$.



Câu 5: Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất $25(m)$ tại một góc ngắm α (góc hợp bởi phương ngắm với phương ngang). Nếu giảm góc ngắm đi một nửa thì vận động viên bắn trúng mục tiêu cách mặt đất $10(m)$ thì khoảng cách từ vận động viên đến bức tường bằng $10\sqrt{5}(m)$. Tính giá trị của $P = 3\cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Câu 6: Cho b, c là các số nguyên khác 0 , $c \neq 2025$ và $\tan x = \frac{2b}{2025 - c}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2025\cos^2 x + 2b\sin x \cdot \cos x + c\sin^2 x$.

-----HẾT-----

Dạng 3: Rút gọn các biểu thức lượng giác**Phương pháp:**

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Rút gọn các biểu thức sau:

$$a) A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$$

$$b) B = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$$

$$c) C = \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$$

$$d) D = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 3 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + \cos^2 a}$$

$$e) E = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$$

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức lượng giác sau:

$$a) A = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x + \cot x}$$

$$b) B = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + (\tan x - \cot x)^2 + 1$$

$$c) C = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x.$$

$$d) D = \sqrt{\cos^4 x + 4 \sin^2 x} + \sqrt{\sin^4 x + 4 \cos^2 x}$$

$$e) E = \frac{\cos^3 x + 2 \cos^2 x \sin x - \sin^2 x \cos x - 2 \sin^3 x}{(\tan x - \cot x)(\cos x + 2 \sin x)}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x.$ B. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$
 C. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x, \forall x.$ D. $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

Câu 2: Biểu thức $(\cot a + \tan a)^2$ bằng

- A. $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}.$ B. $\cot^2 a + \tan^2 a.$ C. $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}.$ D. $\cot^2 a \tan^2 a + 2.$

Câu 3: Đơn giản biểu thức $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

- A. $\sin x.$ B. $\frac{1}{\cos x}.$ C. $\frac{1}{\sin x}.$ D. $\cos x.$

Câu 4: Rút gọn biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$ ta được

- A. $P = \frac{1}{2} \tan x.$ B. $P = \frac{1}{2} \cot x.$ C. $P = 2 \cot x.$ D. $P = 2 \tan x.$

Câu 5: Rút gọn biểu thức $A = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^6 x - \cos^6 x$ ta được

- A. $\sin x \cos x.$ B. $\sin^2 x \cos^2 x.$ C. $-\sin x \cos x.$ D. $-\sin^2 x \cos^2 x.$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1}$ ta được

- A. 1. B. 2. C. -1. D. -2.

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{-\sin^2 x + 4\cos x + 5} - 2$ ta được

- A. $\cos x.$ B. $-\cos x.$ C. $4 + \cos x.$ D. $\cos x + 2.$

Câu 8: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\cot x} + \frac{3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)}{(\sin x - \cos x)^2 - 1}$ ta được

- A. $\frac{1}{\sin x \cos x}.$ B. $\frac{1}{2\sin x \cos x}.$ C. $-\frac{1}{\sin x \cos x}.$ D. $-\frac{1}{2\sin x \cos x}.$

Câu 9: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cos x}{\tan x + \cot x} + \cos x \sin^2 x$ ta được

- A. $\sin x.$ B. $\cos x.$ C. $\tan x.$ D. $\cot x.$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $P = \frac{2\sin(180^\circ - x)\sin(90^\circ - x)}{\tan x + \cot x} + \sin^4 x + \cos^4 x$ ta được

- A. 1. B. 2. C. -2. D. 3.

Câu 11: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$ ta được

- A. $\frac{1}{2}.$ B. 1. C. $\frac{3}{2}.$ D. 2.

Câu 12: Đơn giản biểu thức $P = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

- A. $\frac{1}{\cos x}$. B. $\tan x$. C. $\frac{1}{\sin x}$. D. $\cot x$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x}{\tan x - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$.
 b) Biểu thức $A = \sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x$ được viết lại $A = \frac{\tan^2 x + 3\tan x - 4}{1 + \tan^2 x}$.
 c) Rút gọn biểu thức P ta được $P = \frac{\tan x + 4}{1 + \tan^2 x}$
 d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$ khi $\cos x = \frac{1}{2}$.

Câu 2: Cho biểu thức $P = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Biểu thức $\sin^4 x + \cos^4 x$ được viết lại $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$
 b) Biểu thức $\sin^8 x + \cos^8 x$ được đưa về dạng $1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^4 x \cos^4 x$.
 c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = 2(1 - \sin^2 x \cos^2 x)^2 - 1 + 4\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^4 x \cos^4 x$
 d) Rút gọn P ta được $P = 1$.

Câu 3: Cho $A = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan^2 x \sin^2 x}$ và biểu thức $B = 1 + 2\cot^3 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Biểu thức $(\sin x + \cos x)^2$ bằng $1 - 2\sin x \cos x$.
 b) $\tan^2 x - \sin^2 x$ được viết lại $\tan^2 x \sin^2 x$
 c) Biểu thức A được đưa về dạng $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x}$.
 d) Biểu thức A bằng B .

Câu 4: Cho $P = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 4\sin x \cos x - 3}{\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x + 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 + 2\sin^2 x \cos^2 x$
 b) $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + 1$ được đưa về dạng $\sin x \cos x$
 c) Biểu thức P được đưa về dạng $-2\sin x \cos x - 2$.
 d) Khi $\cos x = \frac{1}{3}$ thì giá trị của biểu thức P bằng $-\frac{4\sqrt{2}}{9} - 2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Biết tồn tại số thực $a = a_0$ sao cho $P = P_0$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn hệ thức:

$$(9\sin^2 a - 6\sin a)^2 - (11 + 2P)(9\sin^2 a - 6\sin a) + P^2 + 11P - 80 = 0. \text{ Tính giá trị của biểu thức}$$

$$M = (2P_0 + 8) \cdot \tan^2 a_0 + 9P_0 \cdot \cos^2 a_0.$$

Câu 2: Biết rằng biểu thức $P = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}} - \frac{8}{\tan x} + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ tại $x = \alpha$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{7\sin \alpha - 7\cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$

Câu 3: Cho biểu thức $A = \frac{\sin^8 \alpha}{8} + \frac{\cos^8 \alpha}{27}$. Biết $\frac{\sin^4 \alpha}{2} + \frac{\cos^4 \alpha}{3} = \frac{1}{5}$. Tính giá trị $5A$

Câu 4: Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^4 x + 3\cos^4 x$.

Câu 5: Cho góc x thỏa mãn $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Khi đó $P = |\sin x - \cos x| = \sqrt{\frac{a}{b}}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

Câu 6: Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

-----**HẾT**-----

BÀI

02

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Cho tam giác ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, S là diện tích tam giác. Giả sử h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh A, B, C ; m_a, m_b, m_c lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh A, B, C . R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC . Ta có kết quả sau đây:

1 Định lý côsin

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ • $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$ • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

Hệ quả của định lý côsin

• $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ • $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ • $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$.

2 Định lý sin

• $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

3 Công thức tính diện tích tam giác

• Công thức diện tích:

a) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$ b) $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

c) $S = \frac{abc}{4R}$ d) $S = pr$ với $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

e) Công thức Herông $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

4 Công thức tính độ dài đường trung tuyến

• $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$ • $m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$ • $m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Áp dụng định lý cosin trong tam giác

Phương pháp: Sử dụng định lý cosin được nêu trong phần lý thuyết

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A,$ • $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B,$ • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$

Hệ quả của định lý cosin

• $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ • $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ • $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6, A = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

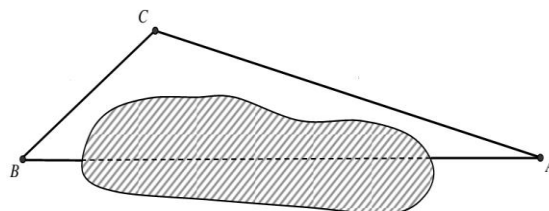
Bài tập 2: Cho tam giác ABC có $a = 7; b = 8; c = 5$. Tính A .

Bài tập 3: Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ với $b \neq c$. Tính góc BAC .

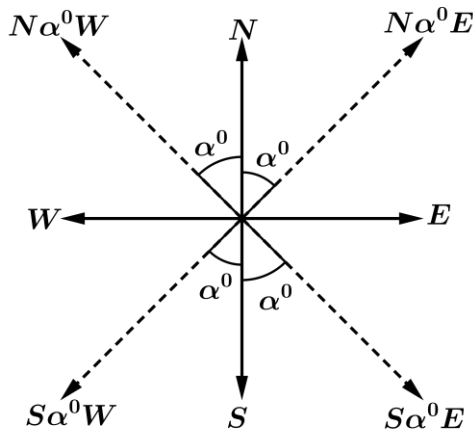
Bài tập 4: Cho $xOy = 30^\circ$. Gọi A, B là hai điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?

Bài tập 5: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho tỉ lệ $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$. Tính góc AMB

Bài tập 6: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200(m), CB = 180(m)$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?



Bài tập 7: Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A , đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc 70 km/h . Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h . Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.



- a) Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.
- b) Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?
 A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$. B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.
 C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$. D. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$.
- Câu 2:** Cho ΔABC có $b = 6, c = 8, A = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là:
 A. $2\sqrt{13}$. B. $3\sqrt{12}$. C. $2\sqrt{37}$. D. $\sqrt{20}$.
- Câu 3:** Cho ΔABC có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:
 A. 7. B. 129. C. 49. D. $\sqrt{129}$.
- Câu 4:** Tam giác ABC có $C = 150^\circ, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB ?
 A. $\sqrt{13}$. B. $\sqrt{3}$. C. 10. D. 1.
- Câu 5:** Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5, AC = 8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC .
 A. $2\sqrt{3}$. B. 4. C. 5. D. $3\sqrt{2}$.
- Câu 6:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2,3,4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?
 A. $\frac{\sqrt{15}}{8}$. B. $\frac{7}{8}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{\sqrt{14}}{8}$.
- Câu 7:** Tam giác ABC có $BC = 12, CA = 9, AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM
 A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{20}$. D. $\sqrt{19}$.
- Câu 8:** Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC . Biết $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a .
 A. $3\sqrt{2}$. B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{23}{8}$. D. 6.
- Câu 9:** Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = a$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{BC}{3}$. Độ dài AM bằng bao nhiêu?
 A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2a}{3}$.
- Câu 10:** Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}, AC = 4, BC = 5$. Tính cạnh AB
 A. $\sqrt{46}$. B. 11. C. $5\sqrt{2}$. D. 6.
- Câu 11:** Tam giác ABC có $BC = \sqrt{5}, AC = 3$ và $\cot C = 2$. Tính cạnh AB
 A. 6. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{9}{5}$. D. $2\sqrt{10}$.

- Câu 12:** Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC
 A. $3\sqrt{2}$. B. $4\sqrt{3}$. C. $\sqrt{33}$. D. 7.
- Câu 13:** Cho tam giác ABC có $AC = 7$, $BC = 8$ và $A = 60^\circ$. Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài của cạnh BC ?
 A. 7. B. 47. C. $\sqrt{57}$. D. $2\sqrt{57}$.
- Câu 14:** Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. Giá trị $\cos B$ là:
 A. $\frac{2}{7}$. B. $-\frac{2}{7}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 15:** Tam giác có ba cạnh lần lượt là 5, 8, 9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?
 A. $\frac{1}{10}$. B. $-\frac{1}{10}$. C. $\frac{2}{5}$. D. $-\frac{1}{2}$.
- Câu 16:** Tam giác ABC có $BC = 12$, $CA = 9$, $AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 8$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .
 A. 34. B. 17. C. $\sqrt{34}$. D. $\sqrt{43}$.
- Câu 17:** Cho tam giác ABC có cạnh $AC = 14$, $B = 120^\circ$, tổng hai cạnh còn lại là 16. Tính độ dài cạnh BC biết $BC > AB$.
 A. 5. B. 8. C. 6. D. 10.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Cho tam giác MNP có $MN = 13$, $MP = 10$, $\cos M = \frac{5}{13}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
 a) $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2.MN.MP.\cos M$.
 b) Tam giác MNP cân tại M .
 c) $\cos N = \frac{238}{169}$.
 d) Tổng bình phương độ dài ba trung tuyến trong $\triangle MNP$ bằng $\frac{657}{2}$.
- Câu 2:** Cho tam giác ABC có tỉ lệ độ dài các cạnh $AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ bằng 25. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:
 a) $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$.
 b) Tam giác ABC vuông tại A .
 c) Độ dài cạnh BC bằng 25.
 d) Gọi G là trọng tâm của $\triangle ABC$. Độ dài đoạn thẳng BG bằng $\frac{20\sqrt{13}}{3}$.



Câu 3: Tam giác ABC có $AB = 5, BC = 7, CA = 8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC.AC \cos A$.
- b) Số đo góc A bằng 30° .
- c) Độ dài đường trung tuyến từ đỉnh A trong ΔABC là $\sqrt{129}$.
- d) Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài cạnh AM bằng $\frac{2\sqrt{61}}{3}$.

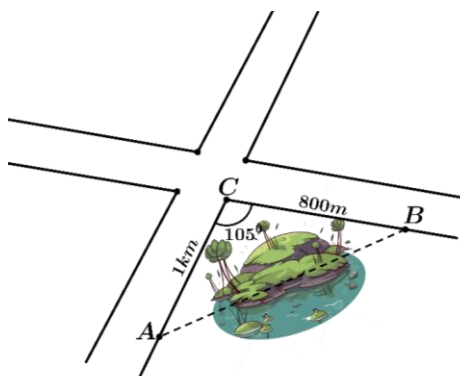
Câu 4: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Biết $AB = 3, BC = 8, \cos \angle AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

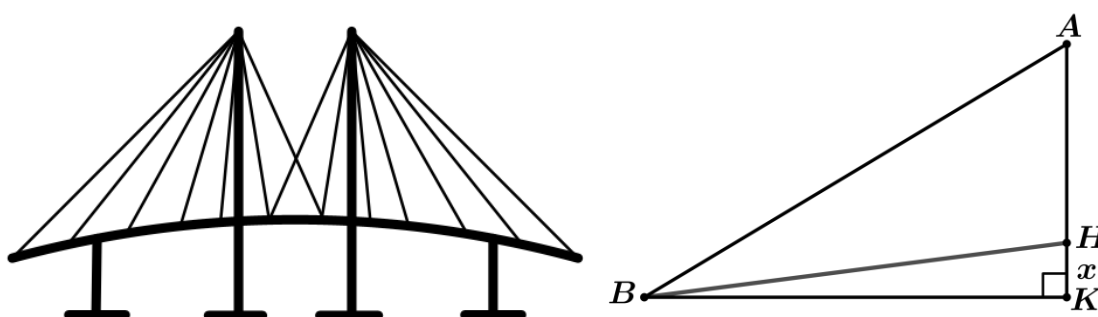
- a) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM là $\sqrt{2}$.
- b) Giá trị $\cos \angle AMC = \frac{5\sqrt{13}}{26}$
- c) Độ dài đoạn AM bằng $\sqrt{13}$ hoặc $x = \frac{7\sqrt{13}}{13}$
- d) Khi số đo góc A nhọn và lớn nhất trong ba đỉnh của tam giác ABC thì độ dài cạnh $AC = 7$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy) người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC, CB và góc ACB . Sau khi đo ta nhận được: $AC = 1km, CB = 800m$ và $\angle ACB = 105^\circ$. Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị mét).

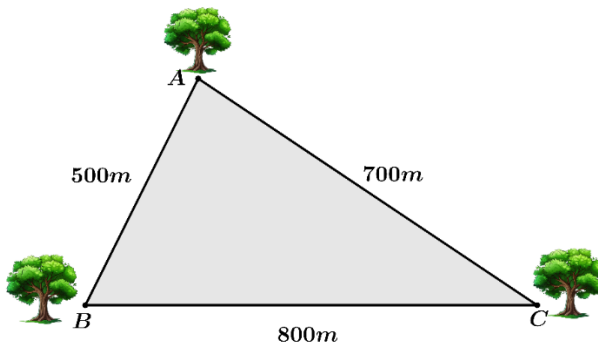


Câu 2: Quan sát cây cầu dây văng minh họa như hình dưới đây:



Tại trụ cao nhất, khoảng cách từ đỉnh trụ (vị trí A) tới chân trụ trên mặt cầu (vị trí H) là 150 m, độ dài dây văng dài nhất nối từ đỉnh trụ xuống mặt cầu (vị trí B) là 300 m, khoảng cách từ chân dây văng dài nhất tới chân trụ trên mặt cầu là 250 m. Tính độ dốc của cầu qua trụ nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

Câu 3: Một công viên có dạng hình tam giác với các kích thước như hình minh họa dưới đây. Tính số đo của góc B của tam giác đó.

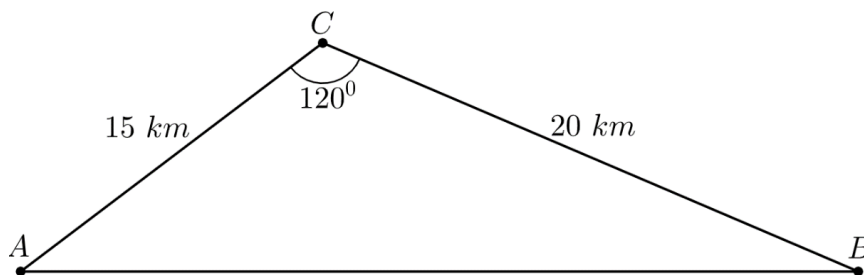


Câu 4: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 (km/h), tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 (km/h). Tính khoảng cách giữa hai tàu sau 2 giờ. (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

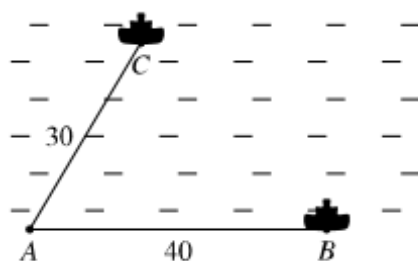
Câu 5: Vịnh Vân Phong, tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Diệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí C trên Hòn Quạ đến vị trí B trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí A rồi mới đến vị trí B . Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa AB và AC là 60° ?



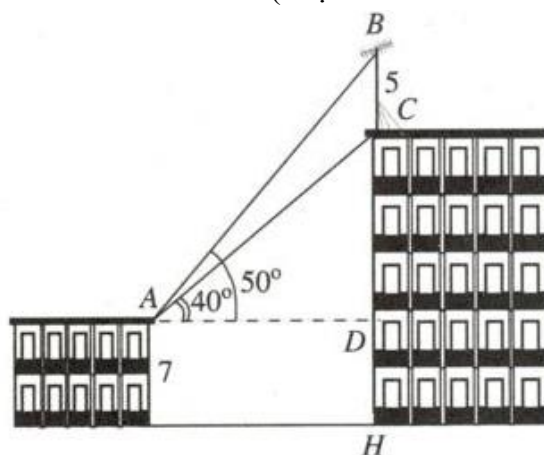
Câu 6: Một ô tô muốn đi từ địa điểm A đến địa điểm B , nhưng giữa A và B là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành 2 đoạn từ A lên C (ô tô leo dốc lên núi) và từ C đến B (ô tô xuống núi). Các đoạn đường tạo thành tam giác ABC với $AB = 15$ km; $BC = 20$ km và $ACB = 120^\circ$. Nếu người ta đào một đường hầm xuyên núi chạy thẳng từ A đến B thì ô tô chạy trên con đường mới này tiết kiệm được số tiền gần nhất là bao nhiêu? Biết trung bình cứ chạy 1 km, ô tô tiêu thụ hết 0,3 lít xăng. Giá thành xăng hiện nay là 25000 đồng một lít xăng.



Câu 7: Hai chiếc tàu thuyền cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?



Câu 8: Trên nóc một tòa nhà có cột antenna cao 5 m . Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột antenna dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang (như hình vẽ bên dưới). Chiều cao của tòa nhà (được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là



Câu 9: Từ một địa điểm O cố định của một vùng đất cù lao (các mặt của vùng đất đều giáp với các con sông), người ta cần chọn một địa điểm T trên vùng cù lao sao cho $OT = 60(km)$ để xây dựng các con đường cao tốc (cầu vượt cao tốc) nối từ hai địa điểm X và Y của hai tỉnh thành lân cận đến T . Cho biết $OX = 120(km)$, $OY = 150(km)$, $XOY = 120^\circ$. Chi phí hoàn thành 1(km) đoạn đường đi từ T đến X là 100000 USD; chi phí hoàn thành 1(km) đoạn đường đi từ T đến Y là 200000 USD. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành hai con đường trên (đơn vị triệu USD)?

-----HẾT-----

Dạng 2: Áp dụng định lý sin trong tam giác

Phương pháp: Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

Sử dụng định lý sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có các góc $A = 75^\circ, B = 45^\circ$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có góc $BAC = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

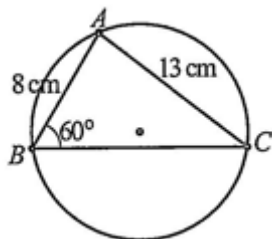
Bài tập 3: Cho tam giác ABC có $bc = a^2$. Chứng minh rằng $\sin^2 A = \sin B \sin C$

Bài tập 4: Cho điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $DAB = DBC = DCA = \varphi$. Chứng minh rằng:

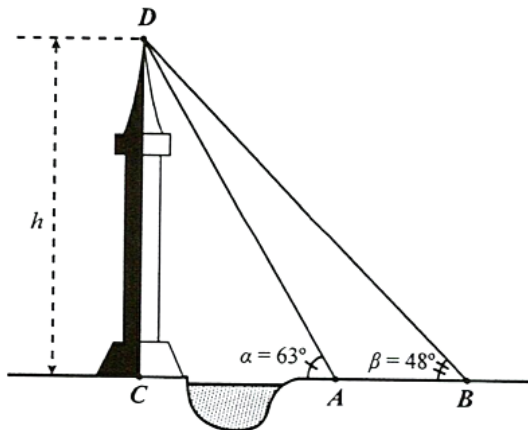
$$\sin^3 \varphi = \sin(A - \varphi) \cdot \sin(B - \varphi) \cdot \sin(C - \varphi).$$

Bài tập 5: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

Bài tập 6: Từ một tấm bìa hình tròn, bạn Thảo cắt ra một hình tam giác có các cạnh $AB = 8 \text{ cm}$, $AC = 13 \text{ cm}$ và $B = 60^\circ$ (Hình). Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của miêng bìa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị centimet).



Bài tập 7: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24 \text{ m}$, $CAD = 63^\circ, CBD = 48^\circ$. Tính chiều cao h của tháp?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:

A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$. B. $\sin A = \frac{a}{2R}$. C. $b \sin B = 2R$. D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

Câu 2: Cho ΔABC với các cạnh $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $S = \frac{abc}{4R}$. B. $R = \frac{a}{\sin A}$.
 C. $S = \frac{1}{2} ab \sin C$. D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Câu 3: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.
 C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$. D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Câu 4: Cho ΔABC có $AB = 5; A = 40^\circ; B = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

A. 3,7. B. 3,3. C. 3,5. D. 3,1.

Câu 5: Tam giác ABC có $B = 30^\circ, C = 45^\circ$ và $AB = 5$. Hỏi cạnh AC bằng bao nhiêu?

A. $AC = 5\sqrt{2}$. B. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. C. $AC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. D. $AC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6: Tính chu vi tam giác ABC , biết rằng $AB = 6$ và $2 \sin A = 3 \sin B = 4 \sin C$.

A. 26. B. 13. C. $5\sqrt{26}$. D. $10\sqrt{6}$.

Câu 7: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính $R, AB = R, AC = R\sqrt{3}$. Tính góc A biết B là góc tù.

A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 8: Cho tam giác ABC có $A = 30^\circ$ và $b + c = 2a$. Chọn mệnh đề **đúng**?

A. $\sin B + \sin C = 1$. B. $\sin B + \sin C = \sqrt{3}$.
 C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2}$. D. $\sin B + \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 9: Cho tam giác ABC có $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$. Tam giác ABC là tam giác

A. vuông tại C . B. vuông tại A . C. cân. D. đều.

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Tam giác ABC là tam giác

A. vuông tại C . B. vuông tại A . C. cân tại A . D. đều.

Câu 11: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 10$ và $\tan(A + B) = \frac{1}{3}$.

- A. $\frac{5\sqrt{10}}{9}$. B. $\frac{10}{3}$. C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$. D. $5\sqrt{10}$.

Câu 12: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 12$ và $\cot(A + B) = \frac{1}{3}$.

- A. $2\sqrt{10}$. B. $\frac{9\sqrt{10}}{5}$. C. $5\sqrt{10}$. D. $3\sqrt{2}$.

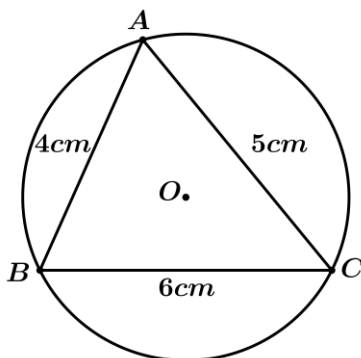
Câu 13: Cho tam giác ABC có các góc $B = 120^\circ, C = 40^\circ$, cạnh $BC = 5\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- A. 7cm . B. 8cm . C. 9cm . D. 10cm .

Câu 14: Cho tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

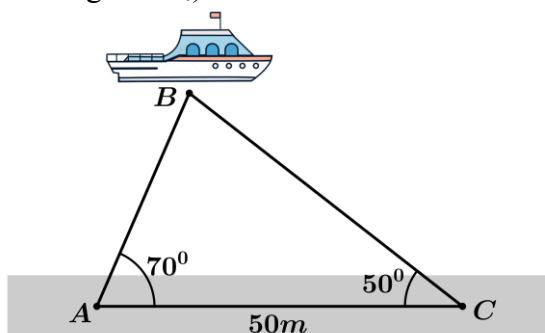
- A. $a = 2R\cos A$. B. $a = 2R\sin A$. C. $a = 2R\tan A$. D. $a = R\sin A$.

Câu 15: Từ một miếng bìa hình tròn, bạn Nam cắt ra một hình tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = 4\text{cm}, AC = 5\text{cm}, BC = 6\text{cm}$ như hình minh họa dưới đây. Tính bán kính R của miếng bìa ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị centimét)



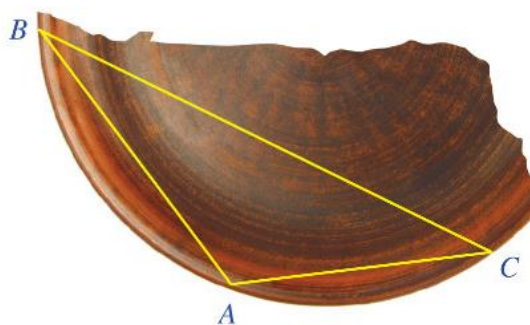
- A. $3(\text{cm})$. B. $5(\text{cm})$. C. $4(\text{cm})$. D. $2(\text{cm})$

Câu 16: Để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ sông đến vị trí B của con tàu bị mắc cạn gần một cù lao giữa sông, bạn Minh đi dọc bờ sông từ vị trí A đến vị trí C cách A một khoảng bằng 50m và đo các góc $BAC = 70^\circ, BCA = 50^\circ$ như hình minh họa dưới đây. Tính khoảng cách AB theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



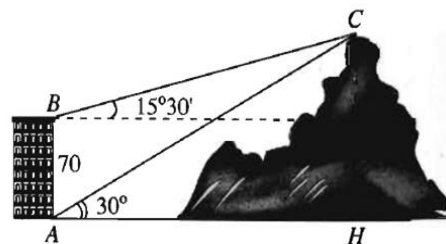
- A. $43(\text{m})$. B. $42(\text{m})$. C. $44(\text{m})$. D. $45(\text{m})$.

Câu 17: Để xác định bán kính của chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ một phần, các nhà khảo cổ lấy ba điểm A, B, C trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau: cạnh $AB \approx 9,5\text{cm}$, $ACB \approx 60^\circ$. Bán kính của chiếc đĩa xấp xỉ là:



- A. 5,5 cm. B. 18 cm. C. 11 cm. D. 9,5 cm.

Câu 18: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70m$, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



- A. 135m. B. 234m. C. 165m. D. 195m.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $AC = 10$, $BC = 12$, $B = 45^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Công thức tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = \frac{BC}{2\sin B}$.
- b) $\sin A = \frac{5\sqrt{2}}{12}$.
- c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $5\sqrt{2}$.
- d) $\frac{3BC - 2AC - AB}{3\sin A - 2\sin B - \sin C} = 10\sqrt{2}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có $AC = 20$, $B = 60^\circ$, $\cos C = 0,8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Góc C là góc nhọn.
- b) Độ dài cạnh AB là $8\sqrt{3}$.
- c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.
- d) Độ dài đường trung tuyến từ đỉnh A trong ΔABC lớn hơn 13.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Số đo góc A của ΔABC bằng 45° .
- b) Độ dài cạnh BC của ΔABC bằng $\sqrt{29}$.

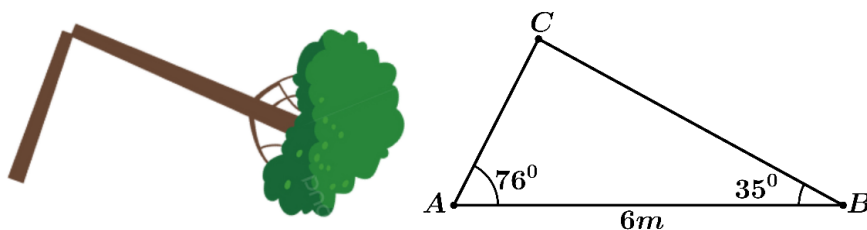
- c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔABC xấp xỉ bằng 3,37.
- d) Đường cao kẻ từ đỉnh A trong ΔABC có độ dài xấp xỉ bằng 2,97.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại B và D là một điểm thuộc cạnh BC sao cho $CD = 30$, $\angle BCA = 43^\circ$, $\angle BDA = 67^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

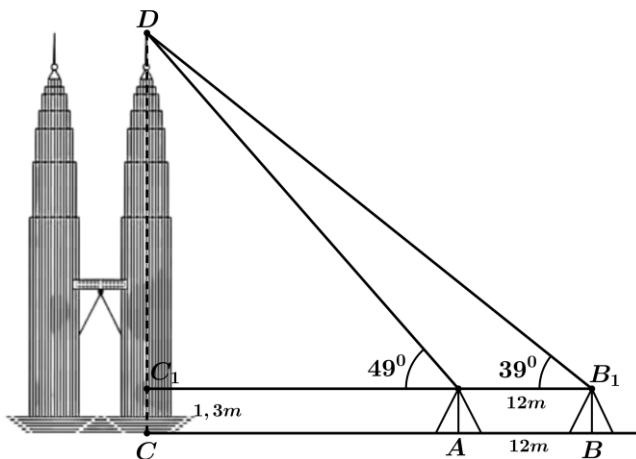
- a) $AD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos C$
- b) Số đo góc CAD bằng 42° .
- c) Số đo góc BAD bằng 23° .
- d) Độ dài cạnh AB của ΔABC xấp xỉ bằng 46,3.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Một cái cây dạng thẳng đứng bị gió mạnh làm gãy không hoàn toàn (hai đoạn thân bị gãy vẫn dính liền nhau như hình vẽ). Một người muốn đo chiều cao của cây trước khi gãy, người ấy đo được đoạn thẳng nối từ gốc cây đến ngọn cây (đã ngã) là $AB = 6m$, hai góc $\angle CAB = 76^\circ$, $\angle CBA = 35^\circ$. Tính chiều dài của cây trước khi bị gãy (giả sử sự biến dạng lúc gãy không ảnh hưởng đến tổng độ dài của cây)?



Câu 2: Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12m$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3m$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $\angle DA_1C_1 = 49^\circ$ và $\angle DB_1C_1 = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

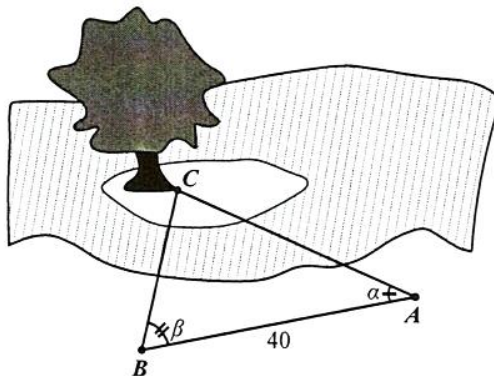


Câu 3: Cho tam giác nhọn ABC có $a = 3, b = 4$ và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $\sqrt{39R}$

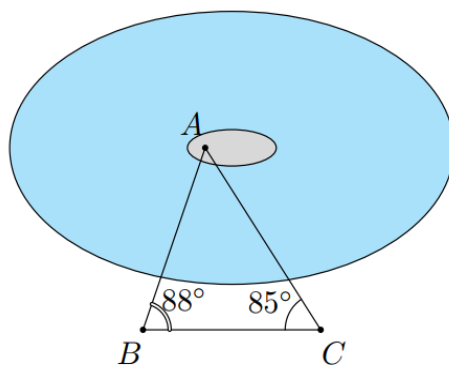
Câu 4: Cho tam giác ABC có $\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$ và $a = 10$. Tính chu vi tam giác đó
 Theo định lý sin trong tam giác ta tính được $b = 8, c = 6$ nên chu vi tam giác là $a + b + c = 24$.

Câu 5: Cho tam giác ABC nhọn có $BC = 3a$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc A .

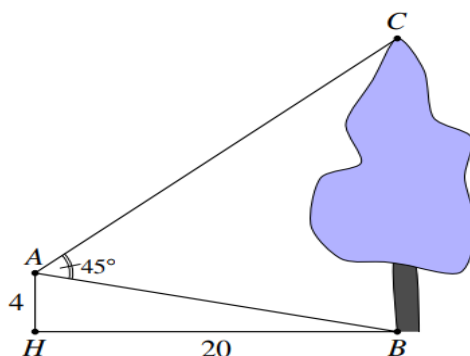
Câu 6: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến góc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40m$, $CAB = 45^\circ, CBA = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán khoảng cách AC bằng bao nhiêu mét?(kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



Câu 7: Ở giữa một cái hồ có một cái đảo nhỏ. Để tính khoảng cách từ điểm A trên đảo đến điểm B trên bờ hồ, người ta chọn điểm C . Sau đó thực hiện đo các góc B, C và khoảng cách BC . Biết $\hat{B} = 88^\circ, \hat{C} = 85^\circ$ và $BC = 50m$. Tính khoảng cách từ A đến B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

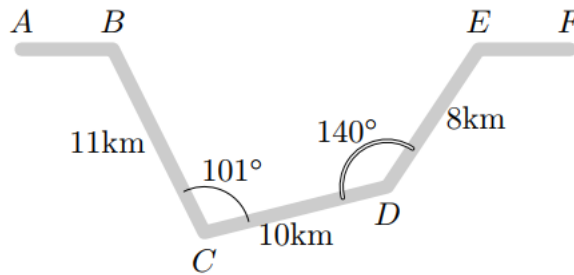


Câu 8: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4m, HB = 20m, BAC = 45^\circ$. Chiều cao của cây bằng bao nhiêu?

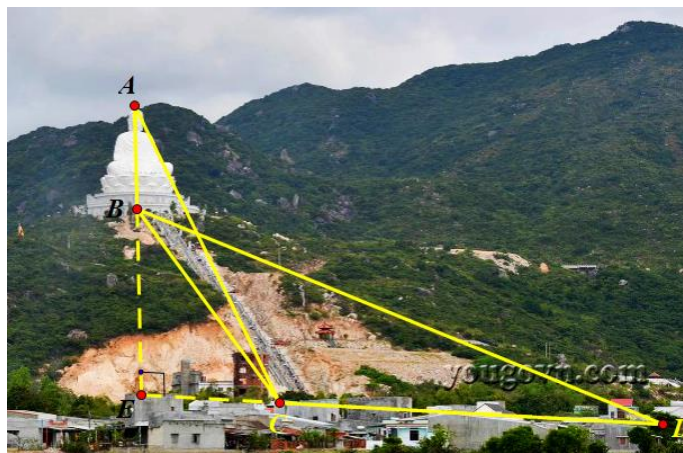




Câu 9: Để tránh núi, đường đi hiện tại phải vòng qua núi như mô hình trong hình vẽ. Hỏi quãng đường đi thẳng từ B đến E dài bao nhiêu km (làm tròn đến hàng phần mười)?



Câu 10: Để tính chiều cao AB của bức tượng, người ta đo ở hai vị trí C và D cách nhau 200m. Tại C người ta đo được $BCE = 52^\circ$, $ACE = 67^\circ$, tại D người ta đo được $BDC = 23^\circ$. Tính chiều cao AB .



Chùa Ông Núi, ngôi chùa cổ và nổi tiếng ở Bình Định, trong đó điểm nổi bật nhất của chùa chính là bức tượng Phật ngồi lớn nhất Đông Nam Á.

Câu 11: Để tính chiều rộng cửa biển CD của cảng Quy Nhơn, người ta chọn 2 vị trí A và B cách nhau 800m trên bờ biển. Từ vị trí A , người ta đo được $CAD = 17^\circ$, $BAD = 121^\circ$, tại B người ta đo được $ABC = 24^\circ$, $DBC = 15^\circ$. Tính CD .



Câu 12: Để tính chiều cao của tháp, có 2 người đứng ở vị trí C và D cách nhau 40m. Người ở vị trí C đo được góc $ACB = 45^\circ$, $ACD = 84^\circ$, người ở vị trí D đo được góc $ADC = 50^\circ$. Tính chiều cao AB của tháp.



Tháp được xây dựng vào cuối thế kỷ XI, đầu thế kỷ XII tại xã Phước Hiệp, Tuy Phước, Bình Định trên đỉnh một quả đồi nằm giữa hai nhánh sông Côn bên cạnh quốc lộ 1A, cách Tp. Quy Nhơn khoảng 20 km. Đây là một quần thể gồm 4 tháp, đứng nhìn từ xa trông giống như chiếc bánh ít nên người dân nơi đây gọi là Tháp Bánh Ít.

-----HẾT-----



Dạng 3: Tính diện tích và một số yếu tố khác của tam giác

Phương pháp: Sử dụng các tính chất và các hệ thức lượng, định lý cosin, định lý sin trong tam giác.

Sử dụng các công thức tính diện tích:

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
- $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- $S = pr$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho ΔABC có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ΔABC .

Bài tập 2: Cho ΔABC có $S = 10\sqrt{3}$ và nửa chu vi $p = 10$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác ΔABC .

Bài tập 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

Bài tập 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $A = 30^\circ, B = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

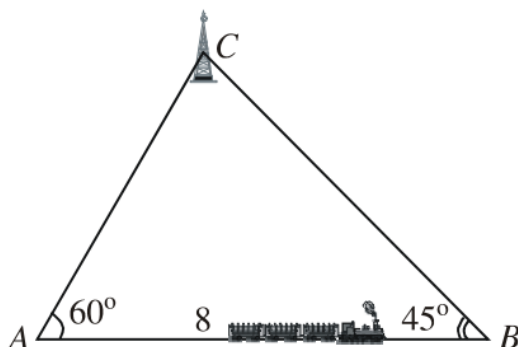
Bài tập 5: Cho tam giác đều ABC . Gọi D là điểm thỏa mãn $\overline{DC} = 2\overline{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = 4(m), BC = 6(cm), AC = 2\sqrt{7}(m)$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính diện tích tam giác ABC .

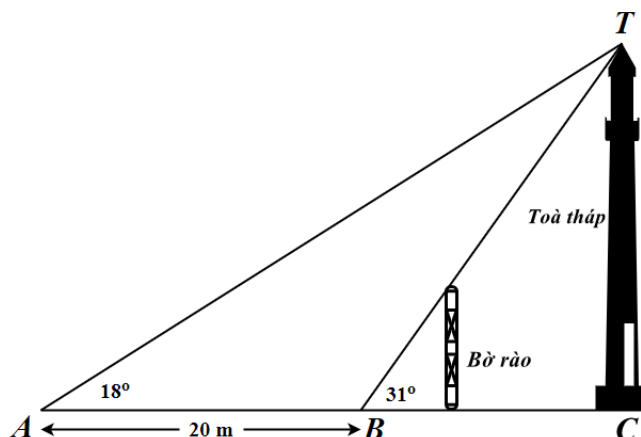
Bài tập 7: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Biết $AB = 3, BC = 8$ và $\cos \angle AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Tính diện tích của tam giác ABC .

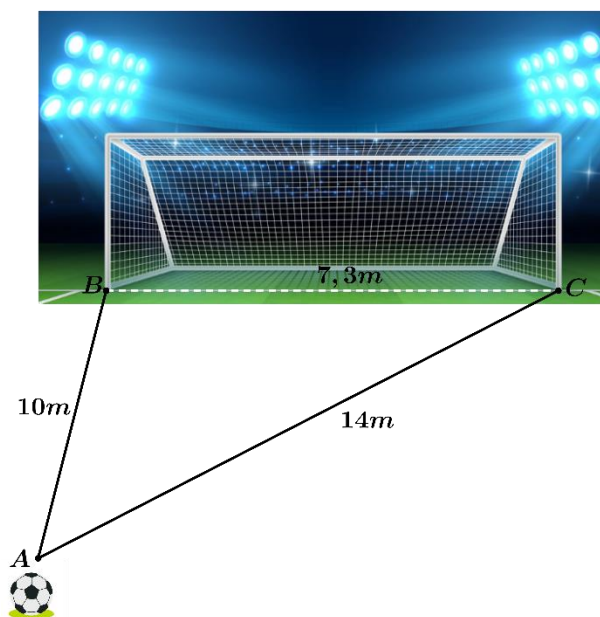
Bài tập 8: Một người ngồi trên tàu hoả đi từ ga A đến ga B . Khi tàu đỗ ở ga A , qua ống nhòm người đó nhìn thấy một tháp C . Hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng đi của tàu một góc khoảng 60° . Khi tàu đỗ ở ga B tiếp theo, người đó nhìn lại vẫn thấy tháp C , hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng ngược với hướng đi của tàu khoảng 45° . Biết rằng đoạn đường tàu nối thẳng ga A với B dài 8km . Hỏi khoảng cách từ ga A đến tháp C là bao nhiêu?



Bài tập 9: Một tòa tháp đổ nát được rào lại vì lý do an toàn. Để tìm chiều cao của tháp CT (hình vẽ), người đo đứng tại điểm A và đo góc $CAT = 18^\circ$. Sau đó người đo đi thẳng 20 mét về phía chân tháp đến điểm B và đo được góc $CBT = 31^\circ$. Tính chiều cao của tháp, kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân.



Bài tập 10: Một học sinh tập sút bóng sệt vào khung thành trống có bề rộng đo giữa hai mép trong của cột là $BC = 7,3\text{ m}$ (hình vẽ). Biết khoảng cách từ quả bóng đến chân các mép cột B, C lần lượt là $AB = 10\text{ m}$ và $AC = 14\text{ m}$. Tính góc sút tối đa để học sinh đó có thể sút được bóng vào lưới.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

A. $S = \frac{1}{2}bc \sin A$. B. $S = \frac{1}{2}ac \sin A$. C. $S = \frac{1}{2}bc \sin B$. D. $S = \frac{1}{2}bc \sin C$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, cạnh $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

A. 60° . B. 90° . C. 150° . D. 120° .

Câu 3: Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5$, $AC = 8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC .

A. $2\sqrt{3}$. B. 4. C. 5. D. $3\sqrt{2}$.

Câu 4: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $BAD = 30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

A. $\frac{a^2}{4}$. B. $\frac{a^2}{2}$. C. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. a^2 .

Câu 5: Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$.

A. $\sqrt{56}$. B. $\sqrt{48}$. C. 6. D. 8.

Câu 6: Cho ΔABC có $a = 4, c = 5, B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

A. $5\sqrt{3}$. B. 5. C. 10. D. $10\sqrt{3}$.

Câu 7: Cho tam giác ABC . Biết $AB = 2$; $BC = 3$ và $\angle C = 60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

A. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$. B. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $5 + \sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

Câu 8: Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 15, m_b = 12, m_c = 9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

A. 72. B. 144. C. 54. D. 108.

Câu 9: Cho tam giác ΔABC có $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác ΔABC là.

A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. B. 8. C. $8\sqrt{3}$ D. $80\sqrt{3}$

Câu 10: Cho tam giác ABC có $AB = 2a; AC = 4a$ và $\angle A = 120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC

A. $S = 8a^2$. B. $S = 2a^2\sqrt{3}$. C. $S = a^2\sqrt{3}$. D. $S = 4a^2$.

Câu 11: Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng

A. 12. B. 3. C. 6. D. 24.

Câu 12: Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 4, BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

- A. 1. B. $\frac{8}{9}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{3}{4}$.

Câu 13: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\sqrt{2}$, $AC = 3\sqrt{3}$. Đường cao AH bằng

- A. $\frac{2\sqrt{66}}{33}$. B. $\frac{3\sqrt{66}}{11}$. C. $\frac{\sqrt{66}}{11}$. D. $\frac{6\sqrt{66}}{11}$.

Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 5$, $BC = 6$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $\frac{45\sqrt{14}}{56}$. B. $\frac{45\sqrt{14}}{14}$. C. $\frac{4\sqrt{14}}{45}$. D. $\frac{45\sqrt{14}}{28}$.

Câu 15: Cho tam giác ABC có $c = 3$, $b = 5$, $a = 6$. Tính $\sin A$.

- A. $\frac{2\sqrt{14}}{15}$. B. $\frac{4\sqrt{14}}{15}$. C. $\frac{\sqrt{14}}{15}$. D. $\frac{15\sqrt{14}}{56}$.

Câu 16: Cho tam giác ABC có $AC = 30$, $BC = 50$ và $C = 75^\circ$. Tính đường cao CH .

- A. 28,1. B. 28,2. C. 28,3. D. 28,4.

Câu 17: Cho tam giác ABC có $B = 45^\circ$, $C = 75^\circ$ và $a = 50$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

- A. 13,1. B. 13,2. C. 13,3. D. 13,4.

Câu 18: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R có diện tích là:

- A. $2R^2 \cos^3 A$. B. $2R^2 \sin^3 A$. C. $R^2 \sin^3 A$. D. $2R^3 \sin^3 A$.

Câu 19: Tam giác với ba cạnh là a, b, c . Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng?

- A. $\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$. B. $\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c}$.
 C. $\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$. D. $\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$.

Câu 20: Cho tam giác ABC có $c = AB$, $b = AC$, $A = 60^\circ$. Chiều cao h_a của tam giác ABC là:

- A. $h_a = \frac{bc\sqrt{3}}{2\sqrt{b^2 + c^2 + bc}}$. B. $h_a = \frac{bc\sqrt{3}}{2\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}$.
 C. $h_a = \frac{bc}{2\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}$. D. $h_a = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}$.

Câu 21: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm cạnh BC và F là trung điểm cạnh AE . Tính độ dài đoạn thẳng DF .

- A. $DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. B. $DF = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. C. $DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $DF = \frac{3a}{4}$.

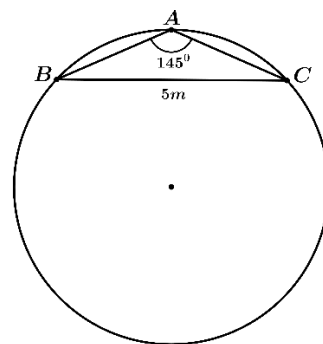
Câu 22: Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau và có $BC = 4$, $BAC = 30^\circ$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là:

- A. $\frac{8}{-\sqrt{3} + \sqrt{15 + 8\sqrt{3}}}$. B. $\frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{15 - 8\sqrt{3}}}$.
- C. $\frac{8}{\sqrt{3} + \sqrt{15 + 8\sqrt{3}}}$. D. $\frac{8}{\sqrt{3} + \sqrt{15 - 8\sqrt{3}}}$.

Câu 23: Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Minh có chiều dài các cạnh là $MN = 20m$, $NP = 28m$, $MP = 32m$. Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Minh là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

- A. $316,7(m^2)$. B. $320(m^2)$. C. $277,1(m^2)$. D. $280(m^2)$.

Câu 24: Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5m$, $BAC = 145^\circ$ hình dưới. Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



- A. $29,25(m^2)$. B. $53,29(m^2)$. C. $238,61(m^2)$. D. $59,68(m^2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $\cos A = \frac{1}{3}$, $BC = 9$ và $AC = 6$, M là trung điểm cạnh BC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Độ dài cạnh $AB = 8$.
- b) Diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $S_{ht} = 9\pi$.
- c) Giá trị $\cos AMB$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{5}$.
- d) Tính diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác ABC là $S_{ht} = \pi r^2 = \frac{9\pi}{2}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến bằng $15, 18, 27$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos B$.
- b) Độ dài cạnh BC của tam giác ABC bằng $2\sqrt{209}$.

c) Diện tích tam giác ABC bằng $120\sqrt{2}$.

d) Gọi I là trung điểm của cạnh BC và H là trọng tâm của tam giác ABC và D đối xứng với điểm H qua I . Diện tích tam giác AHD là $60\sqrt{2}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $BAC = 60^\circ, AC = 20, AB = 25$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos C$.

b) Độ dài cạnh $BC = 5\sqrt{21}$.

c) Diện tích tam giác ABC và độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh B lần lượt $S_{ABC} = 125\sqrt{3}$ và

$$h_b = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = 5\sqrt{6}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC có $AB = 8\sqrt{3}$, $B = 50^\circ$ và $A = 70^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $C = 50^\circ$.

b) Độ dài cạnh $AC \approx 12,26$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là 6.

d) Gọi N là điểm thuộc cạnh AB sao cho $3AN = NB$ thì diện tích tam giác ACN bằng 29,95.

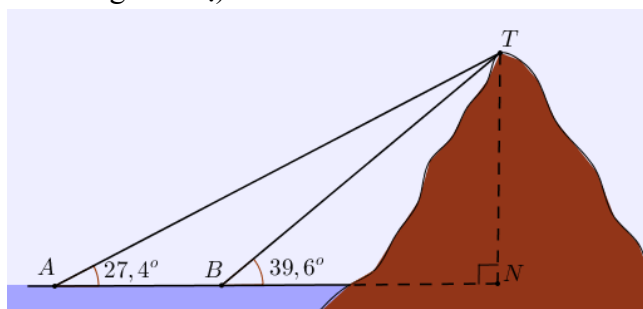
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 3. Góc $BAD = 30^\circ$. Tính diện tích hình thoi $ABCD$.

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 6\text{ cm}, AC = 8\text{ cm}$ và M là trung điểm của BC . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Câu 3: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Câu 4: Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m thì ngọn núi cao bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



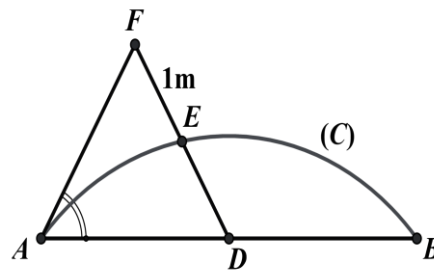
Câu 5: Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 10\text{ m}, b = 8\text{ m}, c = 6\text{ m}$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



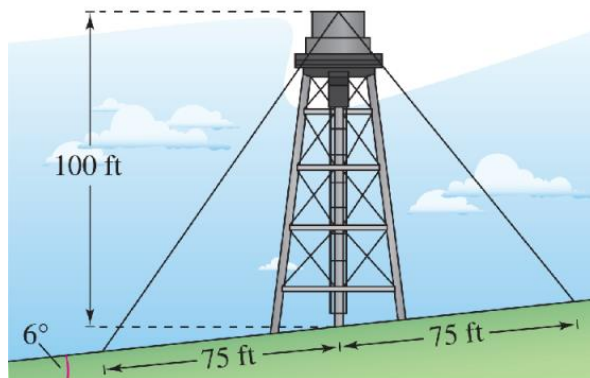
Câu 6: Cho tam giác ABC , biết $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác

ABC có dạng $r = a - \sqrt{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a - 2b$

Câu 7: Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4m$, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vướng cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An cho xây đường cong cách $1m$ tính từ trung điểm D của AB . Biết $AF = 2m$, $DAF = 60^\circ$ và lan can cao $1m$ làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/ m^2 . Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng nghìn).



Câu 8: Một tháp nước được xây dựng trên một con dốc có độ nghiêng là 6° . Để tháp đứng thẳng, người ta dùng hai sợi cáp cố định tháp như hình vẽ. Biết rằng tháp cao 100 ft và khoảng cách từ chân tháp ra đến chỗ cố định dây cáp là 75 ft . Tính chiều dài sợi dây cáp bên trái (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



-----HẾT-----



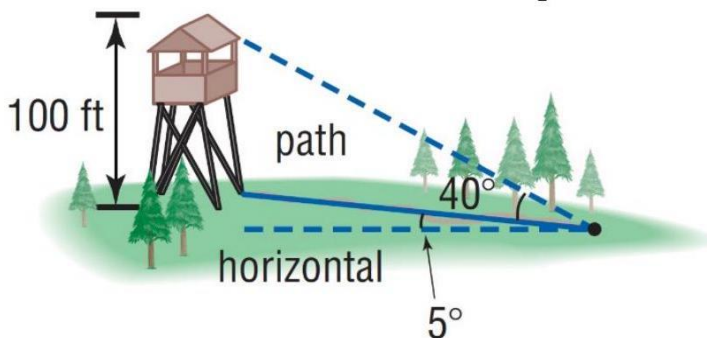
Dạng 4: Ứng dụng hệ thức lượng để giải các bài toán thực tế

Phương pháp: Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác

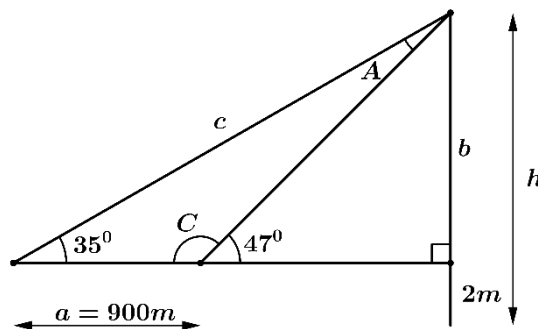
Sử dụng các công thức tính diện tích, định lý cosin, định lý sin trong tam giác.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

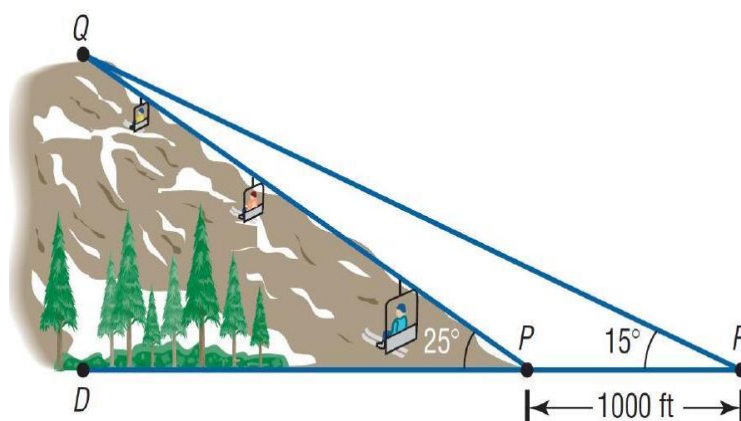
Bài tập 1: Một nhân viên kiểm lâm đang đi trên đường nghiêng một góc 5° so với đường thẳng đứng để hướng về tháp quan sát cao 100 feet. Góc độ cao từ chân lên đỉnh tháp là 40° . Tính khoảng cách từ nhân viên kiểm lâm đến chân tháp vào thời điểm đó.



Bài tập 2: Để đo được chiều cao của một ngọn núi, một nhân viên trắc địa nhìn đỉnh núi tại hai vị trí cách nhau 900 mét nằm trên một đường thẳng đến ngọn núi (quan sát hình minh họa). Lần quan sát đầu tiên người này nhìn đỉnh núi với một góc nâng là 47° và lần thứ hai nhìn đỉnh núi với một góc nâng là 35° . Giả sử máy toàn đạc cao 2 mét, tìm chiều cao h của ngọn núi.



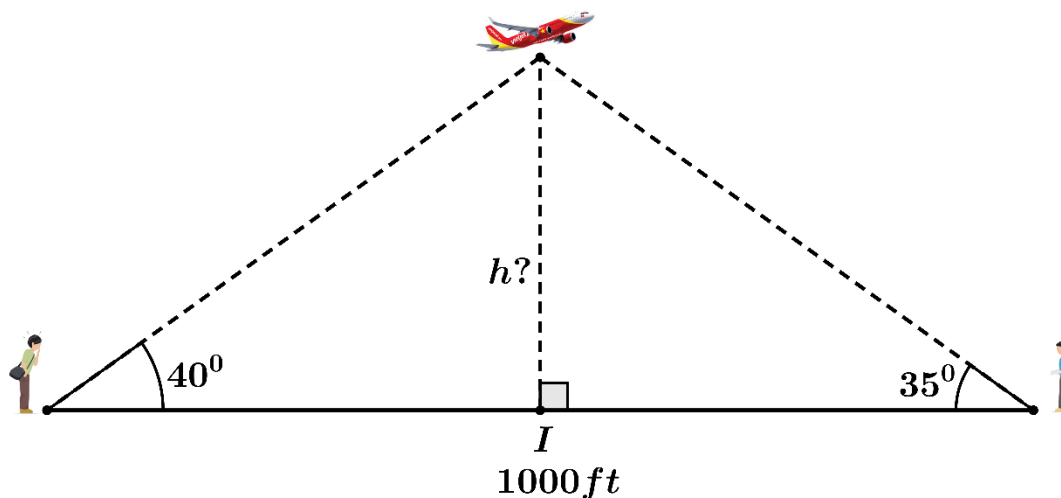
Bài tập 3: Xác định độ dài của cáp treo trượt tuyết và độ cao của núi (tham khảo hình vẽ)



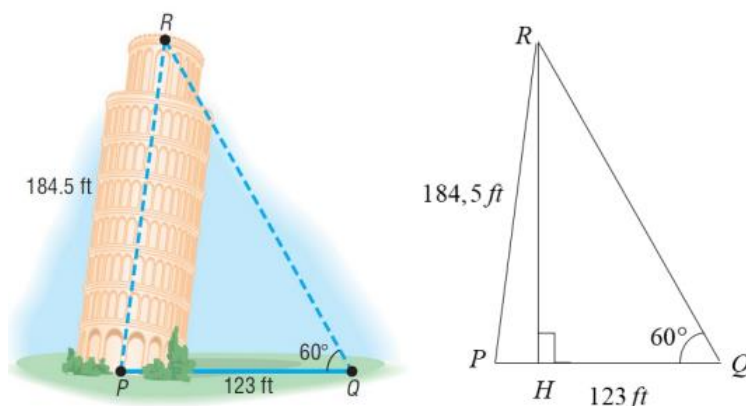
Để xác định chiều dài của cáp treo trượt tuyết cần lắp đặt từ điểm P đến điểm Q , một nhân viên trắc địa đo được DPQ bằng 25° , sau đó anh ta đi xa ra một đoạn 1000 feet tới điểm R và đo được PRQ bằng 15° .

- a) Tính khoảng cách từ điểm P đến điểm Q ?
- b) Tính chiều cao QD của núi?

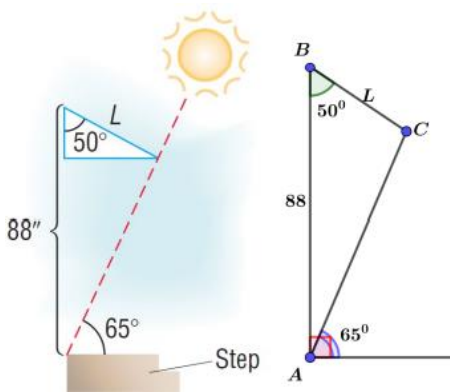
Bài tập 4: Một chiếc máy bay của hãng hàng không VietJet được quan sát bởi hai người điều khiển không lưu cách nhau 1000 ft trên mặt đất. Máy bay bay trên đường nối liền giữa hai người và mỗi người quan sát nó theo một góc nâng được chỉ ra trong hình vẽ. Hỏi độ cao của chiếc máy bay so với mặt đất là bao nhiêu?



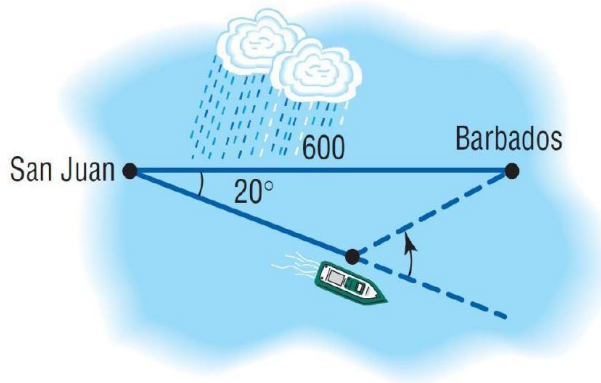
Bài tập 5: Tìm độ nghiêng của tháp nghiêng Pisa. Tháp nghiêng Pisa nổi tiếng có chiều cao là 184,5 feet. Góc nâng nhìn từ điểm Q cách chân tháp P một khoảng 123 feet lên đỉnh R của tháp có số đo là 60° . Tìm số đo góc RPQ (như hình vẽ) và tìm khoảng cách từ đỉnh R của tháp đến đường thẳng PQ.



Bài tập 6: Một mái hiên che cửa kính có độ cao 88 inch và tạo với vách tường một góc 50° . Mục đích của mái hiên là che được ánh nắng mặt trời chiếu vào nhà khi góc giữa tia sáng mặt trời với mặt đất lớn hơn 65° . Xem hình vẽ dưới đây. Tính độ dài L của mái hiên.

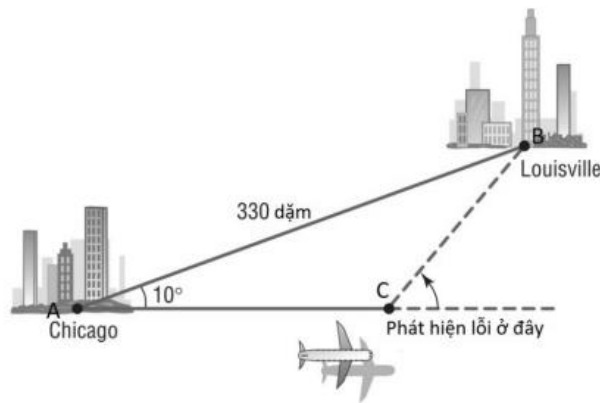


Bài tập 7: Một tàu du lịch chạy với tốc độ trung bình 15 hải lý/giờ khi đi từ San Juan, Puerto Rico, đến Barbados, Tây Ấn Độ, với khoảng cách 600 hải lý. Để tránh một cơn bão nhiệt đới, thuyền trưởng cho thuyền rời San Juan theo hướng lệch một góc 20° so với hướng đi thẳng đến Barbados. Thuyền trưởng duy trì tốc độ 15 hải lý/giờ trong 10 giờ, sau đó thuyền trưởng cho tàu đi thẳng đến Barbados mà không gặp bão.



- Tính góc mà thuyền trưởng quay đầu để đi thẳng đến Barbados?
- Tính từ sau khi rẽ, nếu tốc độ được duy trì ở mức 15 hải lý/giờ thì sau bao lâu con tàu đến Barbados?

Bài tập 8: Trong một chuyến bay thử nghiệm từ Chicago tới Louisville, khoảng cách là 330 dặm, viên phi công đã vô tình chọn hướng bay sai lệch đi một góc 10° như hình vẽ dưới đây.



- Nếu máy bay duy trì tốc độ trung bình 220 dặm một giờ và nếu lỗi sai về hướng bay được phát hiện ra sau 15 phút, thì viên phi công nên điều chỉnh hướng bay chệch lên theo góc nào để bay tới được Louisville?
- Viên phi công nên duy trì tốc độ trung bình tiếp theo của máy bay là bao nhiêu để cho tổng thời gian của chuyến bay là 90 phút?

Bài tập 9: Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu là bao nhiêu?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một miếng đất có hình dạng là một hình lục giác. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



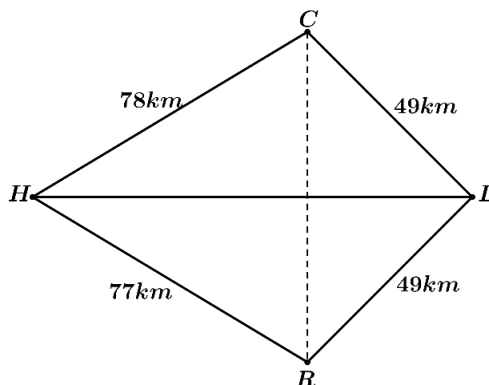
Diện tích mảnh vườn là:

- A. $24 + \sqrt{3}$. B. $24 + 4\sqrt{3}$. C. $12 + 8\sqrt{3}$. D. $24 + 8\sqrt{3}$.

Câu 2: Gia đình bạn An sở hữu một mảnh đất hình tam giác. Chiều dài của hàng rào MN là $150m$, chiều dài của hàng rào NP là $230m$. Góc giữa hai hàng rào MN và NP là 110° . Chiều dài hàng rào MP là.

- A. $314,6m$. B. $310,6m$. C. $324,6m$. D. $321,6m$.

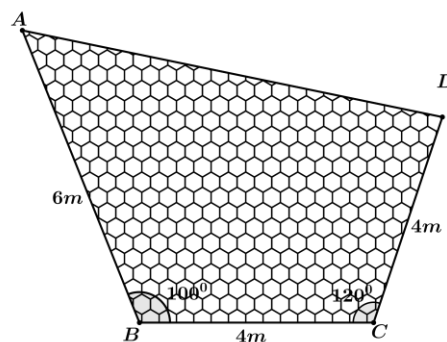
Câu 3: Trên bản đồ địa lí, người ta thường gọi tứ giác với bốn đỉnh lần lượt là các thành phố Hà Tiên (H), Châu Đốc (C), Long Xuyên (L), Rạch Giá (R) là tứ giác Long Xuyên.



Châu Đốc (C) và Rạch Giá (R) cách nhau khoảng bao nhiêu km?

- A. $77,5(km)$. B. $74,5(km)$. C. $70,5(km)$. D. $80,5(km)$.

Câu 4: Người ta định lát gạch tổ ong trên mảnh đất hình tứ giác $ABCD$ như mô hình bên cạnh. Biết rằng $AB = 6m, BC = CD = 4m, \angle ABC = 100^\circ, \angle BCD = 120^\circ$ và giá lát gạch là 400 nghìn đồng trên một mét vuông bao gồm cả công thợ. Số tiền để lát gạch cả mảnh đất đó là:

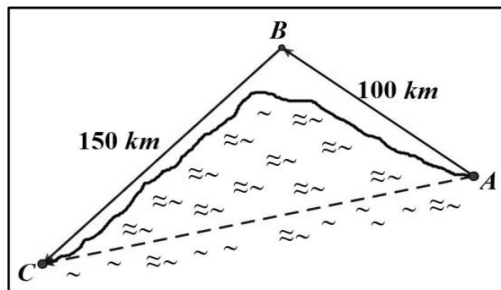


- A. $10583(VND)$. B. $10587(VND)$.
C. $10593(VND)$. D. $10567(VND)$

Câu 5: Cho hai địa điểm A và C như hình vẽ. Biết $AB = 100(\text{km})$, $BC = 150(\text{km})$, $\angle ABC = 100^\circ$. Bạn An muốn đi từ A đến C bằng một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Đi tàu thủy từ A đến C với vận tốc 30km/h .

Cách 2: Đi xe hơi từ A đến B rồi từ B đến C với vận tốc $50(\text{km/h})$.



Diện tích $\triangle ABC$ là:

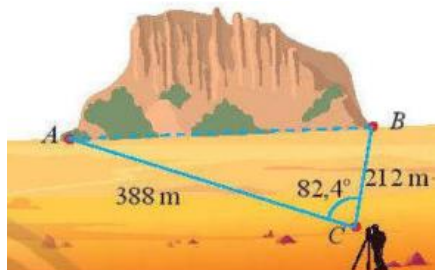
A. $S_{ABC} \approx 7386,06(\text{km}^2)$.

B. $S_{ABC} \approx 7387(\text{km}^2)$.

C. $S_{ABC} \approx 7385,06(\text{km}^2)$.

D. $S_{ABC} \approx 7384,06(\text{km}^2)$.

Câu 6: Một đường hầm được dự kiến xây dựng xuyên qua một ngọn núi. Để ước tính chiều dài của đường hầm, một kỹ sư thực hiện các phép đo đạc và cho ra kết quả như hình vẽ dưới.



Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

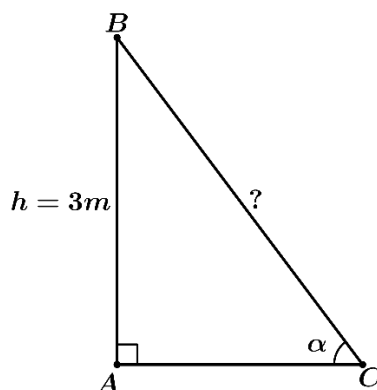
A. 210.

B. 211,35.

C. 211,5.

D. 212,35.

Câu 7: Nhà bạn Bình có gác lửng cao so với nền nhà là 3m . Ba của bạn Bình cần đặt một chiếc thang đi lên gác, biết khi đặt thang phải để thang tạo với mặt đất một góc 70° thì đảm bảo sự an toàn khi sử dụng (như hình vẽ).



Chiều dài của chiếc thang cần làm là

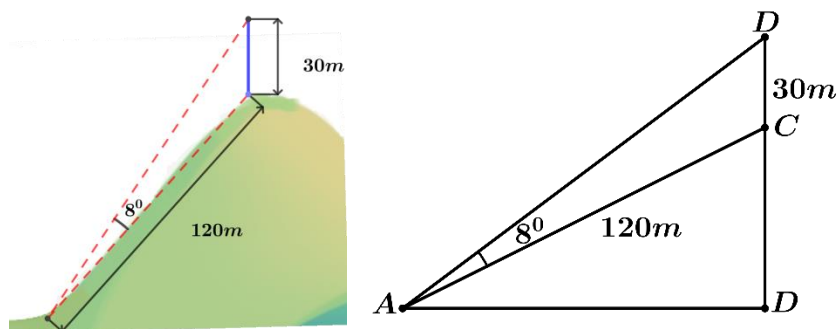
A. 3.

B. 3,19.

C. 3,5.

D. 3,4.

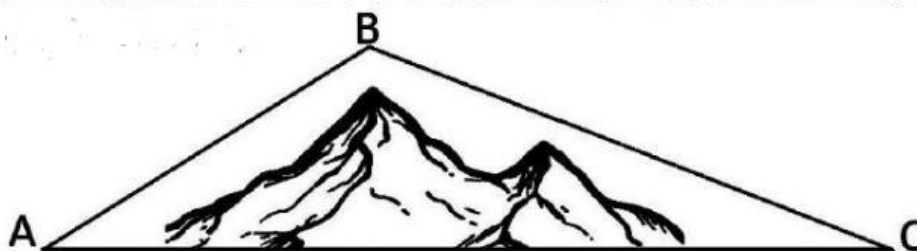
Câu 8: Một tháp nước cao $30m$ ở trên đỉnh của một ngọn đồi. Từ tháp đến chân ngọn đồi dài $120m$ và người ta quan sát thấy góc tạo thành giữa đỉnh và chân tháp là 8° (như hình vẽ).



Tính diện tích ΔABC

- A. 1200. B. 1204,4. C. 1205,4. D. 1206.

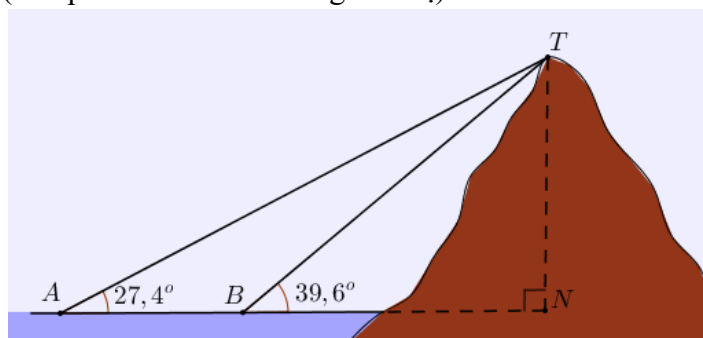
Câu 9: Giữa hai địa điểm A và C là một ngọn núi cao. Để đi từ A đến C , các xe ô tô có thể chạy đường tránh gồm hai đoạn đường là đi thẳng từ A đến B rồi đi thẳng từ B đến C , hoặc chạy thẳng qua hầm chui nối từ A đến C . Biết rằng các đoạn đường này tạo thành tam giác ABC có $AB = 16$ km, $AC = 33$ km, $BAC = 45^\circ$.



Nếu ô tô đi thẳng qua hầm chui thì phải qua trạm thu phí qua hầm với mức giá 60.000 đồng được thu qua hình thức thu phí không dừng. Nếu ô tô đi qua đường tránh thì không mất phí. Nhiều phương tiện vẫn chọn đi đường tránh để không mất khoản phí qua hầm này. Một chiếc ô tô điện Vinfast VF e34 có thể đi được 300 km sau một lần sạc đầy. Khi đến A xe đã đi được 262 km kể từ lần sạc đầy gần nhất. Tại C có một trạm sạc điện, ngoài ra trên đường đi không có một trạm sạc nào. Tài xế kiểm tra tài khoản thu phí không dừng vẫn còn đủ tiền phí qua trạm và xe không có sạc dự phòng. Tính diện tích của tam giác ABC (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

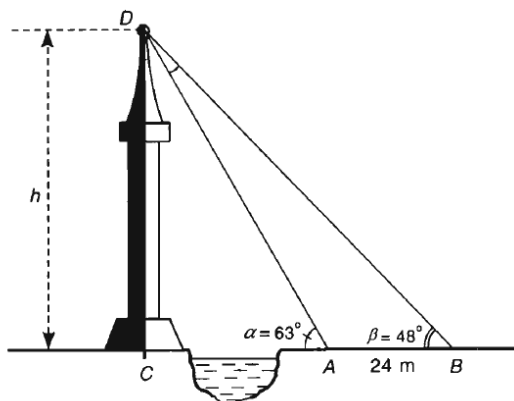
- A. 189. B. 187. C. 185. D. 181.

Câu 10: Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m. Khoảng cách từ điểm B đến cạnh AT là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



- A. 705. B. 701. C. 707. D. 703.

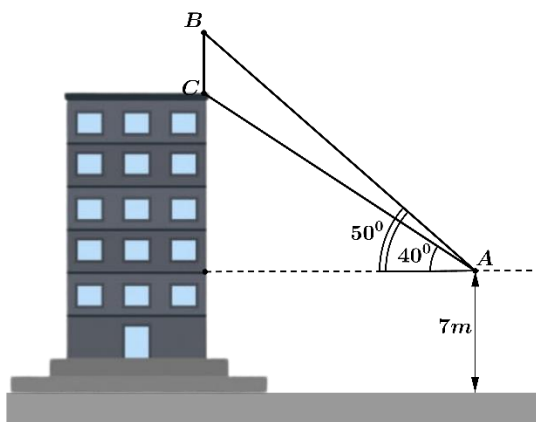
Câu 11: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24$ m, $CAD = 63^\circ$, $CBD = 48^\circ$. (Tham khảo hình vẽ bên dưới). Các mệnh đề sau đúng hay sai? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Chiều cao của tháp là

- A. 60. B. 62,4. C. 63,4. D. 61,4.

Câu 12: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang (tham khảo hình vẽ dưới đây) (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Chiều cao của tòa nhà là

- A. 19,5. B. 18,9. C. 18,2 D. 18,5.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

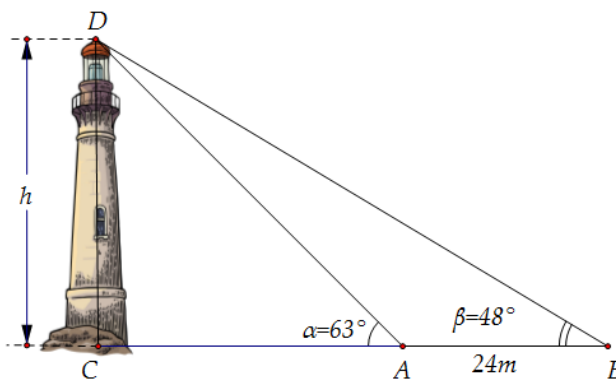
Câu 1: Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 4, b = 5$ (giả thiết áp dụng cho câu a, b, c). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công thức tính diện tích của ΔABC là $S = \frac{abc}{2R}$.

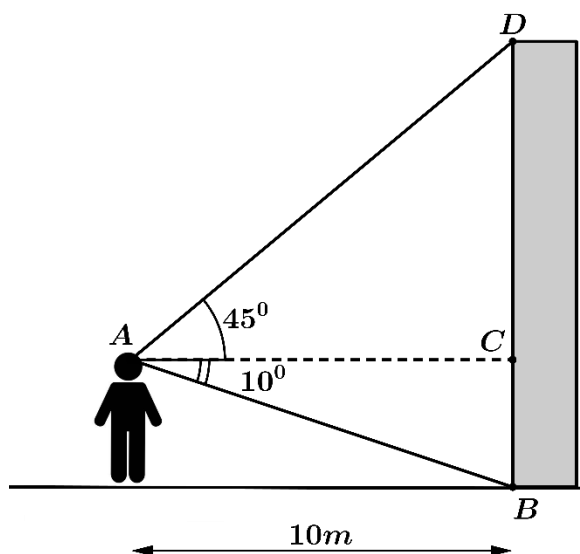
b) Diện tích ΔABC bằng $10\sqrt{3}$.

c) Chiều cao hạ từ đỉnh C của ΔABC bằng $\frac{10\sqrt{7}}{7}$.

d) Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng như hình vẽ dưới đây. Giả sử $AB = 24m, CAD = 63^\circ; CBD = 48^\circ$. Chiều cao h của khối tháp nhỏ hơn $62 (m)$.



Câu 2: Một người quan sát đứng cách một cái tháp $10(m)$, nhìn thẳng cái tháp dưới một góc 55° và được phân tích như trong hình. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



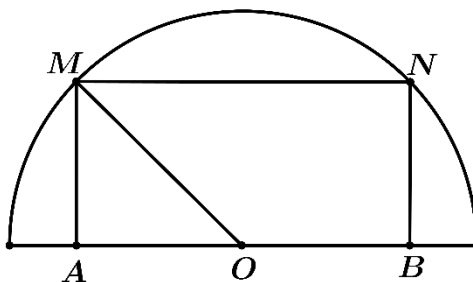
a) Số đo của góc $ADC = 45^\circ$

b) Độ dài đoạn AB xấp xỉ bằng $10,15(m)$.



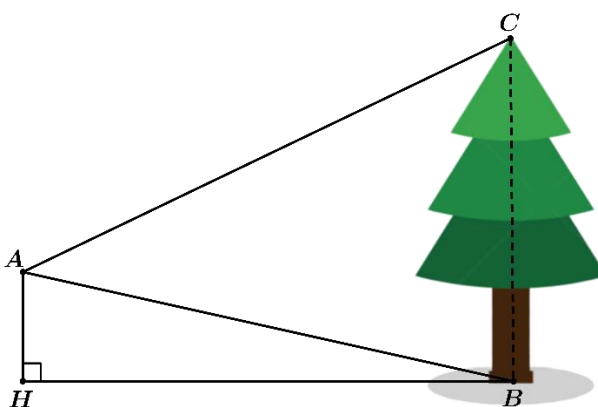
- c) Diện tích ΔACD bằng $100(m^2)$.
- d) Chiều cao của tháp xấp xỉ bằng $11,76(m)$.

Câu 3: Nhà bác An có một khoảng đất trống phía trước nhà là nửa đường tròn bán kính $R = 1m$, bác muốn trồng hoa trên diện tích là hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn sao cho một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của đường tròn. Giả sử khoảng đất được mô phỏng như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a) Độ dài đoạn $OM = 1(m)$.
- b) Nếu $AM = 0,8(m)$ thì diện tích ΔAMO bằng $0,24(m^2)$.
- c) Nếu $AM = 0,5m$ và chu vi hình chữ nhật $AMNB$ bằng $1 + 2\sqrt{3}(m)$ thì diện tích đất trồng hoa bằng $\sqrt{3}(m^2)$.
- d) Nếu $\angle AOM = \alpha$, mảnh đất trồng hoa có diện tích lớn nhất khi $\alpha = 90^\circ$.

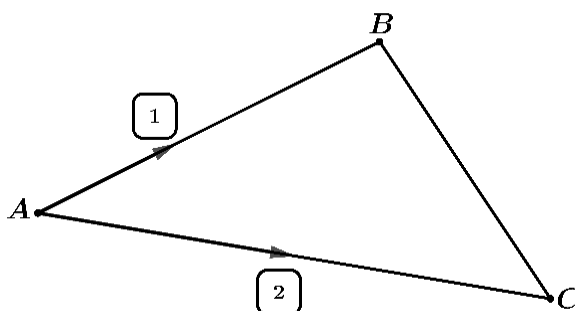
Câu 4: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (tham khảo hình bên dưới). Biết rằng độ dài $AH = 4(m)$; $HB = 20m$, $\angle BAC = 45^\circ$.



- a) Diện tích ΔAHB bằng $40(m^2)$.
- b) Nếu $\angle ACB = 45^\circ$ thì độ dài đoạn $AC = 10(m)$.
- c) Số đo của góc $\angle ABC$ xấp xỉ $78^\circ 41'$.
- d) Chiều cao của cây xấp xỉ bằng $17,33(m)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

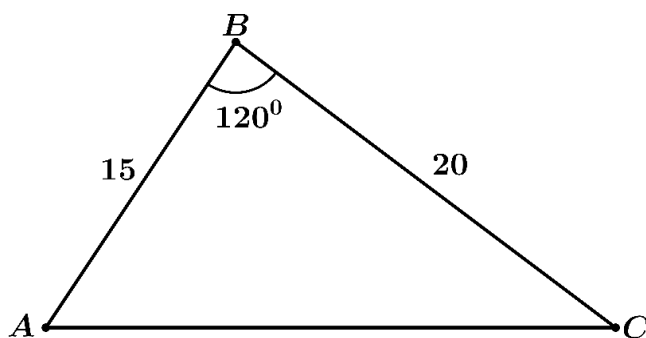
Câu 1: Hai chiếc xe cùng xuất phát ở vị trí A , đi theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Xe thứ nhất chạy với tốc độ $30(km/h)$, xe thứ hai chạy với tốc độ $40(km/h)$ (tham khảo hình vẽ).



Sau thời gian 1,5 giờ thì khoảng cách của hai xe bằng (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

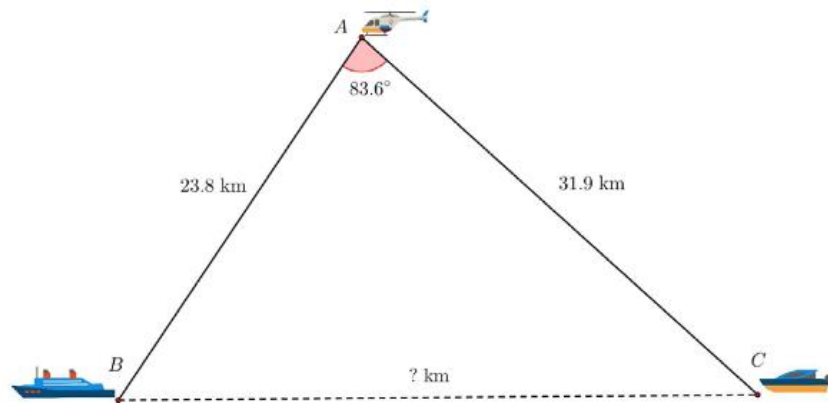
Câu 2: Bác An cần đo khoảng cách từ một điểm trên bờ sông đến một điểm B ở giữa hồ mà không thể đến trực tiếp được. Bác sử dụng giác kế để chọn điểm C cùng nằm trên bờ với A sao cho $BAC = 30^\circ; ACB = 100^\circ$ và cạnh $AC = 50(m)$. Tính khoảng cách AB (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

Câu 3: Một ô tô muốn đi từ A đến C nhưng giữa A và C là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành hai đoạn từ A đến B rồi từ B đến C , các đoạn đường tạo thành tam giác ABC có $AB = 15(km)$ $BC = 20(km)$ và $ABC = 120^\circ$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Giả sử ô tô chạy 5 km tốn một lít xăng, giá một lít xăng là 20.000 đồng. Nếu người ta làm một đoạn đường hầm xuyên núi chạy thẳng từ A đến C , khi đó ô tô chạy trên con đường này sẽ tiết kiệm được bao nhiêu nghìn đồng so với chạy trên đường cũ.



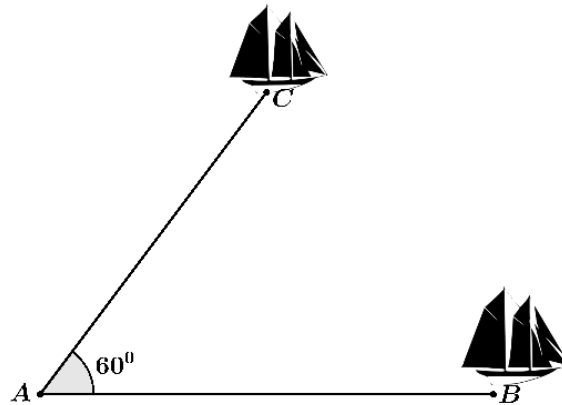
Câu 4: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5(m)$. Từ vị trí quan sát A cao $7(m)$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang như hình vẽ. Tính khoảng cách từ điểm A đến chân C của cột (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy)

Câu 5: Một máy bay trực thăng A quan sát hai tàu B và C , B cách trực thăng 23,8km và C cách trực thăng 31,9 km. Góc nhìn BAC từ trực thăng đến hai tàu là $83,6^\circ$ như hình vẽ dưới đây. (Các kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Tính khoảng cách từ điểm A đến cạnh BC (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 6: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng hợp với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30km/h , tàu thứ hai chạy với tốc độ 40km/h . Sau 2h , tàu thứ nhất ở vị trí C , tàu thứ hai ở vị trí B (tham khảo hình vẽ dưới).



Gọi S là diện tích của tam giác ABC . Tính $\frac{S}{100\sqrt{3}}$.

-----HẾT-----



HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

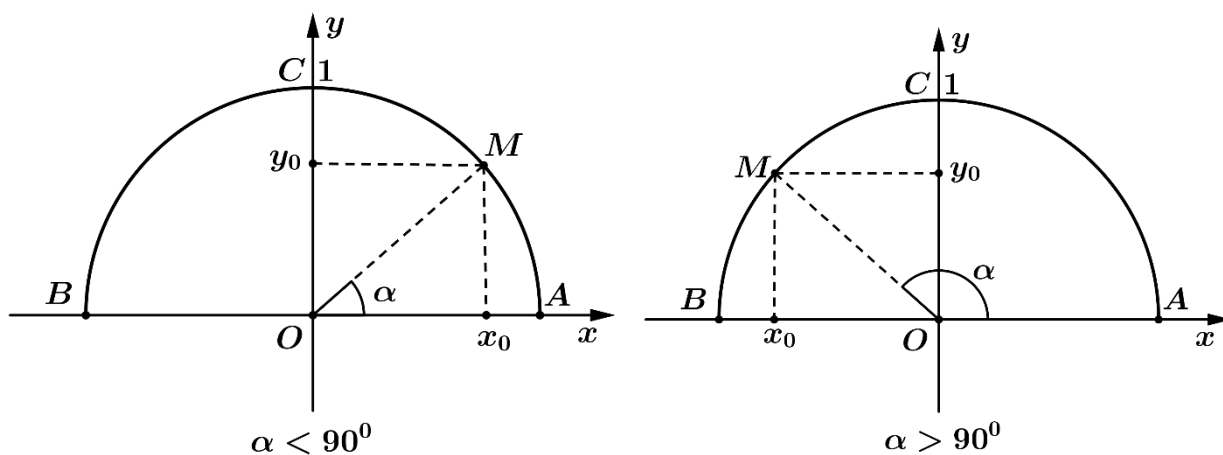
BÀI 01 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

A // LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Giá trị lượng giác của một góc

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, nửa đường tròn tâm O, bán kính $R = 1$ nằm phía trên trục hoành như hình dưới đây được gọi là nửa đường tròn đơn vị.

Cho trước một góc α , $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$. Khi đó có duy nhất điểm $M(x_0; y_0)$ trên nửa đường tròn đơn vị nói trên để $\widehat{xOM} = \alpha$.



Với mỗi góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$) gọi $M(x_0; y_0)$ là điểm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \alpha$. Khi đó:

- sin của góc α là tung độ y_0 của điểm M được kí hiệu là $\sin \alpha$
- cosin của góc α là hoành độ x_0 của điểm M được kí hiệu là $\cos \alpha$
- Khi $\alpha \neq 90^\circ$ (hay là $x_0 \neq 0$), tang của α là $\frac{y_0}{x_0}$ được kí hiệu là $\tan \alpha$
- Khi $\alpha \neq 0^\circ$ và $\alpha \neq 180^\circ$ (hay là $y_0 \neq 0$) côtang của α là $\frac{x_0}{y_0}$ được kí hiệu là $\cot \alpha$.

Từ định nghĩa trên ta có:

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (\alpha \neq 90^\circ); \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \quad (\alpha \neq 0^\circ \text{ và } \alpha \neq 180^\circ); \quad \tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \quad (\alpha \notin \{0^\circ; 90^\circ; 180^\circ\})$$

Sau đây là bảng giá trị lượng giác (GTLG) của một số góc đặc biệt nên nhớ.

α GTLG	0°	30°	45°	60°	90°	180°
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\tan \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0
$\cot \alpha$		$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	

2 Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác

- Hai góc bù nhau:

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot \alpha$$

- Hai góc phụ nhau:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(90^\circ - \alpha) = \cot \alpha$$

$$\cot(90^\circ - \alpha) = \tan \alpha$$

3 Các hệ thức lượng giác cơ bản

- $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$
- $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$
- $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 (\alpha \neq 0^\circ; 90^\circ; 180^\circ)$
- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} (\alpha \neq 90^\circ)$
- $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} (\alpha \neq 0^\circ; 180^\circ)$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính các giá trị của biểu thức lượng giác

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

Lời giải

a) $(2 \sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3 \tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$

$= (2 \sin 30^\circ + \cos(180^\circ - 45^\circ) - 3 \tan(180^\circ - 30^\circ))(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$

$= (2 \sin 30^\circ - \cos 45^\circ + 3 \tan 30^\circ)(-1 - \cot 60^\circ) = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$= -\frac{(2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}}$

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$

$= (\sin 90^\circ)^2 + (\cos 120^\circ)^2 + (\cos 0^\circ)^2 - (\tan 60^\circ)^2 + (\cot 135^\circ)^2$

$= 1 + (\cos(180^\circ - 60^\circ))^2 + 1 - (\sqrt{3})^2 + (\cot(180^\circ - 45^\circ))^2$

$= 1 + (\cos 60^\circ)^2 + 1 - (\sqrt{3})^2 + (\cot 45^\circ)^2 = \frac{1}{4}$

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + (\cos 30^\circ)^2 = 1$

Bài tập 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \tan 30^\circ + \cot 30^\circ$

b) $B = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

c) $C = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

d) $D = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$

e) $E = \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$

f) $F = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$

g) $G = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$

h) $H = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$

i) $I = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$

j) $J = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 0^\circ \cdot \tan 58^\circ + \frac{5 \tan^2 18^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$

k) $K = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \cos^2 17^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$

Lời giải

a) Ta có $\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

b) $B = \sin^2 45^\circ - 2\sin^2 50^\circ + 3\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

$$B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2(\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4.$$

c) $C = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$
 $= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0$

d) $D = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ)(\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$
 $= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ)(\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) = 1$

e) Ta có $E = \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$
 $= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ)$
 $= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22.$

f) Ta có $F = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$
 $= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2$

g) Ta có $G = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ = 3 - (1)^2 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1.$

h) $H = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2.$

i) $I = (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ)$
 $= (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2.$

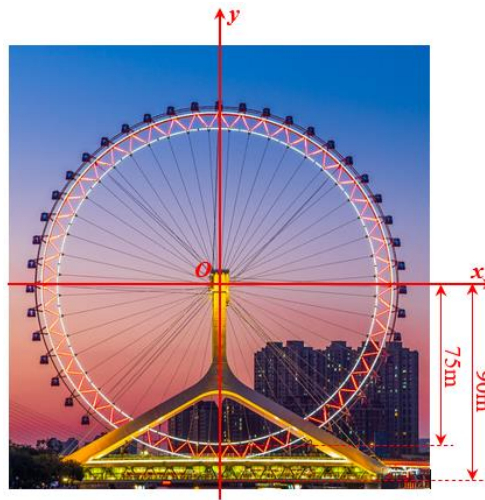
j) Ta có: $J = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 0^\circ \cdot \tan 58^\circ + \frac{5 \tan^2 18^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$
 $= 4 \tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ \cdot \cos 0^\circ + \frac{5 \cot^2 72^\circ}{1 + \cot^2 72^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$



$$\begin{aligned}
 &= 4 \tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ \cdot \cos 0^\circ + 5 \cot^2 72^\circ \cdot \sin^2 72^\circ + 5 \sin^2 72^\circ \\
 &= 4 \tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ \cdot \cos 0^\circ + 5 \sin^2 72^\circ \cdot (\cot^2 72^\circ + 1) \\
 &= 4(\tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ) \cdot \cos 0^\circ + 5 \sin^2 72^\circ \cdot \frac{1}{\sin^2 72^\circ} = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 5 = 9
 \end{aligned}$$

k) Ta có:
$$\begin{aligned}
 K &= \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \cos^2 17^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ \\
 &= 12 \cdot \cos^2 73^\circ - 4 \cot 15^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \sin^2 73^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 40^\circ \\
 &= 12 \cdot (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) - 4 \cot 15^\circ \cdot \tan 15^\circ - 2(\tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ) \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 7
 \end{aligned}$$

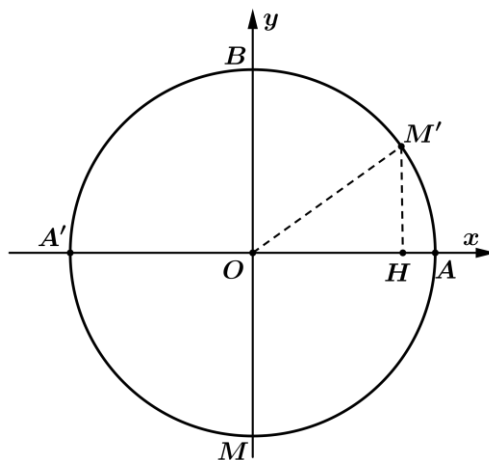
Bài tập 3: Một chiếc đu quay có bán kính 75 m, tâm của vòng quay ở độ cao 90 m như hình vẽ dưới đây. Thời gian thực hiện mỗi vòng quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay thì sau 20 phút quay người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Lời giải

Giả sử chiếc đu quay quay theo chiều kim đồng hồ.

Gọi M là vị trí thấp nhất của cabin, M' là vị trí của cabin sau 20 phút và các điểm A, A', B, H (như hình vẽ).



Vì đi cả vòng quay mất 30 phút nên sau 20 phút, cabin sẽ đi quãng đường bằng chu vi đường tròn.

Sau 15 phút, cabin di chuyển từ điểm M đến điểm B , đi được chu vi đường tròn.





Trong 5 phút tiếp theo, cabin đi chuyển từ điểm B đến điểm M' tương ứng chu vi đường tròn hay cung tròn .

$$\text{Do đó } \angle BOM' = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ \Rightarrow \angle AOM' = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

$$\text{Ta có: } MH = \sin 30^\circ \cdot OM' = \frac{1}{2} \cdot 75 = 37,5 \text{ (mét)}$$

Do đó độ cao của người đó là: $37,5 + 90 = 127,5$ (m)

Vậy sau 20 phút quay người đó ở độ cao 127,5 m.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây sai?

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}.$

B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1.$

C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0.$

D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0.$

Lời giải

Áp dụng bảng giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3} \sin 150^\circ + \cos 135^\circ - \sin 120^\circ$ ta được

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}.$

B. $\sqrt{2}.$

C. $-\sqrt{2}.$

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Lời giải

Ta có $P = \sqrt{3} \sin 150^\circ + \cos 135^\circ - \sin 120^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 3: Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

A. 0.

B. 2.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1.$

Câu 4: Tổng $\sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \sin^2 7^\circ + \dots + \sin^2 83^\circ + \sin^2 85^\circ + \sin^2 87^\circ$ bằng

A. 21.

B. 23.

C. 22.

D. 24.

Lời giải

$S = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ) + \dots + (\sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ)$

$S = (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + \dots + (\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ) = 22.$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

A. 3.

B. 4.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2.$

Câu 6: Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

A. $\frac{1}{2}.$

B. $\frac{\sqrt{3}}{2}.$

C. 1.

D. -1.

Lời giải

$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin(90^\circ + 36^\circ) \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{\cos^2 x} + 3 - 2 \tan^2 x$ bằng

A. 1.

B. 3.

C. 5.

D. 2.

Lời giải

Ta có $P = \frac{2}{\cos^2 x} + 3 - 2 \tan^2 x = 2(1 + \tan^2 x) + 3 - 2 \tan^2 x = 5$

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ bằng

- A. -1. **B.** 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

$$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0.$$

Câu 9: Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A.** 1. B. 2. C. -2. D. -1.

Lời giải

$$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Câu 10: Biết rằng $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin x \cos x$ bằng

- A.** $-\frac{5}{18}$. B. $-\frac{5}{9}$. C. $\frac{5}{18}$. D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (\sin x + \cos x)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{5}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18}.$$

Câu 11: Cho $\tan x - \cot x = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x + \cot^2 x$ bằng

- A. 0. B. 4. **C.** 6. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x - \cot x)^2 + 2 \tan x \cot x = 4 + 2 = 6.$$

Câu 12: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1$ bằng

- A. 0. **B.** 1. C. 3. D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \tan^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1$$

$$= \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) - \sin^2 x \tan^2 x + 1 = \sin^2 x \tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1 = 1.$$

Câu 13: Biểu thức $\sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$ không phụ thuộc vào a và có giá trị bằng

- A. 6. B. 5. **C.** 3. D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a = \sin^2 a \left(\frac{1}{\cos^2 a} - 1 \right) + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$$

$$= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \sin^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a = 3\sin^2 a + 3\cos^2 a = 3.$$

Câu 14: Cho $H = \cos(x + 60^\circ) - 5\cos(120^\circ - x) - 6.\sin(x + 60^\circ).\cot(x + 60^\circ)$ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $H = -1$. B. $H = \frac{1}{3}$. C. $H = \frac{\pi}{3}$. **D. $H = 0$.**

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } H &= \cos(x + 60^\circ) - 5\cos(120^\circ - x) - 6.\sin(x + 60^\circ).\cot(x + 60^\circ) \\ &= \cos(x + 60^\circ) + 5\cos(180^\circ - 120^\circ + x) - 6\sin(x + 60^\circ).\cot(x + 60^\circ) \\ &= \cos(x + 60^\circ) + 5\cos(60^\circ + x) - 6\cos(x + 60^\circ) = 0 \end{aligned}$$

Câu 15: Cho $D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

- A. $D = 0$. **B. $D = 8$.** C. $D = 2022$. D. $D = 18$.

Lời giải

Công thức áp dụng: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow \cos 80^\circ = \sin 10^\circ, \cos 70^\circ = \sin 20^\circ, \cos 60^\circ = \sin 30^\circ, \cos 50^\circ = \sin 40^\circ$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos 170^\circ = -\cos 10^\circ, \cos 160^\circ = -\cos 20^\circ, \dots, \cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } D &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ \\ &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 100^\circ + \dots + \cos^2 160^\circ + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ \\ &= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 80^\circ + \dots + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ + 1 \\ &= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ) + \cos^2 90^\circ + 1 \\ &= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ) + 0 + 1 \\ &= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 10^\circ) + 1 \\ &= 2(\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + 1 \\ &= 2(1 + 1 + 1 + 1) + 1 = 9. \end{aligned}$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $A = \tan 2^\circ \tan 3^\circ \tan 4^\circ \dots \tan 87^\circ \tan 88^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Góc có số đo 2° và góc có số đo 88° là hai góc phụ nhau.

b) Biểu thức A được đưa về dạng

$$A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ).$$

c) Ta có $\tan 88^\circ = \cot 2^\circ$.

d) Giá trị của biểu thức A bằng 2.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $2^\circ + 88^\circ = 90^\circ$ nên góc có số đo 2° và góc có số đo 88° là hai góc phụ nhau

b) Đúng: Ta có $A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$

c) Đúng: Vì $\tan 88^\circ = \tan(90^\circ - 2^\circ) = \cot 2^\circ$.

d) Sai: Ta có $A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$
 $= A = (\tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \cot 3^\circ)(\tan 4^\circ \cot 4^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \cot 45^\circ) = 1.$

Câu 2: Cho $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Xét biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với mọi góc a, b ta luôn có $\sin^2 a + \cos^2 b = 1$.

b) Biểu thức $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ được viết lại $2 \sin a \cos a = 1$

c) Biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$ được viết lại $P = 1 - 2 \sin a \cos a$

d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Với mọi góc a ta luôn có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

b) Đúng: Ta có

$$\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = 2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin a \cos a = 2 \Leftrightarrow 2 \sin a \cos a = 1.$$

c) Sai: Ta có $P = \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$.

d) Đúng: Từ $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ ta có $\sin a \cos a = \frac{1}{2}(1)$.

$$\text{lại có } P = \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x(2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có } P = \frac{1}{2}$$

Câu 3: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ và biểu thức $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với mọi góc α ta luôn có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.

b) Với mọi góc α ta luôn có $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha$.

c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2$.

d) Biểu thức $P = 7$ khi và chỉ khi $m = \pm 3$.

Lời giải

- a) Đúng: Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$
- b) Sai: Với mọi góc α ta luôn có $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \neq \tan^2 \alpha \cot^2 \alpha$.
- c) Đúng: $P = \tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha + \cot^2 \alpha - 2 = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2$
- d) Đúng: Khi $P = 7 \Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 = 7 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Câu 4: Cho $\sin x + \cos x = m$ và biểu thức $M = \sin x \cdot \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- b) $2M = (\sin x + \cos x)^2 - 1$
- c) Biểu thức $\sin x + \cos x = m$ được đưa về dạng $1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$.
- d) Khi $M = \frac{1}{4}$ thì $m = \frac{3}{4}$.

Lời giải

- a) Đúng: Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- b) Đúng: Ta có $2M = 2 \sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow 2M = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$.
- c) Sai: Từ $\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$.
- d) Sai: Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2 \Rightarrow m^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức: $P = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$.

Lời giải

Ta có $P = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Câu 2: Giá trị của biểu thức $P = 5(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x$ bằng

Lời giải

Ta có $P = 5(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x$
 $= 5[1^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x] - 2[1^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)] + 4 \sin^2 x \cos^2 x$
 $= 5(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x) + 4 \sin^2 x \cos^2 x = 5 - 2 = 3$

Câu 3: Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + (\tan \alpha + \cot \alpha)^2$

Lời giải

$P = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$
 $= 1 + \tan^2 \alpha + 1 + \cot^2 \alpha + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = 4 + 2(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)$
 $= 4 + 2[(\tan \alpha - \cot \alpha)^2 + 2] = 16$

Câu 4: Cho các góc α, β thỏa mãn $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ và $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin^6 \alpha + \sin^6 \beta + 3 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta$.

Lời giải

Ta có: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha$. Mà $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên

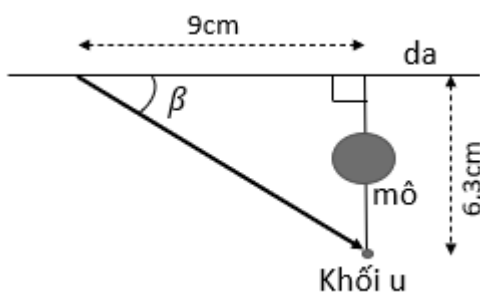
$$= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$$

$$= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = 1. \text{ Vậy } T = 1.$$

Câu 5: Xạ phẫu Gamma Knife là phương pháp điều trị u não (không cần mở hộp sọ) bằng cách sử dụng bức xạ gamma tập trung, hội tụ chính xác vào tổn thương, không làm hại mô lành. Nếu khối u của bệnh nhân cách mặt da 6,3 cm, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u 9 cm để tránh làm tổn thương mô thì góc tạo bởi chùm tia với mặt da là β . Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \beta$

Lời giải

Từ đề bài ta có hình vẽ sau:



Gọi β là góc tạo bởi chùm tia với mặt da. Ta có: $\tan \beta = \frac{6,3}{9} = \frac{7}{10}$.

Câu 6: Cho $\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \tan^n x$ và $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^n x + \cos^n x$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có
$$\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)} = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)}{\cos^2 x \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \right)} = \frac{\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}}$$

$$= \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \tan^6 x \Rightarrow \tan^n x = \tan^6 x \Rightarrow n = 6$$

Với $n = 6 \Rightarrow P = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$

$\Leftrightarrow P = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \quad (1)$

Lại có $\sin x + \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9} \quad (2)$

Từ (1), (2) ta có $P = 1 - 3 \cdot \frac{16}{81} = \frac{11}{27} \approx 0,41$.

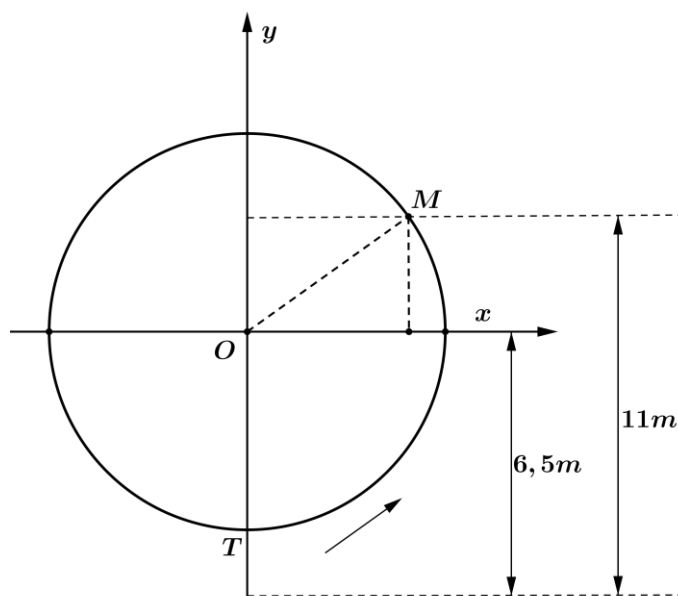
Câu 7: Guồng nước (cọn nước) được biết đến là một công cụ đặc lực trong sản xuất nông nghiệp của bà con dân tộc Thái ở nước ta.



Chiếc guồng được cấu tạo giống như bánh xe đạp, có đường kính 10 m. Tâm quay ở độ cao 6,5 m. Nan hoa làm bằng loại tre già, có sức chịu đựng trong môi trường ẩm ướt. Vành guồng rộng 50cm, được đặt các phen nửa để cản nước, tạo lực đẩy guồng quay và có gắn các ống bương (lùng) buộc chéo khoảng 30 độ để múc đầy nước khi chìm xuống. Lực đẩy của nước khiến guồng quay liên tục, đến tầm cao nhất định, thì các ống bương bắt đầu đổ nước vào các máng dài. Biết thời gian cọn nước thực hiện 1 vòng quay là 3 phút. Máng nước cao 11 m. Nếu một ống bương đang ở vị trí thấp nhất thì thời gian nó di chuyển đến vị trí máng nước là

Lời giải

Gọi vị trí thấp nhất của ống bương là T , M là vị trí của máng nước (như hình vẽ)



Tung độ của điểm M là $y_M = 11 - 6,5 = 4,5 \Rightarrow \sin xOM = \frac{y_M}{OM} = \frac{4,5}{5} = 0,9 \Rightarrow xOM \approx 64^0$

Ta có: $TOM = TOx + xOM = 90^0 + 64^0 = 154^0$.

Vì thời gian cọn nước thực hiện 1 vòng quay là 3 phút nên thời gian ống bương di chuyển từ T đến M là $\frac{3 \cdot 154}{360} = \frac{77}{60}$ (phút).

-----HẾT-----

Dạng 2: Cho một giá trị lượng giác. Tính các giá trị còn lại

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$

b) Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\tan \alpha$

c) Cho α là góc tù và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính giá trị của biểu thức $3\sin \alpha + 2\cos \alpha$

Lời giải

a) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$ mà $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$

Do α là góc tù nên $\cos \alpha < 0$, từ đó $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

Như vậy $3\sin \alpha + 2\cos \alpha = 3 \cdot \frac{5}{13} + 2 \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{9}{13}$.

c) Do $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0$.

Ta có: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 2: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Biết $\cot \alpha = -a$, $a > 0$. Tính $\cos \alpha$

b) Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

c) Cho $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $P = 2\cos^2 \alpha + 5\sin \alpha \cos \alpha + 1$

d) Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

Lời giải

a) Do $\cot \alpha = -a$, $a > 0$ nên $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ suy ra $\cos \alpha < 0$.

Mặt khác, $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{a}$.

Mà ta lại có $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{1 + a^2}$.

Khi đó $\cos \alpha = -\frac{|a|}{\sqrt{1 + a^2}}$ và do $a > 0$ nên $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$.

b) Ta có: $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$.

c) Ta có $P = \sin^2 \alpha \left(2\cot^2 \alpha + 5\cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (3\cot^2 \alpha + 5\cot \alpha + 1) = \frac{101}{26}$

Ta có $\sin x + \cos x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} - \cos x$. Thay vào phương trình $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ta được:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5} - \cos x\right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - \frac{2}{5}\cos x - \frac{24}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \cos x = \frac{-3}{5} \end{cases}$$

Với $\cos x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = \frac{-3}{5}$. Khi đó $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-3}{4}$; $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{-4}{3}$.

Với $\cos x = \frac{-3}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$. Khi đó $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-4}{3}$; $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{-3}{4}$.

Bài tập 3: Cho $\tan \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$

Lời giải

Ta có: $B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3\cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$

Suy ra $B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27+3+2.3(9+1)} = \frac{2}{9}$.

Bài tập 4: Cho $\tan a = -3$ ($0^\circ \leq a \leq 180^\circ$). Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cdot \cos a - 2\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cdot \cos a + 4\cos^2 a}$

Lời giải

Ta có: $B = \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cdot \cos a - 2\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cdot \cos a + 4\cos^2 a}$

$$= \frac{\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 2\frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a} - 2\frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}}{2\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - 3\frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a} + 4\frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}} = \frac{\tan^2 a + 2 \cdot \tan a - 2}{2 \cdot \tan^2 a - 3 \cdot \tan a + 4} = \frac{9 + 2 \cdot (-3) - 2}{2 \cdot 9 - 3 \cdot (-3) + 4} = \frac{1}{31}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- A.** $\cot \alpha = 2$. **B.** $\cot \alpha = \sqrt{2}$. **C.** $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. **D.** $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2.$$

Câu 2: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Giá trị của biểu thức $P = 3 \cot \alpha + 4 \tan \alpha$ là

- A.** 7. **B.** $-7\sqrt{2}$. **C.** $7\sqrt{2}$. **D.** -7.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vì } \sin \alpha = \frac{1}{3}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \cot \alpha = -2\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } P = 3 \cot \alpha + 4 \tan \alpha = -7\sqrt{2}$$

Câu 3: $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu nếu $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$?

- A.** $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. **C.** $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cot \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -2.$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \text{ suy ra } \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Câu 4: Nếu $\tan \alpha = 3$ thì $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu?

- A.** $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}.$$

Suy ra $\cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$.

Câu 5: Cho $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của biểu thức $A = |\sin \alpha - \cos \alpha|$ là

- A. $\frac{\sqrt{21}+2}{25}$. B. $\frac{\sqrt{21}-2}{5}$. C. $\frac{\sqrt{21}+2}{5}$. D. $\frac{\sqrt{21}-2}{25}$.

Lời giải

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{21}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$ ($\cos \alpha > 0$)

Lại có $A^2 = 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = \frac{25 - 4\sqrt{21}}{25} = \frac{(\sqrt{21} - 2)^2}{25} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{21} - 2}{5}$

Câu 6: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $E = \tan \alpha + \cot \alpha$ là

- A. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = 8 \Rightarrow \tan \alpha = 2\sqrt{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\Rightarrow E = 2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$

Câu 7: Cho $\cot \alpha = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + 3 + \tan^2 \alpha$ bằng

- A. $\frac{23}{2}$. B. $\frac{23}{4}$. C. $\frac{23}{8}$. D. 23.

Lời giải

Ta có $P = 2(1 + \tan^2 \alpha) + 3 + \tan^2 \alpha = 5 + \frac{3}{\cot^2 \alpha} = 5 + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0$.

Câu 9: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Biểu thức: $P = \frac{\cos \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{15}{16}$. B. $\frac{15}{4}$. C. $\frac{15}{64}$. D. $\frac{15}{8}$.

Lời giải

$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ($0^\circ < \alpha < 90^\circ$)

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}, \cot \alpha = \sqrt{15} \Rightarrow P = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{15}} + \sqrt{15}} = \frac{15}{64}$$

Câu 10: Biết rằng $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos x$ bằng

- A. $-\frac{31}{34}$. B. $\frac{31}{34}$. C. $\frac{31}{18}$. D. $-\frac{31}{18}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } (\sin x + \cos x)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{4}{9}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x = -\frac{5}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18}.$$

$$\text{Lại có } P = (\sin x + \cos x)^3 - 3\sin x \cos x(\sin x + \cos x) + \sin x \cos x = \frac{23}{27} - \frac{5}{18} = \frac{31}{54}$$

Câu 11: Cho $\tan x = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \cot^2 x + \cos^2 x$ bằng

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{5}{4}$. D. 5.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cot^2 x = \frac{1}{\tan^2 x} = 4, \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5}.$$

Câu 12: Cho $8\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1 = 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ bằng

- A. $\frac{113}{120}$. B. $\frac{113}{60}$. C. $\frac{120}{113}$. D. $\frac{60}{113}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 8\cos^2 \alpha + 2\cos \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{4} \\ \cos \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{15}$$

$$\text{Vậy } P = \tan^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{1}{15} + \frac{15}{16} = \frac{113}{120}.$$

Câu 13: Biết α là một góc từ 0° đến 180° thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{5}{2}$ và $\sin \alpha > \cos \alpha$. Tính $\sin \alpha$.

- A. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. D. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2 \tan^2 \alpha - 5 \tan \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \tan \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Rõ ràng trong cả 2 trường hợp ta đều có $\tan \alpha > 0$ nên $\cos \alpha > 0$, vậy giả thiết $\sin \alpha > \cos \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha > 1$. Từ đó ta có $\tan \alpha = 2 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2}$.

$$\text{Ta lại có } \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 14: Biết α là một góc từ 0° đến 180° thỏa mãn $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{5}$ và $\tan \alpha < 1$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. C. $\tan \alpha = 2$. D. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{5} \text{ suy ra } \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{4}{25} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha \cdot (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{4}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \frac{4}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \\ \sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Với } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ ta có } \tan \alpha = \frac{1}{2} \text{ (tm).}$$

$$\text{Với } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ ta có } \tan \alpha = 2 \text{ (loại).}$$

Câu 15: Cho α là góc nhọn và thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $M = \frac{\tan \alpha - 3 \cot \alpha + 2}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ là

A. $\frac{2\sqrt{2} - 23}{9}$. B. $\frac{4\sqrt{2} + 23}{9}$. C. $\frac{4\sqrt{2} + 25}{9}$. D. $\frac{4\sqrt{2} - 23}{9}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}, \text{ suy ra } \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\text{theo giả thiết: } \alpha \text{ là góc nhọn nên } \cos \alpha > 0, \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Khi đó } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}; \cot \alpha = 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } M = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} - 3 \cdot 2\sqrt{2} + 2}{\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 23}{9}.$$

Câu 16: Cho α là góc tù và $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{4}{5}$. Giá trị của $M = \sin \alpha - 2 \cos \alpha$ là

A. $M = \frac{12 - \sqrt{34}}{10}$. B. $M = \frac{4 - 3\sqrt{34}}{10}$. C. $M = \frac{12 + \sqrt{34}}{10}$. D. $M = -\frac{4 + 3\sqrt{34}}{10}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\sin \alpha = \frac{4}{5} + \cos \alpha$, và $\cos \alpha < 0$

Mặt khác: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5} + \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{34}}{10}$

suy ra $\cos \alpha = \frac{-4 - \sqrt{34}}{10}$; $\sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{34}}{10}$. Vậy $M = \frac{12 + \sqrt{34}}{10}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $0 < \cos \alpha < 1$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.
- b) $\sin \alpha$ được đưa về dạng $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.
- c) Giá trị của $\cot \alpha$ bằng $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- d) Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \tan^2 \alpha$ bằng 2.

Lời giải

- a) Sai: Ta có: $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$.
- b) Đúng: Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$
- c) Đúng: Vì $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.
- d) Sai: Ta có $A = 1 + \cot^2 \alpha + \frac{1}{\cot^2 \alpha} = 1 + \frac{5}{4} + \frac{4}{5} = \frac{61}{20}$.

Câu 2: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Xét biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 4$
- b) Biểu thức $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$ được đưa về dạng $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.
- c) Biểu thức P được viết lại $P = 1 + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.
- d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

- a) Sai: Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 4$
- b) Đúng: Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.
- c) Sai:

$$P = \sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.$$

d) Đúng: Từ $\tan a + \cot a = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$

Ta lại có $P = \sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

Vậy $P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Câu 3: Cho $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và biểu thức $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $\tan \alpha > 0$.
- b) $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0$ được viết lại $(\tan \alpha - 2)(\tan \alpha - 3) = 0$
- c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$.
- d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{91}{9}$.

Lời giải

- a) Đúng: Với α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $\tan \alpha > 0$.
 - b) Sai: Ta có $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow (\tan \alpha + 2)(\tan \alpha - 3) = 0$
 - c) Đúng: $P = 1 + \tan^2 \alpha + 1 + \cot^2 \alpha = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$
 - d) Đúng: Ta có $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow (\tan \alpha + 2)(\tan \alpha - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -2 \\ \tan \alpha = 3 \end{cases}$
- Do $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \tan \alpha = 3 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \frac{91}{9}$

Câu 4: Cho $\sin x + \cos x = m$ và biểu thức $M = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

- a) Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- b) $M^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 4\sin \alpha \cos \alpha$
- c) Biểu thức $\sin x + \cos x = m$ được đưa về dạng $1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2$.
- d) Giá trị của biểu thức M bằng $-m^2 - 1$.

Lời giải

- a) Đúng: Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- b) Đúng: Ta có $2M = 2\sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow 2M = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha - 1 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$.
- c) Sai: Từ $\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2$.
- d) Sai: Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2 \Rightarrow m^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{9(\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha)}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= 9 \cdot \frac{\cos^3 \alpha \left(\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right)}{\cos^3 \alpha \left(\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + 1 \right)} = 9 \cdot \frac{\tan^3 \alpha + \tan \alpha + 1}{\tan^3 \alpha + 1} = 9 \cdot \frac{8 + 2 + 1}{8 + 1} = 11 \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

Câu 2: Biết $\sin^3 \alpha - 3\sin \alpha + 2 = 0, (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. Giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3} \tan \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha$ bằng

Lời giải

$$\text{Ta có } 2\sin^3 \alpha + \sin^2 \alpha + 5\sin \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (2\sin \alpha - 1)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow 2\sin \alpha - 1 = 0$$

$$(\sin^2 \alpha + \sin \alpha + 3 \neq 0)$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot \alpha = \sqrt{3} \text{ nên } P = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) = 4$$

Câu 3: Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước với độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90^\circ - \phi - \left| \cos \left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m \right) 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \leq N \leq 172, m = 1$ nếu $173 \leq N \leq 355, m = 2$ nếu $356 \leq N \leq 365$.

Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20^\circ$ là a° (Công thức tính toán nói trên chính xác tới $\pm 0,5^\circ$). Tính giá trị của biểu thức $P = \tan a + \cot a$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ngày 10/10 là ngày thứ 283 của năm không nhuận. Do đó, góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày này tại vĩ độ $\phi = 20^\circ$ bằng

$$\alpha = 90^\circ - 20^\circ - \left| \cos \left(\left(\frac{2(283+10)}{365} - 1 \right) \cdot 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ = 70^\circ - \left| \cos \frac{221}{365} \cdot 180^\circ \right| \cdot 23,5^\circ \approx 62,6^\circ.$$

Vậy $a = 62,6^\circ \Rightarrow P = \tan 62,6^\circ + \cot 62,6^\circ \approx 2,45$

Câu 4: Một quả bóng Golf kể từ lúc được đánh đến lúc chạm mặt đất đã di chuyển được một khoảng cách d (mét) theo phương nằm ngang. Biết rằng $d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}$ trong đó v_0 (m/s) là vận tốc ban đầu của quả bóng, g là gia tốc trọng trường và φ là góc đánh quả bóng so với phương nằm ngang. Tính giá trị của $\cos 2\varphi$, khi $v_0 = 15$ (m/s) $g = 10$ (m/s²), $d = 18$ (m).

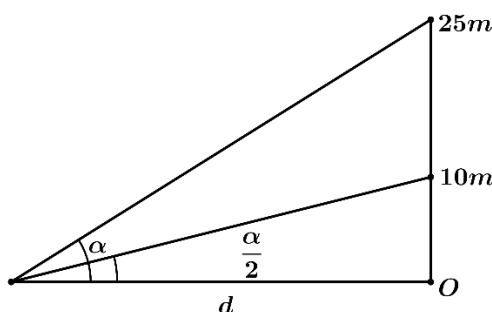
Lời giải

Ta có $d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}$ nên $18 = \frac{(15)^2 \cdot \sin 2\varphi}{10} \Leftrightarrow \sin 2\varphi = \frac{180}{225} = \frac{4}{5}$.

$0^\circ < \varphi < 45^\circ \Rightarrow 0^\circ < 2\varphi < 90^\circ \Rightarrow \cos 2\varphi > 0$ nên $\cos 2\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$

Câu 5: Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất $25(m)$ tại một góc ngắm α (góc hợp bởi phương ngắm với phương ngang). Nếu giảm góc ngắm đi một nửa thì vận động viên bắn trúng mục tiêu cách mặt đất $10(m)$ thì khoảng cách từ vận động viên đến bức tường bằng $10\sqrt{5}(m)$. Tính giá trị của $P = 3\cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Lời giải



Gọi α là góc ngắm lúc đầu của vận động viên. Ta có $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{10\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ta lại có: $\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow P = 2,5$

Câu 6: Cho b, c là các số nguyên khác 0, $c \neq 2025$ và $\tan x = \frac{2b}{2025 - c}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2025\cos^2 x + 2b\sin x \cdot \cos x + c\sin^2 x$.

Lời giải

Ta có: $A = 2025\cos^2 x + 2b\sin x \cdot \cos x + c\sin^2 x \Leftrightarrow \frac{A}{\cos^2 x} = 2025 + 2b\tan x + c\tan^2 x$

$\Leftrightarrow A(1 + \tan^2 x) = 2025 + 2b\tan x + c\tan^2 x$

$\Leftrightarrow A\left(1 + \left(\frac{2b}{2025 - c}\right)^2\right) = 2025 + 2b \cdot \frac{2b}{2025 - c} + c \cdot \left(\frac{2b}{2025 - c}\right)^2$

$\Leftrightarrow A \frac{(2025 - c)^2 + (2b)^2}{(2025 - c)^2} = \frac{2025(2025 - c)^2 + 4b^2(2025 - c) + c \cdot 4b^2}{(2025 - c)^2}$



$$\Leftrightarrow A \frac{(2025 - c)^2 + (2b)^2}{(2025 - c)^2} = \frac{2025(2025 - c)^2 + 4b^2 \cdot 2025}{(2025 - c)^2}$$

$$\Leftrightarrow A \frac{(2025 - c)^2 + 4b^2}{(a - c)^2} = \frac{2025((2025 - c)^2 + 4b^2)}{(2025 - c)^2} \Leftrightarrow A = 2025.$$

-----HẾT-----

Dạng 3: Rút gọn các biểu thức lượng giác

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$

b) $B = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$

c) $C = \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$

d) $D = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 3 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + \cos^2 a}$

e) $E = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$

Lời giải

a) Ta có: $A = (\tan^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) - (\tan^2 x - 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) = 4$.

b) $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1$

c) Ta có

$$\sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a = \sin^2 a \left(\frac{1}{\cos^2 a} - 1 \right) + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$$

$$= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \sin^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a = 3 \sin^2 a + 3 \cos^2 a = 3$$

d) Ta có: $D = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 3 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + \cos^2 a} = \frac{\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 2 \frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a} - 3 \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}}{2 \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - 3 \frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}}$

$$= \frac{\tan^2 a + 2 \cdot \tan a - 3}{2 \tan^2 a - 3 \cdot \tan a + 1} = \frac{(\tan x - 1)(\tan x + 3)}{(\tan x - 1)(2 \tan x - 1)} = \frac{\tan x + 3}{2 \tan x - 1}$$

e) Ta có $P = \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức lượng giác sau:

a) $A = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x + \cot x}$

$$b) B = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + (\tan x - \cot x)^2 + 1$$

$$c) C = (1 - \sin^2 x)\cot^2 x + 1 - \cot^2 x.$$

$$d) D = \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} + \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x}$$

$$e) E = \frac{\cos^3 x + 2\cos^2 x \sin x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^3 x}{(\tan x - \cot x)(\cos x + 2\sin x)}$$

Lời giải

$$a) \text{Ta có } A = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1}{\frac{1}{\sin x \cos x}} = \frac{2\sin x \cos x}{\frac{1}{\sin x \cos x}} = 2\sin^2 x \cos^2 x.$$

$$b) \text{Ta có: } B = 2(1 + \tan^2 x) - (1 + \cot^2 x) + \tan^2 x + \cot^2 x - 2 + 1 = 3\tan^2 x.$$

$$c) C = [(1 - \sin^2 x) - 1]\cot^2 x + 1 = -\sin^2 x \cdot \cot^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

$$d) \text{Ta có } D = \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} + \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)}$$

$$= \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} = 2 - \cos^2 x + 2 - \sin^2 x = 4 - (\cos^2 x + \sin^2 x) = 3.$$

$$e) \text{Ta có } E = \frac{(\cos^3 x - \sin^2 x \cos x) + (2\cos^2 x \sin x - 2\sin^3 x)}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)(\cos x + 2\sin x)}$$

$$= \frac{\cos x(\cos^2 x - \sin^2 x) + 2\sin x(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)(\cos x + 2\sin x)}$$

$$= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + 2\sin x)\sin x \cos x}{-(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + 2\sin x)} = -\sin x \cos x.$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x.$ B. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$
 C. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x, \forall x.$ D. $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

Lời giải

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x).$$

Câu 2: Biểu thức $(\cot a + \tan a)^2$ bằng

- A. $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}.$ B. $\cot^2 a + \tan^2 a.$ C. $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}.$ D. $\cot^2 a \tan^2 a + 2.$

Lời giải

$$(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + 2\cot a \tan a + \tan^2 a = (\cot^2 a + 1) + (\tan^2 a + 1) = \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$$

Câu 3: Đơn giản biểu thức $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

- A. $\sin x.$ B. $\frac{1}{\cos x}.$ C. $\frac{1}{\sin x}.$ D. $\cos x.$

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin x \cdot \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos x}$ ta được

- A. $P = \frac{1}{2} \tan x.$ B. $P = \frac{1}{2} \cot x.$ C. $P = 2 \cot x.$ D. $P = 2 \tan x.$

Lời giải

$$P = \frac{1 - \sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos^2 x}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos x}{2\sin x} = \frac{1}{2} \cot x$$

Câu 5: Rút gọn biểu thức $A = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^6 x - \cos^6 x$ ta được

- A. $\sin x \cos x.$ B. $\sin^2 x \cos^2 x.$ C. $-\sin x \cos x.$ D. $-\sin^2 x \cos^2 x.$

Lời giải

Ta có

$$A = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \right]$$

$$A = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x - 1 + 3\sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 x$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1}$ ta được

- A.** 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

$$P = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1} = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1} = \frac{\sin^2 x \tan^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1} = 1$$

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{-\sin^2 x + 4 \cos x + 5} - 2$ ta được

- A.** $\cos x$. **B.** $-\cos x$. **C.** $4 + \cos x$. **D.** $\cos x + 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \sqrt{-(1 - \cos^2 x) + 4 \cos x + 5} - 2 = \sqrt{(\cos x + 2)^2} - 2 = \cos x + 2 - 2 = \cos x.$$

Câu 8: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\cot x} + \frac{3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)}{(\sin x - \cos x)^2 - 1}$ ta được

- A.** $\frac{1}{\sin x \cos x}$. **B.** $\frac{1}{2 \sin x \cos x}$. **C.** $-\frac{1}{\sin x \cos x}$. **D.** $-\frac{1}{2 \sin x \cos x}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{3 \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \right] - 2 \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \right]}{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - 1} \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{3(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x)}{-2 \sin x \cos x} \\ &= \frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2 \sin x \cos x}. \end{aligned}$$

Câu 9: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cos x}{\tan x + \cot x} + \cos x \sin^2 x$ ta được

- A.** $\sin x$. **B.** $\cos x$. **C.** $\tan x$. **D.** $\cot x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} + \sin^3 x = \frac{\cos x}{1} + \sin^3 x \\ &= \sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x. \end{aligned}$$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $P = \frac{2 \sin(180^\circ - x) \sin(90^\circ - x)}{\tan x + \cot x} + \sin^4 x + \cos^4 x$ ta được

- A.** 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

$$= \frac{2\sin x \cos x}{1} + 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 2\sin^2 x \cos^2 x + 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1.$$

Câu 11: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$ ta được

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)}{\cot^2 x} + \sin^2 x \\ &= \frac{\cos^2 x \cot^2 x}{\cot^2 x} + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \end{aligned}$$

Câu 12: Đơn giản biểu thức $P = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

- A. $\frac{1}{\cos x}$. B. $\tan x$. C. $\frac{1}{\sin x}$. D. $\cot x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x + 1}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x}{\tan x - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$.

b) Biểu thức $A = \sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x$ được viết lại $A = \frac{\tan^2 x + 3\tan x - 4}{1 + \tan^2 x}$.

c) Rút gọn biểu thức P ta được $P = \frac{\tan x + 4}{1 + \tan^2 x}$

d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$ khi $\cos x = \frac{1}{2}$.

a) Đúng: Ta có: $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

b) Đúng: Ta có $A = \cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 4 \right) = \frac{\tan^2 x + 3\tan x - 4}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^2 x + 3\tan x - 4}{1 + \tan^2 x}$

c) Đúng: Vì $P = \frac{A}{\tan x - 1} = \frac{\tan^2 x + 3\tan x - 4}{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)} = \frac{(\tan x - 1)(\tan x + 4)}{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)} = \frac{\tan x + 4}{1 + \tan^2 x}$.

d) Sai: Ta có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{3} + 4}{4}$.

Câu 2: Cho biểu thức $P = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Biểu thức $\sin^4 x + \cos^4 x$ được viết lại $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$
- b) Biểu thức $\sin^8 x + \cos^8 x$ được đưa về dạng $1 - 4\sin^2 x \cos^2 x + 2\sin^4 x \cos^4 x$.
- c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = 2(1 - \sin^2 x \cos^2 x)^2 - 1 + 4\sin^2 x \cos^2 x - 2\sin^4 x \cos^4 x$
- d) Rút gọn P ta được $P = 1$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 4$

b) Đúng: Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.

c) Đúng: Ta có

$$P = \sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x.$$

d) Đúng: Từ $\tan a + \cot a = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$

lại có $P = \sin^6 a + \cos^6 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

Vậy $P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

Câu 3: Cho $A = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan^2 x \sin^2 x}$ và biểu thức $B = 1 + 2\cot^3 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Biểu thức $(\sin x + \cos x)^2$ bằng $1 - 2\sin x \cos x$.
- b) $\tan^2 x - \sin^2 x$ được viết lại $\tan^2 x \sin^2 x$
- c) Biểu thức A được đưa về dạng $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x}$.
- d) Biểu thức A bằng B .

Lời giải

a) Sai: Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = 1 + 2\sin x \cos x$

b) Đúng: Ta có $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \tan^2 x$

c) Đúng: $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 1 + 2\sin x \cos x - 1}{\tan^2 x \cos^2 x} = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x}$

d) Đúng: Ta có $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2\sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x} = 1 + \frac{2\sin x \cos x}{\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}} = 1 + 2 \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = 1 + 2\cot^3 x = B$

Câu 4: Cho $P = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 4\sin x \cos x - 3}{\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x + 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 + 2\sin^2 x \cos^2 x$
 b) $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + 1$ được đưa về dạng $\sin x \cos x$
 c) Biểu thức P được đưa về dạng $-2\sin x \cos x - 2$.
 d) Khi $\cos x = \frac{1}{3}$ thì giá trị của biểu thức P bằng $-\frac{4\sqrt{2}}{9} - 2$.

Lời giải

- a) Sai: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x$
 b) Sai: Ta có $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + 1 = \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 = \sin x \cos x + 1$.
 c) Đúng: Ta có $P = \frac{1 - 2\sin^2 x \cos^2 x - 4\sin x \cos x - 3}{\sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 1} = -2 \frac{(\sin x \cos x + 1)^2}{\sin x \cos x + 1} = -2(\sin x \cos x + 1)$
 d) Đúng: Ta có $\cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow P = -\frac{4\sqrt{2}}{9} - 2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Biết tồn tại số thực $a = a_0$ sao cho $P = P_0$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn hệ thức:

$$(9\sin^2 a - 6\sin a)^2 - (11 + 2P)(9\sin^2 a - 6\sin a) + P^2 + 11P - 80 = 0. \text{ Tính giá trị của biểu thức}$$

$$M = (2P_0 + 8) \cdot \tan^2 a_0 + 9P_0 \cdot \cos^2 a_0.$$

Lời giải

Đặt $t = 9\sin^2 a - 6\sin a$ ta có: $t^2 - (11 + 2P)t + P^2 + 11P - 80 = 0$

Biệt thức $\Delta = (2P + 11)^2 - 4(P^2 + 11P - 80) = 441$

$$t_1 = \frac{11 + 2P - 21}{2} = P - 5; \quad t_2 = \frac{11 + 2P + 21}{2} = P + 16$$

Với $t = P + 16 \Rightarrow 9\sin^2 a - 6\sin a = P + 16$

$$\Rightarrow P = 9\sin^2 a - 6\sin a - 16 = (3\sin a - 1)^2 - 17 \leq 16 - 17 = -1 \text{ (không thỏa)}$$

Với $t = P - 5 \Rightarrow 9\sin^2 a - 6\sin a = P - 5 \Rightarrow P = 9\sin^2 a - 6\sin a + 5 = (3\sin a - 1)^2 + 4 \geq 4$

$P_0 = P_{\min} = 4$ khi $3\sin a - 1 = 0 \Rightarrow \sin a = \frac{1}{3} = \sin a_0$

Khi đó: $M = (2P_0 + 8) \cdot \tan^2 a_0 + 9P_0 \cdot \cos^2 a_0$

$$= (2 \cdot 4 + 8) \cdot \frac{\sin^2 a_0}{1 - \sin^2 a_0} + 9 \cdot 4 \cdot (1 - \sin^2 a_0) = 16 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} + 36 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 34.$$

Câu 2: Biết rằng biểu thức $P = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \frac{8}{\tan x} + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng

$\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ tại $x = \alpha$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{7\sin \alpha - 7\cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}$

Lời giải

$$P = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1+\cos x} + \frac{1}{1-\cos x}} - \frac{8}{\tan x} + 3 = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{(1+\cos x)(1-\cos x)}} - 8\cot x + 3$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1-\cos^2 x}} - 8\cot x + 3 = \frac{2}{\sin^2 x} - 8\cot x + 3 = 2\cot^2 x - 8\cot x + 5 = 2(\cot x - 2)^2 - 3$$

Ta có: $P = 2(\cot x - 2)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow P_{\min} = -3$ khi $\cot x = 2 = \cot \alpha$.

$$\text{Khi đó: } B = 7 \cdot \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha} = 7 \cdot \frac{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha}{\sin^3 \alpha}}$$

$$= 7 \cdot \frac{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}}{1 + 3\cot^3 \alpha + \frac{2}{\sin^2 \alpha}} = 7 \cdot \frac{1 + \cot^2 \alpha - \cot \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha)}{1 + 3\cot^3 \alpha + 2 \cdot (1 + \cot^2 \alpha)} = -\frac{7}{7} = -1.$$

Câu 3: Cho biểu thức $A = \frac{\sin^8 \alpha}{8} + \frac{\cos^8 \alpha}{27}$. Biết $\frac{\sin^4 \alpha}{2} + \frac{\cos^4 \alpha}{3} = \frac{1}{5}$. Tính giá trị $5A$

Lời giải

$$\text{Đặt } \cos^2 \alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{t^2}{3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5t^2 - 26t + 3 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$$

$$\text{Suy ra } \cos^2 \alpha = \frac{3}{5}; \sin^2 \alpha = \frac{2}{5}. \text{ Vậy: } \frac{\sin^8 \alpha}{8} + \frac{\cos^8 \alpha}{27} = \frac{1}{125}. \Rightarrow 5A = 0,04$$

Câu 4: Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^4 x + 3\cos^4 x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3\sin^4 x + (\cos^2 x)^2 = \frac{3}{4}.$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Mà } 3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x + 2\sin^4 x - 2\cos^4 x = \frac{3}{4}.$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4} + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4} + 2(1 - 2\sin^2 x).$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4} + 2\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}.$$

Câu 5: Cho góc x thỏa mãn $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Khi đó $P = |\sin x - \cos x| = \sqrt{\frac{a}{b}}$, trong đó $a, b \in \mathbb{N}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

Lời giải

$$\cos x + \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\cos x + \sin x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (\cos x)^2 + (\sin x)^2 + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sin x \cdot \cos x = -\frac{3}{4}.$$

Ta có $P = |\sin x - \cos x|$

$$\Leftrightarrow P^2 = (\sin x - \cos x)^2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}.$$

Do đó $P = \sqrt{\frac{7}{4}}$. Vậy $a + b = 7 + 4 = 11$.

Câu 6: Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

Lời giải

$$\text{Ta có } 3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6\sin^4 \alpha - 2(1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\sin^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (2\sin^2 \alpha - 1)(2\sin^2 \alpha + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (do } 2\sin^2 \alpha + 3 > 0) \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \text{ Suy ra } A = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$

-----HẾT-----

BÀI

02

HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

Cho tam giác ABC , $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$, S là diện tích tam giác. Giả sử h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài các đường cao đi qua ba đỉnh A, B, C ; m_a, m_b, m_c lần lượt là các đường trung tuyến đi qua ba đỉnh A, B, C . R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ABC . Ta có kết quả sau đây:

1 Định lý côsin

• $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$ • $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B$ • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C$.

Hệ quả của định lý côsin

• $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ • $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$ • $\cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}$.

2 Định lý sin

• $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

3 Công thức tính diện tích tam giác

• Công thức diện tích:

a) $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$

b) $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$

c) $S = \frac{abc}{4R}$

d) $S = pr$ với $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

e) Công thức Herông $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

4 Công thức tính độ dài đường trung tuyến

• $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$

• $m_b^2 = \frac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4}$

• $m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Áp dụng định lý cosin trong tam giác

Phương pháp: Sử dụng định lý cosin được nêu trong phần lý thuyết

$$\bullet a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A, \quad \bullet b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cdot \cos B, \quad \bullet c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos C.$$

Hệ quả của định lý cosin

$$\bullet \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \quad \bullet \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \quad \bullet \cos C = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}.$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có $AB = 4, AC = 6, A = 120^\circ$. Tính độ dài cạnh BC

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ \\ &= 6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{-1}{2} = 76 \Rightarrow BC = \sqrt{76} = 2\sqrt{19}. \end{aligned}$$

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có $a = 7; b = 8; c = 5$. Tính A .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 8 \cdot 5} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 60^\circ.$$

Bài tập 3: Cho tam giác ABC biết độ dài ba cạnh BC, CA, AB lần lượt là a, b, c và thỏa mãn hệ thức $b(b^2 - a^2) = c(c^2 - a^2)$ với $b \neq c$. Tính góc BAC .

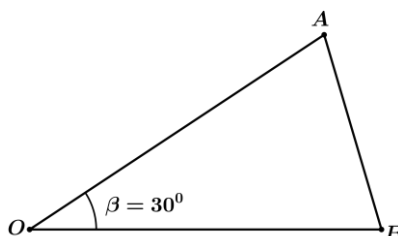
Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } b(b^2 - a^2) &= c(c^2 - a^2) \Leftrightarrow b^3 - ba^2 = c^3 - ca^2 \Leftrightarrow b^3 - c^3 - a^2(b - c) = 0 \\ &\Leftrightarrow (b - c)(b^2 + bc + c^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 - a^2 = -bc. \end{aligned}$$

$$\text{Mặt khác } \cos BAC = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2} \Rightarrow BAC = 120^\circ.$$

Bài tập 4: Cho $\angle xOy = 30^\circ$. Gọi A, B là hai điểm di động lần lượt trên Ox, Oy sao cho $AB = 2$. Độ dài lớn nhất của OB bằng bao nhiêu?

Lời giải



Áp dụng định lí cosin: $AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \cos 30^\circ \Leftrightarrow 4 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow OA^2 - \sqrt{3} \cdot OB \cdot OA + OB^2 - 4 = 0.$$

Coi phương trình là một phương trình bậc hai ẩn OA . Để tồn tại giá trị lớn nhất của OB

$$\text{thì } \Delta_{(*)} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3}OB)^2 - 4(OB^2 - 4) \geq 0 \Leftrightarrow OB^2 \leq 16 \Leftrightarrow OB \leq 4.$$

Vậy $\max OB = 4$.

Bài tập 5: Cho tam giác ABC vuông cân tại A và M là điểm nằm trong tam giác ABC sao cho tỉ lệ $MA : MB : MC = 1 : 2 : 3$. Tính góc AMB

Lời giải

$$MB = x \Leftrightarrow MA = 2x; MC = 3x \text{ với } 0 < x < BC = \sqrt{2}.$$

$$\text{Ta có } \cos BAM = \frac{1 + 4x^2 - x^2}{2 \cdot 1 \cdot 2x} = \frac{3x^2 + 1}{4x}$$

$$\cos MAC = \frac{1 + 4x^2 - 9x^2}{4x} = \frac{1 - 5x^2}{4x} \Rightarrow \left(\frac{3x^2 + 1}{4x}\right)^2 + \left(\frac{1 - 5x^2}{4x}\right)^2 = 1$$

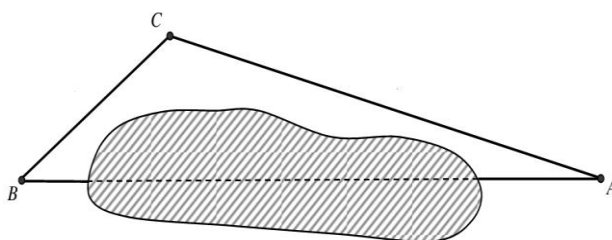
$$\Rightarrow 9x^4 + 6x^2 + 1 + 1 - 10x^2 + 25x^4 = 16 \Rightarrow 34x^4 - 20x^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{5 + 2\sqrt{2}}{17} > \frac{1}{5} \text{ (loại)} \\ x^2 = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{17} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot BM} = \frac{4x^2 + x^2 - 1}{2 \cdot 2x \cdot x} = \frac{5x^2 - 1}{4x^2} = \left(\frac{25 - 10\sqrt{2}}{17} - 1\right) : \frac{20 - 8\sqrt{2}}{17}$$

$$= \frac{-\sqrt{2}}{2}. \text{ Vậy } \angle AMB = 135^\circ.$$

Bài tập 6: Khoảng cách từ A đến B không thể đo trực tiếp được vì phải qua một đầm lầy. Người ta xác định được một điểm C mà từ đó có thể nhìn được A và B dưới một góc 60° . Biết $CA = 200(\text{m})$, $CB = 180(\text{m})$. Khoảng cách AB bằng bao nhiêu?

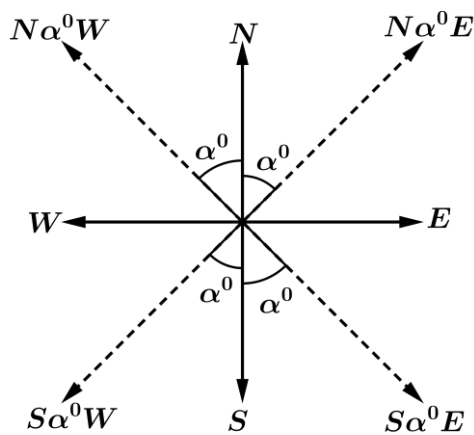
Lời giải



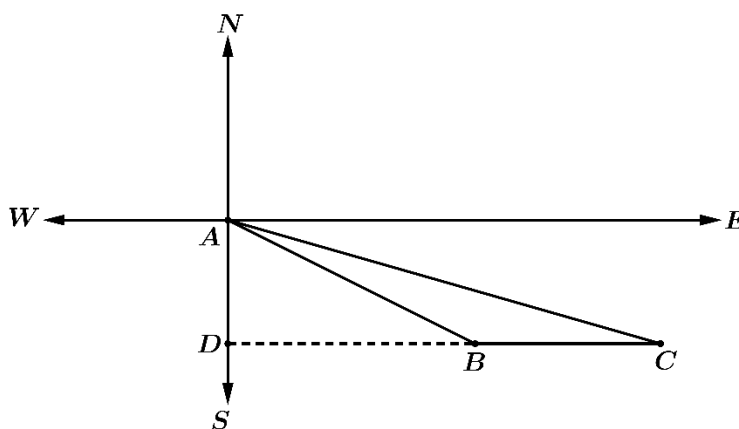
$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos 60^\circ = 36400 \Rightarrow AB = 20\sqrt{91}(\text{m}).$$

Bài tập 7: Một tàu đánh cá xuất phát từ cảng A , đi theo hướng $S70^\circ E$ với vận tốc 70 km/h . Đi được 90 phút thì động cơ của tàu bị hỏng nên tàu trôi tự do theo hướng nam với vận tốc 8 km/h . Sau 2 giờ kể từ khi động cơ bị hỏng, tàu neo đậu được vào một hòn đảo.

- Tính khoảng cách từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.
- Xác định hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu.



Lời giải



a) Theo giả thiết ta có: $AB = 105\text{km}$, $BC = 16\text{km}$ và $BAD = 70^\circ$, $ABD = 20^\circ \Rightarrow ABC = 160^\circ$

Khoảng cách từ A tới đảo tàu neo đậu bằng đoạn AC.

Áp dụng định lý côsin ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B}$

$$= \sqrt{105^2 + 16^2 - 2 \cdot 105 \cdot 16 \cdot \cos 160^\circ} = 120,16\text{km}$$

b) Ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \approx 0,999 \Rightarrow A \approx 2^\circ 37' \Rightarrow NAC = 107^\circ 23'$.

Vậy hướng từ cảng A tới đảo nơi tàu neo đậu là hướng Đông.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tam giác ABC , mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $a^2 = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$.
- B. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.
- C. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$.
- D. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos B$.

Lời giải

Theo định lý cosin trong tam giác ABC ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$.

Câu 2: Cho ΔABC có $b = 6, c = 8, A = 60^\circ$. Độ dài cạnh a là:

- A. $2\sqrt{13}$.
- B. $3\sqrt{12}$.
- C. $2\sqrt{37}$.
- D. $\sqrt{20}$.

Lời giải

Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 36 + 64 - 2.6.8.\cos 60^\circ = 52 \Rightarrow a = 2\sqrt{13}$

Câu 3: Cho ΔABC có $B = 60^\circ, a = 8, c = 5$. Độ dài cạnh b bằng:

- A. 7.
- B. 129.
- C. 49.
- D. $\sqrt{129}$.

Lời giải

Ta có: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^\circ = 49 \Rightarrow b = 7$.

Câu 4: Tam giác ABC có $C = 150^\circ, BC = \sqrt{3}, AC = 2$. Tính cạnh AB ?

- A. $\sqrt{13}$.
- B. $\sqrt{3}$.
- C. 10.
- D. 1.

Lời giải

Theo định lý cosin trong ΔABC ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA.CB.\cos C = 13 \Rightarrow AB = \sqrt{13}$.

Câu 5: Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5, AC = 8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC .

- A. $2\sqrt{3}$.
- B. 4.
- C. 5.
- D. $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{AB.AC} = \frac{2.12}{5.8} = \frac{3}{5} \Rightarrow A = 36^\circ 52' 12''$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos 36^\circ 52' 12'' \approx 25 \Rightarrow BC \approx 5$.

Câu 6: Tam giác có ba cạnh lần lượt là 2,3,4. Góc bé nhất của tam giác có sin bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{\sqrt{15}}{8}$.
- B. $\frac{7}{8}$.
- C. $\frac{1}{2}$.
- D. $\frac{\sqrt{14}}{8}$.

Lời giải

Góc bé nhất ứng với cạnh có số đo bé nhất.

Giả sử $a = 2, b = 3, c = 4$. Ta có $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2.b.c} = \frac{7}{8}$. Do đó $\sin A = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{8}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{8}$.

Câu 7: Tam giác ABC có $BC = 12, CA = 9, AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 4$. Tính độ dài đoạn thẳng AM

- A. $2\sqrt{5}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\sqrt{20}$. D. $\sqrt{19}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{6^2 + 12^2 - 9^2}{2 \cdot 6 \cdot 12} = \frac{11}{16}$$

$$AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos B} = \sqrt{6^2 + 4^2 - 2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot \frac{11}{16}} = \sqrt{19}.$$

Câu 8: Cho $a; b; c$ là độ dài 3 cạnh của tam giác ABC . Biết $b = 7; c = 5; \cos A = \frac{4}{5}$. Tính độ dài của a .

- A. $3\sqrt{2}$. B. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{23}{8}$. D. 6.

Lời giải

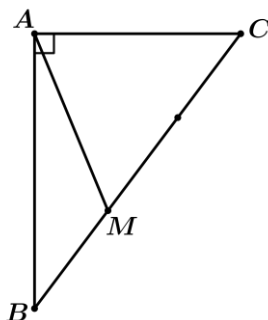
Áp dụng định lí cosin cho tam giác ABC ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 18 \Rightarrow a = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Câu 9: Tam giác ABC vuông tại A có $AB = AC = a$. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho $BM = \frac{BC}{3}$. Độ dài AM bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{a\sqrt{17}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. C. $\frac{2a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{2a}{3}$.

Lời giải



$$\text{Ta có: } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}; \quad BC = AB\sqrt{2} = a\sqrt{2} \Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Khi đó: } AM = \sqrt{AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 45^\circ} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Câu 10: Tam giác ABC có $\cos(A+B) = -\frac{1}{8}, AC = 4, BC = 5$. Tính cạnh AB

- A. $\sqrt{46}$. B. 11. C. $5\sqrt{2}$. D. 6.

Lời giải

Vì trong tam giác ABC ta có $A + B$ bù với góc C nên $\cos(A + B) = -\frac{1}{8} \Rightarrow \cos C = \frac{1}{8}$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{8}} = 6.$$

Câu 11: Tam giác ABC có $BC = \sqrt{5}$, $AC = 3$ và $\cot C = 2$. Tính cạnh AB

- A. 6. **B.** $\sqrt{2}$. C. $\frac{9}{5}$. D. $2\sqrt{10}$.

Lời giải

Từ giả thiết $\cot C = 2$, ta suy ra C là góc nhọn

$$\cot C = 2 \Rightarrow \tan C = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 C = \frac{1}{1 + \tan^2 C} = \frac{1}{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos C = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{3^2 + \sqrt{5}^2 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}} = \sqrt{2}.$$

Câu 12: Tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$ và $\tan A = -2\sqrt{2}$. Tính cạnh BC

- A. $3\sqrt{2}$. **B.** $4\sqrt{3}$. C. $\sqrt{33}$. D. 7.

Lời giải

Từ giả thiết $\tan A = -2\sqrt{2}$, ta suy ra A là góc tù

$$\tan A = -2\sqrt{2} \Rightarrow \cos^2 A = \frac{1}{1 + \tan^2 A} = \frac{1}{1 + (2\sqrt{2})^2} = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos A = -\frac{1}{3}$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A} = \sqrt{3^2 + 4^2 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)} = \sqrt{33}.$$

Câu 13: Cho tam giác ABC có $AC = 7$, $AC = 8$ và $A = 60^\circ$. Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài của cạnh BC ?

- A. 7. **B.** 47. C. $\sqrt{57}$. D. $2\sqrt{57}$.

Lời giải

Áp dụng định lý hàm số Cosin trong tam giác ABC ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 7^2 + 8^2 - 2 \cdot 7 \cdot 8 \cdot \cos 60^\circ = 57$$

$$\Rightarrow BC = \sqrt{57}.$$

Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 4\text{cm}$, $BC = 7\text{cm}$, $AC = 9\text{cm}$. Giá trị $\cos B$ là:

- A. $\frac{2}{7}$. **B.** $-\frac{2}{7}$. C. $-\frac{2}{3}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Áp dụng hệ quả của định lý hàm số Cosin vào tam giác ABC ta có:

$$\cos B = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{7^2 + 4^2 - 9^2}{2 \cdot 7 \cdot 4} = -\frac{2}{7}.$$

Câu 15: Tam giác có ba cạnh lần lượt là 5,8,9. Góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng bao nhiêu?

- A.** $\frac{1}{10}$. **B.** $-\frac{1}{10}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

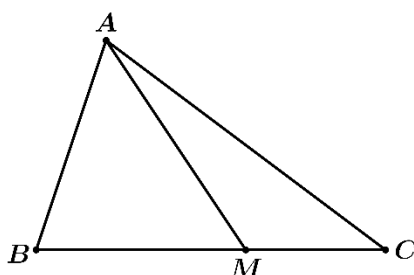
Vì đối diện với cạnh lớn nhất là góc lớn nhất. Nên góc lớn nhất của tam giác có cosin bằng:

$$\frac{5^2 + 8^2 - 9^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{10}$$

Câu 16: Tam giác ABC có $BC = 12, CA = 9, AB = 6$. Trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = 8$. Tính độ dài đoạn thẳng AM .

- A.** 34. **B.** 17. **C.** $\sqrt{34}$. **D.** $\sqrt{43}$.

Lời giải



Xét tam giác ABC ta có $\cos B = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2 \cdot BC \cdot BA} = \frac{12^2 + 6^2 - 9^2}{2 \cdot 12 \cdot 6} = \frac{11}{16}$.

Xét tam giác ABM , theo định lý hàm số Cosin ta có:

$$AM^2 = BA^2 + BM^2 - 2 \cdot BA \cdot BM \cdot \cos B = 6^2 + 8^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \frac{11}{16} = 34 \Rightarrow AM = \sqrt{34}.$$

Câu 17: Cho tam giác ABC có cạnh $AC = 14, B = 120^\circ$, tổng hai cạnh còn lại là 16. Tính độ dài cạnh BC biết $BC > AB$.

- A.** 5. **B.** 8. **C.** 6. **D.** 10.

Lời giải

Áp dụng định lý hàm số Cosin trong tam giác ABC ta có:

$$AC^2 = BC^2 + AB^2 - 2BC \cdot AB \cdot \cos B \Leftrightarrow BC^2 + AB^2 + BC \cdot AB = 196 (*)$$

Từ giả thiết ta có: $BC + AB = 16 \Leftrightarrow AB = 16 - BC$.

Thay $AB = 16 - BC$ vào (*) ta được: $BC^2 + (16 - BC)^2 + BC \cdot (16 - BC) = 196$

$$\Leftrightarrow BC^2 - 16BC + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} BC = 10 \\ BC = 6 \end{cases}$$

Với $BC = 10 \Rightarrow AB = 6$ (thỏa mãn)

Với $BC = 6 \Rightarrow AB = 10$ (loại)

Vậy $BC = 10$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tam giác MNP có $MN = 13$, $MP = 10$, $\cos M = \frac{5}{13}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định

sau:

a) $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2.MN.MP.\cos M$.

b) Tam giác MNP cân tại M .

c) $\cos N = \frac{238}{169}$.

d) Tổng bình phương độ dài ba trung tuyến trong ΔMNP bằng $\frac{657}{2}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2.MN.MP.\cos M$

b) Sai: Ta có: $NP^2 = MN^2 + MP^2 - 2.MN.MP.\cos M = 13^2 + 10^2 - 2.13.10.\frac{5}{13} = 169 \Rightarrow NP = 13$.

Khi đó, $MN = NP \Rightarrow \Delta MNP$ cân tại N

c) Sai: Ta có: $\cos N = \frac{MN^2 + NP^2 - MP^2}{2.MN.NP} = \frac{13^2 + 13^2 - 10^2}{2.13.13} = \frac{119}{169}$

d) Đúng: Gọi m_M, m_N, m_P lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ đỉnh M, N, P trong ΔMNP .

Ta có: $m_M^2 = \frac{MN^2 + MP^2}{2} - \frac{NP^2}{4}$ (1); $m_N^2 = \frac{MN^2 + NP^2}{2} - \frac{MP^2}{4}$ (2)

$m_P^2 = \frac{NP^2 + MP^2}{2} - \frac{MN^2}{4}$ (3)

Cộng vế với vế của (1),(2) và (3) ta có: $m_M^2 + m_N^2 + m_P^2 = \frac{3}{4}(MN^2 + MP^2 + NP^2) = \frac{657}{2}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có tỉ lệ độ dài các cạnh $AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC bằng 25 . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$.

b) Tam giác ABC vuông tại A .

c) Độ dài cạnh BC bằng 25 .

d) Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Độ dài đoạn thẳng BG bằng $\frac{20\sqrt{13}}{3}$.

Lời giải

a) Đúng : Ta có: $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2.AB.AC}$

b) Đúng : Vì $AB : AC : BC = 3 : 4 : 5$ nên ta đặt: $AB = 3a, AC = 4a, BC = 5a (a > 0)$.

Ta có: $AB^2 + AC^2 = BC^2 = 25a^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A .

c) Sai: Ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow BC = 2R \cdot \sin A = 2 \cdot 25 \cdot \sin 90^\circ = 50$

d) Đúng: Ta có: $BC = 5a = 50 \Rightarrow a = 10, AB = 30, AC = 40$.

Độ dài đường trung tuyến từ đỉnh B trong ΔABC là:

$$m_B = \sqrt{\frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{30^2 + 50^2}{2} - \frac{40^2}{4}} = 10\sqrt{13} \Rightarrow BG = \frac{2}{3}m_B = \frac{2}{3} \cdot 10\sqrt{13} = \frac{20\sqrt{13}}{3}.$$

Câu 3: Tam giác ABC có $AB = 5, BC = 7, CA = 8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos A$.

b) Số đo góc A bằng 30° .

c) Độ dài đường trung tuyến từ đỉnh A trong ΔABC là $\sqrt{129}$.

d) Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Độ dài cạnh AM bằng $\frac{2\sqrt{61}}{3}$.

Lời giải

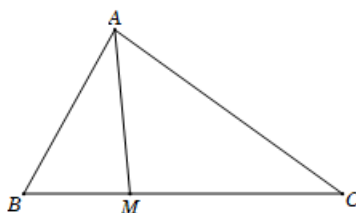
a) Sai: Ta có $AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2BC \cdot AC \cos C$

b) Sai: Ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2 \cdot 5 \cdot 8} = \frac{1}{2}$. Do đó, $A = 60^\circ$

c) Sai: Ta có $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(8^2 + 5^2) - 7^2}{4} = \frac{129}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{129}}{2}$

d) Đúng: Theo định lí hàm cosin, ta có: $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2 \cdot AB \cdot BC} = \frac{5^2 + 7^2 - 8^2}{2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{1}{7}$.

Do $MC = 2MB \Rightarrow M = \frac{1}{3}BC = \frac{7}{3}$.



Theo định lí cosin, ta có

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2 \cdot AB \cdot BM \cdot \cos B = 5^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 - 2 \cdot 5 \cdot \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{7} = \frac{244}{9} \Rightarrow AM = \frac{2\sqrt{61}}{3}$$

Câu 4: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của cạnh BC . Biết $AB = 3, BC = 8, \cos \angle AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

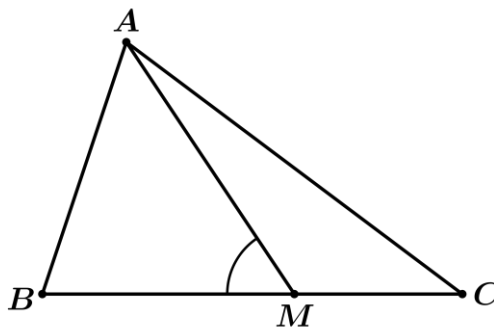
a) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM là $\sqrt{2}$.

b) Giá trị $\cos AMC = \frac{5\sqrt{13}}{26}$

c) Độ dài đoạn AM bằng $\sqrt{13}$ hoặc $x = \frac{7\sqrt{13}}{13}$

d) Khi số đo góc A nhọn và lớn nhất trong ba đỉnh của tam giác ABC thì độ dài cạnh $AC = 7$.

Lời giải



a) Sai : $\cos AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \sin AMB = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{52}}$. Ta có $R = \frac{AB}{2\sin AMB} = \frac{3}{2\sqrt{\frac{27}{52}}} = \frac{3}{\sqrt{\frac{27}{13}}} = \frac{\sqrt{39}}{3}$

b) Sai: Ta có $\cos AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \cos AMB = -\frac{5\sqrt{13}}{26}$.

c) Đúng : Ta có $BC = 8 \Rightarrow BM = 4$. Đặt $AM = x$

Theo định lí cô-sin ta có $\cos AMB = \frac{AM^2 + BM^2 - AB^2}{2AM \cdot AB}$.

Suy ra $\frac{5\sqrt{13}}{26} = \frac{x^2 + 16 - 9}{8x} \Leftrightarrow 13x^2 - 20\sqrt{13}x + 91 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{13}$ hoặc $x = \frac{7\sqrt{13}}{13}$

d) Đúng: Theo công thức tính đường trung tuyến ta có $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{2AB \cdot AC}$

Nếu $x = \sqrt{13} \Rightarrow 13 = \frac{2(3^2 + AC^2) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = 7$

Ta có $BC > AC > AB$ nên góc A lớn nhất.

Theo định lí cô-sin ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = -\frac{1}{7}$ suy ra $A \approx 98^\circ 12'$

Nếu $x = \frac{7\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \frac{49}{13} = \frac{2(3^2 + AC^2) - 8^2}{4} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{397}{13}}$

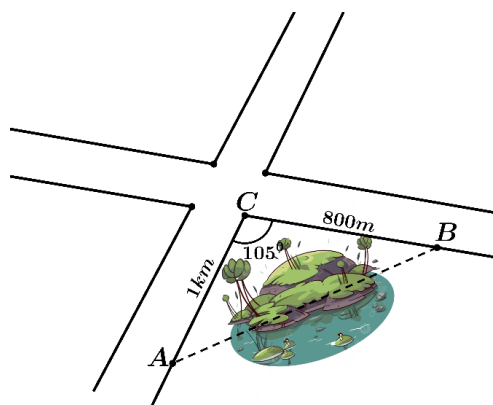
Ta có $BC > AC > AB$ nên góc A lớn nhất.

Theo định lí cô-sin ta có $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = -\frac{53}{\sqrt{5161}}$ suy ra $A \approx 137^\circ 32'$.

Khi số đo góc A nhọn và lớn nhất trong ba đỉnh của tam giác ABC thì độ dài cạnh $AC = 7$ là mệnh đề đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Để tính khoảng cách giữa hai địa điểm A và B mà ta không thể đi trực tiếp từ A đến B (hai địa điểm nằm ở hai bên bờ một hồ nước, một đầm lầy) người ta tiến hành như sau: Chọn một địa điểm C sao cho ta đo được các khoảng cách AC , CB và góc ACB . Sau khi đo ta nhận được: $AC = 1\text{km}$, $CB = 800\text{m}$ và $ACB = 105^\circ$. Tính khoảng cách AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị mét).

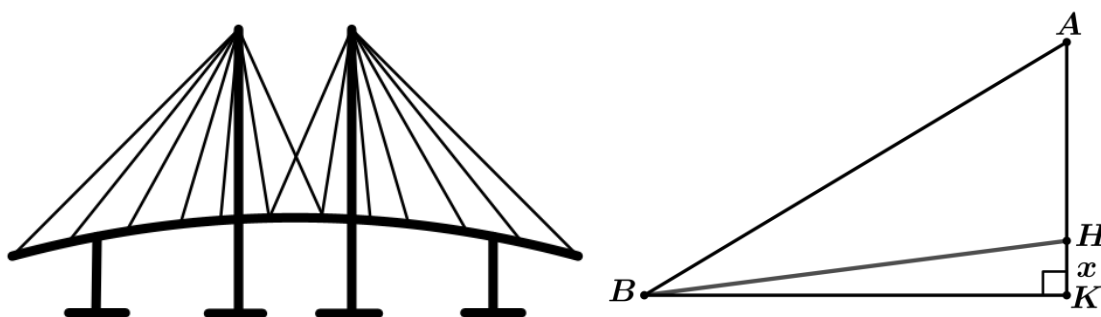


Lời giải

Áp dụng định lí côsin cho tam giác ABC ta có: $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC.CB.\cos C$
 $= 1000^2 + 800^2 - 2.1000.800.\cos 105^\circ \approx 2054110,472$.

Suy ra $AB \approx \sqrt{2054110,472} \approx 1433$. Vậy khoảng cách AB là xấp xỉ 1433 (m).

Câu 2: Quan sát cây cầu dây văng minh họa như hình dưới đây:



Tại trụ cao nhất, khoảng cách từ đỉnh trụ (vị trí A) tới chân trụ trên mặt cầu (vị trí H) là 150 m, độ dài dây văng dài nhất nối từ đỉnh trụ xuống mặt cầu (vị trí B) là 300 m, khoảng cách từ chân dây văng dài nhất tới chân trụ trên mặt cầu là 250 m. Tính độ dốc của cầu qua trụ nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).

Lời giải

Độ dốc của cầu là góc nghiêng giữa đường cầu qua trụ và phương nằm ngang, tức là góc KBH

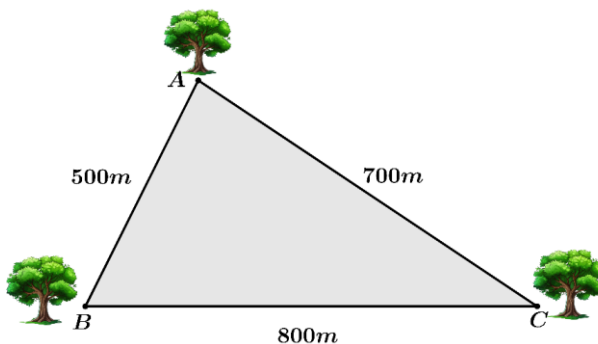
Xét tam giác ABH , áp dụng định lí cosin ta có:

$$\cos AHB = \frac{BH^2 + AH^2 - AB^2}{2BH.AH} = \frac{250^2 + 150^2 - 300^2}{2.250.150} = -\frac{1}{15} \Rightarrow AHB \approx 93,8^\circ$$

Xét tam giác BHK ta có: $HBK \approx 93,8^\circ - 90^\circ = 3,8^\circ$ (tính chất góc ngoài tam giác).

Vậy độ dốc của cầu qua trụ theo đề bài là khoảng $3,8^\circ$.

Câu 3: Một công viên có dạng hình tam giác với các kích thước như hình minh họa dưới đây. Tính số đo của góc B của tam giác đó.



Lời giải

Đặt $a = BC, b = AC, c = AB$. Ta có: $a = 800, b = 700, c = 500$.

Áp dụng định lí cosin, ta có: $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

Suy ra: $\cos B = \frac{500^2 + 800^2 - 700^2}{2.500.800} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$. Vậy $\hat{B} = 60^\circ$.

Câu 4: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30 (km/h), tàu thứ hai chạy với tốc độ 40 (km/h). Tính khoảng cách giữa hai tàu sau 2 giờ. (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có: Sau 2 h quãng đường tàu thứ nhất chạy được là: $S_1 = 30.2 = 60$ (km)

Sau 2 h quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2 = 40.2 = 80$ (km)

Vậy sau 2 h hai tàu cách nhau là: $S = \sqrt{S_1^2 + S_2^2 - 2S_1.S_2.\cos 60^\circ} = 20\sqrt{13} \approx 72,1$ (km).

Câu 5: Vịnh Vân Phong, tỉnh Khánh Hòa nổi tiếng vì có con đường đi bộ xuyên biển nối từ Hòn Quạ đến đảo Điệp Sơn. Một du khách muốn chèo thuyền kayak từ vị trí C trên Hòn Quạ đến vị trí B trên Bè thay vì đi bộ xuyên qua con đường qua vị trí A rồi mới đến vị trí B . Nếu người đó chèo thuyền với vận tốc không đổi là 4 km/h thì sẽ mất bao nhiêu thời gian biết $AB = 0,4$ km, $AC = 0,6$ km và góc giữa AB và AC là 60° ?



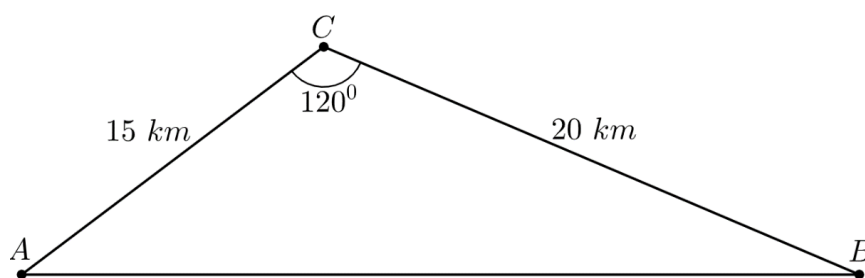
Lời giải

Áp dụng định lí Cô sin cho tam giác ABC ta có:

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A} = 0,53(\text{km})$$

Vậy thời gian du khách chèo thuyền từ C đến B là: $t = \frac{BC}{v} = \frac{0,53}{4} = 0,1325$ giờ = 8 phút.

Câu 6: Một ô tô muốn đi từ địa điểm A đến địa điểm B , nhưng giữa A và B là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành 2 đoạn từ A lên C (ô tô leo dốc lên núi) và từ C đến B (ô tô xuống núi). Các đoạn đường tạo thành tam giác ABC với $AB = 15\text{ km}$; $BC = 20\text{ km}$ và $ACB = 120^\circ$. Nếu người ta đào một đường hầm xuyên núi chạy thẳng từ A đến B thì ô tô chạy trên con đường mới này tiết kiệm được số tiền gần nhất là bao nhiêu? Biết trung bình cứ chạy 1 km , ô tô tiêu thụ hết $0,3$ lít xăng. Giá thành xăng hiện nay là 25000 đồng một lít xăng.



Lời giải

Trường hợp 1: Ô tô đi từ A lên C và từ C đến B

Tổng quãng đường mà ô tô phải đi là: $s = AC + CB = 35(\text{km})$

Số lít xăng tiêu thụ là $35.0,3 = 10,5$ lít.

Số tiền xăng là: $10,5.25000 = 262500$ đồng.

Trường hợp 2: Ô tô đi thẳng từ A qua B

Áp dụng định lý Cô-sin vào tam giác ABC ta có:

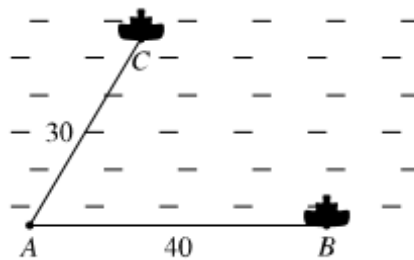
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC.BC.\cos 120^\circ \Leftrightarrow AB = 5\sqrt{37}(\text{km}).$$

Số lít xăng tiêu thụ là $5\sqrt{37}.0,3 = \frac{3\sqrt{37}}{2}$ lít.

Số tiền xăng là: $\frac{3\sqrt{37}}{2}.25000 \approx 228100$ đồng.

Số tiền tiết kiệm được là $262500 - 228100 = 34400$ đồng.

Câu 7: Hai chiếc tàu thuyền cùng xuất phát từ một vị trí A , đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau góc 60° . Tàu B chạy với tốc độ 20 hải lí một giờ. Tàu C chạy với tốc độ 15 hải lí một giờ. Sau hai giờ, hai tàu cách nhau bao nhiêu hải lí? Kết quả gần nhất với số nào sau đây?



Lời giải

Sau 2 giờ, quãng đường tàu B chạy được là $20 \cdot 2 = 40$ hải lí

Sau 2 giờ, quãng đường tàu C chạy được là $15 \cdot 2 = 30$ hải lí

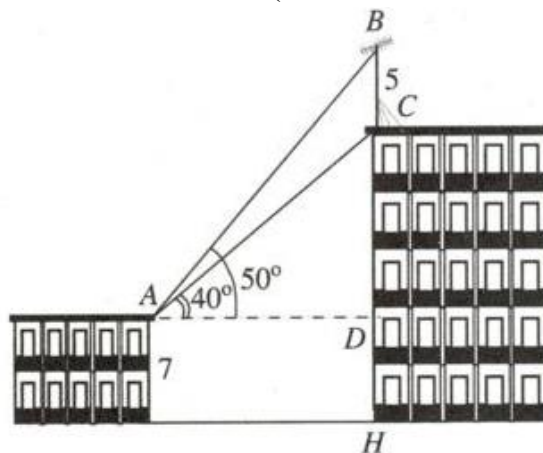
Áp dụng định lý Cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos 60^\circ = 1300.$$

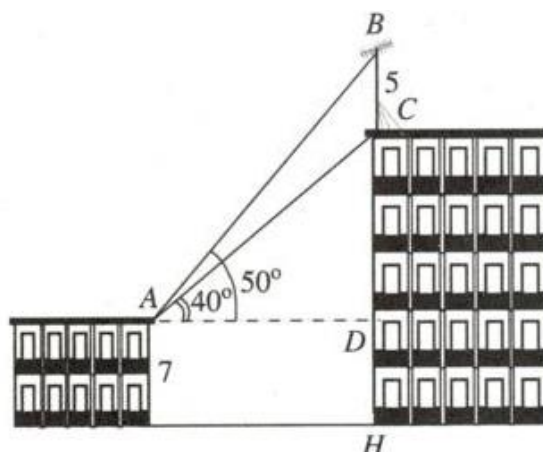
Do đó $BC \approx 36$.

Vậy sau hai giờ, hai tàu cách nhau 36 hải lí.

Câu 8: Trên nóc một tòa nhà có cột antenna cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột antenna dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang (như hình vẽ bên dưới). Chiều cao của tòa nhà (được làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là



Lời giải



Ta có chiều cao của tòa nhà chính là đoạn BH .

Mà $BH = CD + DH = CD + 7$.

Xét tam giác ACD vuông tại D có $AC = \frac{CD}{\sin 40^\circ}$

Xét tam giác ABD vuông tại D có $AB = \frac{5 + CD}{\sin 50^\circ}$

Xét tam giác ABC có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC$

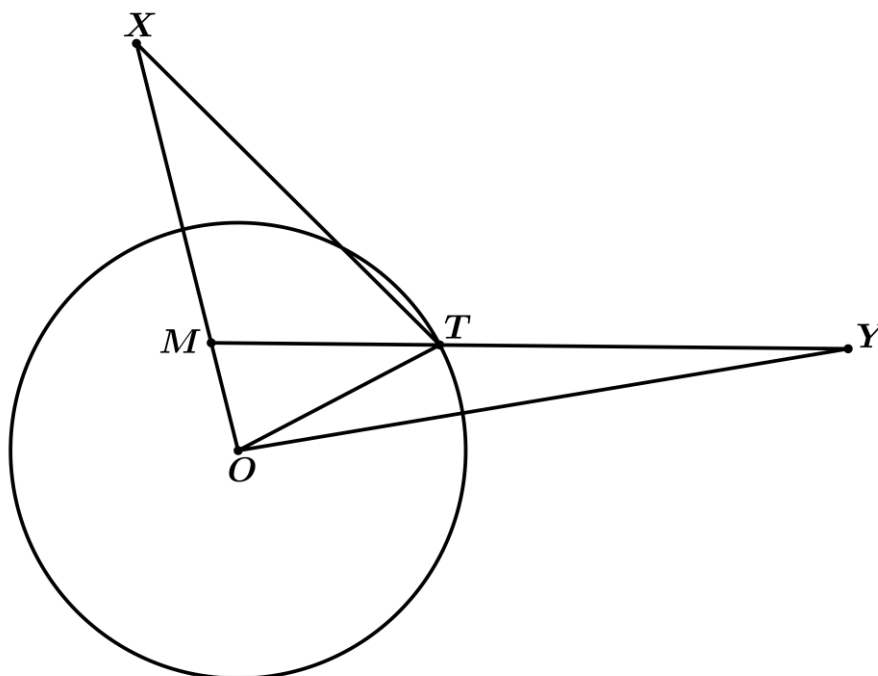
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\sin^2 50^\circ} + \frac{1}{\sin^2 40^\circ} - \frac{2\cos 10^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ} \right) CD^2 + \left(\frac{10}{\sin^2 50^\circ} - \frac{10\cos 10^\circ}{\sin 40^\circ \sin 50^\circ} \right) CD + \frac{25}{\sin^2 50^\circ} - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow CD \approx 11,9 \Rightarrow BH \approx 7 + 11,9 \approx 18,9 \text{ (m)}.$$

Vậy tòa nhà cao 18,9 m.

Câu 9: Từ một địa điểm O cố định của một vùng đất cù lao (các mặt của vùng đất đều giáp với các con sông), người ta cần chọn một địa điểm T trên vùng cù lao sao cho $OT = 60(\text{km})$ để xây dựng các con đường cao tốc (cầu vượt cao tốc) nối từ hai địa điểm X và Y của hai tỉnh thành lân cận đến T . Cho biết $OX = 120(\text{km})$, $OY = 150(\text{km})$, $XOY = 120^\circ$. Chi phí hoàn thành 1(km) đoạn đường đi từ T đến X là 100000 USD; chi phí hoàn thành 1(km) đoạn đường đi từ T đến Y là 200000 USD. Hỏi chi phí thấp nhất để hoàn thành hai con đường trên (đơn vị triệu USD)?

Lời giải



Tổng chi phí để hoàn thành con đường $A = \frac{1}{10}(TX + 2TY)$ (triệu USD).

Gọi M là điểm thuộc đoạn OX sao cho hai tam giác OMT và OTX đồng dạng.

$$\text{Suy ra } \frac{MT}{TX} = \frac{OT}{OX} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} \Rightarrow TX = 2MT.$$

$$\text{Ta có } A = \frac{1}{10}(TX + 2TY) = \frac{1}{10}(2MT + 2TY) \geq \frac{1}{5}MY.$$

Dấu bằng xảy ra khi M, T, Y thẳng hàng

$\Leftrightarrow T$ là giao điểm của đoạn MY với đường tròn tâm O , bán kính bằng 60.

$$\text{Mặt khác } \frac{OM}{OT} = \frac{OT}{OX} = \frac{1}{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}OT = 30$$

Trong tam giác MOY ta có: $MY = \sqrt{OM^2 + OY^2 - 2OM \cdot OY \cdot \cos 120^\circ} = 30\sqrt{31}$ (km).

Vậy chi phí thấp nhất để hoàn thành con đường là $A = 6\sqrt{31} \approx 33,41$ (triệu USD).

-----HẾT-----

Dạng 2: Áp dụng định lý sin trong tam giác

Phương pháp: Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

Sử dụng định lý sin trong tam giác: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tam giác ABC có các góc $A = 75^\circ, B = 45^\circ$. Tính tỉ số $\frac{AB}{AC}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\sin(180^\circ - 75^\circ - 45^\circ)}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Bài tập 2: Cho tam giác ABC có góc $BAC = 60^\circ$ và cạnh $BC = \sqrt{3}$. Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Lời giải

Ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Leftrightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 1$.

Bài tập 3: Cho tam giác ABC có $bc = a^2$. Chứng minh rằng $\sin^2 A = \sin B \sin C$

Lời giải

Theo giả thiết ta có $a^2 = bc$

Thay $a = 2R \sin A, b = 2R \sin B, c = 2R \sin C$ vào hệ thức trên ta được

$4R^2 \sin^2 A = 2R \sin B \cdot 2R \sin C \Rightarrow \sin^2 A = \sin B \cdot \sin C$

Bài tập 4: Cho điểm D nằm trong tam giác ABC sao cho $DAB = DBC = DCA = \varphi$. Chứng minh rằng:

$\sin^3 \varphi = \sin(A - \varphi) \cdot \sin(B - \varphi) \cdot \sin(C - \varphi)$.

Lời giải

Theo định lý sin, trong các tam giác ABD, BCD, ACD .

Ta có: $\frac{BD}{\sin \varphi} = \frac{AD}{\sin(B - \varphi)}$; $\frac{CD}{\sin \varphi} = \frac{BD}{\sin(C - \varphi)}$; $\frac{AD}{\sin \varphi} = \frac{CD}{\sin(A - \varphi)}$

Từ đó ta được $\frac{AD \cdot BD \cdot CD}{\sin^3 \varphi} = \frac{AD \cdot BD \cdot CD}{\sin(A - \varphi) \cdot \sin(B - \varphi) \cdot \sin(C - \varphi)}$.

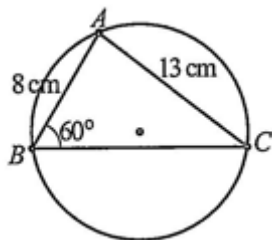
Bài tập 5: Cho tam giác ABC thỏa mãn $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C$. Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác cân.

Lời giải

Ta có: $\sin A = 2 \sin B \cdot \cos C \Leftrightarrow \frac{a}{2R} = 2 \cdot \frac{b}{2R} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 = c^2 \Leftrightarrow b = c$

Vậy ABC là tam giác cân tại A .

Bài tập 6: Từ một tấm bìa hình tròn, bạn Thảo cắt ra một hình tam giác có các cạnh $AB = 8\text{ cm}$, $AC = 13\text{ cm}$ và $B = 60^\circ$ (Hình). Tính độ dài cạnh BC và bán kính R của miêng bìa (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị centimet).



Lời giải

Đặt $BC = x (x > 0)$.

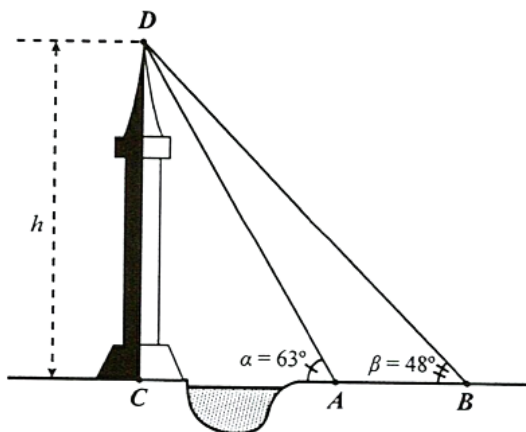
Áp dụng định lí côsin ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B$

Suy ra $13^2 = 8^2 + x^2 - 2 \cdot 8 \cdot x \cdot \cos 60^\circ \Leftrightarrow x^2 - 8x - 105 = 0$.

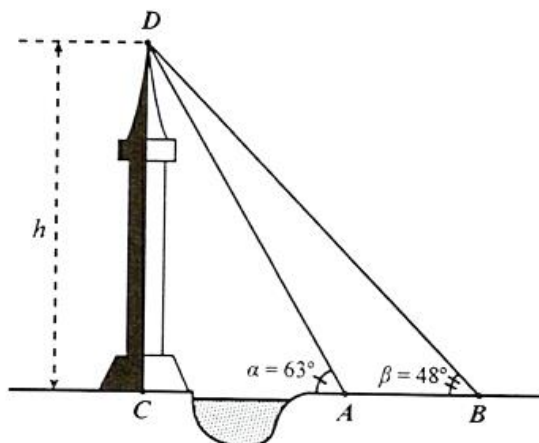
Giải phương trình trên ta được $x = 15$ hoặc $x = -7$ mà do $x > 0$ nên $x = 15$.

Suy ra $BC = 15(\text{cm})$. Áp dụng định lí sin ta có: $\frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{13}{2 \sin 60^\circ} \approx 7,5(\text{cm})$

Bài tập 7: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24\text{ m}$, $CAD = 63^\circ, CBD = 48^\circ$. Tính chiều cao h của tháp?



Lời giải



Ta có $\alpha = D_1 + \beta \Rightarrow D_1 = \alpha - \beta = 63^\circ - 48^\circ = 15^\circ$.

Áp dụng định lí sin vào tam giác ABD ta có:

$$\frac{AD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin D_1} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot \sin \beta}{\sin D_1} = \frac{24 \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 68,91 \text{ (mét)}$$

Trong tam giác vuông ACD ta có: $h = CD = AD \cdot \sin \alpha \approx 68,91$ (mét)

Vậy chiều cao của cái tháp khoảng 68,91 (mét).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tam giác ABC . Tìm công thức sai:

A. $\frac{a}{\sin A} = 2R$. B. $\sin A = \frac{a}{2R}$. C. $b \sin B = 2R$. D. $\sin C = \frac{c \sin A}{a}$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$.

Câu 2: Cho ΔABC với các cạnh $AB = c, AC = b, BC = a$. Gọi R, r, S lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp và diện tích của tam giác ABC . Trong các phát biểu sau, phát biểu nào **sai**?

A. $S = \frac{abc}{4R}$. B. $R = \frac{a}{\sin A}$.
C. $S = \frac{1}{2} ab \sin C$. D. $a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C$.

Lời giải

Theo định lí sin trong tam giác, ta có $\frac{a}{\sin A} = 2R$.

Câu 3: Cho tam giác ABC thỏa mãn hệ thức $b + c = 2a$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. $\cos B + \cos C = 2 \cos A$. B. $\sin B + \sin C = 2 \sin A$.
C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2} \sin A$. D. $\sin B + \cos C = 2 \sin A$.

Lời giải

Ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow \frac{b+c}{2} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$\Leftrightarrow \frac{b+c}{2 \sin A} = \frac{b+c}{\sin B + \sin C} \Leftrightarrow \sin B + \sin C = 2 \sin A$

Câu 4: Cho ΔABC có $AB = 5; A = 40^\circ; B = 60^\circ$. Độ dài BC gần nhất với kết quả nào?

A. 3,7. B. 3,3. C. 3,5. D. 3,1.

Lời giải

$$C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 40^\circ - 60^\circ = 80^\circ$$

$$\text{Áp dụng định lý sin: } \frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin C} \cdot \sin A = \frac{5}{\sin 80^\circ} \sin 40^\circ \approx 3,3.$$

Câu 5: Tam giác ABC có $B = 30^\circ$, $C = 45^\circ$ và $AB = 5$. Hỏi cạnh AC bằng bao nhiêu ?

A. $AC = 5\sqrt{2}$. B. $AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$. C. $AC = \frac{5\sqrt{2}}{2}$. D. $AC = \frac{5\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

$$\text{Theo Định lý sin ta có } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \text{ nên } AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{5 \cdot \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 6: Tính chu vi tam giác ABC , biết rằng $AB = 6$ và $2\sin A = 3\sin B = 4\sin C$.

A. 26. B. 13. C. $5\sqrt{26}$. D. $10\sqrt{6}$.

Lời giải

$$\text{Vì } 2\sin A = 3\sin B = 4\sin C \text{ nên ta có: } 2\frac{a}{2R} = 3\frac{b}{2R} = 4\frac{c}{2R} \Leftrightarrow 2a = 3b = 4c = 4 \cdot AB = 24.$$

Do đó: $a = 12, b = 8, c = 6$. Chu vi tam giác ABC bằng 26.

Câu 7: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính R , $AB = R$, $AC = R\sqrt{3}$. Tính góc A biết B là góc tù.

A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Góc B là góc tù nên A, C là góc nhọn.

$$\text{Ta có: } \frac{AB}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \frac{R}{\sin C} = 2R \Leftrightarrow \sin C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 30^\circ \text{ (vì } C \text{ nhọn)}.$$

$$\text{Tương tự: } \frac{AC}{\sin B} = 2R \Leftrightarrow \frac{R\sqrt{3}}{\sin B} = 2R \Leftrightarrow \sin B = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow B = 120^\circ \text{ (do } B \text{ tù)}$$

$$\text{Suy ra: } A = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = 30^\circ.$$

Câu 8: Cho tam giác ABC có $A = 30^\circ$ và $b + c = 2a$. Chọn mệnh đề **đúng**?

A. $\sin B + \sin C = 1$. B. $\sin B + \sin C = \sqrt{3}$.
C. $\sin B + \sin C = \frac{1}{2}$. D. $\sin B + \sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

$$\text{Áp dụng định lý sin ta có } \sin B + \sin C = \frac{b}{2R} + \frac{c}{2R} = \frac{b+c}{2R} = \frac{2a}{2R} = 2\sin A = 1.$$

Câu 9: Cho tam giác ABC có $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C$. Tam giác ABC là tam giác

A. vuông tại C . B. vuông tại A . C. cân. D. đều.

Lời giải

Áp dụng định lí sin $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ta có:
$$\begin{cases} \sin A = \frac{a}{2R} \\ \sin C = \frac{c}{2R} \\ \sin B = \frac{b}{2R} \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có: $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông tại C do: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow CB^2 + CA^2 = AB^2$

Câu 10: Cho tam giác ABC có $\sin A = 2\sin B \cdot \cos C$. Tam giác ABC là tam giác

- A.** vuông tại C . **B.** vuông tại A . **C.** cân tại A . **D.** đều.

Lời giải

Áp dụng định lí sin $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ta có:
$$\begin{cases} \sin A = \frac{a}{2R} \\ \sin C = \frac{c}{2R} \\ \sin B = \frac{b}{2R} \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có: $\sin^2 A + \sin^2 B = \sin^2 C \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2R}\right)^2 + \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \left(\frac{c}{2R}\right)^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = c^2$.

Vậy tam giác ABC là tam giác vuông tại C do: $a^2 + b^2 = c^2 \Leftrightarrow CB^2 + CA^2 = AB^2$

Câu 11: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 10$ và $\tan(A + B) = \frac{1}{3}$.

- A.** $\frac{5\sqrt{10}}{9}$. **B.** $\frac{10}{3}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $5\sqrt{10}$.

Lời giải

Ta có: $\tan(A + B) = \frac{1}{3}$ nên $\tan C = -\frac{1}{3}$. Do đó $3\sin C = -\cos C$, mà $\sin^2 C + \cos^2 C = 1$

$$\Rightarrow \sin C = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \text{ mà } \frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = 5\sqrt{10}.$$

Câu 12: Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC biết $AB = 12$ và $\cot(A + B) = \frac{1}{3}$.

- A.** $2\sqrt{10}$. **B.** $\frac{9\sqrt{10}}{5}$. **C.** $5\sqrt{10}$. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $\cot(A + B) = \frac{1}{3}$ nên $\cot C = -\frac{1}{3}$ suy ra $3\cos C = -\sin C$.

$$\text{Mà } \sin^2 C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin C = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ nên } \frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin C} = 2\sqrt{10}.$$

Câu 13: Cho tam giác ABC có các góc $B = 120^\circ, C = 40^\circ$, cạnh $BC = 5\text{cm}$. Tính độ dài cạnh AB (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- A. 7cm . B. 8cm . C. 9cm . D. 10cm .

Lời giải

Xét tam giác ABC ta có: $A = 180^\circ - 120^\circ - 40^\circ = 20^\circ$

Theo định lý sin ta có $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{5 \cdot \sin 40}{\sin 20} \approx 9(\text{cm})$

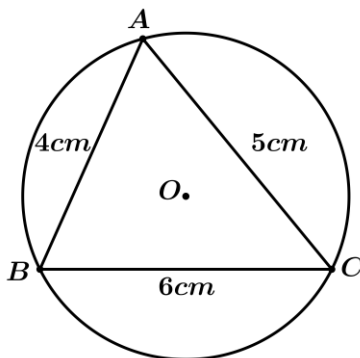
Câu 14: Cho tam giác ABC với $BC = a, AC = b, AB = c$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a = 2R \cos A$. B. $a = 2R \sin A$. C. $a = 2R \tan A$. D. $a = R \sin A$.

Lời giải

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow a = 2R \cdot \sin A$

Câu 15: Từ một miếng bìa hình tròn, bạn Nam cắt ra một hình tam giác ABC có độ dài các cạnh $AB = 4\text{cm}, AC = 5\text{cm}, BC = 6\text{cm}$ như hình minh họa dưới đây. Tính bán kính R của miếng bìa ban đầu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị centimét)



- A. $3(\text{cm})$. B. $5(\text{cm})$. C. $4(\text{cm})$. D. $2(\text{cm})$

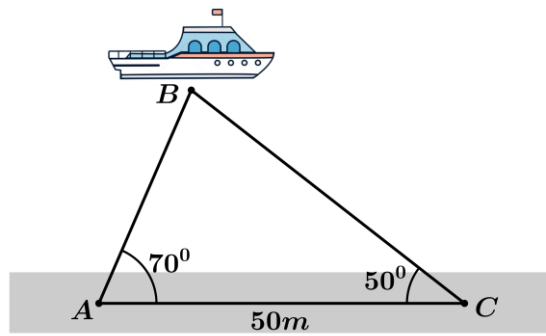
Lời giải

Áp dụng định lý cosin cho tam giác ABC , ta có: $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{4^2 + 5^2 - 6^2}{2 \cdot 4 \cdot 5} = \frac{1}{8}$.

Mà $A < 180^\circ$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{1}{64}} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

Áp dụng định lý sin, ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{6}{2 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8}} \approx 3(\text{cm})$.

Câu 16: Để đo khoảng cách từ vị trí A trên bờ sông đến vị trí B của con tàu bị mắc cạn gần một cù lao giữa sông, bạn Minh đi dọc bờ sông từ vị trí A đến vị trí C cách A một khoảng bằng 50m và đo các góc $BAC = 70^\circ, BCA = 50^\circ$ như hình minh họa dưới đây. Tính khoảng cách AB theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



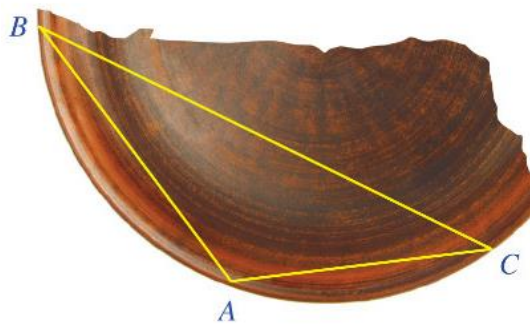
- A. 43(m). B. 42(m). C. 44(m). D. 45(m).

Lời giải

Xét tam giác ABC ta có: $\widehat{ABC} = 180^\circ - 70^\circ - 50^\circ = 60^\circ$.

Áp dụng định lí sin, ta có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{AC \sin C}{\sin B} = \frac{50 \sin 50^\circ}{\sin 60^\circ} \approx 44(m)$

Câu 17: Để xác định bán kính của chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ một phần, các nhà khảo cổ lấy ba điểm A, B, C trên vành đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như sau: cạnh $AB \approx 9,5$ cm, $\widehat{ACB} \approx 60^\circ$. Bán kính của chiếc đĩa xấp xỉ là:



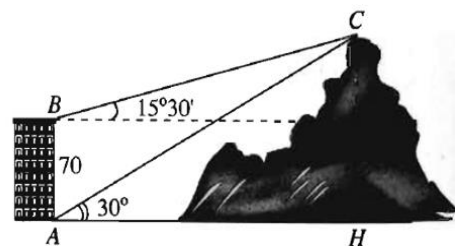
- A. 5,5 cm. B. 18 cm. C. 11 cm. D. 9,5 cm.

Lời giải

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có:

$$\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} \approx \frac{9,5}{2 \sin 60^\circ} \approx 5,5 \text{ (cm)}$$

Câu 18: Từ hai vị trí A và B của một tòa nhà, người ta quan sát đỉnh C của ngọn núi. Biết rằng độ cao $AB = 70$ m, phương nhìn AC tạo với phương nằm ngang góc 30° , phương nhìn BC tạo với phương nằm ngang góc $15^\circ 30'$. Ngọn núi đó có độ cao so với mặt đất gần nhất với giá trị nào sau đây?



- A. 135m. B. 234m. C. 165m. D. 195m.

Lời giải

Từ giả thiết, ta suy ra tam giác ABC có $\widehat{CAB} = 60^\circ$, $\widehat{ABC} = 105^\circ 30'$ và $c = 70$.

Khi đó $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 165^\circ 30' = 14^\circ 30'$.

Theo định lí sin, ta có $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ hay $\frac{b}{\sin 105^\circ 30'} = \frac{70}{\sin 14^\circ 30'}$

Do đó $AC = b = \frac{70 \cdot \sin 105^\circ 30'}{\sin 14^\circ 30'} \approx 269,4$ m.

Gọi CH là khoảng cách từ C đến mặt đất. Tam giác vuông ACH có cạnh CH đối diện với góc 30° nên $CH = \frac{AC}{2} = \frac{269,4}{2} = 134,7$ m.

Vậy ngọn núi cao khoảng 135 m.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $AC = 10$, $BC = 12$, $B = 45^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công thức tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $R = \frac{BC}{2\sin B}$.

b) $\sin A = \frac{5\sqrt{2}}{12}$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $5\sqrt{2}$.

d) $\frac{3BC - 2AC - AB}{3\sin A - 2\sin B - \sin C} = 10\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $R = \frac{BC}{2\sin A}$.

b) Sai Ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow \sin A = \frac{BC \cdot \sin B}{AC} = \frac{12 \cdot \sin 45^\circ}{10} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$.

c) Đúng: Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác $\triangle ABC$ là: $R = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{10}{2 \cdot \sin 45^\circ} = 5\sqrt{2}$.

d) Đúng: Ta có: $R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{AC}{2\sin B} = \frac{AB}{2\sin C} \Rightarrow R = \frac{3BC}{6\sin A} = \frac{2AC}{4\sin B} = \frac{AB}{2\sin C}$
 $= \frac{3BC - 2AC - AB}{2(3\sin A - 2\sin B - \sin C)} \Rightarrow \frac{3BC - 2AC - AB}{3\sin A - 2\sin B - \sin C} = 2R = 10\sqrt{2}$

Câu 2: Cho tam giác ABC có $AC = 20$, $B = 60^\circ$, $\cos C = 0,8$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Góc C là góc nhọn.

b) Độ dài cạnh AB là $8\sqrt{3}$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là $\frac{20\sqrt{3}}{3}$.

d) Độ dài đường trung tuyến từ đỉnh A trong ΔABC lớn hơn 13.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\cos C = 0,8 > 0 \Rightarrow C < 90^\circ$

b) Đúng: Ta có: $\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$.

$$\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{20 \cdot 0,6}{\sin 60^\circ} = 8\sqrt{3}$$

c) Đúng: Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABC là: $R = \frac{AC}{2 \sin B} = \frac{20}{2 \cdot \sin 60^\circ} = \frac{20\sqrt{3}}{3}$.

d) Sai: Ta có: $\sin A = \sin(B + C) = \sin B \cdot \cos C + \cos B \cdot \sin C = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}$.

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow BC = \frac{AC \cdot \sin A}{\sin B} = \frac{20 \cdot \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}}{\sin 60^\circ} = 16 + 4\sqrt{3}$$

Đường trung tuyến từ đỉnh A trong ΔABC có độ dài là:

$$m_A = \sqrt{\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}} = \sqrt{\frac{(8\sqrt{3})^2 + 20^2}{2} - \frac{(16 + 4\sqrt{3})^2}{4}} \approx 12,8 < 13.$$

Câu 3: Cho tam giác ABC có $AB = 4$, $AC = 5$ và $\cos A = \frac{3}{5}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số đo góc A của ΔABC bằng 45° .

b) Độ dài cạnh BC của ΔABC bằng $\sqrt{29}$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp của ΔABC xấp xỉ bằng 3,37.

d) Đường cao kẻ từ đỉnh A trong ΔABC có độ dài xấp xỉ bằng 2,97.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow A \approx 54^\circ$.

b) Đúng: Áp dụng định lí côsin ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 29 \text{ suy ra } BC = \sqrt{29}.$$

c) Đúng: Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

$$\text{Suy ra } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{\sqrt{29}}{2 \cdot \frac{4}{5}} = \frac{5\sqrt{29}}{8} \approx 3,37.$$

d) Đúng: Vì $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ nên $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$

Theo công thức tính diện tích ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 8$ (1)

Mặt khác: $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot h_a$ (2)

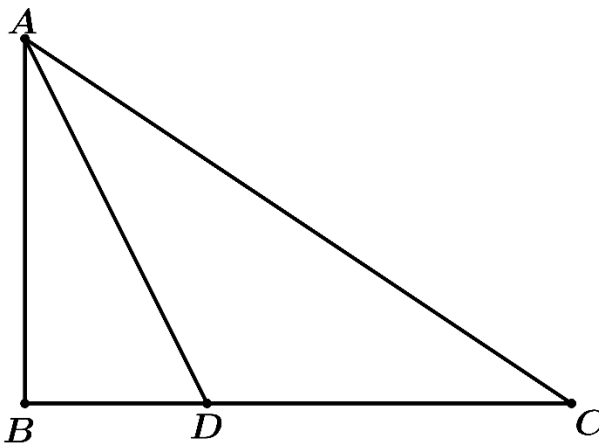
Từ (1) và (2) suy ra $\frac{1}{2} \cdot \sqrt{29} \cdot h_a = 8 \Rightarrow h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29}$

Vậy độ dài đường cao kẻ từ A là $h_a = \frac{16\sqrt{29}}{29} \approx 2,97$.

Câu 4: Cho tam giác ABC vuông tại B và D là một điểm thuộc cạnh BC sao cho $CD = 30$, $\angle BCA = 43^\circ$, $\angle BDA = 67^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- $AD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cdot \cos C$
- Số đo góc CAD bằng 42° .
- Số đo góc BAD bằng 23° .
- Độ dài cạnh AB của $\triangle ABC$ xấp xỉ bằng $46,3$.

Lời giải



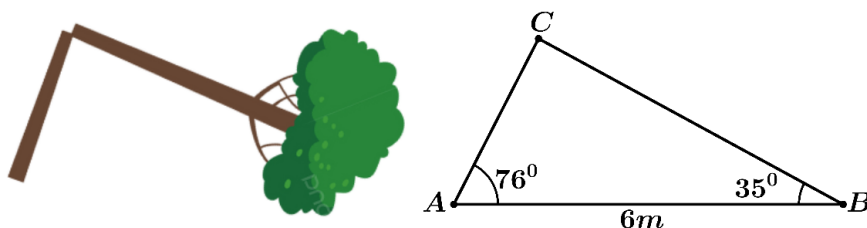
- Sai: Ta có $AD^2 = AC^2 + CD^2 - 2AC \cdot CD \cdot \cos C$.
- Sai: Trong tam giác ACD : có góc $CAD = 67^\circ - 43^\circ = 24^\circ$.
- Đúng: Ta có $\angle BAC = 90^\circ - \angle ACB = 47^\circ \Rightarrow \angle BAD = \angle BAC - \angle CAD = 23^\circ$.
- Đúng: Áp dụng định lý sin trong tam giác ACD ta có: $\frac{AD}{\sin 43^\circ} = \frac{CD}{\sin 24^\circ} \Rightarrow AD \approx 50,3$

Trong tam giác vuông BAD ta có $\sin 67^\circ = \frac{AB}{AD} \Rightarrow AB \approx 46,3$

Độ dài cạnh AB của $\triangle ABC$ xấp xỉ bằng $46,3$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Một cái cây dạng thẳng đứng bị gió mạnh làm gãy không hoàn toàn (hai đoạn thân bị gãy vẫn dính liền nhau như hình vẽ). Một người muốn đo chiều cao của cây trước khi gãy, người ấy đo được đoạn thẳng nối từ gốc cây đến ngọn cây (đã ngã) là $AB = 6m$, hai góc $CAB = 76^\circ, CBA = 35^\circ$. Tính chiều dài của cây trước khi bị gãy (giả sử sự biến dạng lúc gãy không ảnh hưởng đến tổng độ dài của cây)?



Lời giải

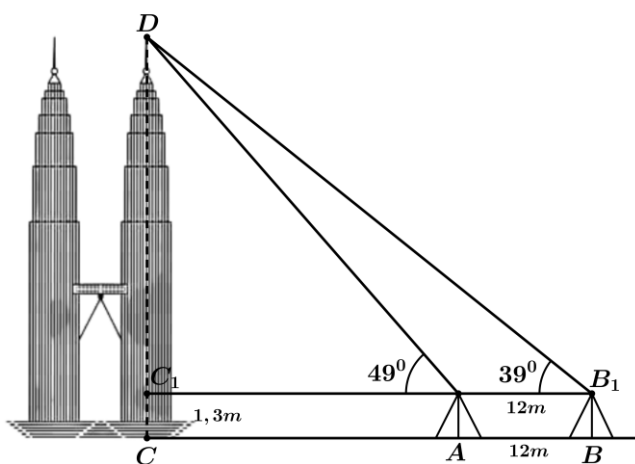
Ta có: $\hat{C} = 180^\circ - (\hat{A} + \hat{B}) = 180^\circ - (76^\circ + 35^\circ) = 69^\circ$.

Theo định lí sin: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{6 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 3,69(m)$

$\Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{6 \cdot \sin 76^\circ}{\sin 69^\circ} \approx 6,24m \Rightarrow AC + BC \approx 9,93(m)$.

Vậy chiều cao ban đầu của cây xấp xỉ bằng $9,93(m)$.

Câu 2: Muốn đo chiều cao của tháp chàm Por Klong Garai ở Ninh Thuận người ta lấy hai điểm A và B trên mặt đất có khoảng cách $AB = 12m$ cùng thẳng hàng với chân C của tháp để đặt hai giác kế. Chân của giác kế có chiều cao $h = 1,3m$. Gọi D là đỉnh tháp và hai điểm A_1, B_1 cùng thẳng hàng với C_1 thuộc chiều cao CD của tháp. Người ta đo được góc $DA_1C_1 = 49^\circ$ và $DB_1C_1 = 35^\circ$. Tính chiều cao CD của tháp (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



Lời giải

Ta có: $C_1DA_1 = 90^\circ - 49^\circ = 41^\circ; C_1DB_1 = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$, nên $A_1DB_1 = 14^\circ$.

Xét tam giác A_1DB_1 có: $\frac{A_1B_1}{\sin A_1DB_1} = \frac{A_1D}{\sin A_1B_1D} \Rightarrow A_1D = \frac{12 \cdot \sin 35^\circ}{\sin 14^\circ} \approx 28,45(m)$.

Xét tam giác C_1A_1D vuông tại C_1 có:

$$\sin C_1A_1D = \frac{C_1D}{A_1D} \Rightarrow C_1D = A_1D \cdot \sin C_1A_1D = 28,45 \cdot \sin 49^\circ \approx 21,47(m)$$

$$\Rightarrow CD = C_1D + CC_1 \approx 22,8(m)$$

Câu 3: Cho tam giác nhọn ABC có $a = 3, b = 4$ và diện tích $S = 3\sqrt{3}$. Gọi R là bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Tính $\sqrt{39}R$

Lời giải

$$\text{Ta có: } S = \frac{1}{2}ab\sin C \Rightarrow \sin C = \frac{2S}{ab} = \frac{2 \cdot 3\sqrt{3}}{3 \cdot 4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow C = 60^\circ.$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos C} = \sqrt{13}; \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{c}{2\sin C} = \frac{\sqrt{13}}{2\sin 60^\circ} = \frac{\sqrt{39}}{3}. \Rightarrow \sqrt{39}R = 13$$

Câu 4: Cho tam giác ABC có $\frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C}$ và $a = 10$. Tính chu vi tam giác đó

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{5}{\sin A} = \frac{4}{\sin B} = \frac{3}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{10}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{6}{\sin C} \Leftrightarrow \frac{a}{\sin A} = \frac{8}{\sin B} = \frac{6}{\sin C}.$$

Theo định lý sin trong tam giác ta tính được $b = 8, c = 6$ nên chu vi tam giác là $a + b + c = 24$.

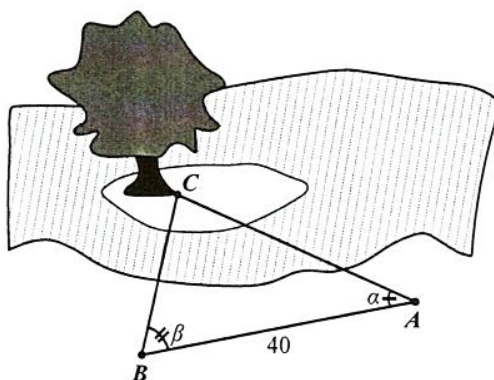
Câu 5: Cho tam giác ABC nhọn có $BC = 3a$ và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = a\sqrt{3}$. Tính số đo góc A .

Lời giải

$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác } ABC \text{ ta có: } \frac{BC}{\sin A} = 2R \Rightarrow \sin A = \frac{BC}{2R} = \frac{3a}{2a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Suy ra $A = 60^\circ$ (do tam giác ABC nhọn).

Câu 6: Để đo khoảng cách từ một điểm A trên bờ sông đến gốc cây C trên cù lao giữa sông, người ta chọn một điểm B cùng ở trên bờ với A sao cho từ A và B có thể nhìn thấy điểm C . Ta đo được khoảng cách $AB = 40m$, $CAB = 45^\circ, CBA = 70^\circ$. Vậy sau khi đo đạc và tính toán khoảng cách AC bằng bao nhiêu mét?(kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



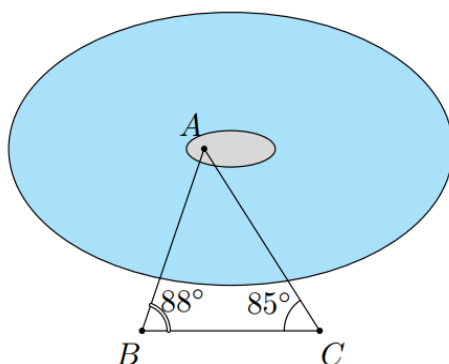
Lời giải

Ta có: $C = 180^\circ - A - B = 65^\circ$. Áp dụng định lí sin vào tam giác ABC ta có:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} = \frac{40 \cdot \sin 70^\circ}{\sin 65^\circ} \approx 41,5(m)$$

Vậy khoảng cách giữa A và C khoảng $41,5(m)$.

- Câu 7:** Ở giữa một cái hồ có một cái đảo nhỏ. Để tính khoảng cách từ điểm A trên đảo đến điểm B trên bờ hồ, người ta chọn điểm C . Sau đó thực hiện đo các góc B, C và khoảng cách BC . Biết $\hat{B} = 88^\circ, \hat{C} = 85^\circ$ và $BC = 50m$. Tính khoảng cách từ A đến B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

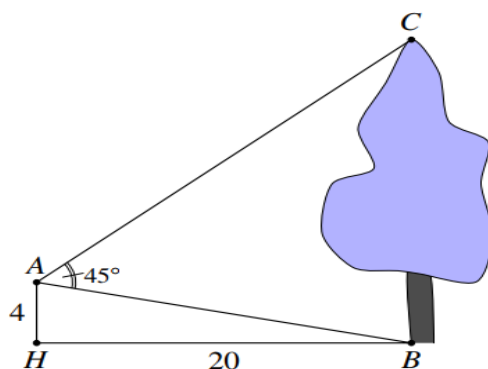


Lời giải

Ta có $\hat{A} = 180^\circ - \hat{B} - \hat{C} = 180 - 88^\circ - 85^\circ = 7^\circ$.

Áp dụng định lí sin ta có: $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A} \Rightarrow AB = \frac{BC \sin C}{\sin A} = \frac{50 \sin 85^\circ}{\sin 7^\circ} \approx 408,7m$.

- Câu 8:** Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết $AH = 4m, HB = 20m, BAC = 45^\circ$. Chiều cao của cây bằng bao nhiêu?



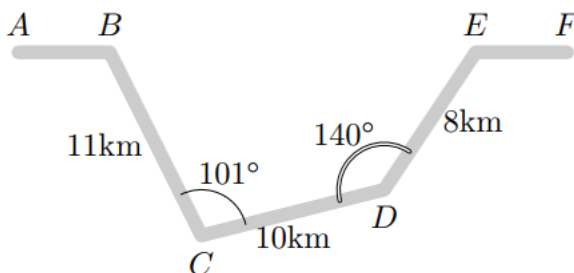
Lời giải

Trong tam giác AHB ta có: $\tan ABH = \frac{AH}{BH} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5} \Rightarrow ABH \approx 11^\circ 19'$.

Suy ra $ABC = 90^\circ - ABH \approx 78^\circ 41' \Rightarrow ACB = 180^\circ - (BAC + ABC) \approx 56^\circ 19'$.

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC : $\frac{AB}{\sin ACB} = \frac{CB}{\sin BAC} \Rightarrow CB = \frac{AB \cdot \sin BAC}{\sin ACB} \approx 17m$

Câu 9: Để tránh núi, đường đi hiện tại phải vòng qua núi như mô hình trong hình vẽ. Hỏi quãng đường đi thẳng từ B đến E dài bao nhiêu km (làm tròn đến hàng phần mười)?



Lời giải

Gọi M là giao điểm của BC và DE .

Ta có $MCD = 180^\circ - 101^\circ = 79^\circ$, $MDC = 180^\circ - 140^\circ = 40^\circ$, $CMD = 180^\circ - 79^\circ - 40^\circ = 61^\circ$.

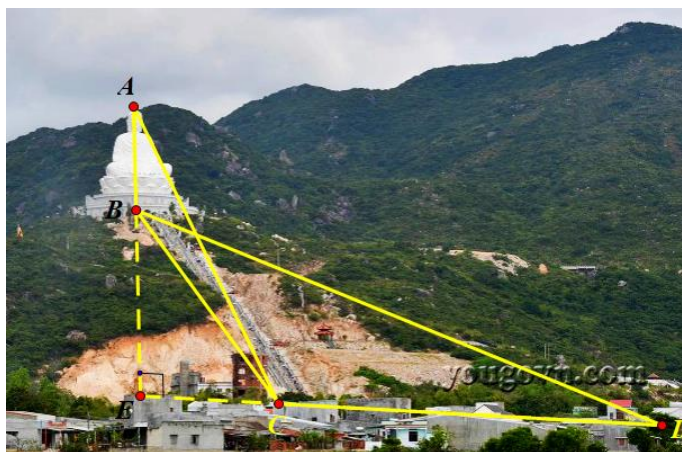
Áp dụng định lý sin: $\frac{CD}{\sin CMD} = \frac{CM}{\sin MDC} \Rightarrow CM = \frac{CD \sin MDC}{\sin CMD} = \frac{10 \sin 40^\circ}{\sin 61^\circ} \Rightarrow MB \approx 18,3493$

$\frac{CD}{\sin CMD} = \frac{MD}{\sin MCD} \Rightarrow CM = \frac{CD \sin MCD}{\sin CMD} = \frac{10 \sin 79^\circ}{\sin 61^\circ} \Rightarrow ME \approx 18,2238.$

Áp dụng định lý côsin: $BE = \sqrt{MB^2 + ME^2 - 2MB \cdot ME \cos BME}$

$\approx \sqrt{18,3493^2 + 18,2238^2 - 2 \cdot 18,3493 \cdot 18,2238 \cos 61^\circ} \approx 18,6$ (km).

Câu 10: Để tính chiều cao AB của bức tượng, người ta đo ở hai vị trí C và D cách nhau 200m. Tại C người ta đo được $BCE = 52^\circ$, $ACE = 67^\circ$, tại D người ta đo được $BDC = 23^\circ$. Tính chiều cao AB .



Chùa Ông Núi, ngôi chùa cổ và nổi tiếng ở Bình Định, trong đó điểm nổi bật nhất của chùa chính là bức tượng Phật ngồi lớn nhất Đông Nam Á.

Lời giải

Ta có $BCD = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$, $CBD = 52^\circ - 23^\circ = 29^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác BCD ta được $\frac{BC}{\sin D} = \frac{CD}{\sin B} \Rightarrow BC = \frac{CD \sin D}{\sin B} \approx 161,2m$



Trong tam giác vuông BCE ta có $BE = BC.\sin BCE \approx 127m$, $CE = BC.\cos BCE \approx 99m$

Trong tam giác vuông ACE ta có $AE = \frac{EC}{\tan ACE} \approx 233m$.

Vậy chiều cao $AB \approx 233 - 127 = 106m$.

Câu 11: Để tính chiều rộng cửa biển CD của cảng Quy Nhơn, người ta chọn 2 vị trí A và B cách nhau 800m trên bờ biển. Từ vị trí A , người ta đo được $CAD = 17^\circ$, $BAD = 121^\circ$, tại B người ta đo được $ABC = 24^\circ$, $DBC = 15^\circ$. Tính CD .



Lời giải

Ta có $BAC = 138^\circ$, $ACB = 18^\circ$, $ABD = 39^\circ$, $ADB = 20^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC = \frac{AB \sin B}{\sin C} \approx 1053(m)$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABD ta có $\frac{AD}{\sin B} = \frac{AB}{\sin D} \Rightarrow AD = \frac{AB \sin B}{\sin D} \approx 1472(m)$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác ACD : $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos A \approx 311018$

Suy ra $CD \approx 558(m)$

Câu 12: Để tính chiều cao của tháp, có 2 người đứng ở vị trí C và D cách nhau 40m. Người ở vị trí C đo được góc $ACB = 45^\circ$, $ACD = 84^\circ$, người ở vị trí D đo được góc $ADC = 50^\circ$. Tính chiều cao AB của tháp.



Tháp được xây dựng vào cuối thế kỷ XI, đầu thế kỷ XII tại xã Phước Hiệp, Tuy Phước, Bình Định trên đỉnh một quả đồi nằm giữa hai nhánh sông Kôn bên cạnh quốc lộ 1A, cách Tp. Quy Nhơn khoảng 20 km. Đây là một quần thể gồm 4 tháp, đứng nhìn từ xa trông giống như chiếc bánh ít nên người dân nơi đây gọi là Tháp Bánh Ít.

Lời giải

Xét tam giác ACD có $CAD = 180^\circ - 84^\circ - 50^\circ = 46^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ACD , ta có $\frac{CD}{\sin A} = \frac{AC}{\sin D} \Rightarrow AC = \frac{CD \sin D}{\sin A} \approx 42,6$

Xét tam giác ABC , ta có $\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AB = AC \cdot \sin 45^\circ \approx 30m$.

-----HẾT-----

Dạng 3: Tính diện tích và một số yếu tố khác của tam giác

Phương pháp: Sử dụng các tính chất và các hệ thức lượng, định lý cosin, định lý sin trong tam giác.

Sử dụng các công thức tính diện tích:

- $S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$
- $S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}bc \sin A$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$
- $S = pr$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho ΔABC có $S = 84, a = 13, b = 14, c = 15$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp R của tam giác ΔABC .

Lời giải

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{a.b.c}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{a.b.c}{4S} = \frac{13.14.15}{4.84} = \frac{65}{8}$.

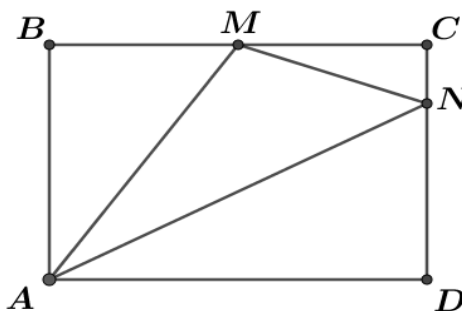
Bài tập 2: Cho ΔABC có $S = 10\sqrt{3}$ và nửa chu vi $p = 10$. Tính bán kính đường tròn nội tiếp r của tam giác ΔABC .

Lời giải

Ta có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{10\sqrt{3}}{10} = \sqrt{3}$.

Bài tập 3: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có cạnh $AB = 4, BC = 6$, M là trung điểm của BC, N là điểm trên cạnh CD sao cho $ND = 3NC$. Khi đó bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác AMN bằng

Lời giải



Ta có: $MC = 3, NC = 1 \Rightarrow MN = \sqrt{10}$, $BM = 3, AB = 4 \Rightarrow AM = 5$
 $AD = 6, ND = 3 \Rightarrow AN = \sqrt{45}$

Khi đó: $p = \frac{AM + AN + MN}{2} = \frac{\sqrt{10} + 5 + \sqrt{45}}{2}$

Suy ra: $S_{AMN} = \sqrt{p(p-AM)(p-AN)(p-MN)} = \frac{15}{2}$

Bán kính của đường tròn ngoại tiếp của tam giác AMN là: $R = \frac{AM \cdot AN \cdot MN}{4S_{AMN}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

Bài tập 4: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn bán kính bằng 3, biết $A = 30^\circ$, $B = 45^\circ$. Tính độ dài trung tuyến kẻ từ A và bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

Lời giải

Ta có $C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 30^\circ - 45^\circ = 105^\circ$

Theo định lí sin ta có $a = 2R \sin A = 2.3.\sin 30^\circ = 3$, $b = 2R \sin B = 2.3.\sin 45^\circ = 6.\frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$

$c = 2R \sin C = 2.3.\sin 105^\circ \approx 5,796$

Theo công thức đường trung tuyến: $m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \approx \frac{2(18 + 5,796^2) - 9}{4} = 23,547$

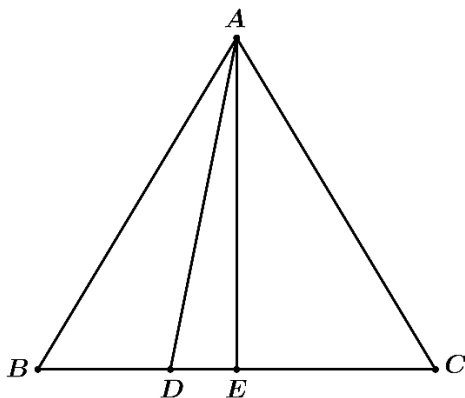
Theo công thức tính diện tích tam giác ta có

$S_{ABC} = pr = \frac{1}{2}bc \sin A \Rightarrow r = \frac{bc \sin A}{2p} = \frac{3\sqrt{2}.5,796.\sin 30^\circ}{3 + 3\sqrt{2} + 5,796} \approx 0,943.$

Bài tập 5: Cho tam giác đều ABC . Gọi D là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD}$. Gọi R và r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp của tam giác ADC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{DC} = -2\overrightarrow{DB}$ do đó $DC = 2DB$.



Gọi S là diện tích của tam giác ADC và E là trung điểm của BC .

Đặt $AB = a$. Suy ra $\begin{cases} S = \frac{2}{3}S_{ABC} = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{6} \\ AD = \sqrt{AE^2 + ED^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\right)^2} = \frac{2a\sqrt{7}}{6} \end{cases}$

Hơn nữa $\begin{cases} S = \frac{AD + DC + AC}{2} \cdot r = \frac{5 + \sqrt{7}}{6} a \cdot r \\ S = \frac{AD \cdot DC \cdot BC}{4R} = \frac{2a^3\sqrt{7}}{36R} \end{cases} \Rightarrow S^2 = \frac{(5 + \sqrt{7})ar \cdot 2a^3\sqrt{7}}{6 \cdot 36R} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7})a^4r}{108R}$

Hay $\frac{a^4}{12} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7})a^4r}{108R} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7}) \cdot 12}{108} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\sqrt{7}(5 + \sqrt{7})}{9}$.

Bài tập 6: Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = 4(m)$, $BC = 6(cm)$, $AC = 2\sqrt{7}(m)$. Điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$. Tính diện tích tam giác ABC .

Lời giải

$$\text{Nửa chu vi tam giác là } P = \frac{a+b+c}{2} = \frac{4+6+2\sqrt{7}}{2} = 5 + \sqrt{7}(m)$$

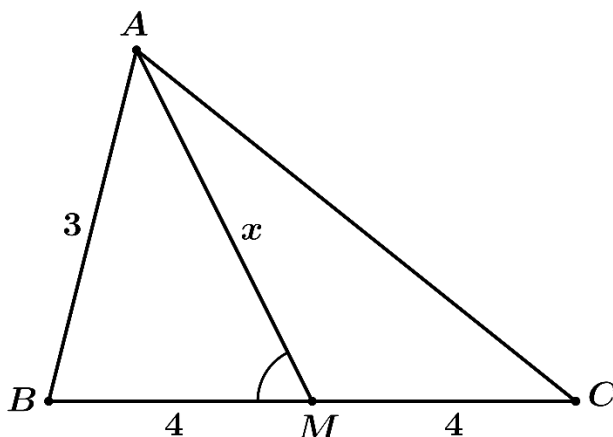
Diện tích tam giác ABC là

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{(5+\sqrt{7})(5+\sqrt{7}-2\sqrt{7})(5+\sqrt{7}-4)(5+\sqrt{7}-6)} = 10,4(m^2)$$

Bài tập 7: Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC . Biết $AB = 3, BC = 8$ và $\cos \angle AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26}$.

Tính diện tích của tam giác ABC .

Lời giải



Đặt $AM = x > 0$. Áp dụng định lý cosin cho tam giác AMB có:

$$3^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos \angle AMB \Leftrightarrow x^2 - 8x \cdot \frac{5\sqrt{13}}{26} + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{13} \\ x = \frac{7}{\sqrt{13}} \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \cos \angle AMB = \frac{5\sqrt{13}}{26} \Rightarrow \sin \angle AMB = \frac{3\sqrt{39}}{26}$$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABC} = 2S_{\triangle ABM}$$

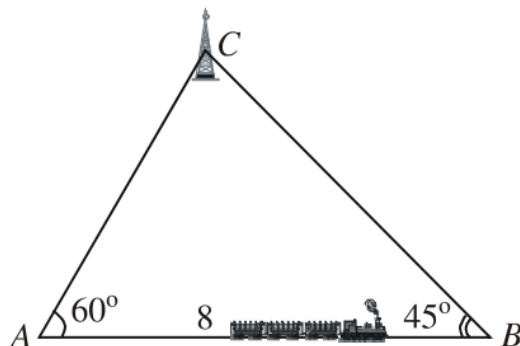
Trường hợp 1: $AM = \sqrt{13}$

$$\text{Ta có } S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BM \cdot \sin \angle AMB = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{13} \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{26} = 3\sqrt{3} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{3}$$

Trường hợp 2: $AM = \frac{7}{\sqrt{13}}$

$$\text{Khi đó: } S_{\triangle ABM} = \frac{1}{2} AM \cdot BM \cdot \sin \angle AMB = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{\sqrt{13}} \cdot 4 \cdot \frac{3\sqrt{39}}{26} = \frac{21\sqrt{3}}{13} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{42\sqrt{3}}{13}$$

Bài tập 8: Một người ngồi trên tàu hoả đi từ ga A đến ga B . Khi tàu đỗ ở ga A , qua ống nhòm người đó nhìn thấy một tháp C . Hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng đi của tàu một góc khoảng 60° . Khi tàu đỗ ở ga B tiếp theo, người đó nhìn lại vẫn thấy tháp C , hướng nhìn từ người đó đến tháp tạo với hướng ngược với hướng đi của tàu khoảng 45° . Biết rằng đoạn đường tàu nối thẳng ga A với B dài 8 km . Hỏi khoảng cách từ ga A đến tháp C là bao nhiêu?



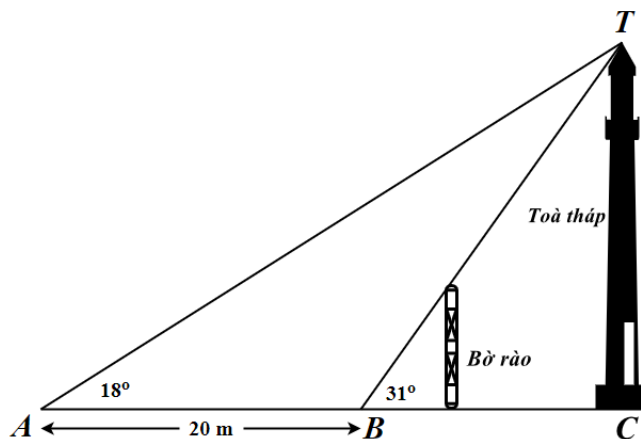
Lời giải

Xét tam giác ABC ta có $C = 180^\circ - (60^\circ + 45^\circ) = 75^\circ$.

Áp dụng định lí Sin vào tam giác ABC : $\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow AC \approx 5,86\text{ km}$.

Vậy khoảng cách từ ga A đến tháp C xấp xỉ $5,86\text{ km}$.

Bài tập 9: Một tòa tháp đổ nát được rào lại vì lý do an toàn. Để tìm chiều cao của tháp CT (hình vẽ), người đo đứng tại điểm A và đo góc $CAT = 18^\circ$. Sau đó người đo đi thẳng 20 mét về phía chân tháp đến điểm B và đo được góc $CBT = 31^\circ$. Tính chiều cao của tháp, kết quả làm tròn đến hai chữ số thập phân.



Lời giải

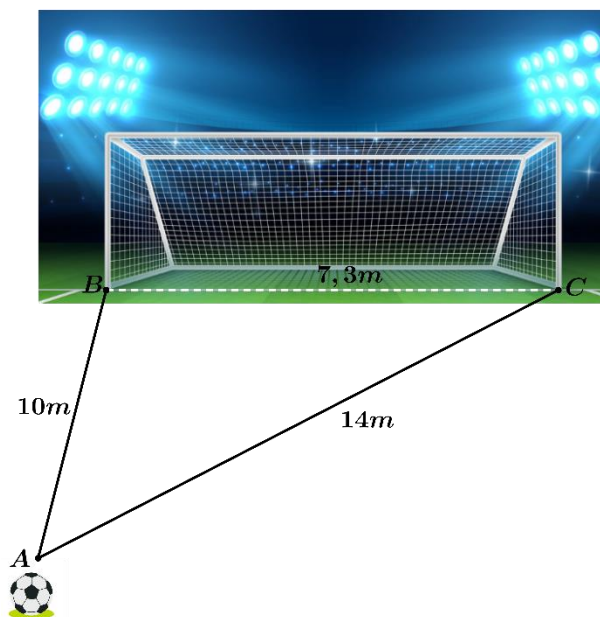
Ta có $ABT = 180^\circ - 31^\circ = 149^\circ \Rightarrow ATB = 13^\circ$.

Áp dụng định lí Sin vào tam giác ABT : $\frac{AB}{\sin ATB} = \frac{BT}{\sin BAT} \Rightarrow BT \approx 27,47(m)$

Tam giác BCT vuông tại C : $CT = BT \cdot \sin 31^\circ \approx 14,15(m)$

Vậy chiều cao của tháp xấp xỉ $14,15(m)$

Bài tập 10: Một học sinh tập sút bóng sệt vào khung thành trống có bề rộng đo giữa hai mép trong của cột là $BC = 7,3m$ (hình vẽ). Biết khoảng cách từ quả bóng đến chân các mép cột B, C lần lượt là $AB = 10m$ và $AC = 14m$. Tính góc sút tối đa để học sinh đó có thể sút được bóng vào lưới.



Lời giải

Áp dụng định lí Côsin vào tam giác ABC ta có: $\cos BAC = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} \Rightarrow BAC \approx 30^\circ$.

Vậy góc sút bóng tối đa cần tìm xấp xỉ 30° .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Chọn công thức đúng trong các đáp án sau:

- A.** $S = \frac{1}{2}bc \sin A$. **B.** $S = \frac{1}{2}ac \sin A$. **C.** $S = \frac{1}{2}bc \sin B$. **D.** $S = \frac{1}{2}bc \sin C$.

Lời giải

Ta có: $S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}ab \sin C$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có cạnh $BC = a$, cạnh $CA = b$. Tam giác ABC có diện tích lớn nhất khi góc C bằng:

- A.** 60° . **B.** 90° . **C.** 150° . **D.** 120° .

Lời giải

Diện tích của tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2}a.b.\sin C$

S lớn nhất khi $\sin C$ lớn nhất, hay $\sin C = 1 \Rightarrow C = 90^\circ$.

Câu 3: Tam giác ABC có góc A nhọn, $AB = 5$, $AC = 8$, diện tích bằng 12. Tính độ dài cạnh BC .

- A.** $2\sqrt{3}$. **B.** 4. **C.** 5. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $S = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A \Rightarrow \sin A = \frac{2S}{AB.AC} = \frac{2.12}{5.8} = \frac{3}{5} \Rightarrow A = 36^\circ 52' 12''$

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2.AB.AC.\cos A = 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos 36^\circ 52' 12'' \approx 25 \Rightarrow BC \approx 5$.

Câu 4: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a . Góc $BAD = 30^\circ$. Diện tích hình thoi $ABCD$ là

- A.** $\frac{a^2}{4}$. **B.** $\frac{a^2}{2}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **D.** a^2 .

Lời giải

Ta có $S_{ABCD} = AB.AD.\sin BAD = a.a.\sin 30^\circ = \frac{1}{2}a^2$.

Câu 5: Tính diện tích tam giác ABC biết $AB = 3$, $BC = 5$, $CA = 6$.

- A.** $\sqrt{56}$. **B.** $\sqrt{48}$. **C.** 6. **D.** 8.

Lời giải

Ta có: $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3 + 5 + 6}{2} = 7$. Vậy diện tích tam giác ABC là:

$S = \sqrt{p(p - AB)(p - AC)(p - BC)} = \sqrt{7(7 - 3)(7 - 6)(7 - 5)} = \sqrt{56}$.

Câu 6: Cho ΔABC có $a = 4$, $c = 5$, $B = 150^\circ$. Diện tích của tam giác là:

- A.** $5\sqrt{3}$. **B.** 5. **C.** 10. **D.** $10\sqrt{3}$.

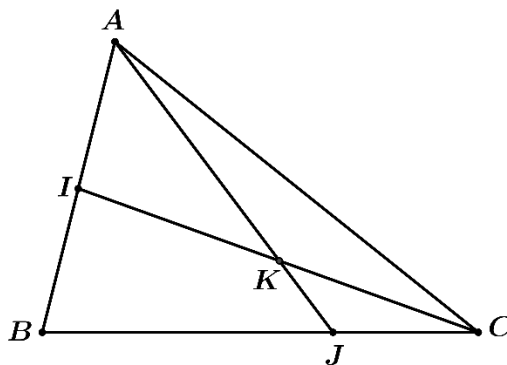
Lời giải

Ta có: $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a.c.\sin B = \frac{1}{2} .4.5.\sin 150^\circ = 5$.

Câu 7: Cho tam giác ABC . Biết $AB = 2$; $BC = 3$ và $\angle C = 60^\circ$. Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

- A. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3}{2}$. B. $5 + \sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $5\sqrt{7}$ và $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. D. $5 + \sqrt{19}$ và $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos \angle C = 4 + 9 - 2.2.3.\cos 60^\circ = 13 - 6 = 7$.
Suy ra $AC = \sqrt{7}$.

Chu vi tam giác ABC là $AB + AC + BC = 2 + 3 + \sqrt{7}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB.BC.\sin \angle C = \frac{1}{2} .2.3.\sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: Tam giác ABC có các trung tuyến $m_a = 15$, $m_b = 12$, $m_c = 9$. Diện tích S của tam giác ABC bằng

- A. 72. B. 144. C. 54. D. 108.

Lời giải

Theo bài toán ta có:
$$\begin{cases} m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = 15^2 \\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} = 12^2 \\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} = 9^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b^2 + 2c^2 - a^2 = 900 \\ 2a^2 + 2c^2 - b^2 = 576 \\ 2a^2 + 2b^2 - c^2 = 324 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b = 4\sqrt{13} \\ c = 2\sqrt{73} \end{cases}$$

Ta có $p = \frac{a+b+c}{2} = 5 + 2\sqrt{13} + \sqrt{73}$, áp dụng công thức Herong ta có

$$S_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 72.$$

Câu 9: Cho tam giác $\triangle ABC$ có $b=7$; $c=5$; $\cos A = \frac{3}{5}$. Độ dài đường cao h_a của tam giác $\triangle ABC$ là.

- A. $\frac{7\sqrt{2}}{2}$. B. 8. C. $8\sqrt{3}$ D. $80\sqrt{3}$

Lời giải

Ta có: $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A} = \sqrt{7^2 + 5^2 - 2.7.5.\frac{3}{5}} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}. \text{ Suy ra } \begin{cases} \sin A = \frac{4}{5} \\ \sin A = -\frac{4}{5} \end{cases} \text{ vì } 0 \leq A \leq 180^\circ \text{ nên } \sin A = \frac{4}{5}$$

$$S = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{4}{5} = 14 \text{ mà } S = \frac{1}{2}a \cdot h_a \Leftrightarrow 14 = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot h_a \Leftrightarrow h_a = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

- Câu 10:** Cho tam giác ABC có $AB = 2a$; $AC = 4a$ và $BAC = 120^\circ$. Tính diện tích tam giác ABC
- A. $S = 8a^2$. **B.** $S = 2a^2\sqrt{3}$. C. $S = a^2\sqrt{3}$. D. $S = 4a^2$.

Lời giải

$$\text{Diện tích của tam giác } ABC \text{ là } S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a \cdot \sin 120^\circ = 2a^2\sqrt{3}.$$

- Câu 11:** Cho tam giác ABC có chu vi bằng 12 và bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1. Diện tích của tam giác ABC bằng
- A. 12. B. 3. **C.** 6. D. 24.

Lời giải

Theo đề bài tam giác ABC có chu vi bằng 12 nên nửa chu vi là $p = \frac{12}{2}$; bán kính đường tròn nội tiếp bằng 1, tức là ta có: $r = 1$.

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S = p \cdot r = 6 \cdot 1 = 6.$$

- Câu 12:** Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác bằng

- A.** 1. B. $\frac{8}{9}$. C. $\frac{4}{5}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Vì $AB^2 + AC^2 = BC^2$ nên tam giác ABC vuông tại A .

$$\text{Do đó bán kính đường tròn nội tiếp } r = \frac{S}{p} = \frac{\frac{1}{2}AB \cdot AC}{\frac{1}{2}(AB + AC + BC)} = \frac{3 \cdot 4}{3 + 4 + 5} = 1.$$

- Câu 13:** Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = 6\sqrt{2}$, $AC = 3\sqrt{3}$. Đường cao AH bằng

- A. $\frac{2\sqrt{66}}{33}$. B. $\frac{3\sqrt{66}}{11}$. C. $\frac{\sqrt{66}}{11}$. **D.** $\frac{6\sqrt{66}}{11}$.

Lời giải

$$\text{Diện tích tam giác } ABC \text{ là: } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{6}.$$

$$\text{Ta có: } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{3})^2} = 3\sqrt{11}.$$

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC \Rightarrow BC = \frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{1}{2}AH} = \frac{2 \cdot 9\sqrt{6}}{3\sqrt{11}} = \frac{6\sqrt{66}}{11}.$$

Câu 14: Cho tam giác ABC có $AB = 3, AC = 5, BC = 6$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

- A. $\frac{45\sqrt{14}}{56}$. B. $\frac{45\sqrt{14}}{14}$. C. $\frac{4\sqrt{14}}{45}$. D. $\frac{45\sqrt{14}}{28}$.

Lời giải

Ta có: $p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \frac{3 + 5 + 6}{2} = 7$. Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)} = 2\sqrt{14}.$$

Áp dụng công thức: $S_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\Delta ABC}} \Rightarrow R = \frac{3 \cdot 5 \cdot 6}{4 \cdot 2\sqrt{14}} = \frac{45\sqrt{14}}{56}$.

Câu 15: Cho tam giác ABC có $c = 3, b = 5, a = 6$. Tính $\sin A$.

- A. $\frac{2\sqrt{14}}{15}$. B. $\frac{4\sqrt{14}}{15}$. C. $\frac{\sqrt{14}}{15}$. D. $\frac{15\sqrt{14}}{56}$.

Lời giải

Ta có: $p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{6 + 5 + 3}{2} = 7$. Diện tích tam giác ABC là:

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{7(7-6)(7-5)(7-3)} = 2\sqrt{14}.$$

Áp dụng công thức: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A \Leftrightarrow \sin A = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{b \cdot c} \Rightarrow \sin A = \frac{2 \cdot 2\sqrt{14}}{5 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{14}}{15}$.

Câu 16: Cho tam giác ABC có $AC = 30, BC = 50$ và $C = 75^\circ$. Tính đường cao CH .

- A. 28,1. B. 28,2. C. 28,3. D. 28,4.

Lời giải

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AC \cdot BC \cdot \sin C \Rightarrow S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 50 \cdot \sin 75^\circ \approx 724,4$.

Áp dụng định lí cosin ta có:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos C} = \sqrt{30^2 + 50^2 - 2 \cdot 30 \cdot 50 \cdot \cos 75^\circ} \approx 51,2.$$

Áp dụng công thức: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}CH \cdot AB \Rightarrow CH = \frac{2 \cdot S_{\Delta ABC}}{AB} = \frac{2 \cdot 724,4}{51,2} \approx 28,3$.

Câu 17: Cho tam giác ABC có $B = 45^\circ, C = 75^\circ$ và $a = 50$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

- A. 13,1. B. 13,2. C. 13,3. D. 13,4.

Lời giải

Ta có: $A = 180^\circ - (B + C) = 180^\circ - (45^\circ + 75^\circ) = 60^\circ$.

Áp dụng định lý sin: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$

$$\Rightarrow b = \frac{a \cdot \sin B}{\sin A} = \frac{50 \cdot \sin 45^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{50\sqrt{6}}{3}; c = \frac{a \cdot \sin C}{\sin A} = \frac{50 \cdot \sin 75^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{25\sqrt{6} + 75\sqrt{2}}{3}.$$

Nửa chu vi là: $p = \frac{a+b+c}{2} \approx 73,3$

Diện tích tam giác ABC là: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot \frac{50\sqrt{6}}{3} \cdot \sin 75^\circ \approx 985,8$.

Áp dụng công thức $S_{\Delta ABC} = p \cdot r \Rightarrow r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p} = \frac{985,8}{73,3} \approx 13,4$.

Câu 18: Tam giác đều nội tiếp đường tròn bán kính R có diện tích là:

- A. $2R^2 \cos^3 A$. B. $2R^2 \sin^3 A$. C. $R^2 \sin^3 A$. D. $2R^3 \sin^3 A$.

Lời giải

Ta có diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$. Do tam giác ABC đều nên $S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{4R}$

Mặt khác từ định lý sin, ta có: $\frac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow a = 2R \sin A$.

$$\text{Vậy } S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{4R} = \frac{(2R \sin A)^3}{4R} = 2R^2 \sin^3 A.$$

Câu 19: Tam giác với ba cạnh là a, b, c Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng?

- A. $\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$. B. $\frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b+c}$.
C. $\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$. D. $\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$.

Lời giải

Ta có: $p = \frac{a+b+c}{2}$ mà $S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p}$.

Câu 20: Cho tam giác ABC có $c = AB, b = AC, A = 60^\circ$. Chiều cao h_a của tam giác ABC là:

- A. $h_a = \frac{bc\sqrt{3}}{2\sqrt{b^2+c^2+bc}}$. B. $h_a = \frac{bc\sqrt{3}}{2\sqrt{b^2+c^2-bc}}$.
C. $h_a = \frac{bc}{2\sqrt{b^2+c^2-bc}}$. D. $h_a = \frac{bc}{\sqrt{b^2+c^2-bc}}$.

Lời giải

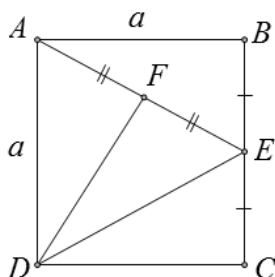
Ta có: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc \Leftrightarrow a = \sqrt{b^2 + c^2 - bc}$.

Diện tích tam giác: $S = \frac{1}{2}bc \cdot \sin A = \frac{1}{2}h_a \cdot a \Leftrightarrow h_a = \frac{bc \cdot \sin A}{\sqrt{b^2 + c^2 - bc}} = \frac{bc \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{b^2 + c^2 - bc}}$

Câu 21: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm cạnh BC và F là trung điểm cạnh AE . Tính độ dài đoạn thẳng DF .

- A.** $DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}$. **B.** $DF = \frac{a\sqrt{5}}{4}$. **C.** $DF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. **D.** $DF = \frac{3a}{4}$.

Lời giải



Vì $ABCD$ là hình vuông và E là trung điểm của BC nên $AE = DE = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

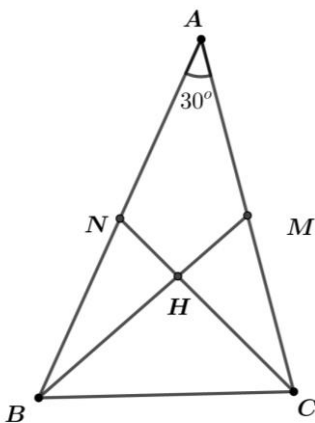
Áp dụng công thức độ dài trung tuyến trong tam giác DAE , ta có

$$DF^2 = \frac{DA^2 + DE^2}{2} - \frac{AE^2}{4} = \frac{a^2 + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{5a^2}{16} = \frac{13a^2}{16} \Rightarrow DF = \frac{a\sqrt{13}}{4}$$

Câu 22: Tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM, CN vuông góc với nhau và có $BC = 4$, $BAC = 30^\circ$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC là:

- A.** $\frac{8}{-\sqrt{3} + \sqrt{15 + 8\sqrt{3}}}$. **B.** $\frac{8}{\sqrt{3} - \sqrt{15 - 8\sqrt{3}}}$.
C. $\frac{8}{\sqrt{3} + \sqrt{15 + 8\sqrt{3}}}$. **D.** $\frac{8}{\sqrt{3} + \sqrt{15 - 8\sqrt{3}}}$.

Lời giải



Gọi $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$, $H = BM \cap CN$.

Ta có: $BH^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right), CH^2 = \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right).$

Do tam giác BHC vuông tại H nên

$$BH^2 + CH^2 = 16 \Leftrightarrow \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} \right) + \frac{4}{9} \left(\frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4} \right) = 16$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{9} \left(a^2 + \frac{b^2 + c^2}{4} \right) = 16 \Leftrightarrow a^2 + \frac{b^2 + c^2}{4} = 36 \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{4} = 20 \Rightarrow b^2 + c^2 = 80.$$

Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC , ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \Rightarrow b^2 + c^2 - bc\sqrt{3} = 16 \Rightarrow bc\sqrt{3} = 64 \Rightarrow bc = \frac{64}{\sqrt{3}} = \frac{64\sqrt{3}}{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \frac{64\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{16\sqrt{3}}{3}.$$

Mặt khác ta có: $b^2 + c^2 = 80 \Leftrightarrow (b+c)^2 - 2bc = 80 \Leftrightarrow (b+c)^2 = 80 + \frac{128\sqrt{3}}{3}$

$$\Rightarrow b+c = \sqrt{80 + \frac{128\sqrt{3}}{3}} \Rightarrow a+b+c = 4 + \sqrt{80 + \frac{128\sqrt{3}}{3}} = \frac{4\sqrt{3} + 4\sqrt{15+8\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}.$$

Theo công thức tính diện tích tam giác, ta có: $S = pr \Rightarrow r = \frac{2S}{2p} = \frac{8}{\sqrt{3} + \sqrt{15+8\sqrt{3}}}.$

Câu 23: Mảnh vườn hình tam giác của gia đình bạn Minh có chiều dài các cạnh là $MN = 20m, NP = 28m, MP = 32m$. Hỏi diện tích mảnh vườn của gia đình bạn Minh là bao nhiêu mét vuông (làm tròn đến hàng phần mười)?

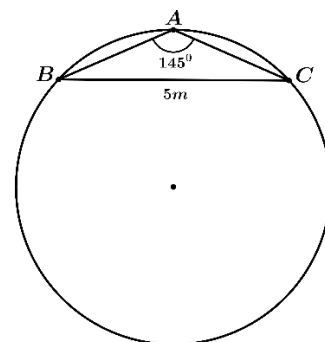
- A. $316,7 (m^2)$. B. $320 (m^2)$. C. $277,1 (m^2)$. D. $280 (m^2)$.

Lời giải

Ta có: $p = \frac{20 + 28 + 32}{2} = 40 (m).$

Diện tích mảnh vườn là: $S = \sqrt{40(40-20)(40-28)(40-32)} \approx 277,1 (m^2).$

Câu 24: Để tính đường kính và diện tích của một giếng nước cổ có dạng hình tròn, người ta tiến hành đo đạc tại ba vị trí A, B, C trên thành giếng. Kết quả đo được là: $BC = 5m, BAC = 145^\circ$ hình dưới. Diện tích của giếng là bao nhiêu mét vuông (lấy $\pi \approx 3,14$ và làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



- A. $29,25(m^2)$. B. $53,29(m^2)$. C. $238,61(m^2)$. **D. $59,68(m^2)$.**

Lời giải

Áp dụng định lí sin cho tam giác ABC , ta có: $\frac{BC}{\sin A} = 2R$.

Do đó $R = \frac{BC}{2 \cdot \sin A} = \frac{5}{2 \cdot \sin 145^\circ}(m)$.

Vậy diện tích của giếng là: $S = \pi R^2 \approx 3,14 \cdot \left(\frac{5}{2 \sin 145^\circ}\right)^2 \approx 59,68(m^2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tam giác ABC có $\cos A = \frac{1}{3}$, $BC = 9$ và $AC = 6$, M là trung điểm cạnh BC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Độ dài cạnh $AB = 8$.

b) Diện tích hình tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $S_{ht} = 9\pi$.

c) Giá trị $\cos \angle AMB$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

d) Tính diện tích của hình tròn nội tiếp tam giác ABC là $S_{ht} = \pi r^2 = \frac{9\pi}{2}$.

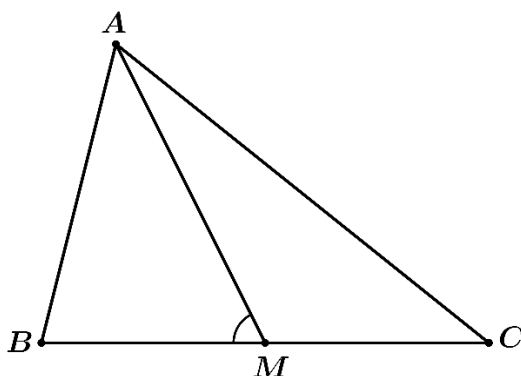
Lời giải

a) Sai: Từ $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ nên $81 = 36 + c^2 - 2 \cdot 6 \cdot c \cdot \frac{1}{3} \Leftrightarrow c^2 - 4c - 45 = 0 \Leftrightarrow c = 9$ (vì $c > 0$).

b) Sai: Ta có $\cos A = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin^2 A = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \sin A = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$R = \frac{BC}{2 \sin A} = \frac{9}{2 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{27}{4\sqrt{2}}$. Vậy $S_{ht} = \pi R^2 = \pi \frac{27}{4\sqrt{2}}$.

c) Sai: Ta có $AM^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{81 + 36}{2} - \frac{81}{4} = \frac{162 + 72 - 81}{4} = \frac{153}{4} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{153}}{2}$.



$$\cos \angle AMB = \frac{MA^2 + MB^2 - AB^2}{2 \cdot MA \cdot MB} = \frac{\frac{153}{4} + \frac{81}{4} - 81}{2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{\sqrt{153}}{2}} = \frac{\frac{-45}{2}}{9 \cdot \frac{\sqrt{153}}{2}} = \frac{-45}{9\sqrt{153}}.$$

d) Đúng: Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác ABC và

$$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{9+6+9}{2} = 12.$$

Do đó diện tích của tam giác ABC là

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{12(12-9)(12-6)(12-9)} = 18\sqrt{2}.$$

$$\text{Mà } S = pr \text{ nên } r = \frac{S}{p} = \frac{18\sqrt{2}}{12} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy diện tích hình tròn nội tiếp tam giác ABC là $S_{ht} = \pi r^2 = \frac{9\pi}{2}$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có độ dài ba trung tuyến bằng $15, 18, 27$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

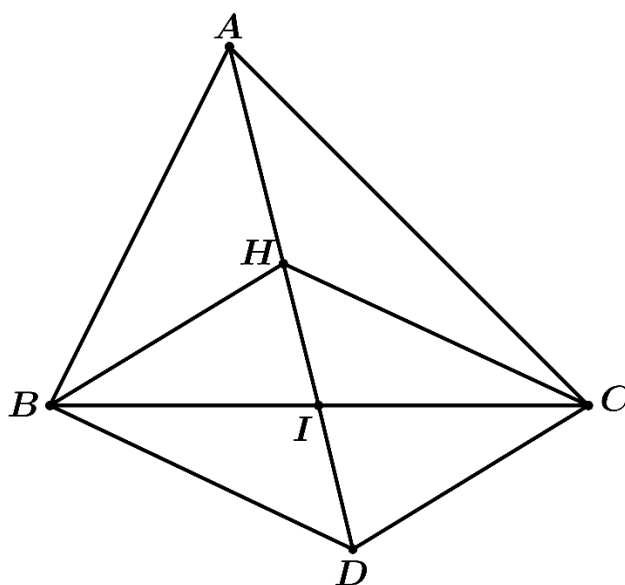
a) Có $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos B$.

b) Độ dài cạnh BC của tam giác ABC bằng $2\sqrt{209}$.

c) Diện tích tam giác ABC bằng $120\sqrt{2}$.

d) Gọi I là trung điểm của cạnh BC và H là trọng tâm của tam giác ABC và D đối xứng với điểm H qua I . Diện tích tam giác AHD là $60\sqrt{2}$.

Lời giải



a) Sai: Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos B$

b) Đúng: Tính độ dài cạnh BC của tam giác. Giả sử $m_a = 15, m_b = 18, m_c = 27$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \\ c^2 + a^2 = 2m_b^2 + \frac{b^2}{2} \\ a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \frac{c^2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2}a^2 + b^2 + c^2 = 2.15^2 \\ a^2 - \frac{1}{2}b^2 + c^2 = 2.18^2 \\ a^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2 = 2.27^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 836 \\ b^2 = 704 \\ c^2 = 164 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2\sqrt{209} \\ b = 8\sqrt{11} \\ c = 2\sqrt{41} \end{cases} .$$

Vậy độ dài cạnh BC của tam giác ABC bằng $2\sqrt{209}$.

c) Tính diện tích tam giác ABC .

Áp dụng công thức Hê rông tính diện tích ta có $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 120\sqrt{2}$.

d) Gọi I là trung điểm của cạnh BC và H là trọng tâm của tam giác ABC .

$$\text{Ta có: } \frac{S_{ABC}}{S_{HBC}} = \frac{AI}{HI} = 3 \Rightarrow S_{ABC} = 3S_{HBC} .$$

Lấy D là điểm đối xứng với H qua I ta được hình bình hành $BHCD$

$$\text{Do đó: } S_{HBC} = S_{BHD} = \frac{1}{2}S_{BHCD} \Rightarrow S_{ABC} = 3S_{BHD} .$$

Tam giác BHD có độ dài ba cạnh bằng 10,12,18 nên $S_{BHD} = \frac{1}{3}S_{ABC} = 40\sqrt{2}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC có $BAC = 60^\circ, AC = 20, AB = 25$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos C$.

b) Độ dài cạnh $BC = 5\sqrt{21}$.

c) Diện tích tam giác ABC và độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh B lần lượt $S_{ABC} = 125\sqrt{3}$ và

$$h_b = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

d) Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = 5\sqrt{6}$.

Lời giải

a) Sai : Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

b) Đúng : Xét tam giác ABC ta có: $BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB.AC.\cos A$

$$\Leftrightarrow BC^2 = 20^2 + 25^2 - 2.20.25.\cos 60^\circ \Leftrightarrow BC^2 = 525 \Leftrightarrow BC = 5\sqrt{21} . \text{ Vậy } BC = 5\sqrt{21} .$$

c) Đúng: Xét tam giác ABC ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC.\sin A$

$$\Leftrightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2}20.25.\sin 60^\circ \Leftrightarrow S_{ABC} = 125\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} h_b \cdot b \Rightarrow h_b = \frac{2S_{ABC}}{b} \Rightarrow h_b = \frac{2 \cdot 125\sqrt{3}}{20} \Rightarrow h_b = \frac{25\sqrt{3}}{4}$$

Vậy $S_{ABC} = 125\sqrt{3}$ và $h_b = \frac{25\sqrt{3}}{4}$.

d) Sai: Xét tam giác ABC ta có

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{a}{2\sin A} \Rightarrow R = \frac{5\sqrt{21}}{2\sin 60^\circ} \Rightarrow R = 5\sqrt{7}$$

Vậy $R = 5\sqrt{7}$.

Câu 4: Cho tam giác ABC có $AB = 8\sqrt{3}$, $B = 50^\circ$ và $A = 70^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $C = 50^\circ$.

b) Độ dài cạnh $AC \approx 12,26$.

c) Bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ là 6.

d) Gọi N là điểm thuộc cạnh AB sao cho $3AN = NB$ thì diện tích tam giác ACN bằng 29,95.

Lời giải

a) Sai: Xét $\triangle ABC$ có $A + B + C = 180^\circ \Leftrightarrow C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - (50^\circ + 70^\circ) = 60^\circ$.

b) Đúng : Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC , ta có $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B}$

$$\Leftrightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin B}{\sin C} \approx 12,26.$$

c) Sai: Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC

Ta có: $\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2\sin 60^\circ} = \frac{8\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 8.$

d) Sai: Ta có: $AN = \frac{1}{4}AB = 2\sqrt{3}$. Khi đó $S_{\triangle ACN} = \frac{1}{2}AN \cdot AC \cdot \sin A \approx 19,95$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng 3. Góc $BAD = 30^\circ$. Tính diện tích hình thoi $ABCD$.

Lời giải

Ta có: $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{\triangle ABD} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin BAD = 3 \cdot 3 \cdot \sin 30^\circ = \frac{9}{2} = 4,5.$

Câu 2: Cho tam giác ABC vuông tại A , biết $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm}$ và M là trung điểm của BC . Tính bán kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABM (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có: $AB = 6\text{ cm}$, $AC = 8\text{ cm} \Rightarrow BC = 10\text{ cm}$, $AM = BM = \frac{1}{2}BC = 5\text{ cm}$ và $p = \frac{6+5+5}{2} = 8$

$$S_{ABM} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 12; S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{5.5.6}{4.12} = \frac{25}{8} \approx 3,13$$

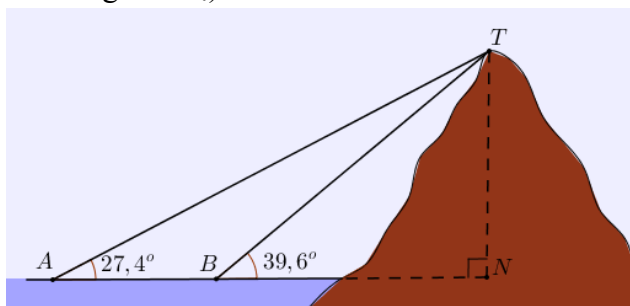
Câu 3: Tam giác ABC vuông cân tại A và nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Gọi r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Tính tỉ số $\frac{R}{r}$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Giả sử $AB = AC = a \Rightarrow BC = a\sqrt{2} \Rightarrow R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Mặt khác $S = pr = \frac{AB.AC}{2} \Leftrightarrow \frac{2a + a\sqrt{2}}{2} r = \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow r = \frac{a}{2 + \sqrt{2}}$ suy ra $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{2} \approx 2,41$.

Câu 4: Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đền tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đền tín hiệu cách nhau 1536 m thì ngọn núi cao bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Ta có $ATB = TBN - TAN = 12,2^\circ$.

Áp dụng định lí sin cho tam giác TAB : $\frac{TB}{\sin TAB} = \frac{AB}{\sin ATB} \Rightarrow TB = \frac{AB \cdot \sin TAB}{\sin ATB}$.

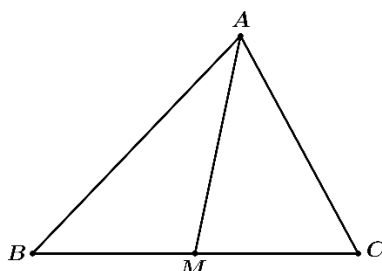
Xét tam giác vuông TBN ta có:

$$TN = TB \cdot \sin TBN = \frac{AB \cdot \sin TAB \cdot \sin TBN}{\sin ATB} = \frac{1536 \cdot \sin 27,4^\circ \cdot \sin 39,6^\circ}{\sin 12,2^\circ} \approx 2132,14.$$

Vậy chiều cao ngọn núi xấp xỉ 2132 m.

Câu 5: Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 10m, b = 8m, c = 6m$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải



Gọi M là chân đường phân giác trong của góc A . Vì đoạn thẳng AM chia tam giác ABC thành hai phần nên ta có:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin BAC = \frac{1}{2} AB \cdot AM \cdot \sin BAM + \frac{1}{2} AC \cdot AM \cdot \sin MAC$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 90^\circ}{(AB + AC) \cdot \sin 45^\circ} \Leftrightarrow AM = \frac{24\sqrt{2}}{7}. \text{ Vậy } AM = \frac{24\sqrt{2}}{7} \approx 4,83$$

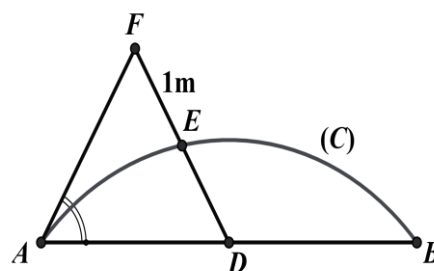
Câu 6: Cho tam giác ABC , biết $b = 7, c = 5, \cos A = \frac{3}{5}$. Biết rằng bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC có dạng $r = a - \sqrt{b}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a - 2b$

Lời giải

$$\text{Ta có: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A = 7^2 + 5^2 - 2 \cdot 7 \cdot 5 \cdot \frac{3}{5} = 32 \Rightarrow a = 4\sqrt{2} \Rightarrow p = \frac{a+b+c}{2} = 6 + 2\sqrt{2}$$

$$S = pr \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{14}{6 + 2\sqrt{2}} = 3 - \sqrt{2} \text{ suy ra } a = 3, b = 2 \Rightarrow a - 2b = -1.$$

Câu 7: Mặt tiền nhà ông An có chiều ngang $AB = 4m$, ông An muốn thiết kế lan can nhô ra có dạng là một phần của đường tròn (C) (hình vẽ). Vì phía trước vương cây tại vị trí F nên để an toàn, ông An cho xây đường cong cách $1m$ tính từ trung điểm D của AB . Biết $AF = 2m$, $DAF = 60^\circ$ và lan can cao $1m$ làm bằng inox với giá $2,2$ triệu/ m^2 . Tính số tiền ông An phải trả (làm tròn đến hàng nghìn).



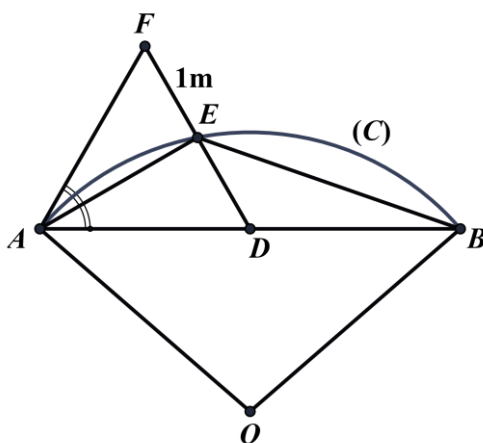
Lời giải

Theo giả thiết, ta có $\triangle AFD$ đều nên $FD = 2m$ suy ra $ED = 1m$, $EAD = 30^\circ$ và $EDB = 120^\circ$.

$$\text{Trong tam giác } \triangle EDB \text{ có } EB^2 = DE^2 + DB^2 - 2DE \cdot DB \cdot \cos 120^\circ = \sqrt{7}.$$

Gọi R là bán kính của đường tròn (C) tâm O , áp dụng định lý sin trong tam giác $\triangle AEB$ ta có

$$\frac{EB}{\sin EAD} = 2R \text{ suy ra } R = \sqrt{7}.$$

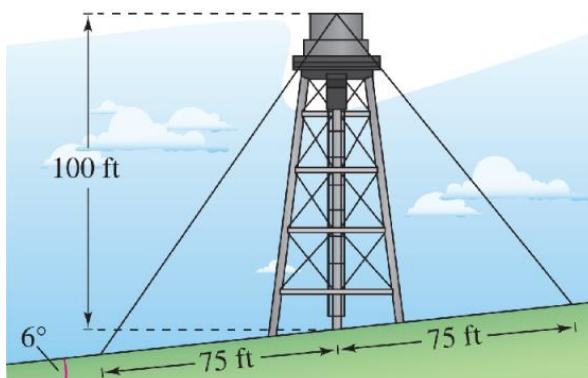


Xét tam giác OAB có $R = OA = OB = \sqrt{7}$, $AB = 4$, suy ra $\cos AOB = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = -\frac{1}{7}$.

Khi đó $AOB \approx 98,2^\circ$ suy ra độ dài dây cung (C) xấp xỉ $4,54m$.

Vì chiều cao của lan can là $1m$ và giá kính là $2,2$ triệu/ m^2 nên số tiền ông An phải trả xấp xỉ $9,977$ triệu đồng

Câu 8: Một tháp nước được xây dựng trên một con dốc có độ nghiêng là 6° . Để tháp đứng thẳng, người ta dùng hai sợi cáp cố định tháp như hình vẽ. Biết rằng tháp cao 100 ft và khoảng cách từ chân tháp ra đến chỗ cố định dây cáp là 75 ft . Tính chiều dài sợi dây cáp bên trái (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)



Lời giải

Ta gọi A, B, C lần lượt là đỉnh tháp, chân tháp và chân sợi dây cáp bên trái.

Khi đó, ta có: $AB = 100\text{ ft}$, $BC = 75\text{ ft}$ và $ABC = 96^\circ$.

Theo định lí Cosin ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC$

Suy ra $AC = \sqrt{100^2 + 75^2 - 2 \cdot 100 \cdot 75 \cdot \cos 96^\circ} \approx 131,1$.

Vậy chiều dài sợi dây cáp bên trái bằng $131,1$ mét

-----HẾT-----

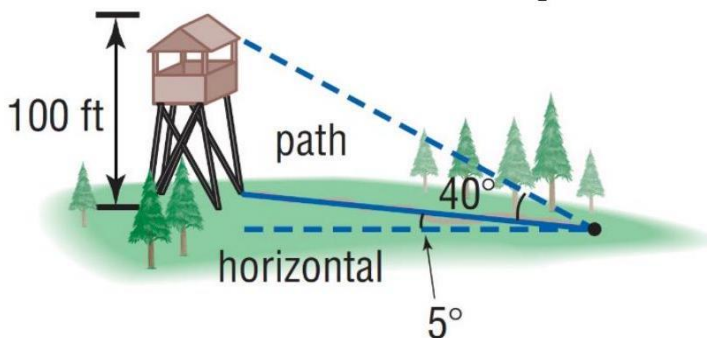
Dạng 4: Ứng dụng hệ thức lượng để giải các bài toán thực tế

Phương pháp: Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác

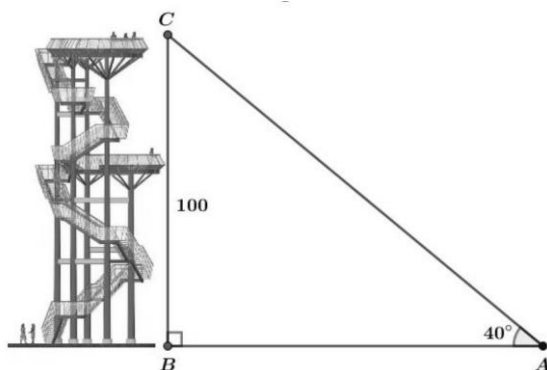
Sử dụng các công thức tính diện tích, định lý cosin, định lý sin trong tam giác.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Một nhân viên kiểm lâm đang đi trên đường nghiêng một góc 5° so với đường thẳng đứng để hướng về tháp quan sát cao 100 feet. Góc độ cao từ chân lên đỉnh tháp là 40° . Tính khoảng cách từ nhân viên kiểm lâm đến chân tháp vào thời điểm đó.



Lời giải

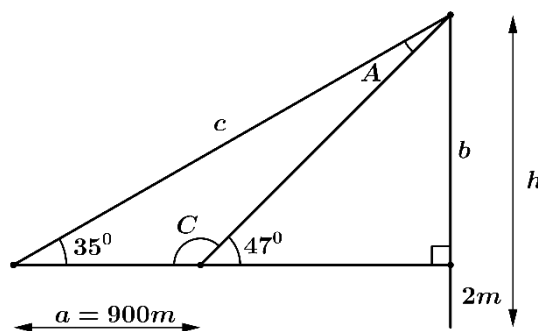


Giả sử nhân viên kiểm lâm tại thời điểm đó đang đứng tại điểm A , ta kí hiệu chân tháp là B và đỉnh tháp là C .

Xét $\triangle ABC$ vuông tại B có $A = 40^\circ$ và $BC = 100$ nên $AB = \frac{BC}{\tan A} = \frac{100}{\tan 40^\circ} \approx 119,175\text{ft}$.

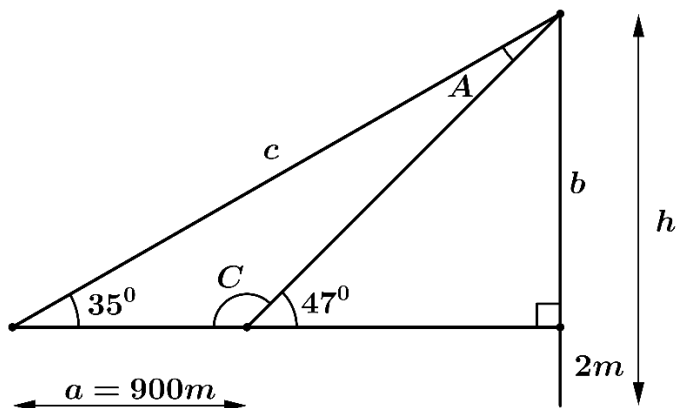
Vậy khoảng cách từ nhân viên đến chân tháp vào thời điểm đó xấp xỉ 119,175ft.

Bài tập 2: Để đo được chiều cao của một ngọn núi, một nhân viên trắc địa nhìn đỉnh núi tại hai vị trí cách nhau 900 mét nằm trên một đường thẳng đến ngọn núi (quan sát hình minh họa). Lần quan sát đầu tiên người này nhìn đỉnh núi với một góc nâng là 47° và lần thứ hai nhìn đỉnh núi với một góc nâng là 35° . Giả sử máy toàn đạc cao 2 mét, tìm chiều cao h của ngọn núi.



Lời giải

Ta mô hình hóa bài toán trên bằng hình vẽ như sau với h là chiều cao của ngọn núi.



Ta có: $C = 180^\circ - 47^\circ = 133^\circ$.

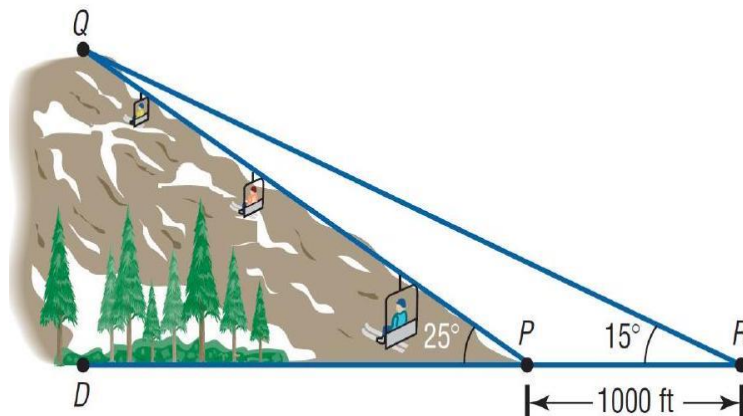
Mặt khác: $\hat{C} + \hat{A} + 35^\circ = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{A} = 180^\circ - 35^\circ - 133^\circ = 12^\circ$.

Áp dụng định lý sin ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Leftrightarrow c = \frac{900 \cdot \sin 133^\circ}{\sin 12^\circ} \approx 3165,8553$ (mét).

Mà $\sin 35^\circ = \frac{b}{c} \Rightarrow b = c \sin 35^\circ \approx 1815,8600$ (mét).

Vậy chiều cao của ngọn núi là: $h \approx 1815,8600 + 2 \approx 1817,860$ (mét).

Bài tập 3: Xác định độ dài của cáp treo trượt tuyết và độ cao của núi (tham khảo hình vẽ)



Để xác định chiều dài của cáp treo trượt tuyết cần lắp đặt từ điểm P đến điểm Q , một nhân viên trắc địa đo được DPQ bằng 25° , sau đó anh ta đi xa ra một đoạn 1000 feet tới điểm R và đo được PRQ bằng 15° .

a) Tính khoảng cách từ điểm P đến điểm Q ?

b) Tính chiều cao QD của núi?

Lời giải

a) Ta có: $DPQ = PQR + QRP \Rightarrow PQR = DPQ - QRP = 25^\circ - 15^\circ = 10^\circ$.

Áp dụng định lý sin trong tam giác PQR ta có:

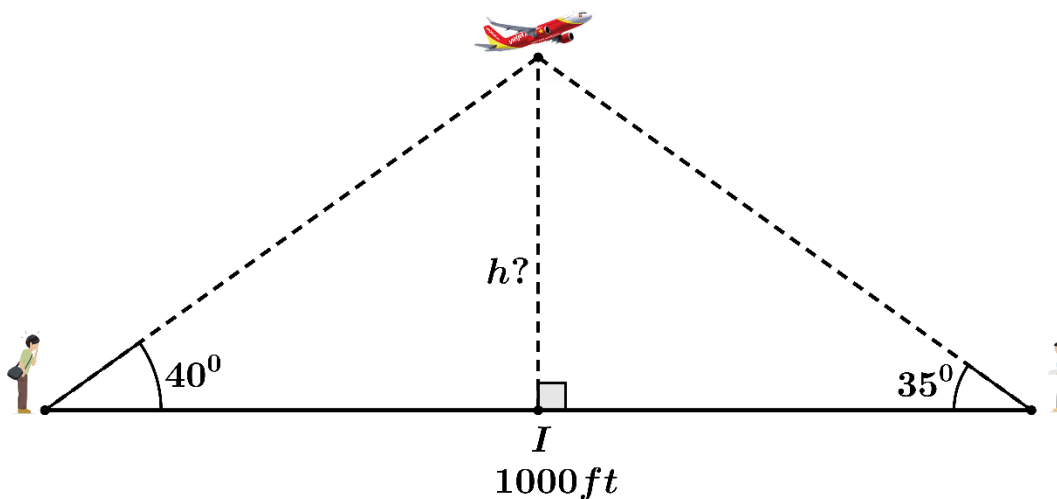
$$\frac{PR}{\sin PQR} = \frac{PQ}{\sin QRP} \Rightarrow PQ = \frac{PR \cdot \sin QRP}{\sin PQR} = \frac{1000 \cdot \sin 15^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 1490,479 \text{ (feet)}$$

Vậy khoảng cách giữa hai điểm P và Q là 1490,479 (feet).

b) Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông PQD ta có:

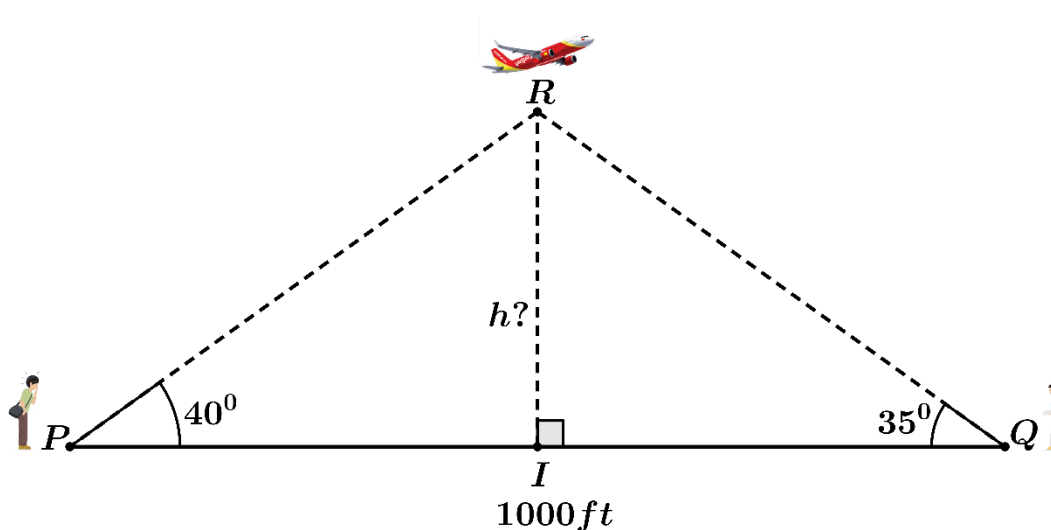
$$QD = PQ \cdot \sin QPD = 1490,479 \cdot \sin 25^\circ = 629,904 \text{ (feet)}$$

Bài tập 4: Một chiếc máy bay của hãng hàng không VietJet được quan sát bởi hai người điều khiển không lưu cách nhau 1000 ft trên mặt đất. Máy bay bay trên đường nối liền giữa hai người và mỗi người quan sát nó theo một góc nâng được chỉ ra trong hình vẽ. Hỏi độ cao của chiếc máy bay so với mặt đất là bao nhiêu?



Lời giải

Mô hình bài toán như hình vẽ:



Trong ΔPRI có: $\cot RPI = \frac{PI}{RI} \Rightarrow PI = RI \cdot \cot 40^\circ$.

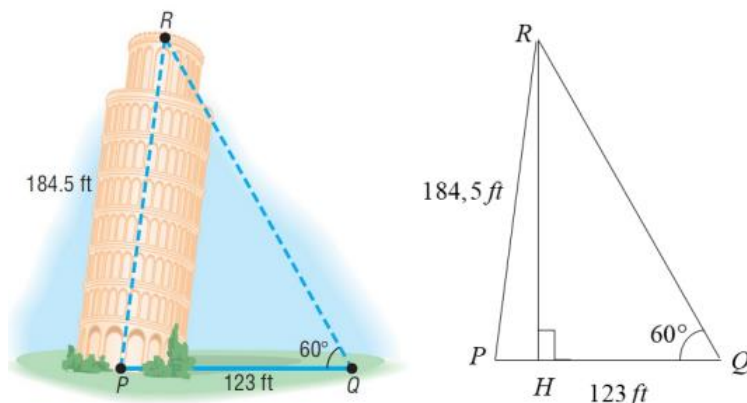
Trong ΔRQI có: $\cot RQI = \frac{QI}{RI} \Rightarrow QI = RI \cdot \cot 35^\circ$.

Từ đó ta được: $PQ = PI + QI = RI \cdot \cot 40^\circ + RI \cdot \cot 35^\circ \Rightarrow PQ = RI \cdot (\cot 40^\circ + \cot 35^\circ)$

$$\Rightarrow RI = \frac{PQ}{\cot 40^\circ + \cot 35^\circ} = \frac{1000}{\cot 40^\circ + \cot 35^\circ} \approx 381,694 \text{ (ft)}.$$

Vậy độ cao của máy bay so với mặt đất là 381,694 (ft).

Bài tập 5: Tìm độ nghiêng của tháp nghiêng Pisa. Tháp nghiêng Pisa nổi tiếng có chiều cao là 184,5 feet. Góc nâng nhìn từ điểm Q cách chân tháp P một khoảng 123 feet lên đỉnh R của tháp có số đo là 60° . Tìm số đo góc RPQ (như hình vẽ) và tìm khoảng cách từ đỉnh R của tháp đến đường thẳng PQ .



Cách 1: Theo định lí cosin ta có: $RP^2 = QP^2 + QR^2 - 2QP \cdot QR \cdot \cos 60^\circ$

$$\Rightarrow (184,5)^2 = (123)^2 + QR^2 - 2 \cdot 123 \cdot QR \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow QR = 212,1436(\text{ft}).$$

Áp dụng hệ quả của định lí cosin ta có:

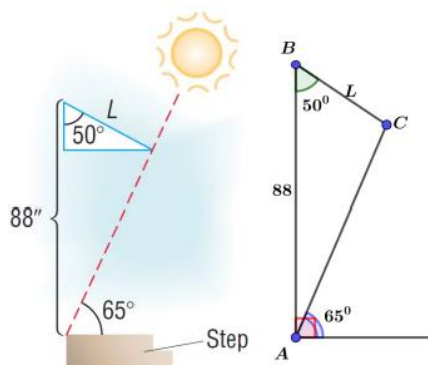
$$\cos RPQ = \frac{PR^2 + PQ^2 - RQ^2}{2 \cdot PR \cdot PQ} \approx \frac{(184,5)^2 + (123)^2 - (212,1436)^2}{2 \cdot 184,5 \cdot 123} \approx 0,0918 \Rightarrow RPQ \approx 84^\circ 44'.$$

Gọi H là chân đường cao kẻ từ R đến PQ .

$$\text{Ta có } \sin 60^\circ = \frac{RH}{RQ} \Rightarrow RH = RQ \cdot \sin 60^\circ = 183,722(\text{ft}).$$

Vậy khoảng cách từ đỉnh R của tháp đến đường thẳng PQ là $RH \approx 183,722\text{ft}$.

Bài tập 6: Một mái hiên che cửa kính có độ cao 88 inch và tạo với vách tường một góc 50° . Mục đích của mái hiên là che được ánh nắng mặt trời chiếu vào nhà khi góc giữa tia sáng mặt trời với mặt đất lớn hơn 65° . Xem hình vẽ dưới đây. Tính độ dài L của mái hiên.



Lời giải

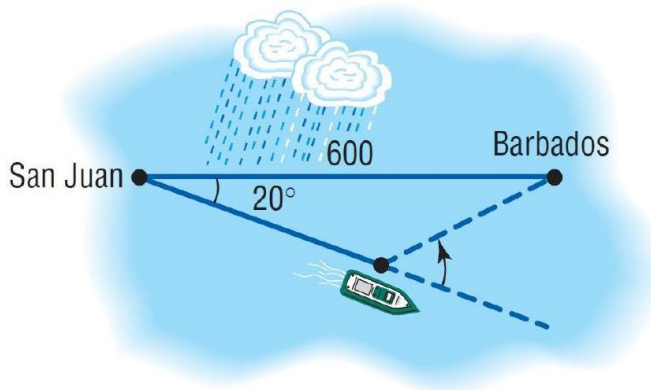
Ta có $BAC = 25^\circ; ACB = 105^\circ$.

$$\text{Áp dụng định lý sin vào tam giác } ABC : \frac{AB}{\sin ACB} = \frac{BC}{\sin BAC} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin 25^\circ}{\sin 105^\circ} \approx 12,001.$$

Vậy chiều dài L của mái hiên xấp xỉ 12,001 inch.

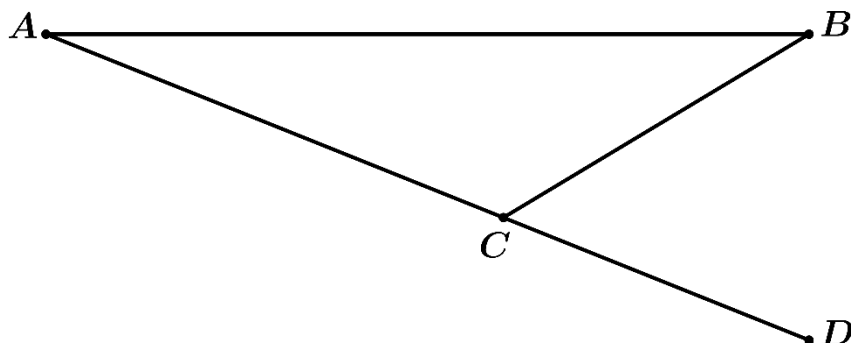
Bài tập 7: Một tàu du lịch chạy với tốc độ trung bình 15 hải lý/giờ khi đi từ San Juan, Puerto Rico, đến Barbados, Tây Ấn Độ, với khoảng cách 600 hải lý. Để tránh một cơn bão nhiệt đới, thuyền trưởng cho thuyền rời San Juan theo hướng lệch một góc 20° so với hướng đi thẳng đến Barbados. Thuyền trưởng duy trì tốc độ 15 hải lý/giờ trong 10 giờ, sau đó thuyền trưởng cho tàu đi thẳng đến Barbados mà không gặp bão.

- Tính góc mà thuyền trưởng quay đầu để đi thẳng đến Barbados?
- Tính từ sau khi rẽ, nếu tốc độ được duy trì ở mức 15 hải lý/giờ thì sau bao lâu con tàu đến Barbados?



Lời giải

Gọi A là vị trí San Juan; B là vị trí Barbados; C là vị trí tàu sau 10 giờ.



a) Ta có $AB = 600$ (hải lý); $BAC = 20^\circ$.

Quãng đường tàu đi được trong 10 giờ đầu là $AC = 15 \cdot 10 = 150$ (hải lý)

Áp dụng định lý cosin cho ΔABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos BAC \Rightarrow BC \approx 461,9040 \text{ (hải lý)}$$

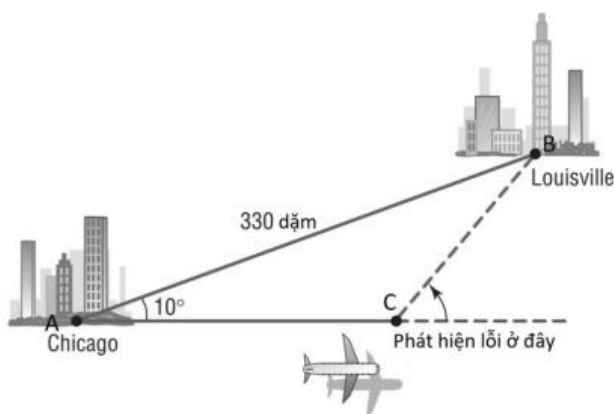
$$\text{Khi đó } \cos ACB = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} \approx -0,8959 \Rightarrow ACB \approx 153,6243^\circ$$

$$\Rightarrow BCD = 180^\circ - ACB \approx 26,3757^\circ \text{ Kđ.}$$

Vậy thuyền trưởng phải quay đầu một góc xấp xỉ $26,3757^\circ$.

b) Thời gian đi kể từ sau khi rẽ là $t = \frac{BC}{15} \approx 30$ giờ 48 phút.

Bài tập 8: Trong một chuyến bay thử nghiệm từ Chicago tới Louisville, khoảng cách là 330 dặm, viên phi công đã vô tình chọn hướng bay sai lệch đi một góc 10° như hình vẽ dưới đây.



- Nếu máy bay duy trì tốc độ trung bình 220 dặm một giờ và nếu lỗi sai về hướng bay được phát hiện ra sau 15 phút, thì viên phi công nên điều chỉnh hướng bay chệch lên theo góc nào để bay tới được Louisville?
- Viên phi công nên duy trì tốc độ trung bình tiếp theo của máy bay là bao nhiêu để cho tổng thời gian của chuyến bay là 90 phút?

Lời giải

Đổi 15 phút bằng $\frac{15}{60} = 0.25$ giờ.

Đến khi phát hiện ra lỗi sai, máy bay đã bay được một quãng đường là $AC = 0,25.220 = 55$ (dặm).

Khi đó, máy bay còn cách Louisville một khoảng là $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC}$
 $= \sqrt{330^2 + 55^2 - 2.330.55.\cos 10^\circ} \approx 276,0009$ (dặm).

a) Theo định lí sin ta có: $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Leftrightarrow \sin B = \frac{AC.\sin A}{BC} = \frac{55.\sin 10^\circ}{276,0009} \approx 0,0346$

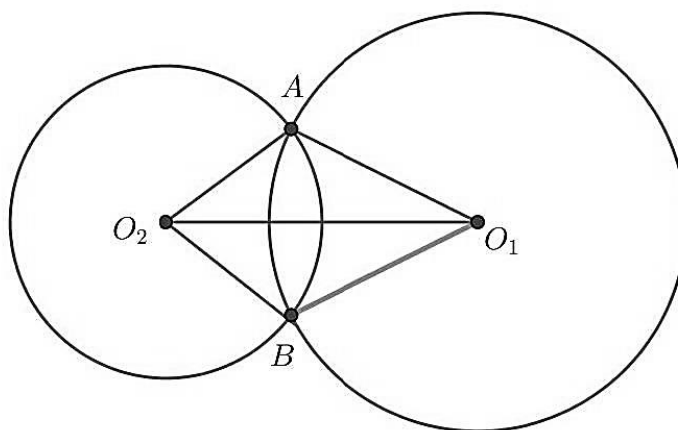
$\Rightarrow \hat{B} \approx 1,983^\circ$ (vì $AC < BC \Rightarrow \hat{B} < \hat{A} = 10^\circ < 90^\circ$).

Do đó, viên phi công cần điều chỉnh hướng bay một góc bằng $\hat{A} + \hat{B} = 11,98^\circ$ để bay thẳng tới Louisville.

b) Để tổng thời gian của chuyến bay là 90 phút, viên phi công nên duy trì tốc độ trung bình tiếp theo của máy bay là $\frac{276.0004}{1,5 - 0.25} \approx 220,8$ (dặm/giờ).

Bài tập 9: Người ta xây một sân khấu với sân có dạng của hai hình tròn giao nhau. Bán kính của hai hình tròn là 20 m và 15 m. Khoảng cách giữa hai tâm của hai hình tròn là 30 m. Chi phí làm mỗi mét vuông phần giao nhau của hai hình tròn là 300 nghìn đồng và chi phí làm mỗi mét vuông phần còn lại là 100 nghìn đồng. Hỏi số tiền làm mặt sân khấu là bao nhiêu?

Lời giải



Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của hai đường tròn bán kính 20m và 15 m . Với A, B là hai giao điểm của hai đường tròn.

Ta có: $O_1A = O_1B = 20$ m; $O_2A = O_2B = 15$ m; $O_1O_2 = 30$ m .

$$\cos \angle BO_1O_2 = \frac{O_1B^2 + O_1O_2^2 - O_2B^2}{2O_1B \cdot O_1O_2} = \frac{43}{48} \Rightarrow \angle BO_1O_2 \approx 26^\circ 23'$$

Theo tính chất hai đường tròn cắt nhau ta có O_1O_2 là tia phân giác $\angle AO_1B$

$$\Rightarrow \angle AO_1B = 2\angle BO_1O_2 = 52,77^\circ .$$

Suy ra diện tích hình quạt tròn O_1AB là $S_{O_1AB} = \pi \cdot 20^2 \cdot \frac{52,77}{360} \approx 184,2 \text{ (m}^2\text{)}$.

$$S_{\Delta O_1AB} = \frac{1}{2} O_1A \cdot O_1B \cdot \sin \angle AO_1B \approx 159,2 \text{ (m}^2\text{)} .$$

Gọi S_1 là diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung AmB trong đường tròn (O_1).

$$\Rightarrow S_1 = S_{O_1AB} - S_{\Delta O_1AB} = 25 \text{ (m}^2\text{)} .$$

Chứng minh tương tự ta được diện tích hình giới hạn bởi dây AB và cung AmB trong đường tròn (O_2) là $S_2 \approx 35 \text{ (m}^2\text{)}$ suy ra diện tích phần giao nhau là $S = S_1 + S_2 = 60 \text{ (m}^2\text{)}$.

\Rightarrow Chi phí làm sân khấu phần giao nhau $60 \cdot 300000 = 18000000$ (nghìn đồng).

Tổng diện tích của hai hình tròn là $S' = \pi 20^2 + \pi 15^2 \approx 1963 \text{ (m}^2\text{)}$.

Diện tích phần không giao nhau là $S' - S = 1903 \text{ (m}^2\text{)}$.

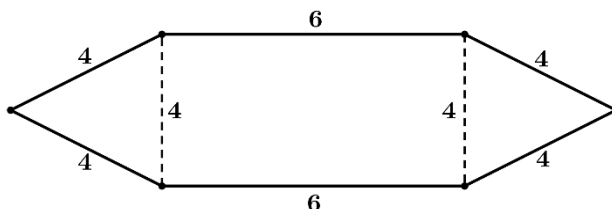
\Rightarrow Chi phí làm sân khấu phần không giao nhau $1903 \cdot 100000 = 190300000$ (nghìn đồng).

Số tiền làm mặt sân là $18000000 + 190000000 = 208300000 = 208,3$ triệu đồng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một miếng đất có hình dạng là một hình lục giác. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



Diện tích mảnh vườn là

- A. $24 + \sqrt{3}$. B. $24 + 4\sqrt{3}$. C. $12 + 8\sqrt{3}$. D. $24 + 8\sqrt{3}$.

Lời giải

Diện tích mỗi tam giác đều là: $\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$.

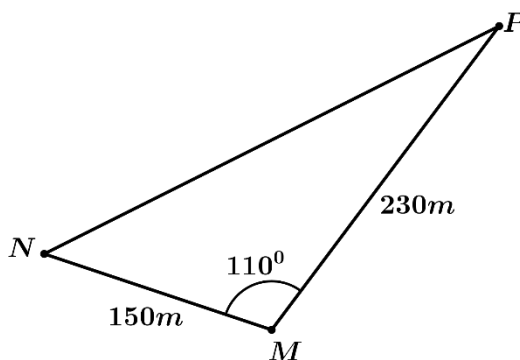
Diện tích hình chữ nhật là: $4 \cdot 6 = 24$.

Suy ra diện tích hình lục giác là: $24 + 2 \cdot 4\sqrt{3} = 24 + 8\sqrt{3}$.

Câu 2: Gia đình bạn An sở hữu một mảnh đất hình tam giác. Chiều dài của hàng rào MN là $150m$, chiều dài của hàng rào MP là $230m$. Góc giữa hai hàng rào MN và MP là 110° . Chiều dài hàng rào NP là.

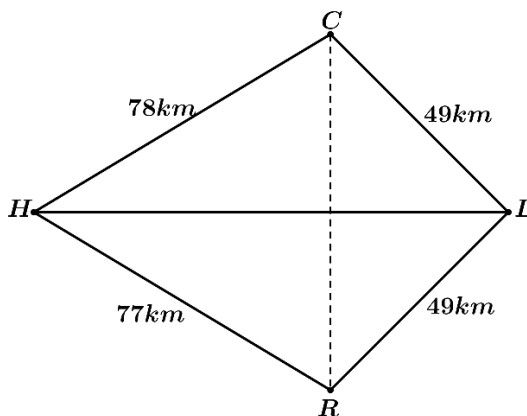
- A. $314,6m$. B. $310,6m$. C. $324,6m$. D. $321,6m$.

Lời giải



$$\begin{aligned} \text{Chiều dài hàng rào } NP : NP^2 &= MN^2 + MP^2 - 2MN \cdot MP \cdot \cos NMP \\ &= 150^2 + 230^2 - 2 \cdot 150 \cdot 230 \cdot \cos 110^\circ = 98999,4 (cm) \Rightarrow NP \approx 314,6 (m), \end{aligned}$$

Câu 3: Trên bản đồ địa lí, người ta thường gọi tứ giác với bốn đỉnh lần lượt là các thành phố Hà Tiên (H), Châu Đốc (C), Long Xuyên (L), Rạch Giá (R) là tứ giác Long Xuyên.



Châu Đốc (C) và Rạch Giá (R) cách nhau khoảng bao nhiêu km?

- A. 77,5(km). B. 74,5(km). C. 70,5(km). D. 80,5(km).

Lời giải

Trong tam giác HCL có: $HC^2 + CL^2 \neq HL^2$ và HL là cạnh lớn nhất của tam giác nên tam giác HCL không là tam giác vuông tại C .

Áp dụng hệ quả định lí côsin, ta có:

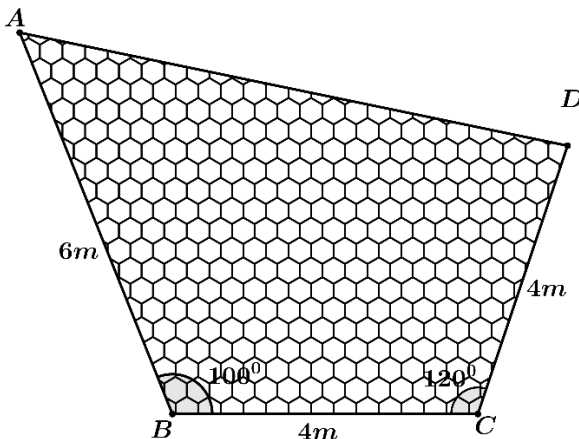
$$\cos CHL = \frac{HC^2 + HL^2 - CL^2}{2.HC.HL} = \frac{78^2 + 104^2 - 49^2}{2.78.104} \approx 0,88 \Rightarrow CHL \approx 28^\circ.$$

$$\cos RHL = \frac{HL^2 + HR^2 - RL^2}{2.HC.HR} = \frac{77^2 + 104^2 - 56^2}{2.77.104} \approx 0,85 \Rightarrow RHL \approx 32^\circ.$$

Áp dụng định lí côsin, ta có: $CR^2 = HC^2 + HR^2 - 2.HC.HR.\cos CHR \approx 6007 \Rightarrow CR \approx 77,5$ (km)

Vậy Châu Đốc và Rạch Giá cách nhau khoảng 77,5 km.

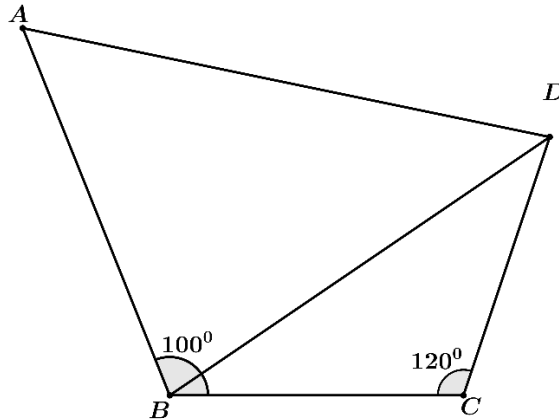
Câu 4: Người ta định lát gạch tổ ong trên mảnh đất hình tứ giác $ABCD$ như mô hình bên cạnh. Biết rằng $AB = 6m$, $BC = CD = 4m$, $ABC = 100^\circ$, $BCD = 120^\circ$ và giá lát gạch là 400 nghìn đồng trên một mét vuông bao gồm cả công thợ. Các mệnh đề sau đúng hay sai?



Số tiền để lát gạch cả mảnh đất đó là:

- A. 10583(VND). B. 10587(VND). C. 10593(VND). D. 10567(VND)

Lời giải



Nối BD , áp dụng định lý côsin trong tam giác ABC ta có:

$$BD = \sqrt{CD^2 + BC^2 - 2CD \cdot BC \cdot \cos BCD} \Leftrightarrow BD = \sqrt{16 + 16 - 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{48} \text{ m}.$$

Tam giác BCD cân tại $C \Rightarrow DBC = 30^\circ \Rightarrow ABD = 70^\circ$.

Áp dụng công thức tính diện tích tam giác ta có:

$$S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD \cdot \sin BCD = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 120^\circ = 4\sqrt{3} \text{ (m}^2\text{)}.$$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BD \cdot \sin ABD = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{48} \cdot \sin 70^\circ \approx 19,53 \text{ (m}^2\text{)}.$$

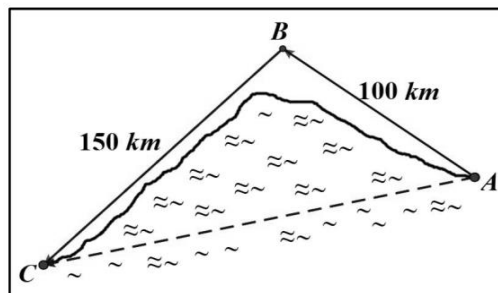
$$\Rightarrow S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} \approx 19,53 + 4\sqrt{3} \approx 26,46 \text{ (m}^2\text{)}.$$

Số tiền để lát gạch cả mảnh đất đó là: $26,46 \cdot 400 = 10584$ nghìn đồng.

Câu 5: Cho hai địa điểm A và C như hình vẽ. Biết $AB = 100$ (km), $BC = 150$ (km), $ABC = 100^\circ$. Bạn An muốn đi từ A đến C bằng một trong hai cách sau đây:

Cách 1: Đi tàu thủy từ A đến C với vận tốc 30km/h.

Cách 2: Đi xe hơi từ A đến B rồi từ B đến C với vận tốc 50(km/h).



Diện tích ΔABC là:

A. $S_{\Delta ABC} \approx 7386,06 \text{ (km}^2\text{)}.$

B. $S_{\Delta ABC} \approx 7387 \text{ (km}^2\text{)}.$

C. $S_{\Delta ABC} \approx 7385,06 \text{ (km}^2\text{)}.$

D. $S_{\Delta ABC} \approx 7384,06 \text{ (km}^2\text{)}.$

Lời giải

Áp dụng định lý côsin cho ΔABC ta có:

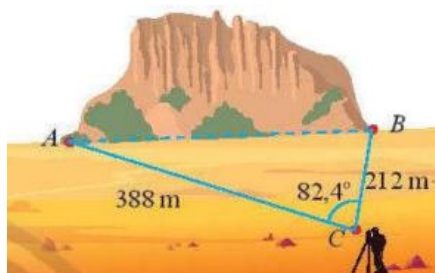
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC \Rightarrow AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC}$$

Theo định lý cosin ta có:

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos ABC} = \sqrt{100^2 + 150^2 - 2 \cdot 100 \cdot 150 \cdot \cos 100^\circ} \approx 194,19 \text{ (km)}$$

Diện tích tam giác ABC : $S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin ABC = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot 150 \cdot \sin 100^\circ \approx 7386,06 \text{ km}^2$

Câu 6: Một đường hầm được dự kiến xây dựng xuyên qua một ngọn núi. Để ước tính chiều dài của đường hầm, một kĩ sư thực hiện các phép đo đạc và cho ra kết quả như hình vẽ dưới.



Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

- A. 210. B. 211,35. C. 211,5. D. 212,35.

Lời giải

Áp dụng định lý côsin cho ΔABC ta có: $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos C$

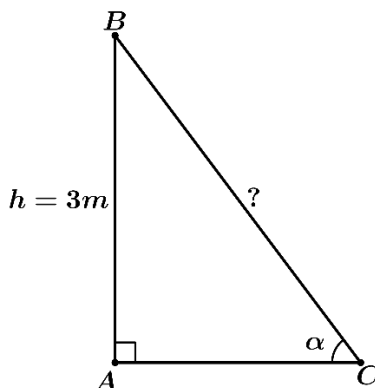
Áp dụng định lý côsin cho ΔABC ta có:

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot CB \cdot \cos C = 388^2 + 212^2 - 2 \cdot 388 \cdot 212 \cdot \cos 82,4^\circ = 173730,2367$$

$$\Rightarrow AB \approx 417 \text{ m.}$$

Theo định lí sin trong tam giác ABC , ta có: $\frac{AB}{\sin C} = 2R \Rightarrow R = \frac{AB}{2 \sin C} = \frac{417}{2 \sin 82,4^\circ} \approx 210,35 \text{ m}$

Câu 7: Nhà bạn Bình có gác lửng cao so với nền nhà là 3 m . Ba của bạn Bình cần đặt một chiếc thang đi lên gác, biết khi đặt thang phải để thang tạo với mặt đất một góc 70° thì đảm bảo sự an toàn khi sử dụng (như hình vẽ).



Chiều dài của chiếc thang cần làm là

- A. 3. B. 3,19. C. 3,5. D. 3,4.

Lời giải

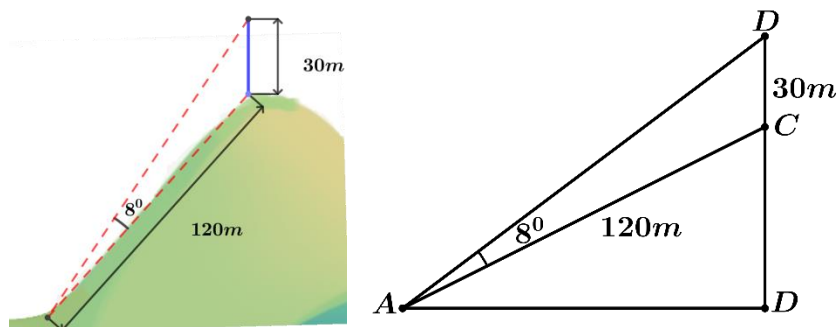
Theo tỉ số lượng giác của góc nhọn trong tam giác vuông ABC ta có $\sin \alpha = \frac{AB}{BC}$

Độ lớn góc $ACB = 70^\circ$

Xét tam giác ABC vuông tại A , ta có: $\sin \alpha = \frac{AB}{BC} \Rightarrow BC = \frac{AB}{\sin \alpha} = \frac{3}{\sin 70^\circ} \approx 3,19m$.

Vậy chiều dài của chiếc thang cần làm là $l \approx 3,19m$

Câu 8: Một tháp nước cao $30m$ ở trên đỉnh của một ngọn đồi. Từ tháp đến chân ngọn đồi dài $120m$ và người ta quan sát thấy góc tạo thành giữa đỉnh và chân tháp là 8° (như hình vẽ).



Tính diện tích ΔABC

- A. 1200. B. 1204,4. C. 1205,4. D. 1206.

Lời giải

Theo định lý sin trong tam giác ABC ta có $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = 2R \Rightarrow \sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC}$

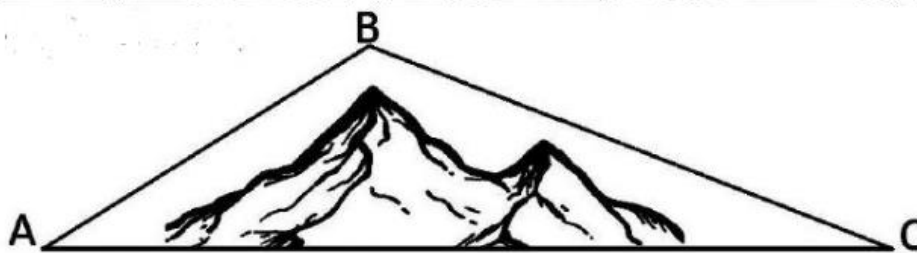
Ta có: $\sin B = \frac{AC \cdot \sin A}{BC} = \frac{120 \cdot \sin 8^\circ}{30} \approx 0,55 \Rightarrow ABC \approx 34^\circ$

Vì $ABC \approx 34^\circ$ nên $ACB = 180^\circ - ABC - ACB = 180^\circ - 8^\circ - 34^\circ = 138^\circ$.

Vậy diện tích tam giác ABC :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot CB \cdot CA \cdot \sin ACB = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 120 \cdot \sin 138^\circ \approx 1204,4 \text{ (đvdt)}$$

Câu 9: Giữa hai địa điểm AS và C là một ngọn núi cao. Để đi từ A đến C , các xe ô tô có thể chạy đường tránh gồm hai đoạn đường là đi thẳng từ A đến B rồi đi thẳng từ B đến C , hoặc chạy thẳng qua hầm chui nối từ A đến C . Biết rằng các đoạn đường này tạo thành tam giác ABC có $AB = 16 \text{ km}$, $AC = 33 \text{ km}$, $BAC = 45^\circ$.



Nếu ô tô đi thẳng qua hầm chui thì phải qua trạm thu phí qua hầm với mức giá 60.000 đồng được thu qua hình thức thu phí không dừng. Nếu ô tô đi qua đường tránh thì không mất phí. Nhiều phương tiện vẫn chọn đi đường tránh để không mất khoản phí qua hầm này. Một chiếc ô tô điện Vinfast VF e34 có thể đi được 300 km sau một lần sạc đầy. Khi đến A xe đã đi được 262 km kể từ lần sạc đầy gần nhất. Tại C có một trạm sạc điện, ngoài ra trên đường đi không có một trạm sạc nào. Tài xế kiểm tra tài khoản thu phí không dừng vẫn còn đủ tiền phí qua trạm và xe không có sạc dự phòng. Tính diện tích của tam giác ABC (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

- A. 189. B. 187. C. 185. D. 181.

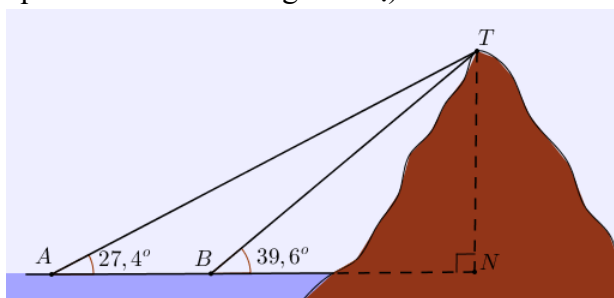
Lời giải

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

Ta có: $BC = \sqrt{16^2 + 33^2 - 2.16.33.\cos 45^\circ} \approx 24,46 \text{ km}$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin A = \frac{1}{2}.16.33.\sin 45^\circ \approx 187 \text{ (đvdt)}$

Câu 10: Các góc nhìn đến đỉnh núi so với mực nước biển được đo từ hai đèn tín hiệu A và B trên biển được thể hiện trên hình vẽ. Nếu các đèn tín hiệu cách nhau 1536 m. Khoảng cách từ điểm B đến cạnh AT là (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



- A. 705. B. 701. C. 707. D. 703.

Lời giải

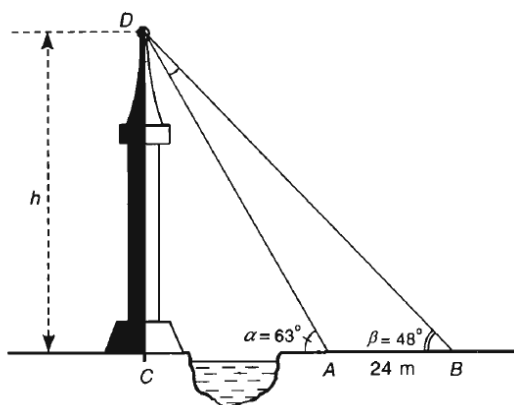
Ta có: $ATB = TBN - TAB = 12,2^\circ$; $ABT = 180^\circ - 39,6^\circ = 140,4^\circ$

Theo định lí sin ta có: $\frac{AT}{\sin 140,4^\circ} = \frac{AB}{\sin 12,2^\circ} \Rightarrow AT \approx 4633m$.

Diện tích tam giác ABT là: $S = \frac{1}{2}AT.AB.\sin 27,4^\circ \approx 1637457m^2$.

Ta có: $S_{\Delta ABT} = \frac{1}{2}AT.h_b \Rightarrow h_b = \frac{2S_{\Delta ABT}}{AT} \approx 707m$.

Câu 11: Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B và C thẳng hàng. Ta đo được $AB = 24 \text{ m}$, $CAD = 63^\circ$, $CBD = 48^\circ$. (Tham khảo hình vẽ bên dưới). Các mệnh đề sau đúng hay sai? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Chiều cao của tháp là

- A. 60. B. 62,4. C. 63,4. D. 61,4.

Lời giải

Xét tam giác ADB với $B = 48^\circ$ và $A = 180^\circ - 63^\circ = 117^\circ$.

Áp dụng công thức $D + B + A = 180^\circ \Rightarrow D = 180^\circ - (B + A) = 15^\circ$.

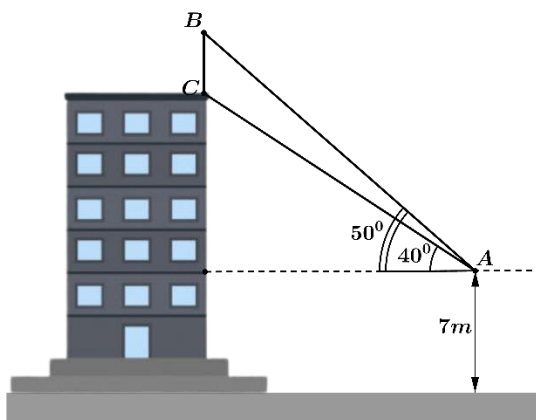
Áp dụng định lí sin, ta được: $\frac{AB}{\sin D} = \frac{AD}{\sin B} \Rightarrow AD = \sin B \cdot \frac{AB}{\sin D} = \sin 48^\circ \cdot \frac{24}{\sin 15^\circ} \approx 68,9 \text{ m}$.

Xét tam giác ADC vuông tại C với $A = 63^\circ$ và $AD = 68,9 \text{ m}$.

Áp dụng tỉ số lượng giác trong tam giác ADC vuông tại C , ta được:

$$\sin A = \frac{DC}{AD} \Rightarrow DC = AD \cdot \sin A \approx 61,4 \text{ m}$$

Câu 12: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là 50° và 40° so với phương nằm ngang (tham khảo hình vẽ dưới đây) (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Chiều cao của tòa nhà là

- A. 19,5. B. 18,9. C. 18,2 D. 18,5.

Lời giải

Chiều cao của tòa nhà $h = CD + DF$



Xét tam giác ABC với $BAC = 10^\circ; ABC = 40^\circ; ACB = 130^\circ$ và $BC = 5$ m.

Áp dụng định lí sin, ta có:

$$\frac{BC}{\sin BAC} = \frac{AC}{\sin ABC} \Rightarrow AC = \sin ABC \cdot \frac{BC}{\sin BAC} = \sin 40^\circ \cdot \frac{5}{\sin 10^\circ} \approx 18,5 \text{ m.}$$

Xét tam giác ADC vuông tại D với $CAD = 40^\circ$ và $AC = 18,5$ m.

Áp dụng tỉ số lượng giác ta có: $\sin CAD = \frac{DC}{AC} \Rightarrow DC = AC \cdot \sin A = 18,5 \cdot \sin 40^\circ \approx 11,9$ m.

Lại có: $DF = 7$ m. Vậy $h = CD + DF = 11,9 + 7 = 18,9$ m.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

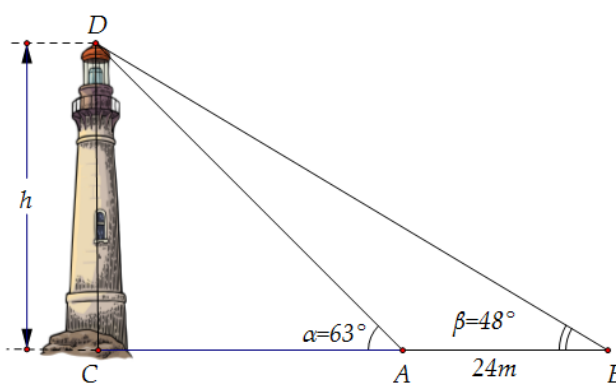
Câu 1: Cho tam giác ABC có các cạnh $a = 4, b = 5$ (giả thiết áp dụng cho câu a, b, c). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Công thức tính diện tích của ΔABC là $S = \frac{abc}{2R}$.

b) Diện tích ΔABC bằng $10\sqrt{3}$.

c) Chiều cao hạ từ đỉnh C của ΔABC bằng $\frac{10\sqrt{7}}{7}$.

d) Giả sử $CD = h$ là chiều cao của tháp trong đó C là chân tháp. Chọn hai điểm A, B trên mặt đất sao cho ba điểm A, B, C thẳng hàng như hình vẽ dưới đây. Giả sử $AB = 24$ m, $CAD = 63^\circ; CBD = 48^\circ$. Chiều cao h của khối tháp nhỏ hơn 62 (m).



Lời giải

a) Sai: Ta có: $S = \frac{abc}{4R}$.

b) Sai: Ta có: $S = \frac{1}{2} ab \sin C = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \sin 60^\circ = 5\sqrt{3}$.

c) Đúng: Ta có: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}$

$$\text{Diện tích khi đó: } S = \frac{1}{2}ch_c \Rightarrow h_c = \frac{2S}{c} = \frac{2.5\sqrt{3}}{\sqrt{21}} = \frac{10\sqrt{7}}{7}.$$

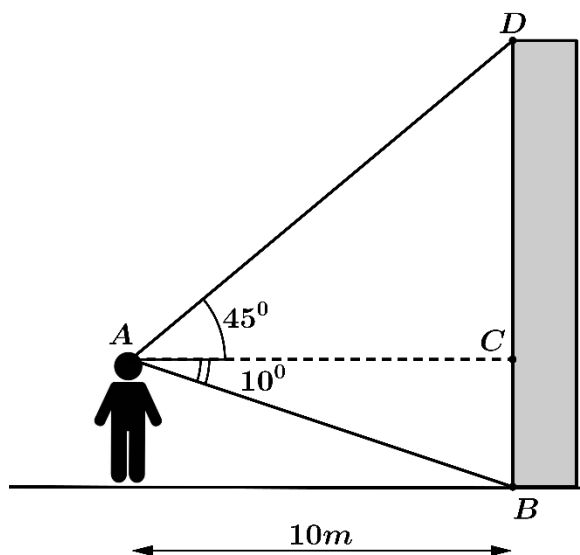
d) Đúng: Ta có $CAD = 63^\circ \Rightarrow BAD = 117^\circ \Rightarrow ADB = 180^\circ - (117^\circ + 48^\circ) = 15^\circ$

$$\text{Áp dụng định lý sin trong tam giác } ABD \text{ ta có: } \frac{AB}{\sin ADB} = \frac{BD}{\sin BAD} \Rightarrow BD = \frac{AB \cdot \sin BAD}{\sin ADB}$$

$$\text{Tam giác } BCD \text{ vuông tại } C \text{ nên có: } \sin CBD = \frac{CD}{BD} \Rightarrow CD = BD \cdot \sin CBD$$

$$\text{Vậy } CD = \frac{AB \cdot \sin BAD \cdot \sin CBD}{\sin ADB} = \frac{24 \cdot \sin 117^\circ \cdot \sin 48^\circ}{\sin 15^\circ} \approx 61,4(m)$$

Câu 2: Một người quan sát đứng cách một cái tháp 10(m), nhìn thẳng cái tháp dưới một góc 55° và được phân tích như trong hình. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- Số đo của góc $ADC = 45^\circ$
- Độ dài đoạn AB xấp xỉ bằng $10,15(m)$.
- Diện tích ΔACD bằng $100(m^2)$.
- Chiều cao của tháp xấp xỉ bằng $11,76(m)$.

Lời giải

a) Đúng: $ADC = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$.

b) Đúng: $\cos CAB = \frac{AC}{AB} \Rightarrow AB = \frac{10}{\cos 10^\circ} \approx 10,15(m)$.

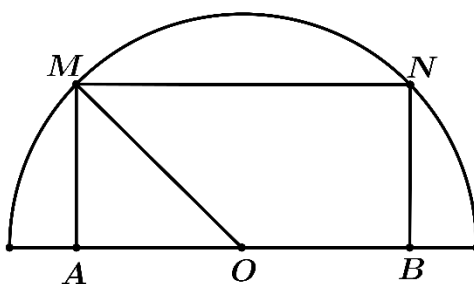
c) Đúng: $\cos CAD = \frac{AC}{AD} \Rightarrow AD = \frac{10}{\cos 45^\circ} \approx 10\sqrt{2}(m)$

Khi đó $S_{ACD} = \frac{1}{2}AD.AC \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 50(m^2)$.

d) Đúng: Ta có $S_{ABD} = \frac{1}{2}AD.AB \sin 55^\circ = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 10,15 \sin 55^\circ \approx 58,79(m^2)$

Mặt khác $S_{ABD} = \frac{1}{2}AC.BD \Rightarrow BD = \frac{2S_{ABD}}{AC} = \frac{2 \cdot 58,79}{10} \approx 11,76(m)$.

Câu 3: Nhà bác An có một khoảng đất trống phía trước nhà là nửa đường tròn bán kính $R = 1m$, bác muốn trồng hoa trên diện tích là hình chữ nhật nội tiếp trong nửa đường tròn sao cho một cạnh của hình chữ nhật nằm dọc theo đường kính của đường tròn. Giả sử khoảng đất được mô phỏng như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



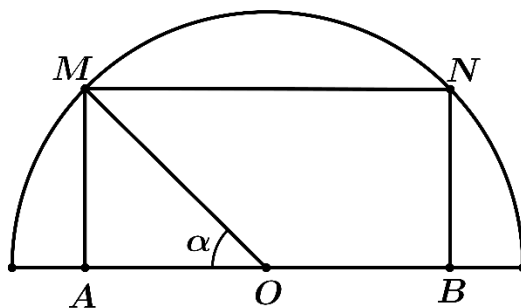
a) Độ dài đoạn $OM = 1(m)$.

b) Nếu $AM = 0,8(m)$ thì diện tích ΔAMO bằng $0,24(m^2)$.

c) Nếu $AM = 0,5m$ và chu vi hình chữ nhật $AMNB$ bằng $1 + 2\sqrt{3}(m)$ thì diện tích đất trồng hoa bằng $\sqrt{3}(m^2)$.

d) Nếu $\angle AOM = \alpha$, mảnh đất trồng hoa có diện tích lớn nhất khi $\alpha = 90^\circ$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $OM = R = 1(m)$.

b) Đúng: ΔAMO có $OM = 1, AM = 0,8(m)$ suy ra $AO = \sqrt{1 - 0,8^2} = \frac{3}{5}(m)$

Vậy diện tích ΔAMO : $S = \frac{1}{2}AM.AO = \frac{1}{2} \cdot 0,8 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}(m^2)$

c) Sai: Ta có $2.(0,5 + AB) = 1 + 2\sqrt{3} \Leftrightarrow AB = \sqrt{3}(m)$; $S_{AMNB} = AB.AM = 0,5.\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}(m^2)$.

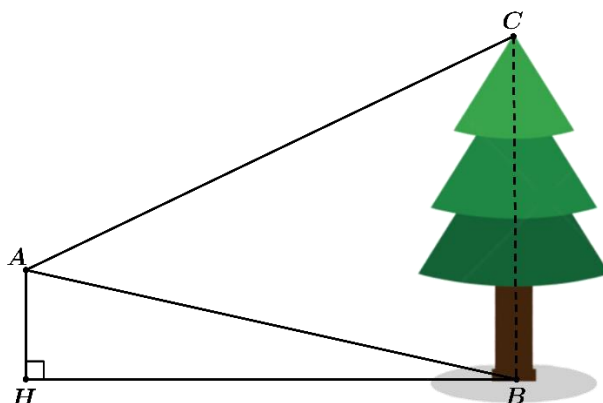
d) Ta có $\angle AOM = \alpha$, nên $MA = OM . \sin \alpha = \sin \alpha (m)$

$OA = OM . \cos \alpha = \cos \alpha (m)$ suy ra $AB = 2OA = 2 \cos \alpha$.

Vậy diện tích $AMNB$: $S_{AMNB} = AM . AB = 2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$

Do $0 \leq \sin 2\alpha \leq 1$ nên diện tích mảnh đất trồng hoa lớn nhất là $1(m^2)$ khi $2\alpha = 90^\circ \Leftrightarrow \alpha = 45^\circ$

Câu 4: Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (tham khảo hình bên dưới). Biết rằng độ dài $AH = 4(m)$; $HB = 20m$, $\angle BAC = 45^\circ$.



a) Diện tích $\triangle AHB$ bằng $40(m^2)$.

b) Nếu $\angle ACB = 45^\circ$ thì độ dài đoạn $AC = 10(m)$.

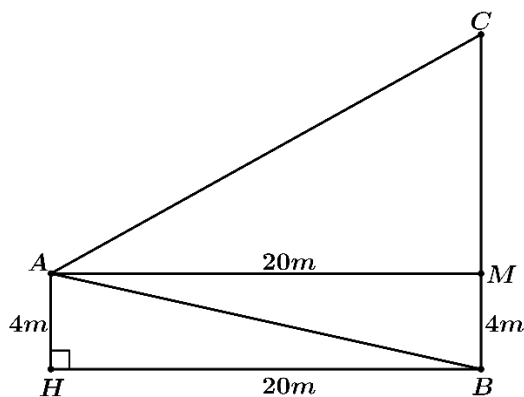
c) Số đo của góc $\angle ABC$ xấp xỉ $78^\circ 41'$.

d) Chiều cao của cây xấp xỉ bằng $17,33(m)$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $S_{\triangle AHB} = \frac{1}{2} AH . HB = \frac{1}{2} . 4 . 20 = 40(m^2)$.

b) Sai: Kẻ $AM \perp BC$ ta có $AM = HB = 20(m)$



Xét $\triangle AMC$ ta có $\sin ACM = \frac{AM}{AC} \Rightarrow AC = AM \cdot \sin 45^\circ = 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10\sqrt{2} (m)$.

c) Đúng: Ta có $\tan BAH = \frac{HB}{AH} = 5 \Rightarrow BAH \approx 78^\circ 41'$ mà $ABC = BAH = 78^\circ 41'$.

d) Đúng: Ta có $AB = \sqrt{AH^2 + HB^2} = \sqrt{4^2 + 20^2} = 4\sqrt{26} (m)$ và $ABC = BAH = 78^\circ 41'$

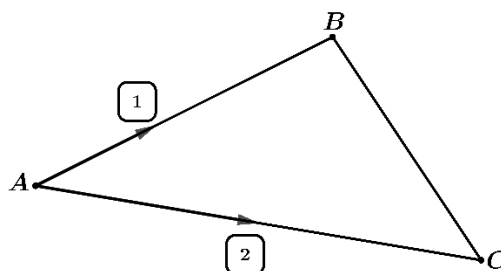
Suy ra: $ACB = 180^\circ - 45^\circ - 78^\circ 41' = 56^\circ 19'$

Áp dụng định lý sin cho tam giác ABC ta có :

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AB}{\sin C} \Rightarrow BC = \frac{AB \cdot \sin A}{\sin C} = \frac{4\sqrt{26} \cdot \sin 45^\circ}{\sin 56^\circ 19'} \approx 17,33(m).$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Hai chiếc xe cùng xuất phát ở vị trí A , đi theo hai hướng tạo với nhau một góc 60° . Xe thứ nhất chạy với tốc độ $30(km/h)$, xe thứ hai chạy với tốc độ $40(km/h)$ (tham khảo hình vẽ).



Sau thời gian 1,5 giờ thì khoảng cách của hai xe bằng (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có quãng đường xe thứ nhất đi sau 1,5 giờ là $S_1 = 30 \cdot 1,5 = 45(km)$ và quãng đường xe thứ hai đi sau 1,5 giờ là : $S_2 = 40 \cdot 1,5 = 60km$ nên ta có:

$$BC = \sqrt{45^2 + 60^2 - 2 \cdot 45 \cdot 60 \cdot \cos 60^\circ} = 15\sqrt{3} \approx 21,2(km)$$

Câu 2: Bác An cần đo khoảng cách từ một điểm trên bờ sông đến một điểm B ở giữa hồ mà không thể đến trực tiếp được. Bác sử dụng giác kế để chọn điểm C cùng nằm trên bờ với A sao cho $BAC = 30^\circ; ACB = 100^\circ$ và cạnh $AC = 50(m)$. Tính khoảng cách AB (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).

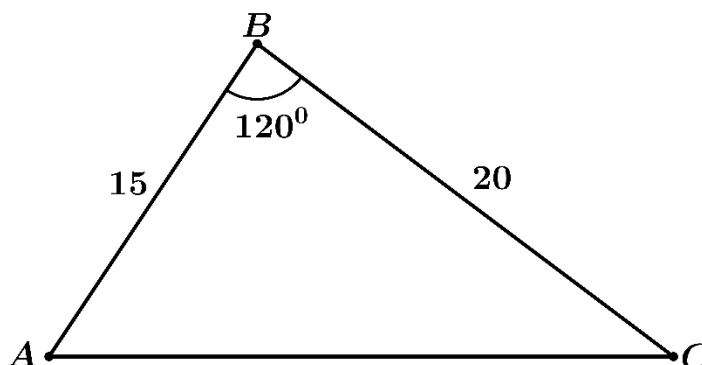
Lời giải

Ta có: $B = 180^\circ - (A + C) = 180^\circ - 30^\circ - 100^\circ = 50^\circ$

Áp dụng định lý sin ta có $\frac{AB}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AB = \frac{AC \cdot \sin C}{\sin B} = \frac{50 \cdot \sin 100^\circ}{\sin 50^\circ} \approx 64,3(m)$

Câu 3: Một ô tô muốn đi từ A đến C nhưng giữa A và C là một ngọn núi cao nên ô tô phải đi thành hai đoạn từ A đến B rồi từ B đến C , các đoạn đường tạo thành tam giác ABC có $AB = 15(km)$

$BC = 20(\text{km})$ và $\angle ABC = 120^\circ$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Giả sử ô tô chạy 5 km tốn một lít xăng, giá một lít xăng là 20.000 đồng. Nếu người ta làm một đoạn đường hầm xuyên núi chạy thẳng từ A đến C , khi đó ô tô chạy trên con đường này sẽ tiết kiệm được bao nhiêu nghìn đồng so với chạy trên đường cũ.



Lời giải

Quãng đường ô tô đi từ A đến C qua B là: $S_1 = AB + BC = 15 + 20 = 35(\text{ km})$.

Áp dụng định lý côsin vào tam giác ABC ta có: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC$
 $= 15^2 + 20^2 - 2 \cdot 15 \cdot 20 \cdot \cos 120^\circ = 925 \Rightarrow AC = 5\sqrt{37}(\text{ km})$.

Nếu đi theo đường hầm thì quãng đường ô tô đi ít hơn là $S = S_1 - AC = 35 - 5\sqrt{37} \approx 4,6(\text{ km})$.

Ô tô tiết kiệm được số tiền là $\frac{4,6}{5} \cdot 20000 = 18400$ (đồng) hay 18,4 (nghìn đồng).

Câu 4: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5(m)$. Từ vị trí quan sát A cao $7(m)$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang như hình vẽ. Tính khoảng cách từ điểm A đến chân C của cột (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy)

Lời giải

Tam giác ABD vuông tại D có $\angle BAD = 50^\circ \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ - 50^\circ = 40^\circ$.

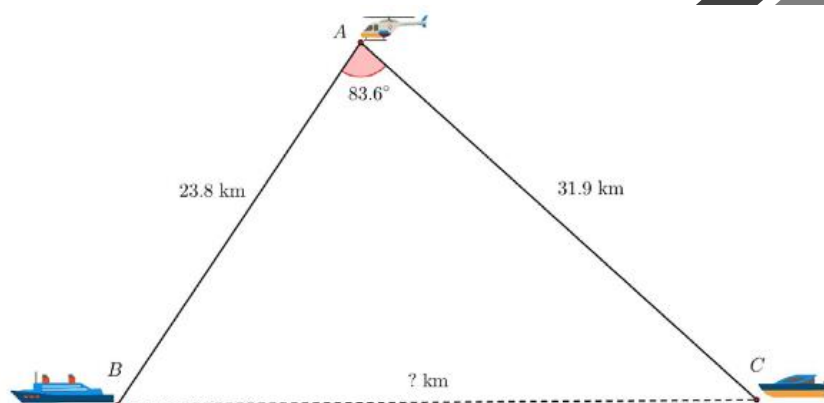
$\angle ACD = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ \Rightarrow \angle ACB = 180^\circ - \angle ACD = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$

Từ hình vẽ suy ra $\angle BAC = 10^\circ$ và $\angle ABC = 180^\circ - (\angle BAD + \angle ABD) = 180^\circ - (50^\circ + 90^\circ) = 40^\circ$

Áp dụng định lí sin trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin \angle ABC} \Rightarrow AC = \frac{BC \cdot \sin \angle ABC}{\sin \angle BAC} = \frac{5 \cdot \sin 40^\circ}{\sin 10^\circ} \approx 18,5(m)$$

Câu 5: Một máy bay trực thăng A quan sát hai tàu B và C , B cách trực thăng $23,8\text{km}$ và C cách trực thăng $31,9\text{ km}$. Góc nhìn $\angle BAC$ từ trực thăng đến hai tàu là $83,6^\circ$ như hình vẽ dưới đây. (Các kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Tính khoảng cách từ điểm A đến cạnh BC (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

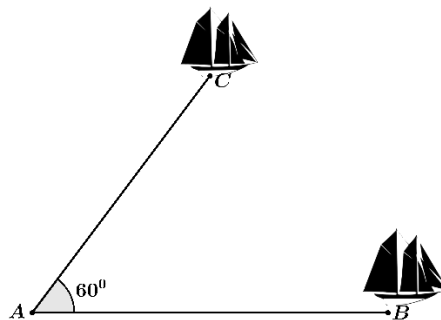
Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2} AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2} .23,8.31,9.\sin 83,6^\circ \approx 377 \text{ (km}^2\text{)}$.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos BAC = (23,8)^2 + (31,9)^2 - 2.23,8.31,9.\cos 83,6^\circ \approx 1415$$

$$\Rightarrow BC \approx 38 \text{ (km)}.$$

Khoảng cách từ A đến BC là: $\frac{2S_{\Delta ABC}}{BC} = \frac{2.377}{38} \approx 20 \text{ (km)}$.

Câu 6: Hai chiếc tàu thủy cùng xuất phát từ vị trí A, đi thẳng theo hai hướng hợp với nhau một góc 60° . Tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30km/h, tàu thứ hai chạy với tốc độ 40km/h. Sau 2h, tàu thứ nhất ở vị trí C, tàu thứ hai ở vị trí B (tham khảo hình vẽ dưới).



Gọi S là diện tích của tam giác ABC. Tính $\frac{S}{100\sqrt{3}}$.

Lời giải

Vị trí tàu thủy thứ nhất và tàu thủy thứ hai sau 2 giờ lần lượt ở vị trí C và B.

Do tàu thứ nhất chạy với tốc độ 30km/h nên $AC = 30.2 = 60 \text{ (km)}$.

Do tàu thứ hai chạy với tốc độ 40km/h nên $AB = 40.2 = 80 \text{ (km)}$.

Diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2} AB.AC.\sin A = \frac{1}{2} 60.80.\sin 60^\circ = 1200\sqrt{3} \text{ km}^2 \Rightarrow \frac{S}{100\sqrt{3}} = 12$

-----HẾT-----