

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

I LÝ THUYẾT.

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

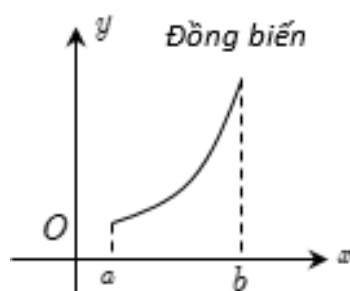
+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

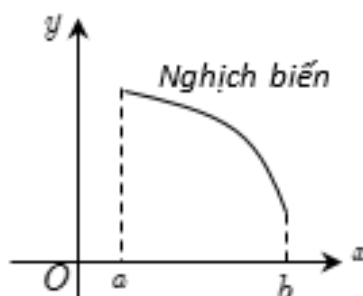
+) Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K .

Chú ý:

+ Nếu hàm số **đồng biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi lên.



+ Nếu hàm số **nghịch biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi xuống.



2. Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

+) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K .

+) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

3. Định lý: (Tổng quát) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

+) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K .

+) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

4. Lưu ý:

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì ta nói hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì ta nói hàm số nghịch biến trên đoạn $[a; b]$.

+) Tương tự với các khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến trên các nửa khoảng.

5. Sử dụng bảng biến thiên để xét tính đơn điệu của hàm số.

Để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D .

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

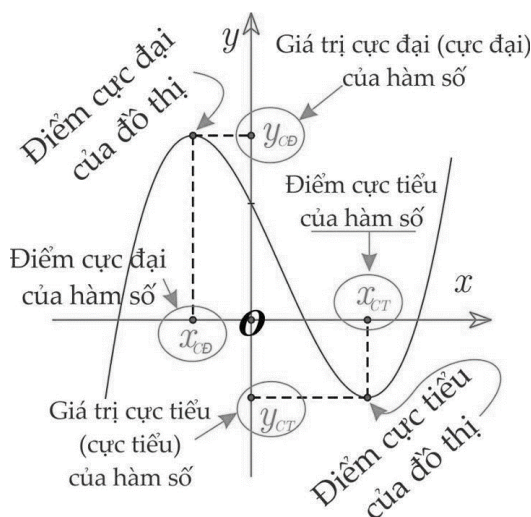
Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm, ta có thể sử dụng **Phương pháp sử dụng MTCT**.

Cách 1: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio. Quan sát bảng kết quả nhận được về tính tăng, giảm giá trị của $f(x)$ và dự đoán.

Cách 2: Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đối với bất phương trình bậc hai, bậc ba).

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ



1. Khái niệm cực trị của hàm số: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

*** Chú ý**

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số, kí hiệu là $f_{CD}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.

+) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại còn gọi là **cực đại** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

2. Cách tìm cực trị của hàm số

Định lí 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$.

+) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

+) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	a	x_0	b	x	a	x_1	b
$f'(x)$		+	-	$f'(x)$		-	+
$f(x)$		f_{CD}		$f(x)$		f_{CT}	

NHẬN XÉT:

Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D .

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC

Câu 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Câu 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$.

Câu 3: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 26x - 1$.

Câu 4: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x - 1$.

Câu 5: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Câu 6: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 + 4x^2$.

Câu 7: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 - 7$.

Câu 8: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{3x+1}{1-x}$.

Câu 9: Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{3-2x}{x+7}$.

Câu 10: Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x + 2}$.

Câu 11: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$.

Câu 12: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 - x + 5}{x + 2}$.

Câu 13: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - 1}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 14: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số: $y = \begin{cases} -x + 2 & \text{nếu } x < -1 \\ -2x^2 + 2x + 7 & \text{nếu } -1 \leq x \leq 2 \\ 3x - 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$.

Câu 15: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

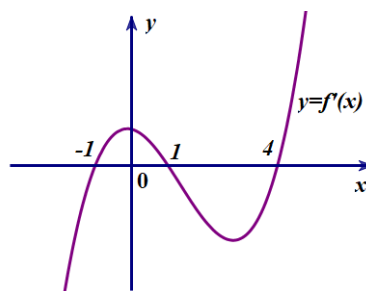
a) $y = |x^2 - 2x - 3|$.

b) $y = |x^2 - 4x + 3| + 4x + 3$.

Câu 16: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$.

DẠNG 2: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP CHO BỞI BBT HOẶC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ HOẶC $y = f'(x)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + 3$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(2x+1)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(-2x+6)$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

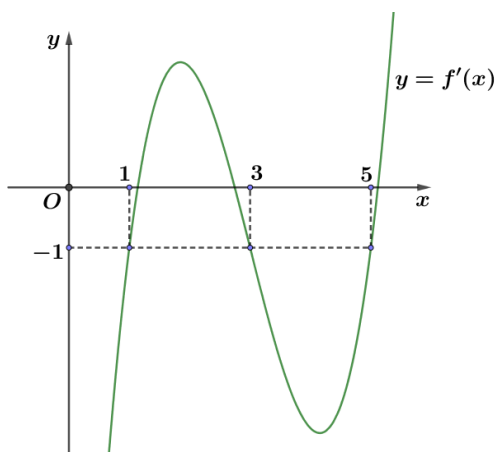
Hỏi hàm số $y = f\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6\right)$ nghịch biến trên các khoảng nào?

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

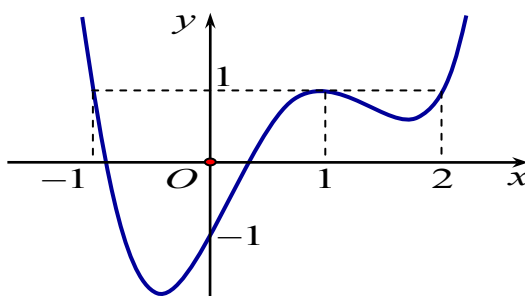
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(-x^2 + 2x)$?

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



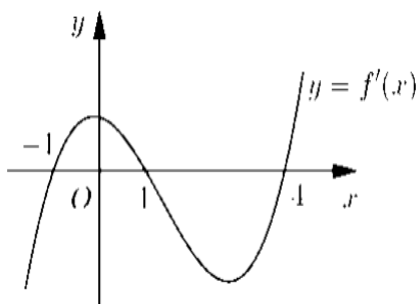
Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = f(x) + x + 1$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



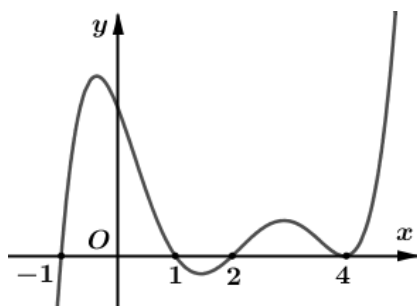
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x) - x + 2020$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(2x-4)$ nghịch biến trên khoảng nào?

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$					

Hỏi hàm số $y = f(f(x))$ đồng biến trên những khoảng nào?

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\frac{28}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$+\infty$

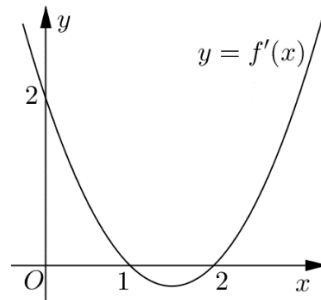
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = g(x) = f(4-2x) - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 6x + 1$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

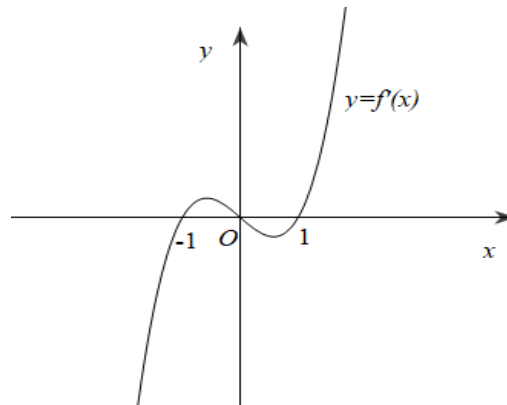
Biết $1 < f(x) < 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = g(x) = f(f(x)) + x^3 - 6x^2 - 1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng đồng biến?

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



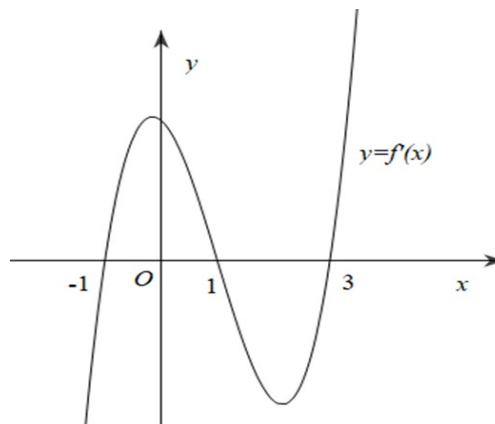
Hàm số $y = g(x) = f(1 + 2x - x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



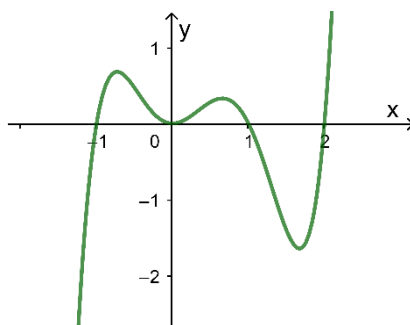
Hàm số $y = g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ đồng biến trên khoảng nào?

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(x-2) + \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 12x + 1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng nghịch biến?

DẠNG 3: TÌM ĐK CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN MỘT MIỀN CHO TRƯỚC.

Câu 33: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

1) $y = x^3 + 3x^2 + mx + m$ 2) $y = mx^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x - 2$

Câu 34: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 35: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x-m}{2x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Câu 36: Tìm m để hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định?

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3(m^2-1)x$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

Câu 38: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Câu 39: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3(m^2-1)x - 2m + 3$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 6(m^2-2)x$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x - 1 - 5m}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$?

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương không lớn hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1 + m}{5x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$?

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Câu 44: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 + x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

- Câu 45:** Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?
- Câu 46:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
- Câu 47:** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.
- Câu 48:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:
- Câu 49:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:
- Câu 50:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020;2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. Tính số phần tử của tập hợp S .
- Câu 51:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x-1}$ nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và đồng biến trên khoảng $(4;6)$.
- Câu 52:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m nằm trong đoạn $[-100;100]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;5)$.
- Câu 53:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-15;15)$ để hàm số $y = x^4 - 6x^2 - mx + 2526$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
- Câu 54:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2021;2021)$ để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$?
- Câu 55:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3(m+1)x - m - 1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;3]$.
- Câu 56:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$ nghịch biến trên đoạn $[2;3]$?
- Câu 57:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3(m+1)x - m - 1$ nghịch biến trên đoạn $[-1;3]$.
- Câu 58:** Cho hàm số $y = -x^3 + x^2 - mx + 5$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-50;50]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng?
- Câu 59:** Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
- Câu 60:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;2)$.

- Câu 61:** Tìm tất cả các giá thực của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6(m+2)x + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
- Câu 62:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{2x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- Câu 63:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{x + m}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$
- Câu 64:** Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + (m+2)x - 3m + 1}{x - 1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.
- Câu 65:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?
- Câu 66:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng
- Câu 67:** Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng
- Câu 68:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ sao cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 + (2m+1)x + 3m - 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?
- Câu 69:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1; 25]$ sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = \frac{-x^2 + 2x - m + 5}{2x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- Câu 70:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2; 25]$ sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = \frac{x^2 + 5x - m - 1}{5x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
- Câu 71:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-25; 3]$ sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = \frac{-x^2 + 4x - m - 5}{4x - m}$ đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$.
- Câu 72:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Câu 73:** Tìm m để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?
- Câu 74:** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ sao cho hàm số $y = x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- Câu 75:** Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- Câu 76:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- Câu 77:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.
- Câu 78:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.
- Câu 79:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m + 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
- Câu 80:** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x + m}{m \tan x + 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.
- Câu 81:** Tìm giá trị m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$?
- Câu 82:** Tìm m để hàm số $y = \frac{2\cot x + 1}{\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



LÝ THUYẾT.

I. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Khái niệm tính đơn điệu của hàm số.

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

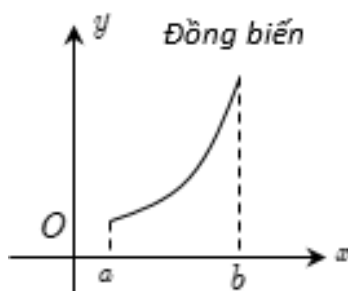
+) Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu

$$\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

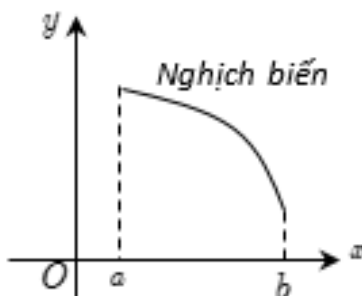
+) Hàm số đồng biến hoặc nghịch biến trên K được gọi chung là đơn điệu trên K .

Chú ý:

+ Nếu hàm số **đồng biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi lên.



+ Nếu hàm số **nghịch biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi xuống.



2. Định lý: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

+) Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K .

+) Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

3. Định lý: (Tổng quát) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $K \subset \mathbb{R}$, trong đó K là một khoảng, đoạn hoặc nửa khoảng.

+) Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng K .

+) Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ xảy ra tại một số hữu hạn điểm trên K thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng K .

4. Lưu ý:

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$ thì ta nói hàm số đồng biến trên đoạn $[a; b]$.

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục trên đoạn $[a; b]$ và $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$ thì ta nói hàm số nghịch biến trên đoạn $[a; b]$.

+) Tương tự với các khái niệm hàm số đồng biến, nghịch biến trên các nửa khoảng.

5. Sử dụng bảng biến thiên để xét tính đơn điệu của hàm số.

Để xét tính đơn điệu của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D .

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

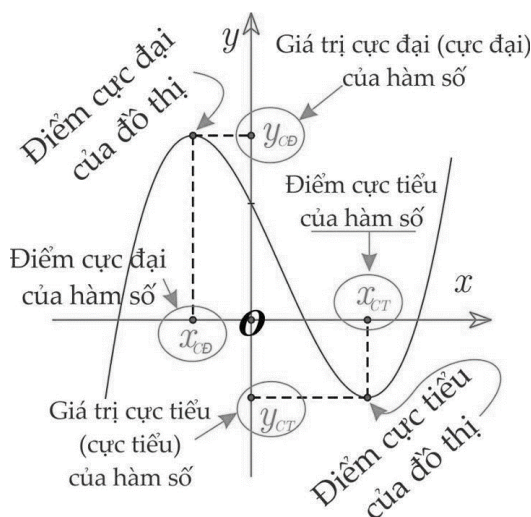
Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận

Chú ý: Đối với bài toán trắc nghiệm, ta có thể sử dụng **Phương pháp sử dụng MTCT**.

Cách 1: Sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 của máy tính Casio. Quan sát bảng kết quả nhận được về tính tăng, giảm giá trị của $f(x)$ và dự đoán.

Cách 2: Tính đạo hàm, thiết lập bất phương trình đạo hàm. Sử dụng tính năng giải bất phương trình INEQ của máy tính Casio (đối với bất phương trình bậc hai, bậc ba).

II. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ



1. Khái niệm cực trị của hàm số: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$.

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực đại** tại x_0 .

+) Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt **cực tiểu** tại x_0 .

*** Chú ý**

+) Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 thì x_0 được gọi là **điểm cực đại** của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là **giá trị cực đại** của hàm số, kí hiệu là $f_{CD}(f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là **điểm cực đại** của đồ thị hàm số.

+) Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là **điểm cực trị**. Giá trị cực đại còn gọi là **cực đại** và được gọi chung là **cực trị** của hàm số.

2. Cách tìm cực trị của hàm số

Định lí 2: Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$.

+) Nếu $f'(x) > 0$ trên khoảng $(a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ trên $(x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $y = f(x)$.

+) Nếu $f'(x) < 0$ trên khoảng $(a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ trên $(x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	a	x_0	b	x	a	x_1	b
$f'(x)$		+	-	$f'(x)$		-	+
$f(x)$				$f(x)$			
			f_{CD}			f_{CT}	

NHẬN XÉT:

Để tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Tìm tập xác định D .

Bước 2: Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ mà tại đó $f'(x) = 0$ hoặc làm cho $f'(x)$ không xác định.

Bước 3: Sắp xếp các $x_i (i = 0; 1; 2; \dots)$ theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.

Bước 4: Căn cứ vào bảng biến thiên nêu kết luận



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN.

DẠNG 1: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC

Câu 1: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y	$-\infty$					

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 2: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 3: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 5x^2 - 26x - 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -x^2 + 10x - 26 = -(x - 5)^2 - 1 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 4: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + 9x - 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}; y' = 0 \Leftrightarrow x = -3$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 5: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 6: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x^4 + 4x^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 + 8x = 4x(x^2 + 2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$, nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 7: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = -2x^4 + 4x^2 - 7$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = -8x^3 + 8x = -8x(x^2 - 1)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$
y	$-\infty$	-5	-7	-5	$-\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$, nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{3x+1}{1-x}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{3 \cdot 1 - (-1) \cdot 1}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} > 0, \forall x \in D.$$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 9: Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{3-2x}{x+7}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-7\}$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{(-2) \cdot 7 - 1 \cdot 3}{(x+7)^2} = \frac{-17}{(x+7)^2} < 0, \forall x \in D.$$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -7)$ và $(-7; +\infty)$.

Câu 10: Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x+2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta có: $y' = \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 - 4x + 5}{(x+2)^2} = 0 \Leftrightarrow -x^2 - 4x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-5	-2	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$			$+\infty$	0	
			12			
				$-\infty$		$-\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -5)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 11: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{x + 1}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-2		-1		0		$+\infty$
y'		+	0	-		-	0	+	
y	$-\infty$		0		$+\infty$		4		$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Câu 12: Tìm các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số: $y = \frac{-x^2 - x + 5}{x + 2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Ta có: $y' = \frac{-x^2 - 4x - 7}{(x+2)^2} < 0, \forall x \in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(-2; +\infty)$.

Câu 13: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - 1}$ trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ thì $\tan x \in (0; 1)$; $\cos x \neq 0$.

Ta có: $y' = \frac{1}{\cos^2 x (\tan x - 1)^2} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 14: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số

$$y = \begin{cases} -x + 2 & \text{nếu } x < -1 \\ -2x^2 + 2x + 7 & \text{nếu } -1 \leq x \leq 2 \\ 3x - 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = \begin{cases} -1 & \text{nếu } x < -1 \\ -4x + 2 & \text{nếu } -1 < x < 2; y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \\ 3 & \text{nếu } x > 2 \end{cases}$$

Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Từ bảng xét dấu của y' ta có hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $(2; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$.

Câu 15: Tìm các khoảng đồng biến, nghịch biến của hàm số:

a) $y = |x^2 - 2x - 3|$. b) $y = |x^2 - 4x + 3| + 4x + 3$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Cách 1:

$$y = |x^2 - 2x - 3| = \begin{cases} x^2 - 2x - 3 & \text{nếu } x \leq -1 \text{ hoặc } x \geq 3 \\ -(x^2 - 2x - 3) & \text{nếu } -1 < x < 3 \end{cases}$$

$$y' = \begin{cases} 2x - 2 & \text{nếu } x < -1 \text{ hoặc } x > 3 \\ -(2x - 2) & \text{nếu } -1 < x < 3 \end{cases}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 3)$.

Cách 2: Ta có $y' = \frac{2(x^2 - 2x - 3)(x - 1)}{\sqrt{(x^2 - 2x - 3)^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$-$	$ $	$+$ 0 $-$	$ $	$+$

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;1)$ và $(3;+\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $(1;3)$.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y = |x^2 - 4x + 3| + 4x + 3 = \begin{cases} x^2 + 6 & \text{nếu } x \leq 1 \text{ hoặc } x \geq 3 \\ -x^2 + 8x & \text{nếu } 1 < x < 3 \end{cases}.$$

$$y' = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x < 1 \text{ hoặc } x > 3 \\ -2x + 8 & \text{nếu } 1 < x < 3 \end{cases}.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	$ $	$+$	$ $	$+$
y	$+\infty$						$+\infty$



Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

Câu 16: Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $y = x\sqrt{4-x^2}$.

Lời giải

Tập xác định $D = [-2;2]$.

$$y' = \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}}; \quad y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \\ x = \sqrt{2} \end{cases}.$$

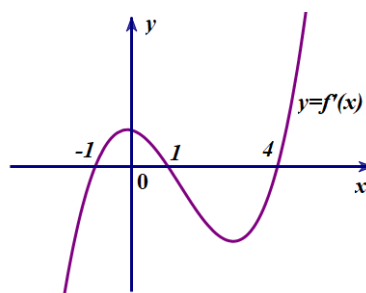
Bảng xét dấu của y' :

x	-2	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	2
y'	$ $	$-$ 0 $+$ 0 $-$	$ $	

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{2};\sqrt{2})$, nghịch biến trên các khoảng $(-2;-\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2};2)$.

DẠNG 2: XÉT TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM HỢP CHO BỞI BBT HOẶC ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $y = f(x)$ HOẶC $y = f'(x)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên.



Xét tính đơn điệu của hàm số $y = g(x) = f(x) + 3$.

Lời giải

Ta có $g'(x) = f'(x)$.

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x > 4 \end{cases}.$$

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $y = g(x) = f(x) + 3$ đồng biến trên các khoảng $(-1; 1)$ và $(4; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; 4)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

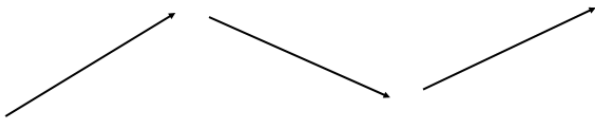
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(2x + 1)$.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(2x + 1)$. Ta có $g'(x) = 2 \cdot f'(2x + 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x + 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 = -1 \\ 2x + 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$					

Vậy hàm số $y = f(2x+1)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$					

Tìm các khoảng nghịch biến của hàm số $y = f(-2x+6)$.

Lời giải

Đặt $g(x) = f(-2x+6)$.

$$g'(x) = -2 \cdot f'(-2x+6).$$

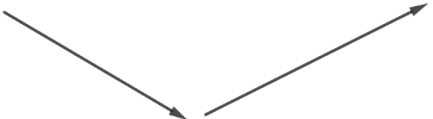
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(-2x+6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+6 = 0 \\ -2x+6 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$					

Vậy hàm số $y = f(-2x+6)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Câu 20: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	6	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			

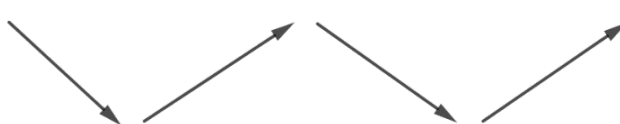
Hỏi hàm số $y = f\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6\right)$ nghịch biến trên các khoảng nào?

Lời giải

Đặt $g(x) = f\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6\right)$. Ta có $g'(x) = (x+3) \cdot f'\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6\right)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ \frac{1}{2}x^2 + 3x + 6 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \\ x = -6 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-6	-3	0	$+\infty$			
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Vậy hàm số $y = f\left(\frac{1}{2}x^2 + 3x + 6\right)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -6)$ và $(-3; 0)$.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$							

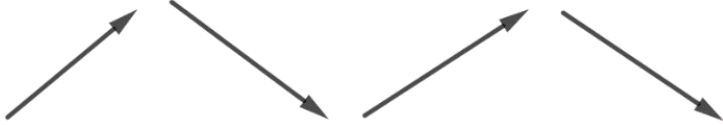
Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = f(-x^2 + 2x)$?

Lời giải

Đặt $g(x) = f(-x^2 + 2x)$; $g'(x) = (-2x+2) \cdot f'(-x^2 + 2x)$.

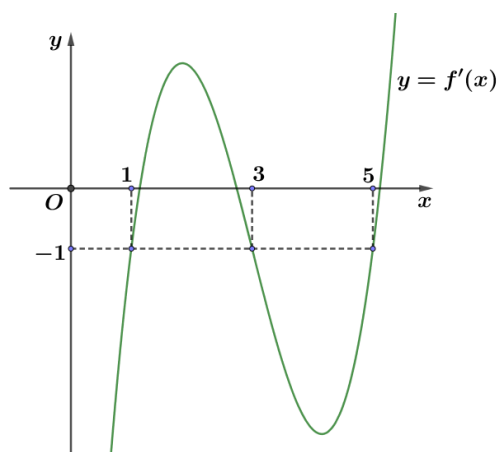
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x+2) \cdot f'(-x^2+2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2=0 \\ f'(-x^2+2x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2=0 \\ -x^2+2x=0 \\ -x^2+2x=1 \\ -x^2+2x=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$								

Vậy hàm số $y = f(-x^2 + 2x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; 2)$.

Câu 22: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ sau:



Tìm các khoảng đơn điệu của hàm số $g(x) = f(x) + x + 1$.

Lời giải

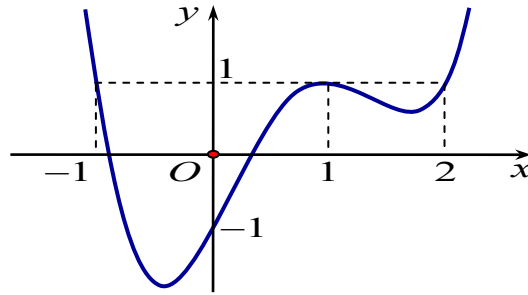
Ta có: $g'(x) = f'(x) + 1$.

Dựa vào đồ thị $y = f'(x)$ ta có:

$$f'(x) + 1 > 0 \Leftrightarrow f'(x) > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 < x < 3 \\ x > 5 \end{cases}; f'(x) + 1 < 0 \Leftrightarrow f'(x) < -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 3 < x < 5 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x) = f(x) + x + 1$ đồng biến trên các khoảng $(1; 3)$ và $(5; +\infty)$, nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(3; 5)$.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

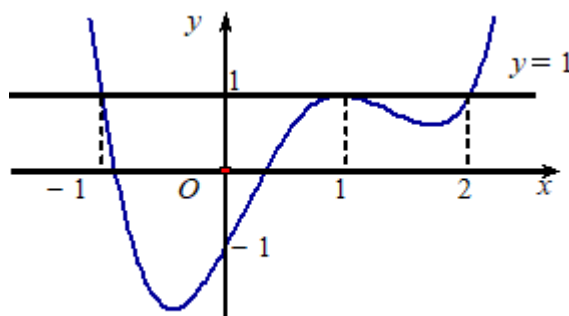


Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x) - x + 2020$.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = f'(x) - 1$ nên $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 1$.

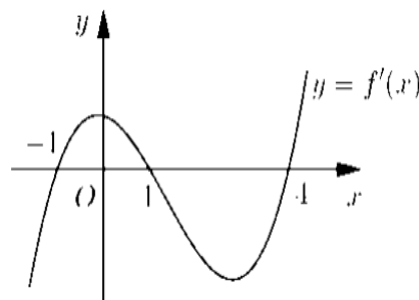
Vẽ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đường thẳng $y = 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Quan sát đồ thị ta có : $f'(x) > 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 2 \end{cases}$.

Vậy hàm số $g(x) = f(x) - x + 2020$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



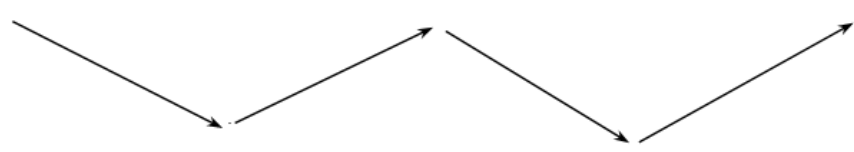
Hàm số $y = g(x) = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có $g'(x) = -f'(2-x)$.

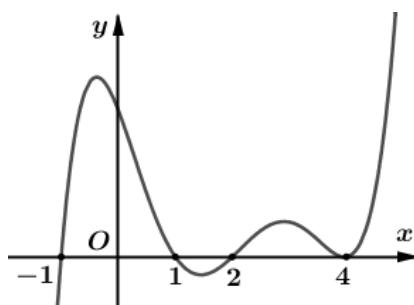
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-x = -1 \\ 2-x = 1 \\ 2-x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-2		1		3	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$								

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-2;1)$ và $(3;+\infty)$.

Câu 25: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(2x-4)$ nghịch biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có $g'(x) = 2 \cdot f'(2x-4)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-4 = -1 \\ 2x-4 = 1 \\ 2x-4 = 2 \\ 2x-4 = 4 \text{ (nghiệm bội chẵn)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{5}{2} \\ x = 3 \\ x = 4 \text{ (nghiệm bội chẵn)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$		3		4	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$g(x)$									

Vậy hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; \frac{3}{2})$ và $(\frac{5}{2}; 3)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f(x)$					

Hỏi hàm số $y = f(f(x))$ đồng biến trên những khoảng nào?

Lời giải

+ Đặt $g(x) = f(f(x))$.

+ $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$.

+ $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$.

+ Xét $f'(f(x)) > 0 \Leftrightarrow f(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < -2 \end{cases}$.

+ Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$		
$f'((f(x)))$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$\frac{28}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$+\infty$

Tìm các khoảng đồng biến của hàm số $y = g(x) = f(4-2x) - \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 6x + 1$.

Lời giải

Ta có: $y' = g'(x) = -2f'(4-2x) - x^2 + 5x - 6$.

$$-2f'(4-2x) > 0 \Leftrightarrow f'(4-2x) < 0 \Leftrightarrow -2 < 4-2x < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

$$-x^2 + 5x - 6 > 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3.$$

Bảng xét dấu $y' = g'(x)$

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$-2f'(4-2x)$	-	0	+	0	-
$-x^2+5x-6$	-	0	+	0	-
y'	-	0	+	0	-

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(2;3)$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Biết $1 < f(x) < 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = g(x) = f(f(x)) + x^3 - 6x^2 - 1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng đồng biến?

Lời giải

Ta có: $g'(x) = f'(x)f'(f(x)) + 3x^2 - 12x$.

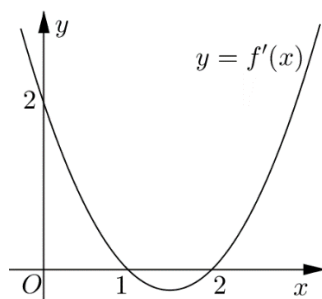
Dựa vào bảng xét dấu $f'(x)$ đề bài cho, vì $1 < f(x) < 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(f(x)) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng xét dấu $y' = g'(x)$:

x	$-\infty$	0	1	2	3	4	$+\infty$				
$f'(x).f'(f(x))$	-		-	0	+	0	+				
$3x^2-12x$	+	0	-		-		-	0	+		
$g'(x)$	Chưa xđ		-		chưa xđ		chưa xđ		-	0	+

Vậy hàm số có ít nhất một khoảng đồng biến.

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(1+2x-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có $g'(x) = (2-2x) \cdot f'(1+2x-x^2)$.

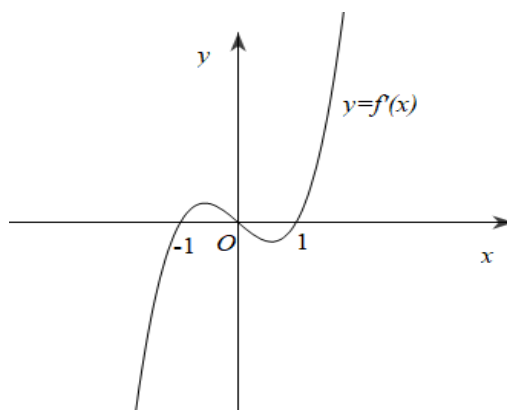
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2-2x=0 \\ f'(1+2x-x^2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1+2x-x^2=1 \\ 1+2x-x^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \text{ (nghiệm bội 3)} \\ x=2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+	-
$g(x)$						

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; 2)$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f(x^3)$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có $g'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3)$.

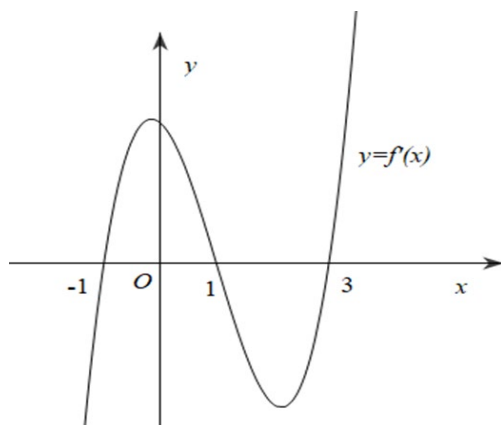
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ f'(x^3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ x^3=-1 \\ x^3=0 \\ x^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $y = g(x) = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào?

Lời giải

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot f'\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$.

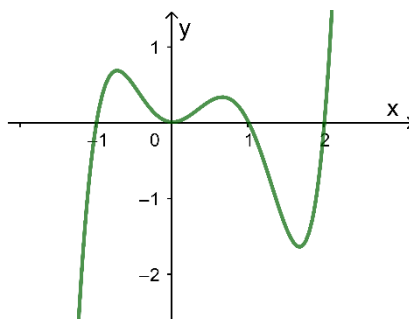
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + 2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (nghiệm bội 3)} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$								

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1-2\sqrt{2}; -1)$ và $(-1+2\sqrt{2}; +\infty)$.

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới



Hàm số $g(x) = f(x-2) + \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 12x + 1$ có ít nhất bao nhiêu khoảng nghịch biến?

Lời giải

Cách 1: $g'(x) = f'(x-2) + x^2 - 7x + 12$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$, ta có:

$$f'(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 = -1 \\ x-2 = 0 \\ x-2 = 1 \\ x-2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

$$f'(x-2) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2 < -1 \\ 1 < x-2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 3 < x < 4 \end{cases}.$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Lập bảng xét dấu

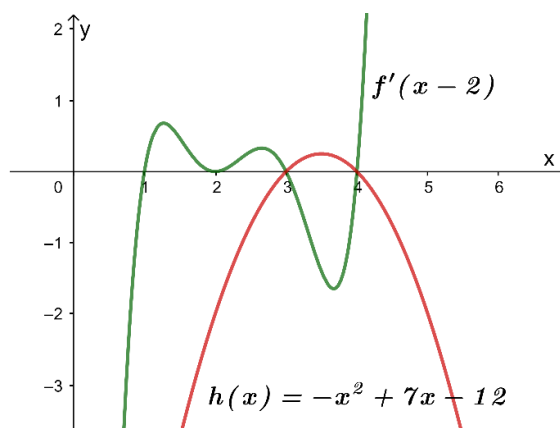
x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x-2)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+	
$x^2 - 7x + 12$		+		+		+	0	-	0	+	
$g'(x)$		Chưa xác định		+	0	+	0	-	0	+	

Vậy hàm số có ít nhất một khoảng nghịch biến.

Cách 2: $g'(x) = f'(x-2) + x^2 - 7x + 12$.

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x-2) + x^2 - 7x + 12 < 0 \Leftrightarrow f'(x-2) < -x^2 + 7x - 12.$$

Ta vẽ đồ thị của các hàm số $y = f'(x-2)$ và $y = h(x) = -x^2 + 7x - 12$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ như sau



Nhận thấy $f'(x-2) < -x^2 + 7x - 12$, $\forall x \in (3; 4)$. Hay $g'(x) < 0$, $\forall x \in (3; 4)$.

Do đó hàm số $y = g(x)$ luôn nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$.

Vậy hàm số có ít nhất một khoảng nghịch biến.

DẠNG 3: TÌM ĐK CỦA THAM SỐ ĐỂ HÀM SỐ ĐỒNG BIẾN, NGHỊCH BIẾN TRÊN MỘT MIỀN CHO TRƯỚC.

Câu 33: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$1) y = x^3 + 3x^2 + mx + m \quad 2) y = mx^3 - (2m+1)x^2 + (m+2)x - 2$$

Lời giải

$$1) \text{TXĐ: } D = \mathbb{R}.$$

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 + 6x + m.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \text{ (vì } a = 3 > 0)$$

$$\Leftrightarrow 9 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

Vậy $m \geq 3$ thì hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$2) \text{Tập xác định: } D = \mathbb{R}.$$

+) Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = -x^2 + 2x - 2$. Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Vậy $m = 0$ không thỏa mãn.

$$+) \text{ Với } m \neq 0, \text{ ta có: } y' = 3mx^2 - 2(2m+1)x + m + 2.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 + 4m + 1 - 3m(m+2) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-1)^2 \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 1 \text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy $m = 1$.

Câu 34: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3(2m-3)x + m$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R}.$$

+) Với $m = 1$, hàm số trở thành $y = -3x + 1$. Suy ra hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, chọn $m = 1$ thỏa.

$$+) \text{ Với } m \neq 1, \text{ ta có } y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3(2m-3).$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 9(m-1)^2 - 9(m-1)(2m-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ (m-1)(-m+2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy $m \leq 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x-m}{2x-1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$. Ta có: $y' = \frac{-1+2m}{(2x-1)^2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow -1+2m > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{2}$.

Vậy $m > \frac{1}{2}$.

Câu 36: Tìm m để hàm số $y = \frac{2x+1}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định?

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \frac{-2m-1}{(x-m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow -2m-1 < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$.

Câu 37: Có bao nhiêu giá trị m nguyên để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 3(m^2 - 1)x$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

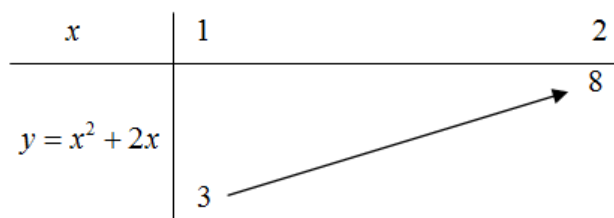
Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$; $y' = 3x^2 + 6x - 3(m^2 - 1)$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (1; 2)$.

$\Leftrightarrow m^2 - 1 \leq x^2 + 2x, \forall x \in (1; 2)$.

BBT



Từ bbt suy ra ycbt $\Leftrightarrow m^2 - 1 \leq \min_{[1;2]} (x^2 + 2x) \Leftrightarrow m^2 - 1 \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ suy ra $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 38: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + (m-1)x + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 + 6x + m - 1.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 1, \forall x \in (-1; +\infty) \quad (1).$$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x + 1$ trên khoảng $(-1; +\infty)$.

$$g'(x) = 6x - 6; \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$g'(x)$			$-$	0	$+$
$g(x)$			10	-2	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\min_{(-1; +\infty)} g(x) = -2$.

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow m \leq \min_{(-1; +\infty)} g(x) \Leftrightarrow m \leq -2.$$

Vậy $m \leq -2$ thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 39: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3(m^2 - 1)x - 2m + 3$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 + 6mx - 3(m^2 - 1).$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; 2)$.

Ta có $\Delta' = 9m^2 - 9(m^2 - 1) = 9 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$.

Suy ra y' luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 = m - 1; x_2 = m + 1$ ($x_1 < x_2$).

$$\text{Do đó: } y' \geq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow x_1 \leq 1 < 2 \leq x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \leq 1 \\ x_2 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 \leq 1 \\ m + 1 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Vậy giá trị m cần tìm là $1 \leq m \leq 2$.

Câu 40: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 6(m^2 - 2)x$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -3x^2 + 6mx - 6(m^2 - 2).$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2(m^2 - 2) \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \quad (1).$$

Đặt $f(x) = x^2 - 2mx + 2(m^2 - 2)$. Ta có: $\Delta' = -m^2 + 4$.

$$+) \text{ Th1: } \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Suy ra } \begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases} \text{ (thỏa mãn (1)) } (*).$$

$$+) \text{ Th1: } \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2.$$

$$\text{Khi đó } f(x) \text{ có hai nghiệm là } x_1, x_2 \text{ (} x_1 < x_2 \text{)}.$$

$$(1) \Leftrightarrow x_2 \leq 2 \Leftrightarrow m + \sqrt{4 - m^2} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{4 - m^2} \leq 2 - m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \geq 0 \\ 4 - m^2 \leq (2 - m)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m \leq 0 \end{cases}.$$

$$\text{Kết hợp với } -2 < m < 2 \text{ ta được } -2 < m \leq 0 (**).$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \text{ suy ra } m \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty).$$

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương bé hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + 2x - 1 - 5m}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 5)$?

Lời giải

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R} \setminus \{m\}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{2x^2 - 4mx + 3m + 1}{(x - m)^2}.$$

$$\text{Hàm số nghịch biến trên khoảng } (1; 5)$$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{2x^2 - 4mx + 3m + 1}{(x - m)^2} \leq 0 \forall x \in (1; 5)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4mx + 3m + 1 \leq 0 \forall x \in (1; 5) \\ m \notin (1; 5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 3 \leq 0 \\ -17m + 51 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3 \\ m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5$$

$$\text{Do nguyên dương bé hơn 2024 nên } 5 \leq m \leq 2023.$$

$$\text{Vậy có tất cả 2019 giá trị.}$$

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương không lớn hơn 2024 của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 1 + m}{5x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{m}{5} \right\}$.

Ta có $y' = \frac{5x^2 + 2mx - 3m + 1}{(5x + m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; 1)$

$$\Leftrightarrow y' = \frac{5x^2 + 2mx - 3m + 1}{(5x + m)^2} \leq 0 \forall x \in (-3; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 2mx - 3m + 1 \leq 0 \forall x \in (-3; 1) \\ -\frac{m}{5} \notin (-3; 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -9m + 46 \leq 0 \\ -m + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{46}{9} \\ m \geq 6 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 15$$

Do nguyên dương không lớn hơn 2024 nên $15 \leq m \leq 2024$.

Vậy có tất cả 2010 giá trị.

Câu 43: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{2x^2 + (1-m)x + 1 + m}{x - m}$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$. Ta có $y' = \frac{2x^2 - 4mx + m^2 - 2m - 1}{(x - m)^2} = \frac{g(x)}{(x - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g(x) \geq 0, \forall x > 1$ và $m \leq 1$

Vì $\Delta_g' = 2(m+1)^2 \geq 0, \forall m$ nên $\Leftrightarrow g(x) = 0$ có hai nghiệm thỏa $x_1 \leq x_2 \leq 1$

$$\text{Điều kiện tương đương là } \begin{cases} 2g(1) = 2(m^2 - 6m + 1) \geq 0 \\ \frac{S}{2} = m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 3 - 2\sqrt{2} \approx 0,2.$$

Do đó không có giá trị nguyên dương của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 44: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{x+1}{x^2 + x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{m - (x+1)^2}{(x^2 + x + m)^2}$.

$$Y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} y' \leq 0 \\ x^2 + x + m \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m - (x+1)^2}{(x^2 + x + m)^2} \leq 0 \\ x^2 + x + m \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (-1; 1).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq (x+1)^2 \\ m \neq -x^2 - x \end{cases}, \forall x \in (-1; 1).$$

• $m \leq (x+1)^2, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \leq 0$.

• Đặt $f(x) = -x^2 - x, x \in (-1; 1)$.

$$\Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Bảng biến thiên.

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
$f'(x)$			$+$ 0 $-$		
$f(x)$		0	$\frac{1}{4}$	-2	

Vậy $m \in (-\infty; -2] \cup \left(\frac{1}{4}; +\infty\right)$.

Từ (*), (**) $\Rightarrow m \in (-\infty; -2]$.

Câu 45: Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

Lời giải

$$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m \\ x = 0 \end{cases}$$

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow 2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$

Câu 46: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx - 9m^2; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx - 9m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 3m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m \\ x = 3m \end{cases}.$$

• Nếu $-m = 3m \Leftrightarrow m = 0$ thì $y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng nghịch biến.

• Nếu $-m < 3m \Leftrightarrow m > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-m; 3m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ 3m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m \geq \frac{1}{3}$.

• Nếu $-m > 3m \Leftrightarrow m < 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(3m; -m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \leq 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m \leq -1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{1}{3}$.

Câu 47: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.

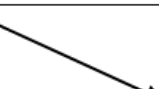
Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2m - 1 \end{cases}$.

Nếu $1 \leq 2m - 1$ thì ta có biến đổi $y' \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2m - 1$.

.

Xét $2m - 1 < 1$ ta có biến đổi $y' \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2m - 1; 1]$.

x	$-\infty$	$2m-1$			1	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+		
	$-\infty$							$+\infty$

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$ thì $(-2;0) \subset [2m-1;1]$.

$$\Leftrightarrow 2m - 1 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2} \dots$$

Câu 48: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:

Lời giải

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0;4)$ thì: $y' \geq 0, \forall x \in (0;4)$.

$$\text{tức là } 3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0 \quad \forall x \in (0;4) \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6}{2x + 1} \geq m \quad \forall x \in (0;4)$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x + 1}$ trên $(0; 4)$.

$$g'(x) = \frac{6x^2 + 6x - 12}{(2x + 1)^2}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 4) \\ x = -2 \notin (0; 4) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	4
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	6	3	$\frac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x + 1} \geq m \quad \forall x \in (0; 4)$ thì $m \leq 3$.

Câu 49: . Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m - 6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:

Lời giải

$y' = 3x^2 - 2mx - (m - 6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ thì: $y' \geq 0, \forall x \in (0; 4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m - 6) \geq 0 \quad \forall x \in (0; 4) \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6}{2x + 1} \geq m \quad \forall x \in (0; 4)$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x + 1}$ trên $(0; 4)$.

$$g'(x) = \frac{6x^2 + 6x - 12}{(2x + 1)^2}, g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 4) \\ x = -2 \notin (0; 4) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	4
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	6	3	$\frac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x + 1} \geq m \quad \forall x \in (0; 4)$ thì $m \leq 3$.

Câu 50: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Tính số phần tử của tập hợp S .

Lời giải

Ta có $y = 2x^3 + mx^2 + 2x \Rightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2; 0) \Leftrightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Leftrightarrow m \leq -3x - \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0).$$

Xét hàm số $g(x) = -3x - \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Rightarrow g'(x) = -3 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bảng biến thiên

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq -2\sqrt{3}$. Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in (-2020; 2020)$ nên $m \in \{-2019; -2018; \dots; -4\}$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 51: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 - 2x - 2 - m}{(x - 1)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ y' \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 - m \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ x^2 - 2x - 2 - m \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (1; 3) \\ m \leq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (4; 6) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 2, g'(x) = 2x - 2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	1	3	4	6	$+\infty$
$g'(x)$	-	0		+		
$g(x)$	$+\infty$					$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có $(*) \Leftrightarrow 3 \leq m \leq 6$, và vì m là số nguyên nên chọn $m \in \{3; 4; 5; 6\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 52: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m nằm trong đoạn $[-100; 100]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 5)$.

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$	
y	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } (1; 5) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ m+2 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 5 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

Vậy có tất cả 196 giá trị nguyên của m nằm trong đoạn $[-100; 100]$ thỏa mãn.

Câu 53: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-15; 15)$ để hàm số $y = x^4 - 6x^2 - mx + 2526$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 12x - m$.

Hàm số $y = x^4 - 6x^2 - mx + 2526$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$

$$\Leftrightarrow 4x^3 - 12x - m \leq 0, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq 4x^3 - 12x, \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m \geq 8.$$

Vì m nguyên thuộc khoảng $(-15; 15)$ nên có 7 giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 54: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-2021; 2021)$ để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

Lời giải

Ta có $y = x^4 - 2mx^2 - 3m + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4mx$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (1; 2) \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) \geq 0, \forall x \in (1; 2)$.

Hay $x^2 - m \geq 0, \forall x \in (1; 2) \Rightarrow m \leq x^2, \forall x \in (1; 2)$.

Suy ra $m \leq \max_{x \in [1; 2]} x^2 = 4$. Mặt khác $m \in (-2021; 2021) \Rightarrow m \in \{-2019; -2018; \dots; 4\}$.

Vậy có 2024 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 55: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3(m+1)x - m - 1$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 3]$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - 3(m+1)$.

Để hàm số nghịch biến trên $[-1; 3]$ thì $y' \leq 0$, với mọi $x \in [-1; 3]$.

Suy ra $3x^2 - 6x - 3(m+1) \leq 0; \forall x \in [-1; 3]$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3m - 3 \leq 0; \forall x \in [-1; 3]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3 \leq 3m; \forall x \in [-1; 3]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq m; \forall x \in [-1; 3] (*)$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 1; \forall x \in [-1; 3]$.

Ta có: $g'(x) = 2x - 2 = 2(x - 1); g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

Vì $g(-1) = 2; g(1) = -2; g(3) = 2$ nên $(*) \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [-1; 3]} g(x) = 2$.

Vậy $m \geq 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$ nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$?

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 2m = 0$$

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 + 2m) = 1$$

Phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1 = m$ và $x_2 = m + 2$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x + 1$ nghịch biến trên đoạn $[2; 3]$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in [2; 3]$$

$$\text{Do đó ta có } [2; 3] \subset [m; m+2] \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ 3 \leq m+2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; 2\}.$$

Câu 57: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 3(m+1)x - m - 1$ nghịch biến trên đoạn $[-1; 3]$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6x - 3(m+1).$$

Để hàm số nghịch biến trên $[-1; 3]$ thì $y' \leq 0$, với mọi $x \in [-1; 3]$.

$$\text{Suy ra } 3x^2 - 6x - 3(m+1) \leq 0; \forall x \in [-1; 3]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3m - 3 \leq 0; \forall x \in [-1; 3]$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 3 \leq 3m; \forall x \in [-1; 3]$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 \leq m; \forall x \in [-1; 3] (*)$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x^2 - 2x - 1; \forall x \in [-1; 3].$$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 2x - 2 = 2(x-1); g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$\text{Vì } g(-1) = 2; g(1) = -2; g(3) = 2 \text{ nên } (*) \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in [-1; 3]} g(x) = 2.$$

Vậy $m \geq 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 58: Cho hàm số $y = -x^3 + x^2 - mx + 5$ với m là tham số thực. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m trên đoạn $[-50; 50]$ để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng?

Lời giải

Hàm số $y = -x^3 + x^2 - mx + 5$ đồng biến trên khoảng

$$\Leftrightarrow y' = -3x^2 + 2x - m \geq 0, \forall x \in (-1; 2) \Leftrightarrow m \leq -3x^2 + 2x, \forall x \in (-1; 2).$$

$$\text{Đặt } g(x) = -3x^2 + 2x.$$

Ta có $g'(x) = -6x + 2$. $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$

BBT của $g(x)$ trên khoảng $(-1; 2)$:

x	-1	$\frac{1}{3}$	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-5		-8

Căn cứ theo BBT suy ra $m \leq -8$.

Vì m nguyên và thuộc đoạn $[-50; 50]$ nên số các giá trị m cần tìm là $(-8) - (-50) + 1 = 43$

Câu 59: Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 + 2m)x - 3$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Ta có $y' = x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m)$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ thì $y' \leq 0 \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) \leq 0 \forall x \in (-1; 1)$.

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + (m^2 + 2m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m + 2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$	m	$m+2$	$+\infty$
y'	+	0	0	+

Từ bảng xét dấu ta thấy để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ thì

$$\begin{cases} m \leq -1 \\ m+2 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -1.$$

Câu 60: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx - 9m^2; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx - 9m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 3m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m \\ x = 3m \end{cases}.$$

⊙ Nếu $-m = 3m \Leftrightarrow m = 0$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng nghịch biến.

⊙ Nếu $-m < 3m \Leftrightarrow m > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-m; 3m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ 3m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m \geq \frac{2}{3}$.

⊙ Nếu $-m > 3m \Leftrightarrow m < 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(3m; -m)$.

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \leq 0 \\ -m \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -2$.

Kết hợp với điều kiện ta được $m \leq -2$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ khi $m \leq -2$ hoặc $m \geq \frac{2}{3}$.

Câu 61: Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hàm số $y = 2x^3 - 3x^2 - 6(m+2)x + m$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 6x^2 - 6x - 6(m+2)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0 \quad \forall x \in (-1; 1)$

hay $m + 2 \geq x^2 - x \quad \forall x \in (-1; 1)$.

Xét $f(x) = x^2 - x$ trên khoảng $(-1; 1)$ ta có $f'(x) = 2x - 1; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Bảng biến thiên:

x	-1	$\frac{1}{2}$	1
y'		0	
y	2	$-\frac{1}{4}$	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $m + 2 \geq f(x) \quad \forall x \in (-1; 1) \Leftrightarrow m + 2 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 0$.

Câu 62: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{2x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

Lời giải

+ Ta có $y' = 3x^2 + m + \frac{1}{x^3}$.

+ Hàm số $y = x^3 + mx - \frac{1}{2x^2}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + \frac{1}{x^3} + m \geq 0, \forall x > 0$$

$$\Leftrightarrow -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^3}, \forall x > 0$$

+ Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho 5 số dương $x^2; x^2; x^2; \frac{1}{2x^3}; \frac{1}{2x^3}$ ta có

$$3x^2 + \frac{1}{x^3} = x^2 + x^2 + x^2 + \frac{1}{2x^3} + \frac{1}{2x^3} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{4}}.$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra khi } x^2 = \frac{1}{2x^3} \Leftrightarrow x^5 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{Ta có: } -m \leq 3x^2 + \frac{1}{x^3}, \forall x > 0 \Leftrightarrow -m \leq \min_{(0; +\infty)} \left(3x^2 + \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\Leftrightarrow -m \leq 5\sqrt[5]{\frac{1}{4}} \Leftrightarrow m \geq -5\sqrt[5]{\frac{1}{4}} \quad (m \geq -3,789)$$

+ Mà m nguyên, $m \in [-2022; 2022]$ nên $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; \dots; 2022\}$, có 2026 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu.

Câu 63: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - 4x}{x + m}$ đồng biến trên $(1; +\infty)$

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}; \quad y' = \frac{x^2 + 2mx - 4m}{(x + m)^2}.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên } (1; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 1 \\ x^2 + 2mx - 4m \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } x^2 + 2mx - 4m \geq 0, \forall x \in [1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \leq 0 \\ \Delta' > 0 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 4m \leq 0 \\ m^2 + 4m > 0 \\ -m + \sqrt{m^2 + 4m} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq m \leq 0 \\ \begin{cases} m > 0 \\ m < -4 \end{cases} \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq \frac{1}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện $m > -1$ ta được $-1 < m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 64: Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + (m+2)x - 3m + 1}{x-1}$. Tìm các giá trị của tham số m để hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{-2x^2 + 4x + 2m - 3}{(x-1)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng xác định

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow -2x^2 + 4x + 2m - 3 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \text{ (vì } a = -2 < 0)$$

$$\Leftrightarrow 4m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}. \text{ Vậy } m \leq \frac{1}{2}.$$

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{5m-6}{(x+5m)^2}. \text{ Để hàm số nghịch biến trên khoảng } (10; +\infty) \text{ thì } \begin{cases} y' < 0 \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{6}{5} \\ m \geq -2 \end{cases}. \text{ Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1\}.$$

Câu 66: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng

Lời giải

$$\text{Tập xác định } D = \mathbb{R}.$$

$$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5.$$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0, \forall x \in (2; +\infty).$$

$$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)} \text{ với } x \in (2; +\infty).$$

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow \text{hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (2; +\infty).$$

Do đó $m \leq g(x), \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{12}$.

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 67: Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

Lời giải

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+ Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Theo đề $m > 0$ nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 9$

Vì m nguyên dương nên $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ (là cấp số cộng)

Vậy Tổng giá trị các phần tử của T bằng $\frac{9}{2}(1+9) = 45$.

Câu 68: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-100; 100]$ sao cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 + (m-1)x^2 + (2m+1)x + 3m-1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 3(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 2m+1$

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (*)

(Dấu "=" xảy ra tại hữu hạn $x \in \mathbb{R}$)

TH1: $m-1=0 \Leftrightarrow m=1$

Ta có : $f'(x) = 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow m=1$ (nhận).

TH2 : $m \neq 1$.

Để hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) > 0 \\ (m-1)^2 - 3(m-1)(2m+1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)(-5m-4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq -\frac{4}{5} \vee m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Kết hợp 2 TH $\Rightarrow m \geq 1 \xrightarrow{m \in [-100; 100]} m \in \{1; 2; \dots; 100\}$: có 100 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 69: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1; 25]$ sao cho ứng với mỗi m , hàm số

$$y = \frac{-x^2 + 2x - m + 5}{2x - m} \text{ đồng biến trên khoảng } (1; 3).$$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{m}{2} \right\}.$

Ta có $y' = \frac{-2x^2 + 2mx - 10}{(2x - m)^2}.$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (1; 3).$

tức là
$$\begin{cases} -2x^2 + 2mx - 10 \geq 0, \forall x \in (1; 3) \\ x \neq \frac{m}{2}, \forall x \in (1; 3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{x^2 + 5}{x}, \forall x \in (1; 3) \text{ (Do } x > 0, \forall x \in (1; 3)) \\ \frac{m}{2} \leq 1 \\ \frac{m}{2} \geq 3 \end{cases}.$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{x^2 + 5}{x}, \forall x \in [1; 3].$

Ta có $g'(x) = \frac{x^2 - 5}{x^2}. g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} \\ x = -\sqrt{5} \end{cases} (x \neq 0).$

Bảng biến thiên

x	1	$\sqrt{5}$	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	6	$2\sqrt{5}$	$\frac{14}{3}$

Từ bảng biến thiên, ta có
$$\begin{cases} m \geq \frac{x^2 + 5}{x}, \forall x \in (1; 3) \\ \frac{m}{2} \leq 1 \\ \frac{m}{2} \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 6 \\ m \leq 2 \Leftrightarrow m \geq 6 \\ m \geq 6 \end{cases}.$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[1; 25]$ nên $m \in \{6; 7; 8; 9; 10; \dots; 25\}.$

Vậy có 20 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[1; 25]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 70: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2; 25]$ sao cho ứng với mỗi m , hàm

$$\text{số } y = \frac{x^2 + 5x - m - 1}{5x - m} \text{ nghịch biến trên khoảng } (1; 4).$$

Lời giải

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{m}{5} \right\}.$$

$$\text{Ta có } y' = \frac{5x^2 - 2mx + 5}{(5x - m)^2}.$$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$ thì $y' \leq 0, \forall x \in (1; 4)$.

$$\text{tức là } \begin{cases} 5x^2 - 2mx + 5 \leq 0, \forall x \in (1; 4) \\ x \neq \frac{m}{5}, \forall x \in (1; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{5x^2 + 5}{2x}, \forall x \in (1; 4) \text{ (Do } 2x > 0, \forall x \in (1; 4)) \\ \left[\frac{m}{5} \leq 1 \right. \\ \left. \frac{m}{5} \geq 4 \right] \end{cases}.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = \frac{5x^2 + 5}{2x}, \forall x \in [1; 4].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{5x^2 - 5}{2x^2} > 0, \forall x \in [1; 4]. \text{ Hàm số đồng biến trên } (1; 4).$$

$$\text{Suy ra } \max_{x \in [1; 4]} g(x) = g(4) = \frac{85}{8}.$$

$$\text{Khi đó, ta có } \begin{cases} m \geq \frac{5x^2 + 5}{2x}, \forall x \in (1; 4) \\ \left[\frac{m}{5} \leq 1 \right. \\ \left. \frac{m}{5} \geq 4 \right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{85}{8} \\ m \leq 5 \\ m \geq 20 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 20.$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-2; 25]$ nên $m \in \{20; 21; 22; 23; 24; 25\}$.

Vậy có 6 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2; 25]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 71: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-25; 3]$ sao cho ứng với mỗi m , hàm

$$\text{số } y = \frac{-x^2 + 4x - m - 5}{4x - m} \text{ đồng biến trên khoảng } (-3; -1).$$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{m}{4} \right\}$.

Ta có $y' = \frac{-4x^2 + 2mx + 20}{(4x - m)^2}$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; -1)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (-3; -1)$.

tức là

$$\begin{cases} -4x^2 + 2mx + 20 \geq 0, \forall x \in (-3; -1) \\ x \neq \frac{m}{4}, \forall x \in (-3; -1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{2x^2 - 10}{x}, \forall x \in (-3; -1) \text{ (Do } x < 0, \forall x \in (-3; -1)) \\ \frac{m}{4} \leq -3 \\ \frac{m}{4} \geq -1 \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{2x^2 - 10}{x}, \forall x \in [-3; -1]$.

Ta có $g'(x) = \frac{2x^2 + 10}{x^2} > 0, \forall x \in [-3; -1]$. Suy ra hàm số đồng biến trên $(-3; -1)$.

Suy ra $\min_{[-3; -1]} g(x) = g(-3) = -\frac{8}{3}$.

$$\text{Khi đó, ta có } \begin{cases} m \leq \frac{2x^2 - 10}{x}, \forall x \in (-3; -1) \\ \frac{m}{4} \leq -3 \\ \frac{m}{4} \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\frac{8}{3} \\ m \leq -12 \\ m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; -12] \cup \left[-4; -\frac{8}{3} \right].$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-25; 3]$ nên $m \in \{-25; -24; -23; \dots; -12\} \cup \{-4; -3\}$.

Vậy 16 giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-25; 3]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 72: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2 \sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$. Ta có hàm số $t = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y = \frac{2\sin x - 1}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t) = \frac{2t-1}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

$$\Leftrightarrow f'(t) > 0, \text{ với } \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \frac{-2m+1}{(t-m)^2} > 0, \text{ với } \forall t \in (0;1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1 > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0.$$

Vậy $m \leq 0$.

Câu 73: Tìm m để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$?

Lời giải

Cách 1: Đặt $t = \sin x$. Ta có hàm số $t = \sin x$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$.

Khi $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $t \in (0;1)$.

Xét hàm $y = \frac{t+m}{t-1}$ trên khoảng $(0;1)$. Ta có $y' = \frac{-1-m}{(t-1)^2}$.

Hàm đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Leftrightarrow$ hàm số $y = \frac{t+m}{t-1}$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow -1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$.

Cách 2: Xét hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$. Ta có $y' = \frac{-(m+1) \cdot \cos x}{(\sin x - 1)^2}$.

Khi $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $-1 < \cos x < 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ khi và chỉ khi $m+1 < 0 \Leftrightarrow m < -1$. Vậy $m < -1$

Câu 74: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ sao cho hàm số $y = x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4(4m-1)x = 4x[x^2 - (4m-1)].$$

$$+) \text{ Với } 4m-1 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{4}.$$

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Vì $m \in (-10; 10)$ và m nguyên nên có 10 giá trị m thoả mãn.

+ Với $4m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt{4m-1} \\ x = -\sqrt{4m-1} \end{cases}.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{4m-1} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < m \leq \frac{1}{2}$.

Vì $m \in (-10; 10)$ và m nguyên nên không có giá trị m nào thoả mãn.

Vậy không có giá trị m nguyên thoả mãn bài toán.

Câu 75: Tìm tập hợp các giá trị của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x^2+1} - mx - 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \geq m, \forall x \in \mathbb{R}. (1)$.

Xét hàm số $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{(\sqrt{x^2+1})^2} = \frac{1}{(\sqrt{x^2+1})^3} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	-1	1

Từ bảng biến thiên suy ra $(1) \Leftrightarrow m \leq -1$. Vậy $m \leq -1$.

Câu 76: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (2m+1)x + m(m+1) = 0.$$

$$\text{Ta có } \Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m) = 1 \text{ nên } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}.$$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; m)$, $(m+1; +\infty)$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(2; +\infty) \Leftrightarrow m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1$.

Vậy $m \leq 1$.

Câu 77: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = \cos x$. Ta có $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$.

Vì $t' = -\sin x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y = \frac{2\cos x - 1}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t) = \frac{2t-1}{t-m}$

nghịch biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow y' = \frac{-2m+1}{(t-m)^2} < 0, \forall t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m+1 < 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m \leq 0 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1. \text{ Vậy } m \geq 1.$$

Câu 78: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{2\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = \cos x$, với $x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$ khi đó $t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Hàm số trở thành $y = g(t) = \frac{2t+3}{2t-m} \Rightarrow g'(t) = \frac{-2m-6}{(2t-m)^2}$.

Ta có $t' = -\sin x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{3}\right)$, do đó hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{3}\right)$.

Do đó yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ hàm số $y = g(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

$$\Leftrightarrow g'(t) > 0, \forall t \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \Leftrightarrow \begin{cases} -2m-6 > 0 \\ \frac{m}{2} \notin \left(\frac{1}{2}; 1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m \notin (1; 2) \end{cases} \Leftrightarrow m < -3. \text{ Vậy } m < -3.$$

Câu 79: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m + 1}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = \tan x$. Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ ta có $t \in (0; 1)$.

Hàm số trở thành $y = g(t) = \frac{t-2}{t-m+1} \Rightarrow g'(t) = \frac{3-m}{(t-m+1)^2}$.

Ta có $t' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right)$, do đó hàm số $t = \tan x$ đồng biến trên $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = g(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1) \Leftrightarrow g'(t) > 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m > 0 \\ (m-1) \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ 2 \leq m < 3 \end{cases}$.

Vậy $\begin{cases} m \leq 1 \\ 2 \leq m < 3 \end{cases}$.

Câu 80: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\tan x + m}{m \tan x + 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = \tan x$, ta có hàm số $t = \tan x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

Do đó hàm số $y = \frac{\tan x + m}{m \tan x + 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi hàm số

$y = g(t) = \frac{t+m}{mt+1}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = t$ là hàm số đồng biến trên $(0; 1) \Rightarrow m = 0$ không thỏa yêu cầu.

TH2: $m \neq 0$. Ta có $y = \frac{t+m}{mt+1} \Rightarrow y' = \frac{1-m^2}{(mt+1)^2}$.

Trần_Tuấn_An

$$\text{Hàm số } y = \frac{t+m}{mt+1} \text{ nghịch biến trên } (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m^2 < 0 \\ -\frac{1}{m} \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > 1 \\ \begin{cases} -\frac{1}{m} \leq 0 \\ -\frac{1}{m} \geq 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > 1 \\ -1 \leq m < 0 \vee m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1. \text{ Vậy } m > 1.$$

Câu 81: Tìm giá trị m để hàm số $y = \frac{\cot x - 2}{\cot x - m}$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$?

Lời giải

Đặt $t = \cot x$, với $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có $t' = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0$, $\forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $t = \cot x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1).$$

$$\text{Khi đó hàm số trở thành } y = f(t) = \frac{t-2}{t-m} \Rightarrow f'(t) = \frac{-m+2}{(t-m)^2}.$$

Hàm số đã cho nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng

$$(0;1) \Leftrightarrow f'(t) > 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \frac{-m+2}{(t-m)^2} > 0, \forall t \in (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 > 0 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}.$$

Câu 82: Tìm m để hàm số $y = \frac{2 \cot x + 1}{\cot x + m}$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Đặt $t = \cot x$, $x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Vì $t' = \frac{-1}{\sin^2 x} < 0$, $\forall x \in \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $t = \cot x$ nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0;1)$.

Xét hàm số $y = f(t) = \frac{2t+1}{t+m}$ trên khoảng $(0;1)$, $t \neq -m$.

$$\text{Ta có } f'(t) = \frac{2m-1}{(t+m)^2}, \forall t \in (0;1), t \neq -m.$$

Trần_Tuấn_Anh

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi hàm số $y = f(t)$ nghịch biến

$$\text{trên khoảng } (0; 1) \Leftrightarrow f'(t) < 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 < 0 \\ -m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ -m \leq 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{2} \\ m \geq 0 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ 0 \leq m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} m \leq -1 \\ 0 \leq m < \frac{1}{2} \end{cases}$$

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



II HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 4: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC.

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Câu 2: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$.

Câu 3: Tìm cực trị của hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Câu 4: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$.

Câu 5: Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 5$.

Câu 6: Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

Câu 7: Tìm cực trị của hàm số $y = (1-x)^3(3x-8)^2$.

DẠNG 5: RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM BẬC 3

1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), (1)

a. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $\Delta' = b^2 - 3ac$

• Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$.

• Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$.

b. Trong trường hợp $\Delta' > 0$, gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1), trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $y' = 0$.

Ta có $f(x) = (mx + n) \cdot f'(x) + r(x)$, với $r(x)$ là nhị thức bậc nhất.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = f(x_1) = r(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = r(x_2) \end{cases}$$

Suy ra tọa độ A, B thỏa mãn phương trình $y = r(x)$.

Do đó phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị A, B là $y = r(x)$.

Công thức tính nhanh: Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị, của đồ thị hàm số (1)

là: $y = r(x) = -\frac{2\Delta'}{9a}x + \frac{9ad - bc}{9a}$

Cách dùng MTCT

- Nhập biểu thức $ax^3 + bx^2 + cx + d - (3ax^2 + 2bx + c)\left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right)$

- Cho $x = i$ ta được kết quả $Ai + B$. Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = Ax + B$.

- Câu 8:** Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4m + 3)x + 2021 - 2020m$ có cực trị?
- Câu 9:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?
- Câu 10:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là khoảng $(a; b)$. Giá trị $a.b$ bằng
- Câu 11:** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị là (C_m) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4, với $C(1; 4)$.
- Câu 12:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.
- Câu 13:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m + 1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?
- Câu 14:** Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.
- Câu 15:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + 2021$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ bằng
- Câu 16:** Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trên $(-10; 10)$ để đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ có điểm cực tiểu của nằm bên phải trục tung.

DẠNG 6: RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM TRỪNG PHƯƠNG

I: KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là (C) .

+) Đồ thị (C) có đúng một điểm cực trị khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

+) Đồ thị (C) có ba điểm cực trị khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ab < 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ và tam giác ABC luôn là tam giác cân tại A .

II. CÔNG THỨC NHANH MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP THƯỜNG GẶP

DỮ KIỆN	CÔNG THỨC NHANH	CHỨNG MINH
$\widehat{BAC} = \alpha$	$\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$	Áp dụng định lý cosin trong ΔABC ta có điều phải chứng minh.
ΔABC vuông	$b^3 + 8a = 0$	ΔABC vuông cân $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0$ $\Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$ Hoặc: $\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$
ΔABC đều	$b^3 + 24a = 0$	ΔABC đều $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0$ $\Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$ Hoặc $\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$
$S_{\Delta ABC}$	$S_{\Delta ABC} = \left a\right \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^5$	Gọi I là trung điểm đoạn BC . Khi đó: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AI = \sqrt{\frac{-b}{2a}} \cdot \left -\frac{b^2 - 4ac}{4a} - c\right $

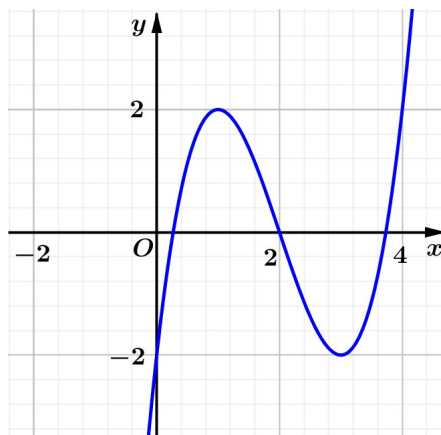
		$= a \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}} \right)^5$
Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$	Áp dụng công thức $R = \frac{AB^2}{2AI} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}} \Leftrightarrow R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$
Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC	$r = \frac{b^2}{4 a + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$	Áp dụng công thức $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}$ $\Leftrightarrow r = \frac{b^2}{4 a + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$
ΔABC có trọng tâm là gốc tọa độ O	$b^2 - 6ac = 0$	Áp dụng công thức tọa độ trọng tâm cho ΔABC ta có: $-\frac{b^2 - 4ac}{2a} + c = 0 \Leftrightarrow b^2 - 6ac = 0$
ΔABC có trực tâm là gốc tọa độ O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$	ΔABC có trực tâm là gốc tọa độ O khi $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a - 4ac = 0$
Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC	$x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c \right) y + c \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} \right) = 0$	
Phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị	$y = \frac{1}{2}bx^2 + c$	Lấy y chia y' ta được phần dư là $r(x) = \frac{1}{2}bx^2 + c$. Khi đó phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị là $y = r(x) = \frac{1}{2}bx^2 + c$

- Câu 17:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^4 - (m+1)x^2 + 4$ có ba điểm cực trị.
- Câu 18:** Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.
- Câu 19:** Cho hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m - 1$ có đồ thị (C_m) . Xác định tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.
- Câu 20:** Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.
- Câu 21:** Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$, với m là tham số thực. Xác định các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba cực trị đồng thời các điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

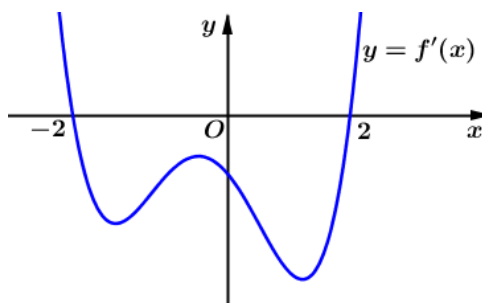
Câu 22: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1.

DẠNG 6: CỰC TRỊ CỦA HÀM $y = |f(x)|, y = f(|x|)$

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$.



Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có $f(-2) < 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$.

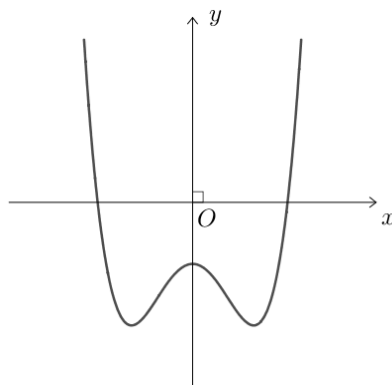
Câu 25: Cho hàm số $y = |x^3 - 3x|$. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	6	2	$+\infty$	

Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây



Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 29: Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 30: Cho hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ CỰC TRỊ – VD – VDC

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 3x - 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $g(x) = f(-x^3 + 3x^2 + m)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(1; 4)$?

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là

Trần_Tuấn_Anh

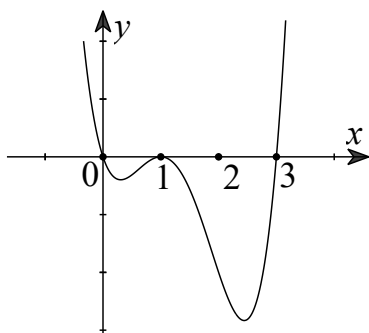
Câu 36: Cho $y = f(x)$ là hàm số bậc ba và có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			1				$+\infty$
	$-\infty$				-1		

Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-5; 5)$ để hàm số $g(x) = f(f(x) + m)$ có 4 điểm cực trị?

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



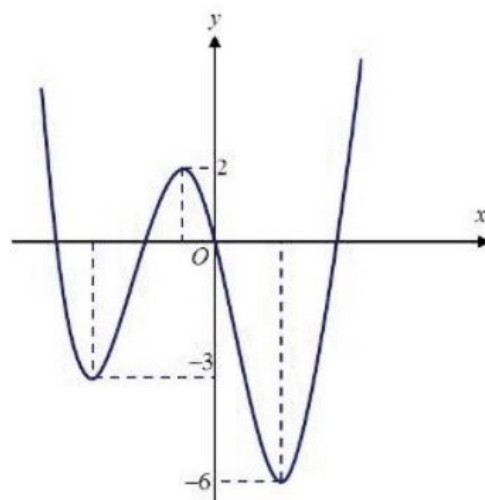
Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 39: Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

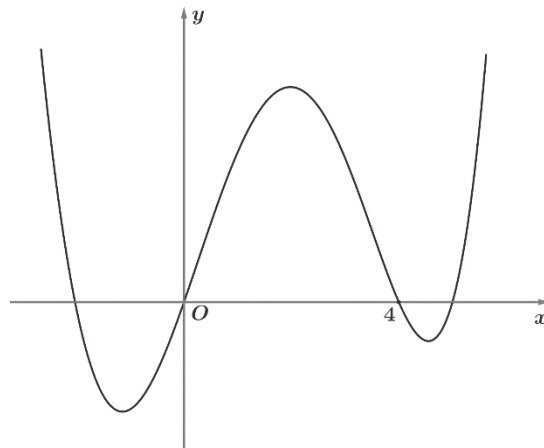
Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

Câu 41: Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:

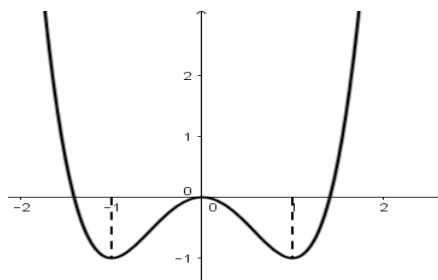
Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng



Câu 42: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



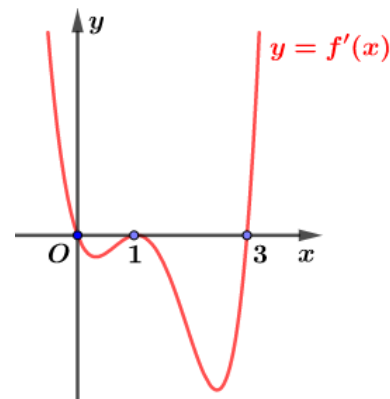
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + m)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(1; 4)$?

Câu 44: Cho hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị. Tổng các giá trị nguyên của m là:

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x-2)^2(x^2 + 3x - 4)$. Gọi S là tập các số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^2 - 4x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là

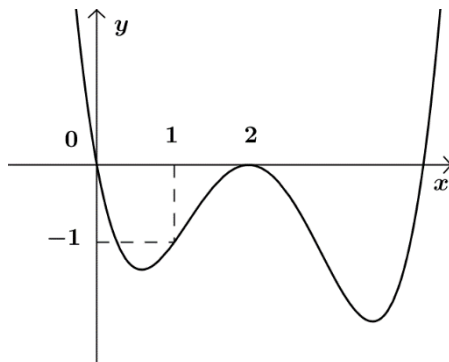
Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có đúng 3 điểm cực trị?



Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $g(x) = f(-x^4 + 2x^2 - m)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 3)$?

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $g(x) = f(x^4 + 2x^3 - mx^2)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 2)$?

Câu 50: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2024; 2024]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3x + m)$ là 5.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TỰ LUẬN

DẠNG 4: TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ CHO BỞI BIỂU THỨC.

Câu 1: Tìm cực trị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		6		-26		$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 6$ và đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Cách 2: $y'' = 6x - 6$.

$y''(-1) = -12 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, $y_{CD} = 6$.

$y''(3) = 12 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$, $y_{CT} = -26$.

Câu 2: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 3: Tìm cực trị của hàm số $y = -2x^3 - 3x^2 - 6x + 1$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -6x^2 - 6x - 6 = -6 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] < 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số đã cho không có cực trị.

Câu 4: Tìm cực trị của hàm số $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^2 - 3$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x^3 - 4x = 2x(x^2 - 2); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$			-3			-5	$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = -3$ và đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -5$.

Cách 2: $y'' = 6x^2 - 4$.

$y''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$, $y_{CD} = -3$.

$y''(\pm\sqrt{2}) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CT} = -5$.

Câu 5: Tìm cực trị của hàm số $y = -x^4 + 4x^2 - 5$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 8x; y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-1	-5	-1	$-\infty$		

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CD} = -1$ và đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -5$.

Cách 2: $y'' = -12x^2 + 8$.

$y''(\pm\sqrt{2}) = -16 < 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$, $y_{CD} = -1$.

$y''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = -5$.

Câu 6: Tìm cực trị của hàm số $y = x^4 + 4x^2 + 1$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 + 8x$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Cách 1: Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$		1		$+\infty$

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 1$.

Cách 2: $y'' = 12x^2 + 8$. $y''(0) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$, $y_{CT} = 1$.

Câu 7: Tìm cực trị của hàm số $y = (1-x)^3(3x-8)^2$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 15(1-x)^2(3x-8)(2-x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{3} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	2	$\frac{8}{3}$	$+\infty$
y'	–	0	–	0	+
y	$+\infty$		-4	0	$-\infty$

Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{8}{3}$, $y_{CD} = 0$ và hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$, $y_{CT} = -4$.

DẠNG 5: RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM BẬC 3

1. Cho hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$), (1)

a. Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$; $\Delta' = b^2 - 3ac$

• Hàm số không có điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0$.

• Hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$.

b. Trong trường hợp $\Delta' > 0$, gọi $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ là tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị hàm số (1), trong đó x_1, x_2 là 2 nghiệm phân biệt của phương trình $y' = 0$.

Ta có $f(x) = (mx + n).f'(x) + r(x)$, với $r(x)$ là nhị thức bậc nhất.

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 = f(x_1) = r(x_1) \\ y_2 = f(x_2) = r(x_2) \end{cases}.$$

Suy ra tọa độ A, B thỏa mãn phương trình $y = r(x)$.

Do đó phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị A, B là $y = r(x)$.

Công thức tính nhanh: Phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị, của đồ thị hàm số (1)

$$\text{là: } y = r(x) = -\frac{2\Delta'}{9a}x + \frac{9ad - bc}{9a}$$

Cách dùng MTCT

$$\text{- Nhập biểu thức } ax^3 + bx^2 + cx + d - (3ax^2 + 2bx + c)\left(\frac{x}{3} + \frac{b}{9a}\right)$$

- Cho $x = i$ ta được kết quả $Ai + B$. Suy ra phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị là $y = Ax + B$.

Câu 8: Với giá trị nào của tham số m thì hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4m + 3)x + 2021 - 2020m$ có cực trị?

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4m + 3)$.

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - (m^2 - 4m + 3) > 0$

$\Leftrightarrow 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{4}$. Vậy $m > \frac{3}{4}$ thì hàm số có cực đại, cực tiểu.

Câu 9: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

Lời giải

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Ta có $\Leftrightarrow (x - 1)[mx^2 - (m - 1)x + m + 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ mx^2 - (m - 1)x + m + 1 = 0(*) \end{cases}$

Phương trình có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt (*) có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m - (m - 1) + m + 1 \neq 0 \\ (m - 1)^2 - 4m(m + 1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m + 2 \neq 0 \\ -3m^2 - 6m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \frac{-3 - 2\sqrt{3}}{3} < m < \frac{-3 + 2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1$.

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 10: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành là khoảng $(a; b)$. Giá trị $a.b$ bằng

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1)$;

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và $y_{CD} \cdot y_{CT} < 0$.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x - m)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 1 \\ x = m - 1 \end{cases}$.

Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $y = -2x - m$.

Khi đó: $y_{CD} \cdot y_{CT} = y(m + 1) \cdot y(m - 1) = (-2m - 2 - m)(-2m + 2 - m) = (3m + 2)(3m - 2)$

$$y_{CD} \cdot y_{CT} < 0 \Leftrightarrow (3m+2)(3m-2) < 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < m < \frac{2}{3} \Rightarrow a = -\frac{2}{3}; b = \frac{2}{3}.$$

Khi đó: $a \cdot b = -\frac{4}{9}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị là (C_m) . Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số (C_m) có hai điểm cực trị A, B sao cho diện tích tam giác ABC bằng 4, với $C(1;4)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 6mx$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị có hai điểm cực trị khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt, khi $m \neq 0$

Tọa độ hai điểm cực trị là $A(0; 4m^2 - 2); B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2)$.

Ta có $\overline{AB} = (2m; -4m^3) \Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{1 + 4m^4}$.

Phương trình đường thẳng AB là: $2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$

Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB là: $d(C, AB) = \frac{|6 - 2m^2|}{\sqrt{1 + 4m^4}}$.

Suy ra, diện tích tam giác ABC là: $S = \frac{1}{2} \cdot d(C, AB) \cdot AB = |6m - 2m^3|$.

Từ giả thiết suy ra: $|6m - 2m^3| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}$.

Câu 12: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ có điểm cực đại và điểm cực tiểu đối xứng với nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

Lời giải

$y' = -3x^2 + 6mx; y' = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2m$.

Hàm số có CĐ, CT khi và chỉ khi PT $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó 2 điểm cực trị là: $A(0; -3m - 1); B(2m; 4m^3 - 3m - 1) \Rightarrow \overline{AB} = (2m; 4m^3)$.

Trung điểm I của AB có tọa độ: $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$.

Đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$ có một VTCP $\vec{u} = (8; -1)$.

Hai điểm A và B đối xứng với nhau qua d .

$$\Leftrightarrow \begin{cases} I \in d \\ AB \perp d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m + 8(2m^3 - 3m - 1) - 74 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16m^3 - 23m - 82 = 0 \\ -4m^3 + 16m = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2.$$

Vậy có 1 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 13: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về cùng một phía đối với trục hoành?

Lời giải

Tập xác định của hàm số đã cho là $\mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2 \text{ có } \Delta' = -2m^2 + 2m + 7.$$

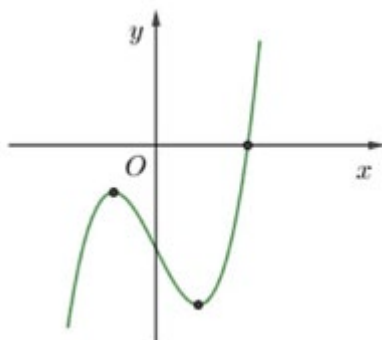
Để đồ thị hàm số $y = x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai cực trị thì y' đổi dấu hai lần, tức là y' có hai nghiệm phân biệt, tương đương

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{15}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{15}}{2}. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên được } m \in \{-1; 0; 1; 2\}.$$

Lúc này, hai nghiệm $x_1; x_2$ của y' lần lượt là hoành độ các điểm cực trị của hàm số.

Hai điểm cực trị đó nằm cùng 1 phía đối với trục hoành khi và chỉ khi $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, tương đương đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại đúng một điểm, tức là, phương trình

$$x^3 - (m+1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3 = 0 \text{ có duy nhất một nghiệm thực.}$$



Xét $m = -1$ thì phương trình là $x^3 - x + 2 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m = -1$.

Xét $m = 0$ thì phương trình là $x^3 - x^2 - 2x + 3 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m = 0$.

Xét $m = 1$ thì phương trình là $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$: phương trình này có ba nghiệm thực phân biệt nên loại $m = 1$.

Xét $m = 2$ thì phương trình là $x^3 - 3x^2 + 2x - 1 = 0$: phương trình này có đúng một nghiệm thực nên chọn $m = 2$.

Đáp số: $m \in \{-1; 0; 2\}$

Câu 14: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ có cực trị và giá trị của hàm số tại các điểm cực đại, điểm cực tiểu nhận giá trị dương.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ (1).

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases} (*)$$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm CĐ, CT của hàm số là:

$$y = \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3} \right)x + \frac{1}{3}m(m+2).$$

Gọi $A(x_1; y_1); B(x_2; y_2)$ là hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số, khi đó để hàm số có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu dương thì $y_1 + y_2 > 0$ và đồ thị hàm số

$y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất.

Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 2m$.

$$\begin{aligned} \text{Nên } y_1 + y_2 > 0 &\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3} \right)(x_1 + x_2) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0 \\ &\Leftrightarrow \left(-\frac{2}{3}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{4}{3} \right)(2m) + \frac{2}{3}m(m+2) > 0 \Leftrightarrow 2m(-2m^2 + 3m + 6) > 0 \\ &\Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{4} \right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{57}}{4} \right) (**). \end{aligned}$$

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình

$y = 0$ có 1 nghiệm đơn duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0$ (2) có một nghiệm đơn duy nhất.

$$\text{Ta có } \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0 \end{cases} (3)$$

Để phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện

$$\text{là } \Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3} (***)$$

Kết hợp (*), (**), (***) ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Cách 2:

Ta có : $y' = x^2 - 2mx + m + 2$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m + 2 = 0$ (1).

Để hàm số có hai cực trị thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases} (*).$$

Để hàm số có giá trị cực đại, cực tiểu dương thì đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất và giá trị tại điểm uốn luôn dương.

Để đồ thị hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x$ cắt trục hoành tại 1 điểm duy nhất thì phương trình $y = 0$ có 1 nghiệm duy nhất, khi đó $\frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0$ (2) có một nghiệm đơn duy nhất.

$$\text{Ta có } \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3mx + 3m + 6) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3mx + 3m + 6 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

Để phương trình (1) có một nghiệm duy nhất thì phương trình (3) vô nghiệm, khi đó điều kiện

$$\text{là } \Delta = 9m^2 - 12m - 24 < 0 \Leftrightarrow \frac{2-2\sqrt{7}}{3} < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3} \quad (**)$$

Để giá trị tại điểm uốn luôn dương: $y' = x^2 - 2mx + m + 2, y'' = 2x - 2m$.

$$y'' = 0 \Leftrightarrow 2x - 2m = 0 \Leftrightarrow x = m. \text{ Ta có: } y_{(m)} > 0 \Rightarrow \frac{m^3}{3} - m^3 + m(m+2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m(-2m^2 + 3m + 6) > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; \frac{3-\sqrt{57}}{3}\right) \cup \left(0; \frac{3+\sqrt{57}}{3}\right) \quad (***)$$

Kết hợp (*), (**), (***) ta được tập các giá trị của m thỏa mãn là $2 < m < \frac{2+2\sqrt{7}}{3}$.

Câu 15: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2021$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ bằng

Lời giải

Ta có: $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

Để hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 2$ thì $\begin{cases} \Delta' > 0 & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 2 & (2) \end{cases}$.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow -2m^2 + 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{6}}{2} < m < \frac{2+\sqrt{6}}{2} \quad (*)$$

$$\text{Mặt khác ta có } x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \quad (3).$$

$$\text{Từ } (2) \text{ và } (3) \text{ ta có } x_1 = \frac{2}{m}.$$

$$\text{Vì } y'(x_1) = 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{2}{m}\right)^2 - 2(m-1) \cdot \frac{2}{m} + 3m - 6 = 0 \Leftrightarrow 3m^2 - 10m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Vậy tổng bình phương tất cả các giá trị của m thỏa mãn YCBT là: $2^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{52}{9}$.

Câu 16: Tìm tổng tất cả các giá trị nguyên của tham số m trên $(-10;10)$ để đồ thị hàm số $y = x^3 + x^2 + mx - 1$ có điểm cực tiểu của nằm bên phải trục tung.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 + 2x + m$

Để hàm số có cực tiểu, tức hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

Điều này tương đương với pt $3x^2 + 2x + m = 0$ (1) có hai nghiệm pb; có hai nghiệm phân biệt khi

$$\Delta' = 1 - 3m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{1}{3}.$$

Khi đó (1) có hai nghiệm phân biệt x_{CD}, x_{CT} là hoành độ hai điểm cực trị. Theo định lý Viet ta

$$\text{có } \begin{cases} x_{CD} + x_{CT} = -\frac{2}{3} < 0 \quad (2) \\ x_{CD} \cdot x_{CT} = \frac{m}{3} \quad (3) \end{cases}, \text{ trong đó } x_{CD} < x_{CT} \text{ vì hệ số của } x^3 \text{ lớn hơn } 0.$$

Để cực tiểu của đồ thị hàm số nằm bên phải trục tung thì phải có: $x_{CT} > 0$, kết hợp (2) và (3)

$$\text{suy ra (1) có hai nghiệm trái dấu } \Leftrightarrow x_{CD} \cdot x_{CT} = \frac{m}{3} < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Mà $m \in (-10;10), m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-9; -8; -7; \dots; -1\}$.

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn YCBT là: -45 .

DẠNG 6: RIÊNG VỀ CỰC TRỊ HÀM TRỪNG PHƯƠNG

I: KIẾN THỨC CẦN NHỚ

Cho hàm số: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị là (C) .

+) Đồ thị (C) có đúng một điểm cực trị khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm $\Leftrightarrow ab \geq 0$.

+) Đồ thị (C) có ba điểm cực trị khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow ab < 0$.

Khi đó ba điểm cực trị là: $A(0; c)$, $B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$, $C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ với $\Delta = b^2 - 4ac$

Độ dài các đoạn thẳng: $AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}$, $BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$ và tam giác ABC luôn là tam giác cân tại A .

II. CÔNG THỨC NHANH MỘT SỐ TRƯỜNG HỢP THƯỜNG GẶP

DỮ KIỆN	CÔNG THỨC NHANH	CHỨNG MINH
$\widehat{BAC} = \alpha$	$\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} \Leftrightarrow \tan \frac{\alpha}{2} = -\frac{8a}{b^3}$	Áp dụng định lý cosin trong $\triangle ABC$ ta có điều phải chứng minh.

ΔABC vuông	$b^3 + 8a = 0$	ΔABC vuông cân $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = 2\left(\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}\right)$ $\Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{b}{2a} = 0$ $\Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$ Hoặc: $\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a = 0$
ΔABC đều	$b^3 + 24a = 0$	ΔABC đều $\Leftrightarrow BC^2 = AB^2$ $\Leftrightarrow -\frac{2b}{a} = \frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a} \Leftrightarrow \frac{b^4}{16a^2} + \frac{3b}{2a} = 0$ $\Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$ Hoặc $\cos \alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b^3 + 24a = 0$
$S_{\Delta ABC}$	$S_{\Delta ABC} = a \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}} \right)^5$	Gọi I là trung điểm đoạn BC . Khi đó: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AI = \sqrt{\frac{-b}{2a}} \cdot \left -\frac{b^2 - 4ac}{4a} - c \right $ $= a \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}} \right)^5$
Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC	$R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$	Áp dụng công thức $R = \frac{AB^2}{2AI} = \frac{AB \cdot BC \cdot AC}{4S_{\Delta ABC}} \Leftrightarrow R = \frac{b^3 - 8a}{8 a b}$
Bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC	$r = \frac{b^2}{4 a + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$	Áp dụng công thức $r = \frac{S_{\Delta ABC}}{p}$ $\Leftrightarrow r = \frac{b^2}{4 a + \sqrt{16a^2 - 2ab^3}}$
ΔABC có trọng tâm là gốc tọa độ O	$b^2 - 6ac = 0$	Áp dụng công thức tọa độ trọng tâm cho ΔABC ta có: $-\frac{b^2 - 4ac}{2a} + c = 0 \Leftrightarrow b^2 - 6ac = 0$
ΔABC có trục tâm là gốc tọa độ O	$b^3 + 8a - 4ac = 0$	ΔABC có trục tâm là gốc tọa độ O khi $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow b^3 + 8a - 4ac = 0$
Phương trình đường tròn		

ngoại tiếp ΔABC	$x^2 + y^2 - \left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a} + c\right)y + c\left(\frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}\right) = 0$	
Phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị	$y = \frac{1}{2}bx^2 + c$	Lấy y chia y' ta được phần dư là $r(x) = \frac{1}{2}bx^2 + c$. Khi đó phương trình parabol đi qua 3 điểm cực trị là $y = r(x) = \frac{1}{2}bx^2 + c$

Câu 17: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = 2x^4 - (m+1)x^2 + 4$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Cách 1:

Ta có $y' = 8x^3 - 2(m+1)x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{(m+1)}{4} \end{cases} (1).$$

Hàm số có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow \frac{(m+1)}{4} > 0 \Leftrightarrow m > -1.$$

Cách 2:

Hàm số đã cho có 3 cực trị khi và chỉ khi $ab < 0 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Câu 18: Cho hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông cân.

Lời giải

Cách 1:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4(m+1)x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4(m+1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m+1 \end{cases}.$$

Đồ thị số có ba điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > -1$ (*).

Khi đó, ba điểm cực trị là: $A(0; m^2)$, $B(\sqrt{m+1}; -2m-1)$, $C(-\sqrt{m+1}; -2m-1)$

Ta thấy $A \in Oy$, B, C đối xứng nhau qua Oy nên tam giác ABC cân tại A .

Do đó tam giác ABC vuông cân tại A khi và chỉ khi tam giác ABC vuông tại A

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0.$$

$$\overrightarrow{AB} = (\sqrt{m+1}; -(m+1)^2), \quad \overrightarrow{AC} = (-\sqrt{m+1}; -(m+1)^2).$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow (m+1)^4 - (m+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 0 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$$

Vậy $m = 0$ là giá trị cần tìm.

Chú ý có thể sử dụng điều kiện sau:

Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BC thì $H(0; -2m-1)$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi $AH = BH \Leftrightarrow \sqrt{(m+1)^4} = \sqrt{m+1}$
 $\Leftrightarrow m = 0$ thỏa mãn (*).

Cách 2:

Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1$

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác vuông cân khi: $b^3 + 8a = 0 \Leftrightarrow -8(m+1)^3 + 8 = 0$
 $\Leftrightarrow m = 0$.

Câu 19: Cho hàm số $y = x^4 - 4(m-1)x^2 + 2m-1$ có đồ thị (C_m) . Xác định tham số m để đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác đều.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = 4x^3 - 8(m-1)x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 8(m-1)x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 2(m-1) \end{cases}$$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2(m-1) > 0 \Leftrightarrow m > 1$

Khi đó đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là:

$A(0; 2m-1)$; $B(\sqrt{2(m-1)}; -4(m-1)^2 + 2m-1)$; $C(-\sqrt{2(m-1)}; -4(m-1)^2 + 2m-1)$ và tam giác ABC luôn là tam giác cân tại A vì: $AB = AC = \sqrt{2(m-1) + 16(m-1)^4}$; $BC = 2\sqrt{2(m-1)}$.

Do đó tam giác ABC đều khi $AB = BC \Leftrightarrow \sqrt{2(m-1) + 16(m-1)^4} = 2\sqrt{2(m-1)}$.

$$\Leftrightarrow 16(m-1)^4 - 6(m-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 = 0 \\ (m-1)^3 = \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \text{ (loại)} \\ m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}.$$

Vậy $m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}$ là giá trị cần tìm.

Cách 2:

Điều kiện để đồ thị hàm trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị là $ab < 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Khi đó ba điểm cực trị lập thành tam giác đều khi: $b^3 + 24a = 0$

$$\Leftrightarrow -64(m+1)^3 + 24 = 0 \Leftrightarrow m = 1 + \frac{\sqrt[3]{3}}{2}.$$

Câu 20: Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Cách 1:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = x^4 + 2mx^2 - 1$; $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases}$.

Đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m < 0$.

Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{cases}$.

Khi đó đồ thị hàm số đã cho có ba điểm cực trị là: $A(0; -1)$, $B(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$, $C(\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$.

Gọi H là trung điểm BC nên $H(0; -m^2 - 1)$.

$$AH = \sqrt{(-m^2)^2} = m^2; BC = \sqrt{(2\sqrt{-m})^2} = 2\sqrt{-m}.$$

Vì tam giác ABC cân tại A nên $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot m^2 \cdot 2\sqrt{-m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy $m = -2$.

Cách 2:

Hàm số có ba điểm cực trị khi $m < 0$.

Áp dụng công thức: $S_{\triangle ABC} = |a| \left(\sqrt{-\frac{b}{2a}} \right)^5$,

ta có: $S_{\triangle ABC} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\sqrt{-\frac{2m}{2}} \right)^5 = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{-m} = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2$.

Vậy $m = -2$ là giá trị cần tìm.

Câu 21: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$, với m là tham số thực. Xác định các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số có ba cực trị đồng thời các điểm cực trị tạo thành một tam giác có bán kính đường tròn ngoại tiếp bằng 1.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 4mx$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}.$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt và y' đổi dấu qua các nghiệm đó $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là:

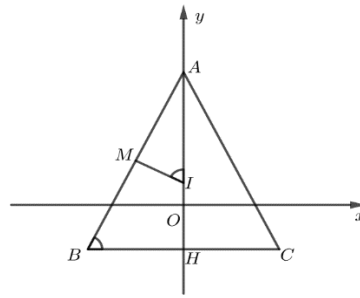
$$A(0; m-1), B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1).$$

Cách 1: Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}|y_B - y_A| \cdot |x_C - x_B| = m^2\sqrt{m}$ và $AB = \sqrt{m^2 + m}, BC = 2\sqrt{m}$.

$$\text{Suy ra bán kính đường tròn ngoại tiếp } R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{(m^2 + m) \cdot 2\sqrt{m}}{4m^2\sqrt{m}}.$$

$$R = 1 \Leftrightarrow \frac{(m^2 + m)\sqrt{m}}{2m^2\sqrt{m}} = 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{2m} = 1 \Leftrightarrow m = 1.$$

Cách 2: Gọi M, H lần lượt là trung điểm của AB, BC và I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC .



$$AB = \sqrt{m^2 + m}, AH = m^2. \text{ Ta có } \Delta AMI \text{ đồng dạng } \Delta AHB \Rightarrow R = \frac{AB^2}{2AH}.$$

$$R = 1 \Leftrightarrow \frac{AB^2}{2AH} = 1 \Leftrightarrow \frac{m^2 + m}{2m^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{m+1}{2m} = 1 \Leftrightarrow m = 1,.$$

Vậy $m = 1$.

Câu 22: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số đã cho có 3 điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm cực trị này có bán kính bằng 1.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$$

Hàm số có 3 điểm cực trị khi $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$

$$\text{Khi đó } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}.$$

Khi đó tọa độ ba điểm cực trị: $A(0; m)$, $B(-\sqrt{m}; -m^2 + m)$, $C(\sqrt{m}; -m^2 + m)$.

Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Ta có $H(0; -m^2 + m)$.

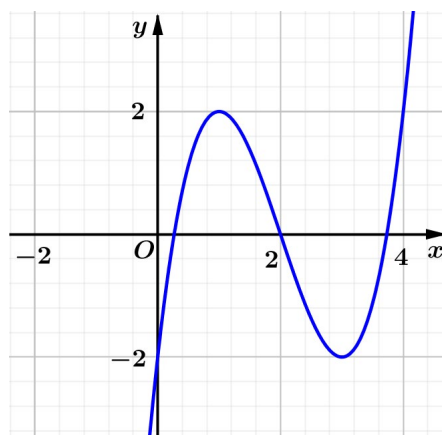
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AH \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow AB^2 = 2AH \cdot R \text{ trong đó } \begin{cases} AH = m^2 \\ AB = \sqrt{m + m^4} \end{cases}.$$

$$\text{Suy ra } m + m^4 = 2m^2 \Leftrightarrow m(m^3 - 2m + 1) = 0 \Leftrightarrow m(m-1)(m^2 + m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Đổi chiếu điều kiện ta được } S = \left\{ 1; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right\}.$$

DẠNG 6: CỰC TRỊ CỦA HÀM $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$

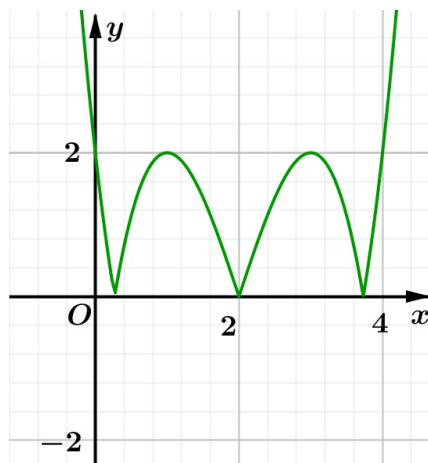
Câu 23: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$.



Lời giải

$$\text{Ta có } |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{khi } f(x) < 0 \end{cases}.$$

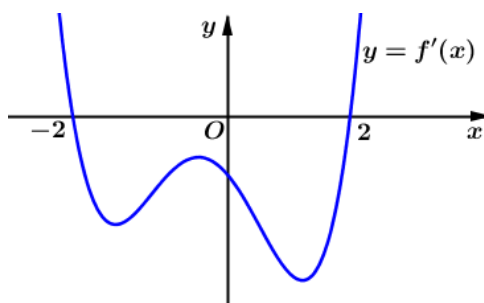
Do đó đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Từ đồ thị suy ra hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

CÔNG THỨC TÍNH NHANH: Số điểm cực trị của hàm số $|f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ và số lần đổi dấu của hàm số $f(x)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có $f(-2) < 0$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên dưới.



Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x) = |f(x)|$.

Lời giải

Vì $y = f(x)$ là hàm đa thức nên liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và $f(-2) < 0$, ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(-2)$	$f(2)$	$+\infty$
$ f(x) $				

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số $g(x) = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 25: Cho hàm số $y = |x^3 - 3x|$. Tìm số điểm cực trị của hàm số.

Lời giải

+) Đặt $f(x) = x^3 - 3x$, tập xác định $D = \mathbb{R}$.

+) Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

+) Xét $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	2	$\searrow$ 0	-2	$\nearrow$ 0	$+\infty$
$ f(x) $	$+\infty$	$\searrow$ 0	2	$\searrow$ 0	2	$\searrow$ 0	$+\infty$

+) Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$ 6	$\searrow$ 2	$\nearrow$ $+\infty$	

Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

Xét hàm số $y = g(x) = f(|x-3|)$.

Ta có $g'(x) = [f(|x-3|)]' = (|x-3|)' \cdot f'(|x-3|) = \frac{x-3}{|x-3|} f'(|x-3|)$.

Có $g'(x)$ không xác định tại $x = 3$.

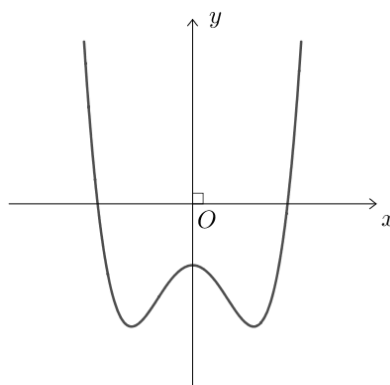
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x-3|) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x-3| = -2 \\ |x-3| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	7	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$		CĐ		$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
			CT		CT

Dựa vào BBT ta thấy hàm số $y = f(|x-3|)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây

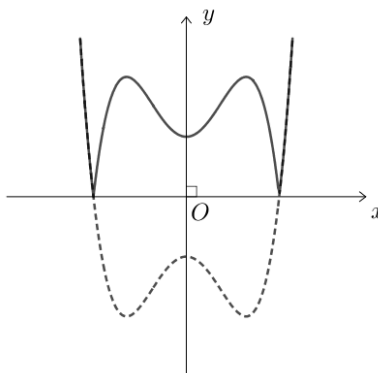


Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = |f(x)|$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{ khi } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{ khi } f(x) < 0 \end{cases}.$$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ như sau:



Dựa vào đồ thị, ta kết luận đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 28: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tìm tất cả các giá trị của m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m)$.

Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có hai điểm cực trị cùng nằm bên phải trục tung

$\Leftrightarrow f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ 2m-1 > 0 \\ 2-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ \frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > \frac{5}{4} \\ \frac{1}{2} < m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

Câu 29: Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

Gọi (C) là đồ thị hàm số $y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		$m-5$	m		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đồ thị $(C): y = f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$ luôn có 3 cực trị.

Do đồ thị (H): $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị khi phương trình $y = f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m - 32 < 0 \leq m - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 5 \leq m < 32 \end{cases}.$$

Mà $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m \in \{5; 6; \dots; 31\}$

Vậy có $31 - 5 + 1 = 27$ giá trị m thỏa yêu cầu bài.

Câu 30: Cho hàm số $y = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có 3 điểm cực trị.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^3 - (2m+1)x^2 + 3mx - 5$, có $f'(x) = 3x^2 - 2(2m+1)x + 3m$.

Hàm số $y = f(|x|) = |x|^3 - (2m+1)x^2 + 3m|x| - 5$ có 3 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có đúng một cực trị dương. Khi đó phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 sao

$$\text{cho } x_1 \leq 0 < x_2. \Rightarrow x_1 = 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 0 \\ \frac{2(2m+1)}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

$$+) x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 3.3m < 0 \Leftrightarrow m < 0.$$

Kết hợp 2 trường hợp ta được: $m \leq 0$.

Vậy $m \in (-\infty; 0]$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 31: Cho hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - 5x^2 + (m+3)x + 3$. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị?

Lời giải

- Tập xác định của các hàm số $y = f(x)$ và $y = f(|x|)$ đều là $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = f(|x|)$ có đúng 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ hàm số $y = f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương.

- Xét $m = 1$, ta có $f(x) = -5x^2 + 4x + 3$ có đúng một điểm cực trị là $x = \frac{2}{5} > 0$. Khi đó hàm số

$y = f(|x|) = -5x^2 + 4|x| + 3$ có đúng 3 điểm cực trị là $x = -\frac{2}{5}; x = 0; x = \frac{2}{5}$. Nên $m = 1$ thỏa mãn.

- Xét $m \neq 1$ thì $f(x)$ là hàm số bậc 3, ta có $f'(x) = 3(m-1)x^2 - 10x + m + 3$.

Hàm số $y = f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị dương khi và chỉ khi $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 \leq 0 < x_2$.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3(m-1)x^2 - 10x + m + 3 = 0$$

$$+) x_1 = 0 < x_2 \Leftrightarrow \begin{cases} m+3=0 \\ \frac{10}{3(m-1)} > 0 \end{cases},$$

$$+) x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 3(m-1)(m+3) < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 1.$$

Kết hợp ta thấy tất cả có 4 số nguyên thỏa mãn bài toán là: $m = -2, m = -1, m = 0, m = 1$.

BÀI TẬP TỔNG HỢP VỀ CỰC TRỊ – VD – VDC

Câu 32: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 3x - 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $g(x) = f(-x^3 + 3x^2 + m)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(1; 4)$?

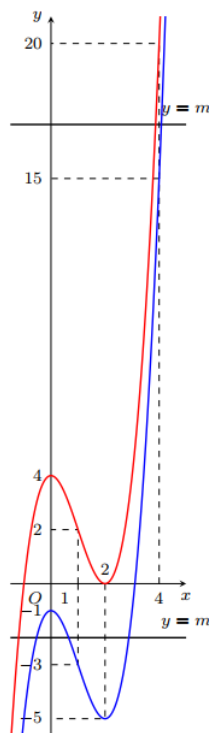
Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -1. \end{cases}$$

$$\text{Mặt khác } g'(x) = (-3x^2 + 6x)f'(-x^3 + 3x^2 + m) \text{ suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \in (1; 4) \\ f'(-x^3 + 3x^2 + m) = 0. \end{cases}$$

$$\text{Lại có } f'(-x^3 + 3x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^3 + 3x^2 + m = 4 \\ -x^3 + 3x^2 + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = x^3 - 3x^2 + 4 \\ m = x^3 - 3x^2 - 1. \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ và $y = x^3 - 3x^2 - 1$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ.



Yêu cầu bài toán tương đương $f'(-x^3 + 3x^2 + m) = 0$ có đúng một nghiệm đơn khác 2 trong khoảng $(1; 4)$ suy ra $\begin{cases} -3 \leq m \leq 0 \\ 15 \leq m < 20 \end{cases}$. Vậy có tất cả 9 giá trị.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2 + 10x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị?

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = x^2 + 10x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -10 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } y' = (4x^3 - 16x)f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 - 16x = 0 \\ f'(x^4 - 8x^2 + m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x^4 - 8x^2 + m = 0 \\ x^4 - 8x^2 + m = -10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ m = -x^4 + 8x^2 \quad (1) \\ m + 10 = -x^4 + 8x^2 \quad (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = -x^4 + 8x^2$.

$$\text{Ta có } g'(x) = -4x^3 + 16x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$g(x)$								

Hàm số $y = f(x^4 - 8x^2 + m)$ có đúng 9 điểm cực trị khi (1) có hai nghiệm hoặc ba nghiệm trong đó có 1 nghiệm bằng 0 và (2) có 4 nghiệm phân biệt. Do đó dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x) = -x^4 + 8x^2$ ta có

$$\begin{cases} 0 < m + 10 < 16 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10 < m < 6 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -10 < m \leq 0. \text{ Vì } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m \in \{-9; -8; \dots; -1; 0\}.$$

Vậy có 10 giá trị nguyên m .

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Đặt $g(x) = f(x^2 - 8x + m)$

$$f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2-8x+m-1)^2(x^2-8x+m-2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 8x + m = 0 & (2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2 - 8x + m - 1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là

Lời giải

Ta có $g'(x) = (3x^2 - 6x) \cdot f'(x^3 - 3x^2 + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases}$$

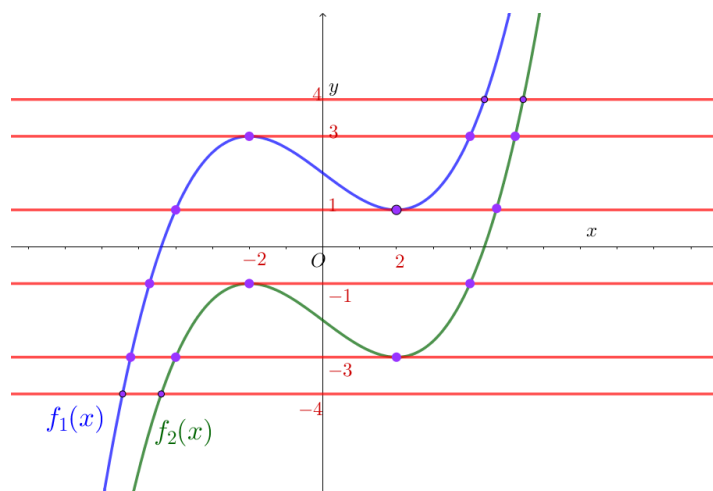
Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 1$ dấu của $f'(x^3 - 3x^2 + m)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ và $x^3 - 3x^2 + m = 2$ phải có ba nghiệm phân biệt.

Xét hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = -3x^2 + 6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$			1				$+\infty$
	$-\infty$			-1			



Với $\begin{cases} m \in (-5; 5) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$ và nhìn vào đồ thị, ta thấy hàm số $g(x)$ có 4 điểm cực trị $\Leftrightarrow g'(x) = 0$ có 4 nghiệm bội lẻ $\Leftrightarrow m \in \{-4; -3; -1; 1; 3; 4\}$.

Câu 37: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x^2 - 4x)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(2x^2 - 12x + m)$ có đúng 5 điểm cực trị?

Lời giải.

Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x^2 - 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}, \text{ trong đó } x = -1 \text{ là nghiệm kép.}$$

$$g(x) = f(2x^2 - 12x + m) \Rightarrow g'(x) = (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m)$$

$$\text{Xét } g'(x) = 0 \Leftrightarrow (4x - 12)f'(2x^2 - 12x + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \\ 2x^2 - 12x + m = 0 \\ 2x^2 - 12x + m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ 2x^2 - 12x + m = -1 \text{ (I)} \\ 2x^2 - 12x = -m \text{ (1)} \\ 2x^2 - 12x = 4 - m \text{ (2)} \end{cases}$$

nên ta loại phương trình $2x^2 - 12x + m = -1$

Xét hàm số $y = 2x^2 - 12x$ có đồ thị.

$$y' = 4x - 12$$

Ta có bảng biến thiên

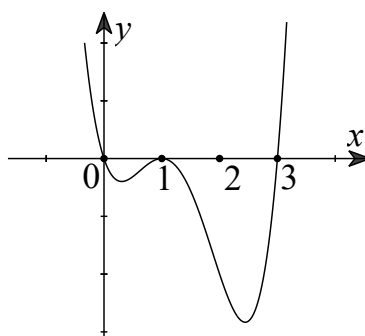
x	$-\infty$		3		$+\infty$
y'		-	0	+	
y	$+\infty$				$+\infty$
			-18		

Để $g(x)$ có đúng 5 điểm cực trị thì mỗi phương trình (1); (2) đều có hai nghiệm phân biệt khác 3.

Do đó, mỗi đường thẳng $y = 4 - m$ và $y = -m$ phải cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt có hoành độ khác 3. Nhận xét: đường thẳng $y = 4 - m$ luôn nằm trên đường thẳng $y = -m$.

Ta có: $-18 < -m \Leftrightarrow m < 18$. Vậy có 17 giá trị m nguyên dương.

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Tìm m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

Lời giải

Do hàm số $y = f(x^2 + m)$ là hàm chẵn nên hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi hàm số này có đúng 1 điểm cực trị dương.

$$y = f(x^2 + m) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2 + m)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 1 - m \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$$

Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ tiếp xúc trục hoành tại điểm có hoành độ là $x = 1$ nên các nghiệm của pt $x^2 = 1 - m$ không làm $f'(x^2 + m)$ đổi dấu khi x đi qua, do đó các điểm cực trị của hàm

$$\text{số } y = f(x^2 + m) \text{ là các điểm nghiệm của hệ } \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 = 3 - m \end{cases}$$

Hệ trên có duy nhất nghiệm dương khi và chỉ khi $\begin{cases} -m \leq 0 \\ 3-m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3.$

Câu 39: Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2-4x+3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1, x = 2 \text{ là nghiệm kép nên khi qua giá trị } x = 2 \text{ thì } f'(x) \\ x = 3 \end{cases}$

không bị đổi dấu.

Đặt $g(x) = f(x^2-10x+m+9)$ khi đó $g'(x) = f'(u) \cdot (2x-10)$ với $u = x^2-10x+m+9$.

$$\text{Nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-10=0 \\ (x^2-10x+m+9-2)^2=0 \\ x^2-10x+m+9=1 \\ x^2-10x+m+9=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ (x^2-10x+m+9-2)^2=0 \\ x^2-10x+m+8=0 \text{ (1)} \\ x^2-10x+m+6=0 \text{ (2)} \end{cases}$$

Hàm số $y = f(x^2-10x+m+9)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

Hay phương trình (1) và phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \\ h(5) \neq 0 \\ p(5) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 17-m > 0 \\ 19-m > 0 \\ -17+m \neq 0 \\ -19+m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 17.$$

Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 40: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2-2(m+1)x+m^2-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \\ x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Có $x = 2$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm $x \leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

$$\text{Với } m = 1, \text{ có } x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (TM)}$$

$$\text{Với } m = -1, \text{ có } x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

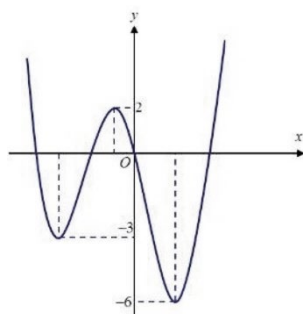
Trường hợp 2: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm âm

$$\text{Điều kiện tương đương } \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 1^2 - 2(m+1) \cdot 1 + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \begin{cases} m \in (-1; 1) \\ m \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$$

$$\text{Vì } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$$

Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 41: Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phân tử trong tập S bằng

Lời giải

$$\text{Đặt } g(x) = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right| \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x+2018) \left[f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right]}{\left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|}$$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+2018) = 0 & (1) \\ f(x+2018) = -\frac{m^2}{3} & (2) \end{cases}$$

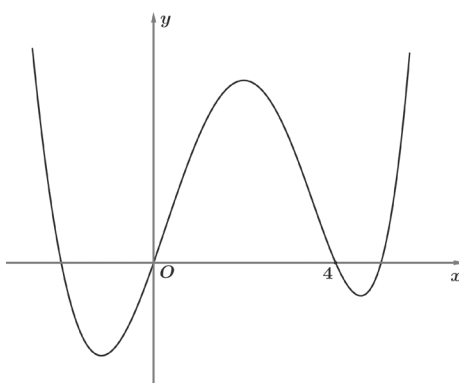
Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

Vậy để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm đơn

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m^2}{3} > 2 \\ -6 < -\frac{m^2}{3} \leq -3 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow m \in \{3; 4\}.$$

Vậy tổng các phân tử là 7.

Câu 42: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ là



Lời giải

Từ đồ thị ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	a	b	c	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Ta có $g(x) = f(x^3 + 3x^2) \Rightarrow g'(x) = (3x^2 + 6x) \cdot f'(x^3 + 3x^2)$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 6x = 0 \\ f'(x^3 + 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x^3 + 3x^2 = a; a < 0 \\ x^3 + 3x^2 = b; 0 < b < 4 \\ x^3 + 3x^2 = c; c > 4 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 3x^2 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 + 6x$. Cho $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$			-2			0			$+\infty$		
$h'(x)$		+		0		-	0		+			
$h(x)$					4				0			$+\infty$
	$-\infty$											

Ta có đồ thị của hàm $h(x) = x^3 + 3x^2$ như sau

Từ đồ thị ta thấy:

Đường thẳng $y = a$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

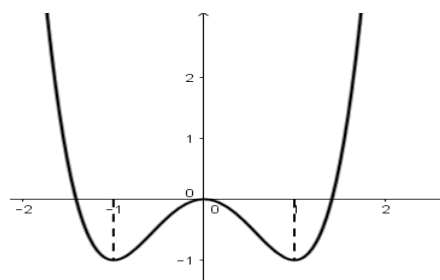
Đường thẳng $y = b$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 3 điểm.

Đường thẳng $y = c$ cắt đồ thị hàm số $y = h(x)$ tại 1 điểm.

Như vậy phương trình $g'(x) = 0$ có tất cả 7 nghiệm đơn phân biệt.

Vậy hàm số $g(x) = f(x^3 + 3x^2)$ có 7 cực trị.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y = f'(x)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. và có đồ thị như hình vẽ.



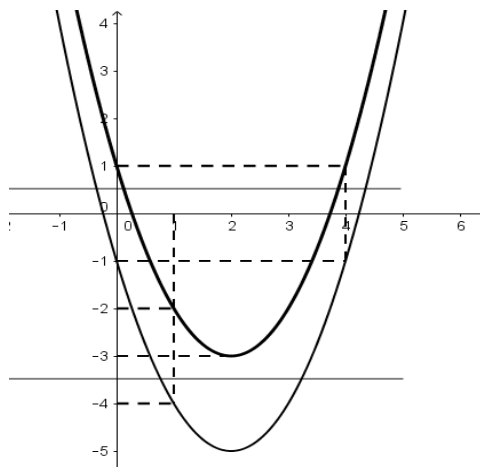
Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^2 - 4x + m)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(1; 4)$?

Lời giải

Ta có $g'(x) = 2(x - 2) \cdot f'(x^2 - 4x + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x - 2) \cdot f'(x^2 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \in (1; 4) \\ x^2 - 4x + m = 1 \\ x^2 - 4x + m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 4x - 1 = -m \\ x^2 - 4x + 1 = -m \end{cases}$$

Vẽ đồ thị hai hàm số $y = x^2 - 4x - 1$ và $y = x^2 - 4x + 1$ lên cùng một mặt phẳng tọa độ. ■



Yêu cầu bài toán tương đương $f'(x^2 - 4x + m) = 0$ có đúng một nghiệm đơn khác 2 trong khoảng $(1; 4)$ suy ra: $\begin{cases} -4 \leq -m \leq -3 \\ -1 \leq -m < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq m \leq 4 \\ -1 < m \leq 1 \end{cases}$.

Vậy có tất cả 4 giá trị.

Câu 44: Cho hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị. Tổng các giá trị nguyên của m là:

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$,

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2).$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$m-6$	$m-1$	$m-33$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m - 6 < 0 < m - 1 \Leftrightarrow 1 < m < 6$ mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{2, 3, 4, 5\}$

Tổng các giá trị nguyên của m là 14.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = (x-2)^2(x^2 + 3x - 4)$. Gọi S là tập các số nguyên $m \in [-10; 10]$ để hàm số $y = f(x^2 - 4x + m)$ có đúng 3 điểm cực trị. Số phần tử của S bằng

Lời giải:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 0 \\ x^2 + 3x - 4 = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } y = g(x) = f(x^2 - 4x + m)$$

$$g'(x) = (2x - 4)f'(x^2 - 4x + m)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ f'(x^2 - 4x + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ (x^2 - 4x + m - 2)^2 = 0 \\ h_1(x) = x^2 - 4x + m - 1 = 0 \quad (1) \\ h_2(x) = x^2 - 4x + m + 4 = 0 \quad (2) \end{cases}.$$

Hàm số có 3 cực trị khi một trong 2 phương trình và có 2 nghiệm phân biệt khác 2 và phương trình có lại có 1 nghiệm hoặc vô nghiệm.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} h_1(2) \neq 0 \\ \Delta_1 > 0 \\ \Delta_2 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} h_2(2) \neq 0 \\ \Delta_1 \leq 0 \\ \Delta_2 > 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m < 5 \\ m \geq 3 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 5.$$

Mà $m \in [-10; 10]$ do đó $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ có 5 phần tử.

Câu 46: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$, với $\forall x \in \mathbb{R}$. Số giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(x^3 - 3x^2 + m)$ có 8 điểm cực trị là

Lời giải

$$\text{Ta có } g'(x) = (3x^2 - 6x) \cdot f'(x^3 - 3x^2 + m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x^3 - 3x^2 + m = 1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 0 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases}.$$

Vì khi đi qua các nghiệm của phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 1$ (nếu có) dấu của $f'(x^3 - 3x^2 + m)$ không đổi nên dấu của $g'(x)$ chỉ phụ thuộc các nghiệm của hai phương trình còn lại.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 điểm cực trị khi và chỉ khi mỗi phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ và $x^3 - 3x^2 + m = 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2).

Xét hàm số $h(x) = -x^3 + 3x^2$, ta có $h'(x) = -3x^2 + 6x$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$

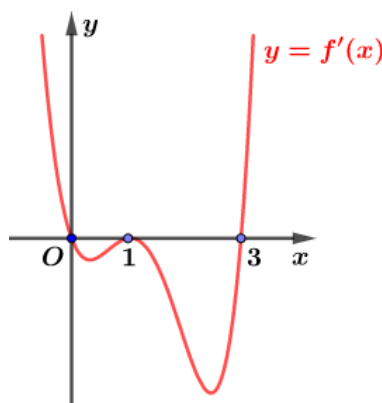
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$				4		$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy điều kiện để mỗi phương trình $-x^3 + 3x^2 = m$ và $-x^3 + 3x^2 = m - 2$ phải có ba nghiệm phân biệt (khác 0 và khác 2) là

$$0 < m - 2 < m < 4 \Leftrightarrow 2 < m < 4.$$

Vậy chỉ có một giá trị nguyên của m thỏa mãn là $m = 3$.

Câu 47: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ như hình vẽ. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có đúng 3 điểm cực trị?



Lời giải

$$y' = 2x \cdot f'(x^2 + m).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 + m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + m = 0 \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 + m = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \\ x^2 + m = 1 \\ x^2 = -m + 3 \end{cases}.$$

Đồ thị hàm số $f'(x)$ tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1. Do đó hoặc phương trình $x^2 + m = 1$ vô nghiệm hoặc nghiệm của phương trình $x^2 + m = 1$ là nghiệm bội chẵn của phương trình $y' = 0$.

Nếu $\begin{cases} -m \neq 0 \\ -m + 3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 3 \end{cases}$ thì $x = 0$ là nghiệm đơn của phương trình $y' = 0$.

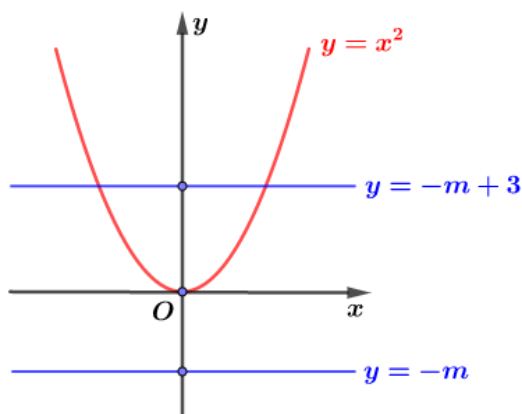
Nếu $\begin{cases} -m = 0 \\ -m + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$ thì nghiệm $x = 0$ là nghiệm bội ba của phương trình $y' = 0$.

Suy ra $x = 0$ là một điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + m)$, $\forall m$.

Xét các phương trình: $x^2 = -m$ (1) và $x^2 = -m + 3$ (2).

Nhận xét: Phương trình (1) và (2) không có nghiệm chung; $-m < -m + 3, \forall m$

Minh họa đồ thị



Xét $-m > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ và phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $x_3; x_4$. Khi đó y' đổi dấu 5 lần qua các nghiệm $x_1; x_2; x_3; x_4$ và 0 nên hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 5 điểm cực trị.

Xét $-m + 3 \leq 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm; phương trình (2) hoặc vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 1 điểm cực trị.

Xét $\begin{cases} -m \leq 0 \\ -m + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 0 \\ m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 3$. Khi đó phương trình (1) vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$; phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 0. Suy ra hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị.

Do đó, để hàm số $y = f(x^2 + m)$ có 3 điểm cực trị thì $0 \leq m < 3$.

Mặt khác m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m để hàm số có đúng 3 điểm cực trị.

Câu 48: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 3x + 2, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $g(x) = f(-x^4 + 2x^2 - m)$ có đúng ba điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 3)$?

Lời giải

$$f'(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

*) Xét trên $(0; 3)$

$$g'(x) = (-4x^3 + 4x)f'(-x^4 + 2x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (0; 3) \\ x = 1 \in (0; 3) \\ x = -1 \notin (0; 3) \\ f'(-x^4 + 2x^2 - m) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 3) \\ f'(-x^4 + 2x^2 - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ -x^4 + 2x^2 - m = 1 \\ -x^4 + 2x^2 - m = 2 \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = -x^4 + 2x^2 - m$ trên $(0; 3)$

$$h'(x) = -4x^3 + 4x, h'(x) = -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases} \text{ trên } (0; 3) \text{ chỉ lấy nghiệm } x = 1$$

x	0	1	3	
$h'(x)$		+	0	-
$h(x)$	$-m$	$1-m$	$-63-m$	

The graph illustrates the function $h(x) = -x^4 + 2x^2 - m$ on the interval $(0, 3)$. The curve starts at the point $(0, -m)$, reaches a local maximum at $(1, 1-m)$, and then decreases to a local minimum at $(3, -63-m)$. Two horizontal lines are drawn at $y=1$ and $y=2$. The curve intersects the line $y=1$ at $x=1$ and the line $y=2$ at $x=1$ and $x=2$. The curve is above the line $y=2$ for $x \in (0, 1)$ and below the line $y=2$ for $x \in (1, 3)$.

Để hàm số $g(x)$ có 3 cực trị điều kiện $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm bậc lẻ khi đó

$$\begin{cases} 1-m \leq 2 \\ -m < 1 < 1-m \\ -63-m < 1 \\ 2 \leq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \\ -1 < m < 0 \\ -64 < m \\ m \leq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 0 \\ -64 < m \leq -2 \end{cases}$$

Do m nguyên nên $m \in \{-63; -62; \dots; -2\}$ có 62 giá trị thỏa mãn bài toán.

Câu 49: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3 + x, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $g(x) = f(x^4 + 2x^3 - mx^2)$ có đúng hai điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 2)$?

Lời giải

$$f'(x) = x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

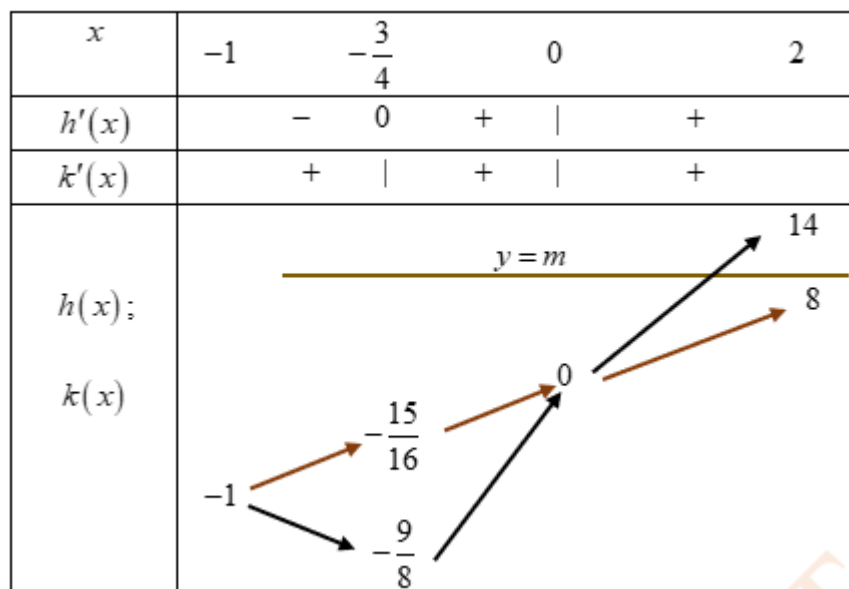
*) Xét trên $(-1; 2)$

$$g'(x) = (4x^3 + 6x^2 - 2mx)f'(x^4 + 2x^3 - mx^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (-1; 2) \\ 4x^2 + 6x - 2m = 0 \\ x^4 + 2x^3 - mx^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \notin (-1; 2) \\ 2x^2 + 3x = m \quad (1) \\ x^2 + 2x = m \quad (2) \end{cases}$$

Xét hàm số $h(x) = 2x^2 + 3x$; $k(x) = x^2 + 2x$ trên $(-1; 2)$ có $h'(x) = 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}$;

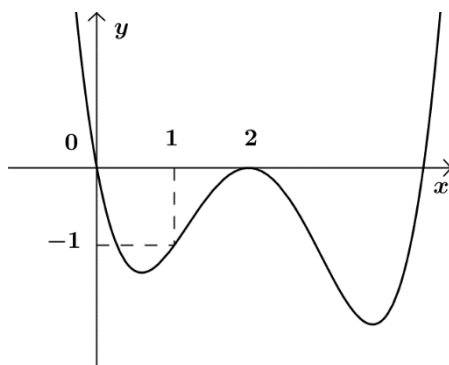
$k'(x) = 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ lập bảng biến thiên của cả hai hàm $h(x); k(x)$ trên cùng một hình ta được kết quả như sau:



Để hàm số $g(x)$ có 2 cực trị điều kiện $g'(x) = 0$ có 2 nghiệm bậc lẻ mà $g'(x)$ đã có nghiệm $x = 0$ nên tổng hai phương trình (1); (2) có thêm một nghiệm khác 0, dựa vào bảng biến thiên trên ta có

$$\begin{cases} m = -1 \\ 8 \leq m < 14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ 8 \leq m < 14 \end{cases} \text{ mà } m \text{ là số nguyên nên } m \in \{-1; 8; 9; 10; 11; 12; 13\} \text{ có 7 giá trị}$$

Câu 50: Cho hàm số bậc năm $y = f(x)$ có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây



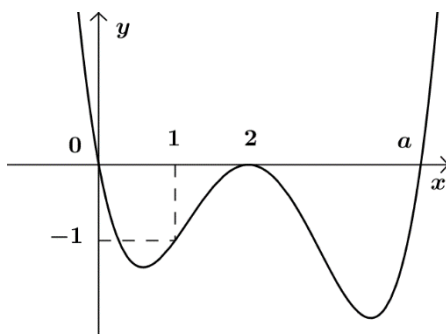
Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2024; 2024]$ để số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - 3x + m)$ là 5.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = (2x - 3) \cdot f'(x^2 - 3x + m)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3 = 0 & (1) \\ f'(x^2 - 3x + m) = 0 & (2) \end{cases}$$

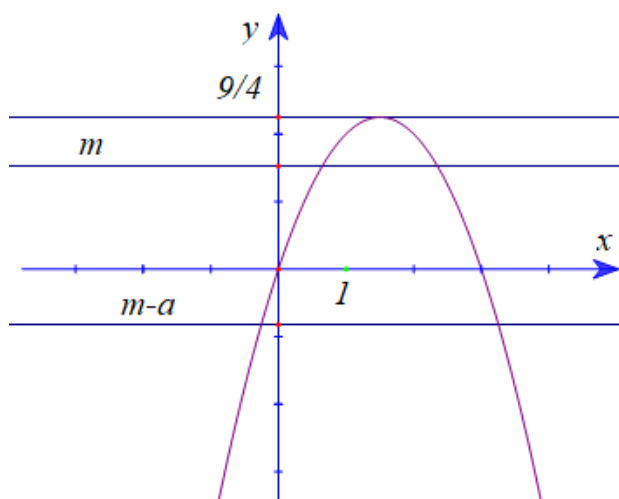
Ta có: $(1) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.



$$\text{Và } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + m = 0 \\ x^2 - 3x + m = 2 \\ x^2 - 3x + m = a, a > 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3x \\ m - 2 = -x^2 + 3x \\ m - a = -x^2 + 3x \end{cases}$$

Với $x^2 - 3x + m = 2$ thì $g'(x) = 0$ có nghiệm kép.

Xét hàm số $y = -x^2 + 3x$ ta có đồ thị



Do $a > 2$, suy ra $m < \frac{9}{4}$. phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt nên $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $m < \frac{9}{4}$. Lê Minh Hạng

Vì $m \in \mathbb{Z}$, $m \in [-2024; 2024] \Rightarrow m \in \{-2024; -2023; \dots; 2\}$. Vậy tập S có 2027 phần tử.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Định lý (thừa nhận): Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

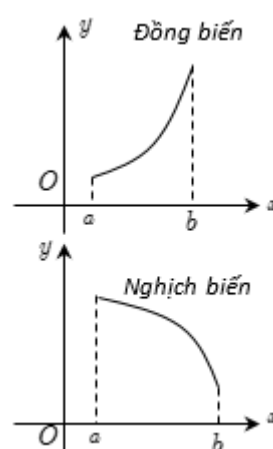
Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

2. Hình dáng đồ thị

Nếu hàm số **đồng biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi lên.

Nếu hàm số **nghịch biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi xuống.



III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: Câu 12 (101-2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 2: Câu 28 (104-2023) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	+

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-1; 2)$.

- Câu 3: Câu 38 (104-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $f(5) > f(6)$. **B.** $f(0) > f(2)$. **C.** $f(4) > f(0)$. **D.** $f(4) > f(2)$.
- Câu 4: Câu 33 (101-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?
A. $f(4) > f(0)$. **B.** $f(0) > f(2)$. **C.** $f(5) > f(6)$. **D.** $f(4) > f(2)$.
- Câu 5: Câu 9 (102-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(-\infty; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.
- Câu 6: Câu 10 (103-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(0; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(-\infty; 0)$. **D.** $(-\infty; +\infty)$.
- Câu 7: Câu 30 (102-2023)** Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(-\infty; 1)$.
- Câu 8: Câu 36 (103-2023)** Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(-\infty; 1)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(1; +\infty)$.
- Câu 9: (MĐ 101-2022)** Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?
A. $y = x^4 - x^2$. **B.** $y = x^3 - x$. **C.** $y = \frac{x-1}{x+2}$. **D.** $y = x^3 + x$.
- Câu 10: (MĐ 102-2022)** Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?
A. $y = x^4 - x^2$. **B.** $y = x^3 + x$. **C.** $y = \frac{x-1}{x+2}$. **D.** $y = x^3 - x$.
- Câu 11: (MĐ 103-2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(-1; +\infty)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(-\infty; 1)$.
- Câu 12: (MĐ 104-2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x+1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(-\infty; -1)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(-1; +\infty)$. **D.** $(1; +\infty)$.
- Câu 13: (MĐ 101-2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		3		$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; +\infty)$. **B.** $(0; 1)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Câu 14: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		0	3	0		$+\infty$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; 1)$.

Câu 15: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$		
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+			
f(x)	$+\infty$				0		3		0		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 3)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 16: (MĐ 104-2022) Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		0		3		0		$+\infty$

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 3)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-1; 0)$.

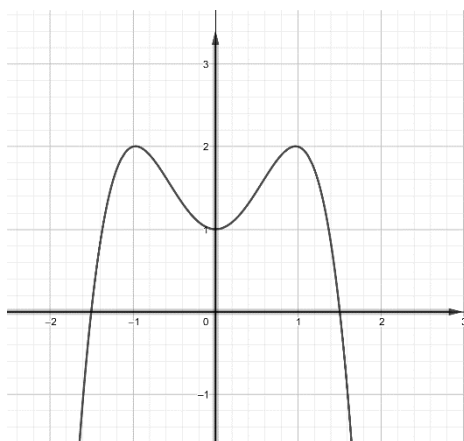
Câu 17: (ĐTK 2021) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		1	1		1	1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

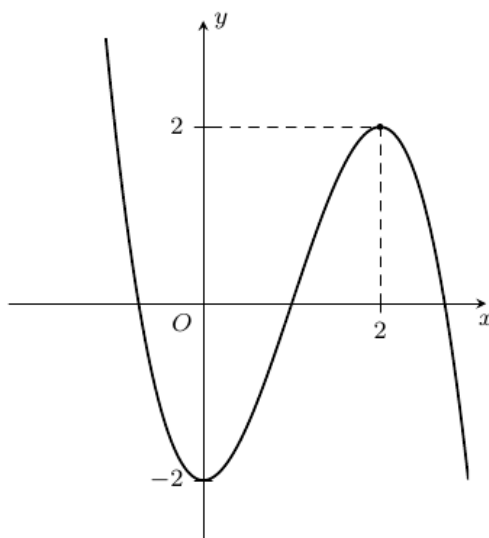
- A. $(-2; 2)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 18: (MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-1; 1)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(0; 1)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 19: (MĐ 103 - 2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

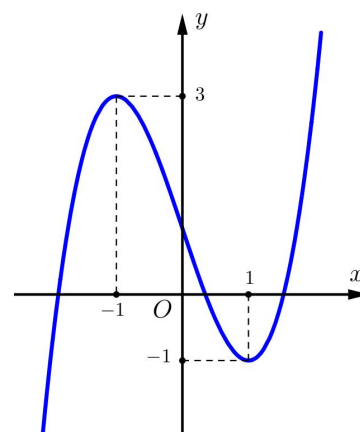


- A. $(-\infty; 2)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Câu 20: (MĐ 104 - 2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(1; +\infty)$.
C. $(-\infty; 1)$. D. $(0; 3)$.



Câu 21: (MĐ 2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-2; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 22: (MĐ 2021 – ĐỢT 2) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \frac{3x-1}{x+1}$. B. $y = x^3 - x$. C. $y = x^4 - 4x$. D. $y = x^3 + x$.

Câu 23: (MĐ 2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

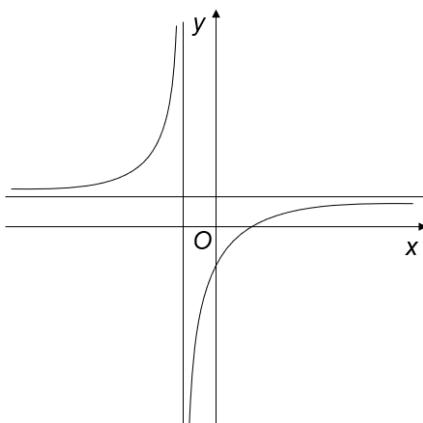
Câu 24: (MĐ 103 - 2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 0)$.

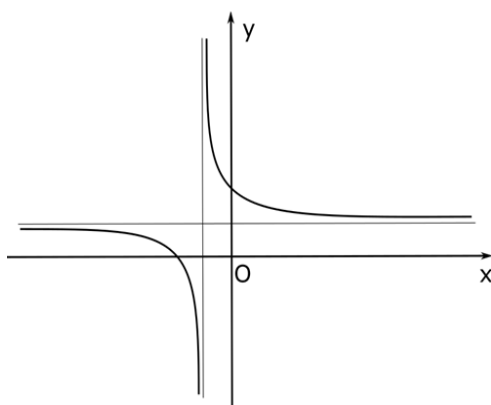
Câu 25: (MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1) Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như hình vẽ sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $y' < 0, \forall x \neq -1$. B. $y' > 0, \forall x \neq -1$. C. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 26: (MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1) Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. B. $y' > 0, \forall x \neq -1$. C. $y' < 0, \forall x \neq -1$. D. $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Câu 27: (Mã 101 – 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	4	-1	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 0)$

Câu 28: (Đề Minh Họa 2020 – Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-1	2	$-\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 29: (Đề Minh Họa 2020 – Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$.

Câu 30: (Mã 102 – 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			4		1		4	
	$-\infty$							$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 31: (Mã 103 – 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			3			3		
	$-\infty$			2				$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 2)$ B. $(0; 2)$ C. $(-2; 0)$ D. $(2; +\infty)$.

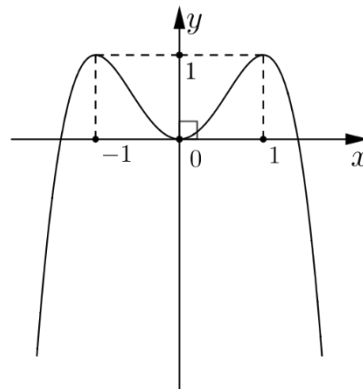
Câu 32: (Mã 104 – 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$
					</				

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

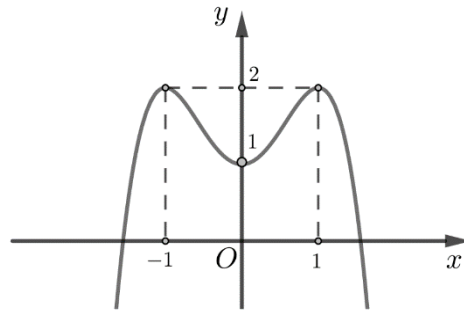
- A. $(-3; 0)$. B. $(-3; 3)$. C. $(0; 3)$. D. $(-\infty; -3)$.

Câu 33: (Mã 102 – 2020 – Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(0; 1)$. D. $(0; +\infty)$.

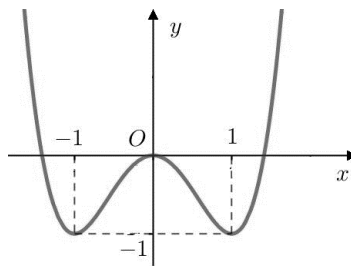
Câu 34: (Mã 107 – 2020 Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 0)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(-1; 0)$.

Câu 35: (Mã 103 – 2020 – Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-1; 0)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Câu 36: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Hỏi hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(-\infty; 0)$.

Câu 37: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 38: (Đề Minh họa lần 3, Năm 2017) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$. B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.
C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$. D. Hàm số nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Câu 39: (Đề minh họa lần 3, Năm 2017) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. $y = 3x^3 + 3x - 2$. B. $y = 2x^3 - 5x + 1$. C. $y = x^4 + 3x^2$. D. $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Câu 40: (Mã 101, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0;1)$. B. $(-\infty;0)$. C. $(1;+\infty)$. D. $(-1;0)$.

Câu 41: (Mã 102, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y				3		-2	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;+\infty)$. B. $(1;+\infty)$. C. $(-1;1)$. D. $(-\infty;1)$.

Câu 42: (Mã 103, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

Câu 43: (Mã 103, Năm 2017) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

Câu 44: (Mã 104, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$.

Câu 45: (Mã 104, Năm 2017) Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

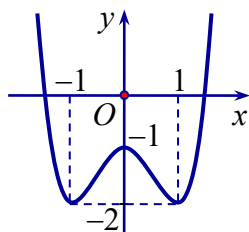
Câu 46: (ĐỀ THAM KHẢO 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;0)$. B. $(-\infty;-2)$. C. $(0;2)$. D. $(0;+\infty)$.

Câu 47: (ĐỀ minh họa, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(0;1)$. B. $(-\infty;1)$. C. $(-1;1)$. D. $(-1;0)$.

Câu 48: (Mã 101, Năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0;1)$. B. $(-\infty;0)$. C. $(1;+\infty)$. D. $(-1;0)$.

Câu 49: (Mã 102, Năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;+\infty)$. B. $(1;+\infty)$. C. $(-1;1)$. D. $(-\infty;1)$.

Câu 50: (Mã 103, Năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-1	-2	-1	$-\infty$		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(0; 1)$.

Câu 51: (Mã 104, Năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		1		4		$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-2; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 52: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	3	1	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 53: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	3	1	$+\infty$		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 54: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		0	3	0		$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 0)$. B. $(-1; +\infty)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(0; 1)$.

Câu 55: (Mã 104, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 56: (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

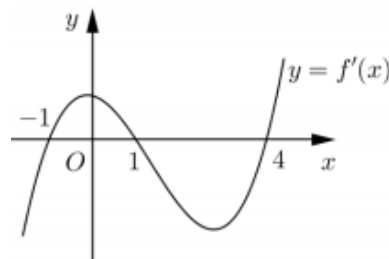
x	$-\infty$	1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; 2)$. D. $(1; +\infty)$.

Câu 57: (ĐỀ THAM KHẢO 2018) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



- A. $(1; 3)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-2; 1)$. D. $(-\infty; -2)$.

Câu 58: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(4; +\infty)$. B. $(-2; 1)$. C. $(2; 4)$. D. $(1; 2)$.

Câu 59: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; 3)$. B. $(0; 2)$. C. $(3; 5)$. D. $(5; +\infty)$.

Câu 60: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(3; 4)$. B. $(2; 3)$. C. $(-\infty; -3)$. D. $(0; 2)$.

Câu 61: (Mã 104, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -3)$. B. $(4; 5)$. C. $(3; 4)$. D. $(1; 3)$.

Câu 62: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$. B. $m \leq 0$. C. $1 \leq m < 2$. D. $m \geq 2$.

Câu 63: (Đề minh họa lần 3, Năm 2017) Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Câu 64: (Mã 102, Năm 2017) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

- A. 2. B. Vô số. C. 1. D. 3.

Câu 65: (Mã 102, Năm 2017) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

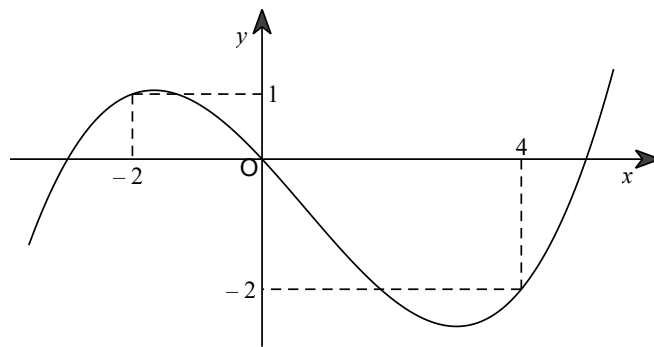
- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

Câu 66: (Mã 103, Năm 2017) Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .

- A. 5. B. 4. C. Vô số. D. 3.

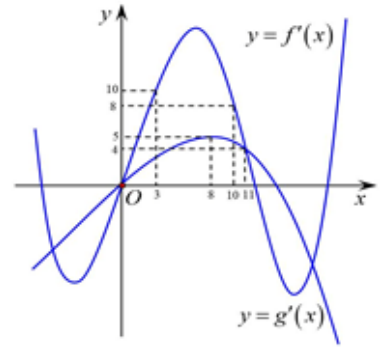
- Câu 67:** (Mã 104, Năm 2017) Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .
A. 5. B. 4. C. Vô số. D. 3.
- Câu 68:** (Đề minh họa, Năm 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là
A. $(-\infty; 0]$. B. $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$. D. $[0; +\infty)$
- Câu 69:** (Mã 101, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?
A. 2. B. Vô số. C. 1. D. 3.
- Câu 70:** (Mã 102, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?
A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.
- Câu 71:** (Mã 103, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?
A. 3. B. Vô số. C. 0. D. 6.
- Câu 72:** (Mã 104, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.
A. 2. B. 6. C. Vô số. D. 1.
- Câu 73:** (Đề Tham Khảo Lần 2 2020) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.
- Câu 74:** (Đề Tham Khảo Lần 1 2020) Cho hàm số $f(x) = \frac{mx-4}{x-m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
A. 5. B. 4. C. 3. D. 2.
- Câu 75:** (Mã 101 – 2020 – Lần 1) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+4}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ là
A. $[4; 7)$. B. $(4; 7]$. C. $(4; 7)$. D. $(4; +\infty)$.
- Câu 76:** (Mã 102 – 2020 – Lần 1) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -8)$ là
A. $(5; +\infty)$. B. $(5; 8]$. C. $[5; 8)$. D. $(5; 8)$.

- Câu 77:** (Mã 103 – 2020 – Lần 1) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$
- A. $(2; 5]$. B. $[2; 5)$. C. $(2; +\infty)$. D. $(2; 5)$.
- Câu 78:** (Mã 104- 2020 – Lần 1) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$ là
- A. $(3; 6]$. B. $(3; 6)$. C. $(3; +\infty)$. D. $[3; 6)$.
- Câu 79:** (Mã 101 – 2020 -Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là
- A. $(-\infty; 1]$ B. $(-\infty; 4]$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(-\infty; 4)$
- Câu 80:** (Mã 102 – 2020 – Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là
- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-\infty; 5)$. C. $(-\infty; 5]$. D. $(-\infty; 2]$.
- Câu 81:** (Mã 103 – 2020 – Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là
- A. $(-\infty; -1]$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-\infty; 2]$.
- Câu 82:** (Mã 104 – 2020 – Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là
- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-\infty; -2]$. D. $(-\infty; 1]$.
- Câu 83:** (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



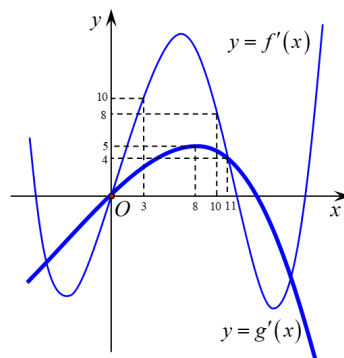
- A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$. C. $(-2; -1)$. D. $(2; 3)$.

Câu 84: (Mã 102, Năm 2017) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+7) - g\left(2x + \frac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $\left(2; \frac{16}{5}\right)$. B. $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$. C. $\left(\frac{16}{5}; +\infty\right)$. D. $\left(3; \frac{13}{4}\right)$.

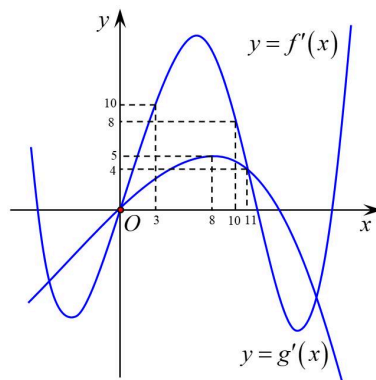
Câu 85: (Mã 101, Năm 2018) Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó **đường cong đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

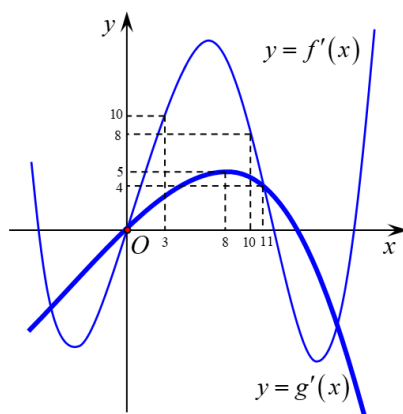
- A. $\left(5; \frac{31}{5}\right)$. B. $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$. C. $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$. D. $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.

Câu 86: (Mã 102, Năm 2018) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+7) - g\left(2x + \frac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $\left(2; \frac{16}{5}\right)$. B. $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$. C. $\left(\frac{16}{5}; +\infty\right)$. D. $\left(3; \frac{13}{4}\right)$.

Câu 87: (Mã 103, Năm 2018) Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



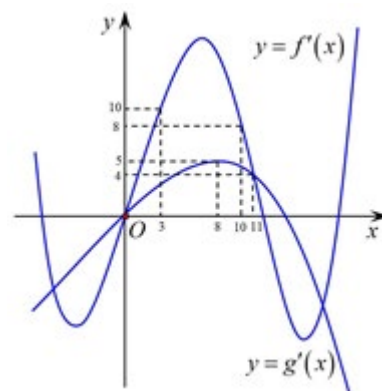
trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+3) - g\left(2x - \frac{7}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{13}{4}; 4\right)$. B. $\left(7; \frac{29}{4}\right)$. C. $\left(6; \frac{36}{5}\right)$. D. $\left(\frac{36}{5}; +\infty\right)$.

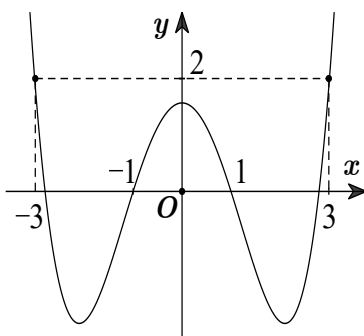
Câu 88: (Mã 104, Năm 2018) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$.

Hàm số $h(x) = f(x+6) - g\left(2x + \frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(\frac{21}{5}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$. C. $\left(3; \frac{21}{5}\right)$. D. $\left(4; \frac{17}{4}\right)$.

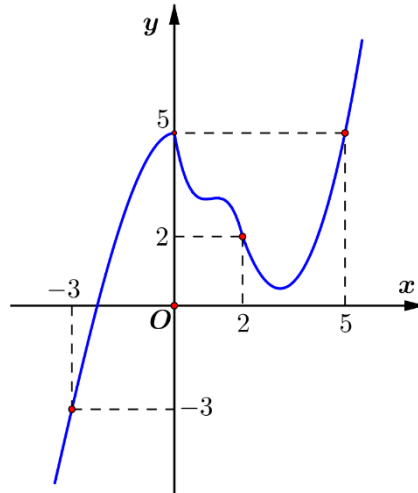


Câu 89: Cho hàm số $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ với a, b, c, d, e, f là các số thực, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(1-2x) - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



- A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$. B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. C. $(-1; 0)$. D. $(1; 3)$.

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



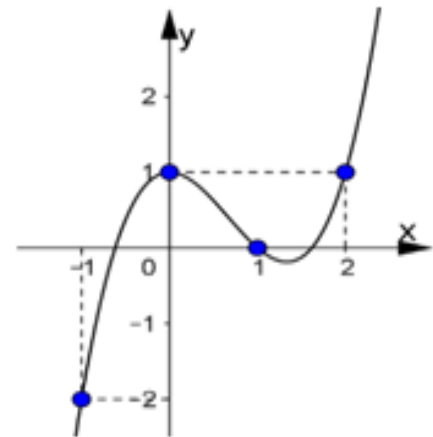
Hàm số $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

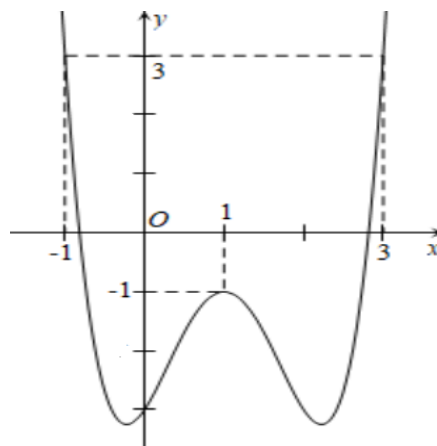
Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Hàm số $g(x) = f(x-1) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; 2)$. B. $(3; +\infty)$.
C. $(-\infty; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.



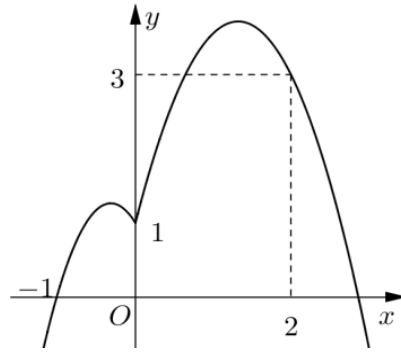
Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số $g(x) = f(3x-1) - 27x^3 + 54x^2 - 27x + 4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(0; \frac{2}{3}\right)$. B. $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$. C. $(0; 3)$. D. $(4; +\infty)$.

Câu 93: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1) = 0$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = |2f(x-1) - x^2|$ đồng biến trên khoảng

- A.** $(3; +\infty)$. **B.** $(-1; 2)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(0; 3)$

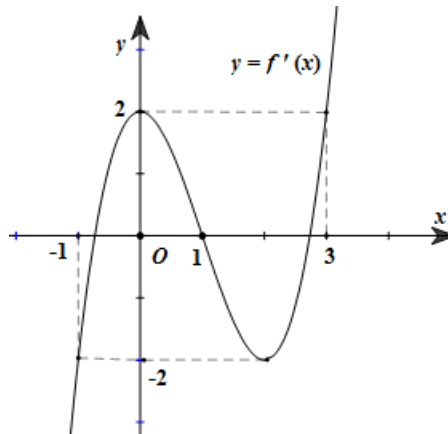
Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x(2x-1) \cdot (x^2+3) + 2$. Hàm số $y = f(3-x) + 2x + 2019$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A.** $(3; 5)$. **B.** $(2; \frac{5}{2})$. **C.** $(\frac{5}{2}; 3)$. **D.** $(-\infty; 3)$.

Câu 95: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2x - 3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x - m) + m^2 + 1$ đồng biến trên $(0; 2)$?

- A.** 16. **B.** 17. **C.** 18. **D.** 19.

Câu 96: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng các phần tử của S bằng:

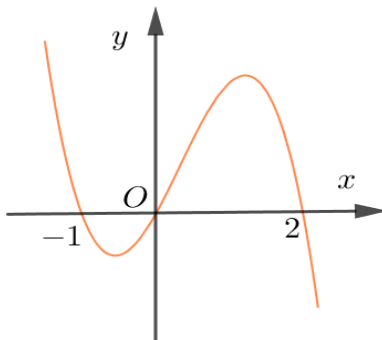
- A.** 4. **B.** 11. **C.** 14. **D.** 20.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x) = (1 - x^2)(x - 5)$

Hàm số $y = 3f(x + 3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 5)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 98: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-1) = f(2) = 0$



Hàm số $g(x) = [f(x^3 - 3)]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

- A. $(1; 2)$ B. $(0; 1)$ C. $(-1; 0)$ D. $(-2; -1)$

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

1. Định lý (thừa nhận): Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

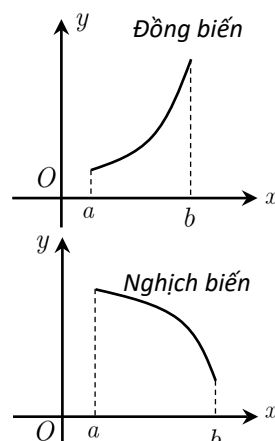
Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

2. Hình dáng đồ thị

Nếu hàm số đồng biến trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi lên.

Nếu hàm số nghịch biến trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi xuống.



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC

CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **Câu 12 (101-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-1; 2)$.

Lời giải

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 2: **Câu 28 (104-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; 0)$. D. $(-1; 2)$.

Lời giải

Nhận thấy $f'(x) > 0$ với $\forall x \in (2; +\infty)$ nên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 3: **Câu 38 (104-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $f(5) > f(6)$. B. $f(0) > f(2)$. C. $f(4) > f(0)$. D. $f(4) > f(2)$.

Lời giải

Ta lập bảng xét dấu của $f(x)$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $f(0)$ là cực đại nên $f(0) > f(2)$

Câu 4: **Câu 33 (101-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-4)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $f(4) > f(0)$. B. $f(0) > f(2)$. C. $f(5) > f(6)$. D. $f(4) > f(2)$.

Lời giải

$$f'(x) = x(x-4) \text{ nên } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Dựa vào bảng biến thiên ta được $f(0) > f(2)$.

Câu 5: **Câu 9 (102-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Hàm số đã cho nghịch biến $\Leftrightarrow x^3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$.

Câu 6: **Câu 10 (103-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; +\infty)$.

B. $(-\infty; 1)$.

C. $(-\infty; 0)$.

D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu của $f'(x)$ suy ra hàm $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 7: **Câu 30 (102-2023)** Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$, $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$

Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

Câu 8: **Câu 36 (103-2023)** Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(-\infty; -1)$.

D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 9: (MĐ 101-2022) Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^4 - x^2$. B. $y = x^3 - x$. C. $y = \frac{x-1}{x+2}$. **D. $y = x^3 + x$.**

Lời giải

Chọn D

Xét $y = x^3 + x$ có $y' = 3x^2 + 1 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$. Vậy hàm số trên đồng biến trên $\mathbb{R}$. *Trần_Tuân_Anh*

Câu 10: (MĐ 102-2022) Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$

- A. $y = x^4 - x^2$. **B. $y = x^3 + x$.** C. $y = \frac{x-1}{x+2}$. D. $y = x^3 - x$.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy, chỉ có hàm số $y = x^3 + x$ có $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y = x^3 + x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 11: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. **C. $(-\infty; -1)$.** D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = x + 1$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$	

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 12: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$.** B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; +\infty)$. D. $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 13: (MĐ 101-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$ 0 $+$ 0 $-$ 0 $+$			
$f(x)$	$+\infty$		3		$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. **B. $(0; 1)$.** C. $(-1; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1); (0; 1)$.

Câu 14: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		0	3		0		$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; +\infty)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 15: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	3	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; 3)$. **B.** $(0; +\infty)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta có hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Câu 16: (MĐ 104-2022) Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		0	3		0		$+\infty$

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(0; 3)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Quan sát BBT ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;0)$.

Câu 17: (ĐTK 2021) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
		$+$	$-$	$+$	

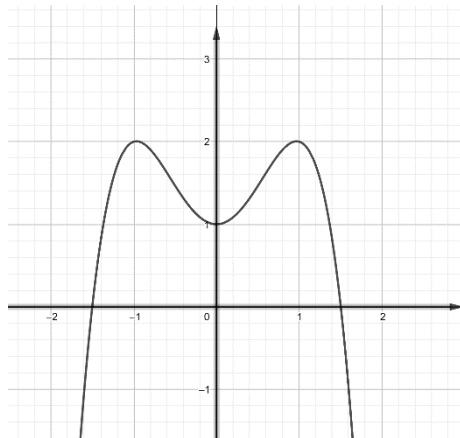
Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào, trong các khoảng dưới đây?

- A. $(-2;2)$. B. $(0;2)$. C. $(-2;0)$. D. $(2;+\infty)$.

Lời giải

Ta thấy trên $(0;2)$ thì $f'(x) > 0$ và mũi tên có chiều hướng lên.

Câu 18: (MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

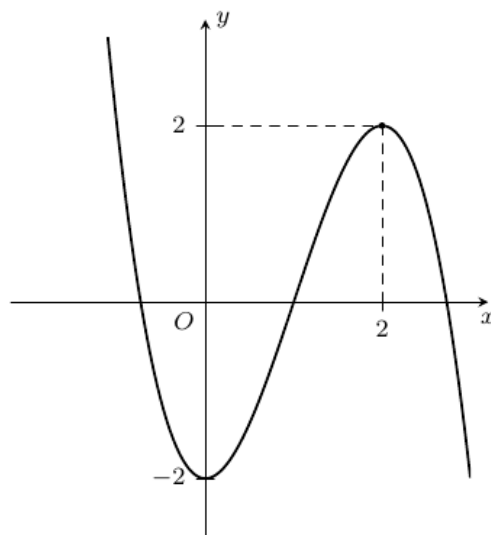


- A. $(-1;1)$. B. $(-\infty;0)$. C. $(0;1)$. D. $(0;+\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có hàm số đồng biến trên các khoảng: $(-\infty;-1);(0;1)$

Câu 19: (MĐ 103 - 2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

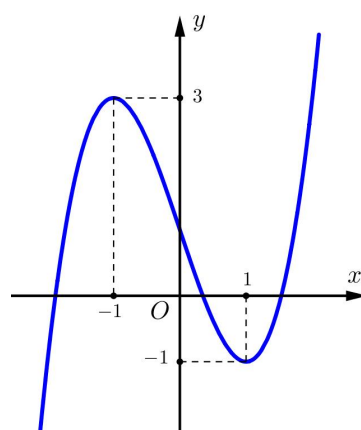


- A. $(-\infty; 2)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 2)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 20: (MĐ 104 - 2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-\infty; 1)$. D. $(0; 3)$.

Lời giải

Từ hình vẽ ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 21: (MĐ 2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-2; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta thấy, $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < x < 0 \\ x > 2 \end{cases}$.

Do đó, trong các khoảng đã cho, hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 22: (MĐ 2021 – ĐỢT 2) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = \frac{3x-1}{x+1}$. B. $y = x^3 - x$. C. $y = x^4 - 4x$. D. $y = x^3 + x$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{3x-1}{x+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^3 - x$ có đạo hàm là $y' = 3x^2 - 1$ đổi dấu qua $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^4 - 4x$ có đạo hàm là $y' = 4x^3 - 4$ đổi dấu qua $x = 1$ nên không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^3 + x$ có đạo hàm là $y' = 3x^2 + 1$ luôn dương với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 23: (MĐ 2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-2; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $f'(x) > 0$ trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$ nên hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 2)$.

Câu 24: (MĐ 103 - 2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

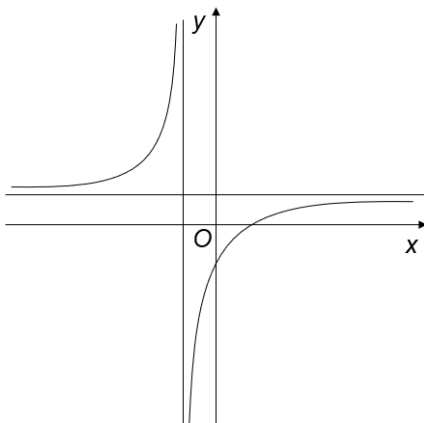
Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(0; +\infty)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Dựa vào bảng xét dấu của đạo hàm ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

Câu 25: (MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1) Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như hình vẽ sau:



Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $y' < 0, \forall x \neq -1$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq -1$ **C.** $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **D.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

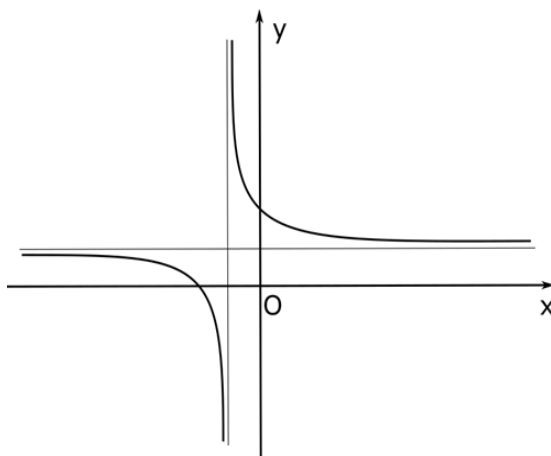
Lời giải

Hàm số đã cho có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

Do đó $y' > 0, \forall x \neq -1$.

Câu 26: (MĐ 102 - 2021 – ĐỢT 1) Biết hàm số $y = \frac{x+a}{x+1}$ (a là số thực cho trước, $a \neq 1$) có đồ thị như trong hình bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.** $y' < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. **B.** $y' > 0, \forall x \neq -1$. **C.** $y' < 0, \forall x \neq -1$ **D.** $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Lời giải

ĐK: $x \neq -1$.

Đặt $y = f(x) = \frac{x+a}{x+1}$. Từ đồ thị hàm số đã cho ta có:

Với $\forall x_1, x_2 \in (-1; +\infty)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Với $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; -1)$, $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$. Do đó $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; -1)$.

Suy ra hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$. Vậy $y' < 0, \forall x \neq -1$.

Câu 27: (Mã 101 – 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			4			$+\infty$
		-1			-1		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 28: (Đề Minh Họa 2020 – Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		2		2			
	$-\infty$		-1		$-\infty$		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Câu 29: (Đề Minh Họa 2020 – Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$							

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 0)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy: Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 30: (Mã 102 – 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$			4		1		4		$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(1; +\infty)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 31: (Mã 103 – 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$			3			3		
	$-\infty$			2				$-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 2)$ B. $(0; 2)$ C. $(-2; 0)$ D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 32: (Mã 104 – 2020 Lần 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

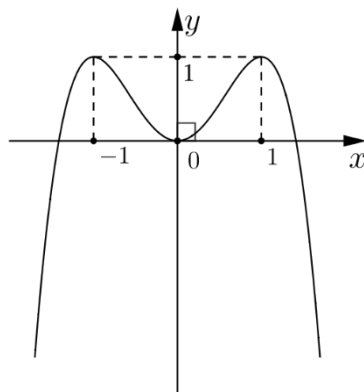
- A. $(-3; 0)$. B. $(-3; 3)$. C. $(0; 3)$. D. $(-\infty; -3)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 33: (Mã 102 – 2020 – Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1; 0)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(0; +\infty)$.

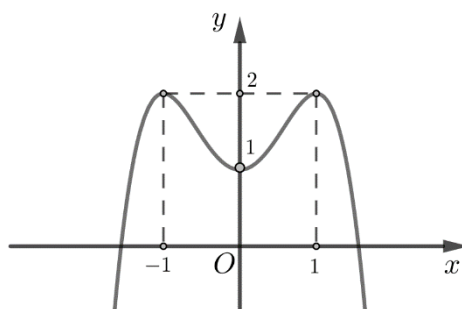
Lời giải

Chọn A

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta có:

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$, đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 34: (Mã 107 – 2020 Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(1; +\infty)$.

D. $(-1; 0)$.

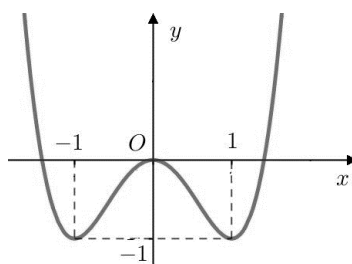
Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta có hàm số đồng biến trên hai khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$

$\Rightarrow$ chọn đáp án **A.**

Câu 35: (Mã 103 – 2020 – Lần 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1; 0)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(0; +\infty)$.

D. $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 36: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Hàm số $y = 2x^4 + 1$ đồng biến trên khoảng nào?

- A. $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$. B. $(0; +\infty)$. C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $(-\infty; 0)$

Lời giải

Chọn B

$y = 2x^4 + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 8x^3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 8x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ suy ra $y(0) = 1$

Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	1	$+\infty$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 37: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Cho hàm số $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$ hoặc $x = \frac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
	$-\infty$					$+\infty$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 38: (Đề Minh họa lần 3, Năm 2017) Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -1)$. B. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1)$.

C. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Phương pháp:

□ Bước 1: Tìm tập xác định, tính y' .

□ Bước 2: giải phương trình $y' = 0$ tìm các nghiệm.

□ Bước 3: Lập bảng biến thiên và kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến.

Cách giải: $y = \frac{x-2}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3}{(x+1)^2} > 0, \forall x$.

Câu 39: (Đề minh họa lần 3, Năm 2017) Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. $y = 3x^3 + 3x - 2$. **B.** $y = 2x^3 - 5x + 1$. **C.** $y = x^4 + 3x^2$. **D.** $y = \frac{x-2}{x+1}$.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Tính đạo hàm các hàm số và xét dấu đạo hàm, nếu $y' > 0$ với mọi x thì hàm số đó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Cách giải: Ta có:
$$\begin{cases} (3x^3 + 3x - 2)' = 9x^2 + 3 > 0, \forall x \\ (2x^3 - 5x + 1)' = 6x^2 - 5 \\ (x^4 + 3x^2)' = 4x^3 + 6x \\ \left(\frac{x-2}{x+1}\right)' = \frac{3}{(x+1)^2} \end{cases}$$

Câu 40: (Mã 101, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(0; 1)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(1; +\infty)$. **D.** $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0; 1)$ và $(-\infty; -1)$.

Câu 41: (Mã 102, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y				3		-2	$+\infty$

$-\infty \rightarrow 3 \rightarrow -2 \rightarrow +\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; +\infty)$. B. $(1; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 42: (Mã 103, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $f'(x) = x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

Câu 43: (Mã 103, Năm 2017) Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 4x^3 - 4x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	0	-1	$+\infty$		

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 44: (Mã 104, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-1		0		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Dễ thấy mệnh đề hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ đúng.

Câu 45: (Mã 104, Năm 2017) Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $D = \mathbb{R}$, $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 46: (ĐỀ THAM KHẢO 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		0		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$		

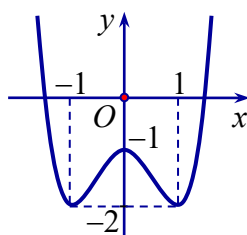
Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(0; 2)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 47: (Đề minh họa, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(0; 1)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-1; 1)$. D. $(-1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Quan sát đồ thị ta thấy đồ thị đi lên trong khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Vậy hàm số đồng biến trên $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

Quan sát đáp án **chọn D**

Câu 48: (Mã 101, Năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	3	-2	$+\infty$		

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0;1)$. **B.** $(-\infty;0)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(0;1)$ và $(-\infty;-1)$.

Câu 49: (Mã 102, Năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y		3	-2	$+\infty$	

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1;+\infty)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-1;1)$. **D.** $(-\infty;1)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 50: (Mã 103, Năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$-\infty$	-1	-2	-1	$-\infty$		

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1;0)$. **B.** $(1;+\infty)$. **C.** $(-\infty;1)$. **D.** $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Câu 51: (Mã 104, Năm 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				4		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 1 1 $-\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; +\infty)$. B. $(-2; 3)$. C. $(3; +\infty)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn B

Câu 52: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				3		1		$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 1 3 1 $+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(0; 2)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \forall x \in (0; 2) \Rightarrow f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 53: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				3		1		$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 1 3 1 $+\infty$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(0; 2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Căn cứ các phương án, ta chọn đáp án D.

Câu 54: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 0 3 0

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1; 0)$. **B.** $(-1; +\infty)$. **C.** $(-\infty; -1)$. **D.** $(0; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Nhìn BBT ta thấy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$. Đáp án A đúng.

Câu 55: (Mã 104, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 0 3 0

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(0; 1)$. **B.** $(1; +\infty)$. **C.** $(-1; 0)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Câu 56: (Đề Tham Khảo 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3[f'(x+2) - (x^2 - 3)]$

Với $x \in (-1; 0) \Rightarrow x+2 \in (1; 2) \Rightarrow f'(x+2) > 0$, lại có $x^2 - 3 < 0 \Rightarrow y' > 0; \forall x \in (-1; 0)$

Vậy hàm số $y = 3f(x+2) - x^3 + 3x$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Chú ý:

+) Ta xét $x \in (1; 2) \subset (1; +\infty) \Rightarrow x+2 \in (3; 4) \Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0$

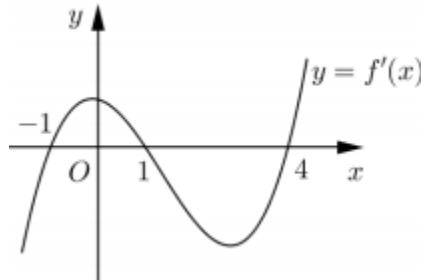
Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ nên loại hai phương án A, D.

+) Tương tự ta xét

$$x \in (-\infty; -2) \Rightarrow x+2 \in (-\infty; 0) \Rightarrow f'(x+2) < 0; x^2 - 3 > 0 \Rightarrow y' < 0; \forall x \in (-\infty; -2)$$

Suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ nên loại hai phương án B.

Câu 57: (ĐỀ THAM KHẢO 2018) Cho hàm số $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến trên khoảng



A. $(1; 3)$.

B. $(2; +\infty)$.

C. $(-2; 1)$.

D. $(-\infty; -2)$.

Lời giải

Chọn C

Cách 1:

Ta thấy $f'(x) < 0$ với $\begin{cases} x \in (1; 4) \\ x < -1 \end{cases}$ nên $f(x)$ nghịch biến trên $(1; 4)$ và $(-\infty; -1)$ suy ra

$g(x) = f(-x)$ đồng biến trên $(-4; -1)$ và $(1; +\infty)$. Khi đó $f(2-x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 1)$ và $(3; +\infty)$

Cách 2:

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ ta có $f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ 1 < x < 4 \end{cases}$.

Ta có $(f(2-x))' = (2-x)' \cdot f'(2-x) = -f'(2-x)$.

Để hàm số $y = f(2-x)$ đồng biến thì $(f(2-x))' > 0 \Leftrightarrow f'(2-x) < 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-x < -1 \\ 1 < 2-x < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}$$

Câu 58: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = f(3-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(4; +\infty)$.

B. $(-2; 1)$.

C. $(2; 4)$.

D. $(1; 2)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = -2f'(3-2x) < 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 3-2x < -1 \\ 3-2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > x > 2 \\ x < 1 \end{cases}.$$

Vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ nên nghịch biến trên $(-2; 1)$.

Câu 59: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(2; 3)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(3; 5)$. **D.** $(5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = f(5-2x)$.

$$y' = [f(5-2x)]' = -2f'(5-2x).$$

$$\text{Xét bất phương trình: } y' < 0 \Leftrightarrow f'(5-2x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 5-2x < -1 \\ 5-2x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 < x < 4 \\ x < 2 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số $y = f(5-2x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và khoảng $(3; 4)$.

Vì $(0; 2) \subset (-\infty; 2)$ nên chọn đáp án B

Câu 60: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-3		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = f(3-2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(3; 4)$. **B.** $(2; 3)$. **C.** $(-\infty; -3)$. **D.** $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = f'(3-2x) = (3-2x)' f'(3-2x) = -2f'(3-2x).$$

$$*) y' = 0 \Leftrightarrow -2f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x = -3 \\ 3-2x = -1 \\ 3-2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 2 \\ x = 1 \end{cases}.$$

$$*) y' \geq 0 \Leftrightarrow -2f'(3-2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(3-2x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3-2x \leq -3 \\ -1 \leq 3-2x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 3 \\ 1 \leq x \leq 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+

Hàm số $y = f(3 - 2x)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ nên đồng biến trên khoảng $(3; 4)$.

Câu 61: (Mã 104, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; -3)$. B. **$(4; 5)$** . C. $(3; 4)$. D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = -2f'(5 - 2x)$.

Hàm số $y = f(5 - 2x)$ đồng biến $\Leftrightarrow -2f'(5 - 2x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(5 - 2x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5 - 2x < -3 \\ -1 < 5 - 2x < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 4 \\ 2 < x < 3 \end{cases}$$

Vậy chọn đáp án **B**.

Câu 62: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm

số $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. **$m \leq 0$ hoặc $1 \leq m < 2$** . B. $m \leq 0$. C. $1 \leq m < 2$. D. $m \geq 2$.

Lời giải.

Chọn A

Đặt $t = \tan x$, vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t - 2}{t - m} \forall t \in (0; 1)$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có $f'(t) = \frac{2 - m}{(t - m)^2}$.

Đề hàm số y đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ khi và chỉ khi: $f'(t) > 0 \forall t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - m}{(t - m)^2} > 0 \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0] \cup [1; 2) \\ m \geq 1 \end{cases}$$

CASIO: Đạo hàm của hàm số ta được $y' = \frac{\frac{1}{\cos^2 x}(\tan x - m) - (\tan x - 2)\frac{1}{\cos^2 x}}{(\tan x - m)^2}$

Ta nhập vào máy tính bằng $y' \backslash \text{CALC} \backslash \text{Calc}$ $x = \frac{\pi}{8}$

$\backslash = \backslash m = ?$ 1 giá trị bất kỳ trong 4 đáp án.

Đáp án D $m \geq 2$. Ta chọn $m = 3$. Khi đó $y' = -0,17 < 0$

Đáp án C $1 \leq m < 2$ Ta chọn $m = 1,5$. Khi đó $y' = 0,49 > 0$

Đáp án B $m \geq 0$ Ta chọn $m = 0$. Khi đó $y' = 13,6 > 0$

Vậy đáp án B và C đều đúng

Câu 63: (Đề minh họa lần 3, Năm 2017) Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$?

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Hàm số nghịch biến trên đâu thì $f'(x) \leq 0$ tại đó với dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm.

Cách giải: Xét $m = 1$ thì $y = -x + 4$ (thỏa mãn nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$). Xét $m \neq 1$, ta có:

$$f'(x) = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1$$

$$f'(x) \leq 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ \Delta' = (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 < 1 \\ 2m^2 - m - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ m > \frac{-2}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 1.$$

Mà m là số nguyên nên $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Câu 64: (Mã 102, Năm 2017) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

A. 2.

B. Vô số.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}.$$

$$y' = \frac{5m - 2}{(x + 5m)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 5m - 2 > 0 \\ -5m \in [-10; +\infty) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị của tham số m .

- Câu 65: (Mã 102, Năm 2017)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?
- A. 3. B. Vô số. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$$y' = \frac{5m-6}{(x+5m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $(10; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in D \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{6}{5} \\ m \geq -2 \end{cases}.$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

- Câu 66: (Mã 103, Năm 2017)** Cho hàm số $y = \frac{mx-2m-3}{x-m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .
- A. 5. B. 4. C. Vô số. D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x-m)^2}$$

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định thì $y' \geq 0 \Leftrightarrow -m^2 + 2m + 3 \geq 0 \Leftrightarrow m \in [-1; 3]$

Xét tại $m = -1; m = 3$ thấy không thỏa mãn. Vậy $m = 0; m = 1; m = 2$.

- Câu 67: (Mã 104, Năm 2017)** Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Tìm số phần tử của S .
- A. 5. B. 4. C. Vô số. D. 3.

Lời giải

Chọn D

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}; y' = \frac{m^2 - 4m}{(x+m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định khi $y' < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 3 giá trị thỏa.

Câu 68: (Đề minh họa, Năm 2019) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

- A. $(-\infty; 0]$. B. $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. C. $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$. D. $[0; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

Theo đề $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow 4m \leq 3x^2 + 12x + 9, \forall x \in (-\infty; -1)$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 12x + 9 \Rightarrow g'(x) = 6x + 12$

x	$-\infty$	-2	-1
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	-3	6

Vậy $4m \leq -3 \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{4}$.

Câu 69: (Mã 101, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+5m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$?

- A. 2. B. Vô số. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$$y' = \frac{5m-2}{(x+5m)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -10)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} 5m-2 > 0 \\ -5m \in [-10; +\infty) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{5} \\ -5m \geq -10 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < m \leq 2.$$

Vì m nguyên nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy có 2 giá trị của tham số m .

Câu 70: (Mã 102, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+6}{x+5m}$ nghịch biến trên khoảng $(10; +\infty)$?

A. 3.

B. Vô số.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-5m\}$.

$$y' = \frac{5m-6}{(x+5m)^2}$$

Hàm số nghịch biến trên $(10; +\infty)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} y' < 0, \forall x \in D \\ -5m \notin (10; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5m-6 < 0 \\ -5m \leq 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{6}{5} \\ m \geq -2 \end{cases}$.

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Câu 71: (Mã 103, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$?

A. 3.

B. Vô số.

C. 0.

D. 6.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$; $y' = \frac{3m-1}{(x+3m)^2}$.

Hàm số $y = \frac{x+1}{x+3m}$ nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$ khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y' < 0 \\ (6; +\infty) \subset D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-1 < 0 \\ -3m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{1}{3} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < \frac{1}{3}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0\}$.

Câu 72: (Mã 104, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+3m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$.

A. 2.

B. 6.

C. Vô số.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = (-\infty; -3m) \cup (-3m; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{3m-2}{(x+3m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 > 0 \\ -6 \leq -3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} < m \leq 2 \end{cases}$.

Mà m nguyên nên $m = \{1; 2\}$.

- Câu 73: (Đề Tham Khảo Lần 2 2020)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x + 3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Dấu '=' xảy ra tại hữu hạn điểm).

Ta có $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$, vậy có 5 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

- Câu 74: (Đề Tham Khảo Lần 1 2020)** Cho hàm số $f(x) = \frac{mx - 4}{x - m}$ (m là tham số thực). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A.** 5. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

$$\text{Đạo hàm } f'(x) = \frac{-m^2 + 4}{(x - m)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) > 0 \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + 4 > 0 \\ m \notin (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq 0.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{-1; 0\}$. Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

- Câu 75: (Mã 101 – 2020 – Lần 1)** Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 4}{x + m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7)$ là
- A.** $[4; 7)$. **B.** $(4; 7]$. **C.** $(4; 7)$. **D.** $(4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{m - 4}{(x + m)^2}.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -7) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty; -7)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-4 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ -m \geq -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 4 \\ m \leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow 4 < m \leq 7.$$

Câu 76: (Mã 102 – 2020 – Lần 1) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+5}{x+m}$

đồng biến trên khoảng $(-\infty; -8)$ là

- A.** $(5; +\infty)$. **B.** $(5; 8]$. **C.** $[5; 8)$. **D.** $(5; 8)$.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện $x \neq -m$.

Ta có $y' = \frac{m-5}{(x+m)^2}$

Để hàm số $y = \frac{x+5}{x+m}$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -8)$ thì

$$\begin{cases} y' > 0 \\ -m \notin (-\infty; -8) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m-5 > 0 \\ -m \geq -8 \end{cases} \Rightarrow 5 < m \leq 8.$$

Câu 77: (Mã 103 – 2020 – Lần 1) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2}{x+m}$

đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$

- A.** $(2; 5]$. **B.** $[2; 5)$. **C.** $(2; +\infty)$. **D.** $(2; 5)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \frac{m-2}{(x+m)^2}$

$$\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } (-\infty; -5) \Leftrightarrow \begin{cases} y' > 0 \forall x \in (-\infty; -5) \\ -m \notin (-\infty; -5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ -m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 2 < m \leq 5.$$

Câu 78: (Mã 104- 2020 – Lần 1) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+3}{x+m}$

đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$ là

- A.** $(3; 6]$. **B.** $(3; 6)$. **C.** $(3; +\infty)$. **D.** $[3; 6)$.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định khi: $x+m \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -m$.

$$y = \frac{x+3}{x+m} \Rightarrow y' = \frac{m-3}{(x+m)^2}$$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -6)$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y' > 0, \forall x \in (-\infty; -6) \\ -m \notin (-\infty; -6) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 > 0 \\ -m \in [-6; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ -m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m \leq 6.$$

Vậy: $m \in (3; 6]$.

Câu 79: (Mã 101 – 2020 -Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (4-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- A. $(-\infty; 1]$ B. $(-\infty; 4]$ C. $(-\infty; 1)$ D. $(-\infty; 4)$

Lời giải

Chọn B

Ta có.

$$y' = 3x^2 - 6x + 4 - m. \text{ ycbt} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 4 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 4, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{(2; +\infty)} g(x) \text{ với } g(x) = 3x^2 - 6x + 4$$

Ta có.

$$g'(x) = 6x - 6$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$g'(x)$		0		+
$g(x)$				$+\infty$

4

Dựa vào bảng biến thiên, suy ra: $m \leq 4$ thỏa yêu cầu bài toán.

Vậy: $m \in (-\infty; 4]$ thì hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 80: (Mã 102 – 2020 – Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (5-m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- A. $(-\infty; 2)$. B. $(-\infty; 5)$. C. $(-\infty; 5]$. D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 5 - m$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 5 - m \geq 0, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2.$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$ trên khoảng $(2; +\infty)$.

Có $f'(x) = 6x - 6$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (loại).

Bảng biến thiên

x	2	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	5	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta có $m \leq 3x^2 - 6x + 5, \forall x > 2 \Leftrightarrow m \leq 5$.

Vậy $m \in (-\infty; 5]$.

Câu 81: (Mã 103 – 2020 – Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (2 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- A. $(-\infty; -1]$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(-\infty; 2]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 2 - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 2 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \quad m \leq 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2; +\infty).$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (2; +\infty)$.

$$f'(x) = 6x - 6; \quad f'(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		0		+
$f(x)$			2	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy $m \leq 2$. Vậy $m \in (-\infty; 2]$.

Câu 82: (Mã 104 – 2020 – Lần 2) Tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + (1 - m)x$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ là

- A. $(-\infty; -2)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-\infty; -2]$. D. $(-\infty; 1]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 1 - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 - m \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 1 \geq m, \forall x \in (2; +\infty).$$

Xét hàm số $g(x) = 3x^2 - 6x + 1$ với $\forall x \in (2; +\infty)$.

$$g'(x) = 6x - 6; g'(x) > 0, \forall x \in (2; +\infty).$$

Bảng biến thiên $g(x)$:

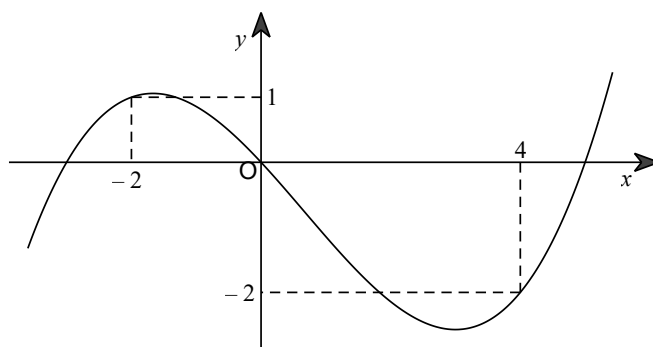
x	2	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$		$+\infty$

1

Vậy $m \leq 1$.

Câu 83: (Đề Tham Khảo 2020 – Lần 1) Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên.

Hàm số $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây ?



A. $\left(1; \frac{3}{2}\right)$.

B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-2; -1)$.

D. $(2; 3)$.

Lời giải

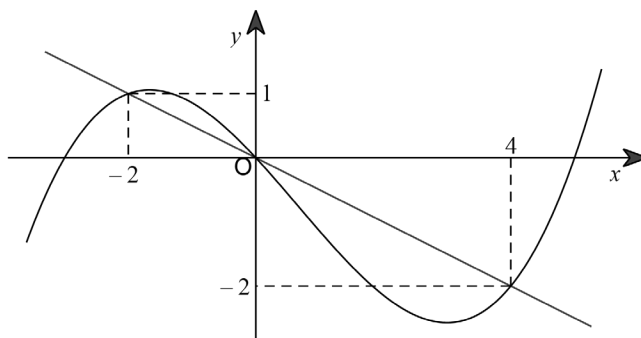
Chọn A

Ta có : $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$

Đặt $t = 1 - 2x \Rightarrow g'(x) = -2f'(t) - t$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow f'(t) = -\frac{t}{2}$$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ và đồ thị hàm số $f'(x)$ trên cùng một hệ trục



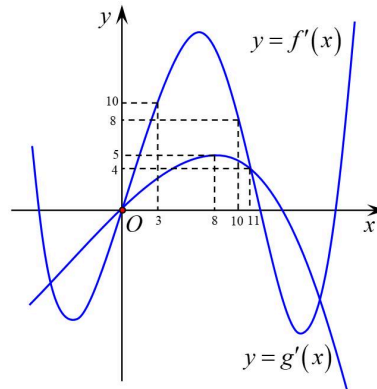
$$\text{Hàm số } g(x) \text{ nghịch biến} \Rightarrow g'(x) \leq 0 \Rightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases}$$

$$\text{Như vậy } f'(1-2x) \geq \frac{1-2x}{-2} \Rightarrow \begin{cases} -2 \leq 1-2x \leq 0 \\ 4 \leq 1-2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2} \\ x \leq -\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ và $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$.

Mà $\left(1; \frac{3}{2}\right) \subset \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ nên hàm số $g(x) = f(1-2x) + x^2 - x$ nghịch biến trên khoảng $\left(1; \frac{3}{2}\right)$

Câu 84: (Mã 102, Năm 2017) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+7) - g\left(2x + \frac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(2; \frac{16}{5}\right)$.

B. $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.

C. $\left(\frac{16}{5}; +\infty\right)$.

D. $\left(3; \frac{13}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } h'(x) = f'(x+7) - 2g'\left(2x + \frac{9}{2}\right).$$

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3; 8)$ thì $g'(x) < 5$ và $f'(x) > 10$. Do đó $f'(x) > 2g'(x)$.

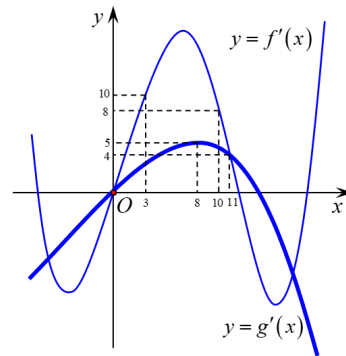
$$\text{Như vậy: } g'\left(2x + \frac{9}{2}\right) < 5 \text{ nếu } 3 < 2x + \frac{9}{2} < 8 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < x < \frac{7}{4}.$$

$$f'(x+7) > 10 \text{ nếu } 3 < x+7 < 8 \Leftrightarrow -4 < x < 1.$$

Suy ra trên khoảng $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ thì $g'\left(2x + \frac{9}{2}\right) < 5$ và $f'(x+7) > 10$ hay $h'(x) > 0$.

Tức là trên khoảng $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$ hàm số $h(x)$ đồng biến.

Câu 85: (Mã 101, Năm 2018) Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó **đường cong đậm hơn** là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$.



Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(5; \frac{31}{5}\right)$.

B. $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$.

C. $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$.

D. $\left(6; \frac{25}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

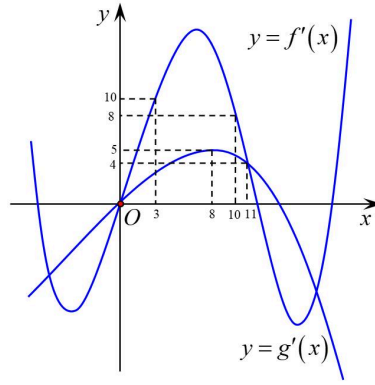
Ta có $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$.

Hàm số $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ đồng biến $\Leftrightarrow h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow f'(x+4) \geq 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x+4 \leq 8 \\ 3 \leq 2x - \frac{3}{2} \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ 3 + \frac{3}{2} \leq 2x \leq 8 + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ \frac{9}{2} \leq 2x \leq \frac{19}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{19}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{19}{4}.$$

Câu 86: (Mã 102, Năm 2018) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+7) - g\left(2x + \frac{9}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(2; \frac{16}{5}\right)$.

B. $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$.

C. $\left(\frac{16}{5}; +\infty\right)$.

D. $\left(3; \frac{13}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = f'(x+7) - 2g'\left(2x + \frac{9}{2}\right)$.

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3; 8)$ thì $g'(x) < 5$ và $f'(x) > 10$. Do đó $f'(x) > 2g'(x)$.

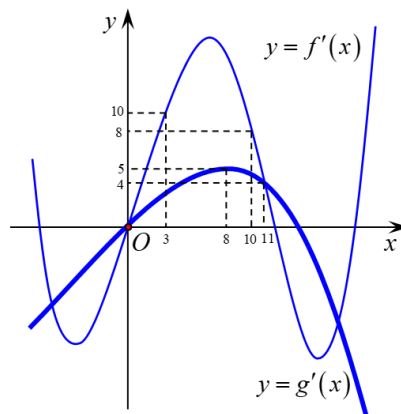
Như vậy: $g'\left(2x + \frac{9}{2}\right) < 5$ nếu $3 < 2x + \frac{9}{2} < 8 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} < x < \frac{7}{4}$.

$f'(x+7) > 10$ nếu $3 < x+7 < 8 \Leftrightarrow -4 < x < 1$.

Suy ra trên khoảng $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$ thì $g'\left(2x + \frac{9}{2}\right) < 5$ và $f'(x+7) > 10$ hay $h'(x) > 0$.

Tức là trên khoảng $\left(-\frac{3}{4}; 0\right)$ hàm số $h(x)$ đồng biến.

Câu 87: (Mã 103, Năm 2018) Cho hai hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên



trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị của hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f\left(x + \frac{7}{2}\right) - g\left(2x - \frac{7}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $\left(\frac{13}{4}; 4\right)$.

B. $\left(7; \frac{29}{4}\right)$.

C. $\left(6; \frac{36}{5}\right)$.

D. $\left(\frac{36}{5}; +\infty\right)$.

Lời giải

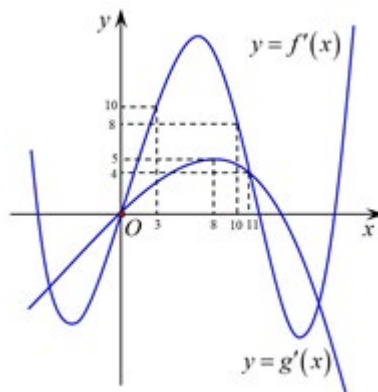
Chọn A

Cách 1. Ta thấy $f'(x) > 2g'(y)$ với mọi $x \in (3; 8)$ và mọi $y \in \mathbb{R}$.

Suy ra $f'(x+3) - 2g'\left(2x - \frac{7}{2}\right) > 0$ với mọi $x+3 \in (3; 8)$ hay $x \in (0; 5)$.

Cách 2. Ta có: $x \in \left(\frac{13}{4}; 4\right) \Rightarrow \begin{cases} x+3 \in \left(\frac{25}{4}; 7\right) \Rightarrow f'(x+7) > 10 \\ 2x - \frac{7}{2} \in \left(3; \frac{9}{2}\right) \Rightarrow g'\left(2x - \frac{7}{2}\right) < 5 \end{cases} \Rightarrow h'(x) > 0$
 $\Rightarrow h(x)$ đồng biến trên $\left(\frac{13}{4}; 4\right)$

Câu 88: (Mã 104, Năm 2018) Cho hai hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$. Hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây, trong đó đường cong đậm hơn là đồ thị hàm số $y = g'(x)$. Hàm số $h(x) = f(x+6) - g\left(2x + \frac{5}{2}\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $\left(\frac{21}{5}; +\infty\right)$.

B. $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$.

C. $\left(3; \frac{21}{5}\right)$.

D. $\left(4; \frac{17}{4}\right)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $h'(x) = f'(x+6) - 2g'\left(2x + \frac{5}{2}\right)$.

Nhìn vào đồ thị của hai hàm số $y = f'(x)$ và $y = g'(x)$ ta thấy trên khoảng $(3; 8)$ thì $g'(x) < 5$ và $f'(x) > 10$. Do đó $f'(x) > 2g'(x)$.

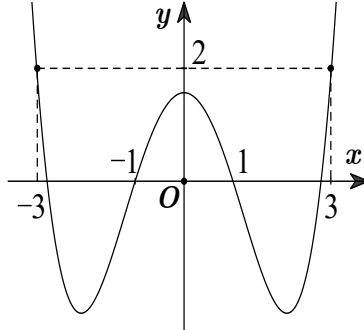
Như vậy: $g'\left(2x + \frac{5}{2}\right) < 5$ nếu $3 < 2x + \frac{5}{2} < 8 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < \frac{11}{4}$.

$f'(x+6) > 10$ nếu $3 < x+6 < 8 \Leftrightarrow -3 < x < 2$.

Suy ra trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; 2\right)$ thì $g'\left(2x + \frac{5}{2}\right) < 5$ và $f'(x+7) > 10$ hay $h'(x) > 0$.

Tức là trên khoảng $\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ hàm số $h(x)$ đồng biến.

Câu 89: Cho hàm số $y = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ với a, b, c, d, e, f là các số thực, đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới đây. Hàm số $y = f(1-2x) - 2x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng nào sau đây?



A. $\left(-\frac{3}{2}; -1\right)$.

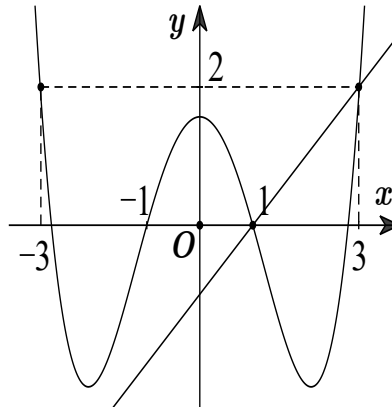
B. $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

C. $(-1; 0)$.

D. $(1; 3)$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1: Ta có: $g(x) = f(1-2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) - 4x$.

Có: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(1-2x) - 4x > 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < -2x$ (1).

Đặt $t = 1-2x$, bất phương trình (1) trở thành $f'(t) < t-1$.

Vẽ đường thẳng $y = x-1$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = x-1$ nằm trên đồ thị hàm số $f'(x)$ trên khoảng $(1; 3) \Rightarrow f'(t) < t-1 \Leftrightarrow 1 < t < 3 \Leftrightarrow 1 < 1-2x < 3 \Leftrightarrow -1 < x < 0$.

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Cách 2: Ta có: $g(x) = f(1-2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1-2x) - 4x$.

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) = -2x \Leftrightarrow f'(1-2x) = (1-2x) - 1$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t-1, (t = 1-2x)$.

Từ đồ thị ta có $f'(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$. Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = 1 \\ 1 - 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$.

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 0)$.

Cách 3: Cách trắc nghiệm.

Ta có: $g(x) = f(1 - 2x) - 2x^2 + 1 \Rightarrow g'(x) = -2f'(1 - 2x) - 4x$.

Ta lần lượt thử các đáp án.

Thử đáp án A: Chọn $x = -1,25 \in \left(-\frac{3}{2}; -1\right) \Rightarrow g'(-1,25) = -2f'(3,5) - 5$.

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(3,5) > 0 \Rightarrow g'(-1,25) < 0 \Rightarrow$ loại đáp án **A**.

Thử đáp án B: Chọn $x = 0,25 \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow g'(0,25) = -2f'(0,5) - 1$.

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(0,5) > 0 \Rightarrow g'(0,25) < 0 \Rightarrow$ loại đáp án **B**.

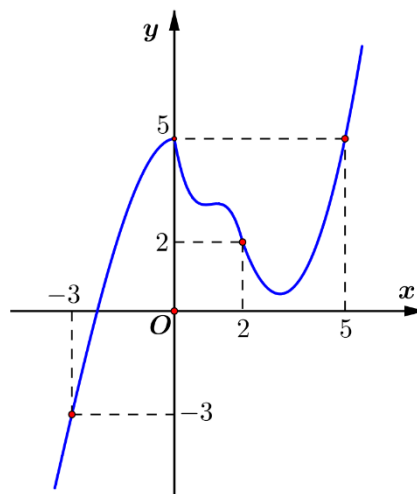
Thử đáp án C: Chọn $x = -0,5 \in (-1; 0) \Rightarrow g'(-0,5) = -2f'(2) + 2$.

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(2) < 0 \Rightarrow -2f'(2) > 0 \Rightarrow g'(-0,5) > 0 \Rightarrow$ Chọn đáp án **C**.

Thử đáp án D: Chọn $x = 2 \in (1; 3) \Rightarrow g'(2) = -2f'(-3) - 8$.

Nhìn đồ thị $f'(x)$ ta thấy $f'(-3) > 0 \Rightarrow -2f'(-3) < 0 \Rightarrow g'(2) < 0 \Rightarrow$ loại đáp án **D**.

Câu 90: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ



Hàm số $g(x) = f(-2x + 1) + (x + 1)(-2x + 4)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

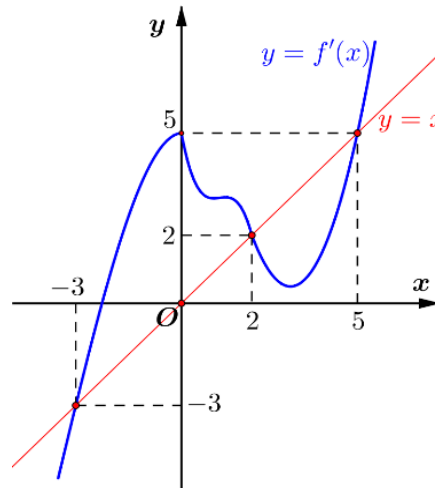
A. $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

B. $(-\infty; -2)$.

C. $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

D. $\left(-\frac{1}{2}; 2\right)$.

Lời giải



Chọn A

Cách 1: Ta có: $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4) \Rightarrow g'(x) = -2f'(-2x+1) - 4x + 2$

Có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow -2f'(-2x+1) - 4x + 2 > 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) < -2x+1$ (1).

Đặt $t = -2x+1$, bất phương trình (1) trở thành $f'(t) < t$.

Kẻ đường thẳng $y = x$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đường thẳng $y = x$ nằm trên đồ thị hàm số $f'(x)$ trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(2; 5)$.

$$\text{Suy ra } f'(t) < t \Leftrightarrow \begin{cases} t < -3 \\ 2 < t < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 < -3 \\ 2 < -2x+1 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ -2 < x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ và $(2; +\infty)$.

Cách 2: Ta có: $g(x) = f(-2x+1) + (x+1)(-2x+4) \Rightarrow g'(x) = -2f'(-2x+1) - 4x + 2$

Có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(-2x+1) = -2x+1$ (1).

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t, (t = -2x+1)$.

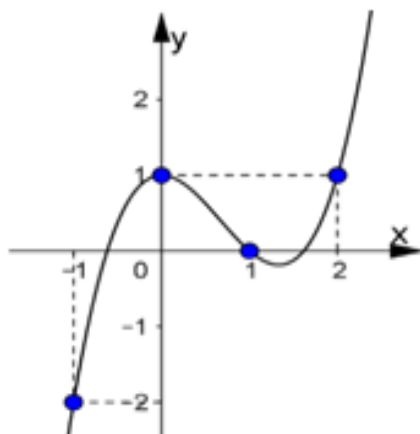
$$\text{Từ đồ thị ta có } f'(t) = t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = 2 \\ t = 5 \end{cases} \text{ . Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+1 = -3 \\ -2x+1 = 2 \\ -2x+1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 91: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x-1) - \frac{x^3}{3} + x^2 - x + 2020$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 2)$.

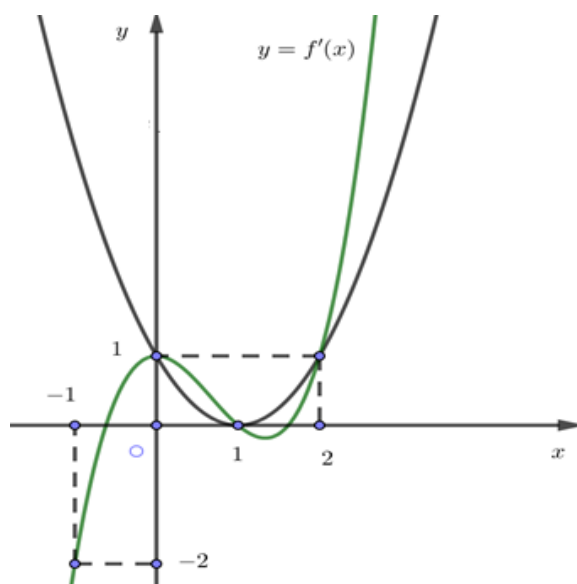
B. $(3; +\infty)$.

C. $(-\infty; 1)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn C



Cách 1: Ta có: $g'(x) = f'(x-1) - (x-1)^2$

Có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x-1) < (x-1)^2$ (1).

Đặt $t = x - 1$, bất phương trình (1) trở thành $f'(t) < t^2$.

Vẽ Parabol $y = x^2$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $y = x^2$ nằm trên đồ thị hàm số $f'(x)$ trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(1; 2)$.

$$\text{Suy ra } f'(t) < t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t < 0 \\ 1 < t < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 < 0 \\ 1 < x - 1 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 2 < x < 3 \end{cases}.$$

Vậy hàm số $g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; 3)$.

Cách 2: Ta có: $g'(x) = f'(x-1) - (x-1)^2$.

$$\text{Có: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-1) = (x-1)^2.$$

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t^2, (t = x - 1)$.

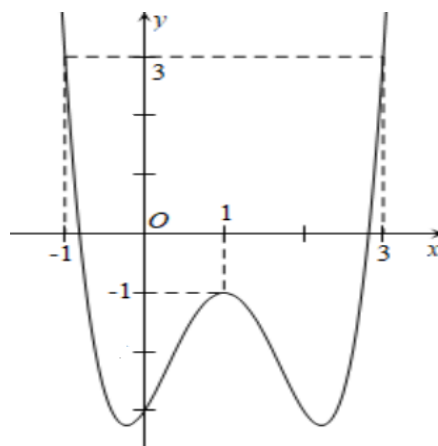
$$\text{Từ đồ thị ta có: } f'(t) = t^2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases}. \text{ Khi đó } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ x - 1 = 1 \\ x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu.

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(2; 3)$.

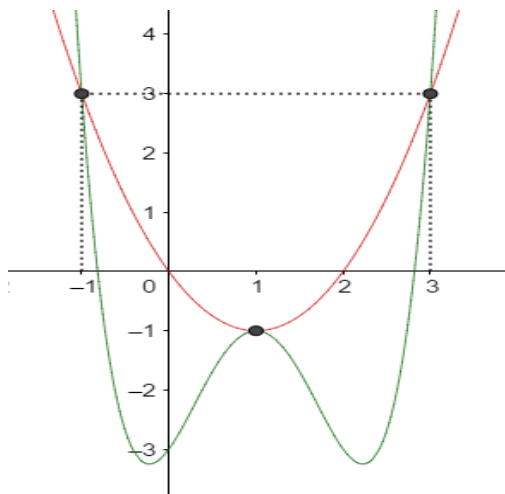
Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây.



Hàm số $g(x) = f(3x-1) - 27x^3 + 54x^2 - 27x + 4$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $\left(0; \frac{2}{3}\right)$. B. $\left(\frac{2}{3}; 3\right)$. C. $(0; 3)$. D. $(4; +\infty)$.

Lời giải



Chọn D

Cách 1:

Ta có: $g(x) = f(3x-1) - (3x-1)^3 + 3(3x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = 3[f'(3x-1) - (3x-1)^2 + 2(3x-1)]$

Có $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(3x-1) > (3x-1)^2 - 2(3x-1)$ (1).

Đặt $t = 3x-1$, bất phương trình (1) trở thành $f'(t) > t^2 - 2t$.

Vẽ Parabol $y = x^2 - 2x$. Trên cùng đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số $f'(x)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x$ trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$.

Suy ra $f'(t) > t^2 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t < -1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 < -1 \\ 3x-1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > \frac{4}{3} \end{cases}$

Vậy hàm số $g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(\frac{4}{3}; +\infty)$.

Cách 2:

Ta có: $g(x) = f(3x-1) - (3x-1)^3 + 3(3x-1)^2 \Rightarrow g'(x) = 3[f'(3x-1) - (3x-1)^2 + 2(3x-1)]$

Có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3x-1) = (3x-1)^2 - 2(3x-1)$.

Xét sự tương giao của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t^2 - 2t, (t = 3x-1)$.

Từ đồ thị ta có: $f'(t) = t^2 - 2t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1(\text{nghiệm kép}) \\ t = 3 \end{cases}$

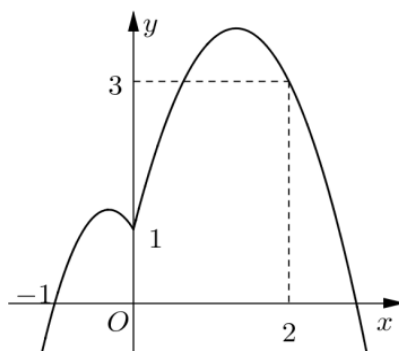
Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 = -1 \\ 3x-1 = 1 \\ 3x-1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3}(\text{nghiệm kép}) \\ x = 3 \end{cases}$

Ta có bảng xét dấu.

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu ta thấy hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 93: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1) = 0$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $y = \left| 2f(x-1) - x^2 \right|$ đồng biến trên khoảng

A. $(3; +\infty)$.

B. $(-1; 2)$.

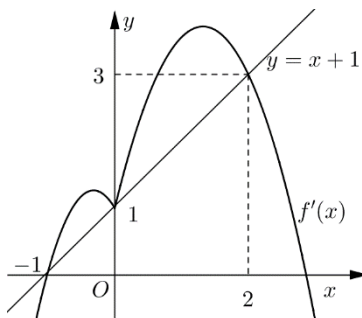
C. $(0; +\infty)$.

D. $(0; 3)$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $g(x) = 2f(x-1) - x^2 \Rightarrow g'(x) = 2[f'(x-1) - (x-1) - 1]$



Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = x + 1$ ta có:

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > (x-1) + 1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 3$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = |2f(x-1) - x^2|$ đồng biến trên khoảng $(0; 3)$.

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = x(2x-1) \cdot (x^2+3) + 2$. Hàm số $y = f(3-x) + 2x + 2019$ đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(3; 5)$. B. $\left(2; \frac{5}{2}\right)$. C. $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$. D. $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = -f'(3-x) + 2$.

$$\begin{aligned} y' > 0 &\Leftrightarrow -f'(3-x) + 2 > 0 \Leftrightarrow f'(3-x) < 2 \Leftrightarrow (3-x)[2(3-x)-1][(3-x)^2+3] + 2 < 2 \\ &\Leftrightarrow (3-x)(5-2x)[(3-x)^2+3] < 0 \end{aligned}$$

Vì $[(3-x)^2+3] > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $y' > 0$ khi và chỉ khi $(3-x)(5-2x) < 0 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x < 3$.

Vậy hàm số $y = f(3-x) + 2x + 2019$ đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{2}; 3\right)$.

Câu 95: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x - m) + m^2 + 1$ đồng biến trên $(0; 2)$?

- A. 16. B. 17. C. 18. D. 19.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(t) = t^2 + 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 1 \end{cases} (*)$.

Có $g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x-m)$

Vì $2x+3 > 0, \forall x \in (0; 2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0; 2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow f'(x^2+3x-m) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$$

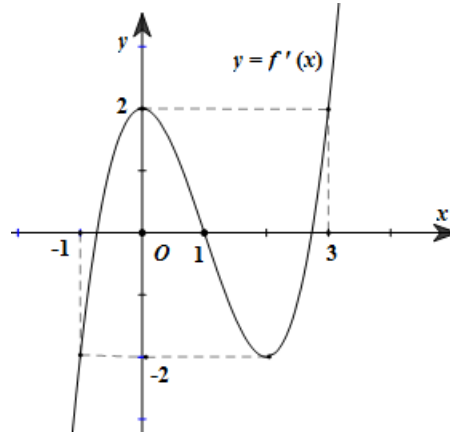
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-m \leq -3, \forall x \in (0; 2) \\ x^2+3x-m \geq 1, \forall x \in (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x \leq m-3, \forall x \in (0; 2) \\ x^2+3x \geq m+1, \forall x \in (0; 2) \end{cases} (**)$$

Có $h(x) = x^2 + 3x$ luôn đồng biến trên $(0; 2)$ nên từ $(**)$ $\Rightarrow \begin{cases} m-3 \geq 10 \\ m+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}$

Vì $\begin{cases} m \in [-10; 20] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Có 18 giá trị của tham số m .

Vậy có 18 giá trị của tham số m cần tìm.

Câu 96: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng các phần tử của S bằng:

A. 4.

B. 11.

C. 14.

D. 20.

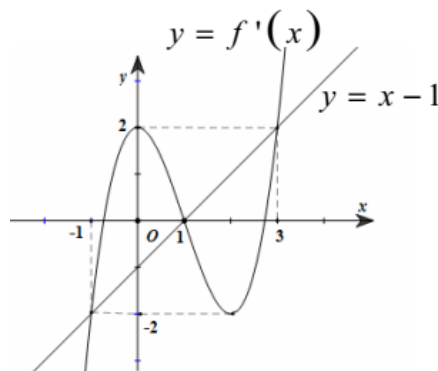
Lời giải

Chọn C

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (x-1)$. Từ đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị $y = x-1$ trên hình vẽ ta suy ra

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$



$$\text{Ta có } g'(x) = h(x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-m \leq 1 \\ x-m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq x \leq m+1 \\ x \geq m+3 \end{cases}$$

Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1; m+1)$ và $(m+3; +\infty)$

Do vậy, hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 5 \\ m+1 \geq 6 \\ m+3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 5; 6\}$, tức $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$ thỏa mãn: $f'(x) = (1-x^2)(x-5)$

Hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(1; 5)$. B. $(2; +\infty)$. C. $(-1; 0)$. D. $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Chọn B

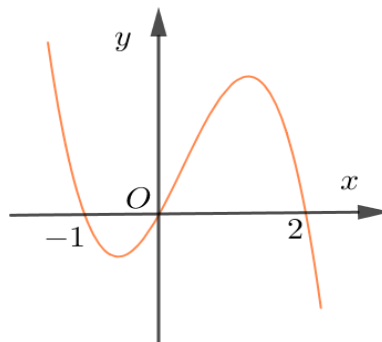
Ta có: $f'(x) = (1-x^2)(x-5)$ suy ra $f'(x+3) = [1-(x+3)^2](x+3-5)$
 $= -(x+4)(x+2)(x-2)$.

Mặt khác: $y' = 3.f'(x+3) - 3x^2 + 12 = -3[(x+4)(x+2)(x-2) + (x^2 - 4)]$
 $= -3(x-2)(x+2)(x+5)$.

Xét $y' < 0 \Leftrightarrow -3(x-2)(x+2)(x+5) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < -2 \\ x > 2 \end{cases}$.

Vậy hàm số $y = 3f(x+3) - x^3 + 12x$ nghịch biến trên các khoảng $(-5; -2)$ và $(2; +\infty)$.

Câu 98: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị $y = f'(x)$ như hình bên dưới và $f(-1) = f(2) = 0$



Hàm số $g(x) = [f(x^3 - 3)]^2$ đồng biến trên các khoảng nào trong các khoảng sau

- A. $(1; 2)$ B. $(0; 1)$ C. $(-1; 0)$ D. $(-2; -1)$

Lời giải

Chọn Trần_Tuấn_Anh

Ta có $g'(x) = 4xf(x^2 - 3) \cdot f'(x^2 - 3)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1)$	$f(0)$	$f(2)$	$-\infty$

Do $f(-1) = f(2) = 0$ nên $f(x^2 - 3) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ để hàm số đồng biến thì $x \cdot f'(x^2 - 3) \leq 0$

$$\text{TH1: } x \geq 0 \text{ thì } f'(x^2 - 3) \leq 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 \leq x^2 - 3 \leq 0 \\ x^2 - 3 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x \geq \sqrt{5} \\ x \leq -\sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \geq 0 \text{ nên } \begin{cases} \sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{3} \\ x \geq \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\text{TH2: } x \leq 0 \text{ thì } f'(x^2 - 3) \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 - 3 \leq 2 \\ x^2 - 3 \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{5} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \leq 0 \text{ nên } \begin{cases} -\sqrt{5} \leq x \leq -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \leq x \leq 0 \end{cases}$$

Vậy hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng $(-\sqrt{5}; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{2}; 0)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$, $(\sqrt{5}; +\infty)$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

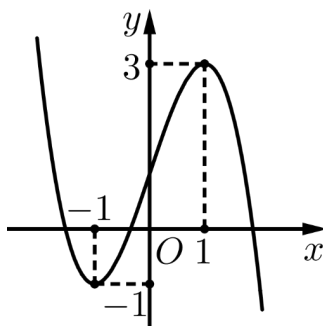
PHẦN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC
CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **Câu 26 (101-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng:



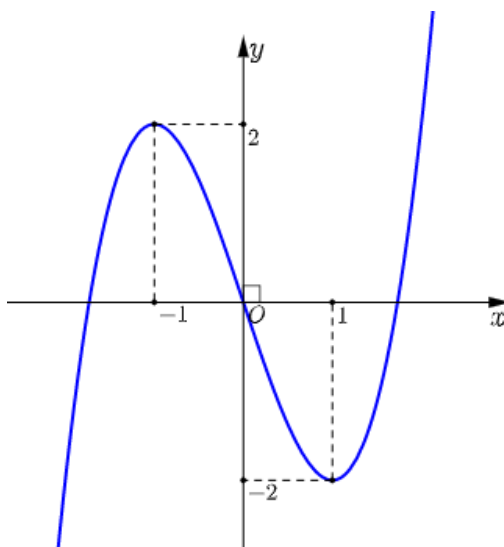
A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. -1.

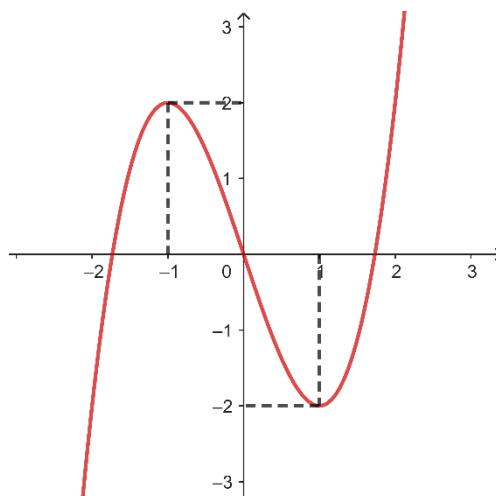
Câu 2: **Câu 12 (102-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình bên.



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

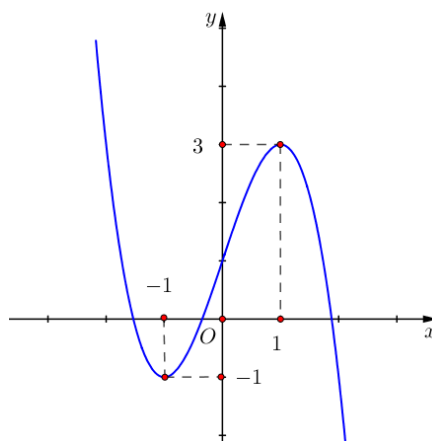
- A. $x = 1$. B. $x = -2$. C. $x = -1$. D. $x = 2$.

Câu 3: **Câu 3 (103-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



- A. $x = 1$. B. -2 . C. $x = -1$. D. $x = 2$.

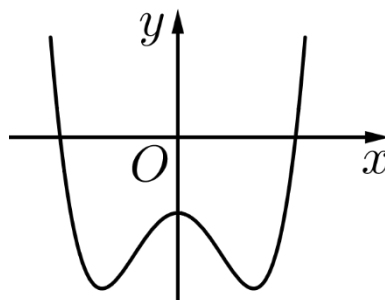
Câu 4: **Câu 9 (104-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

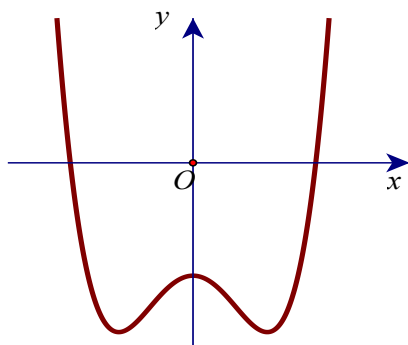
- A. 3. B. 0. C. -1. D. 1.

Câu 5: **Câu 28 (101-2023)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



- A. 1. B. 3. C. 0. D. 2.

Câu 6: **Câu 23 (104-2023)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



- A. 3. B. 1. C. 2. D. 0.

Câu 7: **Câu 24 (102-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 0. C. 3. D. 1.

Câu 8: **Câu 21 (103-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

VD-VDC-CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 9: **Câu 41 (101-2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$?

- A. 16. B. 6. C. 17. D. 7.

Câu 10: **Câu 40 (102-2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 6)$?

- A. 24. B. 25. C. 26. D. 23.

Câu 11: **Câu 39 (103-2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \frac{4}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 8)$?

- A. 26. B. 36. C. 35. D. 27.

Câu 12: **Câu 41 (104-2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + \frac{1}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 5)$?

- A. 17. B. 12. C. 16. D. 11.

Câu 13: **(MĐ 101-2022)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 2$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$		

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. $x = -2$. B. $x = 2$. C. $x = -1$. D. $x = 1$.

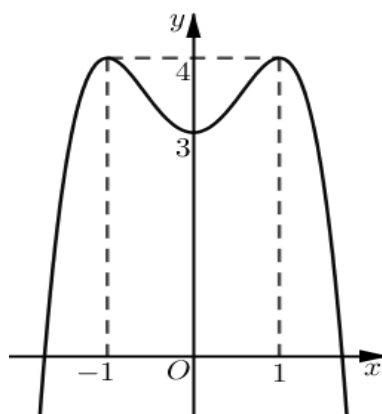
Câu 14: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

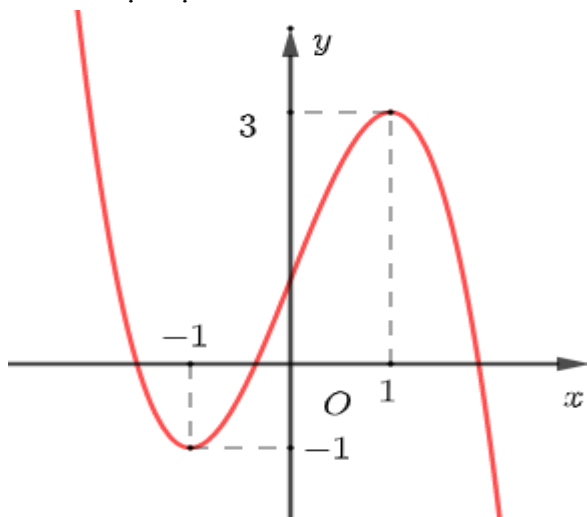
- A.** $x = -2$. **B.** $x = -1$. **C.** $x = 2$. **D.** $x = 1$.

Câu 15: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



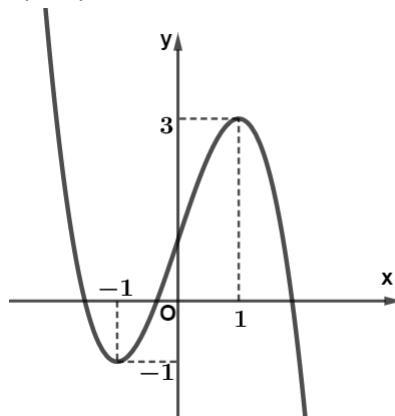
- A.** 1. **B.** 4. **C.** -1. **D.** 3.

Câu 16: (MĐ 103-2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



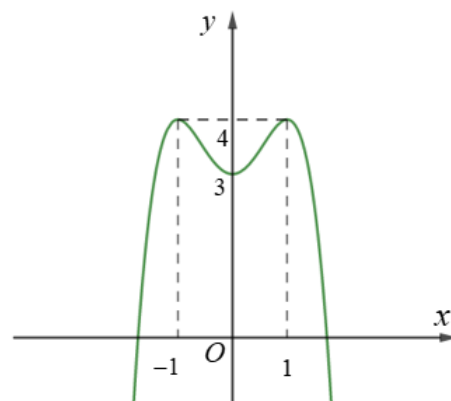
- A.** $(1; -1)$. **B.** $(3; 1)$. **C.** $(1; 3)$. **D.** $(-1; -1)$.

Câu 17: (MĐ 104-2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



- A. $(1;3)$. B. $(3;1)$. C. $(-1;-1)$. D. $(1;-1)$.

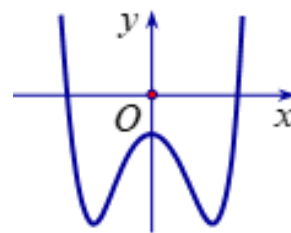
Câu 18: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



- A. 3. B. 4. C. -1. D. 1.

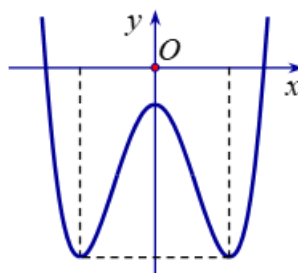
Câu 19: (MĐ 101-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình cong trong hình bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

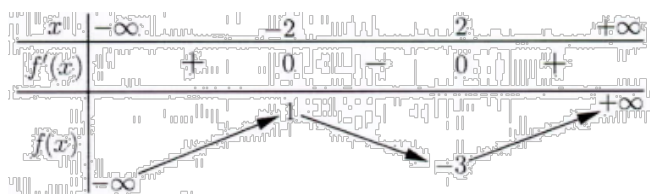
Câu 20: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

- Câu 21: (MĐ 101-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có đúng ba điểm cực trị?
- A. 5. B. 6. C. 12. D. 11.
- Câu 22: (MĐ 102-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + 2ax^2 + 8x|$ có đúng ba điểm cực trị?
- A. 2. B. 6. C. 5. D. 3.
- Câu 23: (MĐ 103-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng ba điểm cực trị?
- A. 5. B. 6. C. 11. D. 10.
- Câu 24: (MĐ 104-2022)** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 - 64x|$ có đúng ba điểm cực trị?
- A. 23. B. 12. C. 24. D. 11.
- Câu 25: (ĐTK 2020-2021)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

- A. $x = -3$. B. $x = 1$. C. $x = 2$. D. $x = -2$.
- Câu 26: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. -1. C. -5. D. 1.
- Câu 27: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Câu 28: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	1	3	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 0. B. 3. C. 1. D. -1.

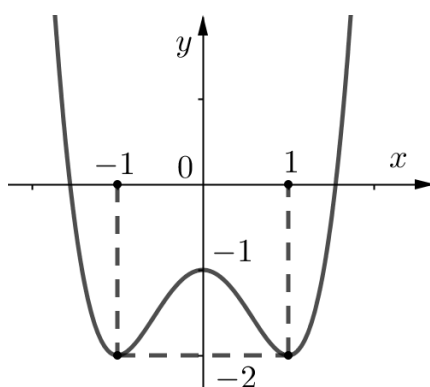
Câu 29: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 4. C. 2. D. 5.

Câu 30: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:



- A. $x = 1$. B. $x = -1$. C. $x = -2$. D. $x = 0$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				5		$-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 3. C. 0.

D. 2.

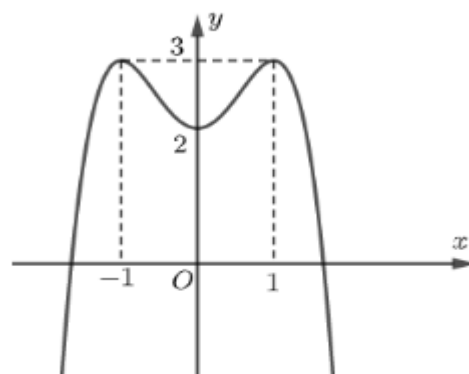
Câu 33: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:

A. $x = -1$.

B. $x = 2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 0$.



Câu 34: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$		3		0		3	$-\infty$

Hỏi số điểm cực trị của hàm số đã cho là

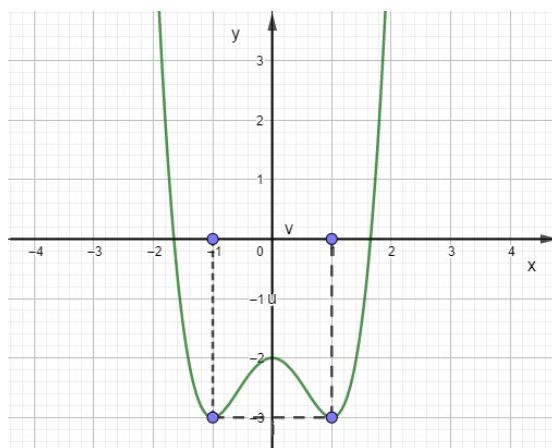
A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 2.

Câu 35: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:



A. $x = 1$.

B. $x = -2$.

C. $x = 0$.

D. $x = -1$.

Câu 36: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$			-3			0		$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Câu 37: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	3	5	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 38: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

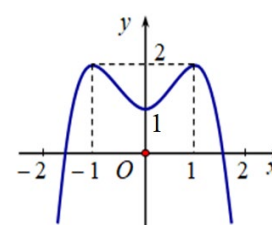
x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$	
		1			1		

Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 39: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c (a, b, c \in \mathbb{R})$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số là:

- A. $x = 0$. B. $x = -1$.
C. $x = 2$. D. $x = 1$.



Câu 40: (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101) Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$		2		-5		$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. -5 . C. 0. D. 2.

Câu 41: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. -2. C. 3. D. -1.

Câu 42: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		-3		2		$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. 2. C. -2. D. -3.

Câu 43: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$		2		-3		$+\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. -3. C. -1. D. 2.

Câu 44: (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

- A. 4. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 45: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102) Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 46: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 47: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$	-2	1	2	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$-$

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là:

- A. 3. B. 1. C. 2. D. 4.

Câu 48: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	$ $	$-$	0	$+$
y					

$-\infty \xrightarrow{\quad} 0 \xrightarrow{\quad} -1 \xrightarrow{\quad} +\infty$

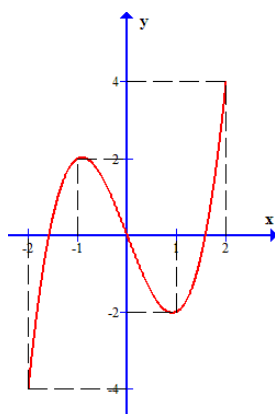
Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A. Hàm số có đúng một cực trị
 B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1
 C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1
 D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Câu 49: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

- A. $y_{CD} = 4$ B. $y_{CD} = 1$ C. $y_{CD} = 0$ D. $y_{CD} = -1$

Câu 50: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



- A. $x = -2$. B. $x = -1$. C. $x = 1$. D. $x = 2$

Câu 51: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 . B. Cực tiểu của hàm số bằng 1 .
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 . D. Cực tiểu của hàm số bằng 2 .

Câu 52: (Mã 101, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	3	0	$+\infty$			

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

- A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$ B. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$
C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$ D. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$

Câu 53: (Mã 101, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y			5		1		$+\infty$

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 5 B. 3 C. 4 D. 2

Câu 54: (Mã 102, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		3		$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$ $\nearrow$
 0 0

Mệnh đề nào dưới đây **sai**

- A. Hàm số có hai điểm cực tiểu B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0
C. Hàm số có ba điểm cực trị D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3

Câu 55: (Mã 102, Năm 2017) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

- A. $Q(-1; 10)$ B. $M(0; -1)$ C. $N(1; -10)$ D. $P(1; 0)$

Câu 56: (Mã 103, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0
y		4	-5	2

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 2 -5

Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

- A. Hàm số có bốn điểm cực trị.
B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.
C. Hàm số không có cực đại.
D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Câu 57: (Mã 103, Năm 2017) Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

- A. $S = 9$. B. $S = \frac{10}{3}$. C. $S = 5$. D. $S = 10$.

Câu 58: (Mã 104, Năm 2017) Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Câu 59: (Tham khảo 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0
y	$+\infty$		5	

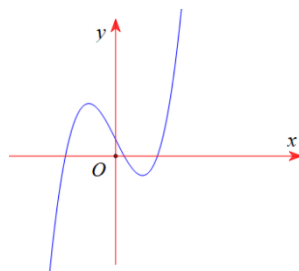
$\searrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 1 5 $-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

- A. $x = 1$ B. $x = 0$ C. $x = 5$ D. $x = 2$

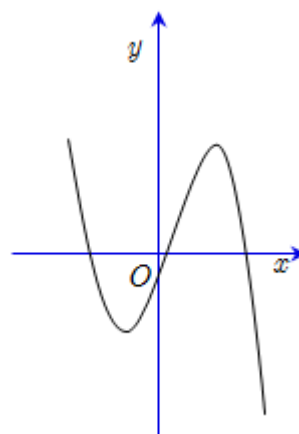
Câu 60: (Mã 101, Năm 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



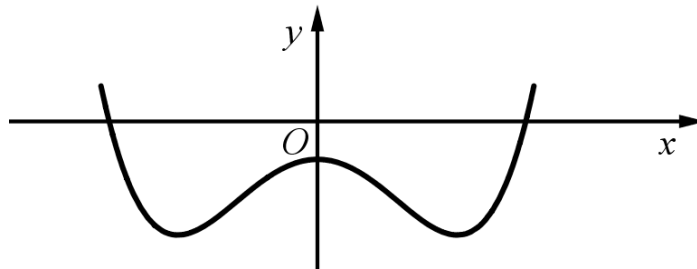
- A. 2 B. 0 C. 3 D. 1

Câu 61: (Mã 102, Năm 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



- A. 0 B. 1
C. 3 D. 2

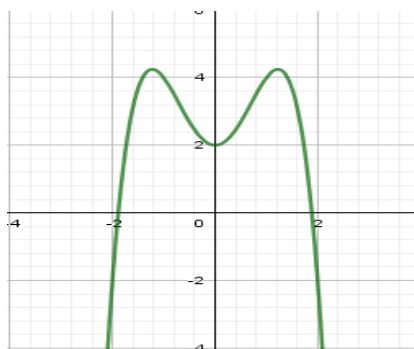
Câu 62: (Mã 103, Năm 2018) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2 B. 3 C. 0 D. 1

Câu 63: (Mã 104, Năm 2018) Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 64: (Đề minh họa 1, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$						$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 1 5

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 1. B. 2. C. 0. D. 5.

Câu 65: (Đề minh họa 1, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 2. C. 5. D. 1.

Câu 66: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -3 1

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = 2$. B. $x = 1$. C. $x = -1$. D. $x = -3$.

Câu 67: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 68: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$						$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 -2 2

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Câu 69: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3

Câu 70: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$			3		-2	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Câu 71: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Câu 72: (Mã 104, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$			2		-2	$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Câu 73: (Mã 104, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 74: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ B. $m = -1$ C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ D. $m = 1$

Câu 75: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Biết $M(0;2), N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A. $y(-2) = 2$. B. $y(-2) = 22$. C. $y(-2) = 6$. D. $y(-2) = -18$.

Câu 76: (Đề minh họa 3, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại.

- A. $1 \leq m \leq 3$. B. $m \leq 1$. C. $m \geq 1$. D. $1 < m \leq 3$.

- Câu 77: (Đề minh họa 3, Năm 2017)** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .
- A. 0. B. 6. C. -6. D. 3.
- Câu 78: (Mã 101, Năm 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.
- A. $m = -1$ B. $m = -7$ C. $m = 5$ D. $m = 1$
- Câu 79: (Mã 103, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.
- A. $m > 0$. B. $m < 1$. C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$. D. $0 < m < 1$.
- Câu 80: (Mã 104, Năm 2017)** Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.
- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = \frac{3}{4}$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{4}$.
- Câu 81: (Mã 104, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.
- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. B. $m = -1; m = 1$. C. $m = 1$. D. $m \neq 0$.
- Câu 82: (Tham khảo 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?
- A. 3 B. 5 C. 6 D. 4
- Câu 83: (Mã 101, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 2)x^5 - (m^2 - 4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?
- A. 3 B. 5 C. 4 D. Vô số
- Câu 84: (Mã 102, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 1)x^5 - (m^2 - 1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?
- A. 3 B. 2 C. Vô số D. 1
- Câu 85: (Mã 103, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 4)x^5 - (m^2 - 16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- A. 8 B. Vô số C. 7 D. 9
- Câu 86: (Mã 104, Năm 2018)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m - 3)x^5 - (m^2 - 9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?
- A. 4 B. 7 C. 6 D. Vô số

Câu 91: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	-1	3	$-\infty$		

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x-1)]^4$ là

- A. 7. B. 8. C. 5. D. 9.

Câu 92: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x-1)]^2$ là

- A. 7. B. 5. C. 9. D. 11.

Câu 93: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$					

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x+1)]^4$

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 5.

Câu 94: (ĐTK 2020-2021) Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	1	$-\frac{61}{3}$	$+\infty$

Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 3. B. 5. C. 4. D. 2.

- Câu 95:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4-m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?
- A. 27. B. 31. C. 28. D. 30.
- Câu 96:** (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?
- A. 6. B. 7. C. 5. D. 4.
- Câu 97:** (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-8)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?
- A. 5. B. 7. C. 8. D. 6.
- Câu 98:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-10)(x^2-25), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 8x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?
- A. 9. B. 25. C. 5. D. 10.
- Câu 99:** (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-9)(x^2-16), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 7x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?
- A. 16. B. 9. C. 4. D. 8.
- Câu 100:** Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?
- A. 25. B. 27. C. 26. D. 28.
- Câu 101:** (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (4-m)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?
- A. 25. B. 22. C. 26. D. 21.
- Câu 102:** (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?
- A. 21. B. 25. C. 24. D. 22.

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ

PHÂN CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

-Định lý cực trị

• **Điều kiện cần** : Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$ và đạt cực đại tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

• **Điều kiện đủ** :

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

• **Định lý 3**: Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

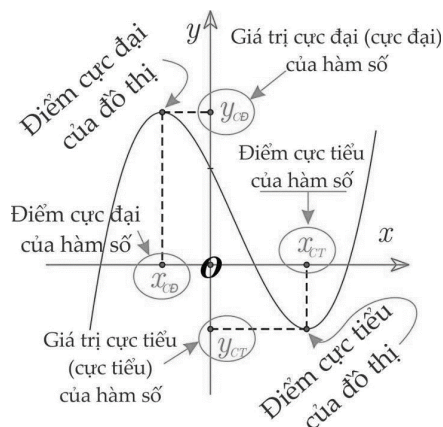
Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

• Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là x_0 , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là $f(x_0)$ (hay $y_{\text{cđ}}$ hoặc y_{ct}). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(x_0; f(x_0))$.

• Nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$.



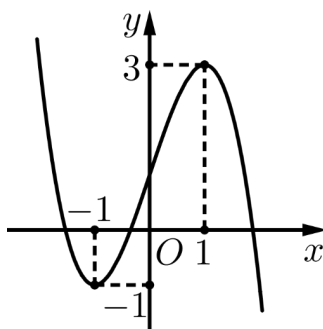
♦ Dựa vào bảng biến thiên:

- Nếu x qua điểm x_0 mà $f'(x)$ đổi từ dấu $(+)$ sang dấu $(-)$ thì x_0 là điểm cực đại.
 - Nếu x qua điểm x_0 mà $f'(x)$ đổi từ dấu $(-)$ sang dấu $(+)$ thì x_0 là điểm cực tiểu.
- (số lần đổi dấu của $f'(x)$ chính bằng số điểm cực trị của hàm số)

III HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM TRÍCH TỪ ĐỀ THAM KHẢO VÀ ĐỀ CHÍNH THỨC CỦA BỘ GIÁO DỤC TỪ NĂM 2017 ĐẾN NAY

Câu 1: **Câu 26 (101-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng:



A. 0.

B. 1.

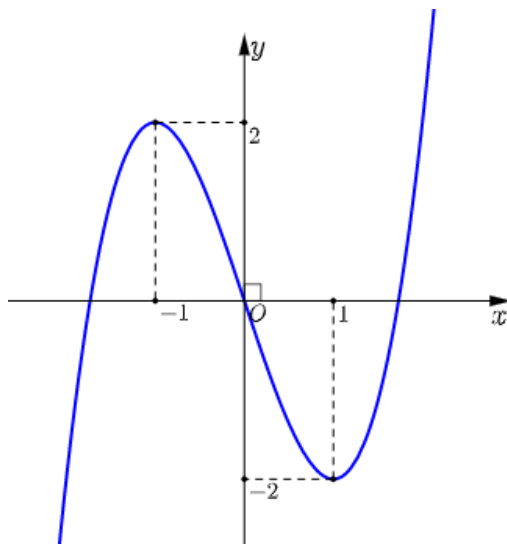
C. 3.

D. -1.

Lời giải

Giá trị cực đại của hàm số là 3.

Câu 2: **Câu 12 (102-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình bên.



Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = 1$.

B. $x = -2$.

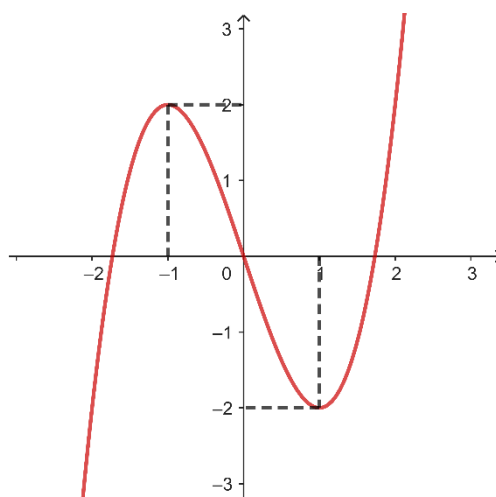
C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy điểm cực tiểu của hàm số đã cho là $x = 1$.

Câu 3: **Câu 3 (103-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A. $x = 1$.

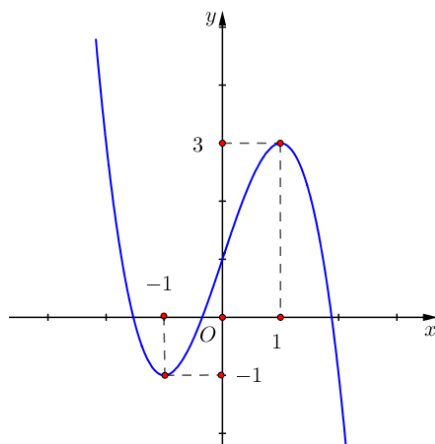
B. -2 .

C. $x = -1$.

D. $x = 2$.

Lời giải

Câu 4: **Câu 9 (104-2023)** Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3.

B. 0.

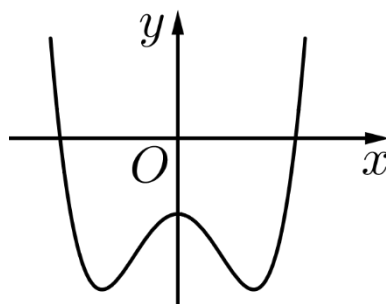
C. -1.

D. 1.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, giá trị cực đại của hàm số bằng 3.

Câu 5: **Câu 28 (101-2023)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A. 1.

B. 3.

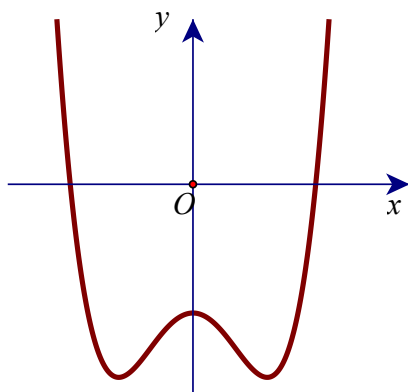
C. 0.

D. 2.

Lời giải

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là 2.

Câu 6: **Câu 23 (104-2023)** Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị như đường cong trong hình bên. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là



A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Số cực tiểu là 2.

Câu 7: **Câu 24 (102-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 0.

C. 3.

D. 1.

Lời giải

Xét phương trình $f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f'(x) = (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=1 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Câu 8: **Câu 21 (103-2023)** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+2)(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Do $f'(x) = (x+2)(x-1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Ta lập được bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

VD-VDC-CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Câu 9: **Câu 41 (101-2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$?

A. 16.

B. 6.

C. 17.

D. 7.

Lời giải

$$y' = -3x^2 + 6x - 3m$$

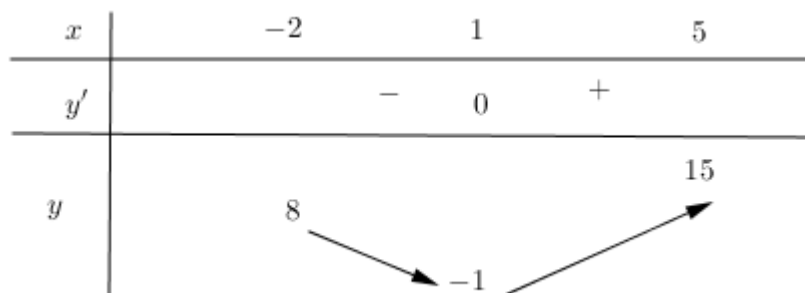
hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 3mx + \frac{5}{3}$ có đúng một cực trị thuộc khoảng $(-2; 5)$ khi và chỉ khi

$y' = 0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 5) \Leftrightarrow x^2 - 2x + m = 0$ có một nghiệm thuộc khoảng $(-2; 5)$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x = -m$$

$$g(x) = x^2 - 2x \Rightarrow g'(x) = 2x - 2$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



Để hàm số có 1 cực trị $\Rightarrow 8 \leq -m < 15 \Leftrightarrow -15 < m \leq -8 \Rightarrow m \in \{-14; -13; -12; -11; -10; -9; -8\}$

Câu 10: Câu 40 (102-2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - mx + \frac{2}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 6)$?

A. 24.

B. 25.

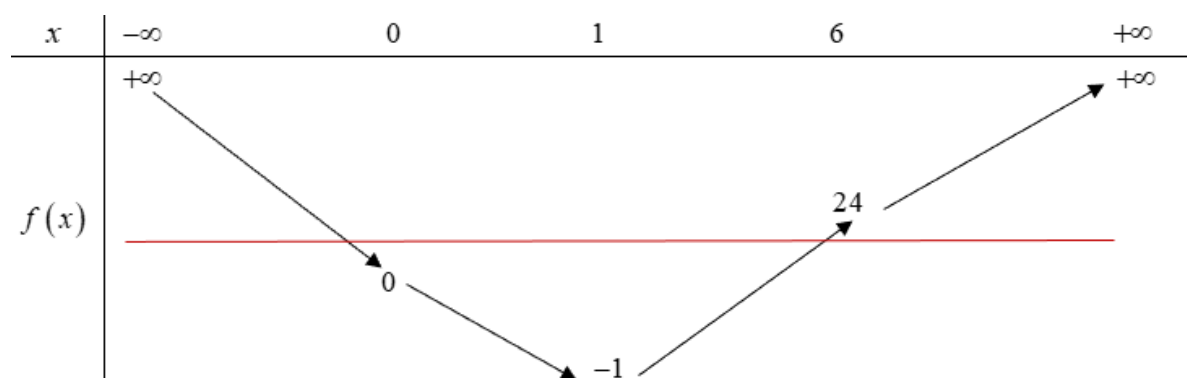
C. 26.

D. 23.

Lời giải

Ta có: $y' = x^2 - 2x - m = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x = m \quad (*)$.

BBT cho hàm số $f(x)$



Hàm số có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 6)$ khi $0 \leq m < 24$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; \dots; 23\}$. Vậy có tất cả 24 giá trị nguyên của m .

Câu 11: Câu 39 (103-2023) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \frac{4}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 8)$?

A. 26.

B. 36.

C. 35.

D. 27.

Lời giải

$$y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \frac{4}{3} \Rightarrow y' = -x^2 + 4x + m.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow m = x^2 - 4x.$$

$$\text{Xét hàm số } g(x) = x^2 - 4x \Rightarrow g'(x) = 2x - 4.$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2.$$

Bảng biến thiên

x	-1	2	8
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	5	-4	32

Hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + mx - \frac{4}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 8)$ khi và chỉ khi $y' = 0$ có đúng một nghiệm bội lẻ thuộc khoảng $(-1; 8)$.

Suy ra $5 \leq m < 32$.

Câu 12: **Câu 41 (104-2023)** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho ứng với mỗi m , hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + \frac{1}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 5)$?

A. 17.

B. 12.

C. 16.

D. 11.

Lời giải

Cách 1: $y' = 3x^2 - 6x + 3m$

$$\Delta' = 9 - 9m$$

$y' = 3x^2 - 6x + 3m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1, x_2 (x_1 < x_2) \Leftrightarrow 9 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 1$

$$m < 1 \Rightarrow x_1 = \frac{3 - \sqrt{9 - 9m}}{3} = 1 - \sqrt{1 - m}, x_2 = \frac{3 + \sqrt{9 - 9m}}{3} = 1 + \sqrt{1 - m}$$

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3mx + \frac{1}{3}$ có đúng một điểm cực trị thuộc khoảng $(-1; 5)$ khi và chỉ khi

TH1.

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ -1 < x_1 < 5 \leq x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -1 < 1 - \sqrt{1 - m} < 5 \\ 5 \leq 1 + \sqrt{1 - m} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -2 < -\sqrt{1 - m} < 4 \\ \sqrt{1 - m} \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 2 > \sqrt{1 - m} > -4 \\ \sqrt{1 - m} \geq 4 \end{cases} \text{Loại.}$$

TH2.

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 \leq -1 < x_2 < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -1 < 1 + \sqrt{1 - m} < 5 \\ 1 - \sqrt{1 - m} \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -2 < \sqrt{1 - m} < 4 \\ \sqrt{1 - m} \geq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 2 \leq \sqrt{1 - m} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ 4 \leq 1 - m < 16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ -3 \geq m > -15 \end{cases} \Leftrightarrow -15 < m \leq -3$$

$$\Rightarrow m \in \{-14; -13; -12; -11; -10; -9; -8; -7; -6; -5; -4; -3\}$$

Cách 2:

$$y' = 3x^2 - 6x + 3m$$

YCBT $\Leftrightarrow$ PT $3x^2 - 6x + 3m = 0$ có 2 nghiệm phân biệt trong đó có đúng 1 nghiệm thuộc khoảng $(-1; 5)$.

Xét $3x^2 - 6x + 3m = 0 \Leftrightarrow f(x) = x^2 - 2x = -m$.

Hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ có $f'(x) = 2x - 2$. Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	5	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	3	-1	15	

Từ BBT suy ra điều kiện $3 \leq -m < 15 \Leftrightarrow -15 < m \leq -3 \Rightarrow m \in \{-14; -13; \dots; -3\}$. Vậy có 12 giá trị thỏa mãn.

Câu 13: (MĐ 101-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	-2	$+\infty$		

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = -2$.

B. $x = 2$.

C. $x = -1$.

D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$

Câu 14: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 2$.

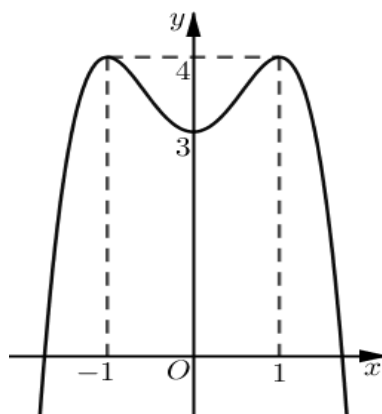
D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có điểm cực tiểu là $x = 1$.

Câu 15: (MĐ 103-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



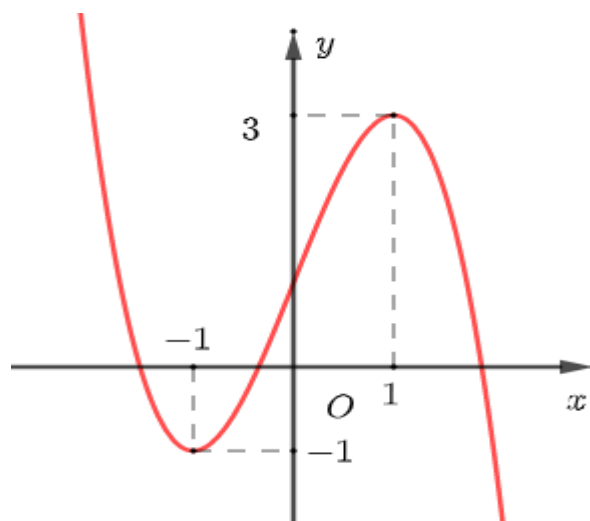
- A. 1. B. 4. C. -1. D. 3.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng 3.

Câu 16: (MĐ 103-2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



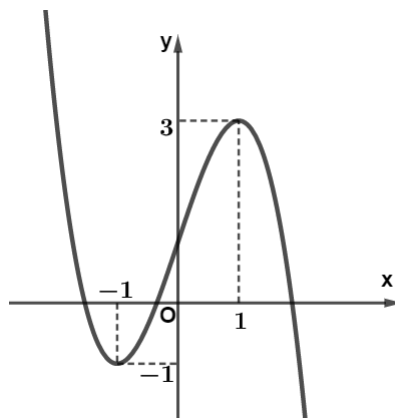
- A. $(1; -1)$. B. $(3; 1)$. C. $(1; 3)$. D. $(-1; -1)$.

Lời giải

Chọn D

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là $(-1; -1)$.

Câu 17: (MĐ 104-2022) Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



A. $(1;3)$.

B. $(3;1)$.

C. $(-1;-1)$.

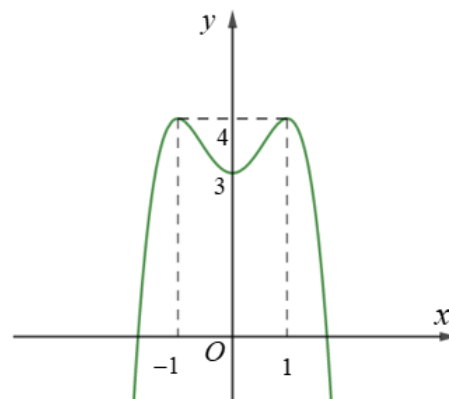
D. $(1;-1)$.

Lời giải

Chọn C

Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là $(-1;-1)$.

Câu 18: (MĐ 104-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng



A. 3.

B. 4.

C. -1.

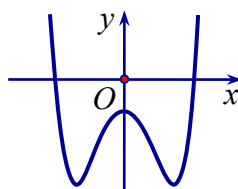
D. 1.

Lời giải

Chọn A

Giá trị cực tiểu: $y_{CT} = 3$.

Câu 19: (MĐ 101-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như hình cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2.

B. 3.

C. 1.

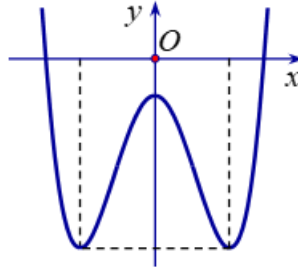
D. 0.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Câu 20: (MĐ 102-2022) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có đồ thị như đường cong trong hình bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 0. C. 2. **D. 3.**

Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị ta thấy: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Câu 21: (MĐ 101-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 64x|$ có đúng ba điểm cực trị?

- A. 5. B. 6. **C. 12.** D. 11.

Lời giải

Chọn C

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 64x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 - 4mx + 64$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4mx + 64 = 0 \Rightarrow m = x^2 + \frac{16}{x}$.

Đặt $g(x) = x^2 + \frac{16}{x} \Rightarrow g'(x) = 2x - \frac{16}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$.

Bảng biên thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$g'(x)$				
$g(x)$	$+\infty$	$+\infty$	12	$+\infty$

Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 2mx^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - 2mx + 64 = 0 \end{cases}$.

Suy ra $x^3 - 2mx + 64 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}x^2 + \frac{32}{x}$.

Đặt $h(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{32}{x} \Rightarrow h'(x) = x - \frac{32}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow x = 2\sqrt[3]{4}$.

Bảng biên thiên

x	$-\infty$	0	$2\sqrt[3]{4}$	$+\infty$
$h'(x)$				
$h(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$12\sqrt[3]{2}$	$+\infty$

Nhận xét: Số cực trị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số cực trị hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Do đó yêu cầu bài toán suy ra hàm số $y = f(x)$ có 1 cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có 2

$$\text{nghiệm bội lẻ } \begin{cases} m \leq 12 \\ m \leq 12\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 12.$$

Vì tham số m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

Vậy có 12 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn.

Câu 22: (MĐ 102-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + 2ax^2 + 8x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 2.

B. 6.

C. 5.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $f(x) = x^4 + 2ax^2 + 8x \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4ax + 8$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4ax + 8 = 0 \Rightarrow a = -x^2 - \frac{2}{x}$.

Đặt $g(x) = -x^2 - \frac{2}{x} \Rightarrow g'(x) = -2x + \frac{2}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

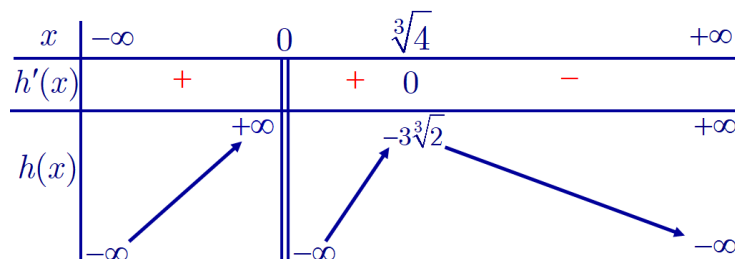
x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	+	0	-
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$	-3	$+\infty$

Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + 2ax^2 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + 2ax + 8 = 0 \end{cases}$.

Xét phương trình $x^3 + 2ax + 8 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x}$.

$$\text{Đặt } h(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{4}{x} \Rightarrow h'(x) = -x + \frac{4}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{4}.$$

Bảng biến thiên



Nhận xét: Số cực trị hàm số $y = |f(x)|$ bằng số cực trị hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Do đó yêu cầu bài toán suy ra hàm số $y = f(x)$ có 1 cực trị và phương trình $f(x) = 0$ có 2

$$\text{nghiệm bội lẻ } \begin{cases} a \geq -3 \\ a > -3\sqrt[3]{2} \end{cases} \Leftrightarrow a \geq -3.$$

Vì tham số a nguyên âm nên $a \in \{-1; -2; -3\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên âm của tham số a thỏa mãn.

Câu 23: (MĐ 103-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số a để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 5.

B. 6.

C. 11.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $f(x) = x^4 + ax^2 - 8x$; $f'(x) = 4x^3 + 2ax - 8$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + ax - 8 = 0 \end{cases}$$

Vì phương trình bậc ba luôn có tối thiểu 1 nghiệm nên để hàm số $y = |f(x)|$ có đúng ba điểm cực trị thì phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt và $f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm bội lẻ.

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 + ax - 8 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 + a.$$

Để $g(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất $\neq 0$ (1)

TH1: $3x^2 + a = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow a \geq 0$

$$\text{TH2: } 3x^2 + a = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ x = \pm \sqrt{\frac{-a}{3}} \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} g\left(\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) > 0 \\ g\left(-\sqrt{-\frac{a}{3}}\right) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} + a\sqrt{-\frac{a}{3}} - 8 > 0 \\ \frac{a}{3}\sqrt{-\frac{a}{3}} - a\sqrt{-\frac{a}{3}} - 8 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{-\frac{a}{3}} > 6 \text{ (sai)} \\ a > -3\sqrt[3]{16} \end{cases}$$

Suy ra $a > -3\sqrt[3]{16}$

Để $f'(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm bội lẻ (2)

TH1: $12x^2 + 2a = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $\Leftrightarrow a \geq 0$

TH2: $12x^2 + 2a = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ x = \pm\sqrt{\frac{-a}{6}} \end{cases}$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} f'\left(\sqrt{-\frac{a}{6}}\right) \geq 0 \\ f'\left(-\sqrt{-\frac{a}{6}}\right) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4\frac{a}{6}\sqrt{-\frac{a}{6}} + 2a\sqrt{-\frac{a}{6}} - 8 \geq 0 \\ 4\frac{a}{6}\sqrt{-\frac{a}{6}} - 2a\sqrt{-\frac{a}{6}} - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\sqrt{-\frac{a}{6}} \geq 6 \text{ (sai)} \\ a \geq -6 \end{cases}$$

Suy ra $a \geq -6$

Vậy $a \geq -6$ thỏa ycbt với $a \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Cách 2:

$$y = |x^4 + ax^2 - 8x|$$

$$y' = \frac{(x^4 + ax^2 - 8x)(4x^3 + 2ax - 8)}{|x^4 + ax^2 - 8x|} = \frac{2x(x^3 + ax - 8)(2x^3 + ax - 4)}{|x^4 + ax^2 - 8x|}$$

Để hàm số $y = |x^4 + ax^2 - 8x|$ có đúng ba điểm cực trị $\Rightarrow$ phương trình $y' = 0$ có đúng 3 nghiệm bội lẻ.

Vì $x = 0$ không là nghiệm của các phương trình $x^3 + ax - 8 = 0$ và $2x^3 + ax - 4 = 0$

Khi $x \neq 0$

$$\text{Ta có } x^3 + ax - 8 = 0 \Rightarrow a = \frac{8 - x^3}{x} = g(x)$$

$$g'(x) = \frac{-8 - 2x^3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{4}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt[3]{4}$	0	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	-
$g(x)$				

Ta có $2x^3 + ax - 4 = 0 \Rightarrow a = \frac{4 - 2x^3}{x} = h(x)$

$h'(x) = \frac{-4 - 4x^3}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -1.$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	-
$h(x)$				

Yêu cầu bài toán $\Rightarrow a \geq -6$ với $a \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow a \in \{-6; -5; -4; -3; -2; -1\}.$

Câu 24: (MĐ 104-2022) Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |x^4 - mx^2 - 64x|$ có đúng ba điểm cực trị?

A. 23.

B. 12.

C. 24.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Xét $f(x) = x^4 - mx^2 - 64x$. Ta có $f'(x) = 4x^3 - 2mx - 64 = 0 \Rightarrow m = 2x^2 - \frac{32}{x}.$

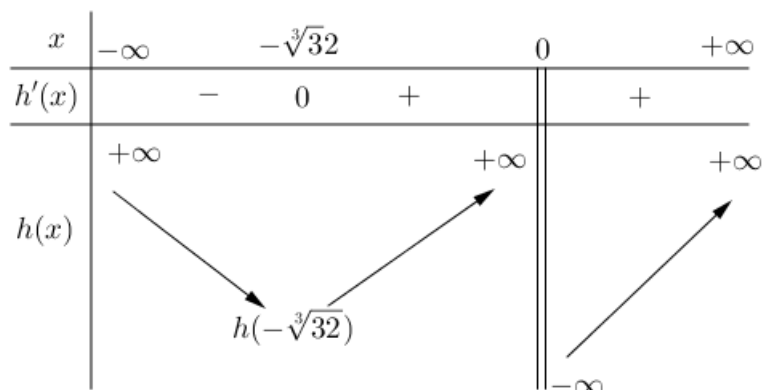
Đặt $g(x) = 2x^2 - \frac{32}{x} \Rightarrow g'(x) = 4x + \frac{32}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2.$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	+
$g(x)$		24		

Xét phương trình $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - mx^2 - 64x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 - mx - 64 = 0 \end{cases}$.

Xét $x^3 - mx - 64 = 0 \Rightarrow m = x^2 - \frac{64}{x}$.

Đặt $h(x) = x^2 - \frac{64}{x} \Rightarrow h'(x) = 2x + \frac{64}{x^2} \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\sqrt[3]{32}$.



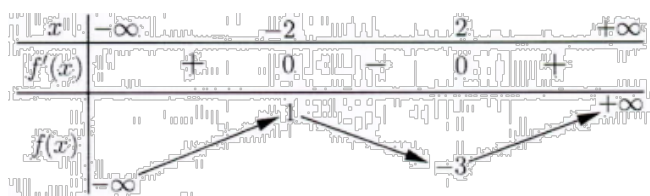
Ta có số điểm cực trị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ và số nghiệm bội lẻ của phương trình $f(x) = 0$.

Suy ra yêu cầu bài toán trở thành hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị và phương trình $f(x) = 0$

có 2 nghiệm bội lẻ $\begin{cases} m \leq 24 \\ m \leq h(-\sqrt[3]{32}) \approx 30,23 \end{cases} \Rightarrow m \leq 24$.

Vì m nguyên dương nên có 24 giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 25: (ĐTK 2020-2021) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

A. $x = -3$.

B. $x = 1$.

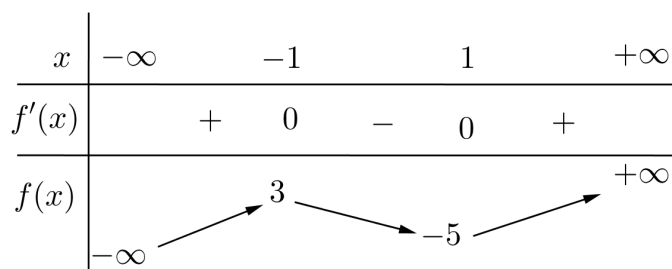
C. $x = 2$.

D. $x = -2$.

Lời giải

Vì $f'(x)$ đổi dấu từ + sang - khi hàm số qua $x = -2$ nên $x_{CD} = -2$.

Câu 26: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3.** **B. -1.** **C. -5.** **D. 1.**

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 3.

Câu 27: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2.** **B. 3.** **C. 4.** **D. 5.**

Lời giải

Đạo hàm đổi dấu 4 lần nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 28: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	1	3	$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 0.** **B. 3.** **C. 1.** **D. -1.**

Lời giải

Từ bảng biến thiên suy ra giá trị cực tiểu là $y = 1$.

Câu 29: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	2	4	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

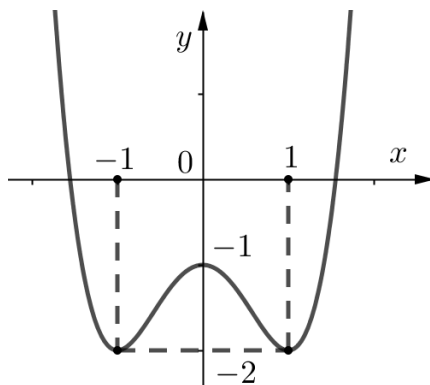
- A. 3.** **B. 4.** **C. 2.** **D. 5.**

Lời giải

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $y = f(x)$ đổi dấu khi qua $x = -2$; $x = -1$; $x = 2$; $x = 4$.

Do đó, hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 30: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:



A. $x = 1$.

B. $x = -1$.

C. $x = -2$.

D. $x = 0$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy điểm cực đại của hàm số là $x = 0$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	3	-5	$+\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có hai điểm cực trị tại $x = 1$ và $x = 5$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	5	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-3	5	$-\infty$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 1.

B. 3.

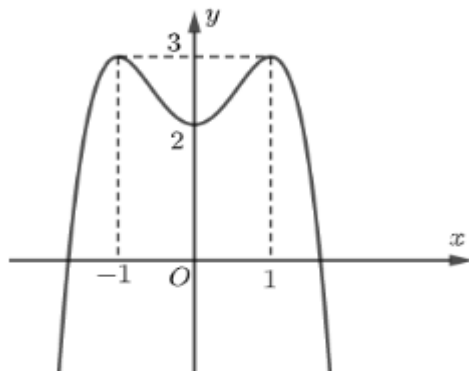
C. 0.

D. 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số có hai điểm cực trị là $x = 1$ và $x = 5$.

Câu 33: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong như hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là:



- A. $x = -1$. B. $x = 2$. C. $x = 1$. **D. $x = 0$.**

Lời giải

Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy hàm số có điểm cực tiểu là $x = 0$.

Câu 34: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	3	$-\infty$

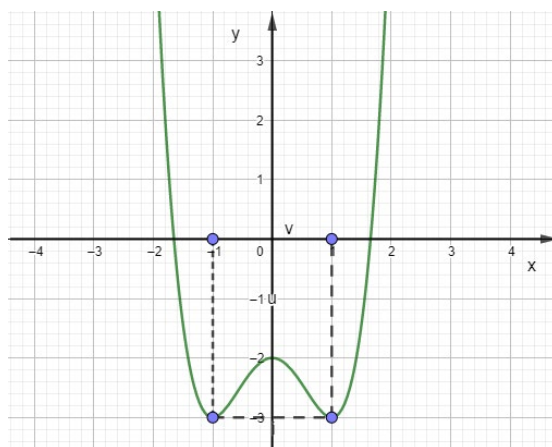
Hỏi số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 4. **C. 3** D. 2.

Lời giải

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 3.

Câu 35: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực đại của hàm số đã cho là:

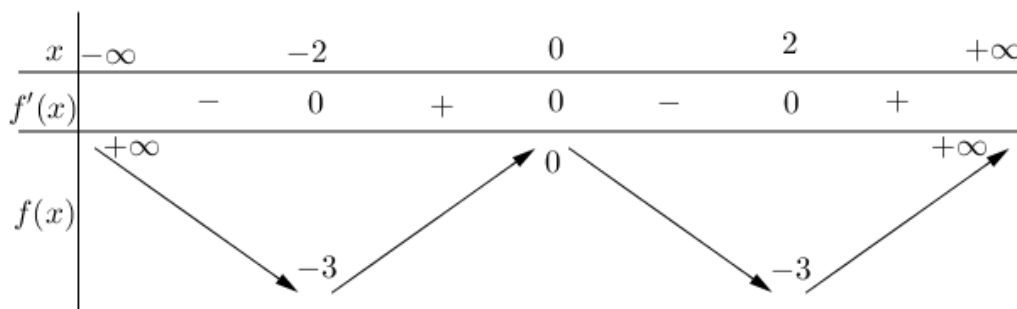


- A. $x = 1$. B. $x = -2$. **C. $x = 0$.** D. $x = -1$.

Lời giải

Từ đồ thị hàm số ta có điểm cực đại của hàm số là $x = 0$.

Câu 36: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có ba điểm cực trị.

Câu 37: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-3	-2	3	5	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Lời giải

Chọn D

Theo bảng xét dấu, ta thấy đạo hàm đổi dấu 4 lần nên hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 38: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	3	1	$+\infty$

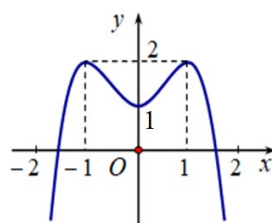
Giá trị cực đại của hàm số đã cho là

- A. 3. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

Quan sát bảng biến thiên ta thấy, hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và giá trị cực đại của hàm số là 3

Câu 39: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của hàm số là:



- A. $x = 0$. B. $x = -1$. C. $x = 2$. D. $x = 1$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có điểm cực tiểu của hàm số là $x = 0$.

Câu 40: (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101) Cho hàm $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	0	+	
$f(x)$	$-\infty$						$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. -5. C. 0. D. 2.

Lời giải

Chọn B

Từ BBT ta có hàm số đạt giá trị cực tiểu $f(3) = -5$ tại $x = 3$

Câu 41: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 2. B. -2. C. 3. D. -1.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng -1.

Câu 42: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

- A. 3. B. 2. C. -2. D. -3.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị cực đại của hàm số đã cho là $y_{CD} = 2$.

Câu 43: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

$-\infty \nearrow 2 \searrow -3 \nearrow +\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 3.

B. -3.

C. -1.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng 2.

Câu 44: (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là

A. 4.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Do hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, $f'(-1) = 0$,

$f'(1)$ không xác định nhưng do hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$ nên tồn tại $f(1)$

và $f'(x)$ đổi dấu từ "+" sang "-" khi đi qua các điểm $x = -1$, $x = 1$ nên hàm số đã cho đạt cực đại tại 2 điểm này.

Vậy số điểm cực đại của hàm số đã cho là 2.

Câu 45: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102) Cho hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số là

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu 2 lần từ $(-)$ sang $(+)$ khi qua các điểm $x = -1; x = 1$ nên hàm số có 2 điểm cực tiểu.

Câu 46: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2		1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$\parallel$	$+$	0	$+$

Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Câu 47: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104) Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng xét dấu $f'(x)$

x	$-\infty$	-2		1		2		3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$\parallel$	$-$	0	$-$

Số điểm cực đại của hàm số đã cho là:

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 0$, $f'(x)$ không xác định tại $x = -2; x = 1; x = 2, x = 3$. Nhưng có 2 giá trị $x = -2; x = 2$ mà qua đó $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm nên hàm số đã cho có 2 điểm cực đại.

Câu 48: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
y'	$+$	$\parallel$	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$		

Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- A.** Hàm số có đúng một cực trị
B. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng 1
C. Hàm số có giá trị lớn nhất bằng 0 và giá trị nhỏ nhất bằng -1
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Chọn A sai vì hàm số có 2 điểm cực trị

Chọn B sai vì hàm số có giá trị cực tiểu $y = -1$ khi $x = 0$

Chọn C sai vì hàm số không có GTLN và GTNN trên $\mathbb{R}$.

Câu 49: (Đề minh họa 1, Năm 2017) Tìm giá trị cực đại y_{CD} của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$.

A. $y_{CD} = 4$

B. $y_{CD} = 1$

C. $y_{CD} = 0$

D. $y_{CD} = -1$

Lời giải

Chọn A

$y = x^3 - 3x + 2$ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 3x^2 - 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$ suy ra $y(-1) = 4$; $y(1) = 0$

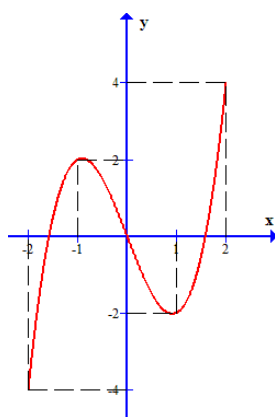
Giới hạn: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$; $y_{CD} = 4$.

Câu 50: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên đoạn $[-2; 2]$ và có đồ thị là đường cong trong hình vẽ bên. Hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?



A. $x = -2$.

B. $x = -1$.

C. $x = 1$.

D. $x = 2$

Lời giải

Chọn B

Quan sát đồ thị, dấu $f'(x)$ đổi từ dương sang âm khi qua điểm $x = -1$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = -1$.

- Câu 51: (Đề minh họa 2, Năm 2017)** Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 .
 B. Cực tiểu của hàm số bằng 1 .
 C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 .
 D. Cực tiểu của hàm số bằng 2 .

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

$$\text{Ta có: } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Lập bảng biến thiên.

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2 .

Cách 2.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}; x = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$y'' = \frac{8}{(x + 1)^3}. \text{ Khi đó: } y''(1) = 1 > 0; y''(-3) = -1 < 0.$$

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2 .

- Câu 52: (Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$			

Tìm giá trị cực đại y_{CD} và giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số đã cho.

- A. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$ B. $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = -2$
 C. $y_{CD} = -2$ và $y_{CT} = 2$ D. $y_{CD} = 2$ và $y_{CT} = 0$

Lời giải

Chọn A

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số ta có $y_{CD} = 3$ và $y_{CT} = 0$.

- Câu 53: (Mã 101, Năm 2017)** Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 5

B. 3

C. 4

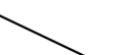
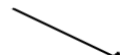
D. 2

Lời giải

Chọn B

Do đồ thị $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 1 điểm nên đồ thị $y = |f(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Câu 54: (Mã 102, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			3			$+\infty$	
			0				0	

Mệnh đề nào dưới đây sai

A. Hàm số có hai điểm cực tiểu

B. Hàm số có giá trị cực đại bằng 0

C. Hàm số có ba điểm cực trị

D. Hàm số có giá trị cực đại bằng 3

Lời giải

Chọn B

Câu 55: (Mã 102, Năm 2017) Đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB ?

A. $Q(-1; 10)$

B. $M(0; -1)$

C. $N(1; -10)$

D. $P(1; 0)$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9$ thực hiện phép chia y cho y' ta được số dư là $y = -8x - 2$.

Như thế điểm $N(1; -10)$ thuộc đường thẳng AB .

Câu 56: (Mã 103, Năm 2017) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		2	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y			4		2
	2			-5	

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Hàm số có bốn điểm cực trị.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

C. Hàm số không có cực đại.

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -5$.

Lời giải

Chọn B

Ta dễ thấy mệnh đề hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$ đúng.

Câu 57: (Mã 103, Năm 2017) Đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 5$ có hai điểm cực trị A và B . Tính diện tích S của tam giác OAB với O là gốc tọa độ.

A. $S = 9$.

B. $S = \frac{10}{3}$.

C. $S = 5$.

D. $S = 10$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$, $y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Nên $A(0;5), B(2;9) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;4) \Rightarrow AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20}$.

Phương trình đường thẳng AB : $y = 2x + 5$.

Diện tích tam giác OAB là: $S = 5$.

Câu 58: (Mã 104, Năm 2017) Hàm số $y = \frac{2x+3}{x+1}$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

Có $y' = \frac{-1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$ nên hàm số không có cực trị.

Câu 59: (Tham khảo 2018) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		1	5		$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x = 1$

B. $x = 0$

C. $x = 5$

D. $x = 2$

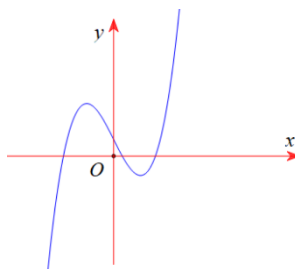
Lời giải

Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy y' đổi dấu từ $(+)$ sang $(-)$ tại $x = 2$.

Nên hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Câu 60: (Mã 101, Năm 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là



A. 2

B. 0

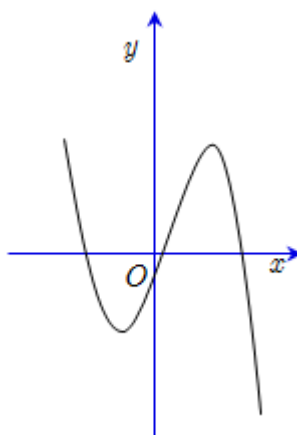
C. 3

D. 1

Lời giải

Chọn A

Câu 61: (Mã 102, Năm 2018) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số này là



A. 0

B. 1

C. 3

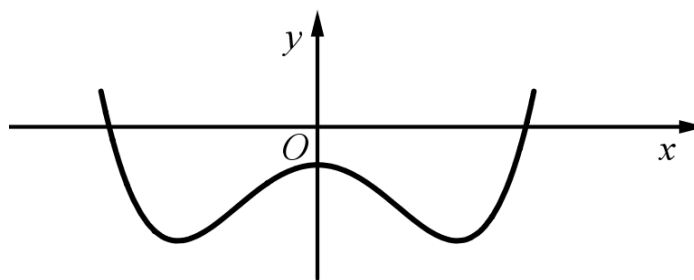
D. 2

Lời giải

Chọn D

Dựa vào hình dạng đồ thị hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 62: (Mã 103, Năm 2018) Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên.



Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 2

B. 3

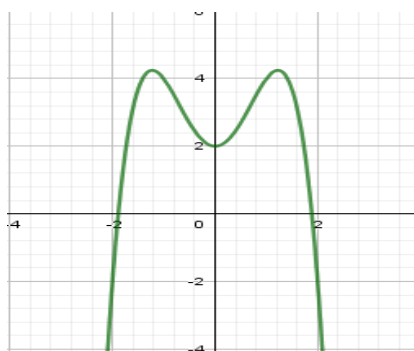
C. 0

D. 1

Lời giải

Chọn B

Câu 63: (Mã 104, Năm 2018) Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:



A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn D

Hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 64: (Đề minh họa 1, Năm 2019) Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$		1		5		$-\infty$

Giá trị cực đại của hàm số đã cho bằng

A. 1.

B. 2.

C. 0.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Câu 65: (Đề minh họa 1, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3.

B. 2.

C. 5.

D. 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = x(x-1)(x+2)^3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Vì $f'(x)$ đổi dấu 3 lần khi đi qua các điểm nên hàm số đã cho có 3 cực trị.

Câu 66: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$						$-\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\nearrow$ $\nwarrow$
 -3 1

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

A. $x = 2$.

B. $x = 1$.

C. $x = -1$.

D. $x = -3$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 67: (Mã 101, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 0.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Chọn D

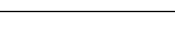
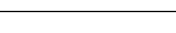
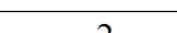
Xét $f'(x) = x(x+2)^2$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x+2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	

Dựa vào bảng xét dấu đạo hàm suy ra hàm số có một cực trị.

Câu 68: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$						
			-2		2		$-\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn C

Căn cứ bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.

Câu 69: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = x(x-2)^2$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	
y	$+\infty$					$+\infty$	

Vậy hàm số có một điểm cực trị.

Câu 70: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$						
			3		-2		$+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Lời giải

Chọn D

Từ bảng biến thiên, hàm số đạt cực đại tại $x=1$.

- Câu 71: (Mã 103, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải

Chọn C

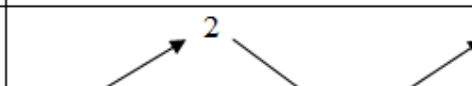
$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+	0	+		
$f(x)$	$+\infty$							$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực trị.

- Câu 72: (Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$						

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại

- A. $x = -2$. B. $x = 1$. C. $x = 3$. D. $x = 2$.

Lời giải

Chọn C

Quan sát bảng biến thiên ta thấy điểm cực tiểu của hàm số là $x = 3$.

- Câu 73: (Mã 104, Năm 2019)** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $f'(x) = x(x+1)^2$ chỉ đổi dấu đúng một lần khi qua nghiệm $x = 0$. Suy ra, hàm số có đúng một điểm cực trị là $x = 0$.

- Câu 74: (Đề minh họa 1, Năm 2017)** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đồ thị của hàm số $y = x^4 + 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

A. $m = -\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

B. $m = -1$

C. $m = \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn B

$y = x^4 + 2mx^2 + 1$. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Ta có: $y' = 4x^3 + 4mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4mx = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases} (*)$

Hàm số có 3 cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nghĩa là phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0 $\Leftrightarrow -m > 0 \Leftrightarrow m < 0$.

Vậy tọa độ 3 điểm lần lượt là: $A(0;1); B(-\sqrt{-m}; 1 - m^2); C(\sqrt{-m}; 1 - m^2)$

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-\sqrt{-m}; -m^2); \overrightarrow{AC} = (\sqrt{-m}; -m^2)$

Vì ΔABC vuông cân tại

$A \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{-m}^2 + m^2 \cdot m^2 = 0 \Leftrightarrow -|m| + m^4 = 0 \Leftrightarrow m + m^4 = 0$

$\Leftrightarrow m = -1$

Vậy với $m = -1$ thì hàm số có 3 cực trị tạo thành một tam giác vuông cân.

Câu 75: (Đề minh họa 2, Năm 2017) Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số

$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

A. $y(-2) = 2$.

B. $y(-2) = 22$.

C. $y(-2) = 6$.

D. $y(-2) = -18$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} (1) \text{ và } \begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $a = 1; b = -3; c = 0; d = 2 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(-2) = -18$.

Câu 76: (Đề minh họa 3, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = (m-1)x^4 - 2(m-3)x^2 + 1$ không có cực đại.

A. $1 \leq m \leq 3$.

B. $m \leq 1$.

C. $m \geq 1$.

D. $1 < m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: Hàm số không có cực đại tức là hàm số chỉ tuyến tính.

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến. Tức $\begin{cases} m-1 \geq 0 \\ m-3 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m \leq 3.$

Trường hợp 2: Hàm số nghịch biến. Tức $\begin{cases} m-1 \leq 0 \\ m-3 \geq 0 \end{cases}$. Suy ra không tìm được m thỏa.

Câu 77: (Đề minh họa 3, Năm 2017) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x$ có hai điểm cực trị A và B sao cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $d: y = 5x - 9$. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

A. 0.

B. 6.

C. -6.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Phương pháp: A, B nằm khác phía với đường thẳng khi và chỉ khi $x_1 x_2 < 0$ và chúng cách đều đường thẳng tức trung điểm AB thuộc đường thẳng đã cho.

Cách giải: Ta có: $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 1)x \Rightarrow y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 1)$.

Phương trình $y' = 0$ là phương trình bậc hai ẩn x , có $\Delta' = m^2 - (m^2 - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = m - 1 \\ x_2 = m + 1 \end{cases}$

Không mất tính tổng quát, giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

A, B nằm khác phía $\Leftrightarrow x_1 x_2 < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$.

A, B cách đều đường thẳng $y = 5x - 9$ suy ra trung điểm I của AB nằm trên đường thẳng $y = 5x - 9$. Khi đó ta có: $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ hay $I\left(m; \frac{1}{3}m^3 - m\right)$.

Ta có: $\frac{1}{3}m^3 - m = 5m - 9 \Leftrightarrow \frac{1}{3}m^3 - 6m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m_1 = 3 \\ \frac{1}{3}m^2 + m - 3 = 0 \end{cases}$

Suy ra $m_1 + m_2 + m_3 = 3 + \frac{-1}{\frac{1}{3}} = 0$.

Câu 78: (Mã 101, Năm 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = -1$

B. $m = -7$

C. $m = 5$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$; $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 (L) \\ m = 5 (TM) \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 79: (Mã 103, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^4 - 2mx^2$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích nhỏ hơn 1.

- A. $m > 0$. B. $m < 1$. C. $0 < m < \sqrt[3]{4}$. D. $0 < m < 1$.

Lời giải

Chọn D

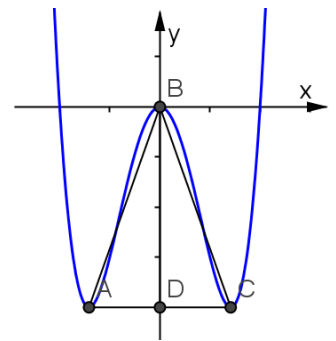
Điều kiện để hàm số có 3 cực trị là $m > 0$.

$$y' = 4x^3 - 4mx; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{m} \\ x_3 = \sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0 \\ y_2 = -m^2 \\ y_3 = -m^2 \end{cases}$$

Các điểm cực trị tạo thành tam giác cân có đáy bằng $2\sqrt{m}$, đường cao bằng m^2 . (như hình minh họa)

Ta được $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = \sqrt{m} \cdot m^2$. Để tam giác có diện tích nhỏ hơn

1 thì $\sqrt{m} \cdot m^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < m < 1$.



Câu 80: (Mã 104, Năm 2017) Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (2m - 1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = \frac{3}{4}$. C. $m = -\frac{1}{2}$. D. $m = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 - 6x$. Từ đó ta có tọa độ hai điểm cực trị $A(0;1), B(1;-1)$. Đường thẳng qua hai điểm cực trị có phương trình $y = -2x + 1$. Đường thẳng này vuông góc với đường thẳng $y = (2m - 1)x + 3 + m$ khi và chỉ khi $(2m - 1)(-2) = -1 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$.

Câu 81: (Mã 104, Năm 2017) Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có hai điểm cực trị A và B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng 4 với O là gốc tọa độ.

- A. $m = -\frac{1}{\sqrt[4]{2}}; m = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. B. $m = -1; m = 1$. C. $m = 1$. D. $m \neq 0$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = 3x^2 - 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 4m^3 \\ x = 2m \Rightarrow y = 0 \end{cases} (m \neq 0)$$

Đồ thị của hàm số có hai điểm cực trị $A(0; 4m^3)$ và $B(2m; 0)$.

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot |4m^3 \cdot 2m| = 4 \Leftrightarrow 4m^4 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 1.$$

Câu 82: (Tham khảo 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 7 điểm cực trị?

A. 3

B. 5

C. 6

D. 4

Lời giải.

Chọn D

$$y = |f(x)| = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$$

Ta có: $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$ hoặc $x = 2$.

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$m-5$	m	$m-32$	$+\infty$

Do hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị nên hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị khi

$$\begin{cases} m > 0 \\ m-5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 5. \text{ Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa đề bài là } m = 1; m = 2; m = 3; m = 4.$$

Câu 83: (Mã 101, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3

B. 5

C. 4

D. Vô số

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y = x^8 + (m-2)x^5 - (m^2-4)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m-2)x^4 - 4(m^2-4)x^3.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4) = 0 \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m-2)x - 4(m^2-4)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m-2)$.

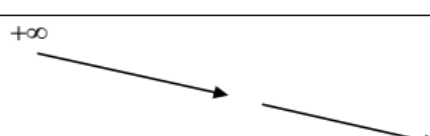
Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm

+ TH1: Nếu $g(x) = 0$ có nghiệm $x = 0 \Rightarrow m = 2$ hoặc $m = -2$

Với $m = 2$ thì $x = 0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x = 0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x = 0$ nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = 2$ thỏa ycbt.

$$\text{Với } m = -2 \text{ thì } g(x) = 8x^4 - 20x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y	$+\infty$						$+\infty$

Dựa vào BBT $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m = -2$ không thỏa ycbt.

+ TH2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 4 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 84: (Mã 102, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-1)x^5 - (m^2-1)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 3

B. 2

C. Vô số

D. 1

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 8x^7 + 5(m-1)x^4 - 4(m^2-1)x^3 + 1 = x^3(8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1))$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

*Nếu $m = 1$ thì $y' = 8x^7$, suy ra hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

*Nếu $m = -1$ thì $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 8x^4 - 10x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \sqrt[3]{\frac{5}{4}} \end{cases}$, nhưng $x = 0$ là nghiệm bội chẵn nên

không phải cực trị.

*Nếu $m \neq \pm 1$: khi đó $x = 0$ là nghiệm bội lẻ. Xét $g(x) = 8x^4 + 5(m-1)x - 4(m^2-1)$. Để $x = 0$ là điểm cực tiểu thì $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -4(m^2-1) > 0 \Leftrightarrow m^2-1 < 0 \Leftrightarrow -1 < m < 1$. Vì m nguyên nên chỉ có giá trị $m = 0$.

Vậy chỉ có hai tham số m nguyên để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ là $m = 0$ và $m = 1$.

Câu 85: (Mã 103, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-4)x^5 - (m^2-16)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

A. 8

B. Vô số

C. 7

D. 9

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 8x^7 + 5(m-4)x^4 - 4(m^2-16)x^3 = x^3 [8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)] = x^3 \cdot g(x)$

Với $g(x) = 8x^4 + 5(m-4)x - 4(m^2-16)$.

• Trường hợp 1: $g(0) = 0 \Leftrightarrow m = \pm 4$.

Với $m = 4 \Rightarrow y' = 8x^7$. Suy ra $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số.

Với $m = -4 \Rightarrow y' = 8x^4(x^3 - 5)$. Suy ra $x = 0$ không là điểm cực trị của hàm số.

• Trường hợp 2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 4$.

Để hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$ thì qua giá trị $x = 0$ dấu của y' phải chuyển từ âm sang dương do đó $g(0) > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 4$.

Kết hợp hai trường hợp ta được $-4 < m \leq 4$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 86: (Mã 104, Năm 2018) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 0$?

A. 4

B. 7

C. 6

D. Vô số

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = x^8 + (m-3)x^5 - (m^2-9)x^4 + 1 \Rightarrow y' = 8x^7 + 5(m-3)x^4 - 4(m^2-9)x^3$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x^3(8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9) = 0 \end{cases}$

Xét hàm số $g(x) = 8x^4 + 5(m-3)x - 4(m^2-9)$ có $g'(x) = 32x^3 + 5(m-3)$.

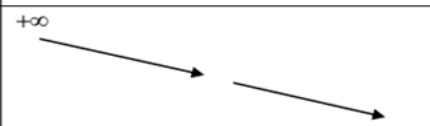
Ta thấy $g'(x) = 0$ có một nghiệm nên $g(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm

+) TH1: Nếu $g(x)=0$ có nghiệm $x=0 \Rightarrow m=3$ hoặc $m=-3$

Với $m=3$ thì $x=0$ là nghiệm bội 4 của $g(x)$. Khi đó $x=0$ là nghiệm bội 7 của y' và y' đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua điểm $x=0$ nên $x=0$ là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=3$ thỏa ycbt.

$$\text{Với } m=-3 \text{ thì } g(x)=8x^4-30x=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\sqrt[3]{\frac{15}{4}} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{15}{4}}$		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	
y	$+\infty$						$+\infty$

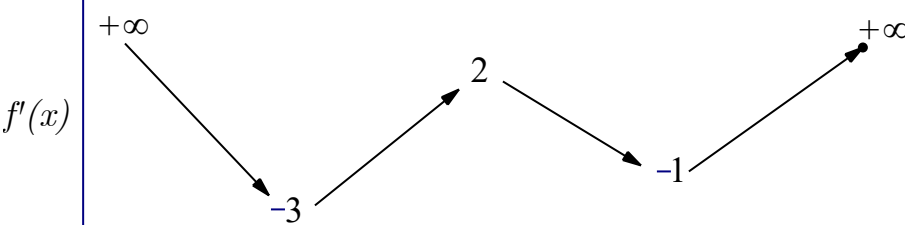
Dựa vào BBT $x=0$ không là điểm cực tiểu của hàm số. Vậy $m=-3$ không thỏa ycbt.

+) TH2: $g(0) \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 3$. Để hàm số đạt cực tiểu tại $x=0 \Leftrightarrow g(0) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow -3 < m < 3$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$.

Vậy cả hai trường hợp ta được 6 giá trị nguyên của m thỏa ycbt.

Câu 87: (Mã 102, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
					

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

- A. 3. B. 9. C. 5. D. 7.

Lời giải

Chọn D

Xét hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y' = (2x+2)f'(x^2+2x)$.

Dựa vào bảng biến thiên của hàm $f'(x)$ ta được

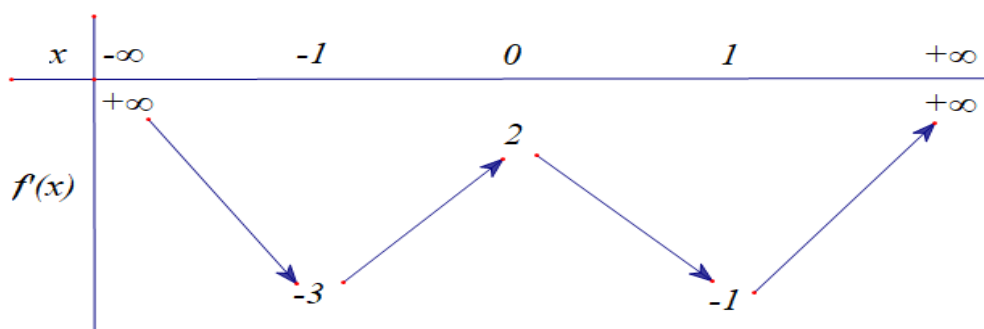
$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = a \\ x^2 + 2x = b \\ x^2 + 2x = c \\ x^2 + 2x = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ (x+1)^2 = a+1 \quad (1) \\ (x+1)^2 = b+1 \quad (2) \\ (x+1)^2 = c+1 \quad (3) \\ (x+1)^2 = d+1 \quad (4) \end{cases}, \text{ trong đó } a < -1 < b < 0 < c < 1 < d.$$

$$\text{Do } a < -1 < b < 0 < c < 1 < d \text{ nên } \begin{cases} a+1 < 0 \\ b+1 > 0 \\ c+1 > 0 \\ d+1 > 0 \end{cases}.$$

Khi đó phương trình (1) vô nghiệm. Các phương trình (2), (3), (4) mỗi phương trình đều có 2 nghiệm phân biệt và khác nhau, cùng khác -1 . Suy ra phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn.

Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 88: (Mã 103, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 - 4x)$ là

- A. 9. B. 5. **C. 7.** D. 3.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Dựa vào bảng biến thiên ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } y' = (8x - 4)f'(4x^2 - 4x), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4 = 0 \\ f'(4x^2 - 4x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ 4x^2 - 4x = a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 - 4x = b \in (-1; 0) \\ 4x^2 - 4x = c \in (0; 1) \\ 4x^2 - 4x = d \in (1; +\infty) \end{cases}.$$

Ta có khi $x = \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2 - 4x = -1$ và $f'(-1) = -3 \neq 0$

Mặt khác: $4x^2 - 4x = (2x-1)^2 - 1 \geq -1$ nên:

- $4x^2 - 4x = a$ vô nghiệm.

- $4x^2 - 4x = b$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

- $4x^2 - 4x = c$ có 2 nghiệm phân biệt x_3, x_4 .

- $4x^2 - 4x = d$ có 2 nghiệm phân biệt x_5, x_6 .

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Cách 2:

Gọi m đại diện cho các tham số ta xét phương trình $4x^2 - 4x - m = 0$ có $\Delta' = 4(m+1)$,
 $\Delta' > 0 \Rightarrow m > -1$.

Vậy với mỗi giá trị b, c, d thuộc khoảng đã cho phương trình $f'(4x^2 - 4x) = 0$ có 6 nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình $y' = 0$ có 7 nghiệm bội lẻ phân biệt nên hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 89: (Mã 104, Năm 2019) Cho hàm số $f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		2		$+\infty$
		-3		-1	

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(4x^2 + 4x)$ là

A. 5.

B. 9.

C.7.

D. 3.

Lời giải

Chon C

$$\text{Ta có } y' = (8x+4)f'(4x^2+4x); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(4x^2+4x) = 0 \\ 8x+4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f'(4x^2+4x) = 0 \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}.$$

Dựa vào bảng biến thiên của $f'(x)$ nhận thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \in (-\infty; -1) \\ x = b \in (-1; 0) \\ x = c \in (0; 1) \\ x = d \in (1; +\infty) \end{cases}$.

Do đó $f'(4x^2 + 4x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 4x = a \in (-\infty; -1) \\ 4x^2 + 4x = b \in (-1; 0) \\ 4x^2 + 4x = c \in (0; 1) \\ 4x^2 + 4x = d \in (1; +\infty) \end{cases} (*)$. Lại có

$4x^2 + 4x = a$ vô nghiệm vì $4x^2 + 4x = (2x+1)^2 - 1 \geq -1, \forall x$;

$4x^2 + 4x = b \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_2; \\ x = x_3 \end{cases}$

$4x^2 + 4x = c \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_4; \\ x = x_5 \end{cases}$

$4x^2 + 4x = d \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_6; \\ x = x_7 \end{cases}$.

Vì $b \neq c \neq d$ do thuộc các khoảng khác nhau (như $(*)$) nên các nghiệm $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$ đều khác nhau và khác $x_1 = -\frac{1}{2}$. Do đó $y' = 0$ có 7 nghiệm đơn phân biệt nên y' đổi dấu 7 lần suy ra hàm số có 7 điểm cực trị.

Câu 90: (Đề tốt nghiệp 2020 Mã đề 101) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$				3				$+\infty$
			-2			-2			

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4 [f(x+1)]^2$ là

A. 11.

B. 9.

C. 7.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Ta chọn hàm $f(x) = 5x^4 - 10x^2 + 3$.

Đạo hàm

$$g'(x) = 4x^3 [f(x+1)]^2 + 2x^4 f(x+1) f'(x+1) = 2x^3 f(x+1) [2f(x+1) + x f'(x+1)].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 f(x+1) = 0 \\ 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x+1) = 0 \\ 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \end{cases}.$$

$$+) f(x+1) = 0 (*) \Leftrightarrow 5(x+1)^4 - 10(x+1) + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \approx 1,278 \\ x+1 \approx 0,606 \\ x+1 \approx -0,606 \\ x+1 \approx -1,278 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0.

$$+) 2f(x+1) + xf'(x+1) = 0 \xRightarrow{t=x+1} 2(5t^4 - 10t^2 + 3) + (t-1)(20t^3 - 20t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 30t^4 - 20t^3 - 40t^2 + 20t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 1,199 \\ t \approx 0,731 \\ t \approx -0,218 \\ t \approx -1,045 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình có bốn nghiệm phân biệt khác 0 và khác các nghiệm của phương trình (*).

Vậy số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ là 9.

Câu 91: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 102) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow 3$	$\searrow -1$	$\nearrow 3$	$\searrow -\infty$		

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2 [f(x-1)]^4$ là

A. 7.

B. 8.

C. 5.

D. 9.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$g'(x) = 2x \cdot [f(x-1)]^4 + 4x^2 f'(x-1) [f(x-1)]^3 = 2x \cdot [f(x-1)]^3 (f(x-1) + 2xf'(x-1))$$

$$\text{Vậy } g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f(x-1) = 0 \quad (1) \\ f(x-1) + 2xf'(x-1) = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt

Phương trình (2) có $f(x-1) = -2xf'(x-1) \Rightarrow f(x) = -2(x+1)f'(x)$

Từ bảng biến thiên suy ra hàm $f(x)$ là bậc bốn trùng phương nên ta có

$f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$ thay vào $f(x) = -2(x+1)f'(x)$ vô nghiệm

Vậy hàm $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 92: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 103) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$			3			$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -1 -1

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^4[f(x-1)]^2$ là

- A. 7. B. 5. C. 9. D. 11.

Lời giải

Chọn C

Ta có : $f(x) = 4x^4 - 8x^2 + 3 \Rightarrow f'(x) = 16x(x^2 - 1)$

Ta có $g'(x) = 2x^3 \cdot f(x-1) \cdot [2f(x-1) + x \cdot f'(x-1)]$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 & (1) \\ f(x-1) = 0 & (2) \\ 2f(x-1) + x \cdot f'(x-1) = 0 & (3) \end{cases}$$

Phương trình (1) có $x = 0$ (nghiệm bội ba).

Phương trình (2) có cùng số nghiệm với phương trình $f(x) = 0$ nên (2) có 4 nghiệm đơn.

Phương trình (3) có cùng số nghiệm với phương trình :

$$2f(x) + (x+1) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(4x^4 - 8x^2 + 3) + 16x(x+1)(x^2 - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 24x^4 + 16x^3 - 32x^2 - 16x + 6 = 0 \text{ có 4 nghiệm phân biệt.}$$

Để thấy 9 nghiệm trên phân biệt nên hàm số $g(x) = 0$ có tất cả 9 điểm cực trị.

Câu 93: (Đề tốt nghiệp THPT 2020 mã đề 104) Cho hàm số bậc bốn $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$			3			3	

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 $-\infty$ -2 $-\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = x^2[f(x+1)]^4$

- A. 7. B. 8. C. 9. D. 5.

Lời giải

Chọn C

$$g'(x) = 2x[f(x+1)]^4 + 4x^2[f(x+1)]^3 \cdot f'(x+1) = 2x[f(x+1)]^3 \cdot [f(x+1) + 2x \cdot f'(x+1)]$$

$$g'(x) = 0 \text{ ta được}$$

$$+ \text{TH1: } x = 0$$

$$+ \text{TH2: } f(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a < -2 \\ x = b \in (-2; -1) \\ x = c \in (-1; 0) \\ x = d > 0 \end{cases}$$

$$+ \text{TH3: } f(x+1) + 2x \cdot f'(x+1) = 0.$$

Từ bảng biến thiên ta có hàm số thỏa mãn là $f(x) = -5x^4 + 10x^2 - 2$

$$\Rightarrow f(x+1) + 2x \cdot f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow h(x) = f(x+1) + 2(x+1) \cdot f'(x+1) - 2f'(x+1) = 0$$

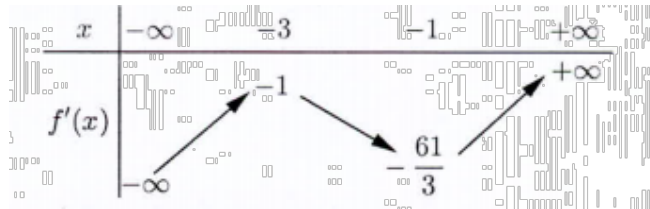
$$\text{Với } t = x+1 \text{ ta có: } h(t) = -5t^4 + 10t^2 - 2 + 2t(-20t^3 + 20t) - 2(-20t^3 + 20t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -45t^4 + 40t^3 + 50t^2 - 40t - 2 = 0$$

Lập bảng biến thiên ta suy ra có 4 nghiệm $t \Rightarrow 4$ nghiệm x

Vậy có 9 cực trị.

Câu 94: (ĐTK 2020-2021) Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = 0$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Hàm số $g(x) = |f(x^3) - 3x|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 5.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Ta có $f'(x)$ bậc ba có 2 điểm cực trị là $x = -3, x = -1$ nên $f''(x) = a(x+3)(x+1)$.

$$\text{Suy ra } f'(x) = a\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) + b.$$

$$\text{Từ } f(-3) = -1 \text{ và } f(-1) = -\frac{61}{3}, \text{ giải ra } a = \frac{29}{2}, b = -1 \text{ hay } f'(x) = \frac{29}{2}\left(\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right) - 1.$$

$$\text{Do đó } f'(0) = -1 < 0.$$

$$\text{Đặt } h(x) = f(x^3) - 3x \text{ thì } h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 3 \text{ nên } h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{1}{x^2}. (*)$$

Trên $(-\infty; 0)$ thì $f'(x) < 0$ nên $f'(x^3) < 0, \forall x < 0$, kéo theo (*) vô nghiệm trên $(-\infty; 0]$.

Xét $x > 0$ thì $f'(x)$ đồng biến còn $\frac{1}{x^2}$ nghịch biến nên (*) có không quá 1 nghiệm. Lại có

$\lim_{x \rightarrow 0^+} (f'(x^3) - \frac{1}{x^2}) = -\infty$ và $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f'(x^3) - \frac{1}{x^2}) = +\infty$ nên (*) có đúng nghiệm $x = c > 0$. Xét
bảng biến thiên của $h(x)$:

x	$-\infty$		0	c		$+\infty$
$h(x)$		$-$		0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$					

Vì $h(0) = f(0) = 0$ nên $h(c) < 0$ và phương trình $h(x) = 0$ có hai nghiệm thực phân biệt, khác c . Từ đó $|h(x)|$ sẽ có 3 điểm cực trị.

Câu 95: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4-m)x$ với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 27.

B. 31.

C. 28.

D. 30.

Lời giải

Xét hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (4-m)x$.

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4 - m$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4.$$

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Hàm số $f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị dương

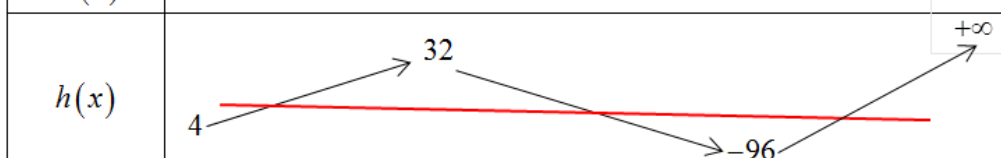
$\Leftrightarrow$ Phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow$ Phương trình $m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4$ có 3 nghiệm dương phân biệt. (*)

Xét hàm số $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 4$.

$$\text{Ta có: } h'(x) = 12x^2 - 72x + 60; h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1		5		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$h(x)$	4					

Dựa vào bảng biến thiên ta có (*) $\Leftrightarrow 4 < m < 32$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{5; 6; 7; \dots; 31\}$.

Vậy có 27 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 96: (MĐ 101 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-7)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 5x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

- A.** 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = (x-7)(x-3)(x+3) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = 3 \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$g'(x) = \frac{x^3 + 5x}{|x^3 + 5x|} \cdot (3x^2 + 5) f'(|x^3 + 5x| + m) = \frac{x(x^2 + 5)}{|x^3 + 5x|} \cdot (3x^2 + 5) f'(|x^3 + 5x| + m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(|x^3 + 5x| + m) = 0.$$

Đạo hàm không xác định tại $x = 0$.

Do đó điều kiện để $g(x)$ có ít nhất 3 điểm cực trị là phương trình $f'(|x^3 + 5x| + m) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm đơn hoặc bội lẻ khác 0.

$$f'(|x^3+5x|+m)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3+5x|+m=7 \\ |x^3+5x|+m=3 \\ |x^3+5x|+m=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3+5x|-7=-m \\ |x^3+5x|-3=-m \\ |x^3+5x|+3=-m \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Phương trình $f'(x^3 + 5x + m) = 0$ có ít nhất 2 nghiệm bội lẻ khác 0 $\Leftrightarrow -m > -7 \Leftrightarrow m < 7$

Vậy có tất cả 6 giá trị nguyên m thỏa mãn.

Câu 97: (MĐ 102 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-8)(x^2-9), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

- A.** 5. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 6.

Lời giải

$$\begin{aligned} g(x) &= f(|x^3 + 6x| + m) \Rightarrow g'(x) = (|x^3 + 6x| + m)' \cdot f'(|x^3 + 6x| + m) \\ &= \frac{(x^3 + 6x) \cdot (3x^2 + 6)}{|x^3 + 6x|} \cdot f'(|x^3 + 6x| + m). \end{aligned}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(|x^3 + 6x| + m) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } f'(|x^3 + 6x| + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 6x| + m = 8 \\ |x^3 + 6x| + m = 3 \\ |x^3 + 6x| + m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x^3 + 6x| = 8 - m \\ |x^3 + 6x| = 3 - m \\ |x^3 + 6x| = -3 - m \end{cases}.$$

Xét hàm số $h(x) = x^3 + 6x$, vì $h'(x) = 3x^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $h(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số $k(x) = |h(x)| = |x^3 + 6x|$ như sau:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	$\parallel$	$+$
$k(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Hàm số $g(x) = f(|x^3 + 6x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị khi phương trình $f'(|x^3 + 6x| + m) = 0$ có ít nhất hai nghiệm khác 0. Điều này xảy ra khi và chỉ khi $8 - m > 0$ hay $m < 8$.

Kết hợp điều kiện m nguyên dương, ta được $m \in \{1; 2; 3; \dots; 7\}$.

Vậy có 7 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 98: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-10)(x^2-25), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 8x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 9.

B. 25.

C. 5.

D. 10.

Lời giải

Cách 1:

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $g(-x) = f(|-x^3 - 8x| + m) = f(|x^3 + 8x| + m) = g(x)$, do đó $g(x)$ là hàm số chẵn, suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ nhận Oy làm trục đối xứng. Do đó số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng $2a+1$ với a là số điểm cực trị dương của hàm số $h(x) = f(x^3 + 8x + m)$. Theo bài ra ta có $2a+1 \geq 3 \Leftrightarrow a \geq 1$, vì vậy ta cần tìm m để hàm số $h(x)$ có ít nhất một điểm cực trị dương.

Ta có $f'(x) = (x-10)(x-5)(x+5) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10, x = \pm 5$.

$$h'(x) = (3x^2 + 8)f'(x^3 + 8x + m), h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8x + m = 10 & (1) \\ x^3 + 8x + m = 5 & (2) \\ x^3 + 8x + m = -5 & (3) \end{cases}.$$

Đặt $u(x) = x^3 + 8x + m, u'(x) = 3x^2 + 8 > 0, \forall x \geq 0$.

Bảng biến thiên

x	0	$+\infty$
$u'(x)$		+
$u(x)$	m	$+\infty$

Từ bảng biến thiên ta thấy (1), (2) và (3) nếu có nghiệm $x > 0$ thì đó là nghiệm duy nhất.

Phương trình $h'(x) = 0$ có nghiệm $x > 0$ khi và chỉ khi ít nhất một trong ba phương trình (1), (2) (3) có nghiệm $x > 0$, điều này tương đương với $m < \max \{-5; 5; 10\} = 10$.

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; \dots; 9\}$, vậy có 9 giá trị nguyên dương của tham số m cần tìm.

Cách 2:

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-10)(x^2-25) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 5 \\ x = -5 \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } u = |x^3 + 8x| + m = |x|(x^2 + 8) + m \Rightarrow u' = \begin{cases} 3x^2 + 8 > 0 & \text{khi } x > 0 \\ -3x^2 - 8 < 0 & \text{khi } x < 0 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên của $u = |x^3 + 8x| + m$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
u'	-		+
u			

$y=10$

$$\text{Ta có } y = f(u) \Rightarrow y' = u' \cdot f'(u) = 0 \Leftrightarrow f'(u) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 10 \\ u = 5 \\ u = -5 \end{cases} \quad (1).$$

Khi đó, để hàm số $g(x) = f(|x^3 + 8x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị thì (1) có ít nhất hai nghiệm đơn hoặc bội lẻ khác 0.

Suy ra $m < 10$. Mà m là số nguyên dương nên ta có: $m \in \{1; 2; \dots; 9\}$.

Vậy có 9 giá trị nguyên dương của tham số m cần tìm.

Câu 99: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 1) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm

$f'(x) = (x-9)(x^2-16), \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số

$g(x) = f(|x^3 + 7x| + m)$ có ít nhất 3 điểm cực trị?

A. 16.

B. 9.

C. 4.

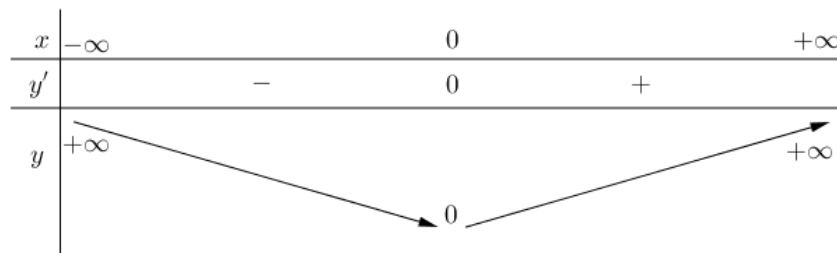
D. 8.

Lời giải

Ta có: $g'(x) = f'(|x^3 + 7x| + m) \cdot \frac{x(x^2 + 7)}{|x^3 + 7x|} \cdot (3x^2 + 7)$

Xét hệ pt:
$$\begin{cases} |x^3 + 7x| = -4 - m \\ |x^3 + 7x| = 4 - m \\ |x^3 + 7x| = 9 - m \\ x = 0 \end{cases}$$

Ta có BBT hàm số $y = |x^3 + 7x|$



Ycbt $\Leftrightarrow 9 - m > 0 \Leftrightarrow m \in \{1; 2; \dots; 8\}$

Câu 100: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (3 - m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25.

B. 27.

C. 26.

D. 28.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 - m$.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị thì hàm số $f(x) = x^4 - 12x^3 + 30x^2 + (3 - m)x$ có đúng 3 cực trị dương.

Hay $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 - m = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow m = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3$ có 3 nghiệm dương phân biệt.

Đặt $h(x) = 4x^3 - 36x^2 + 60x + 3 \Rightarrow h'(x) = 12x^2 - 72x + 60$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	0	1		5	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$		31			$+\infty$
	3		-97		

Từ BBT ta có $3 < m < 31$ và m nguyên nên có 27 giá trị nguyên thỏa mãn bài toán.

Câu 101: (MĐ 103 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (4-m)x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị?

A. 25.

B. 22.

C. 26.

D. 21.

Lời giải

Hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị có hoành độ dương

Đồ thị hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt là nghiệm đơn.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4 - m = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4 = m$$

$$\text{Đặt } h(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 4$$

$$\text{Ta có } h'(x) = 12x^2 - 60x + 48 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	1	4	$+\infty$	
$h'(x)$		+	0	-	0	+
$h(x)$			26		$+\infty$	
	$-\infty$	4		-28		

Suy ra để $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm dương phân biệt khi $4 < m < 26$.

Vậy có 21 giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị.

Câu 102: (MĐ 104 2020-2021 – ĐỢT 2) Cho hàm số $f(x) = x^4 - 10x^3 + 24x^2 + (3-m)x$, với m là tham số thực. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị

A. 21.

B. 25.

C. 24.

D. 22.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 - m$$

Đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ gồm phần đồ thị hàm số $y = f(x)$ bên phải trục tung và phần đối xứng của đồ thị hàm số $f(x)$ bên phải trục tung sang bên trái qua trục tung. Do đó, hàm số

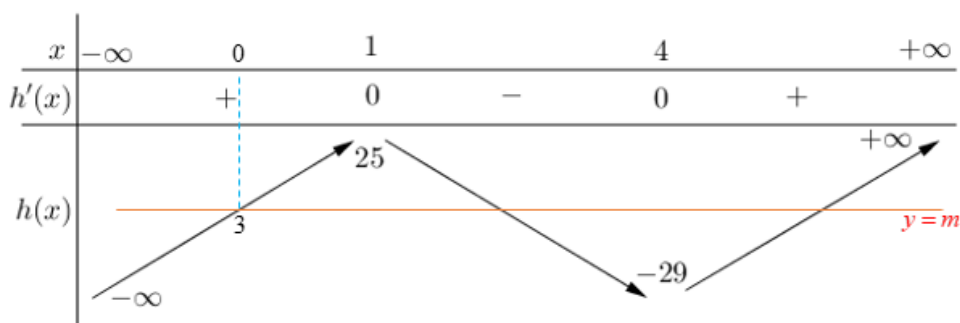
$g(x) = f(|x|)$ có đúng 7 điểm cực trị khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ có đúng 3 điểm cực trị dương hay phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm dương phân biệt

Xét phương trình

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 - m = 0 \\ &\Leftrightarrow 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3 = m \end{aligned}$$

Đặt $h(x) = 4x^3 - 30x^2 + 48x + 3$ ta có $h'(x) = 12x^2 - 60x + 48$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \end{cases}$

Bảng biến thiên



Từ BBT ta có phương trình $f'(x) = m$ có ba nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow 3 < m < 25$

Vậy $m \in \{4; 5; \dots; 24\}$, có 21 số nguyên m thỏa mãn bài toán.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ THÔNG QUA BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ

1. Định lý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

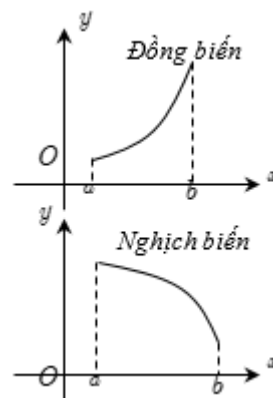
Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

2. Hình dáng đồ thị

Nếu hàm số **đồng biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi lên.

Nếu hàm số **nghịch biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi xuống.



Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
y'	$+$		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$	

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$+$	0	$-$	0	$+$			
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$+\infty$

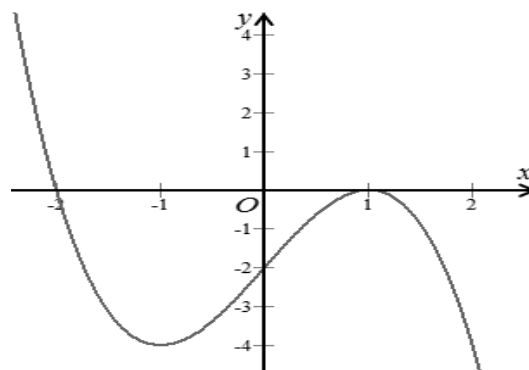
Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

- A. $(-1;1)$. B. $(0;1)$. C. $(4;+\infty)$. D. $(-\infty;2)$.

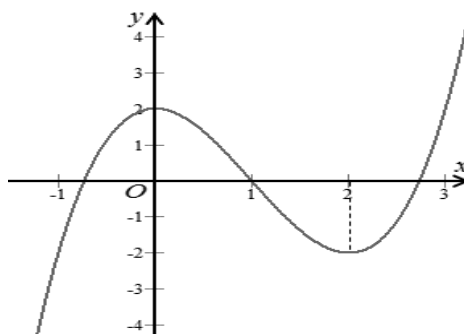
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty;-1)$. B. $(-1;1)$.
C. $(0;+\infty)$. D. $(-\infty;+\infty)$.

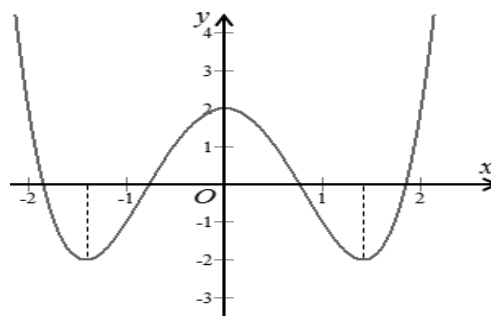


Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



- A. $(-1;1)$. B. $(-1;2)$. C. $(1;2)$. D. $(2;+\infty)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

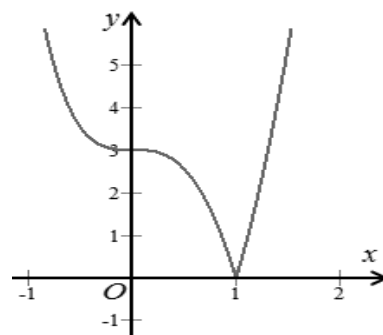


- A. $(-\infty;-1)$. B. $(-1;1)$. C. $(1;2)$. D. $(0;1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

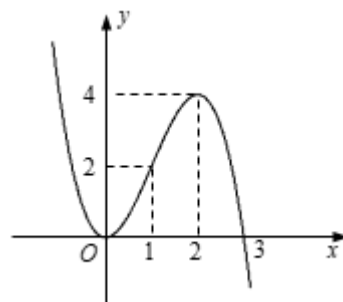
Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.



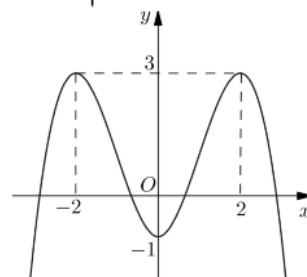
Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

- A. $(-\infty; 0)$.
- B. $(1; 3)$.
- C. $(0; 2)$.
- D. $(0; +\infty)$.



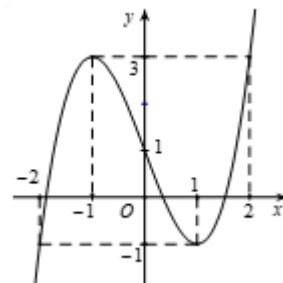
Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

- A. $(-2; 0)$.
- B. $(-\infty; 0)$.
- C. $(-2; 2)$.
- D. $(0; 2)$.



Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?

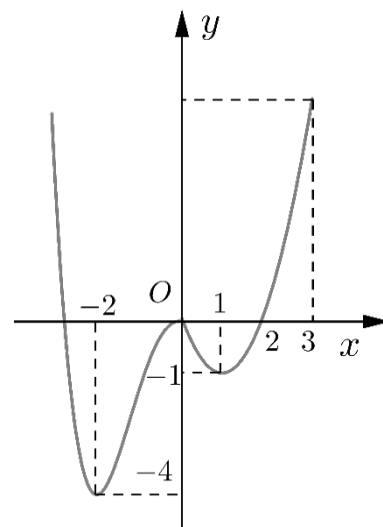
- A. $(-1; 1)$.
- B. $(-2; -1)$.
- C. $(-1; 2)$.
- D. $(1; +\infty)$.



Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

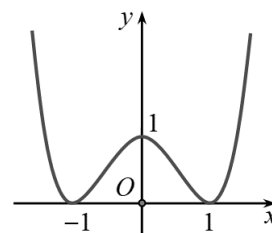
Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

- A. $(-1; 0)$.
- B. $(-2; -1)$.
- C. $(0; 1)$.
- D. $(1; 3)$.



Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.



DẠNG 2. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ CHO TRƯỚC

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến dựa vào bảng biến thiên.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 2019$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Câu 13: Hàm số $y = \frac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

- A. $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$.
- B. $\mathbb{R}$.
- C. $(-\infty; -3)$.
- D. $(3; +\infty)$.

Câu 14: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^3 - 3x + 2$.
- B. $y = x^4 + 2x^2 + 2$.
- C. $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1$.
- D. $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$.

Câu 15: Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng

- A. $(0; 2)$.
- B. $(-\infty; 0)$.
- C. $(1; 4)$.
- D. $(4; +\infty)$.

Câu 16: Hàm số $y = x^4 - 4x^3$ đồng biến trên khoảng

- A. $(-\infty; +\infty)$.
- B. $(3; +\infty)$.
- C. $(-1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; 0)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

- Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
- A. $(-\infty; 1)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(1; 3)$. D. $(3; +\infty)$.
- Câu 19:** Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2019$ nghịch biến trên
- A. $(-1; 3)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.
- Câu 20:** Hàm số $y = \sqrt{2018x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?
- A. $(1010; 2018)$. B. $(2018; +\infty)$. C. $(0; 1009)$. D. $(1; 2018)$.
- Câu 21:** Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?
- A. $(2; +\infty)$. B. $(0; 2)$. C. $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. D. $(-\infty; 0)$.
- Câu 22:** Hàm số $y = x^3 - 3x$ nghịch biến trên khoảng nào?
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-\infty; +\infty)$. C. $(-1; 1)$. D. $(0; +\infty)$.
- Câu 23:** Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- Câu 24:** Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$, kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số là **đúng nhất**:
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0); (2; +\infty)$;
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$;
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0); (2; +\infty)$;
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.
- Câu 25:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 4)$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.

DẠNG 3. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ CHO TRƯỚC BỞI $y' = f'(x)$.

- **Bước 1.** Từ $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 2.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 3.** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến dựa vào bảng biến thiên.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Câu 27: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Câu 28: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^3 + 8$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên $(-2; +\infty)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 29: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = -x^3 + 8$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B.** Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên $(-2; +\infty)$.
- C.** Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- D.** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(1; 3)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(-2; 0)$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-\infty; 1)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(-1; 3)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2(x-1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

- A.** $(1; +\infty)$. **B.** $(-\infty; +\infty)$. **C.** $(0; 1)$. **D.** $(-\infty; 1)$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
- B.** Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
- C.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.
- D.** Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ THÔNG QUA BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ

1. Định lý: Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K .

Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số đồng biến trên khoảng K .

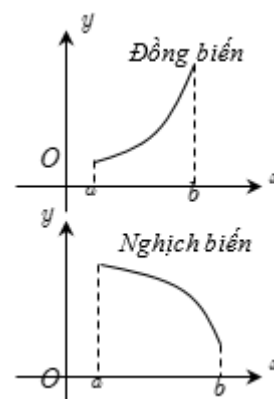
Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng K .

Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số không đổi trên khoảng K .

2. Hình dáng đồ thị

Nếu hàm số **đồng biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi lên.

Nếu hàm số **nghịch biến** trên K thì từ trái sang phải đồ thị đi xuống.



Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	3	$+\infty$	
y'	$+$		$+$	0	$-$
y	$-\infty$	$+\infty$	4	$-\infty$	

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

D. Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$ và $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		2		$+\infty$		4		$+\infty$

Hàm số nghịch biến trong khoảng nào?

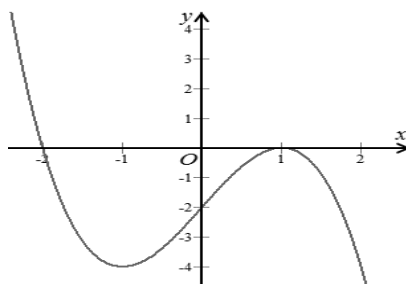
- A. $(-1; 1)$. B. $(0; 1)$. C. $(4; +\infty)$. D. $(-\infty; 2)$.

Lời giải

Chọn B

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



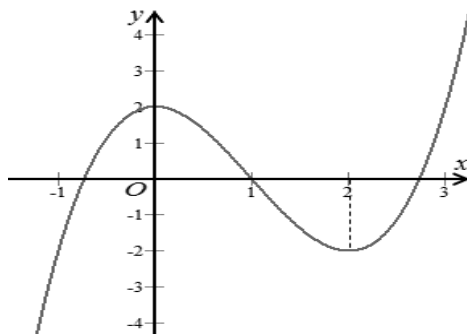
- A. $(-\infty; -1)$. B. $(-1; 1)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-1;1)$.

B. $(-1;2)$.

C. $(1;2)$.

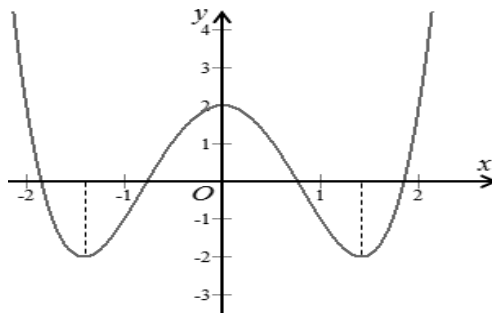
D. $(2;+\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$ nên nghịch biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?



A. $(-\infty;-1)$.

B. $(-1;1)$.

C. $(1;2)$.

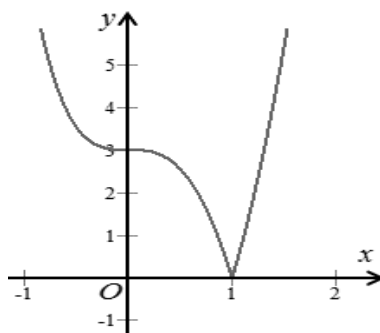
D. $(0;1)$.

Lời giải

Chọn D

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(0;1)$ đồ thị hàm số đi xuống nên nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$.

C. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-1; 2)$.

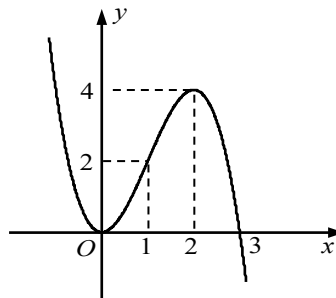
D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn D

Nhìn vào đồ thị đã cho, ta có trên khoảng $(-\infty; 1)$ đồ thị hàm số đi xuống nên nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?



A. $(-\infty; 0)$.

B. $(1; 3)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

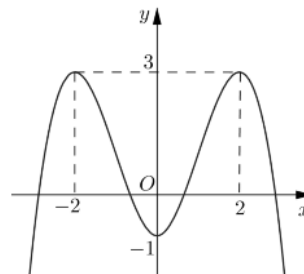
Xét đáp án A, trên khoảng $(-\infty; 0)$ đồ thị có hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên loại.

Xét đáp án B, trên khoảng $(1; 3)$ đồ thị có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến và có đoạn hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên loại.

Xét đáp án C, trên khoảng $(0; 2)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên chọn.

Xét đáp án D, trên khoảng $(0; +\infty)$ đồ thị có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến và có đoạn hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên loại.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-2; 0)$.

B. $(-\infty; 0)$.

C. $(-2; 2)$.

D. $(0; 2)$.

Lời giải

Chọn A

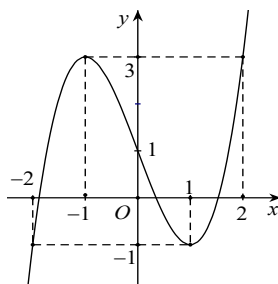
Xét đáp án A, trên khoảng $(-2;0)$ đồ thị hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên chọn.

Xét đáp án B, trên khoảng $(-\infty;0)$ đồ thị có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến và có đoạn hướng xuống là hàm số đồng nghịch biến nên loại.

xét đáp án C, trên khoảng $(-2;2)$ đồ thị có hướng đi xuống là hàm số nghịch biến và có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Xét đáp án D, trên khoảng $(0;2)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào?



A. $(-1;1)$.

B. $(-2;-1)$.

C. $(-1;2)$.

D. $(1;+\infty)$.

Lời giải

Chọn A

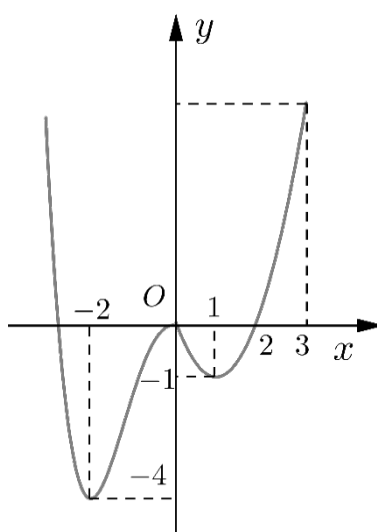
Xét đáp án A, trên khoảng $(-1;1)$ đồ thị có hướng đi xuống là hàm số nghịch biến nên chọn.

Xét đáp án B, trên khoảng $(-2;-1)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Xét đáp án C, trên khoảng $(-1;2)$ đồ thị có đoạn hướng đi xuống là hàm số nghịch biến và có đoạn hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Xét đáp án D, trên khoảng $(1;+\infty)$ đồ thị có hướng đi lên là hàm số đồng biến nên loại.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.



Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng

A. $(-1;0)$.

B. $(-2;-1)$.

C. $(0;1)$.

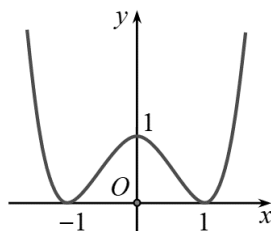
D. $(1;3)$.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số ta có hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; 1)$.

Câu 11: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

DẠNG 2. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ CHO TRƯỚC

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến đưa vào bảng biến thiên.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2 + x + 2019$

- A. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đã cho nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên $(-\infty; 1)$ và nghịch biến trên $(1; +\infty)$.
- D. Hàm số đã cho đồng biến trên $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0, \forall x$ và $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$

Câu 13: Hàm số $y = \frac{5-2x}{x+3}$ nghịch biến trên

- A.** $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$. **B.** $\mathbb{R}$. **C.** $(-\infty; -3)$. **D.** $(-\infty; -3) \cup (-3; +\infty)$

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = \frac{5-2x}{x+3}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

$$y' = \frac{-11}{(x+3)^2} < 0, \text{ với } x \in D.$$

Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -3)$ và $(-3; +\infty)$.

Câu 14: Hàm số nào sau đây nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = x^3 - 3x + 2$. **B.** $y = x^4 + 2x^2 + 2$.
C. $y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1$. **D.** $y = -x^3 - 2x^2 + 5x - 2$.

Lời giải

Chọn C

$$y = -x^3 + 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 4x - 4 = -2x^2 - (x-2)^2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Do đó hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 15: Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng

- A.** $(0; 2)$. **B.** $(-\infty; 0)$. **C.** $(1; 4)$. **D.** $(4; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		$-$	$+$	$-$

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Vậy hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 16: Hàm số $y = x^4 - 4x^3$ đồng biến trên khoảng

- A.** $(-\infty; +\infty)$. **B.** $(3; +\infty)$. **C.** $(-1; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4x^3 - 12x^2$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 12x^2 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Mệnh đề nào dưới đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. **B.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4x^3 - 4x$.

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = 0 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
			1		2		1		$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy, hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(1; 3)$.

D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2(x+1)^3(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1; 3)$.

Câu 19: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2019$ nghịch biến trên

- A.** $(-1; 3)$. **B.** $(-\infty; -1)$. **C.** $(-\infty; -1)$ và $(3; +\infty)$. **D.** $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 - 2x - 3.$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu của y' như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Nhìn vào bảng xét dấu của y' ta thấy hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Vậy hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2019$ nghịch biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 20: Hàm số $y = \sqrt{2018x - x^2}$ nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau đây?

- A.** $(1010; 2018)$. **B.** $(2018; +\infty)$. **C.** $(0; 1009)$. **D.** $(1; 2018)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{TXĐ: } D = [0; 2018]$$

$$y' = \left(\sqrt{2018x - x^2} \right)' = \frac{2018 - 2x}{2\sqrt{2018x - x^2}} = \frac{1009 - x}{\sqrt{2018x - x^2}}; y' = 0 \Leftrightarrow x = 1009$$

$y' < 0 \Leftrightarrow x \in (1009; 2018)$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1009; 2018)$, suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng $(1010; 2018)$.

Câu 21: Hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 4$ đồng biến trên tập hợp nào trong các tập hợp được cho dưới đây?

- A.** $(2; +\infty)$. **B.** $(0; 2)$. **C.** $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } y' = -3x^2 + 6x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$						
			-4		0		$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.

Câu 22: Hàm số $y = x^3 - 3x$ nghịch biến trên khoảng nào?

- A.** $(-\infty; -1)$. **B.** $(-\infty; +\infty)$. **C.** $(-1; 1)$. **D.** $(0; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu y' :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

Câu 23: Cho hàm $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$. **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = (-\infty; 1] \cup [5; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y' = \frac{x-3}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}} > 0, \forall x \in (5; +\infty).$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(5; +\infty)$.

Câu 24: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 - 1$, kết luận nào sau đây về tính đơn điệu của hàm số là **đúng nhất**:

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ và nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0); (2; +\infty)$;
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$;
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 2)$ và đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 0); (2; +\infty)$;
D. Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$.

Lời giải

Ta có hàm số xác định trên $\mathbb{R}$.

$$y = -x^3 + 3x^2 - 1 \Rightarrow y' = -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			-1		3		$-\infty$

Vậy đáp án A là **đúng** nhất.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 12x - 1$. Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3; 4)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.**
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 4)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3; +\infty)$.

Lời giải

$$y' = x^2 - x - 12$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		4		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
							$+\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

DẠNG 3. TÌM KHOẢNG ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHO TRƯỚC BỞI $y' = f'(x)$.

- **Bước 1.** Từ $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 2.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 3.** Nêu kết luận về các khoảng đồng biến và nghịch biến dựa vào bảng biến thiên.

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.**
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Do $f'(x) = x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 27: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^2$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên $(0; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Lời giải

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$
y	$-\infty$		$+\infty$

Chú ý: Do $y' = x^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 28: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = x^3 + 8$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2$$

$$y' = x^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow x > -2$$

$$y' = x^3 + 8 < 0 \Leftrightarrow x < -2$$

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

Câu 29: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = -x^3 + 8$. Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

B. Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ và đồng biến trên $(-2; +\infty)$.

C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = -x^3 + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$y' = -x^3 + 8 > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

$$y' = -x^3 + 8 < 0 \Leftrightarrow x > 2$$

Vậy hàm số đồng biến trên $(-\infty; 2)$ và nghịch biến trên $(2; +\infty)$.

Câu 30: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-2)^3$, với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(1; 3)$.

B. $(-1; 0)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-2; 0)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Đồng thời $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (0; 2)$ nên ta chọn đáp án theo đề bài là $(0; 1)$.

Câu 31: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty; 1)$.

B. $(-\infty; -1)$.

C. $(-1; 3)$.

D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2(x+1)^3(3-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 3)$.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = x^2(x-1)$. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng

A. $(1; +\infty)$.

B. $(-\infty; +\infty)$.

C. $(0; 1)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$

$f'(x)$	–	0	–	0	+

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2 - 5x + 4$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.

B. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 3)$.

D. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; 4)$.

Lời giải

Ta có:

x	$-\infty$	1	4	$+\infty$
$f'(x) = x^2 - 5x + 4$	+	0	–	0
			+	

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(4; +\infty)$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC ĐỘ 7 – 8)

DẠNG 1. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỆU TRÊN CÁC KHOẢNG XÁC ĐỊNH CỦA NÓ

Xét hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$

Lưu ý: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. • $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Câu 1: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$. B. $-2 \leq m \leq -1$. C. $-2 < m < -1$. D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$.

Câu 2: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. Không có giá trị m thỏa mãn. B. $m \neq 1$. C. $m = 1$. D. Luôn thỏa mãn với mọi m .

Câu 3: Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \geq 2$. B. $m < 2$. C. $m < 0$. D. $m \geq 0$.

Câu 4: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. $[-2; 2]$. B. $(-\infty; 2)$. C. $(-\infty; -2]$. D. $[2; +\infty)$.

Câu 5: Giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m+3)x - 5 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là.

- A. $-\frac{3}{4} \leq m \leq 1$. B. $m \leq -\frac{3}{4}$. C. $-\frac{3}{4} < m < 1$. D. $m \geq 1$.

Câu 6: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

- A. $[-4; 2]$. B. $(-4; 2)$. C. $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. D. $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

Nếu hệ số a chứa tham số thì phải xét trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$

Câu 7: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

- A. 4. B. 5. C. 3. D. 0.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. $m \leq \frac{4}{3}$ và $m \neq 0$. B. $m = 0$ hoặc $m \geq \frac{4}{3}$.
C. $m \geq \frac{4}{3}$. D. $m \leq \frac{4}{3}$.

Câu 9: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A. 4. B. 2. C. 5. D. 6.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $1 < m \leq 2$. B. $1 < m < 2$. C. $1 \leq m \leq 2$. D. $1 \leq m < 2$

Câu 11: Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = (4-m^2)x^3 + (m-2)x^2 + x + m - 1$ (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.

- A. 5. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 12: Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m+1)x - 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

- A. 200. B. 99. C. 100. D. 201.

Câu 13: Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (3m^2 - 12)x^3 + 3(m-2)x^2 - x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

- A. 9. B. 6. C. 5. D. 14.

Câu 14: Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A. 2. B. 1. C. 0. D. 3.

Xét hàm số nhất biến $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = \frac{a.d - b.c}{(cx + d)^2}$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m ?$

+ ĐỀ $f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m$?

★ **Lưu ý:** Đối với hàm phân thức thì không có dấu "=" xảy ra tại vị trí y' .

Câu 15: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A.1.

B. 0.

C.2.

D. 3.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Câu 17: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x+2-m}{x+1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m \leq 1$.

B. $m \leq -3$.

C. $m < -3$.

D. $m < 1$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{x-m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{mx-2}{2x-m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định

A. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

DẠNG 2. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ NHẤT BIẾN ĐƠN ĐIỀU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC

Câu 20: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là

A. $(-2; 1]$.

B. $(-2; 2)$.

C. $(-2; -1]$.

D. $(-2; -1)$.

Câu 21: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng

$$\left(-\infty; \frac{1}{4}\right).$$

A. $m > 2$.

B. $1 \leq m < 2$.

C. $-2 < m < 2$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

- Câu 22:** Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m + 3}{x + m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .
- A. 5. B. 3. C. 4. D. 1.
- Câu 23:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 18}{x + 4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?
- A. Vô số. B. 0. C. 3. D. 5.
- Câu 24:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 9}{4x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$?
- A. 5. B. 11. C. 6. D. 7.
- Câu 25:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$
- A. $-1 < m < 4$. B. $-1 < m \leq 1$. C. $\begin{cases} m < -1 \\ m > 4 \end{cases}$. D. $1 \leq m < 4$.
- Câu 26:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = \frac{3x + 18}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$?
- A. 2020. B. 2026. C. 2018. D. 2023.
- Câu 27:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 4}{2x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 4)$.
- A. Vô số. B. 1. C. 3. D. 2.
- Câu 28:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx + 4}{x + m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 5.

DẠNG 3. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC

- Câu 29:** Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là
- A. $(-1; 5)$. B. $(-\infty; -3]$. C. $(-\infty; -4]$. D. $(-1; +\infty)$.
- Câu 30:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?
- A. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$. B. $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$. C. $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$. D. $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$.

- Câu 31:** Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?
- A. $m \geq 0$. B. $m < \frac{1}{2}$. C. $m \leq 0$. D. $m \geq \frac{1}{2}$.
- Câu 32:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- A. $m \leq 0$. B. $m \geq -2$. C. $m \leq -3$. D. $m \leq -1$.
- Câu 33:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.
- A. $-1 < m < \frac{1}{3}$. B. $m > \frac{1}{3}$.
C. $m < -1$. D. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.
- Câu 34:** Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$.
- A. $m = 0$. B. $m > 1$. C. $m \leq -\frac{1}{2}$. D. $m < -\frac{1}{2}$.
- Câu 35:** Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1; +\infty)$.
- A. $m < 3$. B. $m \geq 3$. C. $m \neq 3$. D. $m \leq 3$.
- Câu 36:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:
- A. $(-\infty; 3)$. B. $(-\infty; 3]$. C. $[3; 6]$. D. $(-\infty; 6]$.
- Câu 37:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A. $m \geq 12$. B. $m \leq 12$. C. $m \geq 0$. D. $m \leq 0$.
- Câu 38:** Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx + m - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
- A. $m \leq -1$. B. $m \leq 1$. C. $m < 1$. D. $m > -1$.
- Câu 39:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 0.
- Câu 40:** . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0;4)$ là:
- A. $(-\infty; 6]$. B. $(-\infty; 3)$. C. $(-\infty; 3]$. D. $[3; 6]$.
- Câu 41:** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A. 9. B. 10. C. 6. D. 5.

- Câu 42:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m - 9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là
- A. $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$. B. $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$. C. $[0; +\infty)$. D. $(-\infty; 0]$.
- Câu 43:** Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 3(m-1)x + 1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ là
- A. 7. B. 4. C. 5. D. 6.
- Câu 44:** Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2019$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là
- A. 2018. B. 2019. C. 2020. D. 2017.
- Câu 45:** Cho hàm số $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?
- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 46:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Tính số phần tử của tập hợp S .
- A. 2025. B. 2016. C. 2024. D. 2023.
- Câu 47:** Với mọi giá trị $m \geq a\sqrt{b}$, $(a, b \in \mathbb{Z})$ thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x + 5$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Khi đó $a - b$ bằng
- A. 1. B. -2. C. 3. D. -5.
- DẠNG 4. TÌM m ĐỂ HÀM SỐ KHÁC ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC**
- Câu 48:** Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng
- A. $\frac{5}{2}$. B. -2. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{3}{2}$.
- Câu 49:** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x + 1 + \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là
- A. $[0; 1)$. B. $(-\infty; 0]$. C. $[0; +\infty) \setminus \{1\}$. D. $(-\infty; 0)$.
- Câu 50:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
- A. $\begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$. B. $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{cases}$. C. $m \leq 3$. D. $m < 3$.
- Câu 51:** Cho hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x} + 3}{\sqrt{6-x} + m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10; 10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8; 5)$?
- A. 14. B. 13. C. 12. D. 15.

- Câu 52:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- A. 2. B. 1. C. 3. D. 0.
- Câu 53:** Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
- A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$ B. $m > 2$ C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$ D. $-1 < m < 1$
- Câu 54:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + (2m+15)x - 3m+1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?
- A. 2. B. 3. C. 5. D. 4.
- Câu 55:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 3x + \frac{m^2 + 3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?
- A. 4. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 56:** Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$
- A. $m > 2$. B. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$. C. $m < 2$. D. $m \leq 2$.
- Câu 57:** Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - 4\cot x - (m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$?
- A. 5. B. 2. C. vô số. D. 3.
- Câu 58:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x + 5 + \frac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5; +\infty)$?
- A. 10. B. 8. C. 9. D. 11.
- Câu 59:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 60:** Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = m^2x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- A. 15. B. 6. C. 7. D. 16.
- Câu 61:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
- A. 2017. B. 2019. C. 2020. D. 2018.

- Câu 62:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$.
A. 6. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 4.
- Câu 63:** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?
A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 64:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.
- Câu 65:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8; 8)$ sao cho hàm số $y = |-2x^3 + 3mx - 2|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
A. 10. **B.** 9. **C.** 8. **D.** 11.
- Câu 66:** Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng
A. 9. **B.** 45. **C.** 55. **D.** 36.
- Câu 67:** Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.
A. $m \geq 1$. **B.** $m \leq 2$. **C.** $m \leq \frac{5}{4}$. **D.** $m \leq 0$.
- Câu 68:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (2m + 4)x - 5$ nghịch biến trên $(0; 2)$?
A. 2008. **B.** 2007. **C.** 2018. **D.** 2019.
- Câu 69:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ sao cho hàm số $y = \frac{x^4}{4} - \frac{mx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + mx + 2020$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?
A. 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.
- Câu 70:** Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?
A. Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM. (MỨC ĐỘ 7 – 8)

DẠNG 1. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐƠN ĐIỀU TRÊN CÁC KHOẢNG XÁC ĐỊNH CỦA NÓ

Xét hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a > 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' = f'(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{f'(x)} = 3a < 0 \\ \Delta_{f'(x)} = 4b^2 - 12ac \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m ?$

Lưu ý: Dấu của tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$.

• Để $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$. • $f(x) \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$.

Câu 1: Cho hàm số $y = -\frac{1}{3}x^3 + mx^2 + (3m+2)x + 1$. Tìm tất cả giá trị của m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

A. $\begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -2 \end{cases}$.

B. $-2 \leq m \leq -1$.

C. $-2 < m < -1$.

D. $\begin{cases} m > -1 \\ m < -2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R}, y' = -x^2 + 2mx + 3m + 2$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m + 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq -1.$$

Câu 2: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A.** Không có giá trị m thỏa mãn. **B.** $m \neq 1$.
C. $m = 1$. **D.** Luôn thỏa mãn với mọi m .

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m-1)$$

Ta có: $\Delta' = (-3m)^2 - 3 \cdot 3 \cdot (2m-1)$. Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 < 0 \Leftrightarrow 9(m^2 - 2m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 9(m-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 3: Tìm điều kiện của tham số thực m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 3(m+1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

- A.** $m \geq 2$. **B.** $m < 2$. **C.** $m < 0$. **D.** $m \geq 0$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 3(m+1)$

$$YCBT \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta' = -9m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0.$$

Câu 4: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + mx^2 + 4x - m$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

- A.** $[-2; 2]$. **B.** $(-\infty; 2)$. **C.** $(-\infty; -2]$. **D.** $[2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = x^2 + 2mx + 4$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 4 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2.$$

Câu 5: Giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2mx^2 + (m+3)x - 5 + m$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là.

- A.** $-\frac{3}{4} \leq m \leq 1$. **B.** $m \leq -\frac{3}{4}$. **C.** $-\frac{3}{4} < m < 1$. **D.** $m \geq 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 - 4mx + (m+3).$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4mx + (m+3) = 0.$$

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, đẳng thức chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm $\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (-2m)^2 - 1 \cdot (m+3) \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m - 3 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq m \leq 1$.

Vậy $-\frac{3}{4} \leq m \leq 1$.

Câu 6: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ là

A. $[-4; 2]$. **B.** $(-4; 2)$. **C.** $(-\infty; -4] \cup [2; +\infty)$. **D.** $(-\infty; -4) \cup (2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2(m+1)x + 3$.

Hàm số $y = x^3 + (m+1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 2m - 8 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 2.$$

Vậy $m \in [-4; 2]$.

Nếu hệ số a chứa tham số thì phải xét trường hợp $a = 0$ và $a \neq 0$

Câu 7: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m^2 - m)x^3 + 2mx^2 + 3x - 2$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

A. 4. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

$$y' = (m^2 - m)x^2 + 4mx + 3$$

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$.

+ Với $m = 0$ ta có $y' = 3 > 0$ với $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

+ Với $m = 1$ ta có $y' = 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{3}{4} \Rightarrow m = 1$ không thỏa mãn.

$$+ \text{ Với } \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq 0 \end{cases} \text{ ta có } y' \geq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ \Delta' = m^2 + 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 0.$$

Tổng hợp các trường hợp ta được $-3 \leq m \leq 0$.

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài ra.

Câu 8: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + m(m-1)x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. $m \leq \frac{4}{3}$ và $m \neq 0$. **B.** $m = 0$ hoặc $m \geq \frac{4}{3}$.

C. $m \geq \frac{4}{3}$. **D.** $m \leq \frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn C

TH1: $m = 0 \Rightarrow y = 2$ là hàm hằng nên loại $m = 0$.

TH2: $m \neq 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + 2mx + m(m-1)$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - 3m^2(m-1) \leq 0 \\ 3m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2(4-3m) \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{4}{3} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{4}{3}$$

Câu 9: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{m}{3}x^3 - 2mx^2 + (3m+5)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

A. 4.

B. 2.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = mx^2 - 4mx + 3m + 5$.

Với $a = 0 \Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow y' = 5 > 0$. Vậy hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Với $a \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$. Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ (2m)^2 - m(3m+5) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m^2 - 5m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 0 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 5.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m-1)x^2 + 3x + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $1 < m \leq 2$.

B. $1 < m < 2$.

C. $1 \leq m \leq 2$.

D. $1 \leq m < 2$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m-1)x + 3$.

Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1=0 \\ m-1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m > 1 \\ 9(m-1)^2 - 9(m-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m > 1 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 2.$$

Câu 11: Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = (4-m^2)x^3 + (m-2)x^2 + x + m-1$ (1) đồng biến trên $\mathbb{R}$ bằng.

A. 5.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

TH1: $4-m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

$m = 2$: (1) $\Leftrightarrow y = x + 1 \Rightarrow$ hàm số luôn tăng trên $\mathbb{R} \Rightarrow m = 2$.

$m = -2$: (1) $\Leftrightarrow y = -4x^2 + x - 3$ là hàm số bậc hai nên tăng trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right)$, giảm trên khoảng $\left(\frac{1}{8}; +\infty\right) \Rightarrow m = -2$.

TH2: $4-m^2 \neq 0$.

$$y' = 3(4-m^2)x^2 + 2(m-2)x + 1. \Delta' = (m-2)^2 - 3(4-m^2) = 4m^2 - 4m - 8.$$

hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4-m^2 > 0 \\ 4m^2 - 4m - 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-2; 2) \\ m \in [-1; 2] \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-1; 2). m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1; m = 0; m = 1.$$

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 12: Số các giá trị nguyên của tham số m trong đoạn $[-100; 100]$ để hàm số $y = mx^3 + mx^2 + (m+1)x - 3$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là:

A. 200.

B. 99.

C. 100.

D. 201.

Lời giải

Trường hợp 1: $m = 0$. Ta có:

$y = x - 3$ có $y' = 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó loại $m = 0$.

Trường hợp 2: $m \neq 0$. Ta có: $y' = 3mx^2 + 2mx + m + 1, \Delta' = -2m^2 - 3m = m(-2m - 3)$

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m(-2m-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -2m-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{3}{2}.$$

Vì m là số nguyên thuộc đoạn $[-100; 100]$ nên $m \in \{-2; -3; \dots; -99; -100\}$.

Vậy có 99 giá trị m .

Câu 13: Tổng bình phương của tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (3m^2 - 12)x^3 + 3(m-2)x^2 - x + 2$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ là?

A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 14.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 9(m^2 - 4)x^2 + 6(m-2)x - 1$.

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

TH1: $m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$.

+ Với $m = 2$ ta có $y' = -1 \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên $m = 2$ thỏa mãn.

+ Với $m = -2$ ta có $y' = -24x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{24}$ nên loại $m = -2$.

TH2: $m^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$. Ta có

$$y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 9(m^2 - 4) < 0 \\ \Delta' = 9(m-2)^2 + 9(m^2 - 4) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ 0 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 2 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1\}$$

Vậy $m \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5$.

Câu 14: Hỏi có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.

A. 2.

B. 1.

C. 0.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m-1)x - 1$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m-1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$$

* Trường hợp 1: $m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$.

+ Với $m = 1$, ta được $-1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, suy ra $m = 1$.

+ Với $m = -1$, ta được $-4x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{4}$, suy ra $m = -1$.

* Trường hợp 2: $m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 1$.

Ta có $\Delta' = (m-1)^2 + 3(m^2 - 1) = m^2 - 2m + 1 + 3m^2 - 3 = 4m^2 - 2m - 2$.

$$\text{Để } y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 4m^2 - 2m - 2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1.$$

Tổng hợp lại, ta có tất cả giá trị m cần tìm là $-\frac{1}{2} \leq m \leq 1$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, suy ra $m \in \{0; 1\}$, nên có 2 giá trị nguyên của tham số m .

Xét hàm số nhất biến $y = f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$.

– Bước 1. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$.

– Bước 2. Tính đạo hàm $y' = f'(x) = \frac{a.d - b.c}{(cx+d)^2}$.

+ Để $f(x)$ đồng biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c > 0 \Rightarrow m ?$

+ Để $f(x)$ nghịch biến trên $D \Leftrightarrow y' = f'(x) < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow a.d - b.c < 0 \Rightarrow m ?$

★ Lưu ý: Đối với hàm phân thức thì không có dấu "=" xảy ra tại vị trí y' .

Câu 15: Có tất cả bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = \frac{(m+1)x-2}{x-m}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

$$y' = \frac{-m^2 - m + 2}{(x-m)^2}.$$

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của ta cần tìm m để $y' \geq 0$ trên $(-\infty; m)$ và $(m; +\infty)$ và dấu "=" chỉ xảy ra tại hữu hạn điểm trên các khoảng đó

ĐK: $-m^2 - m + 2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 1$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = -1, 0$.

Câu 16: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+m^2}{x+4}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 5.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-4\}, y' = \frac{4 - m^2}{(x + 4)^2}.$$

Để hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó thì $4 - m^2 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

Do đó có 3 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 17: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x + 2 - m}{x + 1}$ nghịch biến trên các khoảng mà nó xác định?

A. $m \leq 1$.

B. $m \leq -3$.

C. $m < -3$.

D. $m < 1$.

Lời giải

Với $m = 1$ thì hàm số là hàm hằng ($\forall x \neq -1$) nên không nghịch biến.

$$\text{Ta có } y' = \frac{m - 1}{(x + 1)^2}, \forall x \neq -1.$$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng của tập xác định khi và chỉ khi $y' < 0, x \neq -1 \Leftrightarrow m < 1$.

Câu 18: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx - 4}{x - m}$ nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó.

A. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải

Tập xác định $D = (-\infty; m) \cup (m; +\infty)$.

$$\text{Ta có } y = \frac{mx - 4}{x - m} \Rightarrow y' = \frac{-m^2 + 4}{(x - m)^2}. \text{ Vì hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó}$$

$$\text{nên } -m^2 + 4 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}.$$

Câu 19: Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số $y = \frac{mx - 2}{2x - m}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định

A. $\begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 2 \end{cases}$.

B. $-2 < m < 2$.

C. $\begin{cases} m < -2 \\ m > 2 \end{cases}$.

D. $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = \frac{-m^2 + 4}{(2x - m)^2}, \forall x \neq \frac{m}{2}$$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $-m^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$.

DẠNG 2. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ NHẤT BIẾN ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC

- Câu 20:** Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-4}{x-m}$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ là
- A.** $(-2; 1]$. **B.** $(-2; 2)$. **C.** $(-2; -1]$. **D.** $(-2; -1)$.

Lời giải

Chọn C

Đạo hàm $y' = \frac{-m^2+4}{(x-m)^2} > 0, \forall x \neq m$.

Do đó hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ khi

$$y' > 0, \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4 > 0 \\ x-m \neq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2+4 > 0 \\ x \neq m, \forall x \in (-1; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < m \leq -1.$$

- Câu 21:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{mx-1}{m-4x}$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$.
- A.** $m > 2$. **B.** $1 \leq m < 2$. **C.** $-2 < m < 2$. **D.** $-2 \leq m \leq 2$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{m}{4}\right\}$.

Ta có $y' = \frac{m^2-4}{(m-4x)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$ khi và chỉ khi $\begin{cases} m^2-4 < 0 \\ \frac{m}{4} \notin \left(-\infty; \frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ \frac{m}{4} \geq \frac{1}{4} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \geq 1 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq m < 2.$$

Vậy $1 \leq m < 2$.

- Câu 22:** Cho hàm số $y = \frac{mx-2m+3}{x+m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S .

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện xác định: $x \neq -m$.

Ta có: $y' = \frac{m^2 + 2m - 3}{(x + m)^2}$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì:

$$\begin{cases} y' < 0; \forall x \in (2; +\infty) \\ x \neq -m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m - 3 < 0 \\ -m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 1 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1.$$

Vậy giá trị nguyên của m là $S = \{-2; -1; 0\}$.

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

A. Vô số.

B. 0.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện $x \neq -4m$.

Ta có $y = \frac{x+18}{x+4m} \Rightarrow y' = \frac{4m-18}{(x+4m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y' < 0 \\ -4m \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-18 < 0 \\ -4m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < \frac{9}{2}.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x+18}{x+4m}$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+9}{4x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; 4)$?

A. 5.

B. 11.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $x \neq -\frac{m}{4}$.

Ta có: $y' = \frac{m^2 - 36}{(4x + m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 4) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (0; 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 36 < 0 \\ -\frac{m}{4} \notin (0; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \begin{cases} -\frac{m}{4} \leq 0 \\ -\frac{m}{4} \geq 4 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -6 < m < 6 \\ \begin{cases} m \geq 0 \\ m \leq -16 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 6.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vậy có 6 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 25: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = \frac{-mx + 3m + 4}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$

- A.** $-1 < m < 4$. **B.** $-1 < m \leq 1$. **C.** $\begin{cases} m < -1 \\ m > 4 \end{cases}$. **D.** $1 \leq m < 4$.

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{m^2 - 3m - 4}{(x - m)^2}$$

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $y' < 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1; 4) \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 1.$$

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = \frac{3x + 18}{x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$?

- A.** 2020. **B.** 2026. **C.** 2018. **D.** 2023.

Lời giải

Chọn D

Điều kiện: $x \neq m$ nên $m \notin (-\infty; -3)$

$$y = \frac{3x + 18}{x - m} \Rightarrow y' = \frac{-3m - 18}{(x - m)^2}$$

Để hàm số $y = \frac{3x+18}{x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -3)$ thì $-3m-18 < 0 \Leftrightarrow m > -6$

Vì $m \in (-2020; 2020)$ và $m \notin (-\infty; -3)$ nên $m \in [-2; 2020]$

Vậy có 2023 giá trị m nguyên thỏa mãn.

Câu 27: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{x+4}{2x-m}$ nghịch biến trên khoảng $(-3; 4)$.

A. Vô số.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{m}{2} \right\}$.

Có $y' = -\frac{m+8}{(2x-m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên $(-3; 4) \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in (-3; 4) \Leftrightarrow -\frac{m+8}{(2x-m)^2} < 0 \forall x \in (-3; 4)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -(m+8) < 0 \\ \frac{m}{2} \notin (-3; 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -8 \\ \frac{m}{2} \leq -3 \\ \frac{m}{2} \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8 < m \leq -6 \\ m \geq 8 \end{cases}$$

Do m nguyên âm nên $m \in \{-7; -6\}$, gồm 2 giá trị thỏa mãn.

Câu 28: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{mx+4}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

Ta có $y' = \frac{m^2-4}{(x+m)^2}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' < 0, \forall x > 0 \\ -m \notin (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4 < 0 \\ -m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 < m < 2 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m < 2.$$

Vậy số giá trị nguyên của tham số m là 2.

DẠNG 3. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 ĐƠN ĐIỆU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC

Câu 29: Cho hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx - 4$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là

- A.** $(-1; 5)$. **B.** $(-\infty; -3]$. **C.** $(-\infty; -4]$. **D.** $(-1; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0).$$

Đặt $g(x) = 3x^2 + 6x$, hàm số $g(x)$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0
y'		$-$	0
y	$-\infty$	$\searrow$	$\nearrow$
		-3	0

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\Leftrightarrow m \leq 3x^2 + 6x, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow m \leq -3$.

Câu 30: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = f(x) = \frac{mx^3}{3} + 7mx^2 + 14x - m + 2$ giảm trên nửa khoảng $[1; +\infty)$?

- A.** $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right]$. **B.** $\left[-2; -\frac{14}{15}\right]$. **C.** $\left[-\frac{14}{15}; +\infty\right)$. **D.** $\left(-\infty; -\frac{14}{15}\right)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$, yêu cầu của bài toán đưa đến giải bất phương trình

$$mx^2 + 14mx + 14 \leq 0, \forall x \geq 1, \text{ tương đương với } g(x) = \frac{-14}{x^2 + 14x} \geq m$$

Dễ dàng có được $g(x)$ là hàm tăng $\forall x \in [1; +\infty)$, suy ra $\min_{x \geq 1} g(x) = g(1) = -\frac{14}{15}$

Kết luận: $\Leftrightarrow \min_{x \geq 1} g(x) \geq m \Leftrightarrow -\frac{14}{15} \geq m$

Câu 31: Xác định các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

- A.** $m \geq 0$. **B.** $m < \frac{1}{2}$. **C.** $m \leq 0$. **D.** $m \geq \frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2m \\ x = 0 \end{cases}$$

Hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - m$ nghịch biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow 2m \geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{2}$

Câu 32: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 + 3x^2 - mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

- A.** $m \leq 0$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $m \leq -3$. **D.** $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 3x^2 + 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x < 0$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x < 0.$$

Cách 1:

$$3x^2 + 6x - m \geq 0, \forall x < 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x \geq m, \forall x < 0.$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x$ trên khoảng $(-\infty;0)$, ta có:

$$f'(x) = 6x + 6. \text{ Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1. \text{ Ta có } f(-1) = -3.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$		0	
	$-$		$+$
$f(x)$	$+\infty$	-3	0

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $m \leq -3$.

Cách 2:

$$\text{Ta có } \Delta' = 9 + 3m.$$

Nếu $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -3$ thì $y' \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0 \forall x < 0$.

Nếu $\Delta' > 0$ thì y' có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Khi đó để $y' \geq 0 \forall x < 0$ thì ta phải có $0 \leq x_1 < x_2$. Điều này không thể xảy ra vì $S = x_1 + x_2 = -2 < 0$.

Vậy $m \leq -3$.

Cách 3:

Phương án B: Với $m = -3$ ta có $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x+1)^3$. Khi đó $y' = 3(x+1)^2 \geq 0 \forall x$.

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$. Vậy B là đáp án đúng.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 - 9m^2x$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

A. $-1 < m < \frac{1}{3}$.

B. $m > \frac{1}{3}$.

C. $m < -1$.

D. $m \geq \frac{1}{3}$ hoặc $m \leq -1$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx - 9m^2; y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx - 9m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 3m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m \\ x = 3m \end{cases}.$$

• Nếu $-m = 3m \Leftrightarrow m = 0$ thì $y' \geq 0; \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có khoảng nghịch biến.

• Nếu $-m < 3m \Leftrightarrow m > 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-m; 3m)$.

$$\text{Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng } (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 0 \\ 3m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $m \geq \frac{1}{3}$.

• Nếu $-m > 3m \Leftrightarrow m < 0$ thì hàm số nghịch biến trên khoảng $(3m; -m)$.

$$\text{Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng } (0;1) \Leftrightarrow \begin{cases} 3m \leq 0 \\ -m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $m \leq -1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi $m \leq -1$ hoặc $m \geq \frac{1}{3}$.

Câu 34: Tìm các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.

- A.** $m = 0$. **B.** $m > 1$. **C.** $m \leq -\frac{1}{2}$. **D.** $m < -\frac{1}{2}$.

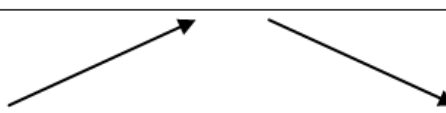
Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$. Cho $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2m - 1 \end{cases}$.

Nếu $1 \leq 2m - 1$ thì ta có biến đổi $y' \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2m - 1$.

Xét $2m - 1 < 1$ ta có biến đổi $y' \leq 0 \Leftrightarrow x \in [2m - 1; 1]$.

x	$-\infty$	$2m-1$			1	$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
	$-\infty$				$+\infty$	

Vậy, hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$ thì $(-2; 0) \subset [2m - 1; 1]$.

$$\Leftrightarrow 2m - 1 \leq -2 \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}.$$

Câu 35: Tìm tất cả các giá trị m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 2$ tăng trên khoảng $(1; +\infty)$.

- A.** $m < 3$. **B.** $m \geq 3$. **C.** $m \neq 3$. **D.** $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn B

Đạo hàm : $y' = 3x^2 - 6x + m$

YCBT $\Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m \geq -3x^2 + 6x, \forall x \in (1; +\infty)$$

Xét hàm số: $f(x) = -3x^2 + 6x, \forall x \in (1; +\infty) \Rightarrow f'(x) = -6x + 6 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, f(1) = 3. \text{ Do đó : } m \geq f(x), x \in (1; +\infty) \Rightarrow m \geq 3.$$

Câu 36: Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:

- A.** $(-\infty; 3)$. **B.** $(-\infty; 3]$. **C.** $[3; 6]$. **D.** $(-\infty; 6]$.

Lời giải

Chọn B

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ thì: $y' \geq 0, \forall x \in (0; 4)$.

tức là $3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0 \quad \forall x \in (0; 4) \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \quad \forall x \in (0; 4)$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1}$ trên $(0; 4)$.

$$g'(x) = \frac{6x^2 + 6x - 12}{(2x+1)^2}, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 4) \\ x = -2 \notin (0; 4) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	4
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	6	3	$\frac{54}{13}$

Vậy để $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \quad \forall x \in (0; 4)$ thì $m \leq 3$.

Câu 37: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 6x^2 + mx + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

- A.** $m \geq 12$. **B.** $m \leq 12$. **C.** $m \geq 0$. **D.** $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn A

Cách 1: Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Ta có $y' = 3x^2 - 12x + m$

□ Trường hợp 1:

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \text{ (h)} \\ 36 - 3m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 12$

□ Trường hợp 2: Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa $x_1 < x_2 \leq 0$

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

□ Trường hợp 2.1: $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $m = 0$. Nghiệm còn lại của $y' = 0$ là $x = 4$

□ Trường hợp 2.2: $y' = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa

$$x_1 < x_2 < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 36 - 3m > 0 \\ 4 < 0(vl) \\ \frac{m}{3} > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{không có } m. \text{ Vậy } m \geq 12$$

Cách 2: Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty) \Leftrightarrow m \geq 12x - 3x^2 = g(x), \forall x \in (0; +\infty)$.

Lập bảng biến thiên của $g(x)$ trên $(0; +\infty)$.

x	0	2	$+\infty$
g'		+	0 -
g	0	$\nearrow$ 12 $\searrow$	$-\infty$

Câu 38: Tìm m để hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 3mx + m - 1$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

A. $m \leq -1$.

B. $m \leq 1$.

C. $m < 1$.

D. $m > -1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -3x^2 + 6x + 3m = 3(-x^2 + 2x + m)$.

Vì hàm số liên tục trên nửa khoảng $[0; +\infty)$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$ cũng tương đương hàm số nghịch trên $[0; +\infty)$ khi chỉ khi $y' \leq 0, \forall x \in [0; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x + m \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty) \Leftrightarrow m \leq x^2 - 2x = f(x) \quad \forall x \in [0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \min_{[0; +\infty)} f(x) = f(1) = -1$$

Câu 39: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = x^3 - 3(2m+1)x^2 + (12m+5)x + 2$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Số phần tử của S bằng

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5.$$

Hàm số đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0, \quad \forall x \in (2; +\infty).$$

$$3x^2 - 6(2m+1)x + 12m + 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 - 6x + 5}{12(x-1)}$ với $x \in (2; +\infty)$.

$$g'(x) = \frac{3x^2 - 6x + 1}{12(x-1)^2} > 0 \text{ với } \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow \text{hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên khoảng } (2; +\infty).$$

$$\text{Do đó } m \leq g(x), \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow m \leq g(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{12}.$$

Vậy không có giá trị nguyên dương nào của m thỏa mãn bài toán.

Câu 40: . Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - mx^2 - (m-6)x + 1$ đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ là:

- A.** $(-\infty; 6]$. **B.** $(-\infty; 3)$. **C.** $(-\infty; 3]$. **D.** $[3; 6]$.

Lời giải

$y' = 3x^2 - 2mx - (m-6)$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 4)$ thì: $y' \geq 0, \forall x \in (0; 4)$.

$$\text{tức là } 3x^2 - 2mx - (m-6) \geq 0 \quad \forall x \in (0; 4) \Leftrightarrow \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \quad \forall x \in (0; 4)$$

Xét hàm số $g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1}$ trên $(0; 4)$.

$$g'(x) = \frac{6x^2 + 6x - 12}{(2x+1)^2}, \quad g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \in (0; 4) \\ x = -2 \notin (0; 4) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	1	4
$g'(x)$	–	0	+
$g(x)$	6		$\frac{54}{13}$
		3	

$$\text{Vậy để } g(x) = \frac{3x^2 + 6}{2x+1} \geq m \quad \forall x \in (0; 4) \text{ thì } m \leq 3.$$

Câu 41: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 9.

B. 10.

C. 6.

D. 5.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$

Hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty).$$

Xét hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ trong 3 trường hợp:

Trường hợp 1: $m = 0$

$y = f'(x) = x^2 + 6 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Lúc này hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên cũng đồng biến trên $(0; +\infty)$ (1).

Trường hợp 2: $m < 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$
$y = f'(x)$	$+\infty$	$-m^2 + m + 6$	$m + 6$	$+\infty$

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 6 \geq 0 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m < 0 \text{ (2)}.$$

Trường hợp 3: $m > 0$, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f'(x) = x^2 - 2mx + (m+6)$ như sau:

x	$-\infty$	0	m	$+\infty$
$y = f'(x)$	$+\infty$	$m + 6$	$-m^2 + m + 6$	$+\infty$

$$f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 + m + 6 \geq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3 \text{ (3)}.$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra có 10 giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+6)x + \frac{2}{3}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 42: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = -x^3 - 6x^2 + (4m-9)x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$ là

A. $\left(-\infty; -\frac{3}{4}\right]$.

B. $\left[-\frac{3}{4}; +\infty\right)$.

C. $[0; +\infty)$.

D. $(-\infty; 0]$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = -3x^2 - 12x + 4m - 9$.

Ycbt $\Leftrightarrow -3x^2 - 12x + 4m - 9 \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1)$

$\Leftrightarrow m \leq \frac{3}{4}(x^2 + 4x + 3), \forall x \in (-\infty; -1)$

$\Leftrightarrow m \leq \frac{3}{4}[(x+2)^2 - 1], \forall x \in (-\infty; -1)$

$\Leftrightarrow m \leq \min_{x \in (-\infty; -1)} \left\{ \frac{3}{4}[(x+2)^2 - 1] \right\} = -\frac{3}{4}$.

Câu 43: Cho hàm số $y = \frac{x^3}{3} - (m-1)x^2 + 3(m-1)x + 1$. Số các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ là

A. 7.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1)$.

Ycbt $\Leftrightarrow x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$\Delta' = [-(m-1)]^2 - 3(m-1) = m^2 - 5m + 4$.

Trường hợp 1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0 \Leftrightarrow m \in [1; 4]$. Ta được 4 giá trị nguyên của m .

Trường hợp 2:

$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m > 4 \end{cases}$. Khi đó phương trình $x^2 - 2(m-1)x + 3(m-1) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 \leq 1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_1-1) + (x_2-1) < 0 \\ (x_1-1)(x_2-1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1+x_2) - 2 < 0 \\ x_1x_2 - (x_1+x_2) + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(m-1) - 2 < 0 \\ 3(m-1) - 2(m-1) + 1 \geq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 0 \leq m < 2$.

Kết hợp với điều kiện ta được $0 \leq m < 1$. Khi đó có 1 giá trị nguyên của m .

Vậy có 5 giá trị nguyên của m .

Câu 44: Số giá trị nguyên thuộc khoảng $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 - mx + 2019$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ là

- A.** 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2017.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3x^2 - 6x - m$.

Hàm số đồng biến trên khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - m \geq 0, \forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x \geq m, \forall x \in (0; +\infty) \quad (1)$$

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 - 6x$ trên $(0; +\infty)$

Ta có $f'(x) = 6x - 6, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Do đó $\min_{(0; +\infty)} f(x) = f(1) = -3$

$(1) \Leftrightarrow m \leq -3$. Kết hợp với giả thiết ta được $m \in (-2020; -3]$. Nên có 2017 số nguyên thỏa mãn

Vậy **Chọn D**

Câu 45: Cho hàm số $f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = x^3 - (m+1)x^2 - (2m^2 - 3m + 2)x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2)$$

Nhận xét $2m^2 - 3m + 2 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$ nên $f'(x) = 3x^2 - 2(m+1)x - (2m^2 - 3m + 2) = 0$

luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m

Do đó hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in (2; +\infty)$

$$\text{Điều này xảy ra khi } \begin{cases} 3.f'(2) \geq 0 \\ x_1 < x_2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3.[3.4 - 4(m+1) - (2m^2 - 3m + 2)] \geq 0 \\ \frac{S}{2} < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2m^2 - m + 6 \geq 0 \\ \frac{(m+1)}{3} < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq \frac{3}{2} \\ m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Do m nguyên nên $m \in \{-2; -1; 0; 1\}$.

Câu 46: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Tính số phần tử của tập hợp S .

A. 2025.

B. 2016.

C. 2024.

D. 2023.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = 2x^3 + mx^2 + 2x \Rightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-2; 0) \Leftrightarrow y' = 6x^2 + 2mx + 2 \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Leftrightarrow m \leq -3x - \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0).$$

Xét hàm số $g(x) = -3x - \frac{1}{x}, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Rightarrow g'(x) = -3 + \frac{1}{x^2} \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow -3 + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Bảng biến thiên

x	-2	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\frac{13}{2}$	$-2\sqrt{3}$	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq -2\sqrt{3}$. Mà $m \in \mathbb{Z}, m \in (-2020; 2020)$ nên $m \in \{-2019; -2018; \dots; -4\}$.

Vậy có 2016 giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2020; 2020)$ sao cho hàm số $y = 2x^3 + mx^2 + 2x$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Câu 47: Với mọi giá trị $m \geq a\sqrt{b}$, ($a, b \in \mathbb{Z}$) thì hàm số $y = 2x^3 - mx^2 + 2x + 5$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$. Khi đó $a - b$ bằng

A. 1.

B. -2.

C. 3.

D. -5.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 6x^2 - 2mx + 2$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - mx + 1 \geq 0, \forall x \in (-2; 0)$$

$$3x^2 + 1 \geq mx \Leftrightarrow 3x + \frac{1}{x} \leq m.$$

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3x + \frac{1}{x}; f'(x) = 3 - \frac{1}{x^2} = \frac{3x^2 - 1}{x^2}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$.

x	-2	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		$-2\sqrt{3}$	

Từ bảng biến thiên để $f(x) \leq m, \forall x \in (-2; 0)$

$$\text{thì } \max_{(-2; 0)} f(x) \leq m \Rightarrow m \geq -2\sqrt{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a - b = -5.$$

DẠNG 4. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ KHÁC ĐƠN ĐIỀU TRÊN KHOẢNG CHO TRƯỚC

Câu 48: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{1}{5}m^2x^5 - \frac{1}{3}mx^3 + 10x^2 - (m^2 - m - 20)x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Tổng giá trị của tất cả các phần tử thuộc S bằng

A. $\frac{5}{2}$.

B. -2 .

C. $\frac{1}{2}$.

D. $\frac{3}{2}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } f'(x) &= m^2x^4 - mx^2 + 20x - (m^2 - m - 20) = m^2(x^4 - 1) - m(x^2 - 1) + 20(x + 1) \\ &= m^2(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1) - m(x - 1)(x + 1) + 20(x + 1) \\ &= (x + 1)[m^2(x - 1)(x^2 + 1) - m(x - 1) + 20] \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ m^2(x - 1)(x^2 + 1) - m(x - 1) + 20 = 0(*) \end{cases}$$

Ta có $f'(x) = 0$ có một nghiệm đơn là $x = -1$, do đó nếu $(*)$ không nhận $x = -1$ là nghiệm thì $f'(x)$ đổi dấu qua $x = -1$. Do đó để $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hay $(*)$ nhận $x = -1$ làm nghiệm.

$$\text{Suy ra } m^2(-1 - 1)(1 + 1) - m(-1 - 1) + 20 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 + 2m + 20 = 0.$$

$$\text{Tổng các giá trị của } m \text{ là } \frac{1}{2}.$$

- Câu 49:** Tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = x + 1 + \frac{m}{x-2}$ đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó là
- A.** $[0;1)$. **B.** $(-\infty;0]$. **C.** $[0;+\infty) \setminus \{1\}$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

• Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó khi và chỉ khi:

$$y' \geq 0, \forall x \in D \Leftrightarrow 1 - \frac{m}{(x-2)^2} \geq 0, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow m \leq (x-2)^2, \forall x \in D$$

Xét hàm số $f(x) = (x-2)^2$ ta có:

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

Vậy, để hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định của nó thì $m \leq 0$.

- Câu 50:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số để hàm số $y = \frac{\cos x - 3}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
- A.** $\begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$. **B.** $\begin{cases} 0 < m < 3 \\ m < -1 \end{cases}$. **C.** $m \leq 3$. **D.** $m < 3$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x \neq m$. Ta có: $y' = \frac{(-m+3)}{(\cos x - m)^2} \cdot (-\sin x) = \frac{(m-3)}{(\cos x - m)^2} \cdot \sin x$

Vì $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Rightarrow \sin x > 0, (\cos x - m)^2 > 0, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right): \cos x \neq m$.

Để hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Leftrightarrow y' < 0 \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 0 \\ \cos x \neq m \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-3 < 0 \\ m \notin (-1; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq m < 3 \\ m \leq -1 \end{cases}$$

Chú ý : Tập giá trị của hàm số $y = \cos x, \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ là $(-1; 0)$.

- Câu 51:** Cho hàm số $y = \frac{(4-m)\sqrt{6-x}+3}{\sqrt{6-x}+m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m trong khoảng $(-10;10)$ sao cho hàm số đồng biến trên $(-8;5)$?
- A.** 14. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 15.

Lời giải

Đặt $t = -\sqrt{6-x}$ vì $x \in (-8;5) \Rightarrow t \in (-\sqrt{14};-1)$ và $t = -\sqrt{6-x}$ đồng biến trên $(-8;5)$.

Hàm số trở thành $y = \frac{-(4-m)t+3}{-t+m}$ tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\} \Rightarrow y' = \frac{m^2-4m+3}{(-t+m)^2}$.

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\sqrt{14};-1) \Leftrightarrow \begin{cases} m^2-4m+3 > 0 \\ m \leq -\sqrt{14} \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -\sqrt{14} \\ -1 \leq m < 1. \\ m > 3 \end{cases}$

$\Rightarrow m = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -1, 0, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ có 14 giá trị.

- Câu 52:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 + mx - \frac{3}{2x}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$. $y' = x^3 + m + \frac{3}{2x^2}$.

Ta có: hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (0; +\infty)$

$$\Leftrightarrow x^3 + m + \frac{3}{2x^2} \geq 0, \forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2x^2} \geq -m, \forall x \in (0; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -m \leq \min_{(0; +\infty)} f(x), \text{ với } f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2}(1).$$

Cách 1:

Theo bất đẳng thức Cauchy ta có $f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2} = \frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x^2} \geq 5\sqrt[5]{\frac{1}{2^5}} = \frac{5}{2}$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x = 1$. Do đó $\min_{(0; +\infty)} f(x) = \frac{5}{2}(2)$.

Từ (1) và (2) ta có $-m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$. Do m nguyên âm nên $m = -1$ hoặc $m = -2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn điều kiện bài ra.

Cách 2:

Xét hàm số $f(x) = x^3 + \frac{3}{2x^2}, \forall x \in (0; +\infty)$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^3}, f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$		$\frac{5}{2}$	

Từ bảng biến thiên ta có $-m \leq \frac{5}{2} \Leftrightarrow m \geq -\frac{5}{2}$. Do m nguyên âm nên $m = -1$ hoặc $m = -2$.

Vậy có hai giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn điều kiện bài ra.

Câu 53: Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

A. $\begin{cases} m \geq 2 \\ m \leq -2 \end{cases}$

B. $m > 2$

C. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$

D. $-1 < m < 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = \frac{2-m}{(\cos x - m)^2} \cdot (-\sin x), \sin x > 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó: Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 2-m > 0 \\ \cos x - m \neq 0 \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$$

Câu 54: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số

$y = \frac{3}{4}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + (2m+15)x - 3m+1$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$?

A. 2.

B. 3.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow y' = 3x^3 - 9x + 2m + 15 \geq 0 \forall x \in (0; +\infty)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thuộc $(0; +\infty) \Leftrightarrow 3x^3 - 9x + 15 \geq -2m \forall x \in (0; +\infty)$.

Xét hàm số: $g(x) = 3x^3 - 9x + 15$ trên $(0; +\infty)$.

Ta có: $g'(x) = 9x^2 - 9$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \text{ (l)} \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	+
$g(x)$	15	9	$+\infty$

Từ BBT ta có: $-2m \leq 9 \Leftrightarrow m \geq -\frac{9}{2}$

Vậy $m \in \{-4; -3; -2; -1\}$.

Câu 55: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = 3x + \frac{m^2 + 3m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định của nó?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$y = 3x + \frac{m^2 + 3m}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{3(x+1)^2 - (m^2 + 3m)}{(x+1)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $y' \geq 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m^2 + 3m \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0$.

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 56: Tìm m để hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

A. $m > 2$.

B. $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$.

C. $m < 2$.

D. $m \leq 2$.

Lời giải

Đặt $t = \cos x$.

Ta có: $t' = -\sin x < 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$\Rightarrow$ hàm số $t = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Do đó hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$ hàm số $y = \frac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$.

Hàm số $y = \frac{t-2}{t-m}$ đồng biến trên khoảng $(0;1) \Leftrightarrow y' = \frac{2-m}{(t-m)^2} > 0, \forall t \in (0;1)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m > 0 \\ 1 \leq m \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ 1 \leq m \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m < 2 \\ m \leq 0 \end{cases}.$$

Vậy với $\begin{cases} m \leq 0 \\ 1 \leq m < 2 \end{cases}$ thì hàm số $y = \frac{\cos x - 2}{\cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 57: Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $y = \frac{1}{3}\cos^3 x - 4\cot x - (m+1)\cos x$ đồng biến trên khoảng $(0; \pi)$?

A. 5.

B. 2.

C. vô số.

D. 3.

Lời giải

- Ta có: $y' = -\cos^2 x \cdot \sin x + \frac{4}{\sin^2 x} + (m+1) \cdot \sin x = \sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m \cdot \sin x$.

- Hàm số đồng biến trên $(0; \pi)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; \pi)$

$$\Leftrightarrow \sin^3 x + \frac{4}{\sin^2 x} + m \cdot \sin x \geq 0, \forall x \in (0; \pi)$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{4}{\sin^3 x} \geq -m, \forall x \in (0; \pi) \quad (1).$$

- Xét hàm số: $g(x) = \sin^2 x + \frac{4}{\sin^3 x}$, trên $(0; \pi)$.

$$\text{Có } g'(x) = 2\sin x \cdot \cos x - \frac{12\cos x}{\sin^4 x} = 2\cos x \cdot \left(\sin x - \frac{6}{\sin^4 x}\right) = 2\cos x \cdot \frac{\sin^5 x - 6}{\sin^4 x}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \in (0; \pi).$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
y'		0	
		-	+
y	$+\infty$	5	$+\infty$

- Do đó: $(1) \Leftrightarrow -m \leq \min_{x \in (0; \pi)} g(x) \Leftrightarrow -m \leq 5 \Leftrightarrow m \geq -5$.

Lại do m nguyên âm nên $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1\}$. Vậy có 5 số nguyên âm.

Câu 58: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x + 5 + \frac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5; +\infty)$?

A. 10.

B. 8.

C. 9.

D. 11.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Đạo hàm: $y' = 1 + \frac{m-1}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x + m + 3}{(x-2)^2}$.

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 3$ trên $[5; +\infty)$.

Đạo hàm: $f'(x) = 2x - 4$. Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$. Ta có: $f(5) = 8$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
y'		-	0	+	0	+	
y	$+\infty$	↘		-1	↗		$+\infty$
				8			

Do $(x-2)^2 > 0$ với mọi $x \in [5; +\infty)$ nên $y' \geq 0$, $\forall x \in [5; +\infty)$ khi và chỉ khi $f(x) \geq -m$, $\forall x \in [5; +\infty)$. Dựa vào bảng biến thiên ta có: $-m \leq 8 \Leftrightarrow m \geq -8$.

Mà m nguyên âm nên ta có: $m \in \{-8; -7; -6; -5; -4; -3; -2; -1\}$.

Vậy có 8 giá trị nguyên âm của m để hàm số $y = x + 5 + \frac{1-m}{x-2}$ đồng biến trên $[5; +\infty)$.

Câu 59: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{3}{4}x^4 - (m-1)x^2 - \frac{1}{4x^4}$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^3 - 2(m-1)x + \frac{1}{x^5}$.

Hàm số đồng biến trong khoảng $(0; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với $\forall x \in (0; +\infty)$.

$y' \geq 0 \Leftrightarrow 2(m-1) \leq 3x^2 + \frac{1}{x^6}$.

Xét $g(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^6}$ với $\forall x \in (0; +\infty)$. Ta có $g'(x) = 6x - \frac{6}{x^7}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Bảng biến thiên:

x	0	1	$+\infty$	
y'		-	0	+
y	$+\infty$		4	$+\infty$

$$2(m-1) \leq g(x) \Leftrightarrow 2(m-1) \leq 4 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, 3\}$.

Vậy có 3 giá trị m nguyên dương thỏa mãn bài toán.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị nguyên $m \in (-10; 10)$ để hàm số $y = m^2 x^4 - 2(4m-1)x^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 15.

B. 6.

C. 7.

D. 16.

Lời giải

+ Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = 2x^2 + 1$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên hàm số cũng đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$, do đó $m = 0$ thỏa mãn.

+ Với $m \neq 0$, hàm số đã cho làm hàm số trùng phương với hệ số $a = m^2 > 0$.

$$y' = 4m^2 x^3 - 4(4m-1)x = 4x(m^2 x^2 - 4m + 1), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{4m-1}{m^2} \end{cases}$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì phương trình $x^2 = \frac{4m-1}{m^2}$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 sao cho $-1 \leq x_1 < x_2 \leq 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4m-1 \leq 0 \\ 4m-1 > 0 \\ \sqrt{\frac{4m-1}{m^2}} \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{4} \\ m > \frac{1}{4} \\ -m^2 + 4m - 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} < m < 2 - \sqrt{3} \\ m > 2 + \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy điều kiện để hàm số đồng biến trên $(1; +\infty)$ là $m \in (-\infty; 2 - \sqrt{3}) \cup (2 + \sqrt{3}; +\infty)$.

Vì m nguyên, $m \in (-10; 10)$ nên $m \in \{-9; -8; \dots; 0; 4; 5; \dots; 9\}$, có 16 giá trị.

Câu 61: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2018; 2018]$ để hàm số $y = \sqrt{x^2 + 1} - mx - 1$ đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.

A. 2017.

B. 2019.

C. 2020.

D. 2018.

Lời giải

$TXĐ: D = \mathbb{R}$.

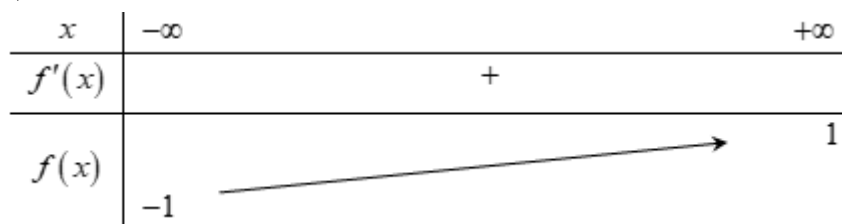
$$y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - m.$$

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1).$

Xét $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ trên $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

$f'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.



Ta có: $m \leq \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq -1.$

Mặt khác $m \in [-2018; 2018] \Rightarrow m \in [-2018; -1].$

Vậy có 2018 số nguyên m thỏa điều kiện.

Câu 62: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$.

A. 6.

B. 7.

C. 5.

D. 4.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \frac{x^2 - 2x - 2 - m}{(x - 1)^2}.$

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và đồng biến trên khoảng $(4; 6)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} y' \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ y' \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 2 - m \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ x^2 - 2x - 2 - m \geq 0, \forall x \in (4; 6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (1; 3) \\ m \leq x^2 - 2x - 2, \forall x \in (4; 6) \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = x^2 - 2x - 2, g'(x) = 2x - 2$ ta có bảng biến thiên của $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	1	3	4	6	$+\infty$
$g'(x)$	-	0		+		
$g(x)$	$+\infty$					$+\infty$

Từ bảng biến thiên của $g(x)$ ta có (*) $\Leftrightarrow 3 \leq m \leq 6$, và vì m là số nguyên nên chọn $m \in \{3; 4; 5; 6\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 63: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

A. Vô số.

B. 2.

C. 1.

D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có:

Hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m(2\sin x + 1) + \cos x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2m\sin x + \cos x \leq 1 - m \quad (1); \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta lại có:

$$2m\sin x + \cos x \leq \sqrt{(4m^2 + 1)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = \sqrt{4m^2 + 1}$$

$$\Rightarrow 2m\sin x + \cos x \leq \sqrt{4m^2 + 1}. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } 2m\cos x = \sin x$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{4m^2 + 1} \leq 1 - m \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ 4m^2 + 1 \leq 1 - 2m + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ 3m^2 + 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-2}{3} \leq m \leq 0$$

Câu 64: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 18.

B. 19.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

Chọn D

Xét $f(x) = x^3 - mx^2 + 12x + 2m$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2mx + 12$ và $f(1) = 13 + m$.

Để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì có hai trường hợp sau

Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ và $f(1) \leq 0$.

Điều này không xảy ra vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - mx^2 + 12x + 2m) = +\infty$.

Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $f(1) \geq 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx + 12 \geq 0, \forall x > 1 \\ 13 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}, \forall x > 1 \\ m \geq -13 \end{cases} \quad (*)$$

Xét $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$: $g'(x) = \frac{3}{2} - \frac{6}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$.

Bảng biến thiên:

x	1		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$\frac{15}{2}$				

Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}, \forall x > 1 \Leftrightarrow m \leq 6$.

Kết hợp (*) suy ra $-13 \leq m \leq 6$. Vì m nguyên nên $m \in \{-13; -12; -11; \dots; 5; 6\}$. Vậy có 20 giá trị nguyên của m .

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-8; 8)$ sao cho hàm số $y = |-2x^3 + 3mx - 2|$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

A. 10.

B. 9.

C. 8.

D. 11.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = -2x^3 + 3mx - 2$$

$$f'(x) = -6x^2 + 3m$$

Nếu $m \leq 0$: $f'(x) \leq 0, \forall x \Rightarrow$ hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Leftrightarrow f(1) \leq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{4}{3} \Rightarrow m \leq 0$.

Nếu $m > 0$: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{m}{6}}$

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{m}{2}}$	$\sqrt{\frac{m}{2}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$-2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$	$2m\sqrt{\frac{m}{2}}-2$	$-\infty$

$$\text{Hàm số } y = |f(x)| \text{ đồng biến trên } (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}} > 1 \\ f\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\right) = 0 \\ \sqrt{\frac{m}{2}} = 1 \\ f\left(\sqrt{\frac{m}{2}}\right) \leq 0 \\ \sqrt{\frac{m}{2}} < 1 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{\frac{m}{2}} > 1 \\ m = \sqrt[3]{2} \quad (L) \\ m = 2 \quad (L) \\ 2m\sqrt{\frac{m}{2}} - 2 \leq 0 \\ m < 2 \\ m \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Rightarrow 0 < m \leq \frac{4}{3}.$$

$$m \in \mathbb{Z}, m \in (-8; 8) \Rightarrow m \in \{-7; -6; \dots; -1; 0; 1\}.$$

Câu 66: Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$. Tổng giá trị các phần tử của T bằng

- A.** 9. **B.** 45. **C.** 55. **D.** 36.

Lời giải

Chọn B

+ Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

+ Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Theo đề $m > 0$ nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 9$

Vì m nguyên dương nên $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

Vậy Tổng giá trị các phần tử của T bằng $\frac{9}{2}(1+9) = 45$.

Câu 67: Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \frac{m - \sin x}{\cos^2 x}$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$.

A. $m \geq 1$.

B. $m \leq 2$.

C. $m \leq \frac{5}{4}$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có
$$y' = \frac{-\cos^2 x + 2m \sin x - 2 \sin^2 x}{\cos^3 x} = \frac{-1 + 2m \sin x - \sin^2 x}{\cos^3 x}$$

Để hàm số nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$ thì

$$y' \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow -\sin^2 x + 2m \sin x - 1 \leq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right), \text{ vì } \cos^3 x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \quad (1)$$

Đặt $\sin x = t, t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Khi đó $(1) \Leftrightarrow -t^2 + 2mt - 1 \leq 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \leq \frac{t^2 + 1}{2t}, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \quad (2)$

Ta xét hàm $f(t) = \frac{t^2 + 1}{2t}, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$

Ta có $f'(t) = \frac{2(t^2 - 1)}{4t^2} < 0, \forall t \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Bảng biến thiên

t	0	$\frac{1}{2}$
$f'(t)$		-
$f(t)$	$+\infty$	$\frac{5}{4}$

Từ bảng biến thiên suy ra $(2) \Leftrightarrow m \leq \frac{5}{4}$.

Câu 68: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = 3x^2 + 6x + 4, \forall x \in \mathbb{R}$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên thuộc $(-2020; 2020)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - (2m + 4)x - 5$ nghịch biến trên $(0; 2)$?

- A.** 2008. **B.** 2007. **C.** 2018. **D.** 2019.

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = f'(x) - (2m + 4)$.

Hàm số $g(x) = f(x) - (2m + 4)x - 5$ nghịch biến trên $(0; 2)$ khi $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow f'(x) - (2m + 4) \leq 0, \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 4 \leq 2m + 4, \forall x \in (0; 2).$$

Xét hàm số $h(x) = 3x^2 + 6x + 4 \Rightarrow h'(x) = 6x + 6$. Ta có BBT:

x	0	2
$h'(x)$	+	
$h(x)$	4	28

Vậy $2m + 4 \geq 28 \Leftrightarrow m \geq 12$. Vì m nguyên thuộc $(-2020; 2020)$ nên có 2008 giá trị thỏa mãn.

Câu 69: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 10]$ sao cho hàm số

$$y = \frac{x^4}{4} - \frac{mx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + mx + 2020 \text{ nghịch biến trên khoảng } (0; 1)?$$

- A.** 12. **B.** 11. **C.** 9. **D.** 10.

Lời giải.

Chọn B

Ta có $y' = x^3 - mx^2 - x + m$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$ khi và chỉ khi

$$y' \leq 0, \forall x \in (0; 1) \text{ hay } x^3 - x \leq m(x^2 - 1), \forall x \in (0; 1).$$

Vì $\forall x \in (0; 1): x^2 - 1 < 0$ nên $x^3 - x \leq m(x^2 - 1), \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq x, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq 0$.

Mặt khác $m \in [-10; 10] \cap \mathbb{Z}$ nên có $0 - (-10) = 11$ giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 70: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $f(x) = m(2020 + x - 2\cos x) + \sin x - x$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** Vô số. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f(x) = \sin x - 2m \cos x + (m-1)x + 2020m$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$.

Cần tìm m nguyên để $f'(x) = \cos x + 2m \sin x + m - 1 \leq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} [\cos x + 2m \sin x + m - 1] \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+4m^2} + m - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \sqrt{1+4m^2} \leq 1 - m$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m \geq 0 \\ 1 + 4m^2 \leq 1 - 2m + m^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ -\frac{2}{3} \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq m \leq 0. \text{ Kết hợp } m \text{ nguyên có } m = 0.$$

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $f(x); f'(x)$

1. Định lý cực trị

• **Điều kiện cần (định lý 1):** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

• **Điều kiện đủ (định lý 2):**

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

• **Định lý 3:** Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

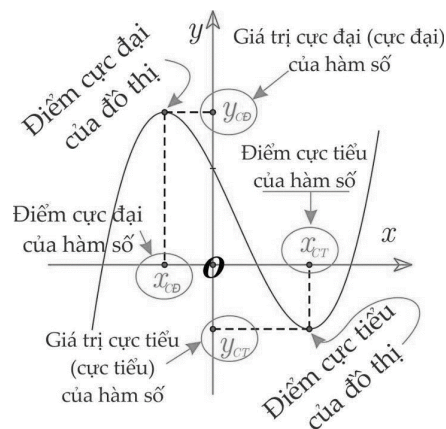
Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

• Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là x_0 , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là $f(x_0)$

(hay y_{CB} hoặc y_{CT}). Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $M(x_0; f(x_0))$.

• Nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$.



Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số có giá trị cực đại bằng 1. **B.** Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng -1 .
C. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$. **D.** Hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y	-1	$+\infty$	5	10

Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
y'	$+$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	0	-1	$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.** Hàm số có đúng 2 cực trị.
B. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.
C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .
D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

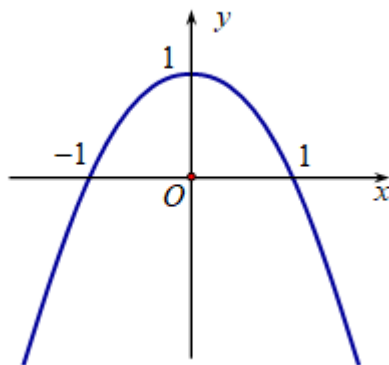
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng

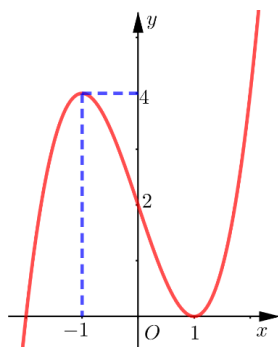
- A.** $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$. **B.** $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
C. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. **D.** $f(x)$ có ba điểm cực trị.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	3	-2	$+\infty$	

- A.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$. **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.
C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$. **D.** Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là:

- A.** 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 3. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 2.

DẠNG 2. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BIỂU THỨC $f(x); f'(x)$

★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

✎ **Phương pháp:** Sử dụng 2 qui tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dung định lý 1

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm $x_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dung định lý 2

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu $x_i, (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4.** Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i :
 + Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .
 + Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A.** $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x-1)(x-2), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Câu 11: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2019), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A.** 1008 **B.** 1010 **C.** 1009 **D.** 1011

Câu 12: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là?

- A.** 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.

- Câu 14:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4
- Câu 15:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là
A. 5. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 16:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x^2-3)(x^4-9)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là
A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 17:** Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng
A. -1. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 0.
- Câu 18:** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:
A. 3 **B.** 1 **C.** 0 **D.** 2
- Câu 19:** Cho hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. Cực tiểu của hàm số bằng -3 **B.** Cực tiểu của hàm số bằng 1
C. Cực tiểu của hàm số bằng -6 **D.** Cực tiểu của hàm số bằng 2
- Câu 20:** Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng
A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.
- Câu 21:** Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.
A. $y_{CT} = -6$ **B.** $y_{CT} = -1$ **C.** $y_{CT} = -2$ **D.** $y_{CT} = 1$
- Câu 22:** Giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là:
A. $y_{CT} = 0$. **B.** $y_{CT} = 3$. **C.** $y_{CT} = 2$. **D.** $y_{CT} = 4$.
- Câu 23:** Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?
A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.
- Câu 24:** Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?
A. $y = \frac{x^2+1}{x}$ **B.** $y = \frac{2x-2}{x+1}$ **C.** $y = x^2 - 2x + 1$ **D.** $y = -x^3 + x + 1$
- Câu 25:** Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$.
A. -2. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 1.
- Câu 26:** Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2019m$ ($m \in \mathbb{R}$) đạt cực tiểu tại điểm:
A. $x = 3$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.
- Câu 27:** Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm
A. $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.

Câu 28: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

- A. 2. B. 4. C. 3. D. 1.

Câu 29: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ là

- A. $(-1; -8)$ B. $(0; -5)$ C. $\left(\frac{5}{3}; \frac{40}{27}\right)$ D. $(1; 0)$

Câu 30: Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

- A. $y = \frac{2x-3}{x+2}$. B. $y = x^4$. C. $y = -x^3 + x$. D. $y = |x+2|$.

DẠNG 3. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $x = x_0$

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0) = 0 \Rightarrow m$?

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\begin{cases} y'' > 0 \rightarrow x_0 = CT \\ y'' < 0 \rightarrow x_0 = CD \end{cases}$

DẠNG 3.1 HÀM SỐ BẬC 3

Câu 31: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

- A. $m = -1$ B. $m = -7$ C. $m = 5$ D. $m = 1$

Câu 32: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

- A. không tồn tại m . B. $m = \pm 1$. C. $m = 1$. D. $m \in \{1; 2\}$.

Câu 33: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.

- A. $m = 0$. B. $m > 4$. C. $0 \leq m < 4$. D. $0 < m \leq 4$.

Câu 34: Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$

- A. $m = 1, m = 5$. B. $m = 5$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Câu 35: Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.

- A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Câu 36: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$?

- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. Không tồn tại m . D. $m = -1$.

Câu 37: Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là.

- A. $\{1\}$. B. $\{-1\}$. C. $\emptyset$. D. R .

DẠNG 3.2 HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC CAO, HÀM CĂN THỨC ...

Câu 38: Xác định tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x = 1$.

- A. $m = -2$. B. $m = 2$. C. $m = -6$. D. $m = 6$.

Câu 39: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

- A. $m = 0$. B. $m = -2$. C. $m = 1$. D. $m = 2$.

Câu 40: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$ đạt cực đại tại $x = 0$ là:

- A. $m \in \mathbb{R}$. B. $m < 0$. C. Không tồn tại m . D. $m > 0$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số $y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m+5$ đạt cực đại tại $x = 0$?

- A. 101. B. 2016. C. 100. D. 10.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{12} + (m-5)x^7 + (m^2-25)x^6 + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$?

- A. 8 B. 9 C. Vô số D. 10

Câu 43: Cho hàm số $y = x^6 + (4+m)x^5 + (16-m^2)x^4 + 2$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên dương để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 10. B. 9. C. 6. D. 3.

DẠNG 4. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ CÓ N CỰC TRỊ

• Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.

• Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

+ Hàm số có hai điểm cực trị khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

+ Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

• Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$.

+ Hàm số có ba cực trị khi $ab < 0$. + Hàm số có 1 cực trị khi $ab \geq 0$.

Câu 44: Biết rằng hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $ab \leq 0$. B. $ab < 0$. C. $ab > 0$. D. $ab \geq 0$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị

- A. $m \in (-\infty; 6) \cup (0; +\infty)$. B. $m \in (-6; 0)$. C. $m \in [-6; 0)$. D. $m \in [-6; 0]$.

Câu 46: Đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m-3)x^2 + m+1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

- A. $m \geq 3$. B. $m > 3$. C. $m < 3$. D. $m \leq 3$.

Câu 47: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

- A. $m > 0$. B. $m \geq 0$. C. $m < 0$. D. $m \leq 0$.

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị?

- A. 2019. B. 2020. C. 2018. D. 2017.

- Câu 49:** Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là
A. 2. **B.** 4. **C.** 0. **D.** Vô số.
- Câu 50:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.
A. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$. **B.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; 1\right] \cup \{-1\}$. **C.** $m \in \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$. **D.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.
- Câu 51:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?
A. 0. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.
- Câu 52:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.
A. $0 < m < 2$. **B.** $m > 2$. **C.** $m > 0$. **D.** $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.
- Câu 53:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu?
A. $m < \frac{3}{2}$. **B.** $m < -\frac{3}{2}$. **C.** $m \leq \frac{3}{2}$. **D.** $m > \frac{3}{2}$.
- Câu 54:** Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là:
A. $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ **B.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ **C.** $(-1; 2)$ **D.** $[-1; 2]$
- Câu 55:** Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là
A. $(0; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 0]$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.
- Câu 56:** Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.
A. Không tồn tại m . **B.** $m \geq 0$. **C.** $m \geq -\frac{1}{2}$. **D.** $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.
- Câu 57:** Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.
A. 6. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.
- Câu 58:** Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại?
A. 4 **B.** 3 **C.** 2 **D.** 5
- Câu 59:** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m+18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?
A. 7. **B.** 5. **C.** 8. **D.** 6.

DẠNG 5. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA 2 ĐIỂM CỰC TRỊ

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y cho y'

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Câu 60: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

A. $m = \frac{3}{4}$. **B.** $m = \frac{1}{2}$. **C.** $m = -\frac{3}{4}$. **D.** $m = -\frac{1}{2}$.

Câu 61: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB .

A. $P(1;0)$. **B.** $M(0;-1)$. **C.** $N(1;-10)$. **D.** $Q(-1;10)$.

Câu 62: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $-\frac{1}{6}$. **C.** $m = \frac{1}{6}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Câu 63: Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y = -4x$.

A. $m = -\frac{1}{3}$. **B.** $m = \frac{2}{3}$. **C.** $m = -\frac{2}{3}$. **D.** $m = 1$.

Câu 64: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A, B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là

A. $y = 2x - 1$. **B.** $y = -2x + 1$. **C.** $y = -x + 2$. **D.** $y = x - 2$.

Câu 65: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9;-5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m = -1$. **B.** $m = -5$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 2$.

Câu 66: Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + m$ đi qua điểm $M(-3;7)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 67: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $m = \frac{1}{6}$. **B.** $-\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $-\frac{1}{6}$.

Câu 68: Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

A. $-\frac{16}{25}$. **B.** -9. **C.** $-\frac{25}{9}$. **D.** 1.

Câu 69: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A , B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = -\sqrt{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = -\sqrt{2}; m = \sqrt{2}$.

DẠNG 6. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

★ **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

✎ **Phương pháp:**

— **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

— **Bước 2.** Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = (2b)^2 - 4.3ac > 0 \end{cases}$

và giải hệ này sẽ tìm được $m \in D_1$.

— **Bước 3.** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo Viét, ta có:
$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

— **Bước 4.** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P . Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5.** Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

📖 **Lưu ý:**

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

• Nếu giải được nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y = f(x; m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và **B.**

• Nếu tìm không được nghiệm $y' = 0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (cùng phía, khác phía d):

Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:

Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d .
- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d .

Trường hợp đặc biệt:

- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.
- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhầm được nghiệm).

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**đối xứng và cách đều**):

★ **Bài toán 1.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Gọi $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ
$$\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2.$$

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ **Bài toán 2.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

☞ **Lưu ý:** Để 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB .

- Câu 70:** Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?
A. $m = \frac{3}{2}$. **B.** $m = 3$. **C.** $m = \frac{1}{2}$. **D.** $m = \frac{5}{2}$.
- Câu 71:** Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.
A. 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.
- Câu 72:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?
A. 4. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 3.
- Câu 73:** Cho hàm số $y = x^3 - (m + 6)x^2 + (2m + 9)x - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.
A. $\begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq -6 \end{cases}$. **B.** $m \geq -2$. **C.** $m \leq -6$. **D.** $\begin{cases} m > -2 \\ m < -6 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}$.
- Câu 74:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m - 1)x^2 + 3(m - 2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng
A. $\frac{40}{9}$ **B.** $\frac{22}{9}$ **C.** $\frac{25}{4}$ **D.** $\frac{8}{3}$
- Câu 75:** Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.
A. $m \in (-1; 1]$. **B.** $m \in (-3; -1]$. **C.** $m \in (3; 5]$. **D.** $m \in (1; 3]$.
- Câu 76:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox .
A. 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.
- Câu 77:** Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?
A. 18. **B.** 19. **C.** 21. **D.** 20.
- Câu 78:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m + 1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?
A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

- Câu 79:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$
A. $m = -3$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$
- Câu 80:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?
A. 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.
- Câu 81:** Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.
A. $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in (3; 4)$. **C.** $m \in (1; 3)$. **D.** $m \in (-1; 4)$.
- Câu 82:** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1; 4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.
A. 6. **B.** 5. **C.** 3. **D.** 4
- Câu 83:** Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.
A. $m \in (-1; 3) \cup (3; 4)$. **B.** $m \in (1; 3)$. **C.** $m \in (3; 4)$. **D.** $m \in (-1; 4)$.
- Câu 84:** Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ đồng thời $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$ là:
A. -21 **B.** -39 **C.** -8 **D.** $3\sqrt{11} - 13$
- Câu 85:** Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.
A. $T = \sqrt{51} + 6$ **B.** $T = \sqrt{61} + 3$ **C.** $T = \sqrt{61} - 3$ **D.** $T = \sqrt{51} - 6$
- Câu 86:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 4$. Số phần tử của S bằng
A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.
- Câu 87:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất?
A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** không tồn tại
- Câu 88:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1; 1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.
A. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$ **B.** $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ **C.** $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$ **D.** $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$

- Câu 89:** Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có hai điểm cực trị $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$ bằng
- A. $-\frac{49}{4}$ B. $-\frac{25}{4}$ C. $-\frac{841}{36}$ D. $-\frac{7}{6}$
- Câu 90:** Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là
- A. $\frac{4}{17}$ B. $\frac{14}{17}$ C. $-\frac{2}{17}$ D. $\frac{20}{17}$
- Câu 91:** Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m) . Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1; 0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng
- A. $m_0 \in (3; 4)$ B. $m_0 \in (1; 2)$ C. $m_0 \in (0; 1)$ D. $m_0 \in (2; 3)$
- Câu 92:** Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $m_0 \in (-1; 7)$ B. $m_0 \in (7; 10)$ C. $m_0 \in (-15; -7)$ D. $m_0 \in (-7; -1)$
- Câu 93:** Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 4$ và $M(x_0; 0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T = 4x_0 + 2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?
- A. $T = 2017$ B. $T = 2019$ C. $T = 2016$ D. $T = 2018$
- Câu 94:** Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là
- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 0 D. $\frac{1}{4}$
- Câu 95:** Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho độ dài $AB = \sqrt{2}$.
- A. $m = 0$ B. $m = 0$ hoặc $m = 2$ C. $m = 1$ D. $m = 2$

DẠNG 7. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Một số công thức tính nhanh “thường gặp”

liên quan cực trị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

1 cực trị: $ab \geq 0$		3 cực trị: $ab < 0$	
: 1 cực tiểu	1 cực đại	: 1 cực đại, tiểu	2 cực đại, tiểu

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gọi $\widehat{BAC} = \alpha$, luôn có: $8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C: x^2 + y^2 - (c+n)x + c.n = 0$, với $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$ và bán

kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \left| \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right|$

Câu 96: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

- A. $S = 3$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Câu 97: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$?

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 4$. C. $m = \pm 4$. D. $m = \pm\sqrt{2}$.

Câu 98: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C thỏa mãn $ABCD$ là hình thoi với $D(0; -3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$. B. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$. C. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. D. $m \in (2; 3)$.

Câu 99: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là

- A. 2. B. 0. C. 4. D. 1.

Câu 100: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

- A. $\frac{5 - \sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$. C. $2 + \sqrt{5}$. D. $-1 + \sqrt{5}$.

Câu 101: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S .

- A. 1. B. 0. C. 2. D. 3.

Câu 102: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

- A. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$. B. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. C. $m \in (2; 3)$. D. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$.

Câu 103: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

- A. 1. B. $\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $\sqrt{2}$.

Câu 104: Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

- A. $m = 1$ hoặc $m = \frac{17}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 4$. D. $m = \frac{17}{2}$.

Câu 105: Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $m_0 \in (-1; 0]$. B. $m_0 \in (-2; -1]$. C. $m_0 \in (-\infty; -2]$. D. $m_0 \in (-1; 0)$.

DẠNG 8. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 2 TRÊN BẬC 1 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN YÊU CẦU BÀI TOÁN

Câu 106: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

- A. $y = 2x + 2$. B. $y = x + 1$. C. $y = 2x + 1$. D. $y = 1 - x$.

Câu 107: Điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu là

- A. $m < 1$. B. $m > -1$. C. $m < 2$. D. $m > -2$.

Câu 108: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2m}{x + 1}$ có hai điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O . Tổng tất cả các phần tử của S bằng

- A. 9. B. 1. C. 4. D. 5.

Câu 109: Biết rằng đồ thị $(H): y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A, B . Hãy tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0; 0)$ đến đường thẳng AB .

- A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$. D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Câu 110: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2}{x - 1}$ có hai điểm cực trị A, B . Khi $\angle AOB = 90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

- A. $\frac{1}{16}$. B. 8. C. $\frac{1}{8}$. D. 16.

Câu 111: Với tham số m , đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{x + 1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $m > 2$. B. $0 < m < 1$. C. $1 < m < 2$. D. $m < 0$.

Câu 112: Giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0 = 2$ là:

- A. $m = -1$. B. $m = -3$. C. $m = 1$. D. $m = 3$.

Câu 113: Để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$ thì m thuộc khoảng nào?

- A. $(0; 2)$. B. $(-4; -2)$. C. $(-2; 0)$. D. $(2; 4)$.

Câu 114: Cho hàm số $y = x + p + \frac{q}{x + 1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2; -2)$. Tính pq .

- A. $pq = 2$. B. $pq = \frac{1}{2}$. C. $pq = \sqrt{3}$. D. $pq = 1$.

Câu 115: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

- A. $m = 7$. B. $m = 5$. C. $m = -9$. D. $m = -5$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 2: CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.

DẠNG 1. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ DỰA VÀO BẢNG BIẾN THIÊN, ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ $f(x); f'(x)$

1. Định lý cực trị

• **Điều kiện cần (định lý 1):** Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ và đạt cực đại (hoặc cực tiểu) tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.

• **Điều kiện đủ (định lý 2):**

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm x_0 .

Nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x đi qua điểm x_0 (theo chiều tăng) thì hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm x_0 .

• **Định lý 3:** Giả sử $y = f(x)$ có đạo hàm cấp 2 trong khoảng $(x_0 - h; x_0 + h)$, với $h > 0$. Khi đó:

Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) > 0$ thì x_0 là điểm cực tiểu.

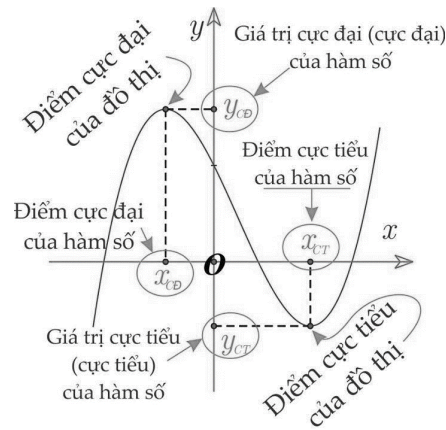
Nếu $y'(x_0) = 0$, $y''(x_0) < 0$ thì x_0 là điểm cực đại.

- Các THUẬT NGỮ cần nhớ

• Điểm cực đại (cực tiểu) của hàm số là x_0 , giá trị cực đại (cực tiểu) của hàm số là $f(x_0)$

(hay y_{CB} hoặc y_{CT}). Điểm cực trị của đồ thị hàm số là $M(x_0; f(x_0))$.

• Nếu $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x) \Rightarrow \begin{cases} y'(x_0) = 0 \\ M(x_0; y_0) \in y = f(x) \end{cases}$.



Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	$+$
y	$-\infty$	2	-1	$+\infty$

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số có giá trị cực đại bằng 1. **B.** Hàm số có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$ bằng -1 .
C. Hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$. **D.** Hàm số chỉ có một điểm cực trị.

Lời giải

1. Dạng toán: Đây là dạng toán tìm cực trị của hàm số dựa vào bảng biến thiên

2. Phương pháp:

Áp dụng định nghĩa; định lý về cực trị của hàm số.

Áp dụng định nghĩa; quy tắc tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số.

3. Hướng giải:

B1: Xác định cực trị theo tính chất sau:

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

Điểm $x_0 \in D$ là điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ khi $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định và $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua x_0 .

B2: Xác định giá trị lớn nhất nhỏ nhất bằng định nghĩa

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên D .

- $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = M \end{cases} \Rightarrow \max_{x \in D} f(x) = M.$
- $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D : f(x_0) = m \end{cases} \Rightarrow \min_D f(x) = m.$

B3: Chọn ra đáp án bài toán.

Từ đó, ta có thể giải bài toán cụ thể như sau:

Chọn C

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 3$.

Phương án **A** sai vì giá trị cực đại của hàm số bằng 2.

Phương án **B** sai vì hàm số không có giá trị nhỏ nhất trên $\mathbb{R}$, $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty\right)$.

Học sinh thường nhầm giá trị cực tiểu bằng -1 là giá trị nhỏ nhất.

Phương án **D** sai vì hàm số có hai điểm cực trị.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+		-	0	+	
y			$+\infty$		5		10

Tìm số điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$

A. 1.

B. 0.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn A

Từ bảng biến thiên của đồ thị hàm số ta thấy hàm số có đúng một cực trị. **Chọn đáp án A**

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		+		-	0	+	
y			0		-1		$+\infty$

Khẳng định nào sau đây là **sai**?

A. Hàm số có đúng 2 cực trị.

B. Hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

C. Hàm số có giá trị cực tiểu bằng -1 .

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và đạt cực tiểu tại $x = 1$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ và giá trị cực đại bằng 0 ; hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng -1 . Do đó khẳng định sai là hàm số có đúng 1 điểm cực trị.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	2	4	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số $y = f(x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

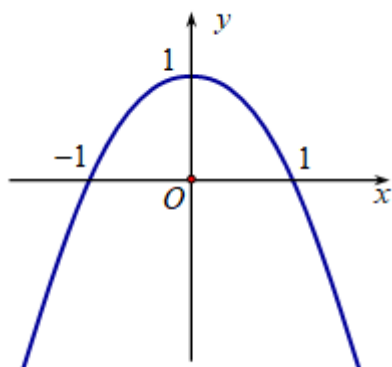
Lời giải

Chọn D

Hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$.

Từ bảng xét dấu ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi qua $x = -1, x = 0, x = 2, x = 4$ nên hàm số đã cho có 4 điểm cực trị.

Câu 5: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ được cho như hình vẽ.



Chọn khẳng định đúng

- A. $f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$. B. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.
C. $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. D. $f(x)$ có ba điểm cực trị.

Lời giải

Chọn B

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$		

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Khẳng định nào sau đây là đúng?

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Diagram illustrating the behavior of the function y as x approaches the critical points and boundaries:

- As $x \rightarrow -\infty$, $y \rightarrow -\infty$.
- As $x \rightarrow 2^-$, $y \rightarrow 3$.
- As $x \rightarrow 2^+$, $y \rightarrow -2$.
- As $x \rightarrow 4^-$, $y \rightarrow -2$.
- As $x \rightarrow 4^+$, $y \rightarrow +\infty$.

A. Hàm số đạt cực đại tại $x = 4$.

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$.

C. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

D. Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.

Lời giải

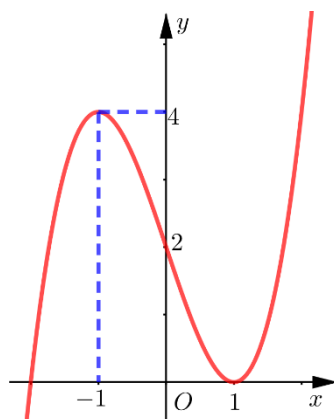
Chọn D

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$, giá trị cực đại $y_{CD} = 3$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 4$, giá trị cực đại $y_{CT} = -2$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau:



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) - 5x$ là:

A. 2.

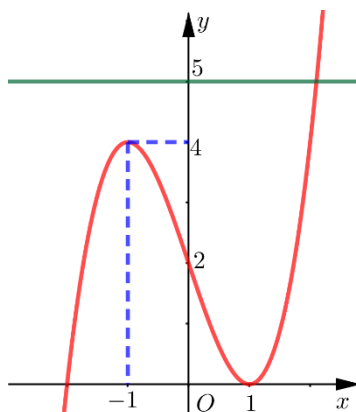
B. 3.

C. 4.

D. 1.

Lời giải

Chọn D



Ta có: $y' = f'(x) - 5$; $y = 0 \Leftrightarrow f'(x) = 5$. Dấu đạo hàm sai y'

Dựa vào đồ thị, suy ra phương trình $f'(x) = 5$ có nghiệm duy nhất và đó là nghiệm đơn.

Nghĩa là phương trình $y' = 0$ có nghiệm duy nhất và y' đổi dấu khi qua nghiệm này.

Vậy hàm số $y = f(x) - 5x$ có một điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số đã cho có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 3.

B. 1.

C. 4.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

Cách 1.

Nhìn bảng xét dấu đạo hàm ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ như sau

x	$-\infty$	-2	0	1	3	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$
$f(x)$						

Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

Cách 2.

Từ bảng xét dấu của $f'(x)$, ta thấy $f'(x)$ có 4 nghiệm phân biệt, đổi dấu khi qua các nghiệm $x = -2$, $x = 0$, $x = 1$ và $f'(x)$ không đổi dấu khi qua $x = 3$. Vậy hàm số đã cho có 3 điểm cực trị.

DẠNG 2. TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ KHI BIẾT BIỂU THỨC $f(x); f'(x)$

★ **Bài toán:** Tìm các điểm cực đại, cực tiểu (nếu có) của hàm số $y = f(x)$.

✎ **Phương pháp:** Sử dụng 2 qui tắc tìm cực trị sau:

Quy tắc I: sử dụng nội dung định lý 1

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Tìm các điểm x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) mà tại đó đạo hàm bằng 0 hoặc không xác định.
- **Bước 3.** Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên.
- **Bước 4.** Từ bảng biến thiên, suy ra các điểm cực trị (dựa vào nội dung định lý 1).

Quy tắc II: sử dụng nội dung định lý 2

- **Bước 1.** Tìm tập xác định D của hàm số.
- **Bước 2.** Tính đạo hàm $y' = f'(x)$. Giải phương trình $f'(x) = 0$ và kí hiệu x_i , ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) là các nghiệm của nó.
- **Bước 3.** Tính $f''(x)$ và $f''(x_i)$.
- **Bước 4.** Dựa vào dấu của $y''(x_i)$ suy ra tính chất cực trị của điểm x_i :
+ Nếu $f''(x_i) < 0$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_i .

+ Nếu $f''(x_i) > 0$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_i .

Câu 9: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

- A.** $x = 2$. **B.** $x = 3$. **C.** $x = 0$. **D.** $x = 1$.

Lời giải

Ta có

$$f'(x) = x(1-x)^2(3-x)^3(x-2)^4 \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu đạo hàm.

x	$-\infty$	0	1	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	+	0	-

Suy ra hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^3(x-1)(x-2)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 5. **D.** 2.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3(x-1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	

Dựa vào bảng xét dấu nhận thấy hàm số $f(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 11: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2019)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực tiểu?

- A.** 1008 **B.** 1010 **C.** 1009 **D.** 1011

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có: } f'(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-2019) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ \dots \\ x = 2019 \end{cases}$$

$f'(x) = 0$ có 2019 nghiệm bội lẻ và hệ số a dương nên có 1010 cực tiểu

Câu 12: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x-2)^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Hỏi $f(x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

A. 2.

B. 0.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ x-1 = 0 \\ (x-2)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$					$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 1 điểm cực đại.

Câu 13: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x(x-1)(x+2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số là?

A. 5.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}. \text{ Do } x = 0, x = 1 \text{ là nghiệm đơn, còn các nghiệm và } x = -2 \text{ là nghiệm}$$

bội chẵn nên $f'(x)$ chỉ đổi khi đi qua $x = 0, x = 1$.

$$\Rightarrow \text{Hàm số (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m < -2 \vee m > 2 \text{ có 2 điểm cực trị.}$$

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3

B. 5

C. 2

D. 4

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$					$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2.

Câu 15: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)(x-2)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 5. B. 2. C. 1. D. 3.

Lời giải

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)(x-2)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	+

Ta thấy $f'(x)$ đổi dấu khi đi qua các điểm $x = 0$ và $x = 1$, do đó hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.

Câu 16: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)(x^2-3)(x^4-9)$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là

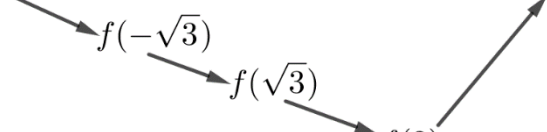
- A. 3. B. 4. C. 2. D. 1.

Lời giải

$$f'(x) = (x-2)(x^2-3)^2(x^2+3) = (x-2)(x-\sqrt{3})^2(x+\sqrt{3})^2(x^2+3)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+\sqrt{3})^2(x-\sqrt{3})^2(x^2+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ x = \sqrt{3} \\ x = 2 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Từ bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$, ta thấy hàm số $y = f(x)$ có đúng 1 điểm cực trị.

Câu 17: Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-x-2)(x+1)^4$ thì tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng

A. -1 .

B. 2 .

C. 1 .

D. 0 .

Lời giải

Có $f'(x) = x^2(x-2)^2(x+1)^5$. Ta thấy $f'(x)$ chỉ đổi dấu qua nghiệm $x = -1$ nên hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị là $x = -1$.

Vậy tổng các điểm cực trị của hàm số $f(x)$ bằng -1 .

Câu 18: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x+3)$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là:

A. 3

B. 1

C. 0

D. 2

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = -3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho có 2 điểm cực trị.

Câu 19: Cho hàm số $y = \frac{x^2+3}{x+1}$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. Cực tiểu của hàm số bằng -3

B. Cực tiểu của hàm số bằng 1

C. Cực tiểu của hàm số bằng -6

D. Cực tiểu của hàm số bằng 2

Lời giải

Chọn D

□ **Cách 1.**

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

Lập bảng biến thiên. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2 .

□ **Cách 2.**

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 1 \end{cases}$

$y'' = \frac{8}{(x+1)^3}$. Khi đó: $y''(1) = \frac{1}{2} > 0$; $y''(-3) = -\frac{1}{2} < 0$.

Nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ và giá trị cực tiểu bằng 2 .

Câu 20: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5 .

B. 1 .

C. 3 .

D. -1 .

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$		4		0		$+\infty$

Khi đó: $x_{CD} = 1 \Rightarrow y_{CD} = 4 \Rightarrow x_{CD} + y_{CD} = 5$.

Câu 21: Tìm giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = -x^3 + 3x - 4$.

A. $y_{CT} = -6$

B. $y_{CT} = -1$

C. $y_{CT} = -2$

D. $y_{CT} = 1$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$; $y' = -3x^2 + 3$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$		-6		-2		$-\infty$

Vậy $y_{CD} = y(1) = -2$; $y_{CT} = y(-1) = -6$.

Câu 22: Giá trị cực tiểu y_{CT} của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4$ là:

A. $y_{CT} = 0$.

B. $y_{CT} = 3$.

C. $y_{CT} = 2$.

D. $y_{CT} = 4$.

Lời giải

Ta có $y' = 3x^2 - 6x$, $y'' = 6x - 6$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$y''(0) = -6, y''(2) = 6$$

Do đó hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2 \Rightarrow y_{CT} = y(2) = 0$.

Câu 23: Đồ thị hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có bao nhiêu điểm cực trị có tung độ là số dương?

A. 3.

B. 1.

C. 2.

D. 0.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 2x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 1 \\ x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \end{cases}$$

Suy ra đồ thị có hàm số $y = x^4 - x^2 + 1$ có 3 điểm cực trị có tung độ là số dương.

Câu 24: Hàm số nào dưới đây **không** có cực trị?

A. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$

B. $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$

C. $y = x^2 - 2x + 1$

D. $y = -x^3 + x + 1$

Lời giải

+ Xét hàm số $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $y' = \frac{4}{(x+1)^2} > 0, \forall x \in D$.

Nên hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định.

Do đó hàm số $y = \frac{2x - 2}{x + 1}$ không có cực trị.

Câu 25: Tìm giá trị cực đại của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 2$.

A. -2.

B. 0.

C. 2.

D. 1.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

$y'' = 6x - 6 \Rightarrow y''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Giá trị cực đại của hàm số là: $y(0) = -2$.

Câu 26: Hàm số $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 3x + 2019m$ ($m \in \mathbb{R}$) đạt cực tiểu tại điểm:

- A.** $x = 3$. **B.** $x = -3$. **C.** $x = 1$. **D.** $x = -1$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^3 - x^2 - 5x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \end{cases}.$$

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
y'		$-$	0	$-$	0	$+$	
y							$+\infty$

$f(3)$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Câu 27: Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ đạt cực tiểu tại điểm

- A.** $x = -1$. **B.** $x = 1$. **C.** $x = -3$. **D.** $x = 3$.

Lời giải

Ta có hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = x^2 + 2x - 3; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

$$y'' = 2x + 2; y''(-3) = -4 < 0; y''(1) = 4 > 0.$$

Suy ra hàm số đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 28: Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = x^4 - 2x^2$.

- A.** 2. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 1.

Lời giải

Chọn C

Tự luận

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$							$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 -1 0 -1

Dựa vào bảng biến thiên suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Trắc nghiệm

Hàm số bậc 4 trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$ có hệ số $a.b < 0$ thì sẽ có 3 điểm cực trị.

Vậy chọn ngay đáp án **C**.

Câu 29: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ là

- A.** $(-1; -8)$ **B.** $(0; -5)$ **C.** $\left(\frac{5}{3}; \frac{40}{27}\right)$ **D.** $(1; 0)$

Lời giải

Chọn A

$$y' = -3x^2 + 2x + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

$$y'' = -6x + 2.$$

Ta có: $y''(-1) = 8 > 0 \Rightarrow$ Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$; $y_{CT} = y(-1) = -8$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(-1; -8)$.

Câu 30: Hàm số nào trong bốn hàm số được liệt kê dưới đây không có cực trị?

- A.** $y = \frac{2x-3}{x+2}$. **B.** $y = x^4$. **C.** $y = -x^3 + x$. **D.** $y = |x+2|$.

Lời giải

Chọn A

+ Hàm số $y = \frac{2x-3}{x+2}$

Tập xác định: $D = (-\infty; -2) \cup (-2; +\infty)$.

Có $y' = \frac{7}{(x+2)^2} > 0 \forall x \in D \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến trên từng khoảng xác định $\Rightarrow$ hàm số

không có cực trị.

Các hàm số khác dễ dàng chứng minh được y' có nghiệm và đổi dấu qua các nghiệm. Riêng hàm số cuối y' không xác định tại -2 nhưng hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ và y' đổi dấu qua -2 do đó có hàm số có điểm cực trị $x = -2$.

DẠNG 3. TÌM MỀM HÀM SỐ ĐẠT CỰC TRỊ TẠI $x = x_0$

Bước 1. Tính $y'(x_0), y''(x_0)$

Bước 2. Giải phương trình $y'(x_0) = 0 \Rightarrow m?$

Bước 3. Thế m vào $y''(x_0)$ nếu giá trị $\begin{cases} y'' > 0 \rightarrow x_0 = CT \\ y'' < 0 \rightarrow x_0 = CD \end{cases}$

DẠNG 3.1 HÀM SỐ BẬC 3

Câu 31: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.

A. $m = -1$

B. $m = -7$

C. $m = 5$

D. $m = 1$

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = x^2 - 2mx + (m^2 - 4)$; $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ khi và chỉ khi: $\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 6m + m^2 - 4 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(L) \\ m = 5(TM) \\ m > 3 \end{cases}$$

Vậy $m = 5$ là giá trị cần tìm.

Câu 32: Tìm m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 1$

A. không tồn tại m .

B. $m = \pm 1$.

C. $m = 1$.

D. $m \in \{1; 2\}$.

Lời giải

$$\text{Để } x = 1 \text{ là điểm cực tiểu của hàm số} \Leftrightarrow \begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 4m + m = 0 \\ 6 - 4m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

Thử lại với $m = 1$, ta có $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$; $y' = 3x^2 - 4x + 1$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+
y						

Quan sát bảng biến thiên ta thấy $m = 1$ thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 33:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx + 1$ đạt cực tiểu tại $x = 2$.
- A. $m = 0$. B. $m > 4$. C. $0 \leq m < 4$. D. $0 < m \leq 4$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3x^2 - 6x + m; \quad y'' = 6x - 6.$$

$$\text{Hàm số đạt cực tiểu tại } x = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ 6 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 0.$$

- Câu 34:** Tìm các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$.
- A. $m = 1, m = 5$. B. $m = 5$. C. $m = 1$. D. $m = -1$.

Lời giải

Tập xác định $\mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = x^2 - 2mx + m^2 - 4, \quad y'' = 2x - 2m.$$

Để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - 4)x + 3$ đạt cực đại tại $x = 3$ thì

$$\begin{cases} y'(3) = 0 \\ y''(3) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 6m + 5 = 0 \\ 6 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 5..$$

- Câu 35:** Có bao nhiêu số thực m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m + 1)x + 1$ đạt cực đại tại $x = 1$.
- A. 0 B. 2 C. 1 D. 3

Lời giải

Chọn C

$$y' = x^2 - 2mx + m^2 - m + 1$$

$$y'' = 2x - 2m$$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ nên ta có

$$\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 = 0 \\ 2 - 2m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \vee m = 2 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = 2$$

$$\text{Thử lại với } m = 2 \text{ ta có } y'' = 2x - 4 \Rightarrow y''(1) = -2 < 0$$

Do đó Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$

- Câu 36:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m + 1)x - 1$ đạt cực đại tại $x = -2$?
- A. $m = 2$. B. $m = 3$. C. Không tồn tại m . D. $m = -1$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 1$.

Giả sử $x = -2$ là điểm cực đại của hàm số đã cho, khi đó

$$y'(-2) = 0 \Leftrightarrow (-2)^2 - 2m(-2) + m + 1 = 0 \Leftrightarrow 5m + 5 = 0 \Leftrightarrow m = -1.$$

Với $m = -1$, ta có $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 1$.

$$y' = x^2 + 2x; y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta kết luận $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 37: Tập hợp các số thực m để hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + (m+2)x - m$ đạt cực tiểu tại $x = 1$ là.

A. $\{1\}$.

B. $\{-1\}$.

C. $\emptyset$.

D. R .

Lời giải

Chọn C

$$y' = 3x^2 - 6mx + m + 2$$

$$y'' = 6x - 6m$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ khi $\begin{cases} y'(1) = 0 \\ y''(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5m + 5 = 0 \\ 6 - 6m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m < 1 \end{cases}$ không có giá trị của m .

DẠNG 3.2 HÀM SỐ ĐA THỨC BẬC CAO, HÀM CĂN THỨC ...

Câu 38: Xác định tham số m sao cho hàm số $y = x + m\sqrt{x}$ đạt cực trị tại $x = 1$.

A. $m = -2$.

B. $m = 2$.

C. $m = -6$.

D. $m = 6$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = f'(x) = 1 + \frac{m}{2\sqrt{x}}, (x > 0)$$

Để hàm số đạt cực trị tại $x = 1$ thì $f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{m}{2} = 0 \Leftrightarrow m = -2$.

Thử lại với $m = -2$, hàm số $y = x - 2\sqrt{x}$ có cực tiểu tại $x = 1$, do đó $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 39: Tìm tất cả tham số thực m để hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

A. $m = 0$.

B. $m = -2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm: $y' = 4(m-1)x^3 - 2(m^2-2)x$.

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1 \Rightarrow y'(-1) = 0 \Leftrightarrow -4(m-1) + 2(m^2-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$.

Với $m = 0$, hàm số trở thành $y = -x^4 + 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -1$.

Với $m = 2$, hàm số trở thành $y = x^4 - 2x^2 + 2019$. Dễ thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Vậy $m = 2$ thì hàm số $y = (m-1)x^4 - (m^2-2)x^2 + 2019$ đạt cực tiểu tại $x = -1$.

Câu 40: Tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$ đạt cực đại tại $x = 0$ là:

A. $m \in \mathbb{R}$.

B. $m < 0$.

C. Không tồn tại m .

D. $m > 0$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{mx^4}{4} + 2$.

Ta có: $f'(x) = x^4 - mx^3$.

Khi $m = 0$ thì $f'(x) = x^4 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số không có cực trị.

Khi $m \neq 0$, xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - mx^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \end{cases}$.

+ Trường hợp $m > 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	m	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	2	$f(m)$	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 0$.

+ Trường hợp $m < 0$ ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m	0	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(m)$	2	$+\infty$	

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 0$.

Như vậy, để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì $m > 0$.

Câu 41: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$ để hàm số

$$y = \frac{m-1}{5}x^5 + \frac{m+2}{4}x^4 + m+5 \text{ đạt cực đại tại } x = 0?$$

A. 101.

B. 2016.

C. 100.

D. 10.

Lời giải

Chọn B

Ta xét: $m = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x^4 + 6 \Rightarrow y' = 3x^3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow x = 0$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = 3x^3$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m = 1$ (loại).

Ta xét: $m \neq 1 \Rightarrow y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{m+2}{m-1} \end{cases}$

Trường hợp 1: xét $m > 1$, suy ra $x_2 < x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$		$-\frac{m+2}{m-1}$		0		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $m > 1$ (loại).

Trường hợp 2: $-2 < m < 1$, suy ra $x_2 > x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$		0		$-\frac{m+2}{m-1}$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ là điểm cực tiểu. Suy ra $-2 < m < 1$ (loại).

Trường hợp 3: $m < -2$, suy ra $x_2 < x_1$.

Ta có, bảng xét dấu $y' = (m-1)x^4 + (m+2)x^3$

x	$-\infty$	$-\frac{m+2}{m-1}$	0	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$

Dựa, vào bảng xét dấu ta thấy $x = 0$ là điểm cực đại. Suy ra $m < -2$ (nhận).

Vậy, tập hợp tất cả các giá trị của tham số m thỏa mãn đề bài là $m < -2$ mà m thuộc khoảng $(-2019; 2019)$.

Suy ra, số giá trị nguyên của m là 2016.

Câu 42: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^{12} + (m-5)x^7 + (m^2-25)x^6 + 1$ đạt cực đại tại $x = 0$?

- A. 8 B. 9 C. Vô số D. 10

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 12x^{11} + 7(m-5)x^6 + 6(m^2-25)x^5$

TH1: $m = 5 \Rightarrow y' = 12x^{11}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ là nghiệm bội lẻ, đồng thời dấu của y' đổi từ âm sang dương, nên $x = 0$ là điểm cực tiểu của hàm số, do đó không thỏa mãn, $m = 5$ loại.

TH2: $m = -5 \Rightarrow y' = x^6(12x^5 - 70) = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm bội chẵn, do đó y' không đổi dấu khi đi qua $x = 0$, $m = -5$ loại.

TH3: $m \neq \pm 5 \Rightarrow y' = x^5 [12x^6 + 7(m-5)x + 6(m^2-25)] = x^5 \cdot g(x)$

Với $g(x) = 12x^6 + 7(m-5)x + 6(m^2-25)$, ta thấy $x = 0$ không là nghiệm của $g(x)$.

Để hàm số đạt cực đại tại $x = 0$ thì y' phải đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua $x = 0$, xảy ra

$$\text{khi và chỉ khi } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) < 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 6(m^2 - 25) < 0 \Leftrightarrow -5 < m < 5$$

Vì m nguyên nên $m = \{-4; -3; \dots; 3; 4\}$, vậy có 9 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 43: Cho hàm số $y = x^6 + (4+m)x^5 + (16-m^2)x^4 + 2$. Gọi S là tập hợp các giá trị m nguyên dương để hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = 0$. Tổng các phần tử của S bằng

- A. 10. B. 9. C. 6. D. 3.

Lời giải.

Chọn C

Ta có $y' = 6x^5 + 5(4+m)x^4 + 4(16-m^2)x^3 = x^3(6x^2 + 5(4+m)x + 16-m^2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 0 \\ 6x^2 + 5(4+m)x + 16-m^2 = 0(*) \end{cases}$$

(*) có $\Delta = (4+m)(49m+4)$.

Với mọi m nguyên dương thì $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \frac{-5(4+m)}{6} < 0 \end{cases}$ do đó ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $16 - m^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$: (*) có hai nghiệm âm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$), ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+

Lúc này $x = 0$ là điểm cực tiểu.

Trường hợp 2: $16 - m^2 < 0 \Leftrightarrow m > 4$: (*) có hai nghiệm trái dấu x_1, x_2 ($x_1 < 0 < x_2$), ta có bảng xét dấu y' như sau:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+

Từ đây suy ra $x = 0$ là điểm cực đại (không thỏa mãn).

Trường hợp 3: (*) có một nghiệm bằng 0 và một nghiệm âm, lúc này $x = 0$ là nghiệm bội 4 của đạo hàm nên không phải là điểm cực trị.

Vậy có ba giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu bài toán là 1, 2, 3. Tổng các phần tử của S bằng 6.

DẠNG 4. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ CÓ N CỰC TRỊ

• Hàm số có n cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có n nghiệm phân biệt.

• Xét hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$:

+ Hàm số có hai điểm cực trị khi $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 3ac > 0 \end{cases}$.

+ Hàm số không có cực trị khi $y' = 0$ vô nghiệm hoặc có nghiệm kép.

• Xét hàm số bậc bốn trùng phương $y = ax^4 + bx^2 + c$.

+ Hàm số có ba cực trị khi $ab < 0$. + Hàm số có 1 cực trị khi $ab \geq 0$.

Câu 44: Biết rằng hàm số $y = (x+a)^3 + (x+b)^3 - x^3$ có hai điểm cực trị. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $ab \leq 0$.

B. $ab < 0$.

C. $ab > 0$.

D. $ab \geq 0$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = x^3 + 3(a+b)x^2 + 3(a^2+b^2)x + a^3 + b^3$.

$y' = 3x^2 + 6(a+b)x + 3(a^2+b^2)$.

Hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = 18ab > 0$
 $\Leftrightarrow ab > 0$.

Câu 45: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị

A. $m \in (-\infty; 6) \cup (0; +\infty)$.

B. $m \in (-6; 0)$.

C.

$m \in [-6; 0)$.

D. $m \in [-6; 0]$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = 3mx^2 - 4mx + (m-2)$.

+ Nếu $m = 0$.

$\Rightarrow y' = -2 < 0 (\forall x \in \mathbb{R})$. Nên hàm số không có cực trị.

Do đó $m = 0$ (chọn) (1).

+ Nếu $m \neq 0$.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow y'$ không đổi dấu

$\Leftrightarrow \Delta' \leq 0 \Leftrightarrow 4m^2 - 3m(m-2) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m \leq 0 \Rightarrow -6 \leq m < 0$ (do $m \neq 0$) (2).

Kết hợp (1) và (2) ta được $-6 \leq m \leq 0$.

Câu 46: Để đồ thị hàm số $y = -x^4 - (m-3)x^2 + m + 1$ có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu thì tất cả các giá trị thực của tham số m là

A. $m \geq 3$.

B. $m > 3$.

C. $m < 3$.

D. $m \leq 3$.

Lời giải

Chọn A

$y' = -4x^3 - 2(m-3)x = -2x(2x^2 + m-3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = \frac{3-m}{2} \end{cases}$$

Vì hàm số đã cho là hàm trùng phương với $a = -1 < 0$ nên hàm số có điểm cực đại mà không có điểm cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có đúng 1 nghiệm bằng 0 $\Leftrightarrow \frac{3-m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 47: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để hàm số có 3 cực trị

A. $m > 0$.

B. $m \geq 0$.

C. $m < 0$.

D. $m \leq 0$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 - m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases} (*)$$

Hàm số có 3 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (*) có 2 nghiệm phân biệt $x \neq 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Câu 48: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị?

A. 2019.

B. 2020.

C. 2018.

D. 2017.

Lời giải

Chọn A

Trường hợp 1: $m = 0 \Rightarrow y = -1$ nên hàm số không có cực trị.

$\Rightarrow m = 0$ (loại).

Trường hợp 2: $m \neq 0 \Rightarrow m^2 > 0$.

Hàm số $y = m^2x^4 - (m^2 - 2019m)x^2 - 1$ có đúng một cực trị

$$\Leftrightarrow -m^2 \cdot (m^2 - 2019m) \geq 0 \Leftrightarrow m^2 - 2019m \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2019.$$

Vì $m \neq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 2019$.

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa đề.

Câu 49: Cho hàm số $y = x^3 - 3(m+1)x^2 + 3(7m-3)x$. Gọi S là tập các giá trị nguyên của tham số m để hàm số không có cực trị. Số phần tử của S là

A. 2.

B. 4.

C. 0.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 - 6(m+1)x + 3(7m-3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 7m - 3 = 0.$$

Để hàm số không có cực trị thì

$$\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - (7m-3) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 5m + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4.$$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow S = \{1; 2; 3; 4\}$. Vậy S có 4 phần tử.

Câu 50: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^4 + 4mx^3 + 3(m+1)x^2 + 1$ có cực tiểu mà không có cực đại.

A. $m \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{7}}{3}\right]$ **B.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; 1\right] \cup \{-1\}$.

C. $m \in \left[\frac{1+\sqrt{7}}{3}; +\infty\right)$ **D.** $m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{3}; \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right] \cup \{-1\}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = 4x^3 + 12mx^2 + 6(m+1)x$.

+ TH1: $m = -1$, ta có: $y' = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
y'		-	0	-	0	+	

Hàm số có 1 cực tiểu duy nhất.

Ta có: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2x^2 + 6mx + 3m + 3 = 0(*) \end{cases}$

+ TH2: $m \neq -1$

Để hàm số đã cho chỉ có một cực tiểu thì phương trình (*) không có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow (3m)^2 - 2(3m+3) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-\sqrt{7}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Vậy } m \in \left[\frac{1-\sqrt{7}}{2}; \frac{1+\sqrt{7}}{2} \right] \cup \{-1\}.$$

Câu 51: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+1)(x^2+2mx+5)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số có đúng một điểm cực trị?

A. 0.

B. 5.

C. 6.

D. 7.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị khi và chỉ khi tam thức $g(x) = x^2 + 2mx + 5$ vô nghiệm hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó một nghiệm là $x = -1$, hoặc $g(x)$ có nghiệm kép $x = -1$

$$\text{Tức là } \begin{cases} \Delta'_g < 0 \\ g(-1) = 0 \\ \Delta'_g > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5 < 0 \\ -2m + 6 = 0 \\ m^2 - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{5} < m < \sqrt{5} \\ m = 3 \end{cases}. \text{ Do đó tập các giá trị nguyên thỏa mãn}$$

yêu cầu bài toán là $S = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

Câu 52: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị.

A. $0 < m < 2$.

B. $m > 2$.

C. $m > 0$.

D. $\begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}$.

Lời giải

Ta có: $y' = -x^2 + 2mx - 2m$

Hàm số $y = -\frac{x^3}{3} + mx^2 - 2mx + 1$ có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 2m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 0 \end{cases}.$$

Câu 53: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu?

- A.** $m < \frac{3}{2}$. **B.** $m < -\frac{3}{2}$. **C.** $m \leq \frac{3}{2}$. **D.** $m > \frac{3}{2}$.

Lời giải

+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+ $y' = 3x^2 - 6x + 2m$

+ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow \Delta = 36 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}.$$

Câu 54: Tập hợp các giá trị của m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m+2)x + 1$ có hai cực trị là:

- A.** $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ **B.** $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ **C.** $(-1; 2)$ **D.** $[-1; 2]$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = x^2 - 2mx + m + 2$. Để hàm số có hai cực trị thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nên

$$y' > 0 \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 2 \end{cases}$$

Câu 55: Cho hàm số $y = mx^4 - x^2 + 1$. Tập hợp các số thực m để hàm số đã cho có đúng một điểm cực trị là

- A.** $(0; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 0]$. **C.** $[0; +\infty)$. **D.** $(-\infty; 0)$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

TH1: $m = 0$ hàm số đã cho trở thành $y = -x^2 + 1$ là một hàm bậc hai nên luôn có một cực trị.

TH2: $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 - 2x$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(2mx^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 2mx^2 - 1 = 0(*) \end{cases}.$$

Để hàm số có đúng một cực trị thì phương trình $y' = 0$ có đúng 1 nghiệm.

Ycbt $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ có một nghiệm $x = 0$ hoặc vô nghiệm suy ra $m < 0$.

Vậy $m \leq 0$.

Câu 56: Cho hàm số $y = mx^4 + (2m+1)x^2 + 1$. Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số có đúng một điểm cực tiểu.

- A. Không tồn tại m . B. $m \geq 0$. C. $m \geq -\frac{1}{2}$. D. $-\frac{1}{2} \leq m \leq 0$.

Lời giải

Với $m = 0$, ta có $y = x^2 + 1 \Rightarrow y' = 2x$. Khi đó hàm số có 1 cực trị và cực trị đó là cực tiểu. Suy ra $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán. (1)

Với $m \neq 0$, ta có $y' = 4mx^3 + 2(2m+1)x = 2x(2mx^2 + 2m+1)$

Hàm số có một cực trị là cực tiểu $\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 2mx^2 + 2m + 1 = 0 \text{ vô nghiệm} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{-2m-1}{2m} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m < \frac{-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m > 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra hàm số có một cực trị là cực tiểu khi $m \geq 0$.

Câu 57: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^4 + 2(m^2 - m - 6)x^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị.

- A. 6. B. 5. C. 4. D. 3.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 + 4(m^2 - m - 6)x = 4x[x^2 + (m^2 - m - 6)]$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (m^2 - m - 6) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm phân biệt khác 0

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < m < 3.$$

Ta có: $m \in \mathbb{Z}, -2 < m < 3 \Leftrightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số có ba điểm cực trị.

Câu 58: Cho hàm số $y = mx^4 + (m^2 - 6)x^2 + 4$. Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại ?

- A. 4 B. 3 C. 2 D. 5

Lời giải

Chọn C

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 4mx^3 + 2(m^2 - 6)x$.

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị trong đó có đúng hai điểm cực tiểu và một điểm cực đại khi

và chỉ khi $\begin{cases} 4m > 0 \\ m(m^2 - 6) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \sqrt{6}.$

Do đó có hai giá trị nguyên của tham số m .

Câu 59: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

B. 7.

B. 5.

C. 8.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+2)^4 = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4 .

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 24m + 36 - 24m - 72 = 4m^2 - 36 < 0$$

$$\Leftrightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}.$

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Trong đó $x_1 = -4$.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}.$$

$$\text{Theo định lí Viète ta có } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot x_2 = 6m + 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

DẠNG 5. ĐƯỜNG THẲNG ĐI QUA 2 ĐIỂM CỰC TRỊ

Phương trình hai đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị của hàm số bậc ba là phần dư của phép chia của y' cho y''

◦ Phân tích (bằng cách chia đa thức y cho y'): $y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}$.

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Câu 60: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$

A. $m = \frac{3}{4}$.

B. $m = \frac{1}{2}$.

C. $m = -\frac{3}{4}$.

D. $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$ có TXĐ: $\mathbb{R}$; $y' = 3x^2 - 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Suy ra đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(0;1)$, $B(2;-3) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (2;-4)$.

Đường thẳng d đi qua hai điểm A , B có phương trình: $\frac{x}{2} = \frac{y-1}{-4} \Leftrightarrow y = -2x + 1$.

Đường thẳng $y = (2m-1)x + m + 3$ song song với đường thẳng $d \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-1 = -2 \\ m+3 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$.

Câu 61: Đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$ có hai điểm cực trị A và B . Điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng AB .

A. $P(1;0)$.

B. $M(0;-1)$.

C. $N(1;-10)$.

D. $Q(-1;10)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = 6 \\ x = 3 \Rightarrow y = -26 \end{cases}$

Ta có $A(-1;6)$, $B(3;-26) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (4;-32)$ nên) Chọn $\vec{n}_{AB} = (8;1)$.

Phương trình đường thẳng AB là:

$8(x+1) + 1(y-6) = 0 \Leftrightarrow 8x + y + 2 = 0$.

Thay tọa độ các điểm P, M, N, Q vào phương trình đường thẳng AB ta có điểm $N(1;-10)$ thuộc đường thẳng.

Câu 62: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $\frac{1}{3}$.

B. $-\frac{1}{6}$.

C. $m = \frac{1}{6}$.

D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$

Có : $y' = 3x^2 - 6x$, $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Câu 63: Tìm tổng tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6m(1-2m)x$ song song đường thẳng $y = -4x$.

- A. $m = -\frac{1}{3}$. B. $m = \frac{2}{3}$. C. $m = -\frac{2}{3}$. D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6m(1-2m)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = 1-2m \end{cases}$.

Để hàm số có hai cực trị thì $m \neq 1-2m \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{3}$.

Hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(m; -7m^3 + 3m^2)$, $B(1-2m; 20m^3 - 24m^2 + 9m - 1)$. Do đó $\overrightarrow{AB} = (1-3m; (3m-1)^3)$. Do đó AB có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = ((3m-1)^2; 1)$.

Do đó $AB: (3m-1)^2 x + y - 2m^3 + 3m^2 - m = 0 \Leftrightarrow y = -(3m-1)^2 x + 2m^3 - 3m^2 + m$.

Để đường thẳng AB song song với đường thẳng $y = -4x$ thì:

$$\begin{cases} -(3m-1)^2 = -4 \\ 2m^3 - 3m^2 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -\frac{1}{3} \\ m \neq 0 \\ m \neq \frac{1}{2} \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{3}.$$

Câu 64: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 1$ có hai điểm cực trị A , B . Khi đó phương trình đường thẳng AB là

- A. $y = 2x - 1$. B. $y = -2x + 1$. C. $y = -x + 2$. D. $y = x - 2$.

Lời giải

Chọn B

Thực hiện phép chia y cho y' ta được: $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x\right) + (-2x+1)$.

Giả sử hai điểm cực trị của đồ thị hàm số lần lượt là: $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} y_1 = y(x_1) = y'(x_1) \cdot \left(\frac{1}{3}x_1\right) + (-2x_1+1) = -2x_1+1 \\ y_2 = y(x_2) = y'(x_2) \cdot \left(\frac{1}{3}x_2\right) + (-2x_2+1) = -2x_2+1 \end{cases}.$$

Ta thấy, tọa độ hai điểm cực trị A và B thỏa mãn phương trình $y = -2x+1$.

Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị là: $y = -2x+1$.

Câu 65: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 + 2x^2 + (m-3)x + m$ có hai điểm cực trị và điểm $M(9; -5)$ nằm trên đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị.

A. $m = -1$. **B.** $m = -5$. **C.** $m = 3$. **D.** $m = 2$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 3x^2 + 4x + m - 3$, để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < \frac{13}{3} (*)$

Ta có $y = y' \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}\right) + \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}$ nên phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $y = \left(\frac{2m}{3} - \frac{26}{9}\right)x + \frac{7m}{9} + \frac{2}{3}$. Theo giả thiết, đường thẳng này đi qua $M(9; -5)$ nên $m = 3$ (thỏa mãn điều kiện $(*)$).

Câu 66: Đường thẳng nối hai điểm cực đại và cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 2x + m$ đi qua điểm $M(-3; 7)$ khi m bằng bao nhiêu?

A. 1. **B.** -1. **C.** 3. **D.** 0.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 2.$$

$$y = x^3 - 2x + m = \frac{1}{3}x \cdot y' + \left(-\frac{4}{3}x + m\right)$$

Suy ra đường thẳng đi qua các điểm cực trị của đồ thị hàm số có phương trình là $y = -\frac{4}{3}x + m$

đường thẳng này đi qua điểm $M(-3; 7)$ khi và chỉ khi $7 = -\frac{4}{3} \cdot (-3) + m \Leftrightarrow m = 3$.

Câu 67: Tìm giá trị thực của tham số m để đường thẳng $d: y = (3m+1)x + 3 + m$ vuông góc với đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$.

A. $m = \frac{1}{6}$.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. $\frac{1}{3}$.

D. $-\frac{1}{6}$.

Lời giải

Xét hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 1$

Có : $y' = 3x^2 - 6x$, $y = \left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{3}\right)y' - 2x - 1$.

Do đó, đường thẳng Δ qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số này có phương trình là $y = -2x - 1$.

Để d vuông góc với Δ thì $(3m+1) \cdot (-2) = -1 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}$.

Vậy giá trị cần tìm của m là $m = -\frac{1}{6}$.

Câu 68: Giả sử A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ và đường thẳng AB đi qua gốc tọa độ. Tìm giá trị nhỏ nhất của $P = abc + ab + c$.

A. $-\frac{16}{25}$.

B. -9 .

C. $-\frac{25}{9}$.

D. 1 .

Lời giải

TXĐ $D = \mathbb{R}$.

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$. Điều kiện để hàm số có hai điểm cực trị là $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow a^2 - 3b > 0$.

Lấy $f(x)$ chia cho $f'(x)$.

Ta có $f(x) = f'(x) \cdot \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a\right) + \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$.

Suy ra đường thẳng đi qua A, B là: $y = \left(\frac{2}{3}b - \frac{2}{9}\right)x + c - \frac{1}{9}ab$ (d).

Theo đầu bài (d) đi qua gốc tọa độ $\Rightarrow c - \frac{1}{9}ab = 0 \Leftrightarrow ab = 9c$.

Khi đó $P = abc + ab + c \Leftrightarrow P = 9c^2 + 10c \Leftrightarrow P = \left(3c + \frac{5}{3}\right)^2 - \frac{25}{9}$.

Suy ra $\min P = -\frac{25}{9}$.

Câu 69: Tìm tất cả giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 2$ có hai điểm cực trị A và B sao cho các điểm A, B và $M(1; -2)$ thẳng hàng.

A. $m = \sqrt{2}$.

B. $m = -\sqrt{2}$.

C. $m = 2$.

D. $m = -\sqrt{2}; m = \sqrt{2}$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6mx$; $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 2m$.

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

Khi đó hai điểm cực trị là $A(0; 2), B(2m; 2 - 4m^3)$.

Ta có $\overrightarrow{MA} = (-1; 4)$, $\overrightarrow{MB} = (2m-1; 4-4m^3)$.

Ba điểm A , B và $M(1; -2)$ thẳng hàng $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{4-4m^3}{4} \Leftrightarrow \frac{2m-1}{-1} = \frac{1-m^3}{1} \Leftrightarrow 2m-1 = m^3-1 \Leftrightarrow m^3 = 2m$$

$$\Leftrightarrow m^2 = 2 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2} \text{ (do } m \neq 0 \text{)}.$$

DẠNG 6. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 3 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

★ **Bài toán tổng quát:** Cho hàm số $y = f(x; m) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm tham số m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện K cho trước?

✎ **Phương pháp:**

— **Bước 1.** Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Tính đạo hàm: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

— **Bước 2.** Để hàm số có 2 cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} a_{y'} = 3a \neq 0 \\ \Delta_{y'} = (2b)^2 - 4.3ac > 0 \end{cases}$

và giải hệ này sẽ tìm được $m \in D_1$.

— **Bước 3.** Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $y' = 0$. Theo Viét, ta có: $\begin{cases} S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ P = x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$.

— **Bước 4.** Biến đổi điều kiện K về dạng tổng S và tích P . Từ đó giải ra tìm được $m \in D_2$.

— **Bước 5.** Kết luận các giá trị m thỏa mãn: $m = D_1 \cap D_2$.

📖 **Lưu ý:**

— Hàm số bậc 3 không có cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ không có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta_{y'} \leq 0$.

— Trong trường hợp điều kiện K liên quan đến hình học phẳng, tức là cần xác định tọa độ 2 điểm cực trị $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là 2 nghiệm của $y' = 0$. Khi đó có 2 tình huống thường gặp sau:

• Nếu giải được nghiệm của phương trình $y' = 0$, tức tìm được x_1, x_2 cụ thể, khi đó ta sẽ thế vào hàm số đầu đề $y = f(x; m)$ để tìm tung độ y_1, y_2 tương ứng của A và **B**.

• Nếu tìm không được nghiệm $y' = 0$, khi đó gọi 2 nghiệm là x_1, x_2 và tìm tung độ y_1, y_2 bằng cách thế vào phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị.

Để viết phương trình đường thẳng nối hai điểm cực trị, ta thường dùng phương pháp tách đạo hàm (phần dư bậc nhất trong phép chia y cho y'), nghĩa là:

$$\circ \text{ Phân tích (bằng cách chia đa thức } y \text{ cho } y'): y = y' \cdot q(x) + h(x) \Rightarrow \begin{cases} y_1 = h(x_1) \\ y_2 = h(x_2) \end{cases}.$$

◦ Đường thẳng qua 2 điểm cực trị là $y = h(x)$.

Dạng toán: Tìm tham số m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (cùng phía, khác phía):

|| **Vị trí tương đối giữa 2 điểm với đường thẳng:**

|| Cho 2 điểm $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và đường thẳng $d: ax + by + c = 0$. Khi đó:

- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) < 0$ thì A, B nằm về 2 phía so với đường thẳng d .
- Nếu $(ax_A + by_A + c) \cdot (ax_B + by_B + c) > 0$ thì A, B nằm cùng phía so với đường d .

Trường hợp đặc biệt:

- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục tung $Oy \Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có 2 nghiệm trái dấu và ngược lại.
- Để hàm số bậc ba $y = f(x)$ có 2 điểm cực trị nằm cùng phía so với trục hoành $Ox \Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt (áp dụng khi nhầm được nghiệm).

Dạng toán: Tìm m để các hàm số sau có cực trị thỏa điều kiện cho trước (**đối xứng và cách đều**):

★ **Bài toán 1.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B đối xứng nhau qua đường d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Gọi $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Do A, B đối xứng qua d nên thỏa hệ
$$\begin{cases} \Delta \perp d \\ I \in d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \\ I \in d \end{cases} \Rightarrow m \in D_2.$$

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

★ **Bài toán 2.** Tìm m để đồ thị hàm số có 2 điểm cực trị A, B cách đều đường thẳng d :

— **Bước 1.** Tìm điều kiện để hàm số có cực đại, cực tiểu $\Rightarrow m \in D_1$.

— **Bước 2.** Tìm tọa độ 2 điểm cực trị A, B . Có 2 tình huống thường gặp:

+ Một là $y' = 0$ có nghiệm đẹp x_1, x_2 , tức có $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

+ Hai là $y' = 0$ không giải ra tìm được nghiệm. Khi đó ta cần viết phương trình đường thẳng nối 2 điểm cực trị là Δ và lấy $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \in \Delta$.

— **Bước 3.** Do A, B cách đều đường thẳng d nên $d(A; d) = d(B; d) \Rightarrow m \in D_2$.

— **Bước 4.** Kết luận $m = D_1 \cap D_2$.

☞ **Lưu ý:** Để 2 điểm A, B đối xứng nhau qua điểm $I \Leftrightarrow I$ là trung điểm AB .

Câu 70: Với giá trị nào của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị A, B thỏa mãn $OA = OB$ (O là gốc tọa độ)?

A. $m = \frac{3}{2}$.

B. $m = 3$.

C. $m = \frac{1}{2}$.

D. $m = \frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x, \quad y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do đó đồ thị hàm số đã cho luôn có hai điểm cực trị lần lượt có tọa độ là $A(0; m)$ và $B(2; -4 + m)$.

$$\text{Ta có } OA = OB \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + m^2} = \sqrt{2^2 + (4 - m)^2} \Leftrightarrow m^2 = 4 + (4 - m)^2 \Leftrightarrow 20 - 8m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5}{2}.$$

Câu 71: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$

có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$.

A. 1.

B. 0.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2(x^2 - mx - 3m^2 + 1),$$

$$g(x) = x^2 - mx - 3m^2 + 1; \quad \Delta = 13m^2 - 4.$$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị khi và chỉ khi y' có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow g(x)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2\sqrt{13}}{13} \\ m < -\frac{2\sqrt{13}}{13} \end{cases} \cdot (*)$$

$$x_1, x_2 \text{ là các nghiệm của } g(x) \text{ nên theo định lý Vi-ét, ta có } \begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -3m^2 + 1 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m + 1 = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Đối chiếu với điều kiện (*), ta thấy chỉ $m = \frac{2}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 72: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = mx^3 - (2m - 1)x^2 + 2mx - m - 1$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành?

A. 4.

B. 2.

C. 1.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía đối với trục hoành khi và chỉ khi phương trình $mx^3 - (2m-1)x^2 + 2mx - m - 1 = 0$ (1) có 3 nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow (x-1)[mx^2 - (m-1)x + m+1] = 0$$

Phương trình (1) có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi pt $mx^2 - (m-1)x + m+1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m - (m-1) + m+1 \neq 0 \\ (m-1)^2 - 4m(m+1) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m+2 \neq 0 \\ -3m^2 - 6m + 1 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq -2 \\ \frac{-3-2\sqrt{3}}{3} < m < \frac{-3+2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = -1.$$

Câu 73: Cho hàm số $y = x^3 - (m+6)x^2 + (2m+9)x - 2$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục hoành.

A. $\begin{cases} m \geq -2 \\ m \leq -6 \end{cases}$

B. $m \geq -2$.

C. $m \leq -6$.

D. $\begin{cases} m > -2 \\ m < -6 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}$

Lời giải

Chọn D

$$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m+9.$$

$$y' = 3x^2 - 2(m+6)x + 2m+9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{2m+9}{3} \end{cases}$$

$$\text{Hàm số có 2 cực trị} \Leftrightarrow \frac{2m+9}{3} \neq 1 \Leftrightarrow m \neq -3. \quad (1)$$

$$y(1) = m+2.$$

$$y\left(\frac{2m+9}{3}\right) = -m \frac{(2m+9)^2}{27} - 2.$$

$$Y_{cbt} \Leftrightarrow y(1) \cdot y\left(\frac{2m+9}{3}\right) < 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2) \cdot \left[-m \frac{(2m+9)^2}{27} - 2 \right] < 0 \Leftrightarrow (m+2) \cdot (4m^3 + 36m^2 + 81m + 54) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -6 \\ m > -2 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có } y_{cbt} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m < -6 \\ m \neq \frac{-3}{2} \end{cases}.$$

Câu 74: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + 2018$ với m là tham số. Tổng bình phương

tất cả các giá trị của m để hàm số có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 + 2x_2 = 1$ bằng

A. $\frac{40}{9}$

B. $\frac{22}{9}$

C. $\frac{25}{4}$

D. $\frac{8}{3}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$

Để hàm số có hai điểm cực trị thì phương trình $mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt.

$$\Rightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ \Delta' = (m-1)^2 - 3m(m-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ -2m^2 + 4m + 1 > 0 \end{cases}$$

Theo định lý Vi-ét ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{3(m-2)}{m} \end{cases}$$

Theo bài ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m} \\ x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3m-4}{m} \\ x_2 = 1 - \frac{2(m-1)}{m} = \frac{2-m}{m} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{3m-4}{m} \cdot \frac{2-m}{m} = \frac{3(m-2)}{m} \Rightarrow 3(2-m)m + (3m-4)(2-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(t/m) \\ m = \frac{2}{3}(t/m) \end{cases}$$

Vậy $m_1^2 + m_2^2 = \frac{40}{9}$.

Câu 75: Cho hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 - 3m - 1$ với m là một tham số thực. Giá trị của m thuộc tập hợp nào sau đây để đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị đối xứng nhau qua đường thẳng $d: x + 8y - 74 = 0$.

- A.** $m \in (-1; 1]$. **B.** $m \in (-3; -1]$. **C.** $m \in (3; 5]$. **D.** $m \in (1; 3]$.

Lời giải

Chọn D

$$y' = -3x^2 + 6mx$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị có hai cực trị khi: $m \neq 0$

Khi đó hai điểm cực trị là: $A(0; -3m - 1), B(2m; 4m^3 - 3m - 1)$

Tọa độ trung điểm AB là: $I(m; 2m^3 - 3m - 1)$

A và B đối xứng qua d khi và chỉ khi: $\begin{cases} I \in d \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \end{cases}$

$$\overrightarrow{AB} = (2m; 4m^3), \vec{u}_d = (8; -1)$$

$$+ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 16m - 4m^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \\ m = -2 \end{cases}.$$

Với $m = 0$ loại

Với $m = 2$, ta có $I(2; 9) \Rightarrow I \in d$

Với $m = -2$, ta có $I(-2; -11) \Rightarrow I \notin d$

Do đó $m = 2$ thỏa mãn yêu cầu.

Câu 76: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2$ có hai điểm cực trị nằm về hai phía của trục Ox .

- A.** 4. **B.** 5. **C.** 6. **D.** 7.

Lời giải

Chọn B

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0 \text{ có ba nghiệm phân biệt}$$

$$x^3 - 8x^2 + (m^2 + 11)x - 2m^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 - 6x + m^2 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - 6x + m^2 - 1 = 0(*) \end{cases}$$

Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 10 - m^2 > 0 \\ m^2 - 9 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\sqrt{10} < m < \sqrt{10} \\ m \neq \pm 3 \end{cases}$$

Vậy có 5 giá trị nguyên của tham số thỏa mãn đề bài.

Câu 77: Cho hàm số $y = x^3 - (2m + 1)x^2 + (m + 1)x + m - 1$. Có bao nhiêu giá trị của số tự nhiên $m < 20$ để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành?

A. 18.

B. 19.

C. 21.

D. 20.

Lời giải

+ Ta có: $y = (x - 1)(x^2 - 2mx + 1 - m)$.

+ Hàm số có hai điểm cực trị nằm về hai phía trục hoành khi và chỉ khi đồ thị y cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt. $\Leftrightarrow y = (x - 1)(x^2 - 2mx + 1 - m) = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow x^2 - 2mx + 1 - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 1 > 0 \\ 2 - 3m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ m > \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ m \neq \frac{2}{3} \end{cases}$$

+ Do $m \in \mathbb{N}, m < 20$ nên $1 \leq m < 20$. Vậy có 19 số tự nhiên thỏa mãn bài toán.

Câu 78: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để đồ thị của hàm số $y = x^3 - (m + 1)x^2 + (m^2 - 2)x - m^2 + 3$ có hai điểm cực trị và hai điểm cực trị đó nằm về hai phía khác nhau đối với trục hoành?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 2 = 0$.

Để hàm số có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow -2m^2 + 2m + 7 > 0 \Leftrightarrow \frac{1 - \sqrt{15}}{2} < m < \frac{1 + \sqrt{15}}{2} (*)$.

Ta lần lượt thử bốn giá trị nguyên của m thỏa mãn (*) là $-1; 0; 1; 2$.

Ta được bốn hàm số

$$y = x^3 - x + 2; y = x^3 - x^2 - 2x + 3; y = x^3 - 2x^2 - x + 2; y = x^3 - 3x^2 + x - 1.$$

Khi đó ta nhận thấy chỉ có $m = 1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 79:** Tìm tất cả các giá trị của tham số m để $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 6$
- A.** $m = -3$ **B.** $m = 3$ **C.** $m = -1$ **D.** $m = 1$

Lời giải

Chọn A

$y' = 3x^2 - 6x + m$. Hàm số đạt cực trị tại x_1, x_2 . Vậy x_1, x_2 là nghiệm của phương trình $y' = 0$

Theo Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 \\ &= 4 - \frac{2m}{3} \Rightarrow 4 - \frac{2m}{3} = 6 \Rightarrow m = -3 \end{aligned}$$

- Câu 80:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - m + 1$ có các giá trị cực trị trái dấu?
- A.** 7. **B.** 9. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Có $f'(x) = 6x^2 - 12x$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$x = 0 \Rightarrow f(0) = -m + 1$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = -m - 7$$

Hàm số có các giá trị cực trị trái dấu

$$\Leftrightarrow (-m + 1)(-m - 7) < 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m + 7) < 0 \Leftrightarrow -7 < m < 1.$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

- Câu 81:** Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2; 3)$.
- A.** $m \in (-1; 4) \setminus \{3\}$. **B.** $m \in (3; 4)$. **C.** $m \in (1; 3)$. **D.** $m \in (-1; 4)$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -m + 2 \end{cases}$$

Để hàm số có điểm cực đại cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$ thì $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt nằm trong khoảng $(-2;3) \Leftrightarrow \begin{cases} -m+2 \neq -1 \\ -2 < -m+2 < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$.

Câu 82: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^2 - 2$ có đồ thị (C) và điểm $C(1;4)$. Tính tổng các giá trị nguyên dương của m để (C) có hai điểm cực trị A, B sao cho tam giác ABC có diện tích bằng 4.

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } y' = 3x^2 - 6mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}$$

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow 2m \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0$.

$$\text{Khi đó } A(0; 4m^2 - 2), B(2m; -4m^3 + 4m^2 - 2) \Rightarrow AB = \sqrt{4m^2 + 16m^6} = 2|m|\sqrt{4m^4 + 1}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } AB \text{ là: } \frac{x-0}{2m-0} = \frac{y-(4m^2-2)}{-4m^3} \Leftrightarrow 2m^2x + y - 4m^2 + 2 = 0$$

$$d(C, AB) = \frac{|2m^2 + 4 - 4m^2 + 2|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}}$$

Diện tích tam giác ABC là

$$S = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot d(C, AB) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 2|m| \cdot \sqrt{4m^4 + 1} \cdot \frac{2|m^2 - 3|}{\sqrt{4m^4 + 1}} = 4$$

$$\Leftrightarrow |m(m^2 - 3)| = 2 \Leftrightarrow m^6 - 6m^4 + 9m^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (m^2 - 1)^2(m^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm 2 \end{cases}$$

Do m nguyên dương nên ta được $m = 1, m = 2$, tổng thu được là 3.

Câu 83: Cho hàm số $y = 2x^3 + 3(m-1)x^2 + 6(m-2)x - 1$ với m là tham số thực. Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3)$.

A. $m \in (-1;3) \cup (3;4)$.

B. $m \in (1;3)$.

C. $m \in (3;4)$.

D. $m \in (-1;4)$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có: } y' = 6x^2 + 6(m-1)x + 6(m-2)$$

Để hàm số có điểm cực đại và điểm cực tiểu nằm trong khoảng $(-2;3) \Leftrightarrow$ pt $y' = 0$ có 2 nghiệm thuộc khoảng $(-2;3)$

$$\Leftrightarrow x^2 + (m-1)x + (m-2) = 0 \text{ có 2 nghiệm thuộc khoảng } (-2; 3)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+m-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \in (-2; 3) \\ x = 2 - m \end{cases}$$

$$Y_{CBT} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m \neq -1 \\ -2 < 2 - m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 3 \\ -1 < m < 4 \end{cases}$$

Câu 84: Tổng tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số: $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ có hai điểm cực trị $x_1; x_2$ đồng thời $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$ là:

A. -21

B. -39

C. -8

D. $3\sqrt{11} - 13$

Lời giải

Chọn A

+) Để hàm số có hai cực trị thì phương trình $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt:

$$y' = 9x^2 + 4(m+1)x - 3m \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta' = 4(m+1)^2 + 27m > 0$$

+) Xét $y(x_1) \cdot y(x_2) = 0$ nên ta có $y = 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5$ phải tiếp xúc với trục hoành $\Rightarrow 3x^3 + 2(m+1)x^2 - 3mx + m - 5 = 0$ phải có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow (x-1)[3x^2 + (2m+5)x - m + 5] = 0 \quad (1) \text{ phải có nghiệm kép}$$

+) TH1: Phương trình $3x^2 + (2m+5)x - m + 5 = 0$ có một nghiệm $x = 1 \Rightarrow m_1 = -13$

+) TH2: Phương trình $3x^2 + (2m+5)x - m + 5 = 0$ có nghiệm kép khác 1

$$\Rightarrow \Delta = (2m+5)^2 - 12(5-m) = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 32m - 35 = 0 \Rightarrow m_2 + m_3 = -8$$

$$\Rightarrow m_1 + m_2 + m_3 = -21$$

Câu 85: Gọi S là tập các giá trị dương của tham số m sao cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 27x + 3m - 2$ đạt cực trị tại x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| \leq 5$. Biết $S = (a; b]$. Tính $T = 2b - a$.

A. $T = \sqrt{51} + 6$

B. $T = \sqrt{61} + 3$

C. $T = \sqrt{61} - 3$

D. $T = \sqrt{51} - 6$

Lời giải

Chọn C

+) Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + 27$, $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 9 = 0 \quad (1)$

+) Theo giả thiết hàm số đạt cực trị tại $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \\ m < -3 \end{cases} \quad (*)$$

+) Với điều kiện (*) thì phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2 , theo Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 x_2 = 9 \end{cases}$

+) Ta lại có $|x_1 - x_2| \leq 5 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 \leq 25 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 - 25 \leq 0$

$$\Leftrightarrow 4m^2 - 61 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{61}}{2} \leq m \leq \frac{\sqrt{61}}{2} \quad (**)$$

+) Kết hợp (*), (**) và điều kiện m dương ta được: $3 < m \leq \frac{\sqrt{61}}{2}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{\sqrt{61}}{2} \end{cases} \Rightarrow T = 2b - a = \sqrt{61} - 3.$$

Câu 86: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3$ có hai điểm cực trị $x_1, x_2 \leq 4$. Số phần tử của S bằng

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có: $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + mx + 3 \Rightarrow y' = x^2 - 4x + m$.

Hàm số có hai điểm cực trị x_1, x_2 thì phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 4 - m > 0 \Leftrightarrow m < 4.$$

$$\text{Khi đó giả sử } x_1 < x_2, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - \sqrt{4 - m} \\ x_2 = 2 + \sqrt{4 - m} \end{cases}$$

$$\text{Yêu cầu bài toán trở thành } x_2 \leq 4 \Leftrightarrow 2 + \sqrt{4 - m} \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4.$$

Kết hợp với $m < 4$ ta được $0 \leq m < 4$. Do m nguyên nên $m \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 87: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để điểm $M(2m^3; m)$ tạo với hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$ (C) một tam giác có diện tích nhỏ nhất?

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** không tồn tại

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases} \Rightarrow \forall m \in \mathbb{R}, \text{ hàm số luôn có CĐ, CT}$$

Tọa độ các điểm CĐ, CT của đồ thị là $A(m; 2m^3 + 3m^2 + 1), B(m+1; 2m^3 + 3m^2)$

Suy ra $AB = \sqrt{2}$ và phương trình đường thẳng $AB: x + y - 2m^3 - 3m^2 - m - 1 = 0$

Do đó, tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất khi và chỉ khi khoảng cách từ M tới AB nhỏ nhất

Ta có $d(M, AB) = \frac{3m^2 + 1}{\sqrt{2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$, dấu "=" khi $m = 0$

Câu 88: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số thực m để đường thẳng đi qua hai điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx + 2$ cắt đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính bằng 1 tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác IAB đạt giá trị lớn nhất.

A. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{3}$

B. $m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$

C. $m = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

D. $m = \frac{2 \pm \sqrt{5}}{2}$

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 3m$ suy ra đồ thị hàm số có điểm cực đại và cực tiểu khi $m > 0$. Các điểm cực đại, cực tiểu của đồ thị hàm số là $C(-\sqrt{m}; 2 + 2m\sqrt{m}); D(\sqrt{m}; 2 - 2m\sqrt{m})$.

Đường thẳng Δ đi qua các điểm CĐ, CT của đồ thị hàm số có phương trình là: $y = -2mx + 2$.

Do $d(I, \Delta) = \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} < R = 1$ (vì $m > 0$) $\Rightarrow \Delta$ luôn cắt đường tròn tâm $I(1;1)$, bán kính $R = 1$

tại 2 điểm A, B phân biệt. Dễ thấy $m = \frac{1}{2}$ không thỏa mãn do A, I, B thẳng hàng.

Với $m \neq \frac{1}{2}$: Δ không đi qua I , ta có: $S_{\Delta ABI} = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin AIB \leq \frac{1}{2} R^2 = \frac{1}{2}$.

Do đó $S_{\Delta ABI}$ lớn nhất bằng $\frac{1}{2}$ khi $\sin \widehat{AIB} = 1$ hay ΔAIB vuông cân tại $I \Leftrightarrow IH = \frac{R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \frac{|2m-1|}{\sqrt{4m^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ (H là trung điểm của AB)

Câu 89: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ có hai điểm cực trị $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ thỏa mãn $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2)$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$ bằng

A. $-\frac{49}{4}$

B. $-\frac{25}{4}$

C. $-\frac{841}{36}$

D. $-\frac{7}{6}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$

Chia y cho y' ta được $y = y' \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{9}a \right) + \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x + c - \frac{ab}{9}$.

Do $M(x_1; y_1), N(x_2; y_2)$ là hai điểm cực trị nên $y'(x_1) = 0, y'(x_2) = 0$

Do đó $y_1 = \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_1 + c - \frac{ab}{9}; y_2 = \left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right)x_2 + c - \frac{ab}{9}$

Theo giả thiết $x_1(y_1 - y_2) = y_1(x_1 - x_2) \Leftrightarrow x_1y_2 = x_2y_1$

$$\Leftrightarrow x_1 \left[\left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right) x_2 + c - \frac{ab}{9} \right] = x_2 \left[\left(-\frac{a^2}{9} - \frac{2b}{3} \right) x_1 + c - \frac{ab}{9} \right]$$

$$\Leftrightarrow x_1 \left(c - \frac{ab}{9} \right) = x_2 \left(c - \frac{ab}{9} \right) \Leftrightarrow c - \frac{ab}{9} = 0 (x_1 \neq x_2) \Leftrightarrow ab = 9c$$

$$\text{Ta có: } P = abc + 2ab + 3c = 9c^2 + 21c = \left(3c + \frac{7}{2} \right)^2 - \frac{49}{4} \geq -\frac{49}{4}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = abc + 2ab + 3c$ bằng $-\frac{49}{4}$

Câu 90: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(m^2 - 1)x - m^3 - m$ (m là tham số). Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số và $I(2; -2)$. Tổng tất cả các giá trị của m để ba điểm I, A, B tạo thành tam giác nội tiếp đường tròn có bán kính bằng $\sqrt{5}$ là

A. $\frac{4}{17}$.

B. $\frac{14}{17}$.

C. $-\frac{2}{17}$.

D. $\frac{20}{17}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(m^2 - 1).$$

$$\text{Cho } y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0.$$

Vì $\Delta' = 1 > 0 \forall m$ nên phương trình $y' = 0$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x = m \pm 1$.

Gọi $A(m+1; -4m-2), B(m-1; -4m+2)$.

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} = (-2; 4) = -2(1; -2), \overrightarrow{IA} = (m-1; -4m), \overrightarrow{IB} = (m-3; -4m+4).$$

Phương trình đường thẳng AB qua $A(m+1; -4m-2)$ và có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; 1)$ là $AB: 2x + y + 2m = 0$.

$$\text{Suy ra } d(I, AB) = \frac{|2 + 2m|}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Khi đó } S_{\Delta AB} = \frac{1}{2} AB \cdot d(I, AB) = \frac{1}{2} 2\sqrt{5} \frac{|2 + 2m|}{\sqrt{5}} = |2 + 2m|.$$

$$\text{Mặt khác } S_{\Delta AB} = \frac{AB \cdot IA \cdot IB}{4R} \Leftrightarrow AB \cdot IA \cdot IB = 4\sqrt{5} |2 + 2m|.$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{20} \sqrt{17m^2 - 2m + 1} \sqrt{17m^2 - 38m + 25} = 4\sqrt{5} |2 + 2m|$$

$$\Leftrightarrow (17m^2 - 2m + 1)(17m^2 - 38m + 25) = 4(4m^2 + 8m + 4)$$

$$\Leftrightarrow 289m^4 - 680m^3 + 502m^2 - 120m + 9 = 0$$

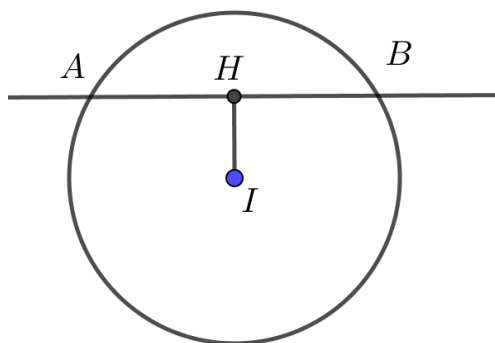
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{3}{17} \end{cases}.$$

Vậy $m_1 + m_2 = \frac{20}{17}$.

- Câu 91:** Cho hàm số $y = x^3 - 6mx + 4$ có đồ thị (C_m) . Gọi m_0 là giá trị của m để đường thẳng đi qua điểm cực đại, điểm cực tiểu của (C_m) cắt đường tròn tâm $I(1;0)$, bán kính $\sqrt{2}$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác IAB có diện tích lớn nhất. Chọn khẳng định đúng
- A. $m_0 \in (3;4)$. B. $m_0 \in (1;2)$. C. $m_0 \in (0;1)$. D. $m_0 \in (2;3)$.

Lời giải

Chọn C



Ta có: $y' = 3x^2 - 6m$

$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 = 2m$

Hàm số có cực đại, cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow m > 0$

Gọi $A(\sqrt{2m}; 4 - 4m\sqrt{2m})$ và $B(-\sqrt{2m}; 4 + 4m\sqrt{2m})$

Phương trình đường thẳng $AB: 4mx + y - 4 = 0$

Đặt $a = d(I, AB)$ ($0 < a < \sqrt{2}$) $\Rightarrow HB = \sqrt{2 - a^2}$

Suy ra $S_{\triangle IAB} = a\sqrt{2 - a^2} \leq \frac{1}{2}(a^2 + 2 - a^2) = 1$

Dấu “=” xảy ra $\Leftrightarrow a = \sqrt{2 - a^2} \Leftrightarrow a = 1$

Khi đó $d(I, AB) = \frac{|4m + 0 - 4|}{\sqrt{16m^2 + 1}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{16m^2 + 1} = 4|m - 1|$

$\Leftrightarrow 16m^2 + 1 = 16m^2 - 32m + 16 \Leftrightarrow m = \frac{15}{32}$

- Câu 92:** Biết m_0 là giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + mx - 1$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 = 13$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
- A. $m_0 \in (-1;7)$. B. $m_0 \in (7;10)$. C. $m_0 \in (-15;-7)$. D. $m_0 \in (-7;-1)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 - 6x + m.$$

$$\text{Xét } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + m = 0; \Delta' = 9 - 3m.$$

$$\text{Hàm số có hai điểm cực trị} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 3.$$

$$\text{Hai điểm cực trị } x_1, x_2 \text{ là nghiệm của } y' = 0 \text{ nên: } x_1 + x_2 = 2; x_1 \cdot x_2 = \frac{m}{3}.$$

$$\text{Đề } x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 = 13 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 = 13$$

$$\Leftrightarrow 4 - m = 13 \Leftrightarrow m = -9. \text{ Vậy } m_0 = -9 \in (-15; -7).$$

Câu 93: Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $f(x) = -x^3 + 3x - 4$ và $M(x_0; 0)$ là điểm trên trục hoành sao cho tam giác MAB có chu vi nhỏ nhất, đặt $T = 4x_0 + 2015$. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?

A. $T = 2017$.

B. $T = 2019$.

C. $T = 2016$.

D. $T = 2018$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$. Đạo hàm: $f'(x) = -3x^2 + 3$.

$$\text{Xét } f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = -2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -6 \end{cases}. \text{ Đặt } A(1; -2) \text{ và } B(-1; -6).$$

Ta thấy hai điểm A và B nằm cùng phía với trục hoành.

Gọi $A'(1; 2)$ là điểm đối xứng với điểm A qua trục hoành. Chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi ba điểm B, M và A' thẳng hàng.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{A'M} = (x_0 - 1; -2) \text{ và } \overrightarrow{A'B} = (-2; -8) \Rightarrow \frac{x_0 - 1}{-2} = \frac{-2}{-8} \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

$$\text{Vậy } T = 4 \cdot \frac{1}{2} + 2015 = 2017.$$

Câu 94: Tổng tất cả các giá trị của tham số thực m sao cho đồ thị hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 4m^3$ có điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 0 .

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y' = 3x^2 - 6mx, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2m \end{cases}.$$

Để hàm số có cực đại cực tiểu thì $m \neq 0$.

Khi đó các điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; 4m^3), B(2m; 0)$.

Ta có $I(m; 2m^3)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

Đường phân giác của góc phần tư thứ nhất là $d: x - y = 0$.

Do đó để điểm cực đại và cực tiểu đối xứng với nhau qua d thì:

$$\begin{cases} 2m - 4m^3 = 0 \\ m - 2m^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 - 2m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vậy tổng tất cả các giá trị của tham số thực m là 0.

Câu 95: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(m+1)x^2 + 6mx + m^3$. Tìm m để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B sao cho độ dài $AB = \sqrt{2}$.

A. $m = 0$.

B. $m = 0$ hoặc $m = 2$.

C. $m = 1$.

D. $m = 2$.

Lời giải

Ta có $y' = 6x^2 - 6(m+1)x + 6m$. $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - (m+1)x + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = m \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị thì $m \neq 1$.

Khi đó ta có $A(1; m^3 + 3m - 1), B(m; 3m^2)$.

Có $AB = \sqrt{2} \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m^3 - 3m^2 + 3m - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow (m-1)^2 + (m-1)^6 = 2$.

$\Leftrightarrow (m-1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn yêu cầu bài toán).

DẠNG 7. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ TRÙNG PHƯƠNG CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Một số công thức tính nhanh “thường gặp”

liên quan cực trị hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$

1 cực trị: $ab \geq 0$		3 cực trị: $ab < 0$	
: 1 cực tiểu	: 1 cực đại	: 1 cực đại, tiểu	: 2 cực đại, tiểu

$$A(0; c), B\left(-\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right), C\left(\sqrt{-\frac{b}{2a}}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow AB = AC = \sqrt{\frac{b^4}{16a^2} - \frac{b}{2a}}, BC = 2\sqrt{-\frac{b}{2a}}$$

với $\Delta = b^2 - 4ac$

Phương trình qua điểm cực trị: $BC: y = -\frac{\Delta}{4a}$ và $AB, AC: y = \pm \left(\sqrt{\frac{-b}{2a}}\right)^3 x + c$

Gọi $\widehat{BAC} = \alpha$, luôn có: $8a(1 + \cos\alpha) + b^3(1 - \cos\alpha) = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{b^3 + 8a}{b^3 - 8a}$ và $S^2 = -\frac{b^5}{32a^3}$

Phương trình đường tròn đi qua $A, B, C: x^2 + y^2 - (c+n)x + c.n = 0$, với $n = \frac{2}{b} - \frac{\Delta}{4a}$ và bán

kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là $R = \left| \frac{b^3 - 8a}{8ab} \right|$

Câu 96: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 2$. Diện tích S của tam giác có ba đỉnh là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho có giá trị là

- A. $S = 3$. B. $S = \frac{1}{2}$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = 2 \\ x = \pm 1 \rightarrow y = 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				2				$+\infty$
			1			1			

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; 2)$, $B(-1; 1)$, $C(1; 1)$.

Nhận xét $\triangle ABC$ cân tại A . Vì vậy $S = \frac{1}{2}|y_A - y_B| \cdot |x_C - x_B| = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$.

Câu 97: Tìm m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ có ba điểm cực trị $A(0; 1)$, B , C thỏa mãn $BC = 4$?

- A. $m = \sqrt{2}$. B. $m = 4$. C. $m = \pm 4$. D. $m = \pm \sqrt{2}$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 4x^3 - 4mx = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Tọa độ điểm cực trị của đồ thị hàm số: $A(0; 1)$, $B(\sqrt{m}; -m^2 + 1)$, $C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$.

$$BC = 4 \Leftrightarrow 4m = 16 \Leftrightarrow m = 4.$$

Câu 98: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A , B , C thỏa mãn $ABCD$ là hình thoi với $D(0; -3)$. Số m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$. B. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$. C. $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. D. $m \in (2; 3)$.

Lời giải

Chọn A

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4mx \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$$

Hàm số đã cho có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

Khi đó ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; -2m^2 + m^4)$; $B(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$; $C(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$.

Gọi I trung điểm của $BC \Rightarrow I(0; m^4 - 3m^2)$

Vì $A, D \in Oy$, B và C đối xứng nhau qua Oy nên tứ giác $ABCD$ là hình thoi $\Leftrightarrow I$ là trung điểm của AD

$$\Leftrightarrow 2(m^4 - 3m^2) = -2m^2 + m^4 - 3 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 1 \\ m^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm 1 \\ m = \pm \sqrt{3} \end{cases} \xrightarrow{m > 0} \begin{cases} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{cases}.$$

Câu 99: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2$ có ba điểm cực trị tạo thành ba đỉnh của một tam giác vuông. Số phần tử của tập hợp S là
A. 2. **B.** 0. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

• $y = x^4 - 2(m+1)x^2 + m^2 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4(m+1)x = 4x(x^2 - m - 1)$.

• Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

$$\Leftrightarrow x^2 - m - 1 = 0 \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác 0.}$$

$$\Leftrightarrow m + 1 > 0.$$

$$\Leftrightarrow m > -1.$$

Khi đó: $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{m+1} \\ x = 0 \\ x = \sqrt{m+1} \end{cases}.$

• Giả sử A, B, C là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

$$\Rightarrow A(-\sqrt{m+1}; -2m-1), B(0; m^2), C(\sqrt{m+1}; -2m-1)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = (\sqrt{m+1}; (m+1)^2), \overrightarrow{CB} = (-\sqrt{m+1}; (m+1)^2)$$

$$\Delta ABC \text{ vuông tại } B \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow -(m+1) + (m+1)^4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m = 0.$$

Câu 100: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 1$ (1). Tổng lập phương các giá trị của tham số m để đồ thị hàm số (1) có ba điểm cực trị và đường tròn đi qua 3 điểm này có bán kính $R = 1$ bằng

A. $\frac{5-\sqrt{5}}{2}$.

B. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

C. $2 + \sqrt{5}$.

D. $-1 + \sqrt{5}$.

Lời giải

➤ TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

➤ $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

➤ Để đồ thị hs (1) có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$.

➤ Gọi $A(0;1), B(\sqrt{m}; -m^2 + 1), C(-\sqrt{m}; -m^2 + 1)$ là các điểm cực trị của đồ thị $h_s(1)$, $I(0; -m^2 + 1)$ là trung điểm BC .

Ta có $AI = m^2, AB = AC = \sqrt{m + m^4}$. Suy ra $\frac{1}{2} AI \cdot BC = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \Leftrightarrow R = \frac{2AI}{AB \cdot AC}$

$$\Leftrightarrow \frac{2m^2}{m + m^4} = 1 \Leftrightarrow m^4 - 2m^2 + m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 & (l) \\ m = 1 & (n) \\ m = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} & (l) \\ m = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} & (n) \end{cases}$$

Câu 101: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tìm số phần tử của S .

A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $y' = 4x^3 - 4m^2x$.

Hàm số có cực đại cực tiểu $\Leftrightarrow$ phương trình $y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m \neq 0$.

Gọi $A(0; m^4 + 5), B(m; 5), C(-m; 5)$ lần lượt là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC$ khi đó ta có ba điểm A, I, O thẳng hàng. Mặt khác do hai điểm B và C đối xứng nhau qua AO nên AO là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $ABOC \Rightarrow AB \perp OB \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$.

Trong đó $\overrightarrow{AB} = (m; -m^4), \overrightarrow{OB} = (m; 5)$. Ta có phương trình $m^2 - 5m^4 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$

Câu 102: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 - 2m^2 + m^4$ có đồ thị (C) . Biết đồ thị (C) có ba điểm cực trị A, B, C và $ABDC$ là hình thoi trong đó $D(0; -3)$, A thuộc trục tung. Khi đó m thuộc khoảng nào?

A. $m \in \left(\frac{9}{5}; 2\right)$. **B.** $m \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$. **C.** $m \in (2; 3)$. **D.** $m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right)$.

Lời giải

Ta có $y' = 4x(x^2 - m) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = m \end{cases}$;

Với điều kiện $m > 0$ đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; m^4 - 2m^2); B(-\sqrt{m}; m^4 - 3m^2); C(\sqrt{m}; m^4 - 3m^2)$. Để $ABDC$ là hình thoi điều kiện là $BC \perp AD$ và trung điểm I của BC trùng với trung điểm J của AD . Do tính đối xứng ta luôn có $BC \perp AD$ nên chỉ cần $I \equiv J$ với $I(0; m^4 - 3m^2), J\left(0; \frac{m^4 - 2m^2 - 3}{2}\right)$.

$$\text{ĐK: } m^4 - 2m^2 - 3 = 2m^4 - 6m^2 \Leftrightarrow m^4 - 4m^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2}; \frac{9}{5}\right).$$

Câu 103: Gọi A, B, C là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 4$. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC bằng

- A. 1. B. $\sqrt{2} + 1$. C. $\sqrt{2} - 1$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow A(0; 4) \\ x = -1 \Rightarrow B(-1; 3) \\ x = 1 \Rightarrow C(1; 3) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB} = (-1; -1) \Rightarrow AB = \sqrt{2}; \overrightarrow{AC} = (1; -1) \Rightarrow AC = \sqrt{2}; \overrightarrow{BC} = (2; 0) \Rightarrow BC = 2.$$

$$\text{Ta có } \triangle ABC \text{ vuông cân tại } A \text{ có } S = \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 1, p = \frac{AB + AC + BC}{2} = \sqrt{2} + 1.$$

$$\text{Vậy } r = \frac{S}{p} = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1.$$

Câu 104: Cho hàm số $y = x^4 + 2(m-4)x^2 + m + 5$ có đồ thị (C_m) . Tìm m để (C_m) có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác nhận gốc tọa độ O làm trọng tâm.

- A. $m = 1$ hoặc $m = \frac{17}{2}$. B. $m = 1$. C. $m = 4$. D. $m = \frac{17}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 + 4(m-4)x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 4 - m \end{cases}.$$

Để hàm số có ba điểm cực trị $\Leftrightarrow m < 4$. Khi đó các điểm cực trị của (C_m) là

$$A(0; m+5), B(\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2), C(-\sqrt{4-m}; m+5-(m-4)^2).$$

$$\text{Do } O \text{ là trọng tâm tam giác } ABC \text{ nên } 3(m+5) = 2(m-4)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{17}{2} \end{cases}.$$

Do $m < 4$ nên $m = 1$.

Câu 105: Gọi m_0 là giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng

- A. $m_0 \in (-1; 0]$. B. $m_0 \in (-2; -1]$. C. $m_0 \in (-\infty; -2]$. D. $m_0 \in (-1; 0)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = x^4 + 2mx^2 - 1 \Rightarrow y' = 4x^3 + 4mx.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -m \end{cases} \quad (1).$$

Để đồ thị hàm số $y = x^4 + 2mx^2 - 1$ có ba điểm cực trị thì $y' = 0$ phải có ba nghiệm phân biệt tức là $m < 0$.

Khi đó (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{-m} \end{cases}$ nên ta gọi $A(0; -1)$, $B(-\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$, $C(\sqrt{-m}; -m^2 - 1)$

Tam giác ABC cân tại A nên $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AH.BC$ với H là trung điểm của BC nên

$$H(0; -m^2 - 1). \text{ Nên: } AH = \sqrt{(-m^2)^2} = m^2 \text{ và } BC = \sqrt{(2\sqrt{-m})^2} = 2\sqrt{-m}.$$

Ta có: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.m^2.2\sqrt{-m}$ theo giả thiết $S_{\Delta ABC} = 4\sqrt{2}$ nên $m^2\sqrt{-m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = -2$.

DẠNG 8. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ BẬC 2 TRÊN BẬC 1 CÓ CỰC TRỊ THỎA MÃN YÊU CẦU BÀI TOÁN

Câu 106: Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 3}{2x + 1}$.

A. $y = 2x + 2$.

B. $y = x + 1$.

C. $y = 2x + 1$.

D. $y = 1 - x$.

Lời giải

□ Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

□ $y' = \frac{2x^2 + 2x - 4}{(2x + 1)^2}$, $y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 (\Rightarrow y = 2) \\ x = -2 (\Rightarrow y = -1) \end{cases}$.

□ Đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $M(1; 2)$ và $N(-2; -1)$.

□ Vậy phương trình đường thẳng qua hai điểm cực trị M, N của đồ thị hàm số đã cho là: $y = x + 1$.

Cách khác:

□ Áp dụng tính chất: Nếu x_0 là điểm cực trị của hàm số hữu tỷ $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ thì giá trị cực trị tương

ứng của hàm số là $y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)}$. Suy ra với bài toán trên ta có phương trình đường thẳng

qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $y = \frac{(x^2 + 2x + 3)'}{(2x + 1)'} = x + 1$.

Câu 107: Điều kiện của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu là

A. $m < 1$.

B. $m > -1$.

C. $m < 2$.

D. $m > -2$.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện $x \neq 1$.

Ta có $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x} \Rightarrow y' = \frac{-x^2 + 2x - m}{(1 - x)^2}$.

Hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{1 - x}$ có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt và đổi dấu khi đi

qua hai điểm đó $\Leftrightarrow -x^2 + 2x - m = 0$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ -1+2-m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m > 0 \\ m \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < 1.$$

Vậy $m < 1$ thì hàm số đã cho có cực đại và cực tiểu.

Câu 108: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 2m}{x + 1}$ có hai

điểm cực trị A, B và tam giác OAB vuông tại O . Tổng tất cả các phân tử của S bằng

A. 9.

B. 1.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{x^2 + 2x - m}{(x+1)^2}, \forall x \neq -1. \text{ Đ\ddot{a}t } f(x) = x^2 + 2x - m, h(x) = x^2 + mx + 2m, g(x) = x + 1.$$

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị A, B khi $f(x)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\text{khác } -1 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m+1 > 0 \\ f(-1) = -m-1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1 \text{ (1)}. \text{ Khi đó } \begin{cases} y(x_1) = \frac{h'(x_1)}{g'(x_1)} = 2x_1 + m \\ y(x_2) = \frac{h'(x_2)}{g'(x_2)} = 2x_2 + m \end{cases}.$$

Suy ra $A(x_1; 2x_1 + m)$, $B(x_2; 2x_2 + m)$. Suy ra $\overrightarrow{OA} = (x_1; 2x_1 + m)$, $\overrightarrow{OB} = (x_2; 2x_2 + m)$.

$$\Delta OAB \text{ vuông tại } O \text{ khi } \begin{cases} \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB} \neq \vec{0} & (2) \\ \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = x_1 \cdot x_2 + (2x_1 + m)(2x_2 + m) = 0 & (3) \end{cases}.$$

(3) $\Leftrightarrow m^2 + 5x_1.x_2 + 2m(x_1 + x_2) = 0$. Kết hợp với định lí Vi-et cho phương trình $f(x) = 0$ ta

$$\text{được } m^2 - 5m - 4m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 (\text{không thỏa mãn}(2)) \\ m = 9 (\text{thỏa mãn}(1), (2)) \end{cases} \Rightarrow S = \{9\}.$$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S bằng 9.

Câu 109: Biết rằng đồ thị $(H): y = \frac{x^2 + 2x + m}{x - 2}$ (với m là tham số thực) có hai điểm cực trị là A, B . Hãy

tính khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0;0)$ đến đường thẳng AB .

A. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\frac{3}{\sqrt{5}}$.

D. $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình của đường thẳng AB là $y = \frac{(x^2 + 2x + m)'}{(x-2)'} \Leftrightarrow y = 2x + 2 \Leftrightarrow 2x - y + 2 = 0$.

+ Khoảng cách $d(O; AB) = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Câu 110: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m^2}{x-1}$ có hai điểm cực trị A, B . Khi $\angle AOB = 90^\circ$ thì tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng:

A. $\frac{1}{16}$.

B. 8.

C. $\frac{1}{8}$.

D. 16.

Lời giải

$$y' = \frac{(2x+m)(x-1) - x^2 - mx - m^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - (m+m^2)}{(x-1)^2}$$

Để đồ thị hàm số có hai điểm cực trị A, B thì $y' = 0$ phải có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 1 + m + m^2 > 0 \\ -1 - m - m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R}.$$

Phương trình đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại, cực tiểu là $y_A = 2x + m$.

Gọi x_A, x_B là hoành độ của A, B khi đó x_A, x_B là nghiệm của $x^2 - 2x - (m+m^2) = 0$.

Theo định lý Viet ta có $x_A + x_B = 2$; $x_A \cdot x_B = -m^2 - m$.

$$y_A = 2x_A + m; y_B = 2x_B + m.$$

$$\angle AOB = 90^\circ \Rightarrow x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + 4x_A x_B + 2m(x_A + x_B) + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5(-m^2 - m) + 4m + m^2 = 0 \Leftrightarrow -4m^2 - m = 0 \Leftrightarrow m = 0; m = -\frac{1}{4}.$$

Tổng bình phương tất cả các phần tử của S bằng: $0^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$.

Câu 111: Với tham số m , đồ thị của hàm số $y = \frac{x^2 - mx}{x+1}$ có hai điểm cực trị A, B và $AB = 5$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $m > 2$.

B. $0 < m < 1$.

C. $1 < m < 2$.

D. $m < 0$.

Lời giải

$$\text{Ta có } D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \text{ và có đạo hàm là } y' = \frac{x^2 + 2x - m}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Để hàm số có hai điểm cực trị ta phải có } \begin{cases} 1 + m > 0 \\ 1 - 2 - m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1.$$

Gọi hai hoành độ cực trị là x_1 và x_2 ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_1 x_2 = -m \end{cases}$.

Khi đó điểm $A(x_1, 2x_1 - m)$ và $B(x_2, 2x_2 - m)$.

$$AB = \sqrt{4 + 4m} \cdot \sqrt{5} = 5 \Leftrightarrow 4 + 4m = 5 \Leftrightarrow m = \frac{1}{4}.$$

Câu 112: Giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại điểm $x_0 = 2$ là:

- A.** $m = -1$. **B.** $m = -3$. **C.** $m = 1$. **D.** $m = 3$.

Lời giải

$$y' = 1 - \frac{1}{(x+m)^2}; y'' = \frac{2}{(x+m)^3}.$$

$$\text{Hàm số } y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m} \text{ đạt cực đại tại điểm } x_0 = 2 \text{ khi } \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{1}{(2+m)^2} = 0 \\ \frac{2}{(2+m)^3} < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \Leftrightarrow m = -3. \text{ Thử lại thấy thỏa mãn.} \\ m < -2 \end{cases}$$

Câu 113: Để hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ đạt cực đại tại $x = 2$ thì m thuộc khoảng nào?

- A.** $(0; 2)$. **B.** $(-4; -2)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(2; 4)$.

Lời giải

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$$

$$y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x+m)^2}, y'' = \frac{2}{(x+m)^3}$$

$$\text{Hàm số đạt cực đại tại } x = 2 \text{ nên } \begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{m^2 + 4m + 3}{(m+2)^2} = 0 \\ \frac{2}{(m+2)^3} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \text{ thuộc } (-4; -2).$$

Câu 114: Cho hàm số $y = x + p + \frac{q}{x+1}$ đạt cực đại tại điểm $A(-2; -2)$. Tính pq .

- A.** $pq = 2$. **B.** $pq = \frac{1}{2}$. **C.** $pq = \sqrt{3}$. **D.** $pq = 1$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Ta có $y' = 1 - \frac{q}{(x+1)^2}$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = -2$, suy ra $y'(-2) = 0 \Rightarrow 0 = 1 - q \Leftrightarrow q = 1$.

Lại có đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-2; -2)$ nên $-2 = -2 + p - q \Leftrightarrow p - q = 0$.

Do đó $p = q = 1$.

Thử lại: với $p = q = 1$ ta được $y = x + 1 + \frac{1}{x+1}$.

Ta có $y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Từ đó có bảng biến thiên của hàm số:

x	-2	-1	0
y'	+	0	-
y	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Rõ ràng đồ thị hàm số đạt cực đại tại điểm $A(-2; -2)$. Vậy $p = q = 1 \Rightarrow pq = 1$.

Câu 115: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m}$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có giá trị cực đại là 7.

A. $m = 7$.

B. $m = 5$.

C. $m = -9$.

D. $m = -5$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$

$$y = \frac{x^2 + mx + 1}{x + m} \Rightarrow y' = \frac{x^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x + m)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ x^2 + 2mx + m^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -m \\ x = -m + 1 \\ x = -m - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m + 1 \\ x = -m - 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	$-m-1$	$-m$	$-m+1$	$+\infty$	
y'	+	0	-	-	0	+
y	$-\infty$	y_{CD} 		y_{CT} 		

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = -m - 1$.

Vậy $y(-m-1) = 7 \Leftrightarrow -m - 2 = 7 \Leftrightarrow m = -9$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

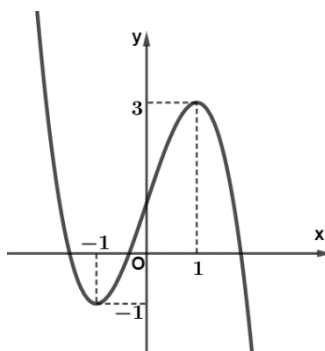
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.



- a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- b) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-1; -1)$.
- c) Gọi a và b lần lượt là tung độ của điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số ta có $a^2 + b^2 = 10$.
- d) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $x - y + 2 = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-3)x^2$.

- a) Hàm số đạt cực trị tại $x = -1; x = 3; x = 0$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1; 3)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.
- d) Hàm số $y = f(3x)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$		3		$+\infty$	



- Giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 3.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;3)$.
- $f(-10) > f(-3)$.
- Đồ thị hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh tam giác có diện tích bằng 4.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		3		$+\infty$		



- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;3)$ và $(0;+\infty)$.
- Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
- Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$.
- Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$

- Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.
- Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = -1$.
- Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai cực trị A và B . Điểm $M(0;-1)$ thuộc đường thẳng AB .

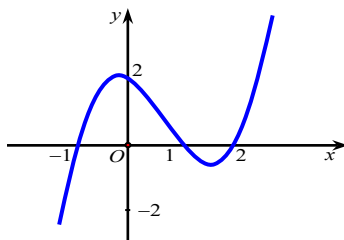
Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$				1			$+\infty$

Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- b) $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- c) $\forall x_1, x_2 \in (2; +\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
- d) $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty), f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình dưới đây.



Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm 3 điểm cực trị.
- d) Hàm số $y = f(3 - x^2)$ có 6 điểm cực trị

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \ln x, \forall x \in (0; +\infty)$. Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Hàm số trên luôn đồng biến trên tập xác định.
- b) Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
- c) Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có một điểm cực trị.
- d) Có 6 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - mx)$ luôn đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x + 1}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- c) Với mọi $a, b \in (1; +\infty)$ và $a < b$ thì $f(a) < f(b)$.
- d) Gọi A, B là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đường thẳng AB cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$			
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	0		$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		0

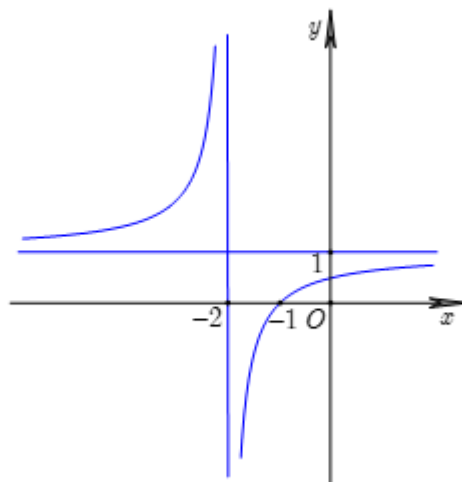
Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Trên khoảng $(4; +\infty)$ thì $y' < 0$.
- b) Trên khoảng $(-4; +\infty)$ thì $y' > 0$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 4)$.
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

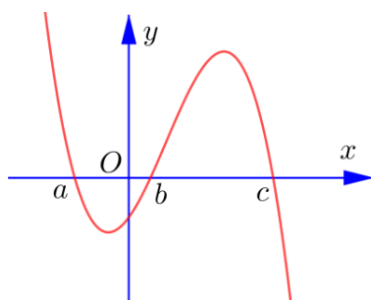
Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ

Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.



Câu 12: Đồ thị của đạo hàm bậc nhất $y = f'(x)$ của hàm số $f(x)$ được cho trong hình dưới đây.



Trong mỗi ý ở câu sau, hãy chọn đúng hay sai.

- a) Với $\forall x \in (-\infty; a)$ thì $f'(x) > 0$.
- b) Với $\forall x \in (a; c)$ thì $f'(x) < 0$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(b; c)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(c; +\infty)$.

Phan_Văn_Du

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+m}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m \geq -1$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ khi $m \geq 1$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ khi $m \leq 5$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 7)$ khi $m \geq 2$.

Câu 14: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Không tồn tại m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Khi $m > 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- c) Khi $m = \frac{5}{6}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.
- d) Khi $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 15: Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $80(cm).50(cm)$, người ta cắt đi ở bốn góc của tấm tôn bốn hình vuông bằng nhau để khi gập lại được một chiếc hộp (không nắp). Gọi cạnh hình vuông được cắt đi là $x(cm)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Điều kiện của x là $0 < x < 50$.
- b) Thể tích V của hộp là: $V = x(80-x)(50-x)$.
- c) Thể tích của hình hộp khi $x = 10(cm)$ là $28000(cm^3)$.
- d) Thể tích của hình hộp lớn nhất là $18000(cm^3)$.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 5m - 4$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Khi $m = 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ với mọi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- c) Khi $m \leq \frac{3}{2}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.
- d) Khi $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$			-3			-4		$+\infty$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Điểm cực đại của hàm số là $x = 0$.
- b) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 1.
- c) Hàm số $y = |f(x)|$ có 3 cực trị.
- d) Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị.

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	-

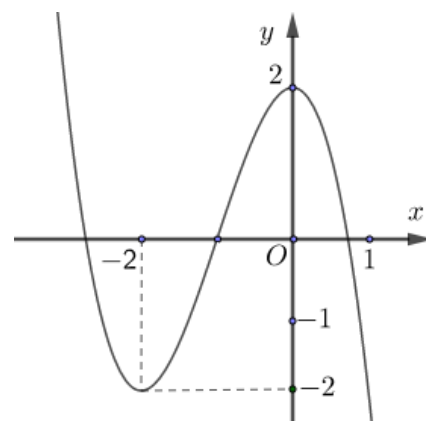
Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.
- b) Hàm số đã cho có 3 cực trị.
- c) Hàm số $y = f(|x|)$ có 3 cực trị.
- d) Hàm số $y = f(-2x+1)$ có 5 cực trị.

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

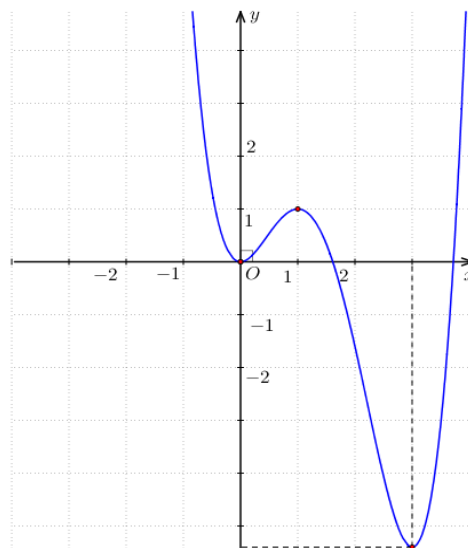
- a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
- b) Hàm số đã cho có 2 cực trị.
- c) Hàm số $y = |f(x)|$ có 5 cực trị.
- d) Hàm số $y = f(-x^2 + x)$ có 3 cực tiểu.



Câu 20: Cho hàm đa thức bậc năm $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
- b) Hàm số đã cho có 3 cực trị.
- c) Hàm số $y = f(3x - 2024)$ có 2 cực trị.
- d) Hàm số $g(x) = f(x) + 2x$ có 3 cực trị.



Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.
- b) Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là 0 .
- c) Hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực tiểu.
- d) Hàm số $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) + 2020$ có 7 điểm cực trị.

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$		1		4		$-\infty$

- a) Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 4$.
- b) Giá trị cực tiểu của hàm số là $y = 1$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ có 3 số dương trong các hệ số a, b, c, d .

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$, m là tham số.

- a) Với $m = 0$, hàm số có dạng $y = x^3 - 3x + 1$.
- b) Với $m = 0$, điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1; 2)$.
- c) Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 1$, đạt cực đại tại $x = 0$, khi $m = \frac{1}{2}$.
- d) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $m = 1$.

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m - 3)x + 2$, trong đó m là tham số.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

- a) $y' = -x^2 + 2(m - 1)x + m - 3$.
- b) Khi $m = 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- c) Có ít nhất một giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- d) Có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- b) Hàm số có đạo hàm là $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1;1)$ khi $m = \frac{17}{7}$.
- d) Với $m \geq \frac{2}{3}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $[2; +\infty)$.

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{x+4}{x+m}$ với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$
- b) Khi $m = 1$, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$
- c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow m < 4$.
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty) \Leftrightarrow -6 < m < 4$.

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{mx+3m-4}{x-m}$ với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số có hai điểm cực trị
- b) Khi $m = -1$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow -4 < m < 1$
- d) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. Số phần tử của S là 3.

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{x+m}$ với m là tham số, $x \neq -m$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) $y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \forall x \neq -m$.
- b) Khi $m = -2$, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$
- c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m < -1$
- d) Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -3)$. Khi đó $S = 9$.

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{mx + 4m}{x + m}$ với m là tham số, $x \neq -m$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Khi $m = -1$, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
- b) Hàm số luôn có hai đường tiệm cận.
- c) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Số phần tử của S là 3
- d) Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(5; +\infty)$. Khi đó $T = 32$.

Câu 30: Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$, (m là tham số). Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) Với $m = 0$ thì hàm số có dạng $y = \frac{x^2}{x-1}$.
- c) Hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.
- d) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi m thuộc $[a; b]$. Khi đó $a + 5b = 0$

Câu 31: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2}$ (C). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Ta luôn có $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$.
- b) Đồ thị hàm số (C) có 2 điểm cực trị.
- c) Điểm $M(0; -1)$ là giao điểm của trục tung với tiệm cận xiên của (C).
- d) Đồ thị hàm số (C) có 2 cực trị và đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có phương trình $y = 2x - 3$.

Câu 32: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ có đồ thị là (C).

- a) Đạo hàm y' của hàm số là $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$.
- b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho lớn hơn giá trị cực tiểu của hàm số.
- d) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C), diện tích tam giác OAB bằng 2.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ có đồ thị là (C) .

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1; 4)$.
- c) Hai điểm cực trị của đồ thị (C) đối xứng nhau qua điểm $I(1; 3)$.
- d) Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Câu 34: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m}{x + m}$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Với $m = 1$ đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0; 1)$
- b) Với $m = 1$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$
- c) Với $m = 1$ đồ thị hàm số nhận $x = -2; x = 0$ làm hai điểm cực trị
- d) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số đạt cực đại tại $x = 2$

Câu 35: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Với $m = 1$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng
- b) Với $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty, 1)$
- c) Với $m = 1$ hàm số nhận $x = 0; x = 2$ làm hai điểm cực trị
- d) Có 2024 giá trị nguyên dương của tham số $m \in (-2024; 2024)$ để hàm số có cực đại và cực tiểu

Câu 36: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Khi $m = 1$ thì hàm số là $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
- b) Khi $m = 1$ thì hàm số có $y' = 4x^3 - 4$.
- c) Khi $m = 1$ thì hàm số có 3 cực trị.
- d) Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi $m > 1$.

Câu 37: Cho hàm số $y = x^4 - (m - 1)x^2 + m - 2$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- b) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ có ba cực trị.
- c) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
- d) Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì $m \in (2; +\infty) \setminus \{3\}$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2(m - 1)x^2 + m - 2$ với m là tham số thực. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn.
- b) $f'(x) = 4x^3 - 2(m - 1)x$.

- c) Khi $m = 0$ là hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ khi và chỉ khi $m \in (-\infty; 2)$

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + 2x^2 - 1$ với m là tham số thực. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn.
- b) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- c) Khi $m = 1$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ khi và chỉ khi $m \in [-4; +\infty)$.

Câu 40: Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 2$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Khi $m = 0$ thì hàm số là $y = -x^4 + 2$.
- b) Hàm số có $y' = -4x^3 + 2mx$.
- c) Khi $m = 1$ thì hàm số có 3 cực trị.
- d) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông khi và chỉ khi $m = 1$

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 1$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

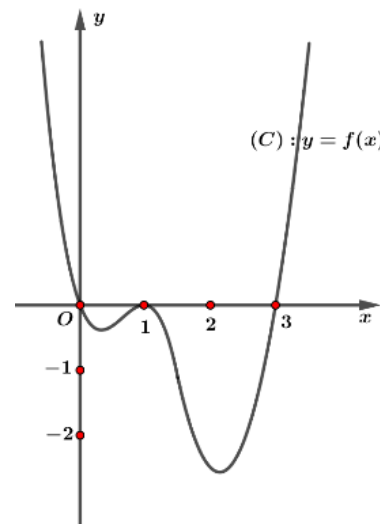
- a) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- b) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ có một cực trị.
- c) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
- d) Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ là 45.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

- a) Hàm số có 3 điểm cực trị.
- b) Hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 1)$.
- c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số luôn có hệ số góc dương khi hoành độ tiếp điểm lớn hơn 1.
- d) Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây.

- a) Điểm cực đại của đồ thị (C) là $x = 1$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$.
- c) Đồ thị (C') : $y = f'(x)$ luôn cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.
- d) Đồ thị của hàm số $y = [f(x)]^2$ có bao ba điểm cực tiểu?



Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		-1	2	2	$-\infty$

- Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.
- Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $(-2; -1)$.
- Đường thẳng $y = x + 1$ đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.
- Hàm số $y = g(x) = f(2x - 3)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{5}{2}$.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

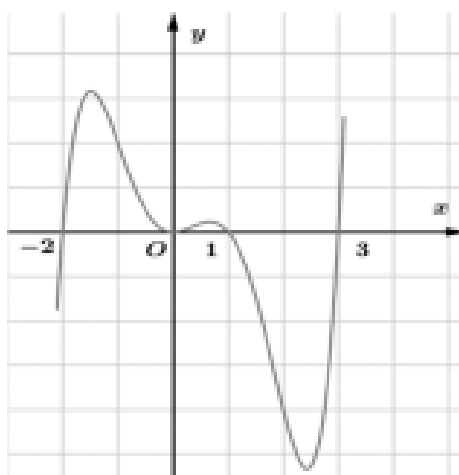
x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1		5		$-\infty$

- Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- Hàm số có hai cực trị
- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là 3.
- Đường thẳng $y = 2x + 1$ đi qua hai điểm cực trị.

Câu 46: Cho hàm số $y = |x + 1|(x - 2)$. Khi đó:

- Hàm số có 2 điểm cực trị
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên



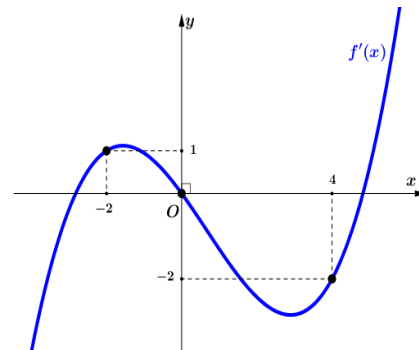
Khi đó:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị
- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
- c) Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{3}; +\infty)$
- d) Hàm số $y = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị

Câu 48: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

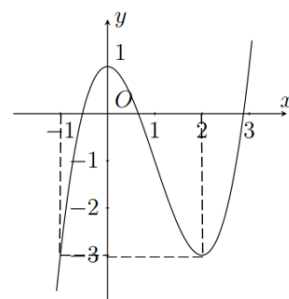
- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- c) Hàm số $h(x) = 5f(|2 - x|) + 2024$ có 5 điểm cực trị.
- d) Hàm số $g(x) = 4f(x^2 - 4) + x^4 - 8x^2$ có 4 điểm cực tiêu.



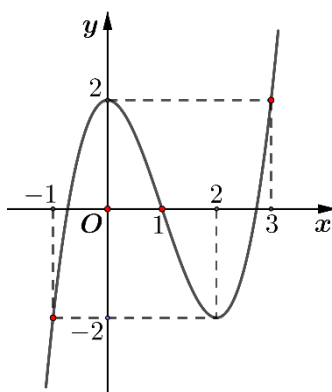
Câu 49: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x = 2$.
- c) Hàm số $y = f(f(x))$ có tất cả 5 điểm cực trị.
- d) Cho hàm số $h(x)$ có đạo hàm $h'(x) = f(x^3 - 3x^2 + m) + 3$. Khi đó có tất cả 10 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $h(x)$ có hoành độ cực trị thuộc đoạn $[-1; 2]$.



Câu 50: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $y = f'(x)$ đạt cực đại tiêu tại $x = 2$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.
- c) Hàm số $y = f(x^2)$ có 4 điểm cực trị.
- d) Hàm số $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$ có 7 điểm cực trị.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

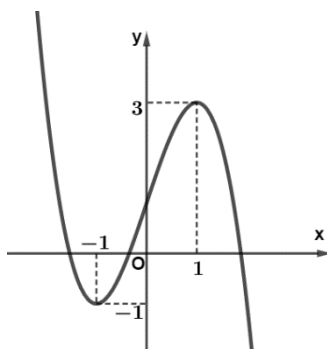
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP CÂU HỎI 4 MỆNH ĐỀ TRẢ LỜI ĐÚNG/SAI.

Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình dưới đây.



- a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.
- b) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-1; -1)$.
- c) Gọi a và b lần lượt là tung độ của điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số ta có $a^2 + b^2 = 10$.
- d) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị là $x - y + 2 = 0$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$ **Đúng**.

Vì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.

b) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $(-1; -1)$. **Đúng**

c) Gọi a và b lần lượt là hoành độ của điểm cực tiểu và điểm cực đại của hàm số ta có $a^2 + b^2 = 10$. **Đúng**

Vì tung độ của điểm cực tiểu là $a = -1$ và điểm cực đại là $b = 3$ nên $a^2 + b^2 = 10$.

d) Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $(d): x - y + 2 = 0$.

Đúng

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(-1;1); B(1;3)$. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A, B là: $(d): \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{2} \Leftrightarrow x - y + 2 = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-3)x^2$.

a) Hàm số đạt cực trị tại $x = -1; x = 3; x = 0$.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1;3)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

d) Hàm số $y = f(3x)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Hàm số đạt cực trị tại $x = -1; x = 3; x = 0$. **Sai**

$$\text{Vì } f'(x) = (x+1)(x-3)x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Tuy nhiên $x = 0$ là nghiệm bậc chẵn của $f'(x)$ nên $x = 0$ không là điểm cực trị.

b) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1;3)$. **Đúng**

$$\text{Cho } f'(x) < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)x^2 < 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 3$$

Suy ra hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(-1;3)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. **Sai**

$$\text{Cho } f'(x) > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)x^2 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 3 \end{cases}$$

Ta lập được bảng biến thiên $f(-1)$

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-1)$	$f(3)$	$+\infty$	

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Theo bảng biến thiên thì $-1 < 3$ nhưng $f(-1) > f(3)$ nên hàm số $y = f(x)$ không thể đồng biến trên $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$.

d) Hàm số $y = f(3x)$ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$. **Đúng**

$$\begin{aligned} \text{Do } f'(x) &= (x+1)(x-3)x^2 \text{ nên ta có } y' = [f(3x)]' = 3f'(3x) = 3(3x+1)(3x-3)(3x)^2 \\ &= 3f'(3x) = 27x^2(3x+1)(3x-3). \end{aligned}$$

$$\text{Điều kiện hàm } y = f(3x) \text{ nghịch biến là } y' < 0 \Leftrightarrow 27x^2(3x+1)(3x-3) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < x < 1$$

Hàm số chỉ nghịch biến trên $\left(-\frac{1}{3}; 1\right)$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	1	3	1	$+\infty$	

- Giá trị cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 3.
- Hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$.
- $f(-10) > f(-3)$.
- Đồ thị hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh tam giác có diện tích bằng 4.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

- Giá trị cực đại của hàm số bằng 3. **Đúng**
- Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-2; 0)$ và $(2; +\infty)$. **Đúng**
- $f(-10) > f(-3)$. **Đúng** vì hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$ nên $f(-10) > f(-3)$.
- Đồ thị hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị là ba đỉnh tam giác có diện tích bằng 4. **Đúng**

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị $A(0; 3), B(-2; 1), C(2; 1)$

Tam giác ABC cân ở A . Gọi $H(0; 1)$ là trung điểm đoạn BC .

$$\text{Ta có } AH = 2, BC = 4. \text{ Diện tích } ABC \text{ là } S = \frac{1}{2} AH \cdot BC = 4.$$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		3		$+\infty$		

- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;3)$ và $(0;+\infty)$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$.
- c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$.
- d) Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y''	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$		3		$+\infty$		

- a) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;3)$ và $(0;+\infty)$ **Sai**.

Vì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$.

- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(2;+\infty)$ **Đúng**.

Vì hàm số đồng biến trên các khoảng $(-1;0)$ và $(1;+\infty)$

- c) Đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$

Đúng

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ không âm là $A(0;3)$ và $B(1;0)$ nên đường

thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số với hoành độ không âm là $\frac{x}{1} + \frac{y}{3} = 1$.

d) Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 3 **Đúng**.

Trần_Tuấn_Anh

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực trị với hoành độ không âm là $A(0;3)$, $B(1;0)$ và $C(-1;0)$

nên diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}|y_A - y_B| \cdot |x_B - x_C| = \frac{1}{2}|3 - 0| \cdot |1 + 1| = 3$.

Câu 5: Đồ thị hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x$

a) Hàm số $f(x)$ luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-1;1)$.

c) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x_0 = -1$.

d) Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai cực trị A và B . Điểm $M(0;-1)$ thuộc đường thẳng AB .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

$$y = f(x) = x^3 - 3x \text{ có } f'(x) = 3x^2 - 3; f'(0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

BXD:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+

Từ BXD ta thấy

a) Sai.

b) Đúng.

c) Đúng (Do y' đổi dấu từ - sang + khi qua 1 nên $x=1$ là điểm cực tiểu).

d) Sai. Ta có đồ thị có 2 điểm cực trị là $A(-1;2), B(1;-2)$ có pt đường thẳng qua 2 điểm A, B là $2x + y = 0$ nên điểm $M(0;-1)$ không thuộc đường thẳng **AB**.

Câu 6: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			1			-2	$+\infty$

Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2;0)$.

b) $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

c) $\forall x_1, x_2 \in (2; +\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

d) $\forall x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty), f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Dựa vào BBT, ta có: $f'(x) > 0, \forall x \in (-2; 0)$. Suy ra $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Vậy a) đúng.

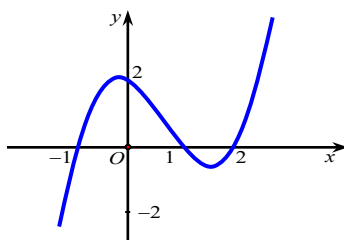
b) Tương tự b) sai.

c) Trên khoảng $(2; +\infty)$ hàm số đồng biến nên $\forall x_1, x_2 \in (2; +\infty), x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$. Do đó

c) đúng.

d) Theo BBT, ta có $f(-2) = f(2) = -2$ nên d) sai.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $f'(x)$ như hình dưới đây.



Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

a) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Hàm số $y = f(x)$ có ba điểm 3 điểm cực trị.

d) Hàm số $y = f(3 - x^2)$ có 6 điểm cực trị

Lời giải

a) sai	b) đúng	c) đúng	d) sai

Từ đồ thị của hàm số $f'(x)$ ta có

$$+ f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

+ Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$						

- a) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ là sai.
- b) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ là đúng.
- c) Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ có ba điểm 3 điểm cực trị là đúng
- d) Ta có $y = f(3 - x^2)$

$$+ y' = -2x \cdot f'(3 - x^2)$$

$$+ y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(3 - x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 3 - x^2 = -1 \\ 3 - x^2 = 1 \\ 3 - x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

Do $y' = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(3 - x^2)$ có 7 điểm cực trị

Vậy d) sai.

Câu 8: Cho hàm số $f(x) = \ln x$, $\forall x \in (0; +\infty)$. Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

- a) Hàm số trên luôn đồng biến trên tập xác định.
- b) Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có tập xác định là $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.
- c) Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có một điểm cực trị.
- d) Có 6 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x^2 - mx)$ luôn đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Ta có: $y' = f'(x) = (\ln x)' = \frac{1}{x} > 0 \forall x \in (0; +\infty)$. Vậy hàm số luôn đồng biến trên tập xác định.

b) Ta có: $f(x^2 - 2x) = \ln(x^2 - 2x)$.

ĐKXĐ: $x^2 - 2x > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x < 0 \end{cases}$. Vậy $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

c) Ta có: $[f(x^2 - 2x)]' = [\ln(x^2 - 2x)]' = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} \forall x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Xét $[f(x^2 - 2x)]' = 0 \Leftrightarrow \frac{2x - 2}{x^2 - 2x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ (KTĐK). Vậy hàm số không có cực trị.

d) Ta có: $y = f(x^2 - mx) = \ln(x^2 - mx)$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

$$y_{\text{cbt}} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - mx > 0 \\ \left[f(x^2 - mx) \right]' = \frac{2x - m}{x^2 - mx} > 0 \quad \forall x \in (3; +\infty). \end{cases}$$

$$y_{\text{cbt}} \Leftrightarrow \begin{cases} x > m \\ x > \frac{m}{2} \Leftrightarrow x > m \quad \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 3 \end{cases}$$

Do m là số nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 3\}$. Có ba giá trị nguyên dương của m

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x + 1}$. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

a) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -5)$.

b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

c) Với mọi $a, b \in (1; +\infty)$ và $a < b$ thì $f(a) < f(b)$.

d) Gọi A, B là 2 điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Đường thẳng AB cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng.

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{-x^2 - 2x}{(x+1)^2}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -2$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	6	$+\infty$	2	$-\infty$	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -2)$ và $(0; +\infty)$. Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ là khẳng định đúng.

b) Sai.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$ là khẳng định sai vì $y = f(x)$ không xác định tại $x = -1 \in (-2; 0)$.

c) Sai.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$ nên với mọi $a, b \in (1; +\infty)$ và $a < b$ thì $f(a) > f(b)$.

Do đó, khẳng định c sai.

d) Đúng.

Đường thẳng AB có phương trình: $y = \frac{(-x^2 + 2x + 2)'}{(x+1)'} = -2x + 2$.

Phương trình hoành độ giao điểm của AB và Ox có dạng: $-2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Vậy AB cắt Ox tại điểm $M(1; 0)$. Vậy khẳng định d đúng.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$		
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	0		$-\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$	0

Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Trên khoảng $(4; +\infty)$ thì $y' < 0$.

b) Trên khoảng $(-4; +\infty)$ thì $y' > 0$.

c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 4)$.

d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng.

Từ bảng biến thiên, ta có $y' < 0$ trên khoảng $(4; +\infty)$

b) Sai.

Từ bảng biến thiên, ta có $y' > 0$ trên khoảng $(-4; 4)$ và $y' < 0$ trên khoảng $(4; +\infty)$.

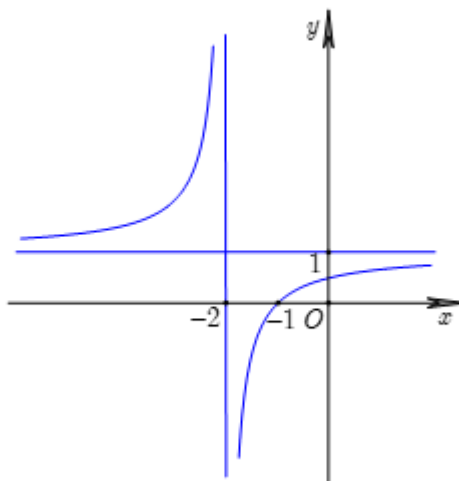
c) Đúng.

Từ bảng biến thiên, ta có trên khoảng $(-4; 4)$ đồ thị hàm số có hướng đi lên từ trái qua phải nên hàm số đồng biến.

d) Đúng.

Vì dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

b) Sai

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

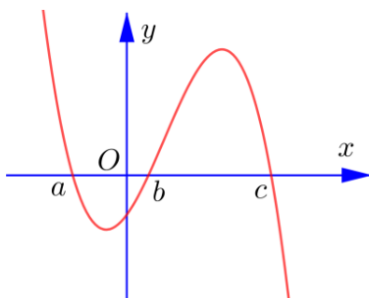
c) Đúng

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

d) Đúng

Từ đồ thị hàm số, ta có hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 12: Đồ thị của đạo hàm bậc nhất $y = f'(x)$ của hàm số $f(x)$ được cho trong hình dưới đây.



Trong mỗi ý ở câu sau, hãy chọn đúng hay sai.

- a) Với $\forall x \in (-\infty; a)$ thì $f'(x) > 0$.
- b) Với $\forall x \in (a; c)$ thì $f'(x) < 0$.
- c) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(b; c)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(c; +\infty)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm dưới trục hoành nên với $\forall x \in (-\infty; a)$ $f'(x) < 0$.

b) Sai.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy trên khoảng $(a; b)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm dưới trục hoành và trên khoảng $(b; c)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm trên trục hoành nên với $\forall x \in (a; b)$ $f'(x) < 0$ và với $\forall x \in (b; c)$ $f'(x) > 0$.

c) Đúng.

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy trên khoảng $(b; c)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số đồng biến trên khoảng $(b; c)$.

d) Đúng

Từ đồ thị của hàm số $y = f'(x)$, ta thấy trên khoảng $(c; +\infty)$ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ nằm trên trục hoành nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(c; +\infty)$.

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{x-1}{x+m}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m \geq -1$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ khi $m \geq 1$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$ khi $m \leq 5$.
- d) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 7)$ khi $m \geq 2$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Ta có hàm số $y = \frac{x-1}{x+m}$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{m+1}{(x+m)^2}.$$

- a) Sai:** Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

b) Đúng: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \notin (-1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 1.$$

c) Sai: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \notin (-\infty; -5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 5$$

d) Đúng: Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; 7)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m+1 > 0 \\ -m \notin (-2; 7) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ -m \leq -2 \\ -m \geq 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \geq 2 \\ m \leq -7 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Câu 14: Cho hàm số $y = 2x^3 - 3(2m+1)x^2 + 6m(m+1)x + 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Không tồn tại m để hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

b) Khi $m > 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Khi $m = \frac{5}{6}$ thì hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

d) Khi $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 6x^2 - 6(2m+1)x + 6m(m+1)$.

a) Đúng: Để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6 < 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \text{ (vô lí).}$$

Vậy không tồn tại m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Sai: Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (vô lí).}$$

Vậy không tồn tại m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

c) Sai: Vì $a = 2 > 0$ nên hàm số đã cho nghịch biến trên một đoạn khi và chỉ khi phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (2m+1)^2 - 4m(m+1) > 0 \Leftrightarrow 1 > 0 \Leftrightarrow m \in \mathbb{R}$.

Theo định lý Vi-ét, ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m(m + 1) \end{cases}$$

Để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2 thì

$$\begin{aligned} |x_1 - x_2| = 2 &\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 4 \\ &\Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4m(m + 1) = 4 \Leftrightarrow 1 = 4 \text{ (vô lý).} \end{aligned}$$

Vậy không tồn tại m để hàm số đã cho nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng 2.

d) Đúng: Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ thì ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 4m(m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 1 \leq 0 \text{ (vô lý).}$$

Trường hợp 2: Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \leq 2 &\Leftrightarrow x_1 - 2 < x_2 - 2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 4 < 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 \geq 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ 2m - 3 < 0 \\ m(m + 1) - 2(2m + 1) + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \\ m < \frac{3}{2} \\ m \in (-\infty; 1] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 1]. \end{aligned}$$

Vậy $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Câu 15: Cho một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $80(cm).50(cm)$, người ta cắt đi ở bốn góc của tấm tôn bốn hình vuông bằng nhau để khi gập lại được một chiếc hộp (không nắp). Gọi cạnh hình vuông được cắt đi là $x(cm)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Điều kiện của x là $0 < x < 50$.
- b) Thể tích V của hộp là: $V = x(80 - x)(50 - x)$.
- c) Thể tích của hình hộp khi $x = 10(cm)$ là $28000(cm^3)$.
- d) Thể tích của hình hộp lớn nhất là $18000(cm^3)$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

Gọi cạnh hình vuông được cắt đi là $x(cm)$, $0 < x < 25$

Thể tích V của hộp là: $V = x(80 - 2x)(50 - 2x)$.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Xét hàm số $f(x) = x(80 - 2x)(50 - 2x)$ ($0 < x < 25$).

Với $x \in (0; 25)$, ta có:

$$f'(x) = 12x^2 - 520x + 4000; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10.$$

Bảng biến thiên:

x	0	10	25	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

Suy ra V đạt giá trị lớn nhất bằng $18000 (cm^3)$ khi $x = 10$.

- a) Sai.
- b) Sai.
- c) Sai.
- d) Đúng.

Câu 16: Cho hàm số $y = x^3 - 3mx^2 + 3(2m - 1)x + 5m - 4$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Khi $m = 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- b) Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$ với mọi $m \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- c) Khi $m \leq \frac{3}{2}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; 3)$.
- d) Khi $m \leq 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + (6m - 3)$.

a) Đúng: Để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 3(6m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Vậy $m = 1$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

b) Sai: Ta có $y' = 3x^2 - 6mx + (6m - 3)$ và do $a = 3 > 0$ nên không tồn tại m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Đúng: Vì $a = 3 > 0$ nên hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(2; 3)$

$$\Leftrightarrow y' \geq 0 \forall x \in (2; 3) \Leftrightarrow 3x^2 - 6mx + (6m - 3) \geq 0 \quad \forall x \in (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow m(2 - 2x) \geq 1 - x^2 \quad \forall x \in (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1 - x^2}{2 - 2x} \quad \forall x \in (2; 3)$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1 + x}{2} < \frac{3}{2} \quad \forall x \in (2; 3).$$

d) Sai: Để hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$ thì ta xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 9m^2 - 3(6m - 3) \leq 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Trường hợp 2: Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$5 \leq x_1 < x_2 \Leftrightarrow 0 \leq x_1 - 5 < x_2 - 5 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 - 10 > 0 \\ x_1 x_2 - 5(x_1 + x_2) + 25 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9m^2 - 18m + 9 > 0 \\ 2m - 10 > 0 \\ 2m - 1 - 5 \cdot 2m + 25 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ m > 5 \\ m \leq 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \emptyset$$

Vậy $m = 1$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 5)$.

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				-3			$+\infty$
			$\searrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\nearrow$	
			-4			-4		

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Điểm cực đại của hàm số là $x = 0$.

b) Giá trị cực tiểu của hàm số bằng 1.

c) Hàm số $y = |f(x)|$ có 3 cực trị.

d) Hàm số $y = f(|x|)$ có 5 cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai

a) Đúng: Điểm cực đại của hàm số là $x = 0$

b) Sai: Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -4

c) Sai: Hàm số $y = f(x)$ có 3 cực trị và đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt nên hàm số $y = |f(x)|$ có 5 cực trị.

d) Sai: Vì hàm số $y = f(x)$ là hàm trùng phương nên $y = f(|x|) = f(x)$ có 3 cực trị

Câu 18: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$.

b) Hàm số đã cho có 3 cực trị.

c) Hàm số $y = f(|x|)$ có 3 cực trị.

d) Hàm số $y = f(-2x+1)$ có 5 cực trị.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

Ta có BBT của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$						

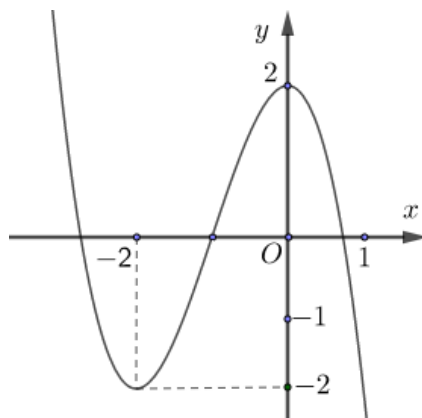
a) Sai: Điểm cực đại của hàm số là $x = 0$

b) Đúng: Hàm số có 3 cực trị.

c) Đúng: Hàm số $y = f(|x|)$ có 3 cực trị.

d) Sai: Vì số cực trị của hàm số $y = f(-2x+1)$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$

Câu 19: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$.
- b) Hàm số đã cho có 2 cực trị.
- c) Hàm số $y = |f(x)|$ có 5 cực trị.
- d) Hàm số $y = f(-x^2 + x)$ có 3 cực tiểu.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai: Điểm cực đại của hàm số là $x = 0$.

b) Đúng: Hàm số có hai cực trị.

c) Đúng: Hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị và đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y = |f(x)|$ có 5 cực trị.

d) Đúng: Từ đồ thị ta có hàm số bậc ba $y = f(x)$ có hai điểm cực trị $x = -2; x = 0$

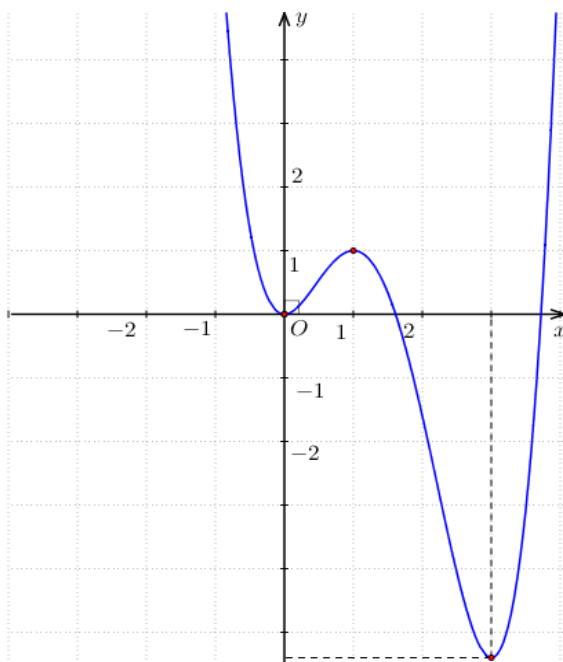
Đặt $u = -x^2 + x$. Ta có $u' = -2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

Bảng biến thiên của hàm số $y = f(-x^2 + x)$

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$					$+\infty$		
u	$-\infty$	-2	0	$\frac{1}{4}$	0	-2	$-\infty$		
$f(u)$	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$f\left(\frac{1}{4}\right)$	$\searrow$	2	$\searrow$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(-x^2 + x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 20: Cho hàm đa thức bậc năm $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ trên $\mathbb{R}$ như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số đạt cực đại tại $x = 3$.
- b) Hàm số đã cho có 3 cực trị.
- c) Hàm số $y = f(3x - 2024)$ có 2 cực trị.
- d) Hàm số $g(x) = f(x) + 2x$ có 3 cực trị.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

Ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 3 điểm có hoành độ lần lượt là $0, a, b$.

Ta có BBT của hàm số $y = f(x)$

x	0		a		b	
$f'(x)$	+	0	+	0	-	0
$f(x)$						

a) Sai: Điểm cực đại của hàm số là $x = a$.

b) Sai: Hàm số có hai cực trị

c) Đúng: Vì số cực trị của hàm số $y = f(3x - 2024)$ bằng số cực trị của hàm số $y = f(x)$.

d) Sai: Ta có $g'(x) = f'(x) + 2$

Phương trình $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2$ có đúng 2 nghiệm bội lẻ nên hàm số $g(x) = f(x) + 2x$ có đúng 2 cực trị.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$				
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$		-2		-1		-2		$+\infty$

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.
- b) Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là 0 .
- c) Hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực tiểu.
- d) Hàm số $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) + 2020$ có 7 điểm cực trị.

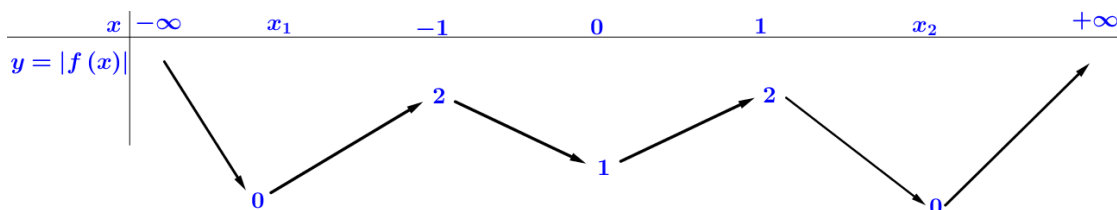
Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng.

b) Sai. Giá trị cực đại của hàm số $y = f(x)$ là -2 .

c) Đúng. Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra được BBT của hàm số $y = |f(x)|$



Ta thấy hàm số có 3 điểm cực tiểu.

d) Sai. Ta có $g(x) = f^3(x) + 3f^2(x) + 2020$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x)[3f^2(x) + 6f(x)] = 3f'(x)f(x)[f(x) + 2]$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = -2 \end{cases}$$

Dựa vào BBT của hàm số $y = f(x)$ ta thấy

$$\text{PT: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0; x = \pm 1$$

$f(x) = 0$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ là hai nghiệm đơn

$f(x) = -2$ có 2 nghiệm kép là $x = \pm 1$

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm đơn nên hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị

Câu 22: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$				4		$-\infty$

$+\infty \searrow \quad \nearrow 4 \searrow$
 $\quad \quad \quad 1 \quad \quad \quad$

- Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 4$.
- Giá trị cực tiểu của hàm số là $y = 1$.
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- Hàm số $y = f(x)$ có 3 số dương trong các hệ số a, b, c, d .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

- Sai: Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đạt cực đại tại điểm $x = 3$.
- Đúng: Từ bảng biến thiên suy ra Giá trị cực tiểu của hàm số là $y = 1$.
- Đúng: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 3)$ suy $(-1; 1) \subset (-2; 3)$.
- Đúng:

Ta có: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) $\Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Đồ thị hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $A(-2; 1), B(3; 4)$ nên ta có hệ:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(-2) = 1 \\ f(3) = 4 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(3) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -8a + 4b - 2c + d = 1 \\ 27a + 9b + 3c + d = 4 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 27a + 6b + c = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = -\frac{6}{125} \\ b = \frac{9}{125} \\ c = \frac{108}{125} \\ d = \frac{257}{125} \end{array} \right. . \text{ Trong các số } a, b, c, d \text{ có 3 số dương.}$$

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$, m là tham số.

- Với $m = 0$, hàm số có dạng $y = x^3 - 3x + 1$.
- Với $m = 0$, điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1; 2)$
- Hàm số $y = f(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(2m-1)x + 1$, đạt cực đại tại $x = 0$, khi $m = \frac{1}{2}$.
- Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$ khi và chỉ khi $m = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng: Thay $m = 0$ vào hàm số ta được $y = x^3 - 3x + 1$.

b) Sai: Điểm cực đại của đồ thị hàm số là $(-1; 3)$

c) Đúng: Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6mx + 3(2m - 1)$, $f''(x) = 6x - 6m$

Theo giả thiết $x_{cd} = 0$, suy ra $\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f''(0) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2m - 1) = 0 \\ -6m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

d) Đúng:

$$y' = 3x^2 - 6mx + 3(2m - 1)$$

$$\text{Ta có: } \Delta' = (-3m)^2 - 3 \cdot 3 \cdot (2m - 1).$$

Để hàm số luôn đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì $\Delta' \leq 0$

$$\Leftrightarrow 9m^2 - 18m + 9 < 0 \Leftrightarrow 9(m^2 - 2m + 1) \leq 0 \Leftrightarrow 9(m - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow m = 1.$$

Câu 24: Cho hàm số $y = f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + (m - 1)x^2 + (m - 3)x + 2$, trong đó m là tham số.

Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

a) $y' = -x^2 + 2(m - 1)x + m - 3$.

b) Khi $m = 0$, hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

c) Có ít nhất một giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Có tất cả 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng.

$$\text{Ta có: } y' = -x^2 + 2(m - 1)x + m - 3.$$

b) Đúng.

$$\text{Với } m = 0, \text{ ta có: } y = -\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2.$$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$y' = -x^2 - 2x - 3 < 0, \forall x \in \mathbb{R}. \text{ Do đó, hàm số nghịch biến trên } \mathbb{R}.$$

c) Sai.

$$\text{Để hàm số đồng biến trên } \mathbb{R} \text{ thì } y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 > 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \text{ (vô lí)}.$$

Do đó, không có giá trị của tham số m để hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

d) Sai.

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y' = -x^2 + 2(m - 1)x + m - 3.$$

$$\Delta' = (m - 1)^2 + m - 3 = m^2 - m - 2.$$

Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi $y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m^2 - m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 2.$$

Các giá trị nguyên của m thỏa mãn là: $-1; 0; 1; 2$ (4 giá trị).

Câu 25: Cho hàm số $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau?

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.
- b) Hàm số có đạo hàm là $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.
- c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $M(1;1)$ khi $m = \frac{17}{7}$.
- d) Với $m \geq \frac{2}{3}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $[2; +\infty)$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai: Ta có $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Hàm số có đạo hàm là $y' = mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2)$.

c) Đúng: Đồ thị hàm số đã đi qua điểm $M(1;1)$ suy ra khi

$$1 = \frac{1}{3}m - (m-1) + 3(m-2) + \frac{1}{3} \Leftrightarrow m = \frac{17}{7}$$

d) Đúng: Với $m \geq \frac{2}{3}$ thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $[2; +\infty)$.

Hàm số đồng trên $[2; +\infty)$ khi và chỉ khi

$$y' \geq 0, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow mx^2 - 2(m-1)x + 3(m-2) \geq 0, \forall x \geq 2$$

$$\Leftrightarrow m(x^2 - 2x + 3) + 2x - 6 \geq 0, \forall x \geq 2 \Leftrightarrow m \geq \frac{6-2x}{x^2-2x+3}, \forall x \geq 2 \text{ (do } x^2 - 2x + 3 > 0, \forall x \geq 2).$$

Bài toán trở thành:

$$\text{Tìm } m \text{ để } f(x) = \frac{6-2x}{x^2-2x+3} \leq m, \forall x \geq 2.$$

$$\text{Ta có } f'(x) = \frac{2x^2 - 12x + 6}{(x^2 - 2x + 3)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 12x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \pm \sqrt{6}.$$

Bảng biến thiên:

x	2	$3 + \sqrt{6}$	$+\infty$
y'	–	0	+
y	$\frac{2}{3}$	$\frac{2 - \sqrt{6}}{2}$	0

Ta cần có: $\max_{[2; +\infty)} f(x) \leq m \Leftrightarrow m \geq \frac{2}{3}$. Đó là các giá trị cần tìm của tham số m .

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{x+4}{x+m}$ với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$
- Khi $m = 1$, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$
- Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow m < 4$.
- Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty) \Leftrightarrow -6 < m < 4$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) **Đúng:** Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \{-m\}$

b) **Đúng:** Khi $m = 1$, $y = \frac{x+4}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0, \forall x \neq -1$

Do đó, hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

c) **Đúng:** $y = \frac{x+4}{x+m} \Rightarrow y' = \frac{m-4}{(x+m)^2}$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow m - 4 < 0 \Leftrightarrow m < 4$.

d) **Sai:** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(6; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (6; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 4 \\ -m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -6 \leq m < 4.$$

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{mx+3m-4}{x-m}$ với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- Hàm số có hai điểm cực trị
- Khi $m = -1$, hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$
- Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow -4 < m < 1$

d) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$. Số phần tử của S là 3.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) **Sai:** Hàm số không có cực trị

b) **Sai:** Khi $m = -1$, $y = \frac{-x-7}{x+1} \Rightarrow y' = \frac{6}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1$

Do đó, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(-1; +\infty)$

c) **Đúng:** $y' = \frac{-m^2 - 3m + 4}{(x-m)^2}$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow -m^2 - 3m + 4 > 0 \Leftrightarrow -4 < m < 1$

d) **Đúng:** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty; -2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m^2 - 3m + 4 > 0 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 1 \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m < 1.$$

$S = \{-2; -1; 0\} \Rightarrow$ số phần tử của S là 3

Câu 28: Cho hàm số $y = \frac{-x+1}{x+m}$ với m là tham số, $x \neq -m$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) $y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \forall x \neq -m$.

b) Khi $m = -2$, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

c) Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định khi $m < -1$

d) Gọi S là tổng các giá trị nguyên của tham số m để hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -3)$. Khi đó $S = 9$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) **Đúng**

$$y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \forall x \neq -m.$$

b) **Đúng**

Khi $m = -2 : y' = \frac{1}{(x-2)^2} > 0 \forall x \neq 2$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 2)$ và $(2; +\infty)$

c) Đúng

$$y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \forall x \neq -m$$

Hàm số đồng biến trên từng khoảng khi $-m-1 > 0 \Leftrightarrow m < -1$

d) Sai

$$y' = \frac{-m-1}{(x+m)^2} \forall x \neq -m$$

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; -3)$ khi $\begin{cases} -m-1 < 0 \\ -m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -1 \\ m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 3$

$$S = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

Câu 29: Cho hàm số $y = \frac{mx+4m}{x+m}$ với m là tham số, $x \neq -m$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Khi $m = -1$, hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$
- b) Hàm số luôn có hai đường tiệm cận.
- c) Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên các khoảng xác định. Số phần tử của S là 3
- d) Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số nghịch biến trên $(5; +\infty)$. Khi đó $T = 32$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) Đúng

Khi $m = -1 : y' = \frac{5}{(x-1)^2} > 0 \forall x \neq 1$

Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

b) Sai

Khi $m = 0 : y = 0$ thì hàm số không có đường tiệm cận.

c) Đúng

$$y' = \frac{m^2-4m}{(x+m)^2} \forall x \neq -m$$

Hàm số nghịch biến trên từng khoảng khi $m^2 - 4m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$

$$S = \{1; 2; 3\}$$

d) Sai

$$y' = \frac{m^2 - 4m}{(x + m)^2} \quad \forall x \neq -m$$

Hàm số nghịch biến trên $(5; +\infty)$ khi $\begin{cases} m^2 - 4m < 0 \\ -m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < m < 4 \\ m \geq -5 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 4$

$$T = 1 + 2 + 3 = 6$$

Câu 30: Cho hàm số $y = \frac{(m+1)x^2 - 2mx + 6m}{x-1}$, (m là tham số). Các mệnh đề sau **đúng** hay **sai**?

a) Tập xác định của hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Với $m = 0$ thì hàm số có dạng $y = \frac{x^2}{x-1}$.

c) Hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$.

d) Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định khi và chỉ khi m thuộc $[a; b]$. Khi đó $a + 5b = 0$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng: Tập xác định hàm số đã cho là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) Đúng: Với $m = 0$ thì hàm số có dạng $y = \frac{x^2}{x-1}$.

c) Sai: Với $m = 0$: $y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{(x-1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

Từ BBT của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1} \Rightarrow$ Hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$

$\Rightarrow$ Hàm số không nghịch biến trên $(1; +\infty)$

$\Rightarrow$ Mệnh đề b sai

d) Sai: + TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Xét hai trường hợp

TH1: Khi $m = -1$, ta có hàm số $y = \frac{2x-6}{x-1}$ và $y' = \frac{4}{(x-1)^2} > 0, \forall x \in D$

Do đó hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định

Vậy, $m = -1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

TH2: Khi $m \neq -1$, ta có $y' = \frac{(m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m}{(x-1)^2}$

Đặt $g(x) = (m+1)x^2 - 2(m+1)x - 4m$ và ta có y' cùng dấu với $g(x)$

Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in D \Leftrightarrow g(x) \geq 0, \forall x \in D$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+1)^2 + 4m(m+1) \leq 0 \\ m+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)(5m+1) \leq 0 \\ m > -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq -\frac{1}{5}$$

Vậy tập hợp các giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu của bài toán là $\left[-1; -\frac{1}{5}\right]$

Câu 31: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} (C)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Ta luôn có $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$.

b) Đồ thị hàm số (C) có 2 điểm cực trị.

c) Điểm $M(0; -1)$ là giao điểm của trục tung với tiệm cận xiên của (C) .

d) Đồ thị hàm số (C) có 2 cực trị và đường thẳng đi qua 2 điểm cực trị có phương trình $y = 2x - 3$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng: Ta luôn có $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$.

b) Đúng: $y' = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x + 2)^2}$

Xét $y' = 0 \Rightarrow x^2 + 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \pm 2\sqrt{3}$.

Vậy đồ thị hàm số (C) có 2 điểm cực trị.

c) Sai: Khi $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 2} = x - 5 + \frac{12}{x + 2}$

Ta có
$$\begin{cases} y = x - 5 + \frac{12}{x+2} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{12}{x+2} = 0 \end{cases} \Rightarrow y = x - 5 \text{ là tiệm cận xiên}$$

Giao điểm của tiệm cận xiên với trục tung là điểm $M(0;5)$.

d) Đúng: $y' = \frac{x^2 + 4x - 8}{(x+2)^2}$

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cực trị của đồ thị hàm số (C) .

Đặt $y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x+2} = \frac{u(x)}{v(x)}, \begin{cases} u(x) = x^2 - 3x + 2 \\ v(x) = x + 2 \end{cases}$.

$$\Rightarrow y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)}.$$

Mặt khác:

$$y'(x_0) = \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)} = 0 \Rightarrow u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{u(x_0)}{v(x_0)} = \frac{u'(x_0)}{v'(x_0)} = 2x_0 - 3$$

Câu 32: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x}$ có đồ thị là (C) .

a) Đạo hàm y' của hàm số là $y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0$.

b) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

c) Giá trị cực đại của hàm số đã cho lớn hơn giá trị cực tiểu của hàm số.

d) Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) , diện tích tam giác OAB bằng 2.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng.

$$y = x - 1 + \frac{1}{x} \Rightarrow y' = 1 - \frac{1}{x^2}, \forall x \neq 0.$$

b) Đúng.

Ta có $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \neq 0.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	$+\infty$	1	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

c) **Sai.**

Ta có $y' = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}, \forall x \neq 0.$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-3	$+\infty$	1	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta có $y_{CB} = -3 < y_{CT} = 1.$

d) **Sai.**

Toạ độ hai điểm cực trị là $A(-1; -3), B(1; 1).$

$$OA = \sqrt{10}, OB = \sqrt{2}, AB = 2\sqrt{5}.$$

Đặt $p = \frac{OA + OB + AB}{2}$, áp dụng công thức Hê-rông ta có :

$$S = \sqrt{p(p - OA)(p - OB)(p - AB)} = 1.$$

Chú ý: HS có thể tính diện tích tam giác OAB theo các cách khác đã học.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$ có đồ thị là $(C).$

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$

- b) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(1;4)$.
- c) Hai điểm cực trị của đồ thị (C) đối xứng nhau qua điểm $I(1;3)$.
- d) Hàm số $g(x) = f(f'(x))$ có 2 điểm cực đại và 1 điểm cực tiểu.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) **Đúng.** Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b) **Sai.**

$$y' = f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, \forall x \neq 1.$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	-1	$-\infty$	7	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra khẳng định b) sai.

c) **Đúng.**

Hai điểm cực trị của đồ thị (C) đối xứng nhau qua điểm $I(1;3)$.

Hai điểm cực trị của (C) là $A(-1;-1), B(3;7)$.

Vì $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$ nên suy ra khẳng định c) đúng.

d) **Sai**

Ta có $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x-1} \Rightarrow f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2}, f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}, \forall x \neq 1.$

$$g'(x) = [f(f'(x))]' = f''(x) \cdot f'(f'(x)).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x) = 0 \text{ (ptvn)} \\ f'(f'(x)) = 0 \end{cases}$$

$$f'(f'(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = -1 \\ f'(x) = 3 \text{ (ptvn)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{(x-1)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -\sqrt{2} \\ x-1 = \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-\sqrt{2} \\ x = 1+\sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$1-\sqrt{2}$	0	$1+\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	$+$	0

Từ bảng xét dấu $g'(x)$ suy ra hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực đại và không có cực tiểu.

Câu 34: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx + m}{x + m}$. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Với $m = 1$ đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;1)$
- b) Với $m = 1$ hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2;0)$
- c) Với $m = 1$ đồ thị hàm số nhận $x = -2; x = 0$ làm hai điểm cực trị
- d) Có hai giá trị nguyên của tham số m để hàm số đạt cực đại tại $x = 2$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Với $m = 1$ ta được hàm số $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

Ta có $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên như sau

- a) Đúng: Khi $x = 0 \Rightarrow y = 1$ vậy đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm $A(0;1)$
- b) Đúng: Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên $(-2;0)$
- c) Sai: Từ bảng biến thiên ta thấy đồ thị hàm số nhận điểm $A(0;1)$ và điểm $B(-2;3)$ làm hai điểm cực trị

d) Sai: Đạo hàm. $y' = \frac{mx^2 + 2mx + m^2 - 1}{(x-m)^2}$

Hàm số đạt cực đại tại $x = 2$ nên $y'(2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases}$

Thử lại với $m = -1$ thì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$: không thỏa mãn.

Thử lại với $m = -3$ thì hàm số đạt cực đại tại $x = 2$: thỏa mãn.

Vậy chỉ có 1 giá trị nguyên âm của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán

Câu 35: Cho hàm số $y = \frac{x^2 + mx - 1}{x - 1}$ xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Với $m = 1$ đồ thị hàm số nhận đường thẳng $x = 1$ làm tiệm cận đứng
- b) Với $m = 1$ hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty, 1)$
- c) Với $m = 1$ hàm số nhận $x = 0; x = 2$ làm hai điểm cực trị
- d) Có 2024 giá trị nguyên dương của tham số $m \in (-2024; 2024)$ để hàm số có cực đại và cực tiểu

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$$\text{Với } m = 1 \text{ Ta có } y = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên sau:

Từ bảng biến thiên ta thấy

- a) đúng
- b) đúng
- c) sai
- d) sai vì

$$\text{Đạo hàm: } y' = \frac{x^2 - 2x - m + 1}{(x - 1)^2}. \text{ Đặt } f(x) = x^2 - 2x - m + 1$$

$$\text{Đề hàm số có cực đại và cực tiểu khi: } \begin{cases} \Delta'_{f(x)} > 0 \\ f(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 0$$

$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 1, 2, \dots, 2023$ vậy có 2023 giá trị nguyên thỏa mãn

Câu 36: Cho hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Khi $m = 1$ thì hàm số là $y = x^4 - 2x^2 + 1$.
- b)] Khi $m = 1$ thì hàm số có $y' = 4x^3 - 4$.
- c) Khi $m = 1$ thì hàm số có 3 cực trị.
- d) Đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt khi $m > 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng.

b) **Sai:** Vì $y' = 4x^3 - 4x$

c) **Đúng:** Vì khi $m = 1$ thì $y = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x^3 - 4x$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$. Do đó hàm số có 3 cực trị.

d) **Đúng:** Xét phương trình $x^4 - 2mx^2 + m = 0$.

Đặt $t = x^2, (t \geq 0)$ phương trình trở thành $t^2 - 2mt + m = 0$.

Yêu cầu bài toán tương đương với phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Điều này tương đương với $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m > 0 \\ 2m > 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$.

Câu 37: Cho hàm số $y = x^4 - (m-1)x^2 + m - 2$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

b) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ có ba cực trị.

c) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.

d) Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì $m \in (2; +\infty) \setminus \{3\}$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) **Đúng.**

b) **Sai:** Khi $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó hàm số có 1 cực trị.

c) **Sai:** Khi $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 2x$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến khi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

d) **Đúng:**

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^4 - (m-1)x^2 + m - 2 = 0$ (1)

Đặt $x^2 = t (t \geq 0)$

Phương trình trở thành $t^2 - (m-1)t + m - 2 = 0$ (2)

Yêu cầu bài toán trở thành tìm m để pt có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ S = t_1 + t_2 > 0 \\ P = t_1 t_2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)^2 > 0 \\ m-1 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (2; +\infty) \setminus \{3\}$$

Câu 38: Cho hàm số $y = f(x) = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ với m là tham số thực. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn.
- b) $f'(x) = 4x^3 - 2(m-1)x$.
- c) Khi $m = 0$ là hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; 0)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ khi và chỉ khi $m \in (-\infty; 2)$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

a) **Đúng:** $y = f(x) = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$ là hàm số bậc 4.

b) **Sai:** Vì $f'(x) = 4x^3 - 4(m-1)x$.

c) **Đúng:** Khi $m = 0$ thì $f(x) = x^4 + 2x^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 4x(x^2 + 1)$.

Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến khi $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

d) **Sai:** Ta có $f'(x) = 4x^3 - 4(m-1)x = 4x(x^2 - m + 1)$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 3)$

$$\Leftrightarrow 4x(x^2 - m + 1) \geq 0, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow m \leq x^2 + 1, \forall x \in (1; 3) \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Câu 39: Cho hàm số $y = f(x) = mx^4 + 2x^2 - 1$ với m là tham số thực. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc bốn.
- b) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
- c) Khi $m = 1$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- d) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right)$ khi và chỉ khi $m \in [-4; +\infty)$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) **Sai:** Vì khi $m = 0 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 1$ là hàm số $y = f(x)$ là hàm số bậc hai.

b) **Sai:** Khi $m = 0 \Rightarrow f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến khi $f'(x) > 0 \Rightarrow x > 0$.

c) **Đúng:** Khi $m = 1 \Rightarrow f(x) = x^4 + 2x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 4x = 4x(x^2 + 1)$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến khi $f'(x) > 0 \Rightarrow 4x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

d) **Đúng:** Ta có $f'(x) = 4mx^3 + 4x = 4x(mx^2 + 1)$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$
 $\Leftrightarrow 4x(mx^2 + 1) \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{x^2}, \forall x \in \left(0; \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow m \geq -4.$

Câu 40: Cho hàm số $y = -x^4 + 2mx^2 + 2$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Khi $m = 0$ thì hàm số là $y = -x^4 + 2$.
- b) Hàm số có $y' = -4x^3 + 2mx$.
- c) Khi $m = 1$ thì hàm số có 3 cực trị.
- d) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác vuông khi và chỉ khi $m = 1$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) **Đúng.**

b) **Sai:** Vì $y' = -4x^3 + 4mx$

c) **Đúng:** Vì khi $m = 1$ thì $y = -x^4 + 2x^2 + 2 \Rightarrow y' = -4x^3 + 4x$

Cho $y' = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$. Do đó hàm số có 3 cực trị.

d) **Đúng:** $y' = -4x^3 + 4mx = -4x(x^2 - m)$.

Hàm số có ba cực trị $\Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m > 0$.

Gọi $A(0; 2)$, $B(-\sqrt{m}, m^2 + 2)$, $C(\sqrt{m}, m^2 + 2)$ là ba điểm cực trị của đồ thị hàm số.

Vì $\triangle ABC$ cân tại A nên $\triangle ABC$ chỉ có thể vuông tại $A \Leftrightarrow \overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$.

Với $\overline{AB} = (-\sqrt{m}; m^2)$, $\overline{AC} = (\sqrt{m}; m^2) \Rightarrow -m + m^4 = 0 \Leftrightarrow m(m^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow m = 1$ (do $m > 0$).

Câu 41: Cho hàm số $f(x) = x^4 - 2mx^2 + 1$, với m là tham số. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.
- b) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ có một cực trị.
- c) Khi $m = 0$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$.
- d) Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ là 45.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) **Đúng.**

b) **Đúng:** Khi $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Do đó hàm số có 1 cực trị.

c) **Sai:** Khi $m = 0 \Rightarrow f(x) = x^4 + 1 \Rightarrow f'(x) = 4x^3$.

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến khi $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^3 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

d) **Đúng:** Ta có $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$

Theo đề $m > 0$ nên $y' = 0$ có 3 nghiệm phân biệt $x = -\sqrt{m}, x = 0, x = \sqrt{m}$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{m}$		0		$\sqrt{m}$	$+\infty$
y'	-	0	+	0	-	0	+

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ thì $y' \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow \sqrt{m} \leq 3 \Leftrightarrow m \leq 9$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Vậy tổng tất cả giá trị của m bằng 45.

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$?

a) Hàm số có 3 điểm cực trị.

b) Hàm số đồng biến trong khoảng $(-1; 1)$.

c) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số luôn có hệ số góc dương khi hoành độ tiếp điểm lớn hơn 1.

d) Hàm số $g(x) = f(3 - x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai

a) Đúng:

Theo đề ta có: $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$.

$$\text{Ta có: } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		1		4	$+\infty$
f'(x)	-	0	+	0	-	0	+
f(x)	$+\infty$						$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:

Hàm số có 3 điểm cực trị.

b) Đúng:

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$.

c) Sai:

Gọi $M(x; y)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $(C): y = f(x)$.

Khi đó tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm M có hệ số góc là: $k = f'(x)$.

Dựa vào bảng biến thiên, ta có:
$$\begin{cases} k = f'(x) < 0; \forall x \in (1; 4) \\ k = f'(x) > 0; \forall x \in (4; +\infty). \\ k = 0 \Leftrightarrow x = 4 \end{cases}$$

d) Sai:

Theo đề ta có: $f'(x) = (x^2 - 1)(x - 4)$.

Ta có: $g(x) = f(3 - x) \Rightarrow g'(x) = -f'(3 - x) = -((3 - x)^2 - 1)((3 - x) - 4)$.

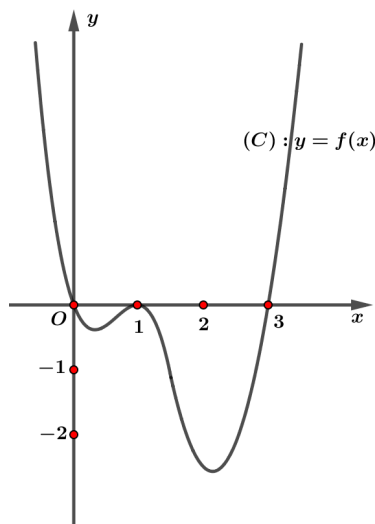
$\Rightarrow g'(x) = (x^2 - 6x + 8)(x + 1)$.

Ta có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 0 \\ x^2 - 6x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \\ x = 4 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-1	2	4	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$+\infty$				$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: hàm số $y = g(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.

Câu 43: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(-\infty; +\infty)$. Biết đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây.



- Điểm cực đại của đồ thị (C) là $x = 1$.
- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$.
- Đồ thị $(C') : y = f'(x)$ luôn cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt.
- Đồ thị của hàm số $y = [f(x)]^2$ có bao ba điểm cực tiểu?

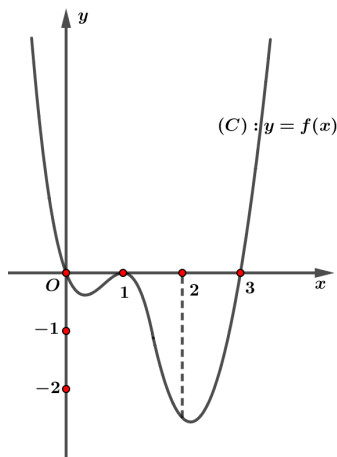
Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Sai:

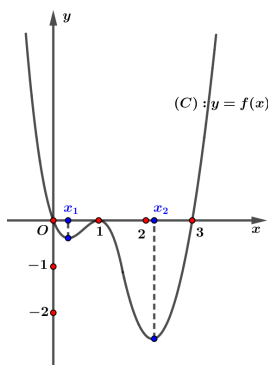
Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị (C) của hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại điểm $M(1;0)$.

b) Sai:



Dựa vào đồ thị (C) , ta thấy hàm số $y = f(x)$ vừa nghịch biến và đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$.

c) đúng:



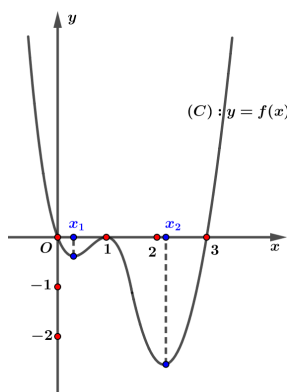
Dựa vào đồ thị ta có:

Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại $x = x_1, x = 1, x = x_2$.

Như vậy phương trình $f'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = x_1, x = 1, x = x_2$.

Tức là đồ thị $(C'): y = f'(x)$ cắt trục Ox tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x = x_1, x = 1, x = x_2$.

d) đúng:



Theo câu trên, từ đồ thị hàm số ta thấy hàm số đạt cực đại tại $x = 1$, đạt cực tiểu tại x_1, x_2 từ đó ta thấy hàm số $y = (f(x))^2$.

$$\Rightarrow y' = 2f(x) \cdot f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}.$$

Quan sát đồ thị ta có $f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \text{ (kép)} \\ x = 3 \end{cases}$ và $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 1 \\ x = x_2 \end{cases}$ với $x_1 \in (0;1)$ và

$$x_2 \in (2;3).$$

Xét hàm số $y = (f(x))^2$, ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = +\infty$.

Từ đó ta lập được bảng biến thiên của hàm số $y = (f(x))^2$:

x	$-\infty$	0	x_1	1	x_2	3	$+\infty$			
$y'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	y_1	$\searrow$	$\nearrow$	y_2	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

Suy ra hàm số có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 44: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ bên. Xét tính đúng, sai của các khẳng định sau:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$		-1		2	

a) Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = -2$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $(-2; -1)$.

c) Đường thẳng $y = x + 1$ đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số đã cho.

d) Hàm số $y = g(x) = f(2x - 3)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{5}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

a) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên, Dấu $f'(x)$ đổi từ âm sang dương khi qua điểm $x = -2$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = -2$.

b) Đúng: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là $(-2; -1)$.

c) Đúng. Tọa độ điểm cực trị $A(-2; -1); B(1; 2)$

Đường thẳng đi qua A,B nhận $\overline{AB} = (3; 3)$ làm vtcp nên ta có pt: $3(x-1) - 3(y-2) = 0$

$$\Rightarrow x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = x + 1.$$

d) Đúng. Ta có: $g'(x) = 2f'(2x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \\ 2x-3=2 \Rightarrow x=\frac{5}{2} \end{cases}$.

BBT

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	

Vậy: Hàm số $y = g(x) = f(2x-3)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = \frac{5}{2}$.

Câu 45: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$	1		5		$-\infty$

- Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.
- Hàm số có hai cực trị
- Khoảng cách giữa hai điểm cực trị là 3.
- Đường thẳng $y = 2x + 1$ đi qua hai điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng: Dựa vào bảng biến thiên nên $f(x)$ đạt cực tiểu tại $x = 0$.

b) Đúng: Quan sát bảng biến thiên, dấu $f'(x)$ đổi từ dương sang âm khi qua điểm $x = 2$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực đại tại điểm $x = 2$.

Dấu $f'(x)$ đổi từ âm sang dương khi qua điểm $x = 0$ nên hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 0$. Nên hàm số có hai cực trị.

c) Sai: Có $A(0,1); B(2,5)$ nên $\overline{AB}(2;4) \Rightarrow AB = 2\sqrt{5}$.

d) Đúng: Tọa độ điểm cực trị $A(-2;-1); B(1;2)$

Đường thẳng đi qua A,B nhận $\overline{AB} = (2;4)$ làm vtcp nên ta có pt: $2(x-0) - 1(y-1) = 0$
 $\Rightarrow 2x - y + 1 = 0 \Rightarrow y = 2x + 1$.

Câu 46: Cho hàm số $y = |x+1|(x-2)$. Khi đó:

- a) Hàm số có 2 điểm cực trị
- b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$
- c) Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$
- d) Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ và $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

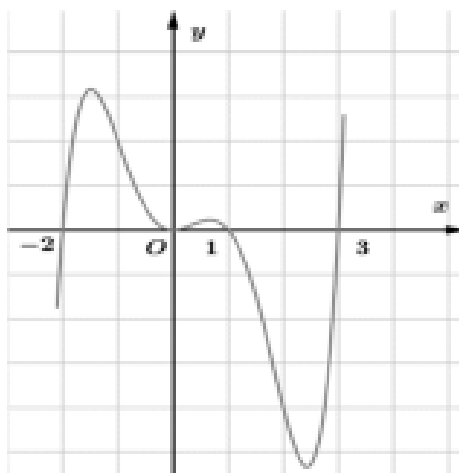
Ta có $y' = \begin{cases} 2x-1 & \text{khi } x \geq -1 \\ -2x+1 & \text{khi } x < -1 \end{cases}; y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	+		-	+
y		↖	↘	↗

Nhìn bảng biến thiên ta thấy

- a) Đúng
- b) Sai
- c) Đúng
- d) Sai

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x)$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên



Khi đó:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có 4 điểm cực trị

- b) Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$
- c) Hàm số $y = f(x^2)$ đồng biến trên khoảng $(\sqrt{3}; +\infty)$
- d) Hàm số $y = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

Từ đồ thị $y = f'(x)$ ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{cases}; f'(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -2 \\ 1 < x < 3 \end{cases}$

Ta có $g'(x) = 2x \cdot f'(x^2); g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 1 \\ x^2 = 3 \\ x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Ta có $f'(x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x^2 < 1 \\ x^2 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 1 \\ x \neq 0 \\ x > \sqrt{3} \\ x < -\sqrt{3} \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	-1	0	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$2x$		-	-	-	0	+	+
$f'(x^2)$	+	0	-	0	+	0	-
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$							

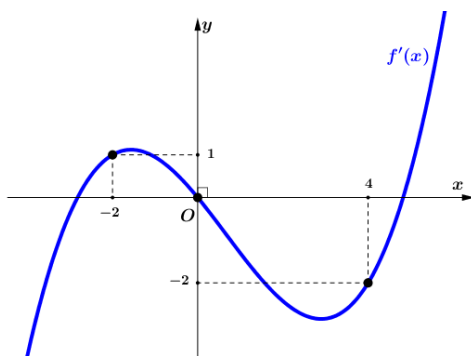
Từ bảng biến thiên ta có hàm số $g(x) = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị.

Vậy

- a) Sai
- b) Sai
- c) Đúng

d) Đúng

Câu 48: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$.
- c) Hàm số $h(x) = 5f(|2 - x|) + 2024$ có 5 điểm cực trị.
- d) Hàm số $g(x) = 4f(x^2 - 4) + x^4 - 8x^2$ có 4 điểm cực tiểu.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

a) Sai. Ta thấy đồ thị hàm số $y = f'(x)$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt nên hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

b) Đúng. Ta có:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \\ x = 0 \\ x = x_2 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Vậy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 0$

c) Sai. Số điểm cực trị của hàm số $h(x) = 5f(|2 - x|) + 2024$ bằng số điểm cực trị của hàm số $y = f(|x|)$. Mà $f(x)$ có một điểm cực trị dương nên $y = f(|x|)$ có 3 điểm cực trị.

d) Đúng. Ta có $g'(x) = 8x \cdot f'(x^2 - 4) + 4x^3 - 16x = 8x \left(f'(x^2 - 4) + \frac{x^2 - 4}{2} \right)$.

$$\text{Xét } f'(x) + \frac{x}{2} = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -\frac{x}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 4 \end{cases}.$$

Suy ra $f'(x) + \frac{x}{2}$ là đa thức bậc 3 có các nghiệm $x = -2, x = 0, x = 4$ nên có dạng

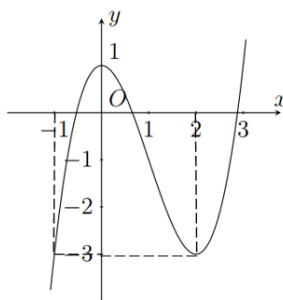
$$f'(x) + \frac{x}{2} = ax(x+2)(x-4), \left(a > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty \right)$$

$$\text{Do đó: } g'(x) = 8ax(x^2 - 4 + 2)(x^2 - 4)(x^2 - 4 - 4) = 8ax(x^2 - 2)(x^2 - 4)(x^2 - 8).$$

$$\text{Ta thấy } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2\sqrt{2} \\ x = 0 \end{cases} \text{ và } g'(x) \text{ đổi dấu từ âm sang dương khi đi qua các điểm}$$

$x = -2\sqrt{2}, x = -\sqrt{2}, x = \sqrt{2}, x = 2\sqrt{2}$ nên hàm số $g(x)$ đã cho có 4 điểm cực tiểu.

Câu 49: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.
- b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $x = 2$.
- c) Hàm số $y = f(f(x))$ có tất cả 5 điểm cực trị.
- d) Cho hàm số $h(x)$ có đạo hàm $h'(x) = f(x^3 - 3x^2 + m) + 3$. Khi đó có tất cả 10 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $h(x)$ có hoành độ cực trị thuộc đoạn $[-1; 2]$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai

- a) Đúng.
- b) Sai. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $M(2; -3)$.
- c) Đúng. Ta có:

$$y = f(f(x)) \Rightarrow y' = f'(x) \cdot f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0; x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy pt: $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt và $f(x) = 2$ có một nghiệm.

Vậy hàm số $y = f(f(x))$ có tất cả 5 điểm cực trị.

d) Sai. Ta có: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) + 3 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 - 3x^2 + m) = -3 \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 + m = -1 \\ x^3 - 3x^2 + m = 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3x^2 = -1 - m \\ x^3 - 3x^2 = 2 - m \end{cases} (*)$$

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2$ trên đoạn $[-1; 2]$

Ta có BBT:

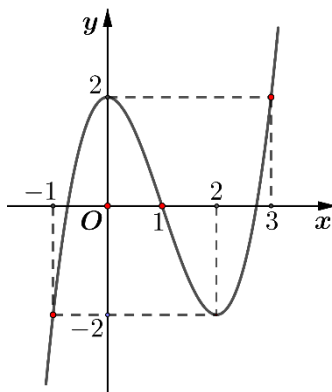
x	-1	0	2
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	-4	0	-4

Dựa vào bảng biến thiên và yêu cầu bài toán:

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq -1 - m \leq 0 \\ -4 \leq 2 - m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 3 \\ 2 \leq m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 6$$

Suy ra $m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Câu 50: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$ thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{2}$, hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Hàm số $y = f'(x)$ đạt cực đại tiểu tại $x = 2$.
- b) Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 2$.
- c) Hàm số $y = f(x^2)$ có 4 điểm cực trị.
- d) Hàm số $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$ có 7 điểm cực trị.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) Đúng.

b) Sai. Ta có: $f' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 (-1 < x_1 < 0) \\ x = 1 \\ x = x_2 (2 < x_2 < 3) \end{cases}$.

BBT:

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	0	+

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = 1$.

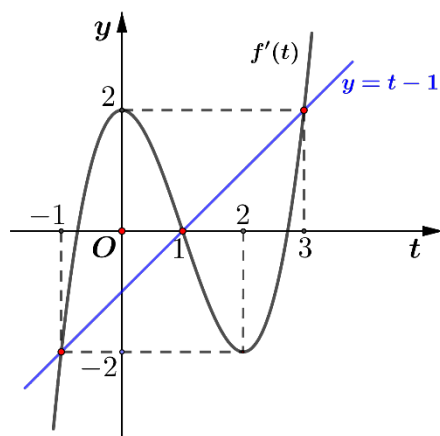
c) Sai. Ta có:

$$y = f(x^2) \Rightarrow y' = 2x \cdot f'(x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = x_1(L) \\ x^2 = 1 \\ x^2 = x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm \sqrt{x_2} \end{cases}$$

Vậy hàm số $y = f(x^2)$ có 5 điểm cực trị. Trần_Tuấn_Anh

d) Đúng. Xét hàm số $h(x) = 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2$. Ta có: $h'(x) = -6 \cdot f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) - 2x$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) = -\frac{x}{3} \Leftrightarrow f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1 \text{ (phương trình có dạng: } f'(t) = t - 1)$$



Dựa vào đồ thị ta thấy: $f'\left(1 - \frac{x}{3}\right) = \left(1 - \frac{x}{3}\right) - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \frac{x}{3} = -1 \\ 1 - \frac{x}{3} = 1 \\ 1 - \frac{x}{3} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$

• Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ là đồ thị hàm đa thức bậc ba, có hai điểm cực trị là $A(0; 2)$ và $B(2; -2)$. Suy ra: $f'(x) = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x + d$.

Do $f(0) = \frac{1}{2}$ nên $d = \frac{1}{2}$. Ta được: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + 2x + \frac{1}{2}$.

Ta có:

$$h(-6) = 18f(3) - 36 = 18[f(3) - 2] = 18\left(\frac{-1}{4} - 2\right) = -\frac{81}{2}$$

$$h(0) = 18f(1) - 0 = \frac{63}{2}$$

$$h(6) = 18f(-1) - 36 = 18[f(-1) - 2] = 18\left(\frac{-1}{4} - 2\right) = -\frac{81}{2}$$

• Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-6		0		6		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$				$\frac{63}{2}$				$+\infty$
		$\searrow$	$-\frac{81}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\frac{81}{2}$	$\nearrow$	
$g(x) = h(x) $	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{81}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{63}{2}$
				$\searrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0
						$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{81}{2}$
								$\searrow$	0
									$\nearrow$
									$+\infty$

Vậy hàm số $g(x) = \left| 18f\left(1 - \frac{x}{3}\right) - x^2 \right|$ có 7 điểm cực trị.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

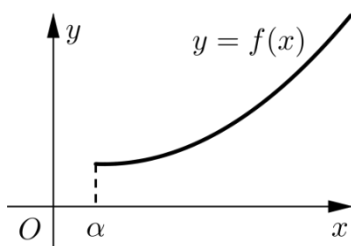
KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

I. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

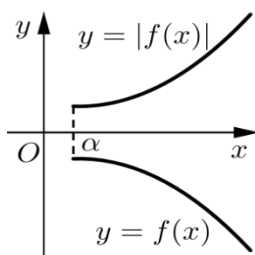
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng cách :
 - ☐ Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía trên trục Ox .
 - ☐ Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía dưới trục Ox .
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng cách :
 - ☐ Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía bên phải trục Oy .
 - ☐ Lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía bên phải trục Oy .
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |u(x)| \cdot v(x)$ bằng cách :
 - ☐ Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm trên miền $u(x) \geq 0$.
 - ☐ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm trên miền $u(x) < 0$.

II. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM $y = |f(x)|$ TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN, NỬA KHOẢNG CHO TRƯỚC

- Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $[\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi

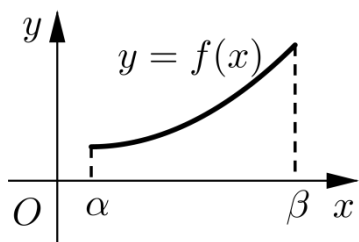


$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

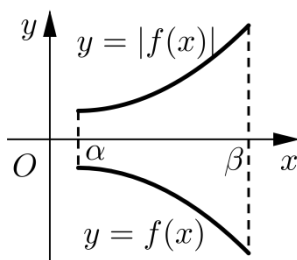


$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

- Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(\alpha; \beta)$ khi và chỉ khi



$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

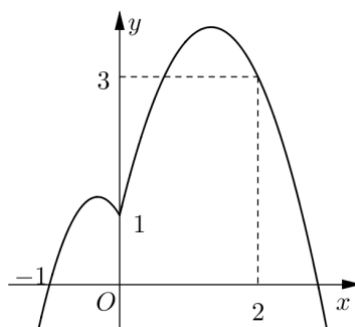


$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

- Các dạng đồng biến $y = |f(x)|$ trên $(-\infty; a], [\alpha; \beta]$ ta thực hiện tương tự.

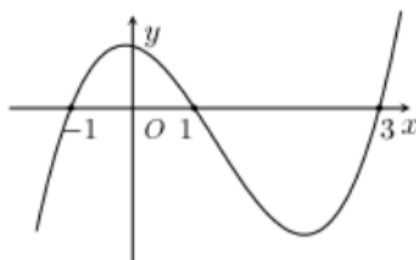
- Hàm số hồi nghịch biến làm ngược lại

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1) = 0$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



Xác định khoảng đồng biến của hàm số $y = |2f(x-1) - x^2|$.

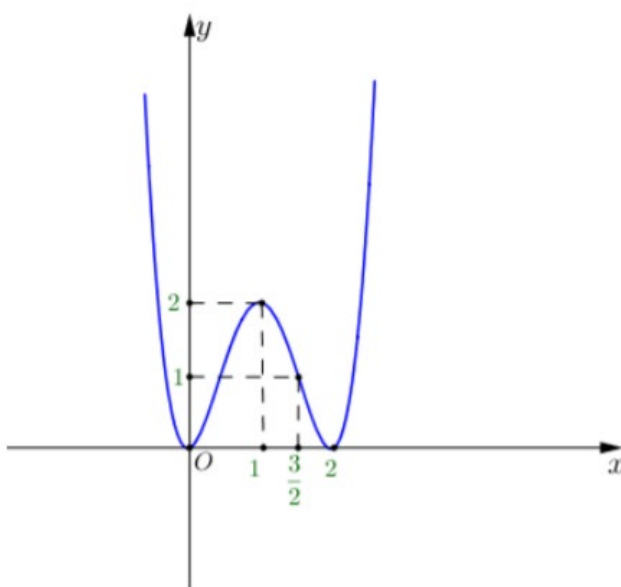
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(|x| + m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0; 10]$ để hàm số $g(x) = f(3|x - m| + m^2)$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$?

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2022; 2023)$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

- Câu 5:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; 20)$ để hàm số: $y = |x^3 - 2mx + 2m^2 - 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$?
- Câu 6:** Cho hàm số $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(4m+5)x^2 - (3m^2+5m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10; 10]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?
- Câu 7:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2023; 2023)$ để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 7 - m^2|$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- Câu 8:** Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2023; 2023)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 1 - m^2|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?
- Câu 9:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = f(2x-2)$ có đồ thị như hình dưới.



Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - m|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

- Câu 10:** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 2007$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x-1)|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$?
- Câu 11:** Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 4029$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x-1) + 2022|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$?
- Câu 12:** Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 15)$ để hàm số $y = g(x) = f(|x^2 + 3x - m|)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?
- Câu 13:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2025; 2025]$ để hàm số $y = |-x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

- Câu 14:** Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2023; 2023]$ của tham số thực m để hàm số $y = |x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?
- Câu 15:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-8x+m^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[0; 2023]$ để hàm số $g(x) = f(|1-x|)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?
- Câu 16:** Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tìm tổng các phần tử của S .
- Câu 17:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2022; 2022)$ để hàm số $y = |x^3 + (2m+1)x - 2|$ đồng biến trên $(1; 3)$?
- Câu 18:** Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = |x^5 + 2x^4 - mx^2 + 3x - 20|$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$?
- Câu 19:** Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(|x+m|)$ nghịch biến trên $(0; 1)$?
- Câu 20:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?
- Câu 21:** Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(3|x-m| + m^2)$ đồng biến trên $(5; +\infty)$?
- Câu 22:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m \in [0; 2023]$ để hàm số $g(x) = |x^3 - 3mx^2 - 3(m+3)x - m + 5|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?
- Câu 23:** Cho hàm số $y = f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+5)x^2 - (m^2+5m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023; 2023]$ để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?
- Câu 24:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; +\infty)$ để hàm số $y = |x^3 + (5-m)x + m^2 - 7|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?
- Câu 25:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; +\infty)$ để hàm số $y = |(m-1)x^3 - x^2 + 27 - m^2|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 1: TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

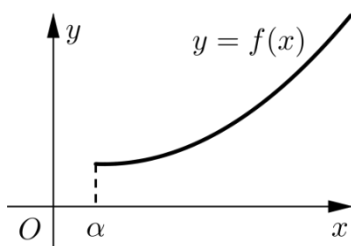
KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

I. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ CHỨA DẤU GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI.

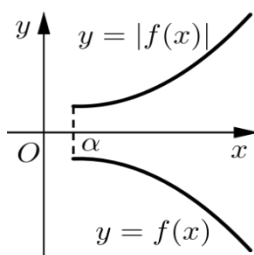
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(x)|$ bằng cách :
 - ☐ Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía trên trục Ox .
 - ☐ Lấy đối xứng qua Ox phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía dưới trục Ox .
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = f(|x|)$ bằng cách :
 - ☐ Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía bên phải trục Oy .
 - ☐ Lấy đối xứng qua trục Oy phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía bên phải trục Oy .
- Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy ra đồ thị của hàm số $y = |u(x)| \cdot v(x)$ bằng cách :
 - ☐ Giữ nguyên phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm trên miền $u(x) \geq 0$.
 - ☐ Lấy đối xứng qua trục Ox phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm trên miền $u(x) < 0$.

II. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM $y = |f(x)|$ TRÊN KHOẢNG, ĐOẠN, NỬA KHOẢNG CHO TRƯỚC

- Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $[\alpha; +\infty)$ khi và chỉ khi

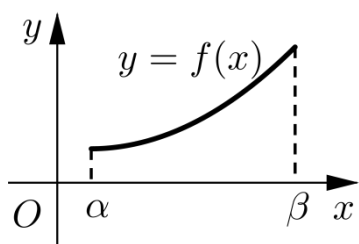


$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \geq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

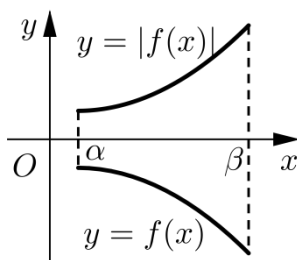


$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \leq 0, \forall x \in [\alpha; +\infty) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

- Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(\alpha; \beta)$ khi và chỉ khi



$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \geq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \geq 0 \end{cases}$$

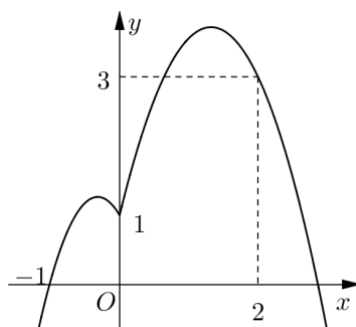


$$\checkmark \begin{cases} y'(x) \leq 0, \forall x \in (\alpha; \beta) \\ y(\alpha) \leq 0 \end{cases}$$

- Các dạng đồng biến $y = |f(x)|$ trên $(-\infty; a], [\alpha; \beta]$ ta thực hiện tương tự.

- Hàm số hồi nghịch biến làm ngược lại

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có $f(-1) = 0$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên.



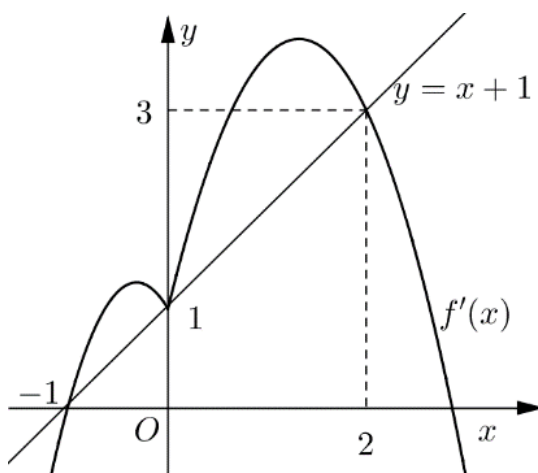
Xác định khoảng đồng biến của hàm số $y = |2f(x-1) - x^2|$.

Lời giải

ĐS: (0;3)

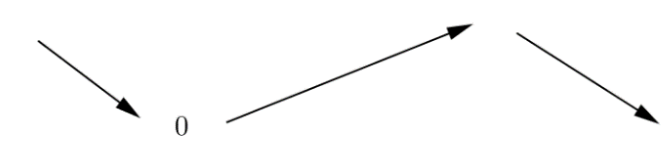
Đặt $g(x) = 2f(x-1) - x^2 \Rightarrow g'(x) = 2[f'(x-1) - (x-1) - 1]$

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = x+1$



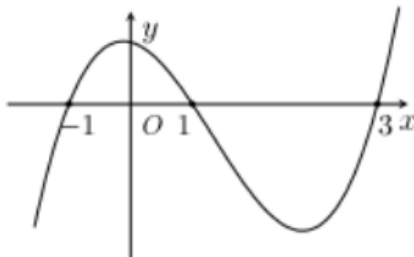
ta có: $g'(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x-1) > (x-1)+1 \Leftrightarrow -1 < x-1 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 3$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	
$g(x)$									

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số $y = |2f(x-1) - x^2|$ đồng biến trên khoảng $(0;3)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m thuộc đoạn $[-5;5]$ để hàm số $g(x) = f(|x|+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



Lời giải

ĐS: 5

TH 1: $x \geq 0$.

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$ vì $y' = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x) = f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Từ đồ thị ta có $g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+m < -1 \\ 1 < x+m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq x < -1-m \\ 1-m < x < 3-m \end{cases}$.

Hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq -1-m \\ 1-m \leq 1 \\ 2 \leq 3-m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}. \text{ Vì } m \in [-5;5] \text{ và } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } S = \{-5; -4; -3; 0; 1\}$$

TH 2: $x < 0$ vì $x \in (1;2)$ nên không có m

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [0;10]$ để hàm số $g(x) = f(3|x-m|+m^2)$ nghịch biến trên $(-\infty;1)$?

Lời giải

ĐS: 10

Xét hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	1	$+\infty$

Ta có $g'(x) = f'(3|x-m|+m^2) \cdot (3|x-m|+m^2)' = f'(3|x-m|+m^2) \cdot \frac{3(x-m)}{|x-m|}$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-m=0 & (1) \\ 3|x-m|+m^2=0 & (2) \end{cases}$$

TH1: Nếu $m=0 \Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow$ không thỏa mãn nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ nên trường hợp này bị loại.

TH2: Nếu $m>0 \Rightarrow$ phương trình $g'(x)=0 \Leftrightarrow x=m$

Ta có $3|x-m|+m^2 > 0 \forall x < 1 \Rightarrow f'(3|x-m|+m^2) > 0 \forall x \in (-\infty;1)$ nên $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x < m$.

$\Rightarrow$ hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;1) \Leftrightarrow g'(x) < 0 \forall x \in (-\infty;1)$
 $\Leftrightarrow (-\infty;1) \subset (-\infty;m) \Leftrightarrow 1 \leq m \Rightarrow m \in \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$.

Vậy có 10 giá trị thỏa mãn.

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên $m \in (-2022;2023)$ để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$.

Lời giải

ĐS: 2018

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$

Ta có $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1. \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-1
$f'(x)$	-	
$f(x)$	$+\infty$	$m-5$

Lấy đối xứng đồ thị hàm số $f(x)$ qua trục hoành ta được đồ thị hàm số $|f(x)|$. Từ bảng biến thiên

ta thấy hàm số $|f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow m-5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$.

Vì m nguyên và $m \in (-2022; 2023)$ suy ra $m \in \{5; 6; \dots; 17; 18; 2022\}$.

Vậy có tất cả 2018 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; 20)$ để hàm số: $y = |x^3 - 2mx + 2m^2 - 1|$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$?

Lời giải

ĐS: 21

Đặt: $f(x) = x^3 - 2mx + 2m^2 - 1$. Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 2m$.

Điều kiện để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$ có các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $f(x) \geq 0$ với mọi $x \in (1; 5)$ và $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2m \geq 0, \forall x \in (1; 5) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{(1;5)} \left(\frac{3}{2} x^2 \right) \\ 2m^2 - 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq m \leq \frac{3}{2} \\ m \leq 0 \end{cases}$$

Vì m nhận giá trị nguyên và $m \in (-20; 20)$ nên $m = \{-19, -18, \dots, 0, 1\}$.

Vậy có 21 giá trị của m thỏa mãn.

Trường hợp 2. $f(x) \leq 0$ với mọi $x \in (1; 5)$ và $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $x \in (1; 5)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2m \leq 0, \forall x \in (1; 5) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(1;5)} \left(\frac{3}{2} x^2 \right) \\ 2m^2 - 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{75}{2} \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Không tồn tại giá trị của m thỏa mãn.

Vậy có 21 giá trị của m thỏa mãn.

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(4m+5)x^2 - (3m^2+5m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-10;10]$ để hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$?

Lời giải:

ĐS: 1

Xét hàm số $g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(4m+5)x^2 - (3m^2+5m)x + \frac{2}{3}$

Ta có: $g'(x) = -x^2 + (4m+5)x - (3m^2+5m) = -(x-m)(x-3m-5)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(1;2)$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2)$$

$$\text{TH 1: } \begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} -6m^2 - 2m + 8 \leq 0 \\ -(x-m)(x-3m-5) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup [1; +\infty) \\ m \in [-1; 1] \end{cases} \Leftrightarrow m = 1.$$

$$\text{TH 2: } \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} -6m^2 - 2m + 8 \geq 0 \\ -(x-m)(x-3m-5) \leq 0 \end{cases}, \forall x \in (1;2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in \left[-\frac{4}{3}; 1\right] \\ m \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right] \cup [2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

Do m là số nguyên thuộc $[-10;10]$ nên $m = 1$.

Câu 7: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2023;2023)$ để hàm số $y = \left| x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 7 - m^2 \right|$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Lời giải

ĐS: 2024

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + (m+1)x + 7 - m^2$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + m + 1$$

Để $y = |f(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m + 1 \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ -m^2 + m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{(0;1)} (-3x^2 + 6x - 1) \\ -2 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ -2 \leq m \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 1$$

$a \in \{-2; -1; 0; 1\} \rightarrow 4$ giá trị

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 6x + m + 1 \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ -m^2 + m + 6 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(0;1)} (-3x^2 + 6x - 1) \\ \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 3 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 \\ \begin{cases} m \leq -2 \Leftrightarrow m \geq 3 \\ m \geq 3 \end{cases} \end{cases}$$

$a \in \{3; \dots; 2022\} \rightarrow 2020$ giá trị

Vậy có 2024 giá trị thỏa mãn.

Câu 8: Có bao nhiêu số nguyên m thuộc khoảng $(-2023; 2023)$ để hàm số $y = |2x^3 - 2mx + 1 - m^2|$ đồng biến trên $(1; +\infty)$?

Lời giải

ĐS: 5

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - 2mx + 1 - m^2$ có $f'(x) = 6x^2 - 2m$; $\Delta' = 12m$

Đồ thị hàm số $y = |f(x)| = |2x^3 - 2mx + 1 - m^2|$ được suy ra từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ (C) bằng cách:

- Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm trên Ox .
- Lấy đối xứng phần đồ thị (C) nằm dưới Ox qua Ox và bỏ phần đồ thị (C) nằm dưới Ox .

+ **Trường hợp 1:** $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \leq 0$. Suy ra $f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$.

$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -m^2 - 2m + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ -3 \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 0.$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-2023; 2023)$ ta được $m \in \{-3; -2; -1; 0\}$.

Ta có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán

+ **Trường hợp 2:** $\Delta' > 0 \Leftrightarrow m > 0$. Suy ra $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 ($x_1 < x_2$)

Ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y							

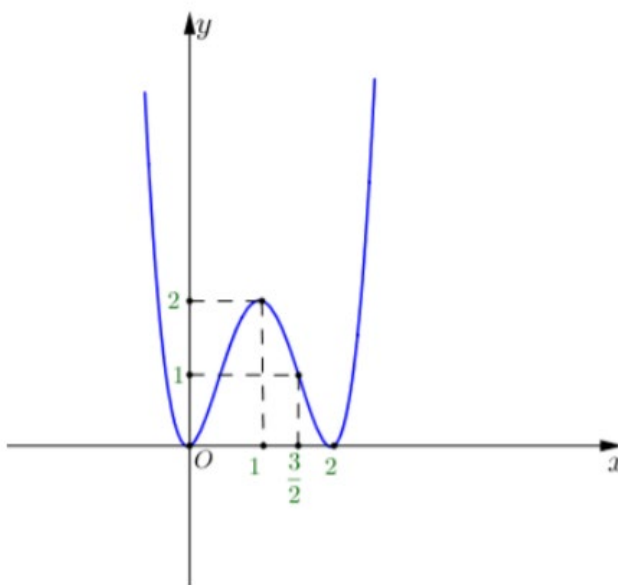
$$\text{Vậy yêu cầu bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ x_1 < x_2 \leq 1 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \sqrt{\frac{m}{3}} \leq 1 \\ -m^2 - 2m + 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq 3 \\ -3 \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1$$

Kết hợp với điều kiện $m \in \mathbb{Z}; m \in (-2023; 2023)$ ta được $m = 1$.

Ta có 1 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Từ và suy ra có tất cả có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 9: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = f(2x - 2)$ có đồ thị như hình dưới.



Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - m|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

Lời giải

ĐS: 3

$$\text{Ta có } g'(x) = 2f'(2x - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f'(-2) = 0 \\ x = 1 \Rightarrow f'(0) = 0 \\ x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0 \end{cases}$$

Từ đó, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$

x	$-\infty$	-2	0	1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$					$+\infty$

Diagram illustrating the function $f(x)$ and its derivative $f'(x)$ across various values of x .

The horizontal axis represents x , with marked values: $-\infty$, -2 , 0 , 1 , 2 , and $+\infty$.

The vertical axis represents the function values, with marked values: $+\infty$, 2 , 1 , and 0 .

The derivative $f'(x)$ is indicated by signs: $-$ (negative), 0 (zero), and $+$ (positive).

The function $f(x)$ is plotted as a continuous curve, showing a local minimum at $x = -2$ and a local maximum at $x = 0$. The curve passes through the points $(-\infty, +\infty)$, $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$, $(2, 0)$, and $(+\infty, +\infty)$.

Đặt $h(x) = 4f(\sin x) + \cos 2x - m$

Khi đó $h'(x) = 4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x$

Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \cos x, \sin 2x > 0 \\ \sin x \in (0; 1) \Rightarrow f'(\sin x) < 0 \end{cases} \Rightarrow h'(x) < 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Suy ra hàm số $h(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Do đó, hàm số $y = |h(x)|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow h(x) \geq 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow h\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 4f(1) - 1 - m \geq 0 \Leftrightarrow 3 - m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 3.$$

Kết hợp với điều kiện nguyên dương của $m \Rightarrow m \in \{1; 2; 3\} \Rightarrow$ có 3 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 10: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 2007$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x-1)|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$?

Lời giải

ĐS: 2006

Ta có $f'(x) = x^4 - 2x + m - 1$

Đặt $g(x) = f(x-1)$, để hàm số $y = |g(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$ thì xảy ra hai trường hợp sau

TH1: hàm số $g(x)$ không âm và nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(2) \geq 0 \\ g'(x) \leq 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \geq 0 \\ f'(x-1) \leq 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2008,8 \geq 0 \\ f'(t) \leq 0, \forall t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2008,8 \\ f'(t) \leq 0, \forall t < 1 \end{cases}$$

Xét $f'(t) \leq 0, \forall t < 1 \Leftrightarrow m \leq -t^4 + 2t + 1 = h(t), \forall t < 1$

Ta có BBT $h(t)$

t	$-\infty$	$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$	1
$h'(t)$	$+$	0	$-$
$h(t)$	$-\infty$	$\nearrow \approx 2,19$	$\searrow 2$

Từ BBT ta có $m \in \emptyset$. Vậy $m \in \emptyset$.

TH2: hàm số $g(x)$ không dương và đồng biến trên khoảng $(-\infty; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(2) \leq 0 \\ g'(x) \geq 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f'(x-1) \geq 0, \forall x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 2008,8 \leq 0 \\ f'(t) \geq 0, \forall t < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2008,8 \\ f'(t) \geq 0, \forall t < 1 \end{cases}$$

Xét $f'(t) \geq 0, \forall t < 1 \Leftrightarrow m \geq -t^4 + 2t + 1 = h(t), \forall t < 1 \Leftrightarrow m \geq 2,19$. Vậy $\{3; 4; \dots; 2008\}$.

Vậy có 2006 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 4029$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x-1) + 2022|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$?

Lời giải

ĐS: 2006

Đặt $t = x - 1$. Đặt $g(t) = f(t) + 2022, t \in (-\infty; 1)$.

$y(t) = |f(t) + 2022|$ nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ thì điều kiện là

$$\begin{cases} f(t) + 2022 < 0 \\ f'(t) > 0 \end{cases}, \forall t \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) + 2022 < 0 \quad (1) \\ t^4 - 2t + m - 1 > 0 \quad (2) \end{cases}, \forall t \in (-\infty; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{5} - 1 + (m-1)1 - 2007 < 0 \quad (1) \\ t^4 - 2t + m - 1 > 0 \quad (2) \end{cases}, \forall t \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{10056}{5} \quad (1) \\ t^4 - 2t + m - 1 > 0 \quad (2) \end{cases}, \forall t \in (-\infty; 1)$$

$$t^4 - 2t + m - 1 > 0 \Leftrightarrow m > -t^4 + 2t + 1, t \in (-\infty; 1).$$

$$\text{Đặt } h(t) = -t^4 + 2t + 1 \Rightarrow h'(t) = -4t^3 + 2 \Rightarrow h'(t) = 0 \Rightarrow t = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}.$$

Bảng biến thiên:

t	$-\infty$	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	1
$g'(t)$	+	0	-
$g(t)$	$-\infty \nearrow 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2.19 \searrow 0$		

Điều kiện $m > 1 + \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \approx 2.19$.

Từ và thì số giá trị nguyên của m là $2008 - 3 + 1 = 2006$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ biết $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-10; 15)$ để hàm số $y = g(x) = f(|x^2 + 3x - m|)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS: 13

Ta có: $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -3 \end{cases}$ yêu cầu bài toán khi và chỉ khi

$$g'(x) = \frac{2x+3}{|x^2+3x-m|} f'(|x^2+3x-m|) \geq 0, \forall x \in (0; 2),$$

$$\Leftrightarrow f'(|x^2+3x-m|) \geq 0, \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x^2+3x-m| \geq 1 \\ |x^2+3x-m| \leq -3 \end{cases} \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow |x^2+3x-m| \geq 1, \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-m \geq 1 \\ x^2+3x-m \leq -1 \end{cases} \forall x \in (0; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-1 \geq m \\ x^2+3x+1 \leq m \end{cases} \forall x \in (0; 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -1 \\ m \geq 11 \end{cases}$$

Mà $m \in (-10; 15), m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-9; \dots; -1; 11; 12; 13; 14\}$

Vậy có tất cả 13 giá trị nguyên m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 13: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2025, 2025]$ để hàm số $y = |-x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)|$ đồng biến trên khoảng $(0, 1)$.

Lời giải

ĐS: 2025

$$\text{Xét } f(x) = -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3)$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+2 \end{cases}.$$

Hàm số $y = \left| -x^3 + 3(m+1)x^2 - 3m(m+2)x + m^2(m+3) \right|$ đồng biến trên khoảng $(0,1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x) \text{ db } \forall x \in (0,1) \\ f(0) \geq 0 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (0,1) & (I) \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \text{ nb } \forall x \in (0,1) \\ f(0) \leq 0 \end{array} \right. & \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (0,1) & (II) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Giải (I)} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) \geq 0 \quad \forall x \in (0,1) \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 < 1 \leq m+2 \\ m^2(m+3) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ m \geq -3 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

$$\text{Giải (II)} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x^2 + 6(m+1)x - 3m(m+2) \leq 0 \quad \forall x \in (0,1) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 \leq 0 \\ m \geq 1 \\ m^2(m+3) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -2 \\ m \geq 1 \\ m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -3.$$

$$\text{Kết hợp (I) và (II) suy ra } \begin{cases} -1 \leq m \leq 0 \\ m \leq -3 \end{cases} \xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{m \in [-2025, 2025]} m \in \{-2025, -2022, \dots, -3, -1, 0\}.$$

Vậy có 2025 giá trị m thỏa mãn đề bài.

Câu 14: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc đoạn $[-2023; 2023]$ của tham số thực m để hàm số $y = \left| x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x \right|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS: 4045

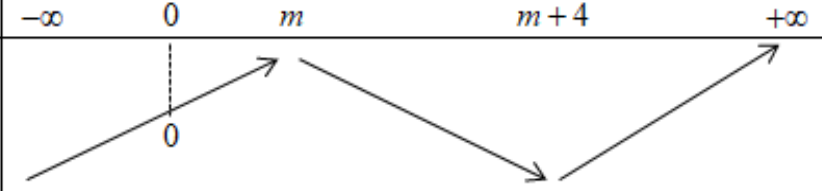
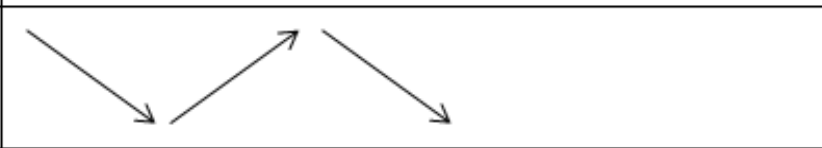
Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3(m+2)x^2 + 3m(m+4)x$ trên khoảng $(0; 2)$.

$$f'(x) = 3x^2 - 6(m+2)x + 3m(m+4) = 3[x^2 - 2(m+2)x + m(m+4)].$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+4 \end{cases}.$$

Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ luôn đi qua điểm $O(0; 0)$.

* Trường hợp 1: Nếu $m > 0$

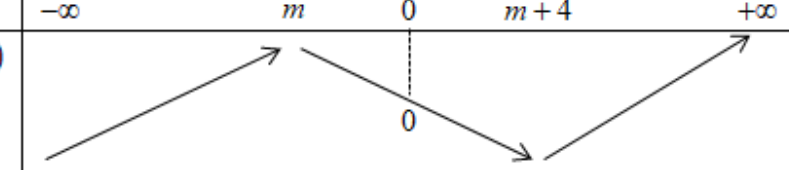
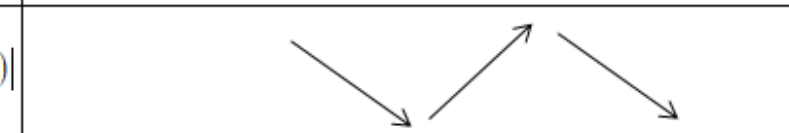
x	$-\infty$	0	m	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$					
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow (0; 2) \subset (0; m) \Leftrightarrow m \geq 2$.

Kết hợp với $m > 0$, ta có $m \geq 2$.

* Trường hợp 2: Nếu $m \leq 0 < m+4 \Leftrightarrow -4 < m \leq 0$

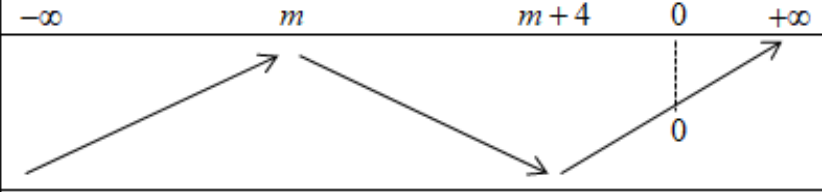
x	$-\infty$	m	0	$m+4$	$+\infty$
$f(x)$					
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2) \Leftrightarrow (0; 2) \subset (0; m+4) \Leftrightarrow m+4 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq -2$.

Kết hợp với $-4 < m \leq 0$, ta có $-2 \leq m \leq 0$.

* Trường hợp 3: Nếu $m+4 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -4$

x	$-\infty$	m	$m+4$	0	$+\infty$
$f(x)$					
$ f(x) $					

Từ bảng biến thiên, suy ra

hàm số $y = |f(x)|$ luôn đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ với mọi $m \leq -4$.

Vậy $\begin{cases} m \geq 2 \\ -2 \leq m \leq 0 \\ m \leq -4 \end{cases}$. Mà m nguyên thuộc khoảng $[-2023; 2023]$ nên có 4045 giá trị m thỏa mãn

yêu cầu bài toán.

Câu 15: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-8x+m^2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[0; 2023]$ để hàm số $g(x) = f(|1-x|)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

Lời giải

ĐS: 2020

Ta có $g(x) = f(|1-x|) = f(1-x), \forall x \in (-\infty; -1)$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } g'(x) &= [f(1-x)]' = -f'(1-x) = -(1-x)^2(1-x-2)[(1-x)^2-8(1-x)+m^2] \\ &= (x-1)^2(x+1)(x^2+6x+m^2-7). \end{aligned}$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1$.

Ta có $(x-1)^2(x+1) < 0, \forall x \in (-\infty; -1)$ nên $g'(x) \leq 0, \forall x < -1$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + m^2 - 7 \geq 0, \forall x \in (-\infty; -1)$$

$$\Leftrightarrow (x+3)^2 \geq 16 - m^2, \forall x \in (-\infty; -1)$$

$$\Leftrightarrow 16 - m^2 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}.$$

Do m nguyên, $m \in [0; 2013]$ và $\begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}$ nên suy ra $m \in \{4; 5; 6; \dots; 2023\}$.

Vậy có 2020 giá trị nguyên của m thỏa mãn điều kiện.

Câu 16: Cho hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$. Gọi S là tập tất cả các số tự nhiên m sao cho hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$. Tìm tổng các phần tử của S .

Lời giải

ĐS: 3

Cách 1 :

Xét hàm số $y = f(x) = x^3 - mx + 1$.

Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ nên hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ khi và chỉ khi hàm số

$y = f(x) = x^3 - mx + 1$ đồng biến và không âm trên $[1; +\infty)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \forall x \in [1; +\infty) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - m \geq 0 \forall x \in [1; +\infty) \\ 2 - m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2 \forall x \in [1; +\infty) \\ m \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 2.$$

Vì $m \in \mathbb{N}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Cách 2: Nhận xét: Do đồ thị hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ được vẽ bằng cách giữ nguyên phần đồ thị hàm $(C): y = f(x) = x^3 - mx + 1$ ở phía trên Ox , rồi lấy đối xứng phần đồ thị (C) ở phía

dưới Ox qua Ox nên để hàm số $y = |x^3 - mx + 1|$ đồng biến trên $[1; +\infty)$ khi và chỉ khi phương trình $x^3 - mx + 1 = 0$ (*) không có nghiệm nào lớn hơn 1.

Ta có: (*) $\Leftrightarrow x^3 + 1 = mx \Leftrightarrow m = x^2 + \frac{1}{x} = g(x)$.

Xét hàm $g(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, ta có: $g'(x) = 2x - \frac{1}{x^2} = \frac{2x^3 - 1}{x^2}$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$	1	$+\infty$
$g'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$+\infty$		$+$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên phương trình (*) không có nghiệm nào lớn hơn 1 khi và chỉ khi $m \leq 2$.

Mặt khác $m \in \mathbb{N}$ nên $m \in \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 3.

Cách 3: Ta có $y = |x^3 - mx + 1| = \sqrt{(x^3 - mx + 1)^2}$, suy ra $y' = \frac{x^3 - mx + 1}{|x^3 - mx + 1|} \cdot (3x^2 - m)$

Để hàm số đồng biến trên $[1; +\infty)$ thì $g(x) = (x^3 - mx + 1) \cdot (3x^2 - m) \geq 0, \forall x \geq 1$ (*).

Với $m = 0$ ta có $g(x) = (x^3 + 1) \cdot 3x^2 > 0, \forall x \geq 1$.

Với $m > 0$. Do $m \in \mathbb{N} \Rightarrow$ (*) luôn có 1 nghiệm là $\sqrt{\frac{m}{3}}$. Ta chú ý $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

Do vậy, điều kiện cần để $g(x) \geq 0, \forall x \geq 1$ là $\sqrt{\frac{m}{3}} \leq 1 \Rightarrow m \leq 3$.

Với $m = 1, m = 2$ thay vào (*) kiểm tra BXD thấy đúng $\Rightarrow$ nhận $m = 1; m = 2$.

Với $m = 3$ thì $g(x) = (x^3 - 3x + 1)(3x^2 - 3)$ có một nghiệm $x_0 > 1$. Suy ra trên đoạn $[1; x_0]$ thì $g(x) < 0$ nên trái yêu cầu bài toán.

Do đó $S = \{0; 1; 2\}$.

Vậy tổng các phần tử của S là 3.

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2022; 2022)$ để hàm số $y = |x^3 + (2m+1)x - 2|$ đồng biến trên $(1; 3)$?

Lời giải

ĐS: 4030

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (2m+1)x - 2$

$f'(x) = 3x^2 + 2m + 1$

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1;3)$ khi và chỉ khi xảy ra 2 trường hợp sau:

TH1: Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(1;3)$ và $f(1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 & \forall x \in (1;3) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2m + 1 \geq 0 & \forall x \in (1;3) \\ 2m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \geq -3x^2 & \forall x \in (1;3) \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \geq -3 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 0.$$

TH2: Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(1;3)$ và $f(1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0 & \forall x \in (1;3) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 2m + 1 \leq 0 & \forall x \in (1;3) \\ 2m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \leq -3x^2 & \forall x \in (1;3) \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m + 1 \leq -27 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -14.$$

Kết hợp 2 trường hợp ta có $m \leq -14$ hoặc $m \geq 0$.

Mà $m \in (-2022; 2022)$ nên có 4030 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên âm của tham số m để hàm số $y = |x^5 + 2x^4 - mx^2 + 3x - 20|$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$?

Lời giải

ĐS: 4

Xét hàm số $f(x) = x^5 + 2x^4 - mx^2 + 3x - 20$

$$f'(x) = 5x^4 + 8x^3 - 2mx + 3$$

Ta thấy $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ nên hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -2)$ khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -2)$ và hàm số không dương trên miền $(-\infty; -2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 & \forall x \in (-\infty; -2) \\ f(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^4 + 8x^3 - 2mx + 3 \geq 0 & \forall x \in (-\infty; -2) \\ -4m - 26 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^3 + 8x^2 + \frac{3}{x} \leq 2m & \forall x \in (-\infty; -2) \\ m \geq -\frac{13}{2} \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = 5x^3 + 8x^2 + \frac{3}{x}$ trên $(-\infty; -2)$

$$g'(x) = 15x^2 + 16x - \frac{3}{x^2} = (2x + 4)^2 + 11x^2 - 16 - \frac{3}{x^2}$$

Ta có $(2x + 4)^2 > 0$, $11x^2 > 44$, $16 + \frac{3}{x^2} < 16\frac{3}{4} \forall x \in (-\infty; -2)$

Suy ra $g'(x) > 0 + 44 - 16\frac{3}{4} > 0 \forall x \in (-\infty; -2)$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $(-\infty; -2)$

x	$-\infty$	-2
$g'(x)$	+	
$g(x)$		
		$-\frac{19}{2}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $5x^3 + 8x^2 + \frac{3}{x} \leq 2m \quad \forall x \in (-\infty; -2) \Leftrightarrow -\frac{19}{2} \leq 2m \Leftrightarrow m \geq -\frac{19}{4}$.

Kết hợp với $m \geq -\frac{13}{2}$ ta có $m \geq -\frac{19}{4}$. Do đó có 4 giá trị nguyên âm thỏa mãn đề bài.

Câu 19: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-10; 10]$ để hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ nghịch biến trên $(0; 1)$?

Lời giải

ĐS: 10

Ta có $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

Xét hàm số $g(x) = f(|x + m|)$ có

$$g'(x) = f'(|x + m|) \cdot \frac{x + m}{|x + m|} = \frac{x + m}{|x + m|} \cdot 3|x + m| \cdot (|x + m| - 2) = 3(x + m) \cdot (|x + m| - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -m - 2 \\ x = -m + 2 \end{cases}$$

$g'(x)$ không xác định khi $x = -m$.

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ như sau

x	$-\infty$	$-m - 2$	$-m$	$-m + 2$	$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$					

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$

$$\begin{cases} (0; 1) \subset (-\infty; -m - 2) \\ (0; 1) \subset (-m; -m + 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq -m - 2 \\ -m \leq 0 < 1 \leq -m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}$$

Mà $m \in [-10; 10]$ nên có 10 giá trị nguyên của m thỏa mãn đề bài.

Câu 20: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m nhỏ hơn 10 để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

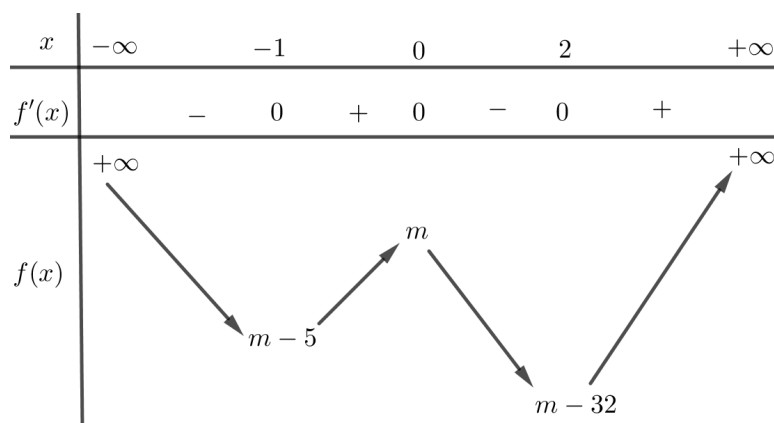
Lời giải

ĐS: 5

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m \Rightarrow f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

BBT:



Hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(-\infty; -1) \Leftrightarrow m - 5 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 5$

Do yêu cầu m là số nguyên nhỏ hơn 10 nên ta có $m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$

Vậy có 5 giá trị m thỏa yêu cầu.

Câu 21: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(3|x-m| + m^2)$ đồng biến trên $(5; +\infty)$?

Lời giải

ĐS: 5

Ta có $f'(x) = 4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$$g(x) = f(3|x-m| + m^2) \Rightarrow g'(x) = \frac{3(x-m)}{|x-m|} \cdot f'(3|x-m| + m^2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq m \\ x = m \text{ (loại)} \\ 3|x-m| + m^2 = 0 \text{ (VN)} \end{cases}$$

$g'(x)$ không xác định tại $x = m$.

Ta có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$	m	$+\infty$
$g'(x)$		$\parallel$	
$g(x)$	$+\infty$	$g(m)$	$+\infty$

Để hàm số đồng biến trên $(5; +\infty) \Rightarrow m \leq 5 \Rightarrow$ Có 5 giá trị nguyên dương của m .

Câu 22: Tìm tất cả các giá trị thực của tham số $m \in [0; 2023]$ để hàm số $g(x) = |x^3 - 3mx^2 - 3(m+3)x - m + 5|$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS: 2019

Xét hàm số $f(x) = x^3 - 3mx^2 - 3(m+3)x - m + 5$ có

$$f'(x) = 3x^2 - 6mx - 3(m+3) = 3(x^2 - 2mx - m - 3)$$

$$\text{Để hàm số } g(x) \text{ đồng biến trên } (0; 2) \text{ thì } \begin{cases} f(0) \geq 0 \\ f'(x) = 3(x^2 - 2mx - m - 3) \geq 0, \forall x \in (0; 2) \\ f(0) \leq 0 \\ f'(x) = 3(x^2 - 2mx - m - 3) \leq 0, \forall x \in (0; 2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m + 5 \geq 0 \\ m \leq \frac{x^2 - 3}{2x + 1}, \forall x \in (0; 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \leq -3 \\ m \geq 5 \\ m \geq \frac{1}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 5 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}, m \in [0; 2023]} m \in \{5, 6, \dots, 2023\}$$

Vậy có tất cả 2019 giá trị m nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 23: Cho hàm số $y = f(x) = \left| -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+5)x^2 - (m^2+5m)x + \frac{2}{3} \right|$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2023; 2023]$ để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

Lời giải

ĐS: 2

$$\text{Xét } g(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(2m+5)x^2 - (m^2+5m)x + \frac{2}{3}.$$

$$g'(x) = -x^2 + (2m+5)x - (m^2+5m).$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+5 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	m		$m+5$		$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$						$-\infty$

$$\text{Hàm số } |g(x)| \text{ nghịch biến trên khoảng } (1;2) \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) \geq 0, \forall x \in (1;2) \\ g(x) \leq 0, \forall x \in (1;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g'(x) \leq 0, \forall x \in (1;2) \\ g(x) \geq 0, \forall x \in (1;2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 < 2 \leq m+5 \\ g(2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq 1 \\ -2m^2 - 6m + 8 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq 1 \\ m \in (-\infty; -4] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -4 \end{cases}.$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m .

Câu 24: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; +\infty)$ để hàm số $y = |x^3 + (5-m)x + m^2 - 7|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$?

Lời giải

ĐS: 20

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (5-m)x + m^2 - 7$.

Ta có $f'(x) = 3x^2 + 5 - m$.

Ta thấy $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;2)$ khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;2) \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5 - m \geq 0, \forall x \in (0;2) \\ m^2 - 7 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3x^2 + 5, \forall x \in (0; 2) \\ m \geq \sqrt{7} \\ m \leq -\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 5 \\ m \geq \sqrt{7} \\ m \leq -\sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{7} \leq m \leq 5 \\ m \leq -\sqrt{7} \end{cases}$$

Mặt khác m nguyên thuộc $(-20; +\infty)$, suy ra $m \in \{-19; -18; \dots; -3; 3; 4; 5\}$.

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 2) \\ f(0) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 5 - m \leq 0, \forall x \in (0; 2) \\ m^2 - 7 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 3x^2 + 5, \forall x \in (0; 2) \\ -\sqrt{7} \leq m \leq \sqrt{7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 17 \\ -\sqrt{7} \leq m \leq \sqrt{7} \end{cases}$$

Trường hợp này không tồn tại m thỏa mãn.

Vậy có tất cả 20 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

Câu 25: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-20; +\infty)$ để hàm số $y = |(m-1)x^3 - x^2 + 27 - m^2|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$?

Lời giải

ĐS: 19

Xét hàm số $f(x) = (m-1)x^3 - x^2 + 27 - m^2$.

Ta có $f'(x) = 3(m-1)x^2 - 2x$.

Ta thấy $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$ khi xảy ra một trong các trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1)x^2 - 2x \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ -m^2 + m + 25 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \geq \frac{2}{x}, \forall x \in (1; 2) \\ \frac{1-\sqrt{101}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \geq 2 \\ \frac{1-\sqrt{101}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{5}{3} \\ \frac{1-\sqrt{101}}{2} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{3} \leq m \leq \frac{1+\sqrt{101}}{2}.$$

Mặt khác m nguyên thuộc $(-20; +\infty)$, suy ra $m \in \{2; 3; 4; 5\}$.

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1)x^2 - 2x \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ -m^2 + m + 25 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \leq \frac{2}{x}, \forall x \in (1; 2) \\ \left[\begin{array}{l} m \leq \frac{1-\sqrt{101}}{2} \\ m \geq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(m-1) \leq 1 \\ \left[\begin{array}{l} m \leq \frac{1-\sqrt{101}}{2} \\ m \geq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{4}{3} \\ \left[\begin{array}{l} m \leq \frac{1-\sqrt{101}}{2} \\ m \geq \frac{1+\sqrt{101}}{2} \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \leq \frac{1-\sqrt{101}}{2}.$$

Mặt khác m nguyên thuộc $(-20; +\infty)$, suy ra $m \in \{-19; -18; \dots; -5\}$.

Vậy có tất cả 19 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

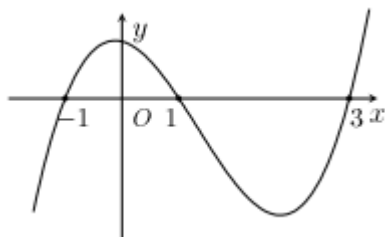
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



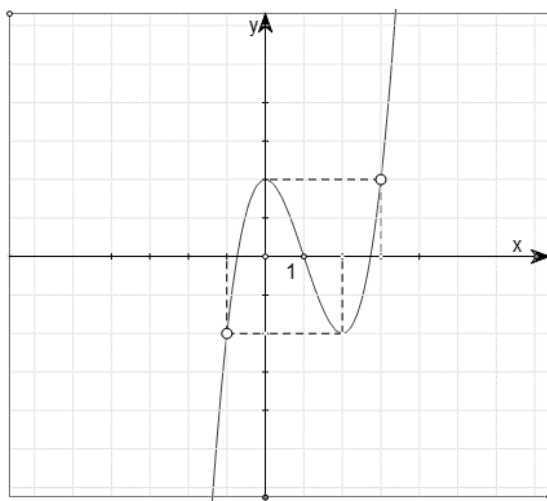
HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 2. BÀI TOÁN HÀM ẨN, HÀM HỢP LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng

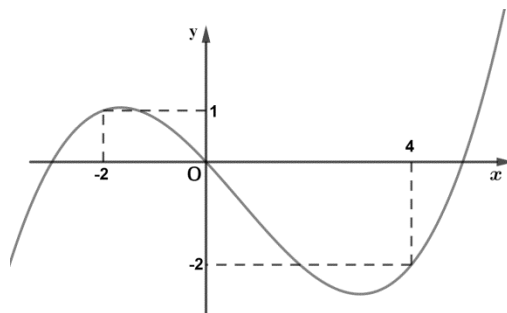


Câu 28: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ

Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6; 6)$ của tham số m để hàm số

$$g(x) = f(3 - 2x + m) + x^2 - (m + 3)x + 2m^2$$

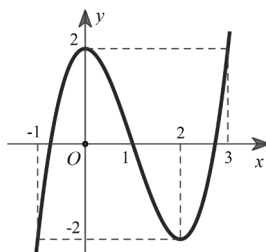
ngịch biến trên $(0; 1)$. Khi đó, tổng giá trị các phần tử của S là



Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt

$$g(x) = f(x - m) - \frac{1}{2}(x - m - 1)^2 + 2019, \text{ với } m \text{ là tham số thực. Gọi } S \text{ là tập hợp các giá trị}$$

nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng:



Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 2)(x^2 - 6x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để hàm số $g(x) = f(1 - x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

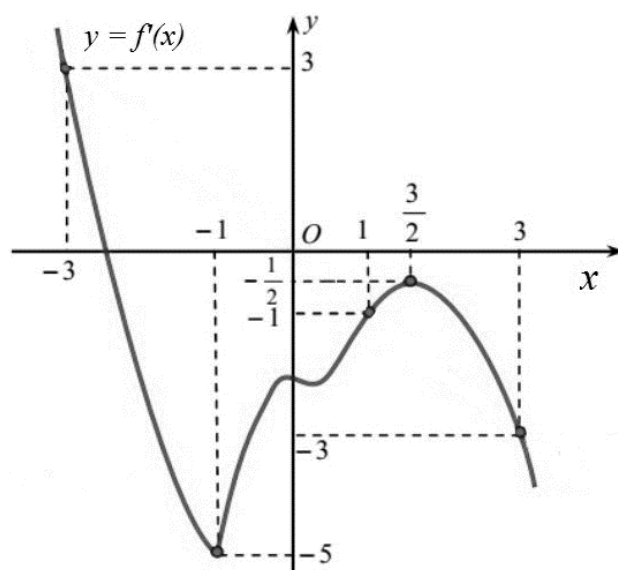
Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.

Xét hàm số

$$g(x) = f(x - 2m) + \frac{1}{2}(2m - x)^2 + 2020,$$

với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$.

Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?



Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x-1)(x+3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2(x^2 + 2mx + 1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3; 5)$?

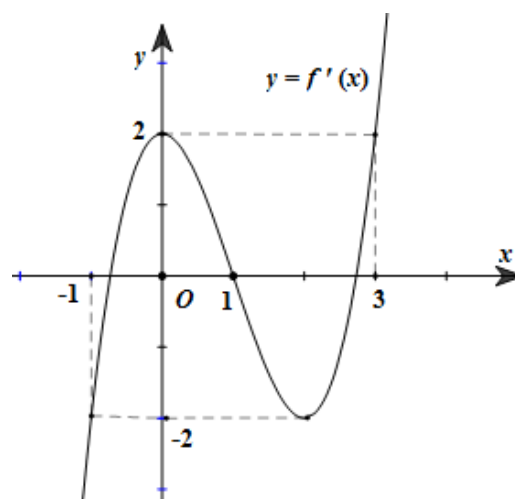
Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$			

Có bao nhiêu số nguyên $m < 2019$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x - m) + m^2 + 1$ đồng biến trên $(0; 2)$?

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

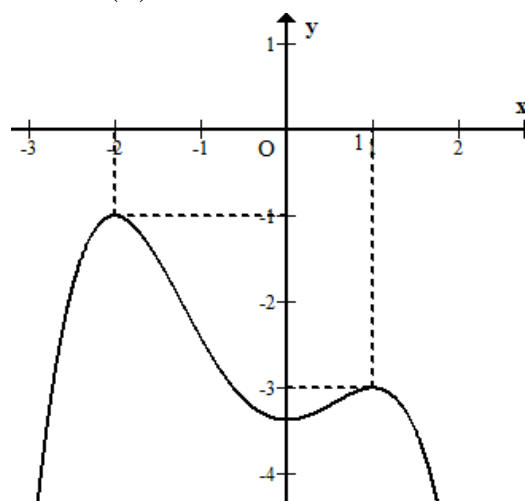


Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$. Tổng các phần tử của S bằng:

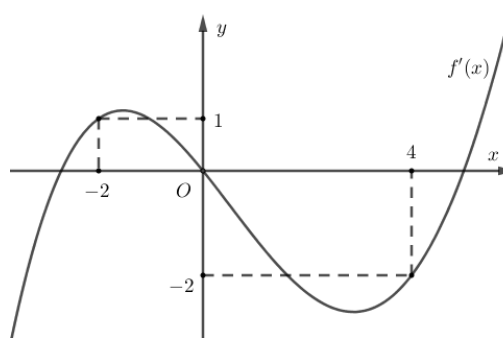
Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m , $m \in \mathbb{Z}, -2020 < m < 2020$ để hàm số

$g(x) = f(x^2) + mx^2 \left(x^2 + \frac{8}{3}x - 6 \right)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$



Câu 38: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = 4f(x-m) + x^2 - 2mx + 2020$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên $m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

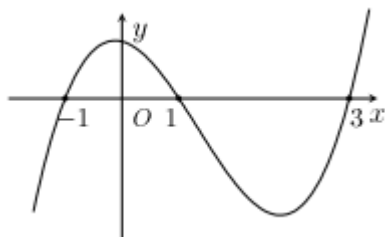
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 2. BÀI TOÁN HÀM ẨN, HÀM HỢP LIÊN QUAN ĐẾN THAM SỐ VÀ MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC

Câu 26: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$. Hỏi S có bao nhiêu phần tử?



Lời giải

ĐS : 5

Ta có $g'(x) = f'(x+m)$. Vì $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $g'(x) = f'(x+m)$ cũng liên tục trên $\mathbb{R}$. Căn cứ vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ ta thấy

$$g'(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x+m) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+m < -1 \\ 1 < x+m < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1-m \\ 1-m < x < 3-m \end{cases}.$$

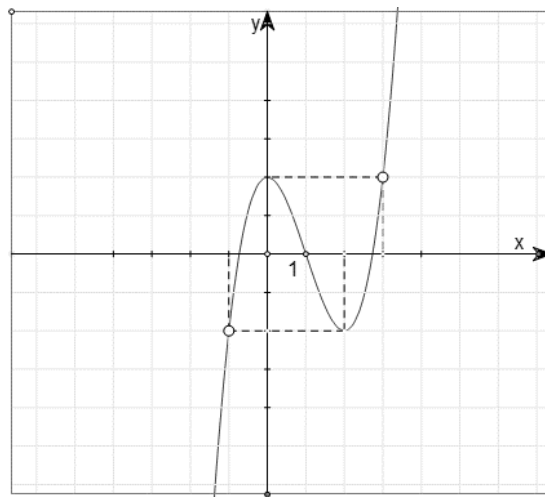
Hàm số $g(x) = f(x+m)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq -1-m \\ 3-m \geq 2 \\ 1-m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ 0 \leq m \leq 1 \end{cases}.$$

Mà m là số nguyên thuộc đoạn $[-5; 5]$ nên ta có $S = \{-5; -4; -3; 0; 1\}$.

Vậy S có 5 phần tử.

Câu 27: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng



Lời giải

ĐS : 14

Xét hàm số $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$

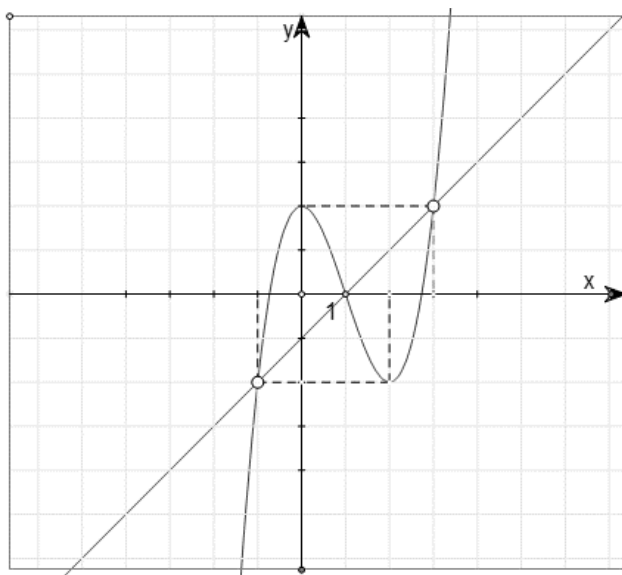
$$g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$$

Xét phương trình $g'(x) = 0$ (1)

Đặt $x-m=t$, phương trình (1) trở thành $f'(t) - (t-1) = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t-1$ (2)

Nghiệm của phương trình (2) là hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và $y = t-1$

Ta có đồ thị các hàm số $y = f'(t)$ và $y = t-1$ như sau:



Căn cứ đồ thị các hàm số ta có phương trình (2) có nghiệm là:
$$\begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m - 1 \\ x = m + 1 \\ x = m + 3 \end{cases}$$

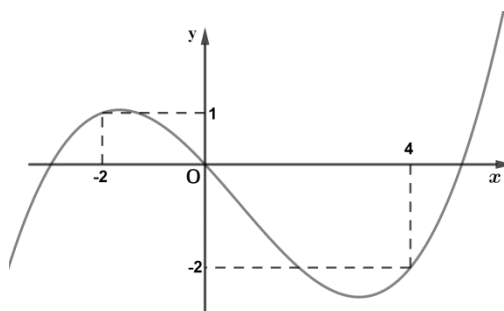
Ta có bảng biến thiên của $y = g(x)$

x	$-\infty$	$m-1$		$m+1$		$m+3$		$+\infty$
y'		-	0	+	0	-	0	+
y	$+\infty$							$+\infty$

Để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$ cần
$$\begin{cases} m - 1 \leq 5 \\ m + 1 \geq 6 \\ m + 3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{N}^* \Rightarrow m$ nhận các giá trị 1;2;5;6 $\Rightarrow S = 14$.

Câu 28: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, $a \neq 0$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên thuộc khoảng $(-6;6)$ của tham số m để hàm số $g(x) = f(3 - 2x + m) + x^2 - (m + 3)x + 2m^2$ nghịch biến trên $(0;1)$. Khi đó, tổng giá trị

các phần tử của S là

Lời giải

ĐS : 9

Xét $g'(x) = -2f'(3 - 2x + m) + 2x - (m + 3)$. Xét phương trình $g'(x) = 0$, đặt

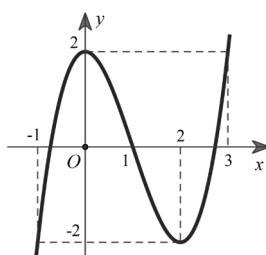
$$t = 3 - 2x + m \text{ thì phương trình trở thành } -2 \cdot \left[f'(t) - \frac{-t}{2} \right] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 4 \\ t = 0 \end{cases}.$$

Từ đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{5+m}{2}, x_2 = \frac{m+3}{2}, x_3 = \frac{-1+m}{2}$. Lập bảng xét dấu, đồng thời lưu ý nếu $x > x_1$ thì $t < t_1$ nên $f(x) > 0$. Và các dấu đan xen nhau do các nghiệm đều làm đổi dấu đạo hàm nên suy ra $g'(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [x_2; x_1] \cup (-\infty; x_3]$.

Vì hàm số nghịch biến trên $(0;1)$ nên $g'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1)$ từ đó suy ra

$$\begin{cases} \frac{3+m}{2} \leq 0 < 1 \leq \frac{5+m}{2} \\ 1 \leq \frac{-1+m}{2} \end{cases} \text{ và giải ra các giá trị nguyên thuộc } (-6;6) \text{ của } m \text{ là } -3; 3; 4; 5.$$

Câu 29: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng tất cả các phần tử trong S bằng:



Lời giải

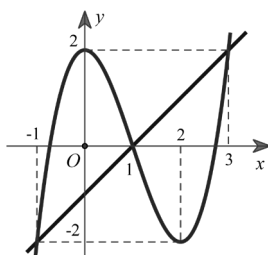
ĐS : 14

$$\text{Ta có } g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$$

$$\text{Cho } g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-m) = x-m-1$$

$$\text{Đặt } x-m=t \Rightarrow f'(t) = t-1$$

Khi đó nghiệm của phương trình là hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = t - 1$



Dựa vào đồ thị hàm số ta có được $f'(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = 3 \end{cases}$

Bảng xét dấu của $g'(t)$

t	$-\infty$	-1		1		3	$+\infty$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$

Từ bảng xét dấu ta thấy hàm số $g(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$ và $(3; +\infty)$

$$\text{Hay } \begin{cases} -1 < t < 1 \\ t > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x - m < 1 \\ x - m > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m - 1 < x < m + 1 \\ x > m + 3 \end{cases}$$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6)$ thì $\begin{cases} m - 1 \leq 5 < 6 \leq m + 1 \\ m + 3 \leq 5 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$

Vì m là các số nguyên dương nên $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Vậy tổng tất cả các phần tử của S là: $1 + 2 + 5 + 6 = 14$.

Câu 30: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x - 2)(x^2 - 6x + m)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ để hàm số $g(x) = f(1 - x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$?

Lời giải

ĐS : 2012

$$\text{Ta có: } g'(x) = f'(1 - x) = -(1 - x)^2(-x - 1)[(1 - x)^2 - 6(1 - x) + m]$$

$$= (x - 1)^2(x + 1)(x^2 + 4x + m - 5)$$

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x < -1 (*), .$$

Với $x < -1$ thì $(x-1)^2 > 0$ và $x+1 < 0$ nên $(*) \Leftrightarrow x^2 + 4x + m - 5 \geq 0, \forall x < -1$

$$\Leftrightarrow m \geq -x^2 - 4x + 5, \forall x < -1.$$

Xét hàm số $y = -x^2 - 4x + 5$ trên khoảng $(-\infty; -1)$, ta có bảng biến thiên:

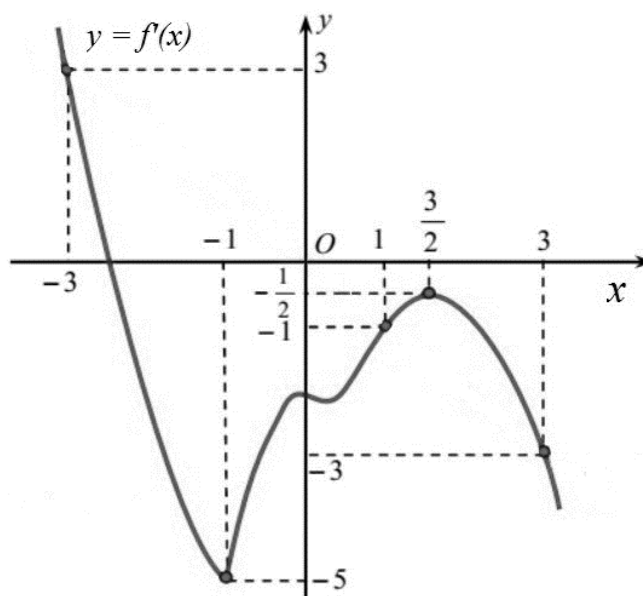
x	$-\infty$	-2	-1
y	$-\infty$	9	8

Từ bảng biến thiên suy ra $m \geq 9$.

Kết hợp với m thuộc đoạn $[-2020; 2020]$ và m nguyên nên $m \in \{9; 10; 11; \dots; 2020\}$.

Vậy có 2012 số nguyên m thỏa mãn đề bài.

Câu 31: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Xét hàm số $g(x) = f(x-2m) + \frac{1}{2}(2m-x)^2 + 2020$, với m là tham số thực. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4)$. Hỏi số phần tử của S bằng bao nhiêu?

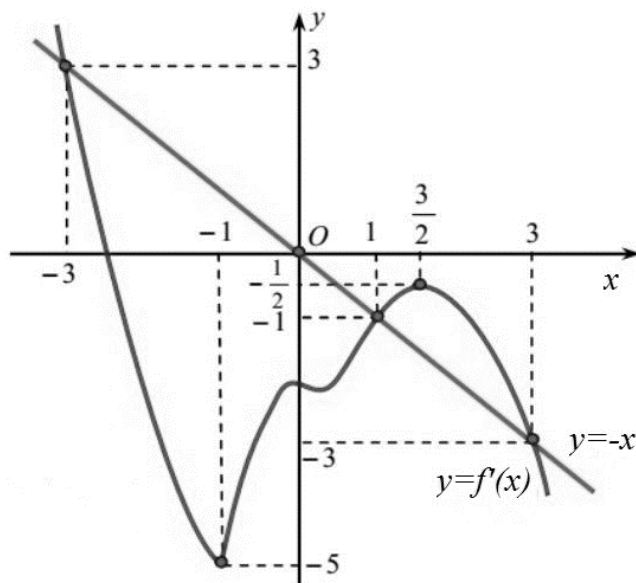
Lời giải

ĐS : 2

Ta có $g'(x) = f'(x-2m) - (2m-x)$.

Đặt $h(x) = f'(x) - (-x)$. Từ đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -x$ trên hình vẽ suy

ra: $h(x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x) \leq -x \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$.



Ta có $g'(x) = h(x - 2m) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq x - 2m \leq 1 \\ x - 2m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 \leq x \leq 2m + 1 \\ x \geq 2m + 3 \end{cases}$.

Suy ra hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(2m - 3; 2m + 1)$ và $(2m + 3; +\infty)$.

Do đó hàm số $y = g(x)$ nghịch biến trên khoảng $(3; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 3 \leq 3 \\ 2m + 1 \geq 4 \\ 2m + 3 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3}{2} \leq m \leq 3 \\ m \leq 0 \end{cases}$.

Mặt khác, do m nguyên dương nên $m \in \{2; 3\} \Rightarrow S = \{2; 3\}$. Vậy số phần tử của S bằng 2.

Câu 32: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ là $f'(x) = (x - 1)(x + 3)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $y = f(x^2 + 3x - m)$ đồng biến trên khoảng $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS : 18

Ta có $y' = f'(x^2 + 3x - m) = (2x + 3)f'(x^2 + 3x - m)$.

Theo đề bài ta có: $f'(x) = (x - 1)(x + 3)$

suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < -3 \\ x > 1 \end{cases}$ và $f'(x) < 0 \Leftrightarrow -3 < x < 1$.

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$ khi $y' \geq 0, \forall x \in (0; 2)$

$$\Leftrightarrow (2x+3)f'(x^2+3x-m) \geq 0, \forall x \in (0;2).$$

Do $x \in (0;2)$ nên $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$. Do đó, ta có:

$$y' \geq 0, \forall x \in (0;2) \Leftrightarrow f'(x^2+3x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-m \leq -3 \\ x^2+3x-m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq x^2+3x+3 \\ m \leq x^2+3x-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[0;2]}(x^2+3x+3) \\ m \leq \min_{[0;2]}(x^2+3x-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}.$$

Do $m \in [-10;20]$, $m \in \mathbb{Z}$ nên có 18 giá trị nguyên của m thỏa yêu cầu đề bài.

Câu 33: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x+1)^2(x^2+2mx+1)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên âm m để hàm số $g(x) = f(2x+1)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$?

Lời giải

ĐS : 3

Ta có: $g'(x) = 2f'(2x+1) = 2(2x+1)(2x+2)^2[(2x+1)^2 + 2m(2x+1) + 1]$

Đặt $t = 2x+1$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(3;5)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (3;5)$

$$\Leftrightarrow t(t^2+2mt+1) \geq 0, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow t^2+2mt+1 \geq 0, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow 2m \geq \frac{-t^2-1}{t}, \forall t \in (7;11)$$

Xét hàm số $h(t) = \frac{-t^2-1}{t}$ trên $[7;11]$, có $h'(t) = \frac{-t^2+1}{t^2}$

BBT:

t	$-\infty$	7	11	$+\infty$
$h'(t)$				

Dựa vào BBT ta có $2m \geq \frac{-t^2-1}{t}, \forall t \in (7;11) \Leftrightarrow 2m \geq \max_{[7;11]} h(t) \Leftrightarrow m \geq -\frac{50}{14}$

Vì $m \in \mathbb{Z}^- \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1\}$.

Vậy có 3 giá trị nguyên âm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		$+$	$-$	$+$
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$

Có bao nhiêu số nguyên $m < 2019$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x + m)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Lời giải

ĐS : 2016

Ta có $g'(x) = (x^2 - 2x + m)' f'(x^2 - 2x + m) = 2(x - 1)f'(x^2 - 2x + m)$.

Hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ khi và chỉ khi $g'(x) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$ và

$$g'(x) = 0 \text{ tại hữu hạn điểm} \Leftrightarrow 2(x - 1)f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in (1; +\infty) \\ x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

Xét hàm số $y = x^2 - 2x + m$, ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y	$+\infty$	$m-1$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\text{TH1: } x^2 - 2x + m \geq 2, \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow m - 1 \geq 2 \Leftrightarrow m \geq 3.$$

$$\text{TH2: } x^2 - 2x + m \leq 0, \forall x \in (1; +\infty): \text{ Không có giá trị } m \text{ thỏa mãn.}$$

Vậy có 2016 số nguyên $m < 2019$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 35: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 + 2x - 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10; 20]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x - m) + m^2 + 1$ đồng biến trên $(0; 2)$?

Lời giải

ĐS : 18

Ta có $f'(t) = t^2 + 2t - 3 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -3 \\ t \geq 1 \end{cases} (*)$.

Có $g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x-m)$

Vì $2x+3 > 0, \forall x \in (0;2)$ nên $g(x)$ đồng biến trên $(0;2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (0;2)$

$\Leftrightarrow f'(x^2+3x-m) \geq 0, \forall x \in (0;2)$

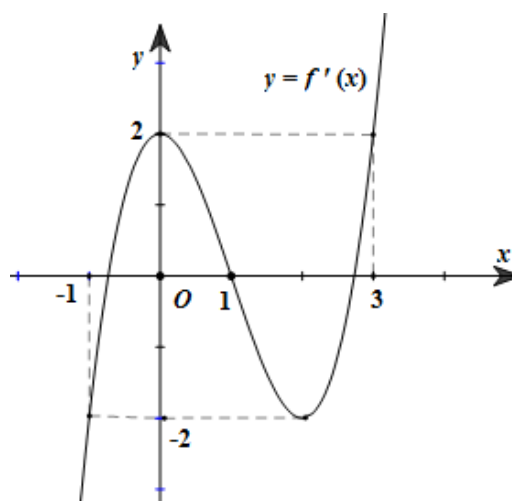
$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x-m \leq -3, \forall x \in (0;2) \\ x^2+3x-m \geq 1, \forall x \in (0;2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+3x \leq m-3, \forall x \in (0;2) \\ x^2+3x \geq m+1, \forall x \in (0;2) \end{cases}$

Có $h(x) = x^2 + 3x$ luôn đồng biến trên $(0;2)$ nên từ $\Rightarrow \begin{cases} m-3 \geq 10 \\ m+1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 13 \\ m \leq -1 \end{cases}$

Vì $\begin{cases} m \in [-10;20] \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow$ Có 18 giá trị của tham số m .

Vậy có 18 giá trị của tham số m cần tìm.

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Đặt $g(x) = f(x-m) - \frac{1}{2}(x-m-1)^2 + 2019$ với m là tham số thực. Gọi S là tập các giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5;6)$. Tổng các phần tử của S bằng:

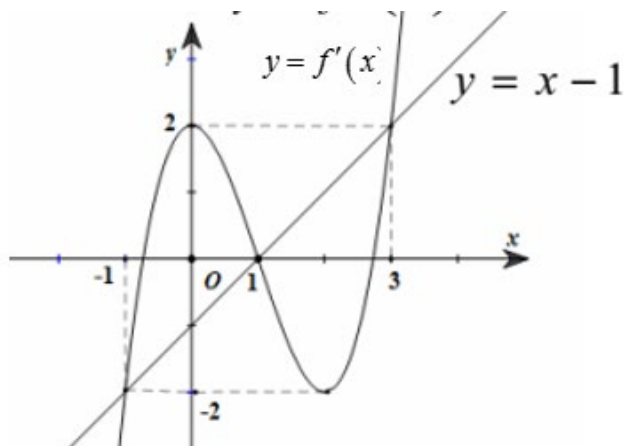
Lời giải

ĐS : 14

Ta có $g'(x) = f'(x-m) - (x-m-1)$

Đặt $h(x) = f'(x) - (x-1)$. Từ đồ thị $y = f'(x)$ và đồ thị $y = x-1$ trên hình vẽ ta suy ra

$$h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x \geq 3 \end{cases}$$



Ta có $g'(x) = h(x-m) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x-m \leq 1 \\ x-m \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq x \leq m+1 \\ x \geq m+3 \end{cases}$

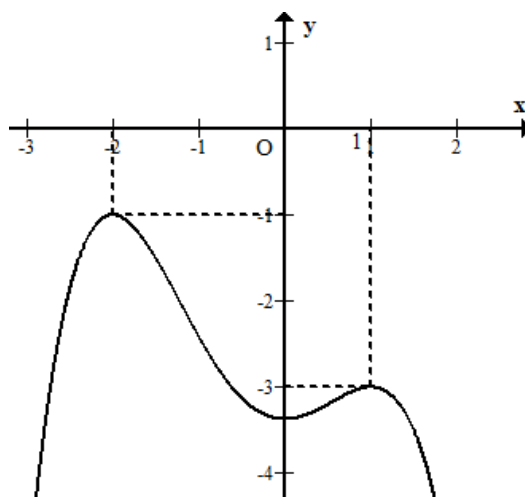
Do đó hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên các khoảng $(m-1; m+1)$ và $(m+3; +\infty)$

Do vậy, hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên khoảng $(5; 6) \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \leq 5 \\ m+1 \geq 6 \\ m+3 \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq m \leq 6 \\ m \leq 2 \end{cases}$

Do m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; 5; 6\}$, tức $S = \{1; 2; 5; 6\}$

Tổng các phần tử của S bằng 14.

Câu 37: Cho hàm số $y = f(x)$ là hàm đa thức có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m , $m \in \mathbb{Z}, -2020 < m < 2020$ để hàm số $g(x) = f(x^2) + mx^2 \left(x^2 + \frac{8}{3}x - 6 \right)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$

Lời giải

ĐS : 2020

Ta có $g'(x) = 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3)$.

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(-3; 0)$ suy ra $g'(x) \geq 0, \forall x \in (-3; 0)$.

$$\square \quad 2xf'(x^2) + 4mx(x^2 + 2x - 3) \geq 0, \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow f'(x^2) - 2m(-x^2 - 2x + 3) \leq 0, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2) \leq 2m(-x^2 - 2x + 3), \forall x \in (-3; 0) \Leftrightarrow m \geq \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}, \forall x \in (-3; 0)$$

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{(-3; 0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)}.$$

$$\square \quad \text{Ta có } -3 < x < 0 \Rightarrow 0 < x^2 < 9 \Rightarrow f'(x^2) \leq -3 \text{ dấu "=" khi } x^2 = 1 \Leftrightarrow x = -1.$$

$$\square \quad -x^2 - 2x + 3 = -(x+1)^2 + 4 \Rightarrow 0 < -x^2 - 2x + 3 \leq 4, \forall x \in (-3; 0)$$

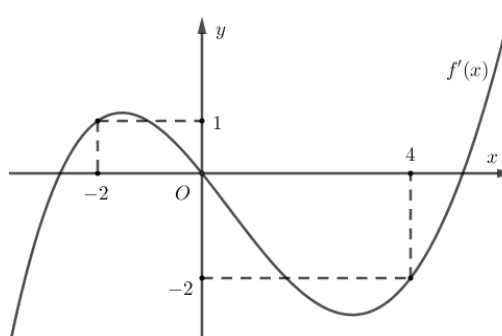
$$\Leftrightarrow \frac{1}{-x^2 - 2x + 3} \geq \frac{1}{4}, \text{ dấu "=" khi } x = -1.$$

$$\text{Suy ra } \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} \leq \frac{-3}{2 \cdot 4} = -\frac{3}{8}, \forall x \in (-3; 0), \text{ dấu "=" khi } x = -1.$$

$$\Rightarrow \max_{(-3; 0)} \frac{f'(x^2)}{2(-x^2 - 2x + 3)} = -\frac{3}{8}.$$

Vậy $m \geq -\frac{3}{8}$, mà $m \in \mathbb{Z}$, $-2020 < m < 2020$ nên có 2020 giá trị của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 38: Cho hàm số $f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = 4f(x-m) + x^2 - 2mx + 2020$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.

Lời giải

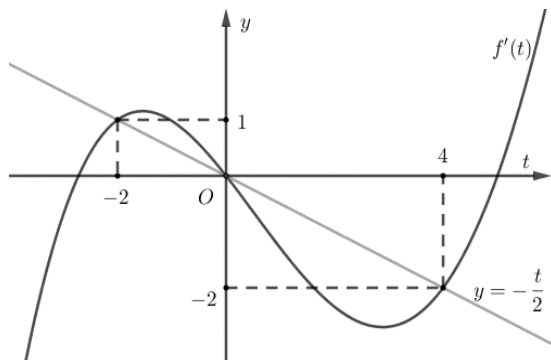
ĐS : 2

Ta có $g'(x) = 4f'(x-m) + 2x - 2m$

$$g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x-m) \geq -\frac{x-m}{2} \quad (*)$$

Đặt $t = x - m$ thì $(*) \Leftrightarrow f'(t) \geq -\frac{t}{2}$

Vẽ đường thẳng $y = -\frac{x}{2}$ trên cùng hệ trục Oxy với đồ thị $y = f'(x)$ như hình vẽ sau



$$\text{Từ đồ thị ta có } f'(t) \geq -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq t \leq 0 \\ t \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq x \leq m \\ x \geq m+4 \end{cases}$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1;2)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \leq 1 < 2 \leq m \\ m+4 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq m \leq 3 \\ m \leq -3 \end{cases}$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{2;3\}$.

Vậy có hai giá trị nguyên dương của m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Câu 39: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-4); \forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu số nguyên

$m < 2020$ để hàm số $g(x) = f\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$.

Lời giải

ĐS : 2019

$$\text{Ta có: } g'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right).$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow g'(x) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{(x+1)^2} f'\left(\frac{2-x}{1+x} - m\right) \geq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{2-x}{1+x}\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty)$$

$$\text{Ta có: } f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x-4) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Do đó: } f'\left(\frac{2-x}{1+x}\right) \leq 0; \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2-x}{1+x} - m \leq -1; \forall x \in (2; +\infty) & (1) \\ 1 \leq \frac{2-x}{1+x} - m \leq 4; \forall x \in (2; +\infty) & (2) \end{cases}$$

Hàm số $h(x) = \frac{2-x}{1+x} - m; x \in (2; +\infty)$ có bảng biến thiên:

x		2		$+\infty$
$h'(x)$			-	
$h(x)$			$-m$	$-\infty$



Căn cứ bảng biến thiên suy ra: Điều kiện (2) không có nghiệm m thỏa mãn.

Điều kiện (1) $\Leftrightarrow -m \leq -1 \Leftrightarrow m \geq 1$, kết hợp điều kiện $m < 2020$ suy ra có 2019 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

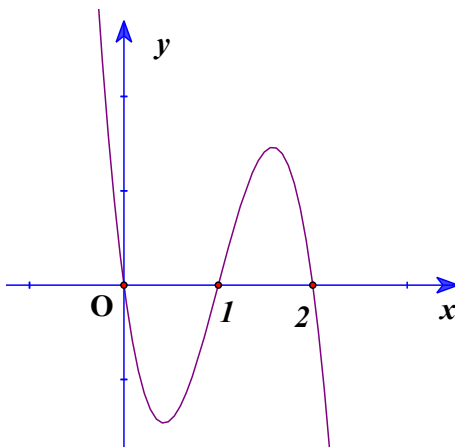
BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

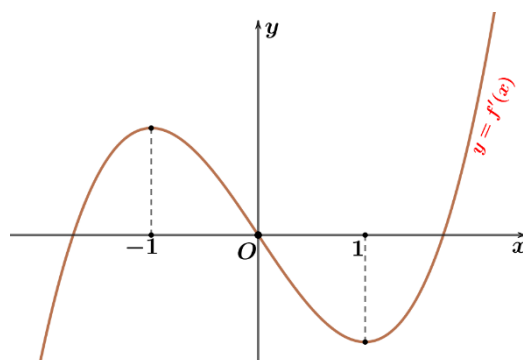
Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 4029$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x-1) + 2023|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$?

Câu 41: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(1+x)$ có đồ thị như hình vẽ. có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(-x^2 + 2x - 2022 + m) + \sqrt{m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

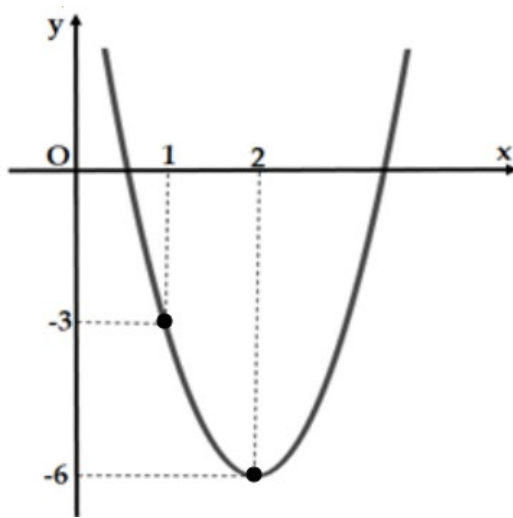


Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới.

Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $g(x) = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

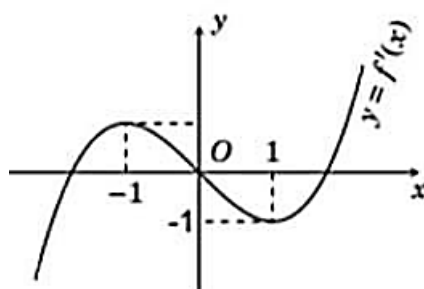


- Câu 43:** Cho hàm số $f(x) = -x^4 - (5 - m^2)x + 2023$ và $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2022x + 2023$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $h(x) = g[f(x)]$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- Câu 44:** Cho hàm số $f(x) = -x^4 - (17 - m^2)x + 2023$ và $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2022x + 2023$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $h(x) = g(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$?
- Câu 45:** Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(5 - 2x)$ có đồ thị là một Parabol (P) như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(2x^2 + 2x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.



- Câu 46:** Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1-x}{x+m-2}$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng
- Câu 47:** Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}(m-2)x^3 - (m-2)x^2 + (m-3)x + m^2$ nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$
- Câu 48:** Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y = |mx^3 - mx^2 + 16x - 32|$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?
- Câu 49:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-\infty; 2023)$ sao cho hàm số $y = |x^3 + (a+2)x + 9 - a^2|$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?
- Câu 50:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - (m^2 - 5m + 6)x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?
- Câu 51:** Cho hàm số $y = mx^4 + (3m-1)x^2 + 5$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (f(3x+1))^2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

- Câu 52:** Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S
- Câu 53:** Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + (2m^2 - m + 1)x + m^2 - 3m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-\infty; 0]$ bằng -2 . Tích các phần tử của S bằng
- Câu 54:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = -x^4 + 2m^2x^2 + m^3$ nghịch biến trên khoảng $(-4; 0)$?
- Câu 55:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2022; 2022)$ để hàm số $y = |x^3 + (2m + 1)x - 2|$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?
- Câu 56:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn hàm số $y = \left| \frac{x-1}{x-a} \right|$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?
- Câu 57:** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x - 3}{2 \cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$?
- Câu 58:** Cho hàm số $f(x) = \frac{(m-1)x - m}{x + 2m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc $[-2019; 2020]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?
- Câu 59:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = g(x) = \left| \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (m-2)x - 4m + \frac{2}{3} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?
- Câu 60:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |3x^4 - 4(a+2)x^3 + 12ax^2 - 30a|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$?
- Câu 61:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 3$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = |2f(x) + x^2 - 2mx + 2m|$ đồng biến trên $(0; 1)$?

Câu 62: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $f(x) = 3x^4 + 4(1 - 2m^2)x^3 + 6(m - 2m^2)x^2 + 12mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(x) = f'(x^3 + 2)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	3	$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$

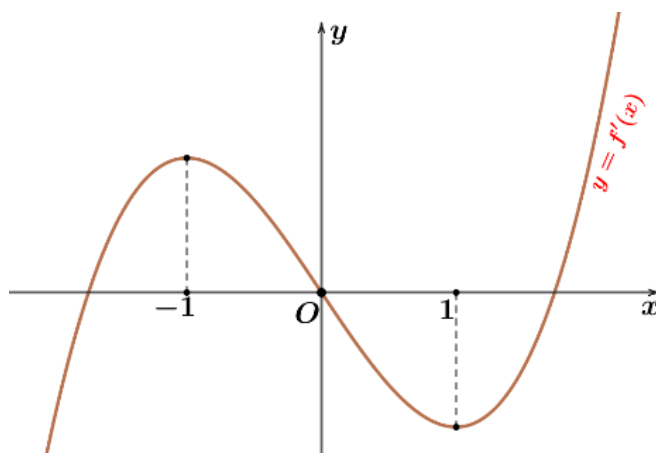
Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2023; 2023]$ để hàm số $y = f(x - m)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$?

Câu 64: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20; 20)$ để hàm số $f(x) = \frac{1}{7}x^7 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{m^3}{4}x^4 + (5 - m^2)x^3 - 3mx^2 + 10x + 2020$ đồng biến trên $(0; 1)$?

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-10; +\infty)$ để hàm số $y = |x^3 + (a + 2)x + 9 - a^2|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

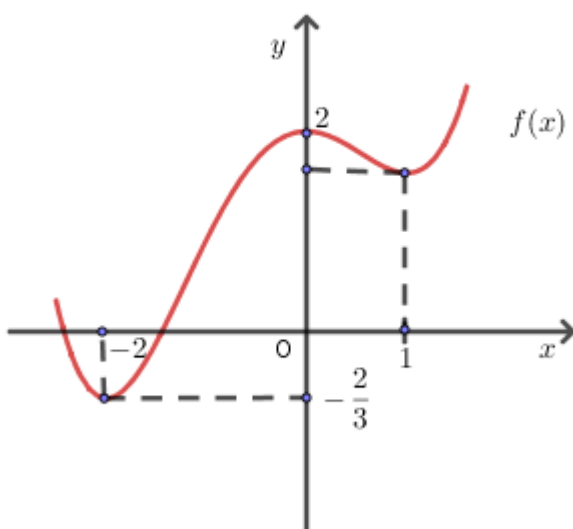
Câu 66: Cho hàm số $y = |12x^5 - (15m + 30)x^4 + 20x^3 - 30(m^2 - 4m + 3)x^2 + 120(m^2 + 1)x + 2023 + m|$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 2$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới.



Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - m|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ là bậc bốn có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 20)$ để hàm số $g(x) = \frac{1}{3}f^3(x) + \frac{1}{2}mf^2(x) + (3m-5)f(x) - 7$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$?

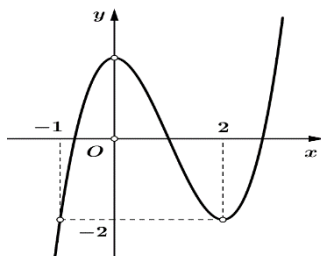
Câu 69: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		1		$\frac{1}{2}$	

$\frac{1}{4}$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$ 2

Biết $f(1) = 2$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $m \leq 10$ và bất phương trình $(x-1)[mf^2(x) - (2m+1)f(x) + 2] \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m) + 2 = 0$ có nghiệm trong khoảng $(-4; 4)$?

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

Câu 40: Cho hàm số $f(x) = \frac{x^5}{5} - x^2 + (m-1)x - 4029$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x-1) + 2023|$ nghịch biến trên $(-\infty; 2)$?

Lời giải

ĐS: 2005

Đặt $h(x) = f(x-1) + 2023$.

Ta có $y = |f(x-1) + 2023| = |h(x)| = \sqrt{h(x)^2}$

$$y' = \frac{h(x).h'(x)}{|h(x)|} \leq 0 \quad \forall x < 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} h(x) < 0 \\ h'(x) \geq 0 \end{cases} \quad \forall x < 2 \text{ hoặc } \begin{cases} h(x) > 0 \\ h'(x) \leq 0 \end{cases} \quad \forall x < 2$$

★ Trường hợp 1

$$\begin{cases} h(2) \leq 0 \\ h'(x) \geq 0 \end{cases} \quad \forall x \in (-\infty; 2) \text{ tương đương } \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) + 2023 \leq 0 \quad (1) \\ f'(x-1) \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 2) \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{10039}{5} \quad (1) \\ (x-1)^4 - 2(x-1) + m - 1 \geq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 2) \quad (2) \end{cases}$$

Đặt $t = x-1$, $t \in (-\infty; 1)$, khi đó ta có

$$(2) \Leftrightarrow t^4 - 2t + m - 1 \geq 0 \quad \forall t \in (-\infty; 1)$$

$$\Leftrightarrow -t^4 + 2t + 1 \leq m \quad \forall t \in (-\infty; 1)$$

Đặt $g(t) = -t^4 + 2t + 1 \Rightarrow g'(t) = -4t^3 + 2$.

Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -4t^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Nên $\Leftrightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \leq m \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1$

Từ và suy ra $\frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \leq m \leq \frac{10039}{5}$

★ Trường hợp 2

$$\begin{cases} h(2) \geq 0 \\ h'(x) \leq 0 \end{cases} \forall x \in (-\infty; 2) \text{ tương đương } \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) + 2023 \geq 0 \quad (1) \\ f'(x-1) \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 2) \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \frac{10039}{5} \quad (1) \\ (x-1)^4 - 2(x-1) + m - 1 \leq 0 \quad \forall x \in (-\infty; 2) \quad (2) \end{cases}$$

Đặt $t = x - 1, t \in (-\infty; 1)$, khi đó ta có

$$(2) \Leftrightarrow t^4 - 2t + m - 1 \leq 0 \quad \forall t \in (-\infty; 1)$$

$$\Leftrightarrow -t^4 + 2t + 1 \geq m \quad \forall t \in (-\infty; 1)$$

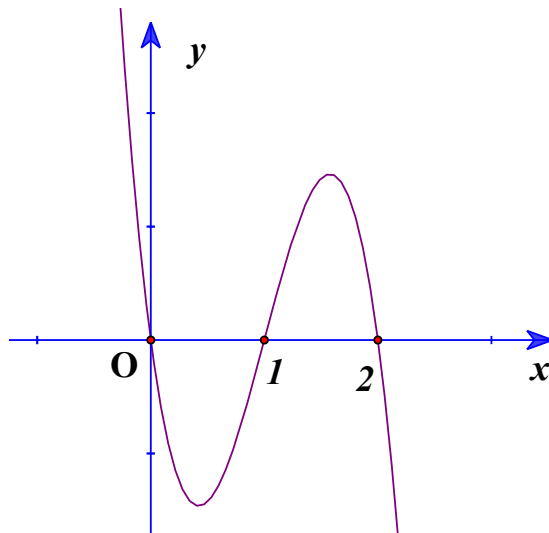
Đặt $g(t) = -t^4 + 2t + 1 \Rightarrow g'(t) = -4t^3 + 2$.

Xét $g'(t) = 0 \Leftrightarrow -4t^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

Vô nghiệm

Vậy: $\frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \leq m \leq \frac{10039}{5}$, mà $m \in \mathbb{Z}$ nên có 2005 giá trị m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 41: Cho hàm số đa thức bậc bốn $y = f(x)$. Biết rằng hàm số $y = f'(1+x)$ có đồ thị như hình vẽ. có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(-x^2 + 2x - 2022 + m) + \sqrt{m}$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?



Lời giải

ĐS: 2023

Dựa vào đồ thị hàm số ta có: $f'(1+x) = a \cdot x(x-1)(x-2)$ ($a < 0$)

Thay x bằng $x-1$: $f'(x) = a \cdot (x-1)(x-2)(x-3)$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Ta có: $g'(x) = (-2x+2) \cdot f'(-x^2+2x-2022+m) \geq 0 \quad \forall x \in (0;1)$

$\Rightarrow f'(-x^2+2x-2022+m) \geq 0 \quad \forall x \in (0;1)$

Đặt $t = -x^2+2x-2022+m \Rightarrow t \in (m-2022; m-2021)$

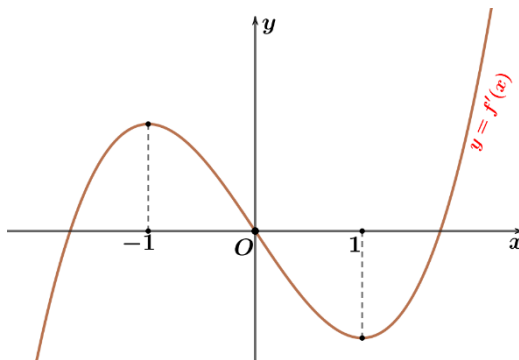
$\Rightarrow f'(t) \geq 0 \quad \forall t \in (m-2022; m-2021)$

$\Rightarrow \begin{cases} (m-2022; m-2021) \subset (2;3) \\ (m-2022; m-2021) \subset (-\infty;1) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} m-2021 \leq 3 \\ m-2022 \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2024 \\ m \geq 2022 \end{cases}$

Vậy có 2023 giá trị nguyên dương m .

Câu 42: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 1$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới.



Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $g(x) = |4f(\sin x) + \cos 2x - a|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

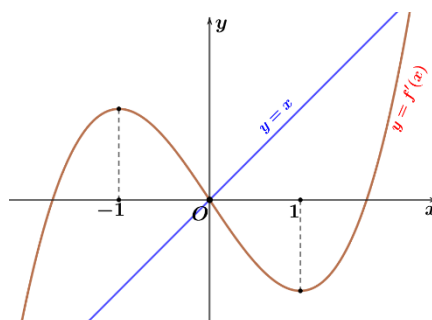
Lời giải

ĐS: 3

Ta có: $g(x) = |4f(\sin x) + \cos 2x - a| = |4f(\sin x) + 1 - 2\sin^2 x - a|$.

Đặt $t = \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$ và ta có hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số $g(t) = 4f(t) - 2t^2 + 1 - a \rightarrow g'(t) = 4f'(t) - 4t$ trên khoảng $(0; 1)$.



Ta có: $g(1) = 4f(1) - 1 - a = 3 - a$ và từ đồ thị ta suy ra $f'(x) < x, \forall x \in (0; 1)$.

$$\text{Điều kiện bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g'(t) \leq 0, \forall t \in (0; 1) \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \leq 3 \\ \begin{cases} g'(t) \geq 0, \forall t \in (0; 1) \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \text{ (loại)} \end{cases}.$$

Vì a nguyên dương nên $a \in \{1; 2; 3\}$.

Câu 43: Cho hàm số $f(x) = -x^4 - (5 - m^2)x + 2023$ và $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2022x + 2023$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $h(x) = g[f(x)]$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?

Lời giải

ĐS: 7

$$f'(x) = -4x^3 - (5 - m^2)$$

$$g'(x) = -3x^3 + 10x^2 - 2022 < 0 \quad \forall x \in (1; +\infty)$$

$$h'(x) = (g[f(x)])' = f'(x) \cdot g'[f(x)]$$

Để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì $h'(x) > 0; \forall x \in (1; +\infty)$

$$\Rightarrow f'(x) \cdot g'[f(x)] > 0; \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Rightarrow f'(x) < 0; \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Rightarrow -4x^3 - (5 - m^2) < 0; \forall x \in (1; +\infty)$$

$$\Rightarrow -4x^3 < (5 - m^2); \forall x \in (1; +\infty)$$

Xét hàm: $K(x) = -4x^3 \Rightarrow K'(x) = -12x^2$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow -12x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0	1		$+\infty$
$K'(x)$		-	0	-		
$K(x)$	$+\infty$					

Dựa vào bảng biến thiên

$$-4x^3 < (5 - m^2); \forall x \in (1; +\infty) \Leftrightarrow 5 - m^2 \geq -4 \Leftrightarrow m^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq 3.$$

Vậy có 7 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = -x^4 - (17 - m^2)x + 2023$ và $g(x) = -x^3 + 5x^2 - 2022x + 2023$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $h(x) = g(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$

Lời giải

ĐS: 15

$$\text{Ta có } h'(x) = f'(x) \cdot g'(f(x)) = (4x^3 + 17 - m^2)(3f^2(x) - 10f(x) + 2022).$$

Để hàm số $h(x) = g(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ cần:

$$h'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (2; +\infty) \Rightarrow (4x^3 + 17 - m^2) \geq 0 \quad \text{vì} \quad (3f^2(x) - 10f(x) + 2022) > 0, \quad \forall x > 2$$

Suy ra $m^2 \leq 4x^3 + 17$.

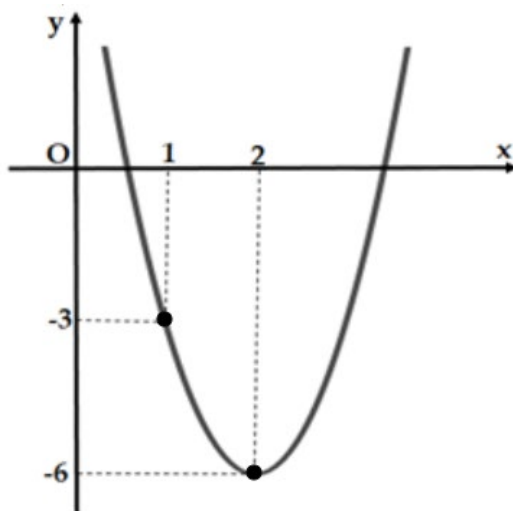
Xét hàm số $k(x) = 4x^3 + 17$ ta có

$k'(x) = 12x^2 > 0, \forall x > 2$. Suy ra hàm số $k(x) = 4x^3 + 17$ đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

$$\Rightarrow m^2 \leq \min_{(2; +\infty)} k(x) = 49 \Rightarrow -7 \leq m \leq 7$$

Vậy có 15 giá trị của m .

Câu 45: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(5-2x)$ có đồ thị là một Parabol (P) như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(2x^2 + 2x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.



Lời giải

ĐS: 2

Từ đồ thị ta xác định được $y = f'(5-2x) = 3x^2 - 12x + 6$.

$$\text{Đặt } 5-2x=t \Rightarrow x = \frac{5-t}{2}.$$

$$\text{Khi đó: } 3x^2 - 12x + 6 = \frac{3}{4}(5-t)^2 - 6(5-t) + 6 = \frac{3}{4}t^2 - \frac{3}{2}t - \frac{21}{4} = f'(t).$$

$$f'(t) < 0 \Leftrightarrow 1-2\sqrt{2} < t < 1+2\sqrt{2} \Leftrightarrow 1-2\sqrt{2} < 5-2x < 1+2\sqrt{2} \Leftrightarrow 2-\sqrt{2} < x < 2+\sqrt{2}.$$

Hàm số $y = g(x) = f(2x^2 + 2x + m)$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

$$\Rightarrow g'(x) = (4x+2)f'(2x^2 + 2x + m) < 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow f'(2x^2 + 2x + m) < 0, \forall x \in (0;1)$$

$$(\text{do } 4x+2 > 0, \forall x \in (0;1))$$

$$\Leftrightarrow 2-\sqrt{2} < 2x^2 + 2x + m < 2+\sqrt{2}, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow -m-\sqrt{2} < 2x^2 + 2x - 2 < -m+\sqrt{2}, \forall x \in (0;1).$$

Đặt $h(x) = 2x^2 + 2x - 2 \Rightarrow h'(x) = 4x + 2 > 0, \forall x \in (0; 1)$.

BBT:

Điều kiện bài toán $\Leftrightarrow -m - \sqrt{2} < 0 < 1 < -m + \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} < m < \sqrt{2} - 1 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0\}$.

Vậy có 2 giá trị nguyên của m thỏa mãn bài toán.

Câu 46: Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \frac{1-x}{x+m-2}$ đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$. Tổng tất cả các phần tử của tập S bằng

Lời giải

ĐS: -10

Ta có: $y = \frac{1-x}{x+m-2} \Rightarrow y' = \frac{1-m}{(x+m-2)^2}$. Để hàm số đồng biến trên khoảng $(6; +\infty)$ thì:

$$\begin{cases} 1-m > 0 \\ 2-m \leq 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \geq -4 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m < 1$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-4; -3; -2; -1; 0\} \Rightarrow$ Tổng các giá trị nguyên m thỏa mãn: -10 .

Câu 47: Có bao nhiêu giá trị nguyên không âm của tham số m để hàm số

$$y = \frac{1}{3}(m-2)x^3 - (m-2)x^2 + (m-3)x + m^2 \text{ nghịch biến trên } (-\infty; +\infty)$$

Lời giải

ĐS: 3

Với $m = 2$: $y = -x + 4$ luôn NB trên $(-\infty; +\infty)$. Do đó $m = 2$ thỏa mãn.

Với $m \neq 2$: Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; +\infty)$

$$\Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (m-2)x^2 - 2(m-2)x + m-3 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 < 0 \\ (m-2)^2 - (m-2)(m-3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ (m-2)(m-2-m+3) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 2.$$

Vậy $m \leq 2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán, mà m nguyên không âm. Do đó $m \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow$ có 3 giá trị của m thỏa mãn bài toán.

Câu 48: Có bao nhiêu số nguyên của tham số m để hàm số $y = |mx^3 - mx^2 + 16x - 32|$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$?

Lời giải

ĐS: 3

Đặt $f(x) = mx^3 - mx^2 + 16x - 32$, ta có $f'(x) = 3mx^2 - 2mx + 16 = m(3x^2 - 2x) + 16$.

Hàm số $y = |mx^3 - mx^2 + 16x - 32|$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$ khi và chỉ khi

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(2) \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 2) \\ f(2) \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} m \geq -\frac{16}{3x^2 - 2x}, \forall x \in (1; 2) \\ 4m \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} m \leq -\frac{16}{3x^2 - 2x}, \forall x \in (1; 2) \\ 4m \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} m \geq -2 \\ m \leq 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} m \leq -16 \\ m \geq 0 \end{array} \right. \end{array} \right] \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 0.$$

Vậy có 3 số nguyên của tham số m để hàm số $y = |mx^3 - mx^2 + 16x - 32|$ nghịch biến trên khoảng $(1; 2)$.

Câu 49: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-\infty; 2023)$ sao cho hàm số $y = |x^3 + (a+2)x + 9 - a^2|$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$?

Lời giải

ĐS: 2019

Xét hàm số $f(x) = x^3 + (a+2)x + 9 - a^2$.

Suy ra $f'(x) = 3x^2 + a + 2$.

Hàm số $y = |x^3 + (a+2)x + 9 - a^2|$ nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

+Trường hợp 1: $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \leq 0, \forall x \in (0; 1) \\ f(1) \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \leq -3x^2 - 2, \forall x \in (0; 1) \\ -a^2 + a + 12 \geq 0 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \leq \min_{[0;1]} (-3x^2 - 2) \\ -3 \leq a \leq 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \leq -5 \\ -3 \leq a \leq 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow a \in \emptyset.$$

+Trường hợp 2: $\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \geq 0, \forall x \in (0; 1) \\ f(1) \leq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \geq -3x^2 - 2, \forall x \in (0; 1) \\ -a^2 + a + 12 \leq 0 \end{array} \right.$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \geq \max_{[0;1]} (-3x^2 - 2) \\ a \leq -3 \\ a \geq 4 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \geq -2 \\ a \leq -3 \Leftrightarrow a \geq 4 \\ a \geq 4 \end{array} \right.$$

Kết hợp với $a \in (-\infty; 2023) \Rightarrow 4 \leq a < 2023$

Vậy có 2019 giá trị nguyên a thỏa bài toán.

Câu 50: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = x^3 - 2mx^2 - (m^2 - 5m + 6)x$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

Lời giải

ĐS: 2

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 4mx - (m^2 - 5m + 6) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 0) \quad (1)$$

Ta có: $\Delta'_{y'} = 7m^2 - 15m + 18 > 0, \forall m$. Từ đó $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y'(0) \geq 0 \\ \frac{4m}{6} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 5m + 6 \leq 0 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 3.$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{2; 3\}$.

Câu 51: Cho hàm số $y = mx^4 + (3m - 1)x^2 + 5$ (m là tham số thực). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = (f(3x + 1))^2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Số phần tử của S là

Lời giải

ĐS: 0

Đặt $g(x) = (f(3x + 1))^2 \Rightarrow g'(x) = 2f(3x + 1) \cdot 3 \cdot f'(3x + 1) = 6f(3x + 1) \cdot f'(3x + 1).$

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f(3x + 1) \cdot f'(3x + 1) = 0 \quad (1)$. Đặt $t = 3x + 1$ thì (1) trở thành

$$\begin{aligned} & [mt^4 + (3m - 1)t^2 + 5] \cdot [4mt^3 + 2(3m - 1)t] = 0 \\ \Leftrightarrow & [mt^4 + (3m - 1)t^2 + 5] \cdot [2mt^2 + (3m - 1)] \cdot t = 0 \end{aligned}$$

Để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ thì điều kiện cần là phương trình $h(t) = [mt^4 + (3m - 1)t^2 + 5] \cdot [2mt^2 + (3m - 1)] = 0$ có nghiệm $t = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{3}$.

Thử lại với $m = \frac{1}{3}$ ta có, $h(t) \cdot t = \left(\frac{1}{3}t^4 + 5\right) \left(\frac{2}{3}t^2\right) \cdot t$ đổi dấu khi qua $t = 0$. Do đó hàm số $g(x)$ không đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy không tồn tại tham số m để hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 52: Cho hàm số $y = \frac{mx - 2m - 3}{x - m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$. Tìm số phần tử của S

Lời giải

ĐS: 3

Ta có $y' = \frac{-m^2 + 2m + 3}{(x - m)^2}$.

Để thoả mãn ta có $\begin{cases} -m^2 + 2m + 3 > 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 3 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m \leq 2$.

Vậy $S = \{0; 1; 2\}$.

Câu 53: Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + (2m^2 - m + 1)x + m^2 - 3m$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m sao cho giá trị lớn nhất của hàm số trên $(-\infty; 0]$ bằng -2 . Tính các phần tử của S bằng

Lời giải

ĐS: 2

Ta có: $y' = 3x^2 + 2mx + 2m^2 - m + 1$.

Vì y' có $a = 3 > 0$ và $\Delta'_{y'} = m^2 - 3(2m^2 - m + 1) = -5m^2 + 3m - 3 < 0, \forall m \in \mathbb{R}$ do đó hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó $\max_{(-\infty; 0]} y = y(0) = m^2 - 3m$.

Theo đề bài, ta có: $m^2 - 3m = -2 \Leftrightarrow m^2 - 3m + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 2 \end{cases}$ suy ra $S = \{1; 2\}$.

Vậy tích các phần tử của tập S bằng $2.1 = 2$.

Câu 54: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2022; 2022]$ để hàm số $y = -x^4 + 2m^2x^2 + m^3$ nghịch biến trên khoảng $(-4; 0)$?

Lời giải

ĐS: 4038

Có $y' = -4x^3 + 4m^2x = 4x(m^2 - x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm m \end{cases}$

Nếu $m = 0$ ta có bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y'		+		-	

Nên hàm số đồng biến trên khoảng $(-4; 0)$.

Nếu $m \neq 0$, y' có 3 nghiệm phân biệt và có xét dấu như sau:



Để hàm số nghịch biến trên khoảng $(-4; 0)$ thì $-|m| \leq -4 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 4 \\ m \leq -4 \end{cases}$

Kết hợp giả thiết $m \in [-2022; 2022]$ ta được $m \in [-2022; -4] \cup [4; 2022]$

Số giá trị nguyên m thỏa mãn đề bài là 4038.

Câu 55: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in (-2022; 2022)$ để hàm số $y = |x^3 + (2m+1)x - 2|$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

Lời giải

ĐS: 4030

Xét $f(x) = x^3 + (2m+1)x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + (2m+1)$

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 3) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + (2m+1) \geq 0, \forall x \in (1; 3) \\ 2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \min_{[1;3]} x^2 \geq -\frac{2m+1}{3} \\ m \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Vi } \begin{cases} m \in (-2022; 2022) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; \dots; 2021\} \quad (1)$$

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0 \forall x \in (1; 3) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + (2m+1) \leq 0 \forall x \in (1; 3) \\ 2m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max_{[1;3]} x^2 \leq -\frac{2m+1}{3} \\ m \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 \leq -\frac{2m+1}{3} \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -14 \\ m \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m \leq -14$$

$$\text{Vi } \begin{cases} m \in (-2022; 2022) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-2021; -2020; \dots; -14\} \quad (2)$$

Từ (1), (2) có 4030 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 56: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số a thỏa mãn hàm số $y = \left| \frac{x-1}{x-a} \right|$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

Lời giải

ĐS: 1

Điều kiện $x \neq a$.

Xét hàm số $g(x) = \frac{x-1}{x-a}$ có $g'(x) = \frac{1-a}{(x-a)^2}, \forall x \neq a$.

+) Với $a = 1$ thì hàm số $g(x) = 1, \forall x \neq 1$.

+) Với $a \neq 1$ thì hàm số $g(x)$ là hàm bậc nhất/bậc nhất nên hàm số sẽ đồng biến hoặc nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; a)$ và $(a; +\infty)$.

Mà $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ nên hàm số $y = \left| \frac{x-1}{x-a} \right| = |g(x)|$ nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$ khi và chỉ khi hàm số $g(x) = \frac{x-1}{x-a}$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(-\infty; a); (a; +\infty)$ và $(2; +\infty) \subset (a; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-a < 0 \\ a \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < a \leq 2.$$

Do $a \in \mathbb{Z}$ nên $a = 2$.

Câu 57: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x - 3}{2 \cos x - m}$ nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$?

Lời giải

ĐS: 4

Ta có $y' = \frac{(m-6)\sin x}{(2\cos x - m)^2}, \forall x \in (0; \pi)$. Vì $x \in (0; \pi)$ nên $\begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x \in (-1; 1) \end{cases}$

Do đó, để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; \pi)$ thì $y' < 0, \forall x \in (0; \pi)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-6 < 0 \\ \frac{m}{2} \notin (-1; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \notin (-2; 2) \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty; -2] \cup [2; 6).$$

Mà m nguyên dương nên $m \in \{2; 3; 4; 5\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên dương của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 58: Cho hàm số $f(x) = \frac{(m-1)x - m}{x + 2m}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên m thuộc $[-2019; 2020]$ để hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$?

Lời giải

ĐS: 2019

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{-2m\}$.

$$f(x) = \frac{(m-1)x - m}{x + 2m} \Rightarrow f'(x) = \frac{2m^2 - m}{(x + 2m)^2}.$$

Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0) \Leftrightarrow f'(x) > 0, \forall x \in (-\infty; 0) \Leftrightarrow \frac{2m^2 - m}{(x + 2m)^2} > 0, \forall x \in (-\infty; 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - m > 0 \\ -2m \notin (-\infty; 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m^2 - m > 0 \\ -2m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{1}{2} \\ m < 0 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 0.$$

Mặt khác, vì $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-2019; 2020] \end{cases}$ nên $m \in \{-2019; -2018; \dots; -1\}$.

Do đó có 2019 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn đề bài.

Câu 59: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = g(x) = \left| \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (m-2)x - 4m + \frac{2}{3} \right|$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$?

Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Đặt } f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + (m-2)x - 4m + \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2 - 4x + m - 2.$$

Hàm số $g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ khi:

+) $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ và $f(1) \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (1; 3) \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m - 2 \geq 0, \forall x \in (1; 3) \\ -3m - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^2 + 4x + 2 = h(x), \forall x \in (1; 3) \\ m \leq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(1; 3)} h(x) = h(2) = 6 \\ m \leq -1 \end{cases} \Rightarrow VN.$$

+) $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; 3)$ và $f(1) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m - 2 \leq 0, \forall x \in (1; 3) \\ -3m - 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -x^2 + 4x + 2 = h(x), \forall x \in (1; 3) \\ m \geq -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{(1; 3)} h(x) = h(2) = 6 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 6 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Suy ra có 7 giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Câu 60: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in [-10; 10]$ để hàm số $y = |3x^4 - 4(a+2)x^3 + 12ax^2 - 30a|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -2)$?

Lời giải

ĐS: 13

$$\text{Xét hàm số } h(x) = 3x^4 - 4(a+2)x^3 + 12ax^2 - 30a$$

$$\Rightarrow h'(x) = 12x^3 - 12(a+2)x^2 + 24ax$$

Trường hợp 1:

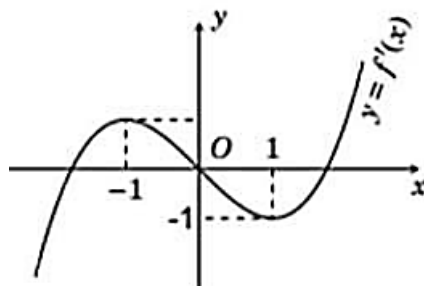
$$\begin{aligned} & \begin{cases} h'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; -2) \\ h(-2) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - ax + 2a \geq 0 \\ 112 + 50a \geq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \geq a(x-2) \\ a \geq -2, 24 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq x, \forall x \in (-\infty; -2) \\ a \geq -2, 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ a \geq -2, 24 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow a \geq -2. \end{aligned}$$

Trường hợp 2:

$$\begin{aligned} & \begin{cases} h'(x) \geq 0, \forall x \in (-\infty; -2) \\ h(-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - ax + 2a \leq 0 \\ 112 + 50a \leq 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) \leq a(x-2) \\ a \leq -2, 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq x, \forall x \in (-\infty; -2) \\ a \geq -2, 24 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \emptyset \\ a \geq -2, 24 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \emptyset. \end{aligned}$$

Vậy $a \in [-2; 10]$ nên có 13 giá trị nguyên a thỏa bài toán.

Câu 61: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) = 3$ và đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số $g(x) = |2f(x) + x^2 - 2mx + 2m|$ đồng biến trên $(0; 1)$?

Lời giải

ĐS: 3

Đặt $h(x) = 2f(x) + x^2 - 2mx + 2m \Rightarrow h'(x) = 2f'(x) + 2x - 2m$.

Chọn hàm $f''(x) = 3a(x^2 - 1) \Rightarrow f'(x) = a(x^3 - 3x) + d$.

$$\begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(1) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^3 - 3x}{2}.$$

Xét hàm $p(x) = f'(x) + x = \frac{x^3 - x}{2}, x \in (0;1)$.

$$p'(x) = \frac{3x^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1/\sqrt{3} \text{ (t/m)} \\ x = -1/\sqrt{3} \text{ (l)} \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1
p'	–	0	+
p	0		0

$\searrow \frac{-\sqrt{3}}{9} \nearrow$

Như vậy: $-\frac{\sqrt{3}}{9} \leq p(x) < 0, \forall x \in (0;1)$.

Hàm số $g(x) = |2f(x) + x^2 - 2mx + 2m|$ đồng biến trên $(0;1)$ khi và chỉ khi xảy ra một trong hai trường hợp sau:

$$\text{TH1: } \begin{cases} h(0) = 6 + 2m \geq 0 \\ h'(x) \geq 0, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ m \leq f'(x) + x, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -3 \\ m \leq -\frac{\sqrt{3}}{9} \end{cases}$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-3; -2; -1\}$.

$$\text{TH2: } \begin{cases} h(0) = 6 + 2m \leq 0 \\ h'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq f'(x) + x, \forall x \in (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -3 \\ m \geq 0 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1\}$.

Câu 62: Hỏi có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-20; 20]$ để hàm số $f(x) = 3x^4 + 4(1 - 2m^2)x^3 + 6(m - 2m^2)x^2 + 12mx - 1$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$?

Lời giải

ĐS: 20

Ta có: $f'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \Leftrightarrow 12x^3 + 12(1 - 2m^2)x^2 + 12(m - 2m^2)x + 12m \leq 0, \forall x \in (0;1)$.

$$\Leftrightarrow x^2(x+1) - 2m^2x(x+1) + m(x+1) \leq 0, \forall x \in (0;1).$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 - 2m^2x + m) \leq 0, \forall x \in (0;1).$$

Vì $x \in (0;1) \Rightarrow x+1 > 0$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 2m^2x + m}_{g(x)} \leq 0, \forall x \in (0;1)$.

Xét $\Delta_{g(x)}' = m^4 - m$.

TH1: $\Delta_{g(x)}' < 0$, do $a = 1 > 0 \Rightarrow g(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

TH2: $\Delta_{g(x)}' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 0 \end{cases}$.

TH3: $\Delta_{g(x)}' > 0 \Leftrightarrow m^4 - m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < 0 \end{cases}$.

Khi đó $g(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Ta có bảng xét dấu của $g(x)$ như sau:

x	$-\infty$	x_1	0	1	x_2	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-	0	+	

Theo yêu cầu bài toán ta có $\begin{cases} g(0) \leq 0 \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 1 - 2m^2 + m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 1 \\ m \leq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -\frac{1}{2}$

Do $\begin{cases} m \in \mathbb{Z} \\ m \in [-20; 20] \end{cases}$ nên ta nhận $m \in \{-20; -19; \dots; -1\}$. Vậy có tất cả 20 giá trị thỏa mãn.

Câu 63: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $g(x) = f'(x^3 + 2)$ có bảng xét dấu như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	3	$+\infty$
$g(x)$		+	0	-	0	+

Có bao nhiêu số nguyên $m \in [-2023; 2023]$ để hàm số $y = f(x - m)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$?

Lời giải

ĐS: 2018

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3 + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(-6) = 0 \\ f'(2) = 0 \\ f'(10) = 0 \\ f'(29) = 0 \end{cases}, \text{ suy ra } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = 2 \\ x = 10 \\ x = 29 \end{cases}.$$

Xét hàm số $h(x) = f(x - m) \Rightarrow h'(x) = f'(x - m)$

$$\text{Ta có } h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-m = -6 \\ x-m = 2 \\ x-m = 10 \\ x-m = 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m-6 \\ x = m+2 \\ x = m+10 \\ x = m+29 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu theo khoảng như sau

x	$-\infty$	$m-6$		$m+2$		$m+10$		$m+29$	$+\infty$
$h'(x)=f'(x-m)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Để hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ thì $m-6 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 6$

Suy ra $m \in \{6; 7; 8; \dots; 2023\}$, vậy có 2018 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 64: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-20; 20)$ để hàm số

$$f(x) = \frac{1}{7}x^7 + \frac{6}{5}x^5 - \frac{m^3}{4}x^4 + (5-m^2)x^3 - 3mx^2 + 10x + 2020 \text{ đồng biến trên } (0; 1) ?$$

Lời giải

ĐS: 22

$$f'(x) = x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + 3(5-m^2)x^2 - 6mx + 10.$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^6 + 6x^4 - m^3x^3 + 3(5-m^2)x^2 - 6mx + 10 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 10 \geq m^3x^3 + 3m^2x^2 + 6mx \Leftrightarrow (x^2 + 2)^3 + 3(x^2 + 2) \geq (mx + 1)^3 + 3(mx + 1)$$

$$\text{Đặt } g(t) = t^3 + 3t \Rightarrow g'(t) = 3t^2 + 3 > 0 \forall t.$$

Do $g(x^2 + 2) \geq g(mx + 1)$ và $y = g(t)$ đồng biến nên ta được

$$x^2 + 2 \geq mx + 1, \forall x \in (0; 1) \Leftrightarrow m \leq x + \frac{1}{x}, \forall x \in (0; 1) \Rightarrow m \leq \min_{[0;1]} h(x), \text{ với } h(x) = x + \frac{1}{x}.$$

$$h'(x) = \frac{1-x^2}{x^2} < 0, \forall x \in (0; 1) \Rightarrow \min_{[0;1]} h(x) = h(1) = 2 \Rightarrow m \leq 2.$$

Do m nguyên và thuộc khoảng $(-20; 20)$ nên $m \in \{-19; -18; \dots; 1; 2\}$.

Do đó có 22 giá trị của m .

Câu 65: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $a \in (-10; +\infty)$ để hàm số $y = |x^3 + (a+2)x + 9 - a^2|$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$?

Lời giải

ĐS: 11

$$\text{Xét } f(x) = x^3 + (a+2)x + 9 - a^2$$

$$f'(x) = 3x^2 + a + 2$$

Để $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$

$$\text{TH1: } \begin{cases} f'(x) \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + a + 2 \geq 0, \forall x \in (0;1) \\ 9 - a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \underset{(0;1)}{\text{Max}}(-3x^2 - 2) \\ 9 - a^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq -2 \\ -3 \leq a \leq 3 \end{cases} \Rightarrow a \in [-2;3]$$

$a = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\} \rightarrow 6$ giá trị

$$\text{TH2: } \begin{cases} f'(x) \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ f(0) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + a + 2 \leq 0, \forall x \in (0;1) \\ 9 - a^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \underset{(0;1)}{\text{Min}}(-3x^2 - 2) \\ 9 - a^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq -5 \\ \begin{cases} a \geq 3 \\ a \leq -3 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow a \leq -5$$

Kết hợp với điều kiện bài toán $a = \{-9; -8; -7; -6; -5\} \rightarrow 5$ giá trị

Vậy có 11 giá trị thoả mãn.

Câu 66: Cho hàm số $y = |12x^5 - (15m + 30)x^4 + 20x^3 - 30(m^2 - 4m + 3)x^2 + 120(m^2 + 1)x + 2023 + m|$.

Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1;3)$?

Lời giải

ĐS: 2

Đặt $f(x) = 12x^5 - (15m + 30)x^4 + 20x^3 - 30(m^2 - 4m + 3)x^2 + 120(m^2 + 1)x + 2023 + m$.

$$f'(x) = 60x^4 - 60(m + 2)x^3 + 60x^2 - 60(m^2 - 4m + 3)x + 120(m^2 + 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^3 - mx^2 + (-2m + 1)x - m^2 - 1 = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên $(1;3)$ suy ra $y = f(x)$ đồng biến trên $(1;3)$ hoặc nghịch biến trên khoảng $(1;3)$

$\Rightarrow x = 2$ không là cực trị của hàm số $f(x)$

$\Rightarrow x = 2$ là nghiệm của phương trình (1).

*Điều kiện cần: $x = 2$ là nghiệm của phương trình (1)

$$8 - 4m - 4m + 2 - m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow -m^2 - 8m + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -9. \end{cases}$$

*Điều kiện đủ:

Với $m = 1$. Khi đó $\begin{cases} f'(x) = 60(x-2)^2(x^2+x+1) \geq 0, \forall x \in (1;3) \\ f(1) = 2251 > 0 \end{cases}$ suy ra hàm số $y = |f(x)|$

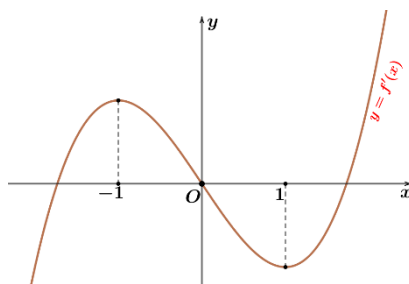
đồng biến trên $(1;3)$.

Với $m = -9$. Khi đó $\begin{cases} f'(x) = 60(x-2)^2(x^2+11x+41) \geq 0, \forall x \in (1;3) \\ f(1) = 8391 > 0 \end{cases}$ suy ra hàm số $y = |f(x)|$

đồng biến trên $(1;3)$.

Vậy $m = 1; m = -9$ nên có 2 giá trị nguyên thỏa mãn.

Câu 67: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1) = 2$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị là đường cong như hình bên dưới.



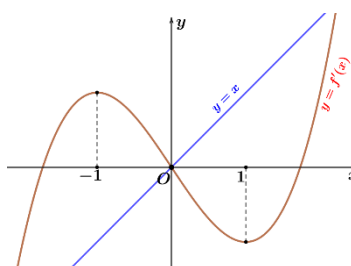
Có bao nhiêu số nguyên dương m để hàm số $y = |4f(\sin x) + \cos 2x - m|$ nghịch biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?

Lời giải

ĐS: 7

Đặt $t = \sin x, x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$ và ta có hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Xét hàm số $g(t) = 4f(t) - 2t^2 + 1 - m$ trên khoảng $(0; 1)$.

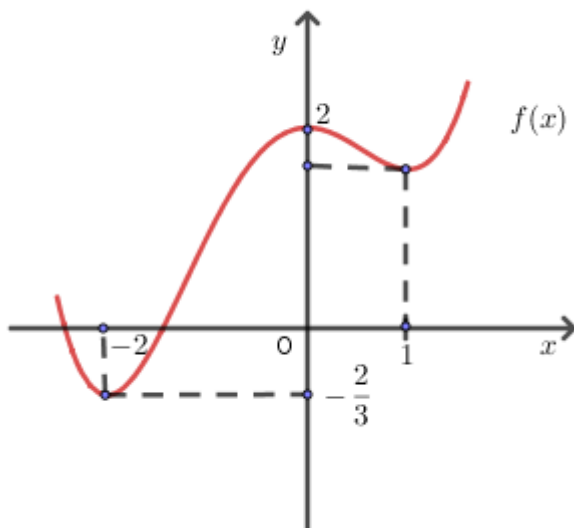


Ta có: $g(1) = 4f(1) - 1 - m = 7 - m$ và từ đồ thị ta suy ra $f'(x) > x, \forall x \in (0; 1)$.

$$\text{Điều kiện bài toán} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} g'(t) < 0, \forall t \in (0;1) \\ g(1) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow m \leq 7 \\ \begin{cases} g'(t) > 0, \forall t \in (0;1) \\ g(1) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{loại}) \end{cases}.$$

Vì m nguyên dương nên $m \in \{1; 2; \dots; 7\}$.

Câu 68: Cho hàm số $f(x)$ là bậc bốn có đồ thị như hình vẽ sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in (-25; 20)$ để hàm số $g(x) = \frac{1}{3}f^3(x) + \frac{1}{2}m.f^2(x) + (3m-5)f(x) - 7$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$?

Lời giải

ĐS: 18

$$\text{Xét } g(x) = \frac{1}{3}f^3(x) + \frac{1}{2}m.f^2(x) + (3m-5)f(x) - 7.$$

$$\Rightarrow g'(x) = f'(x).f^2(x) + mf'(x).f(x) + (3m-5)f'(x) = f'(x)[f^2(x) + mf(x) + 3m-5].$$

Vì hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0) \Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in (-2; 0)$.

$$\Rightarrow g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (-2; 0) \Leftrightarrow f^2(x) + mf(x) + 3m-5 \geq 0 \quad \forall x \in (-2; 0).$$

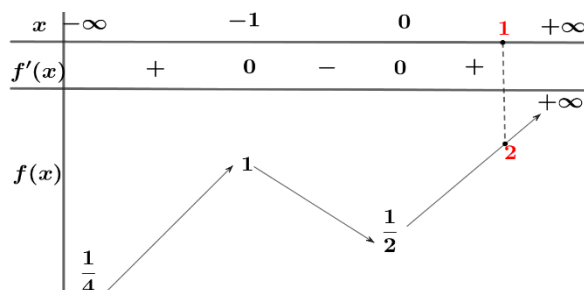
$$\Leftrightarrow m \geq \frac{5-f^2(x)}{f(x)+3} = h(x) \quad \forall f(x)+3 > 0 \forall x \in (-2; 0).$$

$$\text{Đặt } t = f(x) \text{ vì } x \in (-2; 0) \Rightarrow t \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right).$$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{5-t^2}{t+3} \forall t \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right) \Rightarrow h'(t) = \frac{-t^2-6t-5}{(t+3)^2} < 0 \forall t \in \left(-\frac{2}{3}; 2\right).$$

$$\Rightarrow m \geq h\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{41}{21} \approx 1,95 \Rightarrow \text{có 18 giá trị của } m.$$

Câu 69: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau:



Biết $f(1) = 2$, có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn $m \leq 10$ và bất phương trình $(x-1)[mf^2(x) - (2m+1)f(x) + 2] \geq 0$ đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$?

Lời giải

ĐS: 7

Xét $g(x) = mf^2(x) - (2m+1)f(x) + 2$

$+ m = 0 \Rightarrow g(x) = -f(x) + 2 = 0 \Rightarrow x = 1 \rightarrow \text{bpt có đúng 1 nghiệm } x = 1.$

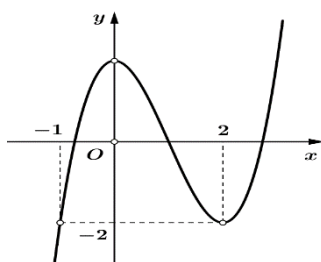
$+ m > 0 \text{ thì } g(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \rightarrow 1 \text{ nghiệm } x = 1 \\ f(x) = \frac{1}{m} \end{cases}$

Để bpt nghiệm đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $g(x) = 0$ có đúng 1 nghiệm đơn $x = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{m} \leq \frac{1}{4} \Rightarrow m \geq 4 (\text{vì } m > 0).$$

Kết hợp với điều kiện $m \leq 10$ và $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}.$

Câu 70: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:

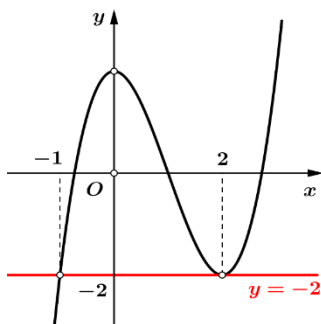


Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình

$$f(\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m) + 2 = 0 \text{ có nghiệm trong khoảng } (-4; 4)?$$

Lời giải

ĐS: 4



Xét phương trình $f(\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m) + 2 = 0$ (*) trong khoảng $(-4; 4)$

$$(*) \Leftrightarrow f(\sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m = 2 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} - m = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} = m + 2 \\ \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x} = m - 1 \end{cases}$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{x+4} + \sqrt{4-x}$ trong khoảng $(-4; 4)$.

$$\text{Ta có } g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}}; g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Bảng biến thiên

x	-4	0	4
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$2\sqrt{2}$	4	$2\sqrt{2}$

Dựa vào bảng biến thiên, để phương trình đã cho có nghiệm thì

$$\begin{cases} 2\sqrt{2} < m + 2 \leq 4 \\ 2\sqrt{2} < m - 1 \leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2} - 2 < m \leq 2 \\ 2\sqrt{2} + 1 < m \leq 5 \end{cases}$$

Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{1; 2\} \cup \{4; 5\}$.

Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 8. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài toán: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

(Áp dụng định nghĩa). $y = f(x) = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 (1) \\ f'(x) = 0 (2) \end{cases}$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành $y = 0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y = f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	6	2	$+\infty$	

Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

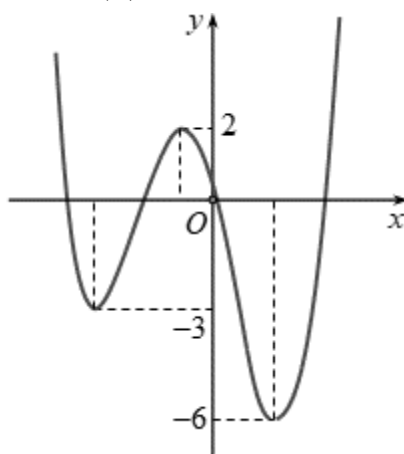
Câu 72: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị

Câu 73: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?

Câu 74: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 75: Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là

Câu 76: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

Câu 77: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right|$ có 7 điểm cực trị?

Câu 78: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị?

Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$							

The graph shows a function $f(x)$ plotted against x . The x-axis has critical points at $-\infty$, 1 , 2 , and $+\infty$. The y-axis has values $-\infty$, 11 , 4 , and $+\infty$. The function starts at $-\infty$ for $x = -\infty$, increases to a local maximum of 11 at $x = 1$, decreases to a local minimum of 4 at $x = 2$, and then increases towards $+\infty$ as x approaches $+\infty$.

Số giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực là

Câu 81: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

Câu 82: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ với $m \in [-5; 5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

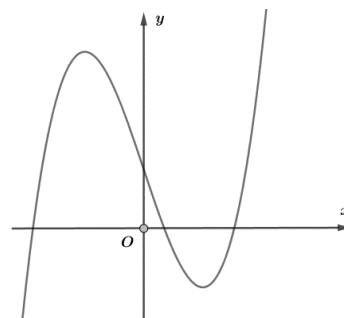
Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	$-\infty$	2018	-2018	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 84: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.

Hỏi hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?



DẠNG 2. SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ (Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$). Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

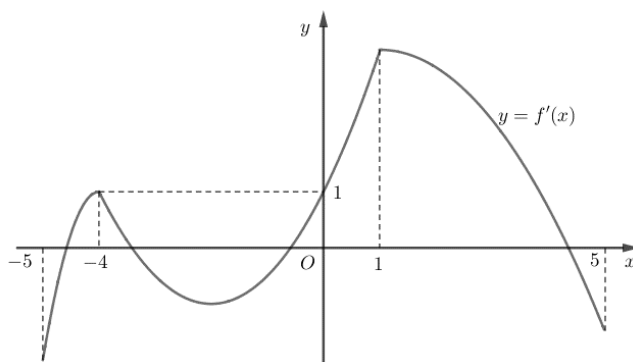
Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u' \cdot f'(u)$

Bước 2. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$

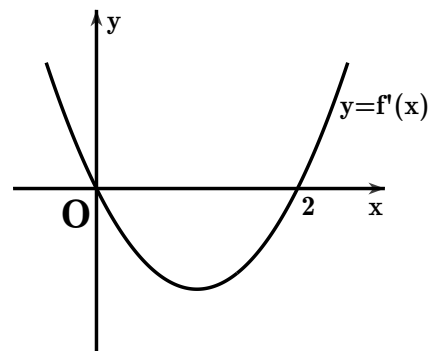
Bước 3. Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

Câu 85: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?

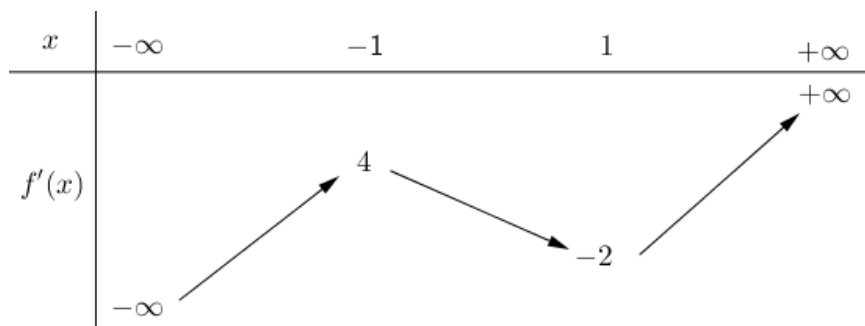


Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ là

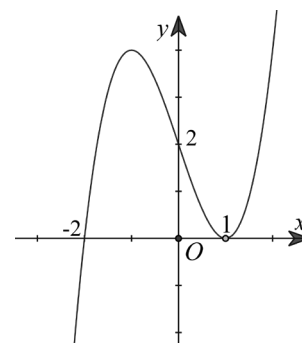
Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:



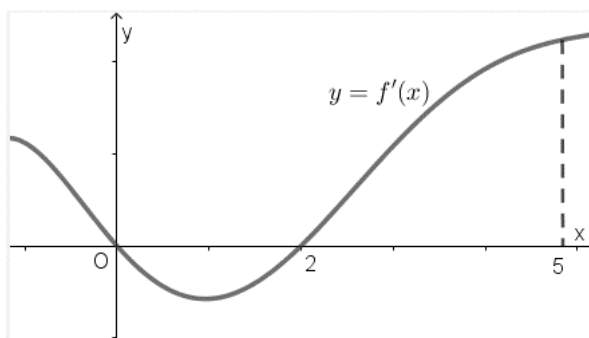
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

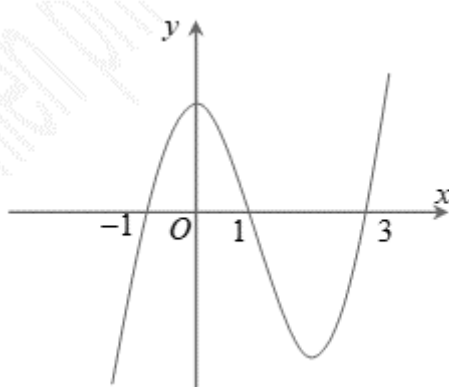
Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



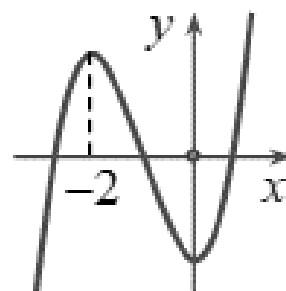
Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.



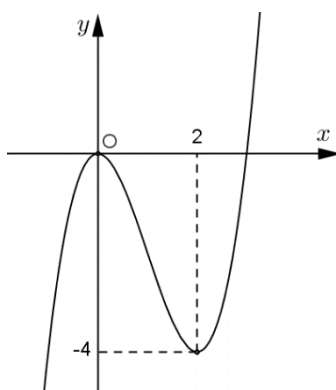
Câu 91: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f\left(\sqrt{x^2 + 2x + 2}\right)$ là



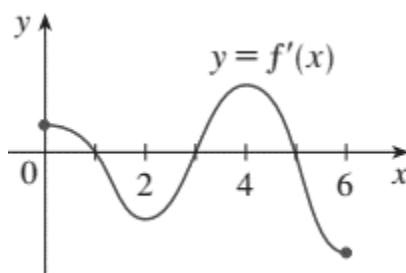
Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



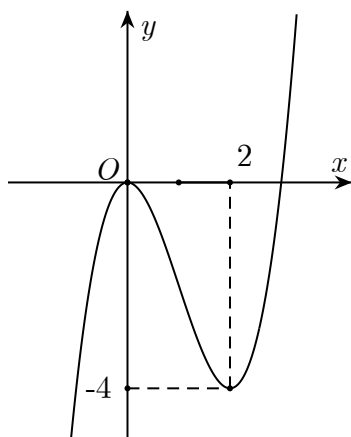
Câu 93: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.



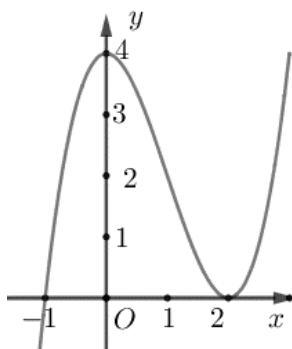
Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



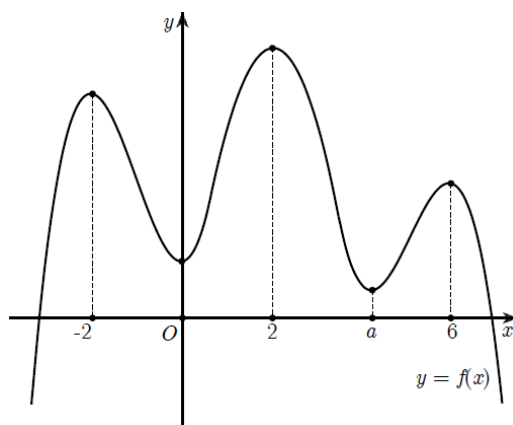
Câu 95: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$?



Câu 96: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là.



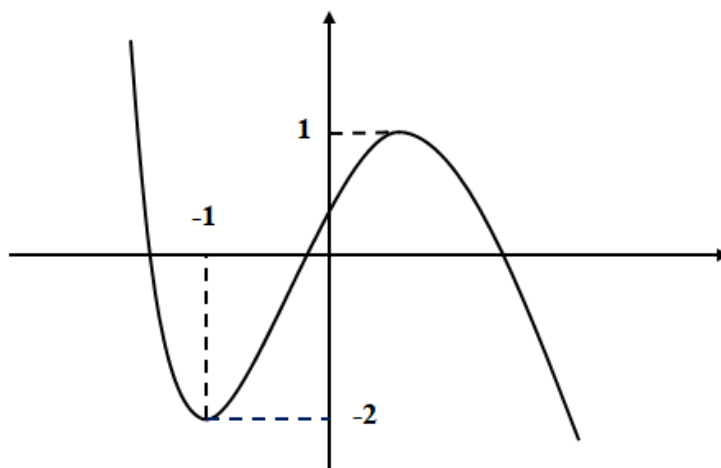
Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



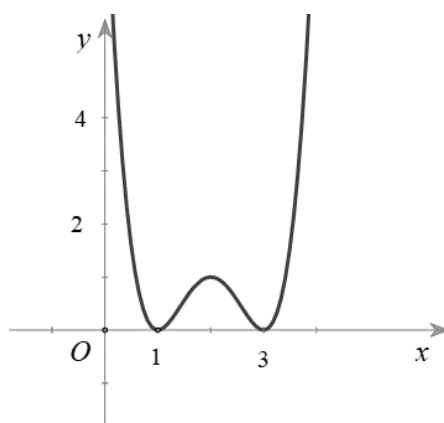
Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là

Câu 98: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.

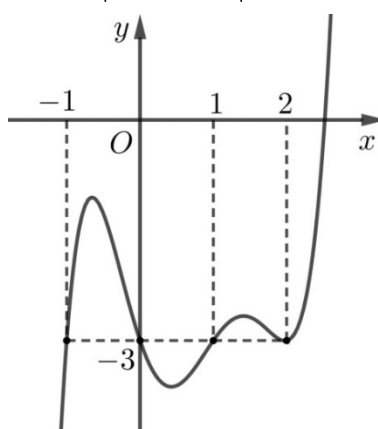
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là:



Câu 99: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?

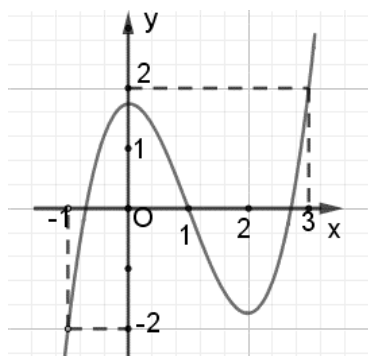


Câu 100: Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu cực trị?



Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2019$.

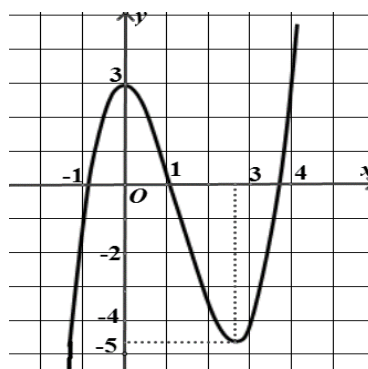
Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x|)$ là

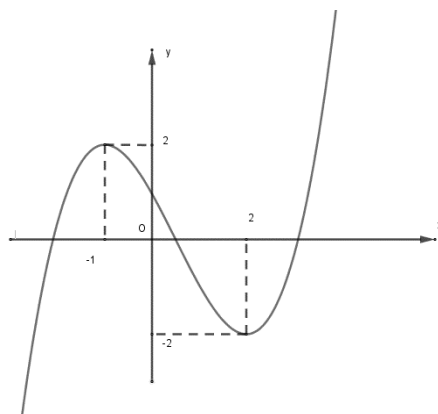
Câu 102: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$



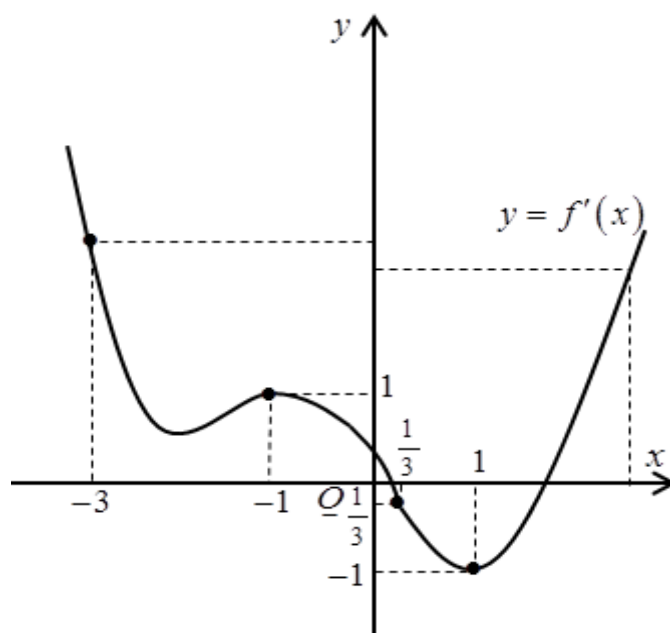
Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi

hàm số $h(x) = \left| [f(x)]^2 - 4f(x) + 1 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Câu 104: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số

$$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3 \text{ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng } (0; 2\pi).$$

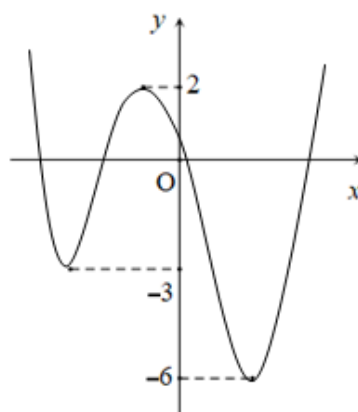


Câu 105: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

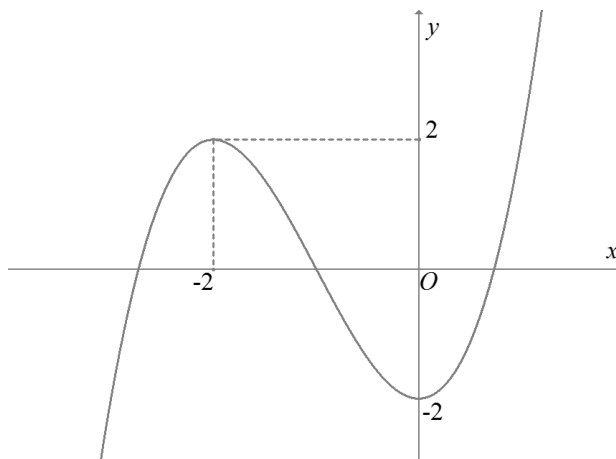
x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	0	—	0	+

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

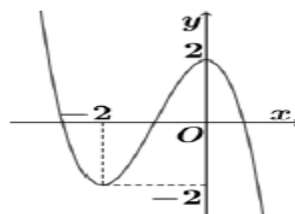
Câu 106: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



Câu 107: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$

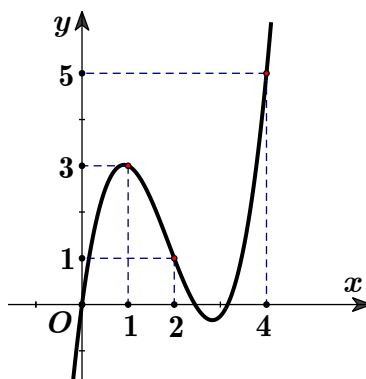


Câu 108: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



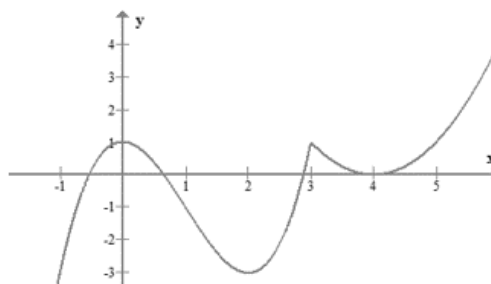
Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ bằng

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(4; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(2|x| - 2)$ bằng

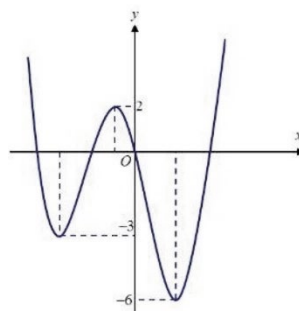


Câu 111: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$

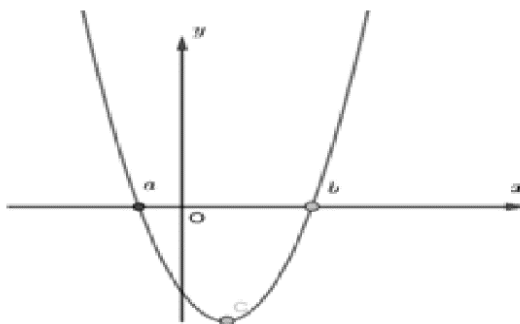
Câu 112: Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



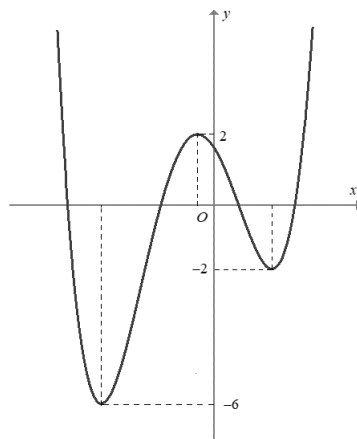
Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x + 2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

DẠNG 9. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ $f(u(x))$ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 113: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ và $f(b) = 1$. Số giá trị nguyên của $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = |f^2(x) + 4f(x) + m|$ có đúng 5 điểm cực trị là



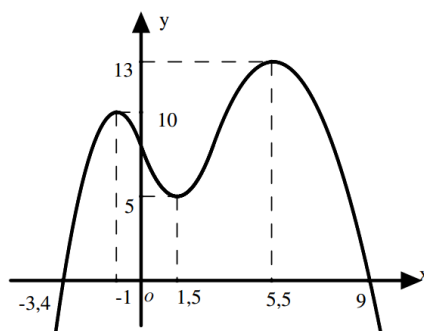
Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g(x) = |f(x+2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị?



Câu 115: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)^4(x+4)^3[x^2 + 2(m+3)x + 6m+18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

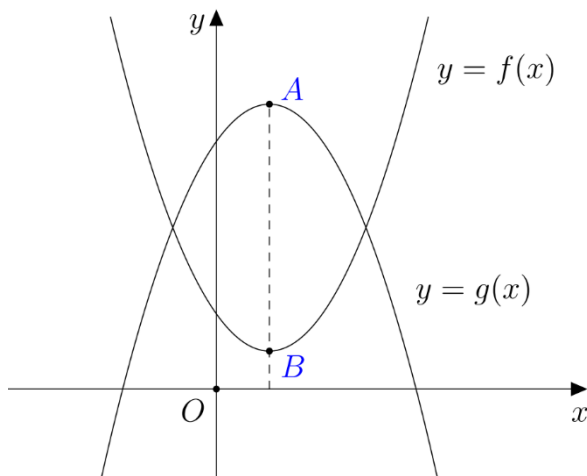
Câu 117: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có **đúng** hai điểm cực trị.



Câu 118: Cho hàm số $f'(x) = (x-2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

Câu 119: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-2)^2(x-1)(x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

Câu 120: Cho hai hàm đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB = \frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ để hàm số $y = |f(x) - g(x)| + m$ có đúng 5 điểm cực trị?



Câu 121: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b}; c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$ là

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

DẠNG 8. BÀI TOÁN CỰC TRỊ HÀM SỐ CHỨA DẤU TRỊ TUYỆT ĐỐI

Bài toán: Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ có bao nhiêu điểm cực trị

(Áp dụng định nghĩa). $y = f(x) = \sqrt{f^2(x)} \Rightarrow y' = \frac{2f(x) \cdot f'(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(x) = 0 (1) \\ f'(x) = 0 (2) \end{cases}$$

Số nghiệm của (1) chính là số giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và trục hoành $y = 0$. Còn số nghiệm của (2) là số cực trị của hàm số $y = f(x)$, dựa vào đồ thị suy ra (2). Vậy tổng số nghiệm bội lẻ của (1) và (2) chính là số cực trị cần tìm.

Câu 71: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	6	2	$+\infty$	

Hàm số $y = f(|x-3|)$ có bao nhiêu điểm cực trị

Lời giải

ĐS: 3

$y = f(|x-3|)$ (1), Đặt $t = |x-3|, t \geq 0$ Thì (1) trở thành: $y = f(t) (t \geq 0)$

Có $t = \sqrt{(x-3)^2} \Rightarrow t' = \frac{x-3}{\sqrt{(x-3)^2}}$

Có $y'_x = t'_x f'(t)$

$$y'_x = 0 \Leftrightarrow t'_x f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t'_x = 0 \\ f'(t) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ t = -2(L) \\ t = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$$

Lấy $x=8$ có $t'(8)f'(5) > 0$, đạo hàm đổi dấu qua các nghiệm đơn nên ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	3	7	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y	$+\infty$				$+\infty$

$\swarrow$ CT $\nearrow$ CĐ $\searrow$ CT $\nearrow$ CT

Dựa vào BBT thì hàm số $y = f(|x-3|)$ có 3 cực trị.

Câu 72: Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị

Lời giải

ĐS: 0

Đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị khi và chỉ khi đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12$ cắt trục hoành tại bốn điểm phân biệt

$x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\begin{cases} m^2 - (2m^2 + m - 12) > 0 \\ 2m > 0 \\ 2m^2 + m - 12 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < m < 3 \\ m > 0 \\ m < \frac{-1-\sqrt{97}}{4} \vee m > \frac{-1+\sqrt{97}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-1+\sqrt{97}}{4} < m < 3$$

Vậy không có giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |x^4 - 2mx^2 + 2m^2 + m - 12|$ có bảy điểm cực trị.

Câu 73: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có đúng 5 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 7

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2$; $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0; x_2 = -1; x_3 = 2$. Suy ra, hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

$\Rightarrow$ Hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2|$ có 5 điểm cực trị khi đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt trục hoành tại 2 điểm phân biệt không tính điểm tiếp xúc

$\Leftrightarrow 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt bội lẻ (không tính nghiệm bội chẵn).

Phương trình $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m^2 = 0 \Leftrightarrow -3x^4 + 4x^3 + 12x^2 = m^2$ (1).

Xét hàm số $g(x) = -3x^4 + 4x^3 + 12x^2$; $g'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 24x$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$			5		32			
	$-\infty$			0				$-\infty$

Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt bội lẻ (không tính nghiệm bội chẵn)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 \leq 0 \\ 5 \leq m^2 < 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ \sqrt{5} \leq |m| < \sqrt{32} \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{-5; -4; -3; 0; 3; 4; 5\}.$$

Vậy $m \in \{-5; -4; -3; 0; 3; 4; 5\}$.

Câu 74: Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

ĐS: 27

Đặt: $g(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m$

$$\text{Ta có: } g'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \Rightarrow y = m - 32 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 5 \\ x = 0 \Rightarrow y = m \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$					m			$+\infty$
				$m-5$			$m-32$		

Dựa vào bảng biến thiên, hàm số có $y = |g(x)|$ có 5 điểm cực trị khi $\begin{cases} m \leq 0 \\ m-5 \geq 0 \\ m-32 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ 5 \leq m < 32 \end{cases}$

. Vì m là số nguyên dương cho nên có 27 số m thỏa đề bài

Câu 75: Số giá trị nguyên của m để hàm số $y = |3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1|$ có 7 điểm cực trị là

Lời giải

ĐS: 4

Xét hàm số $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + m - 1$,

Có $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$$

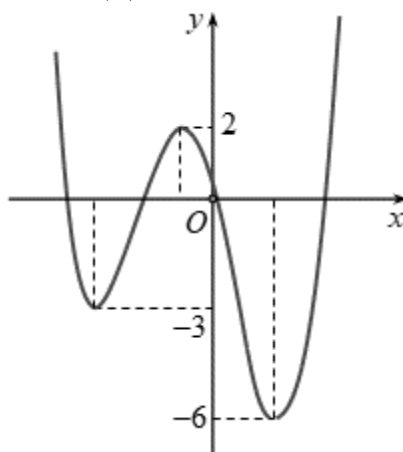
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$					$m-1$			$+\infty$
			</						

Từ bảng biến thiên, ta có hàm số $y = |f(x)|$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow m-6 < 0 < m-1 \Leftrightarrow 1 < m < 6$.

Vậy có 4 giá trị nguyên.

Câu 76: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$.



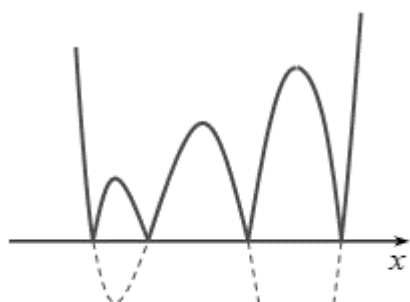
Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = |f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

Lời giải

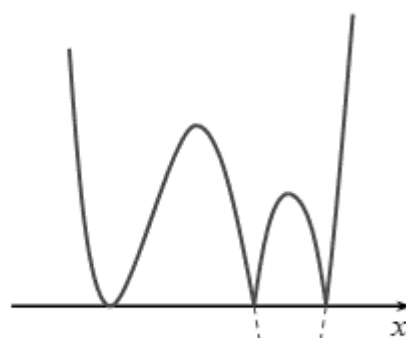
ĐS: 12

Nhận xét: Số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C'): y = f(x-1)$ với Ox .

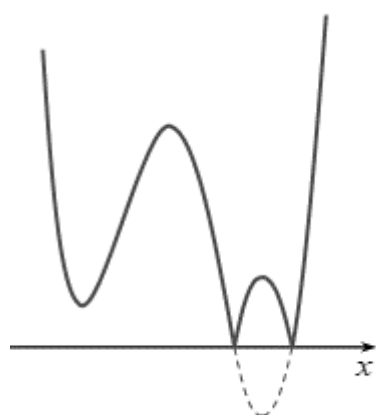
Vì $m > 0$ nên $(C''): y = f(x-1) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C'): y = f(x-1)$ lên trên m đơn vị.



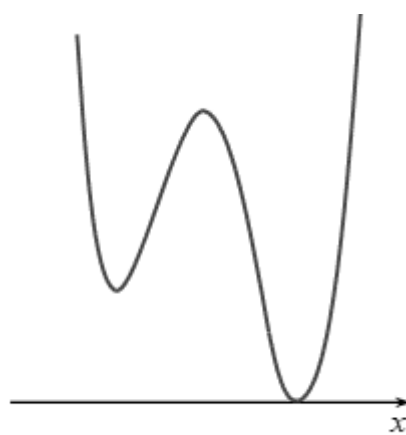
TH1: $0 < m < 3$



TH2: $m = 3$



TH3: $3 < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

TH1: $0 < m < 3$. Đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị. Loại.

TH2: $m = 3$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH3: $3 < m < 6$. Đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị. Nhận.

TH4: $m \geq 6$. Đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị. Loại.

Vậy $3 \leq m < 6$. Do $m \in \mathbb{Z}^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 77: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right|$ có 7 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 9

$$\text{Ta có } y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right| = \sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right)^2}$$

$$\Rightarrow y' = \frac{(12x^3 + 12x^2 - 24x) \left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right)}{\sqrt{\left(3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right)^2}}$$

$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 12x^3 + 12x^2 - 24x = 0 & (1) \\ 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Vậy để hàm số có 7 điểm cực trị thì (2) phải có bốn nghiệm phân biệt khác $\{0; 1; -2\}$.

$$\text{Xét hàm số } f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \Rightarrow f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	-2		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$			$\frac{m}{2}$				$+\infty$
		$-32 + \frac{m}{2}$				$-5 + \frac{m}{2}$		

Để (2) có 4 nghiệm phân biệt thì $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt

$$\Rightarrow \begin{cases} -5 + \frac{m}{2} < 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 10 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 10.$$

Vậy có 9 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \left| 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + \frac{m}{2} \right|$ có 7 điểm cực trị.

Câu 78: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị?

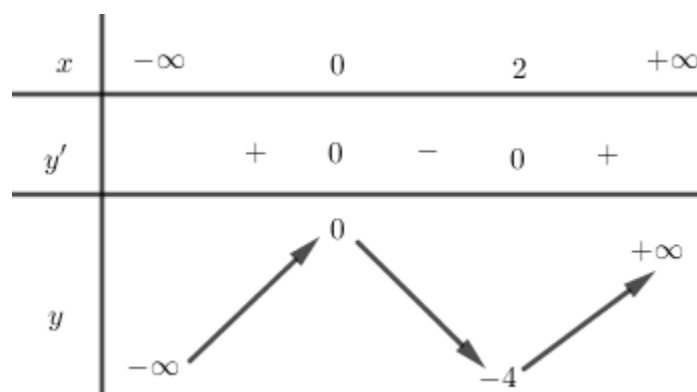
Lời giải

ĐS: 3

Hàm số $y = |x^3 - 3x^2 + m|$ có 5 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + m$ có hai điểm cực trị và nằm về hai phía của trục hoành $\Leftrightarrow$ phương trình $x^3 - 3x^2 + m = 0$ (1) có ba nghiệm phân biệt.

Xét bbt của hàm số $y = x^3 - 3x^2$

$$y' = 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$



Từ đó ta được (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow -4 < -m < 0 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 79: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 42

$$y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + m$$

$$\Rightarrow y' = 15x^4 - 75x^2 + 60$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow y = m - 16 \\ x = -1 \Rightarrow y = m - 38 \\ x = 1 \Rightarrow y = m + 38 \\ x = 2 \Rightarrow y = m + 16 \end{cases}$$

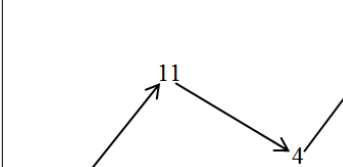
x	$-\infty$	-2		-1		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	The graph shows a function y plotted against x. A horizontal dashed line represents $y=0$. The function has a local minimum at $x=-1$ with value $m-38$ and a local maximum at $x=1$ with value $m+38$. Arrows indicate the function increases from $-\infty$ to $m-16$ at $x=-2$, decreases from $m-16$ to $m-38$ at $x=-1$, increases from $m-38$ to $m+38$ at $x=1$, decreases from $m+38$ to $m+16$ at $x=2$, and increases from $m+16$ to $+\infty$ at $x=2$.									

Suy ra $y = |3x^5 - 25x^3 + 60x + m|$ có 7 điểm cực trị

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-38 < 0 < m-16 \\ m+16 < 0 < m+38 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 < m < 38 \\ -38 < m < -16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \overline{17,37} \\ m = \overline{-37,-17} \end{cases}$$

Có tất cả 42 giá trị nguyên của m .

Câu 80: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ

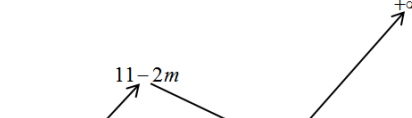
x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Số giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực là

Lời giải

ĐS: 3

Từ BBT của hàm số $y = f(x)$ ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) - 2m$ như sau

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$[f(x)-2m]'$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)-2m$					

Đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ gồm hai phần:

+ Phần đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía trên trục hoành.

+ Phần đối xứng với đồ thị của hàm số $y = f(x) - 2m$ nằm phía dưới trục hoành qua trục Ox .

Do đó, đồ thị hàm số $y = |f(x) - 2m|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi

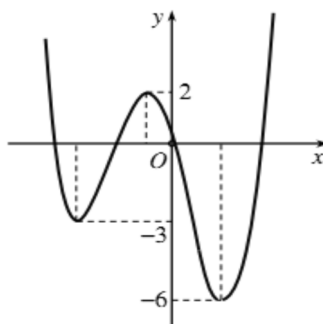
$$(4 - 2m)(11 - 2m) < 0 \Leftrightarrow m \in \left(2; \frac{11}{2}\right).$$

Vậy có 3 giá trị nguyên m .

Câu 81: Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = f(x)$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị. Tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng

Lời giải

ĐS: 12



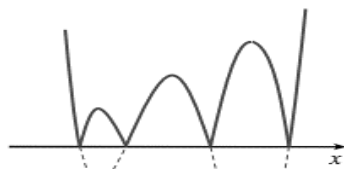
Cách 1: dùng đồ thị.

- Nhận thấy: số giao điểm của $(C): y = f(x)$ với Ox bằng số giao điểm của $(C_1): y = f(x-2)$ với Ox .

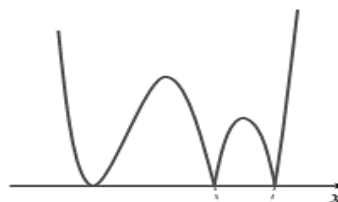
Vì $m > 0$ nên $(C_2): y = f(x-2) + m$ có được bằng cách tịnh tiến $(C_1): y = f(x-2)$ lên trên m đơn vị.

- Đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có được bằng cách lấy đối xứng qua trục hoành Ox phần đồ thị (C_2) nằm phía dưới trục Ox và giữ nguyên phần phía trên trục Ox .

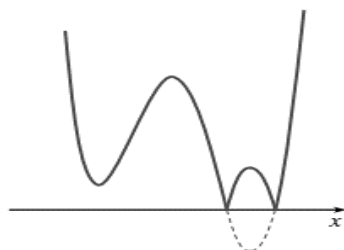
- Ta xét các trường hợp sau:



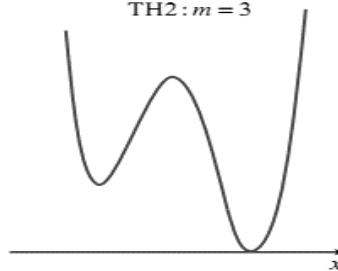
TH1: $0 < m < 3$



TH2: $m = 3$



TH3: $3 < m < 6$



TH4: $m \geq 6$

- + Trường hợp 1: $0 < m < 3$: đồ thị hàm số có 7 điểm cực trị (loại).
- + Trường hợp 2: $m = 3$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).
- + Trường hợp 3: $3 < m < 6$: đồ thị hàm số có 5 điểm cực trị (thỏa mãn).
- + Trường hợp 4: $m \geq 6$: đồ thị hàm số có 3 điểm cực trị (loại).

Vậy $3 \leq m < 6$ Do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

*** Cách 2:** đạo hàm hàm số hợp.

- Ta có: $y = |f(x-2) + m| = \sqrt{[f(x-2) + m]^2} \Rightarrow y' = \frac{(f(x-2) + m) \cdot f'(x-2)}{\sqrt{[f(x-2) + m]^2}}$

- Xét $f'(x-2) = 0$ (1)

+ Do phương trình $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt nên phương trình $f'(x-2) = 0$ cũng có 3 nghiệm phân biệt.

- Xét $f(x-2) + m = 0 \Leftrightarrow f(x-2) = -m$ (2)

+ Nếu $-6 < -m < -3 \Leftrightarrow 3 < m < 6$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt khác 3 nghiệm của (1).

+ Nếu $-m = -3 \Leftrightarrow m = 3$ thì (2) có 3 nghiệm phân biệt (trong đó có 2 nghiệm đơn khác 3 nghiệm của (1) và 1 nghiệm kép trùng với 1 nghiệm của (1))

Tóm lại: với $3 \leq m < 6$ thì hai phương trình (1) và (2) có tất cả 5 nghiệm bội lẻ phân biệt và y' đổi dấu khi x đi qua các nghiệm đó, hay đồ thị hàm số $y = |f(x-2) + m|$ có 5 điểm cực trị.

- Lại do $m \in \mathbb{Z}_+^*$ nên $m \in \{3; 4; 5\}$ hay $S = \{3; 4; 5\}$.

Vậy tổng giá trị tất cả các phần tử của S bằng 12.

Câu 82: Cho hàm số $f(x) = |x^3 - 3x^2 + m|$ với $m \in [-5; 5]$ là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị.

Lời giải

ĐS: 8

Xét hàm số $g(x) = x^3 - 3x^2 + m$ có $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$-\infty$	m	$-4+m$	$+\infty$	

Từ bảng biến thiên ta thấy để hàm số $f(x)$ có đúng ba điểm cực trị thì đồ thị hàm số $g(x)$ phải có đúng một giao điểm hoặc tiếp xúc với Ox .

Điều kiện này tương đương với $\begin{cases} m \leq 0 \\ -4+m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 4 \end{cases}$. Kết hợp điều kiện $m \in [-5; 5]$ ta có $m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 4; 5\}$. Vậy có 8 giá trị thỏa mãn.

Câu 83: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

$-\infty$

2018

-2018

$+\infty$

2018

-2018

$+\infty$

2018

-2018

$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = |f(x - 2017) + 2018|$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 3

Có $y = f(x - 2017)$ bằng cách tịnh tiến sang bên phải 2017 đơn vị ta có

bảng biến thiên của hàm số $y = f(x - 2017)$

x	$-\infty$	2016	2020	$+\infty$
$f(x-2017)$				

$-\infty \nearrow 2018 \searrow -2018 \nearrow +\infty$

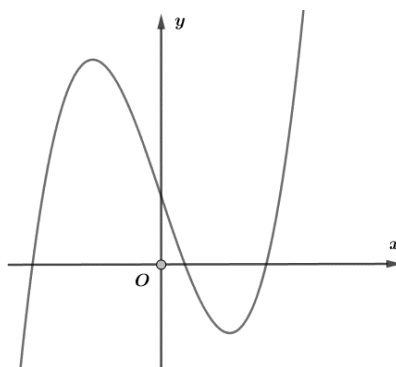
Tính tiến đồ thị hàm số $f(x-2017)$ lên trên 2018 đơn vị và lấy trị tuyệt đối ta có bảng biến thiên của hàm số $y = |f(x-2017) + 2018|$

x	$-\infty$	2016	2020	$+\infty$
y		4036		

$\searrow 0 \nearrow 4036 \searrow 0 \nearrow$

Từ bảng biến thiên, suy ra hàm số có 3 cực trị.

Câu 84: Hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $f'(x)$ trên $\mathbb{R}$.



Hỏi hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 5

Cách 1: Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ ta thấy $f(x)$ có hai cực trị dương nên hàm số $y = f(|x|)$ lấy đối xứng phần đồ thị hàm số bên phải trục tung qua trục tung ta được bốn cực trị, cộng thêm giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|) + 2018$ với trục tung nữa ta được tổng cộng là 5 cực trị.

Cách 2: Ta có: $y = f(|x|) + 2018 = f(\sqrt{x^2}) + 2018$.

$$\text{Đạo hàm: } y' = f'(\sqrt{x^2}) \cdot (\sqrt{x^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} \cdot f'(|x|).$$

Từ đồ thị hàm số của $f'(x)$ suy ra $f'(x)$ cùng dấu với $(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)$ với $x_1 < 0$, $0 < x_2 < x_3$.

Suy ra: $f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x| - x_1)(|x| - x_2)(|x| - x_3)$.

Do $|x| - x_1 > 0$ nên $y' = f'(\sqrt{x^2})(\sqrt{x^2})' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} f'(|x|)$ cùng dấu với $(|x| - x_2)(|x| - x_3) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}}$.

Vậy hàm số $y = f(|x|) + 2018$ có 5 cực trị.

DẠNG 2. SỐ ĐIỂM CỰC TRỊ CỦA HÀM HỢP

Bài toán: Cho hàm số $y = f(x)$ (Đề có thể cho bằng hàm, đồ thị, bảng biến thiên của $f(x), f'(x)$). Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(u)$ trong đó u là một hàm số đối với x

Ta thực hiện phương pháp tương tự xét số điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$

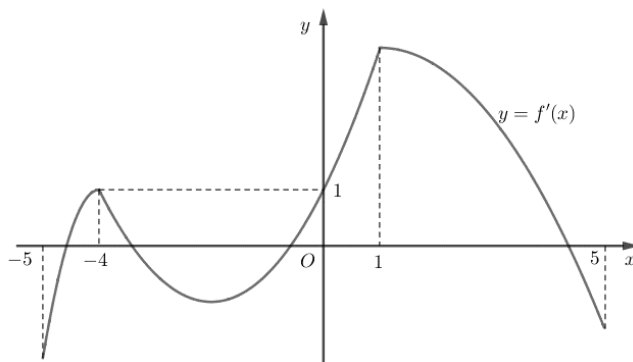
Bước 1. Tính đạo hàm $y' = u' \cdot f'(u)$

Bước 2. Giải phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u' = 0 \\ f'(u) = 0 \end{cases}$

Bước 3. Tìm số nghiệm đơn và bội lẻ hoặc các điểm mà y' không xác định.

Kết luận

Câu 85: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Hàm số $y = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(-5; 1)$?



Lời giải

ĐS: 5

Đặt $g(x) = f(x^2 + 4x) - x^2 - 4x$

$$\Rightarrow g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x) - (2x + 4) = (2x + 4)[f'(x^2 + 4x) - 1].$$

$$\text{Ta có } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = 0 \\ x^2 + 4x = -4 & (1) \\ x^2 + 4x = 0 & (2) \\ x^2 + 4x = a \in (1; 5) & (3) \end{cases}.$$

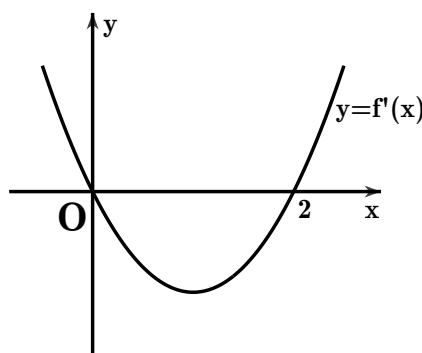
Xét phương trình $x^2 + 4x = a \in (1; 5)$, ta có BBT của hàm số $y = x^2 + 4x$ trên $(-5; 1)$ như sau:

x	-5	-4	-2	0	1
y'		-	0	+	
y	5		0		5

Suy ra (1) có nghiệm kép $x = -2$, (2) có 2 nghiệm phân biệt $x = -4; x = 0$, (3) có 2 nghiệm phân biệt $x = x_1; x = x_2$ khác $-2; 0; -4$. Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 5 nghiệm trong đó có $x = -2$ là nghiệm bội ba, các nghiệm $x = -4; x = 0; x = x_1; x = x_2$ là các nghiệm đơn.

Vậy $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 86: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$, có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ là

Lời giải

ĐS: 1

Ta có $g(x) = f(-x^2 + x) \Rightarrow g'(x) = (-2x + 1)f'(-x^2 + x)$.

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow (-2x + 1)f'(-x^2 + x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 = 0 \\ f'(-x^2 + x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ -x^2 + x = 0 \\ -x^2 + x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

$$\text{Do đó } g'(x) > 0 \Leftrightarrow (-2x + 1)f'(-x^2 + x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 1 > 0 \\ f'(-x^2 + x) > 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} -2x + 1 < 0 \\ f'(-x^2 + x) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ -x^2 + x > 2 \\ -x^2 + x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x > 1 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 0 < -x^2 + x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ 0 < x < 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$			
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$								

Vậy hàm số có 1 điểm cực tiểu.

Câu 87: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$				

$-\infty \nearrow 4 \searrow -2 \nearrow +\infty$

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ là

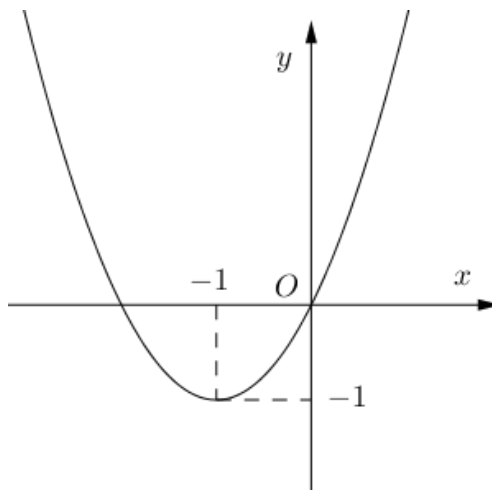
Lời giải

ĐS: 5

Ta có $y' = (2x + 2)f'(x^2 + 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ f'(x^2 + 2x) = 0 \end{cases} \quad (1)$

Từ BBT ta thấy phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = a < -1 & (2) \\ x^2 + 2x = b \in (-1; 1) & (3) \\ x^2 + 2x = c > 1 & (4) \end{cases}$

Đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ có dạng



Từ đồ thị hàm số $y = x^2 + 2x$ ta thấy phương trình (2) vô nghiệm; phương trình (3); phương trình (4) đều có 2 nghiệm phân biệt.

Do đó $y' = 0$ có 5 nghiệm đơn phân biệt. Vậy hàm số $y = f(x^2 + 2x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 88: Cho hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Khi đó hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 3

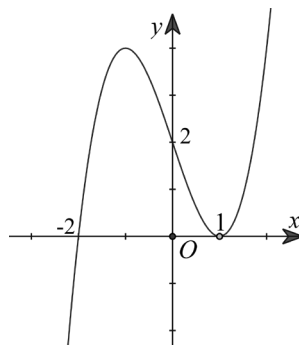
Vì hàm số $y = f(x)$ có đúng ba điểm cực trị là $-2; -1; 0$ và có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ nên $f'(x) = 0$ có ba nghiệm là $-2; -1; 0$ (ba nghiệm bội lẻ).

Xét hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có $y' = (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow (2x - 2) \cdot f'(x^2 - 2x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -2 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Do $y' = 0$ có một nghiệm bội lẻ ($x = 1$) và hai nghiệm đơn ($x = 0$; $x = 2$) nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ chỉ có ba điểm cực trị.

Câu 89: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.



Lời giải

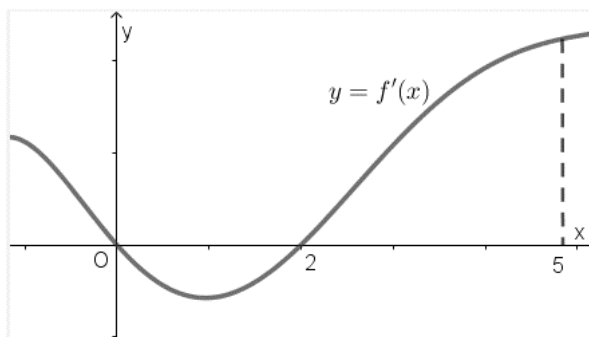
ĐS: 3

Quan sát đồ thị ta có $y = f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương qua $x = -2$ nên hàm số $y = f(x)$ có một điểm cực trị là $x = -2$.

$$\text{Ta có } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -2 \\ x^2 - 3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Mà $x = \pm 2$ là nghiệm kép, còn các nghiệm còn lại là nghiệm đơn nên hàm số $y = f(x^2 - 3)$ có ba cực trị.

Câu 90: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm là $f'(x)$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ bên. Tính số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2)$ trên khoảng $(-\sqrt{5}; \sqrt{5})$.



Lời giải

ĐS: 3

Xét hàm số $g(x) = f(x^2) \Rightarrow g'(x) = 2xf'(x^2)$.

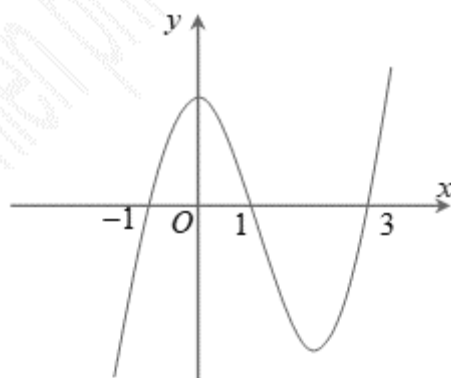
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = 0 \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}.$$

Ta có bảng xét dấu:

x	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Từ đó suy ra hàm số $y = f(x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 91: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên. Số điểm cực đại của hàm số $y = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ là



Lời giải

ĐS: 1

Từ đồ thị của $y = f'(x)$ ta chọn $f'(x) = (x+1)(x-1)(x-3)$.

Áp dụng công thức $y = [f(u)]' = u'f'(u)$ với $u = \sqrt{x^2 + 2x + 2}$

Ta có

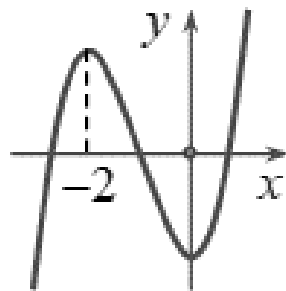
$$y' = \left[f(\sqrt{x^2 + 2x + 2}) \right]' = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot (\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} - 3)$$

$$= \frac{(x+1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(x+1)^2(x^2 + 2x - 7)}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 1)(\sqrt{x^2 + 2x + 2} + 3)} \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -1 + 2\sqrt{2} \\ x = -1 - 2\sqrt{2} \end{cases}$$

x	$-\infty$	$-1 - 2\sqrt{2}$		-1		$-1 + 2\sqrt{2}$	$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
y							

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số có một điểm cực đại.

Câu 92: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - 4)$ có bao nhiêu điểm cực tiểu?



Lời giải

ĐS: 3

Ta có: $g'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x - 4)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)f'(x^2 - 2x - 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x - 4) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 4 = -2 \\ x^2 - 2x - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{5} \\ x = 1 - \sqrt{5} \end{cases} \text{ (Tất cả đều là nghiệm bội lẻ).}$$

Ta chọn $x = -2$ để xét dấu của $g'(x)$: $g'(-2) = 2 \cdot (-3) \cdot f'(4)$.

Vì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ do đó: $f'(4) > 0$.

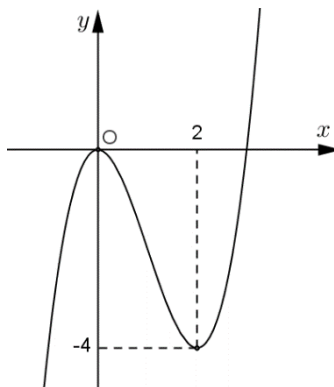
Suy ra: $g'(-2) < 0$.

Theo tính chất qua nghiệm bội lẻ $g'(x)$ đổi dấu, ta có bảng xét dấu $g'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	$1-\sqrt{5}$		$1-\sqrt{3}$		1		$1+\sqrt{3}$		$1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+

Từ bảng xét dấu, suy ra hàm số $y = g(x)$ có 3 điểm cực tiểu.

Câu 93: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$.



Lời giải

ĐS: 4

Xét hàm số $y = f[f(x)]$, $y' = f'(x) \cdot f'[f(x)]$;

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'[f(x)] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = a \in (2; +\infty) \\ x = b \in (a; +\infty) \end{cases}.$$

Với $x > b$, ta có $f(x) > 2 \Rightarrow f'[f(x)] > 0$

Với $a < x < b$, ta có $0 < f(x) < 2 \Rightarrow f'[f(x)] < 0$

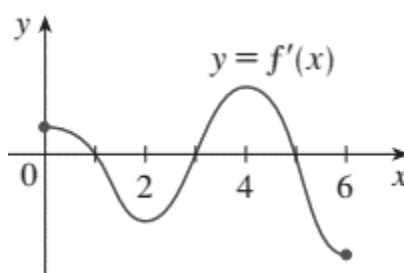
Với $0 < x < a$ hoặc $x < 0$, ta có $f(x) < 0 \Rightarrow f'[f(x)] > 0$

BBT:

x	$-\infty$	0	2	a	b	$+\infty$
y'	+	0	-	0	-	+
y						

Dựa vào BBT suy ra hàm số $y = f[f(x)]$ có bốn điểm cực trị.

Câu 94: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục và có đạo hàm trên $[0; 6]$. Đồ thị của hàm số $y = f'(x)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho bởi hình bên dưới. Hỏi hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa bao nhiêu cực trị.



Lời giải

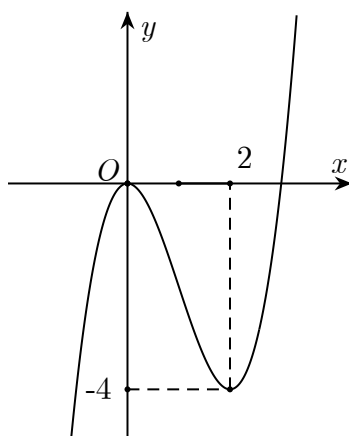
ĐS: 7

Ta có $y' = 2f(x)f'(x)$ nên $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$.

Từ đồ thị ta suy ra $f(x) = 0$ có tối đa 4 nghiệm, $f'(x) = 0$ có tối đa 3 nghiệm.

Do đó, hàm số $y = [f(x)]^2$ có tối đa 7 điểm cực trị nên có tối đa 7 cực trị.

Câu 95: Biết rằng hàm số $f(x)$ có đồ thị được cho như hình vẽ bên. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f[f(x)]$?



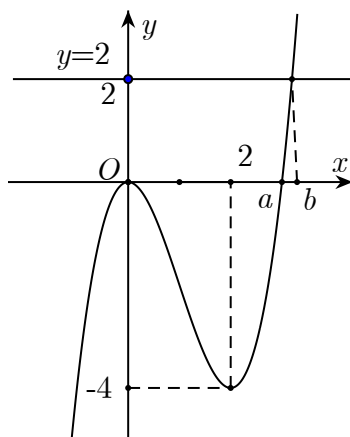
Lời giải

ĐS: 4

Ta có: $y' = [f(f(x))]' = f'(x) \cdot f'(f(x))$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$

+ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$ vì hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị $x = 0; x = 2$

+ $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 2 \end{cases}$



Quan sát đồ thị ta thấy phương trình $f(x) = 0$ có một nghiệm bội chẵn $x = 0$

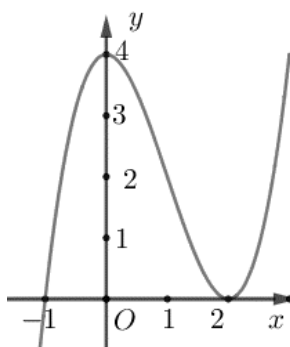
và một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = a > 2$.

Kẻ đường thẳng $y = 2$ nhận thấy phương trình $f(x) = 2$ có một nghiệm đơn hoặc bội lẻ $x = b > a$

Do đó y' có các điểm đổi dấu là $x = 0; x = 2, x = a, x = b$.

Vậy hàm số có 4 điểm cực trị.

Câu 96: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(f(x))$ là.



Lời giải

ĐS: 6

Ta có $g'(x) = f'(x) \cdot f'(f(x))$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 (*) \\ f(x) = 2 (**) \end{cases}$$

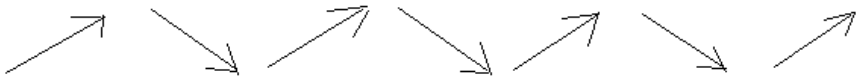
Dựa vào đồ thị suy ra:

Phương trình (*) có hai nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$.

Phương trình (**) có ba nghiệm $\begin{cases} x = m (-1 < m < 0) \\ x = n (0 < n < 1) \\ x = p (p > 2) \end{cases}$

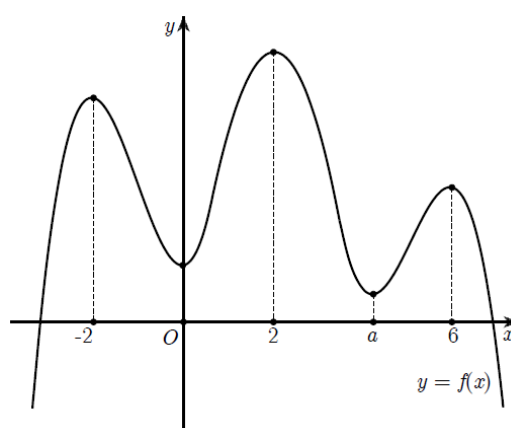
$g'(x) = 0$ có nghiệm $\begin{cases} x = -1 \\ x = m \\ x = 0 \\ x = n \\ x = 2 \\ x = p \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	m	0	n	2	p	$+\infty$					
$f'(x)$	+		+		+	0	-		-	0	+		+
$f'(f(x))$	+	0	-	0	+		+	0	-	0	-	0	+
$g'(x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$													

Nhìn bảng biến thiên ta thấy hàm số $g(x) = f(f(x))$ có 6 cực trị.

Câu 97: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết tất cả các điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$ là $-2; 0; 2; a; 6$ với $4 < a < 6$. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^6 - 3x^2)$ là

Lời giải

ĐS: 11

Từ đồ thị ta có $-2; 0; 2; a; 6$ là tất cả các nghiệm của $f'(x)$.

Ta có: $y' = (f(x^6 - 3x^2))' = (6x^5 - 6x)f'(x^6 - 3x^2)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5 - 6x = 0 \\ f'(x^6 - 3x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm 1 \\ x^6 - 3x^2 = -2 \\ x^6 - 3x^2 = 0 \\ x^6 - 3x^2 = 2 \\ x^6 - 3x^2 = a \\ x^6 - 3x^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, x = \pm 1 \\ x = \pm 1 \\ x = 0, x = \pm \sqrt[4]{3} \\ x = \pm \sqrt{2} \\ x = \pm m, m > \sqrt{2} \\ x = \pm n, n > m \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^6 - 3x^2$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$				0				$+\infty$

$\swarrow$ $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$
 -2 -2

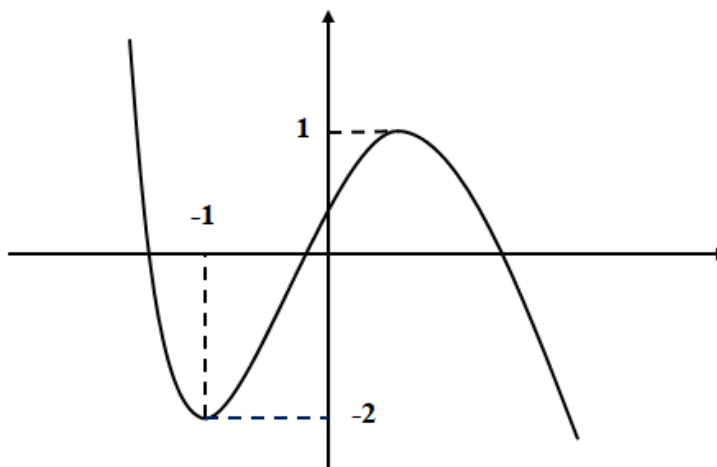
Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $g(x) = x^6 - 3x^2$, ta suy ra ± 1 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = -2$ và 0 là nghiệm kép của phương trình $x^6 - 3x^2 = 0$. Do đó ± 1 và 0 là nghiệm kép của $f'(x^6 - 3x^2)$. Do vậy ± 1 và 0 là nghiệm bội ba của y' .

Các nghiệm khác ± 1 và 0 của y' đều là nghiệm đơn.

Vậy hàm số đã cho có 11 cực trị.

Câu 98: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ sau.

Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x) + 2x$ là:



Lời giải

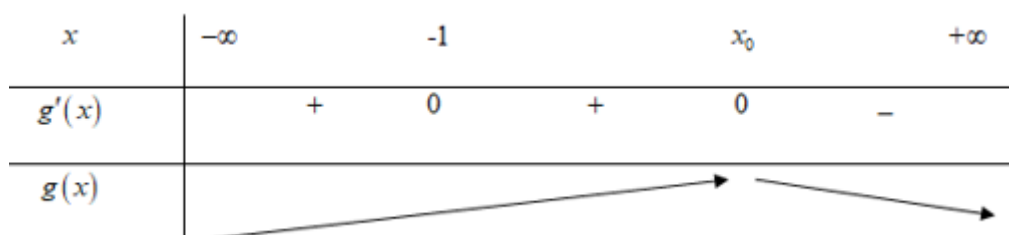
ĐS: 1

Đặt $g(x) = f(x) + 2x$ suy ra $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 2 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = x_0 > -1 \end{cases}$.

Dựa vào đồ thị ta có: Trên $(-\infty; -1)$ thì $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$.

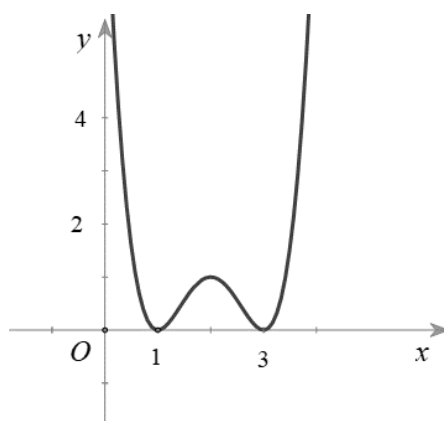
Trên $(-1; x_0)$ thì $f'(x) > -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 > 0$.

Trên $(x_0; +\infty)$ thì $f'(x) < -2 \Leftrightarrow f'(x) + 2 < 0$.



Vậy hàm số $g(x) = f(x) + 2x$ có 1 cực trị.

Câu 99: Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ dưới. Hàm số $g(x) = f(x) - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 5x + 2001$ có bao nhiêu điểm cực trị?

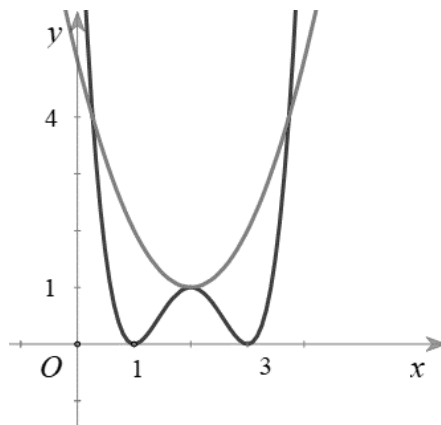


Lời giải

ĐS: 2

Có $g'(x) = f'(x) - x^2 + 4x - 5 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x^2 - 4x + 5$

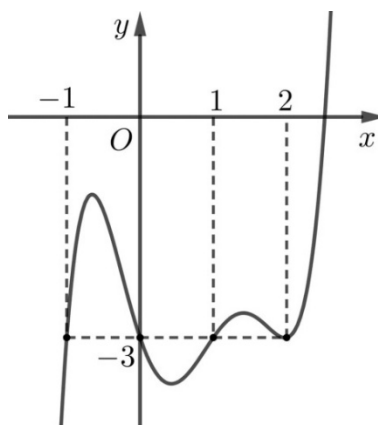
Ta có đồ thị hàm số $y = x^2 - 4x + 5$ và đồ thị hàm $y = f'(x)$ như hình vẽ dưới



Quan sát hình vẽ ta thấy $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt trong đó chỉ có 1 nghiệm bội chẵn

Vậy hàm số $g(x)$ có 2 điểm cực trị.

Câu 100: Cho hàm số đa thức $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, $f(0) < 0$ và đồ thị hình bên dưới là đồ thị của đạo hàm $f'(x)$. Hỏi hàm số $g(x) = |f(x) + 3x|$ có bao nhiêu cực trị?



Lời giải

ĐS: 5

$$\text{Đặt } h(x) = f(x) + 3x$$

$$h'(x) = f'(x) + 3$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) + 3 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -3$$

Theo đồ thị của hàm số $f'(x)$ thì phương trình $f'(x) = -3$ có 4 nghiệm $\{-1; 0; 1; 2\}$

Ta có bảng biết thiên

x	$-\infty$	-1	0	1	2	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$					$+\infty$

Theo bảng biến thiên ta có phương trình $h(x)=0$ có hai nghiệm $x_1 < -1$; và $x_2 > 1$ (do có $f(0) < 0$)

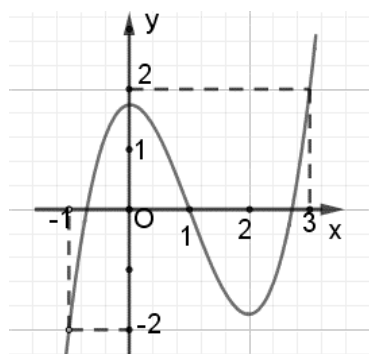
Khi đó ta có

x	$-\infty$	x_1	-1	0	1	x_2	$+\infty$
$g(x)= h(x) $	$+\infty$						$+\infty$

0 $|f(0)|$ 0

Vậy hàm số $g(x)=|f(x)+3x|$ có 5 cực trị.

Câu 101: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 2f(x) - x^2 + 2x + 2019$.
Biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình vẽ.



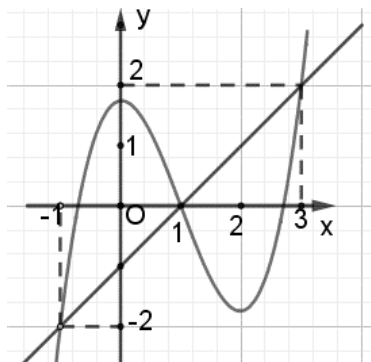
Số điểm cực trị của hàm số $y = g(|x|)$ là

Lời giải

ĐS: 5

* $g'(x) = 2f'(x) - 2x + 2$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = x - 1$

Đường thẳng $y = x - 1$ đi qua các điểm $(-1; -2)$, $(1; 0)$, $(3; 2)$



Quan sát vào vị trí tương đối của hai đồ thị trên hình vẽ, ta có BBT của hàm số $y = g(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	0	1	3	$+\infty$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$		$g(-1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(3)$		

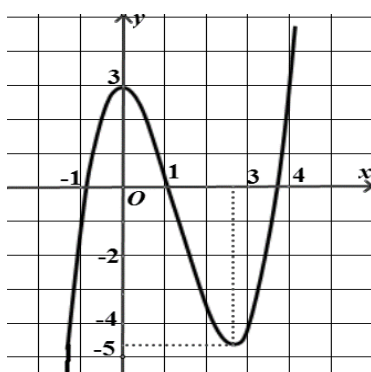
* Đồ thị hàm số $y = g(|x|)$ nhận trục Oy làm trục đối xứng nên từ BBT trên ta suy ra BBT của hàm số $y = g(|x|)$ như sau

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	$+$
$g(x)$		$g(3)$	$g(1)$	$g(0)$	$g(1)$	$g(3)$	

Vậy hàm số $y = g(|x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 102: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị là đường cong như hình vẽ.

Đặt $g(x) = 3f(f(x)) + 4$. Tìm số cực trị của hàm số $g(x)$



Lời giải

ĐS: 8

Ta có: $g'(x) = 3f'(x) \cdot f'(f(x))$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3f'(x) \cdot f'(f(x)) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f'(f(x)) = 0 \end{cases}$

Từ đồ thị hàm số trên ta thấy:

+ Phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt là $x = 0; x = \alpha$ với $\alpha \in (1; 3)$.

+ Phương trình $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = \alpha \end{cases}$.

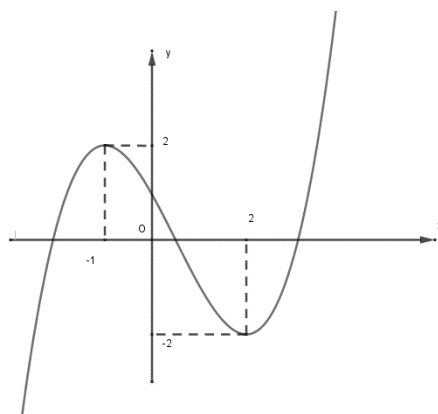
+ Phương trình $f(x) = 0$ có 3 nghiệm phân biệt khác 2 nghiệm trên.

+ Phương trình $f(x) = \alpha$ với $\alpha \in (1; 3)$ có 3 nghiệm phân biệt khác các nghiệm trên.

Vậy phương trình $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm phân biệt và $g'(x)$ đổi dấu qua các nghiệm.

Do đó hàm số $g(x)$ có 8 điểm cực trị.

Câu 103: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường cong ở hình vẽ. Hỏi hàm số $h(x) = \left| [f(x)]^2 - 4f(x) + 1 \right|$ có bao nhiêu điểm cực trị?



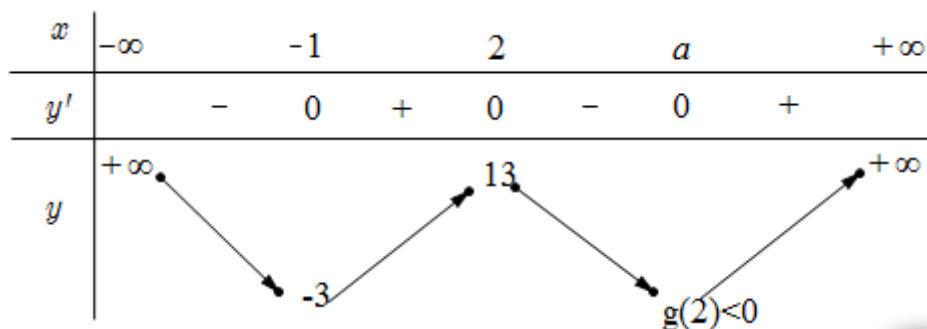
Lời giải

ĐS: 7

Đặt $g(x) = [f(x)]^2 - 4f(x) + 1$.

Khi đó, $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x) - 4f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a (a > 2) \\ x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

Do đó, ta có bảng biến thiên:

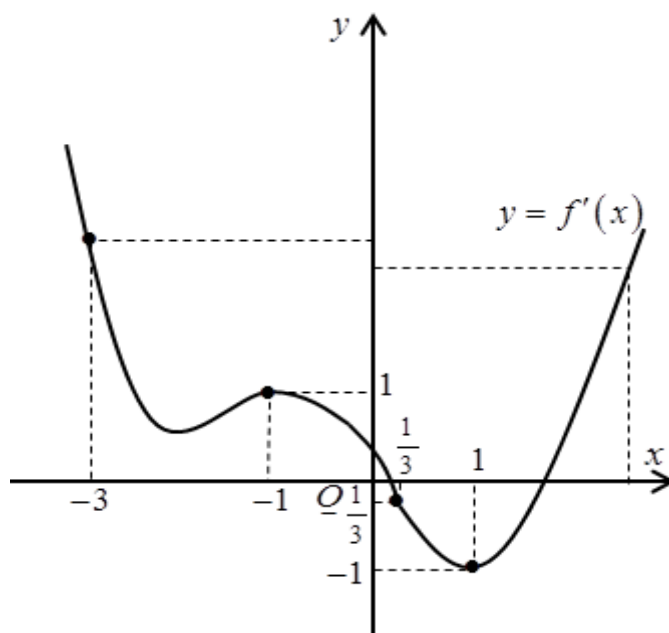


Suy ra đồ thị hàm số $y = g(x)$ có ba điểm cực không nằm trên trục hoành và bốn giao điểm với Ox .

Vậy đồ thị hàm số $y = h(x) = |g(x)|$ có số cực trị là $3 + 4 = 7$.

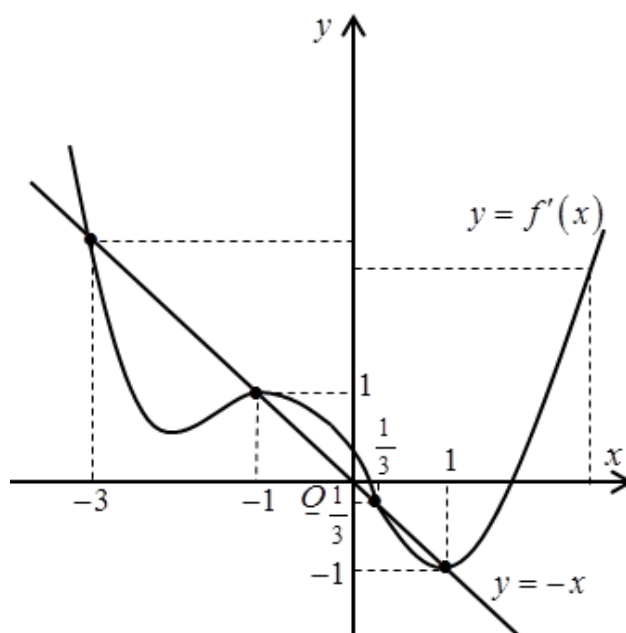
Câu 104: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Hàm số

$g(x) = 2f\left(\frac{5\sin x - 1}{2}\right) + \frac{(5\sin x - 1)^2}{4} + 3$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $(0; 2\pi)$.



Lời giải

ĐS: 7



Ta có: $g'(x) = 5 \cos x f'\left(\frac{5 \sin x - 1}{2}\right) + \frac{5}{2} \cos x (5 \sin x - 1)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 5 \cos x f'\left(\frac{5 \sin x - 1}{2}\right) + \frac{5}{2} \cos x (5 \sin x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ f'\left(\frac{5 \sin x - 1}{2}\right) = -\frac{5 \sin x - 1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = -3 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = -1 \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = \frac{1}{3} \\ \frac{5 \sin x - 1}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ 5 \sin x - 1 = -6 \\ 5 \sin x - 1 = -2 \\ 5 \sin x - 1 = \frac{2}{3} \\ 5 \sin x - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{5} \\ \sin x = \frac{1}{3} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = -1 \\ \sin x = -\frac{1}{5} \\ \sin x = \frac{1}{3} \\ \sin x = \frac{3}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \vee x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \\ x = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right) \vee x = 2\pi + \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right), (\text{ Vì } 0 < x < 2\pi). \\ x = \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\frac{1}{3}\right) \\ x = \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \vee x = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

Suy phương trình $g'(x) = 0$ có 9 nghiệm, trong đó có nghiệm $x = \frac{3\pi}{2}$ là nghiệm kép.

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 7 cực trị.

Câu 105: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng xét dấu như hình vẽ bên

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+	0	—	0	+

Hỏi hàm số $y = f(x^2 - 2|x|)$ có tất cả bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 9

Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

$$* y = h(x) = f(|x|^2 - 2|x|)$$

$$y' = h'(x) = f'(|x|^2 - 2|x|) \cdot \frac{x}{|x|} \cdot (2|x| - 2).$$

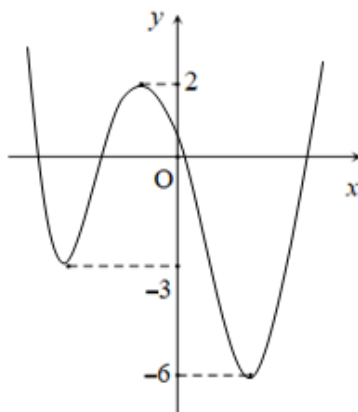
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ |x|^2 - 2|x| = 0 \\ |x|^2 - 2|x| = 1 \\ |x|^2 - 2|x| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 2 \\ x = -2 \\ x = 1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \\ x = 1 + \sqrt{3} \\ x = -1 - \sqrt{3} \end{cases}.$$

Ta thấy phương trình $h'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn (1).

$h'(x)$ không tồn tại tại $x = 0$ mà $x = 0$ thuộc tập xác định đồng thời qua đó $h'(x)$ đổi dấu (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số đã cho có 9 điểm cực trị.

Câu 106: Cho $y = f(x)$ là hàm đa thức bậc 4 và có đồ thị như hình vẽ. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-12; 12]$ để hàm số $g(x) = |2f(x-1) + m|$ có 5 điểm cực trị?



Lời giải

ĐS: 15

Đặt $h(x) = 2f(x-1) + m \Rightarrow g(x) = |h(x)|$.

□ Số điểm cực trị của $g(x)$ = số điểm cực trị của $y = h(x)$ + số giao điểm của $y = h(x)$ với trục Ox khác với điểm cực trị của $y = h(x)$.

□ Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị. Suy ra hàm số $y = h(x)$ cũng có 3 điểm cực trị.

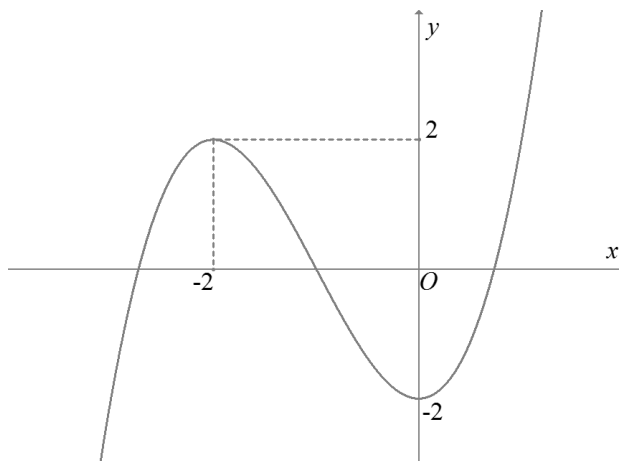
□ Hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x-1) = -\frac{m}{2}$ có 2 nghiệm phân biệt khác điểm cực trị của $h(x)$.

□ Đồ thị hàm số $y = f(x-1)$ có được bằng cách tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang bên phải 1 đơn vị.

Dựa vào đồ thị, ta được: $-\frac{m}{2} \geq 2$ hoặc $-6 < -\frac{m}{2} \leq -3$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -4 \\ 6 \leq m < 12 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}; m \in [-12; 12]} \text{có 15 giá trị } m \text{ nguyên thỏa mãn yêu cầu bài toán.}$

Câu 107: Cho hàm số $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ và $a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(-2x^2 + 4x)$



Lời giải.

ĐS: 3

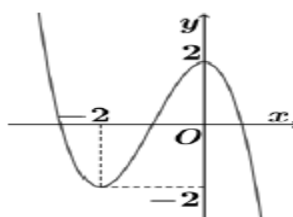
Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị là $x = -2; x = 0$.

$g(x) = f(-2x^2 + 4x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. $g'(x) = (-4x + 4)f'(-2x^2 + 4x)$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 4 = 0 \\ -2x^2 + 4x = 0 \\ -2x^2 + 4x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0 \\ x = 2 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}$$

Như vậy $g'(x)$ có 3 nghiệm, trong đó 1 là nghiệm bội 3, 0 và 2 là nghiệm đơn nên $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 108: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ bằng

Lời giải

ĐS: 3

Đặt $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Khi đó $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Theo đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có

$$\begin{cases} f'(-2)=0 \\ f'(0)=0 \\ f(-2)=-2 \\ f(0)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b+c=0 \\ c=0 \\ -8a+4b-2c+d=-2 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12a-4b=0 \\ -8a+4b=-4 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \\ c=0 \\ d=2 \end{cases}.$$

Vậy $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$.

Khi đó, ta có $g(x) = f(-x^2 + x) = x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x^2 + 2$.

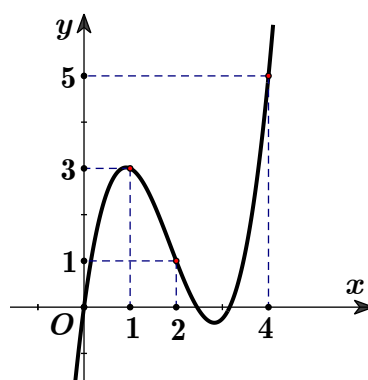
$$g'(x) = 3x(2x^4 - 5x^3 + 5x - 2) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	0	0.5	1	2	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$							

Suy ra, hàm số $g(x) = f(-x^2 + x)$ có ba điểm cực tiểu.

Câu 109: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f(0) = 0; f(4) > 4$. Biết hàm $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ là

Lời giải

ĐS: 3

Xét hàm số $h(x) = f(x^2) - 2x$.

Ta có: $h'(x) = 2xf'(x^2) - 2$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2) = \frac{1}{x}$ (vô nghiệm $\forall x \leq 0$).

Đặt $t = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{t}, \forall t > 0$.

Khi đó: $f'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (*). Nhận thấy trên khoảng $(0;1)$ thì $w(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ nghịch biến và $f'(t)$ đồng biến, do đó (*) nếu có nghiệm là duy nhất.

Mặt khác: $h'(0).h'(1) = -2(2f'(1) - 2) = -8 < 0$ và $h'(x)$ liên tục trên $[0;1]$ nên $\exists x_0 \in (0;1): h'(x_0) = 0$.

Vậy $h'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất $x_0 \in (0;1)$ và $h(x)$ có một điểm cực tiểu (vẽ bảng biến thiên). (1)

Xét phương trình: $h(x) = 0 \Leftrightarrow f(x^2) - 2x = 0$ (**).

Ta có: $h(0) = f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là một nghiệm của (**).

Mặt khác: $h(\sqrt{x_0}).h(2) = (f(x_0) - 2\sqrt{x_0})(f(4) - 4) < 0 \Rightarrow \exists x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2): h(x_1) = 0$.

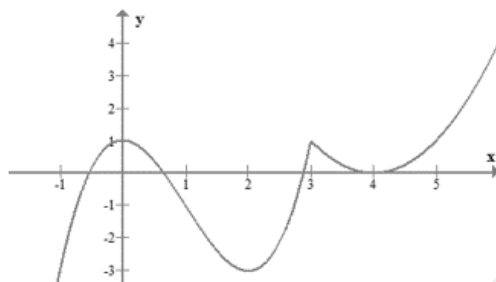
Nên (**) có nghiệm $x_1 \in (\sqrt{x_0}; 2)$.

Vì $h(x)$ có một điểm cực trị, nên (**) có không quá 2 nghiệm.

Vậy $h(x) = f(x^2) - 2x = 0$ có hai nghiệm phân biệt. (2)

Từ (1) và (2) ta được: hàm số $g(x) = |f(x^2) - 2x|$ có 3 điểm cực trị.

Câu 110: Cho hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(4; +\infty)$ có đồ thị như hình vẽ. Số điểm cực trị của hàm số $y = f(2|x| - 2)$ bằng



Lời giải

ĐS: 9

$$g(x) = f(2|x| - 2) \Rightarrow g'(x) = (2|x| - 2)' f'(2|x| - 2) = (2\sqrt{x^2} - 2)' f'(2|x| - 2) = \frac{x}{|x|} f'(2|x| - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{|x|} f'(2|x| - 2) = 0 \Leftrightarrow f'(2|x| - 2) = 0 (x \neq 0)$$

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x = 3 \\ x = 4 \end{cases}$$

$$\rightarrow f'(2|x| - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x| - 2 = 0 \\ 2|x| - 2 = 2 \\ 2|x| - 2 = 3 \\ 2|x| - 2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 1 \\ |x| = 2 \\ |x| = \frac{5}{2} \\ |x| = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm \frac{5}{2} \\ x = \pm 3 \end{cases}$$

Ta có bảng xét dấu $g'(x)$

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	-1	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y = f(2|x| - 2)$ có 9 điểm cực trị

Câu 111: Cho hàm số $y = f(x)$ là một hàm đa thức có bảng xét dấu $f'(x)$ như sau

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|)$

Lời giải

ĐS: 5

Ta có $g(x) = f(x^2 - |x|) = f(|x|^2 - |x|)$. Số điểm cực trị của hàm số $f(|x|)$ bằng hai lần số điểm cực trị dương của hàm số $f(x)$ cộng thêm 1.

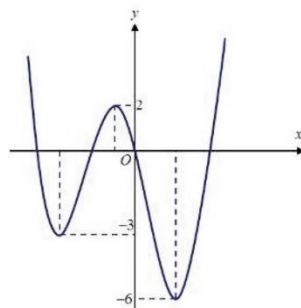
$$\text{Xét hàm số } h(x) = f(x^2 - x) \Rightarrow h'(x) = (2x - 1) f'(x^2 - x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x^2 - x = -1 \\ x^2 - x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu hàm số $h(x) = f(x^2 - x)$

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	-	0	+	0	-

Hàm số $h(x) = f(x^2 - x)$ có 2 điểm cực trị dương, vậy hàm số $g(x) = f(x^2 - |x|) = f(|x|^2 - |x|)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 112: Cho đồ thị $y = f(x)$ như hình vẽ dưới đây:



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|$ có 5 điểm cực trị. Tổng tất cả các giá trị của các phần tử trong tập S bằng

Lời giải

ĐS: 7

$$\text{Đặt } g(x) = \left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right| \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x+2018) \left[f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right]}{\left| f(x+2018) + \frac{1}{3}m^2 \right|}$$

$$\text{Phương trình } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x+2018) = 0 & (1) \\ f(x+2018) = -\frac{m^2}{3} & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) luôn có 3 nghiệm phân biệt.

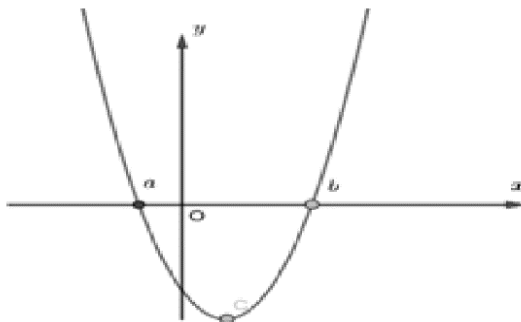
Vậy để đồ thị hàm số $y = g(x)$ có 5 điểm cực trị thì phương trình (2) phải có 2 nghiệm đơn

$$\text{phân biệt} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{m^2}{3} > 2 \\ -6 < -\frac{m^2}{3} \leq -3 \end{cases} \quad (m \in \mathbb{N}^*) \Leftrightarrow m \in \{3; 4\}.$$

Vậy tổng các phần tử là 7.

DẠNG 9. TÌM M ĐỂ HÀM SỐ $f(u(x))$ THỎA MÃN ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Câu 113: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị của hàm đạo hàm $f'(x)$ như hình vẽ và $f(b) = 1$. Số giá trị nguyên của $m \in [-5; 5]$ để hàm số $g(x) = |f^2(x) + 4f(x) + m|$ có đúng 5 điểm cực trị là



Lời giải

ĐS: 9

Cách 1:

Ta có bảng biến thiên của $f(x)$:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + m$

$$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)f(x) + 4f'(x)$$

$$\Rightarrow h'(x) = 2f'(x)[f(x) + 2]$$

$$h'(x) = 0 \Rightarrow 2f'(x)[f(x) + 2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a; x = b \\ x = c(c < a) \end{cases}$$

Pt có 3 nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ có 3 điểm cực trị

Xét $h(x) = 0$

$$\Leftrightarrow f^2(x) + 4f(x) = -m(2)$$

Để $g(x) = |h(x)|$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi PT (2) có 2 nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ phân biệt

Xét hàm số $t(x) = f^2(x) + 4f(x)$

Ta có Bảng biến thiên của $t(x)$:

x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$		
$t'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$t(x)$	$+\infty$		$t(a)$		$+\infty$		

<

Từ YCBT $\Leftrightarrow t(x) = -m$ có hai nghiệm đơn hoặc nghiệm bội lẻ pb

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \geq t(a) > 5 \\ -4 < -m \leq 5 \\ -5 \leq m \leq 5; m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -t(a) < -5 \\ -4 < -m \leq 5 \\ -5 \leq m \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 \leq m < 4 \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}.$$

Cách 2:

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(a)$	$f(b) = 1$	$+\infty$	

Xét hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + m$

$$\begin{aligned} \Rightarrow h'(x) &= 2f'(x)f(x) + 4f'(x) \\ \Rightarrow h'(x) &= 2f'(x)[f(x) + 2] \\ h'(x) = 0 &\Rightarrow 2f'(x)[f(x) + 2] = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = a; x = b \\ x = c(c < a) \end{cases} \end{aligned}$$

x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$
$h'(x)$		0	0	0	
$h(x)$	$+\infty$	$-4+m$	$h(a)$	$5+m$	$+\infty$

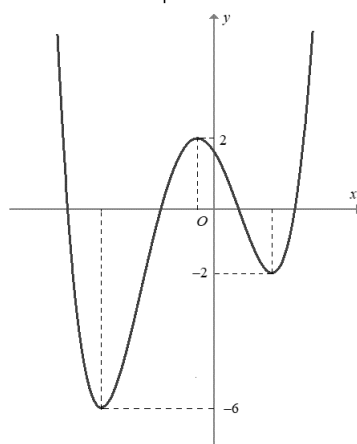
Từ YCBT $g(x) = |h(x)| = |f^2(x) + 4f(x) + m|$ có 5 điểm cực trị khi:

$$\begin{cases} h(a) \leq 0 \\ -4 + m < 0 \leq 5 + m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq f^2(a) + 4f(a) < -5 \\ -5 \leq m < 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m \in \mathbb{Z}; m \in [-5; 5]$$

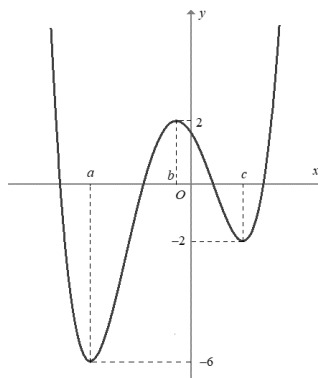
$$\Leftrightarrow m \in \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$$

Câu 114: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số thực m để hàm số $g(x) = |f(x + 2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị?



Lời giải

ĐS: 2



Gọi a, b, c ($a < b < c$) là ba điểm cực trị của hàm số $y = f(x)$.

Khi đó: $f(a) = -6; f(b) = 2; f(c) = -2$.

Xét hàm $h(x) = f(x + 2020)$ với $x \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $h'(x) = f'(x + 2020) \cdot (x + 2020)' = f'(x + 2020)$.

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a - 2020 \\ x = b - 2020 \\ x = c - 2020 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm $h(x)$

x	$-\infty$	$a-2020$	$b-2020$	$c-2020$	$+\infty$				
$h'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$h(x)$									

Hàm số $g(x) = |f(x + 2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị

$\Leftrightarrow$ Phương trình $f(x + 2020) + m^2 = 0$ có đúng 2 nghiệm không thuộc

$$\{a - 2020; b - 2020; c - 2020\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 = 2 \\ m^2 = -2 \\ 2 < m^2 < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \pm\sqrt{2} \\ -\sqrt{6} < m < -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} < m < \sqrt{6} \end{cases}$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của m là $m = 2$ và $m = -2$ thì hàm số $g(x) = |f(x + 2020) + m^2|$ có 5 điểm cực trị.

Câu 115: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x + 2)^4(x + 4)^3[x^2 + 2(m + 3)x + 6m + 18]$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $f(x)$ có **đúng** một điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 8

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \\ (x+2)^4 = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = -4 \\ x^2 + 2(m+3)x + 6m + 18 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Để hàm số $f(x)$ có đúng một điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Phương trình $(*)$ vô nghiệm, có nghiệm kép hoặc có hai nghiệm phân biệt trong đó có nghiệm là -4 .

Trường hợp 1. Phương trình $(*)$ vô nghiệm

$$\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 + 24m + 36 - 24m - 72 = 4m^2 - 36 < 0$$

$$\Leftrightarrow -3 < m < 3 \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$$

Trường hợp 2. Phương trình $(*)$ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -3 \end{cases}$.

Trường hợp 3. Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 . Trong đó $x_1 = -4$.

$$\text{Phương trình có hai nghiệm phân biệt } x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 4m^2 - 36 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ m > 3 \end{cases}.$$

$$\text{Theo định lí Viète ta có } \begin{cases} S = x_1 + x_2 = -4 + x_2 = -2m - 6 \\ P = x_1 \cdot x_2 = -4 \cdot x_2 = 6m + 18 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = -2m - 2 \\ x_2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -2m - 2 = -\frac{3}{2}m - \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = 5.$$

Vậy $m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 5\}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 116: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x)$ với $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $f(x^2 - 8x + m)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 15

$$\text{Đặt } g(x) = f(x^2 - 8x + m)$$

$$f'(x) = (x-1)^2(x^2 - 2x) \Rightarrow g'(x) = (2x-8)(x^2 - 8x + m - 1)^2(x^2 - 8x + m)(x^2 - 8x + m - 2)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x^2 - 8x + m - 1 = 0 & (1) \\ x^2 - 8x + m = 0 & (2) \\ x^2 - 8x + m - 2 = 0 & (3) \end{cases}$$

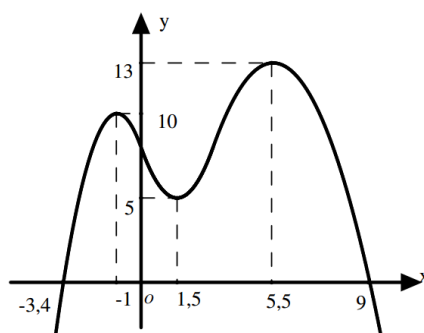
Các phương trình (1), (2), (3) không có nghiệm chung từng đôi một và $(x^2 - 8x + m - 1)^2 \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$

Suy ra $g(x)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi (2) và (3) có hai nghiệm phân biệt khác 4

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16 - m > 0 \\ 16 - m + 2 > 0 \\ 16 - 32 + m \neq 0 \\ 16 - 32 + m - 2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 16 \\ m < 18 \\ m \neq 16 \\ m \neq 18 \end{cases} \Leftrightarrow m < 16.$$

m nguyên dương và $m < 16$ nên có 15 giá trị m cần tìm.

Câu 117: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình bên. Biết rằng $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (-\infty; -3,4) \cup (9; +\infty)$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $g(x) = f(x) - mx + 5$ có **đúng** hai điểm cực trị.



Lời giải

ĐS: 8

$$g'(x) = f'(x) - m$$

Số điểm cực trị của hàm số $g(x)$ bằng số nghiệm đơn (bội lẻ) của phương trình $f'(x) = m$.

$$\text{Dựa vào đồ thị ta có điều kiện } \begin{cases} 0 < m \leq 5 \\ 10 \leq m < 13 \end{cases}.$$

Vậy có 8 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn.

Câu 118: Cho hàm số $f'(x) = (x - 2)^2(x^2 - 4x + 3)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m để hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 16

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 1, x = 2 \text{ là nghiệm kép nên khi qua giá trị } x = 2 \text{ thì } f'(x) \\ x = 3 \end{cases}$

không bị đổi dấu.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 10x + m + 9)$ khi đó $g'(x) = f'(u) \cdot (2x - 10)$ với $u = x^2 - 10x + m + 9$.

$$\text{Nên } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10 = 0 \\ (x^2 - 10x + m + 9 - 2)^2 = 0 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 1 \\ x^2 - 10x + m + 9 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ (x^2 - 10x + m + 9 - 2)^2 = 0 \\ x^2 - 10x + m + 8 = 0 \quad (1) \\ x^2 - 10x + m + 6 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Hàm số $y = f(x^2 - 10x + m + 9)$ có 5 điểm cực trị khi và chỉ khi $g'(x)$ đổi dấu 5 lần

Hay phương trình (1) và phương trình (2) phải có hai nghiệm phân biệt khác 5

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_1' > 0 \\ \Delta_2' > 0 \\ h(5) \neq 0 \\ p(5) \neq 0 \end{cases}, \text{ (Với } h(x) = x^2 - 10x + m + 8 \text{ và } p(x) = x^2 - 10x + m + 6).$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 17 - m > 0 \\ 19 - m > 0 \\ -17 + m \neq 0 \\ -19 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m < 17.$$

Vậy có 16 giá trị nguyên dương m thỏa mãn.

Câu 119: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2)^2(x - 1)(x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 2

Dựa vào cách vẽ đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$, số điểm cực trị của đồ thị hàm số $g(x) = f(|x|)$ bằng số điểm cực trị dương của đồ thị hàm số $y = f(x)$ cộng thêm 1.

Để hàm số $g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có 2 cực trị dương.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \\ x^2 - 2(m + 1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Có $x = 2$ là nghiệm bội 2, $x = 1$ là nghiệm đơn.

Vậy $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm $x \leq 0$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Với $m = 1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases} \text{ (TM)}$

Với $m = -1$, có $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (Loại)

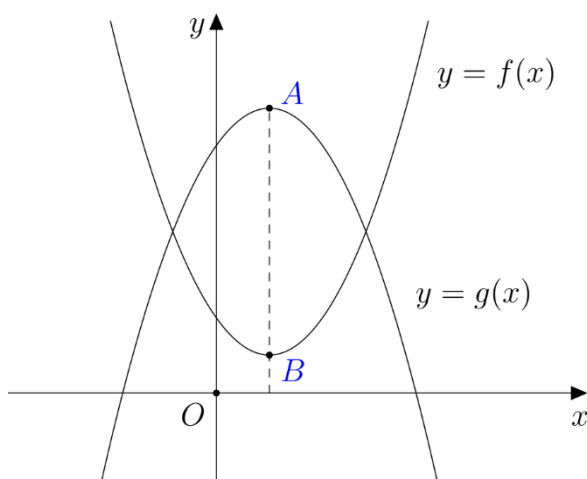
Trường hợp 2: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 1$, có một nghiệm âm

Điều kiện tương đương $\begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ 1^2 - 2(m+1) \cdot 1 + m^2 - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-1; 1) \\ m \neq 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0$

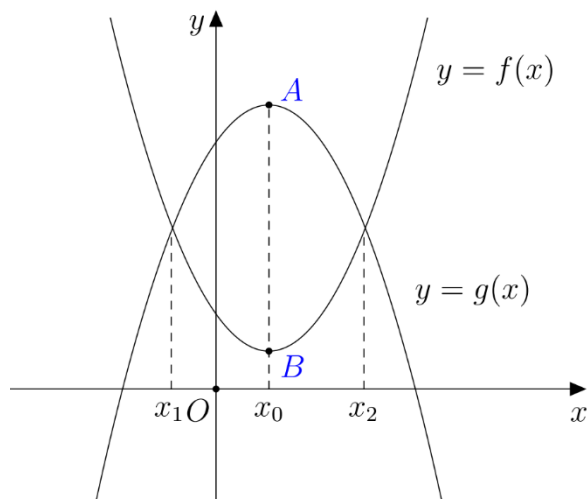
Vậy có hai giá trị nguyên của m thỏa mãn.

Câu 120: Cho hai hàm đa thức $y = f(x)$, $y = g(x)$ có đồ thị là hai đường cong ở hình vẽ. Biết rằng đồ thị hàm số $y = f(x)$ có đúng một điểm cực trị là A , đồ thị hàm số $y = g(x)$ có đúng một điểm cực trị là B và $AB = \frac{7}{4}$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc khoảng $(-5; 5)$ để hàm số $y = |f(x) - g(x)| + m$ có đúng 5 điểm cực trị?



Lời giải

ĐS: 3



Đặt $h(x) = f(x) - g(x)$, ta có: $h'(x) = f'(x) - g'(x)$; $h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0$;

$h(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ hoặc $x = x_2$ ($x_1 < x_0 < x_2$);

$$h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = -\frac{7}{4}.$$

Bảng biến thiên của hàm số $y = h(x)$ là:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$h'(x)$		$-$	$+$
$h(x)$	$+\infty$	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$

Suy ra bảng biến thiên của hàm số $y = k(x) = |f(x) - g(x)|$ là:

x	$-\infty$	x_1	x_0	x_2	$+\infty$
$k'(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$k(x)$	$+\infty$	0	$\frac{7}{4}$	0	$+\infty$

Do đó, hàm số $y = k(x) + m$ cũng có ba điểm cực trị.

Vì số điểm cực trị hàm số $y = |k(x) + m|$ bằng tổng số điểm cực trị của hàm số $y = k(x) + m$ và số nghiệm đơn và số nghiệm bội lẻ của phương trình $k(x) + m = 0$, mà hàm số $y = k(x) + m$ cũng có ba điểm cực trị nên hàm số $y = ||f(x) - g(x)| + m|$ có đúng năm điểm cực trị khi phương trình $k(x) + m = 0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ).

Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $y = k(x)$, phương trình $k(x) + m = 0$ có đúng hai nghiệm đơn (hoặc bội lẻ) khi và chỉ khi $-m \geq \frac{7}{4} \Leftrightarrow m \leq -\frac{7}{4}$.

Vì $m \in \mathbb{Z}$, $m \leq -\frac{7}{4}$ và $m \in (-5; 5)$ nên $m \in \{-4; -3; -2\}$.

Câu 121: Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$. Tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị là $\left(\frac{a}{b}; c\right)$, (với a, b, c là các số nguyên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản). Giá trị của biểu thức $M = a^2 + b^2 + c^2$ là

Lời giải

ĐS: 45

Hàm số $y = f(x) = x^3 - (2m-1)x^2 + (2-m)x + 2$ có đạo hàm là

$$y' = f'(x) = 3x^2 - 2(2m-1)x + (2-m)$$

- Để hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị x_1, x_2 dương. Tương đương với phương trình $f'(x) = 0$ có 2 nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) > 0 \\ S = \frac{2(2m-1)}{3} > 0 \\ P = \frac{2-m}{3} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \vee m > \frac{5}{4} \\ m > \frac{1}{2} \\ m < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{4} < m < 2.$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} a = 5 \\ b = 4 \\ c = 2 \end{cases} \Rightarrow M = a^2 + b^2 + c^2 = 45.$$

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỢP $f[u(x)]$ HOẶC $f[u(x)] + g(x)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f(x)$ HOẶC $f'(x)$

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

♦ Đạo hàm của hàm số hợp:

$$g(x) = f[u(x)] \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)].$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'[u(x)] = 0 \end{cases}$$

♦ Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$

B1. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành

B2: Xét dấu của hàm số $y = f'(x)$, ta làm như sau

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên trục hoành trong khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) > 0$, $x \in (a; b)$
- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành trong khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) < 0$, $x \in (a; b)$

♦ Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x) + u(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$

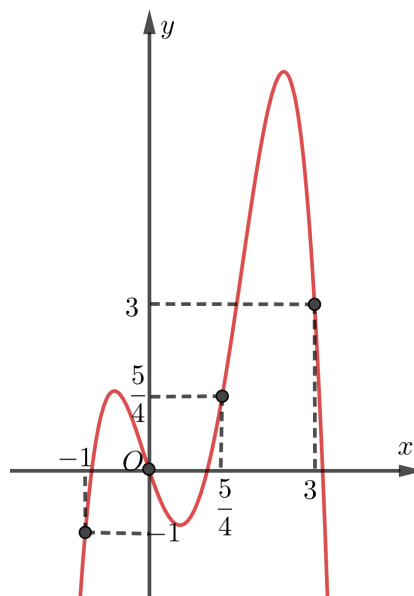
B1: Đạo hàm $g'(x) = f'(x) + u'(x)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -u'(x)$

B2. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -u'(x)$

B3: Xét dấu của hàm số $y = g'(x)$, ta làm như sau

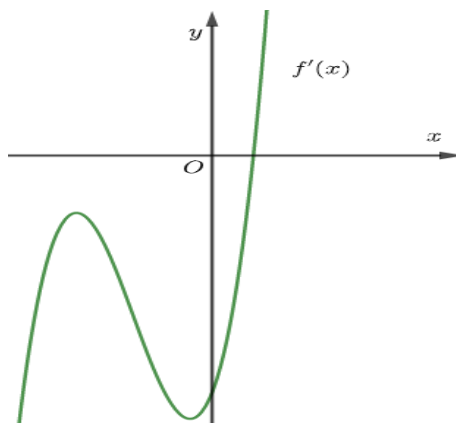
- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x) > 0$,
 $x \in (a;b)$
- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x) < 0$,
 $x \in (a;b)$

Câu 122: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



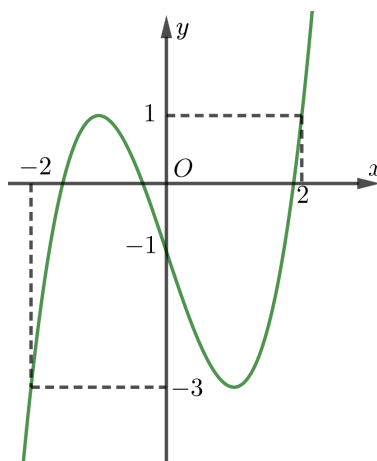
Hàm số $g(x) = 2f(x-1) - x^2 + 2x + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 123: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $h(x) = f(x^3) - 6x + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 124: Cho $f(x)$ là liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



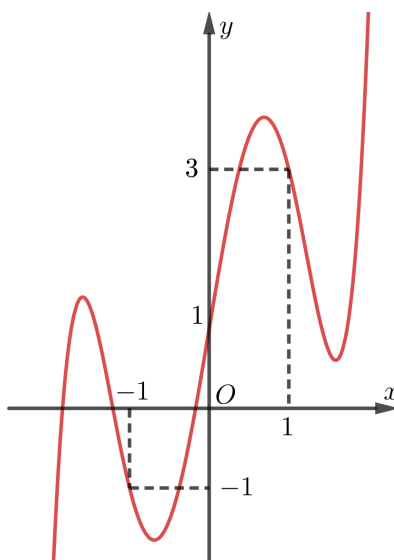
Hàm số $h(x) = 2f(x^2 + x) - (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 125: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(a)$	$f(b) = 1$	$+\infty$	

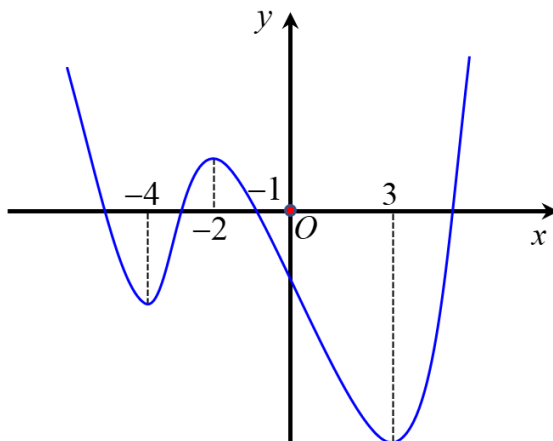
Hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 126: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



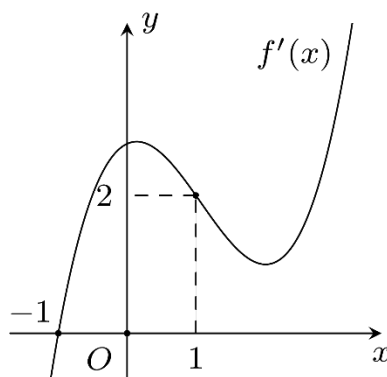
Hàm số $g(x) = f(\cos x) - \cos x + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$?

Câu 127: Cho hàm số $y = f(x)$ là đa thức bậc 5 có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 128: Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Hỏi hàm số $g(x) = f(\sin x - 1) + \frac{\cos 2x}{4}$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 2\pi)$?

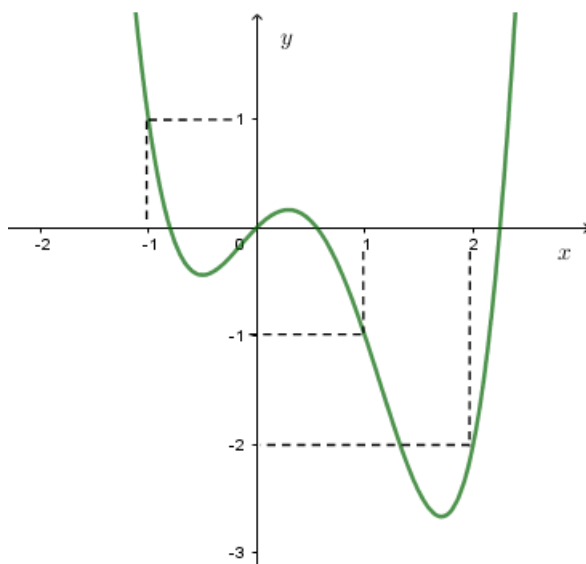
Câu 129: Cho $y = f(x)$ là hàm bậc ba có $f'(0) = -3$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = f(x^3 - 3x + m) - \frac{x^6}{2} + 3x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x - 1$ có bao nhiêu cực trị biết m là

giá trị lớn nhất của $P = \frac{\sqrt{3} \sin x}{\cos x + 2}$.

Câu 130: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) + \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 2x^2 + 2021$ là

Cho đồ thị hàm số $f(u(x))$, $f'(u(x))$ hoặc bảng xét dấu của hàm, $f(u(x))$, $f'(u(x))$. Xét cực trị của hàm $f(v(x))$

PHƯƠNG PHÁP

o Đạo hàm xét dấu thông thường.

o Chọn hàm đại diện.

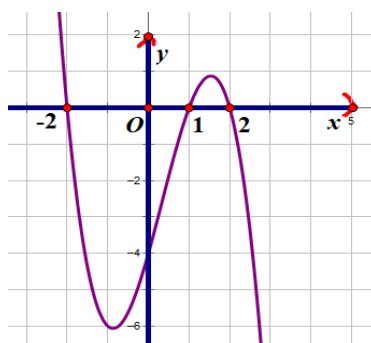
o Đặt ẩn phụ.

o Ghép trục.

☞ *Nhắc lại quy tắc về dấu của tích, thương, tổng các biểu thức:*

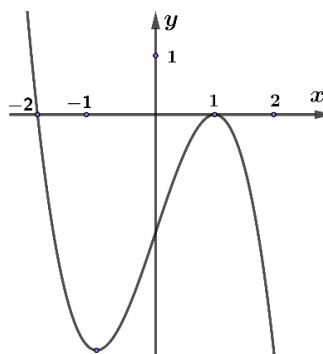
$f(x)$	+	–	+	–
$g(x)$	+	–	–	+
$f(x).g(x)$	+	+	–	–
$f(x):g(x)$	+	+	–	–
$f(x)+g(x)$	+	–	<i>Chưa biết</i>	<i>Chưa biết</i>

Câu 131: Cho hàm số $y = f(x)$ bậc bốn có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(3x-1)$ có đồ thị như hình dưới.

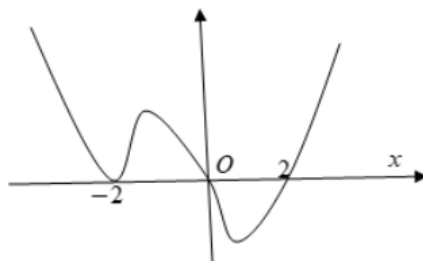


Hàm số $y = f(1-2x)$ có mấy điểm cực đại?

Câu 132: Cho hàm số $y = f(x)$ bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'(x+1)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2-3)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Câu 133: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ như hình vẽ

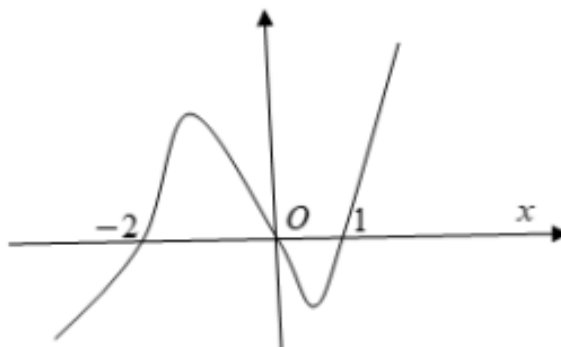


Hỏi hàm số $y = f(1-x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Câu 134: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Bảng xét dấu bên dưới là của đạo hàm $f'(x-2)$. Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 2})$ có bao nhiêu điểm cực trị?

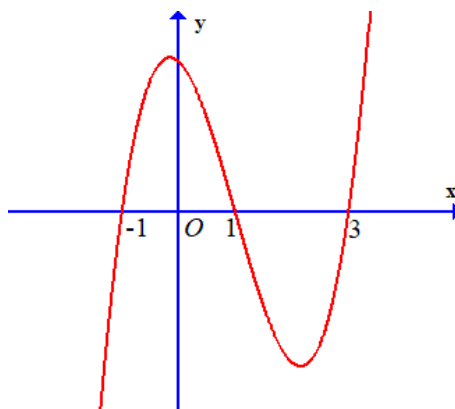
x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$		
y'	-	0	+	0	-	0	+

Câu 135: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(1-x)$ như hình vẽ



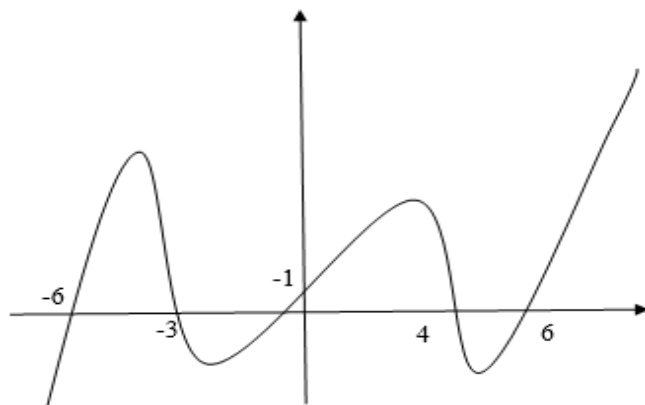
Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x - 2)$ là

Câu 136: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x^3 + 3x - 1)$.



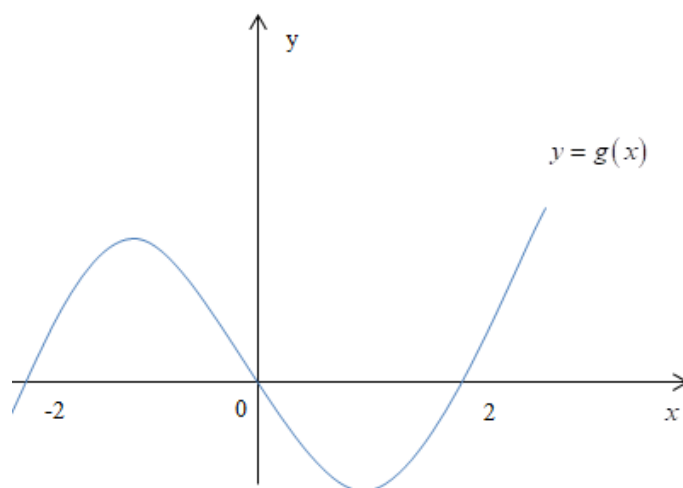
Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Câu 137: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(3-x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2|x| + 3)$ là

Câu 138: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x) = f'(1-x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = \left| f\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

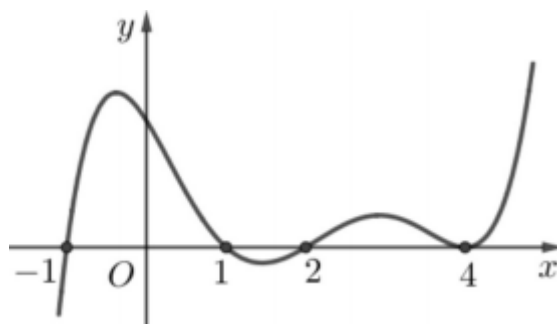
Câu 139: Cho hàm đa thức $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $y = f'(x+1)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x+1)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x^2 + |x| + 1)$ là

Câu 140: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f'(2x+5)$ như hình vẽ.

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^3 - 2)$.



CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN

TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ HỢP $f[u(x)]$ HOẶC $f[u(x)] + g(x)$ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HÀM SỐ $f(x)$ HOẶC $f'(x)$

KIẾN THỨC CẦN NHỚ:

♦ Đạo hàm của hàm số hợp:

$$g(x) = f[u(x)] \Rightarrow g'(x) = u'(x) \cdot f'[u(x)].$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u'(x) = 0 \\ f'[u(x)] = 0 \end{cases}$$

♦ Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$

B1. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ với trục hoành

B2: Xét dấu của hàm số $y = f'(x)$, ta làm như sau

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên trục hoành trong khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) > 0$, $x \in (a; b)$
- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới trục hoành trong khoảng $(a; b)$ thì $f'(x) < 0$, $x \in (a; b)$

♦ Lập bảng biến thiên của hàm số $g(x) = f(x) + u(x)$ khi biết đồ thị hàm số $y = f'(x)$

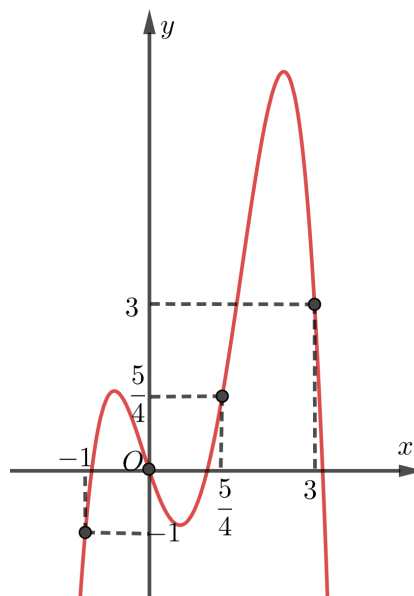
B1: Đạo hàm $g'(x) = f'(x) + u'(x)$. Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -u'(x)$

B2. Xác định giao điểm của đồ thị hàm số $y = f'(x)$ và đồ thị hàm số $y = -u'(x)$

B3: Xét dấu của hàm số $y = g'(x)$, ta làm như sau

- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên trên đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x) > 0$,
 $x \in (a;b)$
- Phần đồ thị của $f'(x)$ nằm bên dưới đồ thị $-u'(x)$ trong khoảng $(a;b)$ thì $g'(x) < 0$,
 $x \in (a;b)$

Câu 122: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $g(x) = 2f(x-1) - x^2 + 2x + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

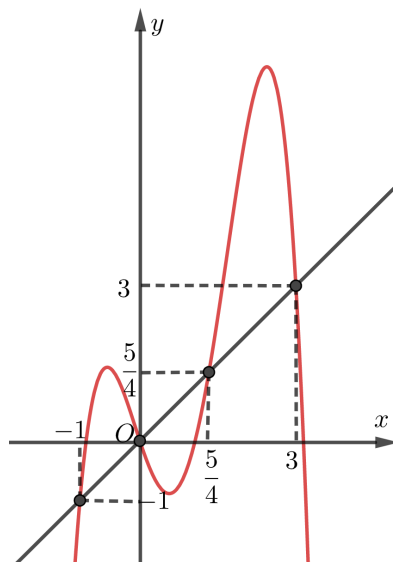
ĐS: 4

Ta có: $g'(x) = 2f'(x-1) - 2x + 2$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x-1) = x-1.$$

Đặt $t = x-1$. Khi đó phương trình trở thành $f'(t) = t$.

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = t$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



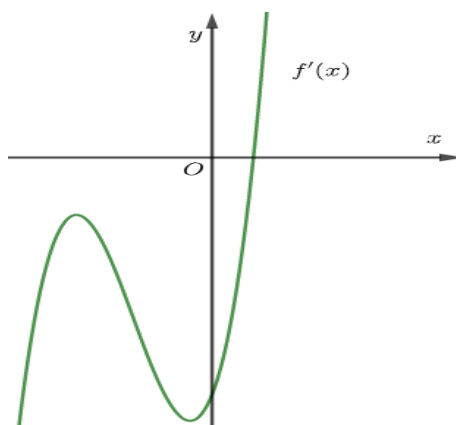
Dựa vào đồ thị ta thấy $f'(t) = t \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 0 \\ t = \frac{5}{4} \\ t = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -1 \\ x - 1 = 0 \\ x - 1 = \frac{5}{4} \\ x - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{9}{4} \\ x = 4 \end{cases}.$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	1	$\frac{9}{4}$	4	$+\infty$			
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 4 cực trị.

Câu 123: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ sau:



Hỏi hàm số $h(x) = f(x^3) - 6x + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 1

$$h(x) = f(x^3) - 6x + 2022 \Rightarrow h'(x) = 3x^2 f'(x^3) - 6$$

$$\text{Ta có } h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = \frac{2}{x^2}, (x \neq 0) \quad (1)$$

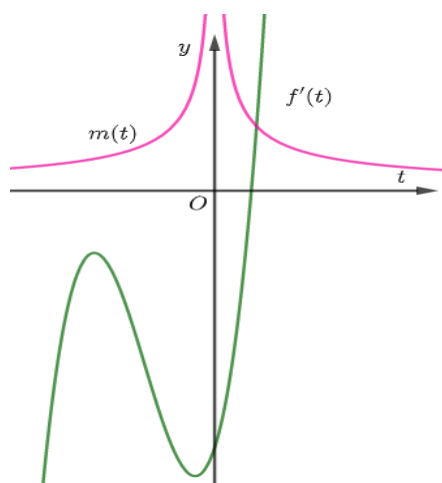
$$\text{Đặt } t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t}$$

$$\text{Từ (1) ta có: } f'(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}, \quad (2)$$

$$\text{Xét } m(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow m'(t) = -\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}$$

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = m(t) = \frac{2}{\sqrt[3]{t^2}}$ trên cùng một hệ trục tọa độ

Lúc này ta có hình vẽ 2 đồ thị như sau



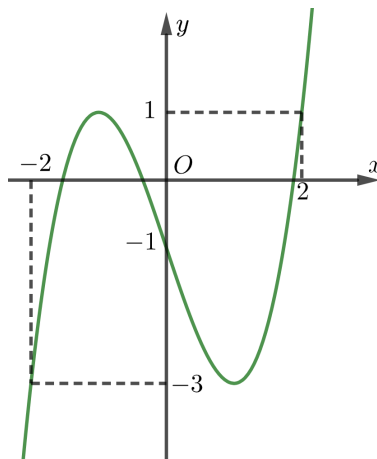
Suy ra pt (2) có 1 nghiệm $t = t_0 > 0 \Rightarrow$ pt (1) có nghiệm $x = \sqrt[3]{t_0} = x_0 > 0$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	0	x_0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $h(x)$ có 1 cực trị.

Câu 124: Cho $f(x)$ là liên tục trên $\mathbb{R}$ và hàm số $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $h(x) = 2f(x^2 + x) - (x^2 + x)^2 + 2(x^2 + x) + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

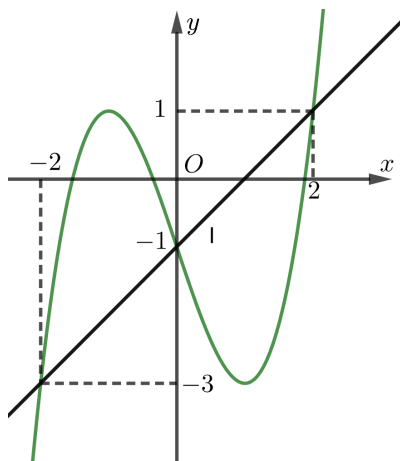
ĐS: 5

$$h'(x) = 2(2x+1)f'(x^2+x) - 2(2x+1)(x^2+x) + 2(2x+1).$$

$$\Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ f'(x^2+x) - (x^2+x) + 1 = 0 \quad (*) \end{cases}$$

Đặt $t = x^2 + x$. Khi đó phương trình trở thành $f'(t) - t + 1 = 0 \Leftrightarrow f'(t) = t - 1$.

Ta vẽ đồ thị hai hàm số $y = f'(t)$ và $y = t - 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ



$$\text{Dựa vào đồ thị ta thấy } f'(t) = t - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 0 \\ t = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 2 \\ x^2 + x = 0 \\ x^2 + x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Bảng xét dấu

x	$-\infty$	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $h(x)$ có 5 cực trị.

Câu 125: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	a	b	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$f(a)$	$f(b) = 1$	$+\infty$	

Hàm số $h(x) = f^2(x) + 4f(x) + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 3

Ta có: $h'(x) = 2f'(x)f(x) + 4f'(x) = 2f'(x)[f(x) + 2]$.

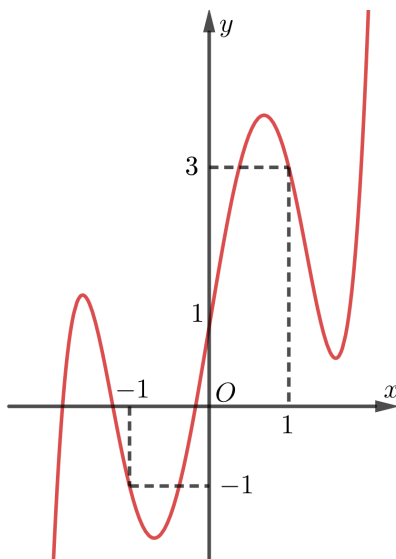
$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow 2f'(x)[f(x) + 2] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a; x = b \\ x = c \ (c < a) \end{cases}.$$

Suy phương trình $h'(x) = 0$ có 3 nghiệm.

x	$-\infty$	c	a	b	$+\infty$		
$h'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Vậy hàm số $y = h(x)$ có 3 cực trị.

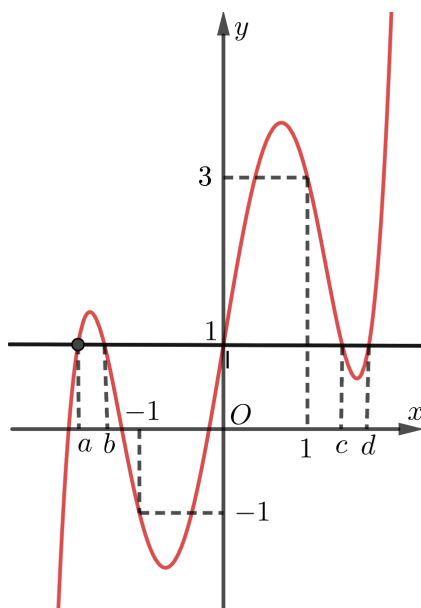
Câu 126: Cho hàm số $y = f(x)$, hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình sau:



Hàm số $g(x) = f(\cos x) - \cos x + 2022$ có bao nhiêu điểm cực trị trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$?

Lời giải

ĐS: 3



Ta có: $g'(x) = -\sin x \cdot f'(\cos x) + \sin x = -\sin x \cdot [f'(\cos x) - 1]$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ f'(\cos x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ \cos x = 0 \\ \cos x = a \ (a < b < -1) \text{ (pt vô nghiệm)} \\ \cos x = b \ (b < -1) \text{ (pt vô nghiệm)} \\ \cos x = c \ (c > 1) \text{ (pt vô nghiệm)} \\ \cos x = d \ (d > c > 1) \text{ (pt vô nghiệm)} \end{cases}.$$

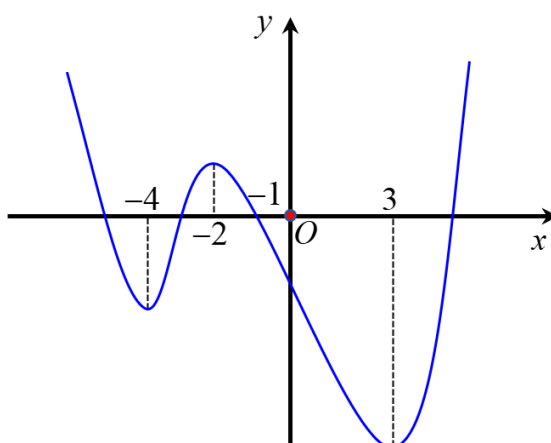
Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right)$ là $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$.

Bảng xét dấu

x	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7\pi}{6}$
$h'(x)$	+	0	-	0	+

Vậy hàm số $y = g(x)$ có 3 cực trị.

Câu 127: Cho hàm số $y = f(x)$ là đa thức bậc 5 có đồ thị $f'(x)$ như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x^2 + 2x) - x^2$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 3

Ta có : $g'(x) = (2x+2) \cdot f'(x^2+2x) - 2x$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^2+2x) = \frac{x}{x+1}$, do $x = -1$ không phải là nghiệm phương trình.

Xét hàm số : $y = f'(x^2+2x)$.

$y' = (2x+2)f''(x^2+2x)$.

$$\text{Khi đó, } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x = -4 \\ x^2 + 2x = -2 \\ x^2 + 2x = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$					
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$		0	$\searrow$		0	$\searrow$		$+\infty$
				$f'(3)$			$f'(3)$			

Xét hàm số: $y = \frac{x}{x+1}$.

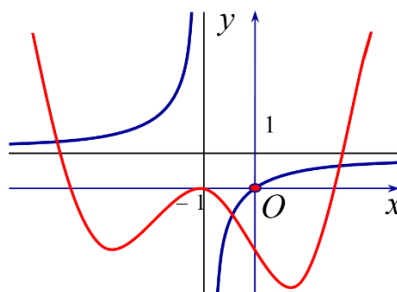
$$y' = \frac{1}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1.$$

Bảng biến thiên :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
y'	$+$		$+$
y	$1 \rightarrow +\infty$	$-\infty \rightarrow 1$	

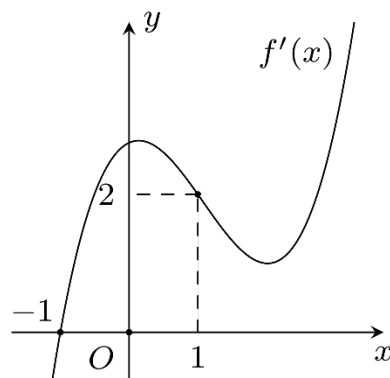
Số nghiệm của phương trình: $f'(x^2 + 2x) = \frac{x}{x+1}$ chính bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm

số $y = f'(x^2 + 2x)$ và $y = \frac{x}{x+1}$.



Từ đồ thị suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn, nên hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 128: Cho $f(x)$ là hàm số đa thức bậc bốn và hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình dưới đây:



Hỏi hàm số $g(x) = f(\sin x - 1) + \frac{\cos 2x}{4}$ có bao nhiêu điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 2\pi)$?

Lời giải

ĐS: 3

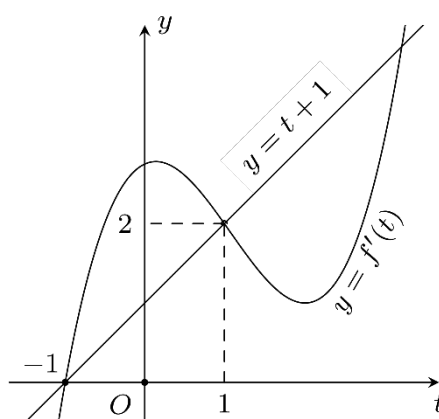
Ta có $g'(x) = \cos x f'(\sin x - 1) - \frac{\sin 2x}{2} = \cos x [f'(\sin x - 1) - \sin x]$.

Khi đó, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ f'(\sin x - 1) - \sin x = 0 \quad (*) \end{cases}$.

Trên khoảng $(0; 2\pi)$ thì $\cos x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{3\pi}{2} \end{cases}$.

Đặt $t = \sin x - 1$ thì phương trình $(*)$ trở thành $f'(t) = t + 1$.

Vẽ đồ thị $y = f'(t)$ và đường thẳng $y = t + 1$ trên cùng hệ trục tọa độ Oty như hình vẽ sau.



Từ đồ thị ta có $f'(t) = t + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 1 \\ t = a, \quad (a > 1) \end{cases}$.

Với $t = 1$ thì $\sin x - 1 = 1 \Leftrightarrow \sin x = 2$. Phương trình vô nghiệm.

Với $t = a$ thì $\sin x - 1 = a \Leftrightarrow \sin x = a + 1$. Phương trình này vô nghiệm vì $a + 1 > 2$.

Với $t = -1$ thì $\sin x - 1 = -1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = \pi$.

Như thế phương trình $g'(x) = 0$ có đúng 3 nghiệm đơn thuộc khoảng $(0; 2\pi)$.

Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị thuộc khoảng $(0; 2\pi)$.

Câu 129: Cho $y = f(x)$ là hàm bậc ba có $f'(0) = -3$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng xét dấu sau:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	

Hàm số $y = g(x) = f(x^3 - 3x + m) - \frac{x^6}{2} + 3x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x - 1$ có bao nhiêu cực trị biết m là giá trị lớn nhất của $P = \frac{\sqrt{3} \sin x}{\cos x + 2}$.

Lời giải

ĐS: 8

Từ bảng biến thiên $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = k(x+1)(x-1)$.

Mà $f'(0) = -3 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow f'(x) = 3(x-1)(x+1) = 3x^2 - 3$.

Theo bài ra $P = \frac{\sqrt{3} \sin x}{\cos x + 2} \Rightarrow \sqrt{3} \sin x - P \cos x = 2P$.

Điều kiện P có nghiệm là $(2P)^2 \leq P^2 + 3 \Leftrightarrow -1 \leq P \leq 1$. Nên $m = 1$.

Khi đó $y = g(x) = f(x^3 - 3x + 1) - \frac{x^6}{2} + 3x^4 - x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x - 1$.

Ta có:

$$g'(x) = (3x^2 - 3)f'(x^3 - 3x + 1) - 3x^5 + 12x^3 - 3x^2 - 9x + 3$$

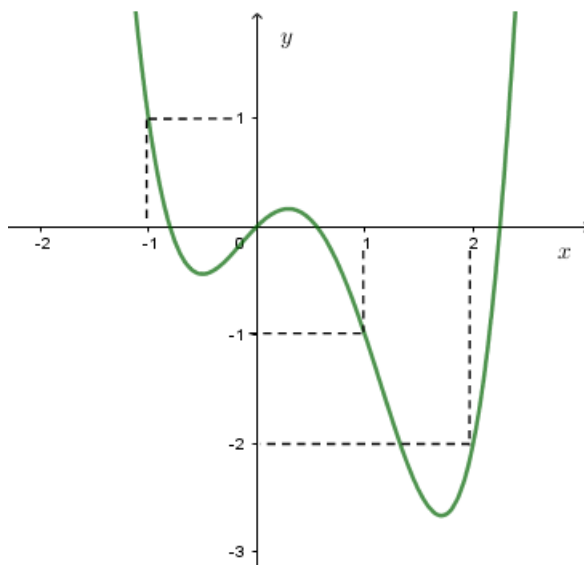
$$\Leftrightarrow g'(x) = (3x^2 - 3)[f'(x^3 - 3x + 1) - (x^3 - 3x + 1)]$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ f'(x^3 - 3x + 1) = x^3 - 3x + 1 \quad (1) \end{cases}$$

$$\text{Đặt } x^3 - 3x + 1 = t \text{ suy ra } (1) \Leftrightarrow f'(t) = t \Leftrightarrow 3t^2 - 3 = t \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1+\sqrt{37}}{6} \\ t = \frac{1-\sqrt{37}}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 1,76137 \\ x \approx -0,0602 \\ x \approx -1,7011 \\ x \approx 1,21796 \\ x \approx 0,76486 \\ x \approx -1,9828 \end{cases}.$$

Do đó $g'(x) = 0$ có 8 nghiệm đơn. Vậy hàm số $y = g(x)$ có 8 cực trị.

Câu 130: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Số điểm cực tiểu của hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x) + \frac{x^4}{2} - 2x^3 + 2x^2 + 2021$ là

Lời giải

ĐS: 4

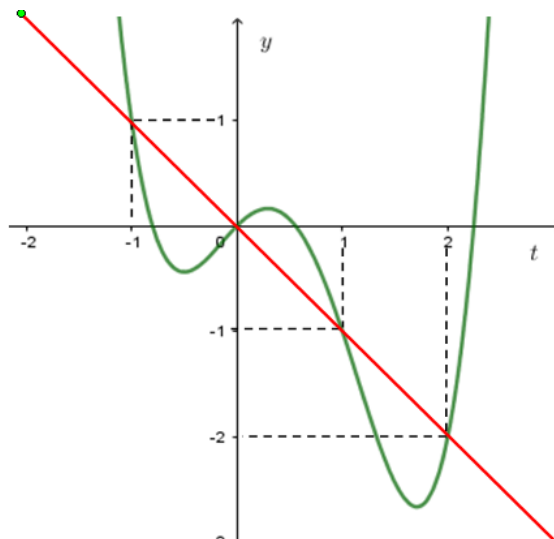
Ta có: $g'(x) = (2x - 2)f'(x^2 - 2x) + 2x^3 - 6x^2 + 4x$.

$$= 2(x - 1)f'(x^2 - 2x) + 2(x - 1)(x^2 - 2x).$$

$$= 2(x - 1)[f'(x^2 - 2x) + (x^2 - 2x)].$$

Đặt $t = x^2 - 2x$. Khi đó đồ thị hàm số $f'(t)$ cắt đường thẳng $y = -t$ tại bốn điểm phân biệt:

$$t = -1, t = 0, t = 1, t = 2.$$



$$\text{Suy ra: } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -1 \\ x^2 - 2x = 0 \\ x^2 - 2x = 1 \\ x^2 - 2x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \\ x = 0 \vee x = 2 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}.$$

$$\text{Ta có: } f'(x^2 - 2x) > -(x^2 - 2x) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x > 2 \\ 0 < x^2 - 2x < 1 \\ x^2 - 2x < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 - \sqrt{3} \vee x > 1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{2} < x < 0 \vee 2 < x < 1 + \sqrt{2} \\ VN \end{cases}.$$

Khi đó BBT như sau:

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{3}$	$1 - \sqrt{2}$	0	1	2	$1 + \sqrt{2}$	$1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$x - 1$	-		-		-	0	+		+
$f'(x^2 - 2x) + (x^2 - 2x)$	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	+
$g(x)$									

Vậy hàm số $g(x)$ có bốn điểm cực tiểu.

Cho đồ thị hàm số $f(u(x))$, $f'(u(x))$ hoặc bảng xét dấu của hàm, $f(u(x))$, $f'(u(x))$.

Xét cực trị của hàm $f(v(x))$

PHƯƠNG PHÁP

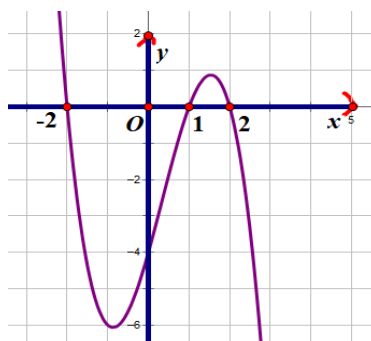
- o Đạo hàm xét dấu thông thường.
- o Chọn hàm đại diện.
- o Đặt ẩn phụ.

o Ghép trực.

☞ *Nhắc lại quy tắc về dấu của tích, thương, tổng các biểu thức:*

$f(x)$	+	–	+	–
$g(x)$	+	–	–	+
$f(x) \cdot g(x)$	+	+	–	–
$f(x) : g(x)$	+	+	–	–
$f(x) + g(x)$	+	–	<i>Chưa biết</i>	<i>Chưa biết</i>

Câu 131: Cho hàm số $y = f(x)$ bậc bốn có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(3x-1)$ có đồ thị như hình dưới.



Hàm số $y = f(1-2x)$ có mấy điểm cực đại?

Lời giải

ĐS: 2

Cách 1. Chọn hàm đại diện

Quan sát đồ thị ta thấy $y = f'(3x-1)$ là hàm số bậc ba có 3 nghiệm $x = -2, x = 1, x = 2$.

Ta chọn: $f'(3x-1) = -(x+2)(x-1)(x-2)$ [chưa chính xác 100% nhưng phù hợp trắc nghiệm]

$$\text{Đặt } t = 3x-1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{3}.$$

$$\Rightarrow f'(t) = -\left(\frac{t+1}{3}+2\right)\left(\frac{t+1}{3}-1\right)\left(\frac{t+1}{3}-2\right) = -\frac{1}{27}(t+7)(t-2)(t-5)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{27}(x+7)(x-2)(x-5)$$

$$\text{Suy ra } f'(1-2x) = -\frac{1}{27}(1-2x+7)(1-2x-2)(1-2x-5) = \frac{1}{27}(2x-8)(2x+1)(2x+4).$$

Xét hàm số $y = f(1-2x)$

$$\Rightarrow y' = (1-2x)' \cdot f'(1-2x) = -2 \cdot f'(1-2x) = \frac{-2}{27}(2x-8)(2x+1)(2x+4)$$

Dấu của y'

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$

Ta suy ra hàm số $y = f(1-2x)$ có 2 điểm cực đại.

Cách 2. Xét dấu đạo hàm y' .

Xét $y = f(1-2x)$

$$\Rightarrow y' = (1-2x)' \cdot f'(1-2x) = -2 \cdot f'(1-2x) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) = 0 \quad (1)$$

$$\text{Theo đồ thị } f'(3x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-1 = -7 \\ 3x-1 = 2 \\ 3x-1 = 5 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases}$$

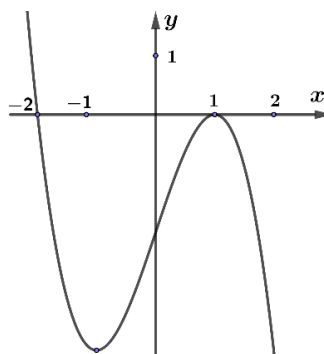
$$\text{Khi đó: (1)} \begin{cases} 1-2x = -7 \\ 1-2x = 2 \\ 1-2x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x = -2 \end{cases}, \text{ các nghiệm trên đều là nghiệm bội lẻ.}$$

Dấu y'

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	4	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$-$

Ta suy ra hàm số $y = f(1-2x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 132: Cho hàm số $y = f(x)$ bậc bốn có đồ thị hàm số $y = f'(x+1)$ như hình vẽ. Hàm số $y = f(x^2-3)$ có bao nhiêu điểm cực trị?



Lời giải

ĐS: 3

Cách 1. Chọn hàm đại diện.

Hàm số $y = f(x)$ bậc bốn, và quan sát đồ thị ta thấy $y = f'(x+1)$ là hàm số bậc ba có hai nghiệm $x = -2, x = 1$, trong đó $x = 1$ là nghiệm bội chẵn.

Ta chọn: $f'(x+1) = -(x+2)(x-1)^2 \Rightarrow f'(x) = -(x+1)(x-2)^2$ [nếu tự luận thêm $k > 0$].

Xét $y = f(x^2 - 3)$.

$$\Rightarrow y' = 2xf'(x^2 - 3) = -2x.(x^2 - 2)(x^2 - 5)^2 = -2x.(x^2 - 2)(x - \sqrt{5})^2 (x + \sqrt{5})^2.$$

Ta có bảng xét dấu của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
y'	+	0	+	0	-	0	-

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Cách 2. Xét dấu đạo hàm y'

Xét hàm số $y = f(x^2 - 3)$.

♦ Ta có $y = f(x^2 - 3) \Rightarrow y' = 2xf'(x^2 - 3)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2xf'(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases}$$

♦ Từ đồ thị của $f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -1 \\ x+1 = 2 \end{cases}$

$$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}, \text{ trong đó } t = 2 \text{ là nghiệm bội chẵn.}$$

♦ Khi đó $\begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2 - 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 3 = -1 \\ x^2 - 3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{5} \end{cases}, \text{ trong đó } x = \pm\sqrt{5} \text{ là nghiệm bội chẵn.}$

Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x^2 - 3)$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
y'	+	0	+	0	-	0	-

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Cách 3. Xét dấu đạo hàm y' .

$$\text{Đồ thị } y = f'(t+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1(\text{kep}) \end{cases}.$$

$$\text{Đặt } t+1 = x^2 - 3 \Rightarrow \begin{cases} t'_x = 2x \\ t = x^2 - 4 \end{cases}.$$

$$\text{Khi đó } y' = [f(x^2 - 3)]' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = f'(t+1) \cdot t'_x = 2x \cdot f'(t+1).$$

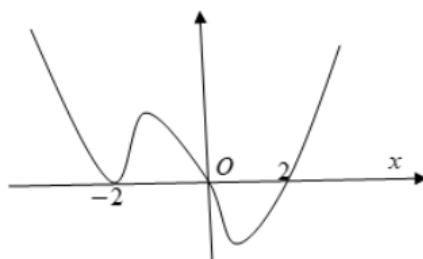
$$\Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 1 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = -2 \\ x^2 - 4 = 1 \\ 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm\sqrt{5} \\ x = 0 \end{cases}.$$

BBT của hàm số $y = f(x^2 - 3)$, nhờ $y' = 2x \cdot f'(x^2 - 3) = f'(t+1) \cdot t'_x = 2x \cdot f'(t+1)$.

x	$-\infty$	$-\sqrt{5}$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{5}$	$+\infty$
y'	+	0	+	0	-	0	-

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Câu 133: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(x-1)$ như hình vẽ



Hỏi hàm số $y = f(1-x^2)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 3

Cách 1. Chọn hàm đại diện

Quan sát đồ thị ta thấy $y = f'(x-1)$ là hàm số dạng bậc bốn có 3 nghiệm $x = -2, x = 0, x = 2$, trong đó $x = -2$ là nghiệm bội chẵn.

$$\text{Ta chọn: } y = f'(x-1) = (x+2)^2 x(x-2) \Rightarrow f'(x) = (x+3)^2 (x+1)(x-1).$$

$$\text{Xét } y = f(1-x^2).$$

$$\Rightarrow y' = -2x \cdot f'(1-x^2) = -2x(1-x^2+3)^2(1-x^2+1)(1-x^2-1) = -2x^3(4-x^2)^2(x^2-2).$$

Ta có bảng xét dấu của hàm số $y = f(1-x^2)$.

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Từ bảng biến thiên ta suy ra hàm số có 3 điểm cực trị.

Cách 2. Xét dấu đạo hàm y' .

♦ Xét $y = f(1-x^2)$ ta có $y' = -2x.f'(1-x^2)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -2x.f'(1-x^2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(1-x^2) = 0 \end{cases}$$

♦ Từ đồ thị hàm số $f'(x-1)$ ta có $f'(x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -3 \\ x-1 = -1 \\ x-1 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}, \text{ trong đó } x = -3 \text{ là nghiệm bội chẵn.}$$

♦ Khi đó $\begin{cases} x = 0 \\ f'(1-x^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-x^2 = -3 \\ 1-x^2 = -1 \\ 1-x^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = 0 \end{cases}, \text{ trong đó } x = 0, x = \pm\sqrt{2} \text{ nghiệm bội lẻ.}$

Ta có bảng xét dấu y' .

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
y'	$+$	0	$+$	0	$-$	0	$-$

Vậy hàm số $y = f(1-x^2)$ có 3 điểm cực trị.

Câu 134: Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$. Bảng xét dấu bên dưới là của đạo hàm $f'(x-2)$. Hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ có bao nhiêu điểm cực trị?

x	$-\infty$	1	3	5	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Lời giải

ĐS: 3

Từ bảng xét dấu của $y = f'(x-2)$ ta suy ra bảng xét dấu của hàm số $y = f'(x)$.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$

Ta có $g'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}} f'(\sqrt{x^2+2x+2})$.

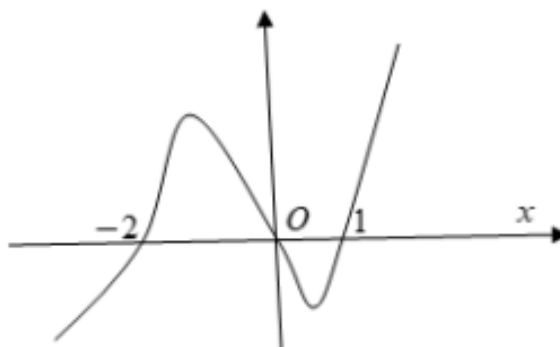
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ f'(\sqrt{x^2+2x+2})=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=-1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=1 \\ \sqrt{x^2+2x+2}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=-1+2\sqrt{2} \\ x=-1-2\sqrt{2} \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$-1-2\sqrt{2}$	-1	$-1+2\sqrt{2}$	$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$f'(\sqrt{x^2+2x+2})$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta suy ra hàm số $g(x) = f(\sqrt{x^2+2x+2})$ có 3 điểm cực trị.

Câu 135: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(1-x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x - 2)$ là

Lời giải

ĐS: 7

Cách 1. Chọn hàm đại diện

Quan sát đồ thị ta thấy $y = f'(1-x)$ là hàm số bậc ba có 3 nghiệm $x = -2, x = 0, x = 1$.

Ta chọn: $y = f'(1-x) = (x+2)x(x-1) = -(-x+1-3)(-x+1-1)(-x+1)$

$$\Rightarrow f'(x) = -(x-3)(x-1)x$$

Xét $y = f(x^2 - 2x - 2)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y' &= (2x-2) \cdot f'(x^2 - 2x - 2) = -(2x-2)(x^2 - 2x - 2 - 3)(x^2 - 2x - 2 - 1)(x^2 - 2x - 2) \\ &= -(2x-2)(x^2 - 2x - 5)(x^2 - 2x - 3)(x^2 - 2x - 2). \end{aligned}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{6} \\ x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}, \text{đều là nghiệm bội lẻ.}$$

Vậy hàm số có 7 điểm cực trị.

Cách 2. Xét dấu đạo hàm y' .

Từ đồ thị hàm số $y = f'(1-x)$ suy ra $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \\ x = 0 \end{cases}$.

Xét $y = f(x^2 - 2x - 2) \Rightarrow y' = (2x-2) \cdot f'(x^2 - 2x - 2)$.

$$+) y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 3 \\ x^2 - 2x - 2 = 1 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x - 5 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1 \pm \sqrt{6} \\ x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{3} \end{cases}, \text{trong đó các nghiệm đều là}$$

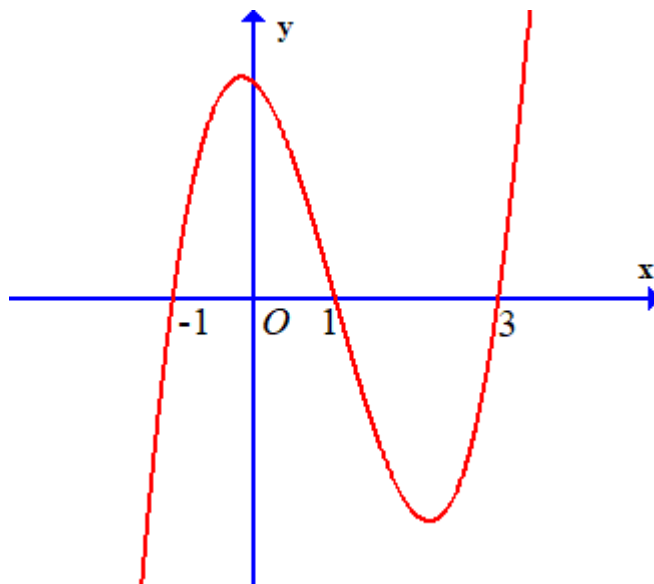
nghiệm bội lẻ.

+) Bảng xét dấu của y' :

x	$-\infty$	$1 - \sqrt{6}$	-1	$1 - \sqrt{3}$	1	$1 + \sqrt{3}$	3	$1 + \sqrt{6}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x - 2)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 136: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = f'(x^3 + 3x - 1)$.



Hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có bao nhiêu điểm cực đại?

Lời giải

ĐS: 2

Xét $y = f(x^2 - 2x)$, ta có $y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x)$.

Từ đồ thị ta suy ra $f'(x^3 + 3x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Leftrightarrow t = x^3 + 3x - 1 = -5 \\ x = 1 \Leftrightarrow t = x^3 + 3x - 1 = 3 \\ x = 3 \Leftrightarrow t = x^3 + 3x - 1 = 35 \end{cases}$.

Đặt $t = x^3 + 3x - 1$. Suy ra $f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -5 \\ t = 3 \\ t = 35 \end{cases}$.

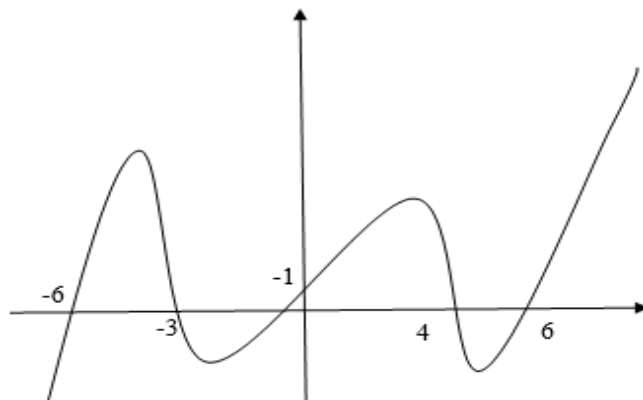
Do đó $f'(x^2 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x = -5 \\ x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = 35 \end{cases}$. Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = -5 \\ x^2 - 2x = 3 \\ x^2 - 2x = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \\ x = 7 \\ x = -5 \end{cases}$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-5	-1	1	3	7	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Suy ra hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 2 điểm cực đại.

Câu 137: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị hàm số $y = f'(3 - x)$ như hình vẽ



Số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2|x| + 3)$ là

Lời giải

ĐS: 9

Xét hàm số $y = g(x) = f(x^2 - 2x + 3)$

$$\text{Ta có: } y' = (2x - 2)f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Từ đồ thị ta có } y = f'(3 - x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ x = -3 \\ x = -1 \\ x = 4 \\ x = 6 \end{cases}$$

$$\text{Đặt } t = 3 - x \Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 9 \\ t = 6 \\ t = 4 \\ t = -1 \\ t = -3 \end{cases}$$

Do đó

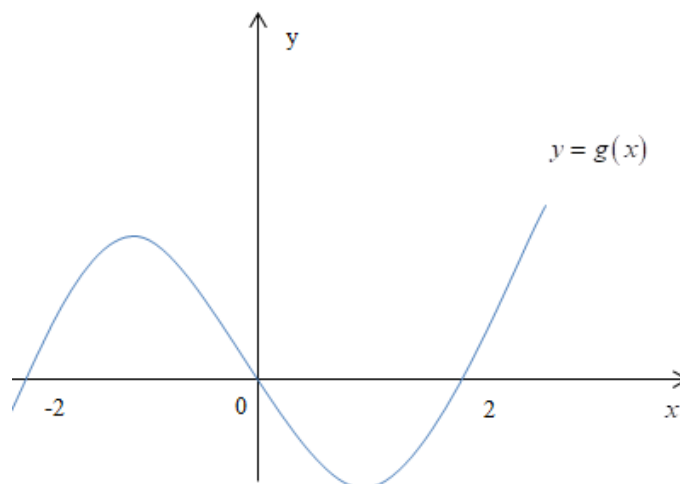
$$f'(x^2 - 2x + 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x + 3 = 9 \\ x^2 - 2x + 3 = 6 \\ x^2 - 2x + 3 = 4 \\ x^2 - 2x + 3 = -1 \\ x^2 - 2x + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - 6 = 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \\ x^2 - 2x - 1 = 0 \\ x^2 - 2x + 4 = 0 \\ x^2 - 2x + 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \\ x = 1 \pm \sqrt{2} \\ x = 1 \pm \sqrt{7} \end{cases}$$

Phương trình $f'(x^2 - 2x + 3) = 0$ có 7 nghiệm bội đơn phân biệt suy ra hàm số

$y = g(x) = f(x^2 - 2x + 3)$ có đúng 7 điểm cực trị trong đó có 4 điểm cực trị dương.

Do đó hàm số $y = f(x^2 - 2|x| + 3)$ có 9 điểm cực trị.

Câu 138: Cho hàm số $f(x)$ xác định và liên tục trên $\mathbb{R}$, trong đó $g(x) = f'(1-x)$ là hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ



Hàm số $y = \left| f\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \right|$ có tối đa bao nhiêu điểm cực trị?

Lời giải

ĐS: 6

• Từ đồ thị hàm số $y = f'(1-x)$ ta có:

$$f'(1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} . \text{ Đặt } t = 1-x . \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 1 \\ t = -1 \end{cases} .$$

• Xét $h(x) = f\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$ với mọi $x \neq 2$

$$\Rightarrow h'(x) = \frac{-1}{(x-2)^2} f'\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{x-2} = -1 \\ \frac{x-1}{x-2} = 1 \\ \frac{x-1}{x-2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{5}{2} \end{cases} .$$

• Ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+		-		
$h(x)$	↗		↘		

Suy ra đồ thị hàm số $y = h(x)$ có 2 điểm cực trị.

- Ta thấy đường thẳng $y = 0$ cắt đồ thị $y = h(x)$ tại nhiều nhất 4 điểm. Vậy hàm số

$$y = |h(x)| = \left| f\left(\frac{x-1}{x-2}\right) \right| \text{ có tối đa 6 điểm cực trị.}$$

Câu 139: Cho hàm đa thức $y = f(x)$ liên tục, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$, có bảng xét dấu của $y = f'(x+1)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x+1)$	-	0	+	0	-

Số điểm cực đại của hàm số $y = f(x^2 + |x| + 1)$ là

Lời giải

ĐS: 1

Từ bảng xét dấu của $f'(x+1)$ ta có:

$$f'(x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 0 \\ x = 1 \end{cases} \text{ . Đặt } t = x+1 \text{ ta có } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 1 \\ t = 2 \end{cases} .$$

Mặt khác ta có: $g(x) = f(x^2 + x + 1) \Rightarrow g'(x) = (2x+1)f'(x^2 + x + 1) = 0$

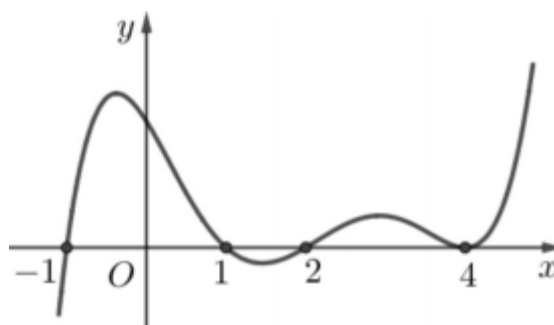
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x^2+x+1=0 \\ x^2+x+1=1 \\ x^2+x+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \\ x=\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ x=\frac{-1}{2} \end{cases} .$$

Ta có bảng biên thiên sau:

x	$-\infty$	$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$	0	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	- + - +					- +	
$g(x)$	↘ ↗ ↘ ↗					↘ ↗	
$g(x)$	↘ ↗					↘ ↗	

Vì $y = g(|x|) = f(x^2 + |x| + 1)$ và $g(x) = f(x^2 + x + 1)$ đối xứng nhau qua trục tung nên hàm số $y = f(x^2 + |x| + 1)$ có một điểm cực đại.

Câu 140: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Đồ thị hàm số $y = f(2x + 5)$ như hình vẽ. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^3 - 2)$.



Lời giải

ĐS: 3

$$y' = 3x^2 f'(x^3 - 2) \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 (\text{loại}) \\ f'(x^3 - 2) = 0 (1) \end{cases}$$

$$\text{Ta có } f'(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \\ x = 4 (\text{loại}) \end{cases}. \text{ Đặt } t = 2x + 5. \text{ Suy ra } f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 7 \\ t = 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 2 = 3 \\ x^3 - 2 = 7 \\ x^3 - 2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 = 5 \\ x^3 = 9 \\ x^3 = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{5} \\ x = \sqrt[3]{9} \\ x = \sqrt[3]{11} \end{cases}$$

Vậy hàm số có 3 điểm cực trị.

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TEST CUỐI BÀI

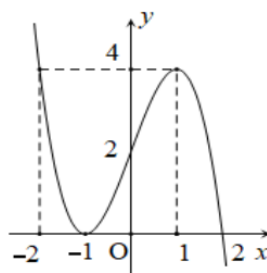
ĐỀ TEST CUỐI BÀI SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
- B. Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm nghịch biến trên $(a; b)$.
- C. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm đồng biến trên $(a; b)$.
- D. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 2)$.
- B. $(0; +\infty)$.
- C. $(0; 4)$.
- D. $(-1; 1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.

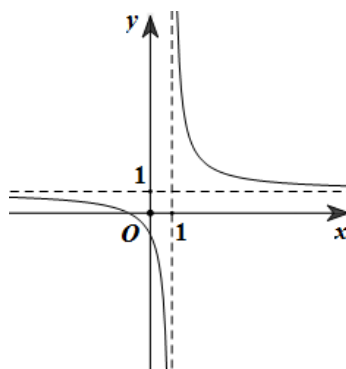
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	-2	1	$+\infty$	2	$+\infty$	

Hỏi hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. C. $(-2; 0)$. D. $(-3; 1)$.

Câu 5: Biết hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây và m là số thực cho trước. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $m \in (-1; 0)$. B. $m \in (-1; +\infty)$. C. $m \in [0; +\infty)$. D. $m \in (0; +\infty)$.

Câu 6: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(0; 1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$, trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
 D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8: Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left[-1; \frac{3}{2}\right)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$.

Câu 9: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A. $y = x^3 - 3x$. B. $y = x^3 + 3x$. C. $y = \frac{x-1}{x+1}$. D. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2(x+2)(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2;3)$. B. $(-1;1)$. C. $(0;2)$. D. $(-\infty;1)$.

Câu 11: Tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

- A. $S = (-1; +\infty)$. B. $S = [-1; +\infty)$. C. $S = (-\infty; -1)$. D. $S = (-\infty; 1)$.

Câu 12: Hàm số $y = \ln(4-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;0)$. B. $(-2;2)$. C. $(0;2)$. D. $(-\infty;2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

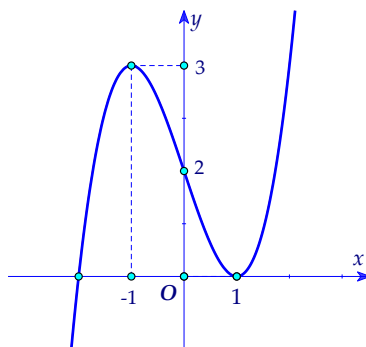
Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.		
b)	Nếu u, v thỏa mãn $0 < u < v < 1$ thì $f(u) < f(v)$.		
c)	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.		
d)	Hàm số $y = f(2x-1)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.		

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

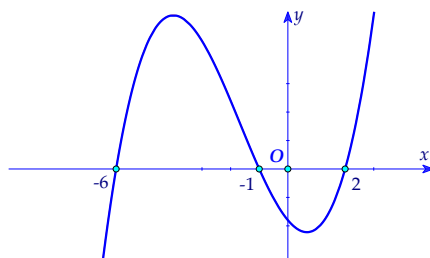
Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$		
b)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.		
c)	Hàm số $y = f(x^2 + 2)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.		
d)	Có 10 giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $y = f(x+m)$ nghịch biến trên $(2; 4)$.		

Câu 3: Cho hàm số bậc ba có đồ thị như sau:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.		
b)	$f'(-0,5) < 0$.		
c)	Hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên $(0;1)$.		
d)	Có 3 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(2x-m)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.		

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-6; -1; 2\}$.		
b)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-6; -1)$.		
c)	$f(-10) < f(-7)$.		
d)	Hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Xác định khoảng đồng biến của hàm số $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.

Kết quả:

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Xác định khoảng (đoạn) đồng biến của hàm số đã cho.

Kết quả:

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Xác định khoảng (đoạn) nghịch biến của hàm số $y = f(5 - 2x)$.

Kết quả:

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

Kết quả:

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

Kết quả:

Câu 6: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 5m + 1$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

Kết quả:

----- HẾT -----

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TEST CUỐI BÀI

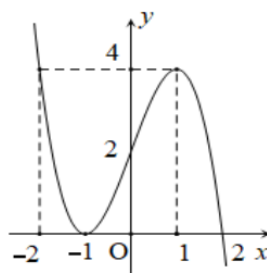
ĐỀ TEST CUỐI BÀI SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
- B. Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm nghịch biến trên $(a; b)$.
- C. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm đồng biến trên $(a; b)$.
- D. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 2)$.
- B. $(0; +\infty)$.
- C. $(0; 4)$.
- D. $(-1; 1)$.

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.

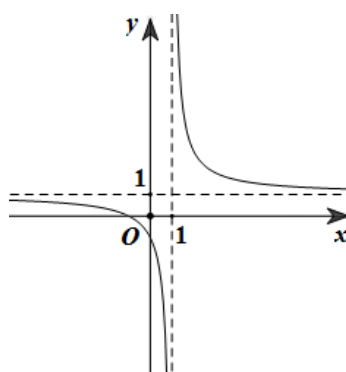
Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-3		0		1	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$ $	$-$	0	$+$
$f(x)$			1		$ $	$+\infty$		$+\infty$
	-2				$-\infty$		2	

Hỏi hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A.** $(0; +\infty)$. **B.** $(-\infty; 1)$. **C.** $(-2; 0)$. **D.** $(-3; 1)$.

Câu 5: Biết hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây và m là số thực cho trước. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A.** $m \in (-1; 0)$. **B.** $m \in (-1; +\infty)$. **C.** $m \in [0; +\infty)$. **D.** $m \in (0; +\infty)$.

Câu 6: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A.** $(-3; 0)$. **B.** $(-1; 0)$. **C.** $(0; +\infty)$. **D.** $(0; 1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$, trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

- A.** Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.
D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8: Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left[-1; \frac{3}{2}\right)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$.

Câu 9: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

- A.** $y = x^3 - 3x$. **B.** $y = x^3 + 3x$. **C.** $y = \frac{x-1}{x+1}$. **D.** $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2(x+2)(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2;3)$. B. $(-1;1)$. C. $(0;2)$. D. $(-\infty;1)$.

Câu 11: Tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

- A. $S = (-1; +\infty)$. B. $S = [-1; +\infty)$. C. $S = (-\infty; -1)$. D. $S = (-\infty; 1)$.

Câu 12: Hàm số $y = \ln(4-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2;0)$. B. $(-2;2)$. C. $(0;2)$. D. $(-\infty;2)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

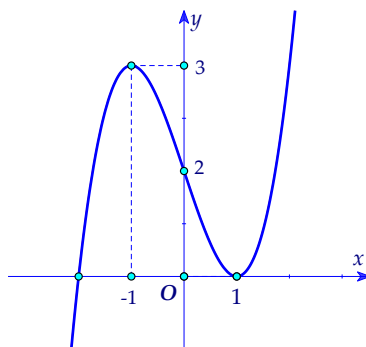
Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.		
b)	Nếu u, v thỏa mãn $0 < u < v < 1$ thì $f(u) < f(v)$.		
c)	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1; 0)$.		
d)	Hàm số $y = f(2x-1)$ đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(1; +\infty)$.		

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

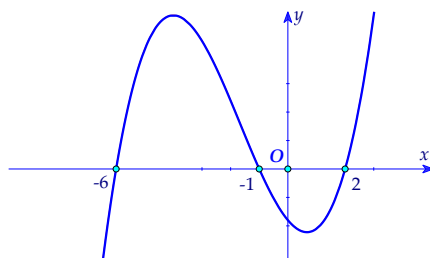
Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$		
b)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.		
c)	Hàm số $y = f(x^2 + 2)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.		
d)	Có 10 giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $y = f(x+m)$ nghịch biến trên $(2; 4)$.		

Câu 3: Cho hàm số bậc ba có đồ thị như sau:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.		
b)	$f'(-0,5) < 0$.		
c)	Hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên $(0;1)$.		
d)	Có 3 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(2x-m)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.		

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-6; -1; 2\}$.		
b)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-6; -1)$.		
c)	$f(-10) < f(-7)$.		
d)	Hàm số $y = f(3-x^2)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Xác định khoảng đồng biến của hàm số $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.

Kết quả:

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Xác định khoảng (đoạn) đồng biến của hàm số đã cho.

Kết quả:

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Xác định khoảng (đoạn) nghịch biến của hàm số $y = f(5 - 2x)$.

Kết quả:

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m - 1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

Kết quả:

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

Kết quả:

Câu 6: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 5m + 1$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

Kết quả:

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

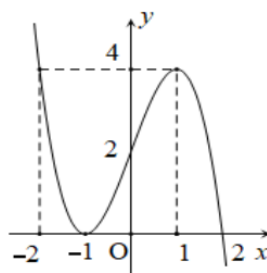
PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $(a; b)$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Nếu hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in (a; b)$.
- B. Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm nghịch biến trên $(a; b)$.
- C. Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$ thì hàm đồng biến trên $(a; b)$.
- D. Nếu hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(a; b)$ thì $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; b)$.**

Lời giải

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng nào dưới đây?

- A. $(0; 2)$.
- B. $(0; +\infty)$.
- C. $(0; 4)$.
- D. $(-1; 1)$.**

Lời giải

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty; -1)$, $(3; +\infty)$.**
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$.
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.
- D. Hàm số đồng biến trên $(-1; 3)$.

Lời giải

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x - 3)(x + 1)$.

Suy ra $y' > 0$, $\forall x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$. Do đó hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1); (3; +\infty)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

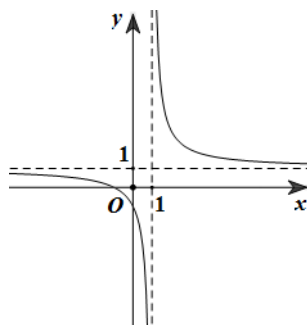
x	$-\infty$	-3	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	-2	1	$-\infty$	2	$+\infty$

Hỏi hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(0; +\infty)$. B. $(-\infty; 1)$. **C. $(-2; 0)$.** D. $(-3; 1)$.

Lời giải

Câu 5: Biết hàm số $y = \frac{x+m}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây và m là số thực cho trước. Mệnh đề nào dưới đây đúng?



- A. $m \in (-1; 0)$. B. $m \in (-1; +\infty)$. C. $m \in [0; +\infty)$. **D. $m \in (0; +\infty)$.**

Lời giải:

Ta có $y' = \frac{-1-m}{(x-1)^2}$, $\forall x \neq 1$

Dạng đồ thị đi xuống thì $y' < 0 \Leftrightarrow m > -1, \forall x \neq 1$.

Giao Ox tại $(0; -m)$, nằm bên trái trục Oy nên $m > 0$.

Câu 6: Hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

- A. $(-3; 0)$. B. $(-1; 0)$. C. $(0; +\infty)$. **D. $(0; 1)$.**

Lời giải

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 0 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$+\infty$								$+\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$
 0 1 0

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 7: Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$, trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
 B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.
 C. Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$.

Ta có: $y' = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \in D$.

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 8: Hàm số $y = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(4; +\infty)$.

C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $\left(-1; \frac{3}{2}\right)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{3}{2}; 4\right)$.

Lời giải

Tập xác định: $D = (-\infty; -1] \cup [4; +\infty)$.

Ta có: $y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x-4}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \notin D$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
y'	-			+

Vậy, hàm số đồng biến trên khoảng: $(4; +\infty)$; hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 9: Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = x^3 - 3x$.

B. $y = x^3 + 3x$.

C. $y = \frac{x-1}{x+1}$.

D. $y = x^4 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Nhận xét $y = x^3 + 3x$ có $y' = 3x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó hàm số $y = x^3 + 3x$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có $f'(x) = x^2(x+2)(1-x), \forall x \in \mathbb{R}$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(2; 3)$.

B. $(-1; 1)$.

C. $(0; 2)$.

D. $(-\infty; 1)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = x^2(x+2)(1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

BBT:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$					$-\infty$

$\swarrow$ $f(-2)$ $\nearrow$ $f(1)$ $\searrow$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty) \supset (2; 3)$.

Câu 11: Tập hợp S tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x-m}{x+1}$ đồng biến trên từng khoảng xác định là

- A.** $S = (-1; +\infty)$. **B.** $S = [-1; +\infty)$. **C.** $S = (-\infty; -1)$. **D.** $S = (-\infty; 1)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $f'(x) = \frac{1+m}{(x+1)^2}$.

Hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m+1 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Vậy $S = (-1; +\infty)$.

Câu 12: Hàm số $y = \ln(4-x^2)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-2; 0)$. **B.** $(-2; 2)$. **C.** $(0; 2)$. **D.** $(-\infty; 2)$.

Lời giải

TXĐ: $D = (-2; 2)$

Ta có: $y' = \frac{-2x}{4-x^2}$.

Bảng xét dấu:

x	-2	0	2
$f'(x)$	$+$	0	$-$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty; -1)$ và $(1; +\infty)$.		
b)	Nếu u, v thỏa mãn $0 < u < v < 1$ thì $f(u) < f(v)$.		

c)	Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-1;0)$.		
d)	Hàm số $y = f(2x-1)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 3$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$.

BBT:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	2	-2	$+\infty$	

Dựa vào BBT, hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(-\infty;-1)$ và $(1;+\infty)$.

b) Do hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$ và u, v thỏa mãn $0 < u < v < 1$ nên $f(u) > f(v)$.

c) Sử dụng phép biến đổi đồ thị. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị $y = f(|x|)$ bằng cách:

+) Giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ ứng với $x \geq 0$, bỏ phần đồ thị $y = f(x)$ ứng với $x < 0$.

+) Lấy đối xứng phần đồ thị được giữ của đồ thị $y = f(x)$ qua trục tung.

Lúc đó, BBT của $y = f(|x|)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	-2	0	-2	$+\infty$		

Dựa vào BBT, hàm số $f(|x|)$ đồng biến trên $(-1;0)$.

d) **Cách 1:**

Ta có: $y' = 2f'(2x-1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1 > 1 \\ 2x-1 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < 0 \end{cases}$.

Vậy hàm số $y = f(2x-1)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Cách 2: Giải nhanh:

Ta có: $\begin{cases} 2x-1=1 \longrightarrow x=1 \\ 2x-1=-1 \longrightarrow x=0 \end{cases}$.

BBT:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(2x-1)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$

Vậy hàm số $y = f(2x-1)$ đồng biến trên $(-\infty;0)$ và $(1;+\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2}$		
b)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.		
c)	Hàm số $y = f(x^2 + 2)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$.		
d)	Có 10 giá trị nguyên của tham số $m \in [-5; 5]$ để hàm số $y = f(x+m)$ nghịch biến trên $(2; 4)$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) b) Ta có: $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} < 0, \forall x \neq 1 \rightarrow$ Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; 1)$ và $(1; +\infty)$.

c) Ta có: $y' = 2xf'(x^2 + 2) > 0 \xrightarrow{f'(x^2+2) < 0} x < 0$.

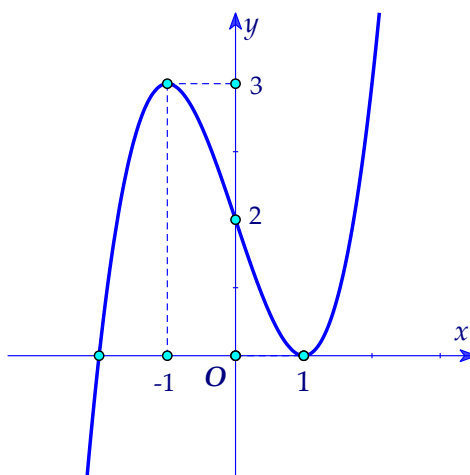
d) Ta có: $y = f(x+m) = \frac{2(x+m)-1}{(x+m)-1} = \frac{2x+2m-1}{x+m-1}$.

Suy ra: $y' = \frac{-1}{(x+m-1)^2} < 0, \forall x \neq (1-m)$.

Yêu cầu bài toán

$$\Leftrightarrow 1-m \notin (2; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-m \leq 2 \\ 1-m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq -3 \end{cases} \xrightarrow[m \in \mathbb{Z}]{m \in [-5; 5]} m \in \{-5; -4; -3; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}.$$

Câu 3: Cho hàm số bậc ba có đồ thị như sau:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.		
b)	$f'(-0,5) < 0$.		
c)	Hàm số $y = f(1-2x)$ đồng biến trên $(0;1)$.		
d)	Có 3 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(2x-m)$ đồng biến trên $(2;+\infty)$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

c) Cách 1:

Ta có: $y' = -2f'(1-2x) > 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) < 0 \Leftrightarrow -1 < 1-2x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

Vậy $y = f(1-2x)$ đồng biến trên $(0;1)$.

Cách 2: Giải nhanh:

Ta có:
$$\begin{cases} 1-2x = -1 \longrightarrow x = 1 \\ 1-2x = 1 \longrightarrow x = 0 \end{cases}.$$

BBT:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f(1-2x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$-\infty$

Vậy $y = f(1-2x)$ đồng biến trên $(0;1)$.

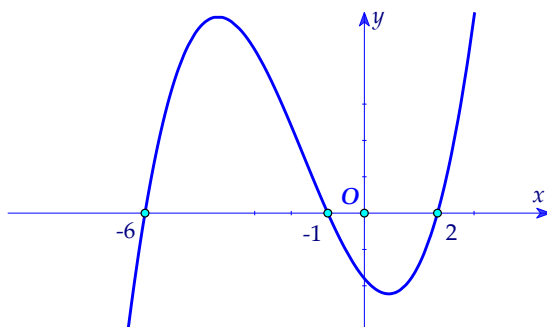
d) Ta có: $y' = 2f'(2x-m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-m = -1 \\ 2x-m = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m-1}{2} \\ x = \frac{m+1}{2} \end{cases}.$

BBT:

x	$-\infty$	$\frac{m-1}{2}$	$\frac{m+1}{2}$	$+\infty$
$f(2x-m)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$

Để $y = f(2x-m)$ đồng biến trên $(2;+\infty) \longrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 3 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}^+} m \in \{1;2;3\}.$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-6; -1; 2\}$.		
b)	Hàm số đồng biến trên khoảng $(-6; -1)$.		
c)	$f(-10) < f(-7)$.		
d)	Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến trên khoảng $(1; 2)$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

c) Ta có: $f'(x) < 0, \forall x \in (-\infty; -6) \cup (-1; 2) \rightarrow$ Trên $(-\infty; -6)$ thì hàm số nghịch biến.

Nên suy ra $-10 < -7 \rightarrow f(-10) > f(-7)$.

d) Hàm số $y = f(3 - x^2)$ đồng biến khi $y' > 0 \Leftrightarrow -2xf'(3 - x^2) > 0 \Leftrightarrow 2xf'(3 - x^2) < 0$.

$$\text{TH 1: } \begin{cases} x < 0 \\ f'(3 - x^2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 3 - x^2 > 2 \\ -6 < 3 - x^2 < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2 < 1 \\ 4 < x^2 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -3 < x < -2 \end{cases}$$

$$\text{TH 2: } \begin{cases} x > 0 \\ f'(3 - x^2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ 3 - x^2 < -6 \\ -1 < 3 - x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x^2 > 9 \\ 1 < x^2 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 1 < x < 2 \end{cases}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Xác định khoảng đồng biến của hàm số $y = \sqrt{8 + 2x - x^2}$.

Kết quả: $(-2; 1)$

Lời giải

TXĐ: $D = [-2; 4]$.

Ta có: $y' = \frac{(8+2x-x^2)'}{2\sqrt{8+2x-x^2}} = \frac{2-2x}{2\sqrt{8+2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{8+2x-x^2}}$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Ta có bảng biến thiên:

x	-2		1		4
y'		+	0	-	
y	0		3		0

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số $y = \sqrt{8+2x-x^2}$ đồng biến trên khoảng $(-2;1)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = x^2(x+2)(1-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Xác định khoảng (đoạn) đồng biến của hàm số đã cho.

Kết quả: $[-2;1]$

Lời giải

Ta có: $f'(x) = x^2(x+2)(1-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

BBT:

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	$+\infty$					$-\infty$

$f(-2)$ $f(1)$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng $[-2;1]$.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$, bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$			
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Xác định khoảng (đoạn) nghịch biến của hàm số $y = f(5-2x)$.

Kết quả: $(-\infty;2]; [3;4]$

Lời giải

Ta có: $y' = -2f'(5-2x)$.

Để hàm số nghịch biến thì: $y' \leq 0$.

$\Leftrightarrow -2f'(5-2x) \leq 0 \Leftrightarrow f'(5-2x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq 5-2x \leq -1 \\ 5-2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x \leq 4 \\ x \leq 2 \end{cases}$

Câu 4: Có bao nhiêu số nguyên m để hàm số $y = (m^2 - 1)x^3 + (m-1)x^2 - x + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$?

Kết quả: 2

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

TH 1: $m = 1$. Ta có: $y = -x + 4$ là phương trình của một đường thẳng có hệ số góc âm nên hàm số luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó nhận $m = 1$.

TH 2: $m = -1$. Ta có: $y = -2x^2 - x + 4$ là phương trình của một đường Parabol nên hàm số không thể nghịch biến trên $\mathbb{R}$. Do đó loại $m = -1$.

TH3: $m \neq \pm 1$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty) \Leftrightarrow y' \leq 0 \forall x \in \mathbb{R}$, dấu “=” chỉ xảy ra ở hữu hạn điểm trên $\mathbb{R}$.

$$\Leftrightarrow 3(m^2 - 1)x^2 + 2(m - 1)x - 1 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)^2 + 3(m^2 - 1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 1 < 0 \\ (m - 1)(4m + 2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 1 \\ -\frac{1}{2} \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m < 1.$$

Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = 0$. Vậy có 2 giá trị m nguyên cần tìm là $m = 0$ hoặc $m = 1$.

Câu 5: Cho hàm số $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ với m là tham số. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để hàm số đồng biến trên khoảng $(1; e)$. Tìm số phần tử của S .

Kết quả: 2

Lời giải

Xét $y = \frac{\ln x - 6}{\ln x - 2m}$ có điều kiện: $\begin{cases} \ln x \neq 2m \\ x > 0 \end{cases}$.

Vì $x \in (1; e)$ nên $\ln x \in (0; 1)$

$$\text{Ta có: } y' = \frac{6 - 2m}{(\ln x - 2m)^2} \cdot (\ln x)' = \frac{6 - 2m}{(\ln x - 2m)^2} \cdot \frac{1}{x}.$$

$$\text{Hàm số đồng biến trên khoảng } (1; e) \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 2m > 0 \\ 2m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 \\ m \notin \left(0; \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Mà m nguyên dương nên $m \in \{1; 2\}$. Vậy số phần tử của S là 2.

Câu 6: Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}mx^2 + 2mx - 5m + 1$ nghịch biến trên một đoạn có độ dài bằng 3. Tính tổng tất cả các phần tử của S .

Kết quả: 8

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có } y' = x^2 - mx + 2m, \Delta = m^2 - 8m.$$

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

TH 1: Nếu $\Delta \leq 0$ thì $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó, hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$.

TH 2: Nếu $\Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 - 8m > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > 8 \end{cases}$ thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của (*), khi đó ta có bảng biến thiên:

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$		
y'		+	0	-	0	+
y						

Hàm số y nghịch biến trên một khoảng có độ dài đúng bằng 3 khi và chỉ khi $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| = 3$.

Ta có: $|x_1 - x_2| = 3 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 9$

$$\Leftrightarrow m^2 - 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \\ m = -1 \end{cases} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $S = \{9; -1\}$. Suy ra tổng tất cả các phần tử của S bằng 8.

----- HẾT -----

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TEST CUỐI BÀI

ĐỀ TEST CUỐI BÀI SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

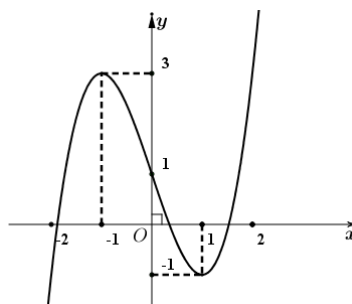
Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2;1]$ và thỏa mãn $f(-2)=1; f(0)=2; f(1)=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $2 < f(-1) < 3$. **B.** $1 < f(-1) < 2$. **C.** $f(-1) > 3$. **D.** $f(-1) < 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới:



Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1;3)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$.

Câu 5: Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

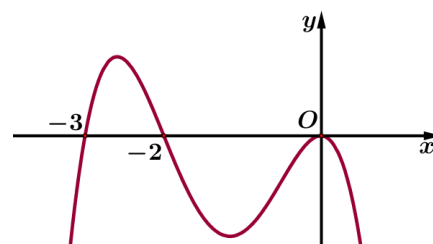
- A. $(-1; 0)$.
- B. $(-1; 1)$.
- C. $(0; 1)$.
- D. $(1; +\infty)$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- B. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- C. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- D. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .

Câu 7: Hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :
Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.



Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$.
- B. $(-\infty; -1)$.
- C. $(1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = x^3 + x^2 - 5x$.
- B. $y = \frac{x-5}{x+1}$.
- C. $y = \tan x$.
- D. $y = x^3 + x^2 + 5x$.

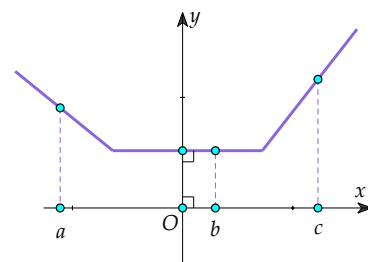
Câu 10: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?



- A. $f'(b) > 0$. B. $f'(0) > 0$.
C. $f'(a) < 0$. D. $f'(c) < 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu

4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.		
b)	Hàm số $f(x-1)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.		
c)	Hàm số $ f(x) $ nghịch biến trên $(2;3)$.		
d)	Hàm số $y = f(4-2x)$ đồng biến trên $(1;2)$.		

Câu 2: Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) < 0, \forall x \in (0;3)$.		
b)	$f(1) < f(2)$.		
c)	Hàm số $y = f(6-3x)$ đồng biến trên $(1;2)$.		
d)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-3;0)$.		

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx + \frac{1}{3}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = x^2 - 2mx + m$.		
b)	Với $m = 1$: $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.		
c)	Có 2 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.		
d)	Có 2 giá trị nguyên dương của tham số để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{2}$.		

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx+9}{x+m}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = \frac{m^2-9}{(x+m)^2}$.		
b)	Khi $m=4$ thì hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.		
c)	Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $m \in [-3;3]$.		
d)	Có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Xác định khoảng đồng biến của hàm số $y = x^2 - 2 \ln x$.

Kết quả:

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+12}{x+m}$ (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Kết quả:

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x^2-2x+2)$.

Kết quả:

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên $[-100;100]$ để hàm số $y = \frac{\sin x + m - 2}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

Kết quả:

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025;2025]$ để hàm số $y = \ln(x^2+1) - mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Kết quả:

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2mx + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$?

Kết quả:

----- HẾT -----

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TEST CUỐI BÀI

ĐỀ TEST CUỐI BÀI SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$	-1	0	2	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

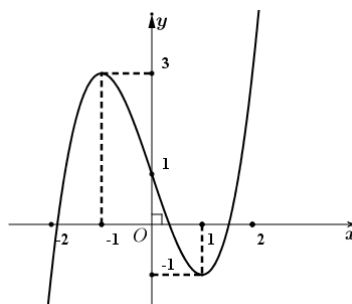
Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. **D.** Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2;1]$ và thỏa mãn $f(-2)=1; f(0)=2; f(1)=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $2 < f(-1) < 3$. **B.** $1 < f(-1) < 2$. **C.** $f(-1) > 3$. **D.** $f(-1) < 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới:



Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.** $(-1;3)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(1;+\infty)$. **D.** $(-1;0)$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$.

Câu 5: Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

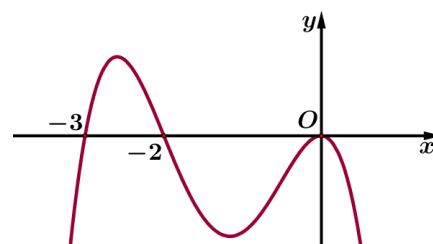
- A. $(-1; 0)$.
- B. $(-1; 1)$.
- C. $(0; 1)$.
- D. $(1; +\infty)$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- B. Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- C. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- D. Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .

Câu 7: Hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :
Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.



Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$.
- B. $(-\infty; -1)$.
- C. $(1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; +\infty)$.

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = x^3 + x^2 - 5x$.
- B. $y = \frac{x-5}{x+1}$.
- C. $y = \tan x$.
- D. $y = x^3 + x^2 + 5x$.

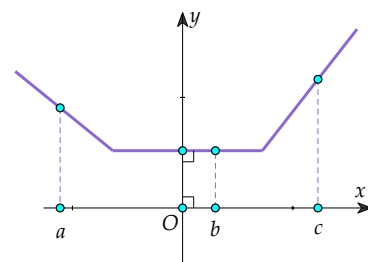
Câu 10: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?



- A. $f'(b) > 0$. B. $f'(0) > 0$.
C. $f'(a) < 0$. D. $f'(c) < 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu

4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.		
b)	Hàm số $f(x-1)$ nghịch biến trên $(-1;1)$.		
c)	Hàm số $ f(x) $ nghịch biến trên $(2;3)$.		
d)	Hàm số $y = f(4-2x)$ đồng biến trên $(1;2)$.		

Câu 2: Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) < 0, \forall x \in (0;3)$.		
b)	$f(1) < f(2)$.		
c)	Hàm số $y = f(6-3x)$ đồng biến trên $(1;2)$.		
d)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-3;0)$.		

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx + \frac{1}{3}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = x^2 - 2mx + m$.		
b)	Với $m = 1$: $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.		
c)	Có 2 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.		
d)	Có 2 giá trị nguyên dương của tham số để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{2}$.		

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx+9}{x+m}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = \frac{m^2-9}{(x+m)^2}$.		
b)	Khi $m=4$ thì hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.		
c)	Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $m \in [-3;3]$.		
d)	Có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1;+\infty)$.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Xác định khoảng đồng biến của hàm số $y = x^2 - 2 \ln x$.

Kết quả:

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+12}{x+m}$ (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$?

Kết quả:

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x^2-2x+2)$.

Kết quả:

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên $[-100;100]$ để hàm số $y = \frac{\sin x + m - 2}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

Kết quả:

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025;2025]$ để hàm số $y = \ln(x^2+1) - mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Kết quả:

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2mx + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$?

Kết quả:

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau:

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	$\parallel$	$-$	0	$+$	

Khẳng định nào dưới đây đúng?

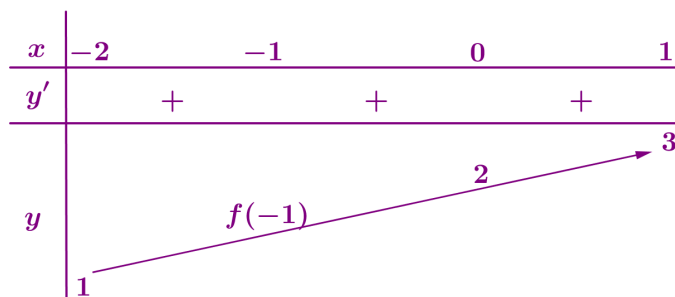
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2;0)$. B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;2)$. D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$.

Lời giải

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ đồng biến trên đoạn $[-2;1]$ và thỏa mãn $f(-2)=1; f(0)=2; f(1)=3$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $2 < f(-1) < 3$. B. $1 < f(-1) < 2$. C. $f(-1) > 3$. D. $f(-1) < 1$.

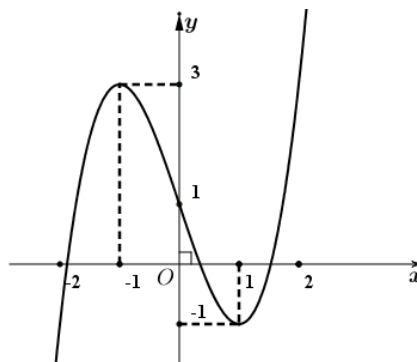
Lời giải



Ta có bảng biến thiên của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[-2;1]$ như trên

Từ đó ta thấy $1 < f(-1) < 2$.

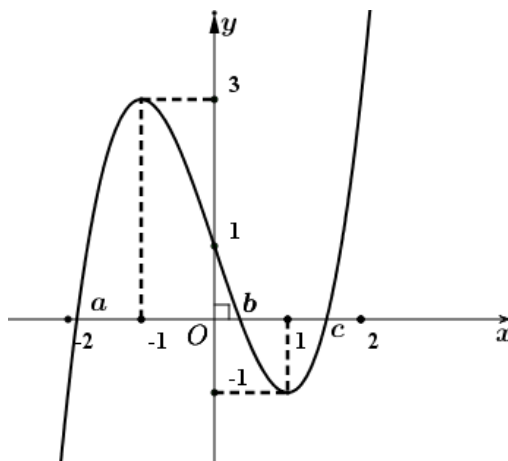
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị hàm số $y = f'(x)$ như hình bên dưới:



Hàm số đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1;3)$. B. $(0;2)$. C. $(1;+\infty)$. D. $(-1;0)$.

Lời giải



Từ đồ thị suy ra $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (a; b) \cup (c; +\infty)$ với $a < -1; b \in (0; 1); c \in (1; 2)$.

Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-1; 0)$.

Lời giải

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) > 0, \forall x \in (a; b)$.
- B.** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a; b)$.
- C.** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) < 0, \forall x \in (a; b)$.
- D.** Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$ nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a; b)$.

Lời giải

Câu 5: Hàm số $y = x^4 - 2x^2$ nghịch biến trên khoảng nào sau đây ?

- A.** $(-1; 0)$.
- B.** $(-1; 1)$.
- C.** $(0; 1)$.
- D.** $(1; +\infty)$.

Lời giải

Tập xác định : $D = \mathbb{R}$; $y' = 4x^3 - 4x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1		0	1		$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$
		-1			-1			

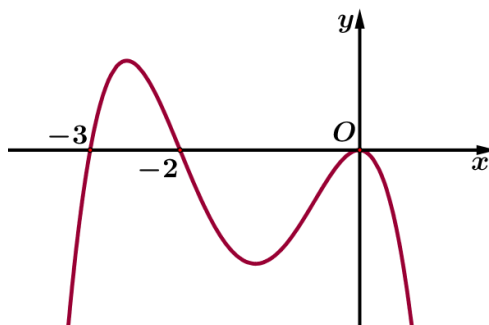
Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$ và $(0; 1)$.

Câu 6: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên khoảng K . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** Nếu hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng K thì $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$.
- B.** Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- C.** Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ thì hàm số $f(x)$ đồng biến trên K .
- D.** Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in K$ và $f'(x) = 0$ chỉ tại một số hữu hạn điểm thì hàm số đồng biến trên K .

Lời giải

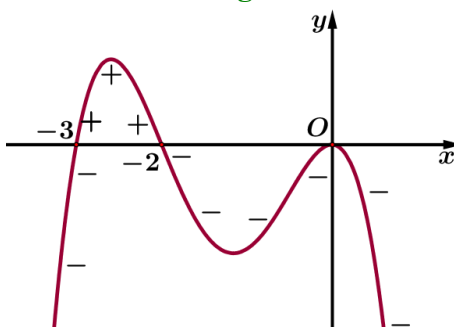
Câu 7: Hàm số $y = f(x)$ xác định, có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới :



Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-3; -2)$.
- B. Hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.**
- C. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; 0)$.

Lời giải



Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ ta có, hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Câu 8: Cho hàm số $y = x^3 - 3x$. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$.**
- B. $(-\infty; -1)$.
- C. $(1; +\infty)$.
- D. $(-\infty; +\infty)$.

Lời giải

Ta có $\forall x \in \mathbb{R}, y' = 3x^2 - 3 \Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$.

Vậy hàm số nghịch biến trên $(-1; 1)$.

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên tập xác định của nó?

- A. $y = x^3 + x^2 - 5x$.
- B. $y = \frac{x-5}{x+1}$.
- C. $y = \tan x$.
- D. $y = x^3 + x^2 + 5x$.**

Lời giải

Hàm số $y = x^3 + x^2 + 5x$ có $y' = 3x^2 + 2x + 5 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên nó đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Câu 10: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 1}$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.
- B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.**
- C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.
- D. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{2x}{\sqrt{2x^2 + 1}}$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$ và đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

Câu 11: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = -x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

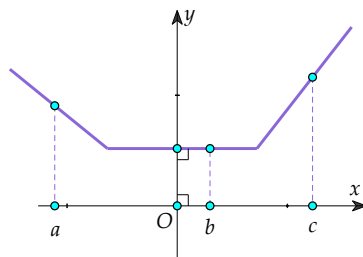
- A. Hàm số đã cho nghịch biến trên $\mathbb{R}$.
- B. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- C. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.**
- D. Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty; -1)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = -x + 1 > 0 \Leftrightarrow x < 1$.

Suy ra hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Câu 12: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình bên dưới. Trong các khẳng định dưới đây, khẳng định nào đúng?



- A. $f'(b) > 0$.
- B. $f'(0) > 0$.
- C. $f'(a) < 0$.**
- D. $f'(c) < 0$.

Lời giải:

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến trên khoảng K và $a \in K$ nên $f'(a) < 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0; 2)$.		
b)	Hàm số $f(x - 1)$ nghịch biến trên $(-1; 1)$.		
c)	Hàm số $ f(x) $ nghịch biến trên $(2; 3)$.		
d)	Hàm số $y = f(4 - 2x)$ đồng biến trên $(1; 2)$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

a) Ta có: $f'(x) = 3x^2 - 6x$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

BBT:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		0		-4		$+\infty$

Dựa vào BBT, hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(0;2)$.

b) Cách 1:

Ta có: $y' = f'(x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x-1 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Vậy hàm số $f(x-1)$ nghịch biến trên $(1;3)$.

Cách 2: Tịnh tiến đồ thị $f(x)$ *sang phải 1 đơn vị*.

c) Sử dụng phép biến đổi đồ thị. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị $y = |f(x)|$ bằng cách:

+) Giữ nguyên phần đồ thị $y = f(x)$ ứng với $y \geq 0$, bỏ phần đồ thị $y = f(x)$ ứng với $y < 0$.

+) Lấy đối xứng phần đồ thị bị bỏ của đồ thị $y = f(x)$ qua trục hoành.

Lúc đó, BBT của $y = |f(x)|$ như sau:

x	$-\infty$	0	2	3	$+\infty$				
y'		-	0	+	0	-	0	+	
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Dựa vào BBT, hàm số $y = |f(x)|$ nghịch biến trên $(2;3)$.

d) Cách 1:

Ta có: $y' = -2f'(4-2x) > 0 \Leftrightarrow f'(4-2x) < 0 \Leftrightarrow 0 < 4-2x < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Vậy hàm số $y = f(4-2x)$ đồng biến trên $(1;2)$.

Cách 2: Giải nhanh:

Ta có: $\begin{cases} 4-2x=0 \longrightarrow x=2 \\ 4-2x=2 \longrightarrow x=1 \end{cases}$.

BBT:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(4-2x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$-\infty$

Vậy hàm số $y = f(4-2x)$ đồng biến trên $(1;2)$.

Câu 2: Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	0	$+\infty$	

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) < 0, \forall x \in (0;3).$		
b)	$f(1) < f(2).$		
c)	Hàm số $y = f(6-3x)$ đồng biến trên $(1;2).$		
d)	Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên $(-3;0).$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

b) Ta có: $\begin{cases} 1 < 2 \\ 1;2 \in (0;3) \end{cases} \longrightarrow f(1) > f(2).$

c) **Cách 1:**

Ta có: $y' = -3f'(6-3x) > 0 \Leftrightarrow f'(6-3x) < 0 \Leftrightarrow 0 < 6-3x < 3 \Leftrightarrow 1 < x < 2.$

Vậy $y = f(6-3x)$ đồng biến trên $(1;2).$

Cách 2: Giải nhanh:

Ta có: $\begin{cases} 6-3x=0 \longrightarrow x=2 \\ 6-3x=3 \longrightarrow x=1 \end{cases}.$

BBT:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(6-3x)$	$+\infty$			$-\infty$

Vậy $y = f(6-3x)$ đồng biến trên $(1;2).$

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + mx + \frac{1}{3}.$

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = x^2 - 2mx + m.$		
b)	Với $m = 1: f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}.$		

c)	Có 2 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.		
d)	Có 2 giá trị nguyên dương của tham số để hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên đoạn có độ dài bằng $2\sqrt{2}$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) b) $f'(x) = x^2 - 2mx + m \xrightarrow{m=1} f'(x) = x^2 - 2x + 1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

c) Ta có: $f'(x) = x^2 - 2mx + m$.

Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2 - 4m \leq 0$

$\Leftrightarrow m \in [0; 1] \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 0; m = 1$.

d) Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0, \forall x \in [x_1; x_2]$ với $x_2 - x_1 = 2\sqrt{2}$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ x_2 - x_1 = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4m > 0 \\ (x_2 - x_1)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ (x_2 + x_1)^2 - 4x_1x_2 = 8 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty) \\ 4m^2 - 4m - 8 = 0 \end{cases} \longrightarrow m = -1; m = 2$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = \frac{mx+9}{x+m}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$f'(x) = \frac{m^2 - 9}{(x+m)^2}$.		
b)	Khi $m = 4$ thì hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.		
c)	Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó khi và chỉ khi $m \in [-3; 3]$.		
d)	Có 4 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x)$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty)$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng

a) b) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $f'(x) = \frac{m^2 - 9}{(x+m)^2}$.

Khi $m = 4: f'(x) = \frac{7}{(x+4)^2} > 0, \forall x \neq -4$ thì hàm số đồng biến trên từng khoảng xác định của nó.

c) Hàm số nghịch biến trên từng khoảng xác định của nó

$$\Leftrightarrow f'(x) < 0, \forall x \in D \Leftrightarrow m^2 - 9 < 0 \Leftrightarrow m \in (-3; 3).$$

d) Để hàm số $y = \frac{mx+9}{x+m}$ nghịch biến trên khoảng $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' = \frac{m^2-9}{(x+m)^2} < 0, \forall x \in (1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 9 < 0 \\ -m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ -m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < m < 3 \\ m \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 3.$$

Do $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 4 giá trị nguyên của tham số m .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Xác định khoảng đồng biến của hàm số $y = x^2 - 2 \ln x$.

Kết quả: (1; +\infty)

Lời giải

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

Ta có $y' = 2x - \frac{2}{x} = 2\left(\frac{x^2-1}{x}\right) > 0 \xrightarrow{x \in D} x \in (1; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = \frac{2x+12}{x+m}$ (m là tham số). Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty)$?

Kết quả: 8

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-m\}$.

Ta có: $y' = \frac{2m-12}{(x+m)^2}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' < 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m-12 < 0 \\ -m \notin (2; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 6 \\ m \geq -2 \end{cases}.$$

Vì m nguyên nên ta có được $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Vậy có tất cả 8 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 3: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)^2(x^2-2x), \forall x \in \mathbb{R}$. Xác định các khoảng đồng biến của hàm số $g(x) = f(x^2-2x+2)$.

Kết quả: (0;1);(2;+\infty)

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $g'(x) = (2x-2)f'(x^2-2x+2) = (2x-2)(x^2-2x+2-1)^2(x^2-2x+2)(x^2-2x+2-2)$
 $= (2x-2)(x^2-2x+1)^2(x^2-2x+2)x(x-2)$

Phương trình có các nghiệm bội lẻ là: $x \in \{0; 1; 2\}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$g'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$					$+\infty$	

Vậy hàm số $y = g(x)$ đồng biến trên $(0;1);(2;+\infty)$.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên $[-100;100]$ để hàm số $y = \frac{\sin x + m - 2}{\sin x - m}$ đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right)$?

Kết quả:

Lời giải

Hàm số xác định khi $\sin x \neq m$.

Ta có: $\forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$.

Ta có: $y' = \frac{2-2m}{(\sin x - m)^2} \cdot (\sin x)' = \frac{2-2m}{(\sin x - m)^2} \cdot \cos x$

Hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-2m > 0 \\ m \notin \left(0; \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Rightarrow m \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right)$.

Do $\begin{cases} m \in (-\infty; 0] \cup \left[\frac{1}{2}; 1\right) \\ m \in [-100; 100], m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-100; -99; \dots; -1; 0\}$.

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2025; 2025]$ để hàm số $y = \ln(x^2 + 1) - mx + 2$ đồng biến trên $\mathbb{R}$?

Kết quả:

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{2x}{x^2 + 1} - m = \frac{-mx^2 + 2x - m}{x^2 + 1}$.

Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -mx^2 + 2x - m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -m > 0 \\ \Delta' = 1 - m^2 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases} \longrightarrow m \leq -1$.

Vì $m \in [-2025; 2025]$ nên $m \in \{-2025; -2024; \dots; -2; -1\}$.

Vậy có 2025 giá trị nguyên m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-10;10]$ để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 2mx + 4$ nghịch biến trên khoảng $(-2;3)$?

Kết quả:

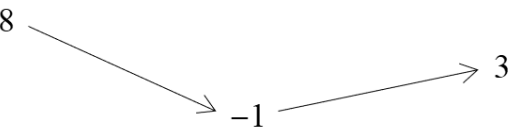
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-2;3) \Leftrightarrow y' = x^2 - 2x - 2m \leq 0, \forall x \in (-2;3)$

$g(x) = x^2 - 2x \leq 2m, \forall x \in (-2;3), (*)$. Ta có: $g'(x) = 2x - 2$.

Bảng biến thiên:

x	-2	1	3
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	8		

Từ bảng biến thiên và $(*)$, ta suy ra $2m \geq 8 \Leftrightarrow m \geq 4$. Vậy $m \in \{4;5;6;7;8;9;10\}$

----- **HẾT** -----

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TEST CUỐI BÀI

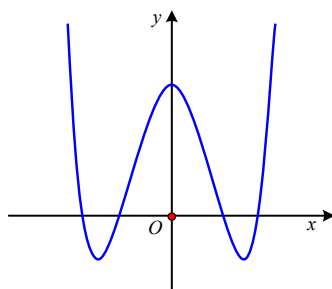
ĐỀ TEST CUỐI BÀI SỐ 03

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) > 0$ hoặc $f''(x_0) < 0$.
- B. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

Câu 2: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



- A. $y = x^4 + 4x^2 + 3$.
- B. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$.
- C. $y = x^4 - 4x^2 + 3$.
- D. $y = x^3 - 4x^2 - 3$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-
y	$-\infty$	2	-1	-1	3	2

Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 0.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ -2 $+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A.** $x = 2$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 1$.

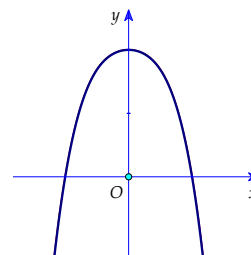
Câu 5: Điểm cực đại của hàm số $y = -x^3 + 3x$ là

- A.** 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a < 0, b \geq 0, c > 0$.
B. $a > 0, b \geq 0, c < 0$.
C. $a < 0, b \leq 0, c > 0$.
D. $a < 0, b \leq 0, c \geq 0$.



Câu 7: Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

- A.** $y = x^4 + 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C.** $y = -x^4 - 2x^2 - 1$. **D.** $y = 2x^4 + 4x^2 + 1$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 3x)(x^2 - 9)(x^2 + 4x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 9: Cho hàm số $y = x - \sin 2x + 3$. Chọn kết luận đúng

- A.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{3}$ **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{\pi}{6}$
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{6}$ **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{6}$

Câu 10: Biết $M(0;2), N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A.** $y(-2) = 2$. **B.** $y(-2) = 22$. **C.** $y(-2) = 6$. **D.** $y(-2) = -18$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ không có cực trị.

- A.** $m \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$. **B.** $m \in (-6; 0)$. **C.** $m \in [-6; 0)$. **D.** $m \in [-6; 0]$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x}{2^x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đã cho có các điểm cực đại và điểm cực tiểu.
B. Hàm số đã cho có điểm cực đại.
C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu.
D. Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như sau:

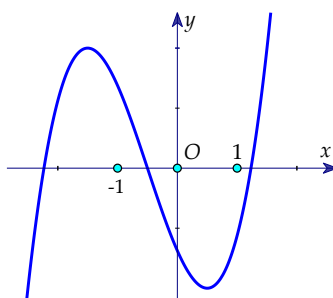
x	$-\infty$	0	3	$+\infty$				
y'		+	0	-	0	+		
y	$-\infty$			4		0		$+\infty$

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.		
b)	Cực đại hàm số bằng 0.		
c)	Điểm $A(0;4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.		
d)	Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $4x + 3y - 12 = 0$.		

Câu 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.		
b)	Giá trị cực đại của hàm số bằng 1.		
c)	Điểm $A(1;0)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.		
d)	Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.		

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $(a; b; c; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
b)	$a > 0$.		
c)	$b < 0$.		
d)	$a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.		

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.		
b)	Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.		
c)	Hàm số $y = f(2x + 4)$ đạt cực đại tại $x = 0$.		
d)	Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ có ba điểm cực trị.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có đồ thị (C) . Gọi h và h_1 lần lượt là khoảng cách từ các điểm cực đại và cực tiểu của (C) đến trục hoành. Tính tỉ số $\frac{h}{h_1}$.

Kết quả:

Câu 2: Giả sử các số a, b, c thỏa mãn đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua $(0;1)$ và có một điểm cực trị có tọa độ $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T = 4a + b + c$.

Kết quả:

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 + 3(m^2 - m + 2)x^2 + 3(3m^2 + 1)x + 2022m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$?

Kết quả:

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(f(x))$.

Kết quả:

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$?

Kết quả:

Câu 6: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Kết quả:

----- HẾT -----

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TEST CUỐI BÀI

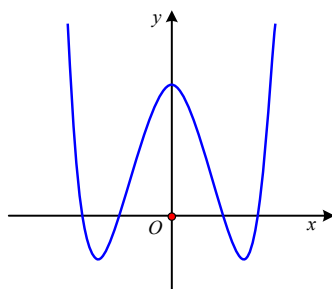
ĐỀ TEST CUỐI BÀI SỐ 03

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) > 0$ hoặc $f''(x_0) < 0$.
- B. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

Câu 2: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



- A. $y = x^4 + 4x^2 + 3$.
- B. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$.
- C. $y = x^4 - 4x^2 + 3$.
- D. $y = x^3 - 4x^2 - 3$.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-
y	$-\infty$	2	-1	-1	3	2

Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1.
- B. 3.
- C. 2.
- D. 0.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$				2		$-\infty$

$\swarrow$ $\nearrow$ $\searrow$
 $-\infty$ -2 $+\infty$

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A.** $x = 2$. **B.** $x = -2$. **C.** $x = 3$. **D.** $x = 1$.

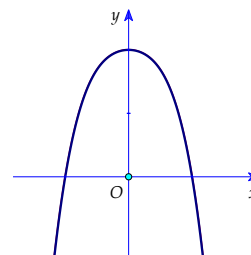
Câu 5: Điểm cực đại của hàm số $y = -x^3 + 3x$ là

- A.** 1. **B.** -1. **C.** -2. **D.** 2.

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** $a < 0, b \geq 0, c > 0$.
B. $a > 0, b \geq 0, c < 0$.
C. $a < 0, b \leq 0, c > 0$.
D. $a < 0, b \leq 0, c \geq 0$.



Câu 7: Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

- A.** $y = x^4 + 2x^2 - 1$. **B.** $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C.** $y = -x^4 - 2x^2 - 1$. **D.** $y = 2x^4 + 4x^2 + 1$.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 3x)(x^2 - 9)(x^2 + 4x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

- A.** 3. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 9: Cho hàm số $y = x - \sin 2x + 3$. Chọn kết luận đúng

- A.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{3}$ **B.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{\pi}{6}$
C. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{6}$ **D.** Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{6}$

Câu 10: Biết $M(0;2), N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A.** $y(-2) = 2$. **B.** $y(-2) = 22$. **C.** $y(-2) = 6$. **D.** $y(-2) = -18$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ **không** có cực trị.

- A.** $m \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$. **B.** $m \in (-6; 0)$. **C.** $m \in [-6; 0)$. **D.** $m \in [-6; 0]$.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x}{2^x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đã cho có các điểm cực đại và điểm cực tiểu.
B. Hàm số đã cho có điểm cực đại.
C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu.
D. Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như sau:

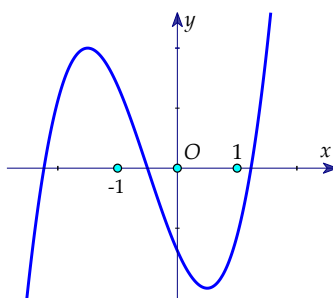
x	$-\infty$	0	3	$+\infty$			
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		4		0		$+\infty$

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.		
b)	Cực đại hàm số bằng 0.		
c)	Điểm $A(0;4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.		
d)	Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $4x + 3y - 12 = 0$.		

Câu 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.		
b)	Giá trị cực đại của hàm số bằng 1.		
c)	Điểm $A(1;0)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.		
d)	Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.		

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a; b; c; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
b)	$a > 0$.		
c)	$b < 0$.		
d)	$a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.		

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.		
b)	Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.		
c)	Hàm số $y = f(2x + 4)$ đạt cực đại tại $x = 0$.		
d)	Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ có ba điểm cực trị.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có đồ thị (C) . Gọi h và h_1 lần lượt là khoảng cách từ các điểm cực đại và cực tiểu của (C) đến trục hoành. Tính tỉ số $\frac{h}{h_1}$.

Kết quả:

Câu 2: Giả sử các số a, b, c thỏa mãn đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua $(0; 1)$ và có một điểm cực trị có tọa độ $(-2; 0)$. Tính giá trị biểu thức $T = 4a + b + c$.

Kết quả:

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 + 3(m^2 - m + 2)x^2 + 3(3m^2 + 1)x + 2022m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$?

Kết quả:

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$	-	0	+	0	-		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(f(x))$.

Kết quả:

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$?

Kết quả:

Câu 6: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Kết quả:

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f''(x_0) > 0$ hoặc $f''(x_0) < 0$.
- B. Nếu hàm số đạt cực trị tại x_0 thì hàm số không có đạo hàm tại x_0 hoặc $f'(x_0) = 0$.**
- C. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì $f'(x_0) = 0$.
- D. Hàm số $y = f(x)$ đạt cực trị tại x_0 thì nó không có đạo hàm tại x_0 .

Lời giải

+ Khẳng định A sai.

Thật vậy, xét hàm số $y = x^4$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Ta có $y' = 4x^3$; $y'' = 12x^2$. Suy ra $\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$ nhưng

$x = 0$ vẫn là điểm cực tiểu của hàm số vì $x = 0$ là nghiệm bội lẻ của phương trình $y' = 0$ và qua $x = 0$ ta có y' đổi dấu từ (+) sang (-)

Để khẳng định A đúng thì ta cần phải xét thêm yếu tố là hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0 .

+ Khẳng định C sai.

Thật vậy, xét hàm số $y = |x| = \sqrt{x^2}$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Có: $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|} \Rightarrow$ hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-		+
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Qua bảng biến thiên ta nhận thấy hàm số $y = |x|$ vẫn đạt cực trị tại $x = 0$ dù tại đó $y'(0)$ không xác định.

+ Khẳng định D sai.

Thật vậy, xét hàm số $y = x^2$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x \Leftrightarrow y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$

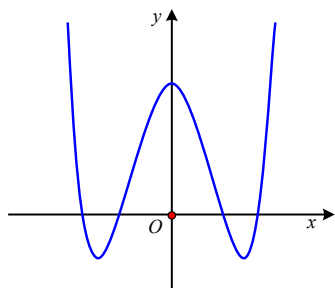
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y'	-	0	+
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Quan sát bảng biến thiên ta nhận thấy hàm số đạt cực trị tại $x = 0$ và $y'(0)$ xác định.

+ Khẳng định B đúng vì qua hai ví dụ đã xét ở các khẳng định C và D ta nhận thấy hàm số $y = f(x)$ có thể đạt cực trị tại điểm x_0 mà tại đó $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định.

Câu 2: Đường cong ở hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây?



- A. $y = x^4 + 4x^2 + 3$. B. $y = -x^4 + 4x^2 + 3$. C. $y = x^4 - 4x^2 + 3$. D. $y = x^3 - 4x^2 - 3$.

Lời giải

Quan sát đồ thị hàm số ta thấy đây là đồ thị của hàm số bậc bốn: $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) và $a > 0$ nên loại B và D. Mặt khác đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên $a.b < 0$. Do đó loại A.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	+	0	-	+	0	-
y	$-\infty$	2	-1	-1	3	2

Hỏi hàm số có bao nhiêu điểm cực trị?

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.

Lời giải

Hàm số có y' đổi dấu từ dương sang âm qua $x = \pm 1$ và $y = f(x)$ xác định tại $x = \pm 1 \Rightarrow$ hàm số có hai điểm cực đại $x = \pm 1$.

Nhận xét: tại $x = 0$ thì y' đổi dấu từ âm sang dương, nhưng $y = f(x)$ không xác định tại $x = 0$ nên $x = 0$ không là điểm cực tiểu của hàm số.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$				2	
		</				

Hàm số đã cho đạt cực đại tại điểm nào dưới đây?

- A. $x = 2$. B. $x = -2$. C. $x = 3$. D. $x = 1$.

Lời giải

Câu 5: Điểm cực đại của hàm số $y = -x^3 + 3x$ là

- A. 1. B. -1. C. -2. D. 2.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -3x^2 + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -1 \Rightarrow y = -2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$				2		
			-2				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, điểm cực đại của hàm số là $x = 1$.

Câu 6: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên.

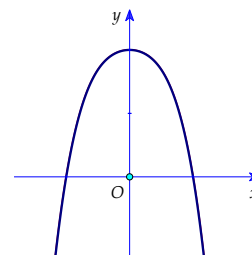
Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. $a < 0, b \geq 0, c > 0$.

B. $a > 0, b \geq 0, c < 0$.

C. $a < 0, b \leq 0, c > 0$.

D. $a < 0, b \leq 0, c \geq 0$.



Lời giải

+ Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty \Rightarrow a < 0$ và $(C) \cap Oy = (0; c) \Rightarrow c > 0$. Mặt khác hàm số có duy nhất một cực trị nên suy ra $a.b \geq 0$, do $a < 0 \Rightarrow b \leq 0$.

Câu 7: Hàm số nào sau đây có ba điểm cực trị?

A. $y = x^4 + 2x^2 - 1$.

B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$.

C. $y = -x^4 - 2x^2 - 1$.

D. $y = 2x^4 + 4x^2 + 1$.

Lời giải

Ta có tính chất sau: hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $a.b < 0$.

Khi đó ta thấy ngay hàm số $y = x^4 - 2x^2 - 1$ có ba điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2(x^2 - 3x)(x^2 - 9)(x^2 + 4x + 3), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $f(x)$ là

A. 3.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Ta có $f'(x) = x^2(x^2 - 3x)(x^2 - 9)(x^2 + 4x + 3) = x^3(x - 3)^2(x + 3)^2(x + 1)$.

Ta thấy chỉ có $x = 0$ và $x = 1$ là các nghiệm bội lẻ nên qua đó $f'(x)$ có sự đổi dấu.

vậy hàm số đã cho có hai điểm cực trị.

Câu 9: Cho hàm số $y = x - \sin 2x + 3$. Chọn kết luận đúng

A. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{3}$

B. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = -\frac{\pi}{6}$

C. Hàm số đạt cực đại tại $x = \frac{\pi}{6}$

D. Hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{6}$

Lời giải

Ta có: $y' = 1 - 2\cos 2x$; $y' = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lập bảng xét dấu của y' trên $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$		
y'		+	0	-	0	+

Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = \frac{\pi}{6}$.

Câu 10: Biết $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tính giá trị của hàm số tại $x = -2$.

- A.** $y(-2) = 2$. **B.** $y(-2) = 22$. **C.** $y(-2) = 6$. **D.** $y(-2) = -18$.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$. Vì $M(0;2)$, $N(2;-2)$ là các điểm cực trị của đồ thị hàm số nên:

$$\begin{cases} y'(0) = 0 \\ y'(2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \end{cases} \quad (1) \quad \text{và} \quad \begin{cases} y(0) = 2 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 2 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \end{cases} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra: $a = 1$; $b = -3$; $c = 0$; $d = 2 \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 2 \Rightarrow y(-2) = -18$.

Câu 11: Tìm tất cả các giá trị của tham số thực m để hàm số $y = mx^3 - 2mx^2 + (m-2)x + 1$ **không** có cực trị.

- A.** $m \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$. **B.** $m \in (-6; 0)$.
C. $m \in [-6; 0)$. **D.** $m \in [-6; 0]$.

Lời giải

Ta có $y' = 3mx^2 - 4mx + m - 2$

TH 1: Nếu $m = 0$ thì $y' = -2$ nên hàm số không có cực trị.

TH 2: Nếu $m \neq 0$ thì $y' = 3mx^2 - 4mx + m - 2$ là tam thức bậc hai.

Hàm số không có cực trị $\Leftrightarrow \Delta = (2m)^2 - 3m(m-2) \leq 0 \Leftrightarrow m^2 + 6m \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-6; 0]$.

Kết hợp các trường hợp ta có $m \in [-6; 0]$ thì hàm số không có cực trị.

Câu 12: Cho hàm số $y = \frac{x}{2^x}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Hàm số đã cho có các điểm cực đại và điểm cực tiểu.
B. Hàm số đã cho có điểm cực đại.
C. Hàm số đã cho có điểm cực tiểu.
D. Hàm số đã cho không có điểm cực trị.

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = \frac{2^x - 2^x \cdot x \cdot \ln 2}{(2^x)^2} = \frac{2^x (1 - x \ln 2)}{(2^x)^2} = \frac{(1 - x \ln 2)}{2^x}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow 1 - x \cdot \ln 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\ln 2}$.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	$\frac{1}{\ln 2}$	$+\infty$
y'	+	0	-

Từ bảng xét dấu đạo hàm ta suy ra hàm số chỉ có một điểm cực đại.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số bậc ba có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	$\nearrow$ 4	$\searrow$ 0	$\nearrow$ $+\infty$	

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.		
b)	Cực đại hàm số bằng 0.		
c)	Điểm $A(0;4)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.		
d)	Đường thẳng qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $4x + 3y - 12 = 0$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng

b) Cực đại hàm số bằng 4.

d) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị là $A(0;4)$ và $B(3;0)$.

$\longrightarrow AB: \frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1 \Leftrightarrow 4x + 3y - 12 = 0$.

Câu 2: Cho hàm số $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.		
b)	Giá trị cực đại của hàm số bằng 1.		

CHUYÊN ĐỀ I – ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

c)	Điểm $A(1;0)$ là điểm cực đại của đồ thị hàm số.		
d)	Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Ta có: $y' = 4x^3 - 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \longrightarrow y = 1 \\ x = 1 \longrightarrow y = 0 \\ x = -1 \longrightarrow y = 0 \end{cases}$.

BBT:

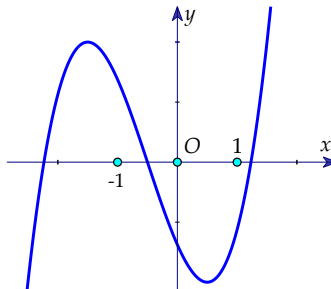
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$		0	1	0	$+\infty$

c) Điểm $A(1;0)$ là một điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.

d) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(1;0), B(-1;0), C(0;1)$.

Suy ra: $S_{ABC} = \frac{1}{2} |1 \cdot 2| = 1$.

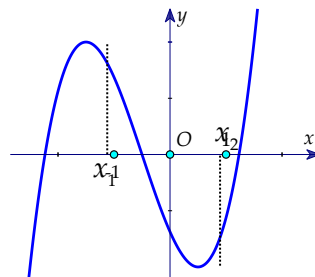
Câu 3: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d, (a; b; c; d \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số có hai điểm cực trị.		
b)	$a > 0$.		
c)	$b < 0$.		
d)	$a > 0, b < 0, c < 0, d > 0$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai



b) Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

c) d) Do đồ thị cắt Oy tại điểm $A(0; d) \rightarrow d < 0$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị, ta có:
$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \xrightarrow{a > 0} c < 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0 \end{cases}$$

Vậy $a > 0, b > 0, c < 0, d > 0$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x^2 - 4, \forall x \in \mathbb{R}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị.		
b)	Hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại $x = -2$.		
c)	Hàm số $y = f(2x + 4)$ đạt cực đại tại $x = 0$.		
d)	Hàm số $y = f(x^2 - 2)$ có ba điểm cực trị.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases}$.

BBT:

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y						$+\infty$

The diagram shows three arrows representing the behavior of y as x increases. The first arrow starts at $-\infty$ and points up and to the right towards -2 . The second arrow starts at -2 and points down and to the right towards 2 . The third arrow starts at 2 and points up and to the right towards $+\infty$.

c) Ta có: $y' = 2f'(2x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 4 = -2 \\ 2x + 4 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$.

BBT:

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

y	$-\infty$				$+\infty$
		$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

d) Ta có: $y' = 2xf'(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 2 = -2 \longrightarrow x = 0. \\ x^2 - 2 = 2 \longrightarrow x = \pm 2 \end{cases}$

BBT:

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 + 3$ có đồ thị (C) . Gọi h và h_1 lần lượt là khoảng cách từ các điểm cực đại và cực tiểu của (C) đến trục hoành. Tính tỉ số $\frac{h}{h_1}$.

Kết quả: $\frac{4}{3}$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x$; $y' = 0 \Rightarrow -4x^3 + 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \Rightarrow y = 4 \\ x = 0 \Rightarrow y = 3 \\ x = -1 \Rightarrow y = 4 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y			4		4			
	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	3	$\nearrow$	$\searrow$	$-\infty$

Vậy đồ thị hàm số đạt cực đại tại $A(-1;4), B(1;4)$; đạt cực tiểu tại $C(0;3)$.

Khi đó $h = 4; h_1 = 3$. Suy ra: $\frac{h}{h_1} = \frac{4}{3}$.

Câu 2: Giả sử các số a, b, c thỏa mãn đồ thị hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua $(0;1)$ và có một điểm cực trị có tọa độ $(-2;0)$. Tính giá trị biểu thức $T = 4a + b + c$.

Kết quả: 23

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 2ax + b$

Hàm số có cực trị $\Leftrightarrow \Delta_{y'} = a^2 - 3b > 0$.

Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $(0;1); (-2;0)$ nên $\begin{cases} c = 1 \\ -8 + 4a - 2b + c = 0 \end{cases}$

Hàm số đạt cực trị tại $x = -2$ nên $y'(2) = 0 \Leftrightarrow 12 - 4a + b = 0$.

$$\text{Vậy ta có hệ } \begin{cases} c = 1 \\ -8 + 4a - 2b + c = 0 \\ 12 - 4a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{17}{4} \\ b = 5 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow T = 4a + b + c = 23$$

Câu 3: Cho hàm số $y = x^3 + 3(m^2 - m + 2)x^2 + 3(3m^2 + 1)x + 2022m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số đạt cực tiểu tại $x = -2$?

Kết quả:

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 + 6(m^2 - m + 2)x + 3(3m^2 + 1) = 3[x^2 + 2(m^2 - m + 2)x + 3m^2 + 1]$;

và $y'' = 6x + 6(m^2 - m + 2)$.

Hàm số đã cho đạt cực tiểu tại $x = -2 \Leftrightarrow \begin{cases} y'(-2) = 0 \\ y''(-2) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 3 = 0 \\ 6m(m - 1) > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \\ m(m - 1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = 3.$$

Câu 4: Cho hàm số bậc ba $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
$f'(x)$		-	0	+	0	-	
$f(x)$	$+\infty$		-3		1		$-\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(f(x))$.

Kết quả:

Lời giải

Ta có: $y' = f'(f(x)) \cdot f'(x)$; $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(f(x)) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$.

+) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2$

+) $f'(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \text{ (1)} \\ f(x) = 2 \text{ (2)} \end{cases}$.

Phương trình (1) có 3 nghiệm đơn phân biệt, (2) có 1 nghiệm đơn và không trùng với nghiệm $x = 0, x = 2$ nên $y = f(f(x))$ có 6 điểm cực trị.

Câu 5: Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{2}{3}x^3 - mx^2 - 2(3m^2 - 1)x + \frac{2}{3}$ có hai điểm cực trị có hoành độ x_1, x_2 sao cho $x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1$?

Kết quả: 1

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 2x^2 - 2mx - 2(3m^2 - 1) = 2[x^2 - mx - (3m^2 - 1)]$.

Đồ thị hàm số đã cho có hai điểm cực trị $\Leftrightarrow x^2 - mx - (3m^2 - 1) = 0$ (*) có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 + 4(3m^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow 13m^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow m \in \left(-\infty; -\frac{2}{\sqrt{13}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{13}}; +\infty\right) (*)$$

Theo Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1x_2 = -(3m^2 - 1) \end{cases}$.

$$\text{Theo bài } x_1x_2 + 2(x_1 + x_2) = 1 \Leftrightarrow -3m^2 + 1 + 2m = 1 \Leftrightarrow 3m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \text{ (không thỏa (*))} \\ m = \frac{2}{3} \text{ (thỏa (*))} \end{cases}.$$

Kết luận: Có 1 giá trị tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 6: Tìm giá trị tham số m để đồ thị hàm số $y = x^4 - 2mx^2 + m - 1$ có ba điểm cực trị tạo thành một tam giác có diện tích bằng $4\sqrt{2}$.

Kết quả: $m = 2$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 4x^3 - 4mx = 4x(x^2 - m)$.

Hàm số có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow m > 0$ (*)

$$\text{Lúc đó: } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{m} \end{cases}.$$

Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số là: $A(0; m-1), B(-\sqrt{m}; -m^2 + m - 1), C(\sqrt{m}; -m^2 + m - 1)$

Gọi H là trung điểm của cạnh BC , ta có:

$$\begin{cases} AH = m^2 \\ BC = 2\sqrt{m} \end{cases} \longrightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}AH \cdot BC = m^2\sqrt{m} = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa (*))}.$$

----- HẾT -----

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TEST CUỐI BÀI

ĐỀ TEST CUỐI BÀI SỐ 04

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

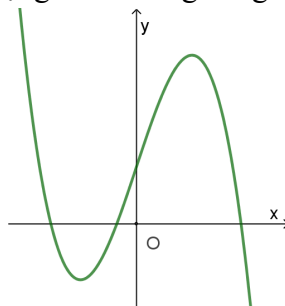
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $x = x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số thì hàm số có giá trị cực tiểu là $f(x_0)$.
 B. Nếu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì hàm số không có cực trị.
 C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0 .
 D. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x_0) = 0$.

Câu 3: Hàm số nào sau đây **không** có cực trị?

- A. $y = x^4 + 2x^2 - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$. D. $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

Câu 4: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình sau:



- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$. C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng

- A.** -1 . **B.** $f(1)$. **C.** $f(3)$. **D.** $f(4)$.

Câu 6: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 12x + 12$ là

- A.** $M(-2;28)$. **B.** $P(-2;2)$. **C.** $Q(2;-4)$. **D.** $x=-2$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$
y			2		2	

$-\infty \nearrow \quad \searrow 1 \quad \nearrow \quad \searrow -\infty$

Tính $P = a - 2b + 3c$.

- A.** $P = 3$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = 2$.

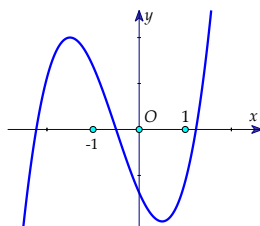
Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu?

- A.** $y = -x^4 + x^2 + 3$. **B.** $y = x^4 + x^2 + 3$. **C.** $y = -x^4 - x^2 + 3$. **D.** $y = x^4 - x^2 + 3$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu.

- A.** $m < \frac{3}{2}$. **B.** $m < -\frac{3}{2}$. **C.** $m \leq \frac{3}{2}$. **D.** $m > \frac{3}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a; b; c; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

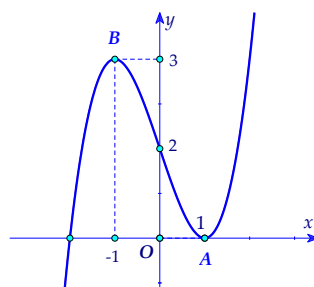
- A.** $a > 0; b > 0; c < 0; d < 0$. **B.** $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.
C. $a > 0; b < 0; c < 0; d < 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

Câu 12: Hàm số $y = \log_5(x^3 - 3x^2 + 4)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số bậc ba có đồ thị như sau:

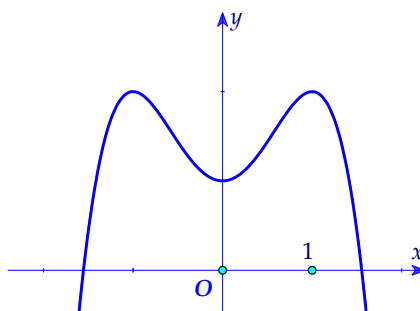


Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.		
b)	Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.		
c)	Cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 3.		
d)	Độ dài đoạn $AB = 2$.		

Câu 2: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.		
b)	Điểm $A(0; -3)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.		
c)	Đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại của đồ thị hàm số là $y = -2$.		
d)	Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.		

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a; b; c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số có ba điểm cực trị.		
b)	$a < 0$.		
c)	$b > 0$.		
d)	$a < 0, b > 0, c > 0$.		

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2 - 4x + m), \forall x \in \mathbb{R}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$m = 0$: Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.		
b)	$m = -5$: Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại.		
c)	Có 2 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.		
d)	Có 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x)$ có 7 điểm cực trị.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Tìm điểm cực đại của hàm số $y = x^2 \cdot e^x$.

Kết quả:

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$, tính $a + b$.

Kết quả:

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt giá trị cực đại tại $x = 1$.

Kết quả:

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		-3	2	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$.

Kết quả:

Câu 5: Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương là $(a; b) \cup (c; +\infty)$. Tính $2a + b - c$.

Kết quả:

Câu 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tính tích các phần tử của S .

Kết quả:

----- HẾT -----

CHƯƠNG

I

ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ

BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ



HỆ THỐNG BÀI TEST CUỐI BÀI

ĐỀ TEST CUỐI BÀI SỐ 04

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

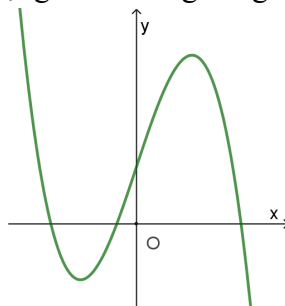
Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $x = x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số thì hàm số có giá trị cực tiểu là $f(x_0)$.
 B. Nếu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì hàm số không có cực trị.
 C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0 .
 D. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x_0) = 0$.

Câu 3: Hàm số nào sau đây **không** có cực trị?

- A. $y = x^4 + 2x^2 - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$. D. $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

Câu 4: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình sau:



- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. B. $y = -x^3 + 3x + 1$. C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	1	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng

- A.** -1 . **B.** $f(1)$. **C.** $f(3)$. **D.** $f(4)$.

Câu 6: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 12x + 12$ là

- A.** $M(-2;28)$. **B.** $P(-2;2)$. **C.** $Q(2;-4)$. **D.** $x=-2$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 3.

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'		$+$	0	$-$	0	$-$
y			2		2	

$-\infty$ 1 $-\infty$

Diagram illustrating the mapping of x to y for the function $y = x^2 - 2x$. The horizontal axis represents x with critical points at $-\infty$, -1 , 0 , 1 , and $+\infty$. The vertical axis represents y with critical points at $-\infty$, 1 , and 2 . The sign of y' is indicated above the x axis: $+$ for $x < -1$, 0 at $x = -1$, $-$ for $-1 < x < 1$, 0 at $x = 1$, and $+$ for $x > 1$. The corresponding y values are shown below the x axis: $-\infty$ at $x = -\infty$, 2 at $x = -1$, 1 at $x = 0$, 2 at $x = 1$, and $-\infty$ at $x = +\infty$. Arrows indicate the path of the function: from $-\infty$ to 2 , down to 1 , up to 2 , and down to $-\infty$.

Tính $P = a - 2b + 3c$.

- A.** $P = 3$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = -2$. **D.** $P = 2$.

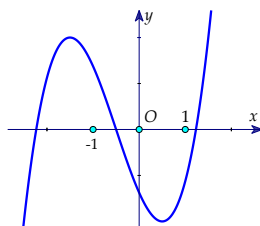
Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu?

- A.** $y = -x^4 + x^2 + 3$. **B.** $y = x^4 + x^2 + 3$. **C.** $y = -x^4 - x^2 + 3$. **D.** $y = x^4 - x^2 + 3$.

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu.

- A.** $m < \frac{3}{2}$. **B.** $m < -\frac{3}{2}$. **C.** $m \leq \frac{3}{2}$. **D.** $m > \frac{3}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a; b; c; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

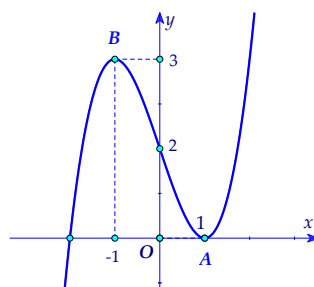
- A.** $a > 0; b > 0; c < 0; d < 0$. **B.** $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.
C. $a > 0; b < 0; c < 0; d < 0$. **D.** $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

Câu 12: Hàm số $y = \log_5(x^3 - 3x^2 + 4)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số bậc ba có đồ thị như sau:

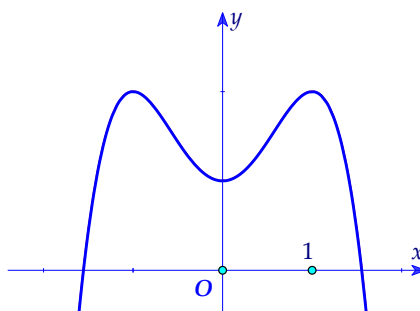


Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.		
b)	Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.		
c)	Cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 3.		
d)	Độ dài đoạn $AB = 2$.		

Câu 2: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.		
b)	Điểm $A(0; -3)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.		
c)	Đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại của đồ thị hàm số là $y = -2$.		
d)	Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.		

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$, ($a; b; c \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số có ba điểm cực trị.		
b)	$a < 0$.		
c)	$b > 0$.		
d)	$a < 0, b > 0, c > 0$.		

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2 - 4x + m), \forall x \in \mathbb{R}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$m = 0$: Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.		
b)	$m = -5$: Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại.		
c)	Có 2 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.		
d)	Có 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x)$ có 7 điểm cực trị.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Tìm điểm cực đại của hàm số $y = x^2 \cdot e^x$.

Kết quả:

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$, tính $a + b$.

Kết quả:

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt giá trị cực đại tại $x = 1$.

Kết quả:

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		-3	2	-1	

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$.

Kết quả:

Câu 5: Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương là $(a; b) \cup (c; +\infty)$. Tính $2a + b - c$.

Kết quả:

Câu 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tính tích các phần tử của S .

Kết quả:

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 1. B. 0. C. 3. **D. 2.**

Lời giải

Từ bảng biến thiên ta thấy hàm số đã cho đạt cực đại tại $x = 1$ và đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

- A. $x = x_0$ là điểm cực tiểu của hàm số thì hàm số có giá trị cực tiểu là $f(x_0)$.
 B. Nếu hàm số đơn điệu trên $\mathbb{R}$ thì hàm số không có cực trị.
 C. Hàm số đạt cực đại tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi đi qua x_0 .
D. Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x_0) = 0$.

Lời giải

Hàm số đạt cực trị tại điểm $x = x_0$ thì $f'(x_0) = 0$ hoặc $f'(x_0)$ không xác định.

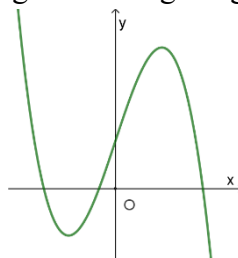
Câu 3: Hàm số nào sau đây **không** có cực trị?

- A. $y = x^4 + 2x^2 - 1$. B. $y = x^4 - 2x^2 - 1$. **C. $y = \frac{2x+1}{x-1}$.** D. $y = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, ($a; b; c; d \in \mathbb{R}$) không có cực trị.

Câu 4: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình sau:



- A. $y = -x^4 + 2x^2 + 1$. **B. $y = -x^3 + 3x + 1$.** C. $y = x^3 - 3x^2 + 1$. D. $y = x^4 - 2x^2 + 1$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị trên là của hàm số bậc ba (loại A và D).

Nhánh cuối cùng đi xuống nên $a < 0$, nên **Chọn B**

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ có bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		1		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$		0	$+$		0	$-$		0	$+$

Cực tiểu của hàm số $f(x)$ bằng

- A. -1 . B. $f(1)$. C. $f(3)$. D. $f(4)$.

Lời giải

Từ bảng xét dấu của đạo hàm $f'(x)$ ta có hàm số đạt cực tiểu tại $x = -1$ và $x = 4$.

Do đó các giá trị cực tiểu của hàm số là $f(-1)$ và $f(4)$.

Câu 6: Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số $y = x^3 - 12x + 12$ là

- A. $M(-2; 28)$. B. $P(-2; 2)$. C. $Q(2; -4)$. D. $x = -2$.

Lời giải

Đạo hàm $y' = 3x^2 - 12$. Ta có $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$, lại có $y(2) = -4$, $y(-2) = 28$.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$
y		28	-4		$+\infty$	

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số trên là $Q(2; -4)$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = x(x-1)^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

- A. 2. B. 0. C. 1. D. 3.

Lời giải

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số $f(x)$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$					$+\infty$

Vậy hàm số đã cho có một điểm cực trị.

Câu 8: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ ($a; b; c \in \mathbb{R}, a \neq 0$) có bảng biến thiên dưới đây:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y								
	$-\infty$	2	1	2	$-\infty$			

Tính $P = a - 2b + 3c$.

A. $P = 3$.

B. $P = 6$.

C. $P = -2$.

D. $P = 2$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y' = 4ax^3 + 2bx = 2x(2ax^2 + b), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 = -\frac{b}{2a} \end{cases}$$

Căn cứ vào bảng biến thiên ta thấy $a < 0$; $b > 0$, hàm đạt cực đại tại $x = \pm 1$ và $y(\pm 1) = 2$, hàm

$$\text{đạt cực tiểu tại } x = 0 \text{ và } y(0) = 1. \text{ Suy ra, } \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \\ c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \\ c = 1 \end{cases}. \text{ Do đó: } P = a - 2b + 3c = -2.$$

Câu 9: Trong các hàm số sau, hàm số nào có hai điểm cực đại và một điểm cực tiểu?

A. $y = -x^4 + x^2 + 3$.

B. $y = x^4 + x^2 + 3$.

C. $y = -x^4 - x^2 + 3$.

D. $y = x^4 - x^2 + 3$.

Lời giải

Ta có tính chất sau: hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c$ có ba điểm cực trị khi và chỉ khi $a.b < 0$.

Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị nên loại B, C.

Vì đồ thị hàm số có hai điểm cực đại nên hệ số x^4 có giá trị âm, **Chọn A**

Câu 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2mx + m$ có cực đại và cực tiểu.

A. $m < \frac{3}{2}$.

B. $m < -\frac{3}{2}$.

C. $m \leq \frac{3}{2}$.

D. $m > \frac{3}{2}$.

Lời giải

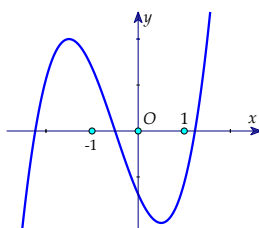
+ TXĐ: $D = \mathbb{R}$

+ $y' = 3x^2 - 6x + 2m$

+ Hàm số có cực đại và cực tiểu $\Leftrightarrow y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = 36 - 24m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{3}{2}.$$

Câu 11: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a; b; c; d \in \mathbb{R}$) có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định nào dưới đây đúng?

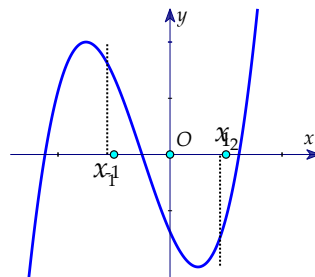
A. $a > 0; b > 0; c < 0; d < 0$.

B. $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

C. $a > 0; b < 0; c < 0; d < 0$.

D. $a > 0; b > 0; c > 0; d < 0$.

Lời giải



Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

Do đồ thị cắt Oy tại điểm $A(0; d) \rightarrow d < 0$.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

Dựa vào đồ thị, ta có:
$$\begin{cases} x_1 x_2 = \frac{c}{3a} < 0 \xrightarrow{a > 0} c < 0 \\ x_1 + x_2 = \frac{-2b}{3a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0 \end{cases}$$

Câu 12: Hàm số $y = \log_5(x^3 - 3x^2 + 4)$ có bao nhiêu điểm cực trị?

A. 2.

B. 1.

C. 3.

D. 0.

Lời giải

Điều kiện xác định: $x^3 - 3x^2 + 4 > 0 \Leftrightarrow (x-2)^2(x+1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x < 2 \\ x > 2 \end{cases}$.

Ta có: $y' = \frac{3x^2 - 6x}{(x^3 - 3x^2 + 4)\ln 5}$.

Cho $y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$

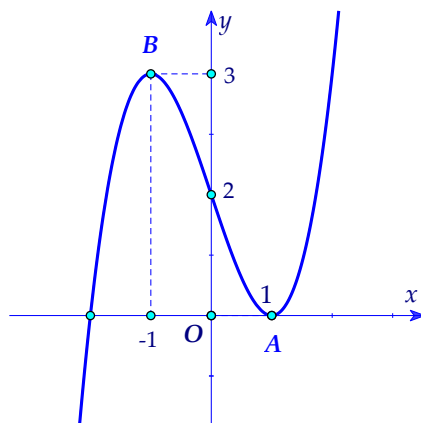
Bảng biến thiên:

x	-1		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y							

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số đã cho có 1 điểm cực trị.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai (điền dấu X vào ô chọn)

Câu 1: Cho hàm số bậc ba có đồ thị như sau:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có hai điểm cực trị.		
b)	Hàm số $f(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.		
c)	Cực đại của hàm số $f(x)$ bằng 3.		
d)	Độ dài đoạn $AB = 2$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

b) Cực đại hàm số bằng 4.

d) Đồ thị hàm số đã cho có 2 điểm cực trị là $A(1;0)$ và $B(-1;3)$.

→ $\overrightarrow{AB} = (-2;3)$. Vậy $AB = \sqrt{13}$.

Câu 2: Cho hàm số $y = -x^4 + 2x^2 - 3$.

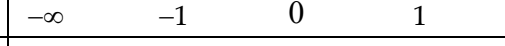
Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số $f(x)$ có ba điểm cực trị.		
b)	Điểm $A(0;-3)$ là điểm cực tiểu của đồ thị hàm số.		
c)	Đường thẳng đi qua 2 điểm cực đại của đồ thị hàm số là $y = -2$.		
d)	Ba điểm cực trị của đồ thị hàm số tạo thành một tam giác có diện tích bằng 1.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

Ta có: $y' = -4x^3 + 4x; y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow y = -3 \\ x = 1 \rightarrow y = -2 \\ x = -1 \rightarrow y = -2 \end{cases}$

BBT:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y								

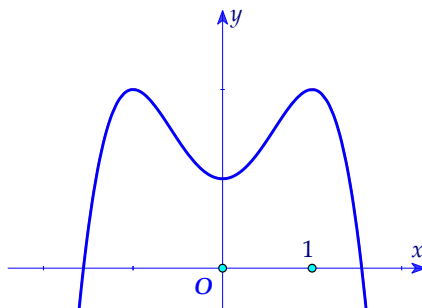
d) Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu là $B(-1;-2), C(1;-2)$.

Suy ra: $BC : y = -2$.

d) Đồ thị hàm số có ba điểm cực trị là $A(0; -3), B(-1; -2), C(1; -2)$.

Suy ra: $S_{ABC} = \frac{1}{2}|1.2| = 1$.

Câu 3: Cho hàm số $y = ax^4 + bx^2 + c, (a; b; c \in \mathbb{R})$ có đồ thị như hình vẽ bên dưới:



Khẳng định		Đúng	Sai
a)	Hàm số có ba điểm cực trị.		
b)	$a < 0$.		
c)	$b > 0$.		
d)	$a < 0, b > 0, c > 0$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng

b) Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = -\infty$ nên $a < 0$.

c) d) Do đồ thị cắt Oy tại điểm $A(0; c) \rightarrow c > 0$.

Do hàm số có 3 điểm cực trị nên $ab < 0 \xrightarrow{a < 0} b > 0$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x^2 - 4x + m), \forall x \in \mathbb{R}$.

Khẳng định		Đúng	Sai
a)	$m = 0$: Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.		
b)	$m = -5$: Hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực đại.		
c)	Có 2 giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.		
d)	Có 3 giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x)$ có 7 điểm cực trị.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai

a) $m = 0$: Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2 - 4x)$; $f'(x) = 0$ có 3 nghiệm đơn $x = 0; x = 1; x = 4$.

Vậy với $m = 0$ thì hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị.

b) $m = -5$: Ta có $f'(x) = (x-1)(x^2 - 4x - 5)$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 5 \end{cases}$.

x	$-\infty$	-1	1	5	$+\infty$

y'	- 0 + 0 - 0 +
y	$+\infty$ $+\infty$

c) Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 4x + m = 0(*) \end{cases}$

Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị $\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 1 - 4 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \neq m < 4 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}^*} m \in \{1; 2\}.$$

d) Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 4x + m = 0(*) \end{cases}$

Hàm số $y = f(|x|)$ có 7 điểm cực trị $\Leftrightarrow$ Hàm số $y = f(x)$ có 3 điểm cực trị dương

$\Leftrightarrow (*)$ có hai nghiệm dương phân biệt khác 1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ 1 - 4 + m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - m > 0 \\ 4 > 0 \\ m > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \neq m < 4 \\ m > 0 \end{cases} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{1; 2\}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Tìm điểm cực đại của hàm số $y = x^2 \cdot e^x$.

Kết quả: $x = -2$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = (x^2 \cdot e^x)' = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = e^x(2x + x^2)$; $y' = 0 \Leftrightarrow 2x + x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Ta có $y'' = (y')' = 2e^x + 2x \cdot e^x + 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x = 2e^x + 4x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$.

+) $y''(0) = 2e^0 + 4 \cdot 0 \cdot e^0 + 0^2 \cdot e^0 = 2 > 0$, $y''(-2) = 2e^{-2} + 4 \cdot (-2) \cdot e^{-2} + (-2)^2 \cdot e^{-2} = -2 \cdot e^{-2} < 0$.

Suy ra hàm số đạt cực đại tại $x = -2$.

Câu 2: Biết đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2ax + b$ có điểm cực tiểu $A(2; -2)$, tính $a + b$.

Kết quả: 2

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = 3x^2 - 6x + 2a$; $y'' = 6x - 6$

Để đồ thị hàm số có điểm cực tiểu $A(2; -2)$ cần có:

$$\begin{cases} y'(2) = 0 \\ y''(2) > 0 \\ y(2) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a = 0 \\ 6 \cdot 2 - 6 > 0 \\ 4a + b - 4 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } a + b = 2.$$

Câu 3: Tìm giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (m^2 - m - 1)x$ đạt giá trị cực đại tại $x = 1$.

Kết quả: $m = 3$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y' = x^2 - 2mx + m^2 - m - 1$ và $y'' = 2x - 2m$.

Hàm số đạt cực đại tại $x = 1$ nên $y'(1) = 0 \Leftrightarrow m^2 - 3m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$.

+ Với $m = 0$ thì $y''(1) = 2 > 0$ suy ra hàm đạt cực tiểu tại $x = 1$ (loại).

+ Với $m = 3$ thì $y''(1) = -4 < 0$ suy ra hàm đạt cực đại tại $x = 1$ (nhận).

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$, bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-3	2	-1	$+\infty$

Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = f(x^2 - 2x)$.

Kết quả: 7

Lời giải

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a, a \in (-\infty; -1) \\ x = b, b \in (-1; 0) \\ x = c, c \in (0; 1) \\ x = d, d \in (1; +\infty) \end{cases}$.

Đặt $g(x) = f(x^2 - 2x)$.

Ta có $g'(x) = 2(x - 1)f'(x^2 - 2x)$.

Khi đó $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ f'(x^2 - 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = a \quad (1) \\ x^2 - 2x = b \quad (2) \\ x^2 - 2x = c \quad (3) \\ x^2 - 2x = d \quad (4) \end{cases}$

Xét hàm số $h(x) = x^2 - 2x$. Ta có $h(x) = (x - 1)^2 - 1 \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó:

+) Phương trình (1) vô nghiệm.

+) Phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 khác 1.

+) Phương trình (3) có hai nghiệm phân biệt $x_3; x_4$ khác 1 và không trùng với $x_1; x_2$.

+) Phương trình (4) có hai nghiệm phân biệt $x_5; x_6$ khác 1 và không trùng với $x_1; x_2; x_3; x_4$.

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có 7 nghiệm phân biệt nên hàm số $y = f(x^2 - 2x)$ có 7 điểm cực trị.

Câu 5: Biết tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x - m + 2$ có hai điểm cực trị dương là $(a; b) \cup (c; +\infty)$. Tính $2a + b - c$.

Kết quả: 1

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y' = x^2 - 2mx + 2m - 1$.

Để hàm số có hai điểm cực trị dương thì phương trình $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - 2m + 1 > 0 \\ a.c = 2m - 1 > 0 \\ -\frac{b}{a} = 2m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m > \frac{1}{2} \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left(\frac{1}{2}; 1\right) \cup (1; +\infty) \longrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases} \longrightarrow 2a + b - c = 1.$$

Câu 6: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5$ có ba điểm cực trị, đồng thời ba điểm cực trị đó cùng với gốc tọa độ O tạo thành một tứ giác nội tiếp. Tính tích các phần tử của S .

Kết quả: $-\frac{1}{5}$

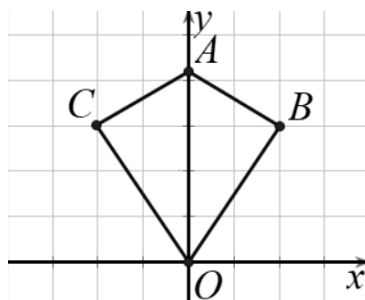
Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Hàm số $y = x^4 - 2m^2x^2 + m^4 + 5 \Leftrightarrow y' = 0$ có ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 4x^3 - 4m^2x = 4x(x^2 - m^2); y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m \\ x = -m \end{cases}, (m \neq 0).$$

Ba điểm cực trị là $A(0; m^4 + 5), B(m; 5), C(-m; 5)$.



Ba điểm A, B, C và gốc tọa độ $O(0; 0)$ tạo thành tứ giác nội tiếp khi và chỉ khi $\widehat{B} + \widehat{C} = \pi$

$$\Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C} = \frac{\pi}{2}, (\text{do } \hat{B} = \hat{C}) \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 5m^4 = 0 \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{5}.$$

Vậy S có 2 phần tử và có tích bằng $\frac{-1}{5}$.

----- HẾT -----