CHUYÊN ĐỀ 5: HÀM SỐ BẬC HAI

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Hàm số bậc hai

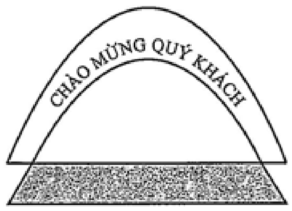
Hàm số bậc hai là hàm số được cho bằng biểu thức có dạng $y = ax^2 + bx + c$, trong đó a, b, c là những hằng số và a khác 0. Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

2. Đồ thị hàm số bậc hai

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là một đường parabol có đỉnh là điểm với toạ độ $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ và trục đối xứng là đường thẳng $x = -\frac{b}{2a}$. Nhận xét: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$, ta có: $-\frac{\Delta}{4a} = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

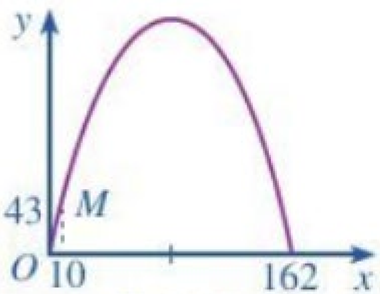
B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Tại một buổi khai trương, người ta làm một cổng chào có đường viền trong của mặt cắt là đường parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng là $4,5m$. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đât (điêm H) là $1,8m$ và khoảng cách từ điểm H tới chân cổng gần nhất là $1m$. Hãy tính chiều cao của cổng chào đó (tính theo đường viền trong) theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Câu 2: Khi du lịch đến thành phố St. Louis (Mỹ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập một hệ toạ độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như Hình 16 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí có tọa độ $(162; 0)$. Biết một điểm M trên cổng có toạ độ là $(10; 43)$.

Cổng Arch (St.Louis, Mỹ)
(Nguồn: https://visaf.vn)

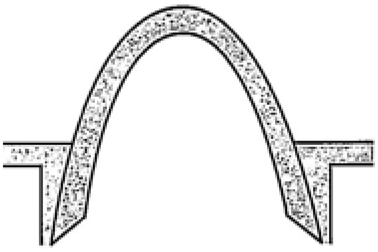


Hình 16

Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất), làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Câu 3: Bố bạn Lan gửi 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $x\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập với vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Tính số tiền cả vốn và lãi mà bố bạn Lan có được sau khi gửi tiết kiệm 2 tháng?

Câu 4: Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol (minh hoạ ở Hình 13) sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng BC là $9m$. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK = 1,6m$ và khoảng cách từ K tới chân cổng gần nhất là $BK = 0,5m$. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 13

Câu 5: Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau:
An nói: Tớ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là $8m$ và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng là $0,5m$ là $2,93m$. Từ đó tớ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là $12m$.

Hình 6.14. Cổng parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội

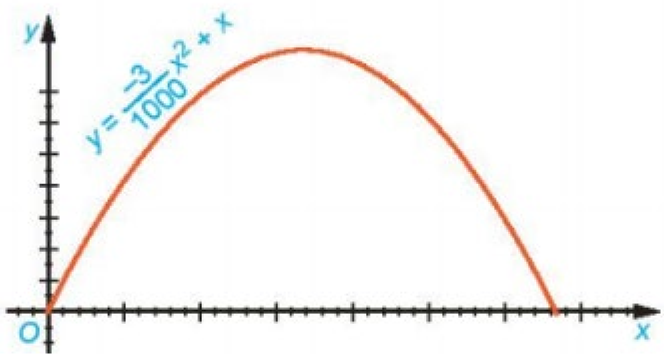
Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.

Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé.

Câu 6: Bác Hùng dùng $40m$ lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.
a. Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (mét) của nó.

b. Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được.

Câu 7: Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol có phương trình $y=\frac{-3}{1000}x^2+x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O, y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất



a. Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.

b. Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O. Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.

Câu 8: Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao $75m$ so với mặt của cây cầu và cách nhau $400m$. Các dây cáp có hình dạng đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng).

Câu 9: Bác Hùng dùng $200m$ hàng rào dây thép gai để rào miếng đất đủ rộng thành một mảnh vườn hình chữ nhật.

a) Tìm công thức tính diện tích $S(x)$ của mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng $x(m)$ của mảnh vườn đó.

b) Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có thể rào được.

Câu 10: Một quả bóng được ném lên trên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu $14,7m/s$. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) có thể mô tả bởi phương trình $h(t)=-4,9t^2+14,7t$.

a) Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất?

b) Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng.

c) Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng rơi chạm đất?

Câu 11: Một hòn đá được ném lên trên theo phương thẳng đứng. Khi bỏ qua sức cản không khí, chuyển động của hòn đá tuân theo phương trình sau: $y=-4,9t^2+mt+n$, với m,n là các hằng số. Ở đây $t=0$ là thời điểm hòn đá được ném lên, $y(t)$ là độ cao của hòn đá tại thời điểm t (giây) sau khi ném và $y=0$ ứng với bóng chạm đất.

a) Tìm phương trình chuyển động của hòn đá, biết rằng điểm ném cách mặt đất 1,5 m và thời gian để hòn đá đạt độ cao lớn nhất là 1,2 giây sau khi ném.

b) Tìm độ cao của hòn đá sau 2 giây kể từ khi bắt đầu ném.

c) Sau bao lâu kể từ khi ném, hòn đá rơi xuống mặt đất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

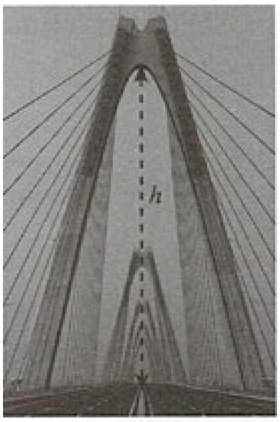
Câu 12: Một rạp chiếu phim có sức chứa 1000 người. Với giá vé là 40000 đồng, trung bình sẽ có khoảng 300 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Để tăng số lượng vé bán ra, rạp chiếu phim đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10000 đồng thì sẽ có thêm 100 người đến rạp mỗi ngày.

a) Tìm công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp chiếu phim khi giá vé là x nghìn đồng.

b) Tìm mức giá vé để doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp là lớn nhất.

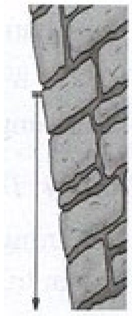
Câu 13: Cầu Nhật Tân bắc qua sông Hồng được xem là chiếc cầu dây văng dài nhất Việt. Cầu có 5 trụ tháp chính kết nối các nhịp dây văng nâng đỡ toàn bộ phần chính của cây cầu, cũng là để tượng trưng cho 5 cửa ô cổ kính của Hà Nội. Mỗi trụ tháp được kiến trúc tạo dáng mĩ thuật phía trong bằng đường cong tựa như một parabol.

a) Giả sử rằng mặt trong của trụ cầu là một parabol như Hình 7. Khi không thể đo trực tiếp khoảng cách từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường, làm thế nào để ước tính độ cao này?

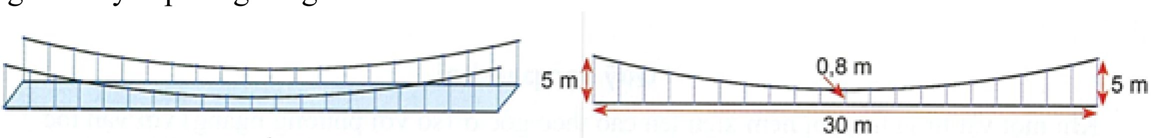


Hình 7. Cầu Nhật Tân

b) Giả sử biết độ rộng của mặt đường khoảng $43m$. Một người đã dùng dây dọi (không giãn) gắn lên thành trụ cầu ở vị trí B và điều chỉnh độ dài dây dọi để quả nặng vừa chạm đất (khi lặng gió), sau đó đo được chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là $1,87m$ và khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là $20cm$. Nếu dùng dữ liệu tự thu thập được và tính toán theo cách ở trên thì người này sẽ ước tính được độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là bao nhiêu?


Hình 8

Câu 14: Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.



a) Hình vẽ cầu dây văng   b) Hình chiếu đứng của cầu dây văng

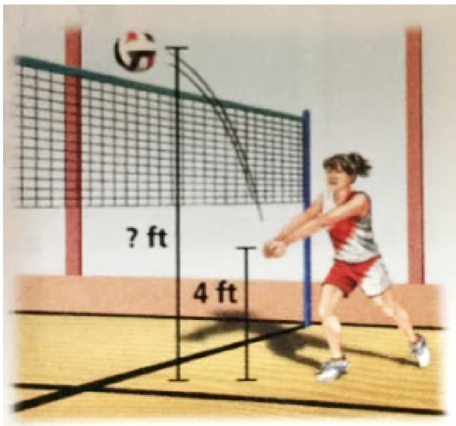
Dựa vào bản vẽ ở Hình, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên. Biết:

- Dây dài nhất là $5m$, dây ngắn nhất là $0,8m$. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

- Nhịp cầu dài 30 m.

- Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.

Câu 15: Một vận động viên bóng chuyền đánh một quả bóng lên với vị trí ban đầu từ độ cao 4 ft (tính từ tay đánh bóng đến mặt đất). Tại thời điểm 0,5s trái bóng ở độ cao 10ft và tại 1s thì trái bóng ở độ cao 8ft

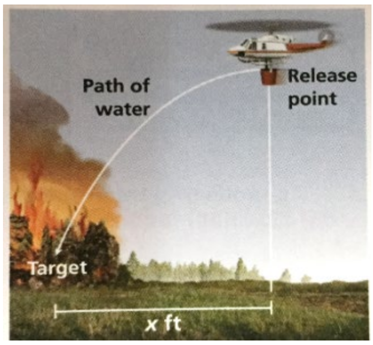


a) Viết công thức tính độ cao quả bóng tính theo thời gian t(s) sau khi được đánh ra, biết công thức tính h(t) là một hàm số bậc 2

b) Độ cao lớn nhất quả bóng đạt được là bao nhiêu?

c) Đối phương có bao nhiêu giây để chạy đến cứu quả bóng trước khi nó chạm đến mặt đất?

Câu 16: Một máy bay trực thăng cứu hộ bay ở độ cao 500 (feet) so với mặt đất, đang chuẩn bị phun nước vào một đám cháy rừng từ trên không. Độ cao h (feet) của nước so với mặt đất tính theo thời gian t (s) kể từ lúc máy bay phun ra là một hàm số bậc 2. Tại thời điểm 5s sau nước phun thì tới được phía trên đám cháy đang bốc lửa cao 90m. Tính khoảng cách từ đám cháy đến máy bay theo phương ngang biết rằng khoảng cách theo phương ngang tính từ điểm cháy đến máy bay là $x = 85$ (ft)



Câu 17: Công ty du lịch Saigon Tourist báo giá tiền chuyến đi tham quan Đà Lạt cho nhóm khách của Trường THPT Trường Trinh như sau:

+ Nếu có dưới 40 khách thì giá vé là 500 000 đồng/ 1 người.

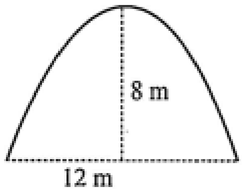
+ Nếu có nhiều hơn 40 khách thì cứ thêm một người giá vé sẽ giảm 10.000 đồng/ 1 người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 41 trở đi. Hãy biểu thị doanh thu của công ty theo x.

b) Số người của nhóm du lịch nhiều nhất là bao nhiêu để công ty không bị lỗ, biết chi phí của chuyến đi là $20.160.000$ đồng?

Câu 18: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi giày với giá 40 (nghìn đồng). Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x (nghìn đồng) thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120 - x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày với giá trong khoảng bao nhiêu thì tháng đó cửa hàng có lợi nhuận nhiều hơn 1.200.000 đồng?

Câu 19: Một đường hầm xuyên thẳng qua núi và có mặt cắt là một parabol (thông số như hình bên). Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang $6m$ đi vào vị trí chính giữa miệng hầm. Hỏi chiều cao h của xe tải cần thoả mãn điều kiện gì để có thể đi vào cửa hầm mà không chạm tường?



Câu 20: Sức mạnh động cơ (tính bằng đơn vị mã lực) sinh ra từ máy của một canô ở tốc độ quay r vòng/ phút được xác định bởi hàm số: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$. Vậy sức mạnh lớn nhất của động cơ này đạt được là bao nhiêu? Khi đó, động cơ phải quay bao nhiêu vòng/ phút?

Câu 21: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, trong đó x là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên; y là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ một nóc nhà cao 3m. Sau đó 1 giây, quả bóng đạt độ cao 6m và 3 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao bằng với độ cao từ vị trí xuất phát (xem hình).

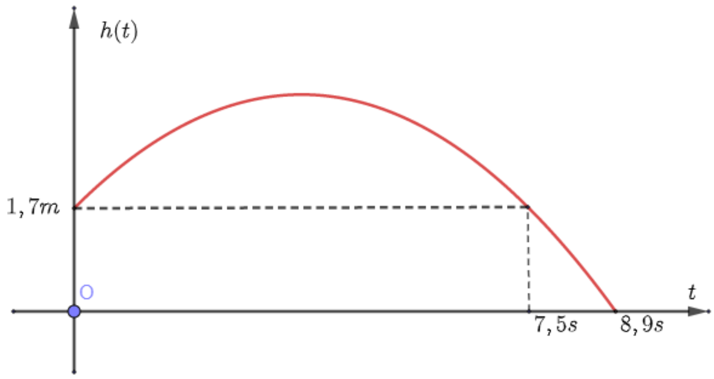
a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao y theo thời gian x và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

b) Xác định độ cao lớn nhất của quả bóng (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

c) Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm)?

Câu 22: Cánh cổng của gia đình bạn An như hình vẽ. Bạn An muốn đo chiều cao của cái cổng, biết rằng bạn An chỉ được nhà sản xuất công bố một vài dữ liệu: Chiều rộng của cổng là 5m, vị trí thấp nhất của phần trên cổng cách mặt đất 3m và từ một điểm cách chân cổng 1m, người ta dùng thước đo được chiều cao là $\frac{91}{25}m$

Câu 23: ngang đầu của người đánh. Giả sử quỹ đạo bay của quả cầu là một parabol. Tìm vị trí cao nhất của quả cầu biết rằng, sau khoảng thời gian 7,5s thì quả cầu ở vị trí ngang đầu của người đánh và sau 8,9s thì trái cầu chạm đất

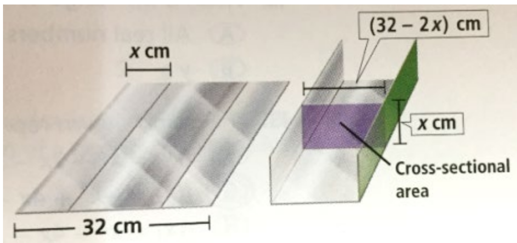


Câu 24: Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth ,trong đó t là thời gian kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2\,\text{m}$. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao $8,5\,\text{m}$ và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao $6\,\text{m}$. Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

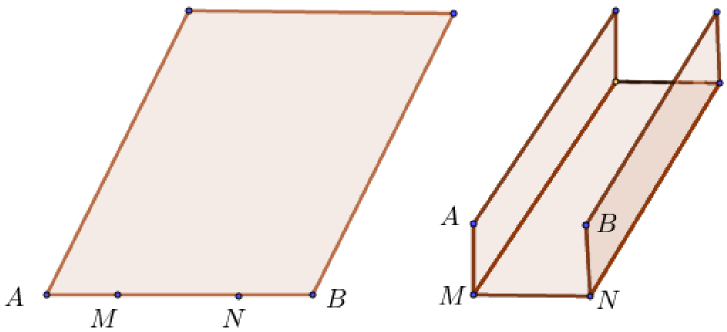
Câu 25: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành rảnh dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông. Người ta cần nghiên cứu cách để tạo ra đường rảnh có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất.

a) Lập hàm số để biểu diễn diện tích S theo biến x (x là bề ngang hai phần bên của tấm nhôm)

b) Xác định x để có được diện tích S lớn nhất



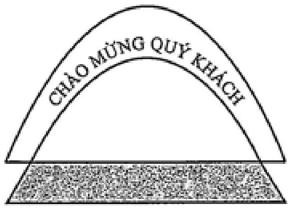
Câu 26: Một tấm tôn có bề rộng AB là $100cm$. Người ta chọn 2 điểm M và N trên đoạn AB sao cho có thể làm được một máng nước như hình vẽ. ($AMNB$ là hình chữ nhật). Tìm MN để máng nước có diện tích $AMNB$ lớn nhất.



Câu 27: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

CHUYÊN ĐỀ 5: HÀM SỐ BẬC HAI

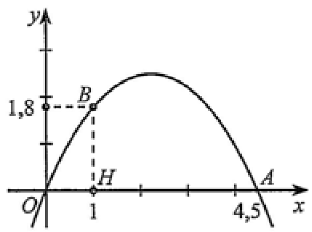
Câu 1. Tại một buổi khai trương, người ta làm một cổng chào có đường viền trong của mặt cắt là đường parabol. Người ta đo khoảng cách giữa hai chân cổng là $4,5m$. Từ một điểm trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đât (điêm H) là $1,8m$ và khoảng cách từ điểm H tới chân cổng gần nhất là $1m$. Hãy tính chiều cao của cổng chào đó (tính theo đường viền trong) theo đơn vị mét và làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Giải

Chọn hệ trục tọ độ sao cho gốc toạ độ O trùng một chân của cổng, trục hoành nằm trên đường nối hai chân cổng (đơn vị trên các trục tính theo mét) (Hinh 10). Gọi hàm số bậc hai có đồ thị chứa đường viền trong của cổng chào trên là $y=ax^2+bx+c$.

Từ giả thiết bài toán ta có đồ thị hàm số đi qua các điểm $O(0;0), A(4,5;0), B(1;1,8)$.



Hình 10

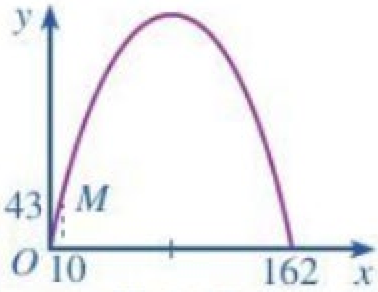
Thay toạ độ các điểm trên vào hàm số, ta được $c=0$ và hệ phương trình: $\begin{cases} 4,5^2a+4,5b=0 \\ 1^2a+1b=1,8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{-18}{35} \\ b=\dfrac{81}{35}. \end{cases}$

Suy ra ta có hàm sô: $y=\dfrac{-18}{35}x^2+\dfrac{81}{35}x$. Từ đó, đỉnh của đồ thị hàm số trên có tung độ là

$\dfrac{-18}{35}\cdot\left(\dfrac{9}{4}\right)^2+\dfrac{81}{35}\cdot\dfrac{9}{4}\approx 2,6$. Vậy chiều cao của cổng là khoảng 2,6 m.

Câu 2. Khi du lịch đến thành phố St. Louis (Mỹ), ta sẽ thấy một cái cổng lớn có hình parabol hướng bề lõm xuống dưới, đó là cổng Arch. Giả sử ta lập một hệ toạ độ Oxy sao cho một chân cổng đi qua gốc O như Hình 16 (x và y tính bằng mét), chân kia của cổng ở vị trí có tọa độ $(162;0)$. Biết một điểm M trên cổng có toạ độ là $(10;43)$.

Cổng Arch (St.Louis, Mỹ)
(Nguồn: https://visaf.vn)



Hình 16

Tính chiều cao của cổng (tính từ điểm cao nhất trên cổng xuống mặt đất), làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Lời giải

Từ đồ thị ta thấy các điểm thuộc đồ thị là:

$A(0;0), B(10;43), B(162;0)$.

Gọi hàm số là $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

Thay tọa độ các điểm A, B, C vào ta được hệ:

$$\begin{cases} a.0^2 + b.0 + c = 0 \\ a.10^2 + b.10 + c = 43 \\ a.162^2 + b.162 + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 100a + 10b = 43 \\ 162^2 a + 162b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = -\dfrac{43}{1520} \\ b = \dfrac{3483}{760} \end{cases}$$

Từ đó ta có $y = -\dfrac{43}{1520}x^2 + \dfrac{3483}{760}x$

Hoành độ đỉnh của đồ thị là: $x = -\dfrac{b}{2a} = 81$

Khi đó: $y = -\dfrac{43}{1520} \cdot 81^2 + \dfrac{3483}{760} \cdot 81 \approx 186(m)$

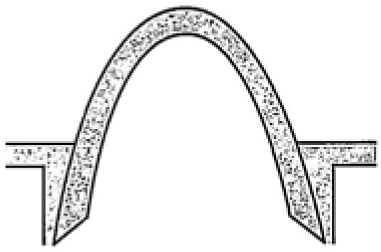
Vậy chiều cao của cổng là 186m.

Câu 3. Bố bạn Lan gửi 10 triệu đồng vào một ngân hàng với lãi suất $x\%/$ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được nhập với vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Tính số tiền cả vốn và lãi mà bố bạn Lan có được sau khi gửi tiết kiệm 2 tháng?

Lời giải

Số tiền cả vốn và lãi sau 2 tháng mà bố bạn Lan có được là:
$(10 + 10x\%)x\% + 10 + 10x\% = 0,001x^2 + 0,2x + 10$ (triệu đồng)

Câu 4. Trong một công trình, người ta xây dựng một cổng ra vào hình parabol (minh hoạ ở Hình 13) sao cho khoảng cách giữa hai chân cổng BC là $9m$. Từ một điểm M trên thân cổng người ta đo được khoảng cách tới mặt đất là $MK = 1,6m$ và khoảng cách từ K tới chân cổng gần nhất là $BK = 0,5m$. Tính chiều cao của cổng theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Hình 13

Lời giải

Lấy hệ trục toạ độ Oxy sao cho vị trí B trùng với gốc O, trục Ox nằm trên đường nối chân hai cổng, C nằm trên tia Ox (đơn vị trên các trục tính theo mét).

Khi đó cổng ra vào là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{-32}{85}x^2 + \frac{288}{85}x$.

Đỉnh của đồ thị hàm số trên có tung độ là khoảng 7,6.

Vậy chiều cao của cổng là khoảng $7,6m$.

Câu 5. Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau:

An nói: Tớ đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là $8m$ và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng là $0,5m$ là $2,93m$. Từ đó tớ tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là $12m$.

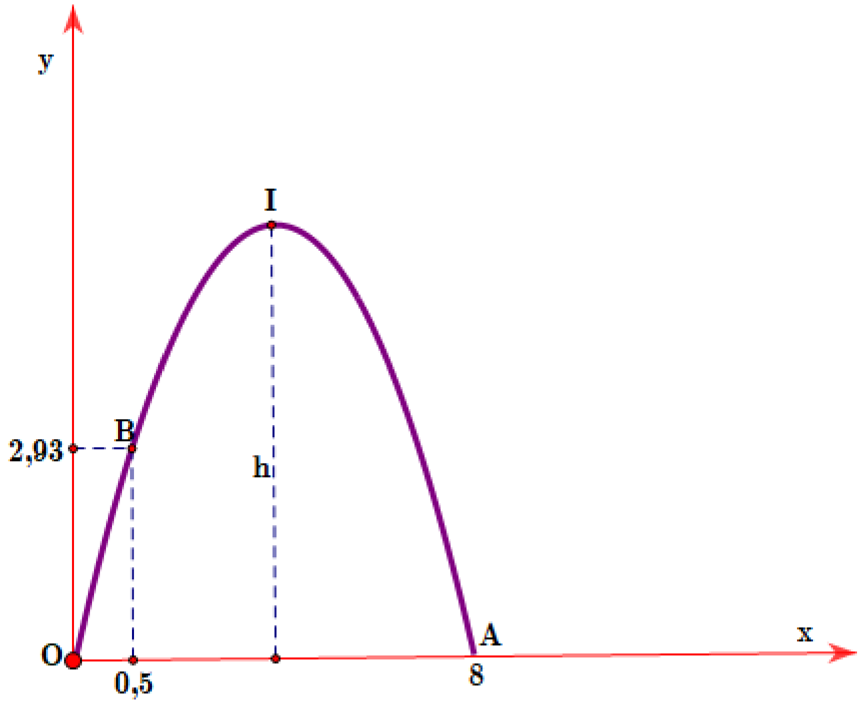
Hình 6.14. Cổng parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội

Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.

Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho một chân cổng đặt tại gốc tọa độ, chân còn lại đặt trên tia Ox. Khi đó cổng parabol là một phần của đồ thị hàm số dạng $y = ax^2 + bx$ (do parabol đi qua gốc tọa độ nên hệ số tự do bằng 0).



Parabol đi qua các điểm có tọa độ $A(8;0)$ và $B(0,5;2,93)$.

Thay tọa độ của A,B vào hàm số ta có:

$$\begin{cases} 0 = a.8^2 + b.8 \\ 2,93 = a.0,5^2 + b.0,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{-293}{375} \\ b = \dfrac{2344}{375} \end{cases}$$

Suy ra có hàm số $y = \dfrac{-293}{375}x^2 + \dfrac{2344}{375}x$

Hàm số có đỉnh $I\left(4;\dfrac{4688}{375}\right)$

Suy ra chiều cao của cổng là $\dfrac{4688}{375} \approx 12,5\,m$.

Kết quả của An gần chính xác.

Câu 6. Bác Hùng dùng $40\,m$ lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.

a. Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (mét) của nó.

b. Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được.

Lời giải

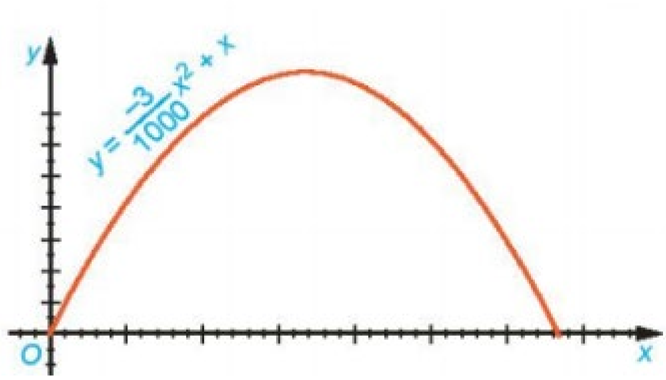
a. Chiều dài của mảnh vườn là: $20-x(m)$.

Diện tích của mảnh vườn là: x. $(20-x)=20x-x^2$.

b. Xét đồ thị hàm số $y=-x^2+20x$ có đỉnh là $(10;100)$

Vây diện tích mảnh vườn lớn nhất là 100 khi kích thước chiều rộng là $10m$, kích thước chiều dài là $10m$.

Câu 7. Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy là một parabol có phương trình $y=\frac{-3}{1000}x^2+x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O, y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất



a. Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.

b. Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O. Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.

Lời giải

a. Đồ thị hàm số $y=\frac{-3}{1000}x^2+x$ có đỉnh là $I\left(\frac{500}{3};\frac{250}{3}\right)$

Suy ra độ cao cực đại của vật là: $\frac{250}{3}\approx 83,3m$

b. Điểm chạm đất sau khi bay của vật có tọa độ $A(a;0)$ với a là số thực dương.

Ta có: $0=\frac{-3}{1000}x^2+x \Leftrightarrow x_1=0; x_2=\frac{1000}{3}$

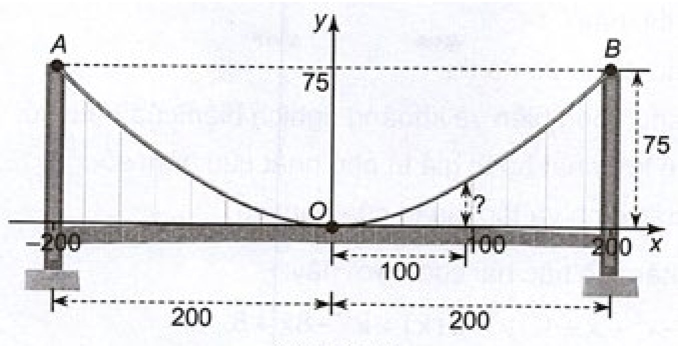
Suy ra: $a=\frac{1000}{3}$

Vậy khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O là: $\frac{1000}{3}\approx 333,3m$.

Câu 8. Một cây cầu treo có trọng lượng phân bố đều dọc theo chiều dài của nó. Cây cầu có trụ tháp đôi cao $75m$ so với mặt của cây cầu và cách nhau $400m$. Các dây cáp có hình dạng đường parabol và được treo trên các đỉnh tháp. Các dây cáp chạm mặt cầu ở tâm của cây cầu. Tìm chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m (giả sử mặt của cây cầu là bằng phẳng).

Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ Oxy như Hình 6.13: Trục Ox dọc theo mặt của cây cầu, trục Oy vuông góc với trục Ox tại tâm của cây cầu. Khi đó các dây cáp có hình dạng đường parabol có bề lõm hướng lên trên và đỉnh của parabol là gốc $O(0;0)$. Vì thế ta giả sử công thức của parabol là $y = ax^2, a > 0$.



Hình 6.13

Theo giả thiết, cây cầu có trụ tháp đôi cao 75 m so với mặt của cây cầu và cách nhau 400 m nên ta có các điểm $A(-200;75)$ và $B(200;75)$ thuộc parabol. Khi đó ta có:

$75 = a \cdot 200^2 \Rightarrow a = \dfrac{3}{1600}$.

Do đó, phương trình của parabol là: $y = \dfrac{3}{1600}x^2$.

Với $x = 100$ ta có $y = \dfrac{3}{1600} \cdot 100^2 = 18,75$.

Vậy chiều cao của dây cáp tại điểm cách tâm của cây cầu 100 m là 18,75 m.

Câu 9. Bác Hùng dùng $200m$ hàng rào dây thép gai để rào miếng đất đủ rộng thành một mảnh vườn hình chữ nhật.

a) Tìm công thức tính diện tích $S(x)$ của mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng $x(m)$ của mảnh vườn đó.

b) Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có thể rào được.

Lời giải

a) Chiều dài của mảnh vườn là: $100 - x(m)$.

Do đó, ta có công thức diện tích $S(x) = (100 - x)x = -x^2 + 100x\left(m^2\right)$.

b) Mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất khi hàm số $S(x) = -x^2 + 100x$ đạt giá trị lớn nhất. Vì $a = -1 < 0$ nên hàm số bậc hai này đạt giá trị lớn nhất tại $x = -\dfrac{b}{2a} = 50$.

Vậy mảnh vườn có diện tích lớn nhất khi nó có kích thước là $50m \times 50m$ (tức là khi nó trở thành hình vuông).

Câu 10. Một quả bóng được ném lên trên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu $14,7m/s$. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) có thể mô tả bởi phương trình $h(t) = -4,9t^2 + 14,7t$.

a) Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất?

b) Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng.

c) Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng rơi chạm đất?

Lời giải

a) Quả bóng đạt độ cao lớn nhất khi $h(t)$ đạt giá trị lớn nhất, tức là khi $t = 1,5$ (giây).

Vậy sau khi ném 1,5 giây thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất.

b) Ta có $h(1,5) = -4,9 \cdot (1,5)^2 + 14,7 \cdot 1,5 = 11,025$.

Độ cao lớn nhất của quả bóng là $11,025m$.

c) Quả bóng chạm đất tức là $h(t) = 0 \Leftrightarrow -4,9t^2 + 14,7t = 0 \Leftrightarrow t = 0$ (loại) hoặc $t = 3$.

Vậy sau khi ném 3 giây thì quả bóng chạm đất.

Câu 11. Một hòn đá được ném lên trên theo phương thẳng đứng. Khi bỏ qua sức cản không khí, chuyển động của hòn đá tuân theo phương trình sau: $y = -4,9t^2 + mt + n$, với m, n là các hằng số. Ở đây $t = 0$ là thời điểm hòn đá được ném lên, $y(t)$ là độ cao của hòn đá tại thời điểm t (giây) sau khi ném và $y = 0$ ứng với bóng chạm đất.

a) Tìm phương trình chuyển động của hòn đá, biết rằng điểm ném cách mặt đất 1,5 m và thời gian để hòn đá đạt độ cao lớn nhất là 1,2 giây sau khi ném.

b) Tìm độ cao của hòn đá sau 2 giây kể từ khi bắt đầu ném.

c) Sau bao lâu kể từ khi ném, hòn đá rơi xuống mặt đất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

Lời giải

a) Theo giả thiết điểm ném ở độ cao $1,5m$ so với mặt đất nên $n = 1,5$.

Hòn đá đạt độ cao lớn nhất khi $t = -\dfrac{m}{2 \cdot (-4,9)} = \dfrac{m}{9,8}$.

Theo đề ra ta có $\dfrac{m}{9,8} = 1,2 \Leftrightarrow m = 11,76$.

Vậy phương trình chuyển động của hòn đá là: $y = -4,9t^2 + 11,76t + 1,5$.

b) Khi $t = 2$ ta có $y = -4,9 \cdot 2^2 + 11,76 \cdot 2 + 1,5 = 5,42$.

Vậy sau 2 giây, hòn đá có độ cao là 5,42 m.

c) Hòn đá rơi xuống mặt đất tức là $y = 0$. Xét phương trình

$-4,9t^2 + 11,76t + 1,5 = 0 \Leftrightarrow t \approx 2,52$ hoặc $t \approx -0,12$ (loại).

Vậy sau khoảng 2,52 giây kể từ khi ném thì hòn đá rơi xuống mặt đất.

Câu 12. Một rạp chiếu phim có sức chứa 1000 người. Với giá vé là 40000 đồng, trung bình sẽ có khoảng 300 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Để tăng số lượng vé bán ra, rạp chiếu phim đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10000 đồng thì sẽ có thêm 100 người đến rạp mỗi ngày.

a) Tìm công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp chiếu phim khi giá vé là x nghìn đồng.

b) Tìm mức giá vé để doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp là lớn nhất.

Lời giải

a) Khi giá vé là x (nghìn đồng) thì số tiền giảm giá mỗi vé so với mức giá cũ là $40-x$ (nghìn đồng).

Số người tăng lên sau khi giảm giá vé là: $\dfrac{100(40-x)}{10}=10(40-x)$.

Số người đến rạp chiếu phim mỗi ngày sau khi giảm giá là: $300+10(40-x)=700-10x$.

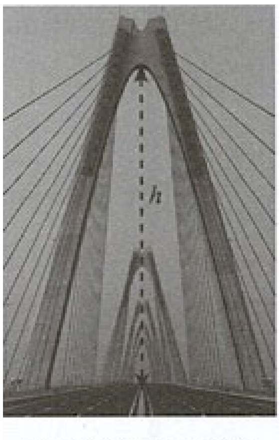
Công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày khi giá vé là x (nghìn đồng) là:
$R(x)=x(700-10x)=-10x^2+700x$ (nghìn đồng).

b) Hàm số $R(x)=-10x^2+700x$ đạt giá trị lớn nhất tại $x=35$. Khi đó $R\left(35\right)=12250$.

Vậy doanh thu lớn nhất mà rạp chiếu có thể thu được mỗi ngày là 12250000 đồng khi giá bán mỗi vé là 35000 đồng.

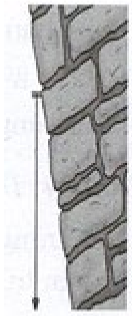
Câu 13. Cầu Nhật Tân bắc qua sông Hồng được xem là chiếc cầu dây văng dài nhất Việt. Cầu có 5 trụ tháp chính kết nối các nhịp dây văng nâng đỡ toàn bộ phần chính của cây cầu, cũng là để tượng trưng cho 5 cửa ô cổ kính của Hà Nội. Mỗi trụ tháp được kiến trúc tạo dáng mĩ thuật phía trong bằng đường cong tựa như một parabol.

a) Giả sử rằng mặt trong của trụ cầu là một parabol như Hình 7 . Khi không thể đo trực tiếp khoảng cách từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường, làm thế nào để ước tính độ cao này?



Hình 7. Cầu Nhật Tân

b) Giả sử biết độ rộng của mặt đường khoảng $43\,m$. Một người đã dùng dây dọi (không giãn) gắn lên thành trụ cầu ở vị trí B và điều chỉnh độ dài dây dọi để quả nặng vừa chạm đất (khi lặng gió), sau đó đo được chiều dài đoạn dây dọi sử dụng là $1{,}87\,m$ và khoảng cách từ chân trụ cầu đến quả nặng là $20\,cm$. Nếu dùng dữ liệu tự thu thập được và tính toán theo cách ở trên thì người này sẽ ước tính được độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là bao nhiêu?



Hình 8

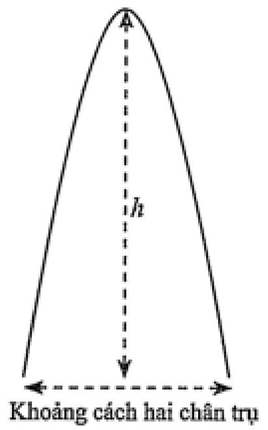
Lời giải

a) Vấn đề đặt ra trong thực tiễn là *không đo trực tiếp* khoảng cách từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường nhưng cần ước tính độ cao này.

Để giải quyết vấn đề thực tiễn này bằng toán học, ta dùng đồ thị hàm số bậc hai để mô phỏng cho đường biên mặt trong của trụ cầu. Từ công thức của hàm số tìm được ứng với đồ thị, ta tính độ cao cần tìm.

Bước 1. *Lựa chọn mô hình toán học*

Dùng đồ thị hàm số bậc hai mô phỏng cho đường biên mặt trong của trụ cầu như Hình $9a$.



Hình 9a. Parabol mô phỏng đường biên phía trong của trụ cầu

Bước 2. *Phát biểu bài toán*

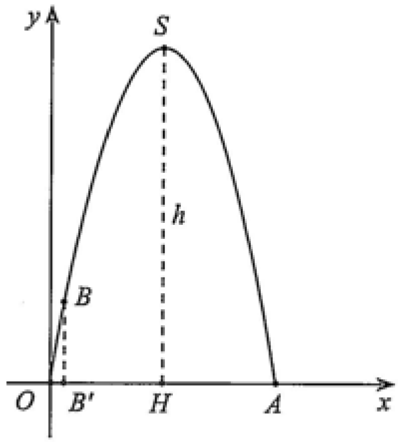
- Trong hệ trục toạ độ Oxy (được chọn như Hình 9b), tung độ đỉnh S của parabol là bao nhiêu?

Bước 3. *Giải quyết bài toán toán học*

Trước hết, ta tìm công thức hàm số, bằng cách:

- Đo khoảng cách OA giữa hai chân trụ của cầu, từ đó xác định toạ độ điểm A, H (với H là trung điểm của OA).

- Chọn một điểm B cụ thể trên thành trụ cầu, xác định hình chiếu B' trên mặt đường rồi đo BB' và OB'. Từ đây, xác định toạ độ điểm B.



Hình 9b. Chọn hệ trục toạ độ Oxy

- Tìm hàm số bậc hai có công thức tổng quát: $y = ax^2 + bx + c$ biết đồ thị hàm số này qua gốc toạ độ và hai điểm A, B.

- Sau cùng tính tung độ đỉnh S.

Bước 4. *Trả lời kết quả cho vấn đề thực tế*

Ước lượng kết quả độ cao từ đỉnh vòm phía trong của trụ cầu tới mặt đường (có thể làm tròn tung độ đỉnh S đến đơn vị mét).

b) Chọn hệ trục toạ độ như Bước 2 ở câu a.

Đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ đi qua gốc toạ độ $O(0;0)$ nên $c = 0$. Suy ra công thức hàm số là $ax^2 + bx$.

Mặt khác đồ thị hàm số qua 2 điểm $A(43;0), B(0,2;1,87)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a \cdot (0,2)^2 + b \cdot 0,2 = 1,87 \\ a \cdot 43^2 + b \cdot 43 = 0 \end{cases}$$

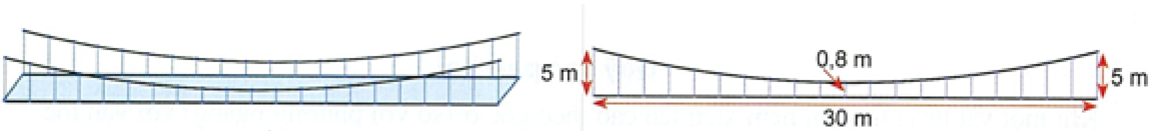
Suy ra $a = -\dfrac{187}{856}; b = \dfrac{8041}{856}$ nên có hàm số $y = -\dfrac{187}{856}x^2 + \dfrac{8041}{856}x$.

Hình chiếu của đỉnh S trên trục hoành là H nên $y_S = f\left(x_S\right) = f\left(x_H\right) = f\left(\dfrac{x_A}{2}\right) = f\left(\dfrac{43}{2}\right) \approx 100,98.$

Vậy độ cao từ đỉnh vòm phía trong một trụ của cầu Nhật Tân tới mặt đường là khoảng $101m$.

(*Lưu ý:* Kết quả này là giả định theo số liệu do người này tự thu thập, không ảnh hưởng đến độ cao thật trong thực tế).

Câu 14. Chiếc cầu dây văng một nhịp được thiết kế hai bên thành cầu có dạng parabol và được cố định bằng các dây cáp song song.



a) Hình vẽ cầu dây văng b) Hình chiếu đứng của cầu dây văng

Dựa vào bản vẽ ở Hình, hãy tính chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên. Biết:

- Dây dài nhất là $5m$, dây ngắn nhất là $0,8m$. Khoảng cách giữa các dây bằng nhau.

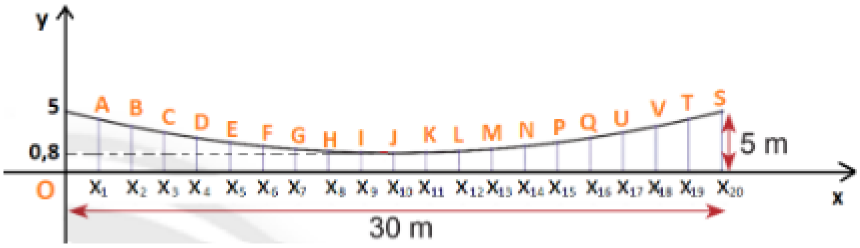
- Nhịp cầu dài 30 m.

- Cần tính thêm 5% chiều dài mỗi sợi dây cáp để neo cố định.

Lời giải

Gọi $y = ax^2 + bx + c$ là công thức của hàm số có đồ thị là thành cầu.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình dưới:



Khi đó độ dài dây cáp dọc ở mỗi mặt bên là tung độ của điểm biểu diễn tương ứng.

Ở mỗi mặt: có 21 dây cáp dọc, tương ứng cho 20 khoảng cách giữa chúng.

Khoảng cách giữa hai dây cáp liền kề là: $30:20=1,5(m)$

Khi đó: $x_0=0; x_1=1,5; x_2=3; x_3=4,5;\ldots; x_n=1,5.n$

Dễ thấy: các điểm có tọa độ $(0;5),\left(x_{10};0,8\right),\left(x_{20};5\right)$ thuộc đồ thị hàm số.

(Trong đó: $x_{10}=10.1,5=15; x_{20}=20.1,5=30$.)

Suy ra: $f(0)=a.0^2+b.0+c=5 \Leftrightarrow c=5$

Và $f(1)=a.10^2+b.10+c=0,8 \Leftrightarrow 100a+10b+5=0,8$ $f(2)=a.30^2+b.30+c=5 \Leftrightarrow 900a+30b+5=5$

Giải hệ phương trình $\begin{cases}100a+10b+5=0,8\\ 900a+30b+5=5\end{cases}$ ta được $a=\dfrac{21}{1000}; b=-\dfrac{63}{100}$

Như vậy $y=\dfrac{21}{1000}x^2-\dfrac{63}{100}x+5$

Gọi $y_0, y_1, y_2,\ldots y_{20}$ là tung độ của các điểm có hoành độ lần lượt là $x_0, x_1, x_2,\ldots x_{20}$

Ta có:

$y_0=5$

$$y_1=\frac{21}{1000}\cdot 1,5^2-\frac{63}{100}\cdot 1,5+5$$

$$y_2=\frac{21}{1000}\cdot(2.1,5)^2-\frac{63}{100}\cdot(2\cdot 1,5)+5=2^2\cdot\frac{21}{1000}\cdot 1,5^2-2\cdot\frac{63}{100}\cdot 1,5+5$$

…

$$y_n=\frac{21}{1000}\cdot(n\cdot 1,5)^2-\frac{63}{100}\cdot(2\cdot 1,5)+5=n^2\cdot\frac{21}{1000}\cdot 1,5^2-n\cdot\frac{63}{100}\cdot 1,5+5$$

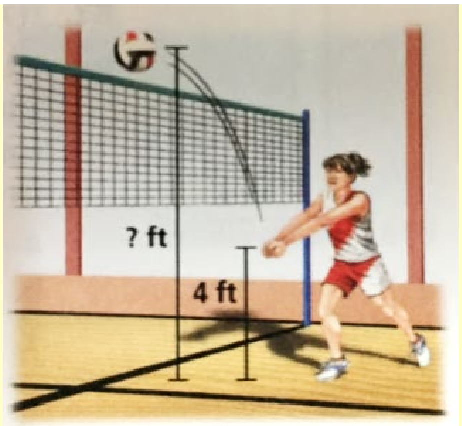
$$\Rightarrow T=y_0+y_1+y_2+\ldots+y_{20}=5+\frac{21}{1000}\cdot 1,5^2.\left(1+2^2+\ldots+20^2\right)-\frac{63}{100}\cdot 1,5\cdot(1+2+\ldots+20)+5.20$$

Mà $1+2^2+\ldots+20^2=2870; 1+2+\ldots+20=210$ $\Rightarrow T=5+\dfrac{21}{1000}\cdot 1,5^2\cdot 2870-\dfrac{63}{100}\cdot 1,5.210+5.20\approx 42,$ $16(m)$

Tổng chiều dài của các dây cáp dọc ở hai mặt bên là: $42,16.2=84,32(m)$

Vậy chiều dài tổng cộng của các dây cáp dọc ở hai mặt bên là $84,32\,m$.

Câu 1: Một vận động viên bóng chuyền đánh một quả bóng lên với vị trí ban đầu từ độ cao 4 ft (tính từ tay đánh bóng đến mặt đất). Tại thời điểm 0,5s trái bóng ở độ cao 10ft và tại 1s thì trái bóng ở độ cao 8ft

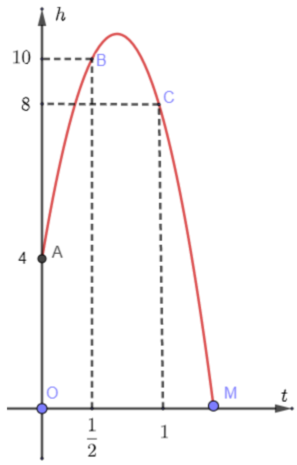


a) Viết công thức tính độ cao quả bóng tính theo thời gian t(s) sau khi được đánh ra, biết công thức tính h(t) là một hàm số bậc 2

b) Độ cao lớn nhất quả bóng đạt được là bao nhiêu?

c) Đối phương có bao nhiêu giây để chạy đến cứu quả bóng trước khi nó chạm đến mặt đất?

Lời giải



a) Dựng hệ hệ tọa độ như hình vẽ với góc tọa độ O trùng với vị trí đánh của vận động viên

Gọi $(P): h(t) = at^2 + bt + c$

- Vị trí ban đầu là từ độ cao 4 ft nên $A(0;4) \in (P) \Leftrightarrow c = 4 \ (1)$
- Tại thời điểm 0,5s trái bóng ở độ cao 10ft nên $B\left(\frac{1}{2};10\right) \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 10 \quad (2)$
- Tại 1s thì trái bóng ở độ cao 8ft nên $C(1;8) \in (P) \Leftrightarrow a + b + c = 8 \quad (3)$
- Từ (1),(2),(3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c = 4 \\ \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 10 \\ a + b + c = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -16 \\ b = 20 \\ c = 4 \end{cases}$
- Vậy $h(t) = -16t^2 + 20t + 4$

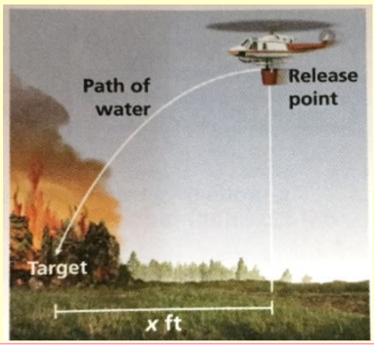
b) Ta có: $h(t) = -16\left(t^2 - \frac{5}{4}t\right) + 4 = -16\left(t - \frac{5}{8}\right)^2 + \frac{41}{4} \le \frac{41}{4}$

- Vậy độ cao nhất của quả bóng đạt được là $\frac{41}{4}$ tại $t = \frac{5}{8}$

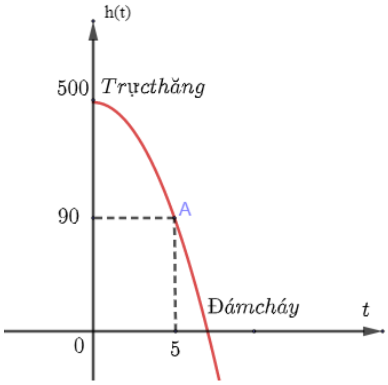
c) Khi quả bóng chạm đất thì $h(t)=0 \Leftrightarrow -16t^2+20t+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{5+\sqrt{41}}{8}\approx 1,43s \\ t=\dfrac{5-\sqrt{41}}{8}(L) \end{array}\right.$

• Vậy đối phương có $1,43s$ để cứu bóng trước khi bóng chạm đất

Câu 2: Một máy bay trực thăng cứu hộ bay ở độ cao 500 (feet) so với mặt đất, đang chuẩn bị phun nước vào một đám cháy rừng từ trên không. Độ cao h (feet) của nước so với mặt đất tính theo thời gian t (s) kể từ lúc máy bay phun ra là một hàm số bậc 2. Tại thời điểm 5s sau nước phun thì tới được phía trên đám cháy đang bốc lửa cao 90m. Tính khoảng cách từ đám cháy đến máy bay theo phương ngang biết rằng khoảng cách theo phương ngang tính từ điểm cháy đến máy bay là $x=85$ (ft)



Lời giải



• Chọn hệ trục Oth như hình vẽ với góc tọa độ O là vị trí trên mặt đất thẳng đứng với trực thăng

• Gọi $(P): h(t)=at^2+bt+c$.

• Ta có: hàm số bậc 2 này có đỉnh $I(0;500)$ và qua $A(5;90)$

• Khi đó: $\Leftrightarrow \begin{cases} I(0;500)\in(P) \\ -\dfrac{b}{2a}=0 \\ A(5;90)\in(P) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=500 \\ -\dfrac{b}{2a}=0 \\ 25a+5b+c=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{82}{5} \\ b=0 \\ c=500 \end{cases}$

Vậy $h(t)=-\dfrac{82}{5}t^2+500$

• Khi nước chạm đất thì $h(t)=0 \Leftrightarrow -\dfrac{82}{5}t^2+500=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{25\sqrt{82}}{41}\approx 5,52s \\ t=-\dfrac{25\sqrt{82}}{41}(L) \end{array}\right.$

Vậy khoảng cách theo phương ngang từ đám cháy đến máy bay là $x = 85.t \approx 469,2$ (ft)

Câu 3: Công ty du lịch Saigon Tourist báo giá tiền chuyến đi tham quan Đà Lạt cho nhóm khách của Trường THPT Trường Trinh như sau:

+ Nếu có dưới 40 khách thì giá vé là 500 000 đồng/ 1 người.

+ Nếu có nhiều hơn 40 khách thì cứ thêm một người giá vé sẽ giảm 10.000 đồng/ 1 người cho toàn bộ hành khách.

a) Gọi x là số lượng khách từ người thứ 41 trở đi. Hãy biểu thị doanh thu của công ty theo x.

b) Số người của nhóm du lịch nhiều nhất là bao nhiêu để công ty không bị lỗ, biết chi phí của chuyến đi là $20.160.000$ đồng?

Lời giải

a) Khi thêm x người thì giá vé thực tế là: $500.000 - 10.000x$ (đồng)

$\Rightarrow$ Doanh thu mà công ty thu được là: $T = (x+40)(500.000 - 10.000x)$ (đồng)

b) Để công ty không bị lỗ thì: $T = (x+40)(500.000 - 10.000x) \geq 20.160.000$

$\Leftrightarrow (x+40)(50-x) \geq 2016 \Leftrightarrow -x^2 + 10x - 16 \geq 0 \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 8$.

Vậy số lượng khách nhiều nhất là 48 người thì công ty không bị lỗ.

Câu 4: Một cửa hàng buôn giày nhập một đôi giày với giá 40 (nghìn đồng). Cửa hàng ước tính rằng nếu đôi giày được bán với giá x (nghìn đồng) thì mỗi tháng khách hàng sẽ mua $(120-x)$ đôi. Hỏi cửa hàng bán một đôi giày với giá trong khoảng bao nhiêu thì tháng đó cửa hàng có lợi nhuận nhiều hơn 1.200.000 đồng?

Lời giải

Gọi y là số tiền lãi của cửa hàng bán giày (nghìn đồng)

Số tiền lãi của cửa hàng trong một tháng là:

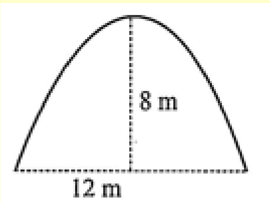
$$y = (120-x)(x-40) = -x^2 + 160x - 4800$$

Để của hàng có lợi nhuận nhiều hơn 1 200 (nghìn đồng)trong tháng đó thì

$y > 1200 \Leftrightarrow -x^2 + 160x - 4800 > 1200 \Leftrightarrow 60 < x < 100$

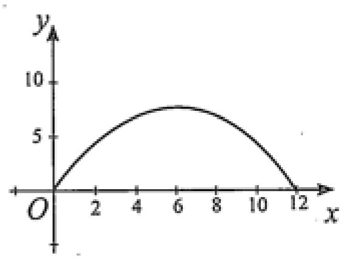
Vậy cần bán một đôi giày với gía từ 60 nghìn đồng đến 100 nghìn đồng.

Câu 5: Một đường hầm xuyên thẳng qua núi và có mặt cắt là một parabol (thông số như hình bên). Giả sử một chiếc xe tải có chiều ngang $6m$ đi vào vị trí chính giữa miệng hầm. Hỏi chiều cao h của xe tải cần thoả mãn điều kiện gì để có thể đi vào cửa hầm mà không chạm tường?



Lời giải

Chọn hệ trục toạ độ như hình bên.



Parabol có phương trình dạng $y = ax^2 + bx$. Theo đề bài ta có parabol đi qua các điểm $(12;0)$ và $(6;8)$. Suy ra $\begin{cases} 144a + 12b = 0 \\ 36a + 6b = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{2}{9} \\ b = \dfrac{8}{3} \end{cases}$

Do đó $y = -\dfrac{2}{9}x^2 + \dfrac{8}{3}x$. Do chiếc xe tải có chiều ngang $6m$ đi vào vị trí chính giữa hầm nên xe sẽ chạm tường tại điểm $A(3;6)$ và điểm $B(9;6)$. Khi đó chiều cao của xe là $6m$. Vậy điều kiện để xe tải có thể đi vào hầm mà không chạm tường là $0 < h < 6$.

Câu 6: Sức mạnh động cơ (tính bằng đơn vị mã lực) sinh ra từ máy của một canô ở tốc độ quay r vòng/ phút được xác định bởi hàm số: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$. Vậy sức mạnh lớn nhất của động cơ này đạt được là bao nhiêu? Khi đó, động cơ phải quay bao nhiêu vòng/ phút?

Lời giải

Ta có: $p(r) = -0.000025r^2 + 0.2r - 240$ là hàm số bậc 2

- TXĐ: $D = R$
- Đỉnh $I(4000;160)$
- BBT

r	$-\infty$	4000	$+\infty$
$p(r)$	$-\infty$ ↗	160	↘ $-\infty$

Dựa vào BBT, sức mạnh lớn nhất của động cơ là 160 mã lực, đạt được tại 4000 vòng/phút

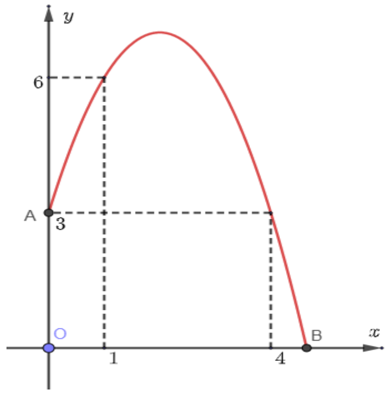
Câu 7: Khi một quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt đến độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, trong đó x là thời gian (tính bằng giây), kể từ khi quả bóng được đá lên; y là độ cao (tính bằng mét) của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá từ một nóc nhà cao 3m. Sau đó 1 giây, quả bóng đạt độ cao 6m và 3 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao bằng với độ cao từ vị trí xuất phát (xem hình).

a) Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao y theo thời gian x và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

b) Xác định độ cao lớn nhất của quả bóng (tính chính xác đến hàng phần nghìn).

c) Sau bao lâu thì quả bóng sẽ chạm đất kể từ khi đá lên (tính chính xác đến hàng phần trăm)?

Lời giải



a) Chọn góc tọa độ O dưới mặt đất theo phương thẳng đứng so với vị trí của người đá banh

- Vị trí của người đá banh là A và trái banh tiếp đất ở vị trí B
- Giả sử $y = f(x) = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$.
- Quả bóng được đá lên từ độ cao $3m$, nên: $f(0) = c = 3$
- Sau đó 1 giây nó đạt độ cao $6m$ nên: $f(1) = a + b + c = 6$
- Sau khi đá 4 giây, quả bóng ở độ cao $3m$, nghĩa là: $f(4) = 16a + 4b + c = 3$
- Từ đó ta có hệ phương trình bậc nhất: $\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = 6 \\ 16a + 4b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = 3 \end{cases}$

Vậy, hàm số cần tìm là: $y = f(x) = -x^2 + 4x + 3$

b) Độ cao lớn nhất của quả bóng chính là tung độ của đỉnh parabol, cụ thể: $y = -\frac{\Delta}{4a} = 7m$.

c) Để quả bóng chạm đất thì cao độ bằng 0 $\Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{7} \approx -0,65 \\ x = 2 + \sqrt{7} \approx 4,65 \end{array} \right.$

Như vậy, quả bóng chạm đất sau gần 4,65 giây.

Câu 8: Cánh cổng của gia đình bạn An như hình vẽ. Bạn An muốn đo chiều cao của cái cổng, biết rằng bạn An chỉ được nhà sản xuất công bố một vài dữ liệu: Chiều rộng của cổng là 5m, vị trí thấp nhất của phần trên cổng cách mặt đất 3m và từ một điểm cách chân cổng 1m, người ta dùng thước đo được chiều cao là $\frac{91}{25}m$

Lời giải

Xem phần phía trên của cái cổng là một parabol, vậy để tìm được độ cao của cổng ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với góc tọa độ O nằm ở vị trí chân của cổng.

• Gọi hàm số bậc 2 là $(P): y = f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

• Do vị trí thấp nhất của phần trên cổng cách mặt đất 3m nên $A(0;3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = c$ (1)

• Từ một điểm cách chân cổng 1m, ngta dùng thước đo được chiều cao là $\frac{91}{25}m$ nên:

$$B\left(1;\frac{91}{25}\right) \in (P) \Leftrightarrow \frac{91}{25} = a + b + c \qquad (2)$$

• Chiều rộng của cổng là 5m nên $C(5;3) \in (P) \Leftrightarrow 3 = 25a + 5b + c$ (3)

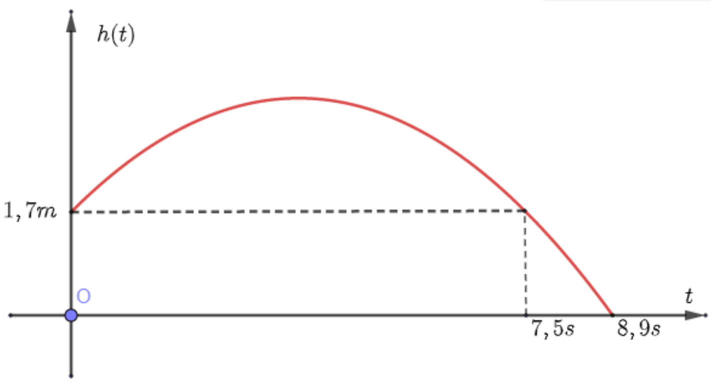
• Từ (1),(2),(3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c = 3 \\ a + b + c = \frac{91}{25} \\ 25a + 5b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{25} \\ b = \frac{4}{5} \\ c = 3 \end{cases}$

• Suy ra phương trình: $y = f(x) = -\frac{4}{25}x^2 + \frac{4}{5}x + 3$

• Khi đó: độ cao của cổng chính là tung độ đỉnh $y_o = -\frac{\Delta}{4a} = 4m$

Vậy cổng cao 4m

Câu 9: Một người cao 1,7m đang chơi cầu lông. Trái cầu được đánh lên ở vị trí ngang đầu của người đánh. Giả sử quỹ đạo bay của quả cầu là một parabol. Tìm vị trí cao nhất của quả cầu biết rằng, sau khoảng thời gian 7,5s thì quả cầu ở vị trí ngang đầu của người đánh và sau 8,9s thì trái cầu chạm đất



Lời giải

• Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ với góc tọa độ O là vị trí đứng của người chơi

- Gọi $(P): h(t) = at^2 + bt + c$
- Trái cầu ban đầu được đánh lên ở vị trí ngang đầu của người đánh cao 1,7m nên:

$$A(0;1,7) \in (P) \Leftrightarrow c = 1,7 \qquad (1)$$

- Sau khoảng thời gian 7,5s thì quả cầu ở vị trí ngang đầu của người đánh nên:

$$B(7,5;1,7) \in (P) \Leftrightarrow \frac{225}{4}a + \frac{15}{2}b + c = 1,7 \qquad (2)$$

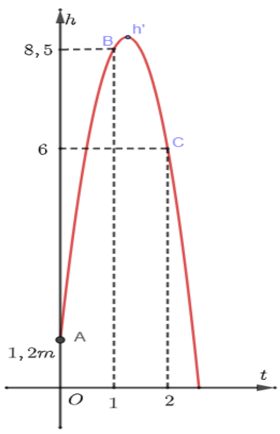
- Sau 8,9s thì trái cầu chạm đất nên: $C(8,9;0) \in (P) \Leftrightarrow 8,9^2 a + 8,9b + c = 0 \qquad (3)$
- Từ (1),(2),(3) ta có hệ phương trình: $\begin{cases} c = 1,7 \\ \frac{225}{4}a + \frac{15}{2}b + c = 1,7 \\ 8,9^2 a + 8,9b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{85}{623} \\ b = \frac{1275}{1246} \\ c = 1,7 \end{cases}$
- Suy ra: $(P): h(t) = -\frac{85}{623}t^2 + \frac{1275}{1246}t + 1,7$

Khi đó điểm cao nhất mà quả cầu có thể đạt tới chính là tung độ của đỉnh $y_0 = -\frac{\Delta}{4a} \approx 3,62m$

Câu 10: Khi quả bóng được đá lên, nó sẽ đạt độ cao nào đó rồi rơi xuống đất. Biết rằng quỹ đạo của quả là một cung parabol trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oth ,trong đó t là thời gian kể từ khi quả bóng được đá lên; h là độ cao của quả bóng. Giả thiết rằng quả bóng được đá lên từ độ cao $1,2\,\text{m}$. Sau đó 1 giây, nó đạt độ cao $8,5\,\text{m}$ và 2 giây sau khi đá lên, nó ở độ cao $6\,\text{m}$. Hãy tìm hàm số bậc hai biểu thị độ cao h theo thời gian t và có phần đồ thị trùng với quỹ đạo của quả bóng trong tình huống trên.

Lời giải

- Tại $t = 0$ ta có $y = h = 1,2$; tại $t = 1$ ta có $y = h = 8,5$; tại $t = 2$, ta có $y = h = 6$.



- Chọn hệ trục Oth như hình vẽ.
- Parabol (P) có phương trình: $y = at^2 + bt + c$, với $a \neq 0$.
- Giả sử tại thời điểm t' thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất h'.
- Theo Câu ra ta có: tại $t = 0$ thì $h = 1,2$ nên $A(0;1,2) \in (P) \Leftrightarrow c = 1,2 \qquad (1)$.
- Tại $t = 1$ thì $h = 8,5$ nên $B(1;8,5) \in (P) \Leftrightarrow a + b + c = 8,5 \qquad (2)$.
- Tại $t = 2$ thì $h = 6$ nên $C(2;6) \in (P) \Leftrightarrow 4a + 2b + c = 6 \qquad (3)$.

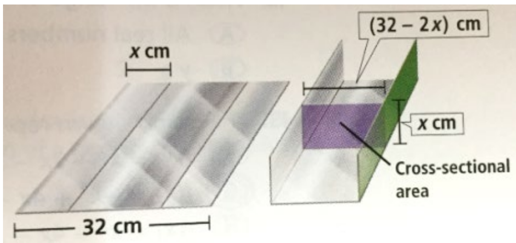
• Từ (1),(2),(3) ta có hệ: $\begin{cases} c=1,2 \\ a+b+c=8,5 \\ 4a+2b+c=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1,2 \\ a=-4,9 \\ b=12,2 \end{cases}$.

Vậy hàm số Parabol cần tìm có dạng: $y=-4,9t^2+12,2t+1,2$

Câu 11: Một miếng nhôm có bề ngang 32 cm được uốn cong tạo thành rảnh dẫn nước bằng chia tấm nhôm thành 3 phần rồi gấp 2 bên lại theo một góc vuông. Người ta cần nghiên cứu cách để tạo ra đường rảnh có diện tích mặt ngang S lớn nhất để có thể cho nước đi qua nhiều nhất.

a) Lập hàm số để biểu diễn diện tích S theo biến x (x là bề ngang hai phần bên của tấm nhôm)

b) Xác định x để có được diện tích S lớn nhất



Lời giải

a) S là diện tích hình chữ nhật nên $S=(32-2x).x=-2x^2+32x$

b) Ta có: S là một hàm số bậc 2.

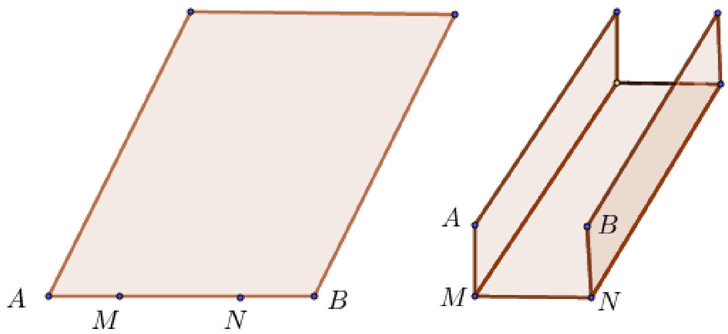
• Đỉnh $I(8;128)$

• BBT:

x	$-\infty$		8		$+\infty$
S			128		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$

Dựa vào BBT, $S_{\max}=128$ khi $x=8$

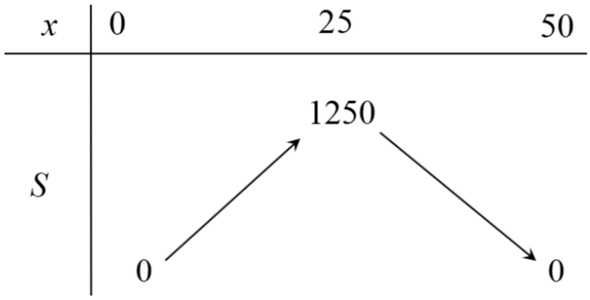
Câu 12: Một tấm tôn có bề rộng AB là $100cm$. Người ta chọn 2 điểm M và N trên đoạn AB sao cho có thể làm được một máng nước như hình vẽ. ($AMNB$ là hình chữ nhật). Tìm MN để máng nước có diện tích $AMNB$ lớn nhất.



Lời giải

$MN=2x\left(0<x<50, x(cm)\right) \Rightarrow AM=NB=50-x$.

Khi đó diện tích bề mặt ngang là $S=2x(50-x)=-2x^2+100x$.



Vậy $MN = 50cm$ thì $S\max = 1250cm^2$.

Câu 13: Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe hon đa Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.

Lời giải

• Gọi x đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \le x \le 4)$.

Khi đó:

• Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$.

• Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$.

• Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là:

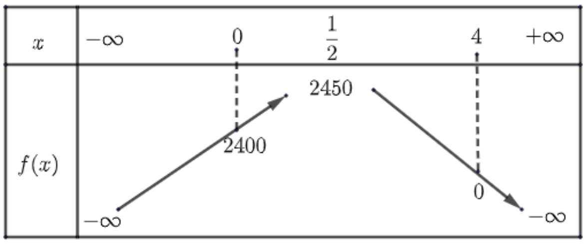
$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

• Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0;4]$

• TXĐ: $D = R$

• Đỉnh $I\left(\frac{1}{2};2450\right)$

• BBT:



• Vậy $\max\limits_{[0.4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

Tức là khi giảm giá mỗi xe đi 0,5 triệu đồng thì số xe bán ra được nhiều nhất

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu dồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.