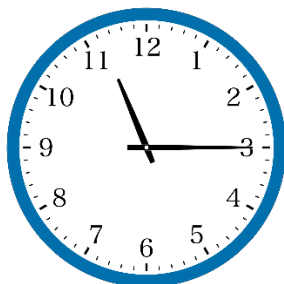




HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN LƯỢNG GIÁC

Câu 1: Trên mặt chiếc đồng hồ kim phút chỉ số 3 như hình vẽ.



Hỏi khi kim giờ chỉ số 2 (lần đầu tiên) thì kim phút quay một góc bao nhiêu độ?

Lời giải

Khi kim giờ chỉ số 2 thì kim phút quay số vòng là $\frac{3}{4} + 2 = \frac{11}{4}$ vòng.

Nên kim giờ đã quay một góc -990° .

Câu 2: Trên mặt chiếc đồng hồ kim giây chỉ số 12 như hình vẽ.



Hỏi khi kim phút chỉ số 3 (lần đầu tiên) thì kim giây quay một góc bao nhiêu độ?

Lời giải

Khi kim phút chỉ số 2 thì kim giây quay số vòng là 5 vòng.

Nên kim giờ đã quay một góc -1800° .

Câu 3: Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270° ?

Lời giải

Tính được: $270^\circ = \frac{270}{180}\pi = \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}.2\pi$

Vậy đu quay quay được góc 270° khi nó quay được $\frac{3}{4}$ vòng

Ta có: Đu quay quay được 1 vòng trong $\frac{1}{3}$ phút

Đu quay quay được $\frac{3}{4}$ vòng trong $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 4: Bánh xe của một người đi xe đạp quay được 15 vòng trong 6 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 10 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là 660 mm.

Lời giải

Bán kính bánh xe đạp là: $r = \frac{d}{2} = 330 \text{ mm} = 33 \text{ cm}$.

Khi bánh xe quay được một vòng, thì người lái xe đi được một quãng đường dài bằng chu vi bánh xe và bằng $l_0 = 2\pi r = 66\pi \text{ cm}$.

Sau khi đi được 10 phút, bánh xe quay được $2,5 \cdot 10 \cdot 60 = 1500$ vòng.

Vậy trong 10 phút, người đó đi được $l = 1500 \cdot 66\pi = 99000\pi \text{ cm}$.

Câu 5: Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 184cm, bánh xe trước có đường kính là 92cm, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút. Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút

Lời giải

Bán kính của bánh xe sau: $\frac{184}{2} = 92 \text{ cm}$

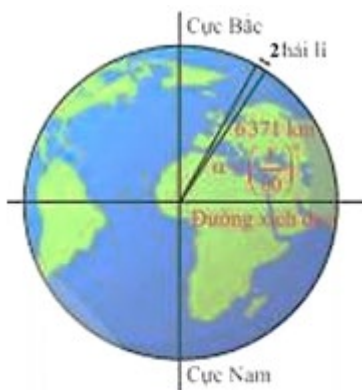
Góc mà bánh xe sau quay được trong 10 phút là:

$$10 \times 80 \times 360^\circ = 288000^\circ = 288000^\circ \times \frac{\pi}{180} = 1600\pi \text{ rad}$$

Quãng đường đi được của máy kéo sau 10 phút là: $92 \times 1600\pi \approx 462208(\text{cm}) = 4.62208 \text{ km}$

Câu 6: Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$

của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Hình 17

Lời giải

$$\alpha = \left(\frac{1}{60} \right)^\circ = \frac{\pi}{10800} \text{ rad}$$

$$2 \text{ hải lí} = 2 \cdot \frac{\pi}{10800} \cdot 6371 \approx 3,71(\text{km})$$

Câu 7: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 15 vòng trong 4 giây. Biết đường kính của bánh xe là 680mm, hỏi trong 1 giây người đó đã đi được quãng đường bao nhiêu?

Lời giải

Trong 1 giây người bánh xe quay được số vòng là $\frac{15}{4}$ nên bánh xe quay được một góc là

$$\frac{15}{4} \cdot 2\pi = \frac{15\pi}{2}.$$

Suy ra quãng đường người đó đi được là $\frac{15\pi}{2} \cdot 340 = 2550\pi \text{ mm}$.

Câu 8: Bánh xe của bé An có đường kính 30,48cm và quay được 11 vòng trong vòng 5 giây. Bé An đi được quãng đường 500 mét sau bao nhiêu phút (làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Mỗi giây bé An đi được quãng đường là $\frac{11}{5} \cdot 2\pi \cdot 0,1524 = \frac{4191\pi}{6250} \text{ m}$.

Để đi được quãng đường 500 mét bé An cần đi thời gian là $600 \cdot \frac{6250}{4191\pi}$ giây xấp xỉ 4 phút.

Câu 9: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A, vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất và bán kính 9000km. Biết vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ. Hỏi vệ tinh chuyển động quãng đường 300000km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Mỗi giờ vệ tinh đi được quãng đường là $\frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 9000 = 9000\pi \text{ km}$.

Để vệ tinh đi được quãng đường 300000km cần đi thời gian là $\frac{300000}{9000\pi} \approx 10,61$ giờ.

Câu 10: Trạm vũ trụ Quốc tế ISS nằm trong quỹ đạo tròn cách bề mặt trái Trái Đất khoảng 400km . Nếu trạm mặt đất theo dõi được trạm vũ trụ ISS khi nó nằm trong góc 60° ở tâm của quỹ đạo tròn này phía trên ăng – ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu kilômét (làm tròn tới hàng đơn vị) trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng đường kính trái đất là 12800km .

Lời giải

Bán kính quỹ đạo của trạm vũ trụ quốc tế là $R = 6400 + 400 = 6800\text{ km}$.

$$\text{Đôi } 45^\circ = 60 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3}.$$

Vậy khi được trạm mặt đất theo dõi, trạm ISS đã di chuyển quãng đường là

$$l = 6800 \cdot \frac{\pi}{3} \approx 7121\text{ km}.$$

Câu 11: Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 192cm , bánh xe trước có đường kính là 96cm , xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết vận tốc của bánh xe trước là 150 vòng/phút. Tính vận tốc bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Lời giải

Trong vòng 1 phút bánh xe trước quay một góc $150 \cdot 2\pi = 300\pi\text{ rad}$.

Trong vòng 1 phút máy kéo đi được quãng đường là $S = 300\pi \cdot 96 = 28800\pi\text{ cm}$.

Suy ra trong vòng 1 phút bánh xe sau quay một góc 150π .

Vậy vận tốc của bánh xe sau là $\frac{150\pi}{2\pi} = 75$ vòng/phút.

Câu 12: Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 184cm , bánh xe trước có đường kính là 92cm , xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút.



- Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút.
- Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).
- Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Lời giải

a) Chu vi của bánh xe sau là: $C_s = \pi \cdot 184$ (cm).

Khi đó, bánh xe sau đi mỗi vòng được quãng đường có độ dài là 184π (cm).

Trong 10 phút, bánh xe sau chuyển động được $80 \cdot 10 = 800$ (vòng).

Quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút hay chính là quãng đường đi được khi bánh xe sau lăn 800 vòng là $800 \cdot 184\pi = 147200\pi$ (cm) $= 1,472\pi$ (km).

b) Ta có: 10 phút $= \frac{1}{6}$ giờ.

Vận tốc của máy kéo là $v = \frac{1,472\pi}{\frac{1}{6}} \approx 27,75$ (km/giờ).

c) Chu vi của bánh xe trước là: $C_t = \pi \cdot 92$ (cm).

Khi bánh xe sau lăn được 800 vòng trong 10 phút thì bánh xe trước lăn được số vòng là $\frac{147200\pi}{92\pi} = 1600$ (vòng).

Vận tốc của bánh xe trước trong chuyển động này là $\frac{1600}{10} = 160$ (vòng/phút).

Câu 13: Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 196 cm, bánh xe trước có đường kính là 98 cm, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 90 vòng/phút.



a) Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 5 phút.

b) Tính vận tốc của máy kéo (theo đơn vị km/giờ).

c) Tính vận tốc của bánh xe trước (theo đơn vị vòng/phút).

Lời giải

a) Bán kính của bánh xe sau: $\frac{196}{2} = 98$ cm

Góc mà bánh xe quay sau được trong 5 phút

$$\text{là: } 5 \times 90 \times 360^\circ = 162000^\circ = 162000^\circ \times \frac{\pi}{180} = 900\pi \text{ rad}$$

Quãng đường đi được của máy kéo sau 5 phút là: $98 \times 900\pi \approx 277088(\text{cm}) = 2,77088 \text{ km}$

b) Đổi 5 phút = $\frac{1}{12}$ giờ

Vận tốc của máy kéo là: $2,77088 : \frac{1}{12} \approx 33,25 \text{ (km/h)}$

c) Góc mà bánh trước quay được trong 5 phút là: $98 \times 900\pi : \frac{98}{2} = 1800\pi(\text{rad}) = 324000^\circ$

Số vòng lăn được của bánh xe trước là: $324000 : 360 = 900 \text{ (vòng)}$

Vận tốc bánh trước là: $900 : 5 = 180 \text{ (vòng/phút)}$

Câu 14: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 15 vòng trong 7 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm .

Lời giải

a) 1 giây bánh xe quay được số vòng là: $15 : 7 = \frac{15}{7} \text{ (vòng)}$

Góc mà bánh xe quay được trong 1 giây: $\frac{15}{7} \times 360^\circ = 771^\circ 25' 43'' = \frac{30}{7}\pi \approx 4,3\pi(\text{rad})$

b) Ta có: 1 phút = 60 giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60 \times \frac{15}{7} = \frac{900}{7}$ vòng.

Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi(\text{mm})$.

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là

$$680\pi \times \frac{900}{7} = \frac{612000}{7}\pi(\text{mm}) = 274665(\text{mm}) \approx 274,665(\text{m})$$

Câu 15: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 12000 km . Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $4h$.

a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: $1h$; $3h$; $6h$; $11h$.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường $500000(\text{km})$ sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a)

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 4 giờ là

$$12000.2\pi = 24000\pi (km)$$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ là

$$12000.2\pi \cdot \frac{1}{4} = 6000\pi (km)$$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 3 giờ là

$$12000.2\pi \cdot \frac{3}{4} = 18000\pi (km)$$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 6 giờ là

$$12000.2\pi \cdot \frac{6}{4} = 36000\pi (km)$$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 11 giờ là

$$12000.2\pi \cdot \frac{11}{4} = 66000\pi (km)$$

b)

Ta thấy quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 1 giờ là: $6000\pi (km)$

Vệ tinh chuyển động được quãng đường $500000 (km)$ trong thời gian là:

$$\frac{500000}{6000\pi} = 26,5258... \approx 27 \text{ (giờ)}$$

Câu 16: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh trái đất theo quỹ đạo là đường tròn có tâm là tâm O của trái đất, bán kính 9000 km . Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 giờ.

a) Tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 3 giờ.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 30000 km sau bao lâu?

Lời giải

a) Sau 2 giờ vệ tinh chuyển động được quãng đường là $l = 2\pi R = 2.3,14.9000 = 56520 \text{ km}$.

Vậy sau 3 giờ vệ tinh chuyển động được quãng đường là: $l_3 = \frac{3.56520}{2} = 84780 \text{ km}$.

b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 30000 km sau thời gian là $t = \frac{30000.2}{56520} \approx 1,06 \text{ giờ}$.

Câu 17: Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 11 rad/s (Hình vẽ). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau 1 phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu? Biết rằng bán kính $OA = 38 \text{ cm}$, độ dày của lốp xe không đáng kể.



Lời giải

Sau 1 phút di chuyển van V cách vị trí A một góc $\alpha = 11.60 = 660 \text{ rad} = \left(\frac{118800}{\pi}\right)^0$.

Khoảng cách từ van V đến trục Ox là: $d = OV \cdot \sin \alpha = 38 \cdot \sin\left(\frac{118800}{\pi}\right) \approx 9,97 \text{ (cm)}$.

Khoảng cách từ van V đến mặt đất là: $l = 38 - d = 38 - 9,97 = 28,03 \text{ (cm)}$.

Câu 18: Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là 13 rad/s (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 62 \text{ cm}$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 13

Lời giải

Ta có, tọa độ điểm V biểu diễn cho góc lượng giác trên có tọa độ là: $V(62 \cdot \cos \alpha; 62 \cdot \sin \alpha)$

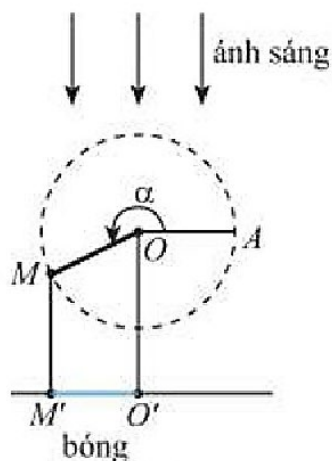
Sau một phút di chuyển, van V quay được một góc lượng giác là $-13 \cdot 60 = -780 \text{ (rad)}$

Khi đó, tọa độ điểm V biểu diễn cho góc lượng giác trên có tọa độ là: $V(62 \cdot \cos(-780); 62 \cdot \sin(-780))$ hay $V(39,3; -48)$

Khoảng cách từ van đến mặt đất là: $62 + (-48) \approx 14 \text{ (cm)}$

Câu 19: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài

bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $5\frac{1}{6}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 50 cm ? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Hình 12

Lời giải

Sau khi thanh OM quay được 5 vòng, vị trí của thanh là OA .

Quay tiếp $\frac{1}{6}$, thanh sẽ tạo với OA một góc $\alpha = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

Độ dài của bóng $O'M' = OM \cos \alpha = 50 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 25(\text{cm})$.

Câu 20: Một đường tròn có bán kính 20 cm . Tìm độ dài của các cung trên đường tròn đó có số đo sau:

- a) $\frac{\pi}{12}$
- b) $1,5$;
- c) 35° ;
- d) 315° .

Lời giải

a) Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times \frac{\pi}{12} = 5.236 \text{ (cm)}$

b) Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times 1.5 = 30 \text{ (cm)}$

c) Đổi $35^\circ = \frac{7\pi}{36}$

Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times \frac{7\pi}{36} = 12.2173 \text{ (cm)}$

d) Đổi $315^\circ = \frac{7\pi}{4}$

Độ dài cung đường tròn: $l = 20 \times \frac{7\pi}{4} = 109.9557 \text{ (cm)}$

Câu 21: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 11 vòng trong 5 giây.

- a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.
b) Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm .

Lời giải

a) 1 giây bánh xe quay được số vòng là: $11:5 = \frac{11}{5}$ (vòng)

Góc mà bánh xe quay được trong 1 giây: $\frac{11}{5} \times 360^\circ = 792^\circ = 4.4\pi \text{ (rad)}$

b) Ta có: 1 phút = 60 giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60 \times \frac{11}{5} = 132$ vòng.

Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi \text{ (mm)}$.

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là

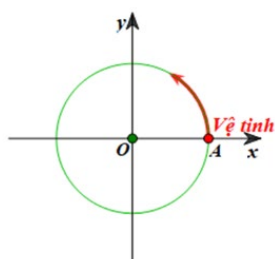
$$680\pi \times 132 = 89760\pi \text{ (mm)} = 89,76\pi \text{ (m)}$$

Câu 22: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km . Biết rằng vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong 2 h .

- a) Hãy tính quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau: $1 \text{ h}; 3 \text{ h}; 5 \text{ h}$.
b) Vệ tinh chuyển động được quãng đường 200000 km sau bao nhiêu giờ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Giả sử vệ tinh được định tại vị trí A , chuyển động quanh Trái Đất được mô tả như hình vẽ dưới đây:



a) Vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo tức là vệ tinh chuyển động được quãng đường bằng chu vi của quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất, bán kính 9000 km .

Do đó quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau 2 h là: $2\pi \cdot 9000 = 18\pi \text{ (km)}$

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $1h$ là: $\frac{18\pi}{2} \cdot 1 = 9\pi(km)$.

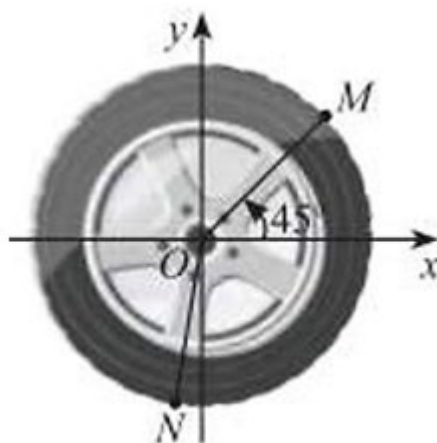
Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $3h$ là: $\frac{18\pi}{2} \cdot 3 = 27\pi(km)$.

Quãng đường vệ tinh đã chuyển động được sau $5h$ là: $\frac{18\pi}{2} \cdot 5 = 45\pi(km)$.

b) Ta thấy vệ tinh chuyển động được quãng đường là $9\pi(km)$ trong $1h$.

Vậy vệ tinh chuyển động được quãng đường $200000 km$ trong thời gian là: $\frac{200000}{9\pi} \approx 7074$ (giờ).

Câu 23: Trong Hình 15, mâm bánh xe ô tô được chia thành năm phần bằng nhau. Viết công thức số đo tổng quát của góc lượng giác (Ox, ON) .



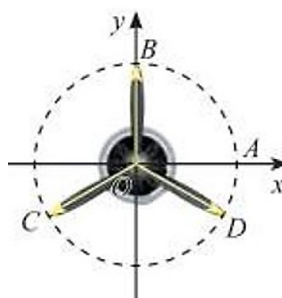
Hình 15

Lời giải

$$(Ox, ON) = -99^\circ + k \cdot 360^\circ$$

Câu 24: Vị trí các điểm B, C, D trên cánh quạt động cơ máy bay trong Hình 16 có thể được biểu diễn cho các góc lượng giác nào sau đây?

$$\frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{-\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}); \quad \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

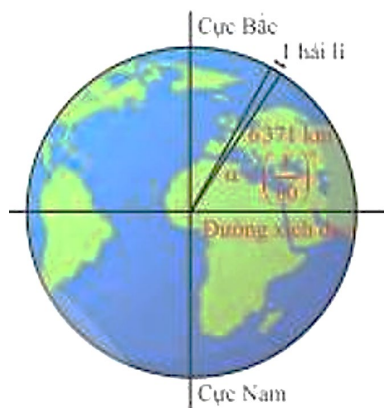


Hình 16

Lời giải

Điểm B, C, D biểu diễn cho góc lượng giác $\frac{\pi}{2} + k \frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

Câu 25: Hải lí là một đơn vị chiều dài hàng hải, được tính bằng độ dài một cung chắn một góc $\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ$ của đường kinh tuyến (Hình 17). Đổi số đo α sang radian và cho biết 1 hải lí bằng khoảng bao nhiêu kilômét, biết bán kính trung bình của Trái Đất là 6371 km . Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



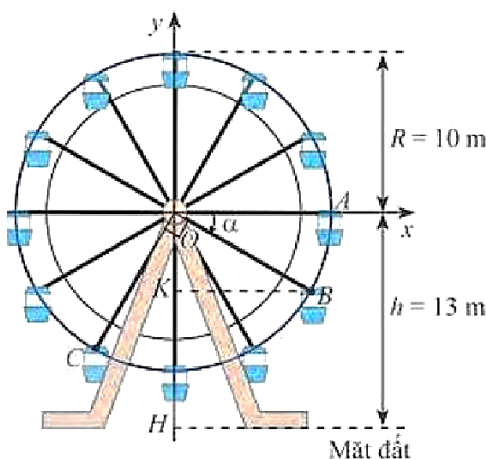
Hình 17

Lời giải

$$\alpha = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ = \frac{\pi}{10800} \text{ rad}$$

$$1 \text{ hải lí} = \frac{\pi}{10800} \cdot 6371 \approx 1,85 (\text{km})$$

Câu 26: Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C.



Hình 11

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10 \sin \alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA, tia cuối OB. Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.

b) Khi điểm B cách mặt đất $4m$ thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng KH

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn trên thì $\alpha > 0, \sin \alpha > 0$ và $OK = 10 \sin \alpha$

Ta có: $KH = OH + OK = 13 + 10 \sin \alpha$

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn dưới thì $\alpha < 0, \sin \alpha < 0$ và $OK = 10 \cdot (-\sin \alpha)$.

Ta có : $KH = OH - OK = 13 - 10 \cdot (-\sin \alpha) = 13 + 10 \sin \alpha$

Khi $\alpha = -30^\circ, KH = 13 + 10 \cdot \frac{-1}{2} = 8$

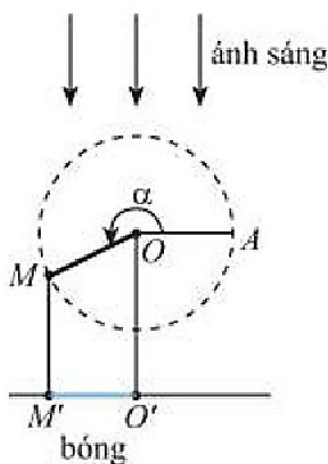
b) Gọi $(OA, OC) = \beta$. Ta có: $\beta = \alpha - 90^\circ$

Khi $KH = 4$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{-9}{10}, \alpha < 0$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-9}{10}\right)^2} = \frac{-\sqrt{19}}{10}$$

Điểm C cách mặt đất là: $13 + 10 \sin \beta \approx 12,96$

Câu 27: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh trục O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như Hình 12. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $3\frac{1}{10}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là $15cm$? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 12

Lời giải

Sau khi thanh OM quay được 3 vòng, vị trí của thanh là OA .

Quay tiếp $\frac{1}{10}$, thanh sẽ tạo với OA một góc $\alpha = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$

Độ dài của bóng $O'M' = OM \cos \alpha = 15 \cdot \cos \frac{\pi}{5} = 12,1(cm)$.

Câu 28: Khi xe đạp di chuyển, van V của bánh xe quay quanh trục O theo chiều kim đồng hồ với tốc độ góc không đổi là $11 rad/s$ (Hình 13). Ban đầu van nằm ở vị trí A . Hỏi sau một phút di chuyển, khoảng cách từ van đến mặt đất là bao nhiêu, biết bán kính $OA = 58cm$? Giả sử độ dày của lốp xe không đáng kể. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Hình 13

Lời giải

Sau một phút di chuyển, van V quay được một góc là $11 \cdot 60 = 660$ (rad)

Khoảng cách từ van đến mặt đất là: $58 + 58 \cdot \sin 660 \approx 57,7(cm)$

Câu 29: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 45 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều thuận. Sau 3 giây, quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

Trong 3 giây, quạt quay được: $3 \cdot \frac{45}{60} = \frac{9}{4}$ (vòng)

Vậy quạt quay được một góc: $2\pi \cdot \frac{9}{4} = \frac{9\pi}{2}$ (rad)

Câu 30: Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 6 giây.

a) Tính góc (theo độ và radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây.

b) Tính quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút, biết rằng đường kính bánh xe đạp là $860mm$.

Lời giải

a) Trong 1 giây, bánh xe quay được $\frac{12}{6} = 2$ vòng, tức là quay được một góc $4\pi(rad)$ hay 720° .

.

b) Trong 1 phút, quãng đường mà người đi xe đã đi được là:

$$I = 430 \cdot 4\pi \cdot 60 = 103200\pi(mm).$$

Câu 31: Kim giờ dài 6cm và kim phút dài 11cm của đồng hồ chỉ 4 giờ. Hỏi thời gian ít nhất để 2 kim vuông góc với nhau là bao nhiêu? Lúc đó tổng quãng đường hai đầu mút kim giờ và kim phút đi được là bao nhiêu?

Lời giải

Một giờ, kim phút quét được một góc lượng giác 2π ; kim giờ quét được một góc $\frac{\pi}{6}$. Hiệu vận

tốc giữa kim phút và kim giờ là $2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$.

Vào lúc 4 giờ hai kim tạo với nhau một góc là $\frac{2\pi}{3}$.

Khoảng thời gian ít nhất để hai kim vuông góc với nhau là $\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) : \frac{11\pi}{6} = \frac{1}{11}$ (giờ)

Vậy sau $\frac{1}{11}$ (giờ) hai kim sẽ vuông góc với nhau.

Tổng quãng đường hai đầu mút kim đi được là $I = R \cdot \alpha = 6 \cdot \frac{1}{11} \cdot \frac{\pi}{6} + 11 \cdot \frac{1}{11} \cdot 2\pi = \frac{23\pi}{11}(cm)$.

Câu 32: Kim phút và kim giờ của đồng hồ lớn nhà Bưu điện Thành phố Hà Nội theo thứ tự dài 1,75m và 1,26m. Hỏi trong 15 phút, mũi kim phút vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu mét? Cũng câu hỏi đó cho mũi kim giờ.

Lời giải

a) Trong 15 phút thì mũi kim phút vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4}$ độ dài đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$$\frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot 2\pi \cdot 1,75 = \frac{7}{8}\pi \approx 2,75(m).$$

b) Trong 15 phút thì mũi kim giờ vạch nên một cung tròn có độ dài bằng $\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12}$ đường tròn, do đó độ dài của cung này bằng

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot R = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{12} \cdot 2\pi \cdot 1,26 = \frac{21}{400}\pi \approx 0,16(m).$$

Câu 33: Huyện lỵ Quận Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lỵ Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quận Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài cung kinh tuyến nối hai huyện lỵ đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính 6378km.

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quận Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23^\circ - 9^\circ = 14^\circ$. Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng $\frac{6378 \cdot 14 \cdot \pi}{180} \approx 1558(km)$

Câu 34: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương.

- a) Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?
b) Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Lời giải

a) Sau 1 giây, cánh quạt quay được $\frac{175}{60} = \frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12} \cdot 2\pi = \frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6} \cdot 5 = \frac{175\pi}{6}$.

b) Thời gian để cánh quạt quay được một góc có số đo 42π là

$$42\pi : \frac{35\pi}{6} = 7,2 \text{ giây.}$$

Câu 35: Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



- a) Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?
b) Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm . Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?

Lời giải

a) Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8} = 3,75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75 \cdot 60 = 225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225 \cdot 2\pi = 450\pi$.

b) Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r = 0,35\text{ m}$.

Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là $450\pi \cdot 0,35 \approx 494,8(m)$.

Câu 36: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2h$ theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được $3h$, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Theo giả thiết, vệ tinh chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau $2h$, bán kính của vòng quay khi vệ tinh chuyển động quét được một góc lượng giác bằng $-2\pi(\text{rad})$.

Vậy khi vệ tinh chuyển động được $3h$ thì bán kính của vòng quay quét được một góc lượng giác bằng -3π (rad).

Câu 37: Một vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút. Tại vị trí quan sát, bạn Linh thấy vòng quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Khi vòng quay chuyển động được 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Do vòng quay Mặt Trời quay mỗi vòng khoảng 15 phút và chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau 15 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng $-2\pi(\text{rad})$.

Do đó, sau 10 phút, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng $\frac{-2\pi}{15} \cdot 10 = \frac{-4\pi}{3}(\text{rad})$.

Câu 38: Một quả bóng Golf kể từ lúc được đánh đến lúc chạm mặt đất đã di chuyển được một khoảng cách d (mét) theo phương nằm ngang. Biết rằng $d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}$ trong đó v_0 (m/s) là vận tốc ban đầu của quả bóng, g là gia tốc trọng trường và φ là góc đánh quả bóng so với phương nằm ngang. Tính giá trị của $\cos 2\varphi$, $\sin \varphi$ khi $v_0 = 15(\text{m/s})$, $g = 10(\text{m/s}^2)$, $d = 18(\text{m})$.

Lời giải

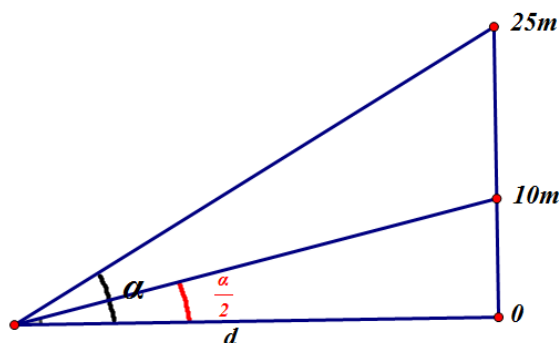
$$\text{Ta có } d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g} \text{ nên } 18 = \frac{(15)^2 \cdot \sin 2\varphi}{10} \Leftrightarrow \sin 2\varphi = \frac{180}{225} = \frac{4}{5}.$$

$$0^\circ < \varphi < 45^\circ \Rightarrow 0^\circ < 2\varphi < 90^\circ \Rightarrow \cos 2\varphi > 0 \text{ nên } \cos 2\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \varphi < 45^\circ \Rightarrow \cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi \Leftrightarrow \sin \varphi = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Câu 39: Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất $25(\text{m})$ tại một góc ngắm (góc hợp bởi phương ngắm với phương ngang). Nếu giảm góc ngắm đi một nửa thì vận động viên bắn trúng mục tiêu cách mặt đất $10(\text{m})$. Tính khoảng cách từ vận động viên đến bức tường?

Lời giải

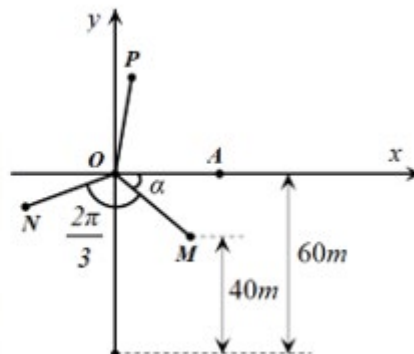


Gọi d là khoảng cách từ vận động viên đến bức tường, α là góc ngắm lúc đầu của vận động viên. Ta có $\tan \alpha = \frac{25}{d}$; $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{d}$.

Công thức nhân đôi: $\tan \alpha = \frac{2 \tan \frac{\alpha}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\alpha}{2}} \Rightarrow \frac{25}{d} = \frac{\frac{20}{d}}{1 - \frac{100}{d^2}} \Leftrightarrow \frac{25}{d} = \frac{20d}{d^2 - 100} \Leftrightarrow d^2 = 500$

$\Leftrightarrow d = 10\sqrt{5} \approx 22,36(m)$

Câu 40: Trong hình bên dưới, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài $31m$, độ cao của điểm M so với mặt đất là $40m$, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α .



a) Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

b) Tính sin của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) $\sin \alpha = \frac{-20}{31} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{-20}{31}\right)^2} = \frac{\sqrt{561}}{31}$

b)

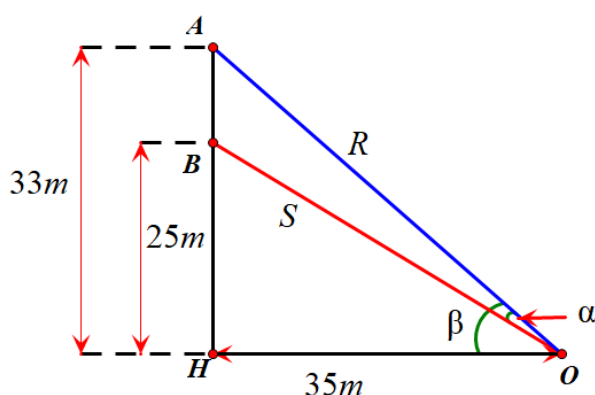
$$\begin{aligned}\sin(OA, ON) &= \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\alpha \cdot \cos\frac{2\pi}{3} - \cos\alpha \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \\ &= -\frac{20}{31} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{\sqrt{561}}{31} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,34\end{aligned}$$

Chiều cao điểm N so với mặt đất là: $60 + 31 \cdot (-0,34) = 49,46m$

$$\sin(OA, OP) = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\alpha \cdot \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\alpha \cdot \sin\frac{2\pi}{3} \approx 0,98$$

Chiều cao điểm P so với mặt đất là: $60 + 31 \cdot 0,98 = 90,38m$.

Câu 41: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $33m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $25m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $35m$ (như hình vẽ bên dưới).



- Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Xét $\triangle AOH$ vuông tại H , ta có: $\tan\beta = \frac{AH}{HO} = \frac{33}{35}$.

Đặt $\widehat{BOH} = \gamma$

Xét $\triangle BOH$ vuông tại H , ta có: $\tan\gamma = \frac{BH}{HO} = \frac{25}{35} = \frac{5}{7}$.

$$\tan\alpha = \tan(\beta - \widehat{BOH}) = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan\beta - \tan\gamma}{1 + \tan\beta \tan\gamma}$$

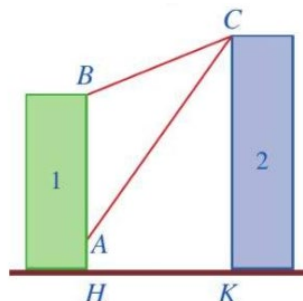
$$= \frac{\frac{33}{35} - \frac{5}{7}}{1 + \frac{33}{35} \cdot \frac{5}{7}} = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{82}{49}} = \frac{28}{205}$$

$$\text{Vậy } \tan\alpha = \frac{28}{205}.$$

- Từ $\tan\alpha = \frac{28}{205}$, để tìm số đo góc α , ta sử dụng máy tính cầm tay, ta được kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ là 8° .

Vậy $\alpha \approx 8^\circ$.

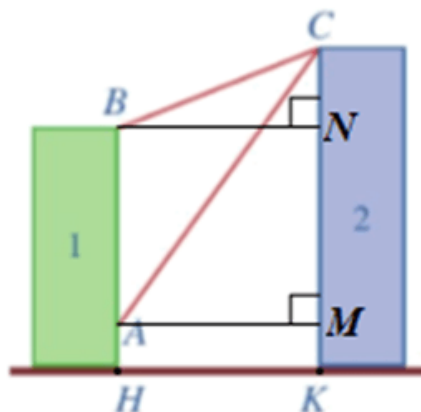
Câu 42: Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 50m$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C . Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $70m$, $AH = 2m, BH = 50m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

Lời giải

Kẻ $AM \perp CK, BN \perp CK$ (hình vẽ) ta có:



$$BN = AM = HK = 50m;$$

$$CN = CK - NK = CK - BH = 70 - 50 = 20m;$$

$$MN = AB = BH - AH = 50 - 2 = 48m;$$

$$CM = CN + MN = 20 + 48 = 68 \text{ (m)}.$$

Đặt $\widehat{BCN} = \alpha, \widehat{ACM} = \beta$.

$$\text{Xét } \triangle BCN \text{ vuông tại N có: } \tan \alpha = \frac{BN}{CN} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2};$$

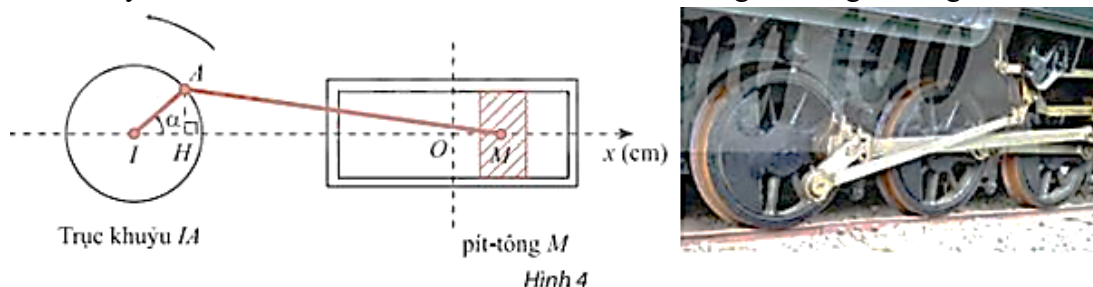
$$\text{Xét } \triangle ACM \text{ vuông tại M có: } \tan \beta = \frac{AM}{CM} = \frac{50}{68} = \frac{25}{34};$$

$$\text{Ta có: } \tan \widehat{ACB} = \tan (\widehat{BCN} - \widehat{ACM}) = \tan (\alpha - \beta)$$

$$\Rightarrow \tan \widehat{ACB} = \tan (\alpha - \beta) = \frac{\frac{5}{2} - \frac{25}{34}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{25}{34}} = \frac{120}{193}.$$

Suy ra: $\widehat{ACB} = 31,87176...^\circ \approx 31,9^\circ$.

Câu 43: Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .



- a) Biết $IA = 7\text{ cm}$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .
- b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -4\text{ cm}$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì M ở vị trí O , H ở vị trí I . Ta có $IO = HM = AM$

$$x_M = IM - OI = IH + HM - OI = IH + AM - AM = IH = IA \cdot \cos \alpha$$

$$x_M = 7 \cos \alpha$$

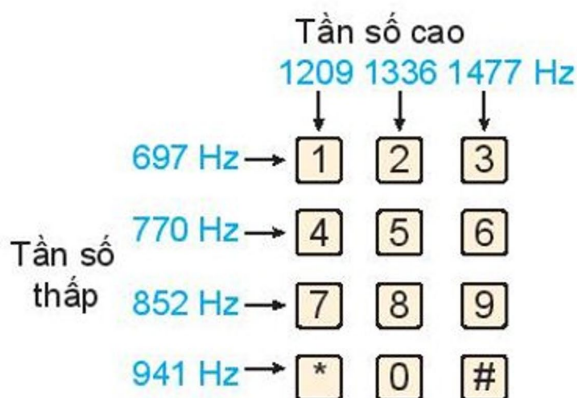
b) Sau khi chuyển động 1 phút, trục khuỷu quay được một góc là α

Khi đó $x_M = -4\text{ cm}$. Suy ra $\cos \alpha = \frac{-4}{7}$

Sau khi chuyển động 2 phút, trục khuỷu quay được một góc là 2α

$$x_M = 7 \cdot \cos 2\alpha = 7 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) = 7 \cdot \left(2 \left(\frac{-4}{7} \right)^2 - 1 \right) = -\frac{17}{7} \approx -2,4$$

Câu 44: Khi nhấn một phím trên điện thoại cảm ứng, bàn phím sẽ tạo ra hai âm thuần, kết hợp với nhau để tạo ra âm thanh nhận dạng duy nhất phím. Hình cho thấy tần số thấp f_1 và tần số cao f_2 liên quan đến mỗi phím. Nhấn một phím sẽ tạo ra sóng âm $y = \sin(2\pi f_1 t) + \sin(2\pi f_2 t)$, ở đó t là biến thời gian (tính bằng giây).



- a) Tìm hàm số mô hình hoá âm thanh được tạo ra khi nhấn phím 4.
b) Biến đổi công thức vừa tìm được ở câu a về dạng tích của một hàm số sin và một hàm số cosin.

Lời giải

a) $y = \sin(2\pi 770t) + \sin(2\pi 1209t) = \sin(1540\pi t) + \sin(2418\pi t)$

b)

$$\sin(1540\pi t) + \sin(2418\pi t) = 2 \sin \frac{1540\pi t + 2418\pi t}{2} \cos \frac{1540\pi t - 2418\pi t}{2} = 2 \sin(1979\pi t) \cos(-878\pi t)$$

Câu 45: Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (cm),$$

$$x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (cm).$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

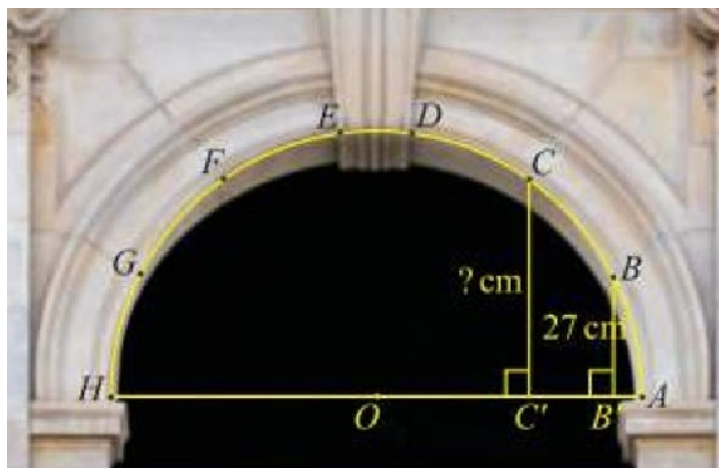
$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos \frac{\pi}{4} \right] = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$$

Biên độ là $A = 2\sqrt{2}$, pha ban đầu là $\varphi = -\frac{\pi}{12}$

Câu 46: Trong kiến trúc, các vòm cổng bằng đá thường có hình nửa đường tròn để có thể chịu lực tốt. Trong hình bên, vòm cổng được ghép bởi sáu phiến đá hai bên tạo thành các cung AB, BC, CD, EF, FG, GH bằng nhau và một phiến đá chót ở đỉnh. Nếu biết chiều rộng cổng và khoảng

cách từ điểm B đến đường kính AH , làm thế nào để tính được khoảng cách từ điểm C đến AH ?



Lời giải

Do các cung AB, BC bằng nhau nên góc lượng giác $(OC, OB) = (OB, OA)$

Suy ra $(OC, OA) = 2 \cdot (OB, OA)$

Ta có:

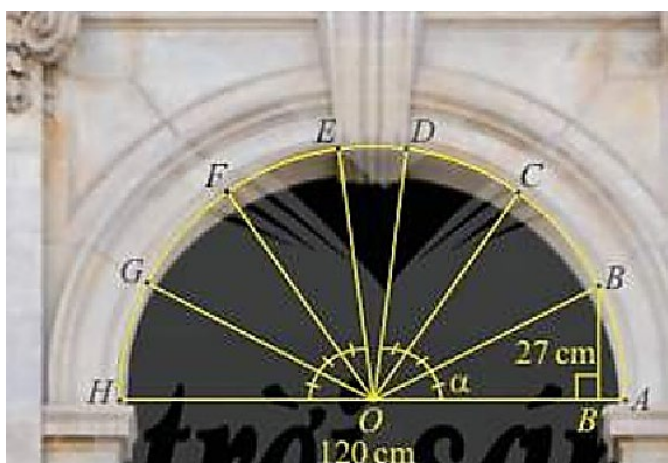
$$BB' = R \cdot \sin(OB, OA)$$

$$CC' = R \cdot \sin(OC, OA)$$

Do ta biết được BB' , đường kính AH nên có thể tính được R và $\sin(OB, OA)$

Từ đó tính được $\sin(OC, OA)$ và biết được khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH .

Câu 47: cho biết vòm cổng rộng 120 cm và khoảng cách từ B đến đường kính AH là 27 cm . Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$, từ đó tính khoảng cách từ điểm C đến đường kính AH . Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 2

Lời giải

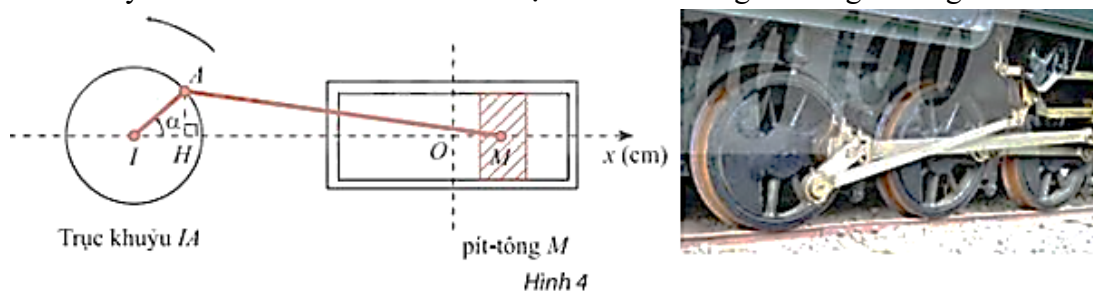
Ta có $AH = 120$. Suy ra $R = 120 : 2 = 60(\text{cm})$

$$\sin \alpha = \frac{BB'}{R} = \frac{27}{60} = \frac{9}{20}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{319}}{20} \text{ do có } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$CC' = R \cdot \sin 2\alpha = R \cdot 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 60 \cdot 2 \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{\sqrt{319}}{20} \approx 48,2(\text{cm})$$

Câu 48: Trong Hình 4, pít-tông M của động cơ chuyển động tịnh tiến qua lại dọc theo xi-lanh làm quay trục khuỷu IA . Ban đầu I, A, M thẳng hàng. Cho α là góc quay của trục khuỷu, O là vị trí của pít-tông khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ và H là hình chiếu của A lên Ix . Trục khuỷu IA rất ngắn so với độ dài thanh truyền AM nên có thể xem như độ dài MH không đổi và gần bằng MA .



a) Biết $IA = 8\text{cm}$, viết công thức tính tọa độ x_M của điểm M trên trục Ox theo α .

b) Ban đầu $\alpha = 0$. Sau 1 phút chuyển động, $x_M = -3\text{cm}$. Xác định x_M sau 2 phút chuyển động. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Khi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ thì M ở vị trí O , H ở vị trí I . Ta có $IO = HM = AM$

$$x_M = IM - OI = IH + HM - OI = IH + AM - AM = IH = IA \cdot \cos \alpha$$

$$x_M = 8 \cos \alpha$$

b) Sau khi chuyển động 1 phút, trục khuỷu quay được một góc là α

$$\text{Khi đó } x_M = -3\text{cm}. \text{ Suy ra } \cos \alpha = \frac{-3}{8}$$

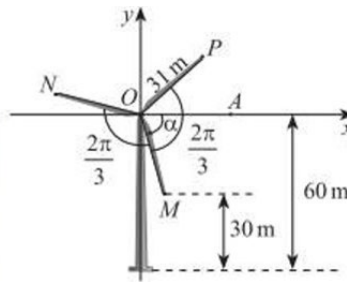
Sau khi chuyển động 2 phút, trục khuỷu quay được một góc là 2α

$$x_M = 8 \cdot \cos 2\alpha = 8 \cdot (2 \cos^2 \alpha - 1) = -5,75$$

Câu 49: Trong Hình 5, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tua-bin gió. Biết các cánh quạt dài 31m , độ cao của điểm M so với mặt đất là 30m , góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số đo góc (OA, OM) là α .



Hình 5



a) Tính $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$.

b) Tính $\sin$ của các góc lượng giác (OA, ON) và (OA, OP) , từ đó tính chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét). Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

$$a) \sin \alpha = \frac{-30}{31} \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{-30}{31}\right)^2} = \frac{\sqrt{61}}{31}$$

$$b) \sin(OA, ON) = \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - \cos \alpha \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \approx 0,27$$

Chiều cao điểm N so với mặt đất là: $60 + 31 \cdot 0,27 = 68,37$ (m)

$$\sin(OA, OP) = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin \alpha \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - + \cos \alpha \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \approx 0,7$$

Chiều cao điểm P so với mặt đất là: $60 + 31 \cdot 0,7 = 81,7$ (m)

Câu 50: Hiệu điện thế và cường độ dòng điện trong một thiết bị điện lần lượt được cho bởi các biểu thức sau:

$$u = 40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t) \quad (V);$$

$$i = 4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t) \quad (A).$$

(Nguồn: Ron Larson, Intermediate Algebra, Cengage)

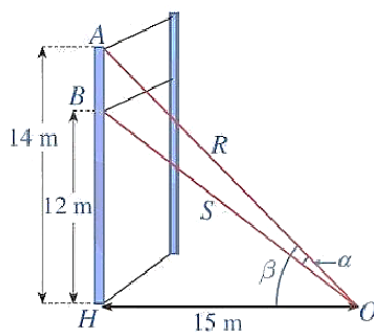
Biết rằng công suất tiêu thụ tức thời của thiết bị đó được tính theo công thức: $P = u \cdot i(W)$. Hãy viết biểu thức biểu thị công suất tiêu thụ tức thời ở dạng không có lũy thừa và tích của các biểu thức lượng giác.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} P &= u \cdot i = [40 \sin(120\pi t) + 10 \sin(360\pi t)] \cdot [4 \sin(120\pi t) + \sin(360\pi t)] \\ &= 160 \sin^2(120\pi t) + 10 \sin^2(360\pi t) + 80 \sin(120\pi t) \sin(360\pi t) \\ &= 80[1 - \cos(240\pi t)] + 5[1 - \cos(720\pi t)] + 40[\cos(360\pi t - 120\pi t) - \cos(360\pi t + 120\pi t)] \\ &= 85 - 80 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) + 40 \cos(240\pi t) - 40 \cos(480\pi t) \\ &= 85 - 40 \cos(240\pi t) - 5 \cos(720\pi t) - 40 \cos(480\pi t)(W). \end{aligned}$$

Câu 51: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất $14m$. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất $12m$. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột $15m$ (Hình 18).



Hình 18

- Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tìm góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Xét $\triangle AOH$ vuông tại H , ta có: $\tan \beta = \frac{AH}{HO} = \frac{14}{15}$.

Đặt $\widehat{BOH} = \gamma$

Xét $\triangle BOH$ vuông tại H , ta có: $\tan \gamma = \frac{BH}{HO} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\tan \alpha = \tan(\beta - \widehat{BOH}) = \tan(\beta - \gamma) = \frac{\tan \beta - \tan \gamma}{1 + \tan \beta \tan \gamma} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{\frac{2}{15}}{\frac{131}{75}} = \frac{10}{131}$$

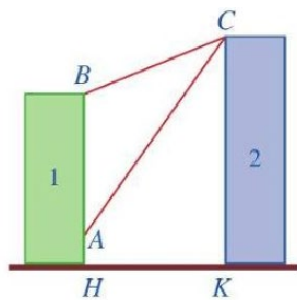
Vậy $\tan \alpha = \frac{10}{131}$.

b) Từ $\tan \alpha = \frac{10}{131}$, để tìm số đo góc α , ta sử dụng máy tính cầm tay

Ta được kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ là 4° .

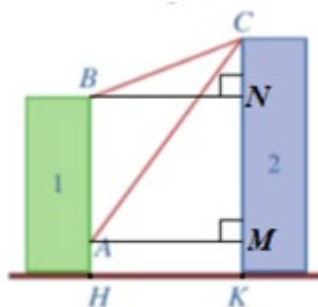
Vậy $\alpha \approx 4^\circ$

Câu 52: Có hai chung cư cao tầng xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20m$. Để đảm bảo an ninh, trên nóc chung cư thứ hai người ta lắp camera ở vị trí C . Gọi A, B lần lượt là vị trí thấp nhất, cao nhất trên chung cư thứ nhất mà camera có thể quan sát được (Hình 19). Hãy tính số đo góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất). Biết rằng chiều cao của chung cư thứ hai là $CK = 32m$, $AH = 6m$, $BH = 24m$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị độ).



Hình 19

Lời giải



Kẻ $AM \perp CK, BN \perp CK$ (hình vẽ) ta có: $BN = AM = HK = 20(m)$

$$CN = CK - NK = CK - BH = 32 - 24 = 8(m);$$

$$MN = AB = BH - AH = 24 - 6 = 18(m)$$

$$CM = CN + MN = 8 + 18 = 26(m)$$

Đặt $\widehat{BCN} = \alpha, \widehat{ACM} = \beta$.

Xét $\triangle BCN$ vuông tại N có: $\tan \alpha = \frac{BN}{CN} = \frac{20}{8} = \frac{5}{2}$;

Xét $\triangle ACM$ vuông tại M có: $\tan \beta = \frac{AM}{CM} = \frac{20}{26} = \frac{10}{13}$;

Ta có: $\tan \widehat{ACB} = \tan(\widehat{BCN} - \widehat{ACM}) = \tan(\alpha - \beta)$

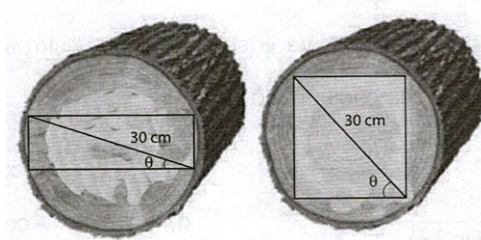
$$\Rightarrow \tan \widehat{ACB} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{5}{2} - \frac{10}{13}}{1 + \frac{5}{2} \cdot \frac{10}{13}} = \frac{\frac{45}{26}}{\frac{76}{13}} = \frac{45}{76} \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 0,01^\circ$$

Vậy góc ACB (phạm vi camera có thể quan sát được ở chung cư thứ nhất) có số đo xấp xỉ $0,01^\circ$.

Câu 53: Một thanh xà gỗ hình hộp chữ nhật được cắt ra từ một khối gỗ hình trụ có đường kính $30cm$.

a) Chứng minh rằng diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ được tính bởi công thức

$$S(\theta) = 450 \sin 2\theta (cm^2), \text{ ở đó góc } \theta \text{ được chỉ ra trong hình vẽ dưới đây.}$$



b) Tìm góc θ để diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ là lớn nhất.

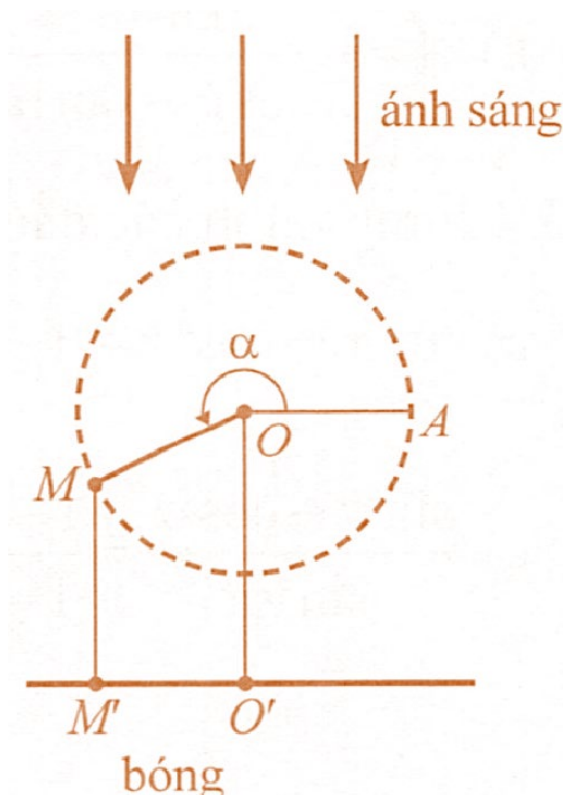
Lời giải

a) Mặt cắt của thanh xà gỗ (hình dưới) là hình chữ nhật có hai kích thước là $AB = 30 \cos \theta$ và $BC = 30 \sin \theta$.

Vậy diện tích mặt cắt là $S = AB \cdot BC = 30 \cdot 30 \sin \theta \cos \theta = 450 \sin 2\theta$.

b) Ta có $S = 450 \sin 2\theta \leq 450$. Vậy diện tích mặt cắt của thanh xà gỗ lớn nhất khi $\sin 2\theta = 1$ hay góc $\theta = 45^\circ$.

Câu 54: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M'$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm ?



Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

$$\text{Ta có } \alpha = \frac{60}{13} \cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}.$$

$$\text{Suy ra } OM' = |OM \cos \alpha| = \left| 10 \cos \frac{120\pi}{13} \right| \approx 7,5 \text{ cm}.$$

Câu 55: Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức

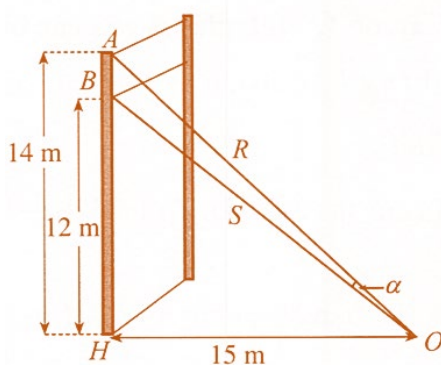
$$d(t) = 4 \sin \left[\frac{2\pi}{365} (t - 80) \right] + 12, \quad t \in \mathbb{Z} \text{ và } 1 \leq t \leq 365.$$

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

$$d(31) = 9,01 \text{ giờ}.$$

Câu 56: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m . Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m . Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m (Hình 3).



Hình 3

- Tính $\tan \alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Ta có: $\alpha = \widehat{AOH} - \widehat{BOH}$.

Trong tam giác vuông AOH , $\tan \widehat{AOH} = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}$.

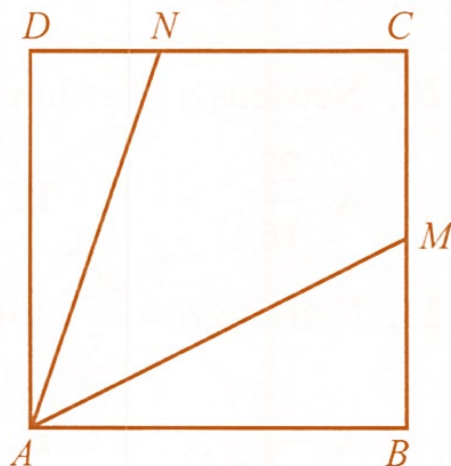
Trong tam giác vuông BOH , $\tan \widehat{BOH} = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \tan(\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \frac{\tan \widehat{AOH} - \tan \widehat{BOH}}{1 + \tan \widehat{AOH} \cdot \tan \widehat{BOH}} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{10}{131}.$$

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

Câu 57: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia

AM và AN , ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$



Hình 4

- a) Tính $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN})$.
- b) Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

a) Trong tam giác vuông ABM , $\tan \widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác vuông ADN , $\tan \widehat{DAN} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$.

$$\text{Do đó, } \tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \frac{\tan \widehat{BAM} + \tan \widehat{DAN}}{1 - \tan \widehat{BAM} \tan \widehat{DAN}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

b) Do $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 1$ nên $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ$.

Suy ra $\widehat{MAN} = 90^\circ - (\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 45^\circ$.

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45° .

Câu 58: Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức: $B(t) = 80 + 7 \sin \frac{\pi t}{12}$, trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng $mmHg$ (milimét thủy ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau:

- a) 6 giờ sáng;
- b) 10 giờ 30 phút sáng;
- c) 12 giờ trưa;

d) 8 giờ tối.

Lời giải

$$a) t = 6, B(t) = 80 + 7\sin \frac{6\pi}{12} = 80 + 7\sin \frac{\pi}{2} = 87 (\text{mmHg})$$

$$b) t = 10.5, B(t) = 80 + 7\sin \frac{10.5\pi}{12} = 82.6788 (\text{mmHg})$$

$$c) t = 12, B(t) = 80 + 7\sin \frac{12\pi}{12} = 80 + 7\sin \pi = 80 (\text{mmHg})$$

$$d) t = 20, B(t) = 80 + 7\sin \frac{20\pi}{12} = 80 + 7\sin \frac{5\pi}{3} = 73.9378 (\text{mmHg})$$

Câu 59: Mỗi ngày, người ta quan sát thấy mặt trời mọc đầu tiên tại Mỹ là tại vùng núi đảo ở Maine. Thời điểm mặt trời mọc được biểu diễn theo công thức $t(m) = 1,665 \sin(m+3) + 5,485$, với t là thời điểm (được tính từ nửa đêm) và m là tháng (tính từ tháng 1). Hãy cho biết vào tháng 3 thì mặt trời mọc lúc mấy giờ?

Lời giải

Ta có: $t(3) = 1,665 \sin(3+3) + 5,485 \approx 5,0197 \approx 5$ giờ 1 phút.

Vậy vào tháng 3 thì mặt trời mọc lúc khoảng 5 giờ 1 phút.

Câu 60: Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức

$$B(t) = a + b \sin \frac{\pi t}{12}, (a, b > 0)$$

trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$ tính bằng mmHg (milimét thủy ngân). Biết huyết áp tâm trương thấp nhất là 78 mmHg và huyết áp tâm trương lớn nhất là 92 mmHg , hỏi huyết áp tâm trương của người đó vào thời điểm 2 giờ 30 phút chiều nằm trong khoảng nào sau đây.

Lời giải

Vì $a, b > 0$ và $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{12} \leq 1$ nên $B(t)_{\max} = a + b, B(t)_{\min} = a - b$ nên ta có

$$\begin{cases} a + b = 92 \\ a - b = 78 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 85 \\ b = 7 \end{cases}.$$

Tại thời điểm 2 giờ 30 phút chiều thì thời gian $t = 14,5$ giờ.

Huyết áp tâm trương của người đó là $B(14,5) = 85 + 7 \sin \frac{\pi \cdot 14,5}{12} \approx 80,74 \text{ mmHg}$.

Câu 61: Huyết áp của mỗi người thay đổi trong ngày. Giả sử huyết áp tâm trương (tức là áp lực máu lên thành động mạch khi tim giãn ra) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi tại thời điểm t được cho bởi công thức: $B(t) = 82 + 7 \sin \frac{\pi t}{12}$, trong đó t là số giờ tính từ lúc nửa đêm và $B(t)$

tính bằng $mmHg$ (milimét thuỷ ngân). Tìm huyết áp tâm trương của người này vào các thời điểm sau (làm tròn đến 4 chữ số thập phân):

- a) 5 giờ sáng;
- b) 9 giờ 30 phút sáng;
- c) 13 giờ chiều;
- d) 9 giờ tối.

Lời giải

- a) $t = 5, B(5) = 82 + 7\sin\frac{5\pi}{12} \approx 88,7615(mmHg)$
- b) $t = 9,5, B(9,5) = 80 + 7\sin\frac{9,5\pi}{12} \approx 86,2613(mmHg)$
- c) $t = 13, B(13) = 80 + 7\sin\frac{13\pi}{12} \approx 80,1883(mmHg)$
- d) $t = 21, B(21) = 80 + 7\sin\frac{21\pi}{12} \approx 77,0503(mmHg)$

Câu 62: Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 100\cos\left(\frac{\pi}{15}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

- a) Tìm chu kì của sóng.
- b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

- a) Chu kì của sóng là $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$ (giây).
- b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(30) = 100\cos\left(\frac{\pi}{15} \times 30\right) = 100(cm)$.

Vậy chiều cao của sóng là $100(cm)$.

Câu 63: Guồng nước (hay còn gọi là cọn nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hoá đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính $3,5m$; trục của nó đặt cách mặt nước $3m$. Khi guồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$, với x (phút) là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$).

- Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước $3m$.
- Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước $6,5m$.

Lời giải

a) Để ống đựng nước cách mặt nước $3m$, ta có phương trình:

$$\left| 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 3 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{6}{3,5} < -1(VN) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x - \frac{\pi}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

Vì $x \geq 0$ nên một số giá trị của x là: $\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{7}{4}; \dots$

b) Để ống đựng nước cách mặt nước $6,5m$, ta có phương trình:

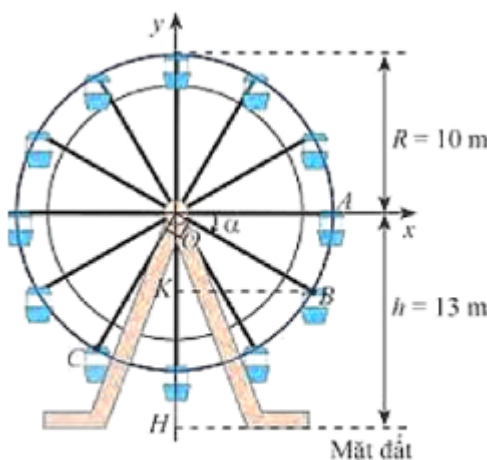
$$\left| 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right| = 6,5 \Leftrightarrow \begin{cases} 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 6,5 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = -6,5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{9,5}{3,5} < -1(VN) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Vì $x \geq 0$ nên một số giá trị của x là: $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \dots$

Câu 64: Trong Hình 11, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm B và C .



Hình 11

a) Chứng minh rằng chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng $(13 + 10 \sin \alpha)$ mét với α là số đo của một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB . Tính độ cao của điểm B so với mặt đất khi $\alpha = -30^\circ$.

b) Khi điểm B cách mặt đất 15 m thì điểm C cách mặt đất bao nhiêu mét? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Chiều cao từ điểm B đến mặt đất bằng KH

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn trên thì $\alpha > 0, \sin \alpha > 0$ và $OK = 10 \sin \alpha$

Ta có: $KH = OH + OK = 13 + 10 \sin \alpha$

- Nếu điểm B nằm ở nửa đường tròn dưới thì $\alpha < 0, \sin \alpha < 0$ và $OK = 10 \cdot (-\sin \alpha)$.

Ta có: $KH = OH - OK = 13 - 10 \cdot (-\sin \alpha) = 13 + 10 \sin \alpha$

Khi $\alpha = -30^\circ, KH = 13 + 10 \cdot \frac{-1}{2} = 8$

b) Gọi $(OA, OC) = \beta$. Ta có: $\beta = \alpha - 90^\circ$

Khi điểm B cách mặt đất 15 m thì $KH = 15$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{-2}{10} = -\frac{1}{5}, \alpha < 0$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-1}{5}\right)^2} = \frac{-2\sqrt{6}}{5}$$

Điểm C cách mặt đất là: $13 + 10 \sin \beta \approx 3,20$

Câu 65: Trong vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm})$$

$$x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm})$$

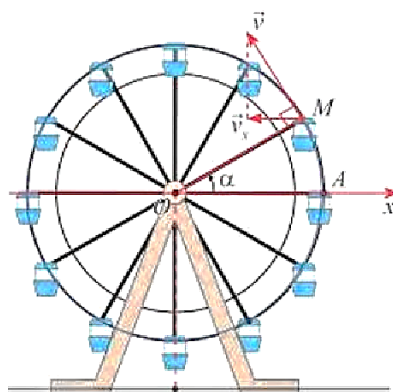
Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) \\ &= 2\left[2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)\cos\frac{\pi}{4}\right] = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \end{aligned}$$

Biên độ là $A = 2\sqrt{2}$, pha ban đầu là $\varphi = -\frac{\pi}{12}$

Câu 66: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (\text{Ox}, \text{OM})$ theo hàm số $v_x = 0,5 \cdot \sin \alpha$ (m/s) (Hình 11).



Hình 11

- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x
- Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

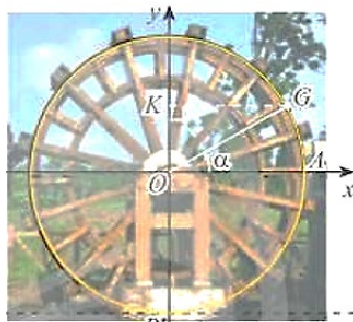
Lời giải

a) Do $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ nên $-0,5 \leq 0,5 \cdot \sin \alpha \leq 0,5$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,5(m)$ khi $\sin \alpha = 1$ và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,5(m)$ khi $\sin \alpha = -1$.

b) Dựa vào đồ thị hàm số sin, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), v_x tăng khi $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

Câu 67: Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng $3m$. Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



Hình 12

a) Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (\overline{OA}, \overline{OG})$.

b) Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng $1,5m$.

Lời giải

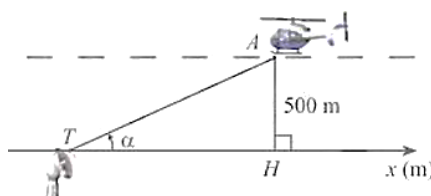
a) $h = 3 + 3 \cdot \sin \alpha$

b) Trong 1 phút đầu, guồng nước quay được 2 vòng. Ta có $0 \leq \alpha \leq 4\pi$

Khi $h = 1,5$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{-1}{2}$.

Khi đó, $\alpha = \frac{7\pi}{6}; \alpha = \frac{11\pi}{6}; \alpha = \frac{19\pi}{6}$ hoặc $\alpha = \frac{23\pi}{6}$

Câu 68: Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao $500m$ theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hình 13

a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .

b) Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot \alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $\frac{-\sqrt{3}}{3} < \cot \alpha < \sqrt{3}$

Vậy $x_H \in \{-288, 7; 866\}$

Câu 69: Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(cm)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t \leq 24$) cho bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10$. Hỏi vào thời điểm nào trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải

Ta có $3 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10 \leq 13$

Mà $3 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 10 = 13 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = 24k - 4 (k \in \mathbb{Z})$ nên

$0 \leq 24k - 4 \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = 20$.

Vậy vào thời điểm $20h$ trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất là $13(cm)$.

Câu 70: Giả sử số miligam của các chất ô nhiễm trong một mét khối không khí trong một tháng tại một thành phố công nghiệp được xác định bởi công thức $P(t) = a + b \sin\left[\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right)\right]$, ($a, b > 0$), trong đó t là số ngày kể từ ngày thứ Bảy của tuần đầu tiên. Biết chất ô nhiễm trong một mét khối không khí cao nhất là 50 miligam và thấp nhất là 20 miligam. Hỏi trong ngày thứ Hai của tuần thứ 2, ngày thứ Tư của tuần thứ 3 và ngày thứ Ba của tuần thứ 4 và ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 của tháng thì số gam chất ô nhiễm nhiều nhất nằm trong khoảng nào?

Lời giải

Vì $a, b > 0$ và $-1 \leq \sin\left[\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right)\right] \leq 1$ nên $\begin{cases} P(t)_{\max} = a + b \\ P(t)_{\min} = a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 50 \\ a - b = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 35 \\ b = 15 \end{cases}$.

$\Rightarrow P(t) = 35 + 15 \sin\left[\frac{2\pi}{7}\left(t - \frac{37}{12}\right)\right]$, ($a, b > 0$).

Số miligam của ngày thứ Hai của tuần thứ 2 là $P(2) \approx 22,6$.

Số miligam của ngày thứ Tư của tuần thứ 3 là $P(11) \approx 45,996$.

Số miligam của ngày thứ Ba của tuần thứ 4 là $P(17) \approx 33,88$.

Số miligam của ngày thứ Sáu của tuần thứ 4 là $P(20) = 42,5$.

Câu 71: Mức nước lên xuống của thủy triều trong một ngày tại một cửa biển được tính theo công thức $y = \sin\left(\frac{\pi}{180}(x+73)\right)+1$ với x là giờ ($0 \leq x \leq 24$), y tính theo đơn vị m so với mực nước biển. Hỏi vào lúc 17h thì mực nước ở độ cao bao nhiêu so với mực nước biển?

Lời giải

Thay $x=17$ vào công thức $y = \sin\left(\frac{\pi}{180}(x+73)\right)+1$ ta có $y = \sin\left(\frac{\pi}{180}(17+73)\right)+1 = 2$.

Vậy vào lúc $x=17$ thì mực nước ở độ cao $2m$ so với mực nước biển.

Câu 72: Số giờ có ánh sáng mặt trời của Thủ đô Hà Nội năm 2018 được cho bởi công thức $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right)+13$ với $1 \leq x \leq 365$ là số thứ tự của ngày trong năm. Ngày nào sau đây của năm 2018 thì số giờ có ánh sáng mặt trời của Hà Nội lớn nhất?

Lời giải

Để số giờ có ánh sáng mặt trời lớn nhất thì hàm số $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right)+13$ đạt giá trị lớn nhất. Khi đó $\sin\left(\frac{\pi}{180}(x+60)\right) = 1 \Leftrightarrow x = 30 + k360, k \in \mathbb{Z}$. Vì $1 \leq x \leq 365$ nên ta có

$$1 \leq 30 + k360 \leq 365 \Leftrightarrow -0,08 \leq k \leq 0,93 \Rightarrow k = 0.$$

Do đó $x = 30$ (tháng đầu tiên của năm)

Câu 73: Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

a) $A = 3\text{ cm}, \varphi = 0$;

b) $A = 3\text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;

c) $A = 3\text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Từ $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ta có $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Khi đó ta có phương trình li độ là $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$.

a)

- Với $A = 3\text{ cm}$ và $\varphi = 0$ thay vào phương trình li độ $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

• $t = 0$ thì $x = 3 \cos 0 = 3$;

• $t = \frac{T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = 3 \cos \frac{\pi}{2} = 0$;

• $t = \frac{T}{2}$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = 3 \cos \pi = -3$

• $t = \frac{3T}{4}$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = 3 \cos \frac{3\pi}{2} = 0$;

• $t = T$ thì $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = 3 \cos 2\pi = 3$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

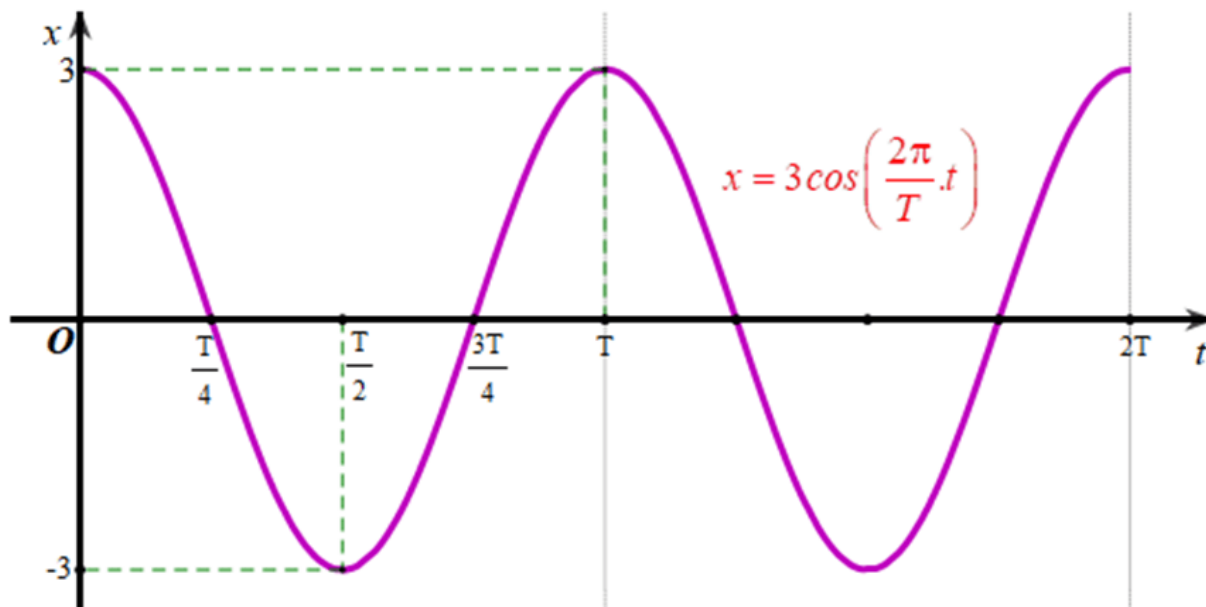
Xét hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ có chu kì là T .

Ta vẽ đồ thị hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ theo bảng sau:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$	3	0	-3	0	3

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T , ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[T; 2T]$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$ như sau:



b) - Với $A = 3\text{ cm}$ và $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x = A\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$$x = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$\cdot t = 0 \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = 3\sin 0 = 0$$

$$\cdot t = \frac{T}{4} \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = 3\sin \frac{\pi}{2} = 3;$$

$$\cdot t = \frac{T}{2} \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = 3\sin \pi = 0;$$

$$\cdot t = \frac{3T}{4} \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = 3\sin \frac{3\pi}{2} = -3;$$

$$\cdot t = T \text{ thì } x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = 3\sin 2\pi = 0.$$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

Xét hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ có chu kì là T .

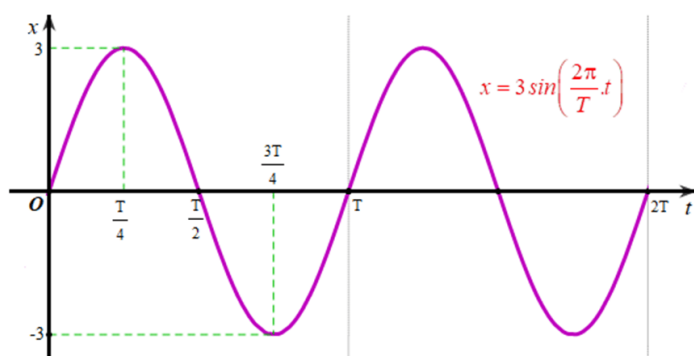
Ta vẽ đồ thị hàm số $x = 3\sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ theo bảng sau:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T

$x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$	0	3	0	-3	0

Bằng cách dịch chuyển đồ thị hàm số $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; T]$ song song với trục hoành sang phải theo đoạn có độ dài T , ta sẽ nhận được đồ thị hàm số $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[T; 2T]$.

Từ đó ta vẽ được đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$ như sau:



c) - Với $A = 3 \text{ cm}$ và $\varphi = \frac{\pi}{2}$ thay vào phương trình li độ $x = A \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \varphi\right)$ ta có:

$$x = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right) = -3 \cos\left(\pi - \left(\frac{2\pi}{T} \cdot t + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -3 \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T} \cdot t\right) = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$\cdot t = 0 \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot 0\right) = -3 \sin 0 = 0$$

$$\cdot t = \frac{T}{4} \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{4}\right) = -3 \sin \frac{\pi}{2} = -3;$$

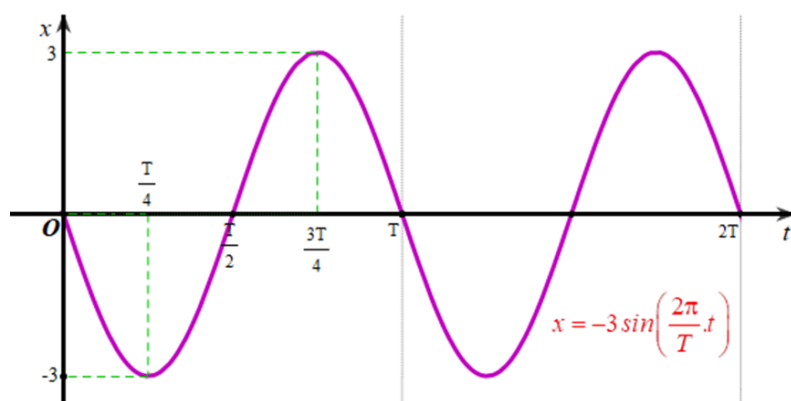
$$\cdot t = \frac{T}{2} \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{2}\right) = -3 \sin \pi = 0;$$

$$\cdot t = \frac{3T}{4} \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot \frac{3T}{4}\right) = -3 \sin \frac{3\pi}{2} = 3;$$

$$\cdot t = T \text{ thì } x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot T\right) = -3 \sin 2\pi = 0$$

- Vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà $x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$ trên đoạn $[0; 2T]$:

Đồ thị hàm số $x = -3 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ là hình đối xứng với đồ thị hàm số $x = 3 \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$ qua trục hoành:



Câu 74: Vì sao mặt cắt của sóng nước trên mặt hồ được gọi là có dạng hình sin?



Lời giải

Vì hình ảnh mặt cắt sóng nước giống với đồ thị của hàm lượng giác $y = \sin x$

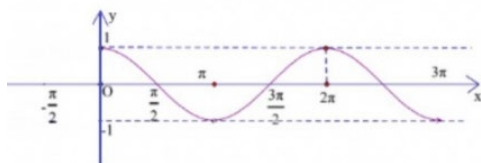
Câu 75: Li độ $s(cm)$ của một con lắc đồng hồ theo thời gian t (giây) được cho bởi hàm số $s = 2 \cos \pi t$. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 1 giây đầu thì li độ s nằm trong đoạn $[-1;1](cm)$.



(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Lời giải

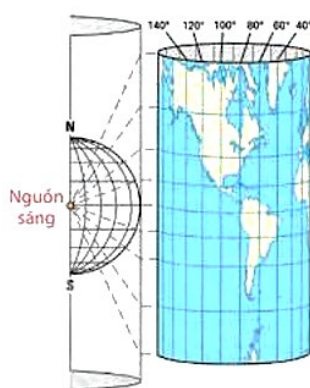
Trong 3 giây đầu, $0 \leq t \leq 3$ nên $0 \leq \pi t \leq 3\pi$



Dựa vào đồ thị hàm số cosin, ta thấy $\cos \pi t = 1$ khi $\pi t = 0$ và $\pi t = 2\pi$

Vậy con lắc có li độ lớn nhất tại các thời điểm $t = 0$ và $t = 2$

Câu 76: Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong Hình 9. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0° làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ φ° ($-90 < \varphi < 90$) được cho bởi hàm số $y = 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right)(cm)$. Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ nào nằm cách xích đạo không quá $20cm$ trên bản đồ.



Hình 9

(Theo <https://geologyscience.com/geology/types-of-maps/>)

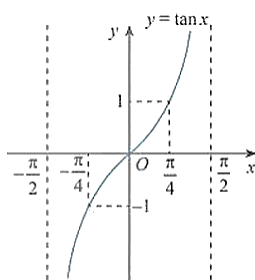
Giải

Vì điểm nằm cách xích đạo không quá $20cm$ trên bản đồ nên ta có $-20 \leq y \leq 20$.

Khi đó $-20 \leq 20 \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 20$ hay $-1 \leq \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 1$.

Ta có $-90 < \varphi < 90$ khi và chỉ khi $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{180}\varphi < \frac{\pi}{2}$.

Xét đồ thị hàm số $y = \tan x$ trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (Hình 10).

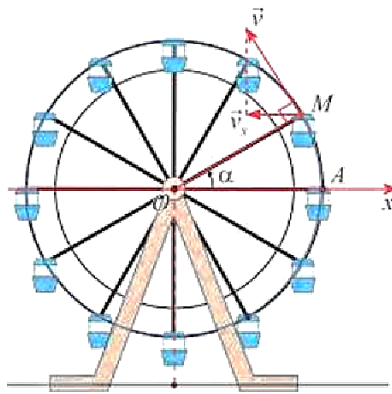


Hình 10

Ta thấy $-1 \leq \tan\left(\frac{\pi}{180}\varphi\right) \leq 1$ khi và chỉ khi $-\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{180}\varphi \leq \frac{\pi}{4}$ hay $-45 \leq \varphi \leq 45$.

Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá 20cm nằm ở vĩ độ từ -45° đến 45° .

Câu 77: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3 \sin \alpha (m/s)$ (Hình 11).



Hình 11

- Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .
- Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

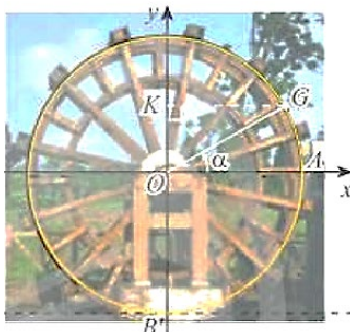
Lời giải

- Do $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ nên $-0,3 \leq 0,3 \sin \alpha \leq 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3(m)$ và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3(m)$.

- Dựa vào đồ thị hàm số $\sin$, ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), v_x tăng khi $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

Câu 78: Khoảng cách từ tâm một guồng nước đến mặt nước và bán kính của guồng đều bằng 3m . Xét gàu G của guồng. Ban đầu gàu G nằm ở vị trí A (Hình 12).



Hình 12

- Viết hàm số h biểu diễn chiều cao (tính bằng mét) của gàu G so với mặt nước theo góc $\alpha = (OA, OG)$.
- Guồng nước quay hết mỗi vòng trong 30 giây. Dựa vào đồ thị của hàm số $\sin$, hãy cho biết ở các thời điểm t nào trong 1 phút đầu, khoảng cách của gàu đến mặt nước bằng $1,5\text{m}$.

Lời giải

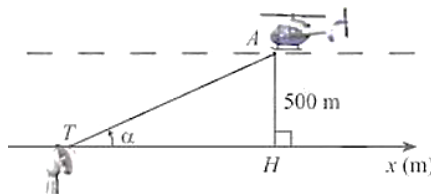
a) $h = 3 + 3 \cdot \sin \alpha$

b) Trong 1 phút đầu, guồng nước quay được 2 vòng. Ta có $0 \leq \alpha \leq 4\pi$

Khi $h = 1,5$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{-1}{2}$.

Khi đó, $\alpha = \frac{7\pi}{6}; \alpha = \frac{11\pi}{6}; \alpha = \frac{19\pi}{6}$ hoặc $\alpha = \frac{23\pi}{6}$

Câu 79: Trong Hình 13, một chiếc máy bay A bay ở độ cao $500m$ theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H , α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hình 13

a) Biểu diễn tọa độ x_H của điểm H trên trục Tx theo α .

b) Dựa vào đồ thị hàm số cotang, hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot \alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $-\frac{\sqrt{3}}{3} < \cot \alpha < \sqrt{3}$

Vậy $x_H \in \{-288,7; 866\}$

Câu 80: Giả sử vận tốc v (tính bằng lít/giây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức $v = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3}$, trong đó t là thời gian (tính bằng giây).

a) Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.

b) Biết rằng quá trình hít vào xảy ra khi $v > 0$ và quá trình thở ra xảy ra khi $v < 0$.

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm nào thì người đó hít vào? người đó thở ra?

Lời giải

a) Thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ chính là một chu kì tuần hoàn của hàm $v(t)$ và là

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6 \text{ (giây)}$$

Ta có: 1 phút = 60 giây.

Do đó, số chu kì hô hấp trong một phút của người đó là $\frac{60}{6} = 10$ (chu kì).

b) Ta có: $v = 0.85 \sin \frac{\pi t}{3}$

- $v < 0$ khi $0.85 \sin \frac{\pi t}{3} > 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi t}{3} > 0$

Mà $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, $0 < \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$

- $v < 0$ khi $0.85 \sin \frac{\pi t}{3} < 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi t}{3} < 0$

Mà $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Do đó, $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} < 0$

Với $t \in (0; 3)$ ta có $0 < \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$

Với $t \in (3; 5]$ ta có $-1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} < 0$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm sau 0 giây đến trước 3 giây thì người đó hít vào và khoảng thời điểm sau 3 giây đến 5 giây thì người đó thở ra.

Câu 81: Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$), $\omega t + \varphi$ là pha của dao động tại thời điểm t và $\varphi \in [-\pi; \pi]$

là pha ban đầu của dao động. Dao động điều hoà này có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần).

Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = -5 \cos 4\pi t (cm)$.

a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.

b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

Lời giải

a) Ta có: $-5 \cos 4\pi t = 5 \cos(4\pi t + \pi)$.

Khi đó vật dao động điều hòa theo phương trình $x(t) = 5 \cos(4\pi t + \pi)(\text{cm})$ với biên độ dao động là $A = 5 > 0$ và pha ban đầu của dao động là $\varphi = \pi$.

b) Pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây) là $\omega t + \varphi = 4\pi \cdot 2 + \pi = 9\pi$.

Dao động điều hòa có chu kì là $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} = 0.5$, có nghĩa là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần là 0,5 giây. Do đó, trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được $2 : 0,5 = 4$ dao động toàn phần.

Câu 82: Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

a) Chu kì của sóng là $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(20) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10} \times 20\right) = 90(\text{cm})$.

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

Câu 83: Độ sâu $h(m)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8 \cos 0,5t + 4$.

(Theo <https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf>)

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6m để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Tại thời điểm $t = 2$. Ta có: $h(t) = 0,8 \cdot \cos(0,5 \cdot 2) + 4 = 4,43(m)$

b)

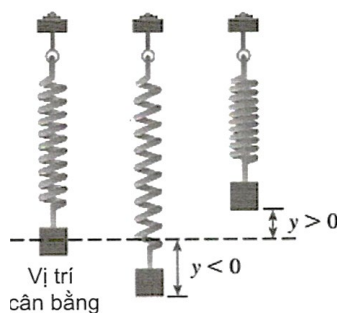
Dựa vào đồ thị hàm số cos:

Những thời điểm tàu không thể hạ thủy là khi $0,8 \cos 0,5t + 4 < 3,6 \Leftrightarrow \cos 0,5t < -0,5$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < 0,5t < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 4,19 < t < 8,38$$

Vậy thời điểm tàu có thể hạ thủy là $(0; 4,19) \cup (8,38; 12)$

Câu 84: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25 \sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây.



- Tìm chu kì dao động của con lắc lò xo.
- Tìm tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây.
- Tìm khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc.

Lời giải

- Hàm số $y = 25 \sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$. Suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T = \frac{1}{2}$ giây.
- Vì chu kì dao động của con lắc là $T = \frac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $f = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hz}$.
- Vì phương trình dao động của con lắc là $y = 25 \sin 4\pi t$, nên biên độ dao động của nó là $A = 25 \text{ cm}$. Từ đó, khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $2A = 50 \text{ cm}$.

Câu 85: Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$ ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

- Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.
- Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?
- Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Lời giải

- Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có $t = 8 - 6 = 2$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là $S(2) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 2 \right) \right| = 40\sqrt{3} (m)$.

- Tại thời điểm 12 giờ trưa ta có $t = 12 - 6 = 6$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là $S(6) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 6 \right) \right| = 0(m)$.

Tại thời điểm 12 giờ trưa, Mặt Trời chiếu thẳng đứng từ trên đầu xuống nên toàn bộ toà nhà được chiếu xuống móng của toà nhà.

- Tại thời điểm 2 giờ chiều ta có $t = 14 - 6 = 8$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $S(8) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 8 \right) \right| = \frac{40\sqrt{3}}{3}(m)$.

- Tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối, ta có $t = \left(17 + \frac{3}{4} \right) - 6 = \frac{39}{4}$. Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối là $S\left(\frac{39}{4}\right) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{39}{4} \right) \right| \approx 59,86(m)$.

b) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà khi

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right| = 40 \Leftrightarrow \cot \frac{\pi}{12} t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \leq t \leq 12$ nên $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

c) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t \rightarrow 12$, vì vậy $\frac{\pi}{12} t \rightarrow \pi$, do đó $\cot \frac{\pi}{12} t \rightarrow -\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

Câu 86: Hai sóng âm có phương trình lần lượt là $f_1(t) = C \sin \omega t$ và $f_2(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$.

Hai sóng này giao thoa với nhau tạo ra một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha).$$

a) Sử dụng công thức cộng chỉ ra rằng hàm $f(t)$ có thể viết được dưới dạng $f(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t$, ở đó A, B là hai hằng số phụ thuộc vào α .

b) Khi $C = 10$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, hãy tìm biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$.

Lời giải

a) Ta có $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

$$= C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha) = C \sin \omega t + C(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha).$$

Vậy $f(t) = C(1 + \cos \alpha) \sin \omega t + C \sin \alpha \cos \omega t = A \sin \omega t + B \cos \omega t$ với $A = C(1 + \cos \alpha), B = C \sin \alpha$.

b) Khi $C = 10$ và $\alpha = \frac{\pi}{3}$, ta có

$$f(t) = 10 \sin \omega t + 10 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{3} \right) = 10 \cdot 2 \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right) \cos \frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3} \sin \left(\omega t + \frac{\pi}{6} \right).$$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k = 10\sqrt{3}$ và $\varphi = \frac{\pi}{6}$

Câu 87: Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)(cm)$ là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động.

Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3} \right) (cm) \text{ và } x_2(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6} \right) (cm).$$

a) Xác định phương trình của dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$.

b) Tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp trên.

Lời giải

$$a) \text{ Ta có } x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \cos \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6} \right)$$

$$= 3 \cdot 2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3} \right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6} \right)}{2} \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3} \right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6} \right)}{2}$$

$$= 6 \cos \frac{\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{2}}{2} = 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12} \right).$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3\sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12} \right)$.

b) Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A = 3\sqrt{2} \text{ cm}$ và pha ban đầu là $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 88: Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$p(t) = 120 + 15 \cos 150\pi t$, trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Lời giải

a) Hàm số $p(t)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $t \pm \frac{1}{75} \in \mathbb{R}$ và

$$p\left(t + \frac{1}{75}\right) = 120 + 15 \cos(150\pi t + 2\pi) = 120 + 15 \cos 150\pi t = p(t).$$

Do đó $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Vì $-1 \leq \cos 150\pi t \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \leq p(t) \leq 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

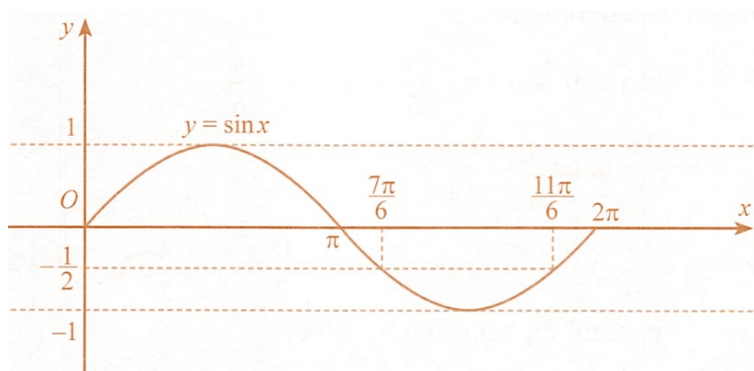
Vậy chỉ số huyết áp của người đó là $135/105$.

Câu 89: Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3 \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Trong 4 giây đầu, ta có $0 \leq t \leq 4$, suy ra $0 \leq \frac{\pi}{2}t \leq 2\pi$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2}t$, khi đó $x \in [0; 2\pi]$. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ như sau:



Dựa vào đồ thị trên đoạn $[0; 2\pi]$, ta có:

$$s \leq -\frac{3}{2} \text{ khi } 3 \sin x \leq -\frac{3}{2} \text{ hay } \sin x \leq -\frac{1}{2}, \text{ suy ra } \frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}.$$

$$\text{Do đó } \frac{7}{3} \leq t \leq \frac{11}{3}.$$

Câu 90: Một dao động điều hoà có phương trình li độ dao động là: $x = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimét, $\omega > 0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Xác định giá trị của li độ khi $t = 0, t = \frac{T}{4}, t = \frac{T}{2}, t = \frac{3T}{4}, t = T$ và vẽ đồ thị biểu diễn li độ của dao động điều hoà trên đoạn $[0; 2T]$ trong trường hợp:

a) $A = 3 \text{ cm}, \varphi = 0$;

b) $A = 3\text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$;

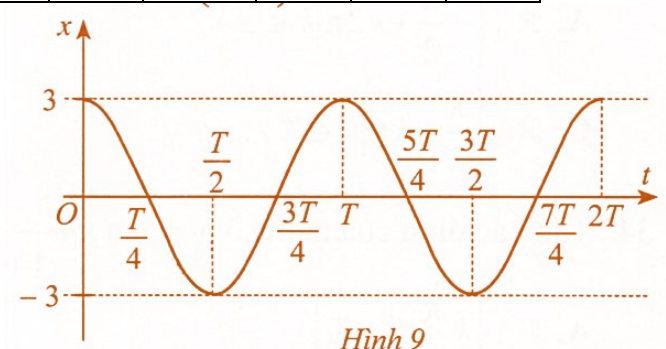
c) $A = 3\text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$.

Lời giải

a) Khi $A = 3\text{ cm}, \varphi = 0$, ta có: $x = 3\cos(\omega t) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 9:

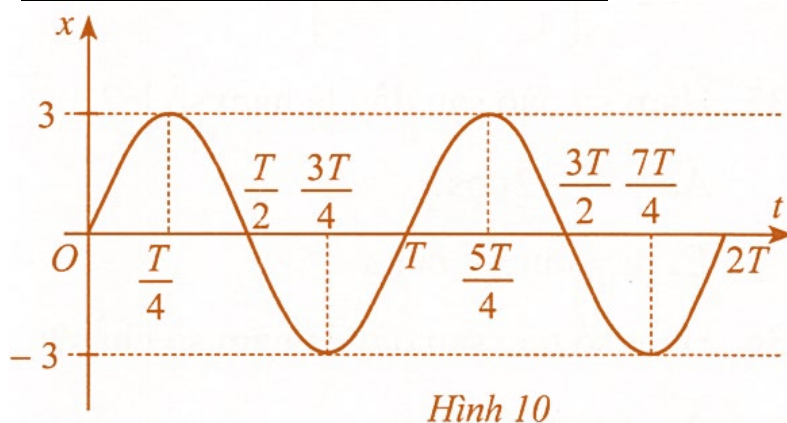
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	3	0	-3	0	3



b) Khi $A = 3\text{ cm}, \varphi = -\frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 10:

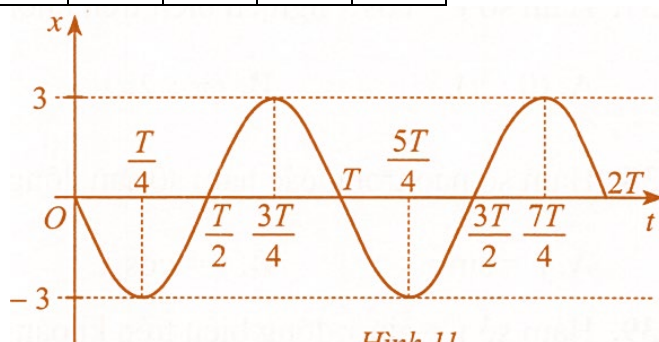
t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	3	0	-3	0



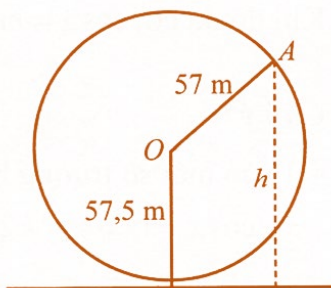
c) Khi $A = 3\text{ cm}, \varphi = \frac{\pi}{2}$, ta có: $x = 3\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = 3\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta có bảng xác định giá trị li độ tại một số thời điểm và đồ thị cần vẽ ở Hình 11:

t	0	$\frac{T}{4}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{3T}{4}$	T
x	0	-3	0	3	0



Câu 91: Một vòng quay trò chơi có bán kính $57m$, trục quay cách mặt đất $57,5m$, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$) (Hình 12).



- Tính chu kì của hàm số $h(t)$?
- Khi $t = 0$ (phút) thì khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng bao nhiêu?
- Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất? Ở vị trí đạt được chiều cao là $86m$?

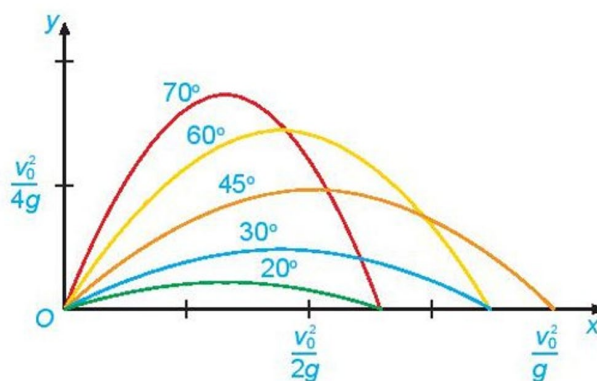
Lời giải

- Vì vòng quay trò chơi quay mỗi vòng hết 15 phút nên chu kì của hàm số $h(t)$ bằng 15 phút.
- Khi $t = 0$ thì $h = 57 \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 57,5 = 0,5(m)$. Vậy khi đó khoảng cách từ cabin đến mặt đất bằng $0,5m$.
- Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ hay $t = 7,5$ (phút); cabin đạt được chiều cao là $86m$ lần đầu tiên khi $t = 5$ (phút).

Câu 92: Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu có độ lớn v_0 không đổi. Tìm góc bắn α để quả đạn pháo bay xa nhất, bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất.



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ đặt tại vị trí khẩu pháo, trục Ox theo hướng khẩu pháo như hình bên. Khi đó, theo Vật lý, ta biết rằng quỹ đạo của quả đạn pháo có dạng đường parabol có phương trình (với g là gia tốc trọng trường) $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$.

Cho $y = 0$ ta được $\frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$, suy ra $x = 0$ hoặc $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Quả đạn tiếp đất khi $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$.

Ta có $x = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g} \leq \frac{v_0^2}{g}$, dấu bằng xảy ra khi $\sin 2\alpha = 1$.

Giải phương trình $\sin 2\alpha = 1$, ta được $\alpha = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\alpha = \frac{\pi}{4}$ hay $\alpha = 45^\circ$.

Vậy quả đạn pháo sẽ bay xa nhất khi góc bắn bằng 45° .

Câu 93: Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) thì tỉ lệ F của phần Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức

$$F = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha).$$



(Theo trang usno.navy.mil).

Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

- a) $F = 0$ (trăng mới);
- b) $F = 0,25$ (trăng lưỡi liềm);
- c) $F = 0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng);
- d) $F = 1$ (trăng tròn).

Lời giải

a) Với $F = 0$, ta có $\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Với $F = 0,25$, ta có $\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 0,25 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ hoặc $\alpha = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Với $F = 0,5$, ta có $\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 0,5 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Với $F = 1$, ta có $\frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 94: Một quả đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500 \text{ m/s}$ hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$

, ở đó $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường.

- a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m .
- c) Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Lời giải

Vì $v_0 = 500 \text{ m/s}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ nên ta có phương trình quỹ đạo của quả đạn là

$$y = \frac{-9,8}{2 \times 500^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \text{ hay } y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

a) Quả đạn chạm đất khi $y = 0$, khi đó $y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2500000 \cos^2 \alpha \times \tan \alpha}{49}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{2500000 \cos \alpha \sin \alpha}{49}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \vee x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49}$$

Loại $x = 0$ (đạn pháo chưa được bắn).

Vậy tầm xa mà quả đạn đạt tới là $x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} (m)$.

b) Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo $22000m$ thì $x = 22000m$.

Khi đó $\frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} = 22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{539}{625}$

Gọi $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là góc thỏa mãn $\beta = \frac{539}{625}$. Khi đó ta có: $\sin 2\alpha = \sin \beta$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \beta + k2\pi \text{ hoặc } 2\alpha = \pi - \beta + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\beta}{2} + k\pi \text{ hoặc } \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

c) Hàm số $y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$ là một hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có tọa độ đỉnh $I(x_I; y_I)$ là

$$\left\{ \begin{array}{l} x_I = -\frac{b}{2a} = -\frac{\tan \alpha}{2 \times \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha}} = \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = f(x_I) = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} \left(\frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \right)^2 + \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \tan \alpha \end{array} \right.$$

Hay $\left\{ \begin{array}{l} x_I = \frac{1250000 \cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49} \end{array} \right.$

Do đó, độ cao lớn nhất của quả đạn là $y_{\max} = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49}$

Ta có $y_{\max} = \frac{625000 \sin^2 \alpha}{49} \leq \frac{625000}{49}$, dấu "=" xảy ra khi $\sin^2 \alpha = 1$ hay $\alpha = 90^\circ$.

Như vậy góc bắn $\alpha = 90^\circ$ thì quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Câu 95: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2 \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hoà là vị trí vật đứng yên, khi đó $x = 0$, ta có

$$2 \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + k \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

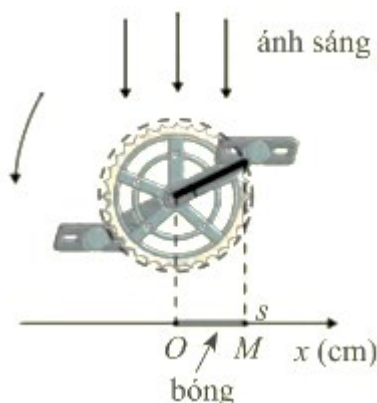
Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0 \leq t \leq 6$ hay

$$0 \leq \frac{2\pi}{15} + k \frac{\pi}{5} \leq 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{90 - 2\pi}{3\pi}$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

Câu 96: Trong hình bên, khi bàn đạp xe đạp quay, bóng M của đầu trục quay dao động trên mặt đất quanh điểm O theo phương trình $s = 17 \cos 5\pi t$ với $s(\text{cm})$ là toạ độ của điểm M trên trục Ox và t (giây) là thời gian bàn đạp quay. Làm cách nào để xác định được các thời điểm mà tại đó độ dài bóng OM bằng 10cm ?



Lời giải

Độ dài bóng OM bằng 10cm khi $s = 10$ hoặc $s = -10$.

Khi $s = 10$. Ta có: $17 \cos 5\pi t = 10$

Khi $s = -10$. Ta có: $17 \cos 5\pi t = -10$

Từ đó, ta có thể xác định được các thời điểm t



HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 97: Phương trình chuyển động của bóng đèn trực bàn đạp là $x = 17 \cos 5\pi t (cm)$ với t được đo bằng giây. Xác định các thời điểm t mà tại đó độ dài bóng $|x|$ vừa bằng $10 cm$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

Ta có $|x| = 10$

$$\Leftrightarrow |17 \cos 5\pi t| = 10$$

$$\Leftrightarrow 17 \cos 5\pi t = 10 \vee 17 \cos 5\pi t = -10$$

• $17 \cos 5\pi t = 10$

$$\Leftrightarrow 5\pi t = 0,94 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 5\pi t = -0,94 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

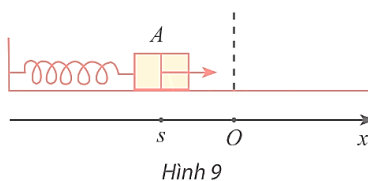
$$\Leftrightarrow t = 0,06 + 0,4k, k \in \mathbb{Z} \vee t = -0,06 + 0,4k, k \in \mathbb{Z}$$

• $17 \cos 5\pi t = -10$

$$\Leftrightarrow 5\pi t = 2,2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 5\pi t = -2,2 + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = 0,14 + 0,4k, k \in \mathbb{Z} \vee t = -0,14 + 0,4k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 98: Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ $s(cm)$ của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3} cm$?



Hình 9

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Lời giải

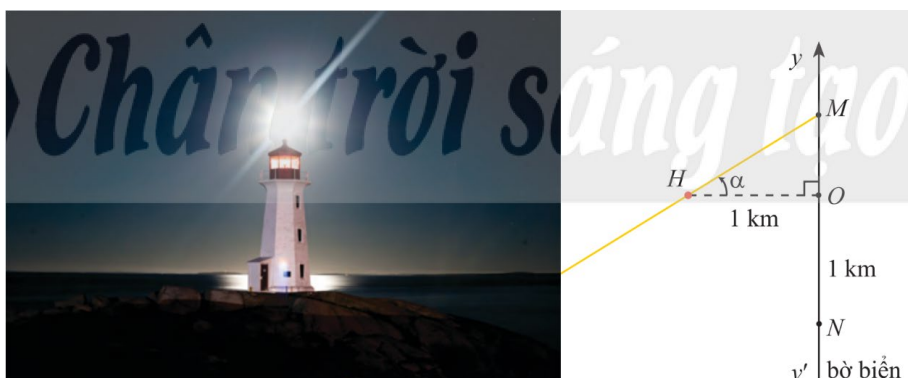
Khi: $s = -5\sqrt{3}$ thì $10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -5\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 10t + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 99: Trong Hình 10, ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển $y'y'$ một khoảng $HO = 1\text{ km}$. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10} \text{ rad/s}$ và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.



Hình 10

(Theo <https://www.mnhs.org/splitrock/learn/technology>)

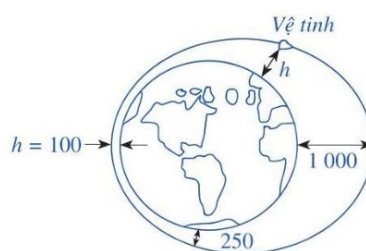
- Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .
- Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1(\text{km})$. Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Lời giải

a) $y_M = \tan \frac{\pi}{10} t$

b) Khi $y_N = -1$ ta có $\tan \frac{\pi}{10} t = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{10} t = \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{15}{2} + 10k, k \in \mathbb{Z}$

Câu 100: Một vệ tinh nhân tạo bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo là đường elip (Hình 33). Độ cao $h(\text{km})$ của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450 \cos \frac{\pi}{50} t$ (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021), trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Tại thời điểm t bằng bao nhiêu thì vệ tinh cách mặt đất $1000 \text{ km}; 250 \text{ km}; 100 \text{ km}$?



Hình 33

Lời giải

- Để vệ tinh cách mặt đất 1000 km thì $550 + 450 \cos \frac{\pi}{50} t = 1000$

$$\Leftrightarrow 450 \cos \frac{\pi}{50} t = 450 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{50} t = k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}, t \geq 0)$$

$$\Leftrightarrow t = k2\pi \cdot \frac{50}{\pi} = 100k \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tại các thời điểm $t = 100k$ (với $k \in \mathbb{Z}, t \geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 1000 km.

- Để vệ tinh cách mặt đất 250 km thì $550 + 450 \cos \frac{\pi}{50} t = 250$

$$\Leftrightarrow 450 \cos \frac{\pi}{50} t = -300 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{50} t \approx 2,3 + k2\pi \\ \frac{\pi}{50} t \approx -2,3 + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}, t \geq 0)$$

(Dùng máy tính cầm tay (chuyển về chế độ "radian") bấm liên tiếp $\boxed{SHIFT} \boxed{\cos} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\div} \boxed{3} \boxed{=}$ ta được kết quả gần đúng là 2,3)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \approx \frac{115}{\pi} + 100k \\ t \approx -\frac{115}{\pi} + 100k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}, t \geq 0)$$

Vậy tại các thời điểm $t \approx \pm \frac{115}{\pi} + 100k$ (với $k \in \mathbb{Z}, t \geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 250 km.

- Để vệ tinh cách mặt đất 100 km thì $550 + 450 \cos \frac{\pi}{50} t = 100$

$$\Leftrightarrow 450 \cos \frac{\pi}{50} t = -450$$

$$\Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = -1$$

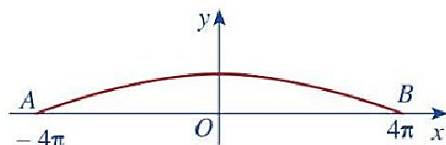
$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{50} t = \pi + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z}, t \geq 0).$$

$$\Leftrightarrow t = 50 + 100k \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy tại các thời điểm $t = 50 + 100k$ (với $k \in \mathbb{Z}, t \geq 0$) (phút) kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo thì vệ tinh cách mặt đất 100 km.

Trên thực tế, có nhiều bài toán dẫn đến việc giải một trong các phương trình có dạng: $\sin x = m, \cos x = m, \tan x = m, \cot x = m$, trong đó x là ẩn số, m là số thực cho trước. Các phương trình đó là các phương trình lượng giác cơ bản.

Câu 101: Một cây cầu có dạng cung AB của đồ thị hàm số $y = 4,2 \cdot \cos \frac{x}{8}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 38.



Hình 38

Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $12,5m$.

Lời giải

Với mỗi điểm M nằm trên mặt cầu, khoảng cách từ điểm M đến mặt nước tương ứng với giá trị tung độ y của điểm M .

Xét phương trình: $4,2 \cdot \cos \frac{x}{8} = 3 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{8} = \frac{5}{7}$. Do $x \in [-4\pi; 4\pi]$ nên $\frac{x}{8} \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Khi đó, ta có: $\cos \frac{x}{8} = \frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{x}{8} \approx \pm 0,775$, suy ra $\left|\frac{x}{8}\right| < 0,78 \Leftrightarrow |x| < 6,24$.

Do sà lan có thể đi qua được gầm cầu nên chiều rộng của khối hàng hoá là: $2|x| < 12,48 < 12,5(m)$.

Câu 102: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$.

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020)

- Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Lời giải

a) Để thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3 \sin \left(\frac{\pi}{182}(t-80) \right) + 12 = 12$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{182}(t-80) \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t-80 = 182k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 80 + 182k (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < 80 + 182k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -80 < 182k \leq 285 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{40}{91} < k \leq \frac{285}{182} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0; 1\}$$

Với $k = 0$ thì $t = 80 + 182 \cdot 0 = 80$;

Với $k = 1$ thì $t = 80 + 182 \cdot 1 = 262$

Vậy thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 trong năm.

b) Để thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3 \sin \left(\frac{\pi}{182}(t-80) \right) + 12 = 9$$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{182}(t-80) \right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t-80 = -91 + 364k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = -11 + 364k (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có:

$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < -11 + 364k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 11 < 364k \leq 376 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11}{364} < k \leq \frac{94}{91} \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Với $k = 1$ thì $t = -11 + 364 \cdot 1 = 353$.

Vậy thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 353 trong năm.

c) Để thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3 \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12 = 15$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t-80 = 91 + 364k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = 171 + 364k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có:

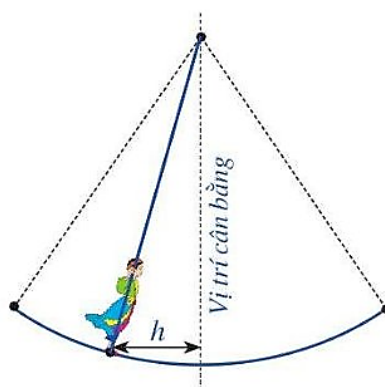
$$\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < 171 + 364k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -171 < 364k \leq 194 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{171}{364} < k \leq \frac{97}{182} \end{cases} \Leftrightarrow k = 0$$

Với $k = 0$ thì $t = 171 + 364.0 = 171$.

Vậy thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 171 trong năm.

Câu 103: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m; 0m$?



Hình 39

Lời giải

- Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là $3m$ thì:

$$\left| 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] \right| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 3 \\ 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 1 \\ \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} (2t-1) = k2\pi \\ \frac{\pi}{3} (2t-1) = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-1 = 6k \\ 2t-1 = 3 + 6k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 6k + 1 \\ 2t = 6k + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3k + \frac{1}{2} (k \in \mathbb{Z}) \\ t = 3k + 2 \end{cases}$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots\}$

Khi đó $\begin{cases} t \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{13}{2}; \dots \right\} \\ t \in \{2; 5; 8; \dots\} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right\}.$

Vậy $t \in \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right)$ (giờ) thì khoảng cách h là $3m$.

• Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là $0m$ thì:

$$\left| 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] \right| = 0 \Leftrightarrow 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3} (2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} (2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2t-1 = \frac{3}{2} + 3k$$

$$\Leftrightarrow 2t = \frac{5}{2} + 3k \Leftrightarrow t = \frac{5}{4} + \frac{3}{2}k.$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots\}$, khi đó $t \in \left\{ \frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots \right\}.$

Vậy $t \in \left\{ \frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots \right\}$ (giờ) thì khoảng cách h là $0m$.

Câu 104: Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức $h = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{6} + 1 \right) + 12$ (Nguồn: Đại số và Giải tích 11 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021). Tìm t để độ sâu của mực nước là:

- a) 15 m ;
- b) 9 m ;
- c) $10,5\text{ m}$.

Lời giải

a) Để độ sâu của mực nước là 15 m thì:

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 = 15 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = -\frac{6}{\pi} + 12k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq -\frac{6}{\pi} + 12k < 24$$

$$\Leftrightarrow \frac{6}{\pi} \leq 12k < 24 + \frac{6}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi} \leq k < 2 + \frac{1}{2\pi}$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2\}$.

Với $k = 1$ thì $t = -\frac{6}{\pi} + 12.1 \approx 10,09$ (giờ);

Với $k = 2$ thì $t = -\frac{6}{\pi} + 12.2 \approx 22,09$ (giờ).

Vậy lúc 10,09 giờ và 22,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 15 m.

b) Để độ sâu của mực nước là 9 m thì:

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 = 9 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = 6 - \frac{6}{\pi} + 12k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq 6 - \frac{6}{\pi} + 12k < 24$$

$$\Leftrightarrow -6 + \frac{6}{\pi} \leq 12k < 18 + \frac{6}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi} \leq k < \frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi}$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Với $k = 0$ thì $t = 6 - \frac{6}{\pi} + 12.0 \approx 4,09$ (giờ);

Với $k = 1$ thì $t = 6 - \frac{6}{\pi} + 12.1 \approx 16,09$ (giờ).

Vậy lúc 4,09 giờ và 16,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 9 m.

c) Để độ sâu của mực nước là $10,5\text{ m}$ thì:

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 = 10,5$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{6} + 1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi t}{6} + 1 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 4 - \frac{6}{\pi} + 12k \quad (1) \\ t = -4 - \frac{6}{\pi} + 12k \quad (2) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Do $0 \leq t < 24$ nên (1) ta có: $0 \leq 4 - \frac{6}{\pi} + 12k < 24$

$$\Leftrightarrow -4 + \frac{6}{\pi} \leq 12k < 20 + \frac{6}{\pi}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi} \leq k < \frac{5}{3} + \frac{1}{2\pi}$$

Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1\}$.

Với $k = 0$ thì $t = 4 - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 0 \approx 2,09$ (giờ);

Với $k = 1$ thì $t = 4 - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 1 \approx 14,09$ (giờ).

- Do $0 \leq t < 24$ nên từ (2) ta có: $0 \leq -4 - \frac{6}{\pi} + 12k < 24$

$$\Leftrightarrow 4 + \frac{6}{\pi} \leq 12k < 28 + \frac{6}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{3} + \frac{1}{2\pi} \leq k < \frac{7}{3} + \frac{1}{2\pi}$$

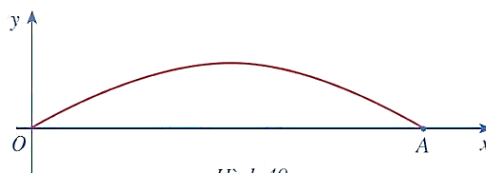
Mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{1; 2\}$.

Với $k = 1$ thì $t = -4 - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 1 \approx 6,09$ (giờ);

Với $k = 2$ thì $t = -4 - \frac{6}{\pi} + 12 \cdot 2 \approx 18,09$ (giờ).

Vậy lúc 2,09 giờ, 6,09 giờ, 14,09 giờ và 18,09 giờ thì mực nước có độ sâu là 10,5 m.

Câu 105: Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.



a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA . Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

b) Một sà lan chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao $3,6m$ so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $13,1\text{ m}$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hoá được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hoá đó là $9m$ sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn $4,3m$.

Lời giải

a) Hai vị trí O và A là hai vị trí chân cầu, tại hai vị trí này ta có: $y = 0$

$$\Leftrightarrow 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = 9k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Quan sát đồ thị ta thấy, đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ cắt trục hoành tại điểm O và A liên tiếp nhau với $x \geq 0$.

Xét $k = 0$, ta có $x_1 = 0$;

Xét $k = 1$, ta có $x_2 = 9\pi$.

Mà $x_1 = 0$ nên đây là hoành độ của O , do đó $x_2 = 9\pi$ là hoành độ của điểm A .

Khi đó $OA = 9\pi \approx 28,3$.

Vậy chiều rộng của con sông xấp xỉ $28,3\text{ m}$.

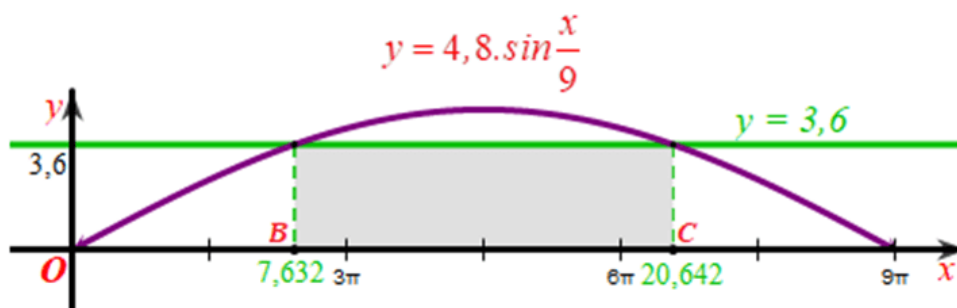
b) Do sà lan có độ cao $3,6m$ so với mực nước sông nên khi sà lan đi qua gầm cầu thì ứng với $y = 3,6$.

$$\Leftrightarrow 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9} = 3,6 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} \approx 0,848 + k2\pi \\ \frac{x}{9} \approx \pi - 0,848 + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 7,632 + 18k\pi \\ x \approx 9\pi - 7,632 + 18k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Xét $k = 0$, ta có $x_1 \approx 7,632$; $x_2 \approx 20,642$.

Ta biểu diễn các giá trị x vừa tìm được trên hệ trục tọa độ vẽ đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ như sau:

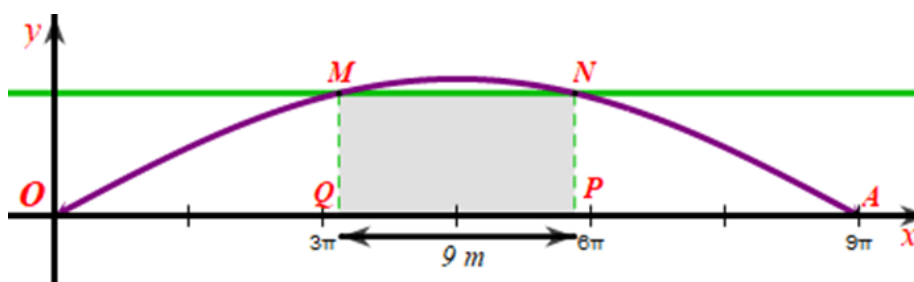


Khi đó để sà lan có thể đi qua được gầm cầu thì khối hàng hóa có độ cao 3,6 m phải có chiều rộng nhỏ hơn độ dài đoạn thẳng BC trên hình vẽ.

Mà $BC \approx 20,642 - 7,632 = 13,01(m) < 13,1(m)$.

Vậy chiều rộng của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 13,1 m.

c) Giả sử sà lan chở khối hàng được mô tả bởi hình chữ nhật $MNPQ$:



Khi đó $QP = 9$; $OA = 28,3$ và $OQ = PA$.

Mà $OQ + QP + PA = OA \Rightarrow OQ + 9 + OQ \approx 28,3 \Rightarrow OQ \approx 9,65$

Khi đó $y_M = 4,8 \cdot \sin \frac{x_M}{9} = 4,8 \cdot \sin \frac{OQ}{9} \approx 4,8 \cdot \sin \frac{9,65}{9} \approx 4,22(m) < 4,3(m)$.

Vậy để sà lan có thể đi qua được gầm cầu thì chiều cao của khối hàng hoá đó phải nhỏ hơn 4,3 m.

Câu 106: Cho vận tốc $v(cm/s)$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức

$$v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right).$$

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
- Vận tốc con lắc bằng $1,5 cm/s$.

Lời giải

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

b) Khi $v = 1,5$ Ta có:

$$\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{-\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 107: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hoá bởi hàm số $p(t) = 115 + 25 \sin(160\pi t)$,

trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo phút.

- Tìm chu kì của hàm số $p(t)$.
- Tìm số nhịp tim mỗi phút.
- Tìm chỉ số huyết áp. So sánh huyết áp của người này với huyết áp bình thường.

Lời giải

a) Chu kì của hàm số $p(t)$ là $T = \frac{2\pi}{160\pi} = \frac{1}{80}$

b) Thời gian giữa hai lần tim đập là $T = \frac{1}{80}$ (phút)

Số nhịp tim mỗi phút là $1 : \frac{1}{80} = 80$ nhịp.

c) Ta có: $-1 \leq \sin(160\pi t) \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$

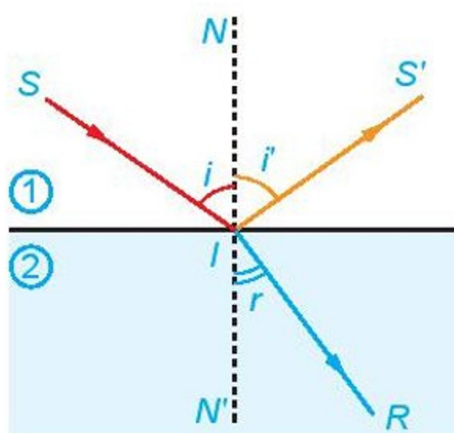
$$\Leftrightarrow -25 \leq 25\sin(160\pi t) \leq 25 \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 115 + (-25) \leq 115 + 25\sin(160\pi t) \leq 115 + 25 \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 90 \leq p(t) \leq 140 \text{ với mọi } t \in \mathbb{R}$$

Do đó, chỉ số huyết áp của người này là $\frac{140}{90}$ và chỉ số huyết áp của người này cao hơn mức bình thường.

Câu 108: Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình.



Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi Định luật khúc xạ ánh sáng $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$.

Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Lời giải

Theo bài ra ta có: $i = 50^\circ$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1,33$, thay vào $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$ ta được:

$$\frac{\sin 50^\circ}{\sin r} = \frac{1,33}{1} \quad (DKXD : \sin r \neq 0)$$

$$\Rightarrow \sin r = \frac{\sin 50^\circ}{1,33}$$

$$\Leftrightarrow \sin r \approx 0,57597 \text{ (Thỏa mãn)}$$

$$\Leftrightarrow \sin r \approx \sin(35^\circ 10')$$

$$\Leftrightarrow r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \vee r \approx 180^\circ - 35^\circ 10' + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

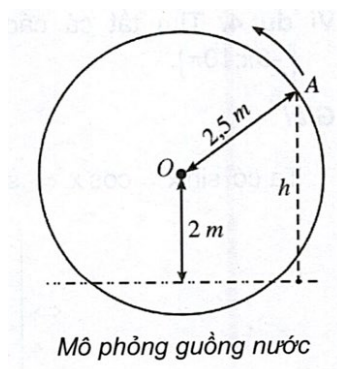
$$\Leftrightarrow r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \vee r \approx 144^\circ 50' + k360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $0^\circ < r < 90^\circ$ nên $r \approx 35^\circ 10'$.

Vậy góc khúc xạ $r \approx 35^\circ 10'$.

Câu 109: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gàu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right)$

với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gàu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gàu ở dưới mặt nước.



a) Khi nào chiếc gàu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gàu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?

Lời giải

a) Vì $-1 \leq \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \leq 1$ nên $-2,5 \leq 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \leq 2,5$ và do đó ta có

$$-0,5 = 2 - 2,5 \leq 2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \leq 2 + 2,5 = 4,5 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, gàu ở vị trí cao nhất khi $\sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy gàu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ phút.

Tương tự, gàu ở vị trí thấp nhất khi

$$\sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy gàu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm 0, 1, 2, 3, ... phút.

b) Gàu cách mặt nước 2 m khi $2 + 2,5 \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = 2$

$$\Leftrightarrow \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow 2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy chiếc gàu cách mặt nước 2 m lần đầu tiên tại thời điểm $x = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 110: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số $L(t) = 12 + 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$, $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$.

- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \leq 1$ nên $-2,83 \leq 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \leq 2,83$, do đó

$$9,17 = 12 - 2,83 \leq 12 + 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \leq 12 + 2,83 = 14,83 \forall t \in \mathbb{R}.$$

- Ngày thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{45}{4} + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 1$, suy ra $t = -\frac{45}{4} + 365 = 353,75$. Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 12 thì thành phố A sẽ có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất.

- Ngày thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 171,25 + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$, suy ra $t = 171,25$. Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 6 thì thành phố A sẽ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

- Thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu

$$12 + 2,83 \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = 10 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] = -\frac{200}{283} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{365}(t-80) \approx -0,78 + k2\pi \\ \frac{2\pi}{365}(t-80) \approx 3,93 + k2\pi \end{cases}$$

Từ đó ta được $\begin{cases} t \approx 34,69 + 365k \\ t \approx 308,30 + 365k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$ suy ra $t \approx 34,69$ hoặc $t \approx 308,30$. Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm, tức là ngày 3 tháng 2 và ngày thứ 308 của năm, tức là ngày 4 tháng 11 thành phố A sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.

Câu 111: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào

đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$P(t) = 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$$

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100mmHg.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120mmHg.

Lời giải

a) Huyết áp là 100mmHg khi

$$P(t) = 100 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3k}{7} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3k}{7} < 1 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{7}{3} \Leftrightarrow k \in \{1; 2\} \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 2 lần huyết áp là 100 mmHg.

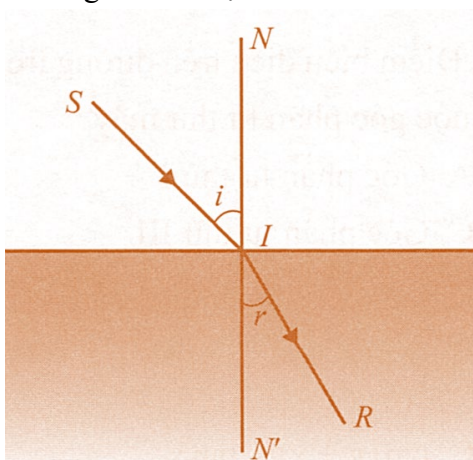
b) Huyết áp là 120mmHg khi

$$P(t) = 120 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 120 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0 \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 1 lần huyết áp là 120 mmHg.

Câu 112: Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30° . Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu?



Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

Vì $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin r}$ nên $\sin r = \frac{\sin 60^\circ \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Suy ra $r = 37,76^\circ$.

Câu 113: Một quả bóng được ném xiên một góc $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$ từ mặt đất với tốc độ $v_0 (m/s)$. Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

- a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu $10 m/s$ và góc ném là 30° so với phương ngang.
- b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là $10 m/s$ thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là $5 m$?

Lời giải

a) $d = 5\sqrt{3} \approx 8,66(m)$;

b) $d = 5 \Leftrightarrow \frac{10^2 \cdot \sin 2\alpha}{10} = 5 \Leftrightarrow 10 \sin 2\alpha = 5 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\alpha = 30^\circ$ hoặc $2\alpha = 150^\circ \Leftrightarrow \alpha = 15^\circ$ hoặc $\alpha = 75^\circ$.

Câu 114: Chiều cao $h(m)$ của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

- a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?
- b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao $40 m$ lần đầu tiên?

Lời giải

a) $50 m$;

b) $12,5$ giây.

Câu 115: Vận tốc $v_1 (cm/s)$ của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc $v_2 (cm/s)$ của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

$v_1(t) = -4 \cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ và $v_2(t) = 2 \sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó:

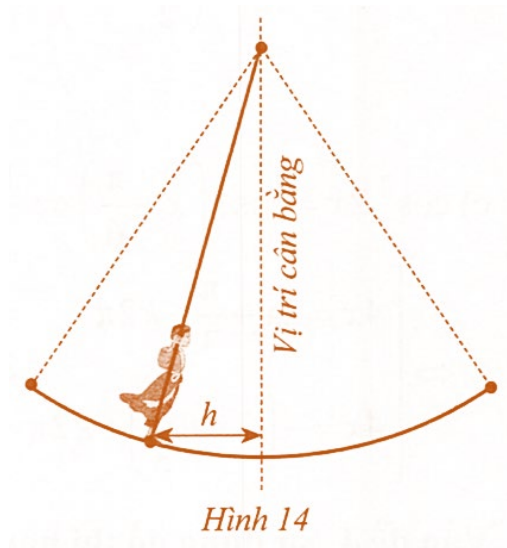
- a) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng $2 cm/s$;
- b) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

Lời giải

a) $t = \frac{5\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$ và $t = \frac{13\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$;

b) $t = \frac{19\pi}{16} + k\frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$ và $t = \frac{13\pi}{32} + k\frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{N}$.

Câu 116: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 14). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian $t(s)$ (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m; 0m$?



Giải

Do $-1 \leq \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] \leq 1$ nên $-3 \leq 3 \cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] \leq 3$ hay $-3 \leq d \leq 3$. Do đó, $0 \leq |d| \leq 3$.

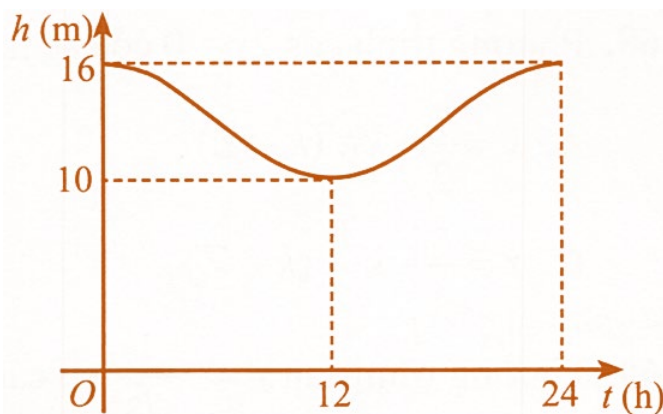
Vậy $h = 3$ khi $|d| = 3$ hay $\cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = \pm 1 \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = 0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{1+3k}{2}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$; $h = 0$ khi $|d| = 0$ hay

$\cos \left[\frac{\pi}{3}(2t-1) \right] = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1) = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow t = \frac{5+6k}{4}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$.

Câu 117: Mức nước cao nhất tại một cảng biển là $16m$ khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mức nước thấp nhất là $10m$. Đồ thị ở Hình 15 mô tả sự thay đổi chiều cao của mức nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm.



Hình 15

Biết chiều cao của mực nước $h(m)$ theo thời gian $t(h)$ ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức

$$h = m + a \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) \text{ với } m, a \text{ là các số thực dương cho trước.}$$

a) Tìm m, a .

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là $11,5m$.

Lời giải

a) Chiều cao của mực nước cao nhất là $m + a$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1$ và thấp nhất bằng $m - a$ khi

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1. \text{ Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} m + a = 16 \\ m - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ a = 3. \end{cases}$$

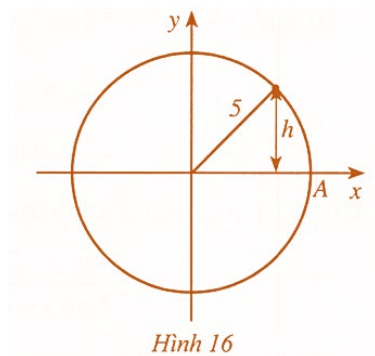
b) Từ câu a ta có công thức: $h = 13 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Do chiều cao của mực nước là $11,5m$ nên

$$13 + 3 \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 + 24k \\ t = -8 + 24k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có $t = 8$ (h) và $t = 16$ (h).

Câu 118: Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính $5cm$. Khoảng cách $h(cm)$ từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = a \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây ($t \geq 0$) và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16).



Hình 16

- Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?
- Tìm giá trị của a .
- Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h = 2,5 \text{ cm}$ và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.

Lời giải

- Xét $h = 0$ hay $a \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 5k$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq 0$.

Ta nhận thấy, từ thời điểm ban đầu, cứ sau 5 giây, khoảng cách từ chất điểm đến trục hoành lại bằng 0. Suy ra sau mỗi 5 giây, chất điểm chuyển động được nửa vòng. Vậy chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây.

- Do chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây nên khi $t = 2,5$ giây thì chất điểm chuyển động được một phần tư vòng theo chiều dương, suy ra tại $t = 2,5$ ta có $y = |y| = h = 5 \Leftrightarrow a \sin\left(\frac{\pi}{5} \cdot \frac{5}{2}\right) = 5 \Leftrightarrow a = 5$.

- Từ kết quả câu b, ta có: $y = 5 \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$. Do $h = 2,5 \text{ cm}$ và chất điểm nằm ở dưới trục hoành nên $y = -2,5$. Với $y = -2,5$, ta có:

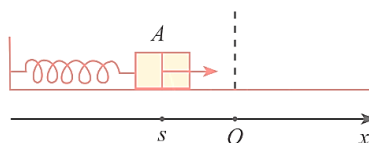
$$5 \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = -2,5 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{5}t = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{\pi}{5}t = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-5 + 60k}{6} \\ t = \frac{35 + 60k}{6} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Với vòng quay đầu tiên thì $0 \leq t \leq 10$, do đó $t = \frac{35}{6}, t = \frac{55}{6}$.

Vậy tại thời điểm $t = \frac{35}{6}$ giây, $t = \frac{55}{6}$ giây thì chất điểm ở vị trí có $h = 2,5 \text{ cm}$ và nằm ở dưới trục hoành.

Câu 119: Trong Hình 9, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ $s(cm)$ của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3} cm$?



Hình 9

Lời giải

$$\text{Khi: } s = -5\sqrt{3} \text{ thì } 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -5\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 10t + \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{-\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{1}{12} + \frac{1}{5}k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 120: Độ sâu $h(m)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8\cos 0,5t + 4$.

(Theo <https://noc.ac.uk/files/documents/business/an-introduction-to-tidalmodelling.pdf>)

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu $3,6m$ để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Tại thời điểm $t = 2$. Ta có: $h(t) = 0,8 \cdot \cos(0,5 \cdot 2) + 4 = 4,43(m)$

b)

Dựa vào đồ thị hàm số cos:

Những thời điểm tàu không thể hạ thủy là khi $0,8\cos 0,5t + 4 < 3,6 \Leftrightarrow \cos 0,5t < -0,5$

$$\Leftrightarrow \frac{2\pi}{3} < 0,5t < \frac{4\pi}{3} \Leftrightarrow 4,19 < t < 8,38$$

Vậy thời điểm tàu có thể hạ thủy là $(0; 4,19) \cup (8,38; 12)$

Câu 121: Cho vận tốc $v(cm/s)$ của một con lắc đơn theo thời gian t (giây) được cho bởi công thức

$$v = -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right).$$

(Theo <https://www.britannica.com/science/simple-harmonic-motion>)

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
- Vận tốc con lắc bằng $1,5 \text{ cm/s}$.

Lời giải

a) Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất khi $\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = \frac{7\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

b) Khi $v = 1,5$ Ta có:

$$\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \vee 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{-\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z} \vee t = \frac{-\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 122: Trong Hình 1, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m . Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_s = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt Trời và thay đổi

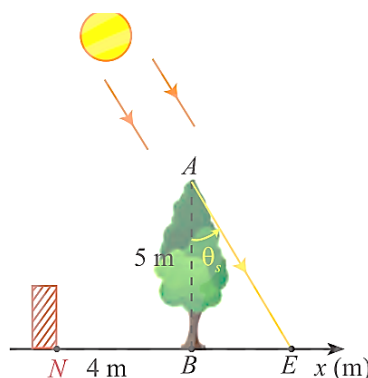
theo thời gian trong ngày theo công thức $\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t - 12) \text{ rad}$

với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).

(Theo <https://www.sciencedirect.com/topics/engineering/solar-hour-angle>)

a) Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t .

b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với tọa độ là $x_N = -4(\text{m})$. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Hình 1

Lời giải

a) $x_E = 5 \tan \frac{\pi}{12}(t-12)$

b) Do $6 < t < 18$ nên $\frac{-\pi}{2} < \frac{\pi}{12}(t-12) < \frac{\pi}{2}$

Dựa vào đồ thị hàm tan:

Bóng cây phủ qua tường rào khi $x_E < -4 \Leftrightarrow \tan \frac{\pi}{12}(t-12) < \frac{-4}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{12}(t-12) < -0,67 \Leftrightarrow t < 9,4$

Vậy thời điểm bóng cây phủ qua hàng rào là $6 < t < 9,4$

Câu 123: Guồng nước (hay còn gọi là cọn nước) không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hoá đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.



Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính $3,5m$; trục của nó đặt cách mặt nước $3m$. Khi guồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3$, với x (phút) là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$).

a) Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước $3m$.

b) Hãy chỉ ra một số giá trị của x để ống đựng nước cách mặt nước $6,5m$.

Lời giải

a) Để ống đựng nước cách mặt nước $3m$, ta có phương trình:

$$\left| 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 3 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{6}{3,5} < -1(VN) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x - \frac{\pi}{2} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{4}; k \in \mathbb{Z}$$

Vì $x \geq 0$ nên một số giá trị của x là: $\frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}; \frac{7}{4}; \dots$

b) Để ống đựng nước cách mặt nước $6,5m$, ta có phương trình: $\left| 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 \right| = 6,5$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = 6,5 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) + 3 = -6,5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ 3,5 \sin\left(2\pi x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{9,5}{3,5} < -1(VN) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 2\pi x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{2k+1}{2}; k \in \mathbb{Z}.$$

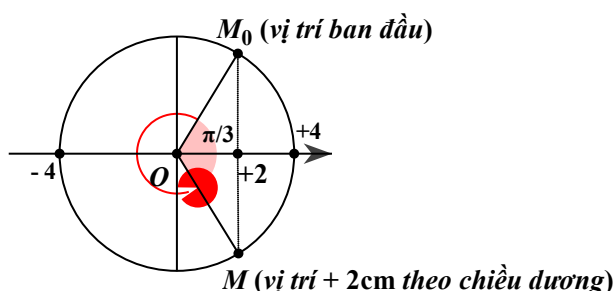
Vì $x \geq 0$ nên một số giá trị của x là: $\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{5}{2}; \frac{7}{2}; \dots$

Câu 124: Một vật dao động điều hòa với phương trình $x = 4 \cos(6\pi t + \frac{\pi}{3})$, (x tính bằng cm, t tính bằng giây). Xác định thời điểm vật qua vị trí $x = 2cm$ theo chiều dương lần thứ 2 kể từ thời điểm ban đầu.

Lời giải

Ta có: $x = 2 \Rightarrow 4 \cos(6\pi t + \frac{\pi}{3}) = 2 \Rightarrow \cos(6\pi t + \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow 6\pi t + \frac{\pi}{3} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

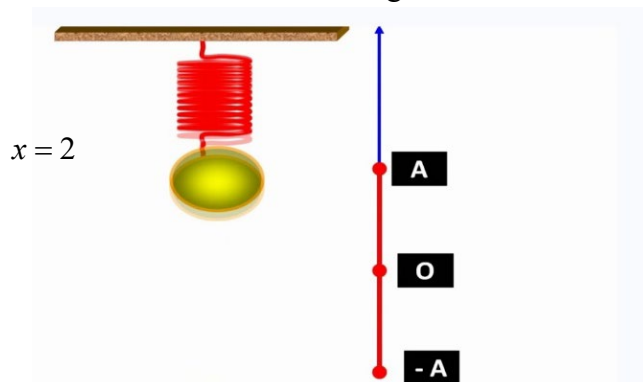
Vật qua vị trí $x = 2$ cm theo chiều dương $\Rightarrow 6\pi t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$



$$\Rightarrow 6\pi t = -\frac{2\pi}{3} + k.2\pi \Rightarrow t = -\frac{1}{9} + \frac{k}{3} \geq 0 \text{ với } k = 1; 2; 3$$

Vậy vật đi qua lần thứ 2, ứng với $k = 2 \Rightarrow t = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$ s

Câu 125: Một vật dao động điều hoà theo phương trình $x = -5 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$ (t tính bằng giây, x tính bằng centimét). Xác định các thời điểm vật có li độ bằng 2 cm.



Lời giải

$$\text{Ta có } x = 2 \Leftrightarrow 2 = -5 \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) = -0,4 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 1,89 + 6m \\ t \approx -1,89 + 6n \end{cases} (n, m \in \mathbb{Z})$$

Do $t > 0$ nên $m \in \mathbb{N}$ và $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{Vậy vật có li độ bằng 2 cm tại các thời điểm } \begin{cases} t \approx 1,89 + 6m (m \in \mathbb{N}) \\ t \approx -1,89 + 6n (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

Câu 126: Khi Mặt Trăng quay quanh Trái Đất, mặt đối diện với Trái Đất thường chỉ được Mặt Trời chiếu sáng một phần. Các pha của Mặt Trăng mô tả mức độ phần bề mặt của nó được Mặt Trời chiếu sáng. Khi góc giữa Mặt Trời, Trái Đất và Mặt Trăng là α ($0^\circ \leq \alpha \leq 360^\circ$) thì tỉ lệ F của phần

Mặt Trăng được chiếu sáng cho bởi công thức $F = \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha)$. Xác định góc α tương ứng với các pha sau của Mặt Trăng:

- $F = 0$ (trăng mới).
- $F = 0,25$ (trăng lưỡi liềm).
- $F = 0,5$ (trăng bán nguyệt đầu tháng hoặc trăng bán nguyệt cuối tháng).
- $F = 1$ (trăng tròn).



Lời giải

$$\text{a) Với } F = 0, \text{ ta có } \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{b) Với } F = 0,25, \text{ ta có } \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 0,25 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

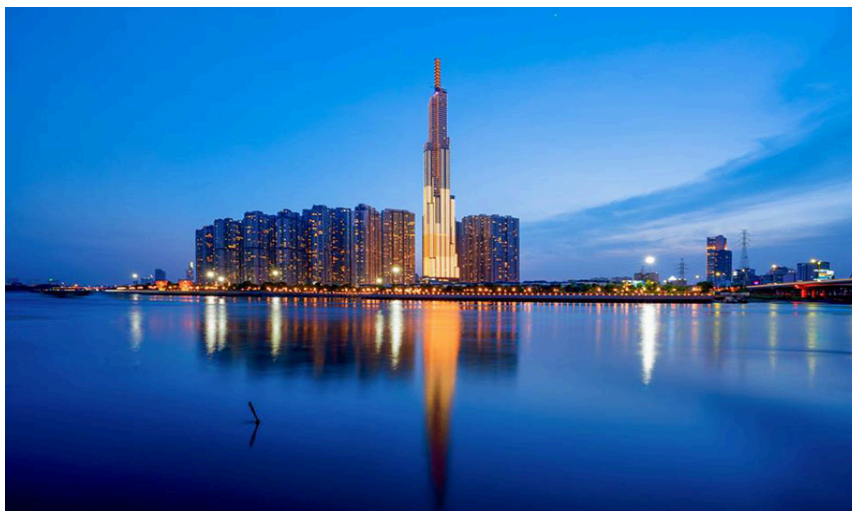
$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \cos \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi \text{ hoặc } \alpha = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{c) Với } F = 0,5, \text{ ta có } \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 0,5 \Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{d) Với } F = 1, \text{ ta có } \frac{1}{2}(1 - \cos \alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 127: Toà chung cư The Landmar tại Thành Phố Hồ Chí Minh tại thời điểm năm 2022 là ngôi nhà chọc trời cao nhất Việt Nam và Đông Nam Á, với chiều cao 461m cùng 81 tầng. Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 461m in trên mặt nước, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 461 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$, trong đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

- Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?
- Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?



Lời giải

a) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà khi

$$S(t) = 461 \Leftrightarrow 461 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right| = 461 \Leftrightarrow \cot \frac{\pi}{12} t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 \leq t \leq 12$ nên $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

b) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t \rightarrow 12$, vì vậy $\frac{\pi}{12} t \rightarrow \pi$, do đó $\cot \frac{\pi}{12} t \rightarrow -\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

Câu 128: Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t \leq 24$) cho bởi công thức

$$h = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{6} + 1 \right) + 0,5. \text{ Tìm } t \text{ để độ sâu của mực nước là } 3,5m.$$



Lời giải

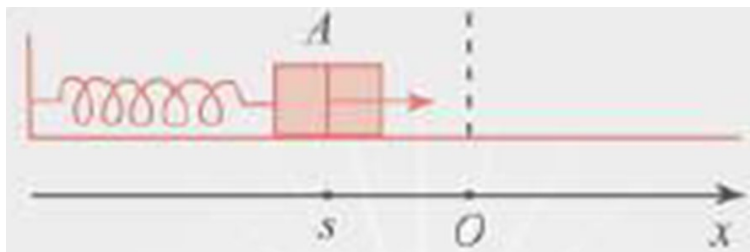
Độ sâu của mực nước là $3,5m$ thì $h = 3,5$

$$\text{Khi đó: } 3,5 = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{6} + 1 \right) + 0,5 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi t}{6} + 1 \right) = 1 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi t}{6} + 1 \right) = \cos 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = k2\pi$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{6(k2\pi - 1)}{\pi}; k \in \mathbb{Z}. \text{ Vì } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq \frac{6(k2\pi - 1)}{\pi} \leq 24 \Leftrightarrow 0 < k \leq 2.$$

$$\text{Mà } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{6(2\pi - 1)}{\pi}; \frac{6(4\pi - 1)}{\pi} \right\}.$$

Câu 129: Vật nặng khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ $s(\text{cm})$ của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Trong 2 giây đầu tiên, có bao nhiêu lần vật A đi qua vị trí $s = -5\sqrt{3} \text{ cm}$?



Lời giải

$$\text{Ta có: } 10 \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -5\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

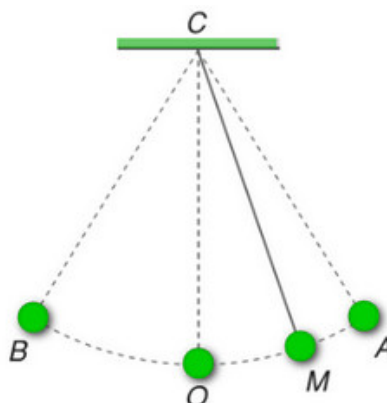
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10t + \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{3} + n2\pi \\ 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{3} + m2\pi \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{7\pi}{6} + n\frac{\pi}{5} \\ t = \frac{7\pi}{6} + m\frac{\pi}{5} \end{cases} \quad (m, n \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Với } t \in [0; 2] \text{ thì ta có } \begin{cases} 0 \leq -\frac{7\pi}{6} + n\frac{\pi}{5} \leq 2 \\ 0 \leq \frac{7\pi}{6} + m\frac{\pi}{5} \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{35}{6} \leq n \leq \frac{95}{6} \\ -\frac{35}{6} \leq m \leq \frac{25}{6} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n \in \{6, 7, 8, \dots, 15\} \\ m \in \{0, 1, 2, \dots, 4\} \end{cases}$$

Vậy có 15 lần vật A qua vị trí $s = -5\sqrt{3} \text{ cm}$.

Câu 130: Cho vận tốc $v(\text{cm/s})$ của một con lắc đơn theo thời gian $t(\text{giây})$ được cho bởi công thức $v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) (t > 0)$. Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất;
- Vận tốc con lắc bằng $1,5 \text{ cm/s}$.



Lời giải

$$\text{a) } v = -3 \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 3 (\forall t)$$

$$\text{Và } -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Leftrightarrow \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow 1,5t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$t = -\frac{5\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3}; t > 0 \Leftrightarrow -\frac{5\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3} > 0 \Leftrightarrow k > \frac{5}{12}. \text{ Suy ra } k \in \mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\}.$$

Vậy vận tốc con lắc đạt giá trị lớn nhất $v_{\max} = 3$ tại các thời điểm:

$$t = -\frac{5\pi}{9} + k\frac{4\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{N})$$

$$\text{b) } v = 1,5 \Leftrightarrow -3\sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = 1,5 \Leftrightarrow \sin\left(1,5t + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1,5t + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + m2\pi \\ 1,5t + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (m, k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{4\pi}{9} + m\frac{4\pi}{3} \\ t = \frac{2\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do } t > 0 \text{ nên } \begin{cases} m \in \mathbb{N}^* = \{1; 2; 3; \dots\} \\ k \in \mathbb{N} = \{0; 1; 2; \dots\} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy Vận tốc con lắc bằng } 1,5 \text{ cm/s tại các thời điểm } \begin{cases} t = -\frac{4\pi}{9} + m\frac{4\pi}{3} \quad (m \in \mathbb{N}^*) \\ t = \frac{2\pi}{3} + k\frac{4\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}.$$

Câu 131: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là $3m$?



Lời giải

Để khoảng cách $h(m)$ từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là $3m$ thì:

$$\left| 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] \right| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 3 \\ 3 \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = 1 \\ \cos \left[\frac{\pi}{3} (2t-1) \right] = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3} (2t-1) = k2\pi \\ \frac{\pi}{3} (2t-1) = \pi + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-1 = 6k \\ 2t-1 = 3+6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = 6k+1 \\ 2t = 6k+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3k + \frac{1}{2} \\ t = 3k + 2 \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0; 1; 2; \dots\}$.

Khi đó $\begin{cases} t \in \left\{ \frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{13}{2}; \dots \right\} \\ t \in \{2; 5; 8; \dots\} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{ \frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right\}.$

Vậy $t \in \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots \right)$ (giây) thì khoảng cách h là 3m.

Câu 132: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 2 \cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right)$. Ở đây, thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần ?

Lời giải

Tại vị trí cân bằng thì $x = 0$.

Ta có $\cos \left(5t - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + \frac{k\pi}{5}$

Do $0 < t < 6$ nên $0 < \frac{2\pi}{15} + \frac{k\pi}{5} < 6 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} < k < 8,89 \Rightarrow k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Vậy có 9 giá trị k , tương ứng ta có 9 lần vật qua vị trí cân bằng.

Câu 133: Hàng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (cm) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t \leq 24$) cho bởi công thức $h = 3 \cos \left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} \right) + 10$. Hỏi vào thời điểm nào trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải

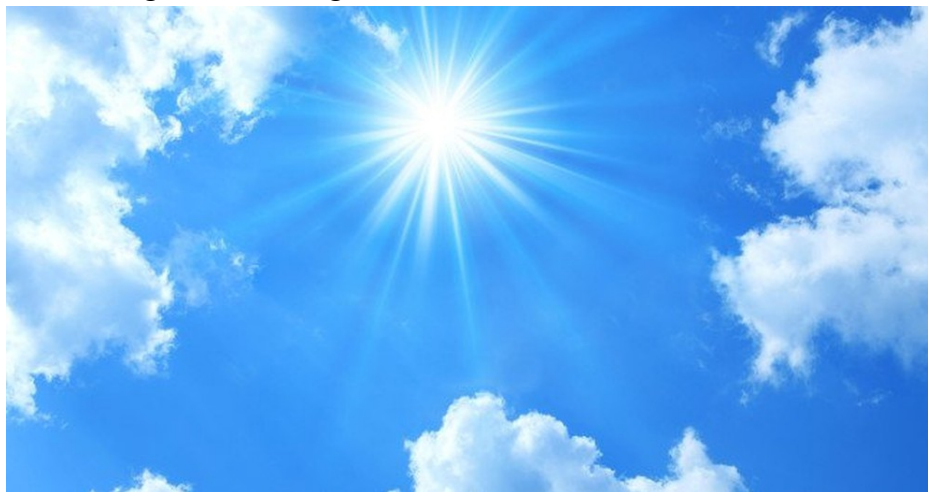
Ta có $3 \cos \left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} \right) + 10 \leq 13$

Mà $3 \cos \left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} \right) + 10 = 13 \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \quad \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = 24k - 4 \quad (k \in \mathbb{Z})$ nên

$0 \leq 24k - 4 \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{7}{6} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = 20$.

Vậy vào thời điểm 20h trong ngày, mực nước của con kênh đạt độ cao lớn nhất là 13 (cm).

Câu 134: Số giờ có ánh sáng mặt trời của Thủ đô Hà Nội năm 2023 được cho bởi công thức $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{180}(x + 60)\right) + 13$ với $1 \leq x \leq 365$ là số thứ tự của ngày trong năm. Ngày nào sau đây của năm 2023 thì số giờ có ánh sáng mặt trời của Hà Nội lớn nhất?



Lời giải

Để số giờ có ánh sáng mặt trời lớn nhất thì hàm số $y = 3 \sin\left(\frac{\pi}{180}(x + 60)\right) + 13$ đạt giá trị lớn nhất.

Khi đó $\sin\left(\frac{\pi}{180}(x + 60)\right) = 1 \Leftrightarrow x = 30 + k360, k \in \mathbb{Z}$. Vì $1 \leq x \leq 365$ nên ta có

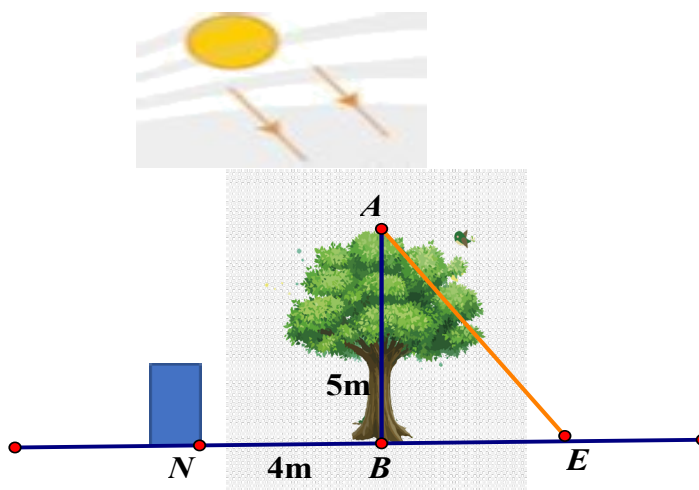
$$1 \leq 30 + k360 \leq 365 \Leftrightarrow -0,08 \leq k \leq 0,93 \Rightarrow k = 0.$$

Do đó $x = 30$ (tháng đầu tiên của năm).

Câu 135: Trong hình vẽ bên cây xanh AB nằm trên đường xách đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx Góc thiên đỉnh $\theta_x = (\overline{AB}, \overline{AE})$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt trời thay đổi theo

thời gian trong ngày theo công thức $\theta_x(t) = \frac{\pi}{12}(t - 12)$ rad với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$)

- Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t .
- Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với tọa độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Lời giải

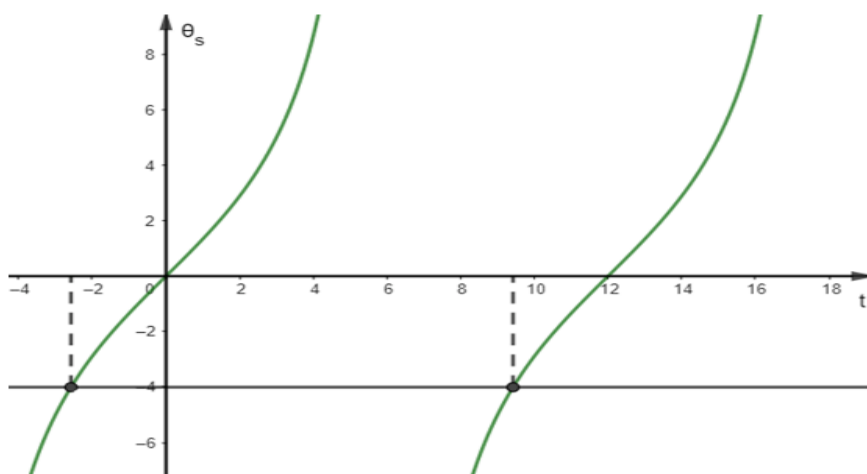
$$a) x = AB \cdot \tan \theta \Leftrightarrow x = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right) \Leftrightarrow x = 5 \tan \frac{\pi t}{12}$$

$$b) x_N = -4 \Leftrightarrow 5 \tan \frac{\pi t}{12} = -4 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} \approx -0,67 + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t \approx -2,6 + 12k$$

Do $6 < t < 18$ nên $6 < -2,6 + 12k < 18 \Leftrightarrow 0,29 < k < 1,7$. Suy ra $k = 1 \Rightarrow t \approx 9,4$

Vậy khoảng 9 giờ 25 phút thì bóng cây phủ qua vị trí tường rào N

Đồ thị của hàm số $\theta_s = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right)$



Dựa vào đồ thị hàm số để $\theta_s = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right) < -4$ và $6 < t < 18$ suy ra các thời điểm để bóng cây phủ qua hàng rào N là $6 < t < 9,4$.

Câu 136: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12, \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

a) Thành phố A có đúng 12 giờ ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải

a) Với $d = 12$, ta có $12 = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{182}(t - 80) = 0 \\ \frac{\pi}{182}(t - 80) = \pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 80 \\ t = 262 \end{cases}.$$

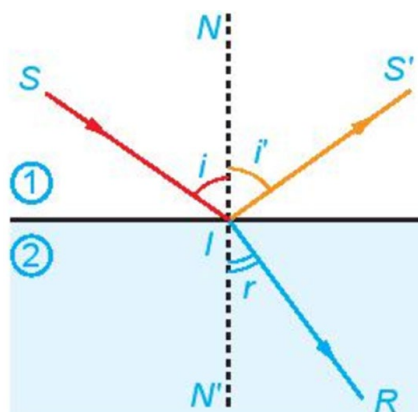
Vậy A có đúng 12 giờ ánh sáng mặt trời vào các ngày thứ 80 và 262 trong năm.

b) Với $d = 9$, ta có $9 = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 \Leftrightarrow \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] = -1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{182}(t - 80) = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{182}(t - 80) = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow t = 353.$$

Vậy A có đúng 9 giờ ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 353 trong năm.

Câu 137: Khi một tia sáng truyền từ không khí vào mặt nước thì một phần tia sáng bị phản xạ trên bề mặt, phần còn lại bị khúc xạ như trong Hình 1.26. Góc tới i liên hệ với góc khúc xạ r bởi định luật khúc xạ ánh sáng $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$.



Ở đây, n_1 và n_2 tương ứng là chiết suất của môi trường 1 (không khí) và môi trường 2 (nước). Cho biết góc tới $i = 50^\circ$, hãy tính góc khúc xạ, biết rằng chiết suất của không khí bằng 1 còn chiết suất của nước là 1,33.

Lời giải

Theo Câu ra ta có: $i = 50^\circ, n_1 = 1, n_2 = 1,33$ thay vào $\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}$ ta được:

$$\frac{\sin 50^\circ}{\sin r} = \frac{1,33}{1} (r \neq 0) \Rightarrow \sin r = \frac{\sin 50^\circ}{1,33} \approx 0,57597 \text{ (thỏa mãn)}$$

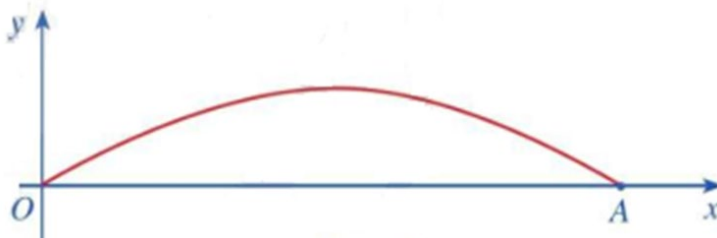
$$\Leftrightarrow \begin{cases} r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \\ r \approx 180^\circ - 35^\circ 10' + k360^\circ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r \approx 35^\circ 10' + k360^\circ \\ r \approx 144^\circ 50' + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $0^\circ < r < 90^\circ \Rightarrow r \approx 35^\circ 10'$

Vậy góc khúc xạ $r \approx 35^\circ 10'$

Câu 138: Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở Hình 40.

- a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA . Tìm chiều rộng đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- b) Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6 m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 13,1 m.
- c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là 9 m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 4,3 m.



Lời giải

a) $y = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9} (x \geq 0)$. Cho $y = 0$, ta tìm được $x = 0$ hoặc $x = 9\pi \approx 28,3$. Vậy chiều rộng con sông là $OA \approx 28,3(m)$

b) Với $y = 3,6$. Ta có $3,6 = 4,8 \cdot \sin \frac{x}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \approx 7,6 + 18k\pi \\ x_2 \approx 20,6 + 18k\pi \end{cases}$

Vậy chiều rộng khối hàng cho phép khoảng $x_2 - x_1 \approx 13(m)$.

c) Tại vị trí đỉnh cầu, ta có $y = y_{\max} = 4,8 \Rightarrow x \approx 14,1$. Để sà lan chở khối hàng hóa rộng 9m qua cầu thì vị trí khối hàng hóa phải ở trong khu vực $x = 9,6$ đến $x = 18,6$.

Khi đó, $x \approx 9,6 \Rightarrow y \approx 4,8 \sin \frac{9,6}{9} \approx 4,2$, $x \approx 18,6 \Rightarrow y \approx 4,8 \sin \frac{18,6}{9} \approx 4,2 < 4,3$.

Vậy khối hàng hóa cao tối đa khoảng 4,2 (m).

Câu 139: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120/80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20 \sin \left(\frac{7\pi}{3} t \right)$ ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thuỷ ngân) và thời gian t tính theo giây.

- a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 mmHg.
b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 mmHg.

Lời giải

a) Huyết áp là 100mmHg khi $P(t) = 100 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = k\pi$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3k}{7} (k \in \mathbb{Z})$$

Với $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3k}{7} < \frac{7}{3} \Leftrightarrow 0 < k < \frac{7}{3} \Leftrightarrow k \in \{1; 2\}$ vì $k \in \mathbb{Z}$

Vậy trong khoảng từ 0 giây đến 1 giây có 2 lần huyết áp là 100mmHg

b) Huyết áp là 120mmHg khi $P(t) = 120 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 120 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} (k \in \mathbb{Z})$$

Với $0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} < 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{4} < k < \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0$ vì $k \in \mathbb{Z}$

Vậy trong khoảng từ 0 giây đến 1 giây có 1 lần huyết áp là 120mmHg.

Câu 140: Một chiếc máy bay được yêu cầu bay chờ hạ cánh gần sân bay quốc tế Tân Sơn Nhất Công thức $d(x) = 70 \sin(0,65x) + 150$ biểu diễn cho khoảng cách từ máy bay đến sân bay trong khoảng thời gian x . Trong đó, d tính bằng dặm và x tính bằng phút.

- a) Khi máy bay bắt đầu bay chờ hạ cánh, $x = 0$, nó cách Tân Sơn Nhất bao xa?
b) Trong thời gian 20 phút đầu tiên sau khi máy bay bay chờ hạ cánh, vào thời gian x bằng bao nhiêu thì máy bay cách sân bay đúng 100 dặm?
c) Trong khi máy bay đang bay chờ hạ cánh, có bao giờ nó cách sân bay 70 dặm hay không? Tại sao?



Lời giải

a) Khi máy bay bắt đầu bay chờ hạ cánh, $x = 0$, ta có: $d(0) = 70 \sin(0) + 150 = 150$

Vậy máy bay cách sân bay Tân Sơn Nhất 150 dặm.

b) Máy bay cách sân bay đúng 100 dặm, khi đó:

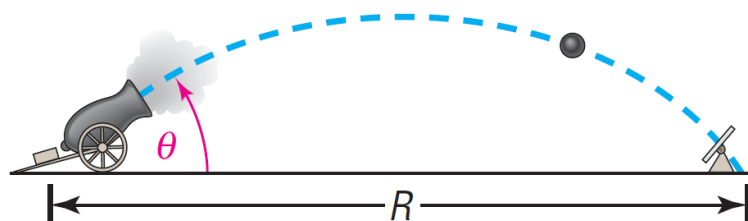
$$d(x) = 100 \Leftrightarrow 70 \sin(0,65x) + 150 = 100 \Leftrightarrow \sin(0,65x) = -\frac{5}{7} \Rightarrow \begin{cases} x \approx 15,7237 \\ x \approx 6,0572 \\ x \approx 8,4424 \\ x \approx 18,1089 \end{cases}$$

c) Giả sử máy bay cách sân bay 70 dặm, khi đó: $d(x) = 70 \Leftrightarrow 70 \sin(0,65x) + 150 = 70$

$$\Leftrightarrow \sin(0,65x) = -\frac{8}{7} < -1.$$

Phương trình vô nghiệm. Do đó, khi máy bay bay chờ hạ cánh thì không thể cách sân bay 70 dặm.

Câu 141: Một vật được bắn lên trên tạo với phương ngang một góc θ và với vận tốc ban đầu v_0 feet/s (xem hình minh họa). Nếu bỏ qua sức cản của không khí, tầm xa R của vật đó được cho bởi hàm số $R(\theta) = \frac{1}{32} v_0^2 \sin 2\theta$. Tìm góc θ để R đạt giá trị lớn nhất.



Lời giải

Ta có $R(\theta) = \frac{1}{32} v_0^2 \sin(2\theta) \leq \frac{1}{32} v_0^2$.

Do đó $\max R(\theta) = \frac{1}{32} v_0^2$ khi $\sin(2\theta) = 1 \Leftrightarrow 2\theta = 90^\circ \Leftrightarrow \theta = 45^\circ$.

Vậy với góc $\theta = 45^\circ$ thì R đạt giá trị lớn nhất.

TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN LƯỢNG GIÁC

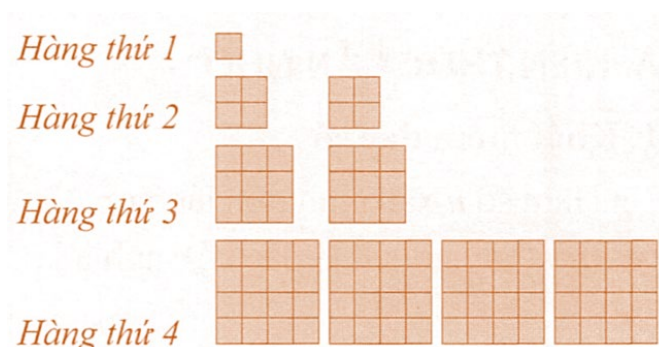


DÃY SỐ

CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN – DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG – CẤP SỐ NHÂN

Câu 1: Gọi u_n là tổng diện tích các hình vuông có ở hàng thứ n trong Hình (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích).



a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4 .

b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Giải

a) $u_1 = 1; u_2 = 8; u_3 = 27; u_4 = 64$.

b) Ta có: $u_1 = 1^3; u_2 = 2^3; u_3 = 3^3; u_4 = 4^3$. Do đó, dự đoán $u_n = n^3$.

Câu 2: Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao $950m$ so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là $1,5m$. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?



Giải

Kí hiệu u_n là chiều cao so với mực nước biển của thửa ruộng ở bậc thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 950$ và $d = 1,5$.

Ta có $u_{12} = u_1 + 11d = 950 + 11 \cdot 1,5 = 966,5$.

Vậy thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao 966,5 m so với mực nước biển.

Câu 3: Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau: Năm thứ nhất: 240 triệu;

Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương của bác Tư nhận được vào năm thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng có $u_1 = 240$ và $d = 12$.

Ta có $u_{11} = u_1 + 10d = 240 + 10 \cdot 12 = 360$.

Vậy vào năm thứ 11, số tiền lương một năm của bác Tư là 360 triệu đồng.

Câu 4: Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 20$ và $d = 1$.

Tổng số ghế có trong rạp hát là: $S_{20} = \frac{20 \cdot [2 \cdot 20 + (20 - 1) \cdot 1]}{2} = 590$ (ghế).

Tổng số tiền vé thu được là: $590 \cdot 60000 = 35400000$ (đồng).

Câu 5: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.



Giải

Ta có: 2 giờ = 120 phút = 6 \cdot 20 phút. Do đó, sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n - 1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 200$ và $q = 2$.

Ta có $u_7 = u_1 \cdot q^6 = 200 \cdot 2^6 = 12800$.

Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

Câu 6: Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8% / năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

Lời giải

Khoảng 215892500 đồng.

Câu 7: Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài 100m . Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

Lời giải

$$S_{10} = \frac{80(1 - 0,8^{10})}{1 - 0,8} \approx 357,05(m).$$

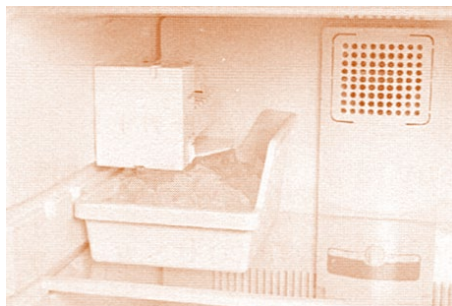
Câu 8: Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là $6144m^2$. Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng, biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.



Lời giải

$$u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 6144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 12(m^2).$$

Câu 9: Một khay nước có nhiệt độ $20^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm đi 25% . Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.



Lời giải

$$u_5 = u_1 \cdot q^4 = 20 \cdot 0,75^4 \approx 6,33^\circ C.$$

Câu 10: Một vật chuyển động đều với vận tốc 20 m/s . Hãy viết các số chỉ quãng đường (đơn vị: mét) vật chuyển động được lần lượt trong thời gian 1 giây, 2 giây, 3 giây, 4 giây, 5 giây theo hàng ngang.

Lời giải

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 1 giây là: $20.1 = 20\text{ (m)}$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 2 giây là: $20.2 = 40\text{(m)}$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 3 giây là: $20.3 = 60\text{(m)}$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 4 giây là: $20.4 = 80\text{ (m)}$.

Quãng đường vật chuyển động được trong thời gian 5 giây là: $20.5 = 100\text{(m)}$.

Vậy các số chỉ quãng đường (đơn vị: mét) vật chuyển động được lần lượt trong thời gian 1 giây, 2 giây, 3 giây, 4 giây, 5 giây theo hàng ngang là: 20, 40, 60, 80, 100.

Câu 11: Năm 2020, số dân của một thành phố trực thuộc tỉnh là khoảng 500 nghìn người. Người ta ước tính rằng số dân của thành phố đó sẽ tăng trưởng với tốc độ khoảng 2% mỗi năm. Khi đó số dân P_n (nghìn người) của thành phố đó sau n năm, kể từ năm 2020, được tính bằng công thức $P_n = 500(1 + 0,02)^n$. Hỏi nếu tăng trưởng theo quy luật như vậy thì vào năm 2030, số dân của thành phố đó là khoảng bao nhiêu nghìn người?

Lời giải

Ở đây ta có $n = 2030 - 2020 = 10$. Vậy số dân của thành phố đó vào năm 2030 sẽ là

$$P_{10} = 500 \cdot (1,02)^{10} \approx 609 \text{ (nghìn người)}$$

Câu 12: Anh Thanh vừa được tuyển dụng vào một công ty công nghệ, được cam kết lương năm đầu sẽ là 200 triệu đồng và lương mỗi năm tiếp theo sẽ được tăng thêm 25 triệu đồng.

Gọi s_n (triệu đồng) là lương vào năm thứ n mà anh Thanh làm việc cho công ty đó. Khi đó ta có: $s_1 = 200, s_n = s_{n-1} + 25; n \geq 2$.

a) Tính lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty.

b) Chứng minh (s_n) là dãy số tăng. Giải thích ý nghĩa thực tế của kết quả này.

Lời giải

a) Số hạng tổng quát của dãy số là: $s_n = 200 + 25(n - 1) = 175 + 25n$

Lương của anh Thanh vào năm thứ 5 làm việc cho công ty: $175 + 25.5 = 300$ (triệu đồng)

b) Ta có: $s_{n+1} = 175 + 25(n + 1) = 200 + 25n > s_n$ suy ra (s_n) là dãy số tăng

Ý nghĩa: Tiền lương của anh Thanh sẽ được tăng dần hàng năm

Câu 13: Ông An gửi tiết kiệm 100 triệu đồng kì hạn 1 tháng với lãi suất 6% một năm theo hình thức tính lãi kép. Số tiền (triệu đồng) của ông An thu được sau n tháng được cho bởi công thức

$$A_n = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^n.$$

a) Tìm số tiền ông An nhận được sau tháng thứ nhất, sau tháng thứ hai.

b) Tìm số tiền ông An nhận được sau 1 năm.

Lời giải

a) Số tiền ông An nhận được sau 1 tháng: $A_1 = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^1 = 100,5$ (triệu đồng)

Số tiền ông An nhận được sau 2 tháng: $A_2 = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^2 = 101,0025$ (triệu đồng)

b) Số tiền ông An nhận được sau 1 năm: $A_{12} = 100 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{12} = 106,1678$ (triệu đồng)

Câu 14: Chị Hương vay trả góp một khoản tiền 100 triệu đồng và đồng ý trả dần 2 triệu đồng mỗi tháng với lãi suất 0,8% số tiền còn lại của mỗi tháng.

Gọi $A_n (n \in \mathbb{N})$ là số tiền còn nợ (triệu đồng) của chị Hương sau n tháng.

a) Tìm lần lượt $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ để tính số tiền còn nợ của chị Hương sau 6 tháng.

b) Dự đoán hệ thức truy hồi đối với dãy số (A_n) .

Lời giải

a) Ta có: $A_0 = 100$

$$A_1 = 100 + 100 \times 0,008 - 2 = 98,8$$

$$A_2 = 98,8 + 98,8 \times 0,008 - 2 = 97,59$$

$$A_3 = 97,59 + 97,59 \times 0,008 - 2 = 96,37$$

$$A_4 = 96,37 + 96,37 \times 0,008 - 2 = 95,14$$

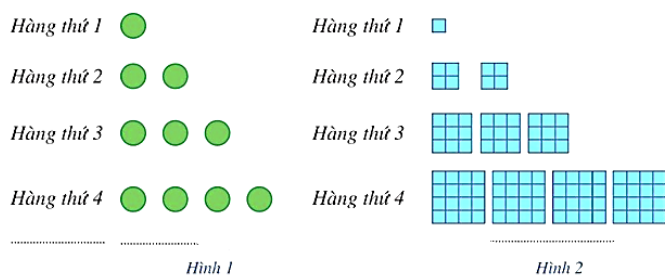
$$A_5 = 95,14 + 95,14 \times 0,008 - 2 = 93,90$$

$$A_6 = 93,90 + 93,90 \times 0,008 - 2 = 92,65$$

Vậy sau 6 tháng số tiền chị Hương còn nợ là 92,65 triệu đồng

b) Hệ thức truy hồi: $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} \times 0,008 - 2 = 1,008A_{n-1} - 2$ (triệu đồng)

Câu 15: a) Gọi u_n là số chấm ở hàng thứ trong Hình 1. Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (u_n) .



b) Gọi v_n là tổng diện tích của các hình tô màu ở hàng thứ n trong Hình 2 (mỗi ô vuông nhỏ là một đơn vị diện tích). Dự đoán công thức của số hạng tổng quát cho dãy số (v_n) .

Lời giải

a) Số chấm ở hàng thứ nhất là: $u_1 = 1$;

Số chấm ở hàng thứ hai là: $u_2 = 2$;

Số chấm ở hàng thứ ba là: $u_3 = 3$;

Số chấm ở hàng thứ tư là: $u_4 = 4$;

Vậy số chấm ở hàng thứ n là: $u_n = n$.

b) Diện tích của các ô màu ở hàng thứ nhất là: $v_1 = 1 = 1^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ hai là: $v_2 = 4 = 2^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ ba là: $v_3 = 9 = 3^3$;

Diện tích của các ô màu ở hàng thứ tư là: $v_4 = 16 = 4^3$;

Vậy diện tích của các ô màu ở hàng thứ n là: $v_n = n^3$.

Câu 16: Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.

a) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.

b) Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.

c) Dự đoán công thức của P_n tính theo n .

Lời giải

a) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là:

$$P_1 = 100 + 100 \cdot 0,5\% + 6 = 100,5 + 6 \text{ (triệu đồng)}$$

b) Số tiền chị có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$$P_2 = 100,5 + 6 + (100,5 + 6) \cdot 0,5\% + 6 = (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 = 100,5(1 + 0,5\%) + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \text{ (triệu đồng)}$$

Số tiền chi có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$$\begin{aligned} P_3 &= (100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%) + 6] \cdot 0,5\% + 6 \\ &= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^2 + 6(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \end{aligned}$$

c) Số tiền chi có trong ngân hàng sau 4 tháng là:

$$\begin{aligned} P_4 &= (100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 + [(100,5 + 6)(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6] \cdot 0,5\% + 6 \\ &= 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^3 + 6(1 + 0,5\%)^2 + 6 \cdot (1 + 0,5\%) + 6 \end{aligned}$$

Số tiền chi có trong ngân hàng sau n tháng là:

$$P_n = 100,5 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-1} + 6(1 + 0,5\%)^{n-1} + 6(1 + 0,5\%)^{n-2} + 6 \cdot (1 + 0,5\%)^{n-3} + \dots + 6; n \in \mathbb{N}^*.$$

Câu 17: Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 1). Gọi u_n là số cột gỗ nằm ở lớp thứ n tính từ trên xuống và cho biết lớp trên cùng có 14 cột gỗ. Hãy xác định dãy số (u_n) bằng hai cách:



Hình 1

a) Viết công thức số hạng tổng quát u_n .

b) Viết hệ thức truy hồi.

Lời giải

a) $u_n = 13 + n$

b) $\begin{cases} u_1 = 14 \\ u_n = u_{n-1} + 1 \end{cases}$

Câu 18: Một chồng cột gỗ được xếp thành các lớp, hai lớp liên tiếp hơn kém nhau 1 cột gỗ (Hình 2).



Hình 2

a) Gọi $u_1 = 25$ là số cột gỗ có ở hàng dưới cùng của chồng cột gỗ, u_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ dưới lên trên. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

b) Gọi $v_1 = 14$ là số cột gỗ có ở hàng trên cùng của chồng cột gỗ, v_n là số cột gỗ có ở hàng thứ n tính từ trên xuống dưới. Xét tính tăng, giảm của dãy số này.

Lời giải

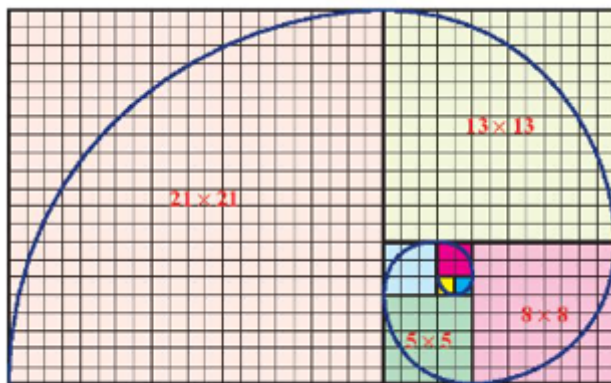
a) Ta có: $u_n = 26 - n > u_{n+1} = 26 - n - 1 = 25 - n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số giảm

b) Ta có: $v_n = 13 + n < v_{n+1} = 13 + n + 1 = 14 + n$

Vậy dãy số (u_n) là dãy số tăng

Câu 19: Trên lưới ô vuông, mỗi ô cạnh 1 đơn vị, người ta vẽ 8 hình vuông và tô màu khác nhau như Hình 3. Tìm dãy số biểu diễn độ dài cạnh của 8 hình vuông đó từ nhỏ đến lớn. Có nhận xét gì về dãy số trên?



Hình 3

Lời giải

$$u_1 = 1; u_2 = 1; u_3 = 2; u_4 = 3; u_5 = 5; u_6 = 8; u_7 = 13; u_8 = 21$$

$$\text{Ta có dãy số } (u_n): \begin{cases} u_1 = 1 \\ u_2 = 1 \\ u_n = u_{n-1} + u_{n-2} \end{cases}$$

Câu 20: Bác Hưng để 10 triệu đồng trong tài khoản ngân hàng. Vào cuối mỗi năm, ngân hàng trả lãi 3% vào tài khoản của bác ấy, nhưng sau đó sẽ tính phí duy trì tài khoản hằng năm là 120 nghìn đồng.

a) Gọi A_0 là số tiền bác Hưng đã gửi. Viết công thức tính lần lượt A_1, A_2, A_3 . Từ đó dự đoán hệ thức truy hồi cho số dư A_n (tính theo đơn vị đồng) trong tài khoản của bác Hưng vào cuối năm thứ n .

b) Tìm số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm.

Lời giải

a) Vào cuối năm thứ nhất, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_1 = A_0(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_0 - 120000 \text{ (đồng)}$$

Vào cuối năm thứ hai, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_2 = A_1(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_1 - 120000 \text{ (đồng)}$$

Vào cuối năm thứ ba, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_3 = A_2(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_2 - 120000 \text{ (đồng)}$$

Tương tự, vào cuối năm thứ $n(n \geq 1)$, số tiền trong tài khoản của bác Hưng là

$$A_n = A_{n-1}(1 + 3\%) - 120000 = 1,03A_{n-1} - 120000 \text{ (đồng)}$$

b) Ta tính lần lượt A_1, A_2, A_3, A_4 :

$$A_1 = 10180000; \quad A_2 = 10365400;$$

$$A_3 = 10556362; \quad A_4 = 10753053.$$

Như vậy, số dư trong tài khoản của bác Hưng sau 4 năm là 10753053 đồng.

Câu 21: Giá của một chiếc máy photocopy lúc mới mua là 50 triệu đồng. Biết rằng giá trị của nó sau mỗi năm sử dụng chỉ còn 75% giá trị trong năm liền trước đó. Tính giá trị còn lại của chiếc máy photocopy đó sau mỗi năm, trong khoảng thời gian 5 năm kể từ khi mua.

Lời giải

Giá trị của máy photocopy sau 1 năm sử dụng là

$$T_1 = 50 \cdot 75\% = 37,5 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 2 năm sử dụng là

$$T_2 = T_1 \cdot 75\% = 28,125 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 3 năm sử dụng là

$$T_3 = T_2 \cdot 75\% = 21,0938 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 4 năm sử dụng là

$$T_4 = T_3 \cdot 75\% = 15,8203 \text{ (triệu đồng)}.$$

Giá trị của máy photocopy sau 5 năm sử dụng là

$$T_5 = T_4 \cdot 75\% = 11,8652 \text{ (triệu đồng)}.$$

Chú ý. Tổng quát, giá trị của máy photocopy sau n năm sử dụng là

$$T_n = T_1 \cdot (0,75)^{n-1} \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 22: Nếu tỉ lệ lạm phát là 3,5% mỗi năm và giá trung bình của một căn hộ chung cư mới tại thời điểm hiện tại là 2,5 tỉ đồng thì giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau n năm nữa được cho bởi công thức

$$A_n = 2,5 \cdot (1,035)^n \text{ (tỉ đồng)}$$

Tìm giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm nữa.

Lời giải

Giá trung bình của một căn hộ chung cư mới sau 5 năm là

$$A_5 = 2,5 \cdot (1,035)^5 = 2,9692 \text{ (tỉ đồng)}.$$

Câu 23: Bác An gửi tiết kiệm 200 triệu đồng kì hạn 3 tháng, với lãi suất 3% một năm. Số tiền (triệu đồng) cả vốn lẫn lãi mà bác An nhận được sau n quý (mỗi quý là 3 tháng) sẽ là

$$A_n = 200 \left(1 + \frac{0,03}{4} \right)^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

- a) Viết ba số hạng đầu của dãy số.
b) Tìm số tiền bác An nhận được sau 2 năm.

Lời giải

- a) Ba số hạng đầu của dãy số là $A_1 = 201,5$; $A_2 = 203,0113$; $A_3 = 204,5338$.
b) Chú ý rằng 2 năm bằng 8 quý, tức là $n = 8$. Do đó, sau 2 năm số tiền bác An nhận được là $A_8 = 212,3198$ triệu đồng.

Câu 24: Vi khuẩn E.Coli sinh sản thông qua một quá trình gọi là quá trình phân đôi. Vi khuẩn E.Coli phân chia làm đôi cứ sau 20 phút. Giả sử tốc độ phân chia này được duy trì trong 12 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 12 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể? Giả sử có một nguồn dinh dưỡng vô hạn để vi khuẩn E.Coli duy trì tốc độ phân chia như cũ trong 48 giờ kể từ khi vi khuẩn ban đầu xâm nhập vào cơ thể. Hỏi sau 48 giờ sẽ có bao nhiêu vi khuẩn E.Coli trong cơ thể?

Lời giải

Giả sử ban đầu có 1 vi khuẩn E.Coli.

Sau 20 phút lần một, số vi khuẩn là $1 \cdot 2 = 2$.

Sau 20 phút lần hai, số vi khuẩn là $2 \cdot 2 = 2^2$.

Sau 20 phút lần ba, số vi khuẩn là $2^2 \cdot 2 = 2^3$.

Sau 20 phút lần bốn, số vi khuẩn là $2^3 \cdot 2 = 2^4$.

Tương tự như vậy sau 12 giờ (bằng $3 \cdot 12$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$$2^{3 \cdot 12} = 2^{36} \approx 6,87 \cdot 10^{10} (\text{con}).$$

Sau 48 giờ (bằng $3 \cdot 48 = 144$ lần 20 phút) thì số vi khuẩn là

$$2^{144} \approx 2,23 \cdot 10^{43} (\text{con}).$$

Câu 25: Một công ty dược phẩm đang thử nghiệm một loại thuốc mới. Một thí nghiệm bắt đầu với $1,0 \times 10^9$ vi khuẩn. Một liều thuốc được sử dụng sau mỗi bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \times 10^8$ vi khuẩn. Giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25%.

- a) Viết hệ thức truy hồi cho số lượng vi khuẩn sống trước mỗi lần sử dụng thuốc.
b) Tìm số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm.

Lời giải

a) Gọi $u_0 = 1,0 \cdot 10^9$ là số vi khuẩn tại thời điểm ban đầu và u_n là số vi khuẩn trước lần dùng thuốc thứ n .

Do mỗi liều thuốc được sử dụng sau bốn giờ có thể tiêu diệt $4,0 \cdot 10^8$ vi khuẩn và giữa các liều thuốc, số lượng vi khuẩn tăng lên 25% nên ta có

$$u_{n+1} = (u_n - 4,0 \cdot 10^8) + 25\% \cdot u_n = 1,25u_n - 4,0 \cdot 10^8.$$

b) Ta tính u_5 như sau:

$$u_1 = 1,0 \cdot 10^9;$$

$$u_2 = 1,25u_1 - 4,0 \cdot 10^8 = 8,5 \cdot 10^8$$

$$u_3 = 1,25u_2 - 4,0 \cdot 10^8 = 6,625 \cdot 10^8;$$

$$u_4 = 1,25u_3 - 4,0 \cdot 10^8 = 4,28125 \cdot 10^8;$$

$$u_5 = 1,25u_4 - 4,0 \cdot 10^8 = 1,3515625 \cdot 10^8.$$

Vậy số vi khuẩn còn sống trước lần sử dụng thuốc thứ năm là 135156250 con.

Câu 26: Một con chó con nặng $0,4\text{kg}$ khi mới sinh và sau mỗi tuần tuổi khối lượng của nó tăng thêm 24% . Giả sử $u_n(\text{kg})$ là khối lượng của con chó vào cuối tuần tuổi thứ n .

a) Viết lần lượt các công thức tính u_2, u_3 . Từ đó dự đoán công thức của u_n .

b) Con chó nặng bao nhiêu kilôgam khi được sáu tuần tuổi?

Lời giải

a) Giả sử $u_n(\text{kg})$ là khối lượng của con chó vào cuối tuần tuổi thứ n .

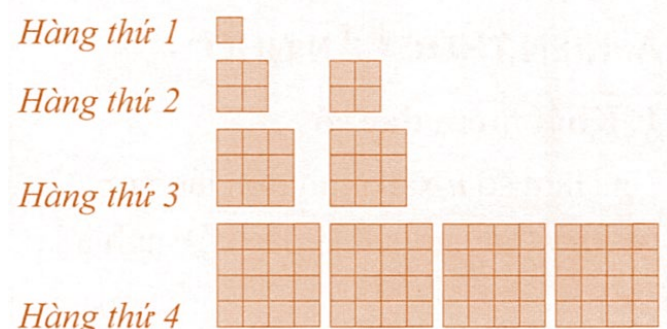
$$\text{Ta có } u_1 = 0,4; u_2 = u_1 + u_1 \cdot 24\% = u_1(1 + 24\%); u_3 = u_2 + u_2 \cdot 24\% = u_1(1 + 24\%)^2.$$

$$\text{Tương tự, ta có } u_n = u_1(1 + 24\%)^{n-1} \forall n \geq 1.$$

b) Sau sáu tuần tuổi thì con chó nặng là

$$u_6 = 0,4 \cdot (1 + 24\%)^5 = 1,17(\text{kg}).$$

Câu 27: Gọi u_n là tổng diện tích các hình vuông có ở hàng thứ n trong Hình (mỗi ô vuông nhỏ là 1 đơn vị diện tích).



a) Tính u_1, u_2, u_3, u_4 .

b) Dự đoán công thức tính số hạng tổng quát của dãy số (u_n) .

Lời giải

$$\text{a) } u_1 = 1; u_2 = 8; u_3 = 27; u_4 = 64.$$

$$\text{b) Ta có: } u_1 = 1^3; u_2 = 2^3; u_3 = 3^3; u_4 = 4^3. \text{ Do đó, dự đoán } u_n = n^3.$$

- Câu 28:** Chị Mai gửi tiền tiết kiệm vào ngân hàng theo hình thức lãi kép như sau: Lần đầu chị gửi 100 triệu đồng. Sau đó, cứ hết 1 tháng chị lại gửi thêm vào ngân hàng 6 triệu đồng. Biết lãi suất của ngân hàng là 0,5% một tháng. Gọi P_n (triệu đồng) là số tiền chị có trong ngân hàng sau n tháng.
- Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng.
 - Tính số tiền chị có trong ngân hàng sau 3 tháng.
 - Dự đoán công thức của P_n .

Lời giải

a) Số tiền cả gốc và lãi chị Mai có được sau 1 tháng (khi chưa gửi thêm 6 triệu đồng) là:
 $100 + 100 \cdot \frac{0,5}{100} = 100 \cdot 1,005 = 100,5$ (triệu đồng).

Số tiền chị có trong ngân hàng sau 1 tháng là: $100,5 + 6 = 106,5$ (triệu đồng).

b) Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 2 tháng là:

$106,5 \cdot 1,005 + 6 = 113,0325$ (triệu đồng). Số tiền chị Mai có trong ngân hàng sau 3 tháng là:

$113,0325 \cdot 1,005 + 6 = 119,5976625$ (triệu đồng).

c) Ta có: $P_1 = 100 \cdot 1,005 + 6$;

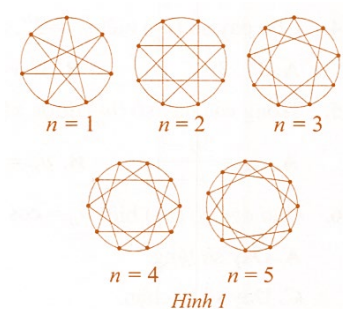
$$P_2 = P_1 \cdot 1,005 + 6 = (100 \cdot 1,005 + 6) \cdot 1,005 + 6 = 100 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6$$

$$P_3 = P_2 \cdot 1,005 + 6 = (100 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6) \cdot 1,005 + 6 \\ = 100 \cdot 1,005^3 + 6 \cdot 1,005^2 + 6 \cdot 1,005 + 6; \dots$$

Cứ như thế, ta dự đoán được công thức của P_n :

$$P_n = 100 \cdot 1,005^n + 6 \cdot 1,005^{n-1} + 6 \cdot 1,005^{n-2} + \dots + 6 \\ = 100 \cdot 1,005^n + 6 \cdot (1,005^{n-1} + 1,005^{n-2} + \dots + 1).$$

- Câu 29:** Với mỗi số nguyên dương n , lấy $n+6$ điểm cách đều nhau trên đường tròn. Nối mỗi điểm với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn đó để tạo thành các ngôi sao như Hình 1. Gọi u_n là số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao thì ta được dãy số (u_n) .



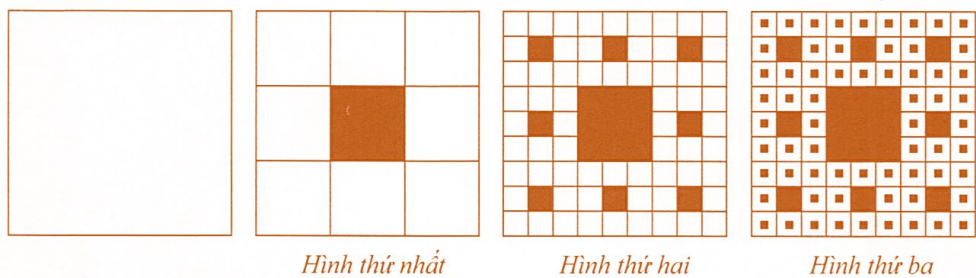
Tìm công thức của số hạng tổng quát u_n .

Lời giải

Ta thấy đường tròn được chia thành $n + 6$ cung bằng nhau và mỗi cung có số đo bằng $\left(\frac{360}{n+6}\right)^\circ$.

Do mỗi điểm được nối với điểm cách nó hai điểm trên đường tròn nên góc ở đỉnh của mỗi ngôi sao là góc nội tiếp chắn $n + 6 - 2 \cdot 3 = n$ cung bằng nhau đó. Suy ra số đo góc ở đỉnh tính theo đơn vị độ của mỗi ngôi sao là $u_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{360}{n+6} \cdot n = \frac{180n}{n+6}$.

Câu 30: Một hình vuông có diện tích bằng 1 đơn vị diện tích. Chia hình vuông đó thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Với mỗi hình vuông nhỏ chưa được tô màu, lại chia thành 9 hình vuông bằng nhau và tô màu hình vuông ở chính giữa. Cứ như thế, quá trình trên được lặp lại.



- Tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ nhất, thứ hai, thứ ba.
- Dự đoán công thức tính tổng diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n .

Lời giải

a) Diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ nhất, hình thứ hai, hình thứ ba lần lượt là:

$$1 - \left(\frac{8}{9}\right) = \frac{1}{9}; 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^2 = \frac{17}{81}; 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^3 = \frac{217}{729}.$$

b) Gọi S_n là diện tích phần đã được tô màu ở hình thứ n . Ta có: $S_n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n$.

Câu 31: Khán đài A của một sân bóng có 16 hàng ghế. Biết hàng ghế đầu tiên có 8 ghế, mỗi hàng sau nhiều hơn hàng trước 2 ghế. Hỏi khán đài A của sân bóng chứa được bao nhiêu người biết rằng mỗi người chỉ ngồi 1 ghế.

Lời giải

Từ giả thiết ta có cấp số cộng có $u_1 = 8, d = 2, n = 16$.

Số ghế của khán đài A của sân bóng đó là $S_{16} = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] = \frac{16}{2} \cdot (16 + 15 \cdot 2) = 368$ ghế.

Câu 32: Ông Sơn trồng cây trên một mảnh đất hình tam giác theo quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, hàng thứ hai có 2 cây, hàng thứ ba có 3 cây..., ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng ông đã trồng hết 11325 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n .

Ta có: $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \dots$ và $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 11325$.

Nhận xét dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

$$\text{Khi đó } S = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = 11325.$$

Suy ra

$$\frac{n[2.1 + (n-1)1]}{2} = 11325 \Leftrightarrow n(n+1) = 22650 \Leftrightarrow n^2 + n - 22650 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 150 \\ n = -151 \end{cases} \Leftrightarrow n = 150$$

(vì $n \in \mathbb{N}^*$).

Vậy số hàng cây được trồng là 150.

Câu 33: Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế. Các dãy sau, mỗi dãy nhiều hơn dãy ngay trước nó 4 ghế. Hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

Theo đề ta có bài toán tìm tổng của 30 số đầu tiên của cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 4$.

$$\text{Nên } S_n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} \Leftrightarrow S_{30} = \frac{30[2.15 + (30-1).4]}{2} = 2190.$$

Câu 34: Lan đang tiết kiệm để mua laptop. Trong tuần đầu tiên, cô ta để dành 200 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, cô ta đã thêm 16 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Chiếc laptop Lan cần mua có giá 1000 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì cô ấy có đủ tiền để mua chiếc laptop đó?

Lời giải

Gọi n là số tuần cô ta đã thêm 16 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình

Số tiền cô ta tiết kiệm được sau n tuần đó là $T = 200 + 16n$.

Theo đề bài, ta có $T = 200 + 16n = 1000 \Leftrightarrow n = 50$.

Vậy kể cả tuần đầu thì tuần thứ 51 cô ta có đủ tiền để mua chiếc laptop đó.

Câu 35: Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20.000 đồng, mỗi lần sau đặt gấp đôi lần tiền đặt cược trước. Người đó thắng 9 lần liên tiếp và thua ở lần thứ 10. Hỏi vị khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

Lời giải

Số tiền du khách đặt cược là một cấp số nhân có $u_1 = 20.000; q = 2$.

Số tiền người đó thắng 9 lần liên tiếp là

$$S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_9 = u_1 \cdot \frac{q^9 - 1}{q - 1} = 20000 \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 20000 \cdot (2^9 - 1)$$

Người đó thua ở lần thứ 10 $\Rightarrow u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 20000 \cdot 2^9$.

Vậy $S_9 - u_{10} = -20000$ đồng.

Câu 36: Một khách hàng có 100 triệu đồng đem gửi Ngân hàng với lãi suất 0,4 % /3 tháng, tỷ lệ lãi suất trên được tính dồn cả gốc và lãi cho mỗi Quý nếu khách hàng không rút tiền ra. Hỏi Vị khách hàng này sau hai năm thu được số tiền lãi là bao nhiêu?

Lời giải

Theo thể thức của ngân hàng, ta lập bảng sau

A. Thời điểm		B. Tiền gốc + lãi	C. Lãi cộng dồn
Đầu Năm 2018		100 000 000	
Năm thứ nhất	Cuối quý 1	104 000 000	4 000 000
	Cuối quý 2	108 160 000	8 160 000
	Cuối quý 3	112 486 400	12 486 400
	Cuối quý 4	116 985 856	16 985 856
Năm thứ hai	Cuối quý 1	121 665 290	21 665 290
	Cuối quý 2	126 531 902	26 531 902
	Cuối quý 3	131 593 178	31 593 178
	Cuối quý 4	136 856 905	36 856 905

Như vậy, sau 2 năm (8 quý) vị khách hàng trên mới có số tiền lãi 36 856 905 đồng.

Câu 37: Một nhà hát có 25 hàng ghế với 16 ghế ở hàng thứ nhất, 18 ghế ở hàng thứ hai, 20 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật đó, tức là hàng sau nhiều hơn hàng liền trước nó 2 ghế. Tính tổng số ghế của nhà hát đó.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng của nhà hát lập thành một cấp số cộng, gồm 25 số hạng, với số hạng đầu $u_1 = 16$ và công sai $d = 2$. Tổng các số hạng này là

$$S_{25} = u_1 + u_2 + \dots + u_{25} = \frac{25}{2} [2u_1 + (25-1)d] = \frac{25}{2} [2 \cdot 16 + 24 \cdot 2] = 1000.$$

Vậy nhà hát đó có tổng cộng 1000 ghế.

Câu 38: Anh Nam được nhận vào làm việc ở một công ty về công nghệ với mức lương khởi điểm là 100 triệu đồng một năm. Công ty sẽ tăng thêm lương cho anh Nam mỗi năm là 20 triệu đồng. Tính tổng số tiền lương mà anh Nam nhận được sau 10 năm làm việc cho công ty đó.

Lời giải

Số tiền lương trong 10 năm của anh Nam lập thành một cấp số cộng, gồm 10 số hạng, với số hạng đầu là $u_1 = 100$ và công sai $d = 20$. Tổng các số hạng này là:

$$S_{10} = u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = \frac{10}{2} [2u_1 + (10-1)20] = \frac{10}{2} (2 \times 100 + 9 \times 20) = 1900 \text{ (triệu đồng)}$$

Vậy tổng số tiền lương anh Nam nhận sau 10 năm là 1900 triệu đồng

Câu 39: Giá của một chiếc xe ô tô lúc mới mua là 680 triệu đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá của chiếc xe ô tô giảm 55 triệu đồng. Tính giá còn lại của chiếc xe sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá của chiếc xe sau n năm là: $u_n = 680 - 55(n-1)$

Vậy sau 5 năm sử dụng giá của chiếc xe là: $u_5 = 680 - 55(5 - 1) = 460$ (triệu đồng)

Câu 40: Một kiến trúc sư thiết kế một hội trường với 15 ghế ngồi ở hàng thứ nhất, 18 ghế ngồi ở hàng thứ hai, 21 ghế ngồi ở hàng thứ ba, và cứ như vậy (số ghế ở hàng sau nhiều hơn 3 ghế so với số ghế ở hàng liền trước nó). Nếu muốn hội trường đó có sức chứa ít nhất 870 ghế ngồi thì kiến trúc sư đó phải thiết kế tối thiểu bao nhiêu hàng ghế?

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 15$ và công sai $d = 3$. Gọi n là số các số hạng đầu của cấp số cộng cần lấy tổng, ta có:

$$870 = S_n = \frac{n}{2}[2 \times 15 + (n - 1) \times 3] = \frac{n}{2}(27 + 3n)$$

Do đó $27n + 3n^2 - 1740 = 0$, suy ra $n = 20, n = -29$ (loại)

Vậy cần phải thiết kế 20 hàng ghế

Câu 41: Vào năm 2020, dân số của một thành phố là khoảng 1,2 triệu người. Giả sử mỗi năm, dân số của thành phố này tăng thêm khoảng 30 nghìn người. Hãy ước tính dân số của thành phố này vào năm 2030.

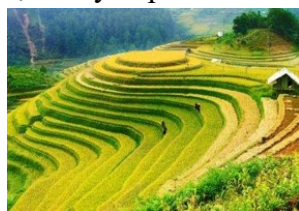
Lời giải

Dân số mỗi năm của thành phố lập thành cấp số cộng có $u_1 = 1200$, công sai $d = 30$

Dân số mỗi năm có dạng tổng quát là: $u_n = 1200 + 30(n - 1)$

Dân số của năm 2030 tức $n = 11$; $u_{11} = 1200 + 30(11 - 1) = 1500$ (nghìn người)

Câu 42: Ruộng bậc thang là một hình thức canh tác có nhiều ở khu vực Tây Bắc và Đông Bắc Việt Nam. Hình ảnh ruộng bậc thang thể hiện nét đẹp văn hoá, là công trình nghệ thuật độc đáo của đồng bào vùng cao phía Bắc. Ruộng bậc thang ở một số nơi đã trở thành những địa chỉ tham quan du lịch đầy hấp dẫn của du khách trong nước và quốc tế.



Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất nằm ở độ cao 1250m so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là 1,2m.

Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 10 có độ cao là bao nhiêu so với mực nước biển?

Lời giải

Ta có thửa ruộng thấp nhất có độ cao $u_1 = 1250$ m so với mực nước biển.

Thửa ruộng ở bậc thứ hai cao hơn so với mực nước biển là: $u_2 = 1250 + 1,2$ (m).

Thửa ruộng ở bậc thứ ba cao hơn so với mực nước biển là:
 $u_3 = 1250 + 1,2 + 1,2 = 1250 + 2.1,2$ (m).

Thửa ruộng ở bậc thứ 10 cao hơn so với mực nước biển là: $u_{10} = 1250 + 9.1,2 = 1260,8(m)$

Câu 43: Một nhà thi đấu có 20 hàng ghế dành cho khán giả. Hàng thứ nhất có 20 ghế, hàng thứ hai có 21 ghế, hàng thứ ba có 22 ghế, . . . Cứ như thế, số ghế ở hàng sau nhiều hơn số ghế ở hàng trước là 1 ghế. Trong một giải thi đấu, ban tổ chức đã bán được hết số vé phát ra và số tiền thu được từ bán vé là 70800000 đồng. Tính giá tiền của mỗi vé (đơn vị: đồng), biết số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu và các vé là đồng giá.

Lời giải

Số ghế ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 20$, công sai $d = 1$. Cấp số cộng này có 20 số hạng.

Do đó, tổng số ghế trong nhà thi đấu là: $S_{20} = \frac{[2 \cdot 20 + (20 - 1) \cdot 1] \cdot 20}{2} = 590$.

Vì số vé bán ra bằng số ghế dành cho khán giả của nhà thi đấu nên số vé bán ra là 590.

Vậy giá tiền của một vé là: $70800000 : 590 = 120000$ (đồng).

Câu 44: Chiều cao (đơn vị: centimét) của một đứa trẻ n tuổi phát triển bình thường được cho bởi công thức: $x_n = 75 + 5(n - 1)$.

(Nguồn: <https://bibabo.vn>)

a) Một đứa trẻ phát triển bình thường có chiều cao năm 3 tuổi là bao nhiêu centimét?

b) Dãy số (x_n) có là một cấp số cộng không? Trung bình một năm, chiều cao mỗi đứa trẻ phát triển bình thường tăng lên bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) Chiều cao 3 năm tuổi của một đứa trẻ phát triển bình thường là: $x_3 = 75 + 5(3 - 1) = 85(cm)$

b) Ta có: $x_{n+1} = 75 + 5(n + 1 - 1) = 75 + 5n$

Xét hiệu $x_{n+1} - x_n = 75 + 5n - [75 + 5(n - 1)] = 5$

Do đó (x_n) là một cấp số cộng có số hạng đầu $x_1 = 75$ và công sai $d = 5$

Câu 45: Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em sẽ chọn phương án nào khi:

a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?

b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

+) Theo phương án 1: Gọi (u_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 1 qua mỗi năm. Dãy số (u_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 120$ và công sai $d = 18$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là: $u_n = 120 + (n-1) \cdot 18$.

+) Theo phương án 2: Gọi (v_n) là dãy số tiền lương của người lao động theo phương án 2 qua từng quý. Dãy số (v_n) lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu $v_1 = 24$ và công sai $d = 1,8$.

Khi đó số hạng tổng quát của cấp số nhân là $v_n = 24 + (n-1) \cdot 1,8$.

a) Khi kí hợp đồng 3 năm tương đương với 12 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_3 = 120 + (3-1) \cdot 18 = 156$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm là:

$$S_3 = \frac{3 \cdot (120 + 156)}{2} = 414 \text{ (triệu đồng)}.$$

+) Theo phương án 2: $u_{12} = 24 + (12-1) \cdot 1,8 = 43,8$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 3 năm tương ứng với 12 quý là:

$$S_{12} = \frac{12 \cdot (24 + 43,8)}{2} = 406,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 3 năm thì nên theo phương án 1.

b) Khi kí hợp đồng 10 năm tương đương với 40 quý ta có:

+) Theo phương án 1: $u_{10} = 120 + (10-1) \cdot 18 = 282$ (triệu đồng)

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm là:

$$S_{10} = \frac{10 \cdot (120 + 282)}{2} = 2010 \text{ (triệu đồng)}.$$

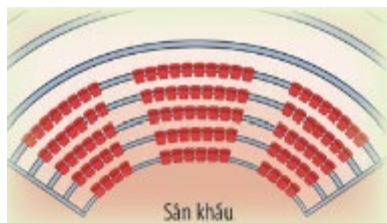
+) Theo phương án 2: $u_{40} = 24 + (40-1) \cdot 1,8 = 94,2$.

Tổng số tiền lương nhận được sau 10 năm tương ứng với 40 quý là:

$$S_{40} = \frac{40 \cdot (24 + 94,2)}{2} = 2364 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu được tuyển dụng vào doanh nghiệp và kí hợp đồng lao động 10 năm thì nên theo phương án 2.

Câu 46: Một rạp hát có 20 hàng ghế. Tính từ sân khấu, số lượng ghế của các hàng tăng dần như trong hình minh hoạ dưới đây.



Bạn hãy đếm và nêu nhận xét về số ghế của năm hàng đầu tiên.

Làm thế nào để biết được số ghế của một hàng bất kì và tính được tổng số ghế có trong rạp hát đó?

Lời giải

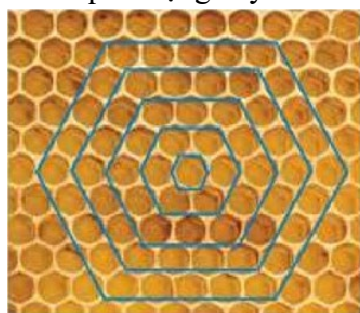
Số ghế của 5 hàng đầu tiên là: $u_1 = 14; u_2 = 17; u_3 = 20; u_4 = 23; u_5 = 26$

Số ghế hàng sau hơn số ghế hàng liền trước là 3 ghế

Số ghế của một hàng bất kì là: $u_n = 14 + 3n$

Tổng số ghế trong rạp là: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$

Câu 47: Mặt cắt của một tổ ong có hình lưới tạo bởi các ô hình lục giác đều. Từ một ô đầu tiên, bước thứ nhất, các ong thợ tạo ra vòng 1 gồm 6 ô lục giác; bước thứ hai, các ong thợ sẽ tạo ra vòng 2 có 12 ô bao quanh vòng 1; bước thứ ba, các ong thợ sẽ tạo ra 18 ô bao quanh vòng 2; cứ thế tiếp tục (Hình 2). Số ô trên các vòng theo thứ tự có tạo thành cấp số cộng không? Nếu có, tìm công sai của cấp số cộng này.



Hình 2

Lời giải

Số ô trên các vòng là: $u_1 = 6; u_2 = 12; u_3 = 18$

Ta thấy $u_{n+1} = u_n + 6$

Vậy các ô trên vòng tạo thành cấp số cộng có công sai là 6

Câu 48: Một rạp hát có 20 hàng ghế xếp theo hình quạt. Hàng thứ nhất có 17 ghế, hàng thứ hai có 20 ghế, hàng thứ ba có 23 ghế, cứ thế tiếp tục cho đến hàng cuối cùng (Hình 4).



Hình 4

- Tính số ghế có ở hàng cuối cùng.
- Tính tổng số ghế có trong rạp.

Lời giải

Ta có: $u_1 = 17; u_2 = 20; u_3 = 23$

Suy ra $d = 3$ và $u_n = 17 + (n - 1) \cdot 3 = 3n + 14$

a) $u_{20} = 3 \cdot 20 + 14 = 74$

b) $S_{20} = \frac{20(17 + 74)}{2} = 910$

Câu 49: Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài các thanh ngang của cái thang đó (từ bậc dưới cùng) lần lượt là $45\text{cm}, 43\text{cm}, 41\text{cm}, \dots, 31\text{cm}$.



Hình 5

- Cái thang đó có bao nhiêu bậc?
- Tính chiều dài thanh gỗ mà người đó cần mua, giả sử chiều dài các mối nối (phần gỗ bị cắt thành mùn cưa) là không đáng kể.

Lời giải

a) Chiều dài các thanh ngang là dãy cấp số cộng có số hạng đầu là 45 , công sai là -2

$$u_n = 45 - 2(n - 1) = 47 - 2n$$

Khi $u_n = 31 \Leftrightarrow n = 8$

Vậy cái thang có 8 bậc

$$b) S_8 = \frac{8 \cdot (45 + 31)}{2} = 304$$

Vậy chiều dài thanh gỗ là 304 cm

Câu 50: Khi một vận động viên nhảy dù nhảy ra khỏi máy bay, giả sử quãng đường người ấy rơi tự do (tính theo feet) trong mỗi giây liên tiếp theo thứ tự trước khi bung dù lần lượt là: 16; 48; 80; 112; 144; ... (các quãng đường này tạo thành cấp số cộng).

a) Tính công sai của cấp số cộng trên.

b) Tính tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên.

Lời giải

a) Công sai của cấp số cộng trên là: $d = 32$

$$b) S_{10} = \frac{10 \cdot [2 \cdot 16 + (10 - 1) \cdot 32]}{2} = 1600$$

Vậy tổng chiều dài quãng đường rơi tự do của người đó trong 10 giây đầu tiên là 1600 feet

Câu 51: Ở một loài thực vật lưỡng bội, tình trạng chiều cao cây do hai gene không alen là A và B cùng quy định theo kiểu tương tác cộng gộp. Trong kiểu gene nếu cứ thêm một alen trội A hay B thì chiều cao cây tăng thêm 5 cm. Khi trưởng thành, cây thấp nhất của loài này với kiểu gene $aabb$ có chiều cao 100 cm. Hỏi cây cao nhất với kiểu gene $AABB$ có chiều cao bao nhiêu?

Lời giải

Cây với kiểu gene $AABB$ có chiều cao là: $100 + 5 \cdot 4 = 120 (cm)$

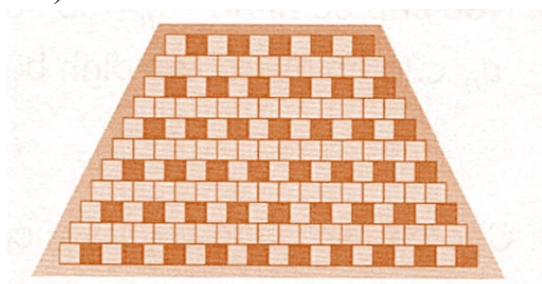
Câu 52: Một hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba và cứ tiếp tục theo quy luật như vậy. Có tất cả 27 hàng ghế. Hỏi hội trường đó có bao nhiêu ghế?

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n . Vì hội trường lớn có 35 ghế ở hàng đầu tiên, 37 ghế ở hàng thứ hai, 39 ghế ở hàng thứ ba, ... nên dãy số (u_n) lập thành cấp số cộng có $u_1 = 35$ và công sai $d = 2$. Suy ra tổng số ghế của hội trường với 27 hàng ghế là

$$S_{27} = \frac{(2u_1 + 26d) \cdot 27}{2} = 1647 (\text{ghế})$$

Câu 53: Một bức tường trang trí có dạng hình thang, rộng 2,4 m ở đáy và rộng 1,2 m ở đỉnh (hình vẽ bên).



Các viên gạch hình vuông có kích thước $10\text{cm} \times 10\text{cm}$ phải được đặt sao cho mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó. Hỏi sẽ cần bao nhiêu viên gạch hình vuông như vậy để ốp hết bức tường đó?

Lời giải

Đổi $2,4\text{m} = 240\text{cm}; 1,2\text{m} = 120\text{cm}$.

Số viên gạch ở hàng đầu tiên (ứng với đáy lớn) là $u_1 = 240 : 10 = 24$.

Số viên gạch ở hàng trên cùng (ứng với đáy nhỏ) là

$$u_n = 120 : 10 = 12.$$

Vì mỗi hàng ở phía trên chứa ít hơn một viên so với hàng ở ngay phía dưới nó nên ta thu được cấp số cộng có công sai $d = -1$.

Như vậy $u_n = 12 = u_1 + (n-1)(-1) \Rightarrow n = 13$.

Vậy số viên gạch hình vuông cần thiết để ốp hết bức tường đó là

$$S_{13} = \frac{(u_1 + u_{13})13}{2} = 234 \text{ (viên gạch)}.$$

Câu 54: Một cầu thang bằng gạch có tổng cộng 30 bậc. Bậc dưới cùng cần 100 viên gạch. Mỗi bậc tiếp theo cần ít hơn hai viên gạch so với bậc ngay trước nó.

a) Cần bao nhiêu viên gạch cho bậc trên cùng?

b) Cần bao nhiêu viên gạch để xây cầu thang?

Lời giải

Công thức của cấp số cộng biểu thị số viên gạch cho mỗi bậc cầu thang như sau:

$$u_1 = 100, u_{n+1} = u_n + (-2), \forall n \geq 2.$$

a) Ta tính $u_{30} = u_1 + (30-1)(-2) = 42$.

b) Ta tính $S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30} = \frac{30}{2}[2 \cdot 100 + (30-1)(-2)] = 2130$.

Như vậy, ta cần 2130 viên gạch để xây cầu thang.

Câu 55: Có bao nhiêu hàng ghế trong một góc khán đài của một sân vận động, biết rằng góc khán đài đó có 2040 chỗ ngồi, hàng ghế đầu tiên có 10 chỗ ngồi và mỗi hàng ghế sau có thêm 4 chỗ ngồi so với hàng ghế ngay trước nó?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với $S_n = 2040$, $u_1 = 10, d = 4$ để

$$\text{tìm } n, \text{ ta được } 2040 = S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 10 + (n-1)4].$$

Suy ra $n = 30$, tức là góc khán đài đó có 30 hàng ghế.

Câu 56: Nếu anh Nam nhận được lời mời làm việc cho một công ty nước ngoài với mức lương khởi điểm là 35000 đô la mỗi năm và được tăng thêm 1400 đô la lương mỗi năm, thì sẽ mất bao nhiêu năm làm việc để tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la?

Lời giải

Áp dụng công thức tính tổng n số hạng đầu của cấp số cộng với

$$S_n = 319200, u_1 = 35000, d = 1400,$$

$$319200 = S_n = \frac{n}{2}[2 \cdot 35000 + (n-1) \cdot 1400].$$

Suy ra $n = 8$.

Vậy sau 8 năm làm việc thì tổng lương mà anh Nam nhận được là 319200 đô la.

Câu 57: Bác Hưng quyết định tham gia một chương trình bơi lội để duy trì sức khỏe. Bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó.

a) Tìm công thức truy hồi cho số phút T_n mà bác ấy bơi vào ngày thứ n của chương trình.

b) Tìm sáu số hạng đầu của dãy số T_n .

c) Tìm công thức tổng quát của dãy số (T_n) .

d) Bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ bao nhiêu của chương trình?

e) Tính tổng thời gian bác Hưng bơi sau 30 ngày đầu của chương trình.

Lời giải

Gọi T_n là số phút mà bác Hưng bơi vào ngày thứ n của chương trình.

a) Do bác bắt đầu bằng cách bơi 10 phút vào ngày đầu tiên, sau đó thêm 2 phút mỗi ngày sau đó nên ta có hệ thức truy hồi sau $T_1 = 10, T_{n+1} = T_n + 2 \forall n \geq 1$.

b) Sáu số hạng đầu của dãy số là

$$T_1 = 10; T_2 = 12; T_3 = 14; T_4 = 16; T_5 = 18; T_6 = 20.$$

c) Theo định nghĩa dãy số T_n là cấp số cộng có $T_1 = 10$ và công sai $d = 2$.

Suy ra, công thức tổng quát của dãy số là $T_n = T_1 + (n-1)d = 8 + 2n \quad \forall n \geq 1$.

d) Ta có $T_n \geq 60 \Leftrightarrow 8 + 2n \geq 60 \Leftrightarrow n \geq 26$.

Vậy bác Hưng đạt được mục tiêu bơi ít nhất 60 phút mỗi ngày vào ngày thứ 26 của chương trình.

e) Tổng thời gian bác Hưng bơi trong 30 ngày đầu của chương trình là

$$S_{30} = \frac{[2T_1 + (30-1)d]30}{2} = 1170(\text{phút}).$$

Câu 58: Một ruộng bậc thang có thửa thấp nhất (bậc thứ nhất) nằm ở độ cao $950m$ so với mực nước biển, độ chênh lệch giữa thửa trên và thửa dưới trung bình là $1,5m$. Hỏi thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao là bao nhiêu mét so với mực nước biển?



Lời giải

Kí hiệu u_n là chiều cao so với mực nước biển của thửa ruộng ở bậc thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số cộng với $u_1 = 950$ và $d = 1,5$.

Ta có $u_{12} = u_1 + 11d = 950 + 11 \cdot 1,5 = 966,5$.

Vậy thửa ruộng ở bậc thứ 12 có độ cao $966,5$ m so với mực nước biển.

Câu 59: Bác Tư vào làm cho một công ty với hợp đồng về tiền lương mỗi năm như sau: Năm thứ nhất: 240 triệu;

Từ năm thứ hai trở đi: Mỗi năm tăng thêm 12 triệu.

Tính số tiền lương một năm của bác Tư vào năm thứ 11.

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương của bác Tư nhận được vào năm thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng có $u_1 = 240$ và $d = 12$.

Ta có $u_{11} = u_1 + 10d = 240 + 10 \cdot 12 = 360$.

Vậy vào năm thứ 11, số tiền lương một năm của bác Tư là 360 triệu đồng.

Câu 60: Một rạp hát có 20 hàng ghế. Hàng thứ nhất có 20 ghế, số ghế ở các hàng sau đều hơn số ghế hàng ngay trước đó một ghế. Cho biết rạp hát đã bán hết vé với giá mỗi vé là 60 nghìn đồng. Tính tổng số tiền vé thu được của rạp hát.

Lời giải

Gọi u_n là số ghế ở hàng thứ n .

Khi đó, dãy số (u_n) tạo thành cấp số cộng với $u_1 = 20$ và $d = 1$.

Tổng số ghế có trong rạp hát là: $S_{20} = \frac{20 \cdot [2 \cdot 20 + (20 - 1) \cdot 1]}{2} = 590$ (ghế).

Tổng số tiền vé thu được là: $590 \cdot 60000 = 35400000$ (đồng).

Câu 61: Khi kí kết hợp đồng lao động với người lao động, một doanh nghiệp đề xuất hai phương án trả lương như sau:

Phương án 1: Năm thứ nhất, tiền lương là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương được tăng 18 triệu đồng.

Phương án 2: Quý thứ nhất, tiền lương là 24 triệu đồng. Kể từ quý thứ hai trở đi, mỗi quý tiền lương được tăng 1,8 triệu đồng.

Nếu là người được tuyển dụng vào doanh nghiệp trên, em nên chọn phương án nào khi:

- a) Kí hợp đồng lao động 3 năm?
- b) Kí hợp đồng lao động 10 năm?

Lời giải

Ở phương án trả lương thứ nhất, số tiền lương mỗi năm người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 120$, công sai $d = 18$.

Ở phương án trả lương thứ hai, số tiền lương mỗi quý người lao động nhận được lập thành cấp số cộng (v_n) có số hạng đầu $v_1 = 24$, công sai $d' = 1,8$.

a) Nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 1 là tổng 3 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S_3 = \frac{(2u_1 + 2d) \cdot 3}{2} = 3u_1 + 3d = 3 \cdot 120 + 3 \cdot 18 = 414 \text{ (triệu đồng)}.$$

Do 1 năm có 4 quý nên tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 3 năm ở phương án 2 là tổng 12 số hạng đầu của cấp số cộng và bằng:

$$S'_{12} = \frac{(2v_1 + 11d') \cdot 12}{2} = 12v_1 + 66d' = 12 \cdot 24 + 66 \cdot 1,8 = 406,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 3 năm thì em nên chọn phương án 1.

b) Nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì:

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 1 bằng:

$$S_{10} = \frac{(2u_1 + 9d) \cdot 10}{2} = 10u_1 + 45d = 10 \cdot 120 + 45 \cdot 18 = 2010 \text{ (triệu đồng)}.$$

Tổng số tiền lương người lao động nhận được trong 10 năm ở phương án 2 bằng:

$$S'_{40} = \frac{(2v_1 + 39d') \cdot 40}{2} = 40v_1 + 780d' = 40 \cdot 24 + 780 \cdot 1,8 = 2364 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu kí hợp đồng lao động 10 năm thì em nên chọn phương án 2.

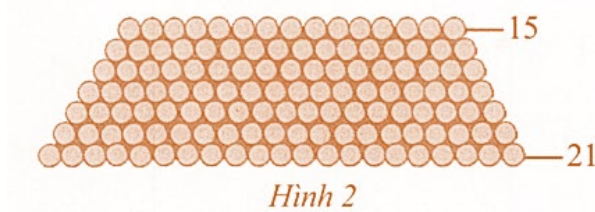
Câu 62: Chuông đồng hồ ở một toà tháp đánh số tiếng đúng bằng số giờ và cứ mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông. Hỏi bắt đầu từ lúc 1 giờ đêm đến 12 giờ trưa, chuông đồng hồ đó đã đánh tất cả bao nhiêu tiếng?

Lời giải

Lúc 1 giờ đêm, toà tháp đánh 1 tiếng chuông; lúc 2 giờ đêm, toà tháp đánh 2 tiếng chuông;...; lúc 12 h trưa, toà tháp đánh 12 tiếng chuông. Ngoài ra, mỗi 30 phút không phải là giờ đúng thì đánh 1 tiếng chuông (có 11 lần như thế từ 1 giờ đến 12 giờ).

Vậy tổng số tiếng chuông là: $S = (1 + 2 + 3 + \dots + 12) + 1 \cdot 11 = 89$

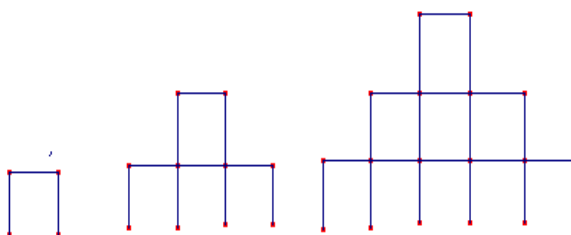
Câu 63: Các khúc gỗ được xếp như Hình 2. Lượt thứ nhất có 21 khúc, lượt thứ hai có 20 khúc,.., lượt trên cùng có 15 khúc. Tính tổng số khúc gỗ đã được xếp.



Lời giải

Tổng số khúc gỗ được xếp là: $15 + 16 + \dots + 21 = \frac{(21+15) \cdot 7}{2} = 126$.

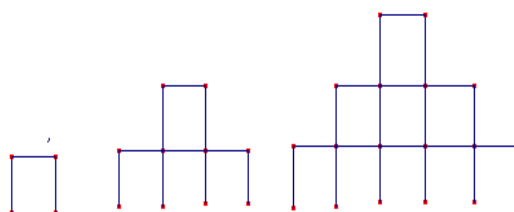
Câu 64: Bạn Gia Linh xếp que diêm thành hình tháp trên mặt sân như hình vẽ:



1 tầng 2 tầng 3 tầng

- Hỏi nếu có 5 tầng thì cần bao nhiêu que diêm xếp tầng đế của tháp?
- Hỏi nếu có 100 tầng thì cần bao nhiêu que diêm xếp tầng đế của tháp?
- Để xếp được tháp có 10 tầng thì bạn An cần dùng bao nhiêu que diêm?

Lời giải



1 tầng 2 tầng 3 tầng

- Xếp 1 tầng cần 3 que xếp đế tháp,
Xếp 2 tầng cần 7 que xếp đế tháp,
Xếp 3 tầng cần 11 que xếp đế tháp,
Xếp 4 tầng cần 15 que xếp đế tháp,
Xếp 5 tầng cần 19 que xếp đế tháp.
- Giả sử để xếp n tầng thì cần u_n que xếp tầng đế, khi đó ta có:

Cách 1:

$$u_1 = 3$$

$$u_2 = u_1 + 4$$

$$u_3 = u_2 + 4 = u_1 + 2.4$$

$$u_4 = u_3 + 4 = u_1 + 3.4$$

$$u_5 = u_4 + 4 = u_1 + 4.4$$

.....

$$u_{100} = u_{99} + 4 = u_1 + 99.4 = 3 + 99.4 = 399$$

Cách 2: Theo giả thiết số que diêm xếp tầng để của tháp lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 3$ và công sai $d = 4$. Do đó số que diêm xếp tầng để của tháp nếu có 100 tầng là:

$$u_{100} = u_1 + (100 - 1).d = 3 + 99.4 = 399.$$

c) Số que ở 1 tầng là $u_1 = 3$.

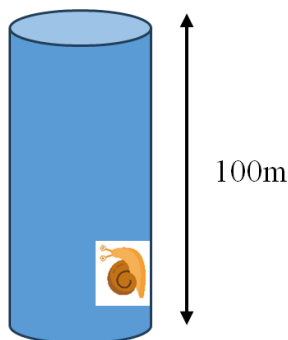
Tổng số que ở 2 tầng là $u_1 + u_2 = 3 + 7$.

Tổng số que ở 3 tầng là $u_1 + u_2 + u_3 = 3 + 7 + 11$.

Ta có cấp số cộng $u_1 = 3$, $d = 4$, tính S_{10} ?

$$\text{Để cần có 10 tầng cần tổng } S_{10} = \frac{10}{2}(2.3 + 9.4) = 210 \text{ que.}$$

Câu 65: Một con ốc sên bị rơi vào 1 cái giếng sâu 100 mét. Ốc sên cố gắng thoát ra bằng cách mỗi ngày trèo lên thêm 1 đoạn 3m so với ngày trước đó theo chiều cao của miệng giếng. Biết rằng ngày đầu tiên con ốc sên trèo được 2m. Hỏi sau ngày thứ 30, con ốc sên có trèo ra khỏi được giếng hay chưa?



Lời giải

Theo giả thiết số mét ốc sên bò được qua các ngày lập thành một cấp số cộng với ngày thứ nhất bò được là $u_1 = 2$ (m) và công sai $d = 3$ (m)

Do đó số mét ốc sên bò được sau 30 ngày là: $u_{30} = u_1 + (30 - 1)d = 2 + 29.3 = 89$ (m)

Vậy sau ngày thứ 30 con ốc sên vẫn chưa ra khỏi miệng giếng.

Câu 66: Một công ty trả lương cho anh A theo phương thức sau: Mức lương quý đầu tiên là 4,5 triệu đồng/ quý. Kể từ quý tiếp theo, mỗi quý được tăng thêm 0,3 triệu đồng. Hỏi tổng số tiền lương anh A nhận được sau 3 năm làm việc?

Lời giải

Gọi u_n là mức lương ở quý thứ n thì: $u_1 = 4,5$ và $d = 0,3$

1 năm có 4 quý nên 3 năm có 12 quý $\Rightarrow u_{12} = 4,5 + (12 - 1).0,3 = 7,8$.

$$\text{Vậy: } S_{12} = \frac{(u_1 + u_{12})12}{2} = \frac{(4,5 + 7,8).12}{6} = 73,8 \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 67: Dân số nước ta năm 2008 là 84 triệu người (đứng thứ 13 trên thế giới) bình quân dân số tăng 1 triệu người/ năm (bằng dân số 1 tỉnh). Với tốc độ tăng dân số như thế, năm 2026 dân số nước ta là bao nhiêu? Dự đoán đến năm nào thì dân số nước ta đạt mốc 1 tỷ người?

Lời giải

Theo giả thiết thì tốc độ tăng dân luôn ổn định đều qua các năm.

Do vậy số dân hằng năm lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 1$ triệu, $u_1 = 84$ triệu.

Nên dân số năm 2026 là: $u_{19} = 84 + (19 - 1).1 = 102$ triệu.

Theo dự đoán dân số nước ta được 1 tỉ người khi $n - 1 = 1000 - 84 \Rightarrow n = 917$.

Như vậy dân số nước ta được 1 tỷ vào năm 2925.

Câu 68: Khi ký hợp đồng dài hạn với các kỹ sư được tuyển dụng, công ty liên doanh A đề xuất hai phương án trả lương để người lao động tự lựa chọn, cụ thể:

+ **Phương án 1:** Người lao động sẽ nhận được 36 triệu đồng cho năm làm việc đầu tiên, kể từ năm làm việc thứ hai mức lương sẽ tăng 3 triệu đồng mỗi năm.

+ **Phương án 2:** Người lao động sẽ nhận được 7 triệu đồng cho quý làm việc đầu tiên, kể từ quý thứ hai mức lương sẽ tăng thêm 500 000 đồng mỗi quý.

Nếu em là người ký hợp đồng lao động với công ty liên doanh A thì em sẽ chọn phương án nào?

Lời giải

Gọi n là số năm ký hợp đồng làm việc với công ty A ($n > 0$)

Nếu ký hợp đồng theo phương án 1 thì tổng số tiền lương nhận được trong n năm là:

$$S_1 = n.36 + \frac{n(n-1)}{2}.3 = \frac{3n^2 + 69n}{2} \text{ (triệu đồng)}$$

Nếu ký hợp đồng theo phương án 2 thì tổng số tiền lương nhận được trong n năm là:

$$S_2 = 4n.7 + \frac{4n(4n-1)}{2}.0,5 = 4n^2 + 27n \text{ (triệu đồng)}$$

$$\text{Xét } S_1 - S_2 = \frac{3n^2 + 69n}{2} - (4n^2 + 27n) = \frac{-5n^2 + 15n}{2}$$

$$S_1 - S_2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-5n^2 + 15n}{2} \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq n \leq 3$$

Vậy nếu làm việc không quá 3 năm thì lựa chọn theo phương án 1, nếu làm việc trên 3 năm thì lựa chọn phương án 2.

Câu 69: Tương truyền rằng nhà Vua Ấn Độ cho phép người phát minh ra bàn cờ vua (Seta) được lựa chọn một phần thưởng tùy thích. Người đó chỉ xin nhà vua thưởng cho số hạt thóc đặt lên 64 ô của bàn cờ vua như sau: Đặt lên ô thứ nhất của bàn cờ 1 hạt thóc, tiếp đến ô thứ hai 2 hạt, ... cứ như vậy, số hạt thóc ở ô sau gấp đôi số hạt thóc ở ô liền trước cho đến ô cuối cùng. Hãy tìm tổng số hạt thóc mà nhà vua phải ban cho người phát minh ra bàn cờ vua.



Lời giải

Số hạt thóc là tổng của 64 số hạng đầu của cấp số nhân có $u_1 = 1, q = 2$:

$$S = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = \frac{1(1 - 2^{64})}{1 - 2} = 2^{64} - 1.$$

Giả sử 1000 hạt thóc nặng 20gam, thì khối lượng thóc là $\frac{20(2^{64} - 1)}{1000} \text{ gam} \approx 369 \text{ tỷ tấn}.$

Như vậy là nhà vua đã nhầm khi nghĩ là mình thừa sức để thưởng cho nhà thông thái. Trong khi ngày nay, toàn thế giới chỉ sản xuất được khoảng hơn 2 tỷ tấn lương thực mỗi năm. Nếu đem rải đều số thóc này lên bề mặt trái đất thì sẽ được một lớp thóc dày 9mm. Nhà vua sẽ không thể có được số thóc khổng lồ như vậy.

Câu 70: Tỷ lệ tăng dân số của Thành phố A là 1,68%. Biết rằng số dân của Thành phố A hiện nay là 1,8 triệu người. Số dân sau 5 năm của tỉnh đó là bao nhiêu?

Lời giải

Đặt $P_0 = 1800000 = 1,8 \cdot 10^6$ và $r = 1,68\% = 0,0168$.

Gọi P_n là số dân của Thành phố A sau n năm nữa.

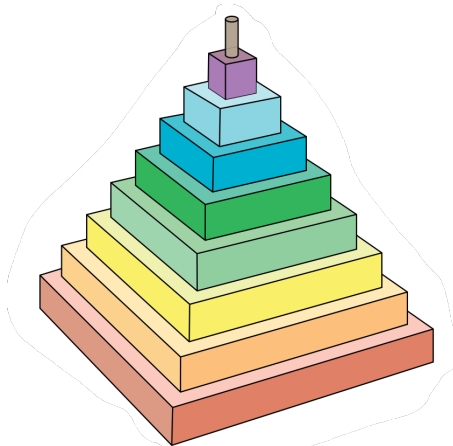
Ta có: $P_{n+1} = P_n + P_n r = P_n(1 + r)$. (Số dân của năm sau bằng số dân của năm trước cộng với số dân tăng thêm).

Suy ra (P_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu P_0 và công bội $q = 1 + r$.

Do đó số dân của Thành phố A sau 5 năm nữa là:

$$P = P_0(1 + r)^5 = 1800000.(1 + 0,0168)^5 \approx 1956366.$$

Câu 71: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 8 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp (có diện tích là 512 cm^2). Tính diện tích mặt trên cùng



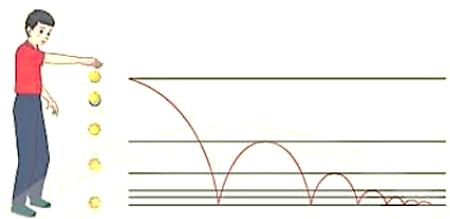
Lời giải

Diện tích bề mặt của mỗi tầng (kể từ 1) lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$ và

$$u_1 = \frac{512}{2} = 256.$$

Khi đó diện tích mặt trên cùng là: $u_8 = u_1 \cdot q^7 = 256 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = 2 \text{ (cm)}.$

Câu 72: Một quả bóng rơi từ một vị trí có độ cao 120cm . Khi chạm đất, nó luôn nảy lên độ cao bằng một nửa độ cao của lần rơi trước đó.



Gọi $u_1 = 120$ là độ cao của lần rơi đầu tiên và $u_2; u_3; \dots; u_n; \dots$ là độ cao của các lần rơi kế tiếp. Tìm 5 số hạng đầu tiên của dãy (u_n) và tìm điểm đặc biệt của dãy số đó.

Lời giải

$$u_2 = \frac{1}{2} \cdot 120 = 60$$

$$u_3 = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$$

$$u_4 = \frac{1}{2} \cdot 30 = 15$$

$$u_5 = \frac{1}{2} \cdot 15 = \frac{15}{2}$$

Dãy số có mỗi số hạng đều bằng một nửa số hạng đứng liền trước.

Câu 73: Một công ty tuyển một chuyên gia về công nghệ thông tin với mức lương năm đầu là 240 triệu đồng và cam kết sẽ tăng thêm 5% lương mỗi năm so với năm liền trước đó. Tính tổng số lương mà chuyên gia đó nhận được sau khi làm việc cho công ty 10 năm (làm tròn đến triệu đồng).

Lời giải

Lương hằng năm (triệu đồng) của chuyên gia lập thành một cấp số nhân, với số hạng đầu $u_1 = 240$ và công bội $q = 1,05$. Tổng số lương của chuyên gia đó sau 10 năm chính là tổng của

$$10 \text{ số hạng đầu của cấp số nhân này và bằng } S_{10} = \frac{u_1(1 - q^{10})}{1 - q} = \frac{240[1 - (1,05)^{10}]}{1 - 1,05} \approx 3019.$$

Vậy tổng số lương (làm tròn đến triệu đồng) của chuyên gia đó sau 10 năm là 3019 triệu đồng hay 3,019 tỉ đồng.

Câu 74: Trong một lọ nuôi cấy vi khuẩn, ban đầu có 5000 con vi khuẩn và số lượng vi khuẩn tăng lên thêm 8% mỗi giờ. Hỏi sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là bao nhiêu?

Lời giải

Số vi khuẩn mỗi giờ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5000$ và công bội $q = 1,08$

$$\text{Công thức tổng quát: } u_n = 5000 \times 1,08^{n-1}$$

$$\text{Sau 5 giờ số vi khuẩn là: } u_5 = 5000 \times 1,08^{5-1} = 5161 \text{ (con vi khuẩn)}$$

Câu 75: Một nhà máy tuyển thêm công nhân vào làm việc trong thời hạn ba năm và đưa ra hai phương án lựa chọn về lương như sau:

- Phương án 1: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 500 nghìn đồng.

- Phương án 2: Lương tháng khởi điểm là 5 triệu đồng và sau mỗi quý, lương tháng sẽ tăng thêm 5%.

Với phương án nào thì tổng lương nhận được sau ba năm làm việc của người công nhân sẽ lớn hơn?

Lời giải

Theo phương án 1, tiền lương mỗi quý sẽ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5 \times 3 = 15$, công sai $d = 0.5 \times 3 = 1.5$

Công thức tổng quát là: $u_n = 15 + 1.5(n - 1)$

Sau 3 năm làm việc (tương ứng với 12 quý) lương của người nông dân là: $\frac{12}{2}[2 \times 15 + (12 - 1) \times 1.5] = 279$ (triệu đồng)

Theo phương án 2, tiền lương mỗi quý sẽ tạo thành cấp số nhân với $u_1 = 5 \times 3 = 15$, công bội $q = 1.05$

Công thức tổng quát là: $u_n = 15 \times 1.05^{n-1}$

Sau 3 năm làm việc lương của người nông dân là: $\frac{15(1 - 1.05^{12})}{1 - 1.05} = 238.757$ (triệu đồng)

Vậy theo phương án 1 thì tổng lương nhận được của người nông dân là cao hơn

Câu 76: Một công ty xây dựng mua một chiếc máy ủi với giá 3 tỉ đồng. Cứ sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc máy ủi này lại giảm 20% so với giá trị của nó trong năm liền trước đó. Tìm giá trị còn lại của chiếc máy ủi đó sau 5 năm sử dụng.

Lời giải

Giá trị của chiếc máy ủi mỗi năm lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu bằng 3 và công bội $q = 0.8$.

Giá trị của chiếc máy ủi sau 5 năm sử dụng là: $u_5 = 3 \times 0.8^{5-1} = 0.1875$ (tỷ đồng)

Câu 77: Vào năm 2020, dân số của một quốc gia là khoảng 97 triệu người và tốc độ tăng trưởng dân số là 0,91%. Nếu tốc độ tăng trưởng dân số này được giữ nguyên hằng năm, hãy ước tính dân số của quốc gia đó vào năm 2030.

Lời giải

Dân số hằng năm lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 97 và công bội $q = 1.0091$

Dân số của quốc gia đó năm 2030 (tức $n = 11$) là $u_{11} = 97 \times 1.0091^{11-1} = 106.197$ (triệu người)

Câu 78: Một loại thuốc được dùng mỗi ngày một lần. Lúc đầu nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân tăng nhanh, nhưng mỗi liều kế tiếp có tác dụng ít hơn liều trước đó. Lượng thuốc trong máu ở

ngày thứ nhất là $50mg$, và mỗi ngày sau đó giảm chỉ còn một nửa so với ngày kề trước đó. Tính tổng lượng thuốc (tính bằng mg) trong máu của bệnh nhân sau khi dùng thuốc 10 ngày liên tiếp.

Lời giải

Lượng thuốc trong máu mỗi ngày của bệnh nhân lập thành cấp số nhân với số hạng đầu là 50 và công bội $q = 0.5$

Tổng lượng thuốc trong máu 10 ngày liên tiếp chính là tổng 10 số hạng đầu của cấp số nhân này

và bằng:
$$S_n = \frac{50[1 - (0.5)^{10}]}{1 - 0.5} = 99.902(mg)$$

Câu 79: Từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, chuông của một chiếc đồng hồ quả lắc sẽ đánh bao nhiêu tiếng, biết rằng nó chỉ đánh chuông báo giờ và số tiếng chuông bằng số giờ?

Lời giải

Lúc 1 giờ đồng hồ đánh 1 tiếng chuông.

Lúc 2 giờ đồng hồ đánh 2 tiếng chuông

Lúc 12 giờ trưa đồng hồ đánh 12 tiếng chuông.

Do đó, từ 0 giờ đến 12 giờ trưa, đồng hồ đánh số tiếng chuông là: $1 + 2 + 3 + \dots + 11 + 12$

Đây là tổng 12 số hạng của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Vậy tổng số tiếng chuông đồng hồ trong khoảng thời gian từ 0 đến 12 giờ trưa là:

$$S_{12} = \frac{12 \times (1 + 12)}{2} = 78$$

Câu 80: Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Hỏi sau 24 giờ, tế bào ban đầu sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?

Lời giải

Số tế bào phân chia sau mỗi 20 phút tạo thành cấp số nhân với số hạng đầu là 2, công bội là 2

Sau 24 giờ (tức $n = (24 \times 60) : 20 = 72$) tế bào ban đầu phân chia thành số tế bào là:

$$u_{72} = 2 \times 2^{71} = 4.722 \times 10^{21}$$

Suy ra ba số cần tìm là 18, 7, -4 hoặc 3, 7, 11

Câu 81: Mặt sàn tầng một (tầng trệt) của một ngôi nhà cao hơn mặt sân $0,5m$. Cầu thang đi từ tầng một lên tầng hai gồm 25 bậc, mỗi bậc cao $16cm$.

a) Viết công thức để tìm độ cao của bậc cầu thang thứ n so với mặt sân.

b) Tính độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân.

Lời giải

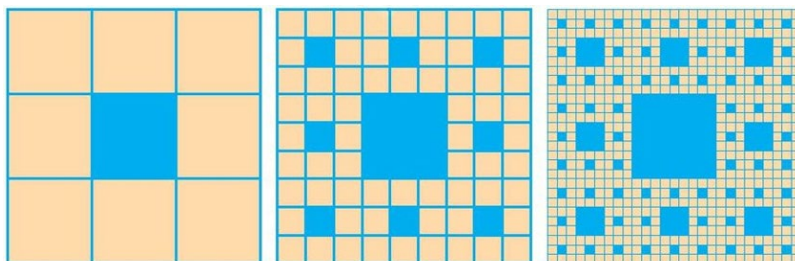
a) Mỗi bậc thang cao $16cm = 0,16m$.

$$\Rightarrow n \text{ bậc thang cao } 0,16n(m)$$

Vì mặt bằng sàn cao hơn mặt sân $0,5m$ nên công thức tính độ cao của bậc n so với mặt sân sẽ là: $h_n = (0,5 + 0,16n)(m)$

b) Độ cao của sàn tầng hai so với mặt sân ứng với $n = 25$ là: $h_{25} = 0,5 + 0,16.25 = 4,5(m)$

Câu 82: Một hình vuông màu vàng có cạnh 1 đơn vị dài được chia thành chín hình vuông nhỏ hơn và hình vuông ở chính giữa được tô màu xanh như Hình 2.1. Mỗi hình vuông màu vàng nhỏ hơn lại được chia thành chín hình vuông con, và mỗi hình vuông con ở chính giữa lại được tô màu xanh. Nếu quá trình này được tiếp tục lặp lại năm lần, thì tổng diện tích các hình vuông được tô màu xanh bao nhiêu?



Hình 2.1

Lời giải

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ nhất là: $\frac{1}{9}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^0

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ hai là: $\frac{1}{9^2}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^1

...

Diện tích ô vuông màu xanh sau lần phân chia thứ năm là: $\frac{1}{9^5}$, số ô vuông màu xanh được tạo thêm là 8^4

Tổng diện tích các ô vuông màu xanh là: $\frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} \times 8^1 + \dots + \frac{1}{9^5} \times 8^4 = 0.445$

Câu 83: Vi khuẩn E.coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. (Nguồn: Sinh học 10, NXB Giáo dục Việt Nam, 2010)

Giả sử lúc đầu có 100 vi khuẩn E.coli.

Hỏi có bao nhiêu vi khuẩn E.coli sau 180 phút?



Hình ảnh phóng to của vi khuẩn E.coli

Lời giải

Số lượng vi khuẩn lúc đầu $Q_0 = 100$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi đầu tiên (sau $20 = 1.20$ phút) là: $Q_1 = 100 \cdot 2 = 200$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ hai (sau $40 = 2.20$ phút) là: $Q_2 = 100 \cdot 2 \cdot 2 = 100 \cdot 2^2 = 400$ (vi khuẩn).

Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ ba (sau $60 = 3.20$ phút) là: $Q_3 = 100 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 100 \cdot 2^3 = 800$ (vi khuẩn).

Tổng quát: Số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ n (sau $n.20$ phút) là: $Q_n = 100 \cdot 2^n$ (vi khuẩn).

Vì vậy số lượng vi khuẩn sau lần nhân đôi thứ 9 (sau $180 = 9.20$ phút) là: $Q_9 = 100 \cdot 2^9 = 51200$ (vi khuẩn).

Câu 84: Dân số trung bình của Việt Nam năm 2020 là 97,6 triệu người, tỉ lệ tăng dân số là 1,14% /năm. (Nguồn: Niên giám thống kê của Việt Nam năm 2020, NXB Thống kê, 2021)

Giả sử tỉ lệ tăng dân số không đổi qua các năm.

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là bao nhiêu triệu người (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

b) Viết công thức tính dân số Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Sau 1 năm, dân số của Việt Nam sẽ là: $u_1 = 97,6 + 97,6 \cdot 0,0114 = 97,6 \cdot (1 + 0,0114) = 97,6 \cdot 1,0114 \approx 98,7$ (triệu người).

b) Gọi u_n là dân số của Việt Nam sau n năm.

Do tỉ lệ tăng dân số hàng năm là 1,14% nên ta có:
$$\begin{aligned} u_n &= u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,0114 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,0114) \\ &= u_{n-1} \cdot 1,0114, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 97,6 \cdot 1,0114$, công bội $q = 1,0114$.

Vậy dân số của Việt Nam sau n năm kể từ năm 2020 là: $u_n = 97,6 \cdot 1,0114 \cdot 1,0114^{n-1} = 97,6 \cdot 1,0114^n$ (triệu người).

Câu 85: Bác Linh gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng tiền tiết kiệm với hình thức lãi kép, kì hạn 1 năm với lãi suất 6% / năm. Viết công thức tính số tiền (cả gốc và lãi) mà bác Linh có được sau n năm (giả sử lãi suất không thay đổi qua các năm).

Lời giải

Số tiền ban đầu $T_1 = 100$ (triệu đồng).

Số tiền sau 1 năm bác Linh thu được là: $T_2 = 100 + 100 \cdot 6\% = 100 \cdot (1 + 6\%)$ (triệu đồng)

Số tiền sau 2 năm bác Linh thu được là: $T_3 = 100 \cdot (1 + 6\%) + 100 \cdot (1 + 6\%) \cdot 6\% = 100 \cdot (1 + 6\%)^2$ (triệu đồng)

Số tiền sau 3 năm bác Linh thu được là: $T_4 = 100 \cdot (1 + 6\%)^2 + 100 \cdot (1 + 6\%)^2 \cdot 6\% = 100 \cdot (1 + 6\%)^3$ (triệu đồng)

Số tiền sau n năm bác Linh thu được chính là một cấp số nhân với số hạng đầu $T_1 = 100$ và công bội $q = 1 + 6\%$ có số hạng tổng quát là:

$$T_{n+1} = 100 \cdot (1 + 6\%)^n \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 86: Giả sử anh Tuấn kí hợp đồng lao động trong 10 năm với điều khoản về tiền lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Tuấn là 60 triệu. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Tuấn được tăng lên 8%. Tính tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi làm (đơn vị: triệu đồng, làm tròn đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Gọi u_n là số tiền lương (triệu đồng) anh Tuấn được lĩnh ở năm làm việc thứ n .

Ta có: $u_1 = 60$;

$$u_n = u_{n-1} + u_{n-1} \cdot 0,08 = u_{n-1} \cdot (1 + 0,08) = u_{n-1} \cdot 1,08.$$

Do đó, (u_n) là cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 60$, công bội $q = 1,08$.

Áp dụng công thức tính tổng S_n , ta có tổng số tiền lương anh Tuấn lĩnh được trong 10 năm đi

$$\text{làm là: } S_{10} = \frac{60(1 - 1,08^{10})}{1 - 1,08} \approx 869,194 \text{ (triệu đồng).}$$

Câu 87: Một tỉnh có 2 triệu dân vào năm 2020 với tỉ lệ tăng dân số là 1%/năm. Gọi u_n là số dân của tỉnh đó sau n năm. Giả sử tỉ lệ tăng dân số là không đổi.

a) Viết công thức tính số dân của tỉnh đó sau n năm kể từ năm 2020.

b) Tính số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020.

Lời giải

a) Ta có dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là $u_0 = 2$ triệu dân và công sai $q = 1\%$. Khi đó số hạng tổng quát của $u_n = 2 \cdot (1 + 1\%)^{n-1}$ (triệu dân).

b) Số dân của tỉnh đó sau 10 năm kể từ năm 2020 là:

$$u_{10} = 2 \cdot (1 + 1\%)^{10-1} \approx 2,19 \text{ (triệu dân).}$$

Câu 88: Một gia đình mua một chiếc ô tô giá 800 triệu đồng. Trung bình sau mỗi năm sử dụng, giá trị còn lại của ô tô giảm đi 4% (so với năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau 1 năm, 2 năm sử dụng.

b) Viết công thức tính giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

c) Sau 10 năm, giá trị của ô tô ước tính còn bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

a) Sau 1 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_1 = 800 - 800.4\% = 800.(1 - 4\%) = 768 \text{ (triệu đồng)}.$$

Sau 2 năm giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_1 = 800.(1 - 4\%) - 800.(1 - 4\%).4\% = 800.(1 - 4\%)^2 = 737,28 \text{ (triệu đồng)}.$$

b) Gọi (u_n) là giá trị của ô tô sau n năm sử dụng.

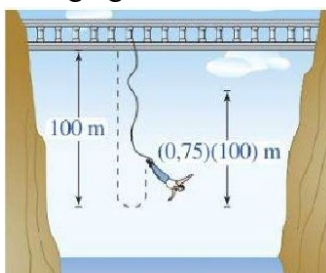
Dãy số (u_n) tạo thành một cấp số nhân với số hạng đầu là giá trị đầu của ô tô là $u_0 = 800$ triệu đồng và công bội $q = 1 - 4\%$.

Khi đó công thức tổng quát để tính $u_n = 800.(1 - 4\%)^n$.

c) Sau 10 năm sử dụng giá trị của ô tô còn lại là:

$$u_{10} = 800.(1 - 4\%)^{10} \approx 531,87 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 89: Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài $100m$. Sau mỗi lần rơi xuống, nhờ sự đàn hồi của dây, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3). Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo lên và lại rơi xuống.



Hình 3

Lời giải

Gọi (u_n) là độ dài dây kéo sau n lần rơi xuống ($n \in \mathbb{N}$)

Ta có: $u_0 = 100(m)$

Sau lần rơi đầu tiên độ dài dây kéo còn lại là: $u_1 = 100.75\%(m)$.

Sau cú nhảy tiếp theo độ dài dây kéo còn lại là: $u_2 = 100.75\%.75\% = 100.(75\%)^2(m)$.

Dãy số này lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu là 100 và công bội $q = 0,75\%$, có công thức tổng quát $(u_n) = 100.(0,75\%)^{n-1} (m)$. Tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần kéo

lên và lại rơi xuống là: $S_{10} = \frac{100(1 - (75\%)^{10})}{1 - 75\%} \approx 377,5(m)$

Câu 90: Người ta trồng cây theo các hàng ngang với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây, ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Giả sử người ta đã trồng được n hàng.

Số cây ở mỗi hàng lập thành một cấp số cộng với $u_1 = 1$, công sai $d = 1$

Tổng số cây ở n hàng cây là:

$$S_n = \frac{n(1+n)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = 4950$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n - 9900 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 99 \vee n = -100 \text{ (L)}$$

Vậy có 99 hàng cây được trồng theo cách trên.

Câu 91: Một cái tháp có 11 tầng. Diện tích của mặt sàn tầng 2 bằng nửa diện tích của mặt đáy tháp và diện tích của mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt sàn tầng ngay bên dưới. Biết mặt đáy tháp có diện tích là $12288m^2$. Tính diện tích của mặt sàn tầng trên cùng của tháp theo đơn vị mét vuông.

Lời giải

Diện tích mặt đáy tháp là $u_1 = 12288(m^2)$.

Diện tích mặt sàn tầng 2 là: $u_2 = 12288 \cdot \frac{1}{2} = 6144(m^2)$.

.

Gọi diện tích mặt sàn tầng n là u_n với $n \in \mathbb{N}^*$.

Dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân là $u_1 = 12288$ và công bội $q = \frac{1}{2}$, có số hạng tổng quát là:

$$u_n = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

Diện tích mặt tháp trên cùng chính là mặt tháp thứ 11 nên ta có:

$$u_{11} = 12288 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11-1} = 12(m^2)$$

Câu 92: Một khay nước có nhiệt độ $23^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm 20%. Tính nhiệt độ của khay nước đó sau 6 giờ theo đơn vị độ C

Lời giải

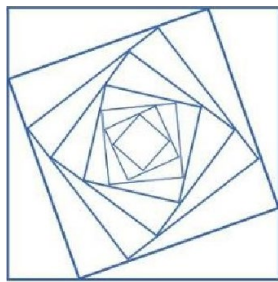
Gọi u_n là nhiệt độ của khay nước đó sau n giờ (đơn vị độ C) với $n \in \mathbb{N}^*$.

Ta có: $u_1 = 23; u_2 = 23 - 23 \cdot 20\% = 23 \cdot (1 - 20\%) = 23 \cdot 80\%; u_3 = 23 \cdot 80\% \cdot 80\% = 23 \cdot (80\%)^2; \dots$

Suy ra dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = 23$ và công bội $q = 80\%$ có số hạng tổng quát $u_n = 23 \cdot (80\%)^{n-1}$ độ C

Vậy sau 6 giờ thì nhiệt độ của khay là $u_6 = 23 \cdot (80\%)^5 \approx 7,5^\circ C$.

Câu 93: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng 4. Người ta chia mỗi cạnh hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (Hình 4). Từ hình vuông C_2 lại làm tiếp tục như trên để có hình vuông C_3 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Gọi a_n là độ dài cạnh hình vuông C_n . Chứng minh rằng dãy số (a_n) là cấp số nhân.



Hình 4

Lời giải

Độ dài cạnh của hình vuông đầu tiên là: $a_1 = 4$.

Độ dài cạnh của hình vuông thứ n là: a_n .

Độ dài cạnh của hình vuông thứ $n+1$ là: $a_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{10}}{4} \right) \cdot a_n$.

Suy ra: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

Vậy (a_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = 4$ và công bội $q = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 94: Ông An vay ngân hàng 1 tỉ đồng với lãi suất 12% / năm. Ông đã trả nợ theo cách: Bắt đầu từ tháng thứ nhất sau khi vay, cuối mỗi tháng ông trả ngân hàng cùng số tiền là a (đồng) và đã trả hết nợ sau đúng 2 năm kể từ ngày vay. Hỏi số tiền mỗi tháng mà ông An phải trả là bao nhiêu đồng (làm tròn kết quả đến hàng nghìn)?

Lời giải

Gọi (u_n) là số tiền sau mỗi tháng ông An còn nợ ngân hàng.

Lãi suất mỗi tháng là 1%.

Ta có:

$$u_1 = 1000000000 \text{ đồng.}$$

$$u_2 = u_1 + u_1 \cdot 1\% - a = u_1(1 + 1\%) - a \text{ (đồng)}$$

$$u_3 = u_1(1+1\%) - a + [u_1(1+1\%) - a] \cdot 1\% - a = u_1(1+1\%)^2 - a(1+1\%) - a$$

...

$$u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - a(1+1\%)^{n-2} - a(1+1\%)^{n-3} - a(1+1\%)^{n-4} - \dots - a.$$

Ta thấy dãy $a(1+1\%)^{n-2}; a(1+1\%)^{n-3}; a(1+1\%)^{n-4}; \dots; a$ lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $a_1 = a$ và công bội $q = 99\%$ có tổng $n-2$ số hạng đầu là:

$$S_{n-2} = \frac{a(1-(99\%)^{n-2})}{1-99\%} = 100a[1-(99\%)^{n-2}].$$

$$\text{Suy ra } u_n = u_1(1+1\%)^{n-1} - 100a[1-(99\%)^{n-2}].$$

Vì sau 2 năm bằng 24 tháng thì ông An trả xong số tiền nên $n = 24$ và $u_{24} = 0$. Do đó ta có:

$$u_{24} = u_1(1+1\%)^{23} - 100a[1-(99\%)^{22}] = 0$$

$$\Leftrightarrow 1000000000.(99\%)^{23} - 100a[1-(99\%)^{22}] = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 40006888,25$$

Vậy mỗi tháng ông An phải trả 40006888,25 đồng.

Câu 95: Một quốc gia có dân số năm 2011 là P triệu người. Trong 10 năm tiếp theo, mỗi năm dân số tăng $a\%$. Chứng minh rằng dân số các năm từ năm 2011 đến năm 2021 của quốc gia đó tạo thành cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân này.

Lời giải

Dân số qua các năm là:

$$u_{2011} = P$$

$$u_{2012} = P + aP = P(1+a) = u_{2011} \cdot (1+a)$$

$$u_{2013} = P(1+a) + aP(1+a) = P(1+a)^2 = u_{2012} \cdot (1+a)$$

.....

$$u_{n+1} = u_n(1+a)$$

Vậy dân số các năm tạo thành cấp số nhân có công bội là $1+a$

Câu 96: Tần số của ba phím liên tiếp Sol, La, Si trên một cây đàn organ tạo thành cấp số nhân.



Hình 1

Biết tần số của hai phím Sol và Si lần lượt là 415 Hz và 466 Hz (theo: [https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_\(nốt_nhạc\)](https://vi.wikipedia.org/wiki/Đô_(nốt_nhạc))). Tính tần số của phím La (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Do tần số của ba phím Sol, La, Si tạo thành cấp số nhân nên gọi tần số 3 phím lần lượt là: a, aq, aq^2

Ta có: $a = 415$ và $aq^2 = 466$. Nên $q = 1,06$

Suy ra: $aq = 440$

Vậy tần số của phím La là 440 Hz

Câu 97: Chu kì bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau 138 ngày, khối lượng của nguyên tố đó chỉ còn một nửa (theo: <https://vi.wikipedia.org/wiki/Poloni-210>). Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau:

a) 690 ngày;

b) 7314 ngày (khoảng 20 năm).

Lời giải

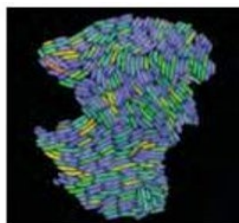
a) Sau $690 = 138.5$ ngày, tức là sau 5 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là:

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 1,25 \text{ (gam)}$$

b) Sau $7314 = 138.53$ ngày, tức là sau 53 chu kì bán rã, khối lượng nguyên tố Poloni còn lại là:

$$20 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{53} = 4,44 \cdot 10^{-15} \text{ (gam)}$$

Câu 98: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong phòng thí nghiệm, cứ mỗi phút số lượng lại tăng lên gấp đôi số lượng đang có. Từ một vi khuẩn ban đầu, hãy tính tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút.



Hình 2

Lời giải

Tổng số vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 20 phút là: $S_{20} = \frac{20 \cdot [1 - 2^{20}]}{1 - 2} = 20971500$

Câu 99: Giả sử một thành phố có dân số năm 2022 là khoảng 2,1 triệu người và tốc độ gia tăng dân số trung bình mỗi năm là 0,75%.

a) Dự đoán dân số của thành phố đó vào năm 2032.

b) Nếu tốc độ gia tăng dân số vẫn giữ nguyên như trên thì ước tính vào năm nào dân số của thành phố đó sẽ tăng gấp đôi so với năm 2022?

Lời giải

Dân số của thành phố từ năm 2022 lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $1 + 0,0075 = 1,0075$

Dân số của thành phố vào năm n là: $u_n = 2,1.1,0075^{n-2022}$

a) $u_{2032} = 2,1.1,0075^{2032-2022} = 2,26$

b) Khi $u_n = 2.u_{2022} \Leftrightarrow 1,0075^{n-2022} = 2 \Leftrightarrow n = 2115$

Vậy đến năm 2115, dân số thành phố gấp đôi so với năm 2022

Câu 100: Trong trò chơi mạo hiểm nhảy bungee, mỗi lần nhảy, người chơi sẽ được dây an toàn có tính đàn hồi kéo nảy ngược lên 60% chiều sâu của cú nhảy. Một người chơi bungee thực hiện cú nhảy đầu tiên có độ cao nảy ngược lên là $9m$.



(Hình 3)

a) Tính độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ ba.

b) Tính tổng các độ cao nảy ngược lên của người đó trong 5 lần nảy đầu.

Lời giải

Độ cao nảy ngược lên của người đó ở lần nảy thứ nhất là $u_1 = 9$

Độ cao các lần nảy lần lượt tạo thành cấp số nhân có công bội là $q = 0,6; u_n = 9.0,6^{n-1}$

a) $u_3 = 9.0,6^{3-1} = 3,24$

b) $S_5 = \frac{5 \cdot [1 - 0,6^5]}{1 - 0,6} = 11,528$

Câu 101: Giả sử một quần thể động vật ở thời điểm ban đầu có 110000 cá thể, quần thể này có tỉ lệ sinh là 12% / năm, xuất cư là 2% / năm, tử vong là 8% / năm. Dự đoán số cá thể của quần thể đó sau hai năm.

Lời giải

Số cá thể của quần thể qua các năm tạo thành cấp số nhân có công bội là:
 $q = 1 + 0,12 - 0,02 - 0,08 = 1,02$

Số cá thể sau hai năm là: $110000.1,02^2 = 114444$ (cá thể)

Câu 102: Một cây đàn organ có tần số âm thanh các phím liên tiếp tạo thành một cấp số nhân. Cho biết tần số phím La Trung là 400 Hz và tần số của phím La Cao cao hơn 12 phím là 800 Hz (nguồn: [https:// vi.wikipedia.org/wiki/Organ](https://vi.wikipedia.org/wiki/Organ)). Tìm công bội của cấp số nhân nói trên (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

Ta có: $q^{12} = \frac{800}{400} = 2$

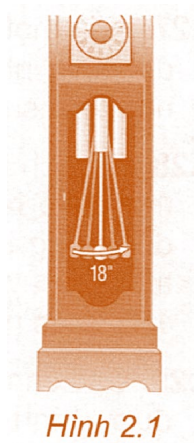
Suy ra: $q = 1,06$

Câu 103: Dân số Việt Nam năm 2020 là khoảng 97,6 triệu người (theo Niên giám thống kê năm 2020). Nếu trung bình mỗi năm tăng 1,14% thì ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là khoảng bao nhiêu người (làm tròn kết quả đến hàng trăm nghìn)?

Lời giải

Ước tính dân số Việt Nam năm 2040 là: $97,6.(1 + 0,0114)^{20} = 122,4$ (triệu người)

Câu 104: Ban đầu, một quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm ($H.2.1$).



Sau mỗi lần đu liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là bao nhiêu?

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là bao nhiêu?

(Kết quả tính theo centimét và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Gọi u_n là độ dài cung tròn ở lần thứ n khi con lắc dao động. Do lần một, quả lắc đồng hồ dao động theo một cung tròn dài 46 cm , sau mỗi lần dao động liên tiếp, độ dài của cung tròn bằng 0,98 độ dài cung tròn ở ngay lần trước đó nên dãy số (u_n) lập thành cấp số nhân có $u_1 = 46$ và công bội $q = 0,98$.

a) Độ dài của cung tròn ở lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 46 \cdot 0,98^9 \approx 38,35(\text{cm})$.

b) Sau 15 lần dao động, quả lắc sẽ đi được quãng đường tổng cộng là

$$S_{15} = u_1 \frac{1-q^{15}}{1-q} = 46 \cdot \frac{1-0,98^{15}}{1-0,98} \approx 601,29(cm).$$

Câu 105: Các bệnh truyền nhiễm có thể lây lan rất nhanh. Giả sử có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo. Tính đến hết tuần thứ 10 của đợt dịch, có bao nhiêu người đã bị lây bởi căn bệnh này?

Lời giải

Gọi u_n là số người bị bệnh ở cuối tuần thứ n . Vì có năm người bị bệnh trong tuần đầu tiên của một đợt dịch, và mỗi người bị bệnh sẽ lây bệnh cho bốn người vào cuối tuần tiếp theo nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 5$ và công bội $q = 4$. Suy ra số người bị ảnh hưởng bởi dịch bệnh ở cuối tuần 10 là $u_{10} = u_1 q^9 = 5 \cdot 4^9 = 1310720$ (người).

Câu 106: Nếu một kĩ sư được một công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5%, thì mức lương của người kĩ sư đó là bao nhiêu khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà người kĩ sư đó nhận được ở năm thứ n . Vì người kĩ sư được công ty thuê với mức lương hằng năm là 180 triệu đồng và nhận được mức tăng lương hằng năm là 5% nên dãy số (u_n) là một cấp số nhân có $u_1 = 180$ và công bội $q = 1 + 5\% = 1,05$. Khi bắt đầu năm thứ sáu làm việc cho công ty thì mức lương năm của người kĩ sư đó là

$$u_6 = u_1 q^5 = 229,73 \text{ (triệu đồng)}$$

Câu 107: Để tích lũy tiền cho việc học đại học của con gái, cô Hoa quyết định hằng tháng bỏ ra 500 nghìn đồng vào tài khoản tiết kiệm, được trả lãi 0,5% cộng dồn hằng tháng. Cô bắt đầu chương trình tích lũy này khi con gái cô tròn 3 tuổi. Cô ấy sẽ tích lũy được bao nhiêu tiền vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180? Lúc này con gái cô Hoa bao nhiêu tuổi?

Lời giải

Gọi u_n là số triệu đồng mà cô Hoa có trong chương trình tích lũy ở lần gửi thứ n (vào đầu tháng thứ n). Kí hiệu $a = 0,5$ triệu đồng, $r = 0,5\%$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 1 là $u_1 = a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 2 là $u_2 = u_1(1+r) + a$.

Số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng 3 là

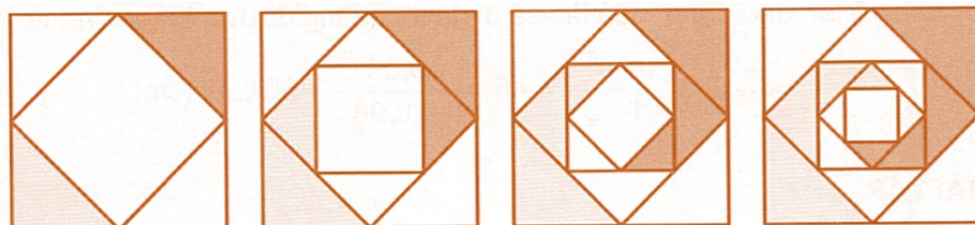
$$u_3 = u_2(1+r) + a = a(1+r)^2 + a(1+r) + a.$$

Tương tự cho các tháng tiếp theo, suy ra số tiền của cô Hoa trong chương trình ở đầu tháng n là

$$u_n = a(1+r)^{n-1} + a(1+r)^{n-2} + \dots + a(1+r) + a = a \frac{(1+r)^n - 1}{(1+r) - 1} = a \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Vào thời điểm gửi khoản tiền thứ 180, cô ấy sẽ tích lũy được $u_{180} = a \frac{(1+r)^{180} - 1}{r} = 145,41$ (triệu đồng). Khi đó, tuổi của con gái cô Hoa là $3 + 180 : 12 = 18$ tuổi.

Câu 108: Các cạnh của hình vuông ban đầu có chiều dài 16 cm . Một hình vuông mới được hình thành bằng cách nối các điểm giữa của các cạnh của hình vuông ban đầu và hai trong số các hình tam giác kết quả được tô màu (hình vẽ dưới).



Nếu quá trình này được lặp lại năm lần nữa, hãy xác định tổng diện tích của vùng được tô màu.

Lời giải

Gọi u_n là diện tích hai tam giác được tô màu ở lần thực hiện thứ n . Gọi a là độ dài cạnh của hình vuông ban đầu.

Ở lần 1 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2}$ nên $u_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{2^2}$ và độ dài cạnh hình vuông sau đó là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ở lần 2 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_2 = \frac{a^2}{2^3}$.

Ở lần 3 thì độ dài cạnh tam giác vuông cân là $\frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ nên $u_3 = \frac{a^2}{2^4}$.

Như vậy, dãy số (u_n) là cấp số nhân với $u_1 = \frac{a^2}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Vậy tổng diện tích sau năm lần thực hiện là $S_5 = u_1 \frac{1-q^5}{1-q} = 124 (\text{cm}^2)$.

Chú ý. Diện tích cần tính bằng diện tích hình vuông ngoài cùng trừ đi diện tích hình vuông trong cùng rồi chia 2.

Câu 109: Anh Nam là một cầu thủ bóng đá chuyên nghiệp. Anh vừa kí hợp đồng 5 năm với một câu lạc bộ với mức lương năm khởi điểm là 300 triệu đồng. Chủ tịch câu lạc bộ đưa ra cho anh Nam ba phương án về lương như sau:

- Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng.
- Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.
- Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai.

Em hãy tính giúp anh Nam xem với phương án lương nào thì tổng lương sau 5 năm của anh Nam là lớn nhất?

Lời giải

Ta tính tổng tiền lương của anh Nam theo từng phương án:

- Phương án 1: Mỗi năm ngoài mức lương cố định như trên, sẽ được thưởng thêm 50 triệu đồng thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$$5 \cdot 300 + 5 \cdot 50 = 1750 \text{ (triệu đồng)}$$

- Phương án 2: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 10% so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$$300 + 300 \cdot (1 + 10\%) + 300 \cdot (1 + 10\%)^2 + 300 \cdot (1 + 10\%)^3 + 300(1 + 10\%)^4 \\ = 1831,53 \text{ (triệu đồng)}.$$

- Phương án 3: Mỗi năm lương sẽ tăng thêm 30 triệu so với lương năm trước đó, bắt đầu kể từ năm thứ hai thì sau 5 năm tổng số tiền lương của anh Nam là

$$300 + 330 + 360 + 390 + 420 = 1800 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy anh Nam nên sử dụng Phương án 2 để nhận được tổng lương sau 5 năm là cao nhất.

Câu 110: Một loại vi khuẩn được nuôi cấy trong ống nghiệm, cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Nếu ban đầu có 200 vi khuẩn, tính số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau 2 giờ.



Lời giải

Ta có: 2 giờ = 120 phút = 6.20 phút. Do đó, sau 2 giờ vi khuẩn phân đôi 6 lần.

Gọi u_n là số lượng vi khuẩn có trong ống nghiệm sau lần phân đôi thứ $n - 1$.

Khi đó, dãy số (u_n) là một cấp số nhân với $u_1 = 200$ và $q = 2$.

$$\text{Ta có } u_7 = u_1 \cdot q^6 = 200 \cdot 2^6 = 12800.$$

Vậy sau 2 giờ, trong ống nghiệm có 12800 vi khuẩn.

Câu 111: Bác Năm gửi tiết kiệm vào ngân hàng 100 triệu đồng với hình thức lãi kép, kì hạn một năm với lãi suất 8% / năm. Tính số tiền cả gốc và lãi bác Năm nhận được sau 10 năm. (Giả sử lãi suất không thay đổi trong suốt thời gian gửi tiền.)

Lời giải

Khoảng 215892500 đồng.

Câu 112: Một người chơi nhảy bungee trên một cây cầu với một sợi dây dài $100m$. Sau mỗi lần rơi xuống, người chơi được kéo lên một quãng đường có độ dài bằng 80% so với lần rơi trước và lại rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên. Tính tổng quãng đường đi lên của người đó sau 10 lần được kéo lên.

Lời giải

$$S_{10} = \frac{80(1 - 0,8^{10})}{1 - 0,8} \approx 357,05(m).$$

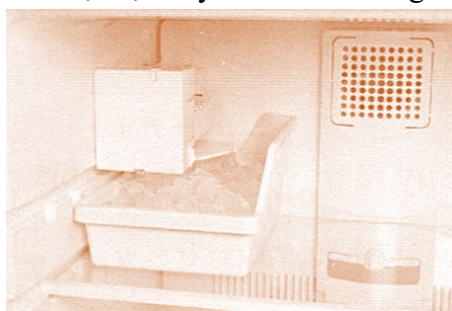
Câu 113: Một tháp 10 tầng có diện tích sàn của tầng dưới cùng là $6144m^2$. Tính diện tích mặt sàn tầng trên cùng, biết rằng diện tích mặt sàn mỗi tầng bằng nửa diện tích mặt sàn tầng ngay bên dưới.



Lời giải

$$u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 6144 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 = 12(m^2).$$

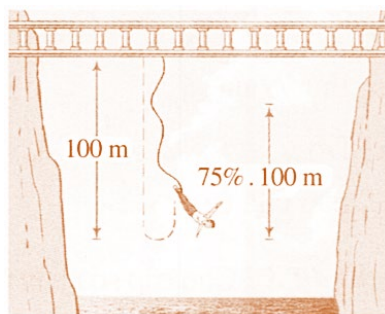
Câu 114: Một khay nước có nhiệt độ $20^\circ C$ được đặt vào ngăn đá của tủ lạnh. Cho biết sau mỗi giờ, nhiệt độ của nước giảm đi 25% . Tính nhiệt độ khay nước đó sau 4 giờ.



Lời giải

$$u_5 = u_1 \cdot q^4 = 20 \cdot 0,75^4 \approx 6,33^\circ C.$$

Câu 115: Một người nhảy bungee (một trò chơi mạo hiểm mà người chơi nhảy từ một nơi có địa thế cao xuống với dây đai an toàn buộc xung quanh người) từ một cây cầu và căng một sợi dây dài $100m$. Giả sử sau mỗi lần rơi xuống, người nhảy được kéo lên một quãng đường có độ cao bằng 75% so với lần rơi trước đó và lại bị rơi xuống đúng bằng quãng đường vừa được kéo lên (Hình 3).



Hình 3

Tính tổng quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên, tính từ lúc bắt đầu nhảy (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi $u_1(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ nhất, ta có: $u_1 = 100$; $v_1(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ nhất, ta có: $v_1 = 100 \cdot 0,75 = 75$

$u_2(m)$ là quãng đường người chơi rơi xuống ở lần thứ hai, ta có: $u_2 = v_1 = 0,75u_1$;

$v_2(m)$ là quãng đường người chơi được kéo lên ở lần thứ hai, ta có: $v_2 = 0,75u_2 = 0,75v_1$.

Như vậy, ta có hai cấp số nhân đều có công bội $0,75$ là: $u_1, u_2, \dots, u_{10}$ và $v_1, v_2, \dots, v_{10}$ với $u_1 = 100$ và $v_1 = 75$.

$$\text{Ta có: } u_1 + u_2 + \dots + u_{10} = 100 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right); v_1 + v_2 + \dots + v_{10} = 75 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right).$$

Vậy quãng đường người đó đi được sau 10 lần rơi xuống và lại được kéo lên (tính từ lúc bắt đầu nhảy) là:

$$(u_1 + u_2 + \dots + u_{10}) + (v_1 + v_2 + \dots + v_{10}) = 175 \cdot \left(\frac{1 - 0,75^{10}}{1 - 0,75} \right) \approx 661(m).$$

Câu 116: Anh Dũng kí hợp đồng lao động trong 10 năm với phương án trả lương như sau: Năm thứ nhất, tiền lương của anh Dũng là 120 triệu đồng. Kể từ năm thứ hai trở đi, mỗi năm tiền lương của anh Dũng được tăng lên 10%. Tính tổng số tiền lương anh Dũng lĩnh được trong 10 năm đầu đi làm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị triệu đồng).

Lời giải

1912 triệu đồng.

Câu 117: Một công ty mua một chiếc máy với giá 1 tỉ 200 triệu đồng. Công ty nhận thấy, trong vòng 5 năm đầu, tốc độ khấu hao là 25%/ năm (tức là sau mỗi một năm, giá trị còn lại của chiếc máy bằng 75% giá trị của năm trước đó).

a) Viết công thức tính giá trị của chiếc máy đó sau 1 năm, 2 năm.

b) Sau 5 năm, giá trị của chiếc máy đó còn khoảng bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

a) Giá trị của máy sau 1 năm, 2 năm lần lượt là:

$$1200 \cdot 0,75 = 900 \text{ (triệu đồng); } 1200 \cdot 0,75^2 = 675 \text{ (triệu đồng).}$$

b) Sau 5 năm, giá trị chiếc máy đó còn là: $1200 \cdot 0,75^5 \approx 285$ (triệu đồng).

Câu 118: Một du khách vào trường đua chó ở Phú Quốc và tham gia đặt cược, lần đầu đặt 8000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

Lời giải

Theo giả thiết số tiền du khách đặt trong mỗi lần (kể từ lần đầu) là một cấp số nhân có $u_1 = 8000$ và công bội $q = 2$.

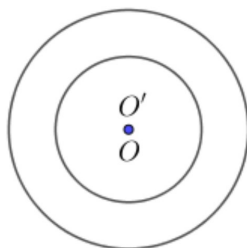
Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_9 = \frac{u_1(1 - q^9)}{1 - q} = 4088000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là: $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 4096000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 8000 > 0$ nên du khách thắng 8000 (đồng)

Câu 119: Cho n đường tròn đồng tâm O . Biết rằng $r_1 = 4$; chu vi đường tròn $(O; r_2)$ có gấp 2 lần chu vi đường tròn $(O; r_1)$; ...; chu vi đường tròn $(O; r_n)$ gấp 2 lần chu vi đường tròn $(O; r_{n-1})$. Chu vi đường tròn $(O; r_n)$ gấp 256 lần chu vi đường tròn $(O; r_1)$. Tính r_{n-1} ?



Lời giải

Ta có chu vi đường tròn có bán kính r là: $P = 2\pi r$

Do chu vi đường tròn $(O; r_2)$ gấp 2 lần chu vi đường tròn $(O; r_1) \Rightarrow 2\pi r_2 = 2 \cdot 2\pi r_1 \Leftrightarrow r_2 = 2r_1$.

Do chu vi đường tròn $(O; r_n)$ gấp 2 lần chu vi đường tròn $(O; r_{n-1})$ nên: $2\pi r_n = 2 \cdot 2\pi r_{n-1}$

$$\Leftrightarrow r_n = 2r_{n-1}$$

Suy ra dãy số $r_1; r_2; r_3 \dots; r_n$ là cấp số nhân có $u_1 = r_1 = 4$ và công bội $q = 2$

$$\Rightarrow r_n = r_1 \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 256 = 1024$$

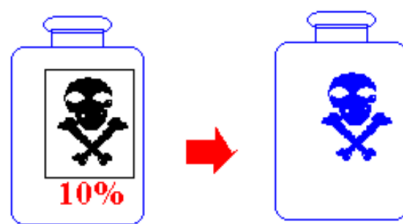
$$\Rightarrow r_{n-1} = r_n : 2 = 256.$$

Câu 120: Một lọ thủy tinh dung tích 1000ml chứa đầy 1 loại dung dịch chất độc nồng độ 10% đã được chuyển sang bình chứa khác; nhưng dung dịch độc hại sau khi đổ hết vẫn còn dính lọ 0,1%. Để chất độc còn trong lọ $\leq 0,001\mu$ gam (microgam), người ta dùng nước cất xúc rửa lọ thủy tinh này. Hỏi:

a) Phải xúc rửa bao nhiêu lần nếu mỗi lần dùng 1000ml nước cất?

b) Phải xúc rửa bao nhiêu lần nếu mỗi lần dùng 100ml nước cất?

Giả thử rằng mỗi lần xúc rửa, chất độc hòa tan hết trong nước và sau khi đổ đi đựng dịch mới cũng vẫn còn dính lọ một lượng như nhau.



Lời giải

Lượng chất độc tồn trong lọ lúc đầu là: $(100\text{ g} : 1000) = \frac{1}{10}$ (gam)

Lượng chất độc tồn trong lọ theo yêu cầu là: $0,001\mu\text{ gam} = \frac{1}{10^9}$ (gam)

a) Mỗi lần xúc rửa với 1.000ml nước cất, vẫn còn dính lọ 1ml (0,1%) nghĩa là lượng chất độc đã giảm đi 1000 (hay 10^3) lần.

Lập bảng lượng chất độc tồn đọng sau các lần xúc rửa, ta có:

Lúc đầu	Lần 1	Lần 2	Lần 3
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10^3}$	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10^6}$	$\frac{1}{10} \times \frac{1}{10^9}$

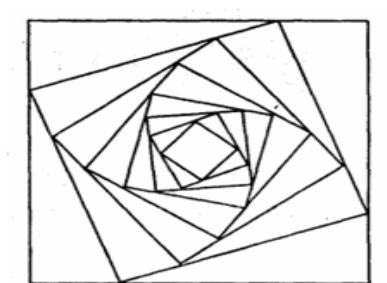
Vậy sau 3 lần xúc rửa với 1.000ml/ lần thì chất độc còn $\frac{1}{10} \times \frac{1}{10^9} \leq \frac{1}{10^9}$ gam.

b) Phần giải này mời bạn đọc tự thực hành.

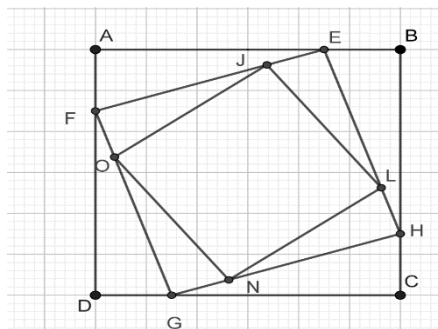
Câu 121: Cho hình vuông C_1 có cạnh bằng a . Người ta chia mỗi cạnh của hình vuông thành bốn phần bằng nhau và nối các điểm chia một cách thích hợp để có hình vuông C_2 (hình vẽ). Từ hình vuông C_2 lại tiếp tục làm như trên ta nhận được dãy các hình vuông $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n$. Gọi S_i là diện tích của hình vuông $C_i (i \in \{1; 2; 3; \dots\})$. Đặt $T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots$

a) Khi $T = \frac{32}{3}$, tính a ?

b) Khi $T = \frac{128}{3}$, tính a ?



Lời giải



- a) Giả sử hình vuông cần phân chia các cạnh của hình vuông $ABCD$ bởi các điểm $E; F; G; H$ để tạo thành hình vuông $EFGH$, khi đó các điểm $E; F; G; H$ thỏa mãn như hình vẽ khi đó:

$$AE = \frac{3}{4} AB; AF = \frac{1}{4} AD.$$

$$S_{ABCD} = a^2.$$

$$\text{Ta có: } EF = \sqrt{\left(\frac{AB}{4}\right)^2 + \left(\frac{3AB}{4}\right)^2} = \frac{AB\sqrt{10}}{4} \Rightarrow S_{EFGH} = \frac{10AB^2}{16} = \frac{10}{16}a^2.$$

$$JO = \sqrt{\left(\frac{AB\sqrt{10}}{16}\right)^2 + \left(\frac{3AB\sqrt{10}}{16}\right)^2} = \frac{10AB}{16} \Rightarrow S_{JONL} = \frac{10^2 AB^2}{16^2} = \frac{10^2}{16^2}a^2.$$

Từ đó ta thấy diện tích các hình vuông giảm dần và lập thành cấp số nhân có công bội $q = \frac{10}{16}$.

$$\text{Ta có: } T = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots = a^2 \left(1 + \frac{10}{16} + \frac{10^2}{16^2} + \dots + \frac{10^n}{16^n} + \dots \right)$$

$$T = \left(\frac{1}{1 - \frac{10}{16}} \right) \cdot a^2 = \frac{8}{3} \cdot a^2 = \frac{32}{3} \Rightarrow a = 2.$$

Vậy $a = 2$.

- b) Diện tích của hình vuông C_1 , cạnh $x_1 = a$ (với $a > 0$) là $S_1 = a^2$.

$$\text{Độ dài cạnh của hình vuông } C_2 \text{ là: } x_2 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}x_1\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x_1\right)^2} = \frac{x_1\sqrt{10}}{4} = \frac{a\sqrt{10}}{4} \Rightarrow S_2 = \frac{5}{8}a^2$$

$$\text{Độ dài cạnh của hình vuông } C_2 \text{ là: } x_3 = \sqrt{\left(\frac{1}{4}x_2\right)^2 + \left(\frac{3}{4}x_2\right)^2} = \frac{x_2\sqrt{10}}{4} = \frac{5a}{8} \Rightarrow S_3 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 a^2$$

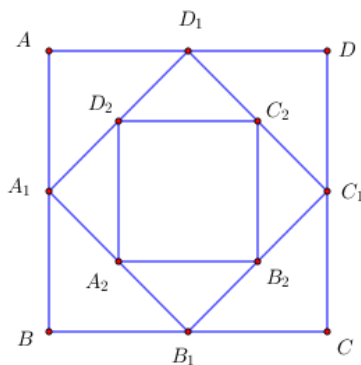
$$\text{Tương tự, diện tích của hình vuông } C_i \text{ là } S_i = \left(\frac{5}{8}\right)^{i-1} a^2. \text{ Và } S_n = \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} a^2$$

$$\text{Do đó: } T = \left(1 + \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1} \right) a^2 = \frac{128}{3} \text{ mà } T_0 = 1 + \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

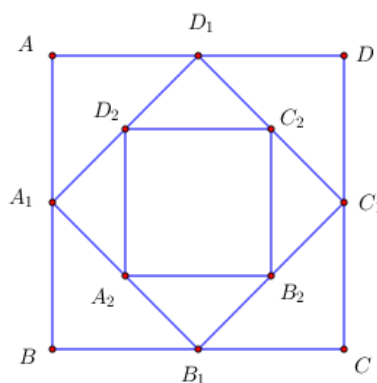
$$\text{là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với } u_1 = 1, q = \frac{5}{8} \rightarrow T_0 = \frac{1}{1 - \frac{5}{8}} = \frac{8}{3}.$$

$$\text{Suy ra } T = \frac{8}{3}a^2 = \frac{128}{3} \Rightarrow a = 4.$$

Câu 122: Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng a và có diện tích S_1 . Nối 4 trung điểm A_1, B_1, C_1, D_1 theo thứ tự của 4 cạnh AB, BC, CD, DA ta được hình vuông thứ hai có diện tích S_2 . Tiếp tục làm như thế, ta được hình vuông thứ ba là $A_2B_2C_2D_2$ có diện tích $S_3, \dots$ và cứ tiếp tục làm như thế, ta tính được các hình vuông lần lượt có diện tích $S_4, S_5, \dots, S_{100}$ (tham khảo hình bên). Tính tổng $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100}$.



Lời giải



Ta có $S_1 = a^2$; $S_2 = \frac{1}{2}a^2$; $S_3 = \frac{1}{4}a^2, \dots$

Do đó $S_1, S_2, S_3, \dots, S_{100}$ là cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = S_1 = a^2$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

$$\text{Suy ra } S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{100} = S_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = \frac{a^2 (2^{100} - 1)}{2^{99}}.$$

Câu 123: Một người bắt đầu đi làm được nhận được số tiền lương là 5.200.000đ một tháng. Sau 36 tháng người đó được tăng lương 7,5 %. Hằng tháng người đó tiết kiệm 20% lương để gửi vào ngân hàng với lãi suất 0,3% tháng theo hình thức lãi kép (nghĩa là lãi của tháng này được nhập vào vốn của tháng kế tiếp). Biết rằng người đó nhận lương vào đầu tháng và số tiền tiết kiệm được chuyển ngay vào ngân hàng.

Lời giải

Đặt $a = 5.200.000$, $m = 20\%$, $n = 0,3\%$, $t = 7,5\%$.

Hết tháng thứ nhất, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là $T_1 = am(1 + n)^1$.

Hết tháng thứ hai, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_2 = (T_1 + am)(1 + n) = am(1 + n)^2 + am(1 + n)^1.$$

Tương tự cho đến tháng thứ 36.

Hết tháng thứ 36, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

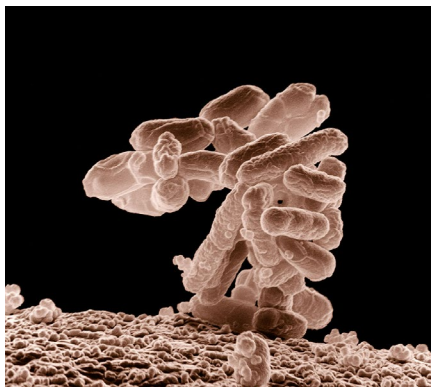
$$T_{36} = am(1+n)^{36} + am(1+n)^{35} + \dots + am(1+n) = am \cdot (1+n) \frac{(1+n)^{36} - 1}{n}$$

Thay số ta được $T_{36} \approx 39592539,06$

Vậy số tiền người đó tiết kiệm được là 39.592.539 đồng.

Câu 124: Tế bào E.Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần.

- Hỏi 1 tế bào sau mười lần phân chia sẽ thành bao nhiêu tế bào?
- Nếu có 10^{11} tế bào thì sau 4 giờ sẽ phân chia thành bao nhiêu tế bào?
(Nguồn wikipedia.org).



Lời giải

- Lúc đầu có 1 tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 1$ và công bội $q = 2$.

Vậy sau mười lần phân chia ta u_{11} là số tế bào nhận được: $u_{11} = u_1 \cdot q^{10} = 1024$ (tế bào)

- Lúc đầu có 10^{11} tế bào và mỗi lần phân chia thì một tế bào tách thành hai tế bào nên ta có cấp số nhân với $u_1 = 10^{11}$ và công bội $q = 2$.

Do cứ 20 phút phân đôi một lần nên sau 4 giờ sẽ có 12 lần phân chia tế bào. Ta có u_{13} là số tế bào nhận được sau 4 giờ.

Vậy, số tế bào nhận được sau 4 giờ là $u_{13} = u_1 q^{12} = 409600 \cdot 10^9$.

Câu 125: Tế bào E. Coli trong điều kiện nuôi cấy thích hợp cứ 20 phút lại phân đôi một lần. Giả sử 1 tế bào E. Coli khối lượng khoảng $15 \cdot 10^{-15}$ g. Hỏi sau 2 ngày khối lượng do 1 tế bào vi khuẩn sinh ra là bao nhiêu?

Lời giải

Một tế bào E. Coli

Sau 20 phút thành: $2 = 2^1$ tế bào.

Sau 40 = 2.20 phút thành: $4 = 2^2$ tế bào.

Sau 60 = 3.20 phút thành: $8 = 2^3$ tế bào.

.....

Sau 2 ngày = 144.20 phút thành 2^{144} tế bào.

Vậy sau 2 ngày khối lượng do 1 tế bào vi khuẩn sinh ra là:

$$2^{144} \cdot 15 \cdot 10^{-15} = 3,34511178 \cdot 10^{29} (g) \approx 3,35 \cdot 10^{26} (kg).$$

Câu 126: Theo giả thiết thì con lắc dao động tắt dần chậm sau mỗi chu kì và biên độ giảm 5%

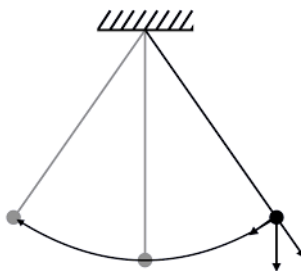
Do vậy độ lớn biên độ lập thành một cấp số nhân với $u_1 = 20$ và $q = 100\% - 5\% = 95\% = 0,95$;

$$u_7 = u_1 q^6 = 20 \cdot (0,95)^6 \approx 14,7 (cm).$$

Vậy sau 6 lần dao động biên độ con lắc còn gần bằng $14,7\text{cm}$.

Lời giải

Một con lắc dao động tắt dần chậm với biên độ ban đầu là 20cm , biết cứ sau mỗi chu kì biên độ con lắc giảm đi một lượng bằng 5% biên độ lần dao động trước đó. Hỏi sau 6 lần dao động biên độ con lắc còn bao nhiêu cm ?



Câu 127: Tìm hiệu tiền công khoan giếng ở hai cơ sở khoan giếng, người ta được biết:

- Ở cơ sở A: Giá của mét khoan đầu tiên là 62.000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 10000 đồng so với giá của mét khoan ngay trước.
- Ở cơ sở B: Giá của mét khoan đầu tiên là 62.000 đồng và kể từ mét khoan thứ hai, giá của mỗi mét sau tăng thêm 9% giá của mét khoan ngay trước.

Một người muốn chọn một trong hai cơ sở nói trên để thuê khoan một cái giếng sâu 20 mét, một cái giếng sâu 30 mét ở hai địa điểm khác nhau. Hỏi người ấy nên chọn cơ sở khoan giếng nào cho từng giếng để chi phí khoan hai giếng là ít nhất. Biết chất lượng và thời gian khoan giếng của hai cơ sở là như nhau.



Lời giải

Kí hiệu A_n, B_n lần lượt là số tiền công (đơn vị đồng) cần trả theo cách tính giá của cơ sở A và cơ sở B.

Theo giả thiết ta có:

A_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 50000$ và công sai $d = 10000$.

B_n là tổng n số hạng đầu tiên của cấp số nhân với số hạng đầu $v_1 = 50000$ và công bội $q = (1 + 9\%) = 1,09$.

Do đó

$$A_{20} = \frac{20(2u_1 + 19d)}{2} = 10(2 \cdot 50000 + 19 \cdot 10000) = 3140000$$

$$B_{20} = v_1 \frac{1 - q^{20}}{1 - q} = 50000 \cdot \frac{1 - (1,09)^{20}}{1 - 1,09} \approx 2558006$$

Suy ra nên chọn cơ sở B khoan giếng 20 mét.

$$A_{30} = \frac{30(2u_1 + 29d)}{2} = 15(2.50000 + 29.10000) = 5850000$$

$$B_{30} = v_1 \frac{1-q^{30}}{1-q} = 50000 \cdot \frac{1-(1,09)^{30}}{1-1,09} \approx 6815377$$

Suy ra nên chọn cơ sở A để khoan giếng 30 mét.

Vậy chọn cơ sở A khoan giếng 30 mét, chọn cơ sở B khoan giếng 20 mét.

Câu 128: Aladin nhặt được cây đèn thần, chàng miết tay vào cây đèn và gọi Thần đèn ra. Thần đèn cho chàng 3 điều ước. Aladin ước 2 điều đầu tiên tùy thích, nhưng điều ước thứ 3 của chàng là: “Ước gì ngày mai tôi lại nhặt được cây đèn và Thần cho tôi số điều ước gấp đôi số điều ước ngày hôm nay”. Thần đèn chấp thuận và mỗi ngày Aladin đều thực hiện theo quy tắc như trên: ước hết các điều đầu tiên và luôn chừa lại điều ước cuối cùng để kéo dài thỏa thuận với thần đèn cho ngày hôm sau. Hỏi sau 10 ngày gặp Thần đèn, Aladin ước tất cả bao nhiêu điều ước?



Lời giải

Ngày thứ nhất Aladin ước 3 điều,

Ngày thứ hai Aladin ước 2.3 điều,

Ngày thứ ba Aladin ước $2.2.3 = 2^2.3$ điều,

Ngày thứ tư Aladin ước $2.2^2.3 = 2^3.3$ điều,

...

Ngày thứ 10 Aladin ước $2^9.3$ điều.

Vậy sau 10 ngày Aladin đã ước: $3(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^9) = 3\left(\frac{1-2^{10}}{1-2}\right) = 3069$ điều.

Câu 129: Trên một bàn cờ có nhiều ô vuông, người ta đặt 7 hạt dẻ vào ô đầu tiên, sau đó đặt tiếp vào ô thứ hai số hạt nhiều hơn ô thứ nhất là 5, tiếp tục đặt vào ô thứ ba số hạt nhiều hơn ô thứ hai là 5, ... và cứ thế tiếp tục đến ô thứ n . Biết rằng đặt hết số ô trên bàn cờ người ta phải sử dụng 25450 hạt. Hỏi bàn cờ đó có bao nhiêu ô vuông?

Lời giải

Số hạt dẻ trên mỗi ô (bắt đầu từ ô thứ nhất) theo thứ tự đó lập thành cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 7, d = 5$.

Gọi n là số ô trên bàn cờ thì $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 25450 = S_n$.

$$\text{Ta có: } 25450 = S_n = nu_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = 7n + \frac{n^2-n}{2}.5 \Leftrightarrow 5n^2 + 9n - 50900 = 0 \Leftrightarrow n = 100$$

Câu 130: Một công ty trách nhiệm hữu hạn thực hiện việc trả lương cho các kĩ sư theo phương thức sau: Mức lương của quý làm việc đầu tiên cho công ty là 4,5 triệu đồng/quý, và kể từ quý làm việc

thứ hai, mức lương sẽ được tăng thêm 0,3 triệu đồng mỗi quý. Hãy tính tổng số tiền lương một kĩ sư nhận được sau 3 năm làm việc cho công ty.

Lời giải

Ta có 3 năm bằng 12 quý.

Gọi $u_1, u_2, \dots, u_{12}$ là tiền lương kĩ sư đó trong các quý (từ quý 1 đến quý 12).

Suy ra (u_n) là cấp số cộng với công sai 4,5.

Vậy số tiền lương kĩ sư nhận được là

$$S_{12} = n \frac{2u_1 + (n-1)d}{2} = 12 \frac{2 \times 4,5 + 11 \times 0,3}{2} = 73,8 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 131: Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ..., cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Tính số hàng cây được trồng.

Lời giải

Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n .

Ta có: $u_1 = 1, u_2 = 2, u_3 = 3, \dots$ và $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 3003$.

Nhận xét dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

$$\text{Khi đó } S = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = 3003.$$

$$\text{Suy ra: } \frac{n[2.1 + (n-1)1]}{2} = 3003$$

$$\Leftrightarrow n(n+1) = 6006 \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 77 \\ n = -78 \end{cases} \Leftrightarrow n = 77 \text{ (vì } n \in \mathbb{N}).$$

Vậy số hàng cây được trồng là 77.

Câu 132: Một chú Cò khát nước, chú tìm thấy một chiếc bình đựng nước nhưng cổ bình vừa cao lại vừa bé nên chú không thể uống được. Chú bèn nhặt những hòn sỏi bỏ vào bình để nước dâng lên, phút đầu tiên chú bỏ được 5 viên sỏi, do quen việc nên từ phút thứ hai mỗi phút chú lại bỏ nhiều hơn phút trước đó 4 viên sỏi (trong phút thứ 2 bỏ được 9 viên). Sau 10 phút thì nước đã dâng lên để chú có thể uống được. Hỏi chú cò đã phải nhặt tổng cộng bao nhiêu viên sỏi để bỏ vào bình?

Lời giải

Số sỏi chú Cò nhặt bỏ vào bình theo từng phút lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 5$, công sai $d = 4$.

Số sỏi chú bỏ vào trong phút thứ 10: $u_{10} = 5 + 9.4 = 41$ viên.

$$\text{Tổng cộng số sỏi chú Cò đã nhặt bỏ vào bình: } S_{10} = \frac{10(u_1 + u_{10})}{2} = 230 \text{ viên.}$$

Câu 133: Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế, các dãy liền sau nhiều hơn dãy trước 4 ghế, hỏi sân vận động đó có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

Gọi $u_1, u_2, \dots, u_{30}$ lần lượt là số ghế của dãy ghế thứ nhất, dãy ghế thứ hai, ... và dãy ghế số ba mươi.

Ta có công thức truy hồi ta có $u_n = u_{n-1} + 4, (n = 2, 3, \dots, 30)$.

Ký hiệu: $S_{30} = u_1 + u_2 + \dots + u_{30}$, theo công thức tổng các số hạng của một cấp số cộng với $u_1 = 15, d = 4$ ta được:

$$S_{30} = \frac{30}{2} (2u_1 + (30-1)4) = 15(2.15 + 29.4) = 2190.$$

Câu 134: Trong tháng 12, lớp 11A dự kiến quyên góp tiền để đi làm từ thiện như sau: ngày đầu tiên quyên góp, mỗi bạn bỏ 2000 đồng vào lợn, từ ngày thứ hai trở đi mỗi bạn bỏ vào lợn hơn ngày liền trước đó 500 đồng. Hỏi sau 28 ngày lớp 11A quyên góp được bao nhiêu tiền? Biết lớp có 40 bạn.

Lời giải

Số tiền một học sinh lớp 11A bỏ vào lợn sau 28 ngày: $S_{28} = [2.2000 + 27.500].14 = 245000$

Cả lớp 11A quyên góp được $245000 \cdot 40 = 9800000$ đồng.

Câu 135: Người ta trồng cây theo hình tam giác với quy luật: ở hàng thứ nhất có 1 cây, ở hàng thứ hai có 2 cây, ở hàng thứ ba có 3 cây,... ở hàng thứ n có n cây. Biết rằng người ta trồng hết 4950 cây. Hỏi số hàng cây được trồng theo cách trên là bao nhiêu?

Lời giải

Ta thấy số cây ở mỗi hàng tạo nên một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$.

$$\text{Ta có } S_n = \frac{(2u_1 + (n-1)d)n}{2} \Rightarrow \frac{n^2 + n}{2} = 4950 \Leftrightarrow n^2 - n - 9900 = 0 \Rightarrow n = 99.$$

Câu 136: Trong hội chợ tết Mậu Tuất 2018, một công ty sữa muốn xếp 900 hộp sữa theo số lượng 1,3,5,... từ trên xuống dưới (số hộp sữa trên mỗi hàng xếp từ trên xuống là các số lẻ liên tiếp - mô hình như hình bên). Hàng dưới cùng có bao nhiêu hộp sữa?



Lời giải

Số hộp sữa trên mỗi hàng là số hạng của một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1$ và công sai $d = 1$
 Áp dụng công thức tính tổng n số hạng liên tiếp của CSC:

$$S_n = \frac{n}{2} [2u_1 + (n-1)d] \Leftrightarrow 900 = \frac{n}{2} [2.1 + (n-1).2] \Leftrightarrow n^2 = 900 \Rightarrow n = 30.$$

$$\text{Vậy } u_{30} = 1 + 29 \cdot 2 = 59.$$

Cách 2:

Áp dụng công thức $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$. Suy ra $n = 30$. Vậy $2n-1 = 59$.

Câu 137: Trên một bàn bida có 15 quả bóng được đánh số lần lượt từ 1 đến 15, nếu người chơi đưa được quả bóng nào vào lỗ thì sẽ được số điểm tương ứng với số trên quả bóng đó. Số điểm tối đa người chơi có thể đạt được là bao nhiêu?

Lời giải

Người chơi sẽ đạt số điểm cao nhất nếu đánh được tất cả 15 quả bóng vào lỗ.

Khi đó tổng điểm đạt được là $1 + 2 + \dots + 15 = 120$.

Câu 138: Một gia đình cần khoan một cái giếng để lấy nước. Họ thuê một đội khoan giếng nước. Biết giá của mét khoan đầu tiên là 80.000 đồng, kể từ mét khoan thứ hai giá của mỗi mét khoan tăng

thêm 5.000 đồng so với giá của mét khoan trước đó. Biết cần phải khoan sâu xuống 50m mới có nước. Hỏi phải trả bao nhiêu tiền để khoan cái giếng đó?

Lời giải

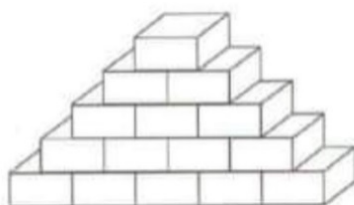
Áp dụng công thức tính tổng của n số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 80.000$ và công sai $d = 5.000$ ta được số tiền phải trả khi khoan đến mét thứ n là:

$$S_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

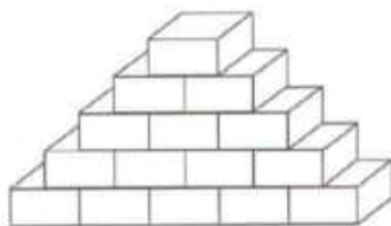
Khi khoan đến mét thứ 50, số tiền phải trả là:

$$S_{50} = \frac{50[2.80000 + (50-1).5000]}{2} = 10.125.000 \text{ đồng.}$$

Câu 139: Bà chủ khách sạn trên đèo **Mã Pi Lèng** muốn trang trí một góc nhỏ trên ban công sân thượng cho đẹp nên quyết định thuê nhân công xây một bức tường gạch với xi măng (như hình vẽ), biết hàng dưới cùng có 500 viên, mỗi hàng tiếp theo đều có ít hơn hàng trước 1 viên và hàng trên cùng có một viên. Hỏi số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường trên là bao nhiêu viên?



Lời giải



Theo Câu ra ta có số viên gạch từ hàng dưới cùng đến hàng trên cùng lập thành một cấp số cộng với số hạng đầu $u_1 = 500$, công sai $d = -1$ nên công thức số hạng tổng quát là:

$$u_n = 500 + (n-1)(-1)$$

Hay $u_n = 501 - n$. Vì hàng trên cùng một viên nên giải phương trình $501 - n = 1 \Leftrightarrow n = 500$.

Vậy có tất cả 500 hàng gạch và hàng trên cùng là $u_{500} = 1$.

Do đó số gạch cần dùng để hoàn thành bức tường là:

$$S_{500} = 500 + 499 + 498 + \dots + 1 = \frac{500(500+1)}{2} = 125250.$$

Câu 140: Sinh nhật lần thứ 17 của An vào ngày 01 tháng 5 năm 2018. Bạn An muốn mua một chiếc máy ảnh giá 3850000 đồng để làm quà sinh nhật cho chính mình nên An quyết định bỏ ống heo 1000 đồng vào ngày 01 tháng 02 năm 2018. Trong các ngày tiếp theo, ngày sau bỏ ống nhiều hơn ngày trước 1000 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của mình, An có bao nhiêu tiền (tính đến ngày 30 tháng 4 năm 2018)?

Lời giải

Số tiền bỏ heo của An mỗi ngày tạo thành một cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 1000$, công sai $d = 1000$.

Tổng số tiền bỏ heo tính đến ngày thứ n là:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n(u_1 + u_n)}{2} = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2}$$

Tính đến ngày 30 tháng 4 năm 2018 (tính đến ngày thứ 89) tổng số tiền bỏ heo là:

$$S_{89} = \frac{89[2.1000 + (89-1).1000]}{2} = 45.89.1000 = 4005000 \text{ đồng.}$$

Câu 141: Sinh nhật bạn của Trung vào ngày 30 tháng 04 năm 2019. Trung muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2019, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, Trung đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2019 đến ngày 30 tháng 4 năm 2019).

Lời giải

Số ngày bạn Trung để dành tiền (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2019 đến ngày 30 tháng 4 năm 2019) là $31 + 28 + 31 + 30 = 120$ ngày.

Số tiền bỏ ống heo ngày đầu tiên là: $u_1 = 100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ hai là: $u_2 = 100 + 1.100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ ba là: $u_3 = 100 + 2.100$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ n là: $u_n = u_1 + (n-1)d = 100 + (n-1)100 = 100n$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ 120 là: $u_{120} = 100.120 = 12000$.

Sau 120 ngày thì số tiền Trung tích lũy được là tổng của 120 số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$, công sai $d = 100$.

Vậy số tiền Trung tích lũy được là $S_{120} = \frac{120}{2}(u_1 + u_{120}) = \frac{120}{2}(100 + 12000) = 726000$ đồng.

Câu 142: Hùng đang tiết kiệm để mua một cây guitar. Trong tuần đầu tiên, anh ta để dành 42 đô la, và trong mỗi tuần tiếp theo, anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình. Cây guitar Hùng cần mua có giá 400 đô la. Hỏi vào tuần thứ bao nhiêu thì anh ấy có đủ tiền để mua cây guitar đó?

Lời giải

Gọi n là số tuần anh ta đã thêm 8 đô la vào tài khoản tiết kiệm của mình

Số tiền anh ta tiết kiệm được sau n tuần đó là $S = 42 + 8n$

Theo Câu ra $S = 42 + 8n \geq 400 \Leftrightarrow n \geq 44.75 \Rightarrow n = 45$

Vậy kể cả tuần đầu thì tuần thứ 46 anh ta có đủ tiền để mua cây guitar đó.

Câu 143: Sinh nhật bạn của An vào ngày 01 tháng năm. An muốn mua một món quà sinh nhật cho bạn nên quyết định bỏ ống heo 100 đồng vào ngày 01 tháng 01 năm 2016, sau đó cứ liên tục ngày sau hơn ngày trước 100 đồng. Hỏi đến ngày sinh nhật của bạn, An đã tích lũy được bao nhiêu tiền? (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016).

Lời giải

Số ngày bạn An để dành tiền (thời gian bỏ ống heo tính từ ngày 01 tháng 01 năm 2016 đến ngày 30 tháng 4 năm 2016) là $31 + 29 + 31 + 30 = 121$ ngày.

Số tiền bỏ ống heo ngày đầu tiên là: $u_1 = 100$,

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ hai là: $u_2 = 100 + 1.100$,

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ ba là: $u_3 = 100 + 2.100$,

...

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ n là: $u_n = u_1 + (n-1)d = 100 + (n-1)100 = 100n$.

Số tiền bỏ ống heo ngày thứ 121 là: $u_{121} = 100.121 = 12100$.

Sau 121 ngày thì số tiền An tích lũy được là tổng của 121 số hạng đầu của cấp số cộng có số hạng đầu $u_1 = 100$, công sai $d = 100$.

Vậy số tiền An tích lũy được là $S_{121} = \frac{121}{2}(u_1 + u_{121}) = \frac{121}{2}(100 + 12100) = 738100$ đồng.

Câu 144: Chu vi một đa giác là $158cm$, số đo các cạnh của nó lập thành một cấp số cộng với công sai $d = 3cm$. Biết cạnh lớn nhất là $44cm$. Tính số cạnh của đa giác đó.

Lời giải

Giả sử đa giác đã cho có n cạnh thì chu vi của đa giác là: $S_n = \frac{(u_1 + u_n)n}{2}$ với u_1 là cạnh nhỏ nhất.

$$\text{Suy ra: } 158 = \frac{(u_1 + 44)n}{2} \Leftrightarrow 316 = (u_1 + 44)n \Leftrightarrow 2^2.79 = (u_1 + 44)n$$

Do đó $u_1 + 44$ là ước nguyên dương của $316 = 2^2.79$ và đa giác có ít nhất ba cạnh nên

$$\frac{316}{3} > u_1 + 44 > 44. \text{ Suy ra: } u_1 + 44 = 79 \Leftrightarrow u_1 = 35.$$

Số cạnh của đa giác đã cho là: $\frac{44-35}{3} + 1 = 4$ (cạnh).

Câu 145: Chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ poloni 210 là 138 ngày. Tính khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau 7314 ngày.

Lời giải

Kí hiệu u_n là khối lượng còn lại của 20 gam poloni 210 sau n chu kỳ bán rã.

Ta có 7314 ngày gồm 53 chu kỳ bán rã. Theo đề Câu ra, ta cần tính u_{53} .

Từ giả thiết suy ra dãy (u_n) là một cấp số nhân với số hạng đầu là $u_1 = \frac{20}{2} = 10$ và công bội

$$q = \frac{1}{2}. \text{ Do đó } u_{53} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{52} \approx 2,22 \cdot 10^{-15}.$$

Câu 146: Người ta thiết kế một cái tháp gồm 11 tầng. Diện tích bề mặt trên của mỗi tầng bằng nửa diện tích của mặt trên của tầng ngay bên dưới và diện tích mặt trên của tầng 1 bằng nửa diện tích của đế tháp. Tính diện tích mặt trên cùng.

Lời giải

Diện tích bề mặt của mỗi tầng lập thành một cấp số nhân có công bội $q = \frac{1}{2}$ và $u_1 = \frac{12288}{2} = 6144$.

Khi đó diện tích mặt trên cùng là $u_{11} = u_1 q^{10} = \frac{6144}{2^{10}} = 6$.

Câu 147: Một du khách vào trường đua ngựa đặt cược, lần đầu đặt 20000 đồng, mỗi lần sau tiền đặt gấp đôi lần tiền đặt cọc trước. Người đó thua 9 lần liên tiếp và thắng ở lần thứ 10. Hỏi du khách trên thắng hay thua bao nhiêu?

Lời giải

Số tiền du khách đặt trong mỗi lần là một cấp số nhân có $u_1 = 20\,000$ và công bội $q = 2$.

Du khách thua trong 9 lần đầu tiên nên tổng số tiền thua là:

$$S_9 = u_1 + u_2 + \dots + u_9 = \frac{u_1(1 - q^9)}{1 - q} = 10220000$$

Số tiền mà du khách thắng trong lần thứ 10 là $u_{10} = u_1 \cdot q^9 = 10240000$

Ta có $u_{10} - S_9 = 20\,000 > 0$ nên du khách thắng 20000.

Câu 148: Một người bắt đầu đi làm được nhận được số tiền lương là 7000000đ một tháng. Sau 36 tháng người đó được tăng lương 7%. Hằng tháng người đó tiết kiệm 20% lương để gửi vào ngân hàng với lãi suất 0,3%/tháng theo hình thức lãi kép. Biết rằng người đó nhận lương vào đầu tháng và số tiền tiết kiệm được chuyển ngay vào ngân hàng.

a) Hỏi sau 36 tháng tổng số tiền người đó tiết kiệm được là bao nhiêu?

b) Hỏi sau 60 tháng tổng số tiền người đó tiết kiệm được là bao nhiêu?

Lời giải

a) Đặt $a = 7.000.000$, $m = 20\%$, $n = 0,3\%$, $t = 7\%$.

Hết tháng thứ nhất, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là $T_1 = am(1+n)^1$.

Hết tháng thứ hai, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_2 = (T_1 + am)(1+n) = am(1+n)^2 + am(1+n)^1.$$

Hết tháng thứ 36, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{36} = am(1+n)^{36} + am(1+n)^{35} + \dots + am(1+n) = am \cdot (1+n) \frac{(1+n)^{36} - 1}{n}$$

Thay số ta được $T_{36} \approx 53\,297\,648,73$.

b) Hết tháng thứ 37, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{37} = [T_{36} + a(1+t)m](1+n) = T_{36} \cdot (1+n)^1 + a(1+t)m \cdot (1+n)$$

Hết tháng thứ 38, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$T_{38} = [T_{37} + a(1+t)m](1+n) = T_{36} \cdot (1+n)^2 + a(1+t)m[(1+n)^2 + (1+n)].$$

Hết tháng thứ 60, người đó có tổng số tiền tiết kiệm là

$$\begin{aligned} T_{60} &= T_{36}(1+n)^{24} + a(1+t)m[(1+n)^{24} + (1+n)^{23} + \dots + (1+n)] \\ &= T_{36}(1+n)^{24} + a(1+t)m \cdot (1+n) \frac{(1+n)^{24} - 1}{n}. \end{aligned}$$

Thay số và tính ta được tổng số tiền tiết kiệm sau 60 tháng của người đó là:

$$T_{60} \approx 94\,602\,156,59.$$

Câu 149: Cho dãy số (u_n) được xác định $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1, n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$. Biết rằng người sinh năm

2022 tuổi Dần, hỏi người sinh năm $\sqrt{4u_{45}u_{43} + 1}$ tuổi gì?

Lời giải

Ta có: $u_2 = 2u_1 - u_0 + 1 = 3$.

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1} + 1, (1)$$

Đặt $v_n = u_{n+1} - u_n$ khi đó (1) trở thành $v_n = v_{n-1} + 1$. Suy ra dãy số (v_n) là cấp số cộng có công sai $d = 1$ và $v_1 = u_2 - u_1 = 2$.

Vậy: $v_n = v_1 + (n-1)d = 2 + n - 1 = n + 1$.

Ta có:

$$u_{n+1} - u_n = n + 1.$$

$$u_n - u_{n-1} = n$$

$$u_{n-1} - u_{n-2} = n - 1$$

.....

$$u_2 - u_1 = 2$$

Cộng vế với vế ta được:

$$u_{n+1} - u_1 = 2 + 3 + \dots + n + 1 \Leftrightarrow u_{n+1} = 1 + 2 + 3 + \dots + n + 1$$

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ hay } u_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Suy ra: $u_{45} = 1035, u_{43} = 946$. Vậy $\sqrt{4u_{45}u_{43} + 1} = 1979$.

Vậy năm 1979 là năm mùi.

Câu 150: Trong sân vận động có tất cả 30 dãy ghế, dãy đầu tiên có 15 ghế. Các dãy sau, mỗi dãy nhiều hơn dãy ngay trước nó 4 ghế. Hỏi sân vận động có tất cả bao nhiêu ghế?

Lời giải

Số ghế trong mỗi dãy của sân vận động lập thành một cấp số cộng có $U_1 = 15$ và $d = 4$.

Vậy tổng tất cả các ghế của sân vận động là tổng 30 số hạng đầu của cấp số cộng trên, do đó áp dụng công thức $S_n = nU_1 + \frac{n(n-1)d}{2}$ ta có $S_{30} = 30.15 + \frac{30(30-1)4}{2} = 2190$

Vậy sân vận động có tất cả 2190 ghế.

Câu 151: Hùng đang tiết kiệm để mua một cây đàn piano có giá 142 triệu đồng. Trong tháng đầu tiên, anh ta để dành được 20 triệu đồng. Mỗi tháng tiếp theo anh ta để dành được 3 triệu đồng và đưa số tiền tiết kiệm của mình. Hỏi ít nhất vào tháng thứ bao nhiêu thì Hùng mới có đủ tiền để mua cây đàn piano đó?

Lời giải

Tổng số tiền Hùng tiết kiệm được vào mỗi tháng (đơn vị: triệu đồng) lập thành một cấp số cộng (u_n) có số hạng đầu $u_1 = 20$ và công sai $d = 3$.

Tổng số tiền Hùng tiết kiệm được vào tháng thứ n bằng

$$u_n = u_1 + (n-1)d = 20 + (n-1).3 = 3n + 17$$

Hùng có đủ tiền mua cây đàn $\Leftrightarrow 3n + 17 \geq 142 \Leftrightarrow n \geq \frac{125}{3} \approx 41,67$.

Vậy ít nhất vào tháng thứ 42 thì Hùng mới có đủ tiền để mua cây đàn piano đó.

Câu 152: Người ta trồng 3003 cây theo dạng một hình tam giác như sau: hàng thứ nhất trồng 1 cây, hàng thứ hai trồng 2 cây, hàng thứ ba trồng 3 cây, ..., cứ tiếp tục trồng như thế cho đến khi hết số cây. Số hàng cây được trồng là

Lời giải

Gọi số cây ở hàng thứ n là u_n .

Ta có: $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 3$, ... và $S = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 3003$.

Nhận xét dãy số (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 1$, công sai $d = 1$.

$$\text{Khi đó } S = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} = 3003.$$

$$\text{Suy ra } \frac{n[2 \cdot 1 + (n-1)1]}{2} = 3003 \Leftrightarrow n(n+1) = 6006 \Leftrightarrow n^2 + n - 6006 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 77 \\ n = -78 \end{cases} \Leftrightarrow n = 77$$

(vì $n \in \mathbb{N}$).



GIỚI HẠN HÀM SỐ LIÊN TỤC

BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ GIỚI HẠN VÀ HÀM SỐ LIÊN TỤC

Câu 1: Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kì bán rã).

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kì thứ n .

- Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .
- Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.
- Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g.

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots$

Suy ra (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{2}$ có số hạng tổng quát là:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

b) Ta có: $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0.$

c) Đổi $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ kg} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 \text{ g}$

Để chất phóng xạ bé hơn 10^{-6} (g) thì $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 31.$

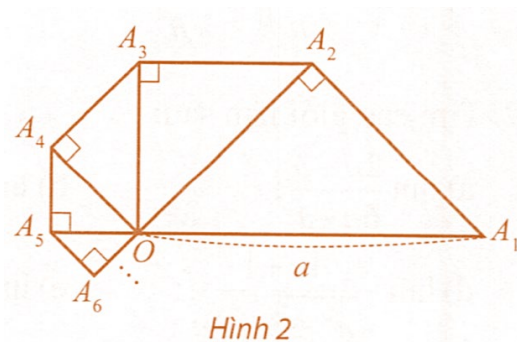
Vậy cần ít nhất 30 chu kì tương ứng với 720000 năm khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người.

Câu 2: Tại một nhà máy, người ta đo được rằng 80% lượng nước sau khi sử dụng được xử lí và tái sử dụng. Với $100m^3$ ban đầu được sử dụng lần đầu tại nhà máy, khi quá trình xử lí và tái sử dụng lặp lại mãi mãi, nhà máy sử dụng được tổng lượng nước là bao nhiêu?

Lời giải

$$100 + 100 \cdot 0,8 + 100 \cdot (0,8)^2 + 100 \cdot (0,8)^3 + \dots = 100 \cdot \frac{1}{1-0,8} = 500 (m^3).$$

Câu 3: Cho tam giác OA_1A_2 vuông cân tại A_2 có cạnh huyền OA_1 bằng a . Bên ngoài tam giác OA_1A_2 , vẽ tam giác OA_2A_3 vuông cân tại A_3 . Tiếp theo, bên ngoài tam giác OA_2A_3 , vẽ tam giác OA_3A_4 vuông cân tại A_4 . Cứ tiếp tục quá trình như trên, ta vẽ được một dãy các hình tam giác vuông cân (Hình 2).



Tính độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$

Lời giải

Ta có các góc $\widehat{A_1OA_2}, \widehat{A_2OA_3}, \widehat{A_3OA_4}, \dots$ đều bằng 45° . Ta có:

$$A_1A_2 = OA_2 = OA_1 \cdot \cos 45^\circ = a \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$A_2A_3 = OA_3 = OA_2 \cdot \cos 45^\circ = a \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2;$$

$$A_3A_4 = OA_4 = OA_3 \cdot \cos 45^\circ = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^3; \dots$$

Vậy độ dài các đoạn thẳng $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, \dots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ và công bội bằng $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Do đó, độ dài đường gấp khúc $A_1A_2A_3A_4 \dots$ là

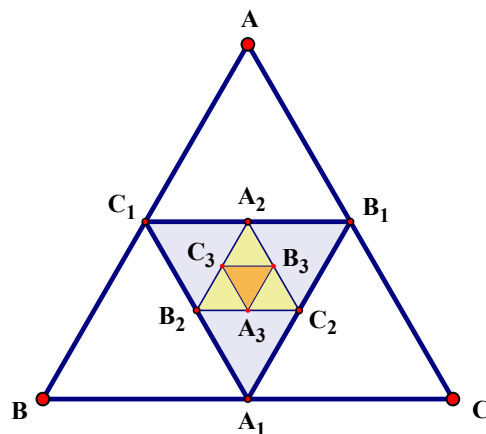
$$l = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot (2 + \sqrt{2}) = a(1 + \sqrt{2}).$$

Câu 4: Cho tam giác đều ABC có độ dài cạnh bằng 1. Nối các trung điểm A_1, B_1, C_1 của các cạnh BC, CA, AB ta được tam giác đều $A_1B_1C_1$. Tiếp tục nối các trung điểm A_2, B_2, C_2 của các cạnh B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 ta được tam giác đều $A_2B_2C_2$, thực hiện quá trình này đến vô hạn. Gọi S_n là diện tích của tam giác đều $A_nB_nC_n$.

a) Tính S_8

b) Tính tổng diện tích các tam giác đều $A_nB_nC_n$ thu được

c) Tính tổng các độ dài $l = AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + \dots$



Lời giải

a) Diện tích tam giác ABC là: $S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ta có: $S_1 = \frac{1}{4}S_0, S_2 = \frac{1}{4}S_1, S_3 = \frac{1}{4}S_2, \dots$. Do đó $\{S_n\}$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow S_8 = S_1 \cdot q^7 = S_0 \cdot q^8 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^8 = \frac{\sqrt{3}}{4^9}$$

b) Tổng diện tích các tam giác đều $A_nB_nC_n$ là tổng của một CSN lùi vô hạn với công bội $q = \frac{1}{4}$.

Do đó tổng diện tích là

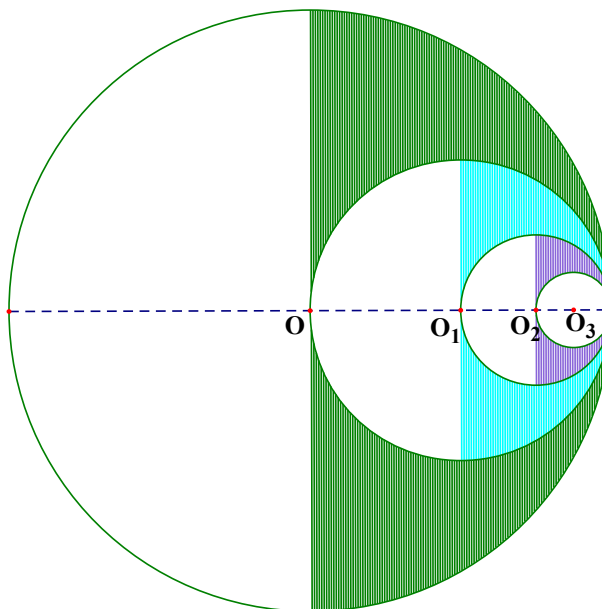
$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_n + \dots = \frac{S_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

c) Đặt $u_1 = AA_1, u_2 = A_1A_2, u_3 = A_2A_3, \dots, u_n = A_{n-1}A_n$, ta có:

$$u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, u_2 = \frac{1}{2}u_1, u_3 = \frac{1}{2}u_2, \dots, u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}, \dots \Rightarrow \{u_n\} \text{ là một CSN lùi vô hạn với công bội } q = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow l = \frac{u_1}{1-q} = \sqrt{3}.$$

Câu 5: Cho đường tròn (C) tâm O , bán kính $r = 20cm$. Vẽ đường tròn (C_1) đi qua tâm O và tiếp xúc với (C) , vẽ đường tròn (C_2) đi qua tâm của (C_1) và tiếp xúc với (C_1) . Tiếp tục quá trình này đến vô hạn. Ta tô màu phần ngoài của hình tròn mới theo quy luật như hình vẽ dưới đây. Tính diện tích toàn bộ phần tô màu.



Lời giải

Diện tích hình tròn ban đầu là $S_0 = 400\pi (cm^2)$

Gọi S_n là diện tích của hình tròn $(C_n) \Rightarrow \{S_n\}$ là một cấp số nhân với công bội $q = \frac{1}{4}$

Gọi u_n là diện tích phần tô màu ở bước thứ n , khi đó:

$$u_1 = \frac{1}{2}S_0 - S_1; u_2 = \frac{1}{2}S_1 - S_2; \dots, u_n = \frac{1}{2}S_{n-1} - S_n$$

Tổng diện tích phần tô màu là:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = \frac{1}{2}(S_0 + S_1 + \dots + S_n + \dots) - (S_1 + S_2 + \dots + S_{n+1} + \dots)$$

$$= \frac{1}{2}S_0 - \frac{1}{2}(S_1 + S_2 + \dots + S_{n+1} + \dots)$$

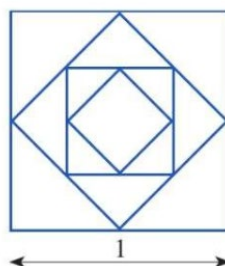
$$= 200\pi - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_1}{1-q}$$

$$= \frac{400}{3}\pi (cm^2)$$

Cách khác: Diện tích phần tô màu ở bước nào thì bằng diện tích của hình tròn tạo mới ở bước đó

$$\text{Do đó: } S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{S_1}{1-q} = \frac{400}{3}\pi (cm^2).$$

Câu 6: Từ hình vuông có độ dài cạnh bằng 1, người ta nối các trung điểm của cạnh hình vuông để tạo ra hình vuông mới như hình bên dưới. Tiếp tục quá trình này đến vô hạn.



- a) Tính diện tích S_n của hình vuông được tạo thành ở bước thứ n ;
 b) Tính tổng diện tích của tất cả các hình vuông được tạo thành.

Lời giải

a) Gọi S_n là diện tích của hình vuông thứ n .

Ta có: $S_1 = 1; S_2 = \frac{1}{2}; S_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots$

Dãy (S_n) lập thành cấp số nhân có số hạng đầu $S_1 = 1$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Khi đó ta có công thức tổng quát là: $S_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

b) Ta có: $|q| = \frac{1}{2} < 1$ nên dãy (S_n) trên lập thành một cấp số nhân lùi hạn nên ta có:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

Vậy tổng diện tích của các hình vuông là 2 (đvdt).

Câu 7: Có 1 kg chất phóng xạ độc hại. Biết rằng, cứ sau một khoảng thời gian $T = 24000$ năm thì một nửa số chất phóng xạ này bị phân rã thành chất khác không độc hại đối với sức khỏe của con người (T được gọi là chu kỳ bán rã).

(Nguồn: Đại số và Giải tích 11, NXB GD Việt Nam, 2021)

Gọi u_n là khối lượng chất phóng xạ còn lại sau chu kỳ thứ n .

- a) Tìm số hạng tổng quát u_n của dãy số (u_n) .
 b) Chứng minh rằng (u_n) có giới hạn là 0.
 c) Từ kết quả câu b), chứng tỏ rằng sau một số năm nào đó khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người, biết rằng chất phóng xạ này sẽ không độc hại nữa nếu khối lượng chất phóng xạ còn lại bé hơn 10^{-6} g .

Lời giải

a) Ta có: $u_1 = 1; u_2 = \frac{1}{2}; u_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2; \dots$

Suy ra (u_n) lập thành một cấp số nhân có số hạng đầu $u_1 = 1$ và $q = \frac{1}{2}$ có số hạng tổng quát là:

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} .$$

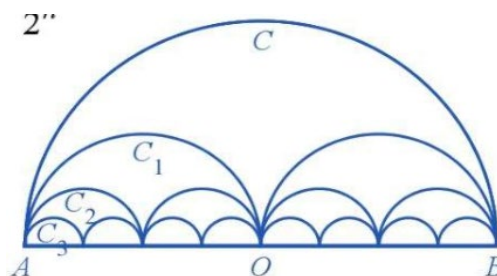
b) Ta có: $\lim u_n = \lim \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$.

c) Đổi $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ kg = $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3$ g

Để chất phóng xạ bé hơn 10^{-6} (g) thì $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot 10^3 < 10^{-6} \Leftrightarrow n > 30$.

Vậy cần ít nhất 31 chu kì tương ứng với 744000 năm khối lượng chất phóng xạ đã cho ban đầu không còn độc hại đối với con người.

Câu 8: Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$, C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$, C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$, ... C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ... (Hình bên dưới).



Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

a) Tính p_n, S_n .

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

Lời giải

a) Ta có: $p_1 = 2 \cdot \frac{\pi R}{2} = \pi R$; $p_2 = 2^2 \cdot \frac{\pi R}{2^2} = \pi R$; $p_3 = 2^3 \cdot \frac{\pi R}{2^3} = \pi R$; ..., $p_n = 2^n \cdot \frac{\pi R}{2^n} = \pi R$

Ta có: $S_1 = 2 \cdot \frac{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2^2}$; $S_2 = 2^2 \cdot \frac{\pi \left(\frac{R}{2^2}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2^3}$; $S_3 = 2^3 \cdot \frac{\pi \left(\frac{R}{2^3}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2^4}$; ..., $S_n = 2^n \cdot \frac{\pi \left(\frac{R}{2^n}\right)^2}{2} = \frac{\pi R^2}{2^{n+1}}$

b) Ta có: $\lim p_n = \pi R$. $\lim S_n = \lim \left(\frac{\pi R^2}{2^{n+1}}\right) = 0$.

Câu 9: Từ độ cao 55,8m của tháp nghiêng Pisa nước Ý, người ta thả một quả bóng cao su chạm xuống đất (hình bên dưới). Giả sử mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên độ cao bằng $\frac{1}{10}$ độ cao mà quả bóng đạt được trước đó. Gọi S_n là tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần. Tính $\lim S_n$.



Hình 18

Lời giải

Gọi u_n là dãy số thể hiện quãng đường di chuyển của quả bóng sau mỗi lần chạm đất.

$$\text{Ta có: } u_1 = 55,8; u_2 = \frac{1}{10} u_1; u_3 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 u_1; \dots; u_n = \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} u_1.$$

Khi đó dãy (u_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn có số hạng đầu $u_1 = 55,8$ và công bội $q = \frac{1}{10}$ thỏa mãn $|q| < 1$.

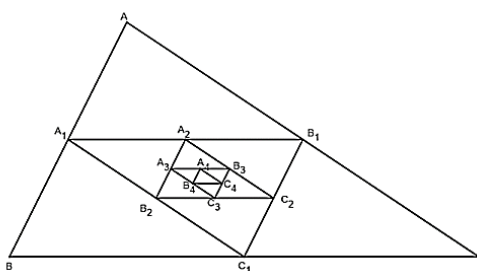
$$\text{Ta có: } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} = 55,8 \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}}.$$

$$\text{Suy ra } \lim S_n = \lim \left[55,8 \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \right] = \frac{55,8}{1 - \frac{1}{10}} = 62(m)$$

Vậy tổng độ dài quãng đường di chuyển của quả bóng tính từ lúc thả ban đầu cho đến khi quả bóng đó chạm đất n lần là $62m$.

Câu 10: Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , Tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1$, ..., tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n$. Gọi $P_1, P_2, \dots, P_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$

1. Tìm giới hạn của các dãy số (P_n) và (S_n) .
2. Tìm các tổng $P_1 + P_2 + \dots + P_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$



Lời giải

a) (p_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$

Ta có: $p_1 = p_{\Delta ABC} = a + a + a = 3a$;

$$p_2 = p_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3a) = \frac{1}{2} \cdot p_1$$

$$p_3 = p_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (3a) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot p_1; \dots ;$$

$$p_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot p_1; \dots$$

Suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (3a) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (3a) = 0 \cdot 3a = 0.$$

(S_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$

Gọi h là chiều cao của tam giác ABC và $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$$S_1 = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah;$$

$$S_2 = S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}ah\right) = \frac{1}{4} \cdot S_1 ;$$

$$S_3 = S_{\Delta A_2B_2C_2} = S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot S_1; \dots ;$$

$$S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot S_1; \dots$$

$$\text{Suy ra } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot S_1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}ah\right) = 0 \cdot \frac{1}{2}ah = 0.$$

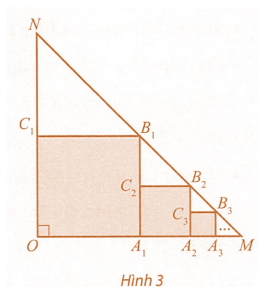
b) Ta có (p_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = 3a$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$$P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$$

+) Ta cũng có (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = \frac{1}{2}ah$ và công bội $q = \frac{1}{2}$

$$\text{thỏa mãn } |q| < 1 \text{ có tổng: } S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{\frac{1}{2}ah}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}ah$$

Câu 11: Cho tam giác OMN vuông cân tại O , $OM = ON = 1$. Trong tam giác OMN , vẽ hình vuông $OA_1B_1C_1$ sao cho các đỉnh A_1, B_1, C_1 lần lượt nằm trên các cạnh OM, MN, ON . Trong tam giác A_1MB_1 , vẽ hình vuông $A_1A_2B_2C_2$ sao cho các đỉnh A_2, B_2, C_2 lần lượt nằm trên các cạnh A_1M, MB_1, A_1B_1 . Tiếp tục quá trình đó, ta được một dãy các hình vuông (Hình 3). Tính tổng diện tích các hình vuông này.



Lời giải

Độ dài cạnh của các hình vuông lần lượt là

$$a_1 = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2; a_3 = \frac{1}{2}a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3; \dots$$

Diện tích của các hình vuông lần lượt là

$$S_1 = a_1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

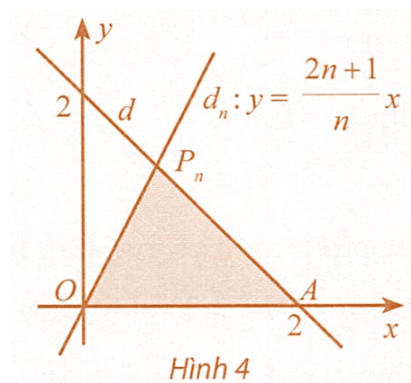
$$S_2 = a_2^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2,$$

$$S_3 = a_3^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3, \dots$$

Các diện tích $S_1, S_2, S_3, \dots$ tạo thành cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $S_1 = \frac{1}{4}$ và công

bội bằng $\frac{1}{4}$. Do đó, tổng diện tích các hình vuông là $S = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$.

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , đường thẳng $d: x + y = 2$ cắt trục hoành tại điểm A và cắt đường thẳng $d_n: y = \frac{2n+1}{n}x$ tại điểm $P_n (n \in \mathbb{N}^*)$. Kí hiệu S_n là diện tích của tam giác OAP_n . Tìm $\lim S_n$.



Hình 4

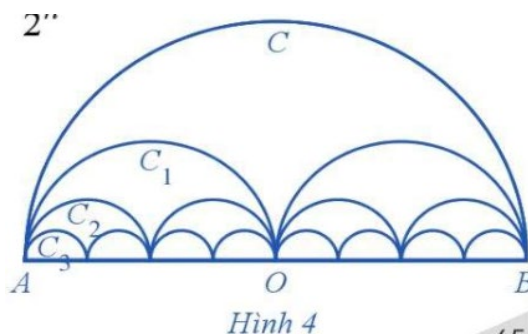
Lời giải

$$A(2;0); P_n\left(\frac{2n}{3n+1}; \frac{4n+2}{3n+1}\right); OA=2; AP_n = \frac{4n+2}{3n+1} \cdot \sqrt{2}; \widehat{OAP_n} = 45^\circ.$$

$$S_n = \frac{1}{2} OA \cdot AP_n \cdot \sin \widehat{OAP} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4n+2}{3n+1} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4n+2}{3n+1}$$

$$\lim S_n = \lim \frac{4n+2}{3n+1} = \lim \frac{4 + \frac{2}{n}}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{4}{3}$$

Câu 13: Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB=2R$, C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2}$, C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{4}$, ... C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{AB}{2^n}$, ... (Hình 4).



Hình 4

Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

a) Tính p_n, S_n .

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

Lời giải

$$+) \text{ Ta có: } p_1 = \frac{\pi R}{2}; p_2 = \frac{\pi R}{4} = \frac{\pi R}{2^2}; p_3 = \frac{\pi R}{8} = \frac{\pi R}{2^3}; \dots$$

(p_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = \frac{\pi R}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2} < 1$ có

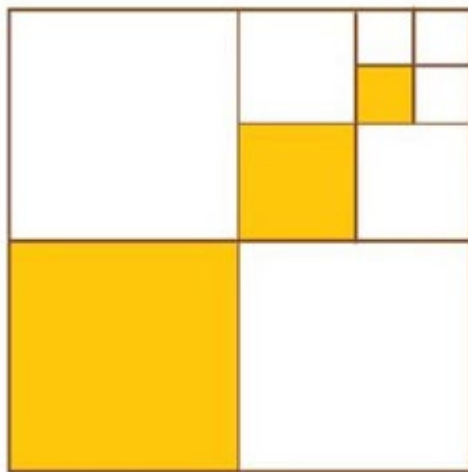
$$\text{số hạng tổng quát } p_n = \frac{\pi R}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

+) Ta có: $C_1 = \frac{\pi R^2}{4}; C_2 = \frac{\pi R^2}{4^2}; C_3 = \frac{\pi R^3}{4^3}; \dots$

(C_n) lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $C_1 = \frac{\pi R^2}{4}$ và công bội $q = \frac{1}{4} < 1$ có

số hạng tổng quát $C_n = \frac{\pi R}{4} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

Câu 14: Cho hình vuông cạnh 1 (đơn vị độ dài). Chia hình vuông đó thành bốn hình vuông nhỏ bằng nhau, sau đó tô màu hình vuông nhỏ góc dưới bên trái (H.5.2).



Hình 5.2

Lặp lại các thao tác này với hình vuông nhỏ góc trên bên phải. Giả sử quá trình trên tiếp diễn vô hạn lần. Gọi $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ lần lượt là độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu.

a) Tính tổng $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

b) Tìm $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Lời giải

a) Ta có: u_1 là độ dài cạnh của hình vuông được tô màu tạo từ việc chia hình vuông cạnh 1 thành 4 hình vuông nhỏ bằng nhau, do đó $u_1 = \frac{1}{2}$.

Cứ tiếp tục như thế, ta được: $u_2 = \frac{1}{2}u_1, u_3 = \frac{1}{2}u_2, \dots, u_n = \frac{1}{2}u_{n-1}, \dots$

Do vậy, độ dài cạnh của các hình vuông được tô màu lập thành một cấp số nhân với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{2}$ và công bội $q = \frac{1}{2}$.

Do đó, tổng của n số hạng đầu là $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b) Ta có: $S = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 1 - 0 = 1.$

Cấp số nhân vô hạn (u_n) có công bội q với $|q| < 1$ được gọi là cấp số nhân lùi vô hạn.

Cho cấp số nhân lùi vô hạn (u_n) với công bội q . Khi đó $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{u_1(1 - q^n)}{1 - q}.$

Vì $|q| < 1$ nên $q^n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow +\infty$. Do đó, ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{u_1}{1 - q} - \left(\frac{u_1}{1 - q} \right) q^n \right] = \frac{u_1}{1 - q}.$$

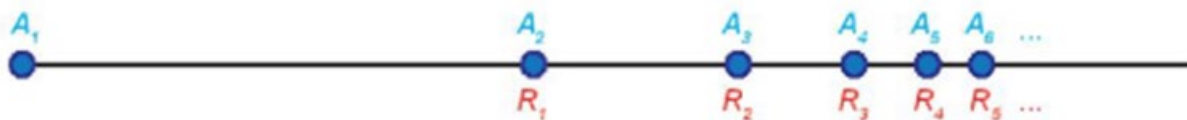
Câu 15: Để đơn giản, ta giả sử Achilles chạy với vận tốc 100 km/h , vận tốc của rùa là 1 km/h và khoảng cách ban đầu $a = 100(\text{km})$.

a) Tính thời gian $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ tương ứng để Achilles đi từ A_1 đến A_2 , từ A_2 đến $A_3, \dots$, từ A_n đến $A_{n+1}, \dots$

b) Tính tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}, \dots$, tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa.

c) Sai lầm trong lập luận của Zeno là ở đâu?

Lời giải



Ta có: Achilles chạy với vận tốc 100 km/h , vận tốc của rùa là 1 km/h .

a) Để chạy hết quãng đường từ A_1 đến A_2 với $A_1A_2 = a = 100(\text{km})$, Achilles phải mất thời gian $t_1 = \frac{100}{100} = 1(\text{h})$. Với thời gian t_1 này, rùa đã chạy được quãng đường $A_2A_3 = 1(\text{km})$.

Để chạy hết quãng đường từ A_2 đến A_3 với $A_2A_3 = 1(\text{km})$, Achilles phải mất thời gian $t_2 = \frac{1}{100}(\text{h})$. Với thời gian t_2 này, rùa đã chạy được quãng đường $A_3A_4 = \frac{1}{100}(\text{km})$.

Tiếp tục như vậy, để chạy hết quãng đường từ A_n đến A_{n+1} với $A_nA_{n+1} = \frac{1}{100^{n-1}}(\text{km})$, Achilles phải mất thời gian $t_n = \frac{1}{100^{n-1}}(\text{h}) \dots$

b) Tổng thời gian cần thiết để Achilles chạy hết các quãng đường $A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_nA_{n+1}, \dots$, tức là thời gian cần thiết để Achilles đuổi kịp rùa là

$$T = 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \dots + \frac{1}{100^{n-1}} + \frac{1}{100^n} + \dots(\text{h})$$

Đó là tổng của một cấp số nhân lùi vô hạn với $u_1 = 1$, công bội, nên ta có

$$T = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \frac{100}{99} = 1\frac{1}{99}(h)$$

Như vậy, Achilles đuổi kịp rùa sau $1\frac{1}{99}$ giờ.

c) Nghịch lý Zeno chỉ đúng với điều kiện là tổng thời gian Achilles chạy hết các quãng đường để đuổi kịp rùa phải là vô hạn, còn nếu nó hữu hạn thì đó chính là khoảng thời gian mà anh bắt kịp được rùa.

Câu 16: Một bệnh nhân hàng ngày phải uống một viên thuốc $150mg$. Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%. Tính lượng thuốc có trong cơ thể sau khi uống viên thuốc của ngày thứ 5. Ước tính lượng thuốc trong cơ thể nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài.

Lời giải

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày đầu tiên là $150mg$.

Sau ngày đầu, trước mỗi lần uống, hàm lượng thuốc cũ trong cơ thể vẫn còn 5%.

Do đó, lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ hai là

$$150 + 150 \cdot 5\% = 150(1 + 0,05)$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ ba là

$$150 + 150(1 + 0,05) \cdot 5\% = 150 + 150(0,05 + 0,05^2) = 150(1 + 0,05 + 0,05^2)$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ tư là

$$150 + 150(1 + 0,05 + 0,05^2) \cdot 5\% = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3)$$

Lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân sau khi uống viên thuốc của ngày thứ năm là

$$150 + 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3) \cdot 5\% = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4) \\ = 157,8946875(mg).$$

Cứ tiếp tục như vậy, ta ước tính lượng thuốc trong cơ thể bệnh nhân nếu bệnh nhân sử dụng thuốc trong một thời gian dài là

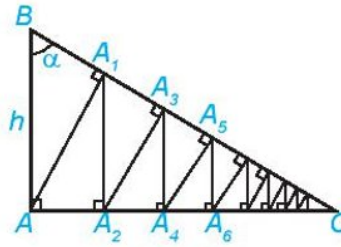
$$S = 150(1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + \dots)$$

Lại có $1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = 1$ và công bội $q = 0,05$.

$$\text{Do đó, } 1 + 0,05 + 0,05^2 + 0,05^3 + 0,05^4 + \dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{1}{1-0,05} = \frac{20}{19}.$$

$$\text{Suy ra } S = 150 \cdot \frac{20}{19} = \frac{400}{361}.$$

Câu 17: Cho tam giác vuông ABC vuông tại A , có $AB = h$ và góc B bằng α (hình bên dưới).



Từ A kẻ $AA_1 \perp BC$, từ A_1 kẻ $A_1A_2 \perp AC$, sau đó lại kẻ $A_2A_3 \perp BC$. Tiếp tục quá trình trên, ta được đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3 \dots$. Tính độ dài đường gấp khúc này theo h và α .

Lời giải

Tam giác AA_1B vuông tại A_1 có $AB = h$ và.

Do đó, $AA_1 = AB \sin B = h \sin \alpha$.

Ta có: $\widehat{B} + \widehat{BAA_1} = 90^\circ$ và $\widehat{A_1AA_2} + \widehat{BAA_1} = 90^\circ$, suy ra $\widehat{A_1AA_2} = \widehat{B} = \alpha$.

Tam giác AA_1A_2 vuông tại A_2 nên $A_1A_2 = AA_1 \sin \widehat{A_1AA_2} = h \sin \alpha \cdot \sin \alpha = h \sin^2 \alpha$.

Vì $AB \perp AC$ và $A_1A_2 \perp AC$ nên $AB \parallel A_1A_2$, suy ra $\widehat{A_2A_1A_3} = \widehat{B} = \alpha$ (2 góc đồng vị).

Tam giác $A_1A_2A_3$ vuông tại A_3 nên $A_2A_3 = A_1A_2 \cdot \sin \widehat{A_2A_1A_3} = h \sin^2 \alpha \cdot \sin \alpha = h \sin^3 \alpha$.

Tam giác $A_2A_3A_4$ vuông tại A_4 nên $A_3A_4 = A_2A_3 \cdot \sin \widehat{A_3A_2A_4} = h \sin^3 \alpha \cdot \sin \alpha = h \sin^4 \alpha$.

Cứ tiếp tục như vậy, ta xác định được $A_{n-1}A_n = h \sin^n \alpha$.

Ta có: $AA_1A_2A_3 \dots = AA_1 + A_1A_2 + A_2A_3 + \dots + A_{n-1}A_n + \dots$

$$= h \sin \alpha + h \sin^2 \alpha + h \sin^3 \alpha + \dots + h \sin^n \alpha + \dots$$

Vì góc B là góc nhọn nên $\sin B = \sin \alpha < 1$, do đó $|\sin \alpha| < 1$.

Khi đó, độ dài của đường gấp khúc vô hạn $AA_1A_2A_3 \dots$ là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = h \sin \alpha$ và công bội $q = \sin \alpha$.

$$\text{Do đó, } AA_1A_2A_3 \dots = \frac{u_1}{1-q} = \frac{h \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}.$$

Câu 18: Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp được $N(t) = \frac{50t}{t+4}$ ($t \geq 0$) bộ phận mỗi ngày sau t ngày đào tạo. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t+4} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50t}{t \left(1 + \frac{4}{t}\right)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{50}{1 + \frac{4}{t}} = 50.$

Ý nghĩa: Tối đa một nhân viên chỉ có thể lắp được 50 bộ phận mỗi ngày.

Câu 19: Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số: $C(x) = 50000 + 105x$.

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm là:

$$\bar{C}(x) = \frac{50000 + 105x}{x} \text{ (sản phẩm).}$$

b) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50000 + 105x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{50000}{x} + 105 \right)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{50000}{x} + 105 \right) = 105.$

Ý nghĩa: Khi số sản phẩm sản xuất ra ngày càng nhiều thì chi phí trung bình chỉ tối đa là 105 nghìn đồng.

Câu 20: Người ta làm đèn tre như hình bên, các hình tròn chồng lên nhau. Trong đó tính từ dưới lên hình tròn lớn nhất C_1 bán kính $R = 50(\text{cm})$, hình tròn C_2 có bán kính bằng $\frac{9}{10}$ bán kính của đường tròn C_1 , hình tròn C_3 có bán kính bằng $\frac{9}{10}$ bán kính của đường tròn C_2 . Cứ tiếp



tục như vậy, nhận được dãy hình tròn $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$. Tính tổng chiều dài các thanh tre đã làm chiếc đèn tre.

Lời giải

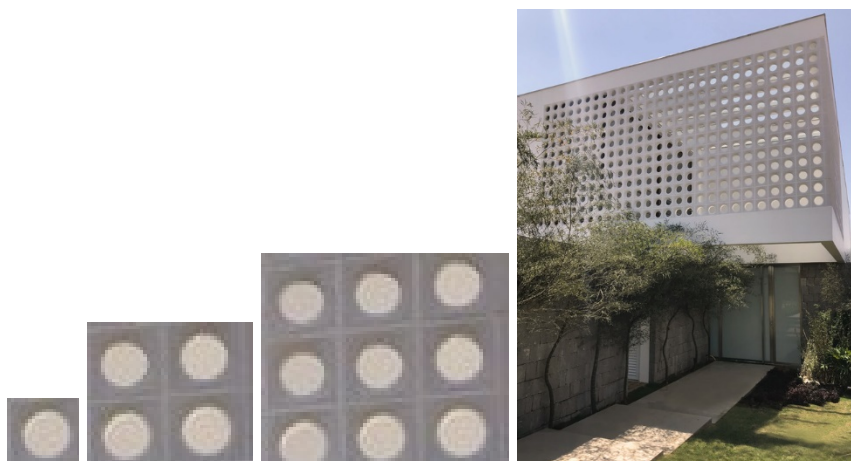
Gọi $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n, \dots$ lần lượt là chu vi của các hình tròn $C_1, C_2, C_3, \dots, C_n, \dots$.

Tổng chiều dài các thanh tre đã làm nên chiếc đèn là :

$$\begin{aligned} p &= P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_n + \dots = 2\pi R + 2\pi \left(\frac{9}{10} R \right) + \pi \left(R \left(\frac{9}{10} \right)^2 \right) + \dots + \pi \left(R \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} \right) + \dots \\ &= 2\pi R \left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10} \right)^2 + \dots + \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1} + \dots \right) = 2\pi \cdot 50 \cdot \frac{1}{1 - \frac{9}{10}} = 3140(\text{cm}) = 31,4\text{m}. \end{aligned}$$

Chú ý: dãy số $1, \frac{9}{10}, \left(\frac{9}{10} \right)^2, \dots, \left(\frac{9}{10} \right)^{n-1}, \dots$ là cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 21: Người ta làm lỗ thông gió của một ngôi nhà bằng cách ghép một dãy hình tròn có cùng bán kính là $3cm$, theo các bước như Hình 2. Kí hiệu u_n (đơn vị diện tích) là diện tích hình tròn ghép được ở bước thứ n .



Bước 1 Bước 2 Bước 3 Bước ... Bước n

a) Với n như thế nào thì u_n vượt quá $90000\pi; 9000000\pi$?

b) Với n như thế nào thì u_n vượt quá $45m^2$?

Lời giải

a) Gọi $u_1, u_2, u_3, \dots, u_n$ lần lượt là diện tích các hình tròn (cm^2) tương ứng từ các bước $1, 2, 3, \dots, n$.

Ta có:

$$\begin{aligned} u_1 &= \pi.3^2 = 1^2.\pi.3^2 \\ u_2 &= 4.\pi.3^2 = 2^2.\pi.3^2 \\ u_3 &= 9.\pi.3^2 = 3^2.\pi.3^2 \\ &\dots \\ u_n &= n^2.\pi.3^2 \end{aligned}$$

Ta xét $u_n > 90000\pi \Leftrightarrow n^2.\pi.3^2 > 90000\pi \Rightarrow n > 100$.

Vậy $n > 100$ thì u_n vượt quá 90000π hình tròn.

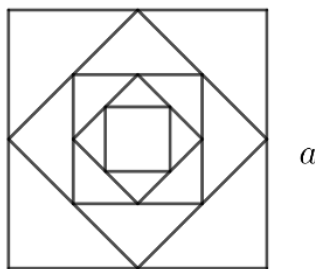
Ta xét $u_n > 9000000\pi \Leftrightarrow n^2.\pi.3^2 > 9000000\pi \Rightarrow n > 1000$.

Vậy $n > 1000$ thì u_n vượt quá 1000000π hình tròn.

b) Xét $u_n > S \Leftrightarrow n^2.\pi.3^2 > 450000 \Leftrightarrow n^2 > \frac{50000}{\pi} \Rightarrow n > 15923,5668$

Vậy với $n > 15924$ thì u_n vượt quá $45m^2$.

Câu 22: Cho hình vuông có cạnh bằng $a(m)$, gọi là hình vuông H_1 . Nối các trung điểm của H_1 để tạo thành hình vuông H_2 . Tiếp theo, nối các trung điểm của H_2 để tạo thành hình vuông H_3 . Cứ tiếp tục như vậy, nhận được dãy hình vuông $H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$



- a) Tính diện tích S_n của H_n và tính $\lim S_n$.
b) Tính chu vi p_n của hình H_n và tính $\lim p_n$.

Lời giải

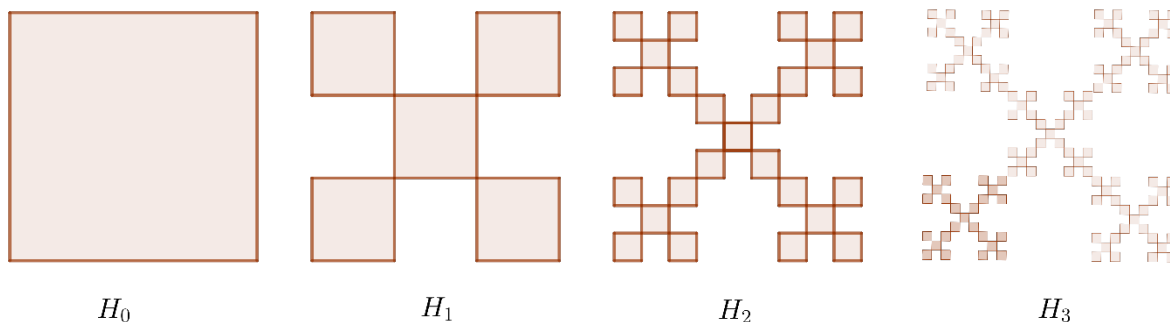
a) Ta có: $S_1 = a^2 (m^2)$; $S_2 = \left(a \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 (m^2)$; $S_3 = \left(a \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2.2}\right)^2 (m^2)$; ... $S_n = \left(a \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right)^2 (m^2), \dots$

$$\lim S_n = \lim \left(a \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right)^2 = \lim \left(a^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = a^2 \cdot 0 = 0$$

b) $p_1 = 4a(m)$, $p_2 = 4a \frac{\sqrt{2}}{2}(m)$, $p_3 = 4a \frac{\sqrt{2}\sqrt{2}}{2.2}(m)$, ..., $p_n = 4a \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}(m), \dots$

$$\lim p_n = \lim 4a \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = 4a \lim \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} = 4a \cdot 0 = 0.$$

Câu 23: Bắt đầu bằng một hình vuông H_0 cạnh bằng $a(m)$ (hình H_0). Chia hình vuông H_0 thành chín hình vuông bằng nhau, bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_1 . Tiếp theo, chia mỗi hình vuông của H_1 thành chín hình vuông rồi bỏ đi bốn hình vuông, nhận được hình H_2 . Tiếp tục quá trình này, ta nhận được một dãy hình H_n ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$).



Ta có: H_1 có 5 hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3}a(m)$;

H_2 có $5 \cdot 5 = 5^2$ hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}a = \frac{1}{3^2}a(m); \dots$

Từ đó, nhận được H_n có 5^n hình vuông, mỗi hình vuông có cạnh bằng $\frac{1}{3^n}a(m)$.

- a) Tính tổng diện tích S của $H_i, i = 0, \dots, n, \dots$ và tính $\lim S$.
b) Tính tổng chu vi p của hình $H_i, i = 0, \dots, n$ và tính $\lim p$.

Lời giải

Gọi $S_0, S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ lần lượt là diện tích của các hình vuông $H_0, H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$.

$$\begin{aligned} S &= S_0 + S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = a^2 + \left(a \frac{1}{3}\right)^2 + \left(a \frac{1}{3^2}\right)^2 + \dots + \left(a \frac{1}{3^n}\right)^2 + \dots \\ &= a^2 \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} + \dots + \frac{1}{9^n} + \dots\right) = a^2 \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} (m^2); \lim S = \lim a^2 \frac{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{9}{8} a^2 (m^2). \end{aligned}$$

Chú ý: dãy số $1, \frac{1}{9}, \frac{1}{9^2}, \dots, \frac{1}{9^n}, \dots$ là cấp số nhân lùi vô hạn.

Gọi $p_0, p_1, p_2, p_3, \dots, p_n, \dots$ lần lượt là chu vi của các hình vuông $H_0, H_1, H_2, H_3, \dots, H_n, \dots$.

$$\begin{aligned} p &= p_0 + p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = 4a + 4a \frac{1}{3} + 4a \frac{1}{3^2} + \dots + 4a \frac{1}{3^n} + \dots = 4a \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n} + \dots\right) \\ &= 4a \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} (m); \lim p = \lim 4a \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} = 6a (m). \end{aligned}$$

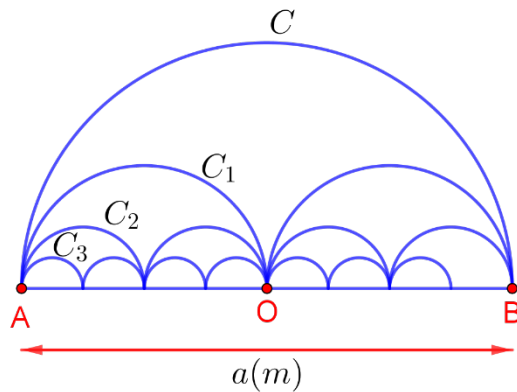
Chú ý: dãy số $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \dots, \frac{1}{3^n}, \dots$ là cấp số nhân lùi vô hạn.

Câu 24: Gọi C là nửa đường tròn đường kính $AB = a(m)$,

C_1 là đường gồm hai nửa đường tròn đường kính $\frac{a}{2}$,

C_2 là đường gồm bốn nửa đường tròn đường kính $\frac{a}{4}$, ...

C_n là đường gồm 2^n nửa đường tròn đường kính $\frac{a}{2^n}$, ...



Gọi p_n là độ dài của C_n , S_n là diện tích hình phẳng giới hạn bởi C_n và đoạn thẳng AB .

a) Tính p_n, S_n .

b) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .

Lời giải

a) $p = \pi \frac{a}{2} (m); p_1 = 2\pi \frac{a}{2^2} (m); p_2 = 2^2 \pi \frac{a}{2^3} (m); \dots; p_n = 2^n \pi \frac{a}{2^{n+1}} (m)$

$$S = \pi \left(\frac{a}{2}\right)^2 (m^2); S_1 = 2\pi \left(\frac{a}{2^2}\right)^2 (m^2); S_2 = 2^2 \pi \left(\frac{a}{2^3}\right)^2 (m^2); \dots; S_n = 2^n \pi \left(\frac{a}{2^{n+1}}\right)^2 (m^2)$$

$$b) \lim p_n = \lim \left(2^n \pi \frac{a}{2^{n+1}} \right) = \frac{1}{2} a \pi .$$

$$\lim S_n = \lim 2^n \pi \left(\frac{a}{2^{n+1}} \right)^2 = \frac{1}{4} a^2 \pi \lim \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0 .$$

Câu 25: Một cái hồ đang chứa $600m^3$ nước mặn với nồng độ muối $20kg / m^3$. Người ta ngọt hóa nước trong hồ bằng cách bơm nước ngọt vào hồ với tốc độ $10m^3 / \text{phút}$.

a) Viết biểu thức $C(t)$ biểu thị nồng độ muối trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm.

b) Tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t)$ và giải thích ý nghĩa.



Lời giải

a) Thể tích nước ngọt bơm vào sau t phút là: $10t (m^3)$.

Khối lượng muối là: $600.20 = 1200kg$ (kg).

Thể tích hồ sau khi bơm nước biển vào là: $600 + 10t (m^3)$.

Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là:

$$C(t) = \frac{1200}{600 + 10t} (kg / m^3) .$$

$$b) \text{Ta có : } \lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1200}{600 + 10t} = 0 (kg / m^3) .$$

Vậy sau một thời gian bơm nước ngọt vào hồ thì nồng độ muối trong hồ là $0 (kg / m^3)$.

Câu 26: Trong hồ có chứa 12000 lít nước ngọt. Người ta bơm nước biển có nồng độ muối là 40gam / lít vào hồ với tốc độ 20 lít/phút.

a) Chứng tỏ rằng nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là

$$C(t) = \frac{40t}{600 + t} (\text{gam} / \text{lít}) .$$

b) Nồng độ muối trong hồ như thế nào nếu bơm nước vào hồ một thời gian dài (xem như $t \rightarrow +\infty$).



Lời giải

a) Thể tích nước biển bơm vào sau t phút là: $20t$ (lít).

Khối lượng muối là: $40.20t = 800t$ (gam).

Thể tích hồ sau khi bơm nước biển vào là: $12000 + 20t$ (lít).

Nồng độ muối của nước trong hồ sau t phút kể từ khi bắt đầu bơm là:

$$C(t) = \frac{800t}{12000 + 20t} = \frac{40t}{600 + t} \text{ (gam / lít) .}$$

b) Ta có : $\lim_{t \rightarrow +\infty} C(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{40t}{600 + t} = 40$ (gam/lít).

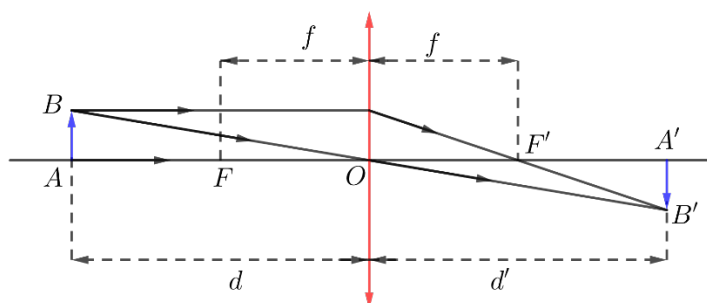
Vậy khi bơm nước vào hồ một thời gian dài thì nồng độ muối trong hồ bằng 40 (gam/lít), tương đương với nồng độ muối trong nước biển.

Câu 27: Một thấu kính hội tụ có tiêu cự là $f > 0$ không đổi. Gọi d và d' lần lượt là khoảng cách từ vật thật và ảnh của nó tới quang tâm O của thấu kính. Ta có công thức: $\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{1}{f}$ hay $d' = \frac{df}{d - f}$.

Xét hàm số $g(d) = \frac{df}{d - f}$. Tìm các giới hạn sau đây và giải thích ý nghĩa.

a) $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d)$.

b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d)$.



Lời giải

a) $\lim_{d \rightarrow f^+} g(d) = \lim_{d \rightarrow f^+} \frac{df}{d - f} = +\infty$; Điều này có nghĩa là khi vật tiến về tiêu điểm chính thì ảnh tiến về vô cực của thấu kính hội tụ.

b) $\lim_{d \rightarrow +\infty} g(d) = \lim_{d \rightarrow +\infty} \frac{df}{d - f} = f$. Điều này có nghĩa là khi vật tiến về ở vô cực thì ảnh tiến về tiêu điểm chính của thấu kính hội tụ.

Câu 28: Một xưởng sản xuất nón bảo hiểm, tính trung bình mỗi nhân viên có thể lắp ráp được số nón bảo hiểm được tính theo biểu thức $N(t) = \frac{600t}{t+10}, (0 \leq t)$ với t ngày. Tính $\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{600t}{t+10} = 600.$$

Với thời gian làm việc là vô hạn mà số nón bảo hiểm nhân viên lắp ráp trung bình là 600 cái. Vậy, do năng suất con người có hạn, nên dù có tăng thời gian làm việc lên thì số lượng sản phẩm trung bình không vượt quá giới hạn này.

Câu 29: Một cơ sở sản xuất bếp gas, tính chi phí sản xuất x (sản phẩm) xác định bởi hàm số: $C(x) = 200 + 120x$ (ngàn đồng).

a) Tính chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm.

b) Tính $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x)$ và cho biết ý nghĩa của kết quả.

Lời giải

a) Chi phí trung bình $\bar{C}(x)$ để sản xuất một sản phẩm

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{200 + 120x}{x} \Rightarrow \bar{C}(1) = \frac{200 + 120 \cdot 1}{1} = 320 \text{ (ngàn đồng)}.$$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \bar{C}(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{200 + 120x}{x} = 120.$

Với số sản phẩm sản xuất tăng lên vô hạn mà chi phí sản xuất trung bình một sản phẩm vẫn là 320 ngàn đồng. Vậy, số sản phẩm sản xuất tăng bao nhiêu đi nữa thì chi phí sản xuất sản phẩm trung bình một sản phẩm cũng không vượt quá giới hạn này.

Câu 30: Một hãng taxi đưa ra giá cước cho loại xe 4 chỗ như sau:

Loại xe	Giá cước cho 1 km đầu tiên	Giá cước cho km thứ 2 đến km thứ 25	Giá cước cho km thứ 26 trở lên
VF 5 plus	20.000 đồng/ km	15.000 đồng/ km	15.000 đồng/ km

(qua 1 km đầu được tính cho km thứ hai, qua km thứ 25 được tính cho km thứ 26).

$$\text{Giá cước được biểu diễn bởi hàm số } T(x) = \begin{cases} 20000 & \text{khi } 0 < x \leq 1 \\ 20000 + (x-1) \cdot 15000 & \text{khi } 1 < x \leq 25 \\ 380000 + (x-25) \cdot 14000 & \text{khi } x > 25. \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$, với $x(km)$.

Lời giải

+ Tại $x_0 = 1$ ta có:

$$T(1) = 20000; \lim_{x \rightarrow 1^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 20000 = 20000$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [20000 + (x-1)15000] = 20000$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 1^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} T(x) = T(1)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 1$

+ Tại $x_0 = 25$ ta có: $T(25) = 20000 + (25-1)15000 = 380000$

$$\lim_{x \rightarrow 25^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 25^-} [20000 + (x-1)15000] = 380000$$

$$\lim_{x \rightarrow 25^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 25^+} [380000 + (x-25)14000] = 380000$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 25^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 25^+} T(x) = T(25)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 25$.

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục

Câu 31: Biểu giá bán lẻ điện sinh hoạt của EVN được áp dụng theo Quyết định 1062/QĐ-BCT với mức giá bán lẻ điện chưa bao gồm thuế giá trị gia tăng, cụ thể:

<i>kWh</i>	Giá tiền (đồng/ <i>kWh</i>)
Từ 1 đến 50	1,728
Từ 50 đến 100	1,786
Từ 101 đến 200	2,074
Từ 201 đến 300	2,612
Từ 301 đến 400	2.919
Từ 401 trở lên	3,015

$$\text{Giá tiền được biểu diễn bởi hàm số } T(x) = \begin{cases} 1,728 & \text{khi } 0 < x \leq 50 \\ 1,728 + (x-50).1,786 & \text{khi } 50 < x \leq 100 \\ 91,028 + (x-100).2,074 & \text{khi } 100 < x \leq 200 \\ 298,428 + (x-200).2,612 & \text{khi } 200 < x \leq 300 \\ 559,628 + (x-300).2,219 & \text{khi } 300 < x \leq 400 \\ 781,528 + (x-400).3,015 & \text{khi } x > 400 \end{cases}$$

Xét tính liên tục của hàm số $T(x)$, với $x(kWh)$.

Lời giải

+ Tại $x_0 = 50$ ta có:

$$T(50) = 1,728$$

$$\lim_{x \rightarrow 50^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 50^-} 1,728 = 1,728; \quad \lim_{x \rightarrow 50^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 50^+} [1,728 + (x-50).1,786] = 1,728$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 50^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 50^+} T(x) = T(50)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 50$

+ Tại $x_0 = 100$ ta có:

$$T(100) = 1,728 + (100-50).1,786 = 91,028$$

$$\lim_{x \rightarrow 100^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} [1,728 + (x-50).1,786] = 91,028$$

$$\lim_{x \rightarrow 100^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 100^+} [91,028 + (x-100).2,074] = 91,028$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 100^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 100^+} T(x) = T(100)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 100$.

+ Tại $x_0 = 200$ ta có:

$$T(200) = 91,028 + (200-100).2,074 = 298,428$$

$$\lim_{x \rightarrow 200^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 200^-} [91,028 + (x-100).2,074] = 298,428$$

$$\lim_{x \rightarrow 200^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 200^+} [298,428 + (x-200).2,612] = 298,428$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 200^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 200^+} T(x) = T(200)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 200$

+ Tại $x_0 = 300$ ta có:

$$T(300) = 298,428 + (300 - 200) \cdot 2,612 = 559,628$$

$$\lim_{x \rightarrow 300^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 300^-} [298,428 + (x - 200) \cdot 2,612] = 559,628$$

$$\lim_{x \rightarrow 300^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 300^+} [559,628 + (x - 300) \cdot 2,219] = 559,628$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 300^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 300^+} T(x) = T(300)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 300$.

+ Tại $x_0 = 400$ ta có:

$$T(400) = 559,628 + (400 - 300) \cdot 2,219 = 781,528$$

$$\lim_{x \rightarrow 400^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 400^-} [559,628 + (x - 300) \cdot 2,219] = 781,528$$

$$\lim_{x \rightarrow 400^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 400^+} [781,528 + (x - 400) \cdot 3,015] = 781,528$$

Vì $\lim_{x \rightarrow 400^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 400^+} T(x) = T(400)$ nên hàm số $T(x)$ liên tục tại $x_0 = 400$

Vậy hàm số $T(x)$ liên tục

Câu 32: Biết rằng khi nung nóng một vật với nhiệt độ tăng từ 20°C , mỗi phút tăng 4°C trong 70 phút, sau đó giảm mỗi phút 2°C trong 50 phút. Hàm số biểu thị nhiệt độ ($^\circ\text{C}$) trong tủ theo thời gian t (phút) có dạng:

$$T(t) = \begin{cases} 20 + 4t & \text{khi } 0 \leq t \leq 70 \\ a - 2t & \text{khi } 70 < t \leq 120 \end{cases}$$

(a là hằng số). Biết rằng, $T(t)$ là hàm liên tục trên tập xác định. Tìm giá trị của a .

Lời giải

Tại $t_0 = 70$ ta có: $T(70) = 300$

$$\lim_{x \rightarrow 70^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 70^-} (20 + 4t) = 300; \quad \lim_{x \rightarrow 70^+} T(x) = \lim_{x \rightarrow 70^+} (a - 2t) = a - 140$$

Hàm số liên tục trên tập xác định khi: $\lim_{x \rightarrow 70^-} T(x) = \lim_{x \rightarrow 70^+} T(x) = T(70) \Leftrightarrow a - 140 = 300 \Leftrightarrow a = 440$

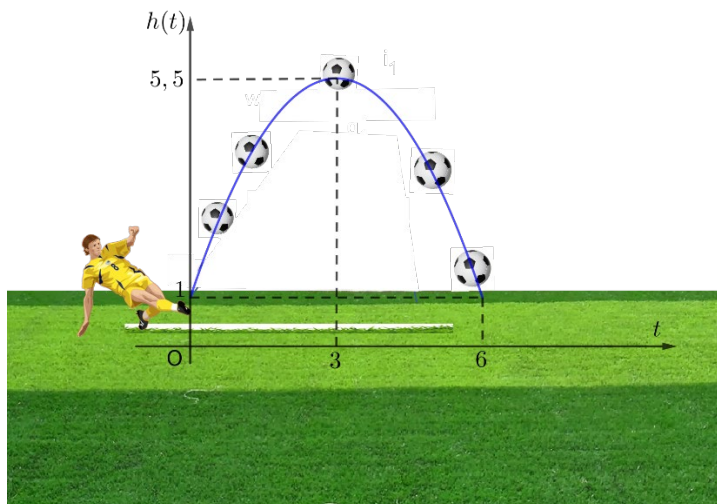
Vậy giá trị của $a = 440^\circ\text{C}$.

Câu 33: Biểu thị độ cao $h(t)$ của một quả bóng đá lên trên theo thời gian $t(s)$, trong đó

$$h(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1.$$

a) Chứng tỏ hàm số $h(t)$ liên tục trên tập xác định.

b) Dựa vào đồ thị hãy xác định $\lim_{t \rightarrow 3} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right)$.



Lời giải

a) Hàm số $f(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$ có tập xác định $D = [0, 6]$. Xét trên $(0; 6)$:

+ Tại $t_0 = 0$ ta có: $f(0) = 1$; $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right) = 1$.

Do đó $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0) = 1$ (1).

+ Tại $t_0 = 6$ ta có: $f(6) = 1$; $\lim_{t \rightarrow 6^-} f(t) = \lim_{t \rightarrow 6^-} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right) = 1$.

Do đó $\lim_{t \rightarrow 6^-} f(t) = f(6) = 1$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra hàm số liên tục trên $[0, 6]$.

b) $\lim_{t \rightarrow 3} \left(-\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1 \right) = 5,5$.

Câu 34: Một người lái xe ô tô, trong 20 km đầu xe chạy với vận tốc 40 km/h, sau đó cứ đến 10 km tiếp theo xe tăng tốc thêm x (km/h), $x > 0$. Biểu thức vận tốc của xe là $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{20}{5+2x}$ có đơn vị đo là giờ (h). Chứng tỏ rằng hàm số $f(x)$ liên tục trên tập xác định.



Lời giải

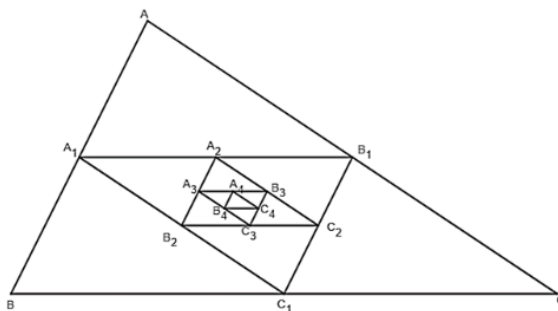
Hàm số $f(x) = \frac{1}{2} + \frac{20}{5+2x}$ có tập xác định $D = (0; +\infty)$.

Tại $x_0 = 0$ ta có: $f(0) = 4,5$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2} + \frac{20}{5+2x} \right) = 4,5$.

Do đó $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 4,5$. Vậy hàm số liên tục trên $D = (0; +\infty)$.

Câu 35: Cho một tam giác đều ABC cạnh a . Tam giác $A_1B_1C_1$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác ABC , tam giác $A_2B_2C_2$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_1B_1C_1, \dots$,

tam giác $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}$ có các đỉnh là trung điểm các cạnh của tam giác $A_nB_nC_n, \dots$. Gọi $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ và $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ theo thứ tự là chu vi và diện tích của các tam giác $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2, \dots, A_nB_nC_n, \dots$.



- a) Tìm giới hạn của các dãy số (p_n) và (S_n) .
- b) Tìm các tổng $p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots$ và $S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$

Lời giải

a)

+) (p_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$

Ta có: $p_1 = p_{\Delta ABC} = a + a + a = 3a$;

$$p_2 = p_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \cdot (3a) = \frac{1}{2} \cdot p_1$$

$$p_3 = p_{\Delta A_2B_2C_2} = \frac{a}{4} + \frac{a}{4} + \frac{a}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (3a) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot p_1; \dots;$$

$$p_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot p_1; \dots$$

Suy ra:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot (3a) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (3a) = 0 \cdot 3a = 0.$$

(S_n) là dãy số chu vi của các tam giác theo thứ tự $ABC, A_1B_1C_1, \dots$

Gọi h là chiều cao của tam giác ABC và $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có:

$$S_1 = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ah;$$

$$S_2 = S_{\Delta A_1B_1C_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}ah\right) = \frac{1}{4} \cdot S_1;$$

$$S_3 = S_{\Delta A_2B_2C_2} = S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot S_1; \dots;$$

$$S_{\Delta A_nB_nC_n} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot S_1; \dots$$

Suy ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \cdot S_1 \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} ah \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} ah = 0.$$

b)

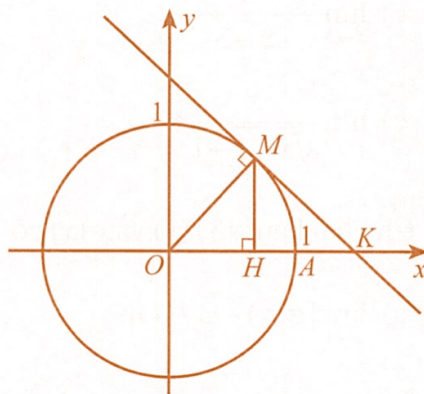
+) Ta có (p_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $p_1 = 3a$ và công bội $q = \frac{1}{2}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$$P_n = p_1 + p_2 + \dots + p_n + \dots = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$$

+) Ta cũng có (S_n) là một cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $S_1 = \frac{1}{2} ah$ và công bội $q = \frac{1}{4}$ thỏa mãn $|q| < 1$ có tổng:

$$S_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots = \frac{\frac{1}{2} ah}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} ah$$

Câu 36: Cho điểm $M(t; \sqrt{1-t^2})$, $0 < t < 1$ nằm trên đường tròn đơn vị $(C): x^2 + y^2 = 1$, điểm $A(1;0)$ là một giao điểm của (C) với trục hoành. Gọi H là hình chiếu vuông góc của M trên trục hoành, K là giao điểm của tiếp tuyến của (C) tại M với trục hoành. Khi điểm M dần đến điểm A thì tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến giá trị nào?



Lời giải

Điểm M dần đến điểm A khi $t \rightarrow 1^-$. Do đó, ta cần tìm giới hạn $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{HK}{HA}$.

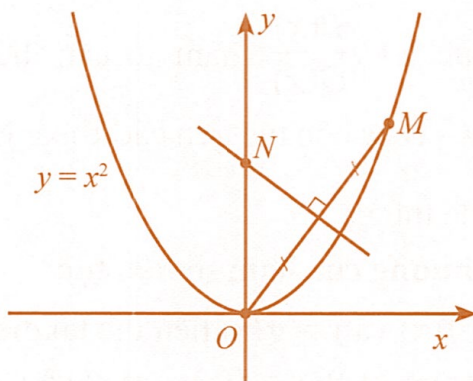
Ta có $H(t;0)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M nhận $\overrightarrow{OM} = (t; \sqrt{1-t^2})$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $d: t(x-t) + \sqrt{1-t^2}(y - \sqrt{1-t^2}) = 0$.

Thay $y = 0$ vào phương trình của d ta nhận được $x = \frac{1}{t}$. Suy ra $K\left(\frac{1}{t}; 0\right)$.

Ta có: $HA = 1 - t$; $HK = \frac{1}{t} - t = \frac{1-t^2}{t}$; $\frac{HK}{HA} = \frac{1-t^2}{t(1-t)} = \frac{1+t}{t}$; $\lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{HK}{HA} = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{1+t}{t} = \frac{1+1}{1} = 2$.

Vậy khi điểm M dần đến điểm A thì giá trị của tỉ số $\frac{HK}{HA}$ dần đến 2.

Câu 37: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho điểm $M(t; t^2)$, $t > 0$, nằm trên đường parabol $y = x^2$. Đường trung trực của đoạn thẳng OM cắt trục tung tại N . Điểm N dần đến điểm nào khi điểm M dần đến điểm O ?



Lời giải

Trung điểm của đoạn thẳng OM là $I\left(\frac{t}{2}; \frac{t^2}{2}\right)$.

Đường trung trực của OM nhận vector $\overrightarrow{OM} = (t; t^2)$ làm vector pháp tuyến nên có phương trình

$d: t\left(x - \frac{t}{2}\right) + t^2\left(y - \frac{t^2}{2}\right) = 0$. Thay $x = 0$ vào phương trình của d , ta nhận được $y = \frac{1}{2}(1 + t^2)$.

Suy ra $N\left(0; \frac{1}{2}(1 + t^2)\right)$.

Điểm M dần đến điểm O khi t dần đến 0^+ . Ta có $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}(1 + t^2) = \frac{1}{2}$.

Suy ra khi điểm M dần đến điểm O thì điểm N dần đến điểm $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$.

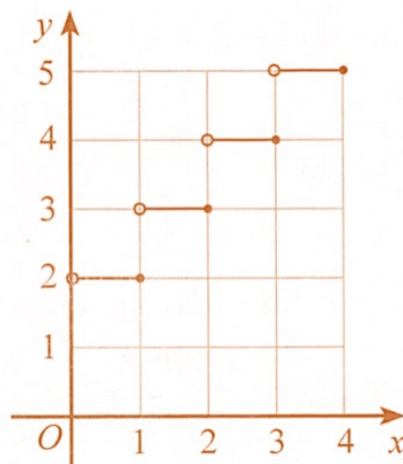
Câu 38: Tại một nhà gửi xe, phí gửi xe ô tô con được tính 20 nghìn đồng cho 1 giờ đầu và 10 nghìn đồng cho mỗi giờ tiếp theo. Gọi $P(t)$ (tính theo chục nghìn đồng) là số tiền phí gửi xe ô tô con tại nhà gửi xe này trong t giờ (với $0 < t \leq 4$). Viết công thức xác định hàm số $y = P(t)$, vẽ đồ thị hàm số và xét tính liên tục của nó trên nửa khoảng $(0; 4]$.

Giải

Hàm số $P(t)$ trên $(0; 4]$ có công thức:

$$P(t) = \begin{cases} 2 & \text{khi } 0 < t \leq 1 \\ 3 & \text{khi } 1 < t \leq 2 \\ 4 & \text{khi } 2 < t \leq 3 \\ 5 & \text{khi } 3 < t \leq 4 \end{cases} \quad (P \text{ tính theo chục nghìn đồng, } t \text{ tính theo giờ}).$$

Đồ thị của hàm số $P(t)$ như Hình bên dưới.



Trên mỗi nửa khoảng $(0;1]$, $(1;2]$, $(2;3]$ và $(3;4]$, hàm số đều có dạng $P(t) = c$ (c là hằng số) nên hàm số liên tục trên mỗi khoảng này.

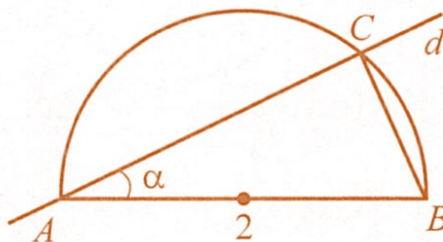
Ta có $\lim_{t \rightarrow 1^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 1^-} 2 = 2$; $\lim_{t \rightarrow 1^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow 1^+} 3 = 3$. Do $\lim_{t \rightarrow 1^-} P(t) \neq \lim_{t \rightarrow 1^+} P(t)$ nên hàm số không liên tục tại điểm $t = 1$.

Tương tự, chỉ ra được hàm số không liên tục tại các điểm $t = 2$ và $t = 3$.

Vậy hàm số liên tục trên các nửa khoảng $(0;1]$, $(1;2]$, $(2;3]$ và $(3;4]$; gián đoạn tại các điểm $t = 1, t = 2$ và $t = 3$.

Câu 39: Cho nửa đường tròn đường kính $AB = 2$. Đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A , cắt nửa đường tròn tại C và tạo với đường thẳng AB góc α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$).

Kí hiệu diện tích tam giác ABC là $S(\alpha)$ (phụ thuộc vào α). Xét tính liên tục của hàm số $S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ và tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha)$, $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S(\alpha)$.



Lời giải

$$S(\alpha) = \frac{1}{2} AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cos \alpha \cdot 2 \sin \alpha = \sin 2\alpha, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Do các hàm số $y = \sin 2\alpha$ đều liên tục trên $\mathbb{R}$, nên hàm số $y = S(\alpha)$ liên tục trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \sin 2\alpha = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin 2\alpha = 0.$$

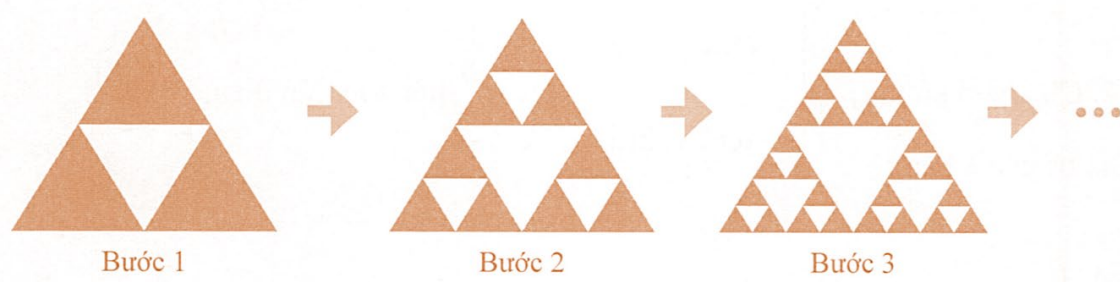
Câu 40: Từ một tam giác đều có diện tích bằng 1, ta thực hiện lần lượt các bước như sau:

Bước 1: Nối trung điểm các cạnh của tam giác đã cho, chia tam giác này thành 4 tam giác nhỏ và bỏ đi tam giác ở giữa (bỏ đi 1 tam giác có diện tích $\frac{1}{4}$).

Bước 2: Làm tương tự như Bước 1 với mỗi tam giác trong 3 tam giác còn lại (bỏ đi 3 tam giác, mỗi tam giác có diện tích $\frac{1}{4^2}$).

Cứ tiếp tục quá trình như vậy (ở bước thứ n , bỏ đi 3^{n-1} tam giác, mỗi tam giác diện tích $\frac{1}{4^n}$).

Tính tổng diện tích các tam giác đã bỏ đi.



Lời giải

$$S = \frac{1}{4} + 3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 + 3^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \dots + 3^n \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} + \dots$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n + \dots$$

Đây là tổng cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu $u_1 = \frac{1}{4}$, công bội $q = \frac{3}{4}$, nên

$$S = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 1.$$

Câu 41: Biết rằng, từ vị trí A , một mũi tên bay với tốc độ $10m/s$ hướng thẳng tới bia mục tiêu đặt ở vị trí B cách vị trí A một khoảng bằng $10m$ (Hình bên dưới). Một nhà thông thái lập luận như sau: "Để đến được B , trước hết mũi tên phải đến trung điểm A_1 của AB . Tiếp theo, nó phải đến

trung điểm A_2 của A_1B . Tiếp nữa, nó phải đến trung điểm A_3 của A_2B . Cứ tiếp tục như vậy, vì không bao giờ hết các trung điểm nên mũi tên không thể bay đến được bia mục tiêu ở B ".



Lập luận trên có đúng không? Nếu không, hãy chỉ ra chỗ sai lầm.

Lời giải

Thời gian để mũi tên bay từ A đến A_1 là $\frac{1}{2}$ giây, từ A_1 đến A_2 là $\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2}$ giây, từ A_2 đến A_3 là $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$, ...

Tổng thời gian bay của mũi tên là $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots (*)$

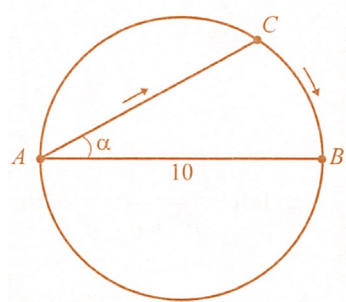
Đây là tổng của cấp số nhân lùi vô hạn với số hạng đầu là $\frac{1}{2}$ và công bội bằng $\frac{1}{2}$.

Do đó, tổng này bằng $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1$ (giây).

Như vậy, mũi tên đến bia mục tiêu sau 1 giây.

Lập luận của nhà thông thái không đúng, sai lầm ở chỗ cho rằng tổng ở $(*)$ không phải là một số hữu hạn.

Câu 42: Tại một bể bơi có dạng hình tròn có đường kính $AB = 10m$, một người xuất phát từ A bơi thẳng theo dây cung AC tạo với đường kính AB một góc $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$, rồi chạy bộ theo cung nhỏ CB đến điểm B (Hình bên dưới).



Gọi $S(\alpha)$ là quãng đường người đó đã di chuyển.

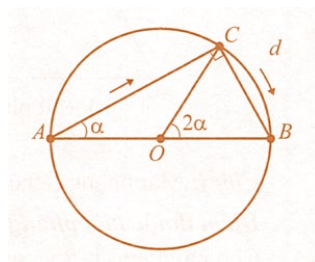
a) Viết công thức tính $S(\alpha)$ theo $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$.

b) Xét tính liên tục của hàm số $y = S(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

c) Tính các giới hạn $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha)$ và $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} S(\alpha)$.

Lời giải

Kí hiệu O là tâm hình tròn.



a) Do tam giác ABC vuông tại C nên $AC = AB \cos \alpha = 10 \cos \alpha (m)$.

Ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2\alpha$. Suy ra độ dài cung CB là $l = OB \cdot \widehat{BOC} = 5 \cdot 2\alpha = 10\alpha (m)$.

Quãng đường di chuyển (tính theo m) của người đó là

$$S(\alpha) = AC + l = 10 \cos \alpha + 10\alpha = 10(\alpha + \cos \alpha) \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right).$$

b) Do các hàm số $y = \alpha$ và $y = \cos \alpha$ liên tục trên $\mathbb{R}$ nên hàm số $y = S(\alpha)$ liên tục trên $\left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} S(\alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} 10(\alpha + \cos \alpha) = 10 \left(\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha + \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \cos \alpha \right) \\ &= 10(0 + 1) = 10. \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} S(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} 10(\alpha + \cos \alpha) = 10 \left(\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \alpha + \lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi^+}{2}} \cos \alpha \right) \\ &= 10 \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) = 5\pi \end{aligned}$$

CHƯƠNG

IV

QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1: Mặt bàn, mặt màn hình tivi,... cho ta hình ảnh một phần của mặt phẳng. Hãy chỉ thêm các ví dụ khác về hình ảnh một phần của mặt phẳng.



Lời giải

Một số hình ảnh về một phần mặt bằng: mặt bảng, mặt hồ nước yên lặng, nền nhà, trần nhà, màn hình điện thoại, mặt ghế, bề mặt kính chiếc đồng hồ, bề mặt chiếc card visit,.....

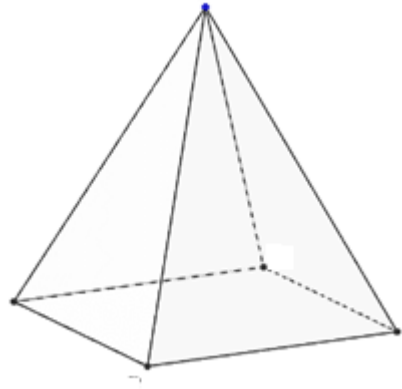


Câu 2: Hình bên dưới là hình ảnh kim tự tháp Ai Cập có năm mặt phân biệt trong đó mặt đáy là hình vuông, bốn mặt bên là các tam giác. Vẽ hình biểu diễn kim tự tháp đó.

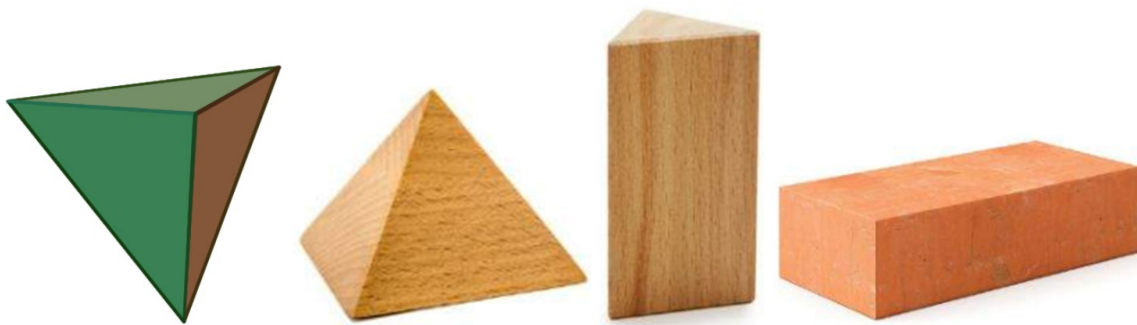


Lời giải

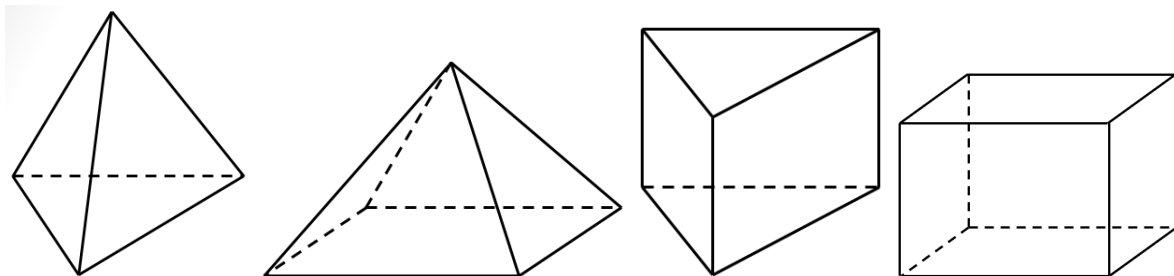
Hình biểu diễn kim tự tháp



Câu 3: Các hình bên dưới là hình ảnh của một số vật thể. Vẽ hình biểu diễn trong không gian các vật thể đó (hình thứ 2 từ trái sang phải là mô hình kim tự tháp ai cập).



Lời giải



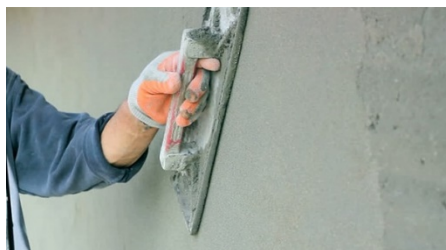
Câu 4: Khi trát tường, dụng cụ không thể thiếu của người thợ là thước dẹt dài. Công dụng của thước dẹt này là gì? Giải thích.



Lời giải

Thước dẹt làm cho mặt lớp vữa phẳng và dài mốc cùng nằm trên mặt phẳng.

Câu 5: Khi trát tường, dụng cụ không thể thiếu của người thợ là bàn xoa hình bên dưới. Công dụng của bàn xoa là gì? Giải thích.



Lời giải

Công dụng bàn xoa: làm bề mặt bức tường bằng phẳng.

Do bàn xoa là một phần mặt phẳng, khi trát tường người thợ xây dùng bàn xoa, xoa đều xung quanh bức tường khi đó tạo nên bề mặt bức tường như một mặt phẳng.

Câu 6: Một số vật dụng 3 chân như hình vẽ sau và giải thích tại sao vậy 3 chân thì không bị khập khiễng còn nếu vật dụng có 4 chân thì có thể bị khập khiễng?

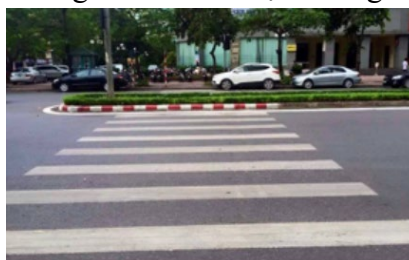


Kiềng 3 chân Bàn 3 chân Chân máy quay ghế gỗ 4 chân

Lời giải

Các vật dụng có 3 chân tiếp đất tại 3 điểm. Qua ba điểm này ta xác định được duy nhất một mặt phẳng là điểm tựa để giữ cố định vật. Vật có 4 chân nếu để trên mặt sàn không bằng phẳng sẽ bị khập khiễng vì 4 điểm phân biệt trong không gian chưa chắc nằm trên một mặt phẳng.

Câu 7: Quan sát hình sau cho biết vị trí tương đối của các vạch trắng kẻ đường có trong hình.



Lời giải

Quan sát hình ta thấy các vạch trắng kẻ đường có trong hình có vị trí tương đối là song song với nhau.

Câu 8: Trong hình bên dưới, khi cắt bánh sinh nhật, mặt cắt và mặt khay đựng bánh lần lượt gọi nên hình ảnh mặt phẳng (Q) và mặt phẳng (P); mép trên và mép dưới của lát cắt lần lượt gọi nên hình ảnh hai đường thẳng a và b trong đó a song song với mặt phẳng (P). Cho biết hai đường thẳng a, b có song song với nhau hay không.



Lời giải

Hai đường thẳng a, b có song song với nhau vì a song song với (P) mà (Q) chứa a và cắt (P) tại giao tuyến b (Theo định lý 2 tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng).

Câu 9: Thước laser phát ra tia laser, khi tia này quay sẽ tạo ra mặt phẳng ánh sáng. Giải thích tại sao các thước kẻ laser lại giúp người thợ xây dựng kẻ được đường thẳng trên tường hoặc sàn nhà.



Lời giải

Mặt phẳng ánh sáng đó cắt mặt phẳng tường hoặc sàn nhà theo giao tuyến là 1 đường thẳng.

Câu 10: Chỉ ra các đường thẳng song song trong mỗi hình sau. Tìm thêm một số ví dụ khác về các đường thẳng song song trong thực tế.



Hình 1.



Hình 2.



Hình 3.



Hình 4.



Hình 5.



Hình 6.



Hình 7.



Hình 8.

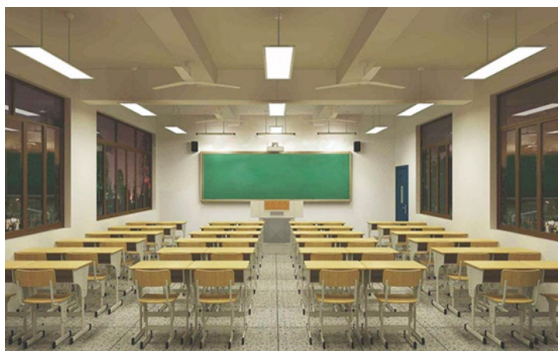
Lời giải

- + Hình 1: các dây điện chính truyền tải điện, các thanh ngang trên cột điện.
- + Hình 2: các đường thẳng nối giữa các viên gạch, nếu không vuông góc nhau thì chúng song song với nhau.
- + Hình 3: các cây sắt chạy dọc theo cầu thang, các cây trụ thẳng đứng nối các cây sắt trên lan can,...
- + Hình 4: các đường thẳng giữa các khe của những phím đàn.
- + Hình 5: 4 cây trụ của chiếc kệ
- + Hình 6: các đường thẳng nối giữa các viên gạch, nếu không vuông góc nhau thì chúng song song với nhau.

Các đường thẳng song song trong thực tế:

- + Các đường thẳng là các trụ của quạt điện gió. Hình 7.
- + Các đường thẳng là các trụ thẳng đứng của dàn giáo. Hình 8.

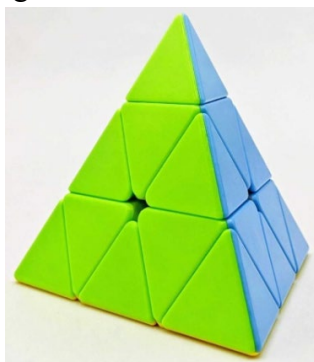
Câu 11: Trong phòng học của lớp, hãy nêu những hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng.



Lời giải

Những hình ảnh về đường thẳng song song với mặt phẳng: mép cột dọc với bảng; xà ngang trần nhà với mặt sàn; đường kẻ gạch trên nền nhà với trần nhà,.

Câu 12: Quan sát hình ảnh khối Rubik tam giác sau:

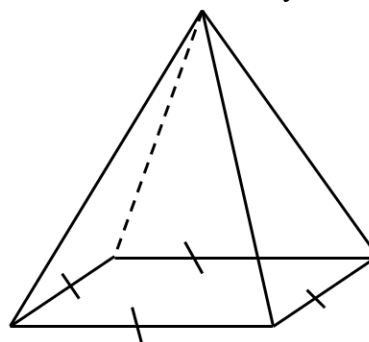


- a) Khối Rubik tam giác là hình chóp có bao nhiêu đỉnh? Có bao nhiêu cạnh bên?
- b) Khối Rubik tam giác có bao nhiêu mặt? mỗi mặt là hình gì?
- c) Khối Rubik trên gọi là hình gì?

Lời giải

- a) Khối Rubik tam giác là hình chóp có 4 đỉnh; có 3 cạnh bên.
- b) Khối Rubik tam giác có 4 mặt, mỗi mặt là tam giác đều.
- c) Khối Rubik trên gọi là hình chóp tam giác đều.

Câu 13: Quan sát hình ảnh chiếc lều cho trẻ em có hình minh họa dưới đây.

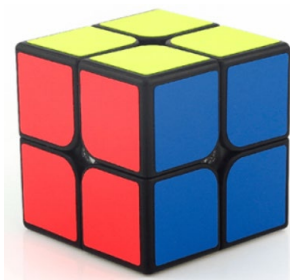


- a) Chiếc lều trên là hình chóp có bao nhiêu đỉnh? Có bao nhiêu cạnh bên?
- b) Chiếc lều trên là hình chóp có bao nhiêu mặt? mỗi mặt là hình gì?
- c) Hình chiếc lều trên gọi là hình gì?

Lời giải

- a) Chiếc lều trên là hình chóp có 5 đỉnh. Có 4 cạnh bên.
 b) Chiếc lều trên là hình chóp có 5 mặt. Mỗi mặt bên là một tam giác đều, mặt đáy là hình vuông.
 c) Hình chiếc lều trên gọi là hình chóp tứ giác đều.

Câu 14: Quan sát hình ảnh khối Rubik sau:



- a) Khối Rubik trên có bao nhiêu đỉnh? Có bao nhiêu cạnh?
 b) Khối Rubik trên bao nhiêu mặt? mỗi mặt là hình gì?
 b) Khối Rubik trên gọi là hình gì?

Lời giải

- a) Khối Rubik trên có 8 đỉnh. Có 12 cạnh.
 b) Khối Rubik trên 6 mặt. Mỗi mặt là hình vuông.
 b) Khối Rubik trên gọi là hình lập phương.

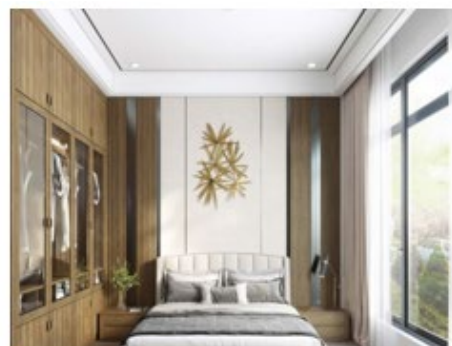
Câu 15: Chỉ ra các mặt phẳng song song trong các hình vẽ sau và chỉ ra một số ví dụ về mặt phẳng song song trong thực tế.



Hình 1.



Hình 2.

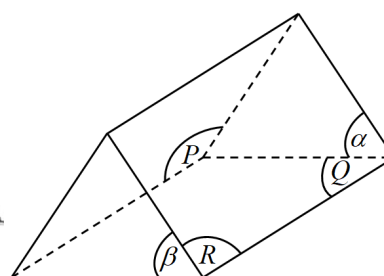


Hình 3.

Lời giải

- + Hình 1: các mặt phẳng chứa tấm pin song song với nhau.
 + Hình 2: mặt phẳng chứa sàn các tầng tòa nhà; Mặt phẳng chứa bức tường bên trái và bên phải; Mặt phẳng chứa bức tường phía trước và phía sau song song với nhau.

Câu 16: Quan sát hình ảnh chiếc lều và hình minh họa.



- a) Tìm ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo 3 giao tuyến song song.

b) Tìm các bộ ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo 3 giao tuyến đồng quy.

b) Hình minh họa gọi là hình gì ? có tổng tất cả bao nhiêu cạnh?

Lời giải

a) Bộ ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo 3 giao tuyến song song là: (P) , (Q) và (R) .

b) Tất cả các bộ ba mặt phẳng cắt nhau từng đôi một theo 3 giao tuyến đồng quy là: (P) , (α) và (Q) ; (P) , (α) và (R) ; (R) , (α) và (Q) ; (P) , (R) và (β) ; (P) , (Q) và (β) ; (Q) , (R) và (β) ; (P) , (α) và (β) .

b) Hình minh họa gọi là hình lăng trụ tam giác đều ? có tổng tất cả 9 cạnh.

Câu 17: Các công trình kiến trúc, các hình vật thể sau gọi là hình gì?



Hình 1. Kim tự tháp



Hình 2. Hộp phấn



Hình 3. Đèn kéo quân



Hình 4. Lịch để bàn



Hình 5. Vật trang trí



Hình 6. Khối rubik

Lời giải

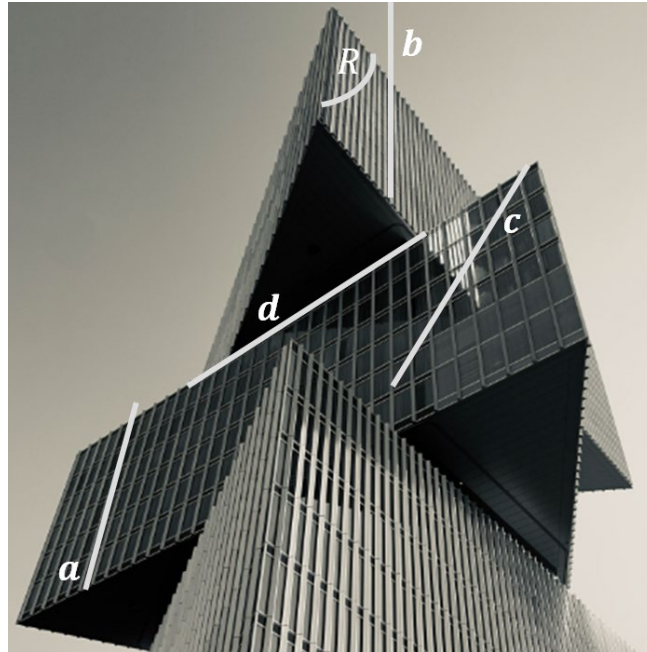
Hình 1 là hình chóp tứ giác đều;

Hình 2 là hình hộp chữ nhật;

Hình 3 và 4 là hình lăng trụ;

Hình 5 và 6 là hình lập phương.

Câu 18: Hình một tòa nhà cao tầng dưới đây.

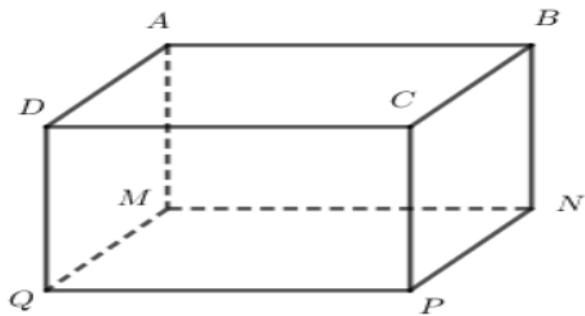
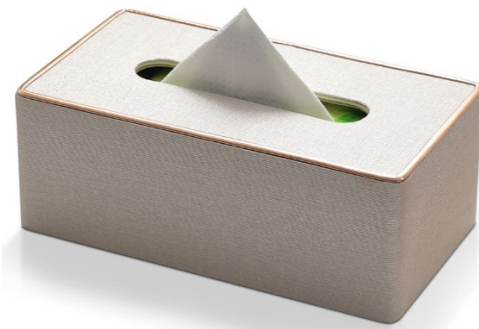


- a) Xác định vị trí tương đối giữa các cặp đường thẳng: a và b ; d và c ; d và b .
- b) Xác định vị trí tương đối của các đường thẳng a ; b ; c và d đối với mặt phẳng (R) .

Lời giải

- a) $a \parallel b$; d và c cắt nhau; d và b chéo nhau.
- b) $a \parallel (R)$; $b \subset (R)$; c cắt (R) ; d cắt (R) .

Câu 19: Hộp giấy là hình hộp chữ nhật có các mặt là hình chữ nhật được vẽ lại ở hình bên. Quan sát hình vẽ và chỉ ra các cặp mặt phẳng song song với nhau. Các đường thẳng song song với nhau;

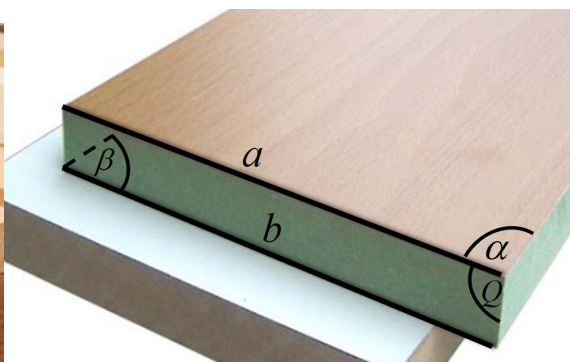


Lời giải

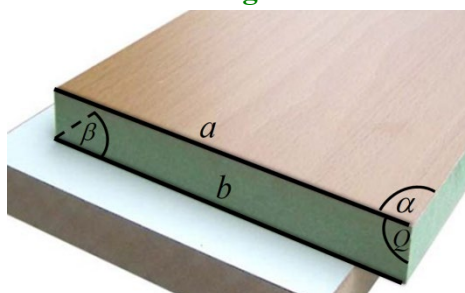
$(ABCD) \parallel (MNPQ)$; $(AMQD) \parallel (BNPC)$; $(ABNM) \parallel (DCPQ)$.

Các đường thẳng song song với nhau là: AB , MN , PQ và DC ; AM , BN , CP và DQ ; AD , MQ , NP và BC ;

Câu 20: Khi cắt một tấm ván, mặt cắt gọi lên hình ảnh mặt phẳng (Q) cắt hai mặt phẳng song song là mặt trên và mặt dưới của tấm ván theo hai giao tuyến là hai đường thẳng a và b . Cho biết hai đường thẳng a, b có song song với nhau hay không?



Lời giải



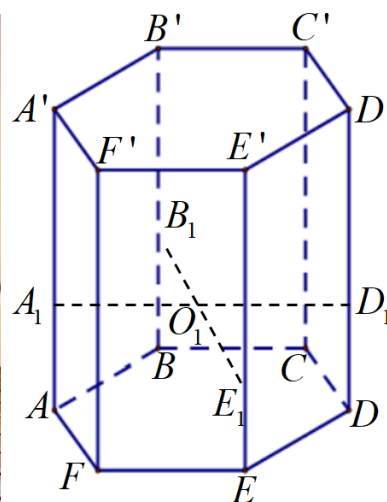
$$\text{Ta có: } \begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ (Q) \cap (\alpha) = a \Rightarrow a \parallel b. \\ (Q) \cap (\beta) = b \end{cases}$$

Câu 21: Để làm chiếc đèn kéo quân như hình 1. Bạn Bình làm một khung đèn kéo quân hình lăng trụ lục giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$. Để trang trí đường viền biên dưới cho đẹp, Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, B_1E_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (hình 2).

- Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(A_1B_1D_1E_1)$ với các mặt bên của lăng trụ.
- Gọi C_1 là giao điểm của CC' với mặt phẳng $(A_1F_1D_1E_1)$. Cho biết $A'A_1 = 5AA_1$ và $AA' = 60\text{cm}$. Tính CC' và $C'C_1$.

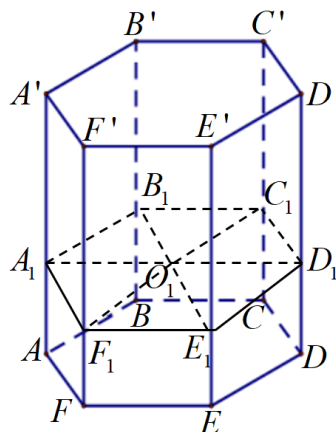


Hình 1.



Hình 2.

Lời giải



a) Ta có:
$$\begin{cases} A_1D_1 \parallel (ABCDEF) \\ B_1E_1 \parallel (ABCDEF) \\ A_1D_1, B_1E_1 \subset (A_1B_1D_1E_1) \end{cases} \Rightarrow (A_1B_1D_1E_1) \parallel (ABCDEF).$$

$$\begin{cases} (A_1B_1D_1E_1) \parallel (ABCDEF) \\ CD = (CDD'C') \cap (ABCDEF) \\ D_1 \in (CDD'C') \cap (A_1B_1D_1E_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D_1C_1 = (A_1B_1D_1E_1) \cap (CDD'C') \\ D_1C_1 \parallel DC; C_1 \in CC' \end{cases}.$$

$$\begin{cases} (A_1B_1D_1E_1) \parallel (ABCDEF) \\ EF = (FEE'F') \cap (ABCDEF) \\ E_1 \in (FEE'F') \cap (A_1B_1D_1E_1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} F_1E_1 = (A_1B_1D_1E_1) \cap (FEE'F') \\ F_1E_1 \parallel EF; F_1 \in FF' \end{cases}.$$

Ta có: $A_1B_1 = (A_1B_1D_1E_1) \cap (ABB'A')$; $B_1C_1 = (A_1B_1D_1E_1) \cap (BCC'B')$;

$C_1D_1 = (A_1B_1D_1E_1) \cap (CDD'C')$; $D_1E_1 = (A_1B_1D_1E_1) \cap (DEE'D')$;

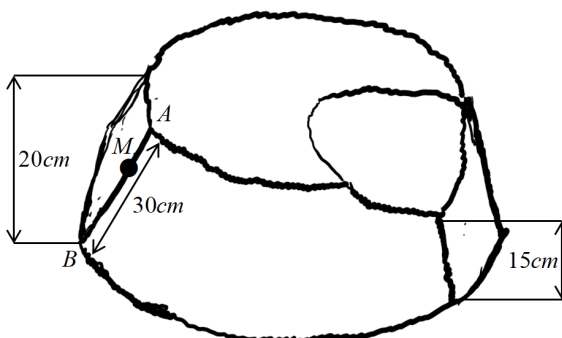
$E_1F_1 = (A_1B_1D_1E_1) \cap (FEE'F')$; $F_1A_1 = (A_1B_1D_1E_1) \cap (AFF'A')$.

b) $CC' = AA' = 60cm$ và $A'A_1 = 5AA_1 \Rightarrow \frac{A_1A'}{A_1A} = 5 \Rightarrow \frac{A'A_1}{A'A} = \frac{5}{6}$.

Do $(A_1B_1D_1E_1) \parallel (ABCDEF) \parallel (A'B'C'D'E'F')$

$$\frac{C'C_1}{C'C} = \frac{A'A_1}{A'A} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{C'C_1}{60} = \frac{5}{6} \Rightarrow C'C_1 = \frac{5}{6} \cdot 60 = 50cm.$$

Câu 22: Bác An cắt ngang một thân cây để làm mặt bàn. Sau khi cắt xong bác đo được bề dày của miếng ván là 20cm. Sau khi kiểm tra thì bác phát hiện một mặt bị lõm một phần do gỗ bị rỗng ruột, khoảng cách từ điểm bị hỏng trên thân đến mặt bàn lớn bên dưới là 15cm. Để làm đẹp mặt bàn thì bác quyết định cắt bỏ phần bị hỏng bằng một đường cưa song song với hai mặt bàn từ vị trí bị hỏng trên thân cây. Bác An đo 2 vị trí A, B trên 2 mặt bàn thì bác đo được $AB = 30cm$. Đường cưa cắt đoạn thẳng AB tại M. Tìm độ dài đoạn MB

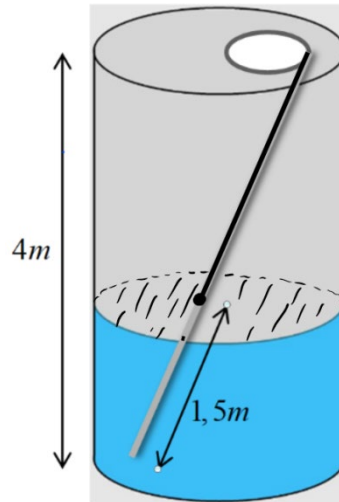


Lời giải

Do mặt cắt của đường cửa cùng với 2 mặt bàn tạo thành 3 mặt phẳng song song. Ta có:

$$\frac{BM}{BA} = \frac{15}{20} \Rightarrow BM = \frac{15}{20} 30 = 22,5 \text{ cm}.$$

Câu 23: Một bồn chứa nước hình trụ bằng bê tông cao 4, chỉ chừa 1 nắp nhỏ bên ngoài để bơm nước vào thùng, trong thùng có sẵn 1 lượng nước. Để đo chiều cao mực nước trong thùng bác An có cách như sau: lấy 1 cây sào tre dài 5m nhúng vào thùng nước sao cho một đầu chạm đáy và một đầu chạm với mặt trên của bồn nước. Sau khi rút sào tre ra thì đo được phần sào tre bị ướt là 1,5m. Hỏi mực nước trong hồ cao bao nhiêu mét?



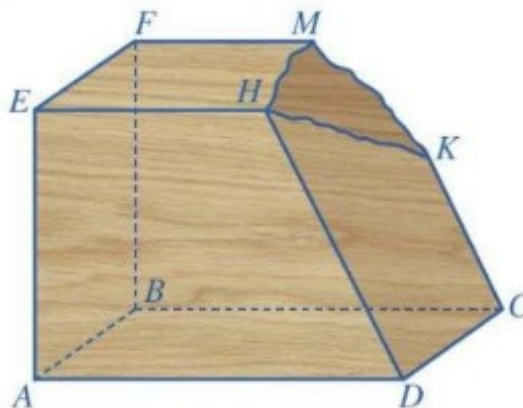
Lời giải

Gọi chiều cao mực nước trong hồ là x m, $x > 0$. Vì mặt phẳng mặt nước trong bồn, mặt đáy và nắp bồn tạo thành 3 mặt phẳng song song nên ta có:

$$\frac{x}{4} = \frac{1,5}{5} \Rightarrow x = \frac{1,5 \cdot 4}{5} = 1,2 \text{ m}.$$

Vậy mực nước trong bồn cao 1,2m.

Câu 24: Một khối gỗ có các mặt đều là một phần của mặt phẳng với $(ABCD) \parallel (EFMH)$, $CK \parallel DH$.



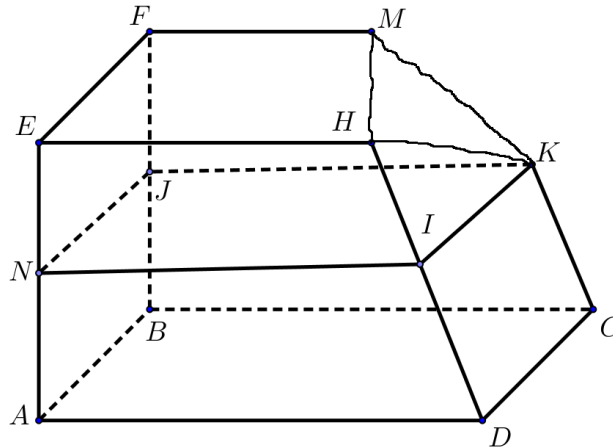
Hình 91

Khối gỗ bị hỏng một góc (Hình 91). Bác thợ mộc muốn làm đẹp khối gỗ bằng cách cắt khối gỗ theo mặt phẳng (R) đi qua K và song song với mặt phẳng $(ABCD)$.

a) Hãy giúp bác thợ mộc xác định giao tuyến của mặt phẳng (R) với các mặt của khối gỗ để cắt được chính xác.

- b) Gọi I, J lần lượt là giao điểm của DH, BF với mặt phẳng (R) . Biết $BF = 60$ cm, $DH = 75$ cm, $CK = 40$ cm. Tính FJ .

Lời giải



- a) Từ K dựng đường thẳng song song với BC cắt BF tại J . Từ J kẻ đường thẳng song song với AB cắt AE tại N . Từ N kẻ đường thẳng song song với AD cắt DH tại I . Khi đó $(R) \cap (CDHK) = IK$; $(R) \cap (BCKMF) = JK$; $(R) \cap (ABFE) = JN$; $(R) \cap (ADHE) = IN$.

Khi đó thiết diện của khối gỗ cắt bởi (R) là tứ giác $IKJN$.

Dễ có $(ABCD) \parallel (EFMH) \parallel (IKJN)$.

- b) Vì $CDIK$ là hình bình hành nên $ID = CK = 40$ cm $\Rightarrow HI = DH - ID = 75 - 40 = 30$ cm.

Theo phần a) có $(ABCD) \parallel (EFMH) \parallel (IKJN)$ nên áp dụng định lý Thalet trong không gian ta

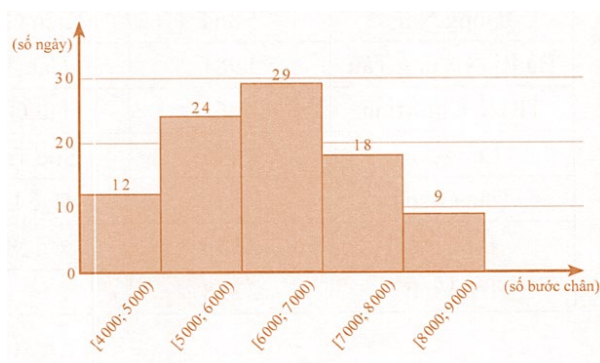
$$\text{có } \frac{FJ}{JB} = \frac{HI}{ID} = \frac{35}{40} = \frac{7}{8} \Rightarrow \frac{FJ}{BF} = \frac{7}{15} \Rightarrow FJ = \frac{7}{15} BF = 28 \text{ cm.}$$



CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU GHEP NHÓM

BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN THỐNG KÊ

Câu 1: Thảo thống kê lại số bước chân bạn đi mỗi ngày trong 3 tháng. Kết quả được biểu diễn ở biểu đồ ở bên.



- Hãy lập bảng tần số ghép nhóm, kèm theo giá trị đại diện biểu diễn dữ liệu thống kê trên.
- Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm:

Số bước chân	Giá trị đại diện	Số ngày
[4000; 5000)	4500	12
[5000; 6000)	5500	24
[6000; 7000)	6500	29
[7000; 8000)	7500	18
[8000; 9000)	8500	9

b) Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{12 \cdot 4500 + 24 \cdot 5500 + 29 \cdot 6500 + 18 \cdot 7500 + 9 \cdot 8500}{92} \approx 6369,57.$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm $[6000; 7000)$.

Do đó: $u_m = 6000; n_{m-1} = 24; n_m = 29; n_{m+1} = 18; u_{m+1} - u_m = 7000 - 6000 = 1000$.

Một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 6000 + \frac{29 - 24}{(29 - 24) + (29 - 18)} \cdot 1000 = 6312,5.$$

Câu 2: Diện tích các tỉnh và thành phố khu vực Nam Bộ được thống kê ở bảng sau:

Tỉnh/ thành phố	Diện tích (km^2)	Tỉnh/ thành phố	Diện tích (km^2)
Bình Phước	6877	Vĩnh Long	1526
Tây Ninh	4041	Đồng Tháp	3384
Bình Dương	2695	An Giang	3537
Đồng Nai	5864	Kiên Giang	6349
Bà Rịa - Vũng Tàu	1981	Cần Thơ	1439
TP.Hồ Chí Minh	2061	Hậu Giang	1622
Long An	4495	Sóc Trăng	3312
Tiền Giang	2511	Bạc Liêu	2669
Bến Tre	2395	Cà Mau	5221
Trà Vinh	2358		

(Nguồn: Tổng cục Thống kê)

- a) Hãy tính diện tích trung bình của mỗi tỉnh/thành phố khu vực Nam Bộ.
- b) Dựa vào số liệu trên, hãy hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm về diện tích các tỉnh khu vực Nam Bộ theo mẫu sau:

Diện tích (km^2)	[1000; 2500)	[2500; 4000)	[4000; 5500)	[5500; 7000)
Số tỉnh/thành phố	?	?	?	?

- c) Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

- a) Diện tích trung bình của mỗi tỉnh/thành phố khu vực Nam Bộ là

$$(6877 + 4041 + 2695 + 5864 + 1981 + 2061 + 4495 + 2511 + 2395 + 2358 + 1526 + 3384 + 3537 + 6349 + 1439 + 1622 + 3312 + 2669 + 5221) : 19 \approx 3386,16 \text{ (} km^2 \text{)}.$$

- b) Bảng tần số ghép nhóm:

Diện tích (km^2)	[1000; 2500)	[2500; 4000)	[4000; 5500)	[5500; 7000)
Số tỉnh/thành phố	7	6	3	3

- c) Bảng tần số ghép nhóm bao gồm giá trị đại diện của các nhóm như sau:

Diện tích (km^2)	[1000; 2500)	[2500; 4000)	[4000; 5500)	[5500; 7000)
Giá trị đại diện	1750	3250	4750	6250
Số tỉnh/ thành phố	7	6	3	3

Khi đó, số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{7.1750 + 6.3250 + 3.4750 + 3.6250}{19} \approx 3407,89.$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm [1000; 2500).

Do đó: $u_m = 1000; n_{m-1} = 0; n_m = 7; n_{m+1} = 6; u_{m+1} - u_m = 2500 - 1000 = 1500$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 1000 + \frac{7-0}{(7-0) + (7-6)} \cdot 1500 = 2312,5.$$

Câu 3: Nhân ngày hội đọc sách, các học sinh của một trường trung học phổ thông mang sách cũ đến tặng thư viện trường và trao đổi với các bạn học sinh khác. Bảng sau thống kê số sách cũ mà các bạn học sinh lớp 11B mang đến trường.

Số sách	[1; 3]	[4; 6]	[7; 9]	[10; 12]	[13; 15]
Số học sinh	5	14	10	8	3

Hãy ước lượng số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

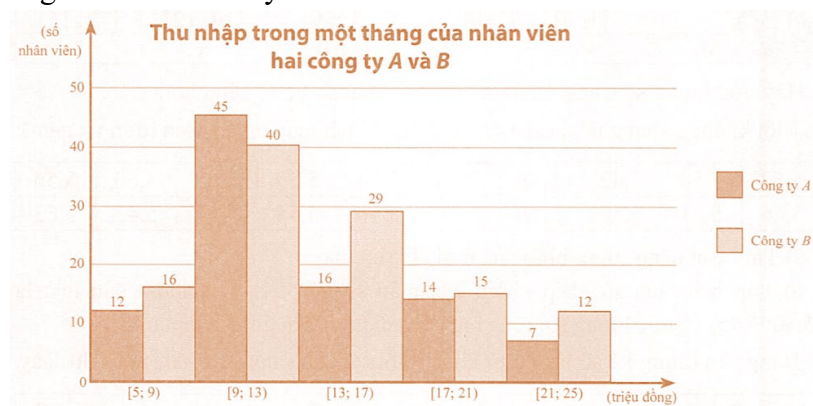
Bảng số liệu ghép nhóm hiệu chỉnh như sau:

Số sách	[0, 5; 3, 5)	[3, 5; 6, 5)	[6, 5; 9, 5)	[9, 5; 12, 5)	[12, 5; 15, 5)
Số học sinh	5	14	10	8	3

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là 7,25.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là $\frac{145}{26} \approx 5,58$.

Câu 4: Thống kê lại thu nhập trong một tháng của nhân viên hai công ty A và B (đơn vị: triệu đồng) được thể hiện trong biểu đồ dưới đây.



Hãy so sánh thu nhập trung bình của nhân viên hai công ty theo số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm.

Lời giải

Ta lập bảng thống kê thu nhập của nhân viên hai công ty như sau:

Thu nhập (đơn vị: triệu đồng)	Giá trị đại diện	Số nhân viên công ty A	Số nhân viên công ty B
[5; 9)	7	12	16
[9; 13)	11	45	40
[13; 17)	15	16	29
[17; 21)	19	14	15

[21; 25)	23	7	12

Số trung bình thu thập trong một tháng của nhân viên công ty A là

$$\bar{x}_A = \frac{12.7 + 45.11 + 16.15 + 14.19 + 7.23}{94} \approx 13,26 \text{ (triệu đồng)}.$$

Số trung bình thu thập trong một tháng của nhân viên công ty B là

$$\bar{x}_B = \frac{16.7 + 40.11 + 29.15 + 15.19 + 12.23}{112} \approx 13,82 \text{ (triệu đồng)}.$$

Vậy nếu so sánh theo số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm thì thu nhập của nhân viên công ty A thấp hơn thu nhập của nhân viên công ty B .

- Ta ước lượng một của thu nhập của nhân viên công ty A :

Nhóm một của mẫu số liệu là nhóm $[9; 13)$.

Do đó: $u_m = 9; n_{m-1} = 12; n_m = 45; n_{m+1} = 16; u_{m+1} - u_m = 13 - 9 = 4$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 9 + \frac{45 - 12}{(45 - 12) + (45 - 16)} \cdot 4 = \frac{345}{31} \approx 11,13.$$

- Ta ước lượng một của thu nhập của nhân viên công ty B :

Nhóm một của mẫu số liệu là nhóm $[9; 13)$.

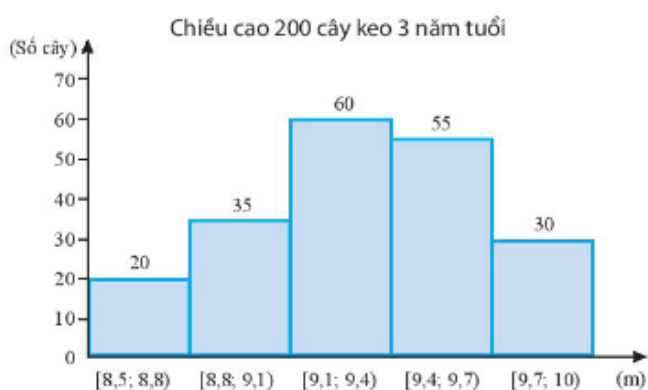
Do đó: $u_m = 9; n_{m-1} = 16; n_m = 40; n_{m+1} = 29; u_{m+1} - u_m = 13 - 9 = 4$.

Mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 9 + \frac{40 - 16}{(40 - 16) + (40 - 29)} \cdot 4 = \frac{411}{35} \approx 11,74.$$

Vậy nếu so sánh theo một của mẫu số liệu ghép nhóm, thu nhập của nhân viên công ty A thấp hơn thu nhập của nhân viên công ty B .

Câu 5: Kết quả đo chiều cao của 200 cây keo 3 năm tuổi ở một nông trường được biểu diễn ở biểu đồ dưới đây.



Hãy ước lượng số trung bình và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Chiều cao của 200 cây keo được thống kê như bảng sau:

Chiều cao	[8,5;8,8)	[8,8;9,1)	[9,1;9,4)	[9,4;9,7)	[9,7;10)
Giá trị đại diện	8,65	8,95	9,25	9,55	9,85
Số cây	20	35	60	55	30

Chiều cao trung bình của 200 cây xấp xỉ bằng:

$$(8,65.20 + 8,95.35 + 9,25.60 + 9,55.55 + 9,85.30) : 200 = 9,31 \text{ (m)}$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu là $[9,1;9,4)$

Do đó: $u_m = 9,1; n_{m-1} = 35; n_{m+1} = 55; u_{m+1} - u_m = 9,4 - 9,1 = 0,3$

Một của mẫu số liệu trên là:

$$M_0 = 9,1 + \frac{60 - 35}{(60 - 35) + (60 - 55)} \cdot 0,3 = 9,35 \text{ (m)}$$

Câu 6: Theo một thống kê ở Giải Bóng đá Ngoại hạng Anh, thời gian ra sân (giờ) của một số cựu cầu thủ qua các thời kì như sau:

653	632	609	572	565	535	516	514
508	505	504	504	503	499	496	492

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với 7 nhóm có độ dài bằng nhau.

Lời giải

Giá trị lớn nhất: 653.

Giá trị nhỏ nhất: 492.

Khoảng biến thiên là: $653 - 492 = 161$.

Với 7 nhóm có độ dài bằng nhau, ta có mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Thời gian ra sân (giờ)	Số cầu thủ
$[492;515)$	9
$[515;538)$	2
$[538;561)$	0
$[561;584)$	2
$[584;607)$	0
$[607;630)$	1
$[630;653]$	2

Câu 7: Bảng thống kê đây cho biết điện năng tiêu thụ của 30 hộ gia đình tại một khu dân cư ở Quận Gò Vấp-Thành phố Hồ Chí Minh trong một tháng (30 ngày) như sau (đơn vị: kW):

60	38	70	65	63	30	47	34	48	33	53	32	39	42	48
50	55	61	38	37	43	35	65	50	31	33	41	45	55	57

**CHUYÊN ĐỀ V – TOÁN – 11 – CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ
LIỆU GHEP NHÓM**

Hãy chuyển mẫu số liệu trên sang dạng ghép nhóm với 8 nhóm có độ dài bằng nhau và bằng 5.
Cho biết trung bình mỗi hộ tiêu thụ bao nhiêu kW trong một tháng?

Lời giải

Giá trị lớn nhất: 70 ; Giá trị nhỏ nhất: 30 ; Khoảng biến thiên là: $70 - 30 = 40$.

Với 8 nhóm có độ dài bằng nhau, ta có mẫu số liệu ghép nhóm như sau:

Giá trị	[30;35)	[35;40)	[40;45)	[45;50)	[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70]
Số lượng	6	5	3	3	4	3	3	3

+ Trong mỗi khoảng, giá trị đại diện là trung bình cộng của của hai giá trị đầu mút, nên ta có bảng sau:

Giá trị	32,5	37,5	42,5	47,5	52,5	57,5	62,5	67,5
Số lượng	6	5	3	3	4	3	3	3

Ta có:

$$\bar{x} = \frac{6 \times 32,5 + 5 \times 37,5 + 3 \times 42,5 + 3 \times 47,5 + 4 \times 52,5 + 3 \times 57,5 + 3 \times 62,5 + 3 \times 67,5}{6 + 5 + 3 + 3 + 4 + 3 + 3 + 3} = 47,5.$$

Vậy lượng điện tiêu thụ trung bình trong tháng của mỗi hộ là: 47,5 (kW).

Câu 8: Một cửa hàng máy tính thống kê số lượng Laptop bán ra mỗi ngày trong tháng 9 năm 2022 với kết quả được như bảng sau:

13 28 12 20 16 19 29 28 11 15 16 25 29 20 16
26 12 25 11 14 12 10 20 23 18 28 16 10 20 21

Hãy chia số liệu trên thành 5 nhóm, lập bảng tần số ghép nhóm, xác định giá trị đại diện cho mỗi nhóm.

Lời giải

Giá trị lớn nhất: 29 .

Giá trị nhỏ nhất: 10 .

Khoảng biến thiên là: $29 - 10 = 19$.

Độ dài mỗi nhóm $L > \frac{19}{5} = 3,8$. Chọn $L = 4$ và chia dữ liệu thành 5 nhóm như sau: [10;14),

[14;18), [18;22), [22;26), [26;30).

Khi đó, ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

Số Laptop bán	[10;14)	[14;18)	[18;22)	[22;26)	[26;30)
Giá trị đại diện	12	16	20	24	28
Số ngày	8	5	8	3	6

Câu 9: Một chốt kiểm tra tốc độ cố định trên Quốc lộ 51, đi qua địa phận tỉnh Bà Rịa - Vũng Tàu ghi lại ngẫu nhiên tốc độ của 30 xe ô tô như sau (đơn vị km/h) và có bảng thống kê như sau:

Tốc độ (km/h)	[36;43]	[44;51]	[52;59]	[60;67]	[68;75]	[76;83]
Số xe	3	6	6	8	3	4

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên?

Lời giải

Ta có bảng hiệu chỉnh lại như sau:

Tốc độ (km/h)	[35,5;43,5)	[43,5;51,5)	[51,5;59,5)	[59,5;67,5)	[67,5;75,5)	[75,5;83,5)
Số xe	3	6	6	8	3	4

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ là tốc độ của các xe ô tô được xếp theo thứ tự không giảm

Do $x_1, x_2, x_3 \in [35, 5; 43, 5)$, $x_4, x_5, \dots, x_9 \in [43, 5; 51, 5)$, $x_{10}, x_{11}, \dots, x_{15} \in [51, 5; 59, 5)$,

$x_{16}, x_{17}, \dots, x_{23} \in [59, 5; 67, 5)$, $x_{24}, x_{25}, x_{26} \in [67, 5; 75, 5)$, $x_{27}, \dots, x_{30} \in [75, 5; 83, 5)$ nên trung vị của

mẫu số liệu là $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16})$. Vì $x_{15} \in [51, 5; 59, 5)$ và $x_{16} \in [59, 5; 67, 5)$ nên trung vị $M_e = 59,5$.

Câu 10: Một công ty chuyên may đồng phục học sinh cho biết cỡ áo theo chiều cao của học sinh được tính như sau:

Chiều cao (cm)	[150;160)	[160;167)	[167;170)	[170;175)	[175;180)
Cỡ áo	S	M	L	XL	XXL

Để chuẩn bị cho việc may quần áo đồng phục cho học sinh khối 11 năm học 2023-2024 của trường Trung học Phổ thông X, Công ty tiến hành khảo sát chiều cao của 40 học sinh nam và thu được mẫu số liệu sau (đơn vị centimet):

160	161	161	161	162	162	162	163	163	163
164	164	164	164	165	165	165	165	166	166
166	167	167	168	168	168	168	169	169	169
170	170	171	171	171	172	172	174	174	174

- a) Lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu với các nhóm đã cho ở bảng trên.
- b) Công ty muốn may 350 áo đồng phục cho học sinh khối 11 thì nên may số lượng áo theo mỗi cỡ là bao nhiêu áo?

Lời giải

a) Ta có bảng tần số ghép nhóm như sau:

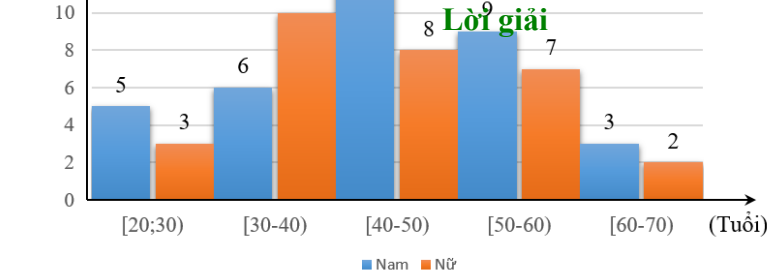
Chiều cao (cm)	[150,160)	[160,167)	[167,170)	[170,175)	[175,180)
Số học sinh	0	23	7	10	0

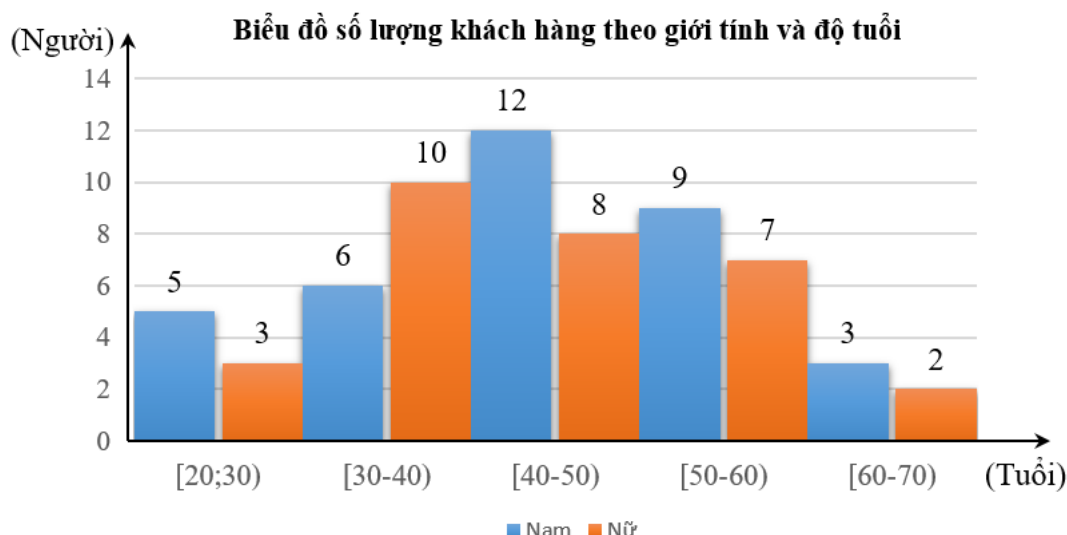
b) Dựa vào bảng tần số ghép nhóm, công ty nên may số lượng các cỡ áo như sau:

- Không nên may cỡ áo S và XXL.
- Cỡ áo M thì nên may $\frac{23}{40} \times 350 \approx 201$ áo.
- Cỡ áo L thì nên may $\frac{7}{40} \times 350 \approx 61$ áo.
- Cỡ áo XL thì nên may $350 - 201 - 61 = 88$ áo.

Câu 11: Một đại lý bảo hiểm nhân thọ tại Thành phố Hồ Chí Minh thống kê số lượng khách hàng mua bảo hiểm nhân thọ trong ngày Quốc tế Hạnh phúc 20 tháng 03 năm 2023 ở biểu đồ hình bên dưới:

- a) Hãy so sánh độ tuổi trung bình của khách hàng nam và nữ của đại lý bảo hiểm trên.
- b) Dựa vào dữ liệu trên, hãy tư vấn cho đại lý bảo hiểm xác định đúng khách hàng tiềm năng của mình ở độ tuổi nào để mua bảo hiểm nhất.





a) Dựa vào biểu đồ, ta có bảng thống kê như sau:

Độ tuổi	[20;30)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)
Khách hàng nam	5	6	12	9	3
Khách hàng nữ	3	10	8	7	2

Trong mỗi khoảng độ tuổi, giá trị đại diện là trung bình cộng của của hai giá trị đầu mút, nên ta có bảng sau:

Độ tuổi	25	35	45	55	65
Khách hàng nam	5	6	12	9	3
Khách hàng nữ	3	10	8	7	2

Độ tuổi trung bình của khách hàng nam là:

$$\bar{x} = \frac{5 \times 25 + 6 \times 35 + 12 \times 45 + 9 \times 55 + 3 \times 65}{5 + 6 + 12 + 9 + 3} \approx 45.$$

Độ tuổi trung bình của khách hàng nữ là:

$$\bar{x} = \frac{3 \times 25 + 10 \times 35 + 8 \times 45 + 7 \times 55 + 2 \times 65}{3 + 10 + 8 + 7 + 2} \approx 43.$$

b) Nhóm chứa một của mẫu số liệu khách hàng nam là $[40;50)$. Do đó

$$M_0 = 40 + \frac{12 - 6}{(12 - 6) + (12 - 7)} \cdot (50 - 40) = 45,5.$$

Dựa vào kết quả trên, ta suy ra khách hàng nam 46 tuổi có nhu cầu mua bảo hiểm cao nhất.

Nhóm chứa một của mẫu số liệu khách hàng nữ là $[30;40)$. Do đó

$$M_0 = 30 + \frac{10 - 3}{(10 - 3) + (10 - 8)} \cdot (40 - 30) = 37,7.$$

Dựa vào kết quả trên, ta suy ra khách hàng nữ 38 tuổi có nhu cầu mua bảo hiểm cao nhất.

Câu 12: Một công ty sản xuất lốp xe ô tô tiến hành một cuộc khảo sát để đánh giá tuổi thọ của lốp xe mà mình sản xuất. Tuổi thọ của lốp xe ô tô được tính theo quãng đường mà lốp được sử dụng cho đến khi bắt đầu xảy ra sự cố về lốp. Kết quả thống kê như sau:

Quãng đường (nghìn km)	[30;40)	[40;50)	[50;60)	[60;70)	[70;80)	[80;90)	[90;100)
Tần số	8	26	51	64	106	36	29

a) Hãy cho biết quãng đường lăn bánh trung bình của lốp xe do công ty sản xuất?

b) Số lượng chiếm nhiều nhất là loại lốp xe có quãng đường lăn bánh khoảng bao nhiêu km?

Lời giải

a) Bảng tần số ghép nhóm sau:

Quãng đường (nghìn km)	[30, 40)	[40, 50)	[50, 60)	[60, 70)	[70, 80)	[80, 90)	[90, 100)
Giá trị đại diện	35	45	55	65	75	85	95
Tần số	8	26	51	64	106	36	29

Áp dụng công thức tính trung bình ta có:

$$\bar{x} = \frac{8.35 + 26.45 + 51.55 + 64.65 + 106.75 + 36.85 + 29.95}{8 + 26 + 51 + 64 + 106 + 36 + 29} \approx 69,3.$$

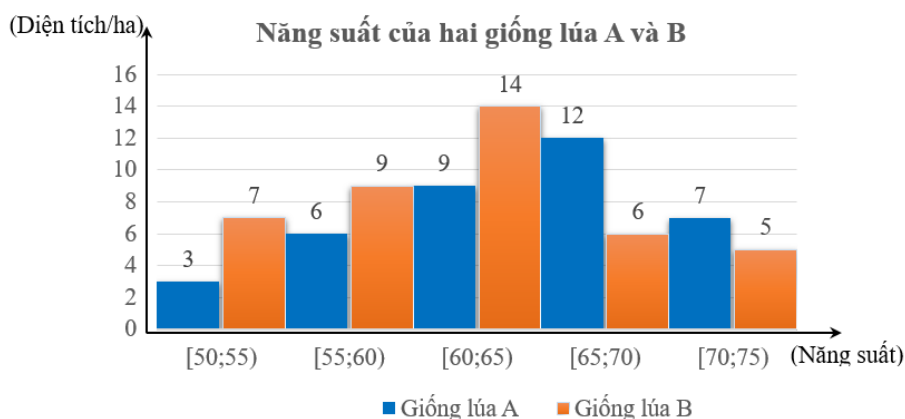
Vậy quãng đường lăn bánh trung bình của lớp xe của công ty sản xuất là 69,3 nghìn km.

b) Nhóm chứa một của mẫu số liệu là [70;80).

$$\text{Do đó: } M_0 = 70 + \frac{106 - 64}{(106 - 64) + (106 - 36)} \cdot (80 - 70) = 73,75.$$

Vậy loại lốp có quãng đường lăn bánh khoảng 73,8 nghìn km có số lượng nhiều nhất.

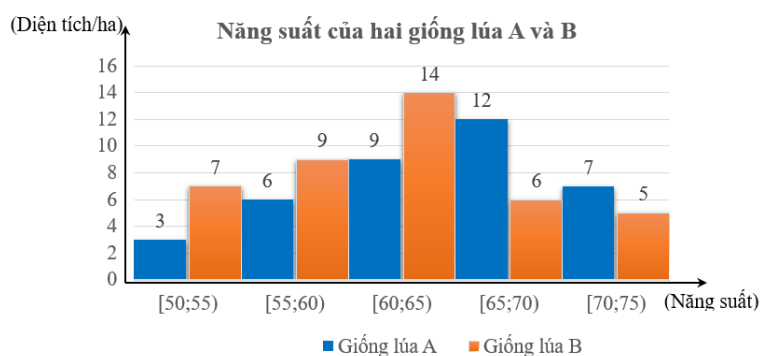
Câu 13: Một công ty lúa giống đã cho trồng thử nghiệm hai giống lúa vụ đông xuân tại một số địa phương ở Đồng Bằng sông Cửu Long. Với điều kiện khí hậu, thổ nhưỡng và chế độ chăm sóc như nhau. Cuối vụ, công ty tìm hiểu năng suất mỗi giống lúa trên những thửa ruộng trồng thí điểm và thu được dữ liệu được mô tả ở dạng biểu đồ như hình sau:



a) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu được mô tả trong biểu đồ.

b) So sánh năng suất của hai giống lúa A và B. Nếu triển khai trồng đại trà, thì quyết định nên trồng giống lúa nào?

Lời giải



a) Tính trung bình: Từ biểu đồ, ta có bảng tần số ghép nhóm sau:

Năng suất (tạ/ha)		[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)	[70;75)
Diện tích (ha)	Giống lúa A	3	6	9	12	7
	Giống lúa B	7	9	14	6	4

b) Ta có bảng sau:

Năng suất (tạ/ha)		[50;55)	[55;60)	[60;65)	[65;70)	[70;75)
Giá trị đại diện		52,5	57,5	62,5	67,5	72,5
Diện tích (ha)	Giống lúa A	3	6	9	12	7
	Giống lúa B	7	9	14	6	4

+ Tính trung bình:

Năng suất trung bình của hai giống lúa A và B

$$\bar{x}_A = \frac{3 \times 52,5 + 6 \times 57,5 + 9 \times 62,5 + 12 \times 67,5 + 7 \times 72,5}{3 + 6 + 9 + 12 + 7} \approx 64,4.$$

$$\bar{x}_B = \frac{7 \times 52,5 + 9 \times 57,5 + 14 \times 62,5 + 6 \times 67,5 + 4 \times 72,5}{7 + 9 + 14 + 6 + 4} \approx 61,4.$$

+ Tính trung vị:

Với giống lúa A: Gọi $x_1, x_2, \dots, x_7$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, x_3 \in [50;55)$; $x_4, \dots, x_9 \in [55;60)$, $x_{10}, \dots, x_{18} \in [60;65)$, $x_{19}, \dots, x_{30} \in [65;70)$,
 $x_{31}, x_7 \in [70;75)$.

+ Trung vị của mẫu số liệu là $x_{19} \in [65;70)$, nên ta có

$$M_e = 65 + \frac{\frac{37}{2} - (3 + 6 + 9)}{12} \cdot (70 - 65) \approx 65,2.$$

Với giống lúa B: Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{40}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \dots, x_7 \in [50;55)$; $x_8, \dots, x_{16} \in [55;60)$, $x_{17}, \dots, x_{30} \in [60;65)$, $x_{31}, \dots, x_{36} \in [65;70)$,
 $x_7, \dots, x_{40} \in [70;75)$.

+ Trung vị của mẫu số liệu là $\frac{1}{2}(x_{20} + x_{21}) \in [60;65)$, nên ta có

$$M_e = 60 + \frac{\frac{40}{2} - (7 + 9)}{14} \cdot (65 - 60) \approx 61,4.$$

+ Tính mốt

Với nhóm lúa A thì nhóm chứa mốt là $[65;70)$ nên ta có:

$$M_0 = 65 + \frac{12 - 9}{(12 - 9) + (12 - 7)} \cdot (70 - 65) \approx 66,9.$$

Với nhóm lúa B thì nhóm chứa mốt là $[60;65)$ nên ta có:

$$M_0 = 60 + \frac{14 - 9}{(14 - 9) + (14 - 6)} \cdot (65 - 60) \approx 61,9.$$

Dựa vào các dữ liệu về tính trung bình, trung vị và mốt ta nhận thấy giống lúa A có năng suất cao hơn giống lúa B. Do đó, nên triển khai trồng đại trà giống lúa B.

Câu 14: Để được cấp Chứng chỉ Ứng dụng Công Nghệ thông tin cơ bản của một trung tâm tin học, học viên phải trải qua 6 lần kiểm tra (1- Hiểu biết về công nghệ thông tin cơ bản; 2- Sử dụng máy tính cơ bản; 3- Xử lý văn bản cơ bản; 4- Sử dụng bảng tính cơ bản; 5- Sử dụng trình chiếu cơ bản; 6- Sử dụng internet cơ bản) thang điểm kiểm tra là 100 và phải đạt điểm trung bình từ 70 trở lên. Qua 5 lần thi, Thảo đạt điểm trung bình là 64,5 điểm. Hỏi trong lần kiểm tra cuối cùng Thảo phải đạt ít nhất bao nhiêu điểm để được cấp chứng chỉ?

Lời giải

Gọi x là số điểm trong lần kiểm tra cuối cùng của Thảo.

Ta có: Số điểm 5 lần thi của Thảo trước đó là: $64,5 \times 5 = 322,5$.

Do đó, để Thảo đạt được chứng chỉ thì: $\frac{x + 322,5}{6} = 70 \Rightarrow x = 97,5$.

Vậy để được cấp chứng chỉ, thì lần thi cuối Thảo phải đạt được từ 97,5 điểm trở lên.

Câu 15: Theo thống kê điểm thi trung bình môn Toán của một số học sinh đã trúng tuyển vào Trường THPT X trong kì thi tuyển sinh vào lớp 10 cho kết quả như bảng sau:

Khoảng điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)	[9,5;10)
Tần số	7	10	17	24	13	8	5

Hãy ước lượng số trung bình, tứ phân vị và một của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Bảng tần số ghép nhóm có giá trị đại diện là:

Khoảng điểm	[6,5;7)	[7;7,5)	[7,5;8)	[8;8,5)	[8,5;9)	[9;9,5)	[9,5;10)
Giá trị đại diện	6,75	7,25	7,75	8,25	8,75	9,25	9,75
Tần số	7	10	17	24	13	8	5

Điểm trung bình môn Toán của một số học sinh khi trúng tuyển vào lớp 10 là:

$$\bar{x} = \frac{7 \times 6,75 + 10 \times 7,25 + 17 \times 7,75 + 24 \times 8,25 + 13 \times 8,75 + 8 \times 9,25 + 5 \times 9,75}{84} = 8,1.$$

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{84}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \dots, x_7 \in [6,5;7)$; $x_8, \dots, x_{17} \in [7;7,5)$, $x_{18}, \dots, x_{34} \in [7,5;8)$, $x_{35}, \dots, x_{58} \in [8;8,5)$,

$x_{59}, \dots, x_{71} \in [8,5;9)$, $x_{72}, \dots, x_{79} \in [9;9,5)$, $x_{80}, \dots, x_{84} \in [9,5;10)$.

+ Tứ phân vị thứ hai:

Trung vị của mẫu số liệu là $\frac{1}{2}(x_{42} + x_{43}) \in [8;8,5)$, nên ta có:

$$Q_2 = 8 + \frac{\frac{84}{2} - 34}{24} \cdot (8,5 - 8) \approx 8,1.$$

+ Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu là $\frac{1}{2}(x_{21} + x_{22}) \in [7,5;8)$ nên ta có:

$$Q_1 = 7,5 + \frac{\frac{84}{4} - (7+10)}{17} \cdot (8 - 7,5) \approx 7,6.$$

+ Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $\frac{1}{2}(x_{63} + x_{64}) \in [8,5;9)$, nên ta có:

$$Q_3 = 8,5 + \frac{3.84}{4} - \frac{(7+10+17+24)}{13} \cdot (9-8,5) \approx 8,7.$$

+ Tìm một: Nhóm chứa một của mẫu số liệu là nhóm $[8; 8,5)$.

$$\text{Ta có: } M_0 = 8 + \frac{24-17}{(24-17)+(24-13)} \approx 8,3.$$

Câu 16: Trong một nghiên cứu, các nhà khoa học ghi lại tuổi thọ trung bình của một loài côn trùng cho kết quả như bảng sau:

Tuổi (ngày)	$[0; 20)$	$[20; 40)$	$[40; 60)$	$[60; 80)$	$[80; 100)$
Số lượng	6	12	23	31	39

a) Hãy cho biết tuổi thọ trung bình của loài côn trùng trên.

b) Hãy tìm một của mẫu số liệu trên. Em hãy giải thích ý nghĩa của giá trị nhận được?

Lời giải

a) Để tìm độ tuổi trung bình, ta lập bảng có giá trị đại diện tuổi thọ của loài côn trùng trên như sau:

Tuổi (ngày)	10	30	50	70	90
Số lượng	6	12	23	31	39

Tuổi trung bình của loài côn trùng trên là:

$$\bar{x} = \frac{6.10 + 12.30 + 23.50 + 31.70 + 39.90}{6 + 12 + 23 + 31 + 39} = 65,3.$$

b) Nhóm chứa một là nhóm $[80; 100)$. Ta có:

$$M_0 = 80 + \frac{39-31}{(39-31)+(39-0)} = 83,4.$$

Đều trên cho thấy các loài côn trùng trên có tuổi thọ tối là 83 ngày.

Câu 17: Tại phòng khám X. Quản lý muốn biết tình hình bệnh nhân đến khám bệnh mỗi ngày trong tháng 06 năm 2023 như thế nào, qua theo dõi đã lập được bảng thống kê như sau:

Số bệnh nhân	$[1; 10]$	$[11; 20]$	$[21; 30]$	$[31; 40]$	$[41; 50]$
Số ngày	6	8	7	7	2

a) Hãy ước lượng các tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Quản lý phòng khám cho rằng có khoảng 25% số ngày khám có nhiều hơn 35 bệnh nhân đến khám. Nhận định trên có hợp lý không?

Lời giải

a) Hiệu chỉnh bảng số liệu ta được:

Số bệnh nhân	$[0,5; 10,5)$	$[10,5; 20,5)$	$[20,5; 30,5)$	$[30,5; 40,5)$	$[40,5; 50,5)$
Số ngày	6	8	7	7	2

Tổng số ngày bệnh nhân đến khám là: $6 + 8 + 7 + 7 + 2 = 30$

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \dots, x_6 \in [0,5; 10,5)$; $x_7, \dots, x_{14} \in [10,5; 20,5)$, $x_{15}, \dots, x_{21} \in [20,5; 30,5)$,

$x_{22}, \dots, x_{28} \in [30,5; 40,5)$, $x_{29}, x_{30} \in [40,5; 50,5)$.

+ Tứ phân vị thứ hai:

Trung vị của mẫu số liệu là $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) \in [20,5; 30,5)$, nên ta có

$$Q_2 = 20,5 + \frac{\frac{30}{2} - 8}{7} \cdot (30,5 - 20,5) \approx 31,2.$$

+ Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu là $x_8 \in [10,5; 20,5)$ nên ta có:

$$Q_1 = 10,5 + \frac{\frac{30}{4} - 6}{8} \cdot (20,5 - 10,5) \approx 12,4.$$

+ Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là $x_{24} \in [30,5; 40,5)$, nên ta có:

$$Q_3 = 30,5 + \frac{\frac{3 \cdot 30}{4} - (6 + 8 + 7)}{7} \cdot (40,5 - 30,5) \approx 32,6.$$

Câu 18: Theo một thống kê trên Thế giới trong dữ liệu của chúng ta (Our World In Data) năm 2020 cơ cấu dân số Việt Nam theo độ tuổi được trình bày trong bảng sau:

Độ tuổi	Dưới 5	5-14	15-24	25-64	Trên 65
Số người (triệu)	7,89	14,68	13,32	53,78	7,66

(Theo <http://ourworldindata.org>)

Chọn 75 là giá trị đại diện cho nhóm trên 65 tuổi. Hãy tính độ tuổi trung bình của người Việt Nam năm 2020.

Lời giải

Ta hiệu chỉnh bảng số liệu đã cho như sau:

Độ tuổi	$[0; 5,5)$	$[5,5; 14,5)$	$[14,5; 24,5)$	$[24,5; 64,5)$	Trên 65
Số người (triệu)	7,89	14,68	13,32	53,78	7,66

Trong mỗi khoảng độ tuổi, giá trị đại diện là trung bình cộng của hai giá trị đầu mút và đề Câu cho 75 là tuổi đại diện cho nhóm trên 65 tuổi, nên ta có bảng sau:

Độ tuổi	2,75	10	19,5	44,5	80
Số người (triệu)	7,89	14,68	13,32	53,78	7,66

Dân số Việt Nam năm 2020 là: $7,89 + 14,68 + 13,32 + 53,78 + 7,66 = 97,33$ (triệu người).

Do đó, độ tuổi trung bình của người Việt Nam năm 2020 là:

$$\bar{x} = \frac{7,89 \times 2,75 + 14,68 \times 10 + 13,32 \times 19,5 + 53,78 \times 44,5 + 7,66 \times 75}{97,33} \approx 35 \text{ (tuổi)}.$$

Câu 19: Theo số liệu thống kê trên một website Thương mại điện tử X , số lượng khách hàng truy cập mỗi ngày trong tháng 4 năm 2023 như sau:

Ngày	Lượt truy cập	Ngày	Lượt truy cập	Ngày	Lượt truy cập
1	20 621	11	16 800	21	15 415
2	16 045	12	15 322	22	15 231
3	15 501	13	16 577	23	16 120
4	14 966	14	16 261	24	16 191
5	14 199	15	15 678	25	16 539
6	18 002	16	15 239	26	15 267
7	15 499	17	14 211	27	16 799

8	16 901	18	14 286	28	16 001
9	16 862	19	15 002	29	16 831
10	17 940	20	14 817	30	16 999

a) Xác định số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu trên. Mẫu số liệu có bao nhiêu giá trị ngoại lệ.

b) Em hãy hoàn thiện bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Lượt truy cập (nghìn)	[14;15,5)	[15,5;17)	[17;18,5)	[18,5;20)	[20;21,5)
Số ngày	?	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng số trung bình và tứ phân vị của mẫu số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Lời giải

a) Số trung bình $\bar{x} = \frac{20621+16045+...+16999}{30} \approx 1671$.

Tứ phân vị:

Xếp mẫu dữ liệu không giảm, ta được:

14199 14211 14286 14817 14966 15002 15231 15239 15267 15322
15415 15499 15501 15678 16001 16045 16120 16191 16261 16539
16577 16799 16800 16831 16862 16901 16999 17940 18002 20621

Từ đó, ta có:

Tứ phân vị thứ hai $Q_2 = 16023$.

Tứ phân vị thứ nhất $Q_1 = 15239$.

Tứ phân vị thứ ba $Q_3 = 16800$.

b) Hoàn thành bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Lượt truy cập (nghìn)	[14;15,5)	[15,5;17)	[17;18,5)	[18,5;20)	[20;21,5)
Số ngày	12	15	2	0	1

c) Số trung bình, tứ phân vị

Lượt truy cập (nghìn)	[14;15,5)	[15,5;17)	[17;18,5)	[18,5;20)	[20;21,5)
Giá trị đại diện	14,75	16,25	17,75	19,25	20,75
Số ngày	12	15	2	0	1

$$x = \frac{14,75 \times 12 + 16,25 \times 15 + 17,75 \times 2 + 19,25 \times 0 + 20,75 \times 1}{30} = 15,9.$$

Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{30}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, x_2, \dots, x_{12} \in [14;15,5)$; $x_{13}, \dots, x_{27} \in [15,5;17)$, $x_{28}, x_{29} \in [17;18,5)$, $x_{30} \in [20;21,5)$.

+ Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu là $\frac{1}{2}(x_{15} + x_{16}) \in [15,5;17)$ nên ta có

$$Q_2 = u_m + \frac{\frac{n}{2} - C}{n_m} (u_{m+1} - u_m) = 15,5 + \frac{\frac{30}{2} - 12}{15} (17 - 15,5) = 15,8.$$

+ Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu là $x_8 \in [14;15,5)$ nên ta có:

$$Q_1 = 14 + \frac{\frac{30}{4} - 0}{12} (15,5 - 14) \approx 14,9.$$

+ Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu là $u_{23} \in [15,5;17)$ nên ta có:

$$Q_3 = 15,5 + \frac{\frac{3.30}{4} - 12}{15} (17 - 15,5) = 16,5.$$

Câu 20: Một cửa hàng đã ghi lại số tiền bán xăng cho 35 khách hàng đi xe máy. Mẫu số liệu gốc có dạng: $x_1, x_2, \dots, x_{35}$ trong đó x_i là số tiền bán xăng cho khách hàng thứ i . Vì một lí do nào đó, cửa hàng chỉ có mẫu số liệu ghép nhóm dạng sau:

Số tiền (nghìn đồng)	[0;30)	[30;60)	[60;90)	[90;120)
Số khách hàng	3	15	10	7

Bảng 3.1. Số tiền khách hàng mua xăng

Hãy tính các số đặc trưng cho mẫu số liệu trong Bảng 3.1 và giải thích ý nghĩa của các giá trị thu được.

Lời giải

Ta có:

Số tiền (nghìn đồng)	[0;30)	[30;60)	[60;90)	[90;120)
Số khách hàng	3	15	10	7

Bảng 3.1. Số tiền khách hàng mua xăng

+) Số trung bình

Trong mỗi khoảng số tiền, giá trị đại diện là trung bình cộng của giá trị hai đầu mút nên ta có bảng sau:

Số tiền (nghìn đồng)	15	45	75	105
Số khách hàng	3	15	10	7

Tổng số khách hàng là $n = 35$. Số trung bình là $\bar{x} = \frac{3.15 + 15.45 + 10.75 + 7.105}{35} = 63$

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc. Từ đó, ta thấy số tiền bán xăng trung bình của 35 khách hàng xấp xỉ 63 nghìn đồng và có thể dùng làm đại diện cho mẫu số liệu.

+) Số trung vị, tứ phân vị

Cỡ mẫu là $n = 35$.

- Gọi $x_1, x_2, \dots, x_{35}$ là số tiền xăng của 35 khách hàng và giả sử dãy này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó, trung vị là x_{18} . Do x_{18} thuộc nhóm $[30; 60)$ nên nhóm này chứa trung vị.

Do đó, $p = 2; a_2 = 30; m_2 = 15; m_1 = 3; a_3 - a_2 = 60 - 30 = 30$ và ta có

$$M_e = 30 + \frac{\frac{35}{2} - 3}{15} \cdot 30 = 59$$

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm xấp xỉ cho trung vị của mẫu số liệu gốc, nó chia mẫu số liệu gốc thành hai phần, mỗi phần chứa 50 % giá trị. Từ đó ta thấy trung vị của mẫu số liệu gốc xấp xỉ bằng 59, giá trị này là ngưỡng để chia mẫu số liệu gốc thành 2 phần.

- Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là x_9 . Do x_9 thuộc nhóm $[30; 60)$ nên nhóm này chứa Q_1 . Do đó,

$$p = 2; a_2 = 30; m_2 = 15; m_1 = 3; a_3 - a_2 = 60 - 30 = 30 \text{ và ta có } Q_1 = 30 + \frac{\frac{35}{2} - 3}{15} \cdot 30 = 41,5$$

- Tứ phân vị thứ ba Q_3 là x_{27} . Do x_{27} thuộc nhóm $[60; 90)$ nên nhóm này chứa Q_3 . Do đó,
 $p = 3; a_3 = 60; m_3 = 10; m_1 + m_2 = 3 + 15 = 18; a_4 - a_3 = 90 - 60 = 30$ và ta có

$$Q_3 = 60 + \frac{\frac{3.35}{4} - 18}{10} \cdot 30 = 84,75$$

- Tứ phân vị thứ hai $Q_2 = M_e = 59$.

Do đó, các tứ phân vị của mẫu số liệu gốc xấp xỉ là $Q_1 = 41,5$; $Q_2 = 59$ và $Q_3 = 84,75$, mỗi giá trị này là các ngưỡng để chia mẫu số liệu thành 4 phần, mỗi phần chứa 25% giá trị.

+) Một

Tần số lớn nhất là 15 nên nhóm chứa một là nhóm $[30; 60)$. Ta có,
 $j = 2, a_2 = 30, m_2 = 15, m_1 = 3, m_3 = 10, h = 30$. Do đó $M_o = 30 + \frac{15 - 3}{(15 - 3) + (15 - 10)} \cdot 30 \approx 51,18$.

Do đó, một của mẫu số liệu gốc xấp xỉ bằng 51,18. Vậy số khách hàng mua xăng với giá tiền khoảng 51,18 nghìn đồng là nhiều nhất.

Câu 21: Phỏng vấn một số học sinh khối 11 về thời gian (giờ) ngủ của một buổi tối, thu được bảng số liệu ở bên.

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
[4; 5)	6	4
[5; 6)	10	8
[6; 7)	13	10
[7; 8)	9	11
[8; 9)	7	8

- a) So sánh thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nam và nữ.
b) Hãy cho biết 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất bao nhiêu giờ?

Lời giải

a) Trong mỗi khoảng thời gian, giá trị đại diện là trung bình cộng của giá trị hai đầu mút nên ta có bảng sau:

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ
4,5	6	4
5,5	10	8
6,5	13	10
7,5	9	8
8,5	7	8

Tổng số các bạn nam là $n_1 = 6 + 10 + 13 + 9 + 7 = 45$.

Thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nam là

$$\bar{x}_1 = \frac{6.4,5 + 10.5,5 + 13.6,5 + 9.7,5 + 7.8,5}{45} \approx 6,52$$

Tổng số các bạn nữ là $n_2 = 4 + 8 + 10 + 11 + 8 = 41$.

Thời gian ngủ trung bình của các bạn học sinh nữ là

$$\bar{x}_2 = \frac{4.4,5 + 8.5,5 + 10.6,5 + 11.7,5 + 8.8,5}{41} \approx 6,77.$$

Vì $6,52 < 6,77$ nên thời gian ngủ trung bình của các học sinh nam ít hơn các học sinh nữ.

b) Ta có:

Thời gian	Số học sinh nam	Số học sinh nữ	Số học sinh khối 11
[4;5)	6	4	10
[5;6)	10	8	18
[6;7)	13	10	23
[7;8)	9	11	20
[8;9)	7	8	15

Tổng số học sinh khối 11 được khảo sát là $n = 45 + 41 = 86$.

Gọi $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{86}$ là thời gian ngủ của các học sinh khối 11 được khảo sát và giả sử dãy này đã sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Khi đó trung vị của mẫu số liệu là $\frac{x_{43} + x_{44}}{2}$.

Do đó, tứ phân vị thứ ba $Q_3 = x_{65}$. Vì x_{65} thuộc nhóm [7;8) nên nhóm này chứa Q_3 . Do đó, $p = 4; a_4 = 7; m_4 = 20; m_1 + m_2 + m_3 = 10 + 18 + 23 = 51; a_5 - a_4 = 8 - 7 = 1$ và ta có

$$Q_3 = 7 + \frac{\frac{3.86}{4} - 51}{20} . 1 = 7,675$$

Tứ phân vị thứ ba Q_3 chia mẫu số liệu thành 2 phần, phần dưới chiếm 75% số liệu của mẫu và phần trên chiếm 25% số liệu của mẫu.

Vậy 75% học sinh khối 11 ngủ ít nhất 7,675 giờ.

Câu 22: Độ bão hoà oxygen trong máu (còn được gọi là chỉ số SpO_2) biểu thị cho tỉ lệ hemoglobin có oxygen trên tổng lượng hemoglobin trong máu. Chỉ số SpO_2 (đơn vị đo là %) từ 97 - 99 là oxygen trong máu tốt, 94 - 96 là oxygen trong máu trung bình, 90-93 là oxygen trong máu thấp, dưới 90 là trường hợp cấp cứu trên lâm sàng (Theo: Vinmec.com). Đo chỉ số SpO_2 ở một số bệnh nhân Covid-19 người ta thu được kết quả sau:

SpO_2 (%)	90 – 93	94 – 96	97 – 99
Số bệnh nhân	12	31	7

a) Cho biết các nhóm số liệu và tần số tương ứng.

b) Tính số trung bình, trung vị và giải thích ý nghĩa của các giá trị thu được.

Lời giải

a) Có 3 nhóm số liệu gồm 90 - 93, 94 - 96, 97 - 99 với tần số tương ứng là 12, 31, 7.

b) Trước hết, ta hiệu chỉnh các nhóm số liệu và thu được bảng thống kê sau:

SpO_2 (%)	[89,5;93,5)	[93,5;96,5)	[96,5;99,5)
Số bệnh nhân	12	31	7

Các giá trị đại diện cho các nhóm số liệu tương ứng là $(89,5 + 93,5) / 2 = 91,5$; $(93,5 + 96,5) / 2 = 95$ và $(96,5 + 99,5) / 2 = 98$.

Cỡ mẫu $n = 12 + 31 + 7 = 50$. Do đó, số trung bình là $\bar{x} = \frac{1}{50}(12 \cdot 91,5 + 31 \cdot 95 + 7 \cdot 98) = 94,58$

Do có $n/2 = 25$ giá trị nhỏ hơn trung vị nên trung vị thuộc nhóm $[93,5;96,5)$. Ta có, $a_p = 93,5$; $a_{p+1} = 96,5$; $m_1 + \dots + m_{p-1} = 12$, $m_p = 31$. Do đó, trung vị là

$$M_e = 93,5 + \frac{25-12}{31} \cdot 3 \approx 94,76.$$

Như vậy, chỉ số SpO_2 trung bình của 50 bệnh nhân là 94,58; có 25 bệnh nhân có chỉ số SpO_2 nhỏ hơn 94,76 và 25 bệnh nhân có chỉ số SpO_2 lớn hơn 94,76.

Nhận xét. Nếu chỉ tính số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm thì ta không cần hiệu chỉnh nhóm rời rạc $k_1 - k_2$, chọn giá trị đại diện là $\frac{k_1 + k_2}{2}$.

Câu 23: Một công ty cung cấp nước sạch thống kê lượng nước các hộ gia đình trong một khu vực tiêu thụ trong một tháng ở bảng sau:

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

a) Hãy ước lượng số trung bình, mốt và trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Công ty muốn gửi một thông báo khuyến nghị tiết kiệm nước đến 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất. Hỏi công ty nên gửi đến các hộ tiêu thụ từ bao nhiêu mét khối nước trở lên?

Lời giải

a) Cỡ mẫu $n = 160$.

Bảng tần số ghép nhóm của mẫu số liệu trên như sau:

Lượng nước tiêu thụ (m^3)	[3;6)	[6;9)	[9;12)	[12;15)	[15;18)
Giá trị đại diện	4,5	7,5	10,5	13,5	16,5
Số hộ gia đình	24	57	42	29	8

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho là

$$\bar{x} = \frac{1}{160} (24 \cdot 4,5 + 57 \cdot 7,5 + 42 \cdot 10,5 + 29 \cdot 13,5 + 8 \cdot 16,5) = 9,375.$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu ghép nhóm trên là nhóm [6;9).

Do đó: $u_m = 6; n_m = 57; n_{m-1} = 24; n_{m+1} = 42; u_{m+1} = 9$.

$$\text{Mốt của mẫu số liệu là } M_o = 6 + \frac{(57-24)}{(57-24) + (57-42)} \cdot (9-6) = 8,0625.$$

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{160}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có: $x_1, \dots, x_{24} \in [3;6); x_{25}, \dots, x_{81} \in [6;9); x_{82}, \dots, x_{123} \in [9;12);$

$x_{124}, \dots, x_{152} \in [12;15); x_{153}, \dots, x_{160} \in [15;18).$

Cỡ mẫu $n = 160$ là số chẵn nên trung vị là $M_e = \frac{1}{2}(x_{80} + x_{81})$.

Do x_{80} và x_{81} thuộc nhóm [6;9) nên trung vị của mẫu số liệu là

$$M_e = 6 + \frac{\frac{160}{2} - 24}{57} \cdot (9-6) \approx 8,95.$$

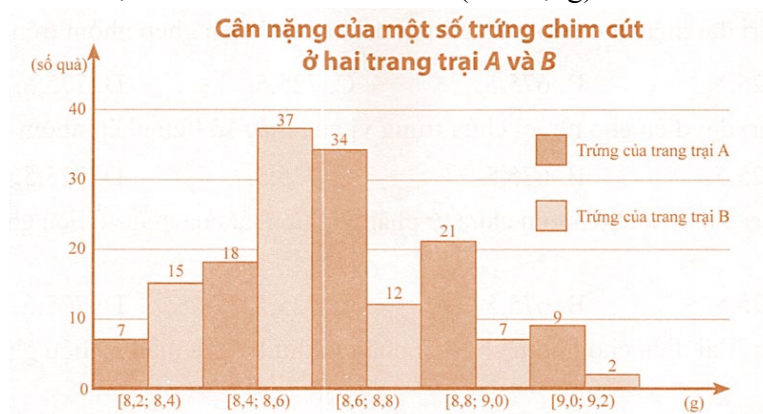
b) 25% các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ cao nhất có lượng nước tiêu thụ không nhỏ hơn Q_3 , với Q_3 là tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu.

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{160}$ là $\frac{1}{2}(x_{120} + x_{121})$. Do x_{120} và x_{121} thuộc nhóm

$$[9;12) \text{ nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu là } Q_3 = 9 + \frac{\frac{160 \cdot 3}{4} - (24 + 57)}{42} \cdot (12-9) \approx 11,79.$$

Vậy công ty nên gửi thông báo tiết kiệm nước đến các hộ gia đình có lượng nước tiêu thụ từ $11,79 m^3$ nước trở lên.

Câu 24: Kết quả kiểm tra cân nặng của một số quả trứng chim cút được lựa chọn ngẫu nhiên ở hai trang trại chăn nuôi A và B được biểu diễn ở biểu đồ sau (đơn vị: g).



- a) Hãy so sánh cân nặng của trứng chim cút của hai trang trại A và B theo số trung bình và trung vị.
- b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba của cân nặng trứng chim cút của trang trại A .

Lời giải

a) Từ biểu đồ đã cho, ta lập được bảng số liệu ghép nhóm sau:

Cân nặng (gam)	[8,2; 8,4)	[8,4; 8,6)	[8,6; 8,8)	[8,8; 9,0)	[9,0; 9,2)
Số quả trứng của trại A	7	18	34	21	9
Số quả trứng của trại B	15	37	12	7	2

Từ đó, ta có bảng thống kê số quả trứng chim cút của hai trang trại theo giá trị đại diện như sau:

Cân nặng đại diện (gam)	8,3	8,5	8,7	8,9	9,1
Số quả trứng của trang trại A	7	18	34	21	9
Số quả trứng của trang trại B	15	37	12	7	2

- Đối với trang trại A : Cỡ mẫu $n_A = 89$.

Cân nặng trung bình của mỗi quả trứng của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_A = \frac{8,3 \cdot 7 + 8,5 \cdot 18 + 8,7 \cdot 34 + 8,9 \cdot 21 + 9,1 \cdot 9}{89} \approx 8,72(g).$$

Trung vị của dãy số liệu là số liệu thứ 45 theo thứ tự không giảm của dãy và thuộc nhóm $[8,6; 8,8)$.

$$\text{Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là } M_e(A) = 8,6 + \frac{\frac{89}{2} - 25}{34} \cdot (8,8 - 8,6) \approx 8,71.$$

- Đối với trang trại B :

Cỡ mẫu $n_B = 73$.

Cân nặng trung bình của mỗi quả trứng của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_B = \frac{8,3.15 + 8,5.37 + 8,7.12 + 8,9.7 + 9,1.2}{73} \approx 8,55.$$

Trung vị của dãy số liệu là số liệu thứ 37 theo thứ tự không giảm của dãy và thuộc nhóm $[8,4;8,6)$.

$$\text{Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là } M_e(B) = 8,4 + \frac{\frac{73}{2} - 15}{37} \cdot (8,6 - 8,4) \approx 8,52.$$

Ta thấy $\bar{x}_A > \bar{x}_B$ và $M_e(A) > M_e(B)$. Vậy khi so sánh theo số trung bình hay theo trung vị, cân nặng của trứng chim cút của trang trại A đều lớn hơn cân nặng của trứng chim cút của trang trại B.

b) Đối với trang trại A :

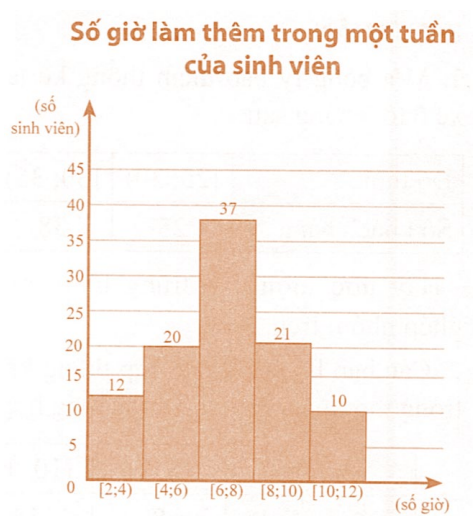
Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu là trung bình cộng của số liệu thứ 22 và 23 theo thứ tự không giảm của dãy và thuộc nhóm $[8,4;8,6)$, nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1(A) = 8,4 + \frac{\frac{1.89}{2} - 7}{18} \cdot (8,6 - 8,4) \approx 8,57$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là trung bình cộng của số liệu thứ 67 và 68 theo thứ tự không giảm của dãy và thuộc nhóm $[8,8;9,0)$, nên tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu

$$\text{ghép nhóm là } Q_3(A) = 8,8 + \frac{\frac{3.89}{2} - 59}{21} \cdot (9,0 - 8,8) \approx 8,87.$$

Câu 25: Kết quả điều tra về số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên được cho ở biểu đồ bên. Hãy ước lượng số trung bình, mốt và các tứ phân vị của số liệu đó.



Lời giải

Từ mẫu số liệu ghép nhóm, ta có bảng thống kê số giờ làm thêm trong một tuần của 100 sinh viên như sau:

Số giờ làm thêm	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)	[10; 12)
Số giờ làm thêm đại diện	3	5	7	9	11
Số sinh viên	12	20	37	21	10

Cỡ mẫu $n = 100$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 12 + 5 \cdot 20 + 7 \cdot 37 + 9 \cdot 21 + 11 \cdot 10}{100} = 6,94.$$

Nhóm chứa một của mẫu số liệu trên là nhóm $[6; 8)$.

Do đó: $u_m = 6; n_m = 37, n_{m-1} = 20; n_{m+1} = 21; u_{m+1} = 8$.

Vậy một của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_o = 6 + \frac{37 - 20}{(37 - 20) + (37 - 21)} \cdot (8 - 6) \approx 7,03.$$

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là mẫu số liệu được xếp theo thứ tự không giảm.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{50} + x_{51})$.

Do x_{50} và x_{51} thuộc nhóm $[6; 8)$ nên $Q_2 = 6 + \frac{\frac{2 \cdot 100}{4} - 32}{37} \cdot (8 - 6) \approx 6,97$.

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26})$. Do x_{25} và x_{26} thuộc nhóm

$[4; 6)$ nên $Q_1 = 4 + \frac{\frac{1 \cdot 100}{4} - 12}{20} \cdot (6 - 4) = 5,3$.

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76})$. Do x_{75} và x_{76} thuộc nhóm

$[8; 10)$ nên $Q_3 = 8 + \frac{\frac{3 \cdot 100}{4} - 69}{21} \cdot (10 - 8) \approx 8,57$.

Câu 26: Trong tuần lễ bảo vệ môi trường, các học sinh khối 12 tiến hành thu nhặt vỏ lon nước ngọt để tái chế. Nhà trường thống kê kết quả thu nhặt vỏ lon nước ngọt của học sinh khối 12 ở bảng sau:

Số vỏ lon	[11; 15]	[16; 20]	[21; 25]	[26; 30]	[31; 35]
Số học sinh	58	87	54	44	23

Hãy tìm trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Do số vỏ chai là số nguyên nên ta hiệu chỉnh lại như sau:

Số vỏ lon	$[10,5;15,5)$	$[15,5;20,5)$	$[20,5;25,5)$	$[25,5;30,5)$	$[30,5;35,5)$
Số học sinh	58	87	54	44	23

Số học sinh tham gia thu nhật vỏ lon nước ngọt là $n = 58 + 87 + 54 + 44 + 23 = 266$.

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{266}$ lần lượt là số vỏ chai 266 học sinh khối 12 thu nhật được xếp theo thứ tự không giảm.

Do $x_1; x_2; \dots; x_{58} \in [10,5;15,5)$; $x_{59}; x_{55}; \dots; x_{145} \in [15,5;20,5)$ nên trung vị của mẫu số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{240}$ là $\frac{1}{2}(x_{133} + x_{134}) \in [15,5;20,5)$.

Ta xác định được $n = 266, n_m = 87, C = 58, u_m = 15,5, u_{m+1} = 20,5$ và $u_{m+1} = 20,5$.

Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$M_e = 15,5 + \frac{\frac{266}{2} - 58}{87} \cdot (20,5 - 15,5) \approx 19,81.$$

Câu 27: Tiền lương nhận được trong 1 giờ làm việc của nhân viên công ty A được thống kê theo mẫu số liệu ghép nhóm sau (đơn vị: ngàn đồng):

Các lớp tiền lương	Số nhân viên
$[50; 60)$	8
$[60; 70)$	10
$[70; 80)$	16
$[80; 90)$	14
$[90; 100)$	10
$[100; 110)$	5
$[110; 120)$	2

Hãy xác định các tứ phân vị của mẫu số liệu trên.

Lời giải

Gọi $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{65}$ là tiền lương của 65 nhân viên nhận được trong 1 giờ.

Tứ phân vị thứ hai của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{65}$ là $x_{33} \in [70; 80)$. Do đó tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_2 = 70 + \frac{\frac{2.65}{4} - (8+10)}{16} \cdot (80 - 70) = 79,0625$$

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{65}$ là $x_{17} \in [60; 70)$. Do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 60 + \frac{\frac{1 \cdot 65}{4} - 8}{10} \cdot (70 - 60) = 68,25$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1; x_2; \dots; x_{65}$ là $x_{49} \in [90; 100)$. Do đó tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 90 + \frac{\frac{3 \cdot 65}{4} - (8 + 10 + 16 + 14)}{10} \cdot (100 - 90) = 90,75.$$

Chú ý: Nếu tứ phân vị thứ k là $\frac{1}{2}(x_m + x_{m+1})$, trong đó $x_m \in [u_{j-1}; u_j)$ và $x_{m+1} \in [u_j; u_{j+1})$ thuộc hai nhóm liên tiếp thì ta lấy $Q_k = u_j$.

Câu 28: Lương tháng của một số giáo viên THPT được ghi lại như sau (đơn vị: triệu đồng):

12,2	9,8	10,9	6,7	13,6	9,2	12,5	9,6	11,7	12,7	10,0	10,0
8,3	11,1	11,9	8,4	6,7	13,8	13,1	6,5	10,7	8,9	11,2	13,2

a) Tìm tứ phân vị của dãy số liệu trên.

b) Tổng hợp lại dãy số liệu trên vào bảng tần số ghép nhóm theo mẫu sau:

Lương tháng (triệu đồng)	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)
Số nhân viên	?	?	?	?

c) Hãy ước lượng tứ phân vị của số liệu ở bảng tần số ghép nhóm trên.

Lời giải

a) Các tứ phân vị là $Q_2 = 10,8; Q_1 = 9,05; Q_3 = 12,35$.

b) Bảng tần số ghép nhóm theo mẫu :

Lương tháng	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)
Số giáo viên	3	6	8	7

c) Tứ phân vị thứ nhất là $Q_1 = 8 + \frac{\frac{24}{4} - 3}{6} \cdot (10 - 8) = 9$.

Tứ phân vị thứ hai là $Q_2 = 10 + \frac{\frac{24}{2} - 9}{8} \cdot (12 - 10) = 10,75$.

Tứ phân vị thứ ba là $Q_3 = 12 + \frac{\frac{3.24}{4} - 17}{7} \cdot (14 - 12) \approx 12,29$.

Câu 29: Chiều cao của hai loài hoa được một người thống kê theo biểu đồ sau:



- a) Hãy so sánh chiều cao của loài A và loài B theo số trung bình và trung vị.
b) Hãy ước lượng tứ phân vị thứ nhất và thứ ba của chiều cao của loài A và loài B .

Lời giải

a) Bảng giá trị đại diện

Chiều cao đại diện (mm)	149,5	249,5	349,5	449,5
Loài A	20	18	14	10
Loài B	35	30	20	15

Chiều trung bình của loài A xấp xỉ bằng

$$\bar{x}_A = \frac{149,5 \cdot 20 + 249,5 \cdot 18 + 349,5 \cdot 14 + 449,5 \cdot 10}{62} \approx 272,08.$$

Chiều trung bình của loài B xấp xỉ bằng

$$\bar{x}_B = \frac{149,5 \cdot 35 + 249,5 \cdot 30 + 349,5 \cdot 20 + 449,5 \cdot 15}{100} = 201,5.$$

Chiều cao trung bình của loài A lớn hơn loài B .

Gọi $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{85}$ là chiều cao của 62 cây loài A .

Nên trung vị của mẫu số liệu là $x_{31} \in [200; 299)$.

$$\text{Suy ra trung vị là } M_e = 200 + \frac{\frac{62}{2} - 20}{18} \cdot (299 - 200) = 260,5.$$

Gọi $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{100}$ là chiều cao của 100 loài B .

Nên trung vị của mẫu số liệu là $\frac{1}{2}(x_{50} + x_{51}) \in [200; 299)$.

$$\text{Suy ra trung vị là } M_e = 200 + \frac{\frac{100}{2} - 35}{30} \cdot (299 - 200) = 249,5.$$

Chiều cao trung bình của loài A lớn hơn B .

b) Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{62}$ là $x_{16} \in [100; 199)$.

Do đó tứ phân vị thứ nhất của loài A là

$$Q_1 = 100 + \frac{\frac{1.62}{4} - 0}{20} \cdot (199 - 100) = 176,725.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_{62}$ là $x_{47} \in [300; 399)$.

Do đó tứ phân vị thứ ba của loài A là

$$Q_3 = 300 + \frac{\frac{3.62}{4} - 38}{14} \cdot (399 - 300) \approx 360,11.$$

Tứ phân vị thứ nhất của dãy số liệu $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{100}$ là $y_{25} \in [100; 199)$.

Do đó tứ phân vị thứ nhất của loài B là

$$Q_1 = 100 + \frac{\frac{1.62}{4} - 0}{35} \cdot (199 - 100) \approx 143,84.$$

Tứ phân vị thứ ba của dãy số liệu $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{100}$ là $y_{75} \in [300; 399)$.

Do đó tứ phân vị thứ ba của loài B là

$$Q_3 = 300 + \frac{\frac{3.62}{4} - 65}{20} \cdot (399 - 300) = 208,425.$$

Câu 30: Để chuẩn bị cho đồ án tốt nghiệp, một sinh viên y khoa đã khảo sát huyết áp tối đa của một số bệnh nhân và lập được bảng tần số ghép nhóm sau:

Huyết áp	Tần số
[90;110)	6
[110;130)	20
[130;150)	35

[150;170)	45
[170;190)	30
[190;210)	16

- a) Xác định trung bình, trung vị, tứ phân vị và môđ của mẫu số liệu.
- b) Hãy giải thích vì sao trong trường hợp này, cả ba giá trị trung bình, trung vị và môđ tìm được đều đại diện tốt cho huyết áp của những bệnh nhân được khảo sát.

Lời giải

Huyết áp	Giá trị đại diện	Tần số
[90;110)	100	6
[110;130)	120	20
[130;150)	140	35
[150;170)	160	45
[170;190)	180	30
[190;210)	200	16

- a) Giá trị trung bình:

$$\bar{x} = \frac{100.6 + 120.20 + 140.35 + 160.45 + 180.30 + 200.16}{152} = 155,9$$

$$\text{Trung vị: } M_e = 150 + \frac{76 - 61}{45} \cdot 20 = 156,7$$

Trung vị thứ nhất và thứ ba:

$$Q_1 = 130 + \frac{38 - 26}{35} \cdot 20 = 136,9$$

$$Q_3 = 170 + \frac{114 - 106}{30} \cdot 20 = 175,3$$

Tứ phân vị của mẫu số liệu: $Q_1 = 136,9$; $Q_2 = 156,7$; $Q_3 = 175,3$

$$\text{Môđ: } M_0 = 150 + \frac{10}{10 + 15} \cdot 20 = 158$$

- b) Vì ba giá trị này cùng thuộc vào một nhóm ghép có tần số cao nhất và chúng gần như không có sự chênh lệch nhiều.

Câu 31: Một câu lạc bộ thể dục thể thao đã ghi lại số giờ các thành viên của mình sử dụng cơ sở vật chất của câu lạc bộ để tập luyện trong một tháng. Họ tổ chức dữ liệu thu được vào bảng

Thời gian (giờ)	[1;5)	[5;9)	[9;13)	[13;17)	[17;21)	[21;25)
Tần số (Số người)	10	14	31	2	5	23

Hãy tính (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

- a) Trung vị của mẫu số liệu.
- b) Trung bình của mẫu số liệu. Trong trường hợp này thì trung bình hay trung vị đại diện tốt hơn cho mẫu số liệu?

Lời giải

Thời gian (giờ)	[1;5)	[5;9)	[9;13)	[13;17)	[17;21)	[21;25)
Giá trị đại diện	3	7	11	15	19	23
Tần số (Số người)	10	14	31	2	5	23

- a) Trung vị của mẫu số liệu

$$M_e = 9 + \frac{42,5 - 24}{31} \cdot 4 \approx 11,4$$

- b) Trung bình của mẫu số liệu là $\bar{x} = 13,2$

Trung bình thuộc nhóm [13;17) cho thấy trong 85 số liệu đã có ít nhất 55 số liệu nhỏ hơn số trung bình. Suy ra, trong trường hợp này thì trung vị là số đại diện tốt hơn cho mẫu số liệu.

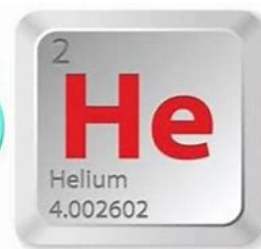
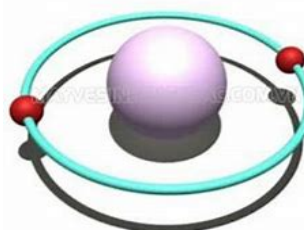
HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

Câu 1: Trong khoa học, người ta thường phải viết các số rất lớn hoặc rất bé. Để tránh phải viết và đếm quá nhiều chữ số 0, người ta quy ước cách ghi các số dưới dạng $A \cdot 10^m$, trong đó $1 \leq A \leq 10$ và m là số nguyên. Một số được viết dưới dạng này, ta nói nó được viết dưới dạng khoa học.

- a) Sao Thổ (tiếng Anh: Saturn), hay Thổ Tinh là hành tinh thứ sáu tính theo khoảng cách trung bình từ Mặt Trời và là hành tinh lớn thứ hai về đường kính cũng như khối lượng, sau Sao Mộc trong hệ Mặt Trời, người ta ước tính khoảng cách từ trái đất đến sao thổ là 14800000000km. Hãy viết số sau dưới dạng kí hiệu khoa học.



- b) Heli (hay Hêli) là nguyên tố trong bảng tuần hoàn nguyên tố có ký hiệu He và số hiệu nguyên tử bằng **hai**, nguyên tử khối bằng 4. Tên của nguyên tố này bắt nguồn từ Helios, tên của thần Mặt Trời trong thần thoại Hy Lạp, do nguồn gốc nguyên tố này được tìm thấy trong quang phổ trên Mặt Trời. Biết khối lượng nguyên tử của Hêli là 0,000000000000000000000000664465653665kg. Hãy viết số sau dưới dạng kí hiệu khoa học.



Lời giải

a) $1,48 \cdot 10^{10}$.

b) $6,64465653665 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$.

Câu 2: Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời.

Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU là khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU .

Lời giải

Ta có khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là $1,52 AU$ nên Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất số năm Trái Đất là $P = (1,52)^{\frac{3}{2}} \approx 1,87$.

Vậy Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất $P \approx 1,87$ năm Trái Đất.

Câu 3: Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8.10^{-8}$. Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho nuôi tôm sú phát triển không?

Lời giải

Độ pH của đầm là: $pH = -\log[H^+] = -\log(8.10^{-8}) \approx 7,1$

Ta thấy $7,1 < 7,2$ nên độ pH của đầm chưa thích hợp để cho tôm sú phát triển.

Câu 4: Một vi khuẩn có khối lượng khoảng 5.10^{-13} gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần. Giả sử được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất là 6.10^{-23} gam (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi $\alpha_0 = 5.10^{-13}$ (g) là khối lượng ban đầu của vi khuẩn.

Sau 20 phút đầu tiên, khối lượng của vi khuẩn là: $\alpha_0.2$.

Sau 20 phút thứ 2, khối lượng của vi khuẩn là: $(\alpha_0.2).2 = \alpha_0.2^2$

Sau 20 phút thứ 3, khối lượng của vi khuẩn là: $(\alpha_0.2^2).2 = \alpha_0.2^3$.

Sau 20 phút thứ n, khối lượng vi khuẩn là: $\alpha_0.2^n$.

Giả sử: $\alpha_0.2^n = 6.10^{27}$

$\Leftrightarrow 5.10^{-13}.2^n = 6.10^{27}$

$\Leftrightarrow 2^n = 1,2.10^{40} \Leftrightarrow n = \log_2(1,2.10^{40}) \approx 100$

Vậy sau khoảng $100.20 = 2000$ phút $\approx 33,3$ (giờ) thì khối lượng của tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất.

Câu 5: Ông An gửi 500 triệu vào ngân hàng theo hình thức lãi kép trong một thời gian khá lâu với lãi suất ổn định trong suốt thời gian tiết kiệm là 10% 1 năm. Tết năm nay do dịch bệnh nên ông rút hết tiền trong ngân hàng ra để gia đình chi tiêu. Sau khi rút cả vốn lẫn lãi, ông trích ra 20 triệu để sắm sửa đồ Tết thì ông còn 860 triệu. Hỏi ông đã gửi tiết kiệm trong bao nhiêu năm?

Lời giải

Giả sử ông An đã gửi tiết kiệm trong n năm.

Số tiền ông đã nhận được là 880 triệu.

Theo công thức lãi suất kép, ta có

$$880.10^6 = 500.10^6 (1 + 0,1)^n \Leftrightarrow n = \log_{1,1} \frac{880}{500} \Leftrightarrow n \approx 5,93.$$

Vậy, ông A đã gửi tiết kiệm trong 6 năm.

Câu 6: Một người gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6,3% / năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y = \log_{1,063} \left(\frac{x}{20} \right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng sau $y = \log_{1,063} \left(\frac{30}{20} \right) = 6.6 \approx 7$ năm.

Câu 7: Chất phóng xạ polonium ^{210}Po có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong mẫu chỉ còn lại một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium ^{210}Po còn lại sau t ngày được tính theo công thức $M(t) = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}}$ (g). Điều kiện về thời gian để mẫu chất ngày còn lại không nhiều hơn 25 g là

Lời giải

Theo đề bài, ta có:

$$M \leq 25 \Leftrightarrow 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} \leq 25 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} \leq \frac{25}{100} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{138}} \leq \left(\frac{1}{2} \right)^2 \Leftrightarrow \frac{t}{138} \geq 2 \Leftrightarrow t \geq 276 \text{ ngày.}$$

Câu 8: Trong một trận động đất, năng lượng giải tỏa E (đơn vị: Jun, kí hiệu J) tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức: $\log E \approx 11,4 + 1,5M$.

(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021).

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter.

b) Năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng bao nhiêu lần năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter?

Lời giải

a) Tính xấp xỉ năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter:

Thay $M = 5$ vào công thức, ta có: $\log E \approx 11,4 + 1,5 \cdot 5 \approx 18,9 \Rightarrow E \approx 10^{18,9}$

b) Tính tỷ lệ năng lượng giải tỏa tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter so với tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter: $\log E \approx 11,4 + 1,5 \cdot 8 \approx 23,4 \Rightarrow E \approx 10^{23,4}$

Gấp khoảng 31623 lần

Câu 9: Trong cây cối có chất phóng xạ $^{14}_6\text{C}$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được phóng xạ của nó bằng 86% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của $^{14}_6\text{C}$ là $T = 5730$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t

được cho bởi công thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021).

Lời giải

Ta có: $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$

Tỷ lệ phóng xạ giữa mẫu gỗ cổ và mẫu gỗ tươi cùng loại là:

$$\frac{H}{H_0} = 0.86 = e^{-\lambda t} = e^{-\frac{\ln 2}{T} t}$$

$$t = \frac{T \cdot \ln 0.86}{-\ln 2} \approx 1247 \text{ năm}$$

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó là khoảng 1247 năm.

Câu 10: Tại sông Sài Gòn, cường độ ánh sáng mặt trời đi qua môi trường nước được tính theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{\frac{-x}{3}}$, trong đó x là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt nước sông, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước sông.



- a) Tại độ sâu 6 mét, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu lần I_0
- b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 12 mét bằng bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 mét.

Lời giải

a) Tại độ sâu 6 mét $\Rightarrow x = 6 \Rightarrow I = I_0 \cdot 10^{\frac{-6}{3}} = I_0 \cdot 10^{-2} = 0,01 \cdot I_0$.

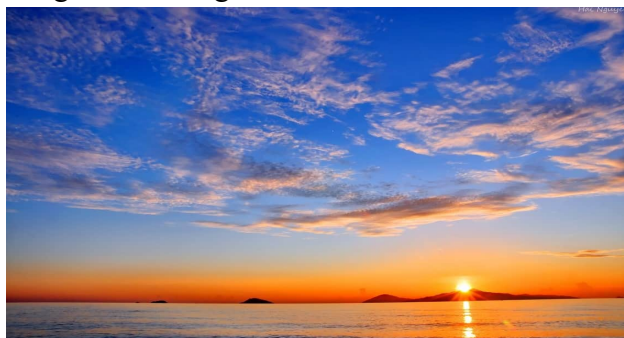
b) Tại độ sâu 12 mét $\Rightarrow x = 12 \Rightarrow I_{12} = I_0 \cdot 10^{\frac{-12}{3}} = I_0 \cdot 10^{-4} = 0,0001 \cdot I_0$.

Tại độ sâu 3 mét $\Rightarrow x = 3 \Rightarrow I_3 = I_0 \cdot 10^{\frac{-3}{3}} = I_0 \cdot 10^{-1} = 0,1 \cdot I_0$.

Suy ra: $\frac{I_{12}}{I_3} = \frac{0,0001 \cdot I_0}{0,1 \cdot I_0} = \frac{1}{1000}$. Vậy cường độ ánh sáng tại độ sâu 12 mét bằng $\frac{1}{1000}$ cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 mét.

Câu 11: Tại Mũi Né của vùng biển Bình Thuận, cường độ ánh sáng mặt trời đi qua môi trường nước biển được tính theo công thức $I = I_0 \cdot e^{\frac{-3x}{13}}$, trong đó x là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt nước biển,

I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Hỏi tại độ sâu 26 mét thì cường độ ánh sáng giảm đi bao nhiêu lần so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển.



Lời giải

$$\text{Tại độ sâu 26 mét} \Rightarrow x = 26 \Rightarrow I = I_0 \cdot e^{\frac{-3.36}{13}} = I_0 \cdot e^{-6} = \frac{1}{e^6} \cdot I_0.$$

Vậy tại độ sâu 26 mét thì cường độ ánh sáng giảm $e^6 \approx 403,429$ lần so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển.

Câu 12: Theo thống kê vào ngày 01/01/ 2023 dân số Việt Nam là 99.332.000 người, giả sử tốc độ tăng dân số tự nhiên là 0,85% / năm. Nếu tốc độ tăng dân số này tiếp tục được duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số Việt Nam sau t năm, kể từ năm 2023 được tính bởi công thức $P(t) = 99,332.(1 + 0,0085)^t$ (đơn vị tính bằng triệu người).



- Tính tổng dân số Việt Nam vào ngày 01/01/2030, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần mười.
- Tính tổng dân số Việt Nam vào thời điểm ngày 15/6/2040, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Tại thời điểm ngày 01/01/2030 ứng với $t = 7$.

Do đó: dân số Việt Nam là $P(7) = 99,332.(1 + 0,0085)^7 \approx 105,4$ triệu người.

b) Tại thời điểm ngày 15/6/2040 ứng với $t = 17,5$.

Do đó: dân số Việt Nam là $P(17,5) = 99,332.(1 + 0,0085)^{17,5} \approx 115,2$ triệu người.

Câu 13: Số lượng vi khuẩn H trong phòng thí nghiệm tính theo công thức $s(t) = s_0 \cdot 3^t$ trong đó s_0 là số lượng vi khuẩn H lúc đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn có trong t phút. Biết sau 5 phút thì số lượng vi khuẩn H là 243000 con. Hỏi sau 9 phút thì số lượng vi khuẩn H bao nhiêu?



Lời giải

Vì sau 5 phút thì số lượng vi khuẩn A là 243000 con nên: $243000 = s_0 \cdot 3^5 \Rightarrow s_0 = \frac{243000}{3^5} = 1000$.

Số lượng vi khuẩn H sau 9 phút là: $s(9) = s_0 \cdot 3^9 = 1000 \cdot 3^9 = 1,9683 \cdot 10^7$ (con).

Câu 14: Dát vàng chính là công nghệ tạo ra những lá vàng mỏng, rất mỏng để dát lên bất kỳ sản phẩm, đồ vật nào mà con người mong muốn. Toàn bộ quy trình được người thợ gia công thực hiện hoàn toàn bằng tay và vô cùng tỉ mỉ với từng đường nét. Giả sử với một chỉ vàng, người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng có kích thước diện tích bề mặt bằng viên gạch men và có độ dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7} m$. Viên gạch men có độ dày 30 mm. Hỏi cần bao nhiêu lá vàng như trên, xếp chồng lên nhau để có độ dày bằng độ dày viên gạch men.



Lời giải

Ta có: $30 \text{ mm} = 3 \cdot 10^{-2} m$.

Số lá vàng cần xếp chồng lên nhau là: $\frac{3 \cdot 10^{-2}}{1,94 \cdot 10^{-7}} \approx 154.639$.

Vậy cần khoảng 154.639 lá vàng thì xếp chồng lên nhau để có độ dày bằng viên gạch men.

Câu 15: Tại một cửa hàng bán đạp xe điện, công thức $P(t) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc xe đạp điện sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của xe đạp điện sau 1 năm 6 tháng, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần ngàn.

b) Sau 3 năm sử dụng, giá trị còn lại của xe đạp điện bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu.



Lời giải

a) Sau 1 năm 6 tháng thì $t = 1,5 \Rightarrow P(1,5) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1,5}{3}} \approx 8,485$.

Vậy sau 1 năm 6 tháng thì giá trị còn lại của xe đạp điện là $\approx 8,485$ (triệu đồng).

b) Giá trị ban đầu của xe đạp điện là $P = 12$.

Sau 3 năm sử dụng thì giá trị còn lại của xe đạp điện là: $t = 3 \Rightarrow P(3) = 12 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{3}} = 6$ (triệu đồng).

Vậy sau 3 năm đưa vào sử dụng thì giá trị còn lại của xe đạp điện bằng 50% so với ban đầu.

Câu 16: Công ty DAHON chuyên về mua bán xe ô tô đã qua sử dụng, sau khi khảo sát thị trường 06 tháng đã đưa ra công thức chung về giá trị còn lại của ô tô 4 chỗ kể từ khi đưa vào sử dụng (các loại xe

4 chỗ không sử dụng mục đích kinh doanh) được tính $P(t) = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}}$. Trong đó A là giá tiền ban đầu mua xe (triệu đồng), t là số năm kể từ khi đưa vào sử dụng.



a) Tính giá trị còn lại của xe ô tô sau 30 tháng đưa vào sử dụng. Biết giá trị mua xe ban đầu là 970 triệu đồng, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần mười.

b) Sau khi đưa vào sử dụng 09 năm thì giá trị còn lại của ô tô bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu (giá mua ban đầu là 970 triệu đồng).

Lời giải

a) Ta có: $A = 970$ triệu; $t = 2,5$ năm.

Vậy giá trị còn lại của xe ô tô sau 30 tháng đưa vào sử dụng là:

$$P(2,5) = 970 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2,5}{4}} \approx 810,4 \text{ triệu đồng.}$$

b) Giá trị còn lại của xe sau khi đưa vào sử dụng 09 năm là:

$$P(9) = 970 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{9}{4}} \approx 507,8 \text{ triệu đồng.}$$

Tỉ lệ phần trăm so với ban đầu là: $\frac{P(9)}{P(0)} \times 100\% \approx 52,35\%$

Câu 17: Thang đo Richter là 1 thang logarit với đơn vị là độ Richter. Độ Richter tương ứng với lôgarit thập phân của biên độ những sóng địa chấn đo ở 100 km cách chấn tâm của cơn động đất. Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log \frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn ($A_0 = 1\mu m$). Trận động đất mạnh nhất được ghi nhận tại Việt Nam là trận động đất tại lòng chảo Điện Biên vào năm 1935.

- a). Tính độ lớn của trận động đất tại lòng chảo Điện Biên vào năm 1935, biết biên độ A bằng $10^{6,9} \cdot A_0$
- b) Trận động đất mạnh nhất được ghi nhận tại Valdivia thuộc miền nam Chi Lê vào tháng 05/1960 có biên độ lớn gấp nhất gấp $10^{\frac{13}{5}}$ lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại lòng chảo Điện Biên vào năm 1935. Tính độ lớn của trận động đất tại Valdivia thuộc miền nam Chi Lê vào tháng 05/1960.

Lời giải

- a) Tính độ lớn của trận động đất tại lòng chảo Điện Biên vào năm 1935 là:

$$M = \log \frac{A}{A_0} = \log \frac{10^{6,9} \cdot A_0}{A_0} = 6,9 \text{ độ Richter.}$$

- b) Gọi A là biên độ lớn nhất của trận động đất tại lòng chảo Điện Biên của nước Việt Nam
Gọi A_C là biên độ lớn nhất của trận động đất tại Valdivia thuộc miền nam Chi Lê vào tháng 05/1960.

Khi đó: $A_C = 10^{\frac{13}{5}} \cdot A = 10^{\frac{13}{5}} \cdot 10^{6,9} \cdot A_0 = 10^{9,5} \cdot A_0$.

Tính độ lớn của trận động đất tại Valdivia thuộc miền nam Chi Lê vào tháng 05/1960 là:

$$M_C = \log \frac{A_C}{A_0} = \log \left(\frac{10^{9,5} \cdot A_0}{A_0} \right) = 9,5 \text{ độ Richter.}$$

Câu 18: Trong hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L . Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có $pH = 7$ thì trung tính.

- a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là $0,001 mol/L$. Dung dịch này có tính acid hay kiềm hay trung tính.
- b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp bảy lần nồng độ H^+ của dung dịch B. Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu.

Lời giải

- a) $pH = -\log(0,001) = -\log(10^{-3}) = 3 < 7 \Rightarrow$ dung dịch có tính acid.

b) Gọi pH_A, pH_B lần lượt là độ pH của dung dịch A và dung dịch B

Gọi $[H^+]_A, [H^+]_B$ lần lượt là nồng độ của dung dịch A và dung dịch B

Ta có: $pH_A = -\log[H^+]_A = -\log(7[H^+]_B) = -\log(7) - \log[H^+]_B = -\log(7) + pH_B$

$$\Rightarrow pH_B - pH_A = \log(7) \approx 0,845.$$

Vậy: Dung dịch B có độ pH lớn hơn độ pH của dung dịch A là $\approx 0,845$.

Câu 19: Để xác định tính acid (hay tính base) của một dung dịch, người ta đã dựa vào độ pH của dung dịch: $pH = -\log[H^+]$, với $[H^+]$ là nồng độ của ion hydro (mol/L hay M).

Dung dịch với độ pH bằng 7 sẽ được coi là trung hòa, độ $pH < 7$ là acid, độ $pH > 7$ là base.

Giả sử một dung dịch có nồng độ của ion hydrogen là $[H^+] = 0,00003M$. Hãy xác định xem dung dịch đó có tính axit, bazơ hay trung hòa?

Lời giải

Độ pH của dung dịch trên là: $pH = -\log[H^+] = -\log(3.10^{-5}) \approx 4,523 < 7$ nên dung dịch trên là axit.

Câu 20: Độ pH của dung dịch được tính bởi công thức: $pH = -\log[H^+]$, với $[H^+]$ là nồng độ của ion hydro (mol/L hay M).

a) Nguồn nước của Vĩnh Hảo được lấy từ độ sâu 50m. Trải qua 3 tầng địa chất đá tổ ong – đất sét nứt – cát trắng. Sau khi được thu hoạch, nước sẽ đi qua quá trình xử lý tại nhà máy, để giữ lại các dưỡng chất cần thiết như K, Mg, Na, Ca, F, HCO_3 , SiO_3 . Nước khoáng Vĩnh Hảo có nồng độ H^+ là $0,32.10^{-8} \text{ mol/L}$. Tính độ pH của nước khoáng Vĩnh Hảo.

b) Một loại trà sữa A có nồng độ H^+ gấp 30 lần nồng độ H^+ của nước khoáng Vĩnh Hảo. Tính độ pH của loại trà sữa đó.



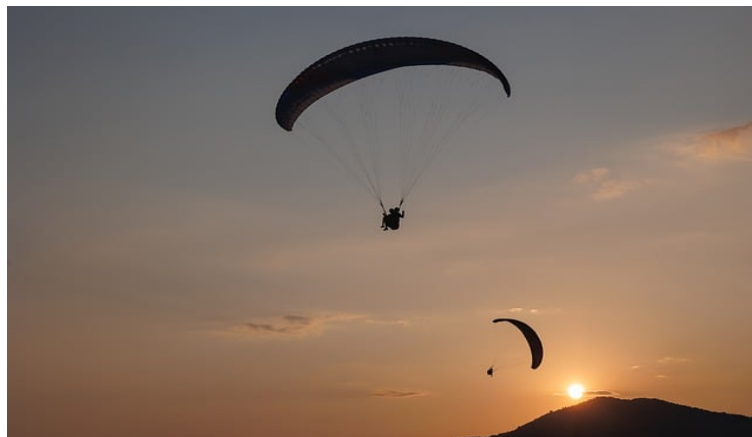
Lời giải

a) Độ pH của nước khoáng Vĩnh Hảo là: $pH = -\log[H^+] = -\log[0,32.10^{-8}] \approx 8,495$.

b) Độ pH của trà sữa A là: $pH = -\log[H^+] = -\log[30.(0,32.10^{-8})] \approx 7,02$.

Câu 21: Nhảy dù là môn thể thao hành động bao gồm nhảy ra khỏi một chiếc máy bay hay dụng cụ bay khác ở trên không trung và rơi trở về Trái Đất với sự trợ giúp của lực hấp dẫn trong khi sử dụng một chiếc dù nhảy để làm chậm sự chuyển động của một đối tượng thông qua một bầu không khí bằng cách tạo ra kéo, hoặc trong trường hợp ram-dù không khí, nâng khí động học.

Một người nhảy dù tại bãi biển Đà Nẵng, biết rằng độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức áp suất theo độ cao là $a = 199.(\frac{7}{2} - \log p)$, trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng Pa). Tính độ cao so với mực nước biển, biết áp suất ở nơi người đó đang ở vị trí trên không trung 2500 Pa,, biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần trăm.



Lời giải

Ta có: $a = 199.(\frac{7}{2} - \log p) \Leftrightarrow a = 199.(\frac{7}{2} - \log 2500) \Leftrightarrow a \approx 20,31m$.

Câu 22: Áp suất khí quyển p (tính bằng kilopascal, viết tắt là kPa) ở độ cao h (so với mực nước biển, tính bằng km) được tính theo công thức sau: $\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7}$ (Theo britannica.com).

- Tính áp suất khí quyển ở độ cao 5km.
- Ở độ cao trên 10 km thì áp suất khí quyển sẽ như thế nào?

Lời giải

a) Áp suất khí quyển ở độ cao 5 km được tính bằng cách đưa giá trị $h = 5$ vào công thức:

$$\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7} = -\frac{5}{7} \Leftrightarrow \frac{p}{100} = e^{-\frac{5}{7}} \Rightarrow p = 100e^{-\frac{5}{7}} \approx 48,95\text{kPa}$$

b) Để tính áp suất khí quyển ở độ cao 10 km, ta đưa giá trị $h = 10$ vào công thức ban đầu:

$$\ln\left(\frac{p}{100}\right) = -\frac{h}{7} = -\frac{10}{7} \Leftrightarrow \frac{p}{100} = e^{-\frac{10}{7}} \Rightarrow p = 100e^{-\frac{10}{7}} \approx 23,97\text{kPa}.$$

Câu 23: Giả sử nhiệt độ $T(^{\circ}\text{C})$ của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức: $T = 27 + 65e^{-0,4t}$, trong đó thời gian t được tính bằng phút.

- Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.
- Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 37°C ?

Lời giải

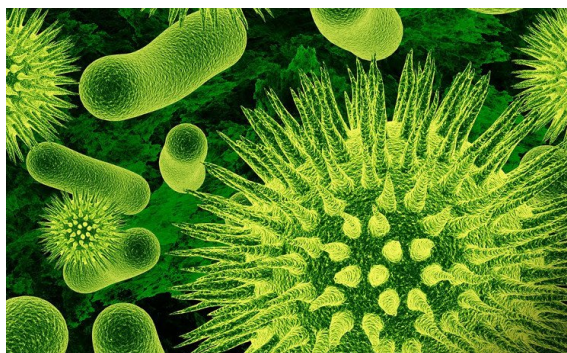
a) Nhiệt độ ban đầu của vật: $T = 27 + 65e^{-0,4.0} = 92 (^{\circ}\text{C})$

b) Để tìm thời gian t mà nhiệt độ của vật còn lại 37°C .

$$37 = 27 + 65e^{-0,4t} \Rightarrow \ln\frac{37-27}{65} = -0,4t \Leftrightarrow t \approx 4,68 \text{ phút.}$$

Vậy sau khoảng 4,68 phút nhiệt độ của vật sẽ giảm còn 37°C .

Câu 24: Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm được tính theo công thức $s(t) = s(0).2^t$, trong đó $s(0)$ là số lượng vi khuẩn A lúc ban đầu, $s(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?



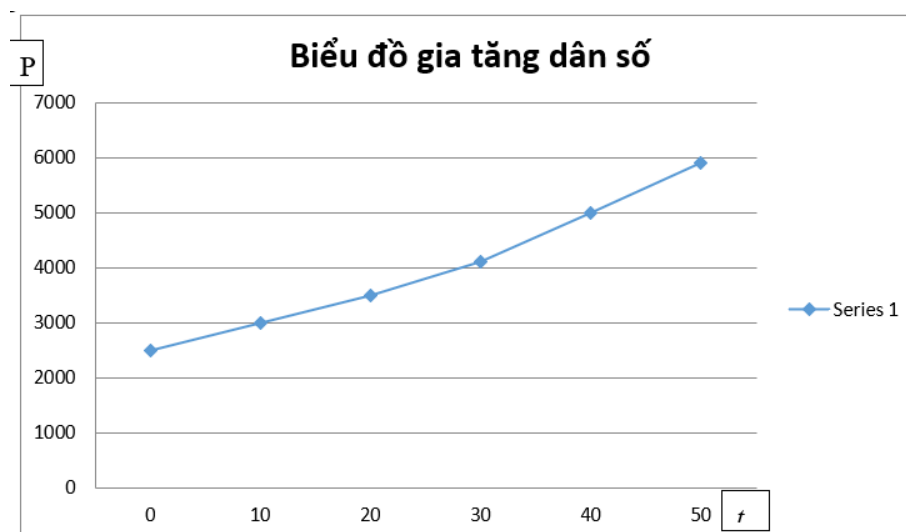
Lời giải

Sau 3 phút ta có: $s(3) = s(0).2^3 \Rightarrow s(0) = \frac{s(3)}{2^3} = 78125$.

Tại thời điểm t số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con nên ta có:

$$s(t) = s(0).2^t \Leftrightarrow 2^t = \frac{s(t)}{s(0)} \Leftrightarrow 2^t = \frac{10.000.000}{78125} \Leftrightarrow 2^t = 128 \Leftrightarrow t = 7.$$

Câu 25: Theo số liệu thực tế, dân số thế giới năm 1950 là 2560 triệu người, còn năm 1980 là 3040 triệu người. người ta dự đoán dân số thế giới phụ thuộc vào thời gian t theo hàm số mũ $P(t) = a.e^{bt}$ với a, b là hằng số và độ biến thiên của $P(t)$ theo thời gian tỷ lệ thuận với $P(t)$. Hãy dự đoán dân số thế giới vào năm 2030.



Lời giải

Số dân tại thời điểm $t = 1950$ là: $P_{(1950)} = a.e^{b.1950} = 2560$ (1)

Số dân tại thời điểm $t = 1980$ là: $P_{(1980)} = a.e^{b.1980} = 3040$ (2)

Lấy (2) chia (1) về theo về ta được: $\frac{a.e^{b.1950}}{a.e^{b.1980}} = \frac{3040}{2560} \Leftrightarrow e^{30b} = \frac{19}{16}$

$$\Leftrightarrow 30b = \ln \frac{19}{16} \Rightarrow b = \frac{1}{30} \cdot \ln \frac{19}{16} (*)$$

$$\text{Thay } (*) \text{ vào (1) ta được: } a.e^{65 \cdot \ln \frac{19}{16}} = 2560 \Rightarrow a = \frac{2560}{e^{65 \cdot \ln \frac{19}{16}}}$$

Vậy dân số tại thời điểm $t = 2030$ là: $P_{(2030)} = a.e^{b \cdot 2030} \approx 4048$ triệu người.

Câu 26: Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất $x\% / \text{năm}$ ($x > 0$). Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x , biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt quá trình gửi.

Lời giải

$$\text{Ta có công thức: } 100 \cdot \left(1 + \frac{x}{100}\right)^3 = 119,1016 \Leftrightarrow 1 + \frac{x}{100} = 1,06 \Leftrightarrow \frac{x}{100} = 0,06 \Leftrightarrow x = 6.$$

Câu 27: Thầy B muốn xây một căn nhà. Chi phí xây nhà hết 1 tỉ đồng, hiện nay thầy B có 700 triệu đồng. Vì không muốn vay tiền nên Thầy B quyết định gửi số tiền 700 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 12%/1 năm, tiền lãi của năm trước được cộng vào tiền gốc của năm sau. Tuy nhiên giá xây dựng cũng tăng mỗi năm 1% so với năm trước. Hỏi sau bao lâu Thầy B sẽ tiết kiệm đủ tiền xây nhà? (kết quả lấy gần đúng đến 1 chữ số thập phân).

Lời giải

Gọi V_n là chi phí xây dựng sau n năm, T_n là tổng số tiền thu được sau n năm.

Ta có: $V_0 = 1$ tỉ

$V_1 = 1(1+1\%)$ tỉ.

$V_2 = 1(1+1\%) \cdot 1\% + 1(1+1\%) = 1(1+1\%)^2$ tỉ.

....

$\Rightarrow V_n = 1(1+1\%)^n$ tỉ.

Ta có: $700000000 = 0,7$ tỉ

Số tiền thu được sau n năm: $T_n = 0,7 \cdot (1+12\%)^n$ tỉ

Để xây được nhà thì ở năm thứ n thì số tiền thầy Quỳnh thu được phải bằng số tiền chi phí xây dựng.

$$\Rightarrow T_n = V_n \Leftrightarrow 0,7(1+12\%)^n = 1(1+1\%)^2.$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1+12\%}{1+1\%}\right)^n = \frac{1}{0,7} \Leftrightarrow n = \log_{\frac{1+12\%}{1+1\%}} \frac{1}{0,7} \approx 3,5.$$

Câu 28: Trong cây cối có chất phóng xạ $^{14}_6C$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được phóng xạ của nó bằng 85% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của $^{14}_6C$ là $T = 5000$ năm, độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t được cho bởi công thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$);

$\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ.



Lời giải

Từ đó, ta có thể tính được hằng số phóng xạ: $\lambda = \frac{\ln 2}{T} = \frac{\ln 2}{5000} \approx 1,39 \cdot 10^{-4}$.

Giờ ta cần tìm thời gian t mà đã trôi qua từ thời điểm mẫu gỗ cổ được sinh ra đến thời điểm hiện tại. Để tìm thời gian này, ta sử dụng tỷ lệ phóng xạ giữa mẫu gỗ cổ và mẫu gỗ tươi cùng loại:

$$\frac{H}{H_0} = 0,85 = e^{-\lambda t} \Rightarrow t = \frac{\ln 0,85}{-1,39 \cdot 10^{-4}} \approx 1169,2 \text{ năm}.$$

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó là khoảng 1169,2 năm.

Câu 29: Trên mỗi chiếc radio đều có các vạch chia để người sử dụng dễ dàng chọn đúng sóng radio cần tìm. Biết rằng vạch chia ở vị trí cách vạch tận cùng bên trái một khoảng $d(\text{cm})$ thì ứng với tần số $F = ka^d (\text{kHz})$, trong đó k và a là hai hằng số được chọn sao cho vạch tận cùng bên trái ứng với tần số 620kHz, vạch tận cùng bên phải ứng với tần số 1710kHz và hai vạch này cách nhau 20 cm

F M	87	92	96	100	104	108	MHz
A M	620	750	1000	1200	1500	1710	kHz
S W	6	8	10	12	14	16	MHz



a) Tính k và a (tính a chính xác đến hàng phần nghìn)

b) Tìm $d(\text{cm})$ biết rằng vạch đó là chương trình ca nhạc có tần số là $F = 1500\text{kHz}$.

Lời giải

a) Khi $d = 0$ thì $F = 620$ và khi $d = 20$ thì $F = 1710$,

$$\text{Ta có hệ phương trình } \begin{cases} 620 = ka^0 \\ 1710 = ka^{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 620 \\ a^{20} = \frac{1710}{620} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 620 \\ a = \sqrt[20]{\frac{1710}{620}} \approx 1,052 \end{cases}.$$

Vậy $k = 620$; $a = 1,052$.

b) Chương trình ca nhạc có tần số là $F = 1500kHz$, vậy ta có phương trình:

$$1500 = ka^d \Leftrightarrow a^d = \frac{1500}{k} \Leftrightarrow d = \log_a \frac{1500}{k} \Leftrightarrow d = \log_{1,052} \frac{1500}{620} \approx 17,43 (cm).$$

Vậy muốn mở tới ngay chương trình ca nhạc, ta chỉnh đến vạch chia cách vạch ban đầu một khoảng $17,43 (cm)$.

Câu 30: Một người gửi tiền vào ngân hàng một số tiền là 200.000.000 đồng, họ định gửi theo kì hạn n năm với lãi suất là 12% một năm; sau mỗi năm không nhận lãi mà để lãi nhập vốn cho năm kế tiếp. Tìm n nhỏ nhất lãi nhận được hơn 60.000.000 đồng.

Lời giải

Ta có số tiền lãi $> 60.000.000 \Rightarrow$ số tiền lãi và vốn $> 260.000.000$.

Số tiền nhận được sau n năm: $200.000.000 \times (1,12)^n$

Theo đề bài Ta có:

$$200.000.000 \times (1,12)^n > 260.000.000 \Leftrightarrow 1,12^n > 1,3 \Leftrightarrow n > 2,31 \Rightarrow n = 3.$$

Câu 31: Một công ty vừa tung ra thị trường sản phẩm mới và họ tổ chức quảng cáo trên truyền hình mỗi ngày. Một nghiên cứu thị trường cho thấy, nếu sau x quảng cáo được phát thì số % người xem mua sản phẩm là $P(x) = \frac{100}{1 + 49.e^{-0,015x}}$, $x \geq 0$. Hãy tính số quảng cáo được phát tối thiểu để số người mua đạt hơn 75%.

Lời giải

Ta có: $P(x) = \frac{100}{1 + 49.e^{-0,015x}} \geq 75 \Leftrightarrow x \geq 333.$

Câu 32: Khi một kim loại được làm nóng đến $600^{\circ}C$, độ bền kéo của nó giảm đi 50%. Sau khi kim loại vượt qua ngưỡng $600^{\circ}C$, nếu nhiệt độ kim loại tăng thêm $5^{\circ}C$ thì độ bền kéo của nó giảm đi 35% hiện có. Biết kim loại này có độ bền kéo là $280M Pa$ dưới $600^{\circ}C$ và được sử dụng trong việc xây dựng các lò công nghiệp. Nếu mức an toàn tối thiểu độ bền kéo của vật liệu này là $38M Pa$, thì nhiệt độ an toàn tối đa của lò công nghiệp bằng bao nhiêu, tính theo độ Celsius?

Lời giải

Ở $600^{\circ}C$ độ bền kéo của kim loại là $140MPa = DB$ (đặt ẩn phụ này để gọn tính toán phía sau). Cứ tăng $5^{\circ}C$ thì độ bền kéo giảm 35% DB còn 65% DB

Sau n lần tăng $5^{\circ}C$ thì độ bền kéo còn $(65\%)^n DB$.

Theo đề $(65\%)^n DB \geq 38 \Rightarrow n \leq \log_{(65\%)} \frac{38}{DB} \approx 3,02.$

Do đó nhiệt độ tối đa là $600^{\circ}C + 3.5^{\circ}C = 615^{\circ}C$.

Câu 33: Một người gửi 150 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn 1 quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 200 triệu đồng cả vốn lẫn lãi từ số vốn ban đầu?

Lời giải

Ta có số tiền thu được sau t quý là $T = 150(1 + 1,65\%)^t$.

Theo đề bài ta có: $T \geq 200 \Leftrightarrow 150(1 + 1,65\%)^t \geq 200 \Leftrightarrow (1 + 1,65\%)^t \geq \frac{4}{3}.$

$$\Leftrightarrow \log_{\frac{4}{3}}(1+1,65\%)^t \geq \log_{\frac{4}{3}} \frac{4}{3} \Leftrightarrow t \cdot \log_{\frac{4}{3}}(1+1,65\%) \geq 1 \Leftrightarrow t \geq \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(1+1,65\%)} = 17,6$$

Suy ra số quý tối thiểu: $t = 18$ quý = 4 năm 6 tháng.

Câu 34: Thầy Cur có 500 triệu đồng gửi ngân hàng kì hạn 3 tháng với lãi suất 0,65% một tháng theo thể thức lãi kép. Hỏi sau tối thiểu bao nhiêu quý gửi tiền vào ngân hàng, thầy Cur mới có số tiền lãi lớn hơn số tiền gốc ban đầu gửi ngân hàng, giả sử người đó không rút lãi trong tất cả các quý định kì. (Số quý gửi là số nguyên)

Lời giải

Áp dụng công thức $P_n = P_0(1+r)^n$ ta có: $P_0 = 500\,000\,000$ đồng, lãi suất trong 1 kì hạn là:

$$r = 3 \times 0,65\% = 1,95\%.$$

Sau n quý tổng số tiền (vốn và lãi) thầy Cur có được là: $P_n = P_0(1+r)^n$

Suy ra tổng số tiền lãi có được sau n quý là: $P_n - P_0$.

Cần tìm n để $P_n - P_0 > P_0 \Leftrightarrow P_0(1+r)^n - P_0 > P_0 \Leftrightarrow (1+r)^n > 2$.

$$\Leftrightarrow n > \log_{1+r} 2 \Leftrightarrow n > \log_{1+1,95\%} 2 \approx 35,89 \geq 36.$$

Vậy sau 36 quý (tức là 9 năm) thầy Cur sẽ có số tiền lãi lớn hơn số tiền gốc ban đầu gửi ngân hàng.

Câu 35: Kết quả thống kê cho biết ở thời điểm năm 2013 dân số Việt Nam là 90 triệu người, tốc độ tăng dân số là 1,1%/năm. Nếu mức tăng dân số ổn định như vậy thì dân số Việt Nam sẽ gấp đôi (đạt ngưỡng 180 triệu) vào năm nào?

Lời giải

Dân số thế giới được ước tính theo công thức $S = A.e^{ni}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, i là tỉ lệ tăng dân số hàng năm.

Theo đề bài ta có: $S = A.e^{ni} \Leftrightarrow 180 = 90e^{1,1\% \cdot n} \Leftrightarrow n = 63,01338005$.

Vậy sau khoảng hơn 63 năm thì dân số Việt Nam đạt ngưỡng 180 triệu hay vào khoảng năm 2077.

Câu 36: Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ được bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t+1)$, $t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao lâu thì số học sinh nhớ được danh sách đó là dưới 10%.

Lời giải

Ta có $75 - 20\ln(t+1) \leq 10 \Leftrightarrow \ln(t+1) \geq 3,25 \Leftrightarrow t \geq 24,79$. Khoảng 25 tháng.

Câu 37: Đầu năm 2016, anh Hùng có xe công nông trị giá 100 triệu đồng. Biết mỗi tháng thì xe công nông hao mòn mất 0,4% giá trị, đồng thời làm ra được 6 triệu đồng (số tiền làm ra mỗi tháng là không đổi). Hỏi sau một năm, tổng số tiền (bao gồm giá tiền xe công nông và tổng số tiền anh Hùng làm ra) anh Hùng có là bao nhiêu?

Lời giải

Sau một năm số tiền anh Hùng làm ra là $6 \cdot 12 = 72$ triệu đồng.

Sau một năm giá trị xe công nông còn $100(1 - 0,4\%)^{12} \approx 95,3042$ triệu đồng.

Vậy sau một năm số tiền anh Hùng có là 167,3042 triệu đồng.

Câu 38: Một người gửi tiết kiệm ngân hàng, mỗi tháng gửi 1 triệu đồng, với lãi suất kép 1% trên tháng. Gửi được hai năm 3 tháng người đó có công việc nên đã rút toàn bộ gốc và lãi về. Số tiền người đó được rút là bao nhiêu?

Lời giải

Phương pháp: Quy bài toán về tính tổng cấp số nhân, rồi áp dụng công thức tính tổng cấp số nhân:

Dãy $u_1; u_2; u_3; \dots; u_n$ được gọi là 1 CSN có công bội q nếu: $u_k = u_{k-1}q$.

Tổng n số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}$.

+ Áp dụng công thức tính tổng của cấp số nhân.

Cách giải: + Gọi số tiền người đó gửi hàng tháng là $a = 1$ triệu.

+ Đầu tháng 1: người đó có a .

Cuối tháng 1: người đó có $a \cdot (1 + 0,01) = a \cdot 1,01$.

+ Đầu tháng 2 người đó có: $a + a \cdot 1,01$.

Cuối tháng 2 người đó có: $1,01(a + a \cdot 1,01) = a(1,01 + 1,01^2)$.

+ Đầu tháng 3 người đó có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2)$.

Cuối tháng 3 người đó có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2) \cdot 1,01 = a(1 + 1,01^2 + 1,01^3)$.

....

+ Đến cuối tháng thứ 27 người đó có: $a(1 + 1,01 + 1,01^2 + \dots + 1,01^{27})$.

Ta cần tính tổng: $a(1 + 1,01 + 1,01^2 + \dots + 1,01^{27})$.

Áp dụng công thức cấp số nhân trên với công bội là 1,01 ta được $\frac{1-1,01^{27}}{1-0,01} = 100 \cdot (1,01^{27} - 1)$ triệu đồng.

Câu 39: Một tờ “siêu giấy” dày 0,1mm có thể gấp được vô hạn lần. Hỏi sau bao nhiêu lần gấp thì tờ giấy này đựng mặt trăng. Biết khoảng cách từ trái đất đến mặt trăng là 384000km.

Lời giải

Gọi n là số lần gấp thỏa yêu cầu bài toán.

Ta có $1km = 10^6mm$; Theo bài ra ta có: $0,1 \cdot 2^n = 384000 \cdot 10^6 \Rightarrow n \approx 41,804$.

Vậy, sau 42 lần gấp thì tờ giấy đựng mặt trăng.

Câu 40: Ông Toàn gửi 50 triệu đồng vào ngân hàng ngân hàng ACB theo thể thức lãi kép (đến kỳ hạn mà người gửi không rút lãi ra thì tiền lãi được tính vào vốn của kỳ kế tiếp) với lãi suất 14 % một năm. Hỏi sau hai năm ông Toàn thu được cả vốn lẫn lãi bao nhiêu (Giả sử lãi suất không thay đổi)?

Lời giải

Áp dụng công thức tính lãi kép, sau hai năm ông Toàn thu được cả vốn lẫn lãi là.

$$50(1 + 0,14)^2 = 64,98 \text{ (triệu đồng)}.$$

Câu 41: Ông Quang cho ông Tèo vay 1 tỉ đồng với lãi suất hàng tháng là 0,5% theo hình thức tiền lãi hàng tháng được cộng vào tiền gốc cho tháng kế tiếp. Sau 2 năm, ông Tèo trả cho ông Quang cả gốc lẫn lãi. Hỏi số tiền ông Tèo cần trả là bao nhiêu đồng? (Lấy làm tròn đến hàng nghìn).

Lời giải

Tổng số tiền ông Tèo cần trả sau 24 tháng là: $P_{24} = 1(1 + 0,5\%)^{24} \approx 1.127.160.000$ (đồng).

Câu 42: Một người gửi 15 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kỳ hạn một quý với lãi suất 1,65% một quý. Hỏi sau bao lâu người đó có được ít nhất 20 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi) từ số vốn ban đầu? (Giả sử lãi suất không thay đổi).

Lời giải

Số tiền của người ấy sau n kỳ hạn là $T = 15 \left(1 + \frac{1,65}{100} \right)^n$.

Theo đề bài, ta có $15 \left(1 + \frac{1,65}{100} \right)^n > 20 \Leftrightarrow n > \log_{1+\frac{1,65}{100}} \frac{4}{3} \approx 17,56$.

Câu 43: Giá trị còn lại của một chiếc xe theo thời gian khấu hao t được xác định bởi công thức:

$V(t) = 15000e^{-0,15t}$, trong đó $V(t)$ được tính bằng USD và t được tính bằng năm. Hỏi sau bao lâu giá trị còn lại của chiếc xe chỉ là 5000 USD gần nhất với số nào sau đây?

Lời giải

$$V(t) = 15000e^{-0,15t} \Leftrightarrow e^{-0,15t} = \frac{V(t)}{15000} \Leftrightarrow -0,15t = \ln \left(\frac{V(t)}{15000} \right) \Leftrightarrow t = -\frac{20}{3} \ln \left(\frac{V(t)}{15000} \right).$$

Thay $V(t) = 5000$ ta được $t = -\frac{20}{3} \ln \left(\frac{5000}{15000} \right) \approx 7,324$ năm.

Câu 44: Biết rằng năm 2001, dân số Việt Nam là 78.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là 1,7%. Cho biết sự tăng dân số được ước tính theo công thức $S = A.e^{Nr}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm). Nếu dân số vẫn tăng với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 120 triệu người.

Lời giải

Ta có: $78685800.e^{N.0,017} = 120000000 \Leftrightarrow N \approx 24,8$ (năm).

Do đó, tới năm 2026 thì dân số nước ta đạt mức 120 triệu người.

Câu 45: Huyện A có 300 nghìn người. Với mức tăng dân số bình quân 1,2%/năm thì sau n năm dân số sẽ vượt lên 330 nghìn người. Hỏi n nhỏ nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Số dân của huyện A sau n năm là $x = 300.000(1 + 0,012)^n$.

$$\Leftrightarrow 300.000(1 + 0,012)^n > 330.000 \Leftrightarrow n > \log_{1,012} \frac{33}{30} \Leftrightarrow n > 7,99.$$

Nên n nhỏ nhất bằng 8 năm.

Câu 46: Một chủ hộ kinh doanh có 32 phòng trọ cho thuê. Biết giá cho thuê mỗi tháng là 2.000.000đ/1 phòng trọ, thì không có phòng trống. Nếu cứ tăng giá mỗi phòng trọ lên 200.000đ/1 tháng, thì

sẽ có 2 phòng bị bỏ trống. Hỏi chủ hộ kinh doanh sẽ cho thuê với giá là bao nhiêu để có thu nhập mỗi tháng cao nhất?

Lời giải

Gọi n , ($n \in \mathbb{N}$) là số lần tăng giá.

Hàm thu nhập của tháng: $f(n) = (2000000 + n \cdot 200000)(32 - n \cdot 2)$.

$= -400000n^2 + 2400000n + 64000000$ là hàm bậc 2 theo n , có hệ số $a < 0$.

Vậy $f(n)$ đạt giá trị lớn nhất khi $n = \frac{-2400000}{2 \cdot (-400000)} = 3$.

$$\left. \begin{array}{l} *f(3) = 67.600.000 \\ *f(0) = 64.000.000 \end{array} \right\} \Rightarrow f(3) > f(0).$$

Vậy chủ hộ sẽ cho thuê với giá $2.000.000 + 3 \cdot 200.000 = 2.600.000$ đ.

Câu 47: Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 6%/năm và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm, người đó thu được số tiền gấp ba số tiền ban đầu?

Lời giải

Gọi số tiền gửi ban đầu là P . Sau n năm, số tiền thu được là: $P_n = P(1 + 0,06)^n = P(1,06)^n$.

Để $P_n = 3P$ thì phải có $(1,06)^n = 3$. Do đó $n = \log_{1,06} 3 \approx 18,85$.

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn $n = 19$.

Câu 48: Một người gửi gói tiết kiệm linh hoạt của ngân hàng cho con với số tiền là 500000000 VNĐ, lãi suất 7%/năm. Biết rằng người ấy không lấy lãi hàng năm theo định kỳ sổ tiết kiệm. Hỏi sau 18 năm, số tiền người ấy nhận về là bao nhiêu? (Biết rằng, theo định kì rút tiền hằng năm, nếu không lấy lãi thì số tiền sẽ được nhập vào thành tiền gốc và số tiết kiệm sẽ chuyển thành kì hạn 1 năm tiếp theo).

Lời giải

Gọi a là số tiền gửi vào hàng tháng gửi vào ngân hàng.

x là lãi suất ngân hàng.

n là số năm gửi.

Sau năm 1 thì số tiền là: $a + ax = a(x+1)$.

Sau năm 2: $a(x+1) + a(x+1)x = a(x+1)(x+1) = a(x+1)^2$.

Sau năm 3: $a(x+1)^2 + a(x+1)^2 x = a(x+1)^2(x+1) = a(x+1)^3$.

Sau năm 4: $a(x+1)^3 + a(x+1)^3 x = a(x+1)^3(x+1) = a(x+1)^4$.

Sau n năm, số tiền cả gốc lẫn lãi là: $a(x+1)^n$.

Vậy sau 18 năm, số tiền người ý nhận được là: $500.000.000(0,07+1)^{18} = 1,689,966,000$ VNĐ.

Câu 49: Một cửa hàng bán lẻ phần mềm soạn thảo công thức toán học MathType với giá là 10 USD. Với giá bán này, cửa hàng chỉ bán được khoảng 25 sản phẩm. Cửa hàng dự định sẽ giảm giá bán, ước tính cứ mỗi lần giảm giá bán đi 2 USD thì số sản phẩm bán được tăng thêm 40 sản phẩm. Xác định giá bán để cửa hàng thu được lợi nhuận lớn nhất, biết rằng giá mua về của một sản phẩm là 5 USD.

Lời giải

Gọi x là giá giảm trên một sản phẩm, khi đó sẽ bán thêm được $20x$ sản phẩm.

Vậy lợi nhuận thu được bằng:

$$L(x) = (25 + 20x)(10 - x - 5) = -20x^2 + 75x + 125 = -20\left(x - \frac{15}{8}\right)^2 + \frac{3125}{16} \leq \frac{3125}{16}.$$

Lợi nhuận tối đa thu được là $\frac{3125}{16} = 195,3125$ USD khi $x = \frac{15}{8}$ hay giá bán một sản phẩm là

$$10 - \frac{15}{8} = 8,125 \text{ USD.}$$

Câu 50: Sau 15 năm ra trường, thầy A đã tiết kiệm được cho mình số tiền 300 triệu đồng, thầy dự định sẽ dùng số tiền đó để mua một căn nhà. Nhưng hiện nay để mua được căn nhà vừa ý, thầy A cũng cần phải có 600 triệu đồng. Rất may một học trò cũ của thầy sau khi ra trường công tác đã lập gia đình và mua nhà ở thành phố nên đồng ý để thầy Hợp ở lại căn nhà của mình trong khoảng thời gian tối đa 10 năm, đồng thời chỉ bán lại căn nhà khi trong khoảng thời gian đó thầy A giao đủ số tiền 600 triệu đồng. Sau khi tính toán thầy quyết định gửi toàn bộ số tiền 300 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 8,1% / năm và lãi hàng năm nhập vào vốn. Hỏi phải mất thời gian tối thiểu bao nhiêu năm nữa thầy A mới mua được căn nhà này.

Lời giải

Áp dụng công thức lãi kép ta có:

$$P_n = P_0(1 + r)^n \Leftrightarrow 600 = 300(1 + 8,1\%)^n \Leftrightarrow n = \log_{1+8,1\%} 2 \approx 8,699. \text{ Chọn } n = 9.$$

Phải mất thời gian tối thiểu 9 năm nữa thầy A mới mua được căn nhà này.

Câu 51: Số lượng của một loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q(t) = Q_0 \cdot e^{0.195t}$, trong đó Q_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao nhiêu giờ, số lượng vi khuẩn có 100.000 con?

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $Q(t) = 5000 \cdot e^{0.195t}$. Để số lượng vi khuẩn là 100.000 con thì.

$$Q(t) = 5000 \cdot e^{0.195t} = 100.000 \Leftrightarrow e^{0.195t} = 20 \Leftrightarrow t = \frac{1}{0.195} \ln 20 \approx 15.36(h).$$

Câu 52: Một tỉnh A đưa ra nghị quyết về giảm biên chế cán bộ công chức, viên chức hưởng lương từ ngân sách nhà nước trong giai đoạn 2015 – 2021 (6 năm) là 10,6% so với số lượng hiện có năm 2015 theo phương thức “ra 2 vào 1” (tức là khi giảm đối tượng hưởng lương từ ngân sách nhà nước 2 người thì được tuyển mới 1 người). Giả sử tỉ lệ giảm và tuyển dụng mới hàng năm so với năm trước đó là như nhau. Tính tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm (làm tròn đến 0,01%).

Lời giải

Gọi x ($x \in \mathbb{N}^*$) là số cán bộ công chức tỉnh A năm 2015.

Gọi r là tỉ lệ giảm hàng năm.

Số người mất việc năm thứ nhất là: $x \cdot r$.

Số người còn lại sau năm thứ nhất là: $x - x \cdot r = x(1 - r)$.

Tương tự, số người mất việc sau năm thứ hai là: $x(1 - r)r$.

Số người còn lại sau năm thứ hai là: $x(1 - r) - x(1 - r) \cdot r = x(1 - r)^2$.

$\Rightarrow$ Số người mất việc sau năm thứ sáu là: $x(1-r)^5 \cdot r$.

Tổng số người mất việc là: $x \cdot r + x \cdot (1-r) \cdot r + x \cdot (1-r)^2 \cdot r + \dots + x \cdot (1-r)^5 \cdot r = 10,6\%x$.

$$\Leftrightarrow r + (1-r)r + (1-r)^2 r + \dots + (1-r)^5 r = 0,106.$$

$$\Leftrightarrow \frac{r[1-(1-r)^6]}{1-(1-r)} = 0,106 \Rightarrow r \approx 0,0185.$$

Vì tỉ lệ giảm hàng năm bằng với tỉ lệ tuyển dụng mới nên tỉ lệ tuyển dụng mới hàng năm là 1,85%.

Câu 53: Giả sử tỉ lệ lạm phát của Việt Nam trong 10 năm qua là 5%. Hỏi nếu năm 2007, giá xăng là 12000 VND/lít. Hỏi năm 2016 giá tiền xăng là bao nhiêu tiền một lít.

Lời giải

Giá xăng năm 2008 là $12000(1+0,05)$.

Giá xăng năm 2009 là $12000(1+0,05)^2$.

....

Giá xăng năm 2016 là $12000(1+0,05)^9 \approx 18615,94$ VND/lít.

Câu 54: Để đầu tư dự án trồng rau sạch theo công nghệ mới, ông An đã làm hợp đồng xin vay vốn ngân hàng với số tiền 800 triệu đồng với lãi suất $x\%/năm$, điều kiện kèm theo của hợp đồng là số tiền lãi tháng trước sẽ được tính làm vốn để sinh lãi cho tháng sau. Sau hai năm thành công với dự án rau sạch của mình, ông An đã thanh toán hợp đồng ngân hàng số tiền là 1.058 triệu đồng. Hỏi lãi suất trong hợp đồng giữa ông An và ngân hàng là bao nhiêu?

Lời giải

Công thức tính tiền vay lãi kép $T_n = a(1+x)^n$.

Trong đó a : số tiền vay ban đầu, x : lãi suất $x\%/năm$, n : số năm $\Rightarrow x = \sqrt[n]{\frac{T_n}{a}} - 1$.

Vậy $x = \sqrt[2]{\frac{1058}{800}} - 1 = 0,15$ tức là $15\%/năm$.

Câu 55: Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong gỗ là 65,21 (%). Hãy xác định niên đại của công trình kiến trúc đó.

Lời giải

Theo đề, ta có: $65,21\% = 100 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5750}} \Rightarrow t = 3547$ năm.

Câu 56: Số sản phẩm của một hãng đầu DVD sản xuất được trong 1 ngày là giá trị của hàm số:

$f(m,n) = m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}}$, trong đó là m số lượng nhân viên và n là số lượng lao động chính. Mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm để đáp ứng nhu cầu khách hàng. Biết rằng mỗi ngày hãng đó phải trả lương cho một nhân viên là 6 USD và cho một lao động chính là 24 USD. Tìm giá trị nhỏ nhất chi phí trong 1 ngày của hãng sản xuất này.

Lời giải

Vì mỗi ngày hãng phải sản xuất được ít nhất 40 sản phẩm nên

$$f(m, n) \geq 40 \Leftrightarrow m^{\frac{2}{3}} \cdot n^{\frac{1}{3}} \geq 40 \Leftrightarrow m^2 \cdot n \geq 40^3. \text{ Chi phí phải trả trong 1 ngày của hãng là}$$

$$6m + 24n = 6(m + 4n) = 6\left(\frac{m}{2} + \frac{m}{2} + 4n\right) \geq 6 \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{m}{2} \cdot \frac{m}{2} \cdot 4n} = 18 \sqrt[3]{m^2 \cdot n} \geq 18 \sqrt[3]{40^3} = 18 \cdot 40 = 720.$$

Câu 57: Hiện tại dân số ở Hà Nội là 7,55 triệu người với tốc độ tăng dân số 2% một năm và dân số Thành phố Hồ Chí Minh là 8,15 triệu người với tốc độ tăng dân số 1,5% một năm. Hỏi ít nhất sau bao nhiêu năm nữa thì số dân Hà Nội vượt số dân Thành phố Hồ Chí Minh.

Lời giải

Số dân của Hà Nội sau n năm là $X_1 = 7,55(1 + 0,02)^n = 7,55 \cdot (1,02)^n$.

Số dân của thành phố Hồ Chí Minh sau n năm là $X_2 = 8,15(1 + 0,015)^n = 8,15 \cdot (1,015)^n$.

$$X_1 > X_2 \Rightarrow 7,55 \cdot (1,02)^n > 8,15 \cdot (1,015)^n \Rightarrow \left(\frac{1,02}{1,015}\right)^n > \frac{8,15}{7,55} \Rightarrow n > \log_{\frac{1,02}{1,015}} \left(\frac{8,15}{7,55}\right) \approx 15,56.$$

Vậy sau ít nhất 16 năm.

Câu 58: Một công ty bất động sản có 150 căn hộ cho thuê, biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2 triệu đồng một tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ thêm 100.000 đồng mỗi tháng thì có thêm 5 căn hộ bị bỏ trống. Hỏi muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê mỗi căn hộ bao nhiêu đồng một tháng?

Lời giải

Số tiền thuê căn hộ: $y = (150 - 5x)(2.000.000 + 100.000x), (x \in \mathbb{N})$.

$$y' = -1.000.000x + 5.000.000 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy $y_{\max} = 2.500.000 \Leftrightarrow x = 5$.

Câu 59: Trong nông nghiệp bèo hoa dâu được dùng làm phân bón, nó rất tốt cho cây trồng. Mới đây các nhà khoa học Việt Nam đã phát hiện ra bèo hoa dâu có thể dùng để chiết xuất ra chất có tác dụng kích thích hệ miễn dịch và hỗ trợ điều trị bệnh ung thư. Bèo hoa dâu được thả nuôi trên mặt nước. Một người đã thả một lượng bèo hoa dâu chiếm 4% diện tích mặt hồ. Biết rằng cứ sau đúng một tuần bèo phát triển thành 3 lần số lượng đã có và tốc độ phát triển của bèo ở mọi thời điểm như nhau. Sau bao nhiêu ngày bèo sẽ vừa phủ kín mặt hồ?

Lời giải

Theo đề bài số lượng bèo ban đầu 0,04 diện tích mặt hồ.

Sau 7 ngày số lượng bèo là $0,04 \times 3^1$ diện tích mặt hồ.

Sau 14 ngày số lượng bèo là $0,04 \times 3^2$ diện tích mặt hồ.

....

Sau $7 \times n$ ngày số lượng bèo là $0,04 \times 3^n$ diện tích mặt hồ.

Để bèo phủ kín mặt hồ thì $0,04 \times 3^n = 1 \Leftrightarrow 3^n = 25 \Leftrightarrow n = \log_3 25$.

Vậy sau $7 \times \log_3 25$ ngày thì bèo vừa phủ kín mặt hồ.

Câu 60: Cường độ một trận động đất M (richter) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất

ở San Francisco có cường độ 8.3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nam Mỹ có biên độ mạnh hơn gấp 4 lần. Cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ là bao nhiêu?

Lời giải

$$M_1 = \log \frac{A_1}{A_0} = 8,3 \Rightarrow A_1 = 10^{8,3} \cdot A_0.$$

$$M_2 = \log \frac{A_2}{A_0} = \log \frac{4A_1}{A_0} = \log \frac{4 \cdot 10^{8,3} A_0}{A_0} = \log(4 \cdot 10^{8,3}) = 8,3 + \log 4 \approx 8,9.$$

Câu 61: Số lượng của một số loài vi khuẩn sau t (giờ) được xấp xỉ bởi đẳng thức $Q = Q_0 \cdot e^{0,195t}$, trong đó Q_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu. Nếu số lượng vi khuẩn ban đầu là 5000 con thì sau bao lâu có 100 000 con?

Lời giải

$$Q = Q_0 e^{0,195t} \Rightarrow 100\,000 = 5000 e^{0,195t} \Rightarrow t = 15,36.$$

Câu 62: Một người quan sát một đám bèo phát triển trên mặt hồ thì thấy cứ sau một giờ thì diện tích của đám bèo lớn gấp 10 lần diện tích đám bèo trước đó, với tốc độ tăng không đổi thì sau 9 giờ đám bèo ấy phủ kín mặt hồ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì đám bèo ấy phủ kín một phần ba mặt hồ?

Lời giải

Gọi a diện tích ban đầu của đám bèo.

Sau một giờ diện tích đám bèo là $a_1 = 10a$; Sau n giờ diện tích đám bèo là $a_n = a \cdot 10^n$.

Sau 9 giờ diện tích đám bèo là $a_9 = a \cdot 10^9 = S$; (S) là diện tích của mặt hồ.

Ta có đám bèo ấy phủ kín một phần ba mặt hồ

$$\Leftrightarrow \frac{S}{3} = \frac{a \cdot 10^9}{3} = a \cdot 10^n \Leftrightarrow 10^n = \frac{10^9}{3} \Leftrightarrow n = \log \frac{10^9}{3} = 9 - \log 3.$$

Câu 63: Cho một chất Uranium phóng xạ có tỉ lệ phóng xạ hằng ngày là $-0,4\%$ tức là khối lượng của nó giảm $0,4\%$ mỗi ngày. Khối lượng của chất đó sau n ngày được tính theo công thức $M = M_0 \cdot e^{ni}$ trong đó M_0 là khối lượng ngày đầu, i là tỉ lệ phóng xạ hàng ngày. Hỏi sau 50 ngày phóng xạ, 30 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu?

Lời giải

Áp dụng công thức $M = M_0 \cdot e^{ni}$ ta được $M = 30 \cdot e^{-0,004 \cdot 50} \approx 24,5619(g)$.

Cách khác: Khối lượng Uranium giảm từng ngày $0,4\%$ nên:

$$\text{Sau ngày thứ nhất lượng Uranium còn: } 30 - 30 \cdot \frac{4}{1000} = 30 \left(1 - \frac{4}{1000} \right) (g).$$

$$\text{Sau ngày thứ hai lượng Uranium còn: } 30 \left(1 - \frac{4}{1000} \right) - 30 \left(1 - \frac{4}{1000} \right) \cdot \frac{4}{1000} = 30 \left(1 - \frac{4}{1000} \right)^2 (g).$$

.....

$$\text{Sau ngày thứ 50 lượng Uranium còn: } 30 \left(1 - \frac{4}{1000} \right)^{50} \approx 24,5520 (g).$$

(Công thức đầu tính khối lượng giảm liên tục, cách 2 tính theo kiểu lãi kép (tức có “kì hạn”).

BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN ĐẠO HÀM

Câu 1: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^2 + t + 5$, trong đó t là thời gian (s), s là quãng đường đi được (m). Tính vận tốc tức thời của xe tại thời điểm $t = 3$.

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại $t = 3$.

$$\Delta s = (3 + \Delta t)^2 + (3 + \Delta t) + 5 - (3^2 + 3 + 5)$$

$$= 9 + 6\Delta t + \Delta t^2 + 3 + \Delta t + 5 - 9 - 3 - 5.$$

$$= 7\Delta t + \Delta t^2.$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 7 + \Delta t.$$

$$v(3) = s'(3) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 7 \text{ (m/s)}.$$

Câu 2: Tổng chi phí để sản xuất ra Q sản phẩm là: $C(Q) = 3Q^3 - Q^2 + 3Q + 100$. Chi phí biên được xác định bởi hàm số $C'(Q)$. Tính $C'(8)$

Lời giải

Gọi ΔQ là số gia của biến số tại $Q = 8$.

$$\text{Ta có: } \Delta C = 3(8 + \Delta Q)^3 - (8 + \Delta Q)^2 + 3(8 + \Delta Q) + 100 - (3 \cdot 8^3 - 8^2 + 3 \cdot 8 + 100)$$

$$= 3(8^3 + 3 \cdot 8^2 \cdot \Delta Q + 3 \cdot 8 \cdot \Delta Q^2 + \Delta Q^3) - (8^2 + 16\Delta Q + \Delta Q^2) + 24 + 3\Delta Q + 100 - (3 \cdot 8^3 - 8^2 + 3 \cdot 8 + 100)$$

$$= 576\Delta Q + 72\Delta Q^2 + 3\Delta Q^3 - 16\Delta Q - \Delta Q^2 + 3\Delta Q$$

$$= 563\Delta Q + 71\Delta Q^2 + 3\Delta Q^3$$

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q} = 563 + 71\Delta Q + 3\Delta Q^2$$

$$\lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = 563.$$

$$C'(8) = 563$$

Câu 3: Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = 6t^2 - 2t^3$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng 5 giây kể từ lúc vật bắt đầu chuyển động vận tốc lớn nhất của vật là bao nhiêu?

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại t_0

$$\begin{aligned}\Delta s &= 6(t_0 + \Delta t)^2 - 2(t_0 + \Delta t)^3 - (6t_0^2 - 2t_0^3) \\ &= 6(t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2) - 2(t_0^3 + 3t_0^2\Delta t + 3t_0\Delta t^2 + \Delta t^3) - (6t_0^2 - 2t_0^3) \\ &= 12t_0\Delta t + 6\Delta t^2 - 6t_0^2\Delta t - 6t_0\Delta t^2 - \Delta t^3\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = 12t_0 + 6\Delta t - 6t_0^2 - 6t_0\Delta t - \Delta t^2.$$

$$v(t_0) = s'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (12t_0 + 6\Delta t - 6t_0^2 - 6t_0\Delta t - \Delta t^2) = 12t_0 - 6t_0^2 \text{ (m/s)}.$$

Vận tốc của vật là: $v(t_0) = s'(t_0) = -6t_0^2 + 12t_0 = -6(t_0 - 1)^2 + 6 \leq 6$, dấu bằng khi $t_0 = 1$.

Vận tốc lớn nhất của vật là 6 m/s .

Câu 4: Một bình nuôi cấy vi sinh vật được giữ ở nhiệt độ 0°C . Tại thời điểm $t = 0(\text{s})$ người ta cung cấp nhiệt cho nó. Nhiệt độ tăng lên và được ước tính bởi hàm số $y = f(t) = t^2 + t + 1(^\circ\text{C})$ ($f(t)$ là nhiệt độ của bình nuôi cấy ở thời điểm t). Hãy tính tốc độ tăng của bình tại thời điểm $t = 5(\text{s})$.

Lời giải

Gọi Δt là số gia của biến số tại t_0

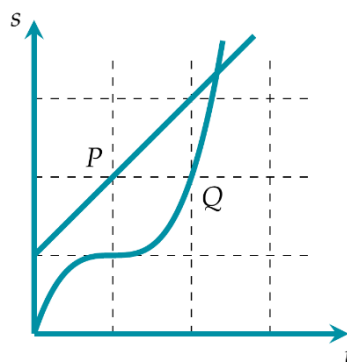
$$\begin{aligned}\Delta y &= ((t_0 + \Delta t)^2 + (t_0 + \Delta t) + 1) - (t_0^2 + t_0 + 1) \\ &= t_0^2 + 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + t_0 + \Delta t + 1 - t_0^2 - t_0 - 1 \\ &= 2t_0\Delta t + \Delta t^2 + \Delta t\end{aligned}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = 2t_0 + \Delta t + 1.$$

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (2t_0 + \Delta t + 1) = 2t_0 + 1 \text{ (} ^\circ\text{C/s)}.$$

Tốc độ tăng nhiệt tại thời điểm $t = 5(\text{s})$ là $f'(5) = 2.5 + 1 = 11(^\circ\text{C/s})$.

Câu 5: Hai chất điểm P và Q có đồ thị chuyển động như hình vẽ. Ta gọi v_P và v_Q lần lượt là vận tốc tại thời điểm hai chất điểm P và Q gặp nhau lần đầu tiên. Hãy so sánh v_P và v_Q .



Lời giải

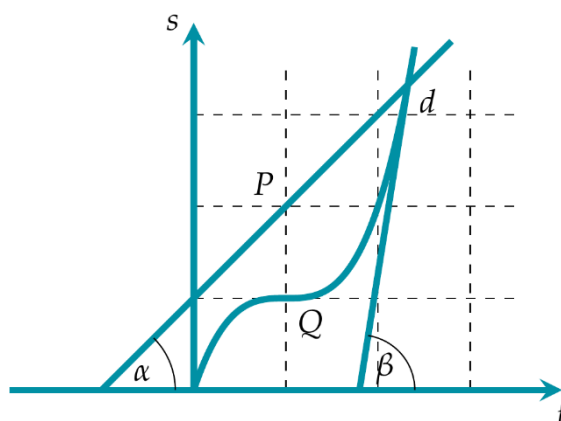
Gọi S_P và S_Q lần lượt là quãng đường đi được của hai chất điểm P và Q .

Theo hình vẽ, hai chất điểm P và Q gặp nhau lần đầu tiên tại $2 < t_0 < 3$. Ta thấy:

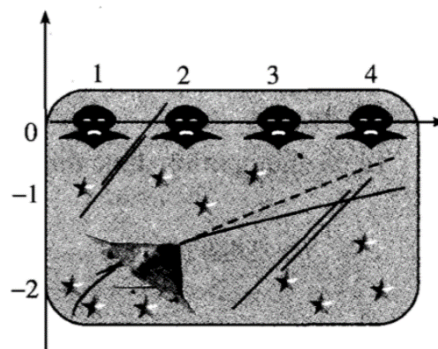
+ Tiếp tuyến của đồ thị của chất điểm P tại t_0 là đồ thị của P có hệ số góc là $S_P'(t_0) = \tan \alpha$.

+ Tiếp tuyến của đồ thị của chất điểm Q tại t_0 là đồ thị của Q có hệ số góc là $S_Q'(t_0) = \tan \beta$.

Rõ ràng $\tan \alpha < \tan \beta$ nên $S_P'(t_0) < S_Q'(t_0)$ hay $v_P(t_0) < v_Q(t_0)$.



Câu 6: Trong một trò chơi điện tử, máy bay xuất hiện ở góc trái màn hình rồi bay sang phải theo quỹ đạo (C) là đồ thị của hàm số $y = -1 - \frac{1}{x}, (x > 0)$. Biết rằng tên lửa được bắn ra từ máy bay tại một điểm thuộc (C) sẽ bay theo phương tiếp tuyến của (C) tại điểm đó. Tìm hoành độ x_0 thuộc (C) sao cho tên lửa bắn ra từ đó sẽ bắn trúng mục tiêu ở trên màn hình có tọa độ $(4, 0)$.



Lời giải

Với $x_0 > 0$ tùy ý, ta có

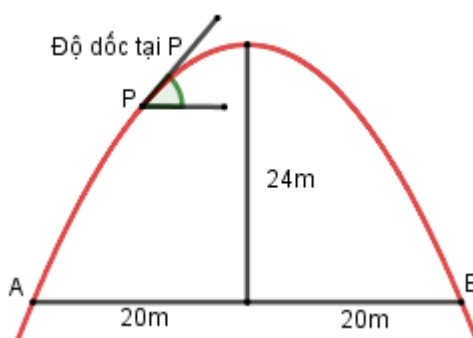
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-1 - \frac{1}{x} - \left(-1 - \frac{1}{x_0}\right)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{x \cdot x_0 (x - x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{x \cdot x_0} = \frac{1}{x_0^2}.$$

Vậy phương trình tiếp tuyến tại điểm x_0 là $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0 = \frac{1}{x_0^2}(x - x_0) - 1 - \frac{1}{x_0}$.

$$\text{Vì tiếp tuyến đi qua điểm } (4, 0) \text{ nên } \frac{1}{x_0^2}(4 - x_0) - 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 + \sqrt{5} \\ x_0 = -1 - \sqrt{5} \end{cases}.$$

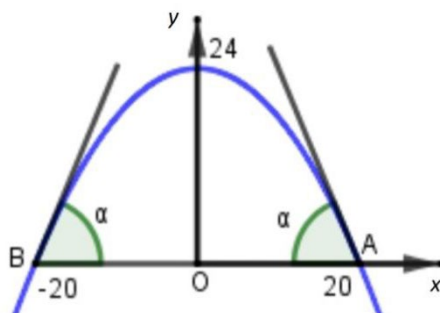
Đối chiếu với điều kiện $x_0 > 0$, khi đó ta được $x_0 = -1 + \sqrt{5}$.

Câu 7: Người ta xây một cổng chào hình Parabol biết khoảng cách giữa hai điểm A và B dưới chân cổng là $40m$, chiều cao từ đỉnh cổng đến mặt đất là $24m$. Độ dốc tối đa của cổng gần nhất với kết quả nào sau đây? (Độ dốc của cổng tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với bề mặt Parabol và phương ngang).



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Với O là trung điểm của AB , tia Ox trùng với tia OA , C là đỉnh của Parabol, tia Oy trùng với tia OC .



Gọi Parabol có dạng $(P): y = ax^2 + c$ ($a < 0$).

Do (P) đi qua các điểm $A(20; 0); C(0; 24)$ nên ta có hệ:

$$\begin{cases} 20^2 a + c = 0 \\ c = 24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{50} \\ c = 24 \end{cases}.$$

Vậy Parabol có phương trình $(P): y = -\frac{3}{50}x^2 + 24$.

Hệ số góc k của tiếp tuyến tại một điểm bất kì của Parabol xác định độ dốc của Parabol.

Ta có: $k = -\frac{3}{25}x$, $-20 \leq x \leq 20$.

Do đó: $|k| = \left| -\frac{3}{25}x \right| \leq \frac{3}{25} \cdot 20 = \frac{12}{5}$.

Vậy độ dốc lớn nhất là α với $\tan \alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow \alpha \approx 67^\circ 23'$. Khi đó $\alpha \approx 67^\circ 23'$.

Câu 8: Một doanh nghiệp sản xuất hàng hóa. Biết tổng chi phí sản xuất x đơn vị sản phẩm là: $C(x) = 2x^3 - 3x^2 + 400x + 5000$ (nghìn đồng). Tổng số tiền thu được khi bán x đơn vị sản phẩm đó là: $R(x) = 4000x - 33x^2$ (nghìn đồng). Sản lượng tối ưu và doanh thu lúc đó của doanh nghiệp tương ứng là

Lời giải

- Điều kiện: $x > 0, x \in \mathbb{N}$.

- Doanh nghiệp thu được lợi nhuận là:

$$\begin{aligned} P(x) &= R(x) - C(x) = (4000x - 33x^2) - (2x^3 - 3x^2 + 400x + 5000) \\ &= -2x^3 - 30x^2 + 3600x - 5000 \end{aligned}$$

- Lợi nhuận biên là: $P'(x) = -6x^2 - 60x + 3600$.

- Lợi nhuận tối đa đạt được tại một trong các điểm x_0 mà $P'(x_0) = 0$.

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -30 \text{ (loại)} \\ x = 20 \text{ (Thỏa mãn)} \end{cases}$$

- Ta có bảng xét dấu của $P'(x)$:

x	0	20	$+\infty$
$P'(x)$	$+$	0	$-$

- Từ bảng xét dấu của $P'(x)$ ta có:

Khi $x < 20$ thì $P'(x) > 0$ nên nếu tiếp tục sản xuất thì lợi nhuận tăng.

Khi $x > 20$ thì $P'(x) < 0$ nên nếu tiếp tục sản xuất thì lợi nhuận giảm.

Vậy mức sản lượng tối ưu là 20.

Doanh thu lúc đó là: $P(20) = 39000$ nghìn đồng hay 39 triệu đồng.

Câu 9: Một chuyển động theo qui luật là $s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$ với t giây là khoảng thời gian tính từ

khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi chuyển được trong khoảng thời gian đó. Quãng đường vật đi được bắt đầu từ lúc vật chuyển động tới thời điểm vật đạt được vận tốc lớn nhất bằng

Lời giải

$$s = -\frac{1}{2}t^3 + 3t^2 + 20$$

$$v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}t^2 + 6t$$

$$v(t) = s'(t) = -\frac{3}{2}(t^2 - 4t + 4 - 4) = -\frac{3}{2}[(t-2)^2 - 4] = -\frac{3}{2}(t-2)^2 + 6 \leq 6$$

Vậy vận tốc đạt được giá trị lớn nhất tại thời điểm $t = 2(s)$.

Khi đó quãng đường vật đi được là: $s = s(2) = -4 + 12 + 20 = 28(m)$.

Câu 10: Một con lắc lò xo chuyển động điều hòa theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 2 \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) - 5$, trong đó t tính bằng giây (s) và x tính bằng centimet (cm). Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc lò xo bằng 0?

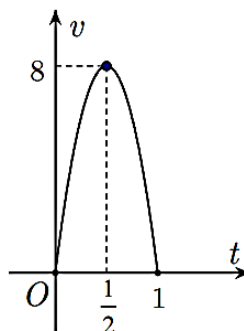
Lời giải

$$\text{Vận tốc tức thời của con lắc: } v(t) = x' = -2\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right).$$

$$v(t) = 0 \Leftrightarrow -2\pi \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \pi t - \frac{\pi}{3} = k\pi; \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{3} + k; \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 11: Một vật chuyển động trong 1 giờ với vận tốc v phụ thuộc vào thời gian t có đồ thị vận tốc như hình bên. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(\frac{1}{2}; 8)$ và trục đối xứng song song với trục tung. Tính gia tốc của vật lúc $t = 0,25(h)$



Lời giải

Gọi $v(t) = p.t^2 + q.t + r$ đi qua $O(0;0)$; $I(\frac{1}{2}; 8)$ và $M(1;0)$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} r = 0 \\ \frac{1}{4}p + \frac{1}{2}q + r = 8 \\ p + q + r = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ q = 32 \\ p = -32 \end{cases} \text{ . Vậy } v(t) = -32t^2 + 32t$$

Gia tốc vật là $a = v'(t) = -64t + 32$

Lúc $t = 0,25(h)$ thì gia tốc là $a = 16(km / h^2)$.

B3

Câu 12: Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình: $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

- Tính vận tốc của vật tại các thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.
- Tại những thời điểm nào vật đứng yên?
- Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.
- Tính tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.
- Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

Lời giải

a) Ta có $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 9$.

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giây là $v(2) = 3.2^2 - 12.2 + 9 = -3(m/s)$.

Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $v(4) = 3.4^2 - 12.4 + 9 = 9(m/s)$.

b) Gọi t_0 là thời điểm vật đứng yên. Khi đó ta có:

$$v(t_0) = 0 \Leftrightarrow 3.t_0^2 - 12.t_0 + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t_0 = 1(s) \\ t_0 = 3(s) \end{cases}$$

Vậy tại thời điểm 1s hoặc 3s thì vật sẽ đứng im.

c) Ta có $a(t) = s''(t) = 6t - 12$.

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây là $a(4) = s''(4) = 6.4 - 12 = 12(m/s^2)$.

d) Ta có khi $t = 1$ giây hoặc $t = 3$ giây thì vật đứng yên

Do đó ta cần tính riêng rẽ quãng đường vật đi được trong từng khoảng thời gian $[0;1], [1;3], [3;5]$

Từ thời điểm $t = 0$ giây đến $t = 1$ giây giây, vật đi được quãng đường là:

$$|f(1) - f(0)| = |4 - 0| = 4(m).$$

Từ thời điểm $t = 1$ giây đến $t = 3$ giây, vật đi được quãng đường là:

$$|f(3) - f(1)| = |0 - 4| = 4(m).$$

Từ thời điểm $t = 3$ giây đến $t = 5$ giây giây, vật đi được quãng đường là:

$$|f(5) - f(3)| = |20 - 0| = 20(m).$$

Tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên là $4 + 4 + 20 = 28(m)$

e) Xét $a(t) = 0 \Leftrightarrow 6t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Với $t \in [0; 2)$ thì gia tốc âm, tức là vật giảm tốc.

Với $t \in (2; 5]$ thì gia tốc dương, tức là vật tăng tốc.

Câu 13: Một viên sỏi rơi từ độ cao $49m$ thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$ với t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tìm:

- Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 3$.
- Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.
- Gia tốc của viên sỏi lúc $t = 2$.
- Thời điểm mà vận tốc của viên sỏi tại thời điểm đó bằng $22,54 m/s$.

Lời giải

$$s'(t) = 9,8t; s''(t) = 9,8.$$

a) Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 3$ là $s'(3) = 9,8 \cdot 3 = 29,4 m/s$.

b) Quãng đường rơi của viên sỏi khi chạm đất là $49m$.

Thời gian rơi của viên sỏi khi chạm đất là

$$s(t) = 49 \Leftrightarrow 4,9t^2 = 49 \Leftrightarrow t^2 = 10 \Leftrightarrow t = \sqrt{10} \approx 3,16s.$$

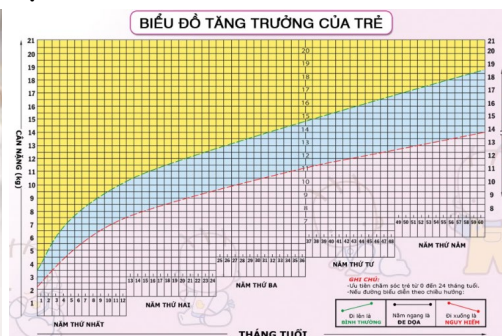
Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất là $s'(\sqrt{10}) \approx 9,8 \cdot 3,16 \approx 31 m/s$.

c) Gia tốc của viên sỏi lúc $t = 2$ là $s''(2) = 9,8 m/s^2$.

d) Thời điểm mà vận tốc của viên sỏi tại thời điểm đó bằng $22,54 m/s$.

$$\Leftrightarrow s'(t) = 22,54 \Leftrightarrow 9,8t = 22,54 \Leftrightarrow t = 2,3s.$$

Câu 14: Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (nguồn: https://www.cdc.gov/growthcharts/data/who/GrChrt_Boys). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 2 năm tuổi.



Lời giải

$$w'(t) = 2,274 \cdot 10^{-3}t^2 - 1,192t + 1,82.$$

2 năm = 24 tháng.

Tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 2 năm tuổi là:

$$w'(24) = 2,274 \cdot 10^{-3} \cdot 24^2 - 1,192 \cdot 24 + 1,82 \approx -25,48.$$

Câu 15: Trên Mặt Trăng, quỹ đạo rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật được thả rơi từ độ cao $100m$ phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 3$ sau khi thả vật đó, tính:

- Vận tốc của vật.
- Gia tốc của vật.



Lời giải

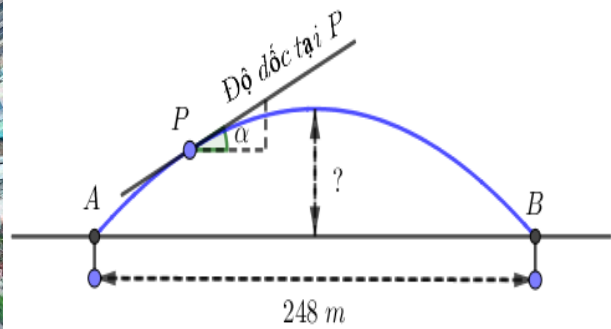
$$s'(t) = 1,62t; s''(t) = 1,62.$$

- Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 3$ là $s'(3) = 1,62.3 = 4,86 \text{ m/s}$.
- Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3$ là $s''(3) = 1,62 \text{ m/s}^2$.

Câu 16: Vì mật độ giao thông qua ngã tư An Sương An Sương, Quận 12, TP. Hồ Chí Minh rất cao, thường xuyên xảy ra tình trạng kẹt xe nên người ta xây một cây cầu vượt giao thông ngã tư này có hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $248m$ (hình 1). Độ dốc α của mặt cầu không vượt quá $6^\circ 30'$ (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang như hình 2). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



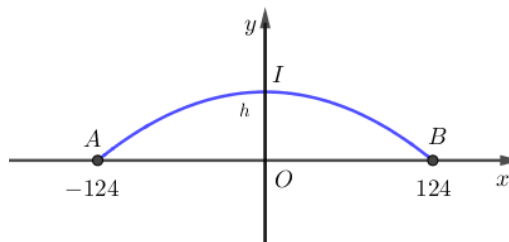
Hình 1. Cầu vượt ngã tư An Sương



Hình 2

Lời giải

Gọi O là trung điểm AB . Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Gọi h là chiều cao giới hạn của cầu, điều kiện $h > 0$.

Ta có tọa độ các điểm $A(-124;0); B(124;0); I(0;h)$.

Mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $(P): y = ax^2 + h \quad (a < 0)$.

$$B(124;0) \in (P) \Leftrightarrow a.124^2 + h = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{h}{124^2}.$$

$$\text{Suy ra } y = -\frac{h}{124^2}x^2 + h \Rightarrow y' = -\frac{2h}{124^2}x.$$

Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là

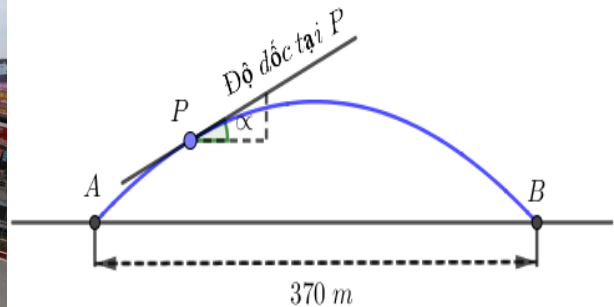
$$k = y' = -\frac{2h}{124^2}x \text{ với } -124 \leq x \leq 124 \Rightarrow |k| = \left| -\frac{2h}{124^2}x \right| = \frac{2h}{124^2}|x| \leq \frac{2h}{124^2}.124 = \frac{h}{62}.$$

Vì độ dốc của mặt cầu không vượt quá $6^\circ 30'$ nên $\frac{h}{62} \leq \tan 6^\circ 30'.$

$$\Rightarrow h \leq 62 \cdot \tan 6^\circ 30' \Rightarrow h \leq 7,1.$$

Vậy chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là $7,1m$.

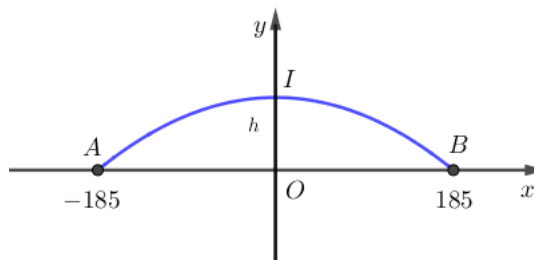
Câu 17: Nhằm giảm ùn tắc giao thông ở cửa ngõ phía Tây TP.HCM, người ta xây một cây cầu vượt giao thông ngã tư Gò Mây trên quốc lộ 1A (là ranh giới quận Bình Tân và quận Tân Phú, TP. Hồ Chí Minh) có hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là $370m$ (hình 1). Tính độ dốc α tối đa của mặt cầu với $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ (hình 2), biết chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường là $5m$.



Hình 1. Cầu vượt ngã tư Gò Mây Hình 2.

Lời giải

Gọi O là trung điểm AB . Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Gọi h là chiều cao giới hạn của cầu, ta có $h = 5$.

Tọa độ các điểm $A(-185;0); B(185;0); I(0;5)$.

Mặt cắt của cây cầu có hình dạng parabol $(P): y = ax^2 + 5 \quad (a < 0)$.

$$B(185;0) \in (P) \Leftrightarrow a.185^2 + 5 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{5}{185^2}.$$

$$\text{Suy ra } y = -\frac{5}{185^2}x^2 + 5 \Rightarrow y' = -\frac{10}{185^2}x.$$

Gọi α là góc xác định độ dốc của mặt cầu, điều kiện: $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$.

Hệ số góc xác định độ dốc của mặt cầu là:

$$k = y' = -\frac{10}{185^2}x \text{ với } -185 \leq x \leq 0 \Rightarrow k \leq \frac{10}{185^2} \cdot 185 = \frac{2}{37} \Rightarrow \tan \alpha \leq \frac{2}{37} \text{ (vì } k = \tan \alpha \text{)}.$$

$\Rightarrow \alpha \leq 3^\circ 6'$. Vậy độ dốc tối đa của mặt cầu là $3^\circ 6'$.

Câu 18: Theo <https://danso.org/viet-nam/>, dân số Việt Nam vào tháng 8, năm 2023 khoảng 99.790.000 người. Nếu tỉ lệ tăng dân số hàng năm luôn ở mức 3,2% thì ước tính dân số Việt Nam sau x năm, tính từ năm 2023 được tính theo hàm số $f(x) = 9,979 \cdot e^{0,032x}$ (chục triệu người).

a) Hãy tìm hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số (chục triệu người/ năm) sau x năm, tính từ năm 2023.

b) Dự đoán tốc độ tăng dân số Việt Nam vào năm 2030 (chục triệu người/ năm), biết kết quả tính gần đúng đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm, tính từ năm 2023 là:

$$f'(x) = \frac{9979}{31250} \cdot e^{0,032x}.$$

b) $x = 2030 - 2023 = 7$.

Tốc độ tăng dân số Việt Nam vào năm 2030 là:

$$f'(x) = \frac{9979}{31250} \cdot e^{0,032 \cdot 7} \approx 0,4 \text{ (chục triệu người/ năm)}.$$

Vậy dân số Việt Nam tăng thêm khoảng 4 triệu người vào năm 2030.

Câu 19: Theo kết quả điều tra dân số vào ngày 1/4/2009 thì dân số thành phố Hồ Chí Minh là 7162864 người. Đến năm 2019, dân số TPHCM tăng lên đạt 8993082 người. Dân số thành phố Hồ Chí Minh ước tính theo công thức $T(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm, t là số năm tính theo năm lấy làm mốc và $T(t)$ là số dân sau t năm. Tính tốc độ tăng dân số (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/ năm) của thành phố Hồ Chí Minh vào năm 2030, biết tỉ lệ tăng dân số r hàng năm không thay đổi và tính gần đúng đến hàng phần ngàn.

Lời giải

Đặt $A = 7162864$.

Ta có $t = 2019 - 2009 = 10$.

$$T(t) = A \cdot e^{rt} = 8993082 \Leftrightarrow e^{r \cdot 10} = \frac{8993082}{7162864} \Rightarrow r = \frac{1}{10} \cdot \ln \left(\frac{8993082}{7162864} \right) \approx 0,023.$$

Tốc độ tăng dân số thành phố Hồ Chí Minh sau t năm kể từ năm 2009 là:

$$T'(t) = A \cdot r \cdot e^{rt} \approx 7162864 \cdot 0,023 \cdot e^{0,023t} = 164745,872 \cdot e^{0,023t}.$$

Tốc độ tăng dân số thành phố Hồ Chí Minh vào năm 2030 (sau 21 năm kể từ năm 2009) là:

$$T'(21) \approx 164745,872 \cdot e^{0,023 \cdot 21} \approx 267042 \text{ người/ năm}.$$

Câu 20: Bóng thám không, còn được gọi là **Bóng bay dự báo thời tiết**, là một loại bóng bay được dùng để mang theo các dụng cụ đo thời tiết như suất khí quyển, nhiệt độ, độ ẩm và tốc độ. Để đo được tốc độ gió, bóng thám không định vị gió bằng radar, sóng vô tuyến, hoặc Hệ thống Định vị Toàn cầu (GPS). Bóng thám không ở một độ cao không đổi một thời gian dài còn được gọi là transosondes. Bóng thám không còn dùng để đo hoàn lưu khí quyển hoặc đo độ cao mây. Ngoài ra, máy kinh vĩ và máy toàn đạc từng được dùng để đo phương vị và cao của bóng thám không, không những thế nó có thể dự đoán được hướng gió và tốc độ gió hoặc độ cao, hướng di chuyển của mây.



đo áp
gió.
có thể
Bóng
trong
dùng
của
độ

Một quả bóng thám không chứa 10 mol khí hydrogen ở trạng thái lý tưởng có áp suất không đổi $p = 10^4 \text{ Pa}$. Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không, biết phương trình trạng thái khí lý tưởng $pV = nRT$, trong đó

- ☐ $p(\text{Pa})$: áp suất.
- ☐ $V(\text{m}^3)$: thể tích.
- ☐ $n(\text{mol})$: số mol.
- ☐ $R = 8,31(\text{J} / \text{mol.K})$: hằng số.
- ☐ $T(\text{K})$: nhiệt độ.

Lời giải

$$pV = nRT \Leftrightarrow V = \frac{nRT}{p} = \frac{10 \cdot 8,31}{10^4} T = 8,31 \cdot 10^{-3} T.$$

$$V'(T) = 8,31 \cdot 10^{-3}.$$

Tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không là:

$$V'(T) = 8,31 \cdot 10^{-3} (\text{m}^3 / \text{K}).$$

Câu 21: Sau khi uống 15 ml bia, nồng độ cồn trong máu ông An tăng lên rồi giảm dần, được xác định bằng hàm số $C(t) = 1,35t \cdot e^{-2,802t}$, trong đó $C(\text{mg} / \text{ml})$ là nồng độ cồn và $t(\text{h})$ là thời điểm đo tính từ ngay sau khi uống 15 ml đồ uống có cồn. Tính tốc độ chuyển hóa nồng độ cồn của ông An tại thời điểm $t = 6(\text{h})$ (tính gần đúng đến hàng phần triệu).

Lời giải

$$C'(t) = 1,35e^{-2,802t} (1 - 2,802t).$$

Tốc độ chuyển hóa nồng độ cồn của ông An tại thời điểm $t = 6(\text{h})$ là:

$$C'(6) = 1,35e^{-2,802 \cdot 6} (1 - 2,802 \cdot 6) \approx -0,000001 \left(\frac{\text{mg} / \text{ml}}{\text{h}} \right).$$

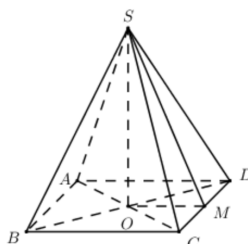
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Câu 1: Cho biết kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98 m và cạnh đáy 180 m. Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy?



Lời giải



Gọi hình chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ như hình vẽ, $O = AC \cap BD$, M là trung điểm của DC .

Khi đó góc nhị diện tạo bởi mặt bên (SCD) và mặt đáy $(ABCD)$ là $[S, CD, O]$.

Ta có $SM \perp CD$ và $OM \perp CD$, suy ra $\widehat{SMO}$ là góc phẳng nhị diện $[S, CD, O]$.

Xét tam giác SMO ta có $OM = \frac{BC}{2} = 90$ (m)

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{98}{90} = \frac{49}{45} \Rightarrow \widehat{SMO} = 47,4^\circ.$$

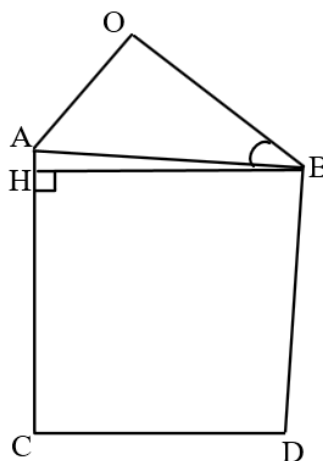
Câu 2: Hai mái nhà trong hình bên dưới là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 4,8$ m; $OA = 2,8$ m; $OB = 4$ m.

- ### Lời giải

- $$\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{2,8^2 + 4^2 - 4,8^2}{2 \cdot 2,8 \cdot 4} = \frac{1}{28} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 88^\circ$$

- Ta có $\left. \begin{array}{l} OO' \perp OA \\ OO' \perp OB \end{array} \right\} \Rightarrow OO' \perp (OAB)$

c)



Góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất là góc $\widehat{OBH}$

$$\widehat{OBH} = \widehat{OBA} + \widehat{ABH}$$

Áp dụng định lý Cosin trong tam giác AOB ta có:

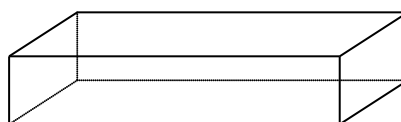
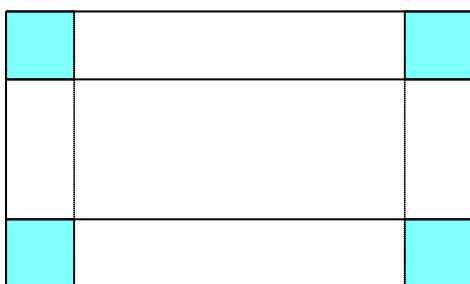
$$\cos \widehat{OBA} = \frac{BA^2 + BO^2 - OA^2}{2BA \cdot BO} = \frac{4,8^2 + 4^2 - 2,8^2}{2 \cdot 4,8 \cdot 4} = \frac{13}{16} \Rightarrow \widehat{OBA} \approx 36^\circ.$$

$$\Delta ABH \text{ vuông tại } H \text{ có: } \sin \widehat{ABH} = \frac{AH}{AB} = \frac{0,5}{4,8} = \frac{5}{48} \Rightarrow \widehat{ABH} \approx 6^\circ.$$

Do đó $\widehat{OBH} = \widehat{OBA} + \widehat{ABH} \approx 42^\circ$.

Góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất khoảng 42° .

Câu 3: Từ một tấm bìa hình chữ nhật, tại bốn góc bạn Minh cắt bỏ đi bốn hình vuông có cùng kích thước rồi gấp tấm bìa lại để được một chiếc hộp không nắp. Chiếc hộp Minh tạo được là hình gì?



Lời giải

Sau khi Minh cắt bỏ đi bốn hình vuông có cùng kích thước rồi gấp tấm bìa lại thì ta có các mặt của chiếc hộp là hình chữ nhật, đồng thời các cạnh bên vuông góc với đáy. Do đó chiếc hộp Minh tạo được là một hình hộp chữ nhật không nắp.

Câu 4: Nhân dịp sinh nhật Phương được tặng một khối Rubic là khối tứ diện đều có các cạnh bằng 7 cm . Tính tổng diện tích các mặt bên của khối Rubic đó.

Lời giải

Gọi S_1 là diện tích mỗi mặt bên của khối Rubic.

$$\text{Ta có } S_1 = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 7 \cdot \sin 60^\circ = \frac{49\sqrt{3}}{4} (\text{cm}^2).$$

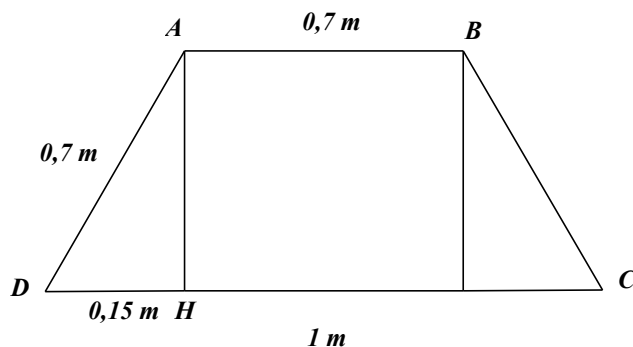
Do khối Rubic là khối tứ diện đều nên có tổng diện tích các mặt bên là:

$$S_p = 4S_1 = 4 \cdot \frac{49\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3} (\text{cm}^2).$$

Câu 5: Một người cần sơn các mặt của một cái bục (trừ đáy lớn) để đặt một bức tượng. Bục có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn 1 m , cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng $0,7\text{ m}$. Tính tổng diện tích cần sơn.

Lời giải

Xét một mặt của hình chóp cụt tứ giác đều giả sử là hình thang cân $ABCD$, chiều cao AH ta có:



$$DH = 0,15(m).$$

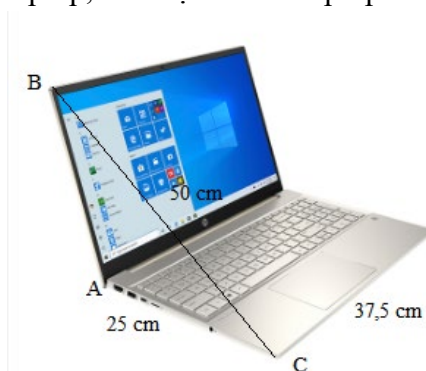
$$AH = \sqrt{0,7^2 - 0,15^2} = \frac{\sqrt{187}}{20}(m).$$

$$\text{Diện tích hình thang } ABCD \text{ là } S_{ABCD} = \frac{(1 + 0,7) \cdot \sqrt{187}}{2 \cdot 20} = \frac{17\sqrt{187}}{400}(m^2).$$

$$\text{Diện tích mặt đáy nhỏ là } 0,7^2 = 0,49(m^2).$$

$$\text{Tổng diện tích cần sơn là: } \frac{17\sqrt{187}}{400} \cdot 4 + 0,49 \approx 2,81(m^2).$$

Câu 6: Trong hình dưới đây, chiếc laptop được mở gập nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của laptop, tính độ mở của laptop.



Lời giải

Tam giác ABC cân tại A . Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC có



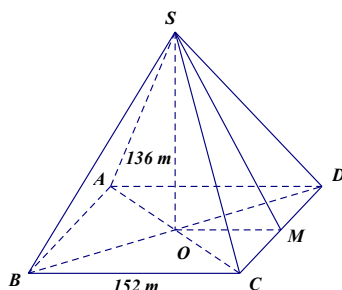
$$\cos \widehat{BAC} = \frac{25^2 + 25^2 - 40^2}{2 \cdot 25 \cdot 25} = -\frac{7}{25}$$

Vậy độ mở của laptop là $\widehat{BAC} \approx 106,26^\circ$.

Câu 7: Kim tự tháp Khafre ở Ai cập có dạng là một khối chóp tứ giác đều với độ dài cạnh đáy khoảng $152m$ và chiều cao khoảng $136m$. Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp.

Lời giải

Giả sử kim tự tháp là khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$, đường cao SO , M là trung điểm của CD .



Ta có $OM \perp CD$
 $CD \perp SO \Rightarrow CD \perp SM$

Khi đó $((SCD), (ABCD)) = \widehat{SMO}$.

Trong tam giác vuông SOM có $OM = 76(m)$, suy ra

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{136}{76} = \frac{34}{19} \Rightarrow \widehat{SMO} \approx 60,8^\circ.$$

b. Phần trắc nghiệm

Câu 8: Hai vách ngăn bàn làm việc trong hình dưới đây cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Số đo của các góc nhị diện là



A. 180° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 135° .

Lời giải

Do hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau nên các góc nhị diện tạo bởi hai mặt phẳng đó là các góc vuông vì vậy chúng có số đo bằng 90° .

Câu 9: Nhân dịp tết trung thu, Mai làm tặng em một chiếc đèn lồng trung thu hình lăng trụ ngũ giác đều có các cạnh đáy bằng $10cm$, cạnh bên bằng $30cm$. Tổng diện tích giấy màu cần sử dụng để dán các mặt bên của chiếc đèn lồng là

A. $300cm^2$.

B. $400cm^2$.

C. $1500cm^2$.

D. $200cm^2$.

Lời giải

Diện tích mỗi mặt của chiếc đèn lồng là $10.30 = 300(cm^2)$.

Do chiếc đèn lồng là hình lăng trụ ngũ giác đều nên có tổng diện tích các mặt bên là $5.300 = 1500(cm^2)$.

Vậy diện tích giấy màu cần sử dụng để dán các mặt bên của chiếc đèn lồng là $1500(\text{cm}^2)$.

Câu 10: Một người cần sơn các mặt của một cái bục (trừ đáy lớn) để đặt một bức tượng. Bục có dạng hình chóp cụt ngũ giác đều có cạnh đáy lớn $0,9\text{m}$, cạnh bên và cạnh đáy nhỏ bằng $0,5\text{m}$. Tính (gần đúng) tổng diện tích cần sơn.

A. $2,03\text{m}^2$.

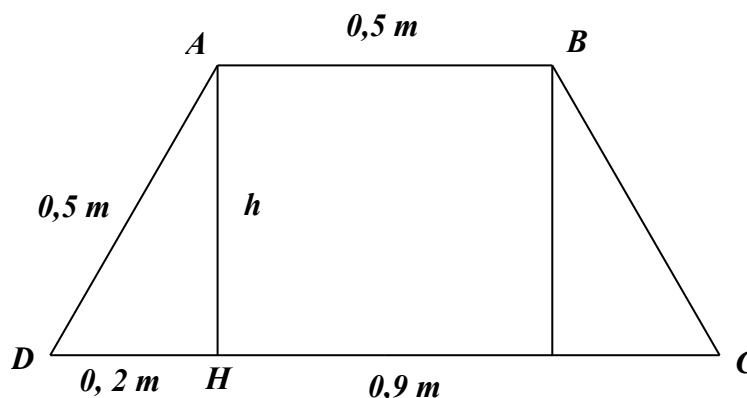
B. $2,34\text{m}^2$.

C. $1,81\text{m}^2$.

D. $1,6\text{m}^2$.

Lời giải

Xét một mặt của hình chóp cụt tứ giác đều, giả sử là hình thang cân $ABCD$, chiều cao AH ta có:

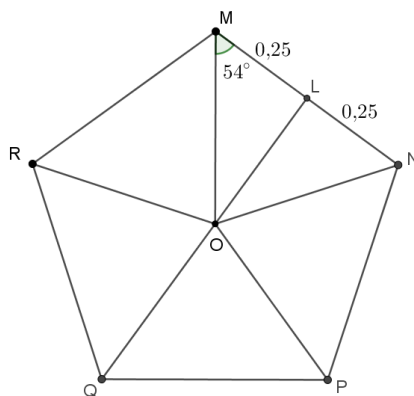


$$DH = 0,2(m)$$

$$AH = \sqrt{0,5^2 - 0,2^2} = \frac{\sqrt{21}}{10}(m).$$

$$\text{Diện tích hình thang } ABCD \text{ là } S_{ABCD} = \frac{(0,5 + 0,9) \cdot \frac{\sqrt{21}}{10}}{2} = \frac{7\sqrt{21}}{100}(m^2).$$

Giả sử đáy nhỏ là ngũ giác đều $MNPQR$. Gọi O là tâm của ngũ giác đều, L là trung điểm MN .



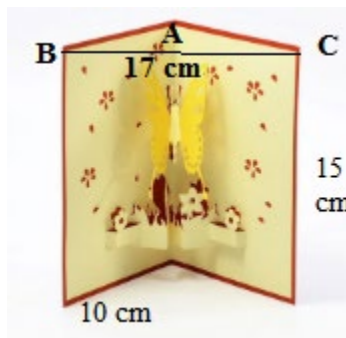
Ta có

$$S_{MNPQR} = 5S_{MON} = \frac{5}{2} \cdot OL \cdot MN = \frac{5}{4} \cdot \tan 54^\circ \cdot 0,5^2 = \frac{5 \tan 54^\circ}{16}(m^2).$$

Suy ra tổng diện tích cần sơn là

$$5S_{ABCD} + S_{MNPQR} = \frac{7\sqrt{21}}{20} + \frac{5 \tan 54^\circ}{16} \approx 2,03(m^2).$$

Câu 11: Trong hình dưới đây, tám thiệp được mở gợn nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của tám thiệp, tính (gần đúng) độ mở của tám thiệp.



- A. $35,73^\circ$. B. $61,16^\circ$. C. $83,11^\circ$. D. $116,42^\circ$.

Lời giải

Tam giác ABC cân tại A . Áp dụng định lí côsin trong tam giác ABC có

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{10^2 + 10^2 - 17^2}{2 \cdot 10 \cdot 10} = -\frac{89}{200}.$$

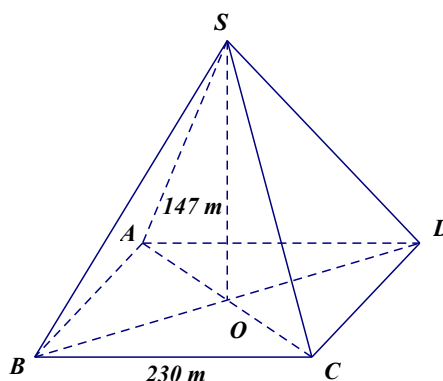
Vậy độ mở của tấm thiệp là $\widehat{BAC} \approx 116,42^\circ$.

Câu 12: Đại kim tự tháp Giza ở Ai cập có dạng là một khối chóp tứ giác đều có độ dài cạnh đáy khoảng $230m$ và chiều cao khoảng $147m$. Tính (gần đúng) độ dài cạnh bên của kim tự tháp.

- A. $252,4$. B. $272,96m$. C. $219,22m$. D. $227,96m$.

Lời giải

Giả sử kim tự tháp là khối chóp tứ giác đều $SABCD$, đường cao SO .

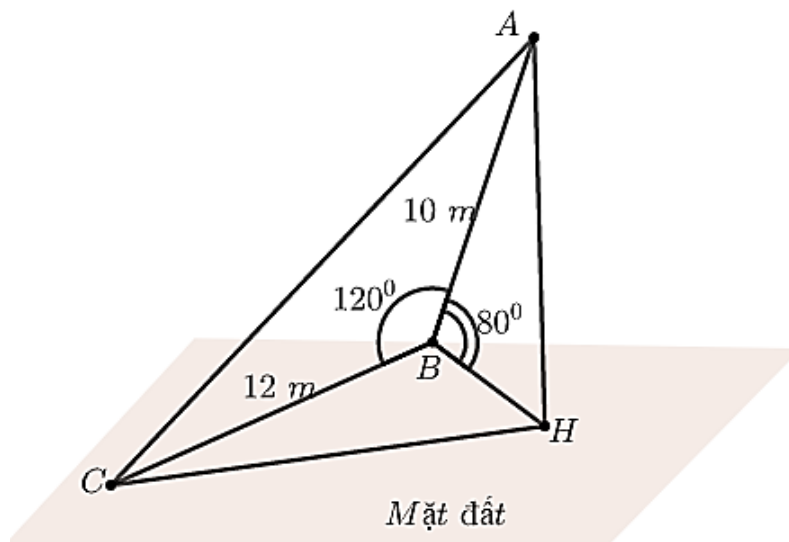


Ta có $AC = \sqrt{230^2 + 230^2} = 230\sqrt{2}m \Rightarrow OC = \frac{AC}{2} = 115\sqrt{2}(m)$.

Xét tam giác vuông SOC , có $SC = \sqrt{OC^2 + SO^2} = \sqrt{115^2 \cdot 2 + 147^2} \approx 219,22(m)$.

Câu 13: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng $10m$ và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $12m$ và tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất $\Rightarrow AH$ vuông góc với mặt đất.

Vì góc giữa AB và mặt đất là 80° nên $\widehat{ABH} = 80^\circ$.

Vì AH vuông góc với mặt đất nên $AH \perp BH$

$$\Rightarrow AH = AB \cdot \sin 80^\circ = 10 \cdot \sin 80^\circ$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2 - 2 \cdot AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ} = \sqrt{10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 120^\circ} = 2\sqrt{91}$$

Vì H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất nên góc giữa AC và mặt đất là $\widehat{ACH}$

Vì AH vuông góc với mặt đất nên $AH \perp HC$

$$\Rightarrow \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} = \frac{10 \cdot \sin 80^\circ}{2\sqrt{91}} \Rightarrow \widehat{ACH} \approx 31^\circ 4'$$

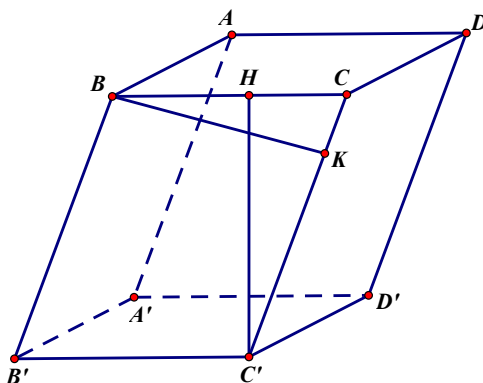
Vậy góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên khoảng $31^\circ 4'$.

Câu 14: Tòa nhà Puerta de Europa ở Tây Ban Nha có hình dạng là một khối hộp xiên. Sử dụng công cụ đo đạc của phần mềm Google Earth Pro đo được chiều cao tòa nhà là 115m, đáy tòa nhà là một hình vuông có cạnh bằng 35m, chiều dài cạnh bên bằng 117m. Biết rằng có hai mặt bên vuông góc với mặt đất, tính khoảng cách giữa hai mặt bên còn lại (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Gọi hình hộp là $ABCD.A'B'C'D'$ với các mặt bên $BCC'B'$ và $ADD'A'$ vuông góc với đáy, ta cần tính khoảng cách giữa các mặt phẳng $(ABB'A')$ và $(CDD'C')$.



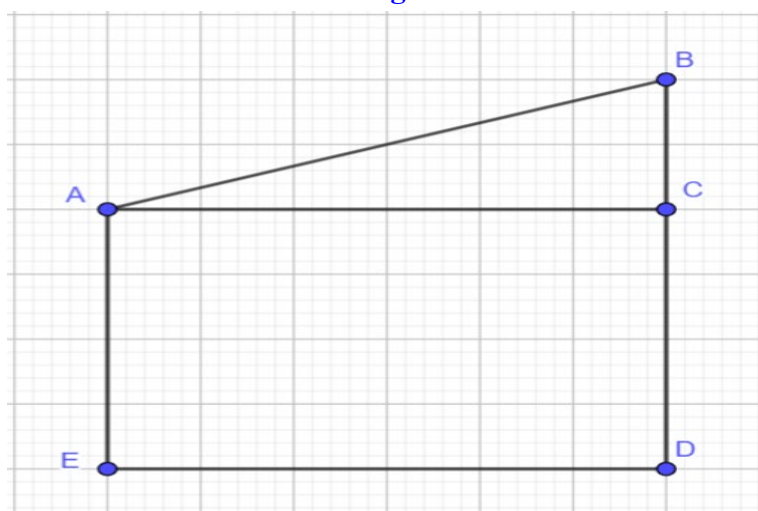
Theo giả thiết $(BCC'B') \perp (ABCD)$; $(BCC'B') \cap (ABCD) = BC$, mà $CD \perp BC$ nên suy ra $CD \perp (BCC'B')$. Từ đó ta có $(BCC'B') \perp (CDD'C')$.

Kẻ $BK \perp CC'$; $C'H \perp BC \Rightarrow BK \perp (CDD'C')$; $C'H \perp (ABCD)$. Theo giả thiết $BC = 35$; $CC' = 117$; $C'H = 115$. Vậy

$$d((ABB'A'), (CDD'C')) = d(B; (CDD'C')) = BK = \frac{BC \cdot C'H}{CC'} = 34,4 \text{ (m)}$$

Câu 15: Dốc là đoạn đường thẳng nối hai khu vực hay hai vùng có độ cao khác nhau. Độ dốc được xác định bằng góc giữa dốc và mặt phẳng nằm ngang, ở đó độ dốc lớn nhất là 100% , tương ứng với góc 90° (độ dốc 10% tương ứng với góc 9°). Giả sử có hai điểm A, B nằm ở độ cao lần lượt là 200m và 220m so với mực nước biển và đoạn dốc AB dài 120m. Độ dốc đó bằng bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Bài giải



Ta có AB là chiều dài con dốc. Gọi AE là độ cao của điểm A so với mặt nước biển, BD là độ cao của điểm B so với mực nước biển, BC là chiều cao của con dốc, độ dốc là góc $\widehat{BAC}$.

Ta có: $AE = 200m$, $BD = 220m$, $AB = 120m$. Vì $AEDC$ là hình chữ nhật nên $AE = CD = 200 \Rightarrow BC = 220 - 200 = 20$

$$\text{Vì tam giác } ABC \text{ vuông tại } C \text{ nên } \sin \widehat{BAC} = \frac{BC}{AB} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \Rightarrow \widehat{BAC} = 9^\circ 35' 38,65''$$

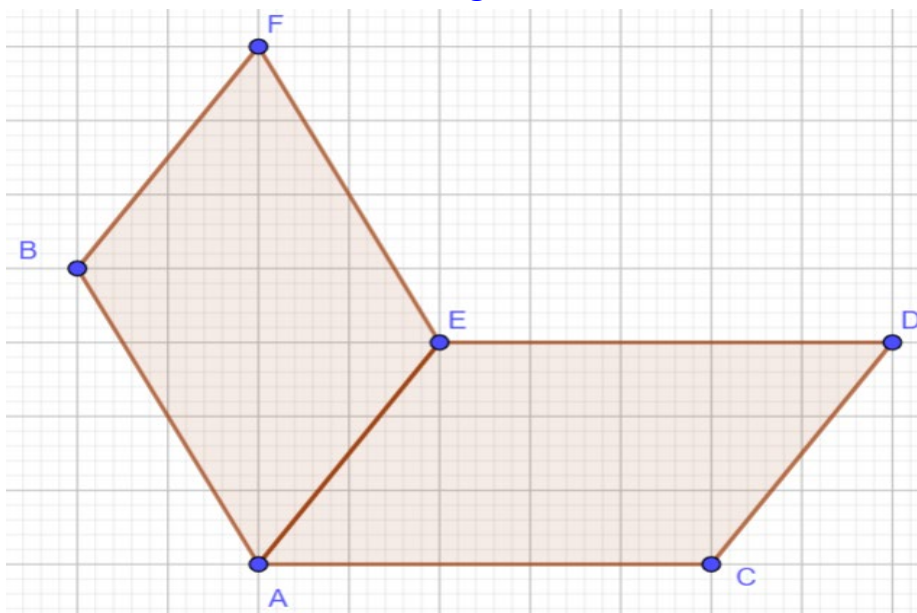
Độ dốc của con dốc đó là $\frac{9^\circ 35' 38,65'' \cdot 100\%}{90^\circ} \approx 10,66\%$

Câu 16: Trong hình 42, máy tính xách tay đang mở gọi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của màn hình máy tính. Tính độ mở của màn hình máy tính theo đơn vị độ, biết tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ cm.



Hình 42

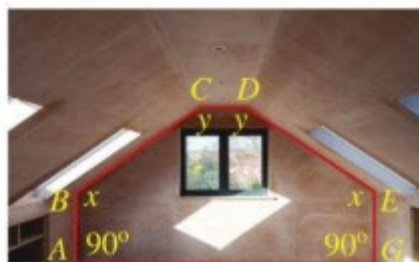
Bài giải



Gọi AE là đường thẳng chứa bản lề của máy tính ta có AB, AC cùng vuông góc với AE nên $\widehat{BAC}$ là góc phẳng nhị diện cần tìm.

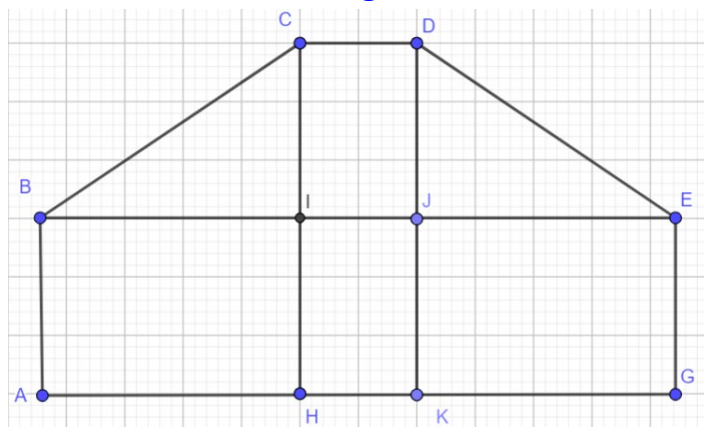
$$\text{Xét tam giác } ABC \text{ có } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{-1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ$$

Câu 17: Trong hình 43, xét các góc nhị diện có góc phẳng nhị diện tương ứng là $\widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E}$ trong cùng mặt phẳng. Lục giác $ABCDEG$ nằm trong mặt phẳng đó có $AB = GE = 2$ m, $BC = DE$, $\widehat{A} = \widehat{G} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{E} = x$, $\widehat{C} = \widehat{D} = y$. Biết rằng khoảng cách từ C và D đến AG là 4 m, $AG = 12$ m, $CD = 1$ m. Tìm x, y (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Hình 43

Bài giải



Kẻ $CH \perp AG$ ($H \in AG$), $DK \perp AG$ ($K \in AG$)

Gọi $I = BE \cap CH$, $J = BE \cap DK$. Vì $ABEG$ là hình chữ nhật nên $BE = AB = 12$ (m).

Do $CDKH$, $CDJI$ là hình chữ nhật nên $IH = JK = AB = 2$ (m).

$AH = GK = BI = EJ = \frac{AG - HK}{2} = \frac{12 - 1}{2} = 5,5$ (m). Khoảng cách từ C và D đến AG là

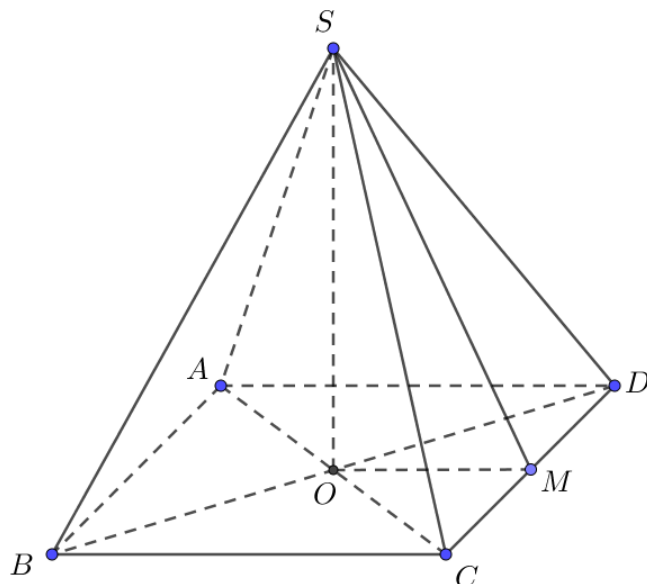
4m nên $CI = CH - IH = 2$. Xét tam giác BCI vuông tại I có

$$\tan \widehat{CBI} = \frac{CI}{BI} = \frac{2}{5,5} = \frac{4}{11} \Rightarrow \widehat{CBI} = 19^\circ 58' 59,18''. \text{ Vậy } x = 90^\circ + 19^\circ 58' 59,18'' = 109^\circ 58' 59,18'',$$

$$y = 180^\circ - 19^\circ 58' 59,18'' = 160^\circ 1' 0,82''$$

Câu 18: Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21,6m và cạnh đáy dài 34m. Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của hình chóp

Lời giải



Gọi $S.ABCD$ là hình chóp biểu diễn cho kim tự tháp ta có

$$AB = BC = CD = DA = 34m, SO = 21,6m$$

Ta có $ABCD$ là hình vuông có AC là đường chéo nên $AC = AB\sqrt{2} = 34\sqrt{2}m$,
 $OC = \frac{1}{2}AC = 17\sqrt{2}m$

Ta có $\triangle SOC$ vuông tại O ta có $SC = \sqrt{SO^2 + OC^2} = \frac{\sqrt{26114}}{5}m$

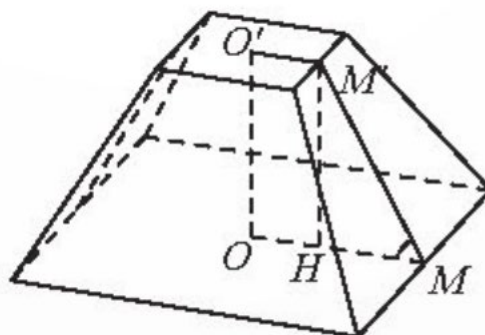
Gọi M là trung điểm CD . Ta có OM là đường trung bình của tam giác BCD nên
 $OM = \frac{BC}{2} = 17m$

Tam giác SOM vuông tại O có $SM = \sqrt{SO^2 + OM^2} = \frac{\sqrt{18889}}{5}m$

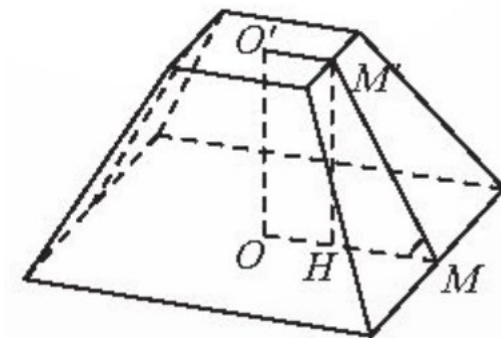
Diện tích xung quanh của hình chóp là

$$S_{xq} = 4S_{\triangle SCD} = 4 \cdot \frac{1}{2} SM \cdot CD = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{18889}}{5} \cdot 34 = \frac{68\sqrt{18889}}{5} (m^2)$$

Câu 19: Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có hai cạnh đáy là $14m$ và $10m$. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm (Hình 10).



Lời giải



Gọi O, O', M, M' lần lượt là tâm hai đáy và trung điểm hai cạnh đáy lớn và đáy nhỏ tương ứng.

Vẽ đường cao $M'H$ của hình thang vuông $OMM'O'$.

Ta có: $\widehat{MM'O'} = 135^\circ$, $\widehat{M'MO} = 45^\circ$

$$OO' = HM = (OM - O'M') \cdot \tan \widehat{M'MO} = (7 - 5) \cdot \tan 45^\circ = 2.$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (14^2 + 14 \cdot 10 + 10^2) \approx 290,7 (\text{m}^3).$$

Vậy cần phải di chuyển ra khỏi hầm khoảng $290,7 (\text{m}^3)$.

Câu 20: Trong xây dựng, **độ dốc** của mái nhà là một yếu tố quan trọng cần tính toán. vì **độ dốc mái ngói** hợp lý sẽ giúp quá trình thoát nước diễn ra nhanh chóng, hạn chế tình trạng tù đọng nước, ẩm mốc và bong tróc lớp sơn tường, do đó, việc thiết kế mái đúng tiêu chuẩn về **độ dốc** sẽ giúp tăng tuổi thọ của ngôi nhà. Ngoài ra, **độ dốc** còn đem lại tính thẩm mỹ cho ngôi nhà. **Độ dốc** của mái nhà là tang của góc tạo bởi mái nhà với mặt phẳng nằm ngang.

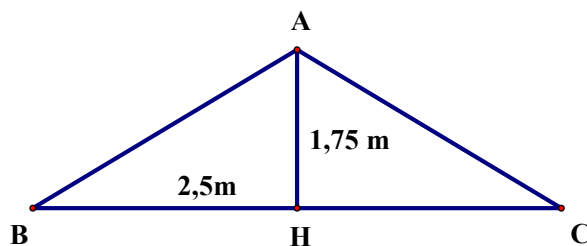


Một mái nhà (hình vẽ) có bề rộng mặt tiền là 5 m (tính từ mép ngói bên này đến mép ngói bên kia) và có chiều cao $1,75\text{ m}$. Tính **độ dốc** của mái nhà trên.

Lời giải

Gọi $\triangle ABC$ là mặt cắt ngang của mái nhà, A là điểm cao nhất của mái ngói và B, C là hai mép mái ngói. Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng đáy nằm ngang (chứa 2 mép ngói)

Ta có: $BC = 5\text{ m}$, H là trung điểm của $BC \Rightarrow BH = 2,5\text{ m}$. $AH = 1,75\text{ m}$.



BH là hình chiếu của mái nhà AB lên mặt phẳng nằm ngang. Góc tạo bởi mái nhà với mặt phẳng nằm ngang là $\widehat{ABH}$.

$$\text{Độ dốc của mái nhà là: } \tan(\widehat{ABH}) = \frac{AH}{BH} = \frac{1,75}{2,5} = \frac{7}{10}.$$

Vậy **độ dốc** của mái nhà là $\frac{7}{10}$.

Câu 21: Tripod là dạng chân đỡ máy ảnh có 3 chân trụ (như hình vẽ), hỗ trợ trong việc cân bằng máy ảnh, máy quay, điện thoại trong việc quay phim, chụp ảnh chuyên nghiệp khi sử dụng trên

những địa hình không cân bằng hay phục vụ cho chụp ảnh, quay hình trong thời gian dài, chụp ảnh phong cảnh, chụp hình tập thể, ...



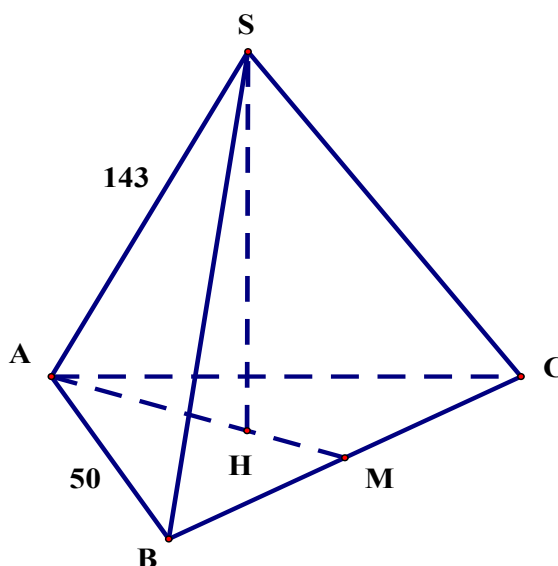
Tính chiều cao và góc tạo bởi 1 chân của 1 tripod với mặt đất, biết rằng 3 chân của tripod đang mở ra sao cho ba chân cách đều nhau 1 khoảng 50 cm và các chân của tripod dài 143 cm .

Lời giải

Gọi điểm tiếp xúc 3 chân của tripod với mặt đất là A, B, C và 3 chân của tripod là SA, SB, SC .

Ta có $\triangle ABC$ đều cạnh 50 cm , $SA = SB = SC = 143\text{ cm}$. Hình chóp $S.ABC$ là hình chóp đều.

Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) , M là trung điểm của BC .



$$\text{Ta có: } AM = \frac{50\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}. \quad AG = \frac{2}{3} AM = \frac{50\sqrt{3}}{3}.$$

$$SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{143^2 - \left(\frac{50\sqrt{3}}{3}\right)^2} \approx 140(\text{cm}).$$

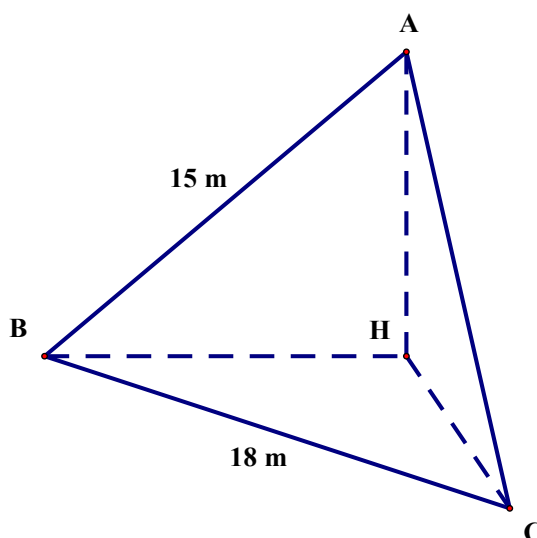
Ta có: AH là hình chiếu vuông góc của SA lên $(ABC) \Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA; AH)$.

Xét $\triangle SAH$ vuông tại H , ta có: $\cos(\widehat{SAH}) = \frac{AH}{SA} = \frac{50\sqrt{3}}{429} \Rightarrow \widehat{SAH} \approx 78^\circ$.

Vậy tripod cao $1,4m$ và góc tạo bởi 1 chân của tripod với mặt đất là 78° .

Câu 22: Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng $15m$ và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm, dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài $18m$ và tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất, $\Rightarrow BH$ là hình chiếu vuông góc của AB lên mặt đất, suy ra góc giữa cột AB với mặt đất là $\widehat{ABH} = 80^\circ$. Khi đó,
 $AH = AB \cdot \sin \widehat{ABH} = 15 \cdot \sin 80^\circ$.

Đường thẳng chứa tia sáng mặt trời là AC , HC là hình chiếu vuông góc của AC lên mặt đất, góc tạo bởi mặt đất với tia sáng mặt trời là $\widehat{ACH}$.

Áp dụng định lí hàm cosin, ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC} = 15^2 + 18^2 - 2 \cdot 15 \cdot 18 \cdot \cos 120^\circ = 819.$$

$$\Rightarrow AC = 3\sqrt{91}.$$

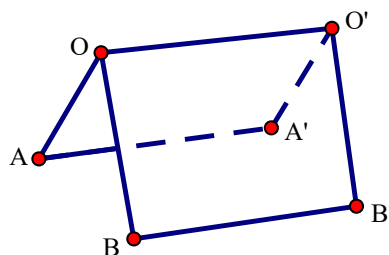
Xét $\triangle AHC$ vuông tại H , ta có: $\sin C = \frac{AH}{AC} = \frac{15 \cdot \sin 80^\circ}{3\sqrt{91}} \Rightarrow \widehat{C} \approx 31^\circ$.

Vậy góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời là 31° .

Câu 23: Hai mái nhà trong hình bên là hai hình chữ nhật. Giả sử $AB = 3,8m$; $OA = 2,2m$; $OB = 3m$. Tính số đo góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mái nhà.



Lời giải



Giả sử hai mái ngói là hai hình chữ nhật $OAA'O'$ và $OBB'O'$. Khi đó

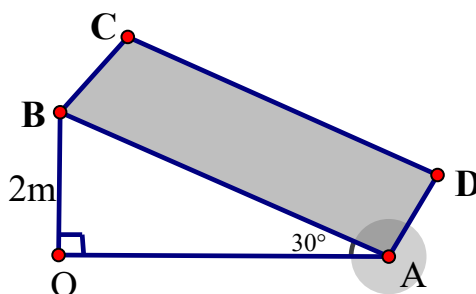
$$\begin{cases} (OAA'O') \cap (OBB'O') = OO' \\ OA \perp OO', OA \subset (OAA'O') \end{cases} \text{ nên } \widehat{AOB} \text{ là góc phẳng nhị diện } [A, OO', B]. \\ \begin{cases} OB \perp OO', OB \subset (OBB'O') \end{cases}$$

Áp dụng hệ quả định lý cosin cho tam giác OAB ta được:

$$\cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = \frac{2,2^2 + 3^2 - 3,8^2}{2.2.2,3} = -\frac{1}{22} \Rightarrow \widehat{AOB} \approx 92^\circ 36'.$$

Câu 24: Một tấm ván hình chữ nhật có chiều dài gấp ba chiều rộng được dùng làm mặt phẳng nghiêng để kéo một vật khỏi hố sâu $2m$; chiều dài của tấm ván được đặt theo chiều dài của con dốc. Tính diện tích của tấm ván cần dùng biết rằng để có thể kéo vật lên thuận lợi thì số đo của góc phẳng nhị diện tạo bởi tấm ván và mặt nền của hố là 30° .

Lời giải



Giả sử sau khi đặt tấm ván $ABCD$ xuống hồ rồi dùng một mặt phẳng vuông góc với tấm ván và cắt tấm ván theo chiều dài của nó ta được mặt cắt của hồ là tam giác vuông OAB như hình vẽ.

Khi đó góc phẳng nhị diện tạo bởi tấm ván và mặt nền của hồ là góc $\widehat{OAB}$, theo đề $\widehat{OAB} = 30^\circ$, $OB = 2(\text{m})$. Do đó $AB = \frac{OB}{\sin \widehat{OAB}} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4(\text{m})$.

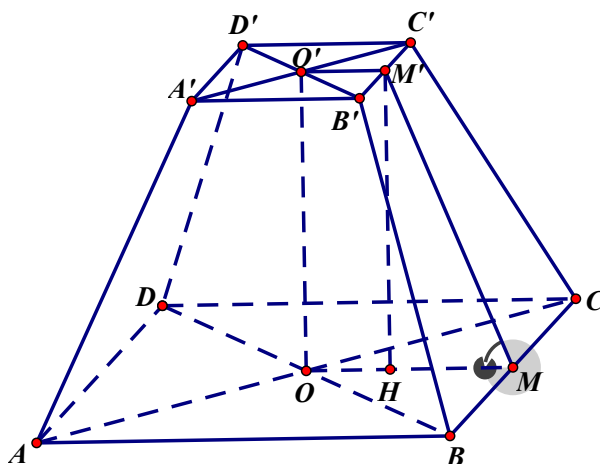
Do đó diện tích tấm ván bằng $4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}(\text{m}^2)$.

Câu 25: Hình bên là hình chụp đền Kukulcan, là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII. Phần thân của đền, không bao gồm đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cụt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là $55,3(\text{m})$, chiều cao là $24(\text{m})$, góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy là α . Tính thể tích của phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cụt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) biết rằng $\tan \alpha = \frac{320}{211}$.



(Nguồn: <https://shutterstock.com>)

Lời giải



Giả sử khối chóp cụt tứ giác đều cần tính thể tích là $ABCD.A'B'C'D'$ có O, O' lần lượt là tâm của hai đáy. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$ như hình vẽ; H là hình chiếu vuông góc của M' lên OM .

Khi đó góc phẳng nhị diện của mặt bên $BCC'B'$ và mặt đáy $ABCD$ là góc $\widehat{M'MH} = \alpha$.

$$\text{Ta có } \tan \widehat{M'MH} = \frac{M'H}{MH} \Rightarrow \frac{24}{MH} = \frac{320}{211} \Rightarrow MH = \frac{24 \cdot 211}{320} = \frac{633}{40}.$$

$$\Rightarrow A'B' = 2.O'M' = 2(OM - HM) = 55,3 - \frac{633}{20} = \frac{473}{20} = 23,65.$$

Do đó thể tích phần thân đèn bằng

$$V = \frac{OO'}{3} (AB^2 + A'B'^2 + AB.A'B') = \frac{24}{3} (55,3^2 + 23,65^2 + 55,3 \cdot 23,65) = 39402,06 (m^3).$$

Câu 26: Hiện nay quy định cầu thang cho người khuyết tật dùng xe lăn có độ dốc không lớn hơn 1:10 (tỷ lệ chiều cao trên đáy cầu thang). Để phù hợp với tiêu chuẩn ấy thì đáy cầu thang có chiều dài tối thiểu là bao nhiêu khi biết chiều cao của cầu thang là 0.35m?



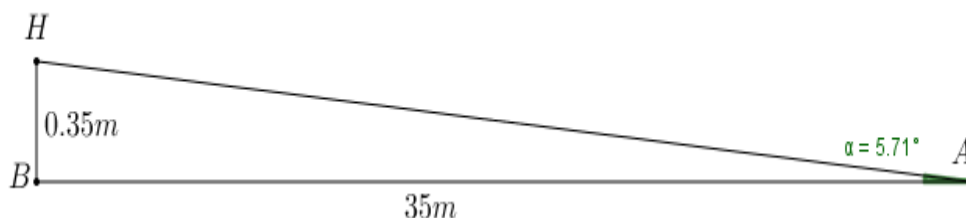
A. 25(m).

B. 35(m).

C. 45(m).

D. 50(m).

Lời giải



Ta có $\frac{BH}{BA} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{0.35}{BA} \leq \frac{1}{10} \Rightarrow BA \geq 35$, nên chiều dài tối thiểu của đáy cầu thang là 35(m).

Câu 27: Ở các thành phố lớn, để giảm tình trạng tắc nghẽn giao thông và nhằm đảm bảo an toàn thì ở các ngã tư người ta thường xây dựng các cầu vượt dành cho người đi bộ. Hỏi những phương tiện tham gia giao thông phải có chiều cao như thế nào để di chuyển an toàn bên dưới cầu vượt. Biết rằng đường dẫn lên cầu dài 12 mét và hợp với đường một góc 30° .

- A.** dưới 6 mét. **B.** dưới 7m. **C.** dưới 12m. **D.** dưới 13m.

Lời giải



Khoảng cách từ mặt đường đến cầu vượt là: $BH = AB \cdot \sin 30^\circ = 6(m)$

Vậy những phương tiện tham gia giao thông chiều cao phải nhỏ hơn 6 mét.

Câu 28: Anh Hùng muốn xây 1 nhà kho lợp mái tôn như hình vẽ sau:



Biết góc nhị diện tạo bởi 2 mái nhà bằng 120° , 2 mái nhà là 2 hình chữ nhật bằng nhau, chiều rộng và chiều dài ngôi nhà lần lượt là 4m và 6m. Phần dư ra của mái tôn so với ngôi nhà mỗi chiều là 30cm. Bên thi công báo đơn giá lợp mái với anh Hùng là 740.000 đồng/ m^2 . Hỏi số tiền làm mái nhà kho của anh Hùng gần nhất với đáp án nào sau đây?

- A.** 12 triệu đồng. **B.** 13 triệu đồng **C.** 10 triệu đồng. **D.** 15 triệu đồng.

Lời giải



Theo giả thiết: $BC = m$, $EF = 6.6m$, $AF = 30cm = 0.3m$, $FG = AB + 0.3$ (m), $\widehat{BAC} = 120^\circ$, $AB = AC$

$$\text{Khi đó ta có: } BC^2 = 2AB^2 - 2AB^2 \cdot \cos \widehat{BAC} = 3AB^2 \Rightarrow AB = \frac{BC\sqrt{3}}{3} \approx 2.31(m)$$

$$\Rightarrow FG \approx 2.31 + 0.3 = 2.61(m); EF = 6.6(m) \Rightarrow S_{EFGH} \approx 6.6 \times 2.61 \approx 17.23(m^2)$$

Vậy giá thành để làm mái tôn nhà kho của anh Hùng là: $17.23 \times 740000 = 12750200$ (đồng)

Câu 1. Một thùng hình hộp chữ nhật có 0,5m ; chiều rộng là 0,4m ; chiều cao là 3dm . Hỏi cần phải mua bao nhiêu lít dầu để đổ đầy thùng?

Lời giải

Chiều dài là $0,5m = 5dm$; chiều rộng là $0,4m = 4dm$; chiều cao là 3dm

Thể tích thùng hộp chữ nhật là : $V = 5.4.3 = 60dm^3 = 60$ lít

$\Rightarrow$ Cần phải mua 60 lít dầu để đổ đầy thùng.

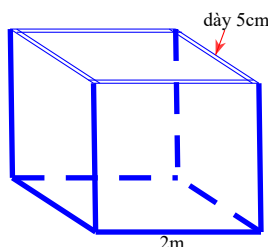
Câu 2. Một hộp đựng thực phẩm có dạng hình lập phương và có diện tích toàn phần bằng $150 cm^2$. Tính thể tích của khối hộp.

Lời giải

Diện tích toàn phần hình lập phương là $S = 6a^2 = 150 \Rightarrow a = 5$.

Suy ra thể tích $V = 125cm^3$.

Câu 3. Người ta xây một cái bể đựng nước không có nắp là một hình lập phương với cạnh đo phía ngoài bằng 2m. Bề dày của đáy bằng bề dày các mặt bên bằng 5cm (hình vẽ). Hỏi bể chứa được tối đa bao nhiêu lít nước?



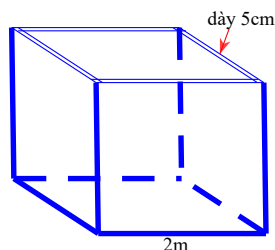
Lời giải

Cạnh hình lập phương đo phía ngoài bằng $2m = 200cm$

Chiều dài cạnh thực tế = chiều rộng cạnh thực tế $= 200 - 5 - 5 = 190cm$

Chiều cao thực tế $= 200 - 5 = 195cm$

Thể tích thực chứa nước là: $190.190.195 = 7039500cm^3$



Câu 4. Trường THPT Bùi Thị Xuân ở TP. Hồ Chí Minh chuẩn bị xây dựng một hồ bơi có dạng hình hộp chữ nhật cho học sinh với kích thước như sau: chiều rộng là $6m$, chiều dài $12,5m$, chiều sâu $2m$. Sức chứa trung bình $0,5m^3$ / người (Tính theo diện tích mặt đáy).

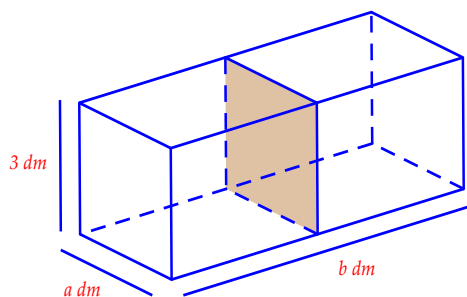
- Hồ bơi có sức chứa tối đa bao nhiêu người?
- Tính thể tích của hồ bơi? Lúc này người ta bơm vào hồ 120000 lít nước. Tính khoảng cách của mực nước so với mặt hồ? ($1m^3 = 1000$ lít).

Lời giải

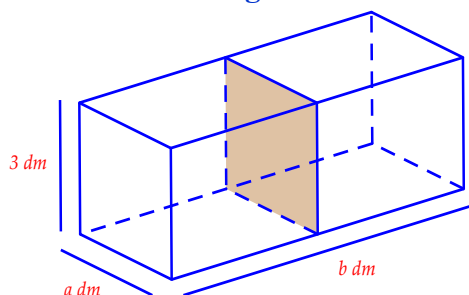
- Sức chứa tối đa: $6.12,5 : 0,5 = 150$ (người)
- Thể tích hồ: $6.12,5.2 = 150(m^3)$. Khoảng cách: $(150 - 120) : 75 = 0,4(m)$

Câu 5. Người ta thiết kế một bể cá dạng hình hộp chữ nhật bằng kính không có nắp với thể tích $72 dm^3$ và có chiều cao bằng $3 dm$. Một vách ngăn (cùng bằng kính) ở giữa, chia bể cá thành hai ngăn, với các kích thước a, b (đơn vị dm) như hình vẽ

Tính a, b để bể cá tốn ít nguyên liệu nhất (tính cả tấm kính ở giữa), coi bể dày các tấm kính như nhau và không ảnh hưởng đến thể tích của bể.



Lời giải



Có thể tích: $V = 72 \Leftrightarrow 3.ab = 72 \Leftrightarrow a = \frac{24}{b}$ (1)

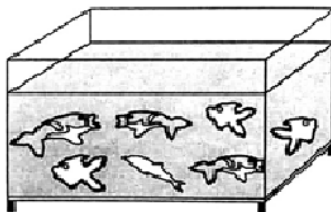
Bể cá tốn ít nguyên liệu nhất nghĩa là diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Ta có diện tích toàn phần của bể cá là: $S_{tp} = 3.3a + ab + 2.b3 = \frac{216}{b} + 6b + 24$.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM (Côsi): $S_{tp} = \frac{216}{b} + 6b + 24 \geq 2\sqrt{\frac{216}{b}.6b} + 24 = 96$.

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{216}{b} = 6b \Leftrightarrow b = 6(b > 0)$. Từ (1), ta suy ra: $a = 4$.

Câu 6. Một bể kính nuôi cá giống có dạng hình hộp chữ nhật có chiều dài 100 cm, chiều rộng 50 cm, chiều cao 60 cm. Mực nước trong bể cao bằng $\frac{3}{4}$ chiều cao bể. Tính thể tích nước trong bể đó. (độ dày kính không đáng kể). Công thức tính thể tích nước trong bể là $V = S.h$ với S là diện tích mặt đáy bể và h là chiều cao mực nước trong bể.



Lời giải

Chiều cao mực nước trong bể: $h = \frac{3}{4} \cdot 60 = 45 \text{ (cm)}$

Thể tích nước trong bể là: $V = 100.50.45 = 225000 \text{ (cm}^3\text{)}$

Câu 7. Một hộ gia đình cần xây dựng một bể chứa nước, dạng hình hộp chữ nhật có thể tích $24 \text{ (m}^3\text{)}$. Tỷ số giữa chiều cao của bể và chiều rộng bằng 4. Biết rằng bể chỉ có các mặt bên và mặt đáy (không có mặt trên). Chiều dài của đáy bể bằng bao nhiêu để xây bể tốn ít nguyên vật liệu nhất.

Lời giải

Gọi chiều cao, chiều rộng, chiều dài của bể lần lượt là $h, x, y \text{ (m)}$ (Điều kiện: $h, x, y > 0$)

Theo đề Câu ta có
$$\begin{cases} \frac{h}{x} = 4 \\ xyh = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} h = 4x \\ y = \frac{6}{x^2} \end{cases}$$

Tổng diện tích xung quanh và diện tích một mặt đáy của bể là $S = xy + 2xh + 2yh = 8x^2 + \frac{54}{x}$

Ta đi tìm x để S đạt giá trị nhỏ nhất.

Cách 1 : Áp dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số dương:

Ta có $S = 8x^2 + \frac{27}{x} + \frac{27}{x} \geq 3\sqrt[3]{8x^2 \cdot \frac{27}{x} \cdot \frac{27}{x}} = 54$. Dấu '=' xảy ra khi $x = \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của S bằng 54 khi $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{8}{3}$.

Cách 2 : Xét hàm số $S = 8x^2 + \frac{54}{x}, x > 0$.

$$S' = 16x - \frac{54}{x^2}; S' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Ta có bảng biến thiên :

x	0	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
S'	-	0	+
S	$+\infty$	54	$+\infty$

Hàm số đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{8}{3}$.

Vậy khi chiều dài của bể bằng $\frac{8}{3}$ m thì ta xây bể tốn ít nguyên vật liệu nhất.

Câu 8. Nhà bạn An muốn đặt thợ làm một bể cá, nguyên liệu bằng kính trong suốt, không có nắp đậy dạng hình hộp chữ nhật có thể tích chứa được $400000(\text{cm}^3)$ nước. Biết rằng chiều cao của bể gấp 2 lần chiều rộng của bể. Xác định diện tích đáy của bể cá để tiết kiệm nguyên liệu nhất.

Lời giải

Gọi a, b, c lần lượt là chiều rộng, chiều dài, chiều cao của khối hộp chữ nhật ($a, b, c > 0$)

Theo giả thiết ta có $V = abc = 400000$ và $c = 2a \Rightarrow 2a^2b = 400000 \Rightarrow ab = \frac{200000}{a}$

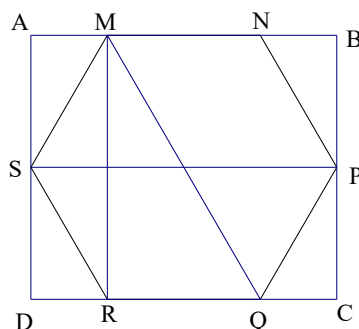
Ta có tổng diện tích xung quanh và diện tích 1 mặt đáy của bể cá là

$$S = ab + 2ac + 2bc = ab + 4a^2 + 4ab = 5 \cdot \frac{200000}{a} + 4a^2 = \frac{1000000}{a} + 4a^2 = 4 \left(\frac{250000}{a} + a^2 \right)$$

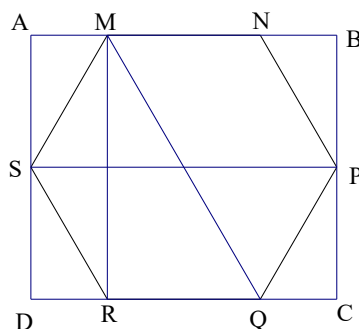
$$S = 4 \left(\frac{125000}{a} + \frac{125000}{a} + a^2 \right) \geq 4 \cdot 3 \sqrt{\frac{125000}{a} \cdot \frac{125000}{a} \cdot a^2} = 30000$$

Suy ra S đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{125000}{a} = a^2 \Leftrightarrow a = 50 \Rightarrow S_{\text{đáy}} = ab = \frac{200000}{a} = 4000(\text{cm}^2)$

Câu 9. Cho một cây nến hình lăng trụ lục giác đều có chiều cao và độ dài cạnh đáy lần lượt là 15cm và 5cm. Người ta xếp cây nến trên vào trong một hộp có dạng hình hộp chữ nhật sao cho cây nến nằm khít trong hộp (có đáy tiếp xúc như hình vẽ). Tính thể tích của chiếc hộp đó.



Lời giải



Ta có $AM = \frac{5}{2} \Rightarrow AB = 10$, $AD = 5\sqrt{3}$, $S_{ABCD} = 100\sqrt{3} \text{ cm}^2$, $V = S_{ABCD} \cdot h = 750\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

Câu 10. Người ta muốn xây một cái bể chứa nước dạng hình hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3$, đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Giá thuê nhân công xây bể là 500.000 đồng/ m^2 . Tính chi phí thuê nhân công thấp nhất.

Lời giải

Gọi $x(m)$ là chiều rộng của đáy bể, khi đó chiều dài của đáy bể là $2x(m)$ và $h(m)$ là chiều cao bể. Bể có

thể tích bằng $\frac{500}{3} \text{ m}^3 \Leftrightarrow 2x^2h = \frac{500}{3} \Leftrightarrow h = \frac{250}{3x^2}$.

Diện tích cần xây là: $S = 2(xh + 2xh) + 2x^2 = 6x \cdot \frac{250}{3x^2} + 2x^2 = \frac{500}{x} + 2x^2$.

Xét hàm $S(x) = \frac{500}{x} + 2x^2, (x > 0) \Rightarrow S'(x) = \frac{-500}{x^2} + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

Lập bảng biến thiên suy ra $S_{\min} = S(5) = 150$.

Chi phí thuê nhân công thấp nhất khi diện tích xây dựng là nhỏ nhất và bằng $S_{\min} = 150$.

Vậy giá thuê nhân công thấp nhất là: $150.500000 = 75000000$ đồng.

Câu 11. Người ta muốn mạ vàng cho bề mặt phía ngoài của một cái hộp dạng hình hộp đứng không nắp (nắp trên), có đáy là một hình vuông. Tìm chiều cao của hộp để lượng vàng phải dùng để mạ là ít nhất, biết lớp mạ ở mọi nơi như nhau, giao giữa các mặt là không đáng kể và thể tích của hộp là 4 dm^3 .

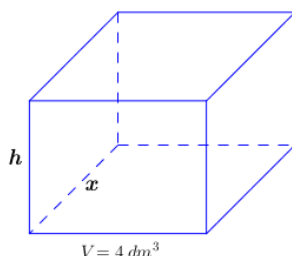
Lời giải

Gọi x, y ($x, y > 0$) lần lượt là độ dài cạnh đáy, chiều cao của hình hộp.

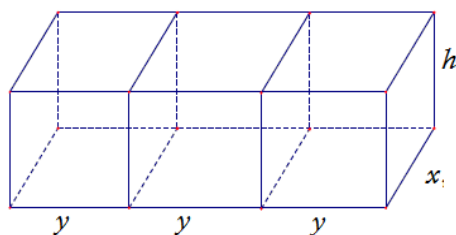
Thể tích khối hộp là $V = x^2 y \Leftrightarrow 4 = x^2 y \Leftrightarrow y = \frac{4}{x^2}$

Diện tích cần mạ vàng $S = x^2 + 4xy = x^2 + \frac{16}{x} = x^2 + \frac{8}{x} + \frac{8}{x} \geq 3\sqrt[3]{64}$

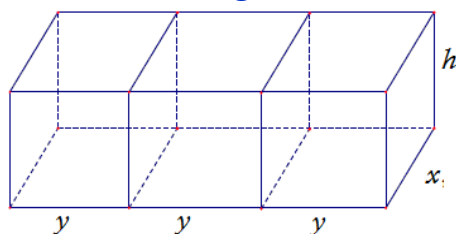
S đạt giá trị nhỏ nhất khi chỉ khi $x^2 = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 1$.



Câu 12. Một người xây nhà kho hình hộp chữ nhật có diện tích mặt sàn là 1152 m^2 , với x, y lần lượt là chiều dài, chiều rộng và chiều cao h cố định ($x, y, h > 0$). Người đó xây các bức tường xung quanh và bên trong để ngăn nhà kho thành ba phòng hình chữ nhật có kích thước như nhau (không kể trần nhà). Vậy cần phải xây các phòng theo kích thước nào để tiết kiệm chi phí nhất (bỏ qua độ dày các bức tường).



Lời giải



Cách 1: Theo giả thiết, ta có $x.3y = 1152 \Rightarrow y = \frac{384}{x}$.

Để tiết kiệm chi phí nhất khi diện tích toàn phần nhỏ nhất.

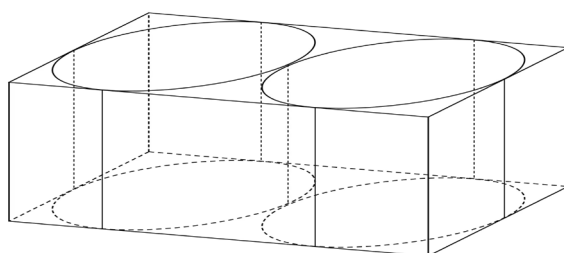
Ta có $S_{\text{tp}} = 4xh + 6yh + 3xy = 4xh + 6 \cdot \frac{384}{x} h + 1152 = 4h \left(x + \frac{576}{x} \right) + 1152$.

Vì h không đổi nên S_{tp} nhỏ nhất khi $f(x) = x + \frac{576}{x}$ (với $x > 0$) nhỏ nhất.

Khảo sát $f(x) = x + \frac{576}{x}$ với $x > 0$, ta được $f(x)$ nhỏ nhất khi $x = 24 \Rightarrow y = 16$.

Cách 2: BĐT AM-GM (Côsi): $x + \frac{576}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{576}{x}} = 48$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x = \frac{576}{x} \Rightarrow x = 24$.

Câu 13. Bạn An làm hai cái bánh là hai khối trụ bằng nhau có tổng thể tích bằng $144\pi \text{ cm}^3$ và dùng giấy carton làm một cái hộp hình hộp chữ nhật (có đủ 6 mặt) để đựng vừa khít hai cái bánh như hình vẽ. Tính diện tích nhỏ nhất của giấy carton dùng trong việc nêu trên.



Lời giải

- Gọi bán kính của hình trụ là r (với $r > 0$), chiều cao của khối trụ là h (với $h > 0$). Chiều rộng của đáy hình hộp chữ nhật là $2r$, chiều dài của đáy hình hộp chữ nhật là $4r$.
- Tổng thể tích hai khối trụ bằng $144\pi \text{ cm}^3$. Thể tích khối trụ bằng $\pi r^2 h = 72\pi (\text{cm}^3)$.

Chiều cao của khối trụ là $h = \frac{72}{r^2}$. Chiều cao của hình hộp chữ nhật là $\frac{72}{r^2}$.

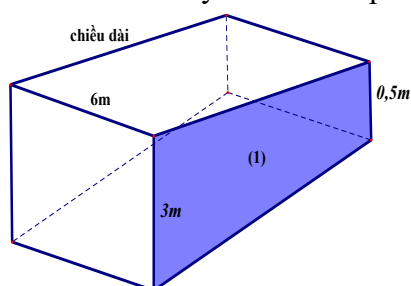
- Diện tích toàn phần của hình hộp chữ nhật là:

$$2\left(2r \cdot 4r + 4r \cdot \frac{72}{r^2} + \frac{72}{r^2} \cdot 2r\right) = 2\left(8r^2 + \frac{288}{r} + \frac{144}{r}\right) = 16\left(r^2 + \frac{54}{r}\right).$$

Ta có $r^2 + \frac{54}{r} = r^2 + \frac{27}{r} + \frac{27}{r} \geq 3\sqrt{r^2 \cdot \frac{27}{r} \cdot \frac{27}{r}} = 27$.

- Vậy diện tích nhỏ nhất của giấy carton cần dùng là $16 \cdot 27 = 432 (\text{cm}^2)$.

Câu 14. Một hồ bơi có dạng là một lăng trụ đứng tứ giác với đáy là hình thang vuông (mặt bên (1) của hồ bơi là 1 đáy của lăng trụ) và các kích thước như đã cho (xem hình vẽ). Biết rằng người ta dùng một máy bơm với lưu lượng là $42 \text{ m}^3 / \text{phút}$ và sẽ bơm đầy hồ mất 25 phút. Tính chiều dài của hồ.

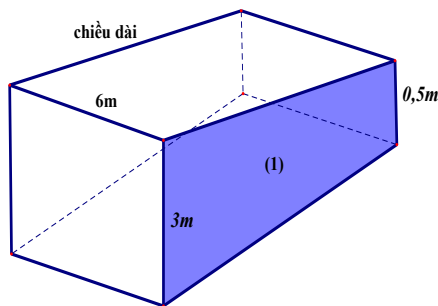


Lời giải

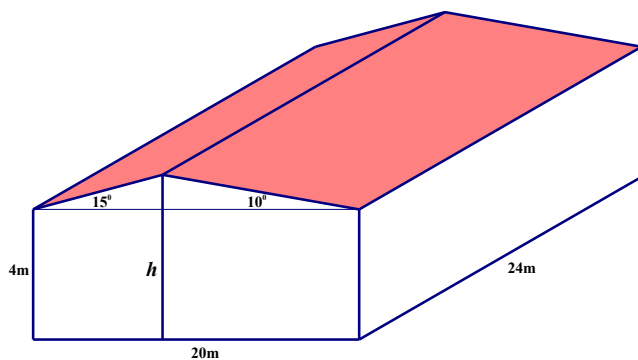
Thể tích của hồ : $42 \cdot 25 = 1050 \text{ m}^3$

Diện tích đáy lăng trụ là: $1050 : 6 = 175 \text{ m}^2$

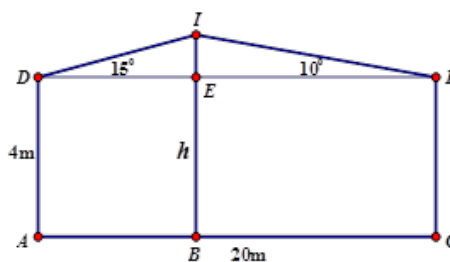
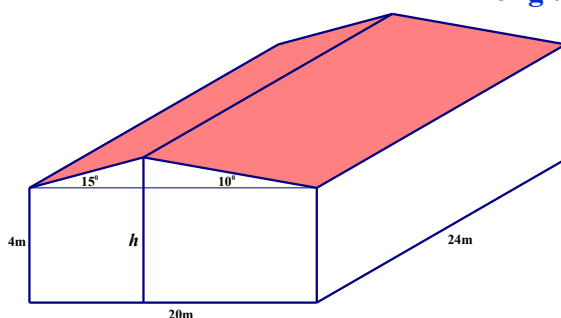
Chiều dài hồ bơi : $175 : (3 + 0,5) \cdot 2 = 100 \text{ m}$



Câu 15. Một nhà xưởng với số liệu ghi trên hình (biết h là chiều cao từ mặt đất tới nóc nhà). Tính chiều cao h của nhà (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



Lời giải

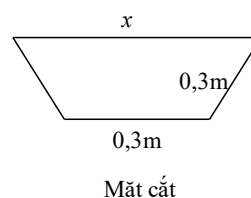
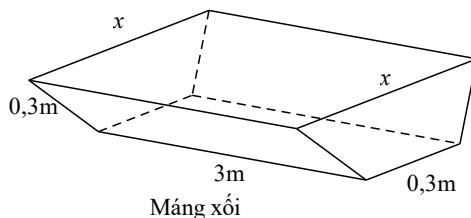
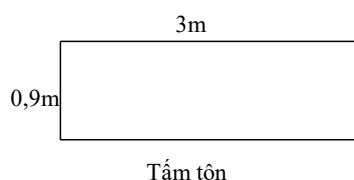


$$\triangle IEF : \hat{E} = 90^\circ \Rightarrow EF = IE \cdot \cot 10^\circ$$

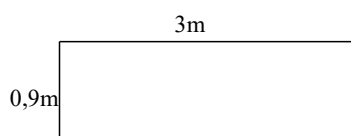
$$\triangle IED : \hat{E} = 90^\circ \Rightarrow DE = IE \cdot \cot 15^\circ \Rightarrow IE \cdot (\cot 15^\circ + \cot 10^\circ) = 20 \Rightarrow IE \approx 2,13 \text{ m}$$

Chiều cao của nhà là: $h = 4 + EI = 6,13 \text{ (m)}$.

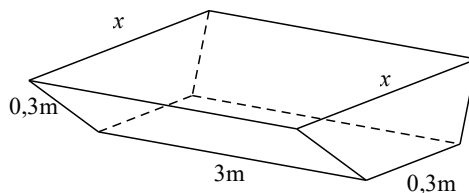
Câu 16. Để làm một máng xối nước, từ một tấm tôn kích thước $0,9\text{m} \times 3\text{m}$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới, biết mặt cắt của máng xối là một hình thang cân và máng xối là một hình lăng trụ không có nắp đáy phía trên. Hỏi $x \text{ (m)}$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



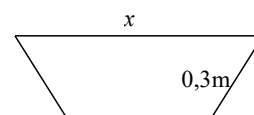
Lời giải



Tấm tôn



Máng xối



Mặt cắt

Ta có máng xối là một hình lăng trụ, có chiều cao bằng $3m$ không đổi và đáy là một hình thang cân nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích đáy lớn nhất.

$$\text{Ta có diện tích đáy: } S = \frac{1}{2}(x + 0,3) \sqrt{0,3^2 - \left(\frac{x - 0,3}{2}\right)^2} = \frac{1}{4} \sqrt{(x + 0,3)^3 (0,9 - x)}.$$

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$(x + 0,3)^3 (3 \cdot 0,9 - 3x) \leq \left(\frac{3x + 3 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,9 - 3x}{4} \right)^4 = (0,9)^4.$$

Đẳng thức xảy ra khi $x + 0,3 = 3 \cdot 0,9 - 3x \Rightarrow x = 0,6$.

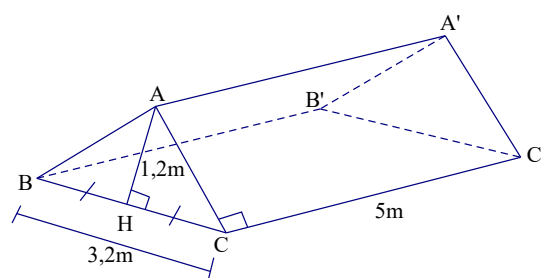
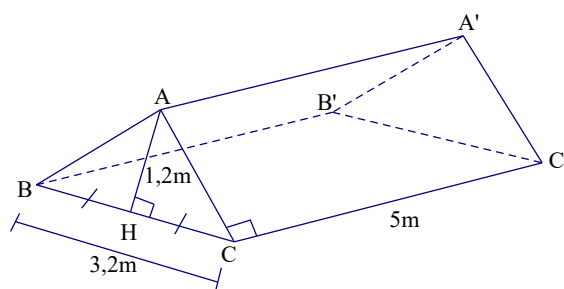
Câu 17. Một cái lều ở trại ở khu du lịch có dạng lăng trụ đứng tam giác có các kích thước trên hình:

$AH = 1,2m$; $BC = 3,2m$; $CC' = 5m$.

a) Tính thể tích khoảng không gian ở bên trong lều.

b) Cần phải có ít nhất bao nhiêu m^2 vải bạt để dựng lều đó? (Không tính các mép và nếp gấp của lều)

Lời giải



a) Diện tích đáy (tam giác): $S = \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 1,2 = 1,92(m^2)$

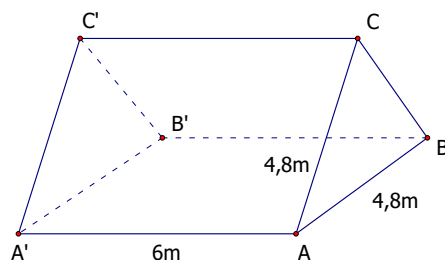
Thể tích khoảng không ở bên trong lều $V = S \cdot h = 1,92 \cdot 5 = 9,6(m^3)$

b) Áp dụng định lí Pytago vào tam giác vuông AHC , ta tính được $AC = 2m$

Số m^2 vải bạt ít nhất cần có : $2 \cdot (1,92 + 2,5) = 23,84m^2$

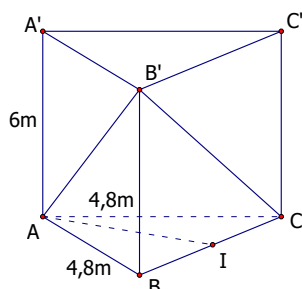
Câu 18. Có một cái lều có dạng hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy.

Biết các cạnh $AB = AC = 4,8m$; $BC = 4m$, $AA' = 6m$.



- a) Tính góc giữa 2 đường thẳng AA' và BC ; $A'B'$ và AC .
- b) Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$.

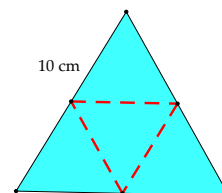
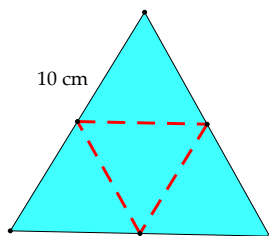
Lời giải



- a) Vì $AA' \perp (ABC) \Rightarrow BC \Rightarrow AA' \perp BC \Rightarrow (AA', BC) = 90^\circ$
 Vì $A'B' \parallel AB \Rightarrow (A'B', AC) = (AB, AC) = 49,2^\circ$
- b) Gọi I là trung điểm. Có $AI \perp BC, AI \perp BB' \Rightarrow AI \perp (BB'C'C)$
 Do đó hình chiếu vuông góc của tam giác ABB' trên mặt phẳng $(BB'C'C)$ là tam giác $BB'I$ có diện tích: $S_{\triangle BB'I} = \frac{1}{2} \cdot BB' \cdot BI = \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 3 = 7,2 \text{ m}^2$

Câu 19. Người ta cắt miếng bìa hình tam giác đều cạnh bằng 10cm như hình bên và gấp theo các đường kẻ, sau đó dán các mép lại để được hình tứ diện đều. Tính thể tích của khối tứ diện tạo thành.

Lời giải



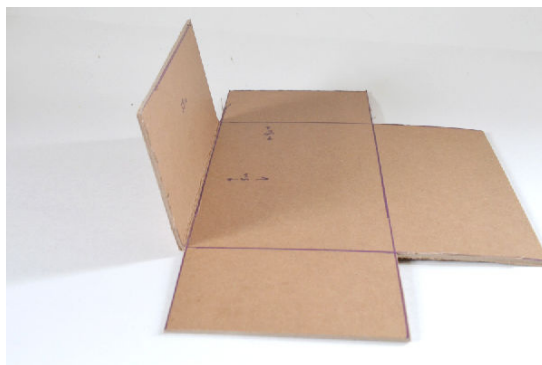
Tứ diện đều tạo thành là tứ diện đều $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 5cm .

$$\text{Diện tích đáy là } S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{25\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2.$$

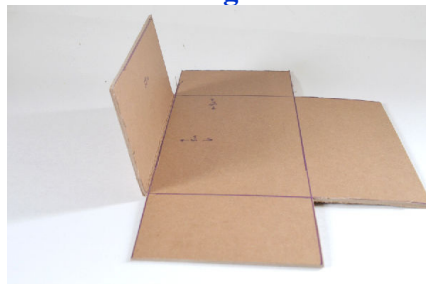
$$\text{Đường cao } AH = \sqrt{AD^2 - DH^2} = \sqrt{5^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{6}}{3}, \text{ với } H \text{ là tâm đáy. Thể tích}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{25\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{3} = \frac{125\sqrt{2}}{12} \text{ cm}^3.$$

Câu 20. Từ một miếng giấy carton hình chữ nhật có chiều rộng 30cm , chiều dài 40cm . Người ta cắt ở 4 góc hình chữ nhật 4 hình vuông có cạnh bằng 5cm rồi gấp lại thành hình hộp chữ nhật không nắp (hình vẽ). Tính thể tích của hình hộp tạo thành.



Lời giải



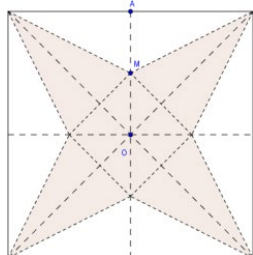
Sau khi cắt và lấy ra 4 hình vuông ở 4 góc và gấp lại, ta được đáy của hình hộp là một hình chữ nhật có kích thước là 20 cm và 30 cm , chiều cao của hình hộp là 5 cm .

Do đó thể tích của hình hộp là: $V = 20.30.5 = 3000\text{ cm}^3$.

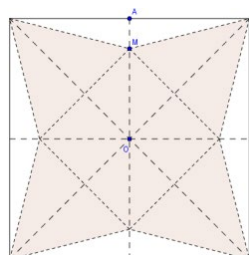
Câu 21. Hai miếng giấy hình vuông bằng nhau được hai bạn **Hà** và **Nội** cắt ra và tạo thành một hình chóp tứ giác đều như sau.

Hà: Cắt bỏ miếng giấy như **Hình 1** (với M là trung điểm OA) rồi tạo thành một hình chóp tứ giác đều.

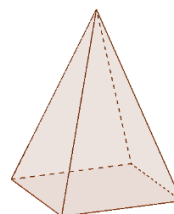
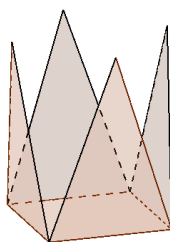
Nội: Cắt bỏ miếng giấy như **Hình 2** (với M nằm trên OA thỏa $OM = 3MA$) rồi tạo thành một hình chóp tứ giác đều.



Hình 1



Hình 2



Gọi V_1 là thể tích khối chóp của Hà, V_2 là thể tích khối chóp của Nội. Tính tỉ số $\frac{V_1}{V_2}$.

Lời giải

Gọi cạnh hình vuông là 8 .

Hình 1: Cạnh đáy của khối chóp đều là $2\sqrt{2}$.

$$OI = \frac{1}{4}OS = \frac{1}{4}.4\sqrt{2} = \sqrt{2}; \quad IS = \frac{3}{4}OS = \frac{3}{4}.4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}.$$

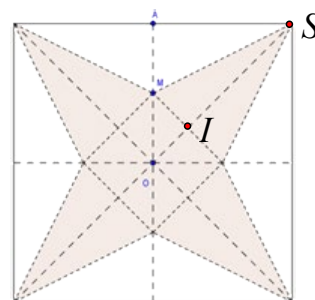
Đường cao khối chóp

$$SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{(3\sqrt{2})^2 - (\sqrt{2})^2} = 4.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2})^2.4 = \frac{32}{3}.$$

Hình 2: Cạnh đáy của khối chóp đều là $\frac{3}{4}.4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$.

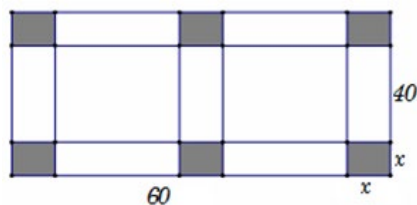
$$OI = \frac{3}{8}OS = \frac{3}{8}.4\sqrt{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2}; \quad IS = \frac{5}{8}OS = \frac{5}{8}.4\sqrt{2} = \frac{5}{2}\sqrt{2}.$$



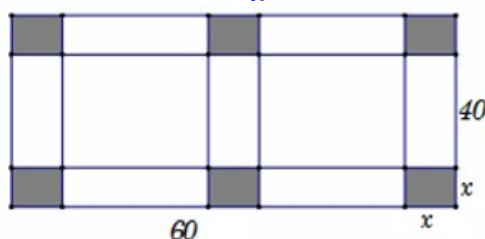
$$\text{Đường cao khối chóp } SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)^2} = 2\sqrt{2}.$$

$$\text{Thể tích khối chóp } V_2 = \frac{1}{3}(3\sqrt{2})^2 \cdot 2\sqrt{2} = 12\sqrt{2}. \text{ Vậy } \frac{V_1}{V_2} = \frac{\frac{32}{3}}{12\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{9}.$$

Câu 22. Cho một tấm bìa hình chữ nhật có chiều dài là 60cm và chiều rộng là 40cm. Người ta cắt 6 hình vuông bằng nhau như hình vẽ, mỗi hình vuông cạnh bằng x (cm), rồi gấp tấm bìa lại để được một hộp chữ nhật có nắp. Tìm x để khối hộp nhận được có thể tích lớn nhất.



Lời giải



Các kích thước khối hộp lần lượt là: $\frac{60-3x}{2}$; $40-2x$; x .

$$\text{Khi đó } V_{\text{hộp}} = \left(\frac{60-3x}{2}\right)(40-2x)x = 3x^3 - 120x^2 + 1200x = f(x).$$

Khảo sát hàm $f(x)$ với $0 < x < 20$, ta được $f(x)$ lớn nhất khi $x = \frac{20}{3}$.

Câu 23. Bé An có một tấm bìa có chiều dài 20cm, chiều rộng 1cm. Bé muốn gấp một cái hộp nhỏ xinh để bỏ kẹp tóc tặng quà cho mẹ ngày 20 tháng 10. Anh trai bé đã chỉ cho bé hai cách gấp hộp. Cách thứ nhất là bé cuốn tấm bìa thành một cái hộp hình trụ không có 2 đáy có thể tích V_1 .

Cách thứ hai là bé gấp tấm bìa thành một hình hộp chữ nhật có thể tích V_2 có các kích thước như trên hình vẽ. Hãy tìm tỉ số thể tích của 2 hộp để biết được gấp theo cách nào sẽ có thể tích lớn hơn.



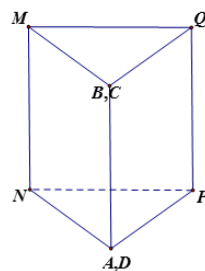
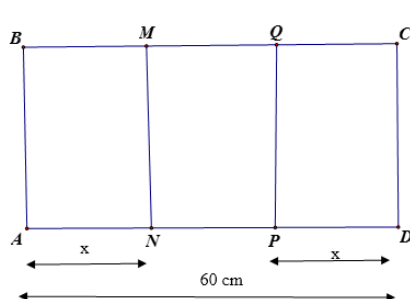
Chiều dài của tấm bìa là 20cm tức là chu vi đáy hộp hình trụ và hộp hình hộp là 20cm. Do 2 khối có cùng chiều cao nên tỉ số thể tích sẽ tính theo tỉ số diện tích đáy của hai hình. Để tính được diện tích hình tròn đáy của khối hộp hình trụ ta phải tìm bán kính đáy.

$$\text{Theo giả thiết chu vi cho là } 20 = 2\pi R \Leftrightarrow R = \frac{10}{\pi} \Rightarrow S_1 = \pi \cdot \frac{100}{\pi^2} = \frac{100}{\pi}.$$

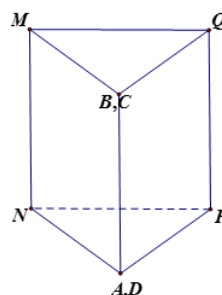
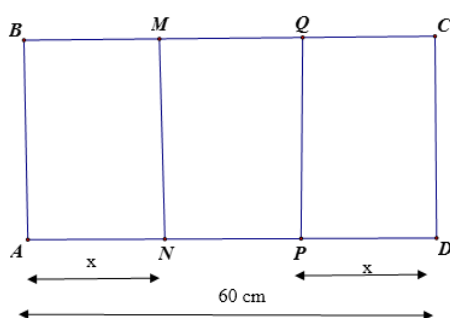
$$\text{Diện tích đáy của hình hộp } S_2 = 5 \cdot 5 = 25.$$

Khi đó $\frac{V_1}{V_2} = \frac{100}{\pi} : 25 = \frac{4}{\pi}$

Câu 24. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 60$ cm. Ta gấp tấm nhôm theo 2 cạnh MN và PQ vào phía trong đến khi AB và DC trùng nhau (như hình vẽ dưới đây) để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất.



Lời giải



Cách 1: $V = S.h$, trong đó $S = S_{\Delta}$ là diện tích mặt đáy, h là chiều cao của khối lăng trụ. Vì chiều cao h không thay đổi nên để thể tích lớn nhất thì diện tích đáy phải lớn nhất. Diện tích tam giác đáy theo công thức Hêrông:

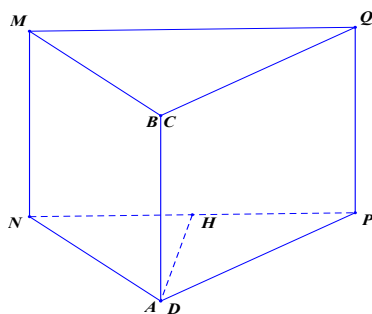
$$\begin{aligned} S_{\Delta} &= \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ &= \sqrt{30(30-x)(30-x)(30-60+2x)} \\ &= \sqrt{30(30-x)^2(2x-30)} \end{aligned}$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{30(30-x)^2(2x-30)}$

$$y' = \frac{6x^2 - 300x + 3600}{2\sqrt{30(30-x)^2(2x-30)}}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20(TM) \\ x = 30(L) \end{cases}$$

Cách 2:



Ta có $AN = x, (0 < x < 30)$ nên $PN = 60 - 2x$.

Gọi H là trung điểm của PN thì $HP = 30 - x$.

Xét tam giác vuông APH ta có $AH = \sqrt{AP^2 - HP^2} = \sqrt{x^2 - (30-x)^2} = \sqrt{60x-900}$ (điều kiện $x > 15$)

Diện tích tam giác APN là $S_{\triangle APN} = \frac{1}{2} \cdot (60-2x) \sqrt{60x-900} = (60-2x)(\sqrt{15x-225}) = f(x)$,

Do chiều cao của khối lăng trụ không đổi nên thể tích khối lăng trụ lớn nhất khi $f(x)$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = (60-2x)(\sqrt{15x-225})$ trên khoảng $(15;30)$ ta có $f'(x) = \frac{-45(x-20)}{\sqrt{15x-225}}$.

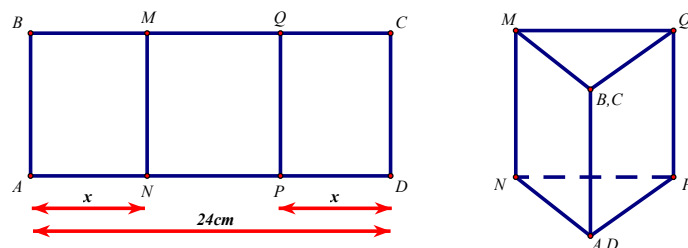
Giải phương trình $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-45(x-20)}{\sqrt{15x-225}} = 0 \Leftrightarrow x = 20$.

Bảng biến thiên

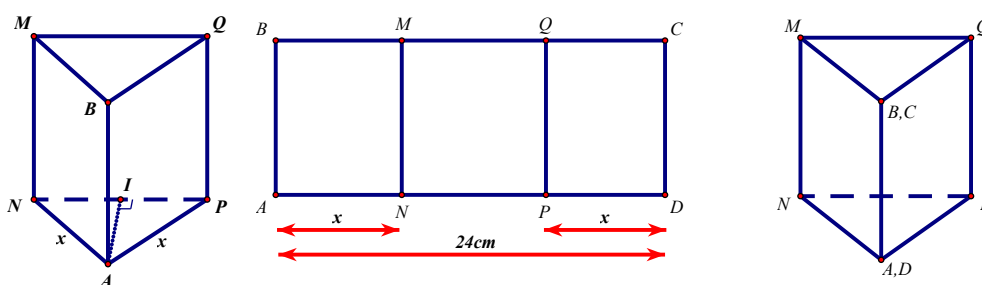
x	15	20	30
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	0	$100\sqrt{3}$	0

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(15;30)} f(x) = 100\sqrt{3}$ khi $x = 20$.

Câu 25. Cho một tấm nhôm hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = 24\text{cm}$. Ta gấp tấm nhôm theo hai cạnh MN và QP vào phía trong đến khi AB và CD trùng nhau như hình vẽ dưới đây để được một hình lăng trụ khuyết hai đáy. Tìm x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất?



Lời giải



Gọi I là trung điểm $NP \Rightarrow IA$ đường cao của $\triangle ANP$ cân tại A

$$\Rightarrow AI = \sqrt{x^2 - (12-x)^2} = \sqrt{24(x-6)}$$

$$\Rightarrow \text{diện tích đáy } S_{\triangle ANP} = \frac{1}{2} \cdot NP \cdot AI = \frac{1}{2} \cdot (12-x) \cdot \sqrt{24(x-6)}, \text{ với } 6 \leq x \leq 12$$

$$\Rightarrow \text{thể tích khối lăng trụ là } V = S_{\triangle ANP} \cdot MN = \frac{a}{2} \cdot (12-x) \cdot \sqrt{24(x-6)}$$

(đặt $MN = a$: hằng số dương)

• Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{1}{2} \cdot (12-x) \cdot \sqrt{24(x-6)}, (6 \leq x \leq 12)$:

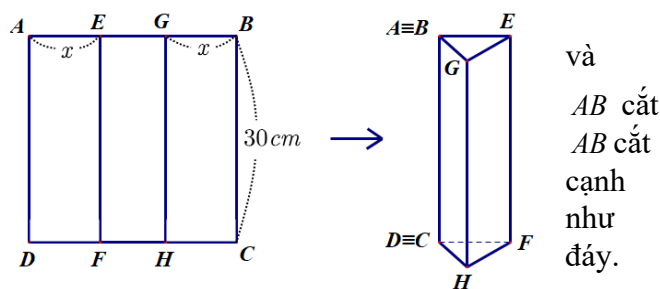
$$+ y' = \frac{1}{2} \left[-\sqrt{24(x-6)} + \frac{12(12-x)}{\sqrt{24(x-6)}} \right] = 6 \cdot \frac{-3x+24}{\sqrt{24(x-6)}}, y' = 0 \Leftrightarrow x = 8 \in (6;12)$$

$$+ \text{Tính giá trị: } y(8) = 8\sqrt{3}, y(6) = 0, y(12) = 0$$

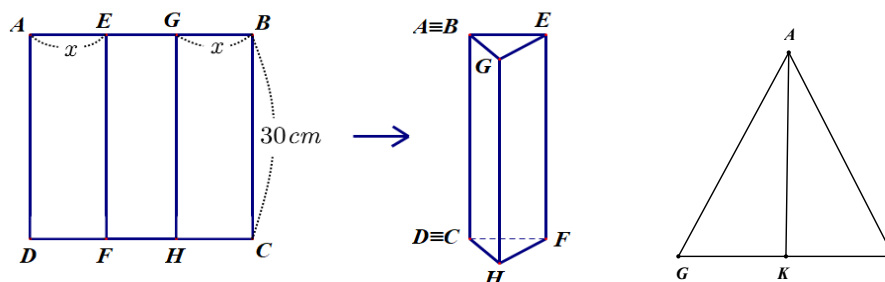
- Thể tích khối trụ lớn nhất khi $x = 8$.

Câu 26. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh là 30 cm .

Trên cạnh AB lấy hai điểm E, G sao cho $AE = GB = x(\text{cm})$ và điểm E nằm giữa điểm A và điểm G . Qua E kẻ đường thẳng vuông góc với CD tại F ; qua G kẻ đường thẳng vuông góc với CD tại H . Người ta gấp hình vuông theo hai hình vẽ để tạo thành hình lăng trụ đứng khuyết. Tìm x để thể tích hình lăng trụ lớn nhất.



Lời giải



Ta có $AE = GB = x$ ($0 < x < 15$) $\Rightarrow EG = 30 - 2x$.

Kẻ đường cao AK của $\triangle AGE$.

Vì $\triangle AGE$ cân tại A nên $KE = \frac{EG}{2} = \frac{30 - 2x}{2} = 15 - x$ (cm).

$\triangle AKE$ vuông tại $K \Rightarrow AE > KE \Rightarrow x > \frac{15}{2}$.

Áp dụng định lý Py-ta-go vào tam giác vuông AKE ta có

$$AK^2 + KE^2 = AE^2 \Leftrightarrow AK^2 = AE^2 - KE^2$$

$$\Leftrightarrow AK = \sqrt{AE^2 - KE^2} \Leftrightarrow AK = \sqrt{x^2 - (15 - x)^2} \Leftrightarrow AK = \sqrt{30x - 225}.$$

Diện tích đáy AGE là: $S_{AGE} = \frac{1}{2} AK \cdot GE = \frac{1}{2} \sqrt{30x - 225} \cdot (30 - 2x) = \sqrt{30x - 225} \cdot (15 - x)$ (cm^2).

Thể tích lăng trụ là $V = 30 \cdot \sqrt{30x - 225} \cdot (15 - x)$ (cm^3).

$$\begin{aligned} V &= 30 \cdot \sqrt{30x - 225} \cdot (15 - x) = 30 \cdot \sqrt{15 \cdot (2x - 15)} \cdot \sqrt{15 - x} \cdot \sqrt{15 - x} \\ &= 10 \cdot \sqrt{15} \cdot 3 \cdot \sqrt{2x - 15} \cdot \sqrt{15 - x} \cdot \sqrt{15 - x} \end{aligned}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho ba số dương $2x - 15$, $15 - x$, $15 - x$ ta được

$$3 \cdot \sqrt[3]{(2x - 15)(15 - x)(15 - x)} \leq (2x - 15) + (15 - x) + (15 - x)$$

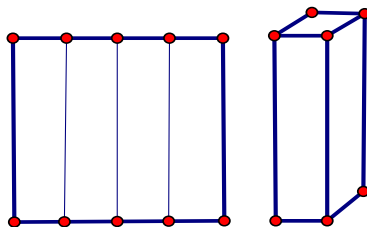
$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{(2x - 15)(15 - x)(15 - x)} \leq 5 \Leftrightarrow (2x - 15)(15 - x)(15 - x) \leq 5^3$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2x - 15)(15 - x)(15 - x)} \leq \sqrt{5^3} = 5\sqrt{5} \Rightarrow V \leq 10 \cdot \sqrt{15} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{5} \Rightarrow V \leq 750\sqrt{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x - 15 = 15 - x \Leftrightarrow x = 10$.

Vậy $x = 10$ thì thể tích lăng trụ lớn nhất.

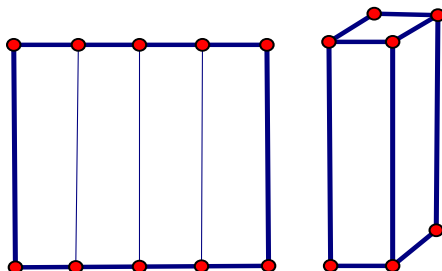
Câu 27. Từ một mảnh giấy hình vuông cạnh là 4 cm , người ta gấp nó thành bốn phần đều nhau rồi dựng lên thành bốn mặt xung quanh của hình lăng trụ tứ giác đều như hình vẽ. Hỏi thể tích của khối lăng trụ này là bao nhiêu?



Lời giải

Đáy là hình vuông có cạnh bằng 1 nên diện tích đáy: $S = 1\text{cm}^2$.

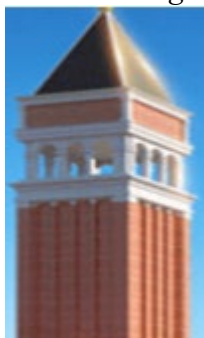
Thể tích lăng trụ là: $V = h.S = 4\text{cm}^3$



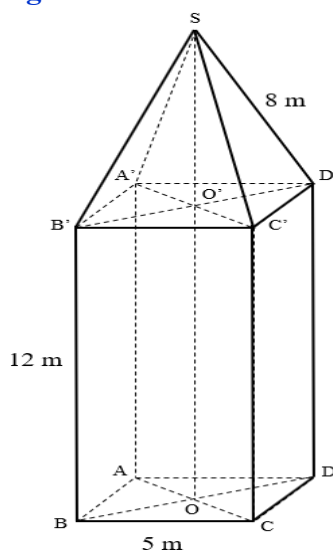
Câu 28. Một chiếc tháp có phần dưới có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh dài 5 m. chiều cao của hình hộp chữ nhật là 12 m. Phần trên của tháp có dạng hình chóp đều, các mặt bên là các tam giác cân chung đỉnh (hình vẽ). Mỗi cạnh bên của hình chóp dài 8 m.

a) Tính theo mét chiều cao của tháp đồng hồ? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)

b) Tính thể tích của tháp đồng hồ này? (Làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải



a) Xét hình vuông $A'B'C'D'$ có: $B'D' = \sqrt{B'C'^2 + C'D'^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow O'D' = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

$$\text{Chiều cao phần trên của tháp: } SO' = \sqrt{SD'^2 - O'D'^2} = \sqrt{8^2 - \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{206}}{2}$$

$$\text{Chiều cao của tháp là: } 12 + \frac{\sqrt{206}}{2} \approx 19,2m$$

$$\text{b) Thể tích phần dưới của tháp: } V_1 = S_{ABCD} \cdot OO' = 5^2 \cdot 12 = 300 (m^3)$$

$$\text{Thể tích phần trên của tháp: } V_2 = \frac{1}{3} S_{A'B'C'D'} \cdot SO' = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot \frac{\sqrt{206}}{2} = \frac{25\sqrt{206}}{6} (m^3)$$

$$\text{Thể tích tháp: } V_1 + V_2 = 300 + \frac{25\sqrt{206}}{6} \approx 360 (m^3)$$

Câu 29. Khi độ dài của hình lập phương tăng thêm 2 cm thì thể tích của nó tăng thêm 98 cm³. Tính độ dài cạnh của hình lập phương đã cho.

Lời giải

Gọi khối lập phương ban đầu có cạnh là a , khi đó thể tích khối lập phương là $V = a^3$.

Sau khi độ dài cạnh tăng thêm 2 cm thì khối lập phương có cạnh là $a + 2$,

khi đó thể tích khối lập phương là $V' = (a + 2)^3$.

Thể tích tăng thêm: $V' - V = 98 \Leftrightarrow (a + 2)^3 - a^3 = 98 \Rightarrow a = 3 \text{ (cm)}$.

Câu 30. Khi chiều cao của một hình chóp đều tăng lên n lần nhưng mỗi cạnh đáy giảm đi n lần thì thể tích của nó tăng hay giảm bao nhiêu lần?

Lời giải

Ta có: $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S$, với h là chiều cao, S là diện tích đáy.

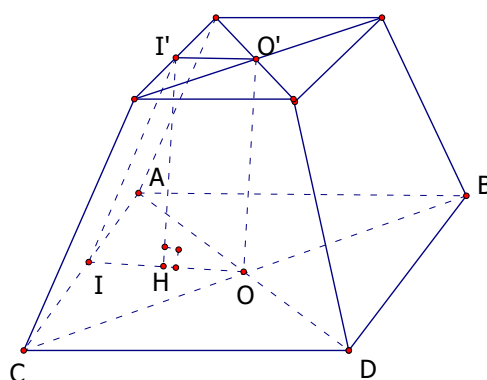
$$S = \frac{x^2 a}{4 \tan\left(\frac{180^\circ}{a}\right)} \text{ với } x \text{ là độ dài cạnh của đa giác đều, } a \text{ là số đỉnh của đa giác đều.}$$

$$\text{Ycbt } \Leftrightarrow V_1 = \frac{1}{3} \cdot nh \cdot \frac{\left(\frac{x}{n}\right)^2 a}{4 \tan\left(\frac{180^\circ}{a}\right)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{3} \cdot h \cdot S = \frac{1}{n} \cdot V. \text{ Thể tích của khối chóp đều giảm đi } n \text{ lần.}$$

Câu 31. Người ta dự định đào một hầm rượu có dạng hình chóp cụt đều cá hai cạnh đáy là 7m và 5m.

Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 120° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm

Lời giải



Gọi O, O', I, I' lần lượt là tâm hai đáy và trung điểm 2 cạnh đáy lớn và đáy nhỏ tương ứng.

Vẽ đường cao $I'H$ của hình thang vuông $OII'O'$. Ta có $\widehat{H'O'} = 120^\circ, \widehat{I'IO} = 60^\circ$

$$OO' = HI = (OI - O'I'). \tan \widehat{I'IO} = \left(\frac{7}{2} - \frac{5}{2} \right) \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}$$

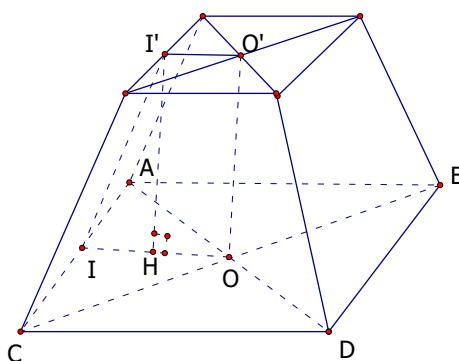
$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + \sqrt{S \cdot S'} + S') = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (7^2 + \sqrt{7^2 \cdot 5^2} + 5^2) = \frac{109}{3} \cdot \sqrt{3}. \text{ hay } V \approx 62,93(m^3)$$

Vậy phải chuyển ra khối hàm khoảng $62,93(m^3)$ đất

Câu 32. Một chân cột bằng thép không rỉ có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $4a$, cạnh đáy nhỏ bằng $2a$, chiều cao $h = 4a$ và bán kính đáy phần trụ rỗng bên trong bằng a .

- Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.
- Tính thể tích chân cột nói trên theo a .

Lời giải



- Gọi O, O', I, I' lần lượt là tâm hai đáy và trung điểm 2 cạnh đáy lớn và đáy nhỏ tương ứng.

Ta có $\widehat{O'I'I}$ là góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy (đáy trên),

$\widehat{OII'}$ là góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy lớn (đáy dưới)

- Thể tích phần trụ rỗng bên trong hình chóp cắt $V_{tru} = \pi \cdot r^2 \cdot h = \pi \cdot a^2 \cdot 4a = 4\pi \cdot a^3$

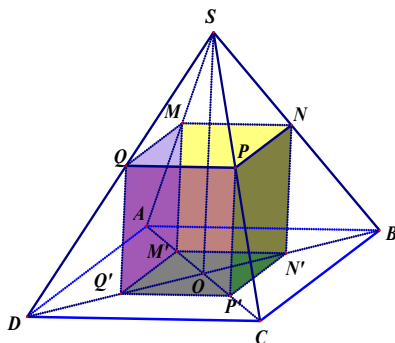
Thể tích khối chóp cắt:

$$V_{chopcut} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + \sqrt{S \cdot S'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot ((4a)^2 + \sqrt{(4a)^2 \cdot (2a)^2} + (2a)^2) = \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 28a^2 = \frac{112}{3} a^3$$

$$\text{Thể tích khối chân cột: } V_{chancot} = V_{chopcut} - V_{tru} = \frac{112}{3} a^3 - 4\pi \cdot a^3 = \frac{(112 - 12\pi) \cdot a^3}{3}$$

Câu 33. Một ngôi nhà có dạng khối chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Khối lăng trụ đứng $MNPQ.M'N'P'Q'$ bên trong khối chóp $S.ABCD$ sao cho M, N, P, Q lần lượt thuộc các cạnh bên SA, SB, SC, SD và M', N', P', Q' thuộc đáy $(ABCD)$. Tính MN theo a để thể tích của khối lăng trụ $MNPQ.M'N'P'Q'$ đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Đặt $MN = x, 0 < x < a$.

Ta có $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} \Leftrightarrow \frac{x}{a} = \frac{SM}{SA} \Rightarrow \frac{AM}{AS} = \frac{a-x}{a}$.

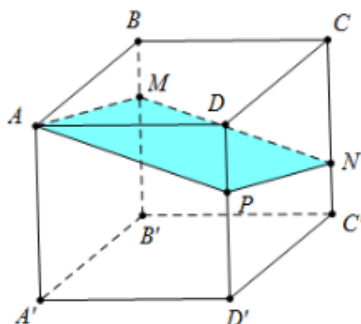
$$\frac{MM'}{SO} = \frac{AM}{AS} = \frac{a-x}{a} \Rightarrow MM' = \frac{a-x}{a} \cdot SO = \frac{a-x}{a} \cdot \sqrt{SA^2 - AO^2}$$

$$MM' = \frac{a-x}{a} \cdot \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a-x}{\sqrt{2}}.$$

$$V_{MNPQ.M'N'P'Q'} = S_{MNPQ}.MM' = MN^2.MM' = x^2 \cdot \frac{a-x}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot (a-x) \leq \left(\frac{\frac{x}{2} + \frac{x}{2} + a-x}{3} \right)^3 = \frac{a^3}{3}.$$

Đầu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{2} = a - x \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}a \quad (tm).$

Câu 34. Người ta cần cắt một khối lập phương thành hai khối đa diện bởi một mặt phẳng đi qua A (như hình vẽ) sao cho phần thể tích của khối đa diện chứa điểm B bằng một nửa thể tích của khối đa diện còn lại. Tính tỉ số $k = \frac{CN}{CC'}$.



Lời giải

Dựng hình như hình vẽ với $BM = AI = CK$. Đặt $AB = 1$

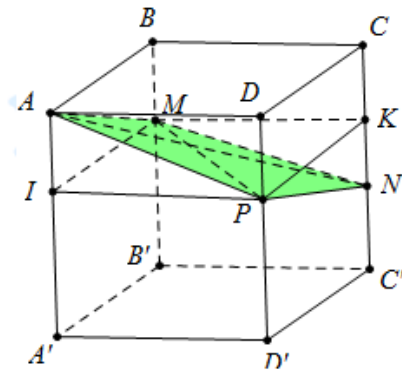
Khi đó $V_{ABCD.A'B'C'D'}=1$ theo GT suy ra $V_{ADP.BCNM}=\frac{1}{3}$

Dễ thấy $AINK$ là hình bình hành có đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường

Khi đó $AI = CK = KN \Rightarrow V_{I.AMN} = V_{K.MPN}$

Suy ra $V_{ADP\_BCNM} = V_{IPKM\_ADCB} = 1.CK$

$$\text{Cho } V_{ADP.BCNM} = \frac{1}{3} \Rightarrow CK = \frac{1}{3} \Rightarrow CN = \frac{2}{3}.$$





CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

BÀI TOÁN THỰC TẾ LIÊN QUAN ĐẾN XÁC SUẤT

Câu 1: Có 2 người thợ săn đi săn cùng bắn vào một con nai. Gọi A là biến cố người thứ nhất bắn trúng con nai, B là biến cố người thứ hai bắn trúng con nai. Tìm mối quan hệ giữa 2 biến cố A và B .

Lời giải

A và B là 2 biến cố độc lập vì việc người thợ săn thứ nhất bắn trúng con nai không phụ thuộc vào việc người thợ săn thứ hai bắn trúng nai.

Câu 2: Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp 11A đi dự đại hội đoàn trường. Xét hai biến cố:
 A : “Học sinh đó là nam”.

B : “Học sinh đó là học sinh giỏi”.

Nêu nội dung của biến cố $A \cup B$.

Lời giải

$A \cup B$: Học sinh được chọn là học sinh nam hoặc học sinh giỏi.

Câu 3: Gieo ngẫu nhiên 1 con xúc xắc và 1 đồng tiền xu. Xét hai biến cố:
 A : “Con xúc xắc xuất hiện mặt chẵn chấm”.

B : “Đồng tiền xu xuất hiện mặt sấp”.

Nêu nội dung của biến cố $A.B$.

Lời giải

$A.B$: Con xúc xắc xuất hiện mặt chẵn chấm và đồng tiền xu xuất hiện mặt sấp.

Câu 4: Hai xạ thủ cùng bắn vào bia. Kí hiệu A_k là biến cố: “Người thứ k bắn trúng”, $k = 1, 2$.
 Hãy biểu diễn các biến cố sau qua các biến cố A_1, A_2 .

a) A : “Không ai bắn trúng”.

b) B : “Cả hai cùng bắn trúng”.

c) C : “Có đúng một người bắn trúng”.

d) D : “Có ít nhất một người bắn trúng”.

Lời giải

a) A : “Không ai bắn trúng” nên người thứ nhất không bắn trúng và người thứ hai không bắn trúng

$$\Rightarrow A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$$

$$A = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2}$$

b) B : “ Cả hai cùng bắn trúng” $\Rightarrow B = A_1 \cdot A_2$

c) C : “ Có đúng một người bắn trúng” suy ra nếu người thứ nhất bắn trúng thì người thứ 2 không bắn trúng và ngược lại

$$\text{Vậy } C = A_1 \cdot \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \cdot A_2$$

d) D : “ Có ít nhất một người bắn trúng”: có 3 trường hợp

TH1: Người thứ nhất bắn trúng và người thứ 2 không bắn trúng.

TH2: Người thứ nhất không bắn trúng và người thứ 2 bắn trúng.

TH3: Cả hai người cùng bắn trúng.

$$\text{Vậy } C = A_1 \cdot \overline{A_2} \cup \overline{A_1} \cdot A_2 \cup A_1 \cdot A_2$$

Câu 5: Trong một chiếc hộp có chứa 5 viên bi màu xanh, 6 viên bi màu đỏ; các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên 1 viên bi trong hộp, ghi lại màu của viên bi lấy ra và bỏ lại viên bi đó vào hộp.
Xét các biến cố:

A : “ Quả bóng màu đỏ lấy được ở lần thứ nhất”;

B : “ Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ hai”;

Chứng minh hai biến cố A, B độc lập.

Lời giải

Ta thấy biến cố B xảy ra sau biến cố A nên việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố B không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố A . Mặt khác ta có: xác suất của biến cố

B khi biến cố A xảy ra bằng $\frac{5}{11}$; xác suất của biến cố B khi biến cố A không xảy ra cũng

bằng $\frac{5}{11}$. Do đó việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố A không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố B . Vậy hai biến cố A, B độc lập.

Câu 6: Có 9 chiếc thẻ trong một chiếc hộp được đánh số từ 1 đến 9, người ta rút ngẫu nhiên lần lượt hai thẻ. Xét hai biến cố sau :

A : “ Lần thứ nhất rút được thẻ mang số chẵn”;

B : “Lần thứ hai rút được thẻ là số chia hết cho 3”;

Hai biến cố A và B có là hai biến cố độc lập không? Tại sao?

Lời giải

Nếu A xảy ra, tức là lần thứ nhất rút được thẻ mang số chẵn $\Rightarrow P(A) = \frac{4}{9}$

Khi đó trong hộp còn lại 5 thẻ đánh số lẻ và 3 thẻ đánh số chẵn

Nếu lần thứ nhất rút được thẻ đánh số 6 thì xác suất của biến cố B là $\Rightarrow P(B) = \frac{2}{8}$

Nếu lần thứ nhất rút được thẻ đánh số 2 hoặc 4 hoặc 8 thì xác suất của biến cố B là
 $\Rightarrow P(B) = \frac{3}{8}$

Như vậy xác suất xảy ra của biến cố B đã thay đổi phụ thuộc vào biến cố A xảy ra hay không xảy ra. Do đó 2 biến cố A và B không độc lập.

Câu 7: Trong một lớp 11A có 25 học sinh nam và 15 học sinh nữ trong đó có 10 học sinh giỏi gồm 4 nam và 6 nữ. Trong giờ học giáo viên chọn ngẫu nhiên 2 học sinh lên bảng để kiểm tra bài tập về nhà. Xét các biến cố:

A : “ Hai học sinh đó là học sinh nam”.

B : “ Hai học sinh đó là học sinh giỏi.

Nêu nội dung của biến cố $A \cup B$; $A \cap B$.

Lời giải

$A \cup B$ là biến cố: “ Hai học sinh đó là học sinh nam hoặc là học sinh giỏi”.

$A \cap B$ là biến cố: “ Hai học sinh đó học sinh nam và là học sinh giỏi”.

Câu 8: Một hộp chứa 20 quả cầu cùng kích thước được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên 1 quả cầu từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên quả cầu được chọn là một số lẻ”, B là biến cố “ Số ghi trên quả cầu được chọn là một số chia hết cho 5”. Hai biến cố A và B có độc lập không? Vì sao?

Lời giải

Nếu A xảy ra thì xác suất của biến cố B là $\frac{1}{5}$.

Nếu A không xảy ra thì xác suất của biến cố B là $\frac{1}{5}$.

Vậy A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

Câu 9: Có 2 chuồng nuôi gà. Chuồng thứ nhất có 10 con gà mái và 5 con gà trống. Chuồng thứ hai có 6 con gà mái và 8 con gà trống. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra 2 con gà. Xét các biến cố:

A : “ Bắt được 2 con gà trống từ chuồng thứ nhất”.

B : “ Bắt được 1 con gà trống và 1 con gà mái từ chuồng thứ hai”.

a) Nêu nội dung của biến cố $A \cap B$.

b) Chứng minh 2 biến cố A và B là hai biến cố độc lập.

Lời giải

a) Biến cố $A \cap B$: “Bắt được 2 con gà trống từ chuồng thứ nhất và bắt được 1 con gà trống và 1 con gà mái từ chuồng thứ hai”.

b) Xác suất để bắt được 1 con gà trống và 1 con gà mái từ chuồng thứ hai là $\frac{6.8}{C_{14}^2} = \frac{48}{91}$

Nếu A xảy ra thì xác suất của biến cố B là $\frac{48}{91}$.

Nếu A không xảy ra thì xác suất của biến cố B là $\frac{48}{91}$.

Vậy A và B là hai biến cố độc lập với nhau.

Câu 10: Có 2 chậu đựng cá. Chậu I chứa 5 con cá chép và 5 con cá quả, chậu II chứa 6 con cá chép và 4 con cá quả. Bắt ngẫu nhiên một con cá từ chậu I để bán rồi dồn các con cá của chậu I vào chậu II. Sau đó bắt ngẫu nhiên một con cá từ chậu II. Xét các biến cố:

A : “Bắt được con cá chép từ chậu I”.

B : “Bắt được con cá quả từ chậu II”.

Chứng minh rằng 2 biến cố A và B là hai biến cố không độc lập.

Lời giải

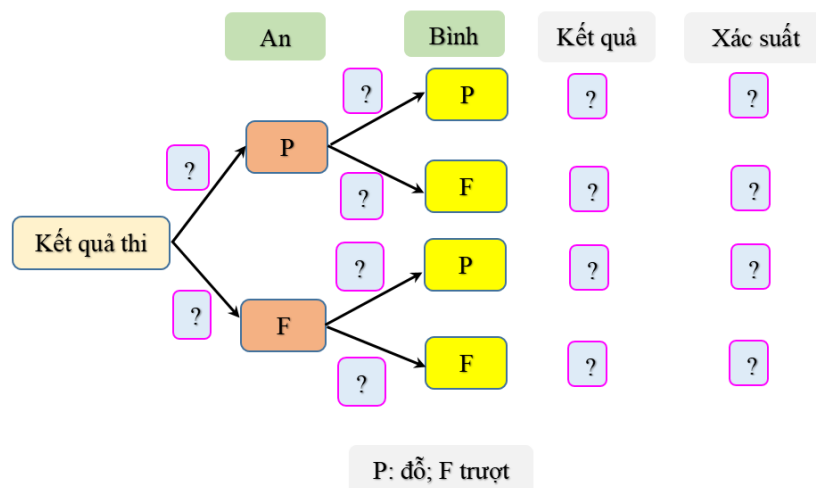
Nếu biến cố A xảy ra, tức là bắt được con cá chép từ chậu I. Vì không trả lại con cá chép đó vào chậu nên trong chậu I còn 4 con cá chép và 5 con cá quả. Khi đó xác suất của biến cố B là

$$P(B) = \frac{9}{19}.$$

Nếu biến cố A không xảy ra, tức là bắt được con cá quả từ chậu I. Vì không trả lại con cá chép đó vào chậu nên trong chậu I còn 5 con cá chép và 4 con cá quả. Khi đó xác suất của biến cố B là $P(B) = \frac{8}{19}$.

Vậy A và B là hai biến cố không độc lập với nhau.

Câu 11: Hai bạn An và Bình độc lập với nhau đi thi chứng chỉ Công Nghệ Thông Tin cơ bản. Biết rằng xác suất đỗ kì thi của An là 0,7 và xác suất đỗ kì thi của Bình là 0,9.



a) Hãy vẽ lại sơ đồ hình cây trên và bổ sung các thông tin còn thiếu.

b) Dựa vào sơ đồ hình cây vừa vẽ. Hãy tính xác suất các biến cố sau:

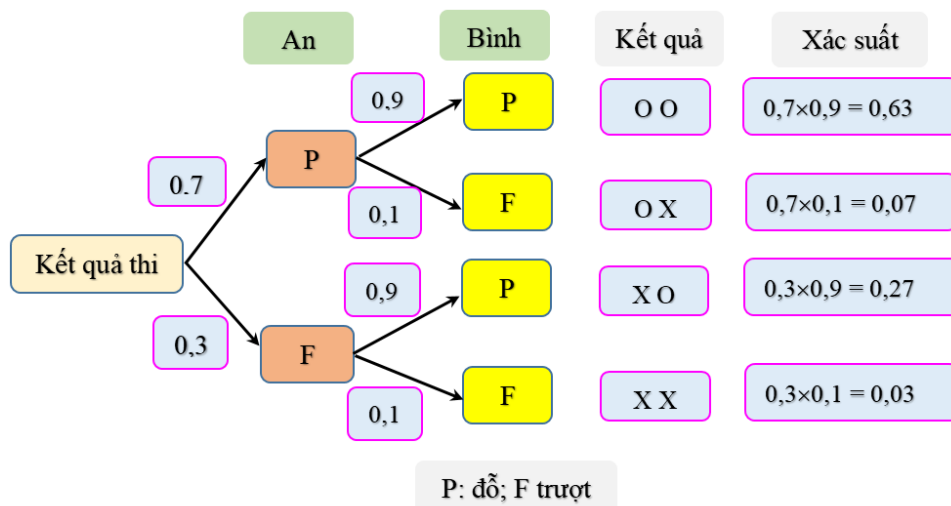
A : “Cả hai bạn cùng đỗ kì thi”.

B : “An đỗ, Bình trượt”.

C : “Ít nhất một trong hai bạn đỗ”.

Lời giải

a)



b) Ta có: $P(A) = 0,63$; $P(B) = 0,07$; $P(C) = 1 - 0,03 = 0,97$.

Câu 12: Xác suất sút bóng thành công tại chấm 11 mét của hai cầu thủ Quang Hải và Văn Đức lần lượt là 0,8 và 0,7. Biết mỗi cầu thủ sút một quả tại chấm 11 mét và hai người sút độc lập. Tính xác suất để ít nhất một người sút bóng thành công.

Lời giải

Xác suất sút không thành công tại chấm 11 của cầu thủ Quang Hải là $1 - 0,8 = 0,2$

Xác suất sút không thành công tại chấm 11 của cầu thủ Văn Đức là $1 - 0,7 = 0,3$

Xác suất cả hai cầu thủ sút không thành công tại chấm 11 là $0,2 \cdot 0,3 = 0,06$

Suy ra: Xác suất để ít nhất một người sút bóng thành công là: $1 - 0,06 = 0,94$.

Câu 13: Ở một loài thực vật, hạt tròn là tính trạng trội hoàn toàn so với hạt dài. Cho cây hạt tròn thuần chủng thụ phấn với cây có hạt dài được F1 toàn là cây hạt tròn. Tiếp tục cho các cây F1 thụ phấn với nhau và thu được các cây con mới. Lần lượt chọn ngẫu nhiên 2 cây con mới, tính xác suất của biến cố: “Có đúng 1 cây hạt tròn trong 2 cây được lấy ra”.

Lời giải

Quy ước gene A: hạt tròn và gene a: hạt dài.

Ở thế hệ F2, ba kiểu gene: AA, Aa, aa xuất hiện với tỉ lệ 1: 2: 1 nên tỉ lệ hạt tròn so với hạt dài là 3:1.

Gọi A_1, A_2 lần lượt là biến cố “cây được chọn lần thứ nhất là hạt tròn” và biến cố “cây được chọn lần thứ hai là hạt tròn”.

Ta có A_1, A_2 độc lập và $P(A_1) = P(A_2) = \frac{3}{4}$.

Xác suất của biến cố có đúng 1 cây hạt tròn trong 2 cây được lấy ra là:

$$\begin{aligned} P(A_1 \bar{A}_2 \cup \bar{A}_1 A_2) &= P(A_1 \bar{A}_2) + P(\bar{A}_1 A_2) = P(A_1) \cdot P(\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1) \cdot P(A_2) \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Câu 14: Một mạng cung cấp điện như hình vẽ:



Điện được cung cấp từ nơi sản xuất E đến nơi tiêu thụ F qua năm trạm biến áp A, B, C, D, G . Biết rằng các trạm biến áp này làm việc độc lập nhau, xác suất có sự cố kỹ thuật sau một thời gian hoạt động của các trạm A, B, C và D, G lần lượt là $0,2$ và $0,1$. Tính xác suất để nơi tiêu thụ F không mất điện.

Lời giải

Gọi F là biến cố nơi tiêu thụ F không mất điện.

A, B, C, D, G là biến cố các trạm biến áp A, B, C, D, G gặp sự cố kỹ thuật.

Ta có: $\overline{F} = (A \cap B \cap C) \cup (D \cap G)$.

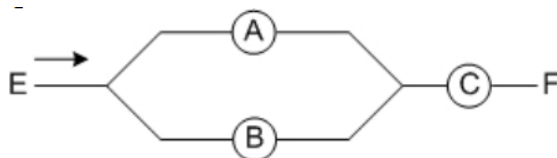
Suy ra: $P(\overline{F}) = P(ABC) + P(DG) - P(ABCDG)$

$$= P(A).P(B).P(C) + P(D).P(G) - P(A).P(B).P(C).P(D).P(G)$$

$$= 0,2.0,2.0,2 + 0,1.0,1 - 0,2.0,2.0,2.0,1.0,1 = 0,01792.$$

Vậy $P(F) = 1 - P(\overline{F}) = 0,98208$.

Câu 15: Một mạng cấp nước như hình vẽ:



Nước được cung cấp từ nguồn E đến F qua ba trạm bơm tăng áp A, B, C . Các trạm bơm tăng áp này làm việc độc lập nhau. Biết rằng xác suất để các trạm bơm A, B, C có sự cố sau một thời gian hoạt động lần lượt là $0,1$; $0,1$; $0,05$. Tính xác suất để vùng F bị mất nước.

Lời giải

Gọi F là biến cố nơi tiêu thụ F mất nước.

A, B, C là biến cố các trạm bơm A, B, C gặp sự cố kỹ thuật.

Ta có: $F = (A \cap B) \cup (C)$.

Suy ra: $P(F) = P(AB) + P(C) - P(ABC)$

$$= P(A).P(B) + P(C) - P(A).P(B).P(C)$$

$$= 0,1.0,1 + 0,05 - 0,1.0,1.0,05 = 0,0595.$$

Vậy $P(F) = 0,0595$.

Câu 16: Tại vòng chung kết Hội khỏe Phù Đổng lần X được tổ chức ở tỉnh Nam Định, vận động viên X thi đấu môn Điền kinh, vận động viên Y thi đấu môn Bơi lội. Biết rằng xác suất giành huy chương của hai vận động viên lần lượt là $0,8$ và $0,7$.

a) Tính xác suất để cả hai vận động viên đều đạt huy chương?

b) Sử dụng sơ đồ hình cây, hãy tính xác suất để:

- ☐ “Cả hai vận động viên đều không đạt huy chương”.
- ☐ “Vận động viên X đạt huy chương, vận động viên Y không đạt huy chương”.
- ☐ “Vận động viên X không đạt huy chương, vận động viên Y đạt huy chương”.

Lời giải

Gọi A là biến cố “Vận động viên X đạt huy chương”, ta có $P(A) = 0,8$.

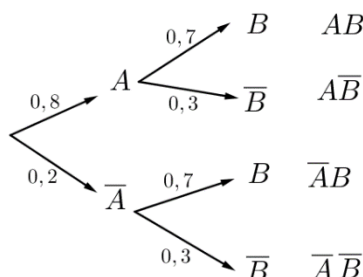
B là biến cố “Vận động viên Y đạt huy chương”, ta có $P(B) = 0,7$.

Khi đó, $A \cap B$ là biến cố “cả hai vận động viên đạt huy chương”.

Vì hai biến cố A, B độc lập nhau, nên ta có:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \times 0,7 = 0,56.$$

- a) Tính $P(\overline{AB})$, $P(\overline{A}B)$ và $P(\overline{A}\overline{B})$. Ta dùng sơ đồ hình cây để mô tả như sau:



Dựa vào sơ đồ hình cây, ta có: $P(\overline{AB}) = 0,2 \times 0,3 = 0,06$; $P(\overline{A}B) = 0,8 \times 0,3 = 0,24$.

$$P(\overline{A}\overline{B}) = 0,2 \times 0,7 = 0,14.$$

Câu 17: Một công ty Du Lịch lữ hành đón khách từ phía công ty đối tác, đoàn khách bao gồm khách đến từ nước Anh và khách đến từ nước Trung Quốc. Công ty chọn 3 phiên dịch viên từ một nhóm 20 phiên dịch viên. Trong đó có 11 phiên dịch viên tiếng Anh và 9 phiên dịch viên tiếng Trung Quốc, mỗi người chỉ phiên dịch được một thứ tiếng. Hỏi:

- Công ty có bao nhiêu cách chọn 3 cán bộ sao cho có cả cán bộ phiên dịch tiếng Anh và tiếng Trung Quốc?
- Xác suất của biến cố “Các cán bộ được chọn có cả phiên dịch tiếng Anh và tiếng Trung Quốc” là bao nhiêu?

c) Lời giải

a) Gọi: A là biến cố “Trong 3 phiên dịch viên có cả phiên dịch viên tiếng Anh và tiếng Trung Quốc”.

B là biến cố “Trong 3 phiên dịch viên có 1 phiên dịch viên tiếng Anh và 2 phiên dịch viên tiếng Trung Quốc”.

C là biến cố “Trong 3 phiên dịch viên có 2 phiên dịch viên tiếng Anh và 1 phiên dịch viên tiếng Trung Quốc”.

Ta có: $A = B \cup C$, $B \cap C = \emptyset$.

$$\text{Suy ra } n(A) = n(B) + n(C) = C_{11}^1 \cdot C_9^2 + C_{11}^2 \cdot C_9^1 = 891.$$

Vậy công ty có 891 cách chọn 3 phiên dịch viên thỏa yêu cầu bài toán.

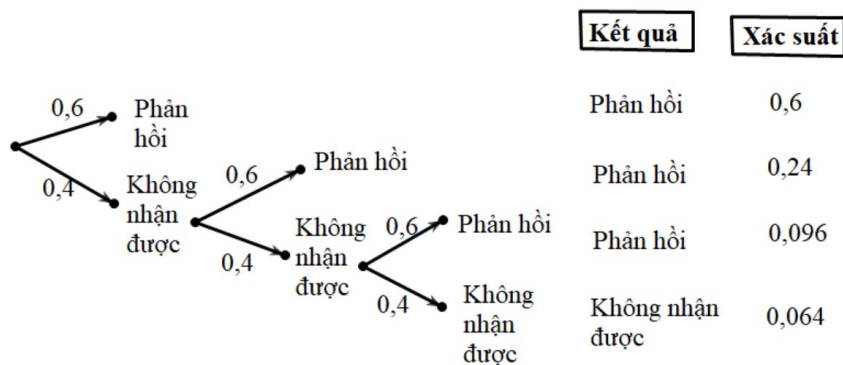
b) Số phần tử không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140$.

$$\text{Xác suất của biến cố } A \text{ là: } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{891}{1140} = \frac{297}{380}.$$

Câu 18: Trên một vùng biển, có hai chiếc tàu thủy A và B . Tàu thủy A truyền một tin đến tàu thủy B cho đến khi tàu thủy B phản hồi là đã nhận được. Biết khả năng tàu thủy B phản hồi đã nhận được tin ở mỗi lần A gửi là độc lập với nhau và xác suất phản hồi mỗi lần đều là $0,6$. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất tàu A phải gửi tin không quá 3 lần.

Lời giải

Vì các lần gửi độc lập, nên ta có sơ đồ hình cây như sau:



Vậy, xác suất để tàu thủy A phải gửi tin không quá 3 lần là:

$$0,6 + 0,24 + 0,096 = 0,936.$$

Câu 19: Một người gọi điện thoại nhưng quên mất chữ số cuối. Tính xác suất để người đó gọi đúng số điện thoại mà không phải thử quá hai lần.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 10 = 10$.

Để người đó gọi đúng số điện thoại mà không phải thử quá hai lần ta có 2 trường hợp:

TH1: Người đó gọi đúng ở lần thứ nhất.

TH2: Người đó gọi đúng ở lần thứ hai.

Gọi A_1 : " người đó gọi đúng ở lần thứ nhất " $\Rightarrow$ xác suất người đó gọi đúng là $P(A_1) = \frac{1}{10}$ và xác

suất người đó gọi không đúng là $P(\overline{A_1}) = \frac{9}{10}$.

Gọi A_2 : " người đó gọi đúng ở lần thứ hai " $\Rightarrow$ xác suất người đó gọi đúng là $P(A_2) = \frac{1}{9}$.

Gọi A : " người đó gọi đúng số điện thoại mà không phải thử quá hai lần " ta có $A = A_1 \cup \overline{A_1}A_2$

$$\Rightarrow P(A) = P(A_1) + P(\overline{A_1}) \cdot P(A_2) = \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{5}.$$

Câu 20: Trong kỳ thi Tốt nghiệp Trung học Phổ thông, bài thi môn Toán có 50 câu hỏi trắc nghiệm khách quan dạng bốn lựa chọn và chỉ có một lựa chọn đúng, mỗi câu đúng được 0,2 điểm. Sau khi làm chắc chắn đúng 30 câu hỏi, bạn An khoanh ngẫu nhiên đáp án 20 câu còn lại. Tính xác suất để bạn An được đúng 7 điểm.

Lời giải

Sau khi làm chắc chắn đúng 30 câu, thì bạn An được 6 điểm.

Vậy để được 7 điểm, thì bạn An phải làm đúng 5 câu trong 20 câu còn lại.

Chọn 5 câu đúng từ 20 câu có C_{20}^5 cách chọn.

Trong 4 đáp án, xác suất chọn đáp án đúng là $\frac{1}{4}$, xác suất chọn đáp án sai là $\frac{3}{4}$.

Áp dụng công thức nhân xác suất, ta có xác suất để bạn An được 7 điểm là:

$$C_{20}^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{15} \approx 0,2.$$

Câu 21: Có hai hộp. Hộp I đựng 4 gói quà màu đỏ và 6 gói quà màu xanh, hộp II đựng 2 gói quà màu đỏ và 8 gói quà màu xanh. Gieo một con súc sắc, nếu được mặt 6 chấm thì lấy một gói quà từ hộp I, nếu được mặt khác thì lấy một gói quà từ hộp II. Tính xác suất để lấy được gói quà màu đỏ.

Lời giải

Ta có xác suất để gieo con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm là $P(A) = \frac{1}{6}$ và xác suất để gieo con súc sắc không xuất hiện mặt 6 chấm là $P(\bar{A}) = \frac{5}{6}$.

Xác suất lấy từ hộp I được gói quà màu đỏ là $P(B_1) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$.

Xác suất lấy từ hộp II được gói quà màu đỏ là $P(B_2) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$.

Vậy xác suất để lấy được gói quà màu đỏ là $P(A).P(B_1) + P(\bar{A}).P(B_2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{7}{30}$.

Câu 22: Có hai bệnh nhân X và Y bị Tiểu đường type 2. Biết rằng biến chứng về suy thận của bệnh nhân X là 0.2 và của bệnh nhân Y là 0.1. Khả năng bị biến chứng suy thận của hai bệnh nhân là độc lập. Hãy tính xác suất của các biến cố:

- “Cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng suy thận”.
- “Cả hai bệnh nhân đều không bị biến chứng suy thận”.
- “Bệnh nhân X bị biến chứng suy thận, bệnh nhân Y không bị biến chứng suy thận”.
- Dùng sơ đồ hình cây để kiểm chứng các kết quả trên.

Lời giải

Gọi A là biến cố “Bệnh nhân X bị suy thận”. Ta có $P(A) = 0,2$ và $P(\bar{A}) = 0,8$.

Gọi B là biến cố “Bệnh nhân Y bị suy thận”. Ta có $P(B) = 0,1$ và $P(\bar{B}) = 0,9$.

Khi đó $A \cap B$ là biến cố “Cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng suy thận”.

Khi đó $\bar{A}\bar{B}$ là biến cố “Cả hai bệnh nhân đều không bị biến chứng suy thận”.

Khi đó $A\bar{B}$ là biến cố “Bệnh nhân X bị biến chứng suy thận, bệnh nhân Y không bị biến chứng suy thận”.

- a) Hai biến cố A, B độc lập nên

Ta có:

$$P(A \cap B) = P(AB) = P(A).P(B) = 0,2 \times 0,1 = 0,02.$$

- b) Hai biến cố $\bar{A}, \bar{B}$ độc lập nên

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A}).P(\bar{B}) = 0,8 \times 0,9 = 0,72.$$

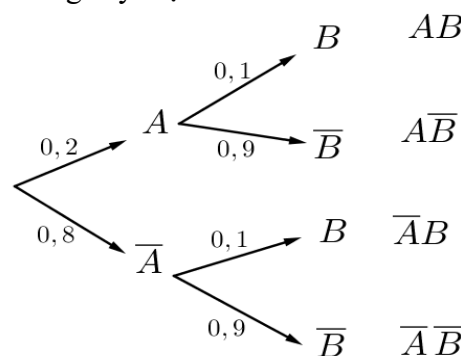
- c) Hai biến cố $A, \bar{B}$ độc lập nên

$$P(A\bar{B}) = P(A).P(\bar{B}) = 0,2 \times 0,9 = 0,18.$$

- d) Ta có sơ đồ hình cây như sau:

Theo sơ đồ hình cây, ta có: $P(AB) = 0,2 \times 0,1 = 0,02$; $P(\bar{A}\bar{B}) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$;

$$P(A\bar{B}) = 0,2 \times 0,9 = 0,18.$$



Câu 23: Một nghiên cứu cho thấy rằng bệnh COVID-19 có xác suất truyền bệnh là 0.85 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang; là 0.1 nếu tiếp xúc với người bệnh mà có đeo khẩu trang. Bạn X tiếp xúc với 1 người bệnh hai lần, trong đó có một lần đeo khẩu trang và một lần không đeo khẩu trang. Tính xác suất bạn X bị lây bệnh từ người bệnh mà bạn ấy tiếp xúc.

Lời giải

Gọi A là biến cố “Tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang”, ta có $P(A) = 0.85$.

Gọi B là biến cố “Tiếp xúc với người bệnh mà có đeo khẩu trang”, ta có: $P(B) = 0.1$.

Khi đó, AB là biến cố “Bạn X bị lây bệnh từ người bệnh mà bạn ấy tiếp xúc”.

Vì biến cố A, B độc lập nhau, nên ta có $P(AB) = P(A).P(B) = 0.85 \times 0.1 = 0.085$.

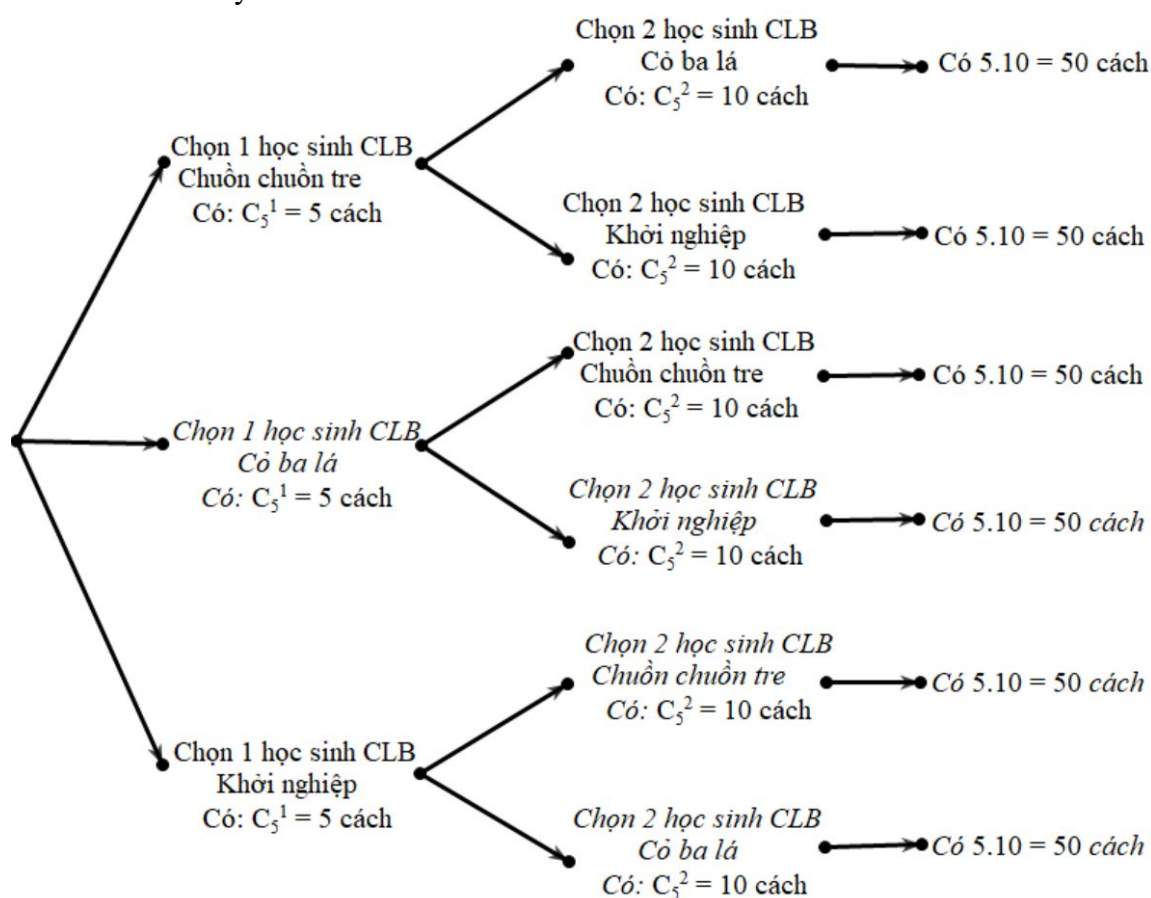
Câu 24: Trường Trung Học Thực Hành Đại học Sư phạm có 3 câu lạc bộ là: Chuồn chuồn tre, Cỏ Ba Lá và Khởi Nghiệp, mỗi câu lạc bộ có 5 học sinh. Ban giám hiệu muốn chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hội trại truyền thống học sinh, sinh viên thành phố. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn thuộc 2 câu lạc bộ.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = C_{15}^3 = 455$.

Gọi A là biến cố “Chọn được 3 học sinh thuộc hai câu lạc bộ”.

Ta có sơ đồ hình cây như sau:



Từ đó, ta có $n(A) = 6.50 = 300$.

Vậy xác suất của biến cố A là $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{60}{91}$.

Câu 25: Trường Trung Học Thực Hành Đại học Sư phạm có câu lạc bộ là: Chuồn chuồn tre có 15 học sinh, câu lạc bộ Truyền thông có 9 học sinh. Ban giám hiệu muốn chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia chiến dịch “Xuân tình nguyện” từ các câu lạc bộ trên. Tính xác suất để 3 học sinh được chọn cùng thuộc một câu lạc bộ.

Lời giải

Gọi A là biến cố “Ba học sinh được chọn cùng thuộc câu lạc bộ Chuồn chuồn tre”.

Gọi B là biến cố “Ba học sinh được chọn cùng thuộc câu lạc bộ Truyền thông”.

Khi đó, $A \cup B$ là biến cố “Ba học sinh được chọn cùng thuộc một câu lạc bộ”.

Do A và B xung khắc nên $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{C_{15}^3}{C_{24}^3} + \frac{C_9^3}{C_{24}^3} = \frac{49}{184}$.

Câu 26: Tại một trường THPT X, khảo sát cho thấy có 26% học sinh e ngại khi học môn Toán, 32% học sinh e ngại khi học môn Tiếng Anh, 14% học sinh e ngại khi học cả 2 môn Toán và Tiếng Anh. Hãy tính tỉ lệ học sinh e ngại khi học Toán hoặc e ngại khi học Tiếng Anh.

Lời giải

Gọi A là biến cố “Học sinh em ngại môn Toán”.

B là biến cố “Học sinh e ngại môn Tiếng Anh”.

Khi đó, AB là biến cố “Học sinh e ngại cả 2 môn Toán và Tiếng Anh”.

$A \cup B$ là biến cố “Học sinh e ngại môn Toán hoặc môn Tiếng Anh”.

Ta có: $P(A) = 26\% = 0,26$; $P(B) = 32\% = 0,32$; $P(AB) = 14\% = 0,14$.

Theo công thức cộng xác suất, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,26 + 0,32 - 0,14 = 0,44.$$

Câu 27: Đầu tiết học, cô giáo kiểm tra bài cũ bằng cách gọi lần lượt từng người từ đầu danh sách lớp lên bảng trả lời câu hỏi. Biết rằng các học sinh đầu tiên trong danh sách lớp là An, Bình, Cường với xác suất thuộc bài lần lượt là 0,9; 0,7 và 0,8. Cô giáo sẽ dừng kiểm tra sau khi đã có 2 học sinh thuộc bài. Tính xác suất cô giáo chỉ kiểm tra bài cũ đúng 3 bạn trên.

Lời giải

Gọi $P(A)$ là xác suất bạn An học thuộc bài.

$P(B)$ là xác suất bạn Bình học thuộc bài.

$P(C)$ là xác suất bạn Cường học thuộc bài.

$P(\alpha)$ là xác suất cô chỉ kiểm tra đúng 3 bạn trên.

Do cô giáo chỉ kiểm tra đúng 3 bạn và chỉ dừng lại khi có 2 bạn thuộc bài nên có bạn An hoặc Bình không thuộc bài và 2 bạn còn lại thuộc bài.

Vì vậy, ta có $P(\alpha) = P(\overline{A})P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C) = 0,272$.

Câu 28: Trong kỳ thi chọn học sinh giỏi toán khối 11 trường THPT Trường Chinh, có 52 học sinh đăng ký dự thi trong đó có một em tên Thành và một em tên Công. Ban tổ chức dự kiến sắp xếp làm 3 phòng thi (phòng 1 và phòng 2 có 18 thí sinh, phòng 3 có 16 thí sinh). Biết rằng phòng thi được sắp xếp một cách ngẫu nhiên, hãy tính xác suất để Thành và Công ngồi chung một phòng.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{52}^{18} \cdot C_{34}^{18}$.

Nếu Thành và Công ngồi chung phòng 1 hoặc phòng 2 thì $n(A_1) = 2 \times (C_{50}^{16} \cdot C_{34}^{18})$.

Nếu Thành và Công ngồi chung phòng 3 thì $n(A_2) = C_{50}^{18} \cdot C_{32}^{18}$.

Gọi A là biến cố “Thành và Công ngồi chung một phòng”.

Ta có $n(A) = n(A_1) + n(A_2) = 2 \times (C_{50}^{16} \cdot C_{34}^{18}) + C_{50}^{18} \cdot C_{32}^{18}$.

Vậy $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{71}{221}$.

Câu 29: Một khóa số với 3 mật khẩu là 3 số tăng dần từ 0 đến 9 có tổng bằng 10. Một người không nhớ mật khẩu mà chỉ nhớ tăng dần nên bấm bừa 3 số bất kì tăng dần. Khóa sẽ bị block nếu quá 3 lần

bấm sai. Tính xác suất để người này mở được khóa biết rằng người này chỉ nhớ được kết quả bấm của mình ở lần kế trước (trí nhớ ngắn hạn) để tránh kết quả đó cho lần sau.

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{10}^3 = 120$.

Trong đó có 8 mã đúng để mở khóa là:

$\{0;1;9\}, \{0;2;8\}, \{0;3;7\}, \{0;4;6\}, \{1;2;7\}, \{1;3;6\}, \{1;4;5\}, \{2;3;5\}$.

Gọi A là biến cố: “3 nút tăng dần và có tổng bằng 10”.

Ta có $n(A) = 8$.

Xác suất để bấm đúng: $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{8}{120}$.

Suy ra $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{8}{120} = \frac{112}{120}$.

Gọi B là biến cố: “người này mở được khóa”.

+ TH1: Khóa được mở ở ngay lần thứ nhất.

Xác suất của biến cố này là: $P_1 = \frac{8}{120}$.

+ TH2: Lần 1 bấm sai, lần 2 bấm đúng:

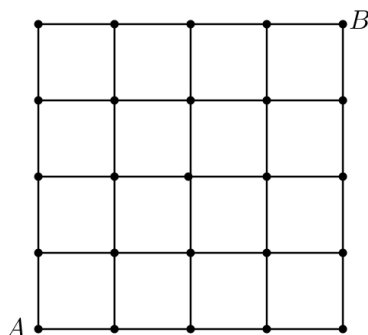
Xác suất của biến cố này là: $P_2 = \frac{112}{120} \cdot \frac{8}{119}$.

+ TH3: Lần 1, lần 2 đều sai, lần 3 bấm đúng:

Xác suất của biến cố này là: $P_3 = \frac{112}{120} \cdot \frac{111}{119} \cdot \frac{8}{118}$.

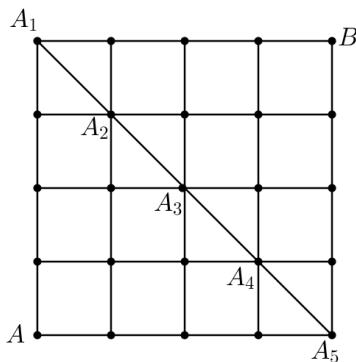
Vậy $P(B) = \frac{8}{120} + \frac{112}{120} \cdot \frac{8}{119} + \frac{112}{120} \cdot \frac{111}{119} \cdot \frac{8}{118} = \frac{189}{1003}$.

Câu 30: Cho một lưới ô vuông gồm 16 ô vuông nhỏ, mỗi ô vuông nhỏ có kích thước 1×1 (mét) như hình vẽ bên. Con kiến thứ nhất ở vị trí A muốn di chuyển lên vị trí B, con kiến thứ hai ở vị trí B muốn di chuyển xuống vị trí A. Biết rằng con kiến thứ nhất chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên phải hoặc lên trên, con kiến thứ hai chỉ có thể di chuyển ngẫu nhiên về phía bên trái hoặc xuống dưới (theo cạnh của các hình vuông). Hai con kiến xuất phát cùng một thời điểm và có cùng vận tốc di chuyển là 1 mét/phút. Tính xác suất để hai con kiến gặp nhau trên đường đi.



Lời giải

Nhận xét: Để di chuyển đến đích, mỗi con kiến phải có hành trình là $8m$. Vì hai con kiến xuất phát cùng thời điểm và cùng vận tốc di chuyển nên chúng chỉ có thể gặp nhau khi mỗi con kiến đều di chuyển được $4m$ (sau 4 phút). Do vậy chúng chỉ có thể gặp nhau tại các giao điểm trên đường chéo chính chạy từ góc trên bên trái đến góc dưới bên phải (A_1A_5).



Xác suất để sau 4 phút, con kiến thứ nhất đi đến vị trí A_1 là $P_1(A_1) = \frac{C_4^0}{2^4}$.

Xác suất để sau 4 phút, con kiến thứ hai đi đến vị trí A_1 là $P_2(A_1) = \frac{C_4^0}{2^4}$.

Xác suất để hai con kiến gặp nhau tại vị trí A_1 là:

$$P(A_1) = P_1(A_1) \cdot P_2(A_1) = \frac{C_4^0}{2^4} \cdot \frac{C_4^0}{2^4} = \frac{(C_4^0)^2}{256}.$$

Tương tự xác suất để hai con kiến gặp nhau tại các vị trí A_2, A_3, A_4, A_5 là:

$$P(A_2) = \frac{(C_4^1)^2}{256}, P(A_3) = \frac{(C_4^2)^2}{256}, P(A_4) = \frac{(C_4^3)^2}{256}, P(A_5) = \frac{(C_4^4)^2}{256}.$$

Vậy xác suất để hai con kiến gặp nhau là:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) + P(A_5) \\ &= \frac{(C_4^0)^2}{256} + \frac{(C_4^1)^2}{256} + \frac{(C_4^2)^2}{256} + \frac{(C_4^3)^2}{256} + \frac{(C_4^4)^2}{256} = \frac{35}{128}. \end{aligned}$$

Câu 31: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, chọn ngẫu nhiên một điểm mà tọa độ là số nguyên có giá trị tuyệt đối nhỏ hơn hoặc bằng 4, các điểm đều có xác suất chọn được là như nhau. Tính xác suất để chọn được một điểm mà khoảng cách từ điểm được chọn đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2.

Lời giải

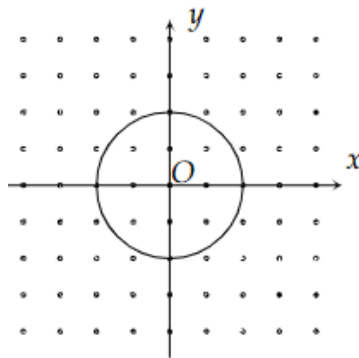
Số phần tử không gian mẫu là số điểm $M(x; y)$ sao cho $\{-4 \leq x, y \leq 4; x, y \in \mathbb{Z}\}$.

Suy ra $n(\Omega) = 9 \times 9 = 81$.

Gọi A là biến cố “điểm được chọn có khoảng cách đến gốc tọa độ nhỏ hơn hoặc bằng 2”.

Số phần tử của A là số điểm M nằm phía trong hoặc nằm trên đường tròn tâm O có bán kính $R = 2$. Dựa vào hình vẽ, ta có $n(A) = 13$.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{13}{81}.$$



Câu 32: Trong kỳ thi Tốt nghiệp Trung học phổ thông bài thi môn Toán có 50 câu hỏi trắc nghiệm khách quan dạng bốn lựa chọn và chỉ có một lựa chọn đúng, mỗi câu đúng được 0,2 điểm. Sau khi làm chắc chắn đúng 45 câu hỏi, bạn An khoanh ngẫu nhiên đáp án 5 câu còn lại. Tính xác suất để điểm thi Toán của bạn An không dưới 9,5 điểm.

Lời giải

Bạn An làm chắc chắn đúng 45 câu nên bạn An được 9 điểm.

Để điểm thi không dưới 9,5 điểm thì bạn An phải trả lời đúng từ 3 câu trở lên nữa.

Xác suất để trả lời đúng 1 câu hỏi là $\frac{1}{4}$ và trả lời sai là $\frac{3}{4}$.

TH1: Đúng thêm 3 câu: $P_1 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

TH2: Đúng thêm 4 câu: $P_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^1$.

TH3: Đúng thêm 5 câu: $P_3 = \left(\frac{1}{4}\right)^5$.

Vậy xác suất để bạn An được trên 9,5 điểm là: $P = P_1 + P_2 + P_3 = \frac{13}{1024} \approx 0,013$.

Câu 33: Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 50 câu. Mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng. Một học sinh chuẩn bị bài không tốt nên làm bài bằng cách: với mỗi câu, chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để học sinh đó trả lời sai cả 50 câu.

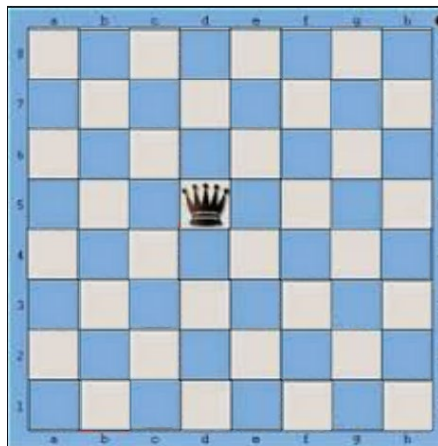
Lời giải

Xác suất để học sinh đó chọn đáp án đúng 1 câu là $\frac{1}{4}$ và chọn đáp án sai là $\frac{3}{4}$.

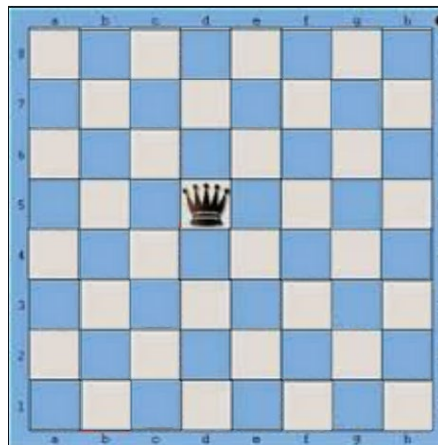
Khi đó, xác suất để học sinh làm sai cả 50 câu là:

$$\underbrace{\frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{3}{4}}_{50 \text{ số}} = \left(\frac{3}{4}\right)^{50} \approx 0,000000566321.$$

Câu 34: Một quân vua được đặt trên một ô giữa bàn cờ vua. Mỗi bước di chuyển, quân vua được chuyển sang một ô khác chung cạnh hoặc chung đỉnh với ô đang đứng (xem hình minh họa). Bạn Bình di chuyển quân vua ngẫu nhiên 3 bước. Tính xác suất sau 3 bước quân vua trở về ô xuất phát.



Lời giải



Tại mọi ô đang đứng, quân vua có 8 khả năng lựa chọn để bước sang ô bên cạnh.

Do đó không gian mẫu $n(\Omega) = 8^3$.

Gọi A là biến cố “sau 3 bước quân vua trở về ô xuất phát”.

Sau ba bước quân vua muốn quay lại ô ban đầu khi ông vua đi theo đường khép kín tam giác.

Chia hai trường hợp:

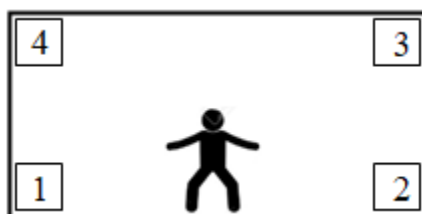
+ Từ ô ban đầu đi đến ô đen, đến đây có 4 cách để đi bước hai rồi về lại vị trí ban đầu.

+ Từ ô ban đầu đi đến ô trắng, đến đây có 2 cách để đi bước hai rồi về lại vị trí ban đầu.

Do số phần tử của biến cố A là $n(A) = 4.4 + 2.4 = 24$.

Vậy xác suất $P(A) = \frac{24}{8^3} = \frac{3}{64}$.

Câu 35: Trong trận đấu bóng đá giữa 2 đội Real Madrid và Barcelona, trọng tài cho đội Barcelona được hưởng một quả Penalty. Cầu thủ sút phạt ngẫu nhiên vào 1 trong bốn vị trí 1, 2, 3, 4 và thủ môn bay người cản phá ngẫu nhiên đến 1 trong 4 vị trí 1, 2, 3, 4 với xác suất như nhau (thủ môn và cầu thủ sút phạt đều không đoán được ý định của đối phương). Biết nếu cầu thủ sút và thủ môn bay cùng vào vị trí 1 (hoặc 2) thì thủ môn cản phá được cú sút đó, nếu cùng vào vị trí 3 (hoặc 4) thì xác suất cản phá thành công là 50%. Tính xác suất của biến cố “cú sút đó không vào lưới”?



Lời giải

Cách 1:

Số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = 4.4 = 16$.

Gọi A là biến cố “Cú sút đó không vào lưới”.

Khi đó $\bar{A}$ là biến cố “Cú sút đó vào lưới”.

Số phần tử của $n(\bar{A})$ là :

– Trường hợp 1: Cầu thủ sút vào vị trí 1 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại.

Cầu thủ có 1 cách sút.

Thủ môn có 3 cách bay.

Do đó, có 3 khả năng xảy ra.

– Trường hợp 2: Cầu thủ sút vào vị trí 2 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại.

Cầu thủ có 1 cách sút.

Thủ môn có 3 cách bay.

Do đó, có 3 khả năng xảy ra.

– Trường hợp 3: Cầu thủ sút vào vị trí 3 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại.

Cầu thủ có 1 cách sút.

Thủ môn có 3 cách bay.

Do đó, có 3 khả năng xảy ra.

– Trường hợp 4: Cầu thủ sút vào vị trí 4 thủ môn bay vào 1 trong 3 vị trí còn lại.

Cầu thủ có 1 cách sút.

Thủ môn có 3 cách bay.

Do đó, có 3 khả năng xảy ra.

– Trường hợp 5: Cầu thủ sút vào vị trí 3 thủ môn bay vào vị trí 3.

Cầu thủ có 1 cách sút.

Thủ môn có 1 cách bay.

Do đó, có 1 khả năng xảy ra.

– Trường hợp 6: Cầu thủ sút vào vị trí 4 thủ môn bay vào vị trí 4.

Cầu thủ có 1 cách sút.

Thủ môn có 1 cách bay.

Do đó, có 1 khả năng xảy ra.

Khi đó $n(\bar{A}) = 4.3 + 2.1 = 14$.

Xác suất xảy ra biến cố $\bar{A}$ là $p(\bar{A}) = \frac{4.3}{16} + \frac{2.1}{16} = \frac{13}{16}$ (Do 2 trường hợp 5, 6 thì xác suất xảy ra chỉ là 50%).

Vậy $p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{13}{16} = \frac{3}{16}$.

Cách 2:

Gọi A_i là biến cố “cầu thủ sút phạt vào vị trí i ”

B_i là biến cố “thủ môn bay người cản phá vào vị trí thứ i ”

Và C là biến cố “Cú sút phạt không vào lưới”

Dễ thấy $P(A_i) = P(B_i) = \frac{1}{4}$.

Ta có $P(C) = P(A_1)P(B_1) + P(A_2)P(B_2) + \frac{1}{2}P(A_3)P(B_3) + \frac{1}{2}P(A_4)P(B_4)$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{16}.$$

Câu 36: Ở loài cá, cho hai giống cá chép mắt đen thuần chủng và mắt đỏ thuần chủng giao phối với nhau được F1 toàn cá kiểng mắt đen. Lại cho cá chép F1 giao phối với nhau được một đàn cá con mới. Chọn ra ngẫu nhiên 2 con trong đàn cá con mới. Ước lượng xác suất của biến cố “Có ít nhất 1 con cá mắt đen trong 2 con cá đó”.

Lời giải

Quy ước gene A: mắt đen và gene a: mắt đỏ.

Ở thế hệ F2, ba kiểu gene: AA, Aa, aa xuất hiện với tỉ lệ 1: 2: 1 nên tỉ lệ mắt đen so với mắt đỏ là 3:1.

Trong đàn cá mới, xác suất để 1 con cá mắt đen là $\frac{3}{4}$ và con cá mắt đỏ là $\frac{1}{4}$.

Gọi A là biến cố “có đúng 1 con cá mắt đen trong 2 con được chọn”: $P(A) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}$.

Gọi B là biến cố “có 2 con cá mắt đen trong 2 con được chọn”: $P(B) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{9}{16}$.

Khi đó, $A \cup B$ là biến cố “có ít nhất 1 con cá mắt đỏ trong 2 con được chọn”

Do A và B là hai biến cố xung khắc nên: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{16} + \frac{9}{16} = \frac{3}{4}$.