

CHUYÊN ĐỀ 8. ĐƯỜNG THẲNG

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Phương trình tham số của đường thẳng

- Vector \vec{u} được gọi là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của \vec{u} song song hoặc trùng với Δ .

- Hệ $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ ($a^2 + b^2 > 0$ và t là tham số) được gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b)$ làm vectơ chỉ phương.

2. Phương trình tổng quát của đường thẳng

- Vector \vec{n} được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của \vec{n} vuông góc với Δ .

Nhận xét: Nếu đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a; b)$ thì vectơ $\vec{n} = (-b; a)$ là một vectơ pháp tuyến của Δ và ngược lại.

- Phương trình $ax + by + c = 0$ (a và b không đồng thời bằng 0) được gọi là phương trình tổng quát của đường thẳng.

3. Lập phương trình đường thẳng

a) Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ pháp tuyến Phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{n} = (a; b)$ ($\vec{n} \neq \vec{0}$) làm vectơ pháp tuyến là $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

b) Lập phương trình đường thẳng đi qua một điểm và biết vectơ chỉ phương

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (a; b)$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) làm vectơ

chỉ phương là: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ (t là tham số).

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}.$$

c) Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(x_0; y_0), B(x_1; y_1)$ là:

$$\begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases} \text{ (là tham số).}$$

Nếu $x_1 - x_0 \neq 0$ và $y_1 - y_0 \neq 0$ thì ta còn có thể viết phương trình của đường thẳng Δ ở dạng:

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_0}.$$

Chú ý: Đường thẳng Δ đi qua hai điểm $A(a; 0)$ và $B(0; b)$ ($ab \neq 0$) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.

4. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

a) Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1, Δ_2 lần lượt có vector chỉ phương là \vec{u}_1, \vec{u}_2 . Khi đó

- Δ_1 cắt Δ_2 khi và chỉ khi \vec{u}_1, \vec{u}_2 không cùng phương.

- Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi \vec{u}_1, \vec{u}_2 cùng phương và có một điểm thuộc một đường thẳng mà không thuộc đường thẳng còn lại.

- Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi \vec{u}_1, \vec{u}_2 cùng phương và có một điểm thuộc cả hai đường thẳng đó.

Chú ý: Δ_1 vuông góc với Δ_2 khi và chỉ khi \vec{u}_1, \vec{u}_2 vuông góc với nhau.

b) Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có phương trình lần lượt là: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$; $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.

Xét hệ phương trình:
$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Khi đó

- Δ_1 song song với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) vô nghiệm.

- Δ_1 trùng với Δ_2 khi và chỉ khi hệ (I) có vô số nghiệm.

5. Góc giữa hai đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vector chỉ phương lần lượt là

$\vec{u}_1 = (a_1; b_1), \vec{u}_2 = (a_2; b_2)$. Khi đó $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Nhận xét

- $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$.

- Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có vector pháp tuyến lần lượt là \vec{n}_1, \vec{n}_2 . Ta cũng có:

$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

6. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy , cho đường thẳng Δ có phương trình $ax + by + c = 0$ ($a^2 + b^2 > 0$) và điểm $M(x_0; y_0)$. Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ , kí hiệu là $d(M, \Delta)$, được tính bởi công thức

sau: $d(M, \Delta) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Chú ý: Nếu $M \in \Delta$ thì $d(M, \Delta) = 0$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng Δ ở Hình 38 biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) để tham gia một phòng tập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).

- Viết phương trình của đường thẳng Δ .
- Giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?
- Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.

Câu 2: Theo Google Maps, sân bay Nội Bài có vĩ độ $21,2^\circ$ Bắc, kinh độ $105,8^\circ$ Đông, sân bay Đà Nẵng có vĩ độ $16,1^\circ$ Bắc, kinh độ $108,2^\circ$ Đông. Một máy bay, bay từ Nội Bài đến sân bay Đà Nẵng. Tại thời điểm t giờ, tính từ lúc xuất phát, máy bay ở vị trí có vĩ độ x° Bắc, kinh độ y° Đông được tính theo công thức

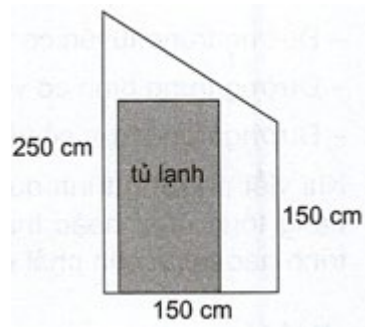
$$\begin{cases} x = 21,2 - \frac{153}{40}t \\ y = 105,8 + \frac{9}{5}t \end{cases}$$

- Hỏi chuyến bay từ Hà Nội đến Đà Nẵng mất mấy giờ?
- Tại thời điểm 1 giờ kể từ lúc cất cánh, máy bay đã bay qua vĩ tuyến 17° Bắc chưa?

Câu 3: Một người đang viết chương trình cho trò chơi bóng đá rô bốt. Gọi $A(-1;1), B(9;6), C(5;-3)$ là ba vị trí trên màn hình.

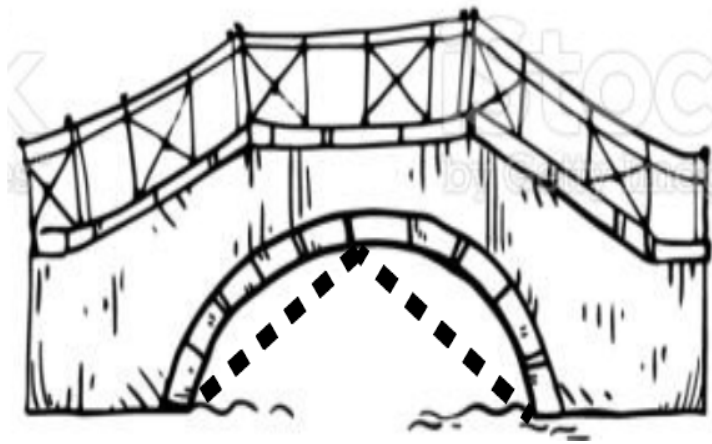
- Viết phương trình các đường thẳng AB, AC, BC .
- Tính góc hợp bởi hai đường thẳng AB và AC .
- Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC .

Câu 4: Nhà bạn Nam định đổi tủ lạnh và dự định kê vào vị trí dưới cầu thang. Biết vị trí định kê tủ lạnh có mặt cắt là một hình thang vuông với hai đáy lần lượt là 150 cm và 250 cm , chiều cao là 150 cm (như hình vẽ). Bố mẹ bạn Nam định mua một 250 cm tủ lạnh 2 cánh (Side by side) có chiều cao là 183 cm và bề ngang 90 cm . Bằng cách sử dụng tọa độ trong mặt phẳng, em hãy giúp Nam tính xem bố mẹ bạn Nam có thể kê vừa chiếc tủ lạnh vào vị trí cần kê không?



Câu 5: Một trạm viễn thông S có tọa độ $(5;1)$. Một người đang ngồi trên chiếc xe khách chạy trên đoạn cao tốc có dạng một đường thẳng Δ có phương trình $12x + 5y - 20 = 0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông S . Biết rằng mỗi đơn vị độ dài tương ứng với 1 km .

Câu 6: Trong giai đoạn sửa chữa cầu, nhà thầu thi công gia cố thêm hệ thống chịu tải là 2 thanh sắt có độ dài bằng nhau (được vẽ nét đứng trong hình).

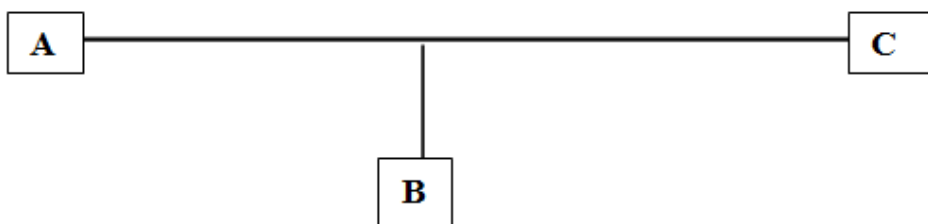


Biết phân cong của cây cầu là nửa đường cong bán kính là 2 mét. Xác định phương trình đường thẳng của những thanh chịu tải.

Câu 7: Trong mặt phẳng tọa độ, một thiết bị âm thanh được phát từ vị trí $A(4;4)$. Người ta dự định đặt một máy thu tín hiệu trên đường thẳng có phương trình $x - y - 3 = 0$. Hỏi máy thu đặt ở vị trí nào sẽ nhận được tín hiệu sớm nhất.

Câu 8: Trong sinh hoạt tập thể Hội trại chào mừng ngày thành lập Đoàn TNCSHCM 26/3, toàn bộ các đoàn viên tham gia sinh hoạt tập trung thành hình tròn, trong đó có Bình và An; đồng thời người quản trò đứng ở vị trí tâm của đường tròn là Tâm. Biết vị trí tâm đứng có tọa độ là $T(3;2)$, còn Bình và An thuộc đường thẳng $d : 3x - 4y + 9 = 0$, đồng thời vị trí 3 người Tâm, Bình, An tạo thành tam giác vuông. Tính khoảng cách từ người quản trò đến một đoàn viên bất kỳ còn lại đang tham gia trò chơi.

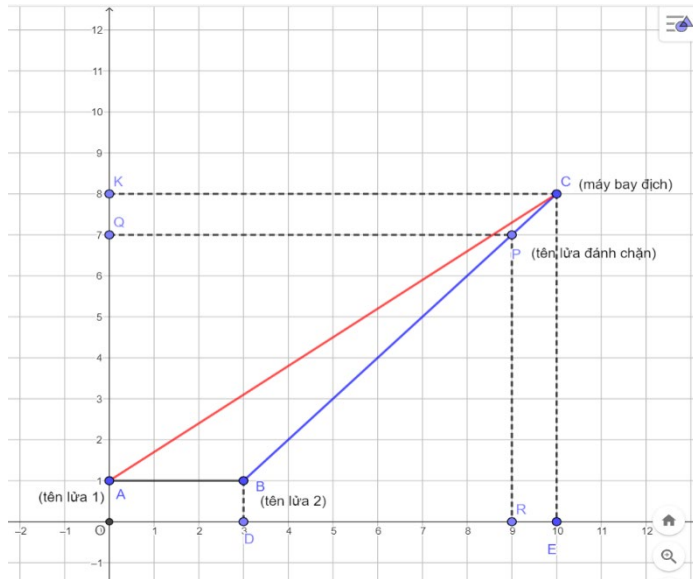
Câu 9: Hai bạn An và Bảo cùng học chung trường THPT Nguyễn Đình Chiểu. Nhà An tại vị trí điểm $A(4;-1)$, trường học của hai bạn ở vị trí điểm $C(12;8)$. Mỗi ngày bạn An đi học chạy xe ngang khu vực nhà bạn Bảo ở vị trí điểm $B(2;5)$. Để tiện cho việc bạn An cùng đón đến trường, bạn Bảo đi một đoạn đường từ nhà ra đường. Hỏi bạn Bảo phải đi một đoạn đường ngắn nhất là bao nhiêu đơn vị độ dài để đi cùng xe với bạn An đến trường học?



Câu 10: Hai bạn Tình và Thương chơi với nhau rất thân, từ nhà Tình đến nhà An phải đi qua đường Trần Hưng Đạo có phương trình $d : 2x + y + 5 = 0$. Giả sử nhà bạn Tình có tọa độ $A(1;-3)$ và nhà bạn Thương có tọa độ $B(-4;2)$. Tình đến nhà Thương theo đường thẳng với mục tiêu là chọn đường đi ngắn nhất. Hỏi Tình phải qua điểm có tọa độ bao nhiêu trên đường Trần Hưng Đạo.

Câu 11: Một chiếc Phà chở khách qua sông từ điểm $A(3;4)$ đến điểm $B(3;50)$ bên kia sông. Nhưng vì có gió và nước chảy mạnh nên chiếc Phà qua bên kia sông tại điểm $C(38;50)$. Tính góc lệch của con thuyền so với lúc dự tính ban đầu.

Câu 12: Tại một trạm rada của bộ đội phòng không, rada cảnh giới đã phát hiện được một máy bay xâm nhập trái phép vào không phận. Tại thời điểm đó có hai quả tên lửa phòng không sẵn sàng xuất kích bắn hạ mục tiêu, hai quả tên lửa cách nhau 3 km (quả thứ 2 cách quả 1 3 km) mỗi quả đặt trên bệ phóng cách mặt đất 1 m . Sau khi tính toán chỉ ra các thông số khi máy bay cách vị trí quả tên lửa thứ 2 là $7\sqrt{2}\text{ km}$ và bay ở độ cao 8 km so với mặt đất thì hai quả tên lửa sau khi rời bệ phóng sẽ tiêu diệt mục tiêu với **góc bắn** (*tham khảo hình vẽ minh họa*) đã xác định. Cùng thời điểm này rada phát hiện một tên lửa đánh chặn (do máy bay địch phóng) bay ở độ cao 7 km và cách tên lửa thứ hai là $6\sqrt{2}\text{ km}$ và cách máy bay $\sqrt{2}\text{ km}$. Trong hai quả tên lửa được bắn ra tên lửa nào hạ được mục tiêu? (*Giả sử rằng quỹ đạo bay tên lửa bay theo đường thẳng*)



CHỦ ĐỀ 8. ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1. Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng Δ ở Hình 38 biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) để tham gia một phòng tập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).

- Viết phương trình của đường thẳng Δ .
- Giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?
- Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.

Lời giải

a. Δ qua $A(7;5)$ và $B(0;1,5)$, nhận $\overline{AB}(-7;-3,5)$ làm vectơ chỉ phương có phương trình là:

$$\Delta: \begin{cases} x = 7 - 7t \\ y = 5 - 3,5t \end{cases} \quad (t \text{ là tham số}).$$

b. Giao điểm của đường thẳng Δ với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa là: khoản phí tham gia ban đầu mà người tập phải trả.

c. Tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng là:

$$x = 12 \text{ thay vào phương trình của } \Delta \text{ ta được: } \begin{cases} 12 = 7 - 7t \\ y = 5 - 3,5t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12 = 7 - 7t \\ y = 5 - 3,5t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-5}{7} \\ y = 5 - 3,5 \cdot \left(\frac{-5}{7}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-5}{7} \\ y = 7,5 \end{cases}$$

Vậy Tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng là : 7,5 triệu đồng.

Câu 2. Theo Google Maps, sân bay Nội Bài có vĩ độ $21,2^\circ$ Bắc, kinh độ $105,8^\circ$ Đông, sân bay Đà Nẵng có vĩ độ $16,1^\circ$ Bắc, kinh độ $108,2^\circ$ Đông. Một máy bay, bay từ Nội Bài đến sân bay Đà Nẵng. Tại thời điểm t giờ, tính từ lúc xuất phát, máy bay ở vị trí có vĩ độ x° Bắc, kinh độ y° Đông được tính theo công thức

$$\begin{cases} x = 21,2 - \frac{153}{40}t \\ y = 105,8 + \frac{9}{5}t \end{cases}$$

- Hỏi chuyến bay từ Hà Nội đến Đà Nẵng mất mấy giờ?
- Tại thời điểm 1 giờ kể từ lúc cất cánh, máy bay đã bay qua vĩ tuyến $17 (17^\circ B?c)$ chưa?

Lời giải

a. Nếu máy bay đến Đà Nẵng thì $x = 16,1$ và $y = 108,2$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} 16,1 = 21,2 - \frac{153}{40}t \\ 108,2 = 105,8 + \frac{9}{5}t \end{cases} \Leftrightarrow t = \frac{4}{3}$$

Vậy chuyến bay từ Hà Nội đến Đà Nẵng mất gần 1,33 giờ

b. Tại thời điểm 1 giờ thì $t = 1$ thay vào phương trình có:

$$\begin{cases} x = 21,2 - \frac{153}{40} \cdot 1 = 17,375 \\ y = 105,8 + \frac{9}{5} \cdot 1 = 107,6 \end{cases}$$

Vậy tại thời điểm 1 giờ, máy bay đã qua vĩ tuyến 17.

Câu 3. Một người đang viết chương trình cho trò chơi bóng đá rô bốt. Gọi $A(-1;1), B(9;6), C(5;-3)$ là ba vị trí trên màn hình.

- Viết phương trình các đường thẳng AB, AC, BC .
- Tính góc hợp bởi hai đường thẳng AB và AC .
- Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC .

Lời giải

a. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (10;5), \overrightarrow{AC} = (6;-4), \overrightarrow{BC} = (-4;-9)$

Phương trình đường thẳng AB đi qua điểm $A(-1;1)$ và nhận $\vec{n}_1 = (5;-10)$ là vectơ pháp tuyến là:
 $5(x+1) - 10(y-1) = 0 \Leftrightarrow 5x - 10y + 15 = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 3 = 0$

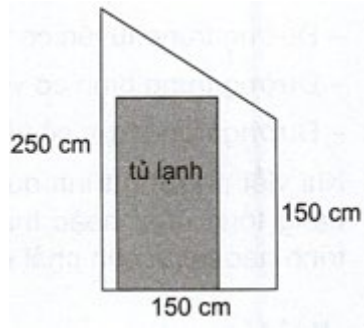
Phương trình đường thẳng AC đi qua điểm $A(-1;1)$ và nhận $\vec{n}_2 = (4;6)$ là vectơ pháp tuyến là:
 $4(x+1) + 6(y-1) = 0 \Leftrightarrow 4x + 6y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 1 = 0$

Phương trình đường thẳng BC đi qua điểm $B(9;6)$ và nhận $\vec{n}_3 = (9;-4)$ là vectơ pháp tuyến là:
 $9(x-9) - 4(y-6) = 0 \Leftrightarrow 9x - 4y - 57 = 0$

b. $\cos(AB, AC) = \frac{|1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{4}{\sqrt{65}} \Rightarrow (AB, AC) \approx 60^\circ 15'$

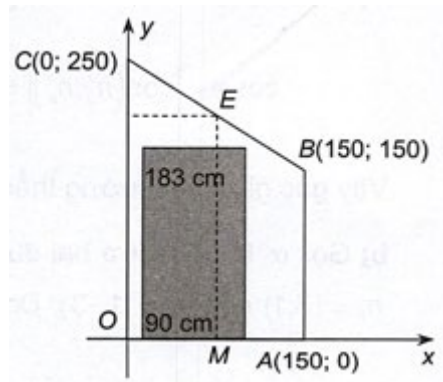
c. $d(A; BC) = \frac{|9 \cdot (-1) - 4 \cdot 1 - 57|}{\sqrt{9^2 + (-4)^2}} = \frac{70}{\sqrt{97}}$

Câu 4. Nhà bạn Nam định đổi tủ lạnh và dự định kê vào vị trí dưới cầu thang. Biết vị trí định kê tủ lạnh có mặt cắt là một hình thang vuông với hai đáy lần lượt là 150 cm và 250 cm , chiều cao là 150 cm (như hình vẽ). Bố mẹ bạn Nam định mua một 250 cm tủ lạnh 2 cánh (Side by side) có chiều cao là 183 cm và bề ngang 90 cm . Bằng cách sử dụng tọa độ trong mặt phẳng, em hãy giúp Nam tính xem bố mẹ bạn Nam có thể kê vừa chiếc tủ lạnh vào vị trí cần kê không?



Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó để tận dụng tối đa chiều cao có thể khi kê tủ lạnh thì bố mẹ bạn Nam sẽ kê tủ sát vào trục Oy . Do đó để kê được một chiếc tủ lạnh 2 cánh với bề ngang 90 cm thì chiều cao của tủ phải nhỏ hơn tung độ của điểm E thuộc đường thẳng BC với hoành độ điểm E bằng 90.

$$\text{Ta có } B(150; 150), C(0; 250) \Rightarrow \overrightarrow{BC} = (-150; 100) \Rightarrow \overrightarrow{n_{BC}} = (100; 150).$$

Phương trình đường thẳng BC là: $100(x - 0) + 150(y - 250) = 0 \Leftrightarrow 2x + 3y - 750 = 0$.

Điểm E thuộc BC có hoành độ bằng 90 nên tung độ của E tính theo công thức $2 \cdot 90 + 3y_E - 750 = 0 \Rightarrow y_E = 190$.

Do $183 \text{ cm} < 190 \text{ cm}$ nên bố mẹ bạn Nam có thể kê chiếc tủ lạnh có bề ngang là 90 cm và chiều cao 183 cm .

Câu 5. Một trạm viễn thông S có tọa độ $(5; 1)$. Một người đang ngồi trên chiếc xe khách chạy trên đoạn cao tốc có dạng một đường thẳng Δ có phương trình $12x + 5y - 20 = 0$. Tính khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông S . Biết rằng mỗi đơn vị độ dài tương ứng với 1 km .

Lời giải

Khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông S chính là khoảng cách từ S đến đường thẳng

$$\Delta. \text{ Ta có: } d(S, \Delta) = \frac{|12 \cdot 5 + 5 \cdot 1 - 20|}{\sqrt{12^2 + 5^2}} = \frac{45}{13} \approx 3,46(\text{km}).$$

CHUYÊN ĐỀ 9: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Phương trình đường tròn

– Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

- Ta có thể viết phương trình đường tròn về dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Một phương trình có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 > c$, lúc này đường tròn đó có tâm $I(a;b)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

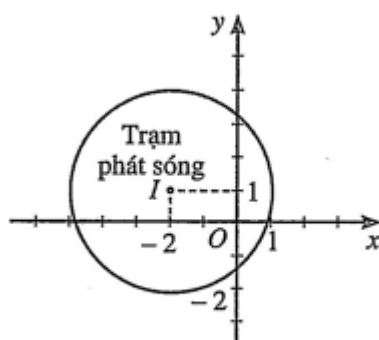
Cho đường tròn (C) tâm $I(a;b)$ và điểm $M_0(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn đó. Gọi Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M_0(x_0;y_0)$. Khi đó, ta có:

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM_0} = (x_0 - a; y_0 - b)$.

- Phương trình tiếp tuyến Δ là: $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Hình 10 mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng tọa độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).



Hình 10

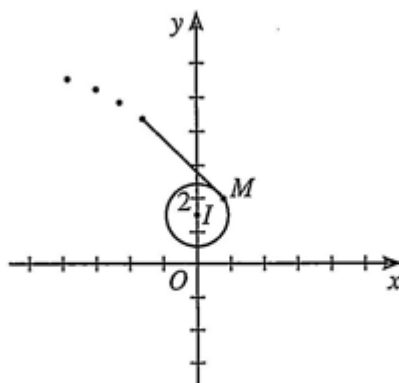
a) Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km .

b) Nếu người dùng điện thoại ở vị trí A có tọa độ Giải thích.

c) Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí B có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 2: Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường

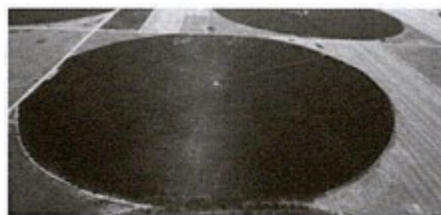
tròn tâm $I\left(0; \frac{3}{2}\right)$ bán kính $0,8$ trong mặt phẳng tọa độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm $M\left(\frac{\sqrt{39}}{10}; 2\right)$, đĩa được ném đi (Hình 11).



Hình 11

Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?

Câu 3: Một nông trại tưới nước theo phương pháp vòi phun xoay vòng trung tâm như Hình 3. Cho biết tâm một vòi phun được đặt tại tọa độ $(12; -9)$ và vòi có thể phun xa tối đa 36 m . Hãy viết phương trình đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà vòi nước có thể phun tới.



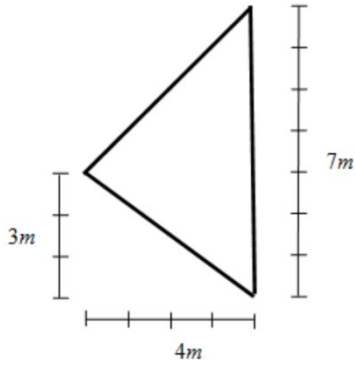
Hình 3

Câu 4: Một cái cổng hình bán nguyệt rộng $6,8\text{ m}$, cao $3,4\text{ m}$. Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng;

b) Một chiếc xe tải rộng $2,4\text{ m}$ và cao $2,5\text{ m}$ đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng được hay không?

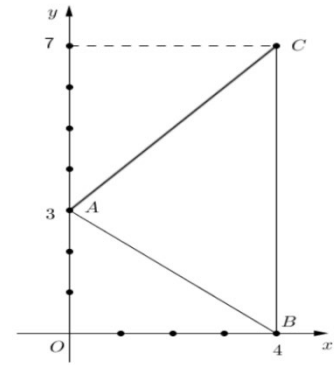
Câu 5: Có một công viên nhỏ hình tam giác như Hình 1. Người ta dự định đặt một cây đèn để chiếu sáng toàn bộ công viên. Để công việc tiến hành thuận lợi, người ta đo đạc và mô phỏng các kích thước công viên như Hình 2. Thiết lập một hệ trục Oxy như Hình 3, khi đó các đỉnh của công viên có tọa độ lần lượt là $A(0;3)$, $B(4;0)$, $C(4;7)$. Gọi I là điểm đặt cây đèn sao cho đèn chiếu sáng toàn bộ công viên. Vây cần đặt I ở vị trí có tọa độ bao nhiêu?



Hình 1

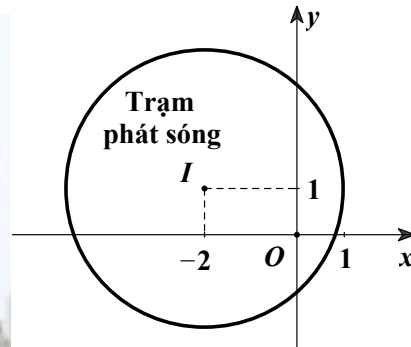


Hình 2 (nguồn: Google)

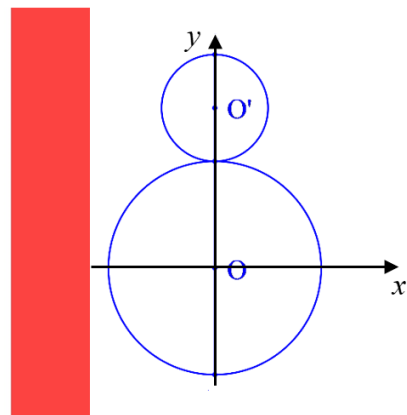


Hình 3

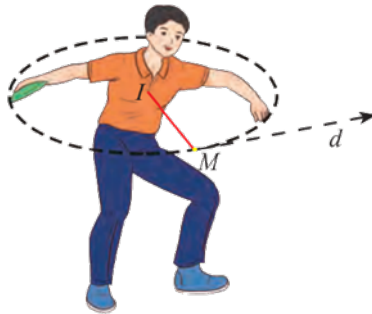
Câu 6: Hình vẽ bên dưới mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng tọa độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét). Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.



Câu 7: Ở các nước xứ lạnh, vào mùa Đông thường có tuyết rơi dày đặc khắp các con đường, trẻ em tại đây rất thích đắp hình dạng của người tuyết. Có thể xem phần thân dưới và thân trên của người tuyết là hai hình cầu tiếp xúc nhau. Vào ba đêm ta dùng một chiếc đèn pin soi vuông góc với người tuyết thì được hình ảnh là hai hình tròn tiếp xúc nhau như hình vẽ. Em hãy viết phương trình đường tròn lớn và đường tròn nhỏ biết kích thước của hai viên tuyết cần đắp để được một người tuyết cao 1,8m có đường kính của phần thân dưới phải gấp đôi đường kính của phần thân trên người tuyết (theo đơn vị xen-ti-mét).

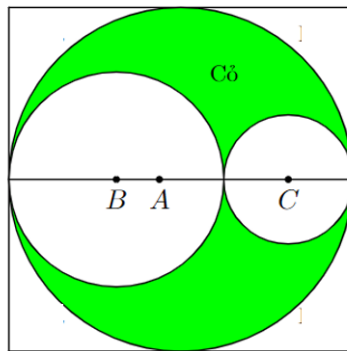


Câu 8: Một vận động ném đĩa đã vung đĩa theo một đường tròn (C) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{144}$. Khi đó, người đó vung đĩa đến vị trí điểm $M\left(\frac{17}{12}; 2\right)$ thì buông đĩa. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M .



Câu 9: Tọa độ trong hệ thống kiểm soát phòng không trong không quân Việt Nam của một hệ thống radar trong phạm vi bán kính 10 km trở lại. Nếu một vật thể lạ di chuyển qua hệ thống trên không lý do sẽ có nguy cơ bị bắn hạ để bảo vệ an toàn trên vùng trời. Chọn hệ quy chiếu điểm ngắm là gốc tọa độ O . Hỏi máy bay đang bay ở tọa độ $M(6; 7)$ trên bầu trời có bị lọt vào tầm ngắm không? Vì sao?

Câu 10: Thiết kế khu vườn Hạnh Phúc hình vuông cạnh 10m như hình vẽ.



Phần được tô đậm dùng để trồng cỏ, phần còn lại lát gạch. Biết mỗi mét vuông trồng cỏ chi phí 100 nghìn đồng, mỗi mét vuông lát gạch chi phí 300 nghìn đồng. Khi diện tích phần lát gạch là nhỏ nhất thì tổng chi phí thi công vườn hoa Hạnh Phúc bằng (làm tròn đến hàng nghìn)?

CHUYÊN ĐỀ 9: PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Phương trình đường tròn

– Phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính R là: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

- Ta có thể viết phương trình đường tròn về dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$. Một phương trình có dạng $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2 + b^2 > c$, lúc này đường tròn đó có tâm $I(a;b)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

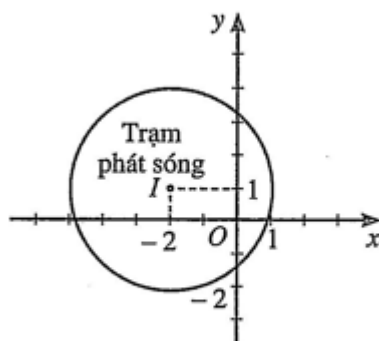
Cho đường tròn (C) tâm $I(a;b)$ và điểm $M_0(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn đó. Gọi Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M_0(x_0;y_0)$. Khi đó, ta có:

- Đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0;y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\overline{IM_0} = (x_0 - a; y_0 - b)$.

- Phương trình tiếp tuyến Δ là: $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Hình 10 mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng tọa độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).



Hình 10

- Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km .
- Nếu người dùng điện thoại ở vị trí A có tọa độ Giải thích.
- Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí B có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

a) Phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng là:

$$[x - (-2)]^2 + (y - 1)^2 = 3^2 \Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 9.$$

b) Khoảng cách từ tâm $I(-2;1)$ đến điểm $A(-1;3)$ là: $IA = \sqrt{[-1 - (-2)]^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{5}(\text{km})$.

Vì $IA < 3\text{ km}$ nên điểm A nằm trong đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, suy ra người dùng điện thoại ở vị trí A có thể sử dụng dịch vụ của trạm.

c) Khoảng cách từ tâm $I(-2;1)$ đến điểm $B(-3;4)$ là: $IB = \sqrt{[-3 - (-2)]^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{10}(\text{km})$

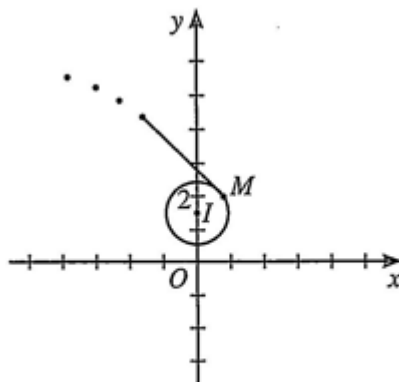
Vì $IB > 3\text{ km}$ nên điểm B nằm ngoài đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng.

Xét M là điểm bất kì thuộc vùng phủ sóng, khi đó M nằm trong hoặc nằm trên đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng nên $IM \leq 3\text{ km}$. Khoảng cách tính theo đường chim bay từ người ở vị trí B đến vùng phủ sóng là BM .

Ta có: $BM \geq IB - IM \geq \sqrt{10} - 3$ (Vì $IM \leq 3$). Suy ra BM nhỏ nhất bằng $\sqrt{10} - 3(\text{km})$ khi và chỉ khi M là giao điểm của đoạn thẳng IB với đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng.

Vậy khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí B di chuyển được tới vùng phủ sóng tính theo đường chim bay là $\sqrt{10} - 3 \approx 0,2(\text{km})$.

Câu 2: Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm $I\left(0; \frac{3}{2}\right)$ bán kính 0,8 trong mặt phẳng tọa độ Oxy (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm $M\left(\frac{\sqrt{39}}{10}; 2\right)$, đĩa được ném đi (Hình 11).



Hình 11

Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?

Lời giải

Sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa nằm trên tiếp tuyến của đường tròn tâm I tại điểm M .

Vậy quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa nằm trên đường thẳng có phương trình là:

$$\left(\frac{\sqrt{39}}{10} - 0\right)\left(x - \frac{\sqrt{39}}{10}\right) + \left(2 - \frac{3}{2}\right)(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{39}}{10}\left(x - \frac{\sqrt{39}}{10}\right) + \frac{1}{2}(y - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{39}x + 5y - 13,9 = 0.$$

Câu 3: Một nông trại tưới nước theo phương pháp vòi phun xoay vòng trung tâm như Hình 3. Cho biết tâm một vòi phun được đặt tại tọa độ $(12; -9)$ và vòi có thể phun xa tối đa $36m$. Hãy viết phương trình đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà vòi nước có thể phun tới.



Hình 3

Giải

Tập hợp các điểm xa nhất mà vòi nước có thể phun tới là đường tròn có tâm $I(12; -9)$ và bán kính $R = 36$ nên có phương trình: $(x - 12)^2 + (y + 9)^2 = 36^2$.

Câu 4: Một cái cổng hình bán nguyệt rộng $6,8m$, cao $3,4m$. Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn cho xe ra vào.

a) Viết phương trình mô phỏng cái cổng;

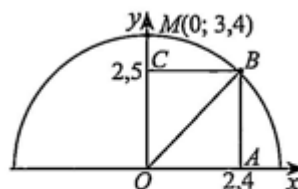
b) Một chiếc xe tải rộng $2,4m$ và cao $2,5m$ đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng được hay không?

LỜI GIẢI

a) Chọn hệ tọa độ sao cho tâm của cái cổng hình bán nguyệt có tọa độ $(0;0)$ và đỉnh của cổng có tọa độ $M(0;3,4)$.

Ta có phương trình mô phỏng của cổng là: $x^2 + y^2 = 3,4^2 (y > 0)$.

b) Gọi $OABC$ là thiết diện của xe tải (Hình 1).

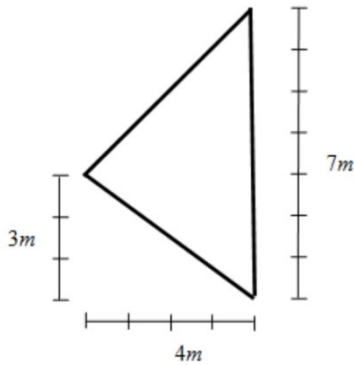


Hình 1

Ta có: $OB = \sqrt{OA^2 + OC^2} = \sqrt{2,4^2 + 2,5^2} \approx 3,5(m) > R = 3,4(m)$.

Vậy nếu đi đúng làn đường quy định thì xe tải không thể đi qua cổng.

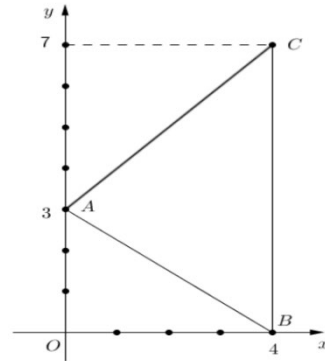
Câu 5: Có một công viên nhỏ hình tam giác như Hình 1. Người ta dự định đặt một cây đèn để chiếu sáng toàn bộ công viên. Để công việc tiến hành thuận lợi, người ta đo đạc và mô phỏng các kích thước công viên như Hình 2. Thiết lập một hệ trục Oxy như Hình 3, khi đó các đỉnh của công viên có tọa độ lần lượt là $A(0;3)$, $B(4;0)$, $C(4;7)$. Gọi I là điểm đặt cây đèn sao cho đèn chiếu sáng toàn bộ công viên. Vậy cần đặt I ở vị trí có tọa độ bao nhiêu?



Hình 1



Hình 2 (nguồn: Google)



Hình 3

Lời giải

- Vùng mà cây đèn chiếu sáng được biểu diễn bằng một hình tròn mà điểm đặt cây đèn là tâm nên để chiếu sáng toàn bộ công viên ta cần đặt cây đèn ở tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác.

- Gọi $I(x; y)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABC

Ta có: $A(0;3), B(4;0), C(4;7)$ nên:

$$\overline{IA} = (-x; 3-y) \Rightarrow IA = \sqrt{x^2 + (3-y)^2}$$

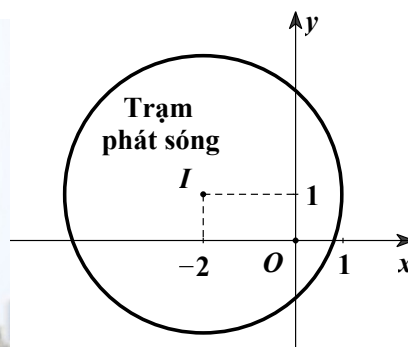
$$\overline{IB} = (4-x; -y) \Rightarrow IB = \sqrt{(4-x)^2 + y^2}$$

$$\overline{IC} = (4-x; 7-y) \Rightarrow IC = \sqrt{(4-x)^2 + (7-y)^2}$$

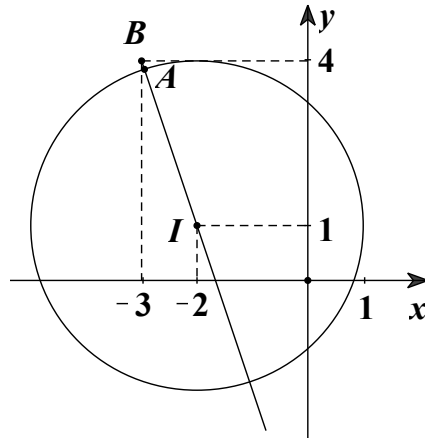
Do I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ΔABC nên ta có $IA = IB, IA = IC$, ta lập được hệ

$$\text{phương trình } \begin{cases} 8x - 6y = 7 \\ 8x + 8y = 56 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{7}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } I\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right).$$

Câu 6: Hình vẽ bên dưới mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng tọa độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét). Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.



Lời giải



Đường tròn màu đen mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng có tâm $I(-2;1)$ và bán kính phủ sóng 3 km nên phương trình đường tròn đó là: $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$.

Giả sử vị trí đứng của người đó là $B(-3;4)$.

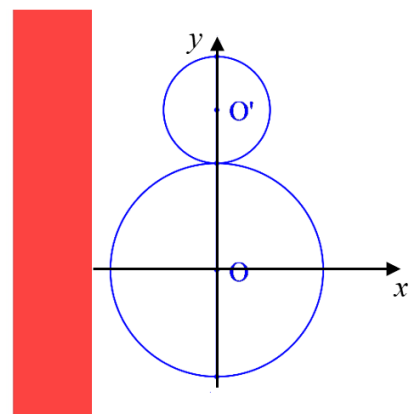
Gọi A (như trên hình vẽ) là giao điểm thứ nhất của đường tròn tâm I và BI

\Rightarrow Khoảng cách ngắn nhất để người đó di chuyển được từ vị trí $B(-3;4)$ tới vùng phủ sóng là BA .

Ta có: $IB = \sqrt{(-3+2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{10}$

Suy ra $AB = IB - IA = \sqrt{10} - 3 = 0,16$.

Câu 7: Ở các nước xứ lạnh, vào mùa Đông thường có tuyết rơi dày đặc khắp các con đường, trẻ em tại đây rất thích đắp hình dạng của người tuyết. Có thể xem phần thân dưới và thân trên của người tuyết là hai hình cầu tiếp xúc nhau. Vào ba đêm ta dùng một chiếc đèn pin soi vuông góc với người tuyết thì được hình ảnh là hai hình tròn tiếp xúc nhau như hình vẽ. Em hãy viết phương trình đường tròn lớn và đường tròn nhỏ biết kích thước của hai viên tuyết cần đắp để được một người tuyết cao 1,8m có đường kính của phần thân dưới phải gấp đôi đường kính của phần thân trên người tuyết (theo đơn vị xen-ti-mét).



□ **Lời giải**

Ta có: $1,8m = 180cm$.

Gọi r (cm) là bán kính của đường tròn nhỏ ($r > 0$).

\Rightarrow Đường kính của đường tròn nhỏ là $2r$ (cm).

\Rightarrow Đường kính của đường tròn lớn là: $2 \cdot 2r = 4r$ (cm).

Ta có: $2r + 4r = 6r = 180$ (vì (O) tiếp xúc với (O')).

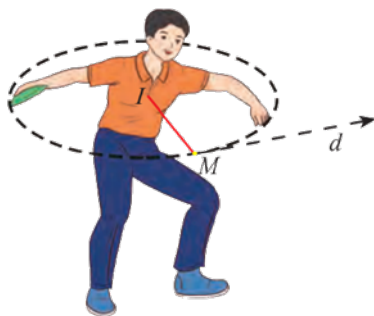
$\Leftrightarrow r = 30$ (cm).

Phương trình đường tròn (O) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R = 2r = 60$: $x^2 + y^2 = 3600$.

Phương trình đường tròn (O') có tâm $O'(0;90)$ và bán kính $r = 30$: $(x-90)^2 + y^2 = 900$.

Câu 8: Một vận động ném đĩa đã vung đĩa theo một đường tròn (C) có phương trình là $(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{144}$. Khi đó, người đó vung đĩa đến vị trí điểm $M\left(\frac{17}{12}; 2\right)$ thì buông đĩa.

Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M .



Lời giải

Đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{169}{144}$ có tâm $I(1;1)$.

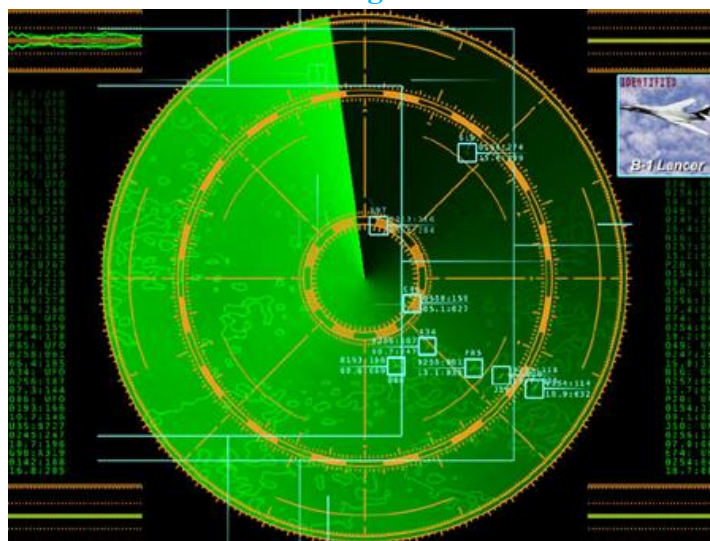
Điểm $M\left(\frac{17}{12}; 2\right)$ thuộc đường tròn (C) .

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M\left(\frac{17}{12}; 2\right)$ là đường thẳng đi qua M và

nhận vector $\overline{IM} = \left(\frac{5}{12}; 1\right)$ làm VTPT nên có phương trình $60x + 144y - 373 = 0$.

Câu 9: Tọa độ trong hệ thống kiểm soát phòng không trong không quân Việt Nam của một hệ thống radar trong phạm vi bán kính 10 km trở lại. Nếu một vật thể lạ di chuyển qua hệ thống trên không lý do sẽ có nguy cơ bị bắn hạ để bảo vệ an toàn trên vùng trời. Chọn hệ quy chiếu điểm ngắm là gốc tọa độ O . Hỏi máy bay đang bay ở tọa độ $M(6;7)$ trên bầu trời có bị lọt vào tầm ngắm không? Vì sao?

Lời giải



Phương trình đường tròn trong phạm vi rada kiểm soát: $x^2 + y^2 = 100$

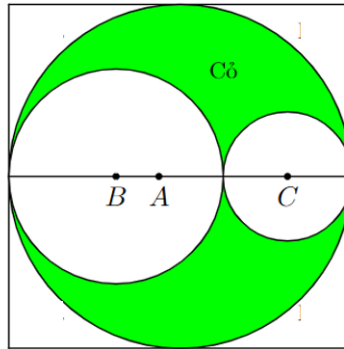
Nếu máy bay bay trong phạm vi kiểm soát của rada nghĩa là nằm trên hoặc miền trong của đường tròn trên thì sẽ có nguy cơ bị bắn hạ. Còn nằm miền ngoài sẽ không bị bắn hạ

Theo tiêu chí trên ta có máy bay ở vị trí $M(6; 7)$ thế vào đường tròn

$$VT = 6^2 + 7^2 = 85 < 100$$

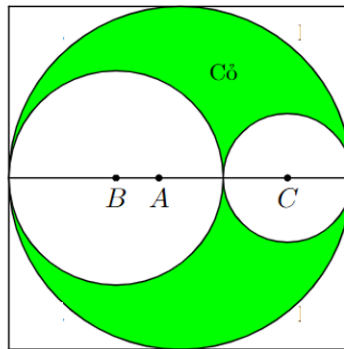
Vậy máy bay bị lọt vào tầm ngắm của ra đa

Câu 10: Thiết kế khu vườn Hạnh Phúc hình vuông cạnh 10m như hình vẽ.



Phần được tô đậm dùng để trồng cỏ, phần còn lại lát gạch. Biết mỗi mét vuông trồng cỏ chi phí 100 nghìn đồng, mỗi mét vuông lát gạch chi phí 300 nghìn đồng. Khi diện tích phần lát gạch là nhỏ nhất thì tổng chi phí thi công vườn hoa Hạnh Phúc bằng (làm tròn đến hàng nghìn)?

Lời giải



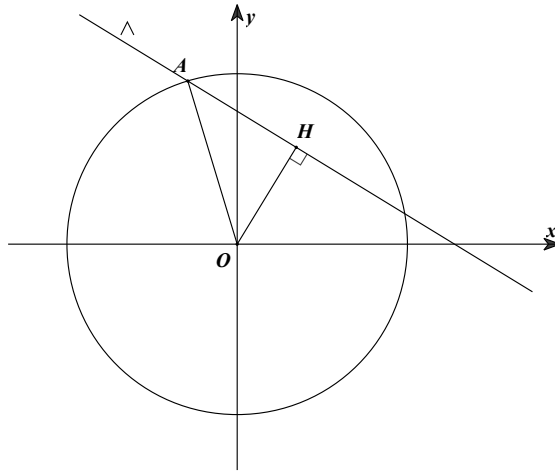
Gọi $x, y(m)$ lần lượt là bán kính của phần lát gạch hình tròn ($x, y > 0$) ta có $x + y = 5$.

Gọi $S(m^2)$ là phần diện tích được lát gạch của khu vườn ($S > 0$), ta có

$$S = 100 - 25\pi + \pi x^2 + \pi y^2 = 100 + \pi(x^2 + y^2 - 25) \Leftrightarrow x^2 + y^2 = \frac{S + 25\pi - 100}{\pi}$$

Ta có: $(C): x^2 + y^2 = \frac{S + 25\pi - 100}{\pi}$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R = \sqrt{\frac{S + 25\pi - 100}{\pi}}$ và đường

thẳng $\Delta: x + y - 5 = 0$. Khi đó bài toán trở thành: Tìm R nhỏ nhất để (C) và Δ có ít nhất một điểm chung, với hoành độ và tung độ đều là các số dương?



Ta có (C) và Δ có ít nhất một điểm chung khi và chỉ khi

$$R \geq d(O, \Delta) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{S + 25\pi - 100}{\pi}} \geq \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow S + 25\pi - 100 \geq \frac{25\pi}{2} \Leftrightarrow S \geq 100 - \frac{25\pi}{2}.$$

Vậy diện tích phần lát gạch nhỏ nhất bằng $S_{\min} = 100 - \frac{25\pi}{2}$. Từ đó chi phí để thi công khu vườn

Hạnh phúc là $100 \cdot (100 - S_{\min}) + 300 \cdot S_{\min} = 22146$ nghìn đồng.

CHUYÊN ĐỀ 10: BA ĐƯỜNG CONIC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Đường elip

a) Định nghĩa

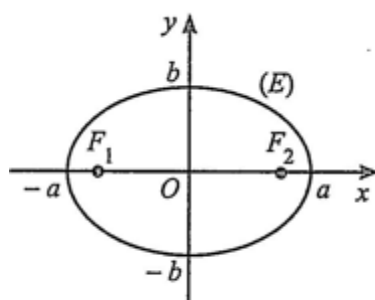
Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c (c > 0)$.

Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số cho trước lớn hơn c .

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của elip.

b) Phương trình chính tắc

Khi chọn hệ trục tọa độ như Hình 12,



Hình 12

Phương trình chính tắc của đường elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$.

$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ là hai tiêu điểm, $c^2 = a^2 - b^2$.

2. Đường hypebol

a) Định nghĩa

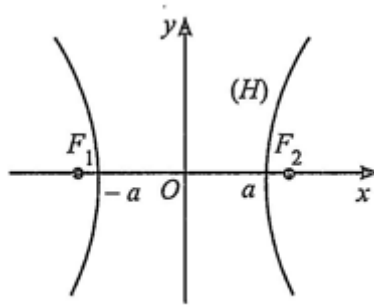
Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c (c > 0)$.

Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c .

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

b) Phương trình chính tắc

Khi chọn hệ trục tọa độ như Hình 13,



Hình 13

Phương trình chính tắc của đường hypebol (H) là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > 0, b > 0$.

$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ là hai tiêu điểm, $c^2 = a^2 + b^2$.

3. Đường parabol

a) Định nghĩa

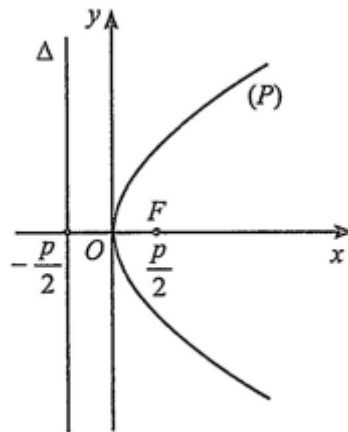
Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F .

Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ .

Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol.

b) Phương trình chính tắc

Khi chọn hệ trục tọa độ như Hình 14,

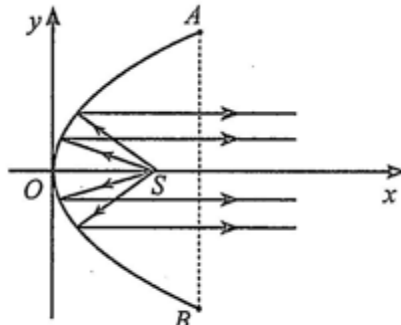


Hình 14

Phương trình chính tắc của đường parabol (P) là: $y^2 = 2px (p > 0)$. $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ là tiêu điểm, $x + \frac{p}{2} = 0$ là phương trình đường chuẩn Δ .

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

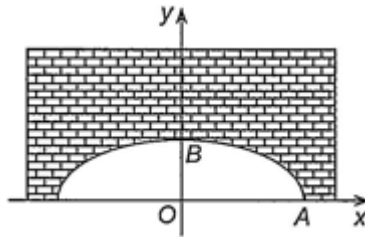
Câu 1: Hình 15 mô phỏng mặt cắt ngang của một chiếc đèn có dạng parabol trong mặt phẳng tọa độ Oxy (x và y tính bằng xăng-ti-mét).



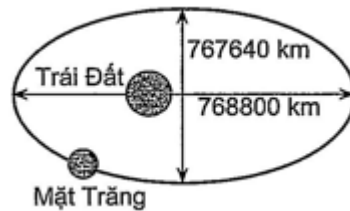
Hình 15

Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40\text{ cm}$ và chiều sâu $h = 30\text{ cm}$ (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S . Viết phương trình chính tắc của parabol đó.

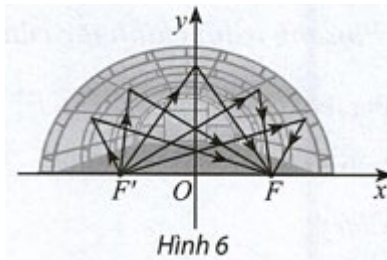
- Câu 2:** Một người kĩ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là 12 m , khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là 3 m . Người kĩ sư này muốn đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Biết rằng những loại xe tải có chiều cao $2,8\text{ m}$ thì có chiều rộng không quá 3 m . Hỏi chiếc xe tải có chiều cao $2,8\text{ m}$ có thể đi qua hầm được không?



- Câu 3:** Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip với tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của quỹ đạo lần lượt là 768800 km và 767640 km . Tìm khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng.

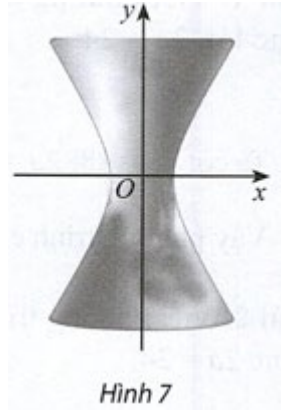


- Câu 4:** Một mái vòm nhà hát có mặt cắt là hình nửa elip. Cho biết khoảng cách giữa hai tiêu điểm là $F'F = 50\text{ m}$ và chiều dài của đường đi của một tia sáng từ F' đến mái vòm rồi phản chiếu về F là 100 m . Viết phương trình chính tắc của elip đó.



Hình 6

Câu 5: Một tháp triển lãm có mặt cắt hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{18^2} - \frac{y^2}{36^2} = 1$. Cho biết chiều cao của tháp là $100m$ và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.



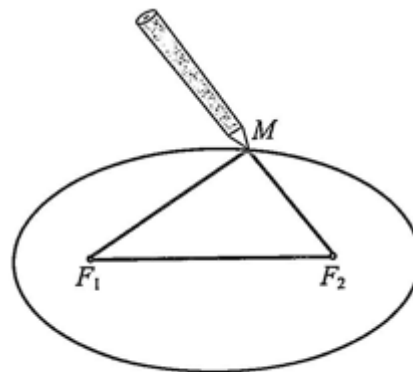
Hình 7

Câu 6: Cổng chào của một thành phố dạng hình parabol có chiều cao $h = 25m$ và khoảng cách giữa hai chân cổng là $d = 120m$. Hãy viết phương trình parabol của cổng chào.



Hình 8

Câu 7: Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là $1m$ và trục nhỏ là $0,6m$ từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước $1m \times 0,6m$, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hướng dẫn sau:



Hình 10

Chuẩn bị:

- Hai cái đinh, một vòng dây kín không đàn hồi, bút chì.

Thực hiện:

- Xác định vị trí (hai tiêu điểm của elip) và ghim hai cái đinh lên hai điểm đó trên tấm ván.

- Quàng vòng dây qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm M nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng. Đầu bút chì vạch lên tấm ván một đường mà ta gọi là đường elip. (Xem minh họa trong Hình 10).

Phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

Câu 8: Thang leo gọn sóng cho trẻ em trong công viên có hai khung thép cong hình nửa elip cao 100 cm và khoảng cách giữa hai chân là 240 cm .

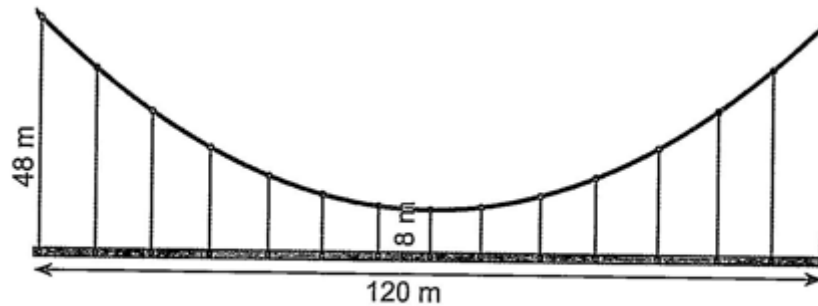


Hình 11

- a) Hãy chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình chính tắc của elip nói trên.
 b) Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm Hình 11 cách chân khung 20 cm lên đến khung thép.

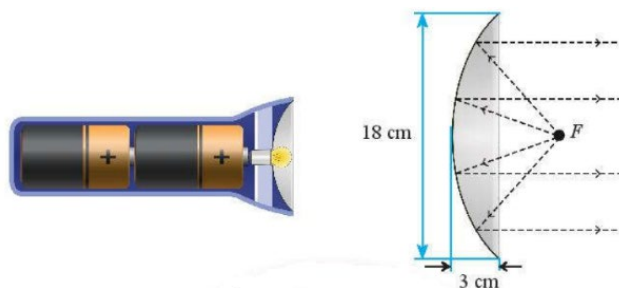
Câu 9: Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 120 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Câu 10: Một cái cầu có dây cáp treo hình parabol, cầu dài 120 m và được nâng đỡ bởi những thanh thẳng đứng treo từ cáp xuống, thanh dài nhất là 48 m , thanh ngắn nhất là 8 m (Hình 12). Tính chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu 20 m .



Hình 12

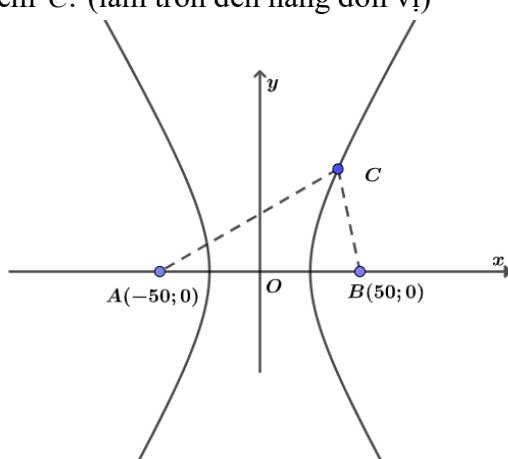
Câu 11: Một đèn pin có chóa đèn mặt cắt hình parabol với kính thước trong hình trên. Giấy tóc bóng đèn được đặt ở tiêu điểm F .



Để đèn chiếu được xa phải đặt bóng đèn cách đỉnh của chóa đèn bao nhiêu xentimét?

Câu 12: Hệ thống định vị một vị trí cần có 3 bộ phận cơ bản: Thứ nhất là bộ phận không gian để phát sóng (vệ tinh, máy phát,...); thứ hai là bộ phận trung tâm điều khiển (Trạm mặt đất); thứ 3 là bộ phận thu sóng (điện thoại, máy thu... có kèm phần mềm tính toán). Người ta sử dụng tính chất giao nhau của hai đường hypebol để định vị.

Hai máy phát tín hiệu A, B cách nhau 100km truyền tín hiệu đến vị trí C . Tại C , tín hiệu nhận được từ B sớm hơn 2s so với A . Biết vận tốc truyền tín hiệu trong không khí là 335 m/s. Hãy xác định vị trí có thể của điểm C . (làm tròn đến hàng đơn vị)

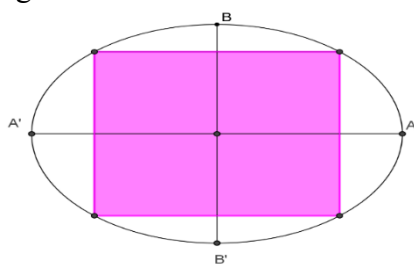


Câu 13: Để chụp toàn cảnh, ta có thể sử dụng một gương hypebol. Máy ảnh được hướng về phía đỉnh của gương và tâm quang học của máy ảnh được đặt tại một tiêu điểm của gương (xem hình). Tìm khoảng cách từ quang tâm của máy ảnh đến đỉnh của gương, biết rằng phương trình cho mặt cắt của gương là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

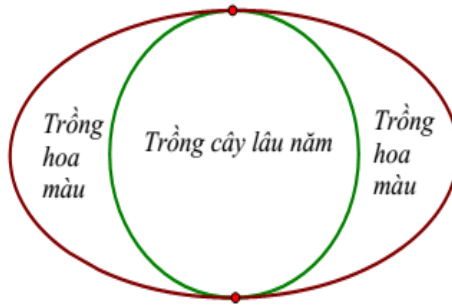
Câu 14: Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A , điểm cuối là B , khoảng cách $AB = 400m$. Đỉnh parabol (P) của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A, B .

- Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 m trên thực tế.
- Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 km trên thực tế.

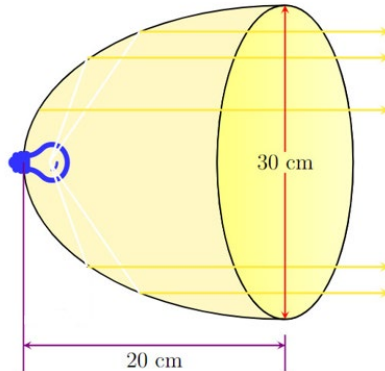
Câu 15: Bên trong một sân vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 12 m, độ dài trục bé bằng 9 m. người ta rào thành một hình chữ nhật nội tiếp Elip như hình vẽ để trồng hoa, phần còn lại để trồng cỏ. Tính diện tích trồng hoa lớn nhất.



Câu 16: Thầy Minh có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Thầy Minh chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau (xem hình vẽ). Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$, với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục nhỏ. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.



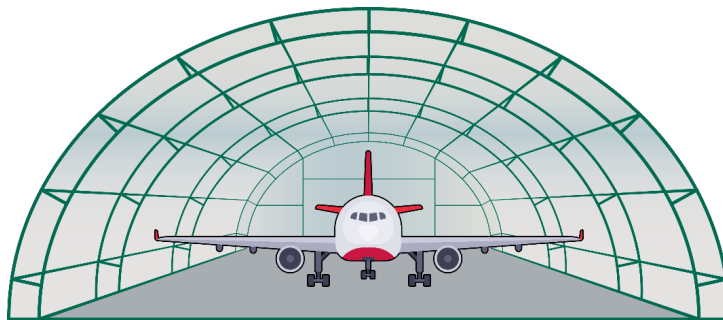
Câu 17: Cho một cái đèn với chụp bóng đèn có mặt cắt qua trục là parabol với kích thước được thể hiện trên hình vẽ, giả sử xem dây tóc bóng đèn là một điểm và được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol. Tính khoảng cách từ dây tóc bóng đèn tới đỉnh của chụp bóng đèn.



Câu 18: Hai thiết bị A và B dùng để ghi âm một vụ nổ đặt cách nhau 1 dặm, thiết bị A ghi được âm thanh trước thiết bị B là 2 giây, biết vận tốc âm thanh là $1100 \text{ feet} / \text{s}$. (Biết rằng vụ nổ nằm trên một nhánh của Hypebol). Viết phương trình Hypebol chứa vị trí vụ nổ có thể xảy ra ($1 \text{ dặm} = 5280 \text{ feet}$; $3 \text{ feet} = 0,914\text{m}$).

Câu 19: Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao 10m , rộng 24m .

- Chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.
- Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4m lên đến nóc nhà vòm.

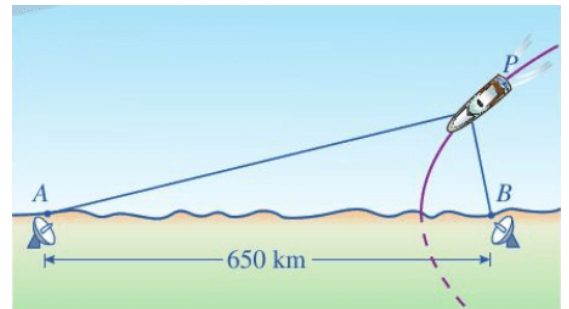


Câu 20: Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A điểm cuối là B , khoảng cách $AB = 400\text{m}$. Đỉnh parabol của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20m và cách đều A, B . Lập phương trình chính tắc của, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 m trên thực tế.

Câu 21: Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{64^2} - \frac{y^2}{35^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 210m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm tối xứng của hypebol bằng một nửa khoảng cách từ tâm đối xứng tới đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.



Câu 22: □ Dọc theo bờ biển, người ta thiết lập hệ thống định vị vô tuyến dẫn đường tầm xa để truyền tín hiệu cho máy bay hoặc tàu thủy hoạt động trên biển. Trong hệ thống đó có hai đài vô tuyến đặt lần lượt tại địa điểm A và địa điểm B , khoảng cách $AB = 650$ km (Hình 18). Giả sử có một con tàu chuyển động trên biển với quỹ đạo là hypebol nhận A và B là hai tiêu điểm.

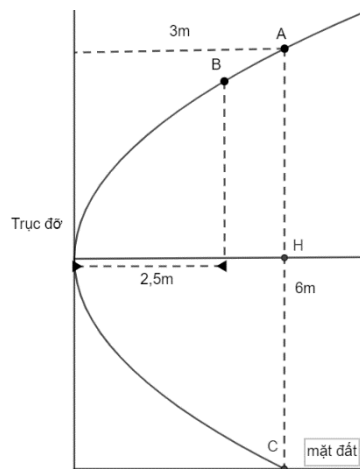


Hình 18

Khi đang ở vị trí P , máy thu tín hiệu trên con tàu chuyển đổi chênh lệch thời gian nhận các tín hiệu từ A và B thành hiệu khoảng cách $|PA - PB|$. Giả sử thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A là $0,0012$ s. Vận tốc di chuyển của tín hiệu là $3 \cdot 10^8$ m/s.

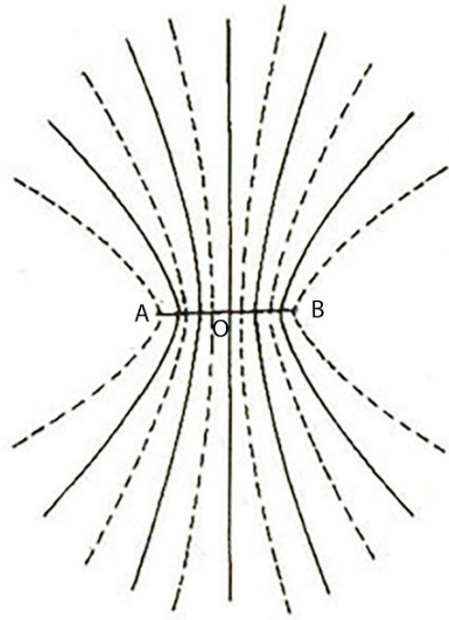
- Lập phương trình hypebol mô tả quỹ đạo chuyển động của con tàu.
- Chứng tỏ rằng tại mọi thời điểm trên quỹ đạo chuyển động thì thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A luôn là $0,0012$ s.

Câu 23: Để nâng đỡ các ống trượt cong có hình là các Parabol thì nhà thầu thi công gia cố các trụ đỡ vuông góc với mặt đất. Hình bên dưới mô tả trụ đỡ và 1 phần ống trượt với khoảng cách A đến



mặt đất là 6m, đến trụ đỡ là 3m. Tính độ cao từ mặt đất tới điểm B trong hình

Câu 24: Các đường cong hình bên mô tả hiện tượng giao thoa khi hai sóng gặp nhau, với các đường cong tạo thành được gọi là các vân giao thoa có hình dạng là các đường Hypebol. Hãy lập phương trình đường Hypebol của 2 vân giao thoa ngoài cùng đi qua A và B như hình vẽ, biết $AB = 24$, đường Hypebol có tiêu cự bằng 13.



CHUYÊN ĐỀ 10: BA ĐƯỜNG CONIC

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Đường elip

a) Định nghĩa

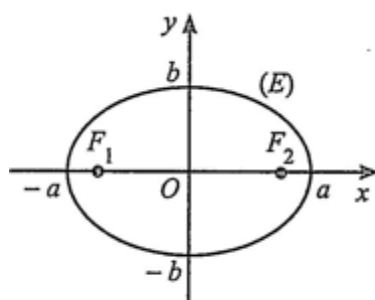
Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c (c > 0)$.

Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$, trong đó a là số cho trước lớn hơn c .

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của elip.

b) Phương trình chính tắc

Khi chọn hệ trục tọa độ như Hình 12,



Hình 12

Phương trình chính tắc của đường elip (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$.

$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ là hai tiêu điểm, $c^2 = a^2 - b^2$.

2. Đường hypebol

a) Định nghĩa

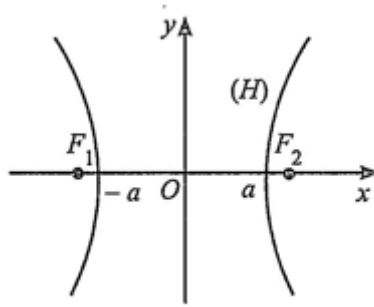
Cho hai điểm F_1, F_2 cố định có khoảng cách $F_1F_2 = 2c (c > 0)$.

Đường hypebol (còn gọi là hypebol) là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c .

Hai điểm F_1 và F_2 được gọi là hai tiêu điểm của hypebol.

b) Phương trình chính tắc

Khi chọn hệ trục tọa độ như Hình 13,



Hình 13

Phương trình chính tắc của đường hypebol (H) là: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > 0, b > 0$.

$F_1(-c; 0), F_2(c; 0)$ là hai tiêu điểm, $c^2 = a^2 + b^2$.

3. Đường parabol

a) Định nghĩa

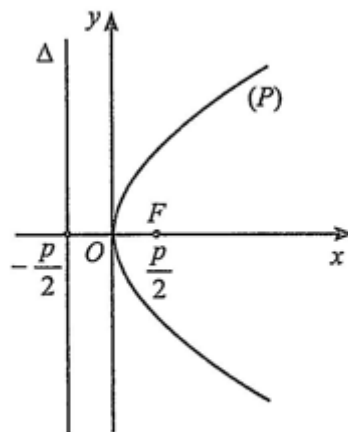
Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F .

Đường parabol (còn gọi là parabol) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ .

Điểm F được gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol.

b) Phương trình chính tắc

Khi chọn hệ trục tọa độ như Hình 14,

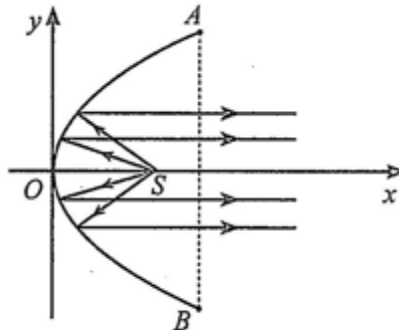


Hình 14

Phương trình chính tắc của đường parabol (P) là: $y^2 = 2px (p > 0)$. $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$ là tiêu điểm, $x + \frac{p}{2} = 0$ là phương trình đường chuẩn Δ .

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Hình 15 mô phỏng mặt cắt ngang của một chiếc đèn có dạng parabol trong mặt phẳng tọa độ Oxy (x và y tính bằng xăng-ti-mét).



Hình 15

Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là $AB = 40\text{ cm}$ và chiều sâu $h = 30\text{ cm}$ (h bằng khoảng cách từ O đến AB). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm S . Viết phương trình chính tắc của parabol đó.

Lời giải

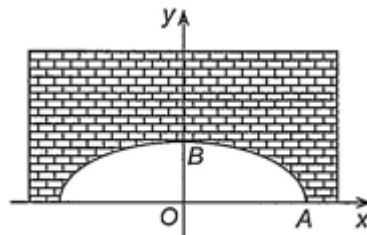
Parabol có phương trình chính tắc là:

Vì $AB = 40\text{ cm}$ và $h = 30\text{ cm}$ nên $A(30; 20)$.

Do $A(30; 20)$ thuộc parabol nên ta có: $20^2 = 2p \cdot 30 \Rightarrow p = \frac{20}{3}$.

Vậy parabol có phương trình chính tắc là: $y^2 = \frac{40}{3}x$.

Câu 2: Một người kĩ sư thiết kế một đường hầm một chiều có mặt cắt là một nửa hình elip, chiều rộng của hầm là 12 m , khoảng cách từ điểm cao nhất của elip so với mặt đường là 3 m . Người kĩ sư này muốn đưa ra cảnh báo cho các loại xe có thể đi qua hầm. Biết rằng những loại xe tải có chiều cao $2,8\text{ m}$ thì có chiều rộng không quá 3 m . Hỏi chiếc xe tải có chiều cao $2,8\text{ m}$ có thể đi qua hầm được không?



Lời giải

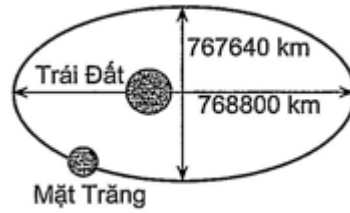
Phương trình chính tắc của (E) là $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, trong đó $a > b > 0$. Do các điểm $B(0; 3)$ và $A(6; 0)$ thuộc (E) nên thay vào phương trình của (E) ta có $b = 3$ và $a = 6$. Suy ra phương trình của (E) là $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Với những xe tải có chiều cao $2,8\text{ m}$, chiều rộng của xe tải là 3 m , tương ứng với $x = 1,5$. Thay vào phương trình của elip để tìm ra độ cao y của điểm M (có hoành độ bằng $1,5$ thuộc (E))

) so với trục Ox $y_M = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{x_M^2}{36}} = 3 \cdot \sqrt{1 - \frac{1,5^2}{36}} \approx 2,905 > 2,8$.

Kết luận: Ô tô tải có thể đi được qua hầm, tuy nhiên cần khuyến cáo ô tô phải đi vào chính giữa hầm.

Câu 3: Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một đường elip với tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Độ dài trục lớn, độ dài trục nhỏ của quỹ đạo lần lượt là 768800 km và 767640 km . Tìm khoảng cách lớn nhất và bé nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng.



Lời giải

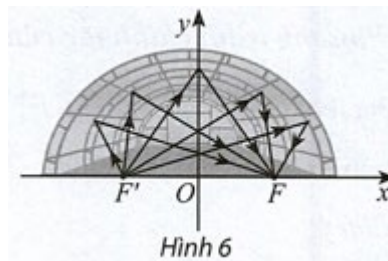
Vì $2a = 768800$ và $2b = 767640$ nên ta có $a = 384400$ và $b = 383820$.

Từ đó suy ra $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{384400^2 - 383820^2} \approx 21108$.

Vì vậy, khoảng cách lớn nhất từ tâm của Trái Đất đến Mặt Trăng là $a + c \approx 384400 + 21108 = 405508(\text{km})$

và khoảng cách nhỏ nhất là $a - c \approx 384400 - 21108 = 363292(\text{km})$.

Câu 4: Một mái vòm nhà hát có mặt cắt là hình nửa elip. Cho biết khoảng cách giữa hai tiêu điểm là $F'F = 50\text{ m}$ và chiều dài của đường đi của một tia sáng từ F' đến mái vòm rồi phản chiếu về F là 100 m . Viết phương trình chính tắc của elip đó.



Lời giải

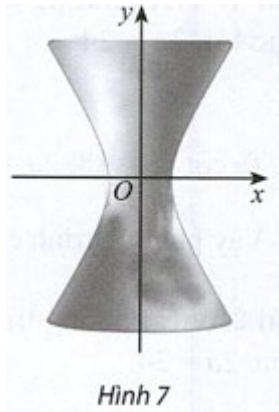
Ta có $F'F = 2c = 50$, suy ra $c = 25$.

Tổng khoảng cách $F'M + FM = 2a = 100$, suy ra $a = 50$.

Ta có $b^2 = a^2 - c^2 = 50^2 - 25^2 = 1875$.

Vậy elip có phương trình $\frac{x^2}{2500} + \frac{y^2}{1875} = 1$.

Câu 5: Một tháp triển lãm có mặt cắt hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{18^2} - \frac{y^2}{36^2} = 1$. Cho biết chiều cao của tháp là 100 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.



Lời giải

Do tính đối xứng của hypebol nên ta có hai bán kính của nóc và đáy tháp đều bằng r . Do điểm $M(r;50)$ nằm trên hypebol nên thay tọa độ của điểm M vào phương trình của hypebol ta có:

$$\frac{r^2}{18^2} - \frac{50^2}{36^2} = 1 \Rightarrow r = 18\sqrt{1 + \frac{50^2}{36^2}} \approx 31(m).$$

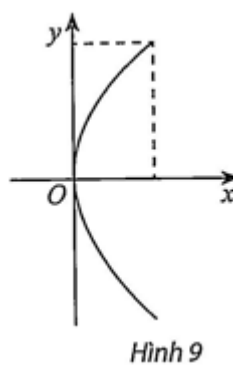
Vậy bán kính của nóc và đáy của tháp bằng $31m$.

Câu 6: Cổng chào của một thành phố dạng hình parabol có chiều cao $h = 25m$ và khoảng cách giữa hai chân cổng là $d = 120m$. Hãy viết phương trình parabol của cổng chào.



Lời giải

Ta chọn hệ tọa độ như Hình 9.

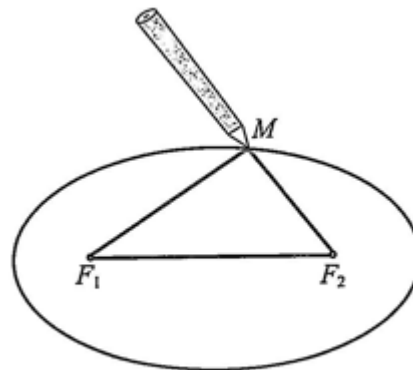


Gọi parabol có Phương trình của parabol có dạng: $y^2 = 2px$. Ta có $M(25;60)$ là tọa độ một điểm tại chân cổng chào. Thay tọa độ điểm M vào phương trình (P) ta có:

$$60^2 = 2p \cdot 25 \Rightarrow p = \frac{60^2}{50} = 72$$

Vậy phương trình của (P) là $y^2 = 144x$.

Câu 7: Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là $1m$ và trục nhỏ là $0,6m$ từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước $1m \times 0,6m$, người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hướng dẫn sau:



Hình 10

Chuẩn bị:

- Hai cái đinh, một vòng dây kín không đàn hồi, bút chì.

Thực hiện:

- Xác định vị trí (hai tiêu điểm của elip) và ghim hai cái đinh lên hai điểm đó trên tấm ván.

- Quàng vòng dây qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm M nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại điểm M rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng. Đầu bút chì vạch lên tấm bìa một đường mà ta gọi là đường elip. (Xem minh họa trong Hình 10).

Phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $2a = 1m = 100cm$; $2b = 0,6m = 60cm$.

Suy ra $c^2 = a^2 - b^2 = 50^2 - 30^2 = 1600 \Rightarrow c = 40$.

Ta có $a - c = 10(cm)$ và $2a + 2c = 180(cm)$.

Vậy phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép $10cm$ và lấy vòng dây có độ dài là $180cm$ hay $1,8m$.

Câu 8: Thang leo gọn sóng cho trẻ em trong công viên có hai khung thép cong hình nửa elip cao $100cm$ và khoảng cách giữa hai chân là $240cm$.



Hình 11

a) Hãy chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình chính tắc của elip nói trên.

b) Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm Hình 11 cách chân khung $20cm$ lên đến khung thép.

Lời giải

a) Phương trình chính tắc của elip là $\frac{x^2}{120^2} + \frac{y^2}{100^2} = 1$.

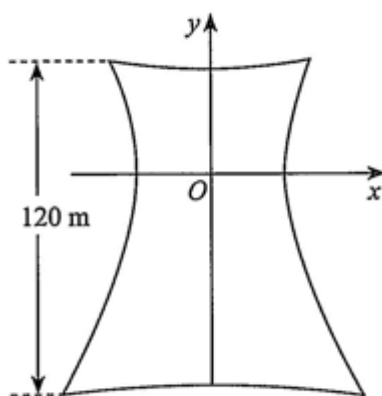
b) Thay $x = 120 - 20 = 100$ vào phương trình elip ta có:

$$\frac{100^2}{120^2} + \frac{y^2}{100^2} = 1 \Rightarrow y^2 = 100^2 \left(1 - \frac{100^2}{120^2} \right) \Rightarrow y \approx 55(\text{cm}).$$

Câu 9: Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 120m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng $\frac{1}{2}$ khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

Lời giải

Gọi r và R lần lượt là bán kính nóc và bán kính đáy của tháp. Ta tính được khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng 40m và khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy bằng 80m .

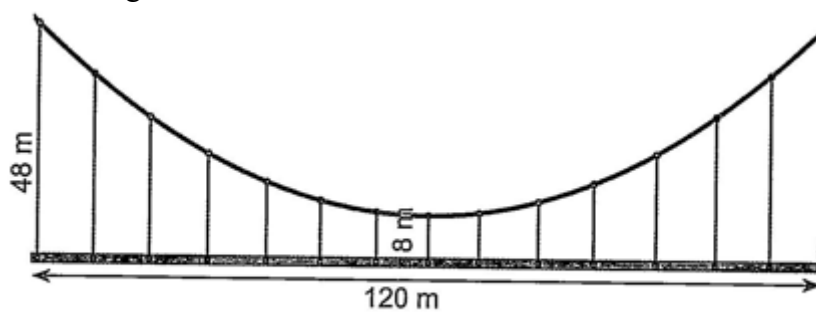


Hình 1

Thay tọa độ 2 điểm $M(R; -80)$ và $N(r; 40)$ vào phương trình hypebol ta tính được:

$$R = 30\sqrt{1 + \frac{(-80)^2}{50^2}} \approx 57(\text{m}); r = 30\sqrt{1 + \frac{40^2}{50^2}} \approx 38(\text{m}).$$

Câu 10: Một cái cầu có dây cáp treo hình parabol, cầu dài 120m và được nâng đỡ bởi những thanh thẳng đứng treo từ cáp xuống, thanh dài nhất là 48m , thanh ngắn nhất là 8m (Hình 12). Tính chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu 20m .



Hình 12

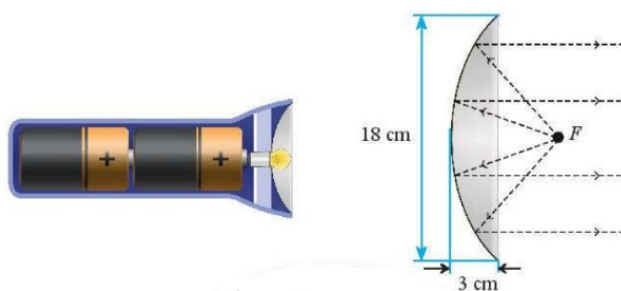
Lời giải

Ta chọn hệ tọa độ sao cho parabol có phương trình: $y^2 = 2px$ Thay tọa độ điểm $M(40;60)$ vào phương trình (1) ta tính được $p = \frac{60^2}{80} = 45$. Thay tọa độ điểm $N(x;20)$ vào phương trình

$$y^2 = 2.45 \cdot x \text{ ta tính được } x = \frac{20^2}{90} \approx 4,44 \text{ m}$$

Vậy chiều dài của thanh cách điểm giữa cầu 20 m là khoảng $12,44 \text{ m}$.

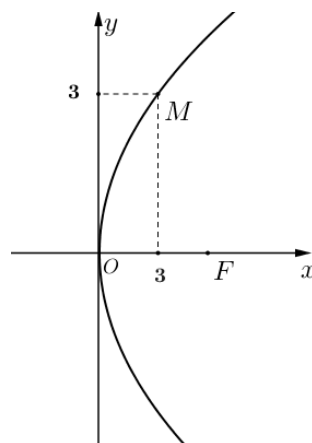
Câu 11: Một đèn pin có chóa đèn mặt cắt hình parabol với kính thước trong hình trên. Giấy tót bóng đèn được đặt ở tiêu điểm F .



Để đèn chiếu được xa phải đặt bóng đèn cách đỉnh của chóa đèn bao nhiêu xentimét?

Lời giải

Viết phương trình chính tắc của parabol.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Gọi phương trình chính tắc của parabol (P) là $y^2 = 2px$ ($p > 0$).

$$\text{Khi đó, } M(3;9) \in (P) \Rightarrow 9^2 = 2 \cdot p \cdot 3 \Leftrightarrow p = \frac{81}{6}.$$

$$\text{Vậy phương trình } (P): y^2 = \frac{81}{3}x.$$

$$\text{Parabol } (P): y^2 = \frac{81}{3}x \text{ có tiêu điểm } F\left(\frac{81}{12}; 0\right).$$

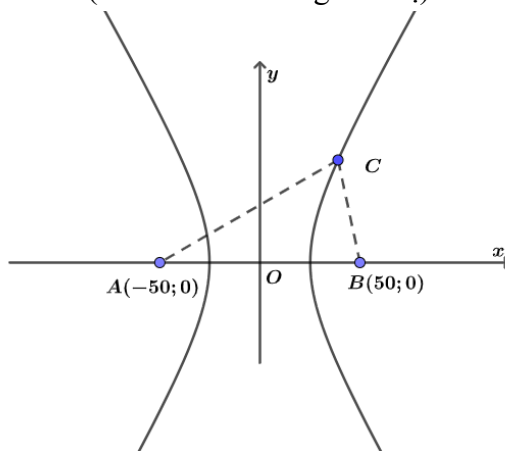
Để đèn chiếu được xa phải đặt bóng đèn ở vị trí tiêu điểm, khi đó các tia sáng phát ra từ bóng đèn chiếu lên bề mặt của chóa đèn sẽ phản xạ tạo nên các tia sáng song song hoặc trùng với trục của parabol.

Vậy cần đặt bóng đèn cách đỉnh của chóa đèn $\frac{81}{12} \text{ cm}$.

Câu 12: Hệ thống định vị một vị trí cần có 3 bộ phận cơ bản: Thứ nhất là bộ phận không gian để phát sóng (vệ tinh, máy phát,...); thứ hai là bộ phận trung tâm điều khiển (Trạm mặt đất); thứ 3 là bộ

phận thu sóng (điện thoại, máy thu... có kèm phần mềm tính toán). Người ta sử dụng tính chất giao nhau của hai đường hypebol để định vị.

Hai máy phát tín hiệu A, B cách nhau 100km truyền tín hiệu đến vị trí C . Tại C , tín hiệu nhận được từ B sớm hơn 2s so với A . Biết vận tốc truyền tín hiệu trong không khí là 335 m/s. Hãy xác định vị trí có thể của điểm C . (làm tròn đến hàng đơn vị)



□ **Lời giải**

Đổi đơn vị: $335 \text{ m/s} = 0,335 \text{ km/s}$.

Do nhận được tín hiệu từ B sớm hơn nên điểm C gần B hơn.

Hiệu khoảng cách $CA - CB = v(t_A - t_B) = 0,335 \cdot 2 = 0,67 \text{ km}$.

Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Vị trí có thể có của điểm C nằm trên một nhánh hypebol (H) nhận A, B làm tiêu điểm và có hoành độ dương.

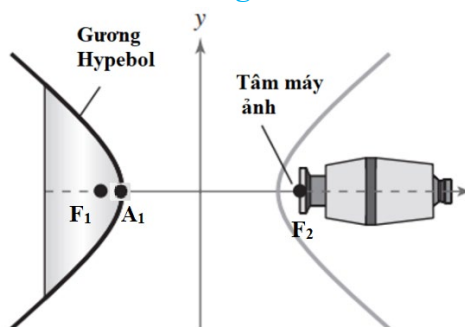
Ta có: $c = 50$ và $|CA - CB| = 2a \Leftrightarrow 2a = 0,67 \Leftrightarrow a = 0,335$.

$c^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow 50^2 = 0,335^2 + b^2 \Leftrightarrow b^2 \approx 2500$.

Vậy $C \in (H): \frac{x^2}{0,112225} - \frac{y^2}{2500} = 1$ và $x > 0$.

Câu 13: Để chụp toàn cảnh, ta có thể sử dụng một gương hypebol. Máy ảnh được hướng về phía đỉnh của gương và tâm quang học của máy ảnh được đặt tại một tiêu điểm của gương (xem hình). Tìm khoảng cách từ quang tâm của máy ảnh đến đỉnh của gương, biết rằng phương trình cho mặt cắt của gương là $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Lời giải



Gọi $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Tiêu điểm của gương là $F_1(-5;0)$ và $F_2(5;0)$.

Đỉnh của gương là $A_1(-4;0)$.

Vậy khoảng cách từ tâm của máy ảnh tới đỉnh của gương là $F_2A_1 = \sqrt{(-4-5)^2} = 9$.

Câu 14: Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A, điểm cuối là B, khoảng cách $AB = 400\text{m}$. Đỉnh parabol (P) của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A, B.

a. Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 m trên thực tế.

b. Lập phương trình chính tắc của (P), với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 km trên thực tế.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ sao cho đỉnh của Parabol trùng với gốc tọa độ $O(0;0)$

a) Nếu một đơn vị đo trong mp tọa độ tương ứng với 1m trên thực tế thì tọa độ các điểm là $A(20; -200)$ $B(20;200)$ thuộc Parabol có dạng $y^2 = 2px$

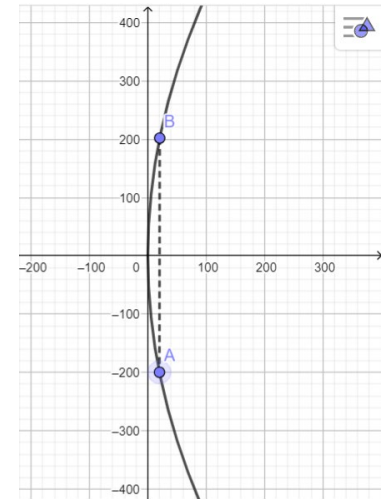
Thay tọa độ điểm A vào ta có $200^2 = 2p \cdot 20 \Rightarrow 2p = 2000$

Vậy (P) có phương trình $y^2 = 2000x$

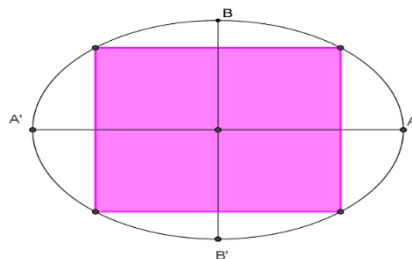
b) Nếu một đơn vị đo trong mp tọa độ tương ứng với 1km trên thực tế thì tọa độ các điểm là $A(0,02; -0,2)$ $B(0,02;0,2)$ thuộc Parabol có dạng $y^2 = 2px$

Thay tọa độ điểm A vào ta có $0,2^2 = 2p \cdot 0,02 \Rightarrow 2p = 2$

Vậy (P) có phương trình $y^2 = 2x$



Câu 15: Bên trong một sân vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng 12 m, độ dài trục bé bằng 9 m. người ta rào thành một hình chữ nhật nội tiếp Elip như hình vẽ để trồng hoa, phần còn lại để trồng cỏ. Tính diện tích trồng hoa lớn nhất.



□ Lời giải

Phương trình chính tắc của (E): $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có: $2a = 12 \Rightarrow a = 6, 2b = 9 \Rightarrow b = 4,5$.

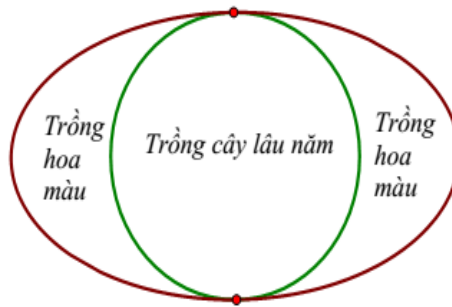
Suy ra (E): $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20,25} = 1$.

Chọn $M(x_M; y_M)$ là đỉnh hình chữ nhật và $x_M > 0, y_M > 0$.

Ta có: $\frac{x_M^2}{36} + \frac{y_M^2}{20,25} = 1.$

Diện tích hình chữ nhật là $S = 4x_M \cdot y_M = \frac{27}{2} \cdot 2 \cdot \frac{x_M}{6} \cdot \frac{y_M}{4,5} \leq \frac{27}{2} \left(\frac{x_M^2}{36} + \frac{y_M^2}{20,25} \right) = \frac{27}{2} (m^2).$

Câu 16: Thầy Minh có một mảnh vườn hình Elip có chiều dài trục lớn và trục nhỏ lần lượt là $60m$ và $30m$. Thầy Minh chia mảnh vườn ra làm hai nửa bằng một đường tròn tiếp xúc trong với Elip để làm mục đích sử dụng khác nhau (xem hình vẽ). Nửa bên trong đường tròn ông trồng cây lâu năm, nửa bên ngoài đường tròn ông trồng hoa màu. Tính tỉ số diện tích T giữa phần trồng cây lâu năm so với diện tích trồng hoa màu. Biết diện tích hình Elip được tính theo công thức $S = \pi ab$, với a, b lần lượt là nửa độ dài trục lớn và nửa độ dài trục nhỏ. Biết độ rộng của đường Elip là không đáng kể.



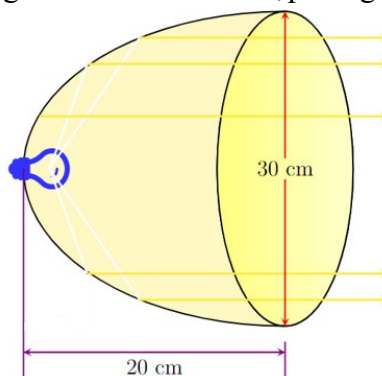
Lời giải

Theo đề ta có: Diện tích (E) là: $S_{(E)} = \pi \cdot a \cdot b = 30 \cdot 15 \cdot \pi = 450\pi, (m^2)$

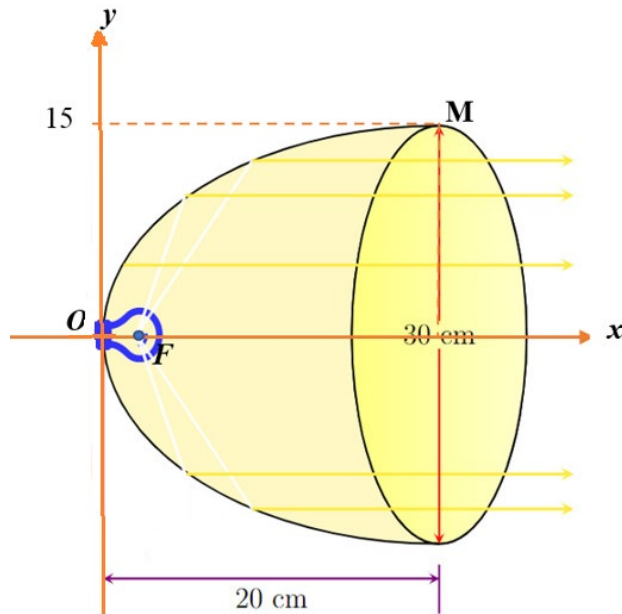
Vì đường tròn tiếp xúc trong, nên sẽ tiếp xúc tại đỉnh của trục nhỏ, suy ra bán kính đường tròn: $R = 15m$. Diện tích hình tròn (C) phần trồng cây lâu năm là: $S_{(C)} = \pi \cdot R^2 = 15^2 \cdot \pi = 225\pi, (m^2)$

Suy ra diện tích phần trồng hoa màu là: $S = S_{(E)} - S_{(C)} = 225\pi, (m^2) \Rightarrow T = 1.$

Câu 17: Cho một cái đèn với chụp bóng đèn có mặt cắt qua trục là parabol với kích thước được thể hiện trên hình vẽ, giả sử xem dây tóc bóng đèn là một điểm và được đặt ở vị trí tiêu điểm của parabol. Tính khoảng cách từ dây tóc bóng đèn tới đỉnh của chụp bóng đèn.



Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Gọi (P) là parabol, với (P) là mặt cắt qua trục của chụm bóng đèn và (P) thuộc mặt phẳng tọa độ Oxy . Phương trình chính tắc của (P) : $y^2 = 2px, p > 0$.

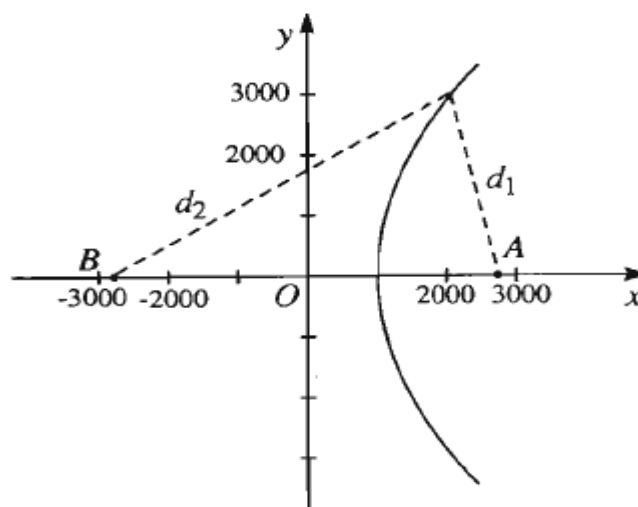
Theo đề bài, ta suy ra điểm $M(20;15) \in (P) \Rightarrow 15^2 = 2p \cdot 20 \Leftrightarrow p = \frac{45}{8}$.

Khoảng cách từ dây tóc bóng đèn tới đỉnh của chụm bóng đèn là $OF = \frac{p}{2} = \frac{45}{16}$ (cm).

Câu 18: Hai thiết bị A và B dùng để ghi âm một vụ nổ đặt cách nhau 1 dặm, thiết bị A ghi được âm thanh trước thiết bị B là 2 giây, biết vận tốc âm thanh là 1100 feet/s . (Biết rằng vụ nổ nằm trên một nhánh của Hypebol). Viết phương trình Hypebol chứa vị trí vụ nổ có thể xảy ra (1 dặm = 5280 feet; 3 feet = 0,914m).

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy mà Ox đi qua A và B , Oy là đường trung trực của AB .



Kí hiệu d_1 là quãng đường âm thanh đi được từ vụ nổ đến thiết bị A , d_2 là quãng đường âm thanh đi được từ vụ nổ đến thiết bị B , d_1 và d_2 tính theo feet. Khi đó, do thiết bị A nhận âm thanh nhanh hơn thiết bị B là 2 giây nên ta có phương trình:

$$d_2 - d_1 = 2200 \quad (1)$$

Các điểm thỏa mãn (1) nằm trên một nhánh của Hypebol có phương trình:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

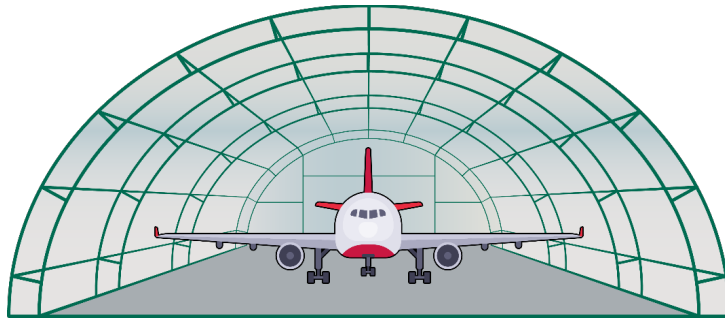
Ta có $c = \frac{5280}{2} = 2640$, $a = \frac{2200}{2} = 1100$, $b^2 = c^2 - a^2 = 5759600$,

Vậy vụ nổ nằm trên một nhánh của Hypebol có phương trình: $\frac{x^2}{1210000} - \frac{y^2}{5759600} = 1$.

Câu 19: Một nhà vòm chứa máy bay có mặt cắt hình nửa elip cao 10m, rộng 24m.

a) Chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.

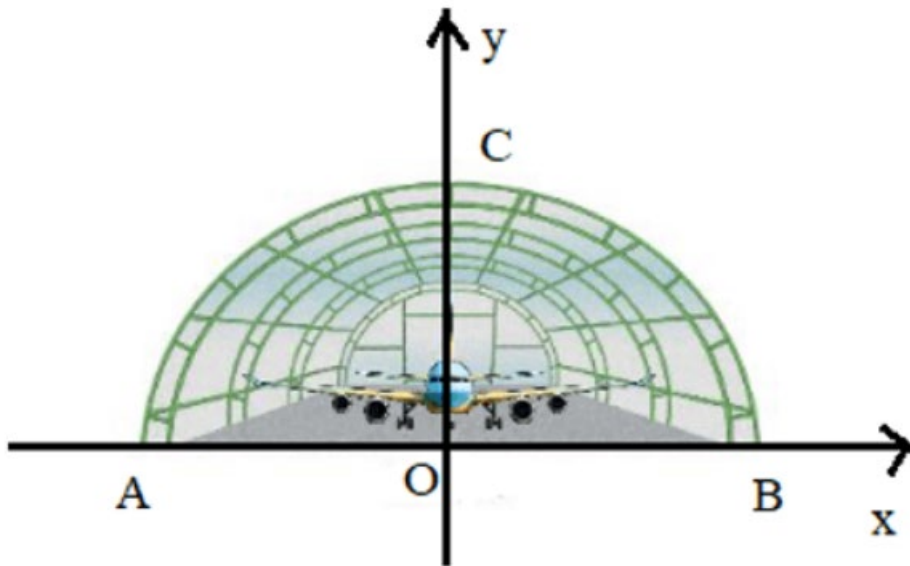
b) Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4m lên đến nóc nhà vòm.



Lời giải

a) Chọn hệ toạ độ thích hợp và viết phương trình của elip nói trên.

Đặt hệ trục toạ độ như sau:



Ta thấy AB là độ dài trục lớn của elip nên $2a = 24 \Leftrightarrow a = 12$

OC là một nửa trục bé nên $b = 10$

Khi đó phương trình của elip trên là: $\frac{x^2}{12^2} + \frac{y^2}{10^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$ (*)

Vậy phương trình elip đã cho là $\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$.

b) Tính khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4m lên đến nóc nhà vòm.

Gọi điểm D là điểm nằm trên elip và cách chân tường 4m.

Khi đó khoảng cách từ D đến gốc tọa độ O là $12 - 4 = 8\text{m}$.

Gọi $D(8; y_D)$

Vì D thuộc elip trên nên tọa độ điểm D thỏa mãn phương trình (*), ta có:

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{100} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{y_D^2}{100} = \frac{5}{9} \Leftrightarrow y_D^2 = \frac{500}{9} \Leftrightarrow y_D = \frac{10\sqrt{5}}{3} \Rightarrow D(8; \frac{10\sqrt{5}}{3})$$

Suy ra khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4 m đến nóc nhà là tung độ của điểm D là $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ (m).

Vậy khoảng cách theo phương thẳng đứng từ một điểm cách chân tường 4 m đến nóc nhà là $\frac{10\sqrt{5}}{3}$ (m).

Câu 20: Khúc cua của một con đường có dạng hình parabol, điểm đầu vào khúc cua là A điểm cuối là B, khoảng cách $AB = 400\text{m}$. Đỉnh parabol của khúc cua cách đường thẳng AB một khoảng 20 m và cách đều A, B. Lập phương trình chính tắc của, với 1 đơn vị đo trong mặt phẳng tọa độ tương ứng 1 m trên thực tế.

Lời giải

Phương trình chính tắc: $y^2 = 2px$

Theo đề ta có A, B, O.

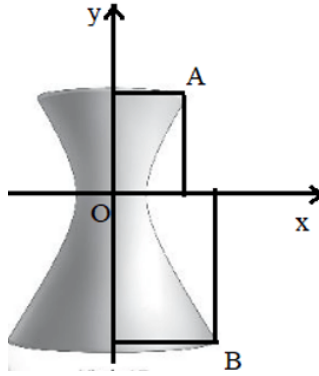
Do đi qua A nên suy ra $20^2 = 2p = -400 \Rightarrow p = -1$.

Vậy: $y^2 = -2x$.

Câu 21: Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình $\frac{x^2}{64^2} - \frac{y^2}{35^2} = 1$. Biết chiều cao của tháp là 210 m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm tối xứng của hypebol bằng một nửa khoảng cách từ tâm đối xứng tới đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.



Lời giải



Gọi hai điểm A, B như hình vẽ.

Gọi khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol là h

Khi đó khoảng cách từ đáy tháp đến tâm đối xứng của hypebol là $2h$

$$h + 2h = 210 \Rightarrow h = 70 \text{ (m)}$$

Tung độ của điểm A chính bằng khoảng cách từ nóc tháp tới tâm đối xứng của hypebol nên $y_A = 70$

Điểm A nằm trên hypebol nên tọa độ điểm A thỏa mãn phương trình $\frac{x^2}{64^2} - \frac{y^2}{35^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{64^2} - \frac{70^2}{35^2} = 1 \Rightarrow x_A = 64\sqrt{5}$$

Vậy bán kính của nóc tháp là $64\sqrt{5} \text{ (m)}$

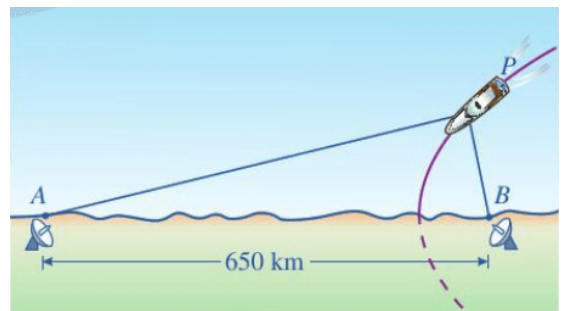
Tung độ của điểm B chính bằng khoảng cách từ đáy tháp tới tâm đối xứng của hypebol nên $y_B = 70 \cdot 2 = 140$

Điểm B nằm trên hypebol nên tọa độ điểm B thỏa mãn phương trình $\frac{x^2}{64^2} - \frac{y^2}{35^2} = 1$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{64^2} - \frac{140^2}{35^2} = 1 \Rightarrow x_B = 64\sqrt{17}$$

Vậy bán kính của đáy tháp là $64\sqrt{17} \text{ (m)}$.

Câu 22: □ Đọc theo bờ biển, người ta thiết lập hệ thống định vị vô tuyến dẫn đường tầm xa để truyền tín hiệu cho máy bay hoặc tàu thủy hoạt động trên biển. Trong hệ thống đó có hai đài vô tuyến đặt lần lượt tại địa điểm A và địa điểm B, khoảng cách $AB = 650 \text{ km}$ (Hình 18). Giả sử có một con tàu chuyển động trên biển với quỹ đạo là hypebol nhận A và B là hai tiêu điểm.



Hình 18

Khi đang ở vị trí P, máy thu tín hiệu trên con tàu chuyển đổi chênh lệch thời gian nhận các tín hiệu từ A và B thành hiệu khoảng cách $|PA - PB|$. Giả sử thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A là $0,0012 \text{ s}$. Vận tốc di chuyển của tín hiệu là $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

a) Lập phương trình hypebol mô tả quỹ đạo chuyển động của con tàu.

b) Chứng tỏ rằng tại mọi thời điểm trên quỹ đạo chuyển động thì thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A luôn là $0,0012 \text{ s}$.

Lời giải

a) Vì thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A là $0,0012\text{s}$ nên tại thời điểm đó $PB - PA = (3 \cdot 10^8) \cdot 0,0012 = 360000\text{m} = 360\text{km}$.

Vì con tàu chuyển động với quỹ đạo là hypebol nhận A và B là hai tiêu điểm nên $|PA - PB| = 360\text{km}$ với mọi vị trí của P .

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với trung điểm của AB và trục Ox trùng với AB , đơn vị trên hai trục là km thì hypebol này có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. ($a > 0, b > 0$).

Vì $|PA - PB| = 360$ nên $2a = 360 \Rightarrow a = 180$.

Theo đề bài, $AB = 650$, suy ra $2c = 650$, suy ra $c = 325$.

$b^2 = c^2 - a^2 = 325^2 - 180^2 = 73225$ $b^2 = c^2 - a^2 = 325^2 - 180^2 = 73225$.

Vậy phương trình hypebol mô tả quỹ đạo chuyển động của con tàu là $\frac{x^2}{32400} - \frac{y^2}{73225} = 1$

b) Vì con tàu chỉ chuyển động ở nhánh bên phải trục Oy của hypebol nên ta $PB < PA$ với mọi vị trí của P . Do đó tàu luôn nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A .

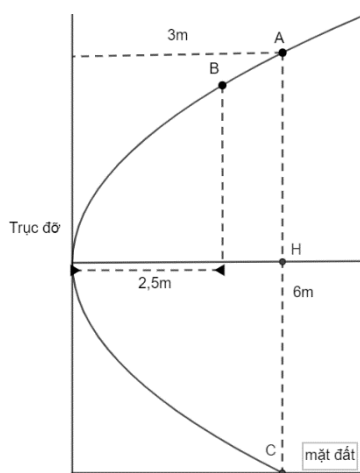
Gọi t_1 là thời gian để tàu nhận được tín hiệu từ A , t_2 là thời gian để tàu nhận được tín hiệu từ

B thì $t_1 = \frac{PA}{v}$, $t_2 = \frac{PB}{v}$ với v là vận tốc di chuyển của tín hiệu.

Khi đó, ta có: $t_1 - t_2 = \frac{PA - PB}{v} = \frac{360000}{3 \cdot 10^8} = 0,0012$.

Vậy thời gian con tàu nhận được tín hiệu từ B trước khi nhận được tín hiệu từ A luôn là $0,0012\text{s}$.

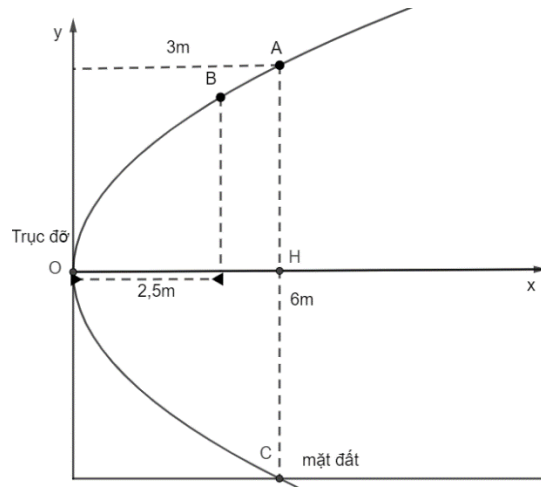
Câu 23: Để nâng đỡ các ống trượt cong có hình là các Parabol thì nhà thầu thi công gia cố các trục đỡ vuông góc với mặt đất. Hình bên dưới mô tả trục đỡ và 1 phần ống trượt với khoảng cách A đến



mặt đất là 6m , đến trục đỡ là 3m . Tính độ cao từ mặt đất tới điểm B trong hình

Lời giải

Vẽ lại hình và thêm hệ trục tọa độ Oxy



Để thấy $AH \perp Ox$ và H là trung điểm của AC nên suy ra $AH = CH = \frac{1}{2} AC = 3 \Rightarrow A(3; 3)$.

Điểm $A(3; 3) \in (P) \Rightarrow 3 = 2p3^2 \Leftrightarrow p = \frac{1}{6}$

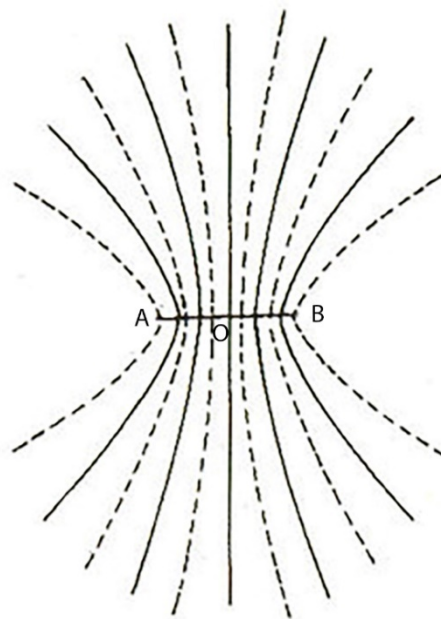
□ Phương trình chính tắc $y = \frac{1}{3}x^2$

Ta thấy độ cao từ điểm B tới mặt đất bằng khoảng cách từ B tới Ox và đoạn CH

* Khoảng cách từ B đến đoạn Ox là tung độ $y_B = \frac{1}{3}(2,5)^2 = \frac{25}{12}$ m

\Rightarrow Khoảng cách từ B đến mặt đất là $\frac{25}{12} + 3 = \frac{61}{12}$ m

Câu 24: Các đường cong hình bên mô tả hiện tượng giao thoa khi hai sóng gặp nhau, với các đường cong tạo thành được gọi là các vân giao thoa có hình dạng là các đường Hypebol. Hãy lập phương trình đường Hypebol của 2 vân giao thoa ngoài cùng đi qua A và B như hình vẽ, biết $AB = 24$, đường Hypebol có tiêu cự bằng 13.



Lời giải

Phương trình Hypebol có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ và $a; b > 0$

Đường cong Hypebol đi qua 2 điểm A, B và $AB = 24$

$$\square A(-12;0) \text{ và } B(12;0) \in (H) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\square \frac{12^2}{a^2} - \frac{0^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{12^2}{a^2} = 1 \Leftrightarrow a^2 = 12^2 \Rightarrow a = 12 (a > 0)$$

$$\text{Ta có } b^2 = c^2 - a^2 = 13^2 - 12^2 = 25$$

$$\text{Vậy Hypebol có dạng } \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

