

## CHUYÊN ĐỀ 4: VECTO

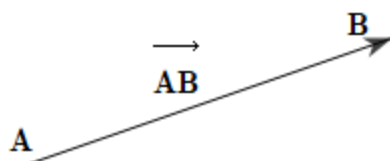
### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I. KHÁI NIỆM VECTO

1. Cho đoạn thẳng  $AB$ . Nếu ta chọn điểm  $A$  làm điểm đầu, điểm  $B$  làm điểm cuối thì ta được đoạn thẳng  $AB$  có hướng từ  $A$  đến  $B$ . Đoạn thẳng có định hướng  $AB$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$  và được gọi là vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

2.

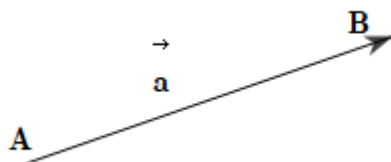
- Vectơ có điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là vectơ  $\overrightarrow{AB}$



- Đường thẳng đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  gọi là **giá** của vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

- Độ dài của đoạn thẳng  $AB$  gọi là **độ dài** của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và được kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ . Như vậy ta có:  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ .

3. Một vectơ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối có thể viết là  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$



4. Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị.

5. Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

6. Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.

7. Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

8. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .

9. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **đối nhau** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = -\vec{b}$ . Khi đó, vectơ  $\vec{b}$  được gọi là **vector đối** của vectơ  $\vec{a}$ .

10. Cho vectơ  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho:  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

11. Với một điểm  $A$  bất kì, ta quy ước có một vectơ đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là  $A$ . Vectơ này được kí hiệu là  $\overrightarrow{AA}$  và gọi là vectơ-không. Ta kí hiệu vectơ-không là  $\vec{0}$ . Như vậy  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$  với mọi điểm  $A, B, C, \dots$

12. Vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng hướng với mọi vectơ.

## II. CỘNG, TRỪ HAI VECTO

### 1. Quy tắc ba điểm

Với ba điểm  $A, B, C$ , ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

### 2. Quy tắc hình bình hành

Nếu  $OABC$  là hình bình hành thì ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$ .

### 3. Tính chất của phép cộng các vector

- Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- Với mọi vector  $\vec{a}$ , ta luôn có:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .

### 4. Hiệu của hai vector

Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Hiệu của hai vector  $\vec{a}$  và

$\vec{b}$  là vector  $\vec{a} + (-\vec{b})$  và kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

**Chú ý:** Cho ba điểm  $O, A, B$  như Hình 4, ta có  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .

### 5. Tính chất vector của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

## III. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

### 1. Tích của một số với một vector và các tính chất

- Cho số  $k$  khác 0 và vector  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tích của số  $k$  với vector  $\vec{a}$  là một vector, kí hiệu là  $k\vec{a}$ .

Vector  $k\vec{a}$  cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k| \cdot |\vec{a}|$ .

Quy ước:  $0\vec{a} = \vec{0}$  và  $k\vec{0} = \vec{0}$ .

- Với hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bất kì, với mọi số thực  $h$  và  $k$ , ta có:

-  $\bullet k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;  $\bullet (h + k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ ;  $\bullet h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$ ;

-  $\bullet 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;  $\bullet (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ .

### 2. Điều kiện để hai vector cùng phương

Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi có một số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

### 3. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k$  khác 0 để  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

## IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

## 1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ .

Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là **góc giữa hai vectơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$

Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

*Chú ý:*

- Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $0$ .
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $180^\circ$ .
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  hoặc  $\vec{b}$  là vectơ  $\vec{0}$  thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tùy ý (từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ ).

## 2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ .

**Tích vô hướng** của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

*Chú ý:*

- Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $\vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ , ta có  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  thì tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$ .  
Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ . Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

## 3. Tính chất của tích vô hướng

- Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$ , ta có:

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \quad \bullet \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}; \quad \bullet (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b}).$$

- Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ, ta suy ra:

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \quad \bullet (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$\bullet (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

## 4. Áp dụng của tích vô hướng

Trong Vật lí, tích vô hướng giúp tính công  $A$  sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ dịch chuyển là vector  $\vec{d}$ . Ta có công thức:  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ .

## B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

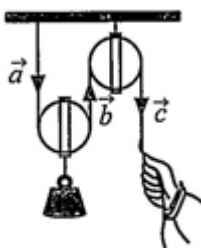
**Câu 1:** Treo một vật có khối lượng  $10\text{kg}$  vào một sợi dây (Hình 30). Sử dụng vector  $\vec{P}$  để biểu diễn trọng lực, vector  $\vec{T}$  để biểu diễn lực căng của dây tác dụng lên vật đó. Chọn các khẳng định đúng trong các phát biểu sau:



Hình 30

- a)  $\vec{P}$  có phương thẳng đứng;
- b)  $\vec{T}$  có phương thẳng đứng;
- c)  $\vec{P}$  có hướng từ trên xuống dưới;
- d)  $\vec{P}$  có hướng từ dưới lên trên;
- e)  $\vec{T}$  có hướng từ trên xuống dưới; g)  $\vec{T}$  có hướng từ dưới lên trên.

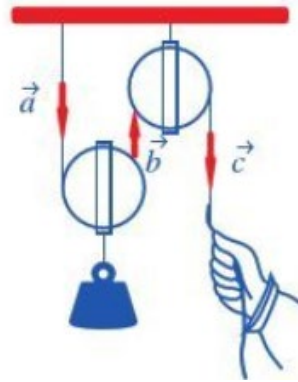
**Câu 2:** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (Hình 31).



Hình 31

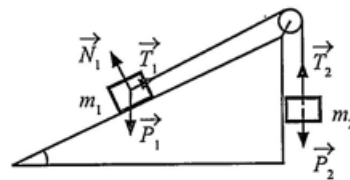
- a) Hãy chỉ ra các cặp vector cùng phương.
- b) Trong các cặp vector đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng?

**Câu 3:** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vectoo  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (hình)



- a) Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng phương.  
 b) Trong các cặp vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.

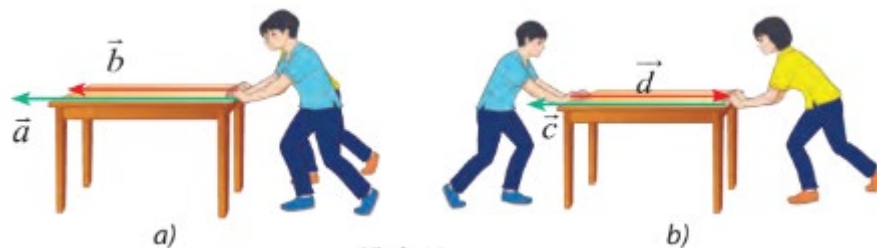
**Câu 4:** Trong mặt phẳng nghiêng không có ma sát, cho hệ vật  $m_1, m_2$ , hai vật nối với nhau bằng một sợi dây không dẫn vắt qua ròng rọc (Hình 32). Giả sử bỏ qua khối lượng của dây và ma sát của ròng rọc.



Hình 32

- a) Tìm các cặp vectơ cùng phương trong các vectơ ở Hình 32.  
 b) Những cặp vectơ cùng phương đó có cùng hướng không?

**Câu 5:** Tìm các lực cùng hướng và ngược hướng trong số các lực đẩy được biểu diễn bằng các vectơ trong hình



**Câu 6:** Trên biển Đông, một tàu chuyển động đều từ vị trí  $A$  theo hướng  $N20^\circ E$  với vận tốc  $20\text{ km/h}$ . Sau 2 giờ, tàu đến được vị trí  $B$ . Hỏi  $A$  cách  $B$  bao nhiêu kilômét và về hướng nào so với  $B$ ?

**Câu 7:** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là  $10\text{ km/h}$ . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc  $40\text{ km/h}$  so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

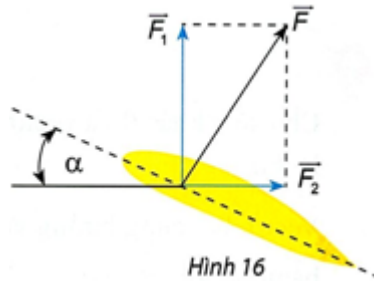
Vậy vận tốc của ca nô so với bờ sông theo hướng từ  $A$  đến  $C$  có độ lớn là  $10\sqrt{17}\text{ km/h}$ .

**Câu 8:** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là  $10\text{ km/h}$ . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc  $40\text{ km/h}$  so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

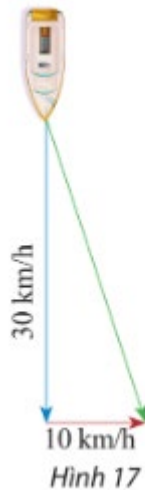
**Câu 9:** Một máy bay có vectơ vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vectơ theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



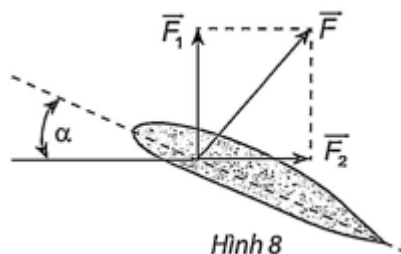
**Câu 10:** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$ , lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  (Hình 16). Cho biết  $\alpha = 30^\circ$  và  $|\vec{F}| = a$ . Tính  $|\vec{F}_1|$  và  $|\vec{F}_2|$  theo  $a$ .



**Câu 11:** Một con tàu có vectơ vận tốc chỉ theo hướng nam, vận tốc của dòng nước là một vectơ theo hướng đông như hình 17. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



**Câu 12:** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$ , lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  (Hình 8). Cho biết  $\alpha = 45^\circ$  và  $|\vec{F}| = a$ . Tính  $|\vec{F}_1|$  và  $|\vec{F}_2|$  theo  $a$ .



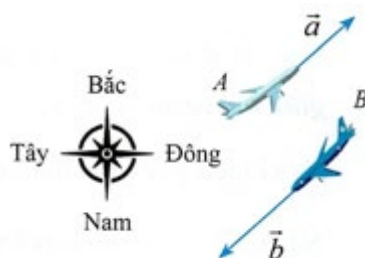
Hình 8

**Câu 13:** Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước.



**Câu 14:** Máy bay  $A$  bay với tốc độ  $a \text{ km/h}$ , máy bay  $B$  bay ngược hướng và có tốc độ gấp năm lần máy bay  $A$ . Biểu diễn vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$  theo vectơ vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay  $A$ .

**Câu 15:** Máy bay  $A$  đang bay về hướng Đông Bắc với tốc độ  $600 \text{ km/h}$ . Cùng lúc đó, máy bay  $B$  đang bay về hướng Tây Nam với tốc độ  $800 \text{ km/h}$ . Biểu diễn vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$  theo vectơ vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay  $A$



**Câu 16:** Máy bay  $A$  bay với vận tốc  $\vec{a}$ , máy bay  $B$  bay cùng hướng và có tốc độ chỉ bằng một nửa máy bay  $A$ . Biểu diễn vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$  theo vectơ vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay  $A$ .

**Câu 17:** Một vật đồng chất được thả vào một cốc chất lỏng. Ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng. Tìm mối liên hệ giữa trọng lực  $\vec{P}$  của vật và lực đẩy Archimedes  $\vec{F}$  mà chất lỏng tác động lên vật. Tính tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng.

**Câu 18:** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $700 \text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $40 \text{ km/h}$  (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị  $\text{km/h}$ ).

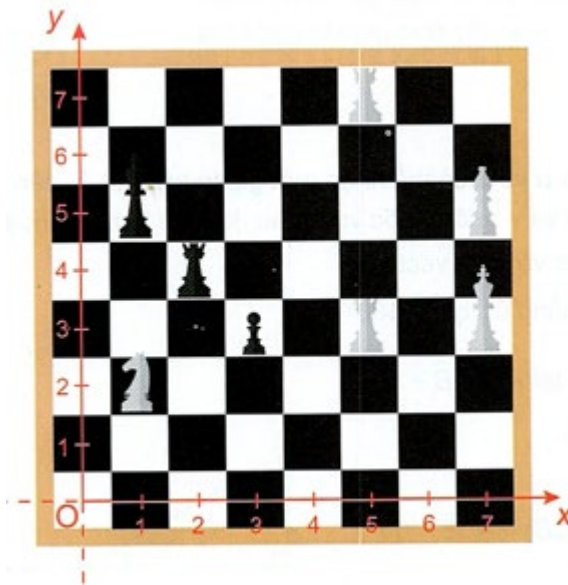


**Câu 19:** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $650\text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $35\text{ km/h}$ . Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị  $\text{km/h}$ ).

**Câu 20:** một đoạn  $100\text{ m}$ . Biết lực hợp  $\vec{F}$  với hướng dịch chuyển là một góc  $60^\circ$ . Tính công sinh bởi lực  $\vec{F}$

**Câu 21:** Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí  $A(1;2)$  chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vector  $\vec{v} = (3;4)$ . Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

**Câu 22:** Trong hình, quân mã đang ở vị trí có tọa độ  $(1;2)$ . Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



## CHUYÊN ĐỀ 4: VECTO

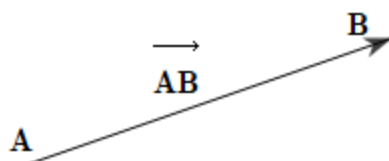
### A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

#### I. KHÁI NIỆM VECTO

1. Cho đoạn thẳng  $AB$ . Nếu ta chọn điểm  $A$  làm điểm đầu, điểm  $B$  làm điểm cuối thì ta được đoạn thẳng  $AB$  có hướng từ  $A$  đến  $B$ . Đoạn thẳng có định hướng  $AB$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$  và được gọi là vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

2.

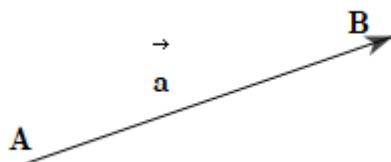
- Vectơ có điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là vectơ  $\overrightarrow{AB}$



- Đường thẳng đi qua hai điểm  $A$  và  $B$  gọi là **giá** của vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

- Độ dài của đoạn thẳng  $AB$  gọi là **độ dài** của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và được kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ . Như vậy ta có:  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ .

3. Một vectơ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối có thể viết là  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}, \vec{y}, \dots$



4. Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị.

5. Hai vectơ được gọi là **cùng phương** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

6. Nếu hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.

7. Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

8. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .

9. Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là **đối nhau** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài, kí hiệu  $\vec{a} = -\vec{b}$ . Khi đó, vectơ  $\vec{b}$  được gọi là **vector đối** của vectơ  $\vec{a}$ .

10. Cho vectơ  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho:  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

11. Với một điểm  $A$  bất kì, ta quy ước có một vectơ đặc biệt mà điểm đầu và điểm cuối đều là  $A$ . Vectơ này được kí hiệu là  $\overrightarrow{AA}$  và gọi là vectơ-không. Ta kí hiệu vectơ-không là  $\vec{0}$ . Như vậy  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \dots$  với mọi điểm  $A, B, C, \dots$

12. Vectơ-không có độ dài bằng 0 và cùng hướng với mọi vectơ.

## II. CỘNG, TRỪ HAI VECTO

### 1. Quy tắc ba điểm

Với ba điểm  $A, B, C$ , ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .

### 2. Quy tắc hình bình hành

Nếu  $OABC$  là hình bình hành thì ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB}$ .

### 3. Tính chất của phép cộng các vector

- Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ ;
- Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ ;
- Với mọi vector  $\vec{a}$ , ta luôn có:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$ .

### 4. Hiệu của hai vector

Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Hiệu của hai vector  $\vec{a}$  và

$\vec{b}$  là vector  $\vec{a} + (-\vec{b})$  và kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

**Chú ý:** Cho ba điểm  $O, A, B$  như Hình 4, ta có  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .

### 5. Tính chất vector của trung điểm đoạn thẳng và trọng tâm tam giác

Điểm  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ .

Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

## III. TÍCH CỦA MỘT VECTO VỚI MỘT SỐ

### 1. Tích của một số với một vector và các tính chất

- Cho số  $k$  khác 0 và vector  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tích của số  $k$  với vector  $\vec{a}$  là một vector, kí hiệu là  $k\vec{a}$ .

Vector  $k\vec{a}$  cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k > 0$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k < 0$  và có độ dài bằng  $|k| \cdot |\vec{a}|$ .

Quy ước:  $0\vec{a} = \vec{0}$  và  $k\vec{0} = \vec{0}$ .

- Với hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bất kì, với mọi số thực  $h$  và  $k$ , ta có:

-  $\bullet k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$ ;  $\bullet (h+k)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$ ;  $\bullet h(k\vec{a}) = (hk)\vec{a}$ ;

-  $\bullet 1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ ;  $\bullet (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$ .

### 2. Điều kiện để hai vector cùng phương

Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ( $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ ) cùng phương khi và chỉ khi có một số  $k$  sao cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ .

### 3. Điều kiện để ba điểm thẳng hàng

Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi có số  $k$  khác 0 để  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ .

## IV. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO

## 1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$ .

Góc  $\widehat{AOB}$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là **góc giữa hai vectơ**  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

Ta kí hiệu góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$

Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .

*Chú ý:*

- Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .
- Góc giữa hai vectơ cùng hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $0$ .
- Góc giữa hai vectơ ngược hướng và khác  $\vec{0}$  luôn bằng  $180^\circ$ .
- Trong trường hợp có ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  hoặc  $\vec{b}$  là vectơ  $\vec{0}$  thì ta quy ước số đo góc giữa hai vectơ đó là tùy ý (từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$ ).

## 2. Tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ .

**Tích vô hướng** của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

*Chú ý:*

- Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $\vec{0}$ , ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Với hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác  $\vec{0}$ , ta có  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .
- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  thì tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$ .

Ta có  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$ . Vậy bình phương vô hướng của một vectơ luôn bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

## 3. Tính chất của tích vô hướng

- Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  bất kì và mọi số  $k$ , ta có:

$$\bullet \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \quad \bullet \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}; \quad \bullet (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b}).$$

- Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ, ta suy ra:

$$- \bullet (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2; \quad \bullet (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$$

$$- \bullet (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$$

## 4. Áp dụng của tích vô hướng

Trong Vật lí, tích vô hướng giúp tính công  $A$  sinh bởi một lực  $\vec{F}$  có độ dịch chuyển là vector  $\vec{d}$ . Ta có công thức:  $A = \vec{F} \cdot \vec{d}$ .

## B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

**Câu 1:** Treo một vật có khối lượng  $10\text{kg}$  vào một sợi dây (Hình 30). Sử dụng vector  $\vec{P}$  để biểu diễn trọng lực, vector  $\vec{T}$  để biểu diễn lực căng của dây tác dụng lên vật đó. Chọn các khẳng định đúng trong các phát biểu sau:



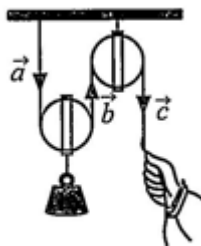
Hình 30

- a)  $\vec{P}$  có phương thẳng đứng;
- b)  $\vec{T}$  có phương thẳng đứng;
- c)  $\vec{P}$  có hướng từ trên xuống dưới;
- d)  $\vec{P}$  có hướng từ dưới lên trên;
- e)  $\vec{T}$  có hướng từ trên xuống dưới; g)  $\vec{T}$  có hướng từ dưới lên trên.

### Giải

Các phát biểu đúng là  $a, b, c, g$ .

**Câu 2:** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (Hình 31).



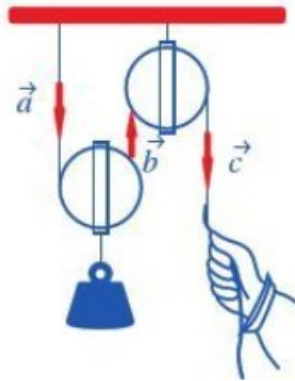
Hình 31

- a) Hãy chỉ ra các cặp vector cùng phương.
- b) Trong các cặp vector đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng?

### Giải

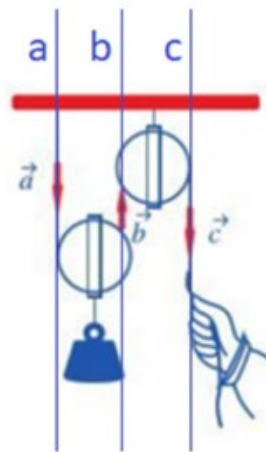
- a) Các cặp vector cùng phương là  $\vec{a}$  và  $\vec{b}, \vec{b}$  và  $\vec{c}, \vec{c}$  và  $\vec{a}$ .
- b) Cặp vector cùng hướng là  $\vec{c}$  và  $\vec{a}$ . Các cặp vector ngược hướng là  $\vec{a}$  và  $\vec{b}, \vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

**Câu 3:** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (hình)



- Hãy chỉ ra các cặp vectơ cùng phương.
- Trong các cặp vectơ đó, cho biết chúng cùng hướng hay ngược hướng.

**Lời giải**



Gọi  $a, b, c$  là các đường thẳng lần lượt chứa các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Khi đó:  $a, b, c$  lần lượt là giá của các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

a) Dễ thấy:  $a // b // c$

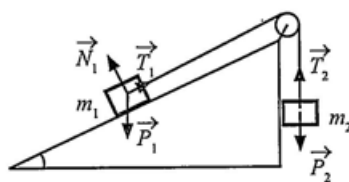
$\Rightarrow$  Ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  cùng phương với nhau.

Vậy các cặp vectơ cùng phương là:  $\vec{a}$  và  $\vec{b}, \vec{a}$  và  $\vec{c}, \vec{b}$  và  $\vec{c}$ .

b) Quan sát ba vectơ, ta thấy: vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng xuống còn vectơ  $\vec{b}$  hướng lên trên.

Vậy vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$  cùng hướng, vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng, vectơ  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$  ngược hướng.

**Câu 4:** Trong mặt phẳng nghiêng không có ma sát, cho hệ vật  $m_1, m_2$ , hai vật nối với nhau bằng một sợi dây không dẫn vắt qua ròng rọc (Hình 32). Giả sử bỏ qua khối lượng của dây và ma sát của ròng rọc.



Hình 32

- a) Tìm các cặp vectơ cùng phương trong các vectơ ở Hình 32.  
 b) Những cặp vectơ cùng phương đó có cùng hướng không?

### Lời giải

Học sinh tự làm.

- Câu 5:** Tìm các lực cùng hướng và ngược hướng trong số các lực đẩy được biểu diễn bằng các vectơ trong hình



### Lời giải

Nhận xét: giá của 4 lực đều song song hoặc trùng nhau, do đó 4 vectơ là cùng phương.

Vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  có chiều từ phải sang trái còn vectơ  $\vec{d}$  có chiều từ trái sang phải

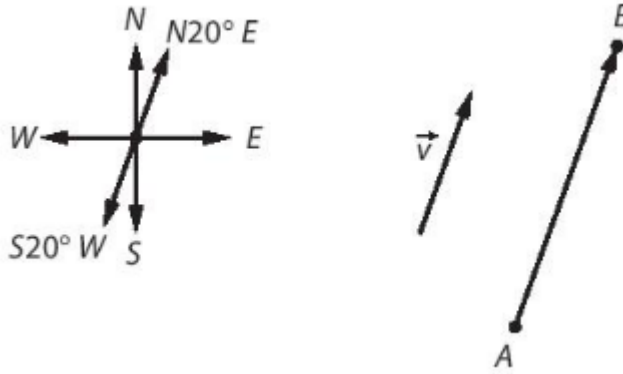
Vậy các vectơ (hay lực) cùng hướng với nhau là vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

Các vectơ (lực)  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ngược hướng với vectơ  $\vec{d}$ .

- Câu 6:** Trên biển Đông, một tàu chuyên động đều từ vị trí  $A$  theo hướng  $N20^\circ E$  với vận tốc  $20\text{ km/h}$ . Sau 2 giờ, tàu đến được vị trí  $B$ . Hỏi  $A$  cách  $B$  bao nhiêu kilômét và về hướng nào so với  $B$ ?

### Lời giải

Ta sử dụng vectơ  $\vec{v} : |\vec{v}| = 20$  để biểu thị cho vận tốc của tàu, vectơ  $\overline{AB}$  để biểu thị cho quãng đường và hướng chuyển động của tàu từ  $A$  tới  $B$ . Do tàu chuyển động đều từ  $A$ , với vận tốc  $20\text{ km/h}$ , trong 2 giờ tới  $B$ , nên  $AB = |\overline{AB}| = 2|\vec{v}| = 40(\text{km})$ .



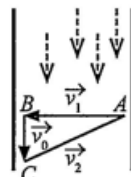
Vậy  $A$  cách  $B$   $40\text{ km}$ .

Do  $B$  ở về hướng  $N20^\circ E$  so với  $A$ , nên  $A$  ở về hướng  $S20^\circ W$  so với  $B$ .

**Câu 7:** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là  $10\text{ km/h}$ . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc  $40\text{ km/h}$  so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

**Lời giải**

Giả sử ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây, từ vị trí  $A$  bên phải con sông sang vị trí  $B$  bên trái con sông (Hình 41).



Hình 41

Gọi  $\vec{v}_0$  là vận tốc của dòng nước so với bờ sông,  $|\vec{v}_0| = 10(\text{km/h})$ ,  $\vec{v}_1$  là vận tốc của ca nô so với mặt nước,  $|\vec{v}_1| = 40(\text{km/h})$ ,  $\vec{v}_2$  là vận tốc của ca nô so với bờ sông.

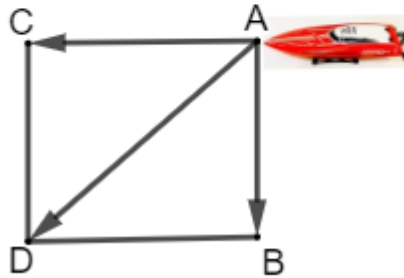
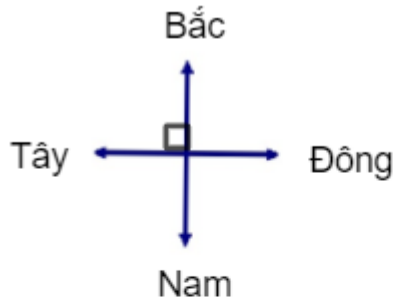
Vì phương của hai vector  $\vec{v}_0, \vec{v}_1$  vuông góc với nhau nên theo định lí Pythagore, ta có:

$$|\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 = |\vec{v}_2|^2 \Rightarrow |\vec{v}_2| = \sqrt{|\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2} = \sqrt{10^2 + 40^2} = 10\sqrt{17}(\text{km/h}).$$

Vậy vận tốc của ca nô so với bờ sông theo hướng từ  $A$  đến  $C$  có độ lớn là  $10\sqrt{17}\text{ km/h}$ .

**Câu 8:** Một dòng sông chảy từ phía bắc xuống phía nam với vận tốc là  $10\text{ km/h}$ . Một chiếc ca nô chuyển động từ phía đông sang phía tây với vận tốc  $40\text{ km/h}$  so với mặt nước. Tìm vận tốc của ca nô so với bờ sông.

**Lời giải**



Ca nô chuyển từ đông sang tây, giả sử ca nô đi theo hướng  $A$  sang  $C$ , khi đó vận tốc so với mặt nước của ca nô được biểu thị bởi  $\vec{v}_1 = \overline{AC}$  và có độ lớn  $|\vec{v}_1| = 40 \text{ km/h}$ , vận tốc dòng chảy được biểu thị bởi  $\vec{v}_2 = \overline{AB}$  và có độ lớn  $|\vec{v}_2| = 10 \text{ km/h}$ .

Khi đó vận tốc của ca nô so với bờ sông được biểu thị bởi  $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$

Ta cần tính độ lớn của vectơ  $\vec{v}$ , hay chính là  $|\vec{v}_1 + \vec{v}_2|$

Dựng hình bình hành ACDB như hình vẽ.

Do hướng nam bắc vuông góc với hướng đông tây nên  $AB$  và  $AC$  vuông góc với nhau.

Suy ra ACDB là hình chữ nhật.

Nên  $AB = CD = 10, AC = BD = 40$ .

Sử dụng định lý Pythagore trong tam giác vuông ACD, ta có:

$$AD^2 = AC^2 + CD^2 = 40^2 + 10^2 = 1700 \Rightarrow AD = \sqrt{1700} = 10\sqrt{17}$$

Lại có do ACDB là hình bình hành nên:  $\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{AB} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$  Do đó:

$$\vec{v} = \overline{AD} \Rightarrow |\vec{v}| = |\overline{AD}| = AD = 10\sqrt{17}$$

Vậy vận tốc của ca nô so với bờ sông là  $10\sqrt{17} \text{ km/h}$ .

**Câu 9:** Một máy bay có vectơ vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vectơ theo hướng đông như Hình 7. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



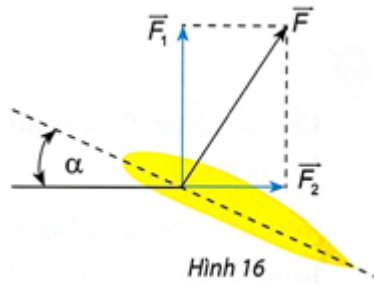
**Lời giải**

Gọi  $\overline{AB}$  và  $\overline{BC}$  lần lượt là vectơ vận tốc của máy bay và vận tốc của gió. Ta có:  
 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ .

Suy ra  $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{200^2 + 60^2} \approx 209(km / h)$ .

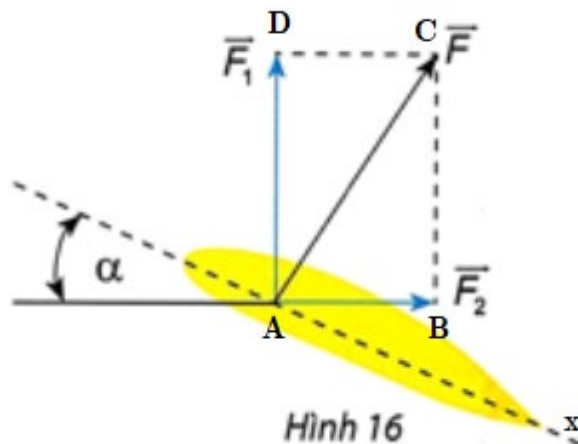
Vận độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên là khoảng  $209 km / h$ .

**Câu 10:** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$ , lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  (Hình 16). Cho biết  $\alpha = 30^\circ$  và  $|\vec{F}| = a$ . Tính  $|\vec{F}_1|$  và  $|\vec{F}_2|$  theo  $a$ .



**Lời giải**

Kí hiệu các điểm như hình dưới



Khi đó các lực  $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$  lần lượt là  $\overline{AC}, \overline{AD}, \overline{AB}$   $\alpha = \widehat{BAx} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{CAB} = 60^\circ$

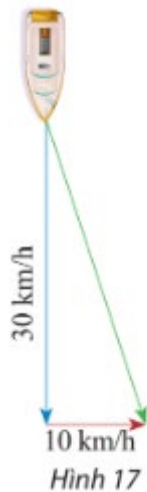
$$AB = AC \cdot \cos \widehat{CAB} = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_2| = |\overline{AB}| = \frac{a}{2} AD = BC = AC \cdot \sin \widehat{CAB} = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_1| = |\overline{AD}| = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

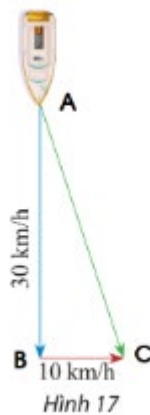
$$\text{Vậy } |\vec{F}_1| = \frac{a\sqrt{3}}{2}; |\vec{F}_2| = \frac{a}{2}$$

**Câu 11:** Một con tàu có vectơ vận tốc chỉ theo hướng nam, vận tốc của dòng nước là một vectơ theo hướng đông như hình 17. Tính độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên.



### Lời giải

Gọi vectơ vận tốc của tàu là  $\overline{AB}$ , vectơ vận tốc của dòng nước là vectơ  $\overline{BC}$



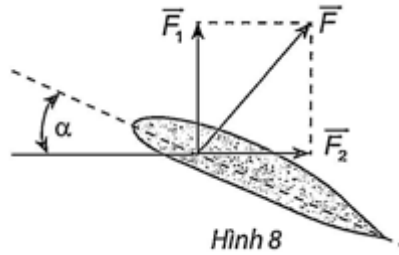
Ta có vectơ tổng là  $\vec{F} = \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

Độ dài vectơ tổng là

$$|\vec{F}| = |\overline{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 10\sqrt{10}(\text{km} / \text{h})$$

Vậy độ dài vectơ tổng là  $10\sqrt{10}(\text{km} / \text{h})$ .

**Câu 12:** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$ , lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  (Hình 8). Cho biết  $\alpha = 45^\circ$  và  $|\vec{F}| = a$ . Tính  $|\vec{F}_1|$  và  $|\vec{F}_2|$  theo  $a$ .



**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cos 45^\circ = \frac{|\vec{F}_2|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_2| = |\vec{F}| \cdot \cos 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\sin 45^\circ = \frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}|} \Rightarrow |\vec{F}_1| = |\vec{F}| \cdot \sin 45^\circ = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

**Câu 13:** Hai con tàu xuất phát cùng lúc từ bờ bên này sang bờ bên kia của dòng sông với vận tốc riêng không đổi và có độ lớn bằng nhau. Hai tàu luôn được giữ lái sao cho chúng tạo với bờ cùng một góc nhọn nhưng một tàu hướng xuống hạ lưu, một tàu hướng lên thượng nguồn (hình bên). Vận tốc dòng nước là đáng kể, các yếu tố bên ngoài khác không ảnh hưởng tới vận tốc của các tàu. Hỏi tàu nào sang bờ bên kia trước.



**Lời giải**

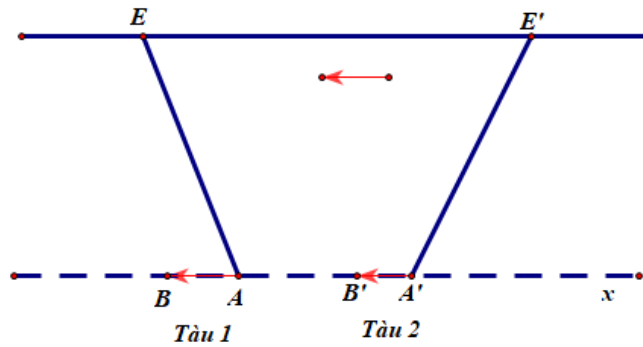
Ta đã biết vectơ dòng nước và hướng di chuyển (tức là vectơ vận tốc thực của hai tàu).

Ta cần xác định vectơ vận tốc của mỗi tàu, chỉ biết chúng có độ lớn bằng nhau.

Giả sử tàu 1 là tàu đi về phía hạ lưu còn tàu 2 là tàu đi về phía thượng nguồn.

Tàu 1 và tàu 2 bắt đầu di chuyển từ điểm  $A$  và  $A'$  ở bờ bên này đến điểm  $E, E'$  ở bờ bên kia.

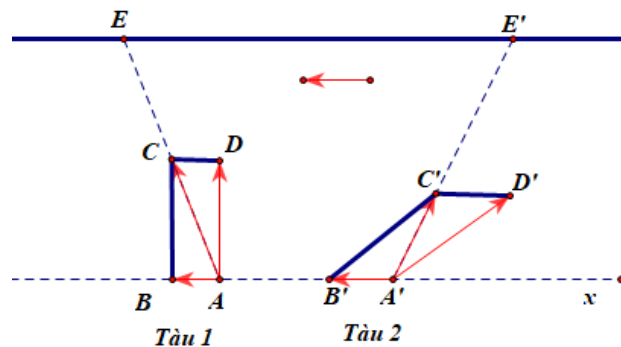
Vecto vận tốc dòng nước tác động lên tàu là như nhau, biểu diễn bởi các vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{A'B'}$



Gọi vectơ vận tốc riêng của hai tàu lần lượt là các vectơ  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{A'D'}$ . Vectơ vận tốc thực của hai tàu là vectơ  $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{A'C'}$ .

Với tàu 1, để xác định các điểm C, D:

Từ B ta kẻ đường vuông góc với bờ, cắt AE tại một điểm, kí hiệu là C. Tiếp theo, dựng hình bình hành ABCD ta được điểm D.



Với tàu 2, để xác định các điểm C', D'

Trên A'E' lấy điểm C' sao cho B'C' = AD. Dựng hình bình hành A'B'C'D', ta được điểm D'.

Giải thích:

Tàu 1: Được dòng nước đẩy theo vectơ  $\overrightarrow{AB}$ , và đi với vận tốc thực là vectơ  $\overrightarrow{AD}$ , khi ấy hướng đi chuyển là vectơ tổng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$  chính là vectơ  $\overrightarrow{AC}$

Tàu 2: Bị dòng nước đẩy theo vectơ  $\overrightarrow{A'B'}$ , và đi với vận tốc thực là vectơ  $\overrightarrow{A'D'}$ , khi ấy hướng đi chuyển là vectơ tổng  $\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'D'}$  chính là vectơ  $\overrightarrow{A'C'}$

Các vectơ  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{A'D'}$  có độ dài bằng nhau (cùng bằng B'C').

Do hai tàu chuyển động theo hướng tạo với bờ cùng một góc nhọn nên quãng đường đi khi chạm bờ bên kia là như nhau. Hay  $AE = A'E'$ .

Tàu nào có độ lớn vận tốc thực lớn hơn thì tàu đó sang bờ bên kia trước.

Xét tam giác A'B'C', theo định lí cosin ta có:

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \cdot B'C' \cdot \cos B'$$

$$\text{Mà } 0^\circ < \widehat{B'} < \widehat{C'A'x} < 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos B' > 0 \Rightarrow A'C'^2 < A'B'^2 + B'C'^2$$

Mặt khác, tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$  nên:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = AB^2 + AD^2 \Rightarrow A'C'^2 < AC^2 \text{ hay } A'C' < AC$$

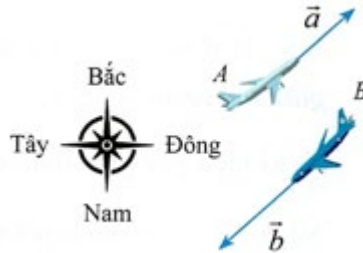
Vậy vận tốc của tàu 1 lớn hơn, nói cách khác tàu đi hướng xuống hạ lưu sẽ sang bờ bên kia trước.

**Câu 14:** Máy bay  $A$  bay với tốc độ  $a \text{ km/h}$ , máy bay  $B$  bay ngược hướng và có tốc độ gấp năm lần máy bay  $A$ . Biểu diễn vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$  theo vectơ vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay  $A$ .

**Lời giải**

Vectơ vận tốc của máy bay  $B$  là:  $\vec{b} = -5\vec{a}$ .

**Câu 15:** Máy bay  $A$  đang bay về hướng Đông Bắc với tốc độ  $600 \text{ km/h}$ . Cùng lúc đó, máy bay  $B$  đang bay về hướng Tây Nam với tốc độ  $800 \text{ km/h}$ . Biểu diễn vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$  theo vectơ vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay  $A$



**Lời giải**

Vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  là vectơ vận tốc của máy bay  $A$  và máy bay  $B$ .

Do đó  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$  lần lượt là độ lớn của vectơ vận tốc tương ứng.

$$\text{Ta có: } |\vec{a}| = 600, |\vec{b}| = 800 \Rightarrow \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{800}{600} = \frac{4}{3}$$

Hai hướng Đông Bắc và Tây Nam là ngược nhau, do đó  $\vec{b} = -\frac{4}{3}\vec{a}$

**Câu 16:** Máy bay  $A$  bay với vận tốc  $\vec{a}$ , máy bay  $B$  bay cùng hướng và có tốc độ chỉ bằng một nửa máy bay  $A$ . Biểu diễn vectơ vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay  $B$  theo vectơ vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay  $A$ .

**Lời giải**

Vectơ vận tốc của máy bay  $B$  là:  $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$ .

**Câu 17:** Một vật đồng chất được thả vào một cốc chất lỏng. Ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng. Tìm mối liên hệ giữa trọng lực  $\vec{P}$  của vật và lực đẩy Archimedes  $\vec{F}$  mà chất lỏng tác động lên vật. Tính tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng.

**Lời giải**

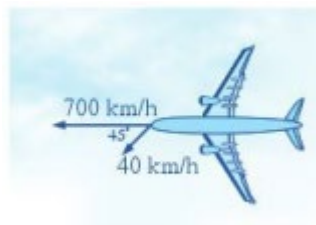
Lực đẩy Archimedes  $\vec{F}_A$  và trọng lực  $\vec{P}$  đều tác động lên vật theo phương thẳng đứng, hai lực này ngược hướng. Do ở trạng thái cân bằng vật nổi (chìm một nửa), nên hai lực này có cường độ bằng nhau.

Gọi  $d$ ,  $d'$  tương ứng là trọng lượng riêng của vật và trọng lượng riêng của chất lỏng: gọi  $V$  là thể tích của vật. Khi đó trọng lượng của vật bằng  $P = |\vec{P}| = dV$ . (1)

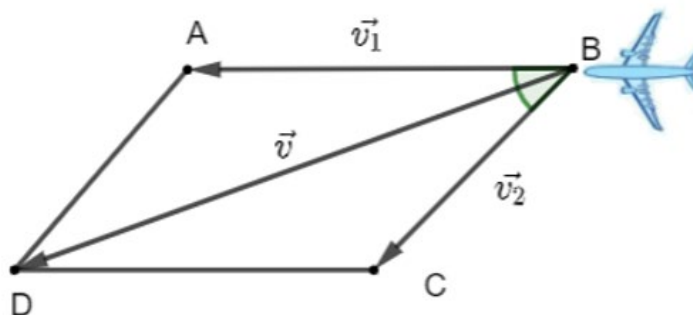
Lực đẩy Archimedes tác động lên vật có cường độ bằng  $F_A = |\vec{F}_a| = d' \cdot \frac{V}{2}$ . (2)

Từ (1) và (2), để ý rằng  $P = F_A$ , suy ra  $\frac{d}{d'} = 2$ .

**Câu 18:** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $700 \text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $40 \text{ km/h}$  (Hình). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị  $\text{km/h}$ ).



**Lời giải**



Khi đó ta có:  $ABCD$  là hình bình hành có  $\widehat{ABC} = 45^\circ$ .

Suy ra:  $\widehat{DAB} = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$ ;  $AD = |\vec{v}_2| = 40$ ,  $AB = |\vec{v}_1| = 700$ .

Ta cần tính độ dài đoạn thẳng  $BD$ , đây chính là độ dài vectơ  $\vec{v}$ .

Áp dụng định lí sin trong tam giác  $ABD$ , ta có:

$$\begin{aligned} BD^2 &= AD^2 + AB^2 - 2 \cdot AD \cdot AB \cdot \cos A \\ &= 40^2 + 700^2 - 2 \cdot 40 \cdot 700 \cdot \cos 135^\circ \approx 531197,98 \end{aligned}$$

Suy ra  $BD \approx 728,83(\text{km/h})$ .

Vậy tốc độ mới của máy bay sau khi gặp gió thổi là  $728,83 \text{ km/h}$ .

**Câu 19:** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ  $650 \text{ km/h}$  thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ  $35 \text{ km/h}$ . Máy bay bị thay đổi vận tốc

sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị  $km/h$ ).

**Lời giải**

Gọi  $\vec{v}_0$  là vận tốc của máy bay khi không có gió,  $|\vec{v}_0| = 650(km/h)$ ;

$\vec{v}_1$  là vận tốc của gió,  $|\vec{v}_1| = 35(km/h)$ ;  $\vec{v}_2$  là vận tốc của máy bay khi có gió.

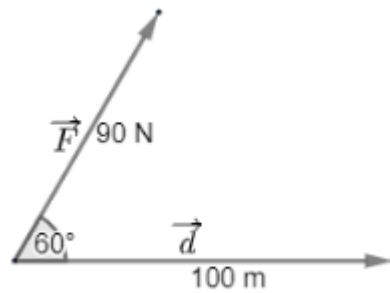
Ta có:  $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$ . Vì  $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45^\circ$  nên

$$\begin{aligned} v_2^2 &= (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)^2 = v_0^2 + v_1^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 45^\circ \\ &= 650^2 + 35^2 + 2 \cdot 650 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455898,36 \end{aligned}$$

Suy ra  $|\vec{v}_2| \approx 675,2(km/h)$ .

**Câu 20:** Một người dùng một lực  $\vec{F}$  có độ lớn là  $90N$  làm một vật dịch chuyển một đoạn  $100m$ . Biết lực hợp  $\vec{F}$  với hướng dịch chuyển là một góc  $60^\circ$ . Tính công sinh bởi lực  $\vec{F}$

**Lời giải**



Công sinh bởi lực  $\vec{F}$  được tính bằng công thức

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500 (J)$$

Vậy công sinh bởi lực  $\vec{F}$  có độ lớn bằng  $4500 (J)$

**Câu 21:** Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí  $A(1;2)$  chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vector  $\vec{v} = (3;4)$ . Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành  $1,5$  giờ.

**Lời giải**

Gọi  $B(x;y)$  là vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành  $1,5$  giờ.

Do tàu khởi hành từ  $A$  đi chuyển với vận tốc được biểu thị bởi vector  $\vec{v} = (3;4)$  nên cứ sau mỗi giờ, tàu đi chuyển được một quãng bằng  $|\vec{v}|$ .

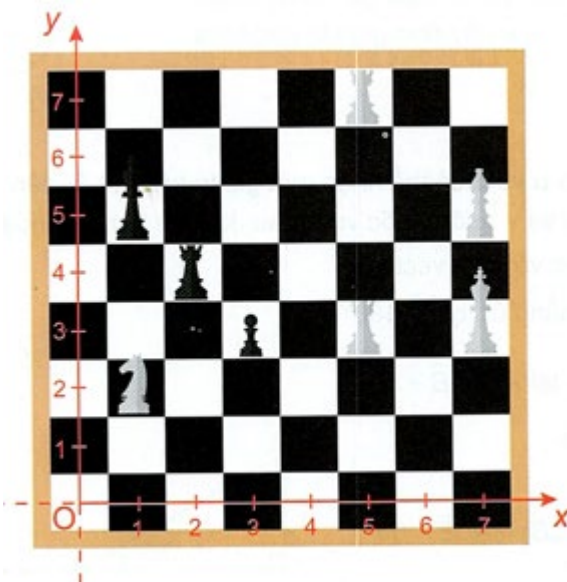
Vậy sau  $1,5$  giờ tàu di chuyển tới  $B$ , ta được:  $\overline{AB} = 1,5 \cdot \vec{v}$

$$\Leftrightarrow (x-1; y-2) = 1,5.(3;4)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=4,5 \\ y-2=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5,5 \\ y=8 \end{cases}$$

Vậy sau 1,5 tàu ở vị trí (trên mặt phẳng tọa độ) là  $B(5,5;8)$ .

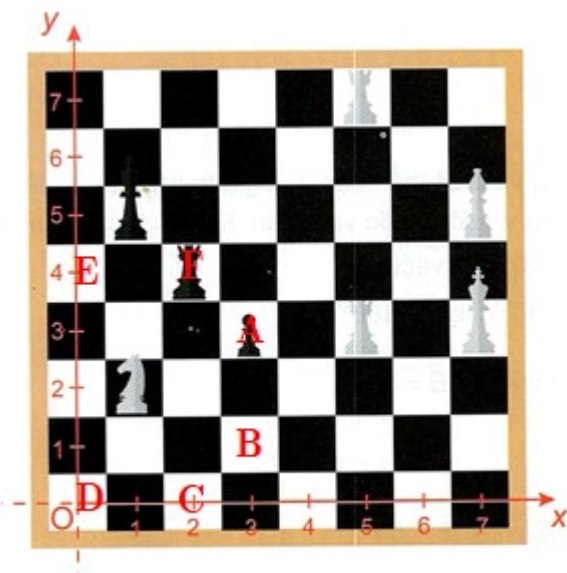
**Câu 22:** Trong hình, quân mã đang ở vị trí có tọa độ  $(1;2)$ . Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



### Lời giải

a) Quân mã đi theo đường chéo hình chữ nhật có chiều dài 3 ô, chiều rộng 2 ô.

Do đó, từ vị trí hiện tại, quân mã có thể đi đến các vị trí A, B, C, D, E, F như dưới đây:



A có tọa độ  $(3;3)$

B có tọa độ  $(3;1)$

C có tọa độ  $(2;0)$

D có tọa độ  $(0;0)$

E có tọa độ  $(0; 4)$

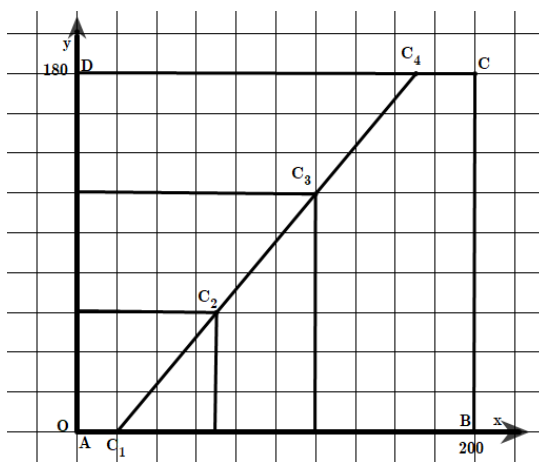
F có tọa độ  $(2; 4)$

Vậy quân mã có thể đi đến các vị trí  $A(3;3), B(3;1), C(2;0), D(0;0), E(0;4), F(2;4)$ .

**Câu 23:** Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật  $ABCD$  với độ dài  $AB = 200m, AD = 180m$ , người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều, cột thứ nhất nằm trên bờ  $AB$  và cách đỉnh  $A$  khoảng cách  $20m$ , cột thứ tư nằm trên bờ  $CD$  và cách đỉnh  $C$  khoảng cách  $30m$ . Tính các khoảng cách từ vị trí các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ  $AB, AD$ .

### Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho  $A(0;0), B(200;0), C(200;180), D(0;180)$ . Gọi vị trí các cột điện được trồng là  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .



Do  $C_1$  thuộc cạnh  $AB$  và  $AC_1 = 20$  nên  $C_1(20;0)$ , do  $C_4$  thuộc cạnh  $CD$  và  $C_4C = 30$  nên  $C_4(170;180)$ .

Suy ra  $\overline{C_1C_4} = (150;180)$ . (1)

Do bốn cột điện  $C_1, C_2, C_3, C_4$  được trồng liên tiếp, cách đều trên một đường thẳng, nên

$$\overline{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overline{C_1C_4} \text{ và } \overline{C_1C_3} = \frac{2}{3}\overline{C_1C_4}.$$

Gọi tọa độ của  $C_2$  đối với hệ trục đang xét là  $(x; y)$ . Khi đó  $\overline{C_1C_2} = (x-20; y)$ .

$$\text{Từ đó và (1), do } \overline{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overline{C_1C_4} \text{ nên } \begin{cases} x-20 = \frac{150}{3} = 50 \\ y = \frac{180}{3} = 60. \end{cases}$$

Suy ra  $x = 70, y = 60$ , tức là  $C_2(70;60)$ .

Khi đó  $d(C_2; AB) = d(C_2; Ox) = 60(m)$  và  $d(C_2; AD) = d(C_2; Oy) = 70(m)$ .

Hoàn toàn tương tự, cũng được  $d(C_3; AB) = 120(m), d(C_3; AD) = 120(m)$ .