

## BÀI

## 01

## CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

## A

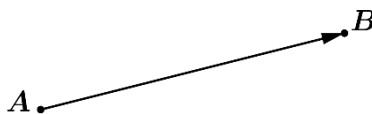
## LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

## 1 Khái niệm vectơ

Cho đoạn thẳng  $AB$ . Nếu chọn điểm  $A$  làm điểm đầu, điểm  $B$  làm điểm cuối thì đoạn thẳng  $AB$  có hướng từ  $A$  đến  $B$ . Khi đó ta nói  $AB$  là một đoạn thẳng có hướng.

## a) Định nghĩa

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.



## b) Kí hiệu

Vectơ có điểm đầu  $A$  và điểm cuối  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là “vectơ  $AB$ ”.

Vectơ còn được kí hiệu là  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , ... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

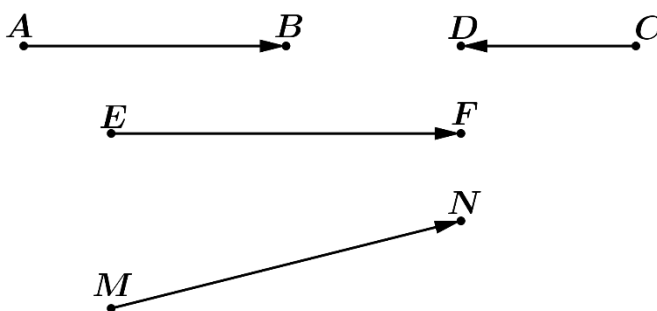
## c) Độ dài vectơ

**Độ dài vectơ:** Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  được kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ , như vậy  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .

Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị.

## 2 Hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng, hai vectơ bằng nhau



**Giá của vectơ:** Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.



**Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng:** Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.

**Nhận xét:** Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

**Hai vectơ bằng nhau:** Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài. Kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .

**Chú ý:** Khi cho trước vectơ  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , thì ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

### 3 Vectơ không

Vectơ không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ta kí hiệu là  $\vec{0}$ .

Ta quy ước vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và có độ dài bằng 0.

Như vậy  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$  và  $\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$ .

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Xác định vectơ. Xác định phương, hướng, độ dài của vectơ****Phương pháp:**

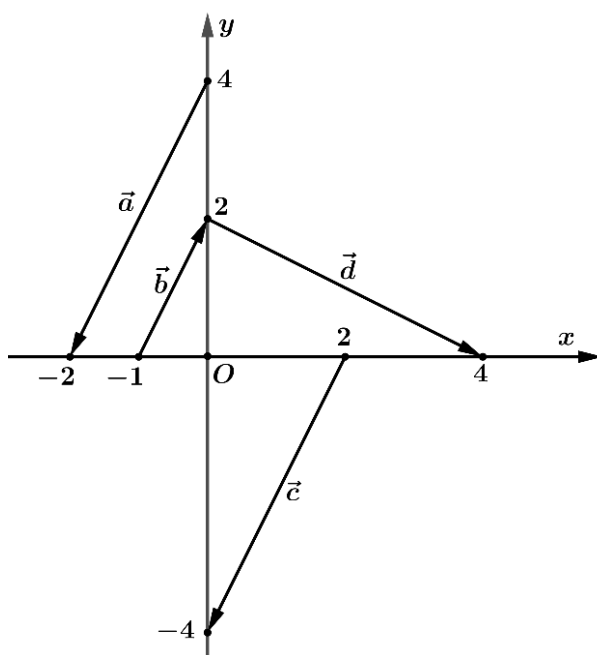
- Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa.
- Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Với ba điểm phân biệt  $A, B, C$  có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ- không có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ ba điểm trên?

**Bài tập 2:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Tìm các cặp vectơ nào cùng hướng.

**Bài tập 3:** Hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau trong hình dưới đây:



**Bài tập 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Hãy chỉ ra tập hợp  $S$  chứa tất cả các vectơ khác vectơ  $\vec{0}$ , có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp  $\{A, B, C, D, O\}$ . Hãy chia tập  $S$  thành các nhóm sao cho hai vectơ thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.

**Bài tập 5:** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Tìm số các vectơ khác vectơ không, cùng phương với vectơ  $\vec{OB}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

**Bài tập 6:** Cho điểm  $A$  và vectơ  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tìm điểm  $M$  sao cho:

- $\vec{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$
- $\vec{AM}$  cùng hướng với  $\vec{a}$



**Bài tập 7:** Cho các dữ kiện dưới đây. Thực hiện các yêu cầu của bài toán

- a) Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 4$  và  $AC = 5$ . Tìm độ dài vector  $\overrightarrow{BC}$ .
- b) Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = AC = 4$ . Tính  $|\overrightarrow{BC}|$
- c) Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A, B$ ,  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ ,  $H$  là chân đường cao hạ từ  $A$  xuống  $CD$  của tam giác  $ACD$ . Tính độ dài của  $\overrightarrow{AH}$ .
- b) Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $\Delta ABC$ . Tính độ dài của  $\overrightarrow{BG}$ .

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

- Câu 1:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Có bao nhiêu vector khác vector - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?  
A. 4. B. 6. C. 8. D. 12.
- Câu 2:** Cho hai vector khác vector - không, không cùng phương. Có bao nhiêu vector khác  $\vec{0}$  cùng phương với cả hai vector đó?  
A. 2. B. 1. C. không có. D. vô số.
- Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Số vector khác  $\vec{0}$ , cùng phương với vector  $\overrightarrow{AB}$  và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành  $ABCD$  là  
A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.
- Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ , có thể xác định được bao nhiêu vector khác vector không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh  $A, B, C$ ?  
A. 3. B. 6. C. 4. D. 9.
- Câu 5:** Vector có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là  $B$  được kí hiệu là:  
A.  $AB$ . B.  $\overrightarrow{AB}$ . C.  $|\overrightarrow{AB}|$ . D.  $\overrightarrow{BA}$ .
- Câu 6:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó các cặp vector nào sau đây cùng hướng?  
A.  $\overrightarrow{MP}$  và  $\overrightarrow{PN}$ . B.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PN}$ . C.  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{NP}$ . D.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .
- Câu 7:** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC$  của tam giác đều  $ABC$ . Hỏi cặp vector nào sau đây cùng hướng?  
A.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{CB}$ . B.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MB}$ . C.  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$ . D.  $\overrightarrow{AN}$  và  $\overrightarrow{CA}$ .
- Câu 8:** Mệnh đề nào sau đây đúng?  
A. Có duy nhất một vector cùng phương với mọi vector.  
B. Có ít nhất hai vector có cùng phương với mọi vector.  
C. Có vô số vector cùng phương với mọi vector.  
D. Không có vector nào cùng phương với mọi vector.



- Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Xác định các vector cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$ .
- A.  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$       B.  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$   
 C.  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$       D.  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$
- Câu 10:** Cho ba điểm  $A, B, C$  cùng nằm trên một đường thẳng. Các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  cùng hướng khi và chỉ khi:
- A. Điểm  $B$  thuộc đoạn  $AC$       B. Điểm  $A$  thuộc đoạn  $BC$   
 C. Điểm  $C$  thuộc đoạn  $AB$       D. Điểm  $A$  nằm ngoài đoạn  $BC$
- Câu 11:** Cho tam giác không cân  $ABC$ . Gọi  $H, O$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?
- A. Tam giác  $ABC$  nhọn thì  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng hướng.  
 B.  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  luôn cùng hướng.  
 C.  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng phương nhưng ngược hướng.  
 D.  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  có cùng giá
- Câu 12:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AC}$ .
- A.  $a$ .      B.  $a\sqrt{2}$ .      C.  $a\sqrt{3}$ .      D.  $2a$ .
- Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh bằng  $a\sqrt{3}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ . Tính độ dài vector  $\overrightarrow{BM}$ .
- A.  $V = \frac{3a}{2}$ .      B.  $V = 3a$ .      C.  $V = a\sqrt{3}$ .      D.  $V = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .
- Câu 14:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a\sqrt{2}$  và góc  $ABC$  bằng  $60^\circ$ . Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AC}$ .
- A.  $a$ .      B.  $a\sqrt{3}$ .      C.  $a\sqrt{2}$ .      D.  $2a$ .
- Câu 15:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và góc  $ABC$  bằng  $60^\circ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{AC} = a$ .      B.  $|\overrightarrow{BD}| = a\sqrt{3}$ .      C.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .      D.  $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$ .
- Câu 16:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Vector nào sau đây cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ ?
- A.  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$ .      B.  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ .      C.  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$ .      D.  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}$ .
- Câu 17:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Vector nào sau đây bằng với  $\overrightarrow{AB}$ ?
- A.  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}$ .      B.  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$ .  
 C.  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DE}$ .      D.  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BC}$ .
- Câu 18:** Cho tứ giác  $EFGH$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $EF, FG, GH, HE$ . Các vector nào sau đây cùng hướng?
- A.  $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{ME}$ .      B.  $\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{HF}, \overrightarrow{PN}$ .      C.  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{QP}$ .      D.  $\overrightarrow{FN}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{NG}$ .
- Câu 19:** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ . Biết  $AD = 2a, AB = BC = a$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.  $|\overrightarrow{BM}| = a\sqrt{3}$ .      B.  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}$ .      C.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$ .      D.  $|\overrightarrow{CD}| = 2a$ .

**Câu 20:** Cho ba điểm phân biệt thẳng hàng  $A, B, C$  và  $M$  là điểm bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\exists k \neq 0 : \overrightarrow{MA} = k \cdot \overrightarrow{MB}$ .  
 B.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .  
 C.  $\exists k \neq 0 : \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = k \cdot \overrightarrow{MC}$ .  
 D.  $\exists k \neq 0 : \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$ .

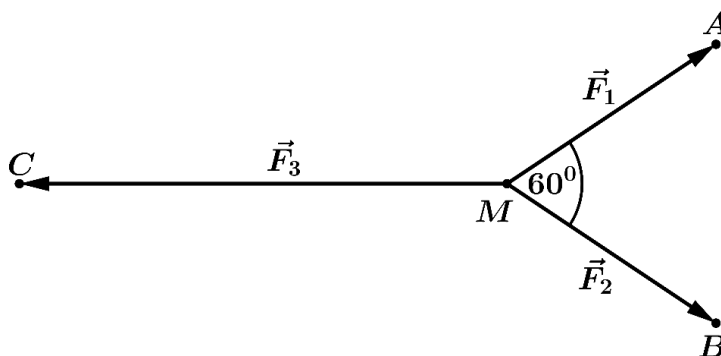
**Câu 21:** Cho  $\Delta ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là các điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$ ,  $2\overrightarrow{NA} + 3\overrightarrow{NC} = \vec{0}$  và  $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{BP}$  ( $k \neq 0$ ). Giá trị  $k$  để ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng bằng

- A.  $k = \frac{2}{5}$ .  
 B.  $k = \frac{2}{3}$ .  
 C.  $k = \frac{1}{3}$ .  
 D.  $k = \frac{3}{5}$ .

**Câu 22:** Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  lần lượt là  $300(N)$  và  $400(N)$ .  $\angle AMB = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.

- A.  $1000N$   
 B.  $700N$ .  
 C.  $100N$   
 D.  $500N$

**Câu 23:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $25N$  và góc  $\angle AMB = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $\vec{F}_3$  là



- A.  $50\sqrt{3}N$ .  
 B.  $50\sqrt{2}N$ .  
 C.  $25\sqrt{3}N$ .  
 D.  $100\sqrt{3}N$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hình thang  $ABCD$  với hai đáy là  $AB$  và  $CD$ . Biết rằng nếu  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$  thì  $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$ .

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  có độ dài bằng nhau  
 b) Hình thang  $ABCD$  là hình thang cân  
 c) Hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$  có độ dài không bằng nhau  
 d) Nếu  $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$  thì  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$

**Câu 2:** Cho  $\Delta ABC$ , gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Khi đó:

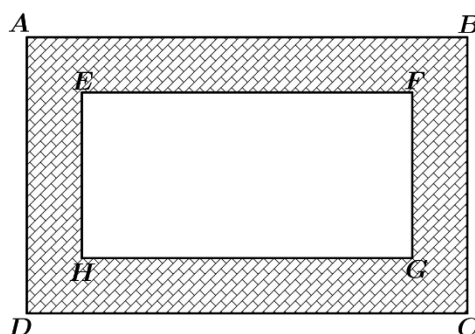
- a) vector  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương với vector  $\overrightarrow{MN}$   
 b) Có 6 vector khác vector không và cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$  có điểm đầu, điểm cuối lấy từ các điểm đã cho.



c) vectơ  $\overrightarrow{AP}$  ngược hướng vectơ  $\overrightarrow{PB}$

d) Có 3 vectơ khác vectơ không và cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm đã cho.

**Câu 3:** Một mảnh vườn trồng rau hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 25 m và 16 m. Người chủ để dành mỗi chiều 0,5 m để làm đường đi xung quanh mảnh vườn (như hình minh họa). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Từ 8 điểm  $A, B, C, D, E, F, G, H$  có 6 vectơ cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .

b) Độ dài vectơ  $\overrightarrow{AC}$  lớn hơn 30 m.

c) Độ dài vectơ  $\overrightarrow{EF}$  là 24 m.

d) Người chủ bón đạm cho vườn rau, cứ 2 kg đạm cho  $25(\text{m}^2)$  đất với chi phí 24000 đồng/kg. Để bón đạm cho cả vườn rau, người chủ cần bỏ ra chi phí là 700 000 đồng.

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC$  và  $P$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Từ 6 điểm  $A, B, C, M, N, P$  có 5 vectơ bằng vectơ  $\overrightarrow{NP}$ .

b) Tứ giác  $MNPB$  là hình bình hành.

c)  $P$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

d) Cho  $AB = 8, AC = 10, BC = 14$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MNP$  là  $\frac{35\sqrt{6}}{6}$ .

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và  $N$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{GC}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Từ 5 điểm  $A, B, C, G, N$  có 5 vectơ có điểm cuối là  $G$ .

b) Tứ giác  $AGCN$  là hình bình hành.

c) Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ . Khi đó, hai điểm  $G$  và  $N$  đối xứng nhau qua  $M$

d) Cho  $AB = 6, AC = 12, BC = 10$ . Độ dài vectơ  $\overrightarrow{BN}$  là  $4\sqrt{2}$ .

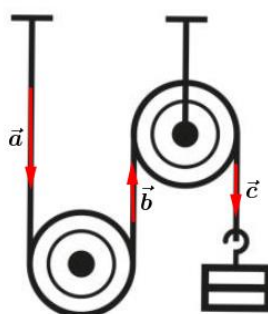
**Câu 6:** Cho hình thang  $ABCD$  có hai cạnh đáy là  $AD$  và  $BC$  ( $AD < BC$ ), biết  $AB = 4, \angle BAD = 120^\circ$  và tam giác  $ABC$  có diện tích  $S = 7\sqrt{3}$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?



- a)  $\overrightarrow{AD}$  là vector có điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $D$ .
- b)  $\overrightarrow{AD}$  cùng hướng với vector  $\overrightarrow{BC}$ .
- c) Có 2 vector (khác  $\vec{0}$ ) cùng phương với vector  $\overrightarrow{AD}$  sao cho giá của vector đó không trùng với giá của  $\overrightarrow{AD}$ .
- d)  $|\overrightarrow{BC}| = 7$ .

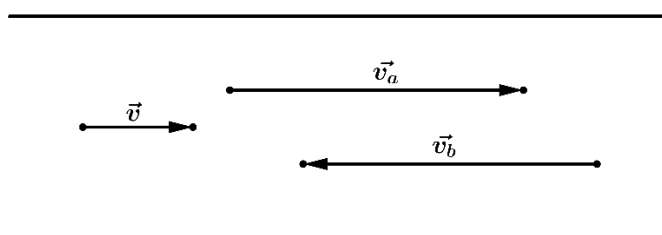
### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .

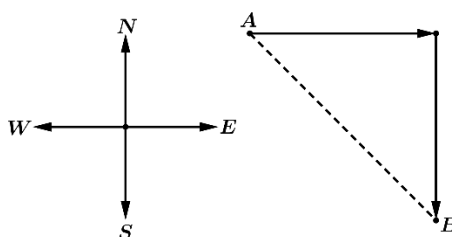


Có bao nhiêu cặp vector cùng phương.

- Câu 2:** Trên biển Đông, một tàu chuyển động đều từ vị trí  $A$  theo hướng  $N20^\circ W$  với vận tốc  $30$  (km/h). Sau  $05$  giờ, tàu đến được vị trí  $B$ . Hỏi  $A$  cách  $B$  bao nhiêu ki lô mét và về hướng  $S20^\circ E$  so với  $B$ .
- Câu 3:** Trên một dòng sông có hai ca nô  $A$  và  $B$  chạy với vận tốc riêng có cùng độ lớn. Biết ca nô  $A$  chạy ngược dòng còn ca nô  $B$  chạy xuôi dòng. Vận tốc của dòng nước là  $3,2$  (km/h), hơn nửa vận tốc của ca nô  $A$  gấp  $4$  lần vận tốc của dòng nước (tham khảo hình bên, xem vector vận tốc của dòng nước là  $\vec{v}$ , vector vận tốc thực tế của ca nô  $A$  và  $B$  lần lượt là  $\vec{v}_a$  và  $\vec{v}_b$ ). Tính  $|\vec{v}_b|$ .

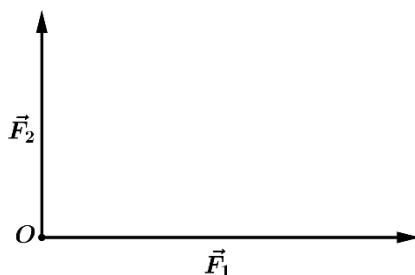


- Câu 4:** Một con tàu khởi hành từ đảo  $A$ , đi thẳng về hướng đông  $10$ km rồi đi thẳng tiếp  $10$  km về hướng nam thì tới đảo  $B$ . Nếu từ đảo  $A$ , tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo  $B$ , thì phải đi theo hướng nào và quãng đường phải dài bao nhiêu kilômét?(kết quả làm tròn đến  $1$  chữ số sau dấu phẩy)

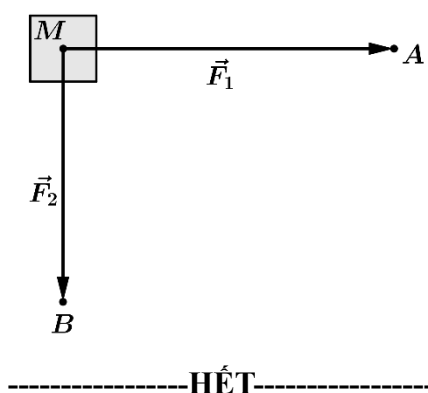




**Câu 5:** Cho hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có cường độ lực  $F_1 = 60\text{ N}$ ,  $F_2 = 80\text{ N}$ , điểm đặt tại  $O$  có phương vuông góc với nhau (như hình vẽ). Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ .



**Câu 6:** Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  cùng tác dụng vào một vật tại điểm  $M$  (hình vẽ). Biết rằng cường độ hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  lần lượt là  $400\text{ N}$  và  $300\text{ N}$ ;  $\angle AMB = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tác dụng lên vật?



**Dạng 2: Hai vectơ bằng nhau****Phương pháp:**

- Sử dụng các khái niệm vectơ
- Lưu ý trong tam giác  $ABC$ :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$  và  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  cùng hướng.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và một điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Bài tập 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ?

**Bài tập 3:** Cho tứ giác đều  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .

**Bài tập 4:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ .

**Bài tập 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng  $C$  của qua  $D$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$

**Bài tập 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, DC$ . Các đường thẳng  $AN$  và  $CM$  lần lượt cắt  $BD$  tại  $E, F$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$

**Bài tập 7:** Cho hình thang cân  $ABCD$  có hai đáy là  $AB$  và  $CD$ . Tìm vectơ:

- Cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$
- Ngược hướng với  $\overrightarrow{AB}$ .
- Chỉ ra các vectơ có độ dài bằng nhau

**Bài tập 8:** Cho tam giác  $ABC$ . Vẽ  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $B$ ,  $E$  đối xứng với  $B$  qua  $C$  và  $F$  đối xứng với  $C$  qua  $A$ . Gọi  $G$  là giao điểm của trung tuyến  $AM$  của tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $DN$  của tam giác  $DEF$ . Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $GA$  và  $GD$ . Chứng minh rằng:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$
- $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}$ .



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

- Câu 1:** Cho 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng,  $M$  là điểm bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?  
 A.  $\forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ . B.  $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .  
 C.  $\forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$ . D.  $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .
- Câu 2:** Gọi  $C$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:  
 A.  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ . B.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.  
 C.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}$  ngược hướng. D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$ .
- Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trong các khẳng định sau hãy tìm khẳng định sai  
 A.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ . B.  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$ . C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .
- Câu 4:** Cho hình vuông  $ABCD$ , khẳng định nào sau đây đúng:  
 A.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ . B.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ . D.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.
- Câu 5:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ?  
 A.  $ABCD$  là hình bình hành. B.  $ABDC$  là hình bình hành.  
 C.  $AD$  và  $BC$  có cùng trung điểm. D.  $AB = CD$ .
- Câu 6:** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?  
 A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ . B.  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ . C.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ . D.  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ .
- Câu 7:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Khẳng định nào sau đây là sai?  
 A.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ . B.  $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$ . C.  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ . D.  $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$ .
- Câu 8:** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC$  của tam giác đều  $ABC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ . B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ . C.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$ . D.  $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$ .
- Câu 9:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số các vector bằng  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là  
 A. 2. B. 3. C. 4. D. 6.
- Câu 10:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Trong các khẳng định sau, hãy tìm khẳng định sai?  
 A.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ . B.  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ . C.  $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{MN}|$ . D.  $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$ .
- Câu 11:** Cho tam giác đều  $ABC$  với đường cao  $AH$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?  
 A.  $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$ . B.  $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{HC}|$ . C.  $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{HC}|$ . D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .



**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ .      B.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .  
C.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$ .      D.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$  và  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ .

**Câu 13:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây *sai*?

- A.  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ .      B.  $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$ .      C.  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ .      D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .

**Câu 14:** Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.  $|\overrightarrow{PQ}| = \overrightarrow{PQ}$ .  
B. Độ dài của một vector là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó.  
C. Độ dài của vector  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .  
D.  $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$ .

**Câu 15:** Cho  $\overrightarrow{AB}$  khác  $\vec{0}$  và điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ?

- A. Vô số.      B. 1 điểm.      C. 2 điểm.      D. 3 điểm.

**Câu 16:** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$ , cạnh bằng  $a$  và góc  $A$  bằng  $60^\circ$ . Kết luận nào sau đây đúng?

- A.  $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $|\overrightarrow{OA}| = a$ .      C.  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ .      D.  $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Lấy điểm  $P$  đối xứng với điểm  $M$  qua  $N$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}$  cùng phương.  
b)  $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{BC}|$ .  
c)  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{BC}$  ngược hướng.  
d)  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 2:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ , gọi  $E, F$  lần lượt là giao điểm của  $BD$  với  $AM, CN$ . Xét các véc tơ tạo thành từ các điểm đã cho. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương với  $\overrightarrow{DC}$ .  
b)  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$ .  
c)  $\overrightarrow{AD}$  cùng hướng với 4 véc tơ.  
d)  $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB}$ .

**Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Xét các véc tơ tạo thành từ 5 điểm đã cho. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Có  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ .  
b)  $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}$  không cùng phương



c) Số véc tơ có điểm đầu là  $A$  khác  $\vec{0}$  là 3.

d) Có đúng bốn cặp véc tơ bằng nhau.

**Câu 4:** Cho tam giác  $\triangle ABC$  đều. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{AC}$  và  $\vec{BC}$  cùng hướng.

b)  $\vec{AB} = \vec{AC}$ .

c)  $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$ .

d) Có 6 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh  $A, B, C$ .

**Câu 5:** Cho  $\triangle ABC$  có trực tâm  $H$  và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi  $B'$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $O$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $B'C \perp BC$

b)  $B'C \parallel AB$

c) Tứ giác  $AB'CH$  là hình bình hành.

d)  $\vec{AH} = \vec{B'C}$ ;  $\vec{AB'} = \vec{HC}$

**Câu 6:** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ , trực tâm  $H$ . Khi đó:

a)  $AH \perp BC$

b)  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c)  $\vec{HA} = \vec{HB} = \vec{HC}$

d)  $|\vec{HA}| = |\vec{HB}| = |\vec{HC}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Câu 7:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $PQ, SR$  và  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $PQ$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$

b)  $PQRS$  là hình bình hành

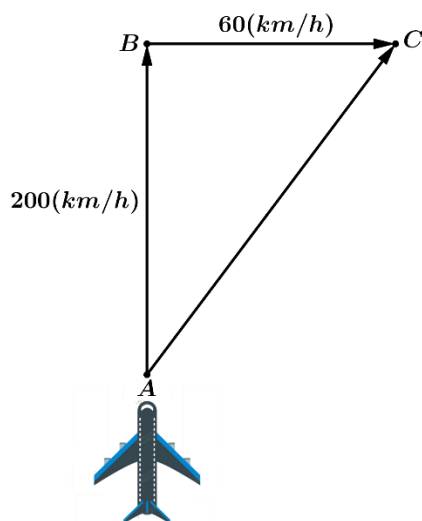
c)  $PMRN$  là hình bình hành.

d)  $\vec{OM}, \vec{ON}$  là hai vectơ bằng nhau.



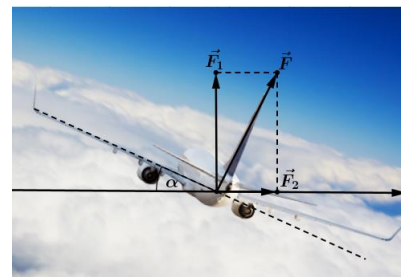
### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

- Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AB = 5, BC = 8$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\Delta ABC$ . Hãy tính độ dài của  $\vec{a} = 3.\vec{AG}$ .
- Câu 2:** Trên biển Đông, một tàu chuyển động đều từ vị trí  $A$  theo hướng  $N20^\circ E$  với vận tốc  $20$  (km/h). Sau  $2$  giờ, tàu đến được vị trí  $B$ . Hỏi  $A$  cách  $B$  bao nhiêu kilômét?
- Câu 3:** Một máy bay có vector vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vector theo hướng đông như hình minh họa dưới đây. Biết rằng  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ . Tính độ dài vector  $\vec{AB} + \vec{BC}$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

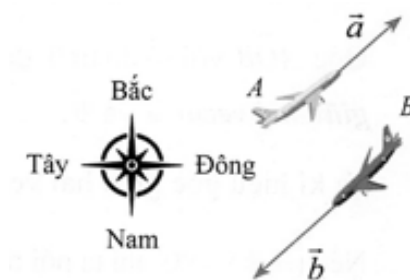


Vậy độ dài vector tổng của hai vector nói trên là khoảng  $209$  (km/h)..

- Câu 4:** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$  thì lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  như hình minh họa dưới đây. Cho biết góc  $\alpha = 30^\circ$  và  $|\vec{F}| = 8$ . Tính  $|\vec{F}_2|$ .



- Câu 5:** Máy bay  $A$  đang bay về hướng Đông Bắc với tốc độ  $600$  (km/h). Cùng lúc đó, máy bay  $B$  đang bay về hướng Tây Nam với tốc độ  $800$  (800km/h). Tính  $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ . (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



- Câu 6:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $\sqrt{13}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ , dựng  $\vec{AP} = \vec{BA}$ . Hãy tính độ dài của vector  $\vec{MN}$ .

-----HẾT-----

**Dạng 3: Điểm thoả mãn đẳng thức vectơ****Phương pháp:**

- Sử dụng khái niệm vectơ
- Sử dụng khái niệm vectơ cùng phương, cùng hướng
- Sử dụng khái niệm độ dài của vectơ và vectơ bằng nhau

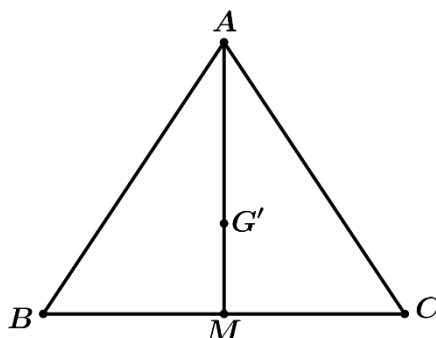
**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Dựng điểm  $B'$  sao cho  $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ .

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

b) Gọi  $J$  là trung điểm của  $BB'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$ .

**Bài tập 2:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tìm điểm  $G$  trên đoạn  $AM$  để  $|\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



**Bài tập 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  với  $A, D, F$  không thẳng hàng. Dựng các vectơ  $\overrightarrow{EH}$  và  $\overrightarrow{FG}$  bằng vectơ  $\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh tứ giác  $CDGH$  là hình bình hành.

**Bài tập 4:** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Qua trung điểm  $M$  của  $AB$  dựng đường thẳng  $MO$  cắt  $CD$  tại  $N$ . Biết  $OA=1, OB=2, OC=3$  và  $OD=4$ . Tính tỷ số  $\frac{CN}{ND}$ .

**Bài tập 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Trên các cạnh  $AB, BC$  lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $AM = \frac{2}{5}MB, \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $AN$  và  $CM$ . Tính tỉ số  $\frac{AI}{AN}$  và  $\frac{CI}{IM}$ .

**Bài tập 6:** Cho tam giác  $ABC$  và đường thẳng  $d$ . Gọi  $O$  là điểm thoả mãn hệ thức  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ . Tìm điểm  $M$  trên đường thẳng  $d$  sao cho vectơ  $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$  có độ dài nhỏ nhất.



**BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho  $\Delta ABC$  với điểm  $M$  nằm trong tam giác. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và  $N, P, Q$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $A', B', C'$ . Câu nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$  và  $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$                       B.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$  và  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$   
C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$  và  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$                       D.  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$  và  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $O$ . Câu nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$                       B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$                       C.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$                       D.  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $N$  là trung điểm  $AM$ . Đường thẳng  $BN$  cắt  $AC$  tại  $P$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$  thì giá trị của  $x$  là:

- A.  $-\frac{4}{3}$                       B.  $-\frac{2}{3}$                       C.  $-\frac{3}{2}$                       D.  $-\frac{5}{3}$

**Câu 4:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

- A.  $AB = AC$                       B.  $\exists k \neq 0 : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$   
C.  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$                       D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$  điểm  $M$

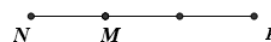
**Câu 5:** Cho  $\Delta ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là điểm trên  $AC$  sao cho  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

- A.  $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$                       B.  $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$                       C.  $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI}$                       D.  $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

**Câu 6:** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



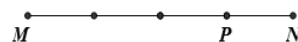
Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 3.                      B. Hình 4.                      C. Hình 1.                      D. Hình 2.

**Câu 7:** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Nếu  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$  thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$                       B.  $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$                       C.  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$                       D.  $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức vectơ sau  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

- A.  $M$  là trung điểm của  $BC$   
B.  $M$  là trung điểm của  $IC$   
C.  $M$  là trung điểm của  $IA$   
D.  $M$  là điểm trên cạnh  $IC$  sao cho  $IM = 2MC$



**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  có điểm  $O$  thỏa mãn:  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ .

- A. Tam giác  $ABC$  đều  
B. Tam giác  $ABC$  cân tại  $C$   
C. Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$   
D. Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$

**Câu 10:** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $MA = \frac{1}{5}AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là sai?

- A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$   
B.  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$   
C.  $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$   
D.  $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

**Câu 11:** Cho  $\triangle ABC$  có  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Vị trí điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$  xác định bởi hệ thức:

- A.  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$   
B.  $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$   
C.  $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$   
D.  $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BI}$

**Câu 12:** Cho đoạn  $AB$  và điểm  $I$  sao cho  $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ . Tìm số  $k \in \mathbb{R}$  sao cho  $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$ .

- A.  $k = \frac{3}{4}$   
B.  $k = \frac{3}{5}$   
C.  $k = \frac{2}{5}$   
D.  $k = \frac{3}{2}$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh  $a$ ,  $ABC = 60^\circ$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC, BD$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Vector - không có điểm đầu là  $A$  thì nó có điểm cuối là  $A$ .  
b) Độ dài của  $\overrightarrow{AC}$  bằng  $a$ .  
c)  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  không cùng phương.  
d)  $BD = 2a$

**Câu 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $E, F, G, H$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, BD, AD, AC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $EF$  là đường trung bình của các tam giác  $BCD$ .  
b)  $GH = \frac{1}{3}CD$ .  
c)  $EFGH$  là hình bình hành.  
d)  $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{FE}$ .

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Gọi  $G'$  là điểm đối xứng với  $G$  qua trung điểm  $M$  của  $BC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

- a)  $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$  cùng hướng.  
b)  $GA = 3GM$ .  
c)  $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$ .  
d)  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}, \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$ .



**Câu 4:** Cho hình thang  $ABCD$  với hai đáy là  $AB$  và  $CD$ ,  $AB < CD$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{CD}|$ .

b)  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

c)  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{DC}$  cùng hướng.

d) Nếu  $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$  thì  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Gọi điểm  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$  và thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{MB} + \beta \overrightarrow{MC}$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Tính  $2\alpha + \beta$ .

**Câu 2:** Cho tam giác  $\triangle ABC$ . Các điểm  $I, J$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC}$ . Biết  $IC \parallel BJ$  thì

$\overrightarrow{CI} = -\frac{a}{b}\overrightarrow{BJ}$ , ( $a, b \in \mathbb{N}^*$ ) với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản và  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính  $a + b$ .

**Câu 3:** Một vật đồng chất được thả vào một cốc chất lỏng. Ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng. Tìm mối liên hệ giữa trọng lực  $\vec{P}$  của vật và lực đẩy Archimedes  $\vec{F}$  mà chất lỏng tác động lên vật. Tính tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng.

**Câu 4:** Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$  cùng tác động vào một vật đặt tại điểm  $M$ . Cho biết cường độ lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $50N$ , tam giác  $MAB$  vuông tại  $M$ . Điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .

Tính độ dài của  $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB})\sqrt{2}$ .

**Câu 5:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$ , cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên khi đó. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $100N$  và góc  $AMB = 90^\circ$ . Tính cường độ lực  $\vec{F}_3$  (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  biết  $AB = 27$  (cm). Điểm  $M$  thỏa mãn:  $|\overrightarrow{2MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|$ .

Khi đó điểm  $M$  nằm trên đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

-----HẾT-----



## BÀI

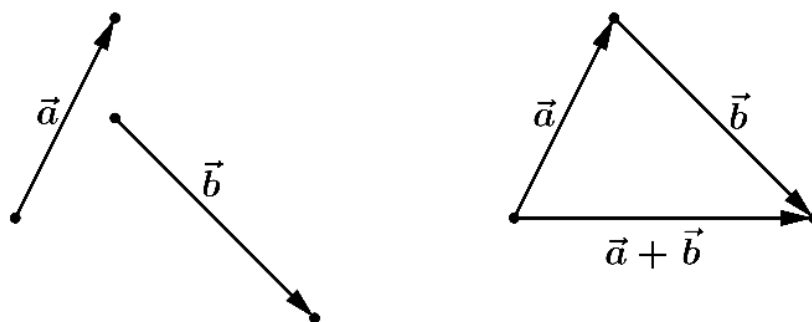
## 02

## TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO'

## A

## LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

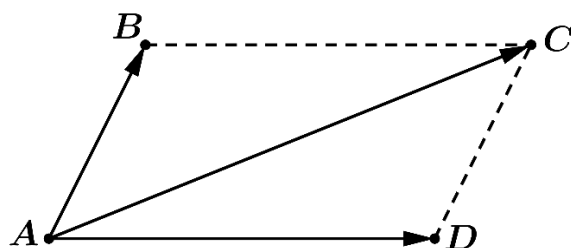
## 1 Tổng của hai vectơ



Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  tùy ý ta vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . Khi đó vectơ  $\overrightarrow{AC}$  được gọi là tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  và được kí hiệu là  $\vec{a} + \vec{b}$ .

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.

**Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm bất kì  $A, B, C$  ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .



**Quy tắc hình bình hành:** Nếu  $ABCD$  là một hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  tùy ý:

- Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Tính chất của vectơ – không:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

**Chú ý:** Do các vectơ  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  và  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  bằng nhau, nên ta còn viết chúng dưới dạng  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  và gọi là tổng của ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Tương tự, ta cũng có thể viết tổng của một số vectơ mà không cần dùng dấu ngoặc.

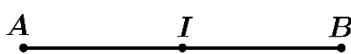
**2 Hiệu của hai vector**

- Vector có cùng độ dài và ngược hướng với véc tơ  $\vec{a}$  được gọi là vector đối của vector  $\vec{a}$ .  
Vector đối của vector  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $-\vec{a}$ .
- Vector  $\vec{0}$  được coi là vector đối của chính nó.
- Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta gọi hiệu của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là vector  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

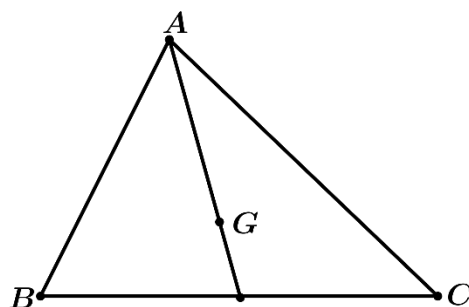
**Chú ý 1:** Hai véc tơ đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng  $\vec{0}$

**Quy tắc về hiệu vector:** Với ba điểm  $O, A, B$  tùy ý, ta luôn có:  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .

**Chú ý 2:**



- Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .



- Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

**B //** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**Dạng 1: Tính tổng và hiệu của hai vectơ****Phương pháp:**

- Sử dụng khái niệm tổng và hiệu của hai vectơ
- Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành
- Sử dụng quy tắc trung điểm, trọng tâm của tam giác

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho hình bình hành  $ABCD$  với  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Tìm tổng của hai vectơ:

a)  $\overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{MC}$

b)  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{CD}$

**Bài tập 2:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  với tâm là  $O$ . Tính:

a) Độ dài vectơ  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$

b) Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$

**Bài tập 3:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M$ ,  $N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$ ,  $AC$  và  $BC$ .

a) Tìm các hiệu sau  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$ ;  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$

b) Phân tích vectơ  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$

**Bài tập 4:** Cho bốn điểm bất kỳ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  và  $D$ . Hãy chứng minh đẳng thức:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

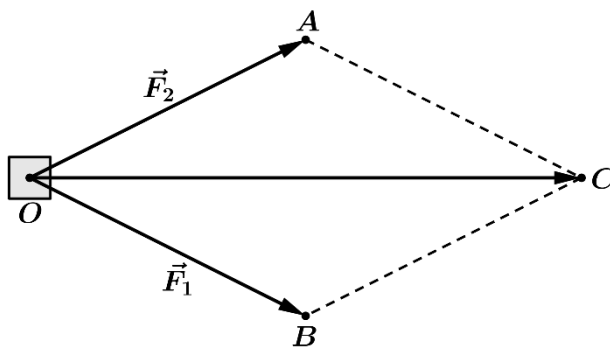
**Bài tập 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ , với  $O$  là điểm bất kì.

**Bài tập 6:** Cho  $n$  điểm  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , xác định vectơ  $\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}$ .

**Bài tập 7:** Có hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  cùng tác động vào một vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều có cường độ là  $30$  (N) và chúng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?







**Câu 11:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  cạnh  $a$  có tâm  $O$ . Tính giá trị  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}|$ .

- A.  $a$ .                      B.  $a\sqrt{3}$ .                      C.  $a\sqrt{2}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  biết  $AB = 3, AC = 4$ . Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B. 3.                      C. 4.                      D. 5.

**Câu 13:** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB$  song song với  $CD$  biết  $AB = 2, CD = 1$ . Gọi  $O$  là trung điểm  $AD$ . Độ dài vector  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  bằng

- A. 0.                      B. 1.                      C.  $\frac{3}{2}$ .                      D. 3.

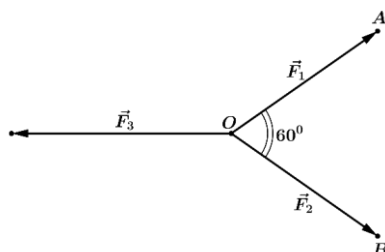
**Câu 14:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 5. Độ dài vector  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$  bằng

- A.  $5\sqrt{2}$ .                      B. 5.                      C.  $5\sqrt{3}$ .                      D. 10.

**Câu 15:** Cho hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động vào vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều có cường độ  $60N$  và hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ là bao nhiêu?

- A. 30.                      B.  $30\sqrt{3}$ .                      C. 120.                      D.  $60\sqrt{3}$ .

**Câu 16:** Cho ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào vật đứng tại điểm  $O$  minh hoạ như hình vẽ. Biết sau khi tác động lực thì vật đứng yên. Hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều có cường độ  $100N$  và hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi cường độ lực  $\vec{F}_3$  là bao nhiêu?



- A.  $50\sqrt{3}$ .                      B.  $100\sqrt{3}$ .                      C. 100.                      D. 200.

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$  có  $AH$  là đường cao. Khi đó  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}|$  bằng

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ .                      C.  $2a$ .                      D.  $a\sqrt{3}$ .

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $AB = a, AC = 2a$  và  $BAC = 120^\circ$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$  bằng

- A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .                      B.  $a\sqrt{3}$ .                      C.  $a\sqrt{2}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 19:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ . Giá trị của  $|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DM}|$  bằng

- A.  $\frac{3a\sqrt{15}}{2}$ .                      B.  $3a\sqrt{5}$ .                      C.  $\frac{3a\sqrt{13}}{2}$ .                      D.  $\frac{3a\sqrt{5}}{4}$ .



**Câu 20:** Cho tam giác  $ABC$  đều có độ dài cạnh bằng  $a$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác. Độ dài  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$  bằng

- A.  $a\sqrt{3}$ .                      B.  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .                      C.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 21:** Trên đường tròn  $C(O; R)$  lấy điểm cố định  $A$ ;  $B$  là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi  $M$  là điểm di động sao cho  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ . Khi đó tập hợp điểm  $M$  là:

- A. Đường tròn tâm  $O$  bán kính  $2R$ .                      B. Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $R$ .  
C. Đường thẳng song song với  $OA$ .                      D. Đường tròn tâm  $C$  bán kính  $R\sqrt{3}$ .

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CA$  và dựng điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ . Khi đó, điểm  $K$  trùng với điểm nào trong các điểm sau:

- A.  $N$ .                      B.  $P$ .                      C.  $A$ .                      D.  $B$ .

**Câu 23:** Cho  $n$  điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Bạn Bình kí hiệu chúng là  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ( $A_i \neq B_n$ ). Vectơ tổng  $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}$  bằng

- A.  $\vec{0}$ .                      B.  $\overrightarrow{A_1A_n}$ .                      C.  $\overrightarrow{B_1B_n}$ .                      D.  $\overrightarrow{A_1B_n}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $2a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$   
b)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = 2a$   
c)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = 2a$   
d)  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = 2a\sqrt{3}$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ . Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành  $ABIJ, BCPQ, CARS$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{RJ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}$   
b)  $\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{QB}$   
c)  $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{SC}$   
d)  $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$

**Câu 3:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$   
b) Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$ . Khi đó  $ADEC$  là hình thang.  
c)  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = a\sqrt{2}$   
d)  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$ .



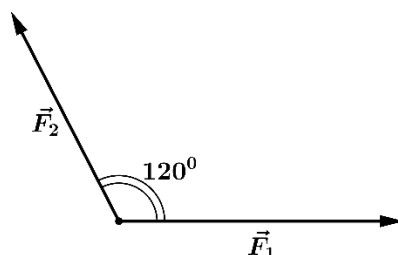
**Câu 4:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$  có cạnh  $AB = 2a, BC = a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .
- b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .
- c)  $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = a\sqrt{3}$ .
- d)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}| = a\sqrt{5}$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$
- b)  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$
- c)  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MP}$
- d)  $\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CM}$ .

**Câu 6:** Hình vẽ dưới biểu diễn hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động lên một vật, cho  $|\vec{F}_1| = 3N, |\vec{F}_2| = 2N$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a)  $\vec{F}_1$  cùng hướng với  $\vec{F}_2$
- b)  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$
- c)  $|\vec{F}_1 - \vec{F}_2| = |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|$
- d)  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{19}$

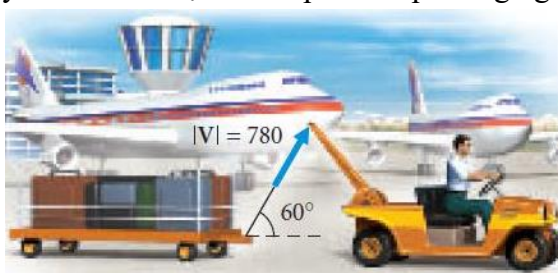
### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$  và có cạnh bằng  $a, BAD = 60^\circ$ . Cho hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  có điểm đặt  $A$  theo hướng của  $\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AB}$ . Cường độ của hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  đều là  $50N$ . Tính cường độ tổng hợp lực của hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

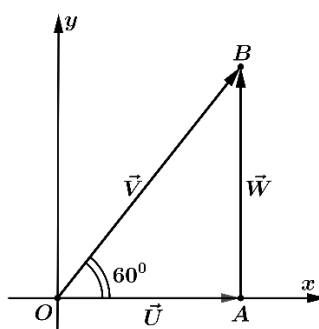
**Câu 2:** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  có  $BAD = 60^\circ$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Biểu diễn các lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{AB}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{AD}, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật đặt tại điểm  $A$  và ở trạng thái cân bằng biết  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 2\sqrt{3}N$ . Tính độ lớn của lực  $\vec{F}_3$ .



**Câu 3:** Một toa xe hành lý đang được kéo với một lực  $\vec{V}$  với độ lớn  $780\text{ N}$  và tạo với hướng chuyển động một góc  $60^\circ$ . Ta thấy  $\vec{V}$  theo hai lực thành phần có phương ngang và phương thẳng đứng.



Xét hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ với  $\overrightarrow{OB} = \vec{V}$  và  $(Ox; OB) = 60^\circ$ .

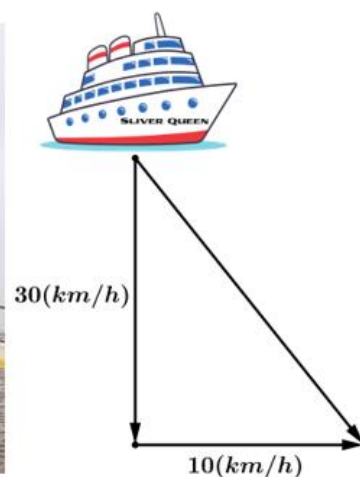


Khi xe kéo một đoạn đường 10 mét tính công sinh ra.

**Câu 4:** Một khúc sông rộng  $200\text{ m}$ . Một chiếc thuyền chèo qua sông với vận tốc chèo  $15\text{ km/h}$  theo phương vuông góc với bờ sông. Biết rằng vận tốc nước chảy là  $3\text{ km/h}$ . Một lần khác thuyền muốn đến bờ bên kia tại điểm cách điểm đến theo phương vuông góc một khoảng bằng  $50\text{ m}$ . Tính vận tốc chèo của thuyền (biết rằng vận tốc dòng nước không đổi)

**Câu 5:** Hai ô tô cùng xuất phát từ  $A$  theo hai hướng vuông góc với nhau, vận tốc tương ứng của hai xe là  $x\text{ (km/h)}$  và  $(100 - x\sqrt{3})\text{ (km/h)}$ . Hỏi  $x$  bằng bao nhiêu để vận tốc tương đối giữa xe ô tô thứ nhất và người ngồi trên xe ô tô thứ hai là nhỏ nhất:

**Câu 6:** VinFast là một hãng xe ô tô điện của Việt Nam. Năm 2023, VinFast đã xuất khẩu gần 1900 chiếc xe điện VF8 sang thị trường Bắc Mỹ bằng tàu Silver Queen. Biết rằng con tàu có vector vận tốc chỉ theo hướng Nam, vận tốc của dòng nước là một vector theo hướng Đông như hình minh họa dưới đây. Tính độ dài vector tổng của hai vector nói trên (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



-----HẾT-----

**Dạng 2: Bài toán liên quan đến vectơ đối và hiệu của hai vectơ****Phương pháp:**

- Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$  được gọi là vectơ đối của vectơ  $\vec{a}$ .
- Vectơ đối của vectơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $-\vec{a}$ .
- Vectơ  $\vec{0}$  được coi là vectơ đối của chính nó.
- Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta gọi hiệu của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là vectơ  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

**Chú ý:** Hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng  $\vec{0}$

**Quy tắc về hiệu vectơ:** Với ba điểm  $O, A, B$  tùy ý, ta luôn có:  $\vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$ .

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho hình thoi  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng :

a)  $\vec{OB} - \vec{DA} = \vec{AO}$

b)  $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$

**Bài tập 2:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC$  và  $BC$ . Tìm các hiệu sau:  $\vec{AM} - \vec{AN}$ ;  $\vec{MN} - \vec{PN}$  và  $\vec{MN} - \vec{NC}$ .

**Bài tập 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Chứng minh rằng:

a)  $\vec{CO} - \vec{OB} = \vec{BA}$

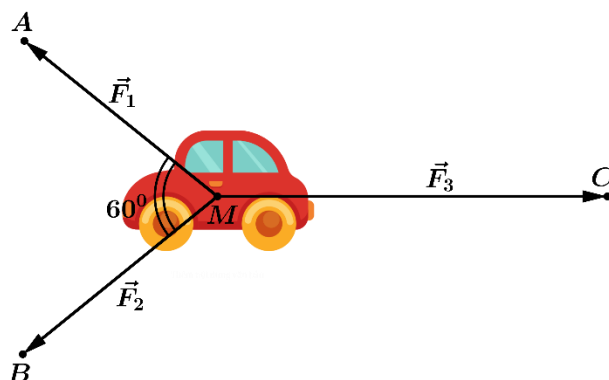
b)  $\vec{AB} - \vec{BC} = \vec{DB}$ .

**Bài tập 4:** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MA} - \vec{MB}|$ .

**Bài tập 5:** Cho tam giác  $ABC$  đều, cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tính  $|\vec{BG} + \vec{AB}|$  và  $|\vec{BA} - \vec{AC}|$  theo  $a$ .

**Bài tập 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Hãy tính độ dài của vectơ  $\vec{AP} + \vec{AN} - \vec{AC} + \vec{BM}$ .

**Bài tập 7:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một ô tô tại điểm  $M$  và ô tô đứng yên. Cho biết cường độ hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $25N$  và góc  $AMB = 60^\circ$ . Khi đó tính cường độ  $\vec{F}_3$ .





## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

- Câu 1:** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là các vector khác  $\vec{0}$  với  $\vec{a}$  là vector đối của  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây sai?
- A. Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương.                      B. Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng.  
C. Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng độ dài.                      D. Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  chung điểm đầu.
- Câu 2:** Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?
- A.  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{CD}$ .                      B.  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$ .  
C.  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$ .                      D.  $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{DC} - \vec{DA}$ .
- Câu 3:** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\vec{OB} - \vec{OC}$ .
- A.  $\vec{BC}$ .                      B.  $\vec{DA}$ .                      C.  $\vec{OD} - \vec{OA}$ .                      D.  $\vec{AB}$ .
- Câu 4:** Cho  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Hỏi vector  $(\vec{AO} - \vec{DO})$  bằng vector nào?
- A.  $\vec{BA}$ .                      B.  $\vec{BC}$ .                      C.  $\vec{DC}$ .                      D.  $\vec{AC}$ .
- Câu 5:** Chọn khẳng định sai:
- A. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{IA} - \vec{IB} = \vec{0}$ .  
B. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{AI} - \vec{BI} = \vec{AB}$ .  
C. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{AI} - \vec{IB} = \vec{0}$ .  
D. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\vec{IA} - \vec{BI} = \vec{0}$ .
- Câu 6:** Cho 4 điểm bất kỳ  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng:
- A.  $\vec{OA} = \vec{CA} + \vec{CO}$ .                      B.  $\vec{BC} - \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{0}$ .  
C.  $\vec{BA} = \vec{OB} - \vec{OA}$ .                      D.  $\vec{OA} = \vec{OB} - \vec{BA}$ .
- Câu 7:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\vec{AB} - \vec{CD} = \vec{BC} - \vec{DA}$ .                      B.  $\vec{AC} - \vec{BD} = \vec{CB} - \vec{AD}$ .  
C.  $\vec{AC} - \vec{DB} = \vec{CB} - \vec{DA}$ .                      D.  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DC} - \vec{BC}$ .
- Câu 8:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $M$  tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC} + \vec{MD}$ .                      B.  $\vec{MA} + \vec{MD} = \vec{MC} + \vec{MB}$ .  
C.  $\vec{AM} + \vec{MB} = \vec{CM} + \vec{MD}$ .                      D.  $\vec{MA} + \vec{MC} = \vec{MB} + \vec{MD}$ .
- Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ . Khi đó, các vector đối của vector  $\vec{DN}$  là:
- A.  $\vec{AM}, \vec{MB}, \vec{ND}$ .                      B.  $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{ND}$ .                      C.  $\vec{MB}, \vec{AM}$ .                      D.  $\vec{AM}, \vec{BM}, \vec{ND}$ .
- Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khi đó  $\vec{CB} - \vec{CA}$  bằng
- A.  $\vec{OC} + \vec{OB}$ .                      B.  $\vec{AB}$ .                      C.  $\vec{OC} + \vec{DO}$ .                      D.  $\vec{CD}$ .
- Câu 11:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{CB}$ .                      B.  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{BC}$ .  
C.  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{AD}$ .                      D.  $\vec{BA} - \vec{BC} + \vec{DC} = \vec{CA}$ .
- Câu 12:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức sai?
- A.  $\vec{OA} + \vec{OC} - \vec{EO} = \vec{0}$ .                      B.  $\vec{BC} - \vec{EF} = \vec{AD}$ .



C.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ .

**Câu 13:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Khi đó  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$  bằng vectơ nào sau đây?

A.  $\vec{0}$ .

B.  $\overrightarrow{BC}$ .

C.  $\overrightarrow{AD}$ .

D.  $\overrightarrow{CB}$ .

**Câu 14:** Cho 4 điểm bất kì  $A, B, C, O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .

B.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$ .

C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ .

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AB = 3a, AC = 4a$ . Giá trị  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$  bằng:

A.  $5a$ .

B.  $2a$ .

C.  $a$ .

D.  $a\sqrt{5}$ .

**Câu 16:** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ .

A.  $\overrightarrow{AD}$ .

B.  $\overrightarrow{DA}$ .

C.  $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .

D.  $\overrightarrow{AB}$ .

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Khi đó  $M$  là điểm sao cho

A.  $MACB$  là hình bình hành.

B.  $MABC$  là hình bình hành.

C.  $MBAC$  là hình bình hành.

D.  $MCAB$  là hình bình hành.

**Câu 18:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , giao điểm của hai đường chéo là  $O$ . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A.  $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ .

B.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$ .

C.  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ .

D.  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ .

**Câu 19:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và  $O$  là một điểm bất kỳ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ .

B.  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ .

C.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ .

D.  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ .

**Câu 20:** Cho hai điểm cố định  $A, B$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$  là

A. đường tròn đường kính  $AB$ .

B. đường trung trực của  $AB$ .

C. đường tròn tâm  $I$  bán kính  $AB$ .

D. nửa đường tròn đường kính  $AB$ .

**Câu 21:** Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông với điều kiện nào sau đây?

A.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ .

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

C.  $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

D.  $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ .

**Câu 22:** Cho tam giác đều  $ABC$  có độ dài cạnh bằng 3. Độ dài của vector  $\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$  bằng

A. 3.

B.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

C. 0.

D. 6.

**Câu 23:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh là  $a$ .  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Tính  $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}|$ .

A.  $a\sqrt{3}$ .

B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

C.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

D.  $a\sqrt{2}$ .

**Câu 24:** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  với  $AB = AC = a$ . Tính độ dài vector  $\vec{v} = \frac{11}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$ .

A.  $2a$ .

B.  $\frac{\sqrt{6073}}{28}a$ .

C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ .

D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ .

**Câu 25:** Cho 2 vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau góc  $60^\circ$ . Biết  $|\vec{a}| = 6; |\vec{b}| = 3$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$



A.  $3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ .      B.  $3(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ .      C.  $6(\sqrt{5} + 3)$ .      D.  $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{51})$ .

**Câu 26:** Cho 2 lực  $F_1, F_2$  có cùng điểm đặt tại  $O$  và có cường độ lần lượt bằng  $6N, 8N$ . Tìm cường độ lực tổng hợp của  $F_1, F_2$  biết góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .

A.  $10N$ .      B.  $14N$ .      C.  $10\sqrt{3}N$ .      D.  $8N$ .

**Câu 27:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}, \vec{F}_2 = \vec{MB}, \vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $F_1, F_2$  đều bằng  $100N$  và  $AMB = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $F_3$  là

A.  $100N$ .      B.  $200N$ .      C.  $50\sqrt{3}N$ .      D.  $100\sqrt{3}N$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$ , với  $I$  là trung điểm cạnh  $AC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{AI} = \vec{CI}$

b)  $\vec{CA} - \vec{BA} = \vec{BC}$

c)  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$

d) Điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $\vec{AB} + \vec{IM} = \vec{IC}$  là một đỉnh của hình bình hành  $ABCM$ .

**Câu 2:** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $H$  có cạnh bằng  $a$  và  $ABC = 60^\circ$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

a)  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

b)  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$

c)  $\vec{HA} + \vec{HB} = \vec{AD}$

d)  $|\vec{AC} + \vec{AH}| = a\sqrt{13}$

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{CA}$ .

b)  $\vec{AC} - \vec{AB} = \vec{BC}$ .

c)  $|\vec{AB} - \vec{AC}| = 0$ .

d)  $|\vec{AB} + \vec{AC}| = a\sqrt{3}$ .

**Câu 4:** Cho  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{OA} - \vec{OB} = \vec{BA}$

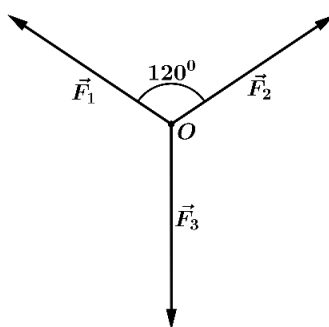
b)  $\vec{AB} - \vec{AD} = \vec{DB}$

c)  $\vec{OB} - \vec{OC} = \vec{OD} - \vec{OA}$

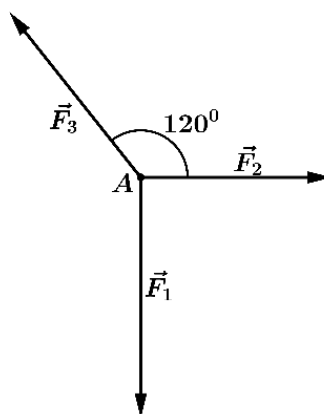
d)  $\vec{BC} - \vec{BA} = \vec{DC} - \vec{DA}$

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Trên hình biểu diễn ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng  $O$ . Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $100N$  và góc tạo bởi  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  bằng  $120^\circ$ . Tính cường độ lực  $\vec{F}_3$ .



**Câu 2:** Chất điểm  $A$  chịu tác động của ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  như hình vẽ



và ở trạng thái cân bằng (tức là  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ ). Tính độ lớn của lực  $\vec{F}_3$  biết  $\vec{F}_1$  có độ lớn bằng  $20N$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

**Câu 3:** Cho ngũ giác  $ABCDE$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DE$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm các đoạn  $MP$  và  $NQ$ . Biết rằng  $\overrightarrow{IJ} = \frac{a}{b} \overrightarrow{AE}$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ),  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $a + b$ .

**Câu 4:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ ,  $I$  là điểm trên  $GC$  sao cho  $IC = 3IG$ . Với mọi điểm  $M$  ta luôn có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = x \overrightarrow{MI}$ . Tính  $3x + 2024$ .

**Câu 5:** Cho tam giác đều  $ABC$  có tâm  $O$ . Gọi  $I$  là một điểm tùy ý bên trong tam giác  $ABC$ . Hạ  $ID, IE, IF$  tương ứng vuông góc với  $BC, CA, AB$ . Giả sử  $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \frac{a}{b} \overrightarrow{IO}$  (với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Tính  $a + b$ .

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $E, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AE$ . Biết  $p$  và  $q$  thỏa mãn  $\overrightarrow{DN} = p \overrightarrow{AB} + q \overrightarrow{AC}$ . Tính  $p + q$ .

-----HẾT-----



## BÀI

## 03

## TÍCH CỦA MỘT VECTO' VỚI MỘT SỐ

## A

## LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

## 1 Tích của một vectơ với một số

Tích của một vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số thực  $k > 0$  là một vectơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , cùng hướng với  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $k|\vec{a}|$ .

Tích của một vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số thực  $k < 0$  là một vectơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $(-k)|\vec{a}|$ .

**Chú ý:** Ta quy ước  $k\vec{a} = \vec{0}$  nếu  $\vec{a} = \vec{0}$  hoặc  $k = 0$ .

**Nhận xét:** Vectơ  $k\vec{a}$  có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$  và cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k \geq 0$ , ngược hướng  $\vec{a}$  nếu  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và  $k < 0$ .

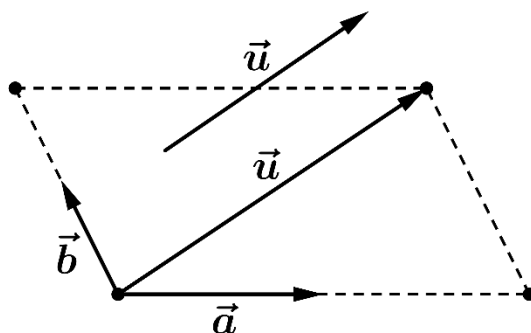
## 2 Các tính chất của phép nhân vectơ với một số

Với hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  và hai số thực  $k, t$ , ta luôn có:

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(k + t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .

**Nhận xét:**

- Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .
- Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .



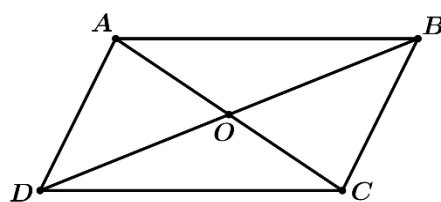
**Chú ý:** Mọi vectơ  $\vec{u}$  đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ , nghĩa là có duy nhất cặp số  $(x; y)$  sao cho  $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Xác định tích của một vectơ với một số****Phương pháp:**

- Sử dụng khái niệm tích của vectơ với một số
- Sử dụng tính chất tích vectơ với một số
- Sử dụng quy tắc trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC, BD$  và  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm vectơ trong các trường hợp sau:



a)  $2\overrightarrow{AO}$

b)  $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

c)  $2\overrightarrow{AM}$

d)  $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

**Bài tập 2:** Thực hiện các phép toán sau:

a)  $2(\vec{u} + \vec{v})$

b)  $(a - b)\vec{m}$

c)  $7(-3\vec{c})$

d)  $\vec{c} + 7\vec{c}$

e)  $9\vec{c} - 7\vec{c}$

f)  $-3(\vec{u} - \vec{v})$

g)  $(2a + b)\vec{n}$

h)  $-3\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right)$

i)  $2\vec{a} + 7\vec{a}$

j)  $3\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b}$

**Bài tập 3:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$  có  $AB = 4, AD = 3$ . Tính  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$

**Bài tập 4:** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Tìm điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$

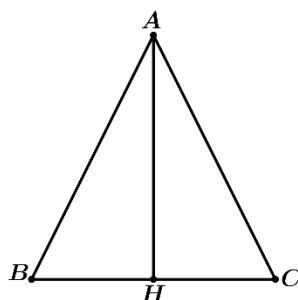
b) Tìm điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

**Bài tập 5:** Cho  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$  có  $A = 30^\circ, AB = a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Hãy tính:

a)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$

b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

**Bài tập 6:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính



a)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$

b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

**Bài tập 7:** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Hãy xác định điểm  $M$  để  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$ .

**Bài tập 8:** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ .

a) Hãy xác định điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$  ta luôn có  $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ .

**Bài tập 9:** Cho tam giác  $ABC$  với  $H$ ,  $O$ ,  $G$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ .**Bài tập 10:** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $G$ ,  $G'$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $OAB$  và  $OCD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$ .



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho đoạn thẳng  $AB$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Đẳng thức vector nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ .      C.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BM}$ .

**Câu 2:** Đẳng thức nào sau đây mô tả **đúng** hình vẽ bên



- A.  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{IA}$ .      C.  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AI}$ .

**Câu 3:** Cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ . Đẳng thức vector nào sau đây **đúng**?

- A.  $|\vec{a}| = k|\vec{b}|$ .      B.  $|\vec{a}| = |k||\vec{b}|$ .      C.  $|\vec{a}| = -k|\vec{b}|$ .      D.  $\vec{a} = |k|\vec{b}$ .

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .      B.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$ .      C.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$ .

**Câu 5:** Cho vector  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{a} = -3\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.      B.  $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ .  
C. Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.      D. Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .      B.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$ .      D.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ .

**Câu 7:** Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình bình hành  $ABCD$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BO}$ .      B.  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ .      C.  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CO}$ .      D.  $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OB}$ .

**Câu 8:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tổng các vector  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$  là

- A.  $2\overrightarrow{BD}$ .      B.  $2\overrightarrow{AC}$ .      C.  $\overrightarrow{DB}$ .      D.  $3\overrightarrow{AB}$ .

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .  
C.  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ .      D.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$  thỏa mãn  $BM = 2MC$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .  
C.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .      D.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .



- Câu 11:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính độ dài của vector  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ .
- A.  $a\sqrt{7}$ .                      B.  $a\sqrt{3}$ .                      C.  $3a$ .                      D.  $a\sqrt{5}$ .
- Câu 12:** Biết rằng hai vec tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vec tơ  $2\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x+1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là
- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B.  $-\frac{3}{2}$ .                      C.  $-\frac{1}{2}$ .                      D.  $\frac{3}{2}$ .
- Câu 13:** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $AB = a$ . Độ dài vector  $4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$  bằng:
- A.  $a\sqrt{15}$ .                      B.  $3a$ .                      C.  $4a$ .                      D.  $a\sqrt{17}$ .
- Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm  $AB$ , điểm  $N$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $BN = 3NC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AN, CM$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?
- A.  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IN}$ .                      B.  $\overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{IN}$ .                      C.  $\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{IN}$ .                      D.  $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{IN}$ .
- Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm  $AB$ ,  $N$  thuộc cạnh  $AC$  thỏa mãn  $AN = 2NC$ ,  $P$  thuộc đường thẳng  $BC$  sao cho  $AP$  cắt  $MN$  tại trung điểm  $I$  của  $MN$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$ .                      B.  $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$ .                      C.  $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{CB}$ .                      D.  $\overrightarrow{CP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}$ .
- Câu 16:** Cho vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A. Khi  $k < 0$  hai vector  $\vec{a}, k\vec{a}$  luôn cùng hướng
- B. Hai vector  $\vec{a}, k\vec{a}$  không cùng phương  $\forall k \in \mathbb{R}$ .
- C. Hai vector  $\vec{a}, k\vec{a}$  có độ dài bằng nhau  $\forall k \in \mathbb{R}$ .
- D. Khi  $k < 0$  hai vector  $\vec{a}, k\vec{a}$  luôn ngược hướng.
- Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- A.  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ .                      B.  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}$ .                      C.  $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$ .                      D.  $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .
- Câu 18:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Khẳng định nào sau đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ .                      B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$ .
- C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$ .                      D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AC}$ .
- Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?
- A.  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .                      B.  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .
- C.  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IA}$ .                      D.  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}$ .
- Câu 20:** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AD, BC$  của tứ giác  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây **sai**?
- A.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{MN}$ .                      B.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$ .
- C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$ .                      D.  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MN}$ .
- Câu 21:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MP}$ . Với điểm  $O$  bất kì, đẳng thức nào dưới đây đúng?
- A.  $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$ .                      B.  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OP})$ .
- C.  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$ .                      D.  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$ .



- Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ . Nếu điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$  thì ta có
- A.  $ABMC$  là hình bình hành.                      B.  $ABCM$  là hình bình hành.  
C.  $M$  là trung điểm  $BC$ .                      D.  $M$  là trung điểm  $AB$ .
- Câu 23:** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ . Tìm vị trí điểm  $M$ .
- A.  $M$  là trung điểm của  $AC$ .  
B.  $M$  là trung điểm của  $AB$ .  
C.  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  
D.  $M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ .
- Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy điểm  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $B$  và lấy điểm  $E$  trên đoạn  $AC$  sao cho  $3AE = 2EC$ . Nếu  $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$  thì giá trị  $m.n$  là
- A.  $m.n = -\frac{2}{5}$ .                      B.  $m.n = -\frac{4}{5}$ .                      C.  $m.n = \frac{4}{5}$ .                      D.  $m.n = \frac{2}{5}$ .
- Câu 25:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có hai cạnh  $AB = a, BC = 2a$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}|$  bằng
- A.  $a\sqrt{17}$ .                      B.  $5a$ .                      C.  $3a$ .                      D.  $2\sqrt{2}a$ .
- Câu 26:** Cho  $AD$  và  $BE$  là hai phân giác trong của tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 4, BC = 5$  và  $CA = 6$ . Khi đó  $\overrightarrow{DE}$  bằng
- A.  $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ .                      B.  $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$ .                      C.  $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ .                      D.  $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$ .
- Câu 27:** Cho hình thang  $ABCD$  có 2 đáy là  $AB = a$  và  $CD = 2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Khi đó  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}|$  bằng
- A.  $\frac{a}{2}$ .                      B.  $\frac{3a}{2}$ .                      C.  $2a$ .                      D.  $3a$ .
- Câu 28:** Cho tam giác  $ABC$ ,  $I, J, K$  lần lượt là các điểm thỏa  $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ . Khi đó phát biểu nào dưới đây là phát biểu **sai**?
- A.  $\overrightarrow{IK} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ .                      B. Hai  $\triangle ABC$  và  $\triangle IJK$  có cùng trọng tâm.  
C.  $\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{KB} = \vec{0}$ .                      D.  $\overrightarrow{BK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
- Câu 29:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là các điểm nằm trên các cạnh  $AB$  và  $CD$  sao cho  $AM = \frac{1}{3}AB, CN = \frac{1}{2}CD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle BMN$ . Hãy phân tích  $\overrightarrow{AG}$  theo hai vector  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AC} = \vec{b}$ .
- A.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{5}{3}\vec{b}$                       B.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{18}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b}$                       C.  $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}$                       D.  $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b}$ .
- Câu 30:** Tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức:  $|\overrightarrow{3MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$  là:
- A. Một đường tròn có bán kính là  $\frac{AB}{2}$                       B. Một đường tròn có bán kính là  $\frac{CB}{3}$   
C. Một điểm.                      D. Một đường thẳng qua  $A$  và song song với  $BC$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O, M$  là một điểm bất kỳ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

b)  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OA}$ .

c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ .

d) Nếu  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO}$  thì  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$ .

**Câu 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $G$  là trung điểm  $MN$ . Gọi  $O$  là điểm bất kì. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

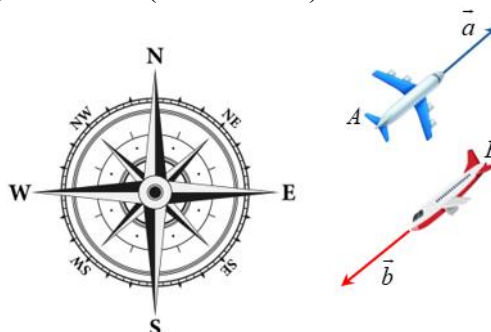
a)  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

b)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

c)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

d)  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ .

**Câu 3:** Máy bay A đang bay về hướng đông bắc với tốc độ 600 km/h. Cùng lúc đó, máy bay B đang bay về hướng tây nam với tốc độ 800 km/h (như hình vẽ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Vector vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay B ngược hướng với vector vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay A.

b)  $|\vec{a}| = 800 \text{ (km/h)}; |\vec{b}| = 600 \text{ (km/h)}$

c)  $\vec{b} = \frac{-4}{3}\vec{a}$ .

d)  $\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{b}$ .

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $AM$  và trọng tâm  $G$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tổng  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

b) Biểu diễn  $\overrightarrow{GA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ .

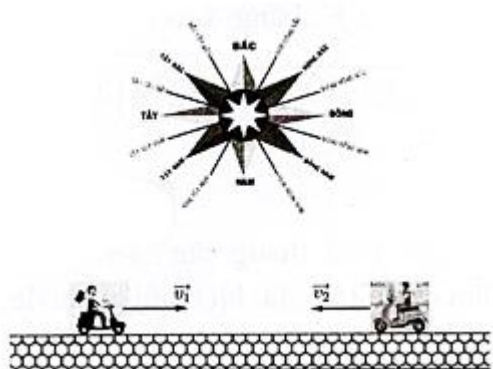


c) Với mọi điểm  $N$  thì  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{GN}$

d) Phân tích  $\overrightarrow{AG}$  theo hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  ta được  $\overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

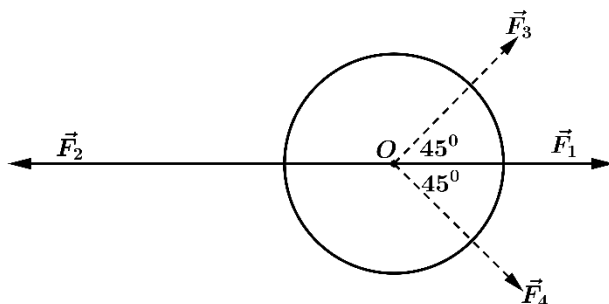
**Câu 1:** Một người đi xe máy từ Tây sang hướng Đông với vận tốc 40 km/h được biểu thị bởi vectơ  $\vec{v}_1$  và một người khác đi xe máy từ hướng Đông sang hướng Tây với vận tốc 60 km/h được biểu thị bởi vectơ  $\vec{v}_2$ . Biết rằng  $\vec{v}_2 = -\frac{a}{b}\vec{v}_1$  ( $a, b \in \mathbb{N}^*$ ),  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $2a + 3b$ .



**Câu 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC$  và  $BD$ . Biết rằng biểu thức  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{IJ}$ . Tìm giá trị của  $k$

**Câu 3:** Nếu  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  thì  $k\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ . Tìm giá trị của  $k$ .

**Câu 4:** Một vật đang ở vị trí  $O$  chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$ , trong đó độ lớn lực  $\vec{F}_2$  lớn gấp đôi độ lớn lực  $\vec{F}_1$ . Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực  $\vec{F}_3, \vec{F}_4$  có phương hợp với lực  $\vec{F}_1$  các góc  $45^\circ$  như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng  $20\text{ N}$ . Tìm độ lớn của lực  $\vec{F}_2$  (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



**Câu 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  và  $F$  là 2 điểm thỏa  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AF}$ . Tính  $3k + 2025$

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Biết rằng tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$  là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

-----HẾT-----

BÀI

04

VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Toạ độ vector

Với mỗi vector  $\vec{u}$  trên mặt phẳng  $Oxy$ , có duy nhất cặp số  $(x_0; y_0)$  sao cho  $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ . Ta nói vector  $\vec{u}$  có toạ độ  $(x_0; y_0)$  và nếu  $\vec{u} = (x_0; y_0)$  hay  $\vec{u}(x_0; y_0)$ . Các số  $x_0; y_0$  tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của  $\vec{u}$ .

**Nhận xét:** Hai vector bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng toạ độ.

$$\text{Hai vector } \vec{u}(x; y) = \vec{u}'(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

2 Biểu thức toạ độ của các phép toán vector

Cho hai vector  $\vec{u} = (x; y)$  và  $\vec{v} = (x'; y')$ . Khi đó ta có:

$$\bullet \vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y') \quad \bullet \vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y') \quad \bullet k\vec{u} = (kx; ky) \text{ với } k \in \mathbb{R}$$

**Nhận xét:** Vector  $\vec{v} = (x'; y')$  cùng phương với vector  $\vec{u} = (x; y) \neq \vec{0}$  khi và chỉ khi tồn tại số  $k$  sao cho  $x' = kx, y' = ky$  (hay là  $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$  nếu  $xy \neq 0$ ).

Nếu điểm  $M$  có toạ độ  $(x; y)$  thì vector  $\overrightarrow{OM}$  có toạ độ  $(x; y)$  và có độ dài  $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

**Nhận xét:** Với  $\vec{u} = (x; y)$  ta lấy điểm  $M(x; y)$  thì  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ . Do đó  $|\vec{u}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Chẳng hạn, vector  $\vec{u} = (2; -1)$  có độ dài là  $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ .

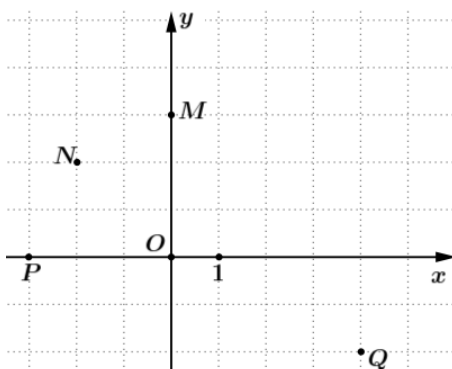
Với hai điểm  $M(x; y)$  và  $N(x'; y')$  thì  $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$  và khoảng cách giữa hai điểm  $M, N$  là  $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ .

**Chú ý:**

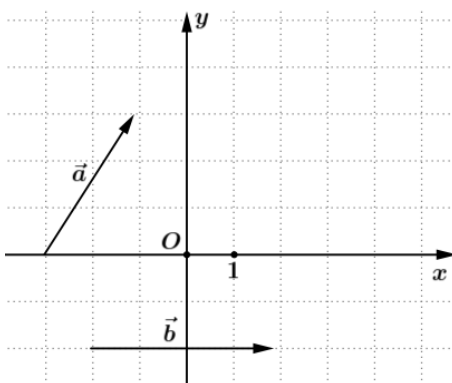
- Trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  có toạ độ là  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .
- Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  có toạ độ là  $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

**B** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**Dạng 1: Tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ****Phương pháp:** Sử dụng lý thuyết đã được nêu để giải quyết các vấn đề yêu cầu**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

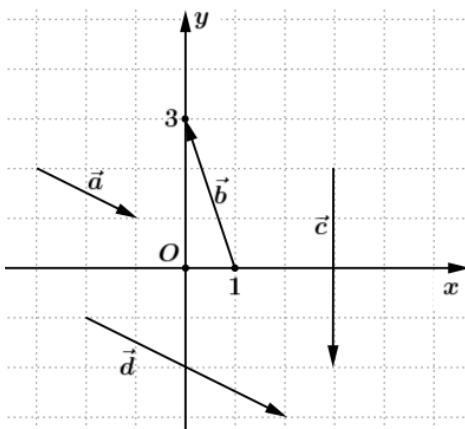
**Bài tập 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $M, N, P, Q$  như hình vẽ. Tìm tọa độ của các vectơ  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ .



**Bài tập 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Tìm tọa độ các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  dưới hình vẽ.



**Bài tập 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm tọa độ các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  dưới hình vẽ.



**Bài tập 4:** Thực hiện các yêu cầu sau đây:

- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vectơ  $\vec{a} = (3; -7)$ . Hãy biểu diễn vectơ  $\vec{a}$  qua hai vectơ  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$ .
- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(-2; 5)$ . Hãy biểu diễn vectơ  $\overrightarrow{OA}$  qua hai vectơ  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$ .



- c) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $B(1; \sqrt{2})$ . Hãy biểu diễn vector  $\overrightarrow{OB}$  qua hai vector  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$ .
- d) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{u} = (a+1; b-2)$  và vector  $\vec{v} = (-3; 3)$ . Hãy tìm  $a$  và  $b$  để vector  $\vec{u}$  bằng vector  $\vec{v}$ .
- e) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{u} = (a-2; b+2)$  và vector  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ . Hãy tìm  $a$  và  $b$  để vector  $\vec{u}$  bằng vector  $\vec{v}$ .

**Bài tập 5:** Thực hiện các yêu cầu sau đây:

- a) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{u} = (2a-1; 4)$  và vector  $\vec{v} = (-1; -2b-2)$ . Hãy tìm  $a$  và  $b$  để vector  $\vec{u}$  bằng vector  $\vec{v}$ .
- b) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{u} = (a-2; b+2)$  và vector  $\vec{v} = (2a+2; -b+4)$ . Hãy tìm  $a$  và  $b$  để vector  $\vec{u}$  bằng vector  $\vec{v}$ .
- c) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(5; 2)$ ,  $B(10; 8)$ . Tìm tọa độ của vector  $\overrightarrow{AB}$ ?
- d) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1; 3)$ ,  $B(-1; 2)$ ,  $C(-2; 1)$ . Tìm tọa độ của vector  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ?
- e) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(2; 1)$ ,  $B(0; -3)$ ,  $C(3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình bình hành.



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{a} = -2\vec{j}$ . Khi đó tọa độ vector  $\vec{a}$  là

- A.  $\vec{a} = (-2; 0)$ .      B.  $\vec{a} = (0; -2)$ .      C.  $\vec{a} = (-2; -2)$ .      D.  $\vec{a} = (2; 0)$ .

**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = (x - 4; 3)$ ,  $\vec{b} = (-2; y + 1)$ . Giá trị của  $x$  và  $y$  để  $\vec{a} = \vec{b}$  là

- A.  $x = 6; y = 2$ .      B.  $x = 2; y = -2$ .      C.  $x = -2; y = 2$ .      D.  $x = 2; y = 2$ .

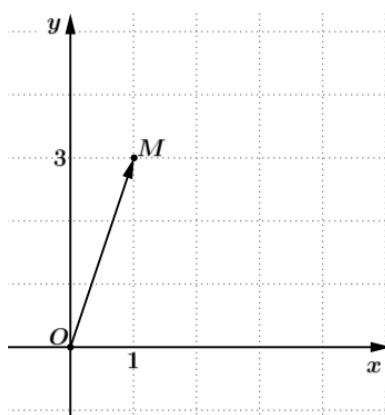
**Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 2\vec{j}$ . Khi đó tọa độ của điểm  $M$  là

- A.  $M(1; -2)$ .      B.  $M(1; 2)$ .      C.  $M(0; -2)$ .      D.  $M(-1; 2)$ .

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $A(1; 2)$ ;  $B(-1; 0)$ ;  $C(2; 0)$ . Tìm tọa độ của điểm  $D$  để tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

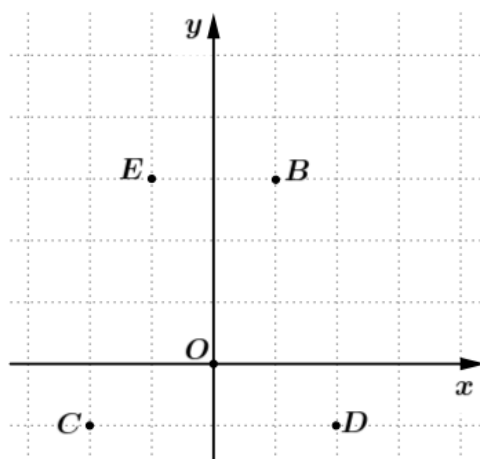
- A.  $D(4; 2)$ .      B.  $D(0; 2)$ .      C.  $D(0; -2)$ .      D.  $M(1; 2)$ .

**Câu 5:** Cho điểm  $M$  trong hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ. Tọa độ điểm  $M$  là



- A.  $(-1; 2)$ .      B.  $(1; 3)$ .      C.  $(1; -3)$ .      D.  $(3; 1)$ .

**Câu 6:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $B, C, D, E$  như hình vẽ. Điểm nào sau đây có tọa độ  $(-1; 2)$ ?

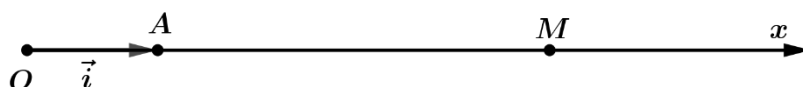


- A. B.      B. C.      C. D.      D. E.



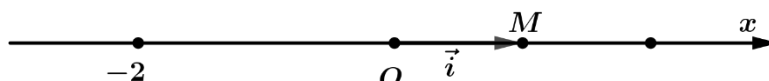
**Câu 7:** Trên trục số  $Ox$ , gọi  $A$  là điểm biểu diễn số 1 và đặt  $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ . Gọi  $M$  là điểm biểu diễn số 4. Biểu thị vector  $\overrightarrow{OM}$  theo vec tơ  $\vec{i}$  ta được

- A.  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i}$       B.  $\overrightarrow{OM} = 5\vec{i}$       C.  $\overrightarrow{OM} = \frac{5}{2}\vec{i}$       D.  $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i}$ .

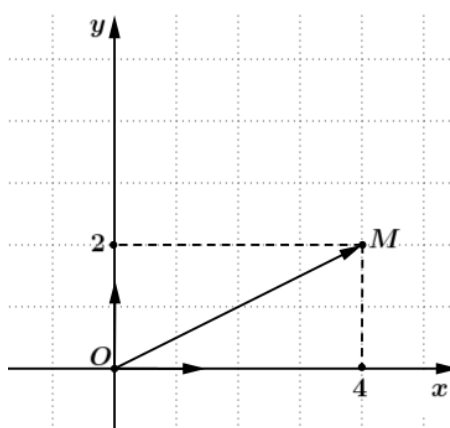


**Câu 8:** Trên trục số  $Ox$ , gọi  $A$  là điểm biểu diễn số 1 và đặt  $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ . Gọi  $N$  là điểm biểu diễn số  $-2$ . Biểu thị vec tơ  $\overrightarrow{ON}$  theo vec tơ  $\vec{i}$  ta được

- A.  $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i}$       B.  $\overrightarrow{ON} = -\vec{i}$       C.  $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i}$       D.  $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i}$ .

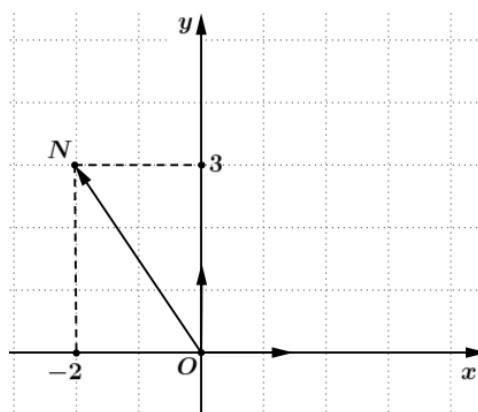


**Câu 9:** Biểu thị vec tơ  $\overrightarrow{OM}$  (hình vẽ) theo các vec tơ  $\vec{i}; \vec{j}$  ta được:



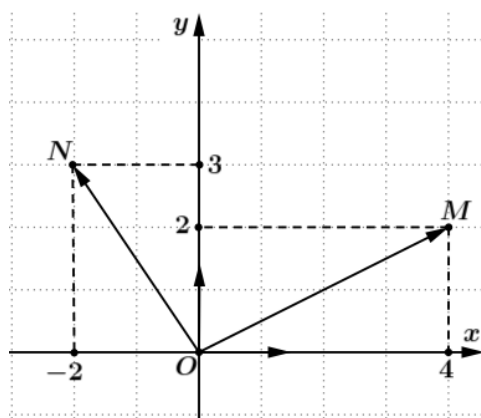
- A.  $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$       B.  $\overrightarrow{OM} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$       C.  $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$       D.  $\overrightarrow{OM} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$ .

**Câu 10:** Biểu thị vec tơ  $\overrightarrow{ON}$  (hình vẽ) theo các vec tơ  $\vec{i}; \vec{j}$  ta được:



- A.  $\overrightarrow{ON} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$       B.  $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$       C.  $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$       D.  $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ .

**Câu 11:** Biểu thị vec tơ  $\overrightarrow{MN}$  (hình vẽ) theo các vec tơ  $\vec{i}; \vec{j}$  ta được:



- A.  $\overrightarrow{MN} = -6\vec{i} + 5\vec{j}$ .      B.  $\overrightarrow{MN} = -\vec{i} + 5\vec{j}$ .      C.  $\overrightarrow{MN} = -6\vec{i} + \vec{j}$ .      D.  $\overrightarrow{MN} = -6\vec{i} - 5\vec{j}$ .

**Câu 12:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , biết  $\vec{u} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$ . Tọa độ của vector  $\vec{u}$  là

- A.  $(6; -2)$ .      B.  $(-2; 6)$ .      C.  $(-6; 2)$ .      D.  $(2; -6)$ .

**Câu 13:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , vector cùng phương với  $\vec{u} = \left(-\frac{5}{3}; 1\right)$  là

- A.  $\vec{v}_1 = (-5; 2)$ .      B.  $\vec{v}_2 = \left(\frac{5}{3}; 1\right)$ .      C.  $\vec{v}_3 = \left(-1; \frac{5}{3}\right)$ .      D.  $\vec{v}_4 = (10; -6)$ .

**Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , biết  $\vec{u} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$ . Độ dài của vector  $\vec{u}$  là

- A.  $\sqrt{53}$ .      B.  $3\sqrt{5}$ .      C.  $\sqrt{5}$ .      D. 3.

**Câu 15:** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho 4 điểm  $A(3; 0), B(4; -3), C(8; -1), D(-2; 1)$ . Ba điểm nào trong bốn điểm đã cho thẳng hàng ?

- A. B, C, D.      B. A, B, C.      C. A, B, D.      D. A, C, D.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho  $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\vec{a} = (-1; 3)$   
b)  $\vec{b} = (1; 2)$   
c)  $\vec{a} + \vec{b} = (1; 5)$   
d)  $\vec{a} - \vec{b} = (2; 1)$

**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = -2\vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\vec{a} = (-3; 1)$   
b)  $\vec{b} = (0; -2)$   
c)  $\vec{a} + \vec{b} = (3; 1)$   
d)  $\vec{a} - \vec{b} = (3; -3)$

**Câu 3:** Cho  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\vec{a} = (3; -2)$



b)  $\vec{b} = (-1; 1)$

c)  $2\vec{a} + 3\vec{b} = (9; 1)$

d)  $\vec{a} - 2\vec{b} = (1; 4)$

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vector  $\vec{a} = (2; -2)$ ,  $\vec{b} = (4; 1)$  và  $\vec{c} = (0; -1)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c} = (0; -2)$

b) Vector  $\vec{e} = (1; -1)$  cùng phương, cùng hướng với vector  $\vec{a}$ c) Vector  $\vec{f} = \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$  cùng phương, cùng hướng với vector  $\vec{b}$ 

d)  $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$

**Câu 5:** Cho các vector  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}$ ,  $\vec{c} = 3\vec{i}$ ,  $\vec{d} = -2\vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a} = (2; 3)$

b)  $\vec{b} = \left(\frac{1}{3}; 5\right)$

c)  $\vec{c} = (0; 3)$

d)  $\vec{d} = (0; -2)$

**Câu 6:** Cho các vector  $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$ ,  $\vec{d} = -4\vec{j}$ ,  $\vec{e} = 3\vec{i}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a} = (1; -3)$

b)  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$

c)  $\vec{c} = \left(1; \frac{3}{2}\right)$

d)  $\vec{d} = (0; -4)$ ,  $\vec{e} = (3; 0)$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$  và  $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$ . Xác định  $x$  sao cho  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = (-5; 0)$ ,  $\vec{b} = (4; x)$ . Tìm  $x$  để hai vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương.

**Câu 3:** Cho  $\vec{a} = (x; 2)$ ,  $\vec{b} = (-5; 1)$ ,  $\vec{c} = (x; 7)$ . Tìm  $x$  biết  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vector  $\vec{a} = (2; -1)$ ,  $\vec{b} = (1; 1)$  và  $\vec{d} = (2m + 2; 1 - m^2)$ . Tìm  $m$  dương biết rằng  $\vec{d}$  cùng phương với  $\vec{a}$ .

**Câu 5:** Cho  $A(2; -4)$ ;  $B(6; 0)$ ;  $C(m; 4)$ . Xác định  $m$  để ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.



**Câu 6:** Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí  $A(1;2)$  chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vector  $\vec{v} = (3;4)$ . Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

-----HẾT-----



**Dạng 2: Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ****Phương pháp:** Sử dụng lý thuyết đã được nêu

- Dùng định nghĩa vectơ  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  thì  $\vec{u} = (x; y)$  hay  $\vec{u}(x; y)$ .
- Sử dụng các phép biến đổi về tọa độ của vectơ.
- Áp dụng công thức khoảng cách giữa hai điểm.
- Cho đoạn thẳng  $AB$  có  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ . Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm  $I(x_I; y_I)$  của đoạn thẳng  $AB$  là:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

- Cho tam giác  $ABC$  có  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ . Khi đó tọa độ của trọng tâm  $G(x_G; y_G)$  của tam giác  $ABC$  được tính theo công thức:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài tập 1:** Cho  $\vec{a} = (1; 2); \vec{b} = (-3; 4); \vec{c} = (-1; 3)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u}$  biết:

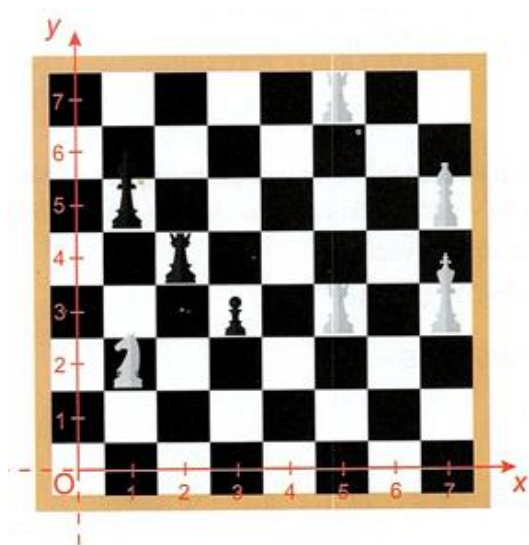
a)  $2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

b)  $3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c}$

**Bài tập 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $\vec{a} = 2\vec{i}, \vec{b} = -3\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ .a) Tìm tọa độ của các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ .b) Phân tích vectơ  $\vec{c}$  theo hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ .**Bài tập 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $A(2; 1), B(-1; -2), C(-3; 2)$ .a) Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ .b) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  tạo thành một tam giác.c) Tìm tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$ .**Bài tập 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(2; 1), B(-1; -2), C(-3; 2)$ .a) Tìm tọa độ điểm  $E$  sao cho  $C$  là trung điểm của đoạn thẳng  $EB$ .b) Xác định tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.**Bài tập 5:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các điểm  $A(1; 3), B(4; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa  $3\vec{AM} + \vec{AB} = \vec{0}$ **Bài tập 6:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(3; 4), C(8; 1)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ ,  $N$  là giao điểm của  $BD$  và  $AM$ . Xác định các đỉnh còn lại của hình bình hành  $ABCD$ , biết  $N\left(\frac{13}{3}; 2\right)$ .**Bài tập 7:** Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $I$  và có  $A(1; 3)$ . Biết điểm  $B$  thuộc trục  $Ox$  và  $\vec{BC}$  cùng hướng với  $\vec{i}$ . Tìm tọa độ các vectơ  $\vec{AC}$ ?**Bài tập 8:** Cho tam giác  $ABC$  với  $AB = 5$  và  $AC = 1$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  là của chân đường phân giác trong góc  $A$  biết  $B(7; -2); C(1; 4)$ .



**Bài tập 9:** Trong hình bàn cờ vu dưới đây, quân mã đang ở vị trí có tọa độ  $(1;2)$ . Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?





## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $M(x_M; y_M)$  và  $N(x_N; y_N)$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$  là

- A.  $I\left(\frac{x_M - x_N}{2}; \frac{y_M - y_N}{2}\right)$ .  
 B.  $I\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}\right)$ .  
 C.  $I\left(\frac{x_M + x_N}{3}; \frac{y_M + y_N}{3}\right)$ .  
 D.  $I\left(\frac{x_M + y_M}{2}; \frac{x_N + y_N}{2}\right)$ .

**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = (3; -4); \vec{b} = (-1; 2)$ . Tìm tọa độ vector  $\vec{a} + \vec{b}$ .

- A.  $(-4; 6)$ .  
 B.  $(2; -2)$ .  
 C.  $(4; -6)$ .  
 D.  $(-3; -8)$ .

**Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho hai điểm  $A(3; -5)$ ,  $B(1; 7)$ . Trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  có tọa độ là

- A.  $I(2; -1)$ .  
 B.  $I(-2; 12)$ .  
 C.  $I(4; 2)$ .  
 D.  $I(2; 1)$ .

**Câu 4:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (-5; 0)$ ,  $\vec{b} = (4; x)$ . Tìm giá trị của  $x$  để hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

- A. 4.  
 B. -1.  
 C. 0.  
 D. -5.

**Câu 5:** Cho hai vector  $\vec{a} = (1; -4)$ ,  $\vec{b} = (-3; 2)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  là

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ .  
 B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$ .  
 C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$ .  
 D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$ .

**Câu 6:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho 2 điểm  $A(-2; -2)$  và  $B(5; -4)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $OAB$  là

- A.  $G(1; -2)$ .  
 B.  $G(3; -6)$ .  
 C.  $G(-1; -2)$ .  
 D.  $G(-1; 2)$ .

**Câu 7:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (-1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 2)$ . Tọa độ của vector  $\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$  là

- A.  $\vec{v} = (8; 2)$ .  
 B.  $\vec{v} = (11; 8)$ .  
 C.  $\vec{v} = (11; 2)$ .  
 D.  $\vec{v} = (2; 4)$ .

**Câu 8:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  biết  $A(2; 1), B(-3; 0), G(1; 1)$ ?

- A.  $C(4; 2)$ .  
 B.  $C(4; -2)$ .  
 C.  $C(-2; 0)$ .  
 D.  $C(2; 0)$ .

**Câu 9:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho các điểm  $A(1; 3), B(4; 0), C(2; -5)$ . Tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}$  là

- A.  $M(1; 18)$ .  
 B.  $M(-1; 18)$ .  
 C.  $M(-18; 1)$ .  
 D.  $M(1; -18)$ .

**Câu 10:** Cho  $A(1; 2)$ ,  $B(-2; 6)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc trục  $Oy$  sao cho ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng?



B.  $M(0;3)$ .      B.  $M\left(0;\frac{10}{3}\right)$ .      C.  $M\left(\frac{5}{2};0\right)$ .      D.  $M\left(0;\frac{5}{2}\right)$ .

**Câu 11:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(2;2), B(-1;6)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  sao cho  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AI$ .

A.  $I\left(-\frac{3}{2};2\right)$ .      B.  $I(0;14)$ .      C.  $I(-4;10)$ .      D.  $I\left(\frac{1}{2};4\right)$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2;-2), B(-2;1), C(2;-2)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

A.  $\triangle ABC$  vuông.      B. Chu vi tam giác  $\triangle ABC$  bằng  $P = 12$ .  
C.  $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) = \frac{4}{5}$ .      D.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 16$ .

**Câu 13:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(1;-2); B(3;-5)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên trục  $Ox$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

A.  $(-4;0)$ .      B.  $(-2;0)$ .      C.  $(2;0)$ .      D.  $(4;0)$ .

**Câu 14:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-3;2), B(4;3)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc trục  $Ox$  và có hoành độ dương để tam giác  $MAB$  vuông tại  $M$ .

A.  $M(7;0)$ .      B.  $M(-2;0)$ .      C.  $M(9;0)$ .      D.  $M(3;0)$ .

**Câu 15:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(5;3), B(2;-1), C(-1;5)$ . Tìm tọa độ điểm  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ .

A.  $H(3;2)$ .      B.  $H(3;-2)$ .      C.  $H\left(2;\frac{7}{3}\right)$ .      D.  $H\left(-2;-\frac{7}{3}\right)$ .

**Câu 16:** Cho  $A(0;3), B(4;2)$ . Điểm  $D$  thỏa  $\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$ , tọa độ  $D$  là:

A.  $(-3;3)$ .      B.  $(8;-2)$ .      C.  $(-8;2)$ .      D.  $\left(2;\frac{5}{2}\right)$ .

**Câu 17:** Cho  $A(1;2), B(-2;6)$ . Điểm  $M$  trên trục  $Oy$  sao cho ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng thì tọa độ điểm  $M$  là:

A.  $\left(0;\frac{10}{3}\right)$ .      B.  $\left(0;-\frac{10}{3}\right)$ .      C.  $\left(\frac{10}{3};0\right)$ .      D.  $\left(-\frac{10}{3};0\right)$ .

**Câu 18:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $B(5;-4), C(3;7)$ . Tọa độ của điểm  $E$  đối xứng với  $C$  qua  $B$  là

A.  $E(1;18)$ .      B.  $E(7;15)$ .      C.  $E(7;-1)$ .      D.  $E(7;-15)$ .

**Câu 19:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các điểm  $A(-3;3), B(1;4), C(2;-5)$ . Tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$  là:

A.  $M\left(\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)$ .      B.  $M\left(-\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ .      C.  $M\left(\frac{1}{6};-\frac{5}{6}\right)$ .      D.  $M\left(\frac{5}{6};-\frac{1}{6}\right)$ .

**Câu 20:** Cho  $\vec{a} = (2016\sqrt{2015}; 0)$ ,  $\vec{b} = (4; x)$ . Hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương nếu



- A.  $x = 504$ .      B.  $x = 0$ .      C.  $x = -504$ .      D.  $x = 2017$ .

**Câu 21:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (m - 2; 2n + 1)$ ,  $\vec{b} = (3; -2)$ . Nếu  $\vec{a} = \vec{b}$  thì

- A.  $m = 5, n = -3$ .      B.  $m = 5, n = -\frac{3}{2}$ .      C.  $m = 5, n = -2$ .      D.  $m = 5, n = 2$ .

**Câu 22:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $A(2; -1)$ . Điểm  $B$  là điểm đối xứng của  $A$  qua trục hoành. Tọa độ điểm  $B$  là:

- A.  $B((2; 1)$ .      B.  $B(-2; -1)$ .      C.  $B((1; 2)$ .      D.  $B(1; -2)$ .

**Câu 23:** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(3; -1), B(-4; 2), C(4; 3)$ . Tìm  $D$  để  $ABDC$  là hình bình hành?

- A.  $D(3; 6)$ .      B.  $D(-3; 6)$ .      C.  $D(3; -6)$ .      D.  $D(-3; -6)$ .

**Câu 24:** Cho  $K(1; -3)$ . Điểm  $A \in Ox, B \in Oy$  sao cho  $A$  là trung điểm  $KB$ . Tọa độ  $\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}$  là:

- A.  $(-1; 3)$ .      B.  $\left(\frac{1}{3}; 0\right)$ .      C.  $(0; 3)$ .      D.  $(1; -3)$ .

**Câu 25:** Cho  $M(2; 0), N(2; 2), P(-1; 3)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$  của  $\Delta ABC$ . Tọa độ  $B$  là:

- A.  $(1; 1)$ .      B.  $(-1; -1)$ .      C.  $(-1; 1)$ .      D.  $(1; -1)$ .

**Câu 26:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các điểm  $A(1; -2), B(0; 3), C(-3; 4), D(-1; 8)$ . Ba điểm nào trong 4 điểm đã cho thẳng hàng?

- A.  $A, B, C$ .      B.  $B, C, D$ .      C.  $A, B, D$ .      D.  $A, C, D$ .

**Câu 27:** Tam giác  $ABC$  có  $C(-2; -4)$ , trọng tâm  $G(0; 4)$ , trung điểm cạnh  $BC$  là  $M(2; 0)$ . Tọa độ  $A$  và  $B$  là:

- A.  $A(4; 12), B(4; 6)$ .      B.  $A(-4; -12), B(6; 4)$ .  
C.  $A(-4; 12), B(6; 4)$ .      D.  $A(4; -12), B(-6; 4)$ .

**Câu 28:** Sự chuyển động của một ca nô được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Ca nô khởi hành từ vị trí  $A(2; 3)$  chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vector  $\vec{v} = (2; 1)$ . Xác định vị trí Ca nô (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 2 giờ.

- A.  $(4; 6)$ .      B.  $(4; 2)$ .      C.  $(5; 6)$ .      D.  $(6; 5)$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  với  $A(4\sqrt{3}; -1), B(0; 3), C(8\sqrt{3}; 3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $AC = 8$   
b) Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$   
c)  $S_{\Delta ABC} = 16\sqrt{3}$



d)  $ABC = 30^\circ$

**Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  với  $A(4;6), B(5;1), C(1;-3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} = (1; -5)$

b) Tọa độ điểm  $D$  thuộc  $Ox$  cách đều hai điểm  $A, B$  có hoành độ bằng 13

c)  $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$  là tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$

d) Bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng  $\frac{\sqrt{13}}{2}$

**Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(7;-3), B(8;4), C(1;5)$  và  $D(0;-2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} = (1; 7), \overrightarrow{AC} = (-6; 8)$

b)  $A, B, C$  là ba đỉnh một tam giác.c) Tọa độ điểm  $K(8;4)$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .d) Bốn điểm  $A, B, C, D$  là bốn đỉnh của một hình vuông.

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(3;-5), B(1;0)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$  là trung điểm của  $AB$

b) Tọa độ điểm  $C$  sao cho  $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$  là  $C(6; -15)$

c) Tọa độ điểm  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $C$  là  $D(9; 25)$

d) Tọa độ điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k = -3$  là  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$

**Câu 5:** Cho ba điểm  $A(-1;1), B(2;1), C(-1;-3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

b)  $S_{\Delta ABC} = 12$

c) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi  $D(-4; -3)$ d) Điểm  $N$  thuộc trục  $Oy$  sao cho  $N$  cách đều  $B, C$  có tung độ bằng  $-\frac{5}{8}$ 

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(4;1), B(2;4), C(2;-2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $ABCD$  là hình bình hành khi  $D(4;5)$ b) Tọa độ điểm  $E$  để tam giác  $BCE$  nhận điểm  $A$  làm trọng tâm là  $E(8;1)$



c) Tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  là  $H\left(\frac{13}{2}; 1\right)$

d) Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $I\left(\frac{3}{4}; 1\right)$

**Câu 7:** Cho  $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .

b)  $S_{\triangle ABC} = 12$

c) Độ dài trung tuyến  $BN = \frac{\sqrt{13}}{2}$

d)  $I(6;1)$  là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

**Câu 8:** Cho hai điểm  $A(3;-5), B(1;0)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} = (-2;5)$

a) Tọa độ điểm  $C$  sao cho  $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$  là  $C(6;-5)$

c) Tọa độ điểm  $D$  đối xứng của  $A$  qua  $C$  có hoành độ bằng 7

d) Tọa độ điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k = -3$  là  $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$

**Câu 9:** Cho ba điểm  $A(1;-2), B(0;4), C(3;2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} = (-1;6)$

b)  $\overrightarrow{AC} = (2;4); \overrightarrow{BC} = (3;-2)$

c) Tọa độ trung điểm của đoạn  $AB$  là  $I\left(\frac{1}{2}; 1\right)$

d) Tọa độ điểm  $N$  sao cho  $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$  là  $N(11;12)$

**Câu 10:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AC$  là  $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

b)  $\overrightarrow{AB} = (-3;-3), \overrightarrow{AC} = (-5;1)$

c) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

d) Tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$  là  $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$



**Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(-2;5), B(-4;-2), C(1;5)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.
- b)  $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$  là tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$ .
- c) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi đó tọa độ điểm  $D$  là  $D(3;10)$
- d)  $ACB = 45^\circ$

**Câu 12:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  có các đỉnh thỏa mãn  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}, \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}, \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + \vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $A(2;-1), B(1;1), C(4;1)$
- b)  $E$  là trung điểm  $AB$  nên  $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$
- c)  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABC$  nên  $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$
- d) Điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành nên  $D(2;-1)$

**Câu 13:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

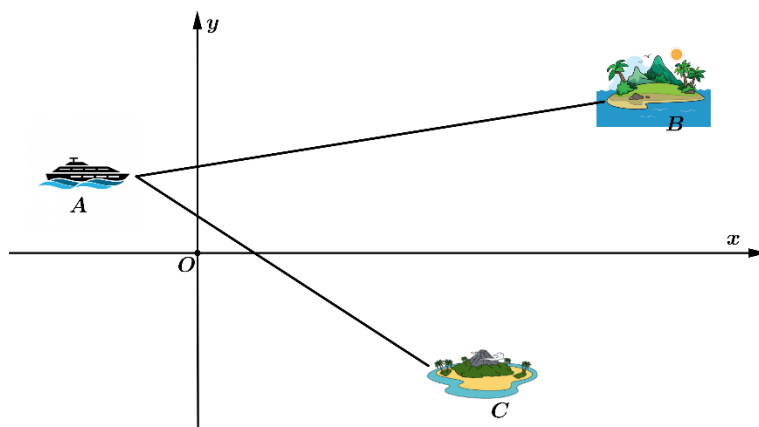
- a) Tọa độ điểm  $D$  sao cho  $C$  là trọng tâm tam giác  $ABD$  là  $D(8;11)$
- b) Tọa độ điểm  $E$  thuộc trục hoành sao cho  $A, B, E$  thẳng hàng là  $E(-6;0)$
- c)  $\overrightarrow{BC} = (0;-6), \overrightarrow{AC} = (6;-3)$
- d) Tọa độ  $F$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CF}$  là  $F(20;5)$

**Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(-2;-1), B(1;3), C(2;-3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

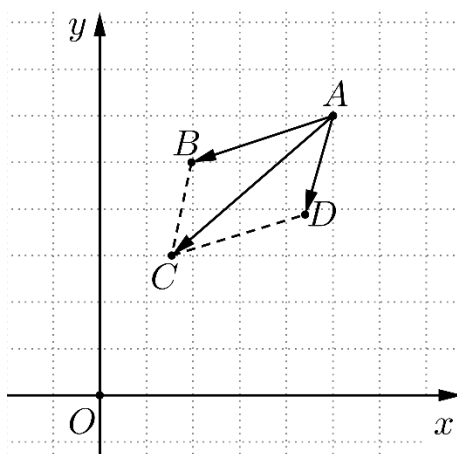
- a)  $A, B, C$  là ba đỉnh một tam giác.
- b) Điểm  $I(0;-2)$  là trung điểm của  $AB$
- b) Điểm  $M$  thuộc  $Ox$  sao cho  $AM + BM$  bé nhất có hoành độ bằng  $\frac{5}{4}$
- c) Điểm  $N$  thuộc  $Oy$  sao cho  $BN + CN$  bé nhất có tung độ bằng 2

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

- Câu 1:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các điểm  $A(-3;3), B(1;4), C(2;-1)$ . Tọa độ điểm  $M(a;b)$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ . Tính  $b - a$
- Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;3), B(-3;1), C(5;-6)$ . Biết rằng điểm  $F(0;a)$  trên  $Oy$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $2a + 9$
- Câu 3:** Một trò chơi trên máy tính đang mô phỏng một vùng biển có hai hòn đảo nhỏ có tọa độ  $B(50;30), C(32;-32)$ . Một con tàu đang neo đậu tại điểm  $A(-10;20)$ . Cho biết một đơn vị trên trục tọa độ tương ứng với 1km. Tính tổng khoảng cách từ con tàu đến mỗi hòn đảo.



- Câu 4:** Hai máy tời kéo tàu biển được đặt ở hai vị trí  $B, D$  dọc theo kênh đào được minh họa ở hình dưới đây. Hai máy tời đó kéo một con tàu từ vị trí  $A$  hướng đến vị trí  $C$ . Biết tọa độ các điểm  $A\left(\frac{13}{2}; 8\right), B(3;7), D(6;4)$ . Biết điểm  $C(a;b)$  tính  $a + b$ .



- Câu 5:** Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật  $ABCD$  với độ dài  $AB = 140\text{m}$ ,  $AD = 50\text{m}$ . Người ta dự định làm 5 cột điện liên tiếp thẳng hàng và cách đều nhau. Cột thứ nhất nằm trên bờ  $AB$  và cách đỉnh  $A$  một khoảng bằng 10 m. Cột thứ năm nằm trên bờ  $CD$  và cách đỉnh  $C$  một khoảng bằng 30 m. Khoảng cách từ cột thứ tư đến bờ  $AD$  bằng bao nhiêu?
- Câu 6:** Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật  $ABCD$  với độ dài  $AB = 200\text{m}$ ,  $AD = 180\text{m}$  người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều. Cột thứ nhất nằm trên bờ  $AB$  và cách đỉnh  $A$  khoảng cách 20 m, cột thứ tư nằm trên bờ  $CD$  và cách đỉnh  $C$  một khoảng cách 30 m. Tính các khoảng cách từ vị trí các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ  $AB, AD$ .

-----HẾT-----



## BÀI

## 05

## TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO'

## A

## LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

## 1 Định nghĩa

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Tích vô hướng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng vectơ  $\vec{0}$  ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Chú ý:**

- Với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$
- Ta có:  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

## 2 Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng: Với ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  bất kì và mọi số thực  $k$  ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (tính chất giao hoán)
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (tính chất phân phối)
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0$ ,  $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

**Nhận xét.** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

## 3 Các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ

Trên mặt phẳng tọa độ  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ . Khi đó tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  là:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

**Nhận xét:** Hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  đều khác vectơ  $\vec{0}$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

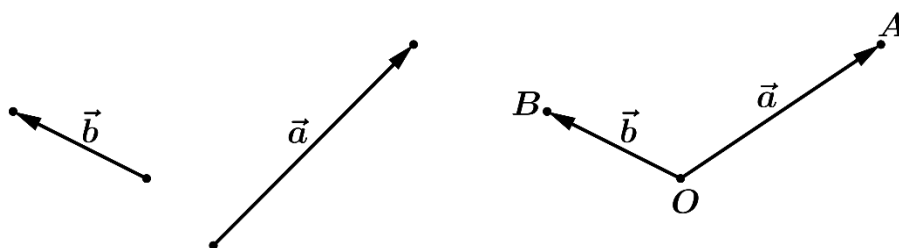
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

**4 Ứng dụng tích vô hướng của hai vector**

- **Độ dài của vector:** Độ dài của vector  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  được tính theo công thức:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- **Góc giữa hai vector:** Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vector ta suy ra kết luận nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  đều khác  $\vec{0}$  thì ta có:  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ .
- **Khoảng cách giữa hai điểm:** Khoảng cách giữa hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$  được tính theo công thức:  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

**5 Góc giữa hai vector**

**Định nghĩa:** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vector  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  và  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ . Góc  $AOB$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta kí hiệu góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$ . Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$  hoặc  $\vec{b} \perp \vec{a}$ .



**Chú ý:** Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Xác định tích vô hướng của hai vectơ****Phương pháp:**

- Dựa vào định nghĩa  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

**BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài tập 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  và  $G$  là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng:  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ;  $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$
- Tính giá trị của biểu thức  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$
- Tính giá trị của biểu thức  $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}$

**Bài tập 2:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính giá trị các biểu thức sau:

- $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC})$
- $\vec{CG} \cdot (\vec{CA} + \vec{DM})$

**Bài tập 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $A$ .

- Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$  từ đó suy ra  $\cos A$ .
- Tính  $\vec{AM}^2$  và  $\vec{AD}^2$

**Bài tập 4:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a$ ,  $AD = 2a$ . Gọi  $M, N$  là các điểm lần lượt thuộc các cạnh  $AB, AC$  sao cho  $\vec{AM} = 2\vec{MB}$  và  $3\vec{NA} + \vec{NC} = \vec{0}$ . Tính độ dài của đoạn thẳng  $MN$  theo  $a$ .**Bài tập 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì ta có:

$$\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vector cùng hướng và đều khác vector  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .      B.  $\vec{a}\vec{b} = 0$ .      C.  $\vec{a}\vec{b} = -1$ .      D.  $\vec{a}\vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Câu 2:** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$       B.  $\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$   
C.  $\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$       D.  $\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

**Câu 4:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

**Câu 5:** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$       B.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$       C.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$

**Câu 6:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và chiều cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A.  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$       B.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và có  $AB = AC = a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$       B.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$       C.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$       D.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

**Câu 9:** Cho ba điểm  $A, B, C$  thỏa  $AB = 2$  cm,  $BC = 3$  cm,  $CA = 5$  cm. Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$       B.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$       C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$       D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

- A.  $P = b^2 - c^2$       B.  $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$       C.  $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$       D.  $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

**Câu 11:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

- A.  $P = -1$       B.  $P = 3a^2$       C.  $P = -3a^2$       D.  $P = 2a^2$

**Câu 12:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(3; -1)$  và  $B(2; 10)$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$

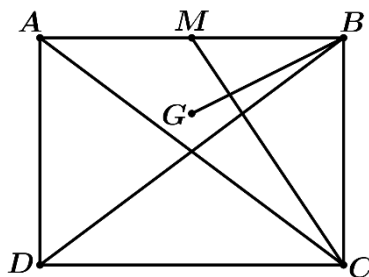
- A.  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$ .      B.  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .      C.  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$ .      D.  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$ .



- Câu 13:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$  và  $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$   
 A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$ .      B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ .      C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ .      D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$ .
- Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-3; 2)$  và  $\vec{b} = (-1; -7)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{c}$  biết  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$  và  $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$   
 A.  $\vec{c} = (-1; -3)$       B.  $\vec{c} = (-1; 3)$       C.  $\vec{c} = (1; -3)$       D.  $\vec{c} = (1; 3)$
- Câu 15:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; 3)$  và  $\vec{c} = (2; 3)$ . Tính  $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ .  
 A.  $P = 0$       B.  $P = 18$       C.  $P = 20$       D.  $P = 28$
- Câu 16:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ;  $AC = a\sqrt{3}$  và  $AM$  là trung tuyến. Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$   
 A.  $\frac{a^2}{2}$ .      B.  $a^2$ .      C.  $-a^2$ .      D.  $-\frac{a^2}{2}$ .
- Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $B = 30^\circ$ ,  $AC = 2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .  
 A.  $P = -2$ .      B.  $P = 2\sqrt{3}$ .      C.  $P = 2$ .      D.  $P = -2\sqrt{3}$ .
- Câu 18:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 2a$ ,  $AD = 3a$ ,  $BAD = 60^\circ$ . Điểm  $K$  thuộc  $AD$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$   
 A.  $3a^2$ .      B.  $6a^2$ .      C.  $0$ .      D.  $a^2$ .

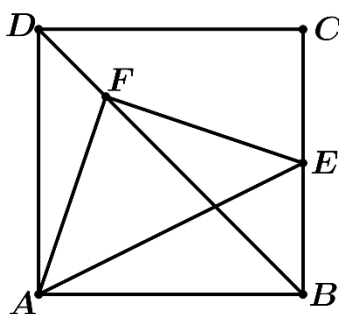
**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

- Câu 1:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$ ,  $AB = 4a$ ,  $AD = 3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ACM$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a)  $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}$   
 b)  $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ .  
 c)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$   
 b)  $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = -a^2$ .

- Câu 2:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Lấy  $E$  là trung điểm của  $BC$ , điểm  $F$  thỏa mãn  $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



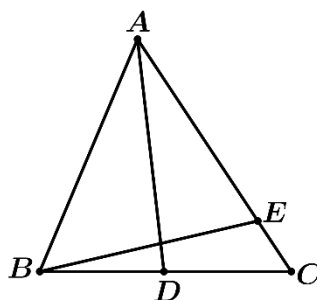
a)  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b)  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$ .

c)  $\overrightarrow{EF} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ .

d) Tam giác  $AEF$  vuông cân.

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4\sqrt{2}, AC = 6, \angle BAC = 45^\circ$ . Gọi  $D$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Điểm  $E$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

b)  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

c)  $BC = 3\sqrt{5}$

d)  $AD \perp BE$  khi  $k = \frac{14}{15}$ .

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a, BC = 2a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\angle ACB = 60^\circ$

b)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

c)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3a^2$ .

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$



**Câu 5:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ , có cạnh  $a$ . Biết  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$

b)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$

c)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

d)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$

**Câu 6:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = a^2$

c)  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$

d)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$

**Câu 7:** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ , biết  $AD = a$ ,  $BC = 3a$  và cạnh  $AB = 2a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$

b)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$

c)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$

d) Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $a$ , có trọng tâm  $G$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

b)  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{4}$

c)  $\angle AGB = 120^\circ$

c)  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{a^2}{6}$

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a$ ,  $AC = 3a$ ,  $\angle BAC = 60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm đoạn thẳng  $BC$ . Điểm  $J$  thuộc đoạn  $AC$  thỏa mãn  $12AJ = 7AC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4a^2$

b)  $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$



c)  $\overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12}\overrightarrow{AC}$

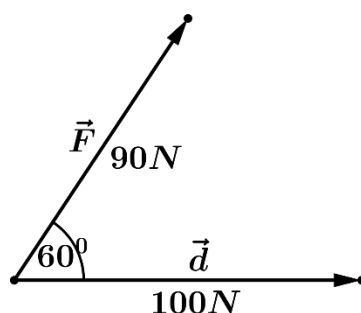
d)  $AI \perp BJ$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

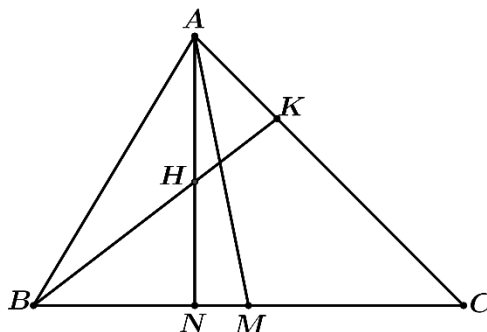
**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng 4. Khi đó hãy tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $B = 30^\circ$ ,  $AC = 2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .

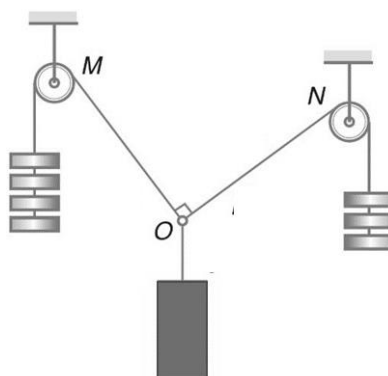
**Câu 3:** Một người dùng một lực  $\vec{F}$  có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực  $\vec{F}$  hợp với hướng dịch chuyển một góc  $60^\circ$ . Tính công sinh bởi lực  $\vec{F}$ .



**Câu 4:** Cho đoạn thẳng  $BC$  cố định có độ dài bằng 4. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $BC, BM$ . Trên đường thẳng vuông góc  $BC$  tại  $N$  lấy điểm  $A$  bất kì. Gọi  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$  và  $BH \cap AC = K$ . Giá trị biểu thức  $P = MH \cdot BK$  bằng:

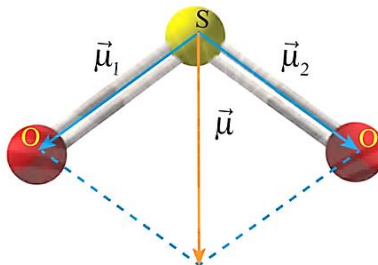


**Câu 5:** Người ta mắc lệch hai ròng rọc cố định để treo một vật có trọng lượng  $200(N)$ . Biết rằng ở mỗi đầu dây của các ròng rọc người ta đặt các quả cân có trọng lượng  $20(N)$ . Hỏi số quả cân cần thiết để giữ vật cân bằng sao cho hai dây căng vật của hai ròng rọc tạo với nhau một góc  $90^\circ$  (như hình vẽ).





**Câu 6:** Phân tử sulfur dioxide ( $\text{SO}_2$ ) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết  $\text{OSO}$  gần bằng  $120^\circ$ . Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các vectơ  $\vec{\mu}_1$  và  $\vec{\mu}_2$ , có cùng phương với liên kết cộng hoá trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài là 1,6 đơn vị (Hình 6). Cho biết vectơ tổng  $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2$  được dùng để biểu diễn sự phân cực của cả phân tử  $\text{SO}_2$ . Tính độ dài của  $\vec{\mu}$ .



-----HẾT-----

**Dạng 2: Góc giữa hai vectơ. Biểu thức tọa độ và tính chất của tích vô hướng**

**Phương pháp:** Sử dụng lý thuyết đã nêu để tính toán

- Để tính góc của hai vectơ ta sử dụng công thức:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Cho  $\vec{a} = (x_1; y_1), \vec{b} = (x_2; y_2)$ .

- Tích vô hướng hai vectơ là  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$
- Góc của hai vectơ được xác định bởi công thức  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

**Chú ý:** Hai vectơ  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ . Để xác định độ dài một vectơ đoạn thẳng thì ta sử dụng công thức:

- Nếu  $\vec{a} = (x; y)$  thì  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Nếu  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  thì  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho hình thang  $ABCD$  có đáy lớn  $BC = 3a$ , đáy nhỏ  $AD = a$ , đường cao  $AB = 2a$

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}; \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}; \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ . Hãy tính góc giữa  $AI$  và  $BD$ .

**Bài tập 2:** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Bài tập 3:** Cho các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vectơ bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai vectơ  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}, \vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ .

**Bài tập 4:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2), B(-2;6), C(9;8)$ .

a) Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$

b) Tính góc  $B$  của tam giác  $ABC$

c) Xác định hình chiếu của  $A$  lên cạnh  $BC$

**Bài tập 5:** Cho các điểm  $A(4\sqrt{3}; -1), B(0;3), C(8\sqrt{3};3)$ .

a) Tính các cạnh của tam giác  $ABC$ .

b) Tính các góc của tam giác  $ABC$ .

**Bài tập 6:** Cho các điểm  $A(-1;-1), B(3;1), C(6;0)$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Tính góc  $B$  và diện tích tam giác  $ABC$ .

**Bài tập 7:** Cho các điểm  $A(1;3), B(4;2)$ .

a) Tìm tọa độ điểm  $D$  nằm trên trục  $Ox$  và cách đều hai điểm  $A$  và  $B$ .



b) Tính chu vi và diện tích tam giác  $OAB$ .

**Bài tập 8:** Cho ba điểm  $A(3;4)$ ,  $B(2;1)$  và  $C(-1;-2)$ . Tìm điểm  $M$  nằm trên đường thẳng  $BC$  sao cho góc  $AMB = 45^\circ$

**Bài tập 9:** Cho 3 điểm  $A(1;3)$ ,  $B(2;4)$ ,  $C(-3;5)$ .

a) Xác định toạ độ điểm  $M$  trên trục hoành sao cho  $P = |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}|$  nhỏ nhất.

b) Xác định toạ độ điểm  $N$  trên trục tung sao cho  $Q = 2|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB}| + 3|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}|$  nhỏ nhất.

### BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  biết  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

A.  $\alpha = 90^\circ$ .                      B.  $\alpha = 0^\circ$ .                      C.  $\alpha = 45^\circ$ .                      D.  $\alpha = 180^\circ$ .

**Câu 2:** Tam giác  $ABC$  có  $A(1;2)$ ,  $B(0;4)$ ,  $C(3;1)$ . Góc  $BAC$  của tam giác  $ABC$  gần với giá trị nào dưới đây?

A.  $90^\circ$ .                      B.  $36^\circ 52'$ .                      C.  $143^\circ 7'$ .                      D.  $53^\circ 7'$ .

**Câu 3:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  khác vectơ-không thỏa mãn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  bằng:

A.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .                      B.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$ .                      C.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$ .                      D.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ .

**Câu 4:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 4; |\vec{b}| = 3; |\vec{a} - \vec{b}| = 4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chọn phát biểu **đúng**.

A.  $\alpha = 60^\circ$ .                      B.  $\alpha = 30^\circ$ .                      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .                      D.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ .

**Câu 5:** Cho hai vectơ  $\vec{a} = (4;3)$  và  $\vec{b} = (1;7)$ . Số đo góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng

A.  $45^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Câu 6:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2;5)$ ,  $\vec{b} = (3;-7)$ . Tính góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

A.  $\alpha = 60^\circ$ .                      B.  $\alpha = 120^\circ$ .                      C.  $\alpha = 45^\circ$ .                      D.  $\alpha = 135^\circ$ .

**Câu 7:** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2;1)$  và  $\vec{b} = (3;-6)$ . Góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng

A.  $0^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $180^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .

**Câu 8:** Cho hai vectơ  $\vec{a}; \vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  thỏa mãn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\vec{a}; \vec{b}$  là

A.  $60^\circ$ .                      B.  $120^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Câu 9:** Cho vectơ  $\vec{a}(1;-2)$ . Với giá trị nào của  $y$  thì vectơ  $\vec{b} = (3;y)$  tạo với vectơ  $\vec{a}$  một góc  $45^\circ$



- A.  $y = -9$ .      B.  $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$ .      D.  $y = -1$ .

**Câu 10:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  sao cho  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và hai vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- A.  $120^\circ$ .      B.  $60^\circ$ .      C.  $90^\circ$ .      D.  $30^\circ$ .

**Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (3; 4)$  và  $\vec{v} = (-8; 6)$ . Khẳng định nào đúng?

- A.  $\vec{u} = -\vec{v}$ .      B.  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .  
C.  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .      D.  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

**Câu 12:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; 2)$ ,  $B(-3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên trục  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

- A.  $C(6; 0)$ .      B.  $C(0; 6)$ .      C.  $C(-6; 0)$ .      D.  $C(0; -6)$ .

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(5; -2)$ . Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .

- A.  $(0; 3)$ .      B.  $(0; -3)$ .      C.  $(3; 0)$ .      D.  $(-3; 0)$ .

**Câu 13.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (1; 2)$  và  $\vec{v} = (4m; 2m - 2)$ . Tìm  $m$  để vectơ  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .

- A.  $m = \frac{1}{2}$ .      B.  $m = -\frac{1}{2}$ .      C.  $m = 1$ .      D.  $m = -1$ .

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 0)$ ,  $B(4; 0)$ ,  $C(0; m)$ ,  $m \neq 0$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Xác định  $m$  để tam giác  $GAB$  vuông tại  $G$ .

- A.  $m = -\sqrt{6}$ .      B.  $m = \pm 3\sqrt{6}$ .      C.  $m = 3\sqrt{6}$ .      D.  $m = \pm\sqrt{6}$ .

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; -1)$ ,  $B(3; -3)$ ,  $C(6; 0)$ . Diện tích  $DABC$  là

- A. 6.      B.  $6\sqrt{2}$ .      C. 12.      D. 9.

**Câu 16:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $B(-1; 3)$  và  $C(3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $A$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

- A.  $A(0; 0)$  hoặc  $A(2; -4)$ .      B.  $A(0; 0)$  hoặc  $A(2; 4)$ .  
C.  $A(0; 0)$  hoặc  $A(-2; -4)$ .      D.  $A(0; 0)$  hoặc  $A(-2; 4)$ .

**Câu 17:** Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm  $A(0; 4)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(3; 0)$ .

- A.  $\frac{5}{2}$ .      B.  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .      C. 5.      D. 3.

**Câu 18:** Trong mặt phẳng tọa độ ( $Oxy$ ) cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 0)$ ;  $B(-1; 1)$ ;  $C(5; -1)$ . Tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  là

- A.  $H(-1; -9)$ .      B.  $H(-8; -27)$ .      C.  $H(-2; 5)$ .      D.  $H(3; 14)$ .



**Câu 19:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ ; cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;1)$ ,  $B(1;3)$  và trọng tâm là  $G\left(-2;\frac{2}{3}\right)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên tia  $Oy$  sao cho tam giác  $MBC$  vuông tại  $M$ .

- A.  $M(0;-3)$ .      B.  $M(0;3)$ .      C.  $M(0;4)$ .      D.  $M(0;-4)$ .

**Câu 20:** Trên hệ trục tọa độ  $xOy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(4;3)$ ,  $B(2;7)$ ,  $C(-3;-8)$ . Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh  $A$  xuống cạnh  $BC$  là

- A.  $(1;-4)$ .      B.  $(-1;4)$ .      C.  $(1;4)$ .      D.  $(4;1)$ .

**Câu 21:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  là:

- A. Đường tròn đường kính  $AB$ .  
B. Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .  
C. Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .  
D. Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $J$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $K$  thỏa mãn  $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ .

Một điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thỏa mãn  $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ .

Tập hợp điểm  $M$  là đường nào trong các đường sau.

- A. Đường tròn đường kính  $IJ$ .      B. Đường tròn đường kính  $IK$ .  
C. Đường tròn đường kính  $JK$ .      D. Đường trung trực đoạn  $JK$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vector  $\vec{a} = (-2;3)$ ,  $\vec{b} = (4;1)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 12$

b)  $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 4$

c) Vector  $\vec{c} = m\vec{i} + \vec{j}$  vuông góc với  $\vec{a}$  khi  $m = \frac{3}{2}$

d) Tọa độ vector  $\vec{d}$  sao cho  $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4, \vec{b} \cdot \vec{d} = -2$  bằng  $\left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$

**Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vector  $\vec{a} = (2;5)$ ,  $\vec{b} = (3;-7)$ ,  $\vec{c} = (1;1)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 29$

b)  $(\vec{a}, \vec{b}) = 15^\circ$

c)  $(\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$

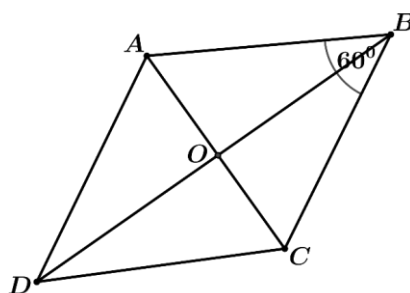
d) Để  $\vec{d} = (4x+1)\vec{i} + (x+4)\vec{j}$  tạo với vector  $\vec{c}$  một góc  $45^\circ$  thì  $x = -\frac{1}{4}$ .



**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  đều và kẻ đường cao  $AH$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ$
- b)  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$
- c)  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$
- d)  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 130^\circ$

**Câu 4:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng 2 và góc  $B$  bằng  $60^\circ$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$
- b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 30^\circ$
- c)  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 3$
- d)  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -3$

**Câu 5:** Cho tam giác đều  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$
- b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$
- c)  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$
- d)  $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh 1. Lấy  $M, N, P$  lần lượt nằm trên ba cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $NP$  (kết quả làm trong đến hai chữ số thập phân).

**Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$ . Biết  $A(3; -1), B(-1; 2)$  và  $I(1; -1)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ  $(a; b)$ . Tính  $a + 3b$ .

**Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3; 0), B(3; 0)$  và  $C(2; 6)$ . Gọi  $H(a; b)$  là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính  $a + 6b$ .



- Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M(3;1)$ . Giả sử  $A(a;0)$  và  $B(0;b)$  là hai điểm sao cho tam giác  $MAB$  vuông tại  $M$  và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức  $T = a^2 + b^2$ .
- Câu 5:** Mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$  cho các điểm  $A(1;3), B(-2;3), C(-2;1)$ . Điểm  $M(a;b)$  thuộc đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ  $Oxy$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$  nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị biểu thức  $S = 12a - 8b$ .
- Câu 6:** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 (km/h) thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 (km/h). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

-----HẾT-----



## BÀI

## 01

## CÁC KHÁI NIỆM MỞ ĐẦU

## A

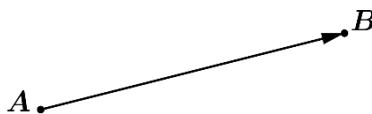
## LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

## 1 Khái niệm vectơ

Cho đoạn thẳng  $AB$ . Nếu chọn điểm  $A$  làm điểm đầu, điểm  $B$  làm điểm cuối thì đoạn thẳng  $AB$  có hướng từ  $A$  đến  $B$ . Khi đó ta nói  $AB$  là một đoạn thẳng có hướng.

## a) Định nghĩa

Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là, trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm đầu, điểm cuối.



## b) Kí hiệu

Vectơ có điểm đầu  $A$  và điểm cuối  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ , đọc là “vectơ  $AB$ ”.

Vectơ còn được kí hiệu là  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{x}$ ,  $\vec{y}$ , ... khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

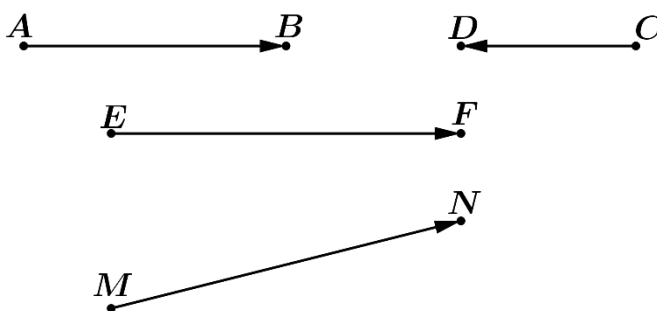
## c) Độ dài vectơ

**Độ dài vectơ:** Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

Độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB}$  được kí hiệu là  $|\overrightarrow{AB}|$ , như vậy  $|\overrightarrow{AB}| = AB$ . Độ dài của vectơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .

Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là vectơ đơn vị.

## 2 Hai vectơ cùng phương, hai vectơ cùng hướng, hai vectơ bằng nhau



**Giá của vectơ:** Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của một vectơ được gọi là giá của vectơ đó.



**Vectơ cùng phương, vectơ cùng hướng:** Hai vectơ được gọi là cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể **cùng hướng** hoặc **ngược hướng**.

**Nhận xét:** Ba điểm phân biệt  $A, B, C$  thẳng hàng khi và chỉ khi hai vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng phương.

**Hai vectơ bằng nhau:** Hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  được gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và có cùng độ dài. Kí hiệu  $\vec{a} = \vec{b}$ .

**Chú ý:** Khi cho trước vectơ  $\vec{a}$  và điểm  $O$ , thì ta luôn tìm được một điểm  $A$  duy nhất sao cho  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ .

### 3 Vectơ không

Vectơ không là vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau, ta kí hiệu là  $\vec{0}$ .

Ta quy ước vectơ – không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ và có độ dài bằng 0.

Như vậy  $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \dots$  và  $\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$ .

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Xác định vectơ. Xác định phương, hướng, độ dài của vectơ****Phương pháp:**

- Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa.
- Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Với ba điểm phân biệt  $A, B, C$  có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác vectơ- không có điểm đầu và điểm cuối được lấy từ ba điểm trên?

**Lời giải**

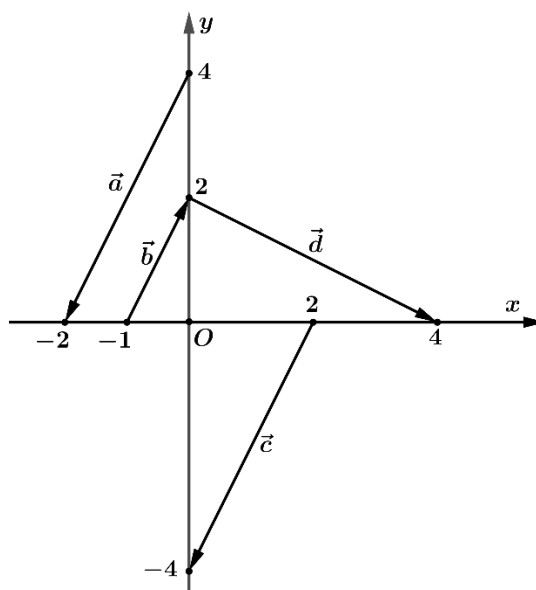
Các vectơ:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ .

**Bài tập 2:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Tìm các cặp vectơ nào cùng hướng.

**Lời giải**

Cặp vectơ cùng hướng là  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .

**Bài tập 3:** Hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các cặp vectơ ngược hướng và các cặp vectơ bằng nhau trong hình dưới đây:

**Lời giải**

Các vectơ cùng phương:  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

Cặp vectơ ngược hướng:  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ ;  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$ ;

Cặp vectơ bằng nhau:  $\vec{a}, \vec{c}$ .

**Bài tập 4:** Cho hình vuông  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Hãy chỉ ra tập hợp  $S$  chứa tất cả các vectơ khác vectơ  $\vec{0}$ , có điểm đầu và điểm cuối thuộc tập hợp  $\{A, B, C, D, O\}$ . Hãy chia tập  $S$  thành các nhóm sao cho hai vectơ thuộc cùng một nhóm khi và chỉ khi chúng bằng nhau.



**Lời giải**

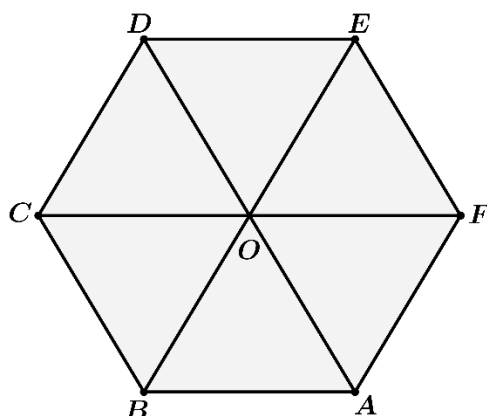
$$S = \{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AO}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BO}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\}$$

Các cặp vector bằng nhau trong tập S

$$\{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}), (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}), (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}), (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}), (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{OD}), (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{DA}), (\overrightarrow{CO}, \overrightarrow{OA}), (\overrightarrow{DO}, \overrightarrow{OB})\}$$

**Bài tập 5:** Cho hình lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Tìm số các vector khác vector không, cùng phương với vector  $\overrightarrow{OB}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác?

**Lời giải**

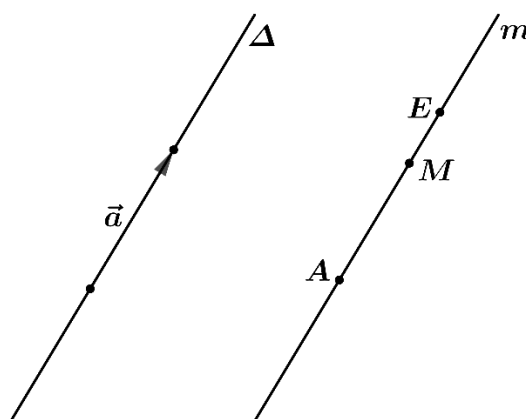


Các vector cùng phương với vector  $\overrightarrow{OB}$  là:  $\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AF}$ .

**Bài tập 6:** Cho điểm  $A$  và vector  $\vec{a}$  khác  $\vec{0}$ . Tìm điểm  $M$  sao cho:

- $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$
- $\overrightarrow{AM}$  cùng hướng với  $\vec{a}$

**Lời giải**



Gọi  $\Delta$  là giá của  $\vec{a}$ .

- Nếu  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$  thì đường thẳng  $AM$  song song với  $\Delta$ . Do đó  $M$  thuộc đường thẳng  $m$  đi qua  $A$  và song song với  $\Delta$ . Ngược lại, mọi điểm  $M$  thuộc đường thẳng  $m$  thì  $\overrightarrow{AM}$  cùng phương với  $\vec{a}$ . Chú ý rằng nếu  $A$  thuộc đường thẳng  $\Delta$  thì  $m$  trùng với  $\Delta$ .
- Lập luận tương tự như trên, ta thấy các điểm  $M$  thuộc một nửa đường thẳng gốc  $A$  của đường thẳng  $m$ . Cụ thể, đó là nửa đường thẳng chứa điểm  $E$  sao cho  $\overrightarrow{AE}$  và  $\vec{a}$  cùng hướng.



**Bài tập 7:** Cho các dữ kiện dưới đây. Thực hiện các yêu cầu của bài toán

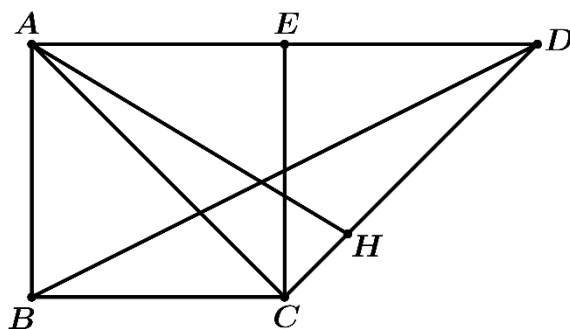
- a) Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = 4$  và  $AC = 5$ . Tìm độ dài vector  $\overrightarrow{BC}$ .
- b) Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  có  $AB = AC = 4$ . Tính  $|\overrightarrow{BC}|$
- c) Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A, B$ ,  $AB = BC = a$ ,  $AD = 2a$ ,  $H$  là chân đường cao hạ từ  $A$  xuống  $CD$  của tam giác  $ACD$ . Tính độ dài của  $\overrightarrow{AH}$ .
- b) Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $a$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $\triangle ABC$ . Tính độ dài của  $\overrightarrow{BG}$ .

**Lời giải**

a)  $|\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ .

b) Do  $|\overrightarrow{BC}| = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$ .

c) Gọi  $E$  là trung điểm  $AD \Rightarrow \triangle CDE$  vuông cân tại  $E \Rightarrow |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{CE^2 + ED^2} = a\sqrt{2}$

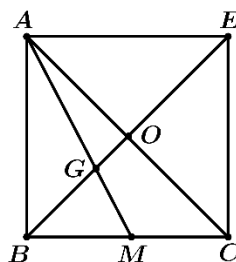


Ta có:  $S_{\triangle ACD} = S_{ABCD} - S_{\triangle ABC} = \frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = a^2$

Suy ra:  $\frac{1}{2}AH \cdot CD = a^2 \Leftrightarrow AH = \frac{2a^2}{CD} = \frac{2a^2}{a\sqrt{2}} = a\sqrt{2} \Rightarrow |\overrightarrow{AH}| = a\sqrt{2}$ .

d) Vì  $ABCD$  là hình vuông nên:  $\triangle ABC$  vuông tại  $B \Rightarrow AC = \sqrt{BA^2 + BC^2} = a\sqrt{2}$

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} AB = DC \\ AB \parallel DC \end{cases}$



Ta có  $O$  là trung điểm  $AC \Rightarrow BO = \frac{1}{2}AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Lại có  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC \Rightarrow BG = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ .



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Có bao nhiêu vector khác vector - không có điểm đầu và cuối là các đỉnh của tứ giác?

- A. 4.                                      B. 6.                                      C. 8.                                      D. 12.

**Lời giải**

Xét các vector có điểm  $A$  là điểm đầu thì có các vector thỏa mãn là  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD}$  nên có 3 vector. Tương tự cho các điểm còn lại  $B$ ,  $C$ ,  $D$ .

**Câu 2:** Cho hai vector khác vector - không, không cùng phương. Có bao nhiêu vector khác  $\vec{0}$  cùng phương với cả hai vector đó?

- A. 2.                                      B. 1.                                      C. không có.                                      D. vô số.

**Lời giải**

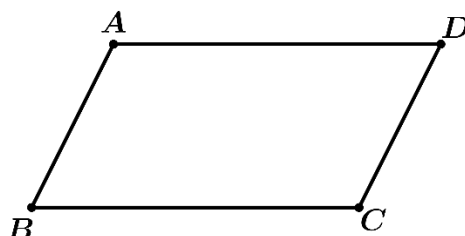
Giả sử tồn tại một vector  $\vec{c}$  cùng phương với cả hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ . Lúc đó tồn tại các số thực  $h$  và  $k$  sao cho  $\vec{c} = h\vec{a}$  và  $\vec{c} = k\vec{b}$ . Từ đó suy ra  $h\vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{k}{h}\vec{b}$ .

Suy ra hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

**Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Số vector khác  $\vec{0}$ , cùng phương với vector  $\overrightarrow{AB}$  và có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của hình bình hành  $ABCD$  là

- A. 1.                                      B. 2.                                      C. 3.                                      D. 4.

**Lời giải**



Các vector cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$  mà thỏa mãn điều kiện đầu bài là:  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{CD}$ ,  $\overrightarrow{DC}$ .

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ , có thể xác định được bao nhiêu vector khác vector không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ?

- A. 3.                                      B. 6.                                      C. 4.                                      D. 9.

**Lời giải**

Đó là các vector:  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{BA}$ ,  $\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{CB}$ ,  $\overrightarrow{CA}$ ,  $\overrightarrow{AC}$ .

**Câu 5:** Vector có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là  $B$  được kí hiệu là:

- A.  $AB$ .                                      B.  $\overrightarrow{AB}$ .                                      C.  $|\overrightarrow{AB}|$ .                                      D.  $\overline{BA}$ .

**Lời giải**

Vector có điểm đầu là  $A$ , điểm cuối là  $B$  được kí hiệu là  $\overrightarrow{AB}$ .



**Câu 6:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng, trong đó điểm  $N$  nằm giữa hai điểm  $M$  và  $P$ . Khi đó các cặp vector nào sau đây cùng hướng?

- A.  $\overrightarrow{MP}$  và  $\overrightarrow{PN}$ .      B.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{PN}$ .      C.  $\overrightarrow{NM}$  và  $\overrightarrow{NP}$ .      D.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .

**Lời giải**

Cặp vector cùng hướng là  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$ .

**Câu 7:** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC$  của tam giác đều  $ABC$ . Hỏi cặp vector nào sau đây cùng hướng?

- A.  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{CB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MB}$ .      C.  $\overrightarrow{MA}$  và  $\overrightarrow{MB}$ .      D.  $\overrightarrow{AN}$  và  $\overrightarrow{CA}$ .

**Lời giải**

Hai vector  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{MB}$  là cặp vector cùng hướng

**Câu 8:** Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A. Có duy nhất một vector cùng phương với mọi vector.  
 B. Có ít nhất hai vector có cùng phương với mọi vector.  
 C. Có vô số vector cùng phương với mọi vector.  
 D. Không có vector nào cùng phương với mọi vector.

**Lời giải**

Vì vector - không cùng phương với mọi vector.

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Xác định các vector cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$ .

- A.  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$       B.  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{AP}$   
C.  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$       D.  $\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{PN}, \overrightarrow{CP}$

**Lời giải**

Có 3 đường thẳng song song với  $MN$  là  $AC, AP, PC$  nên có 7 vector:

$\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}, \overrightarrow{CP}$

**Câu 10:** Cho ba điểm  $A, B, C$  cùng nằm trên một đường thẳng. Các vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$  cùng hướng khi và chỉ khi:

- A. Điểm  $B$  thuộc đoạn  $AC$       B. Điểm  $A$  thuộc đoạn  $BC$   
 C. Điểm  $C$  thuộc đoạn  $AB$       D. Điểm  $A$  nằm ngoài đoạn  $BC$

**Lời giải**

Điểm  $B$  thuộc đoạn  $AC$ .

**Câu 11:** Cho tam giác không cân  $ABC$ . Gọi  $H, O$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác và  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Tam giác  $ABC$  nhọn thì  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng hướng.  
 B.  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  luôn cùng hướng.  
 C.  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng phương nhưng ngược hướng.  
 D.  $\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  có cùng giá



## Lời giải

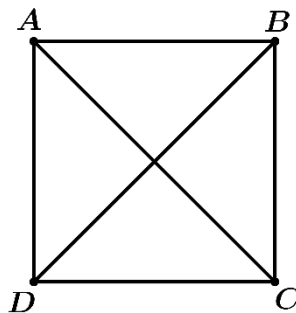
Thật vậy khi  $\triangle ABC$  nhọn thì ta có:  $\begin{cases} AH \perp BC \\ OM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \parallel OM$

Hai điểm  $O, H$  nằm trong tam giác  $\Rightarrow \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{OM}$  cùng hướng

**Câu 12:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AC}$ .

- A.  $a$ .                      B.  $a\sqrt{2}$ .                      C.  $a\sqrt{3}$ .                      D.  $2a$ .

## Lời giải



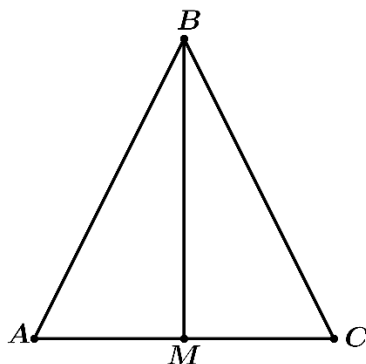
Áp dụng định lí Pytago cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}. \text{ Vậy } |\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{2}.$$

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh bằng  $a\sqrt{3}$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AC$ . Tính độ dài vector  $\overrightarrow{BM}$ .

- A.  $V = \frac{3a}{2}$ .                      B.  $V = 3a$ .                      C.  $V = a\sqrt{3}$ .                      D.  $V = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

## Lời giải



Tam giác  $ABC$  đều có  $M$  là trung điểm của  $\Rightarrow BM$  vừa là đường trung tuyến, vừa là đường cao. Áp dụng định lí Pytago trong tam giác  $ABM$  vuông tại  $M$  ta có:

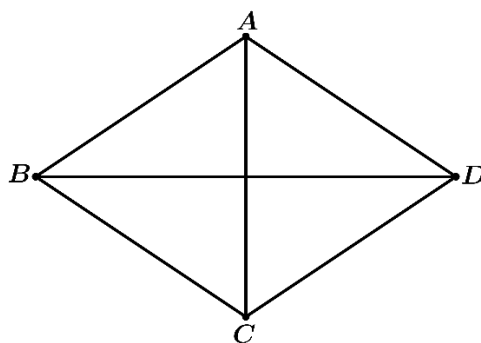
$$BM^2 = AB^2 - AM^2 = (a\sqrt{3})^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{9a^2}{4} \Rightarrow BM = \frac{3a}{2}. \text{ Vậy } |\overrightarrow{BM}| = BM = \frac{3a}{2}.$$

**Câu 14:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a\sqrt{2}$  và góc  $ABC$  bằng  $60^\circ$ . Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AC}$ .

- A.  $a$ .                      B.  $a\sqrt{3}$ .                      C.  $a\sqrt{2}$ .                      D.  $2a$ .



Lời giải



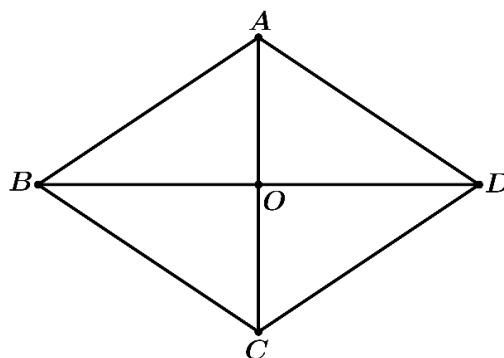
Tam giác  $ABC$  có  $BA = BC$  (do  $ABCD$  là hình thoi) nên là tam giác cân.

Mặt khác  $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  là tam giác đều  $\Rightarrow AC = a\sqrt{2}$ . Vậy  $|\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{2}$ .

**Câu 15:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  và góc  $ABC$  bằng  $60^\circ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AC} = a$ .      B.  $|\overrightarrow{BD}| = a\sqrt{3}$ .      C.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .      D.  $|\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$ .

Lời giải



Tam giác  $ABC$  có  $BA = BC$  (do  $ABCD$  là hình thoi) nên là tam giác cân.

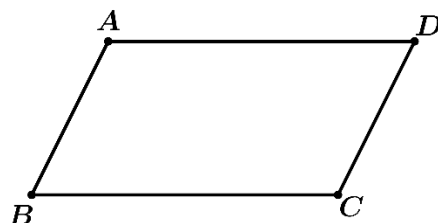
Mặt khác  $\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  là tam giác đều  $\Rightarrow AC = a \Rightarrow OC = \frac{a}{2}$ .

$$|\overrightarrow{BD}| = BD = 2BO = 2\sqrt{BC^2 - OC^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

**Câu 16:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Vector nào sau đây cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ ?

- A.  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$ .      B.  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ .      C.  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$ .      D.  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}$ .

Lời giải



Các vector cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$  là:  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}$



**Câu 17:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Vector nào sau đây bằng với  $\overrightarrow{AB}$ .

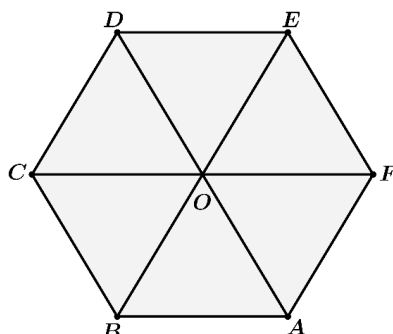
A.  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}$ .

**B.**  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{ED}$ .

C.  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{FO}, \overrightarrow{OF}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{CO}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DE}$ .

D.  $\overrightarrow{FO}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{BC}$ .

Lời giải



**Câu 18:** Cho tứ giác  $EFGH$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $EF, FG, GH, HE$ . Các vector nào sau đây cùng hướng?

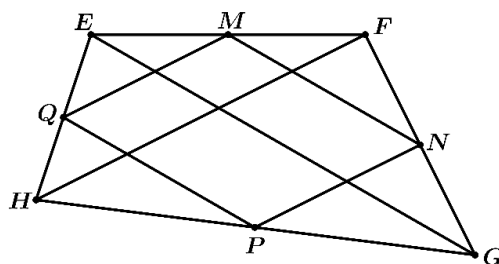
A.  $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{ME}$ .

**B.**  $\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{HF}, \overrightarrow{PN}$ .

C.  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{GE}, \overrightarrow{QP}$ .

D.  $\overrightarrow{FN}, \overrightarrow{EH}, \overrightarrow{NG}$ .

Lời giải



Trong tam giác  $EFH$  có  $M, Q$  lần lượt là trung điểm  $EF$  và  $EH$  nên  $MQ$  là đường trung bình của tam giác  $EFH \Rightarrow MQ \parallel FH$ .

Trong tam giác  $GFH$  có  $N, P$  lần lượt là trung điểm  $GF$  và  $GH$  nên  $NP$  là đường trung bình của tam giác  $GFH \Rightarrow NP \parallel FH$ .

Vậy  $\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{HF}, \overrightarrow{PN}$  cùng hướng.

**Câu 19:** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ . Biết  $AD = 2a, AB = BC = a$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

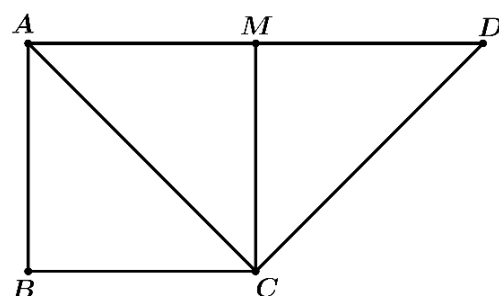
A.  $|\overrightarrow{BM}| = a\sqrt{3}$ .

**B.**  $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CD}$ .

C.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD}$ .

D.  $|\overrightarrow{CD}| = 2a$ .

Lời giải





Gọi  $M$  là trung điểm của  $AD \Rightarrow AM = MD = a$ .

Tứ giác  $ABCM$  có  $AM = BC = a$  và  $AM \parallel BC$  nên là hình bình hành.

Hình bình hành  $ABCM$  vuông tại  $A$  nên là hình chữ nhật  $\Rightarrow CM \perp AD$ .

Tam giác  $ACB$  có  $CM$  vừa là đường cao, vừa là đường trung tuyến nên là tam giác cân

$$\Rightarrow AC = CM \Rightarrow |\overline{CD}| = CD = AC = a\sqrt{2}.$$

Hình chữ nhật  $ABCM$  có  $AB = AM = a$  nên là hình vuông  $\Rightarrow AC = BM = a\sqrt{2}$ .

Tứ giác  $BMDC$  có  $MD = BC$  và  $MD \parallel BC$  nên là hình bình hành  $\Rightarrow BM \parallel CD$

Vậy  $\overline{BM} = \overline{CD}$ .

**Câu 20:** Cho ba điểm phân biệt thẳng hàng  $A, B, C$  và  $M$  là điểm bất kì. Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\exists k \neq 0: \overline{MA} = k.\overline{MB}$ .

B.  $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = \vec{0}$ .

C.  $\exists k \neq 0: \overline{MA} + \overline{MB} = k.\overline{MC}$ .

D.  $\exists k \neq 0: \overline{AB} = k.\overline{AC}$ .

**Lời giải**

Theo định nghĩa, ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \exists k \neq 0: \overline{AB} = k.\overline{AC}$ .

**Câu 21:** Cho  $\triangle ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là các điểm thỏa mãn  $\overline{MA} + \overline{MB} = \vec{0}$ ,  $2\overline{NA} + 3\overline{NC} = \vec{0}$  và  $\overline{BC} = k\overline{BP}$  ( $k \neq 0$ ). Giá trị  $k$  để ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng bằng

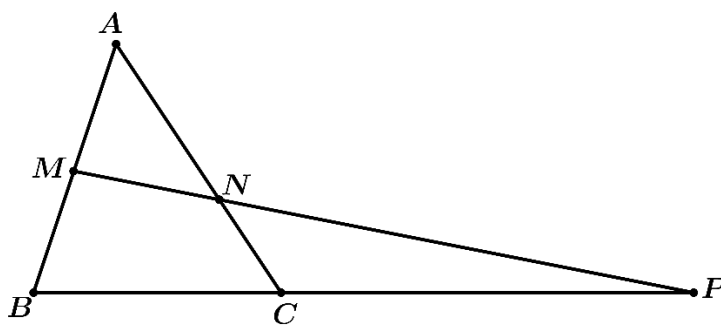
A.  $k = \frac{2}{5}$ .

B.  $k = \frac{2}{3}$ .

C.  $k = \frac{1}{3}$ .

D.  $k = \frac{3}{5}$ .

**Lời giải**



$$\text{Ta có: } \overline{MN} = \overline{AN} - \overline{AM} = \frac{3}{5}\overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} \quad (1) \quad \overline{NP} = \overline{NC} + \overline{CP} = \frac{2}{5}\overline{AC} + (\overline{BP} - \overline{BC})$$

$$= \frac{2}{5}\overline{AC} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)\overline{BC} = \frac{2}{5}\overline{AC} + \left(\frac{1}{k} - 1\right)(\overline{AC} - \overline{AB}) = \left(\frac{1}{k} - \frac{2}{5}\right)\overline{AC} - \left(\frac{1}{k} - 1\right)\overline{AB}$$

Để ba điểm  $M, N, P$  thẳng hàng thì  $\exists m \in \mathbb{R}: \overline{NP} = m\overline{MN}$

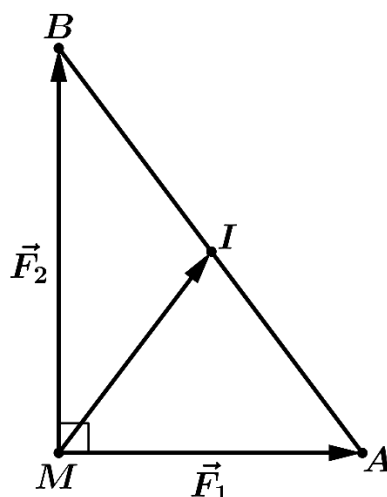
$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{k} - \frac{3}{5}\right)\overline{AC} - \left(\frac{1}{k} - 1\right)\overline{AB} = \frac{3m}{5}\overline{AC} - \frac{m}{2}\overline{AB}$$



$$\text{Điều kiện. } \begin{cases} \frac{1}{k} - \frac{3}{5} = \frac{3m}{5} \\ -\left(\frac{1}{k} - 1\right) = -\frac{m}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4 \\ k = \frac{1}{3} \end{cases} \cdot \text{Vậy } k = \frac{1}{3}.$$

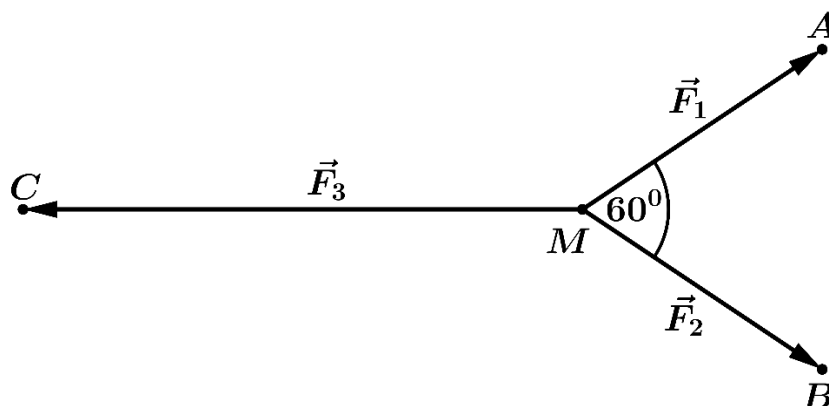
- Câu 22:** Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  lần lượt là  $300(\text{N})$  và  $400(\text{N})$ .  $\angle AMB = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tổng hợp tác động vào vật.
- A.  $1000\text{N}$                       B.  $700\text{N}$                       C.  $100\text{N}$                       D.  $500\text{N}$

Lời giải



Cường độ lực tổng hợp của  $|\vec{F}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{MA} + \vec{MB}| = 2|\vec{MI}| = AB$  với  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Khi đó ta có:  $AB = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 500$  suy ra  $|\vec{F}| = 500(\text{N})$ .

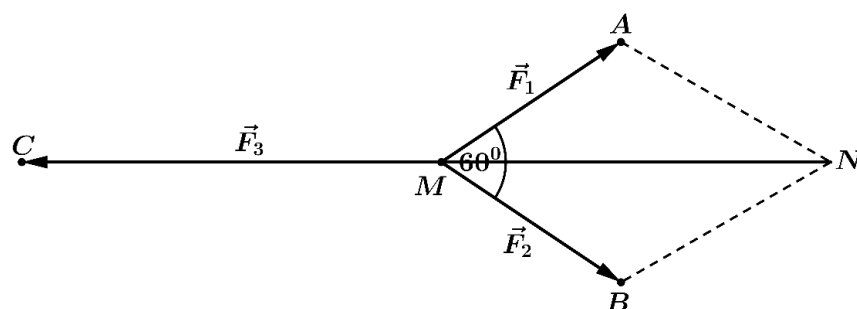
- Câu 23:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  đều bằng  $25\text{N}$  và góc  $\angle AMB = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $\vec{F}_3$  là



- A.  $50\sqrt{3}\text{N}$                       B.  $50\sqrt{2}\text{N}$                       C.  $25\sqrt{3}\text{N}$                       D.  $100\sqrt{3}\text{N}$

Lời giải

Vật đứng yên nên ba lực đã cho cân bằng. Ta được  $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)$ .



Dựng hình bình hành  $AMBN$  thì ta có  $-\vec{F}_1 - \vec{F}_2 = -\vec{MA} - \vec{MB} = -\vec{MN}$ .

$$\text{Suy ra } |\vec{F}_3| = |-\vec{MN}| = MN = \frac{2\sqrt{3}MA}{2} = 25\sqrt{3}N.$$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hình thang  $ABCD$  với hai đáy là  $AB$  và  $CD$ . Biết rằng nếu  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$  thì  $|\vec{BC}| = |\vec{AD}|$ .

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  có độ dài bằng nhau
- b) Hình thang  $ABCD$  là hình thang cân
- c) Hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$  có độ dài không bằng nhau
- d) Nếu  $|\vec{BC}| = |\vec{AD}|$  thì  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$

**Lời giải**

a) Đúng: Vì  $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$  nên hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  có độ dài bằng nhau

b) Đúng: Suy ra hình thang  $ABCD$  cân.

c) Sai: Do đó hai cạnh bên  $AD$  và  $BC$  có độ dài bằng nhau hay  $|\vec{AD}| = |\vec{BC}|$ .

d) Sai: Xét hình bình hành  $ABCD$  (cũng là hình thang có hai đáy  $AB$  và  $CD$ ) có  $|\vec{BC}| = |\vec{AD}|$  nhưng  $|\vec{AC}| \neq |\vec{BD}|$ .

**Câu 2:** Cho  $\triangle ABC$ , gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Khi đó:

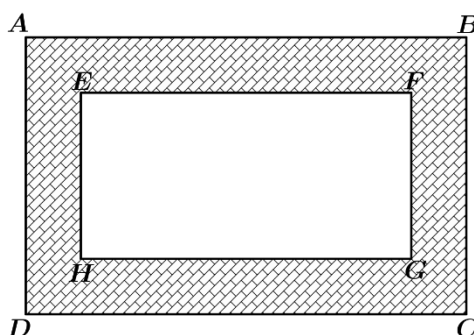
- a) vector  $\vec{AB}$  cùng phương với vector  $\vec{MN}$
- b) Có 6 vector khác vector không và cùng phương với  $\vec{AB}$  có điểm đầu, điểm cuối lấy từ các điểm đã cho.
- c) vector  $\vec{AP}$  ngược hướng vector  $\vec{PB}$
- d) Có 3 vector khác vector không và cùng hướng với  $\vec{AB}$  có điểm đầu và điểm cuối lấy từ các điểm đã cho.



## Lời giải

- a) Đúng:  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương với  $\overrightarrow{MN}$   
 b) Sai: Có 7 vec tơ khác vec tơ không và cùng phương với  $\overrightarrow{AB}$ :  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PA}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NM}$ .  
 c) Sai:  $\overrightarrow{AP}$  cùng hướng  $\overrightarrow{PB}$   
 d) Đúng: Có 3 vectơ khác vectơ không cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$  là  $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{NM}$ .

**Câu 3:** Một mảnh vườn trồng rau hình chữ nhật có chiều dài và chiều rộng lần lượt là 25 m và 16 m. Người chủ để dành mỗi chiều 0,5 m để làm đường đi xung quanh mảnh vườn (như hình minh họa). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a) Từ 8 điểm  $A, B, C, D, E, F, G, H$  có 6 vectơ cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$ .  
 b) Độ dài vectơ  $\overrightarrow{AC}$  lớn hơn 30 m.  
 c) Độ dài vectơ  $\overrightarrow{EF}$  là 24 m.  
 d) Người chủ bón đạm cho vườn rau, cứ 2 kg đạm cho  $25(\text{m}^2)$  đất với chi phí 24000 đồng/kg. Để bón đạm cho cả vườn rau, người chủ cần bỏ ra chi phí là 700 000 đồng.

## Lời giải

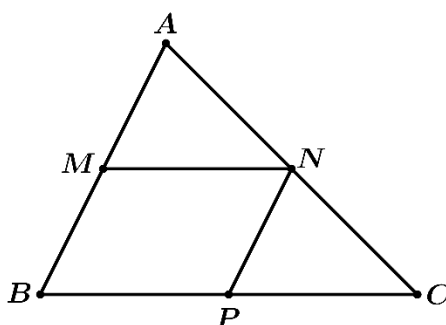
- a) Đúng : Từ 8 điểm  $A, B, C, D, E, F, G, H$  có 7 vectơ cùng phương với vectơ  $\overrightarrow{AB}$  là:  $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}$ .  
 b) Sai:  $\triangle ABC$  vuông tại  $B$  có:  $|\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{25^2 + 16^2} = \sqrt{881} < 30$   
 c) Đúng: Ta có:  $|\overrightarrow{EF}| = EF = AB - 0,5 - 0,5 = 24(\text{m})$ .  
 d) Sai: Do người chủ để dành mỗi chiều 0,5 m để làm đường đi xung quanh mảnh vườn nên chiều dài, chiều rộng của phần đất trồng rau thực tế là:  
 Chiều dài  $EF = AB - 0,5 - 0,5 = 24(\text{m})$   
 Chiều rộng  $FG = BC - 0,5 - 0,5 = 15(\text{m})$   
 Diện tích phần đất trồng rau là:  $24 \cdot 15 = 360(\text{m}^2)$   
 Số đạm cần dùng để bón cho cả vườn rau là:  $360 \cdot 2 : 25 = 28,8(\text{kg})$   
 Để bón đạm cho cả vườn rau, người chủ cần bỏ ra chi phí là:  $28,8 \cdot 24\,000 = 691\,200(\text{đồng})$



**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC$  và  $P$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- Từ 6 điểm  $A, B, C, M, N, P$  có 5 vector bằng vector  $\overrightarrow{NP}$ .
- Tứ giác  $MNPB$  là hình bình hành.
- $P$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .
- Cho  $AB = 8, AC = 10, BC = 14$ . Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MNP$  là  $\frac{35\sqrt{6}}{6}$ .

**Lời giải**



a) Sai: Vì  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$  và  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP}$ .

Vậy có 2 vector bằng vector  $\overrightarrow{NP}$  là  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}$ .

b) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP} \Rightarrow MB = NP$  và  $MB \parallel NP$ . Khi đó, tứ giác  $MNPB$  là hình bình hành.

c) Đúng: Gọi  $P'$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

$\triangle ABC$  có  $N, P'$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BC \Rightarrow NP'$  là đường trung bình.

$$\Rightarrow NP' = \frac{1}{2}AB = MB, NP' \parallel MB.$$

$\Rightarrow \overrightarrow{NP'} = \overrightarrow{MB}$  mà  $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{NP} \Rightarrow P \equiv P'$ . Suy ra  $P$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ .

d) Sai:  $\triangle ABC$  có  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC, BC$ .

$\Rightarrow MN, NP, MP$  là 3 đường trung bình của  $\triangle ABC$ .

$$\Rightarrow MN = \frac{BC}{2} = 7, NP = \frac{AB}{2} = 4, MP = \frac{AC}{2} = 5.$$

$$\text{Nửa chu vi tam giác } MNP \text{ là: } p = \frac{MN + NP + MP}{2} = \frac{7 + 4 + 5}{2} = 8.$$

Diện tích của tam giác  $MNP$  là:

$$S = \sqrt{p(p - MN)(p - NP)(p - MP)} = \sqrt{8(8 - 7)(8 - 4)(8 - 5)} = 4\sqrt{6}.$$

Gọi  $R$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $MNP$ .

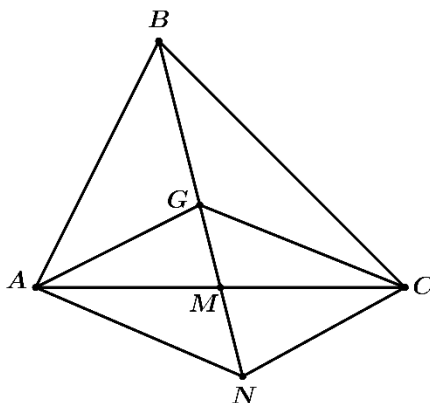
$$\text{Ta có: } S = \frac{MN \cdot NP \cdot MP}{4R} \Rightarrow R = \frac{MN \cdot NP \cdot MP}{4S} = \frac{7 \cdot 4 \cdot 5}{4 \cdot 4\sqrt{6}} = \frac{35\sqrt{6}}{24}.$$



**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$  và  $N$  là điểm thỏa mãn  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{GC}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Từ 5 điểm  $A, B, C, G, N$  có 5 vector có điểm cuối là  $G$ .
- Tứ giác  $AGCN$  là hình bình hành.
- Gọi  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ . Khi đó, hai điểm  $G$  và  $N$  đối xứng nhau qua  $M$ .
- Cho  $AB = 6, AC = 12, BC = 10$ . Độ dài vector  $\overrightarrow{BN}$  là  $4\sqrt{2}$ .

**Lời giải**



a) Đúng: Từ 5 điểm  $A, B, C, G, N$  có 5 vector có điểm cuối là  $G$  là:  $\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{GG}, \overrightarrow{NG}$

b) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{GC} \Rightarrow AN = GC$  và  $AN \parallel GC$ . Khi đó, tứ giác  $AGCN$  là hình bình hành.

c) Đúng: Ta có: Tứ giác  $AGCN$  là hình bình hành,  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$   
 $\Rightarrow M$  là tâm của hình bình hành  $AGCN \Rightarrow M$  là trung điểm của  $AC$ .  
 $\Rightarrow G$  và  $N$  đối xứng nhau qua  $M$ .

d) Sai:  $\triangle ABC$  có  $G$  là trọng tâm,  $M$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ .

$\Rightarrow$  Ba điểm  $B, G, M$  thẳng hàng và  $BM = 3GM \Rightarrow GM = \frac{1}{3}BM$ .

Mà  $G$  và  $N$  đối xứng nhau qua  $M \Rightarrow G, M, N$  thẳng hàng và  $GM = MN$ .

Suy ra bốn điểm  $B, G, M, N$  thẳng hàng và  $BN = BM + MN = \frac{4}{3}BM$ .

Trong  $\triangle ABC$  có  $BM$  là đường trung tuyến.

$$BM^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{6^2 + 10^2}{2} - \frac{12^2}{4} = 32 \Rightarrow BM = 4\sqrt{2} \Rightarrow BN = \frac{4}{3}BM = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

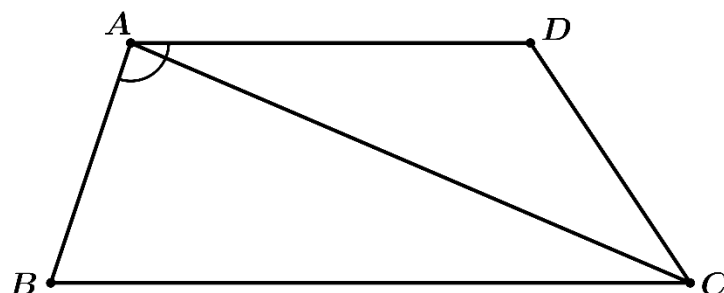
$$\text{Vậy } |\overrightarrow{BN}| = BN = \frac{16\sqrt{2}}{3}.$$

**Câu 6:** Cho hình thang  $ABCD$  có hai cạnh đáy là  $AD$  và  $BC$  ( $AD < BC$ ), biết  $AB = 4, \angle BAD = 120^\circ$  và tam giác  $ABC$  có diện tích  $S = 7\sqrt{3}$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- $\overrightarrow{AD}$  là vector có điểm đầu  $A$ , điểm cuối  $D$ .



- b)  $\overrightarrow{AD}$  cùng hướng với vector  $\overrightarrow{BC}$ .
- c) Có 2 vector (khác  $\vec{0}$ ) cùng phương với vector  $\overrightarrow{AD}$  sao cho giá của vector đó không trùng với giá của  $\overrightarrow{AD}$ .
- d)  $|\overrightarrow{BC}| = 7$ .

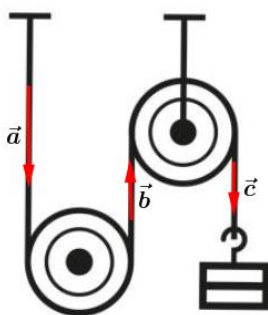
**Lời giải**

- a) Đúng: Thấy  $\overrightarrow{AD}$  là vector có điểm đầu A, điểm cuối D.
- b) Đúng: Vì ABCD là hình thang nên  $AD \parallel BC$ , suy ra  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$  có giá song song nhau. Do đó  $\overrightarrow{AD}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương, cho nên chúng cùng hướng.
- c) Đúng: Có 2 vector  $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}$  cùng phương với  $\overrightarrow{AD}$  và giá không trùng với giá của  $\overrightarrow{AD}$
- d) Đúng: Vì ABCD là hình thang nên ta có  $\angle ABC = 180^\circ - \angle BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

$$\text{Xét tam giác } ABC \text{ có: } S = \frac{1}{2} \cdot BA \cdot BC \cdot \sin 60^\circ \Leftrightarrow BC = \frac{2S}{BA \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2 \cdot 7 \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 7.$$

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Quan sát ròng rọc hoạt động khi dùng lực để kéo một đầu của ròng rọc. Chuyển động của các đoạn dây được mô tả bằng các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ .



Có bao nhiêu cặp vector cùng phương.

**Lời giải**

Ta thấy giá của các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  song song với nhau, do đó các cặp vector cùng phương là:

Vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$



Vector  $\vec{a}$  và  $\vec{c}$

Vector  $\vec{b}$  và  $\vec{c}$

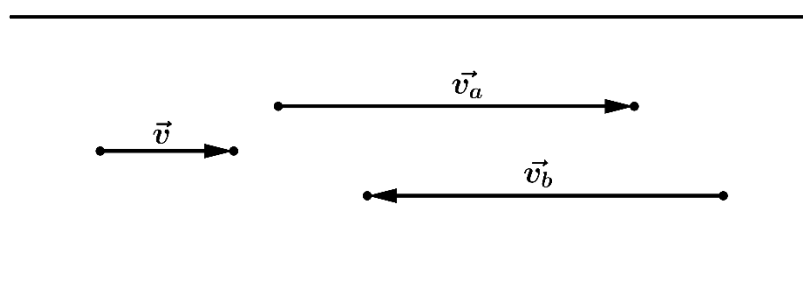
**Câu 2:** Trên biển Đông, một tàu chuyển động đều từ vị trí  $A$  theo hướng  $N20^\circ W$  với vận tốc  $30$  (km/h). Sau  $05$  giờ, tàu đến được vị trí  $B$ . Hỏi  $A$  cách  $B$  bao nhiêu ki lô mét và về hướng  $S20^\circ E$  so với  $B$ .

**Lời giải**

Ta sử dụng vector  $\vec{v}$ :  $|\vec{v}| = 30$  để biểu thị cho vận tốc của tàu, vector  $\overrightarrow{AB}$  để biểu thị cho quãng đường và hướng chuyển động của tàu từ  $A$  tới  $B$ . Do tàu chuyển động đều từ  $A$  đến  $B$  với vận tốc  $30$  (km/h) trong  $5$  giờ nên  $AB = |\overrightarrow{AB}| = 5|\vec{v}| = 150$  (km).

Do  $B$  ở về hướng  $N20^\circ W$  so với  $A$  nên  $A$  ở về hướng  $S20^\circ E$  so với  $B$ .

**Câu 3:** Trên một dòng sông có hai ca nô  $A$  và  $B$  chạy với vận tốc riêng có cùng độ lớn. Biết ca nô  $A$  chạy ngược dòng còn ca nô  $B$  chạy xuôi dòng. Vận tốc của dòng nước là  $3,2$  (km/h), hơn nữa vận tốc của ca nô  $A$  gấp  $4$  lần vận tốc của dòng nước (tham khảo hình bên, xem vector vận tốc của dòng nước là  $\vec{v}$ , vector vận tốc thực tế của ca nô  $A$  và  $B$  lần lượt là  $\vec{v}_a$  và  $\vec{v}_b$ ). Tính  $|\vec{v}_b|$ .

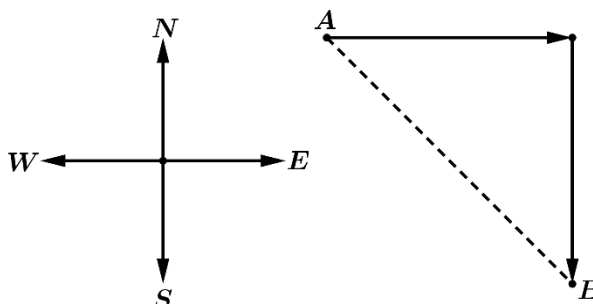


**Lời giải**

Vì hai ca nô có vận tốc riêng cùng độ lớn nên  $|\vec{v}_a| = |\vec{v}_b|$

$$\text{Ta có } \begin{cases} |\vec{v}_a| = |\vec{v}_b| \\ |\vec{v}_a| = 4|\vec{v}| = 4 \cdot 3,2 = 12,8 \text{ (km/h)} \end{cases} \text{ suy ra } |\vec{v}_b| = 12,8 \text{ km/h.}$$

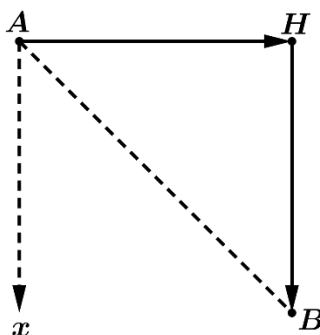
**Câu 4:** Một con tàu khởi hành từ đảo  $A$ , đi thẳng về hướng đông  $10$  km rồi đi thẳng tiếp  $10$  km về hướng nam thì tới đảo  $B$ . Nếu từ đảo  $A$ , tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo  $B$ , thì phải đi theo hướng nào và quãng đường phải dài bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn đến  $1$  chữ số sau dấu phẩy)



**Lời giải**



Ta có hình vẽ sau:



Vì góc giữa hướng đông và hướng nam là bằng  $90^\circ$  nên  $AHB = 90^\circ$

Xét  $\triangle AHB$  vuông ở  $H$ , ta có:  $AB^2 = AH^2 + BH^2 = 10^2 + 10^2 = 100 + 100 = 200$ .

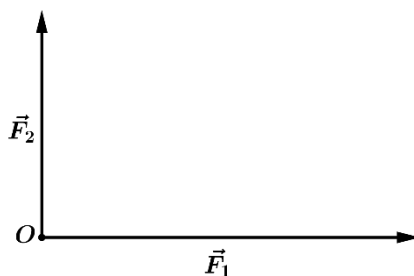
Suy ra:  $AB = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ .

Ta lại có  $AH = BH = 10\text{km}$  nên  $\triangle AHB$  vuông cân tại  $H \Rightarrow HAB = 45^\circ$

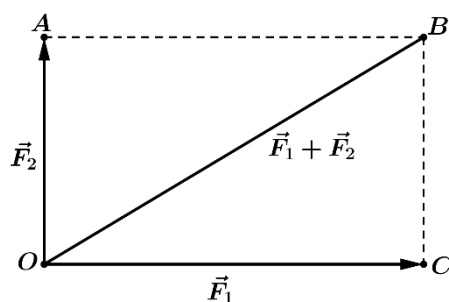
Tia  $Ax$  là hướng nam nên  $Ax \perp AH \Rightarrow Ax \perp AH \Rightarrow HAx = 90^\circ \Rightarrow BAx = 45^\circ$ .

Nếu từ đảo  $A$  tàu đi thẳng (không đổi hướng) tới đảo  $B$  thì phải đi theo hướng đông nam và đi quãng đường dài  $10\sqrt{2} \approx 14,1(\text{km})$

**Câu 5:** Cho hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  có cường độ lực  $F_1 = 60\text{ N}$ ,  $F_2 = 80\text{ N}$ , điểm đặt tại  $O$  có phương vuông góc với nhau (như hình vẽ). Tính cường độ lực tổng hợp của hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ .



Lời giải



Dựng  $\vec{OA} = \vec{F}_1; \vec{OB} = \vec{F}_2$ , dựng hình bình hành  $AOBC$  suy ra  $AOBC$  là hình chữ nhật.

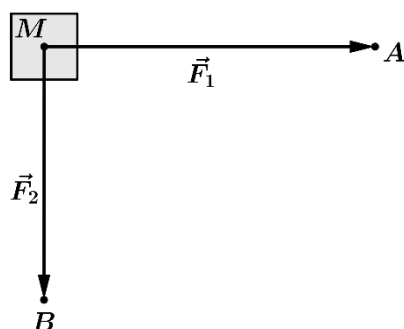
Khi đó  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$  (theo quy tắc hình bình hành)

Cường độ lực tổng hợp của hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  là

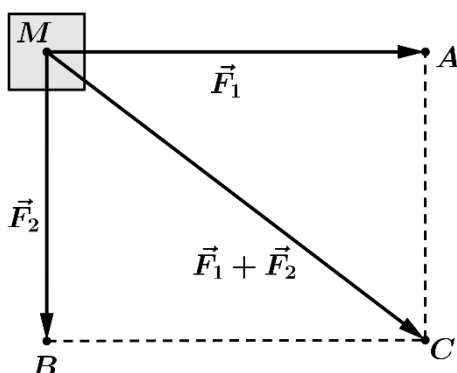
$$|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{OC}| = OC = \sqrt{OB^2 + BC^2} = \sqrt{60^2 + 80^2} = 100\text{ N}.$$



**Câu 6:** Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  cùng tác dụng vào một vật tại điểm  $M$  (hình vẽ). Biết rằng cường độ hai lực  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  lần lượt là  $400N$  và  $300N$ ;  $AMB = 90^\circ$ . Tìm cường độ của lực tác dụng lên vật?



Lời giải



Ta có tổng lực tác dụng lên vật là  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC}$  (Với  $C$  là điểm sao cho  $MACB$  là hình bình hành).

Khi đó cường độ lực tác dụng lên vật là  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{MC}| = MC$

Ta có:  $MA = |\vec{MA}| = |\vec{F}_1| = 400N$ ,  $MB = |\vec{MB}| = |\vec{F}_2| = 300N$

Mặt khác do  $AMB = 90^\circ$  nên  $MACB$  là hình chữ nhật.

Khi đó:  $MC = \sqrt{MA^2 + MB^2} = \sqrt{400^2 + 300^2} = 500(N)$

Vậy cường độ của lực tác dụng lên vật là  $500N$ .

-----HẾT-----

**Dạng 2: Hai vectơ bằng nhau****Phương pháp:**

- Sử dụng các khái niệm vector
- Lưu ý trong tam giác  $ABC$ :  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$  và  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$  cùng hướng.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho vector  $\overrightarrow{AB}$  và một điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Lời giải**

Nếu  $C$  nằm trên đường thẳng  $AB$  thì  $D$  cũng nằm trên đường thẳng  $AB$ .

Nếu  $C$  không nằm trên đường thẳng  $AB$  thì tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành. Khi đó  $D$  nằm trên đường thẳng đi qua  $C$  và song song với đường thẳng  $AB$ .

Do vậy, có vô số điểm  $D$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

**Bài tập 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ?

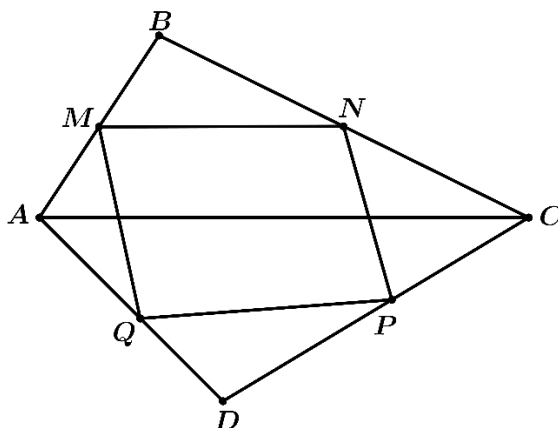
**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC \text{ là hình bình hành.}$

Mặt khác,  $ABDC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

Do đó điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  là  $ABCD$  là hình bình hành.

**Bài tập 3:** Cho tứ giác đều  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Chứng minh  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .

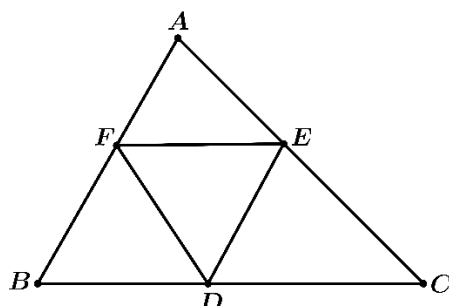
**Lời giải**

Ta có:  $\begin{cases} MN \parallel AC \\ MN = \frac{1}{2}AC \end{cases}; \begin{cases} PQ \parallel AC \\ PQ = \frac{1}{2}AC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ . Vậy  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .



**Bài tập 4:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ .

**Lời giải**

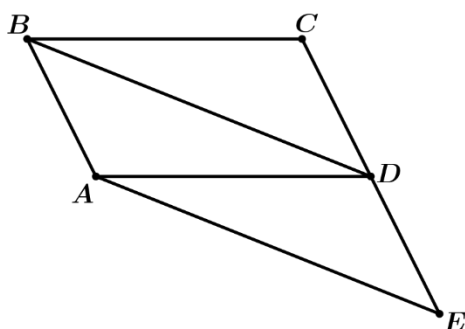


Chứng minh  $EFCD$  là hình bình hành

Dễ chứng minh được  $EF = \frac{1}{2}BC = CD$  và  $EF \parallel CD \Rightarrow EFCD$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CD}$ .

**Bài tập 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng  $C$  của qua  $D$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$

**Lời giải**



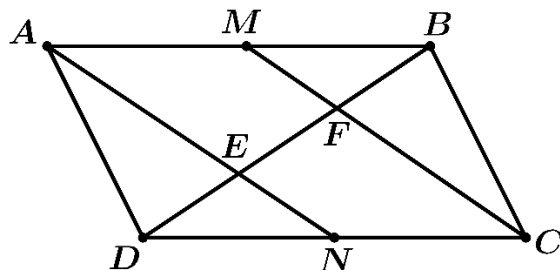
Vì  $ABCD$  là hình bình hành nên ta có:  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$  (1).

Ta có  $E$  là điểm đối xứng  $C$  của qua  $D$  nên  $D$  là trung điểm của  $CE \Leftrightarrow \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE}$  (2).

Từ (1) và (2) ta có:  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DE} \Leftrightarrow ABDE$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BD}$ .

**Bài tập 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, DC$ . Các đường thẳng  $AN$  và  $CM$  lần lượt cắt  $BD$  tại  $E, F$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$

**Lời giải**



Ta có  $\begin{cases} AM = CN \\ AM \parallel CN \end{cases} \Leftrightarrow AMCN$  là hình bình hành.

Theo giả thiết ta có  $N$  là trung điểm  $DC$  và  $NE \parallel CF \Rightarrow NE$  là đường trung bình của  $\triangle DFC$

Khi đó  $E$  là trung điểm của  $DF \Rightarrow \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF}$  (1).



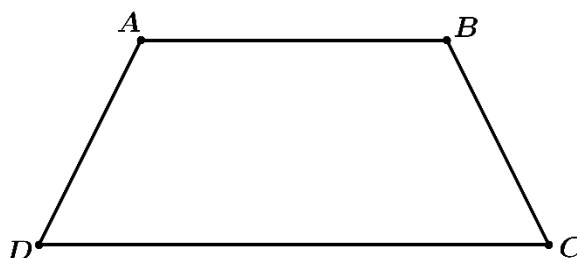
Tương tự ta cũng có  $F$  là trung điểm của  $BE$  nên  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$  (2).

Từ (1) và (2) ta có:  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FB}$ .

**Bài tập 7:** Cho hình thang cân  $ABCD$  có hai đáy là  $AB$  và  $CD$ . Tìm vector:

- Cùng hướng với  $\overrightarrow{AB}$
- Ngược hướng với  $\overrightarrow{AB}$ .
- Chỉ ra các vector có độ dài bằng nhau

**Lời giải**



- Ta có  $ABCD$  là hình thang có hai đáy là  $AB$  và  $CD$  nên  $AB \parallel CD$

Khi đó vector cùng hướng với vector  $\overrightarrow{AB}$  là vector  $\overrightarrow{DC}$  (do cùng phương, cùng chiều).

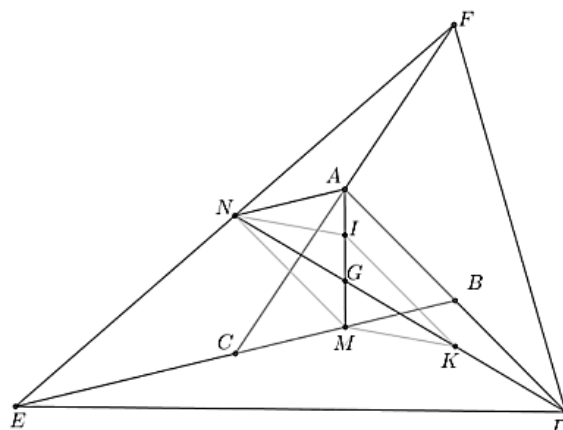
- Vector ngược hướng với vector  $\overrightarrow{AB}$  là vector  $\overrightarrow{BA}$  và  $\overrightarrow{CD}$

- Các vector có cùng độ dài là:  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{DA}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CB}|$  và  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{BD}| = |\overrightarrow{DB}|$ .

**Bài tập 8:** Cho tam giác  $ABC$ . Vẽ  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $B$ ,  $E$  đối xứng với  $B$  qua  $C$  và  $F$  đối xứng với  $C$  qua  $A$ . Gọi  $G$  là giao điểm của trung tuyến  $AM$  của tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $DN$  của tam giác  $DEF$ . Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $GA$  và  $GD$ . Chứng minh rằng:

- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$
- $\overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}$ .

**Lời giải**



- Ta có  $AN$  là đường trung bình của tam giác  $FCE$  nên  $AN \parallel CE \Rightarrow AN \parallel MB$ .

$$AN = \frac{1}{2}CE; \quad MB = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}CE \Rightarrow AN = MB.$$

Suy ra tứ giác  $ANMB$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$

- Gọi  $I, K$  lần lượt là trung điểm của  $GA$  và  $GD \Rightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{NM}$ .

Do đó tứ giác  $INMK$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NI}$



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng,  $M$  là điểm bất kỳ. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\forall M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .  
 B.  $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC}$ .  
 C.  $\forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$ .  
 D.  $\exists M, \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .

**Lời giải**

Ta có 3 điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng,  $M$  là điểm bất kỳ.

Suy ra  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}$  không cùng phương  $\Rightarrow \forall M, \overrightarrow{MA} \neq \overrightarrow{MB} \neq \overrightarrow{MC}$ .

**Câu 2:** Gọi  $C$  là trung điểm của đoạn  $AB$ . Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- A.  $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$ .  
 B.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.  
 C.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CB}$  ngược hướng.  
 D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CB}|$ .

**Lời giải**

Ta có  $C$  là trung điểm của đoạn  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.

**Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Trong các khẳng định sau hãy tìm khẳng định sai

- A.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB}$ .  
 B.  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .  
 D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .

**Lời giải**

Ta có  $ABCD$  là hình bình hành. Suy ra  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 4:** Cho hình vuông  $ABCD$ , khẳng định nào sau đây đúng:

- A.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .  
 B.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .  
 C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .  
 D.  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AC}$  cùng hướng.

**Lời giải**

Ta có  $ABCD$  là hình vuông. Suy ra  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .

**Câu 5:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Điều kiện nào là điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ?

- A.  $ABCD$  là hình bình hành.  
 B.  $ABDC$  là hình bình hành.  
 C.  $AD$  và  $BC$  có cùng trung điểm.  
 D.  $AB = CD$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow ABDC$  là hình bình hành.

Mặt khác,  $ABDC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \begin{cases} AB \parallel CD \\ AB = CD \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ .

Do đó, điều kiện cần và đủ để  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  là  $ABDC$  là hình bình hành.



**Câu 6:** Gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ .      B.  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ .      C.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ .      D.  $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ .

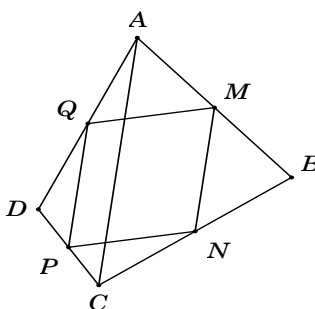
**Lời giải**

$$\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OC}.$$

**Câu 7:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Khẳng định nào sau đây là sai?

- A.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .      B.  $|\overrightarrow{QP}| = |\overrightarrow{MN}|$ .      C.  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ .      D.  $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$ .

**Lời giải**

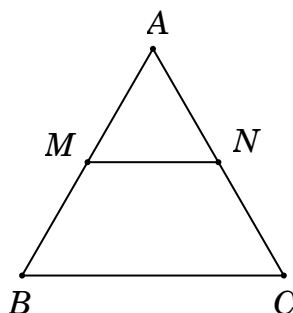


Ta có  $\begin{cases} MN \parallel PQ \\ MN = PQ \end{cases}$  (do cùng song song và bằng  $\frac{1}{2}AC$ ). Do đó  $MNPQ$  là hình bình hành.

**Câu 8:** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, AC$  của tam giác đều  $ABC$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MB}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .      C.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$ .      D.  $|\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|$ .

**Lời giải**



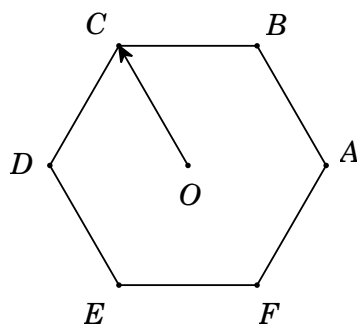
Ta có  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$ .

$$\text{Do đó } BC = 2MN \longrightarrow |\overrightarrow{BC}| = 2|\overrightarrow{MN}|.$$

**Câu 9:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  tâm  $O$ . Số các vectơ bằng  $\overrightarrow{OC}$  có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh của lục giác là

- A. 2.      B. 3.      C. 4.      D. 6.

**Lời giải**



Đó là các vectơ:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}$ .

**Câu 10:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CD, DA$ . Trong các khẳng định sau, hãy tìm khẳng định sai?

- A.  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ .      B.  $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$ .      C.  $|\overrightarrow{PQ}| = |\overrightarrow{MN}|$ .      D.  $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{AC}|$ .

**Lời giải**

Ta có  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$ . Suy ra  $MN = \frac{1}{2}AC$  hay  $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$

**Câu 11:** Cho tam giác đều  $ABC$  với đường cao  $AH$ . Đẳng thức nào sau đây đúng.

- A.  $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$ .      B.  $|\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{HC}|$ .      C.  $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{HC}|$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .

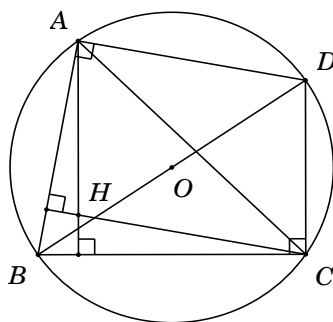
**Lời giải**

Vì  $H$  là trung điểm  $AC$  và  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{HC}$  cùng hướng  $\Rightarrow |\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{HC}|$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có trực tâm  $H$ . Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua tâm  $O$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ . Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CH}$ .      B.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .  
C.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CH}$ .      D.  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$  và  $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OD}$ .

**Lời giải**



Ta có  $AH \perp BC$  và  $DC \perp BC$  (do góc  $DCB$  chắn nửa đường tròn). Suy ra  $AH \parallel DC$ .

Tương tự ta cũng có  $CH \parallel AD$ .

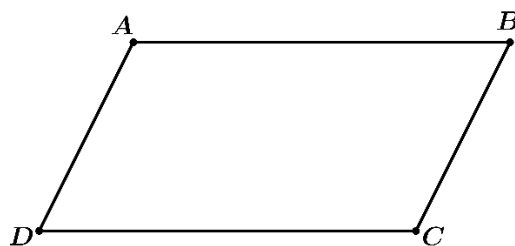
Suy ra tứ giác  $ADCH$  là hình bình hành. Do đó  $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{CD}$  và  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{HC}$ .



**Câu 13:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây *sai*?

- A.  $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ .      B.  $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$ .      C.  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ .      D.  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ .

**Lời giải**



Vì tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $AB = CD$  và  $AD = BC$ .

$$AB = CD \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|; \quad AD = BC \Rightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| \text{ và } |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{DA}|$$

**Câu 14:** Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

- A.  $|\overrightarrow{PQ}| = \overrightarrow{PQ}$ .  
 B. Độ dài của một vector là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vector đó.  
 C. Độ dài của vector  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $|\vec{a}|$ .  
 D.  $|\overrightarrow{AB}| = AB = BA$ .

**Lời giải**

Dựa vào định nghĩa vector và độ dài vector.

**Câu 15:** Cho  $\overrightarrow{AB}$  khác  $\vec{0}$  và điểm  $C$ . Có bao nhiêu điểm  $D$  thỏa  $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$ ?

- A. Vô số.      B. 1 điểm.      C. 2 điểm.      D. 3 điểm.

**Lời giải**

$$\text{Vì } |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}| \Leftrightarrow AB = CD$$

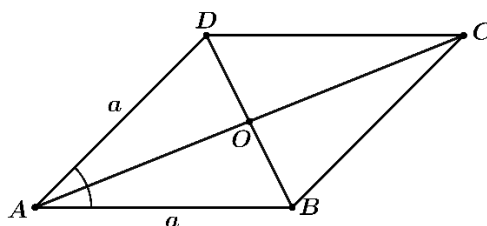
Suy ra tập hợp điểm  $D$  thỏa mãn là đường tròn tâm  $C$  bán kính  $AB$

Vậy có vô số điểm  $D$  thỏa mãn bài ra.

**Câu 16:** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$ , cạnh bằng  $a$  và góc  $A$  bằng  $60^\circ$ . Kết luận nào sau đây đúng?

- A.  $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      B.  $|\overrightarrow{OA}| = a$ .      C.  $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$ .      D.  $|\overrightarrow{OA}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải**



$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{OA}| = OA = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ (vì tam giác ABD là tam giác đều).}$$

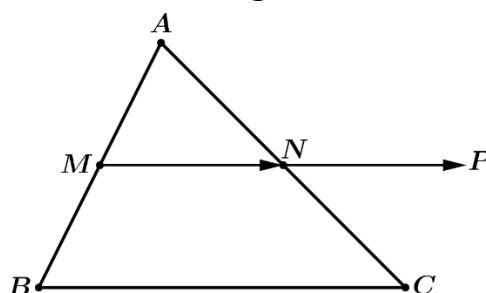


**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Lấy điểm  $P$  đối xứng với điểm  $M$  qua  $N$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{BC}$  cùng phương.
- b)  $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{BC}|$ .
- c)  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{BC}$  ngược hướng.
- d)  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải**

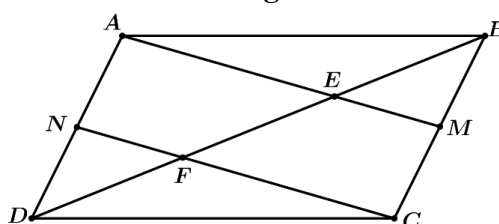


- a) Đúng: Do  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $MN \parallel BC$ .
- b) Đúng: Điểm  $P$  đối xứng với điểm  $M$  qua  $N$  nên  $MP = 2MN = BC$  do đó  $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{BC}|$ .
- c) Sai: Xét nửa mặt phẳng bờ  $AB$  chứa  $C$ , ta có  $N$  là trung điểm  $AC$  nên  $N$  và  $C$  cùng phía  $AB$  hay cùng phía  $MB$  do đó  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng.
- d) Đúng: Hai véc tơ cùng hướng, cùng độ dài suy ra  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{BC}$ .

**Câu 2:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Hai điểm  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ , gọi  $E, F$  lần lượt là giao điểm của  $BD$  với  $AM, CN$ . Xét các véc tơ tạo thành từ các điểm đã cho. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{AB}$  cùng phương với là  $\overrightarrow{DC}$ .
- b)  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$ .
- c)  $\overrightarrow{AD}$  cùng hướng với 4 véc tơ.
- d)  $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EB}$ .

**Lời giải**



- a) Đúng: Theo tính chất hình bình hành.
- b) Đúng: Ta có:  $AN = \frac{1}{2}AD; CM = \frac{1}{2}BC \Rightarrow AN = CM$



Mặt khác:  $\overrightarrow{AN}; \overrightarrow{MC}$  cùng hướng nên  $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{MC}$ .

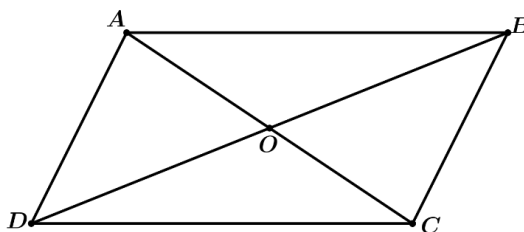
c) Đúng: Theo tính chất hình bình hành ta có  $\overrightarrow{AD}$  cùng hướng với 5 véc tơ sau:  $\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{ND}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MC}$ .

d) Đúng: Do tứ giác  $AMCN$  là hình bình hành nên  $ME // FC$ ,  $BM = MC$  suy ra  $BE = EF$ .  
Mặt khác  $\overrightarrow{BE}; \overrightarrow{EF}$  cùng hướng nên  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EF}$ . Tương tự  $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{EF}$ .

**Câu 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Xét các véc tơ tạo thành từ 5 điểm đã cho. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Có  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC}$ .
- $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}$  không cùng phương
- Số véc tơ có điểm đầu là  $A$  khác  $\vec{0}$  là 3.
- Có đúng bốn cặp véc tơ bằng nhau.

**Lời giải**



- Sai: Do  $O$  là trung điểm của  $AC$ .
- Đúng:  $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}$  không cùng phương.
- Sai: Có 4 véc tơ thỏa mãn có điểm đầu là  $A$
- Sai: Theo tính chất hhh suy ra  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}, \dots$ , có 8 cặp véc tơ bằng nhau.

**Câu 4:** Cho tam giác  $\triangle ABC$  đều. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- $\overrightarrow{AC}$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .
- $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .
- Có 6 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh  $A, B, C$ .

**Lời giải**

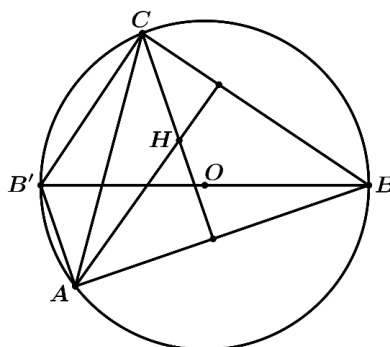
- Sai:
- Sai:
- Đúng: Do tam giác  $\triangle ABC$  đều nên  $AB = BC \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ .
- Đúng: Từ 3 điểm  $A, B, C$  ta chọn được 3 cặp điểm, cứ 2 điểm sẽ được hai véc tơ khác vectơ-không nên có 6 vectơ khác vectơ-không có điểm đầu và điểm cuối là các đỉnh  $A, B, C$ .



**Câu 5:** Cho  $\Delta ABC$  có trực tâm  $H$  và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác. Gọi  $B'$  là điểm đối xứng của  $B$  qua  $O$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- $B'C \perp BC$
- $B'C \parallel AB$
- Tứ giác  $AB'CH$  là hình bình hành.
- $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ ;  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$

**Lời giải**



a) Đúng: Ta có  $BB'$  là đường kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  nên  $BCB' = 90^\circ$

Vậy  $B'C \perp BC$ .

b) Sai: Mặt khác  $AH \perp BC$  suy ra  $B'C \parallel AH$  (1).

c) Đúng: Tương tự:  $BAB' = 90^\circ$  hay  $AB' \perp AB$  mà  $CH \perp AB$  nên  $CH \parallel AB'$  (2).

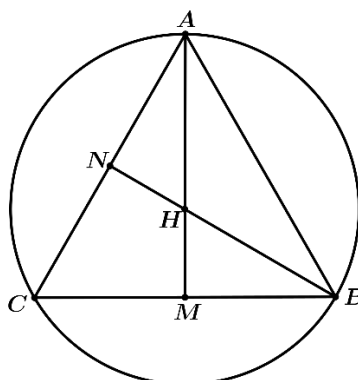
d) Đúng: Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $AB'CH$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B'C}$ ;  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{HC}$ .

**Câu 6:** Cho  $\Delta ABC$  đều cạnh  $a$ , trực tâm  $H$ . Khi đó:

- $AH \perp BC$
- $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
- $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$
- $|\overrightarrow{HA}| = |\overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{HC}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Lời giải**

a) Đúng: Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm cạnh  $BC, AB$ .





Do tam giác  $ABC$  đều nên  $AM, BN$  cũng là các đường cao của tam giác  $ABC$ ; vì vậy  $H$  vừa là trực tâm vừa là trọng tâm tam giác này.

b) Sai: Áp dụng định lí Pytago cho  $\triangle ABM$  ta có:  $AM^2 = AB^2 - BM^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3a^2}{4}$

$$\Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Theo tính chất trọng tâm, ta có:  $AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

c) Sai: Dễ thấy ba vector  $\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}$  có độ dài bằng nhau:

d) Đúng:  $|\overrightarrow{HA}| = |\overrightarrow{HB}| = |\overrightarrow{HC}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$

**Câu 7:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, BC, CD, DA$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $PQ, SR$  và  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AC, BD$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $PQ$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$

b)  $PQRS$  là hình bình hành

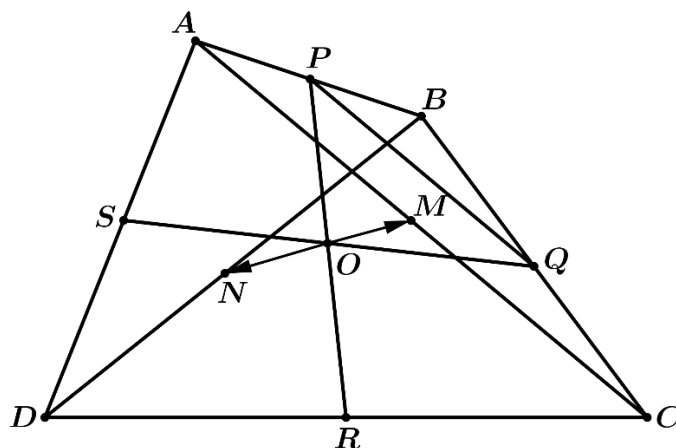
c)  $PMRN$  là hình bình hành.

d)  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$  là hai vector bằng nhau.

### Lời giải

a) Đúng: Ta có  $PQ$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $\begin{cases} PQ = \frac{1}{2}AC \\ PQ \parallel AC \end{cases} \quad (1)$

Tương tự ta cũng có:  $\begin{cases} SR = \frac{1}{2}AC \\ SR \parallel AC \end{cases} \quad (2).$



b) Đúng: Từ (1) và (2) suy ra:  $\begin{cases} PQ = SR \\ PQ \parallel SR \end{cases} \Rightarrow PQRS \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{SR}.$

Ta có  $PM$  là đường trung bình của  $\triangle ABC$  nên  $\begin{cases} PM = \frac{1}{2}BC \\ PM \parallel BC \end{cases} \quad (3).$

Tương tự ta cũng có:  $\begin{cases} RN = \frac{1}{2}BC \\ RN \parallel BC \end{cases} \quad (4).$

c) Đúng: Từ (3) và (4) suy ra:  $\begin{cases} PM = RN \\ PM \parallel RN \end{cases} \Rightarrow PMRN$  là hình bình hành.

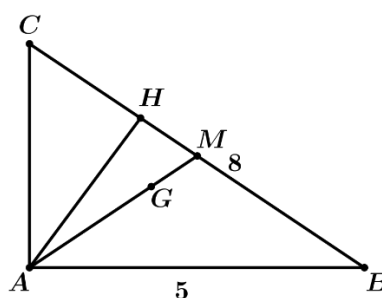
Mà  $O$  là trung điểm của đường chéo  $PR$

d) Sai: Do đó:  $O$  cũng là trung điểm của đường chéo  $MN$  nên  $\overrightarrow{OM} = -\overrightarrow{ON}$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AB = 5, BC = 8$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Hãy tính độ dài của  $\vec{a} = 3\overrightarrow{AG}$ .

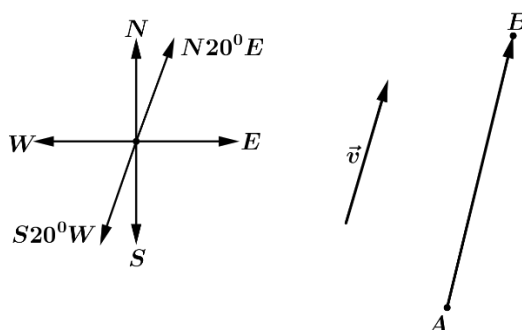
**Lời giải**



Ta có:  $|\overrightarrow{AM}| = AM = \frac{BC}{2} = 4 \Rightarrow |\overrightarrow{AG}| = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot 4 = \frac{8}{3} \Rightarrow \vec{a} = 3|\overrightarrow{AG}| = 8$

**Câu 2:** Trên biển Đông, một tàu chuyển động đều từ vị trí  $A$  theo hướng  $N20^\circ E$  với vận tốc 20 (km/h). Sau 2 giờ, tàu đến được vị trí  $B$ . Hỏi  $A$  cách  $B$  bao nhiêu kilômét?

**Lời giải**

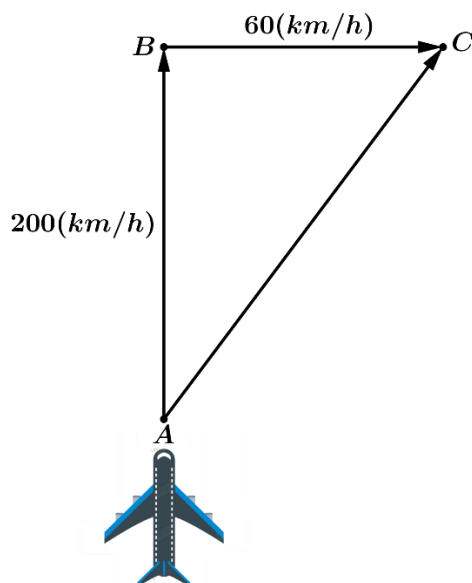


Ta sử dụng vector  $\vec{v}$  có độ dài  $|\vec{v}| = 20$  để biểu thị cho vận tốc của tàu. Vector  $\overrightarrow{AB}$  để biểu thị cho quãng đường và hướng chuyển động của tàu từ  $A$  tới  $B$ . Do tàu chuyển động đều từ  $A$ , với vận tốc 20 (km/h) và trong 2 giờ tới  $B$  nên  $AB = |\overrightarrow{AB}| = 2|\vec{v}| = 40$  (km).

Vậy  $A$  cách  $B$  khoảng 40 (km).



**Câu 3:** Một máy bay có vectơ vận tốc chỉ theo hướng bắc, vận tốc gió là một vectơ theo hướng đông như hình minh hoạ dưới đây. Biết rằng  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ . Tính độ dài vectơ  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**Lời giải**

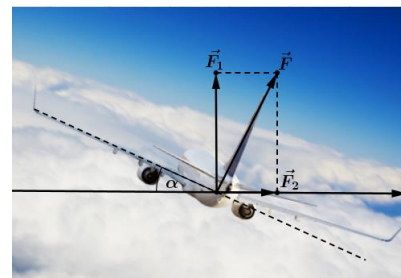
Gọi  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{BC}$  lần lượt là vectơ vận tốc của máy bay và vận tốc của gió.

Khi đó ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

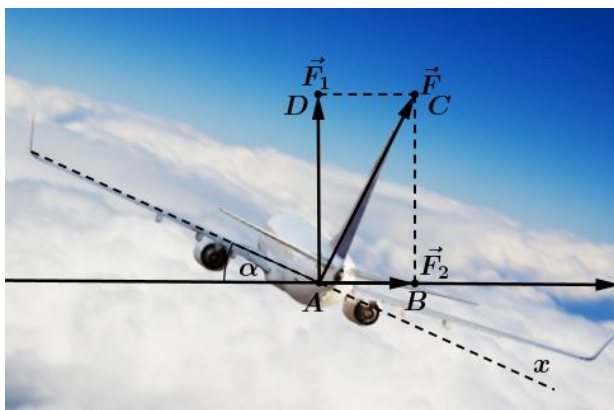
$$\text{Suy ra } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{200^2 + 60^2} \approx 209 \text{ (km/h)}.$$

Vậy độ dài vectơ tổng của hai vectơ nói trên là khoảng 209 (km/h)..

**Câu 4:** Khi máy bay nghiêng cánh một góc  $\alpha$  thì lực  $\vec{F}$  của không khí tác động vuông góc với cánh và bằng tổng của lực nâng  $\vec{F}_1$  và lực cản  $\vec{F}_2$  như hình minh hoạ dưới đây. Cho biết góc  $\alpha = 30^\circ$  và  $|\vec{F}| = 8$ . Tính  $|\vec{F}_2|$ .

**Lời giải**

Kí hiệu các điểm như hình dưới

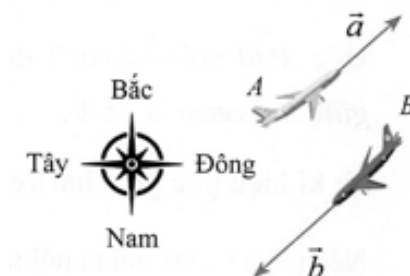


Khi đó các lực  $\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2$  lần lượt là  $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}$   $\alpha = \angle BAx = 30^\circ \Rightarrow \angle CAB = 60^\circ$



Khi đó:  $AB = AC \cdot \cos CAB = a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \Rightarrow |\vec{F}_2| = |\overline{AB}| = \frac{8}{2} = 4.$

**Câu 5:** Máy bay A đang bay về hướng Đông Bắc với tốc độ 600 (km/h). Cùng lúc đó, máy bay B đang bay về hướng Tây Nam với tốc độ 800 (800km/h). Tính  $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ . (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).



**Lời giải**

Vecto  $\vec{a}, \vec{b}$  là vecto vận tốc của máy bay A và máy bay B.

Hai hướng Đông Bắc và Tây Nam là ngược nhau, do đó  $\vec{b} = -\frac{4}{3}\vec{a}$

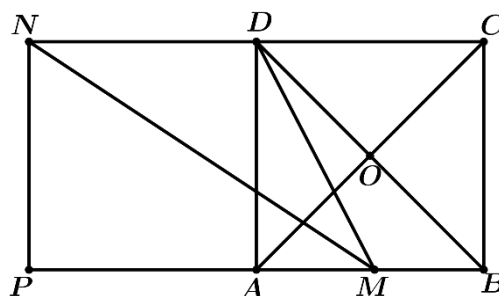
Do đó  $|\vec{a}|, |\vec{b}|$  lần lượt là độ lớn của vecto vận tốc tương ứng.

Ta có:  $|\vec{a}| = 600, |\vec{b}| = 800 \Rightarrow \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{800}{600} = \frac{4}{3} \approx 1,33$

**Câu 6:** Cho hình vuông ABCD tâm O cạnh  $\sqrt{13}$ . Gọi M là trung điểm của AB, N là điểm đối xứng với C qua D, dựng  $\overline{AP} = \overline{BA}$ . Hãy tính độ dài của vectơ  $\overline{MN}$ .

**Lời giải**

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông MAD ta có:



Dựng hình vuông APND  $\Rightarrow \overline{AP} = \overline{BA}$ . Khi đó  $PM = PA + AM = \sqrt{13} + \frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{3\sqrt{13}}{2}.$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông NPM ta có:

$MN^2 = NP^2 + PM^2 = (\sqrt{13})^2 + \left(\frac{3\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{13^2}{4} \Rightarrow |\overline{MN}| = MN = \frac{13}{2} = 6,5.$

-----HẾT-----

**Dạng 3: Điểm thoả mãn đẳng thức vectơ****Phương pháp:**

- Sử dụng khái niệm vectơ
- Sử dụng khái niệm vectơ cùng phương, cùng hướng
- Sử dụng khái niệm độ dài của vectơ và vectơ bằng nhau

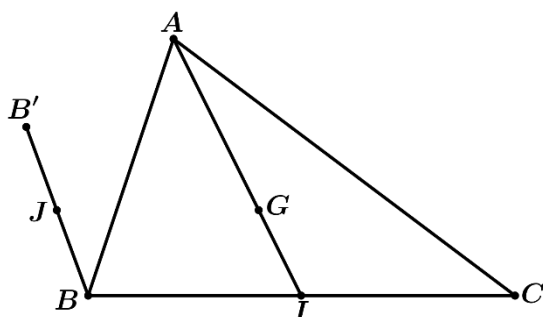
**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $BC$ . Dựng điểm  $B'$  sao cho  $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$ .

a) Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$

b) Gọi  $J$  là trung điểm của  $BB'$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$ .

**Lời giải**



a) Vì  $I$  là trung điểm của  $BC$  nên  $BI = CI$  và  $\overrightarrow{BI}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{IC}$  do đó  $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{IC}$ .

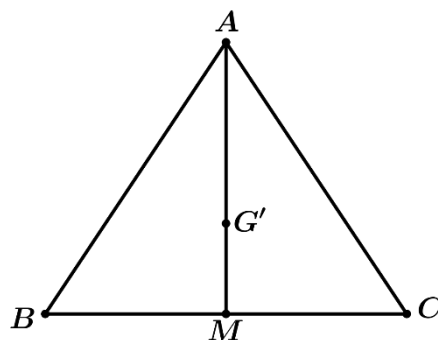
b) Ta có  $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{AG}$  suy ra  $B'B = AG$  và  $BB' \parallel AG$  nên  $\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{IG}$  cùng hướng (1).

Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên  $IG = \frac{1}{2}AG$ ,  $J$  là trung điểm  $BB'$  suy ra  $BJ = \frac{1}{2}BB'$

Vì vậy  $BJ = IG$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{IG}$ .

**Bài tập 2:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh bằng  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tìm điểm  $G$  trên đoạn  $AM$  để  $|\overrightarrow{AG}| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



**Lời giải**

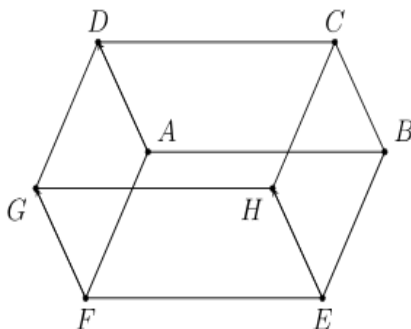


Gọi  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Khi đó ta có:  $AM = \sqrt{AB^2 - BM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Vì  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $ABC \Rightarrow AG' = \frac{2}{3}AM = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow |\overrightarrow{AG'}| = |\overrightarrow{AG}| \Rightarrow G \equiv G'$ .

**Bài tập 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và  $ABEF$  với  $A, D, F$  không thẳng hàng. Dùng các vector  $\overrightarrow{EH}$  và  $\overrightarrow{FG}$  bằng vector  $\overrightarrow{AD}$ . Chứng minh tứ giác  $CDGH$  là hình bình hành.

**Lời giải**



Ta có  $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ ,  $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG} \Rightarrow$  Tứ giác  $FEHG$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{FE}$  (1).

Ta có  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{FE} \Rightarrow \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FE}$  (2).

Từ (1) và (2) ta có  $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{DC}$ . Vậy tứ giác  $GHCD$  là hình bình hành.

**Bài tập 4:** Cho tứ giác  $ABCD$  có hai đường chéo cắt nhau tại  $O$ . Qua trung điểm  $M$  của  $AB$  dựng đường thẳng  $MO$  cắt  $CD$  tại  $N$ . Biết  $OA=1, OB=2, OC=3$  và  $OD=4$ . Tính tỷ số  $\frac{CN}{ND}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{OC} = -\overrightarrow{OA}$ ;  $\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA}$  mà  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$  cùng phương

Khi đó:  $\exists k$  sao cho  $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

Đặt  $\frac{CN}{ND} = k, k > 0$

Ta có:  $\overrightarrow{ON} = \frac{-3}{1+k}.\overrightarrow{OA} - \frac{2k}{k+1}.\overrightarrow{OB} \Rightarrow \frac{-6}{k(k+1)} = \frac{-4k}{k(k+1)} \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$ .

**Bài tập 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Trên các cạnh  $AB, BC$  lấy các điểm  $M, N$  sao cho  $AM = \frac{2}{5}MB, \frac{BN}{NC} = \frac{1}{3}$ .

Gọi  $I$  là giao điểm của  $AN$  và  $CM$ . Tính tỉ số  $\frac{AI}{AN}$  và  $\frac{CI}{IM}$ .

**Lời giải**

Đặt  $\overrightarrow{AI} = x\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{CI} = y\overrightarrow{CM}$

Ta có:  $\overrightarrow{AI} = x(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}) = x\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{3x}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{21x}{8}\overrightarrow{AM} + \frac{x}{4}\overrightarrow{AC}$

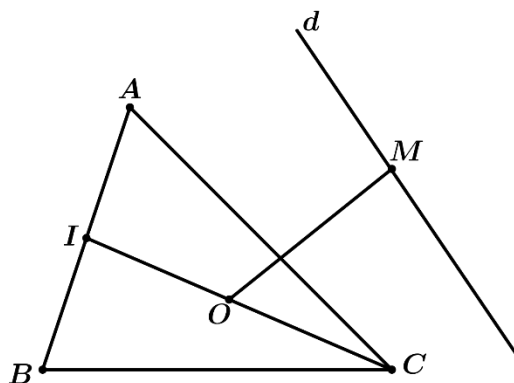


$$\text{Vì } M, C, I \text{ thẳng hàng} \Rightarrow \frac{21x}{8} + \frac{x}{4} = 1 \Leftrightarrow x = \frac{8}{23}$$

$$\text{Tương tự ta chưa tìm được } \frac{IC}{IM} = \frac{21}{2}.$$

**Bài tập 6:** Cho tam giác  $ABC$  và đường thẳng  $d$ . Gọi  $O$  là điểm thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0}$ . Tìm điểm  $M$  trên đường thẳng  $d$  sao cho vector  $\vec{v} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}$  có độ dài nhỏ nhất.

**Lời giải**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

Khi đó:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OI} + 2\overrightarrow{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \Rightarrow O$  là trung điểm của  $IC$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \vec{v} &= \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} + 2(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} - 4\overrightarrow{OM} = -4\overrightarrow{OM}. \end{aligned}$$

Do đó  $|\vec{v}| = 4OM$  nên độ dài vector  $\vec{v}$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $4OM$  nhỏ nhất

Hay  $M$  là hình chiếu vuông góc của  $O$  trên  $d$ .



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho  $\triangle ABC$  với điểm  $M$  nằm trong tam giác. Gọi  $A', B', C'$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$  và  $N, P, Q$  lần lượt là các điểm đối xứng với  $M$  qua  $A', B', C'$ . Câu nào sau đây **đúng**?

A.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$  và  $\overrightarrow{QB} = \overrightarrow{NC}$

B.  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$  và  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CN}$  và  $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{QN}$

D.  $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{BN}$  và  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$

**Lời giải**

Ta có  $AMCP$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{PC}$

Lại có  $AQBM$  và  $BMCN$  là hình bình hành  $\Rightarrow NC = BM = QA \Rightarrow AQNC$  là hình bình hành

Khi đó  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{QN}$ .

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  có  $H$  là trực tâm và  $O$  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $O$ . Câu nào sau đây **đúng**?

A.  $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

B.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

C.  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

D.  $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AH}$

**Lời giải**

Ta có thể chỉ ra được  $ADCH$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{DC}$

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $N$  là trung điểm  $AM$ . Đường thẳng  $BN$  cắt  $AC$  tại  $P$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} = x\overrightarrow{CP}$  thì giá trị của  $x$  là:

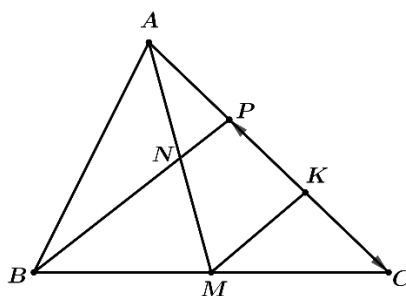
A.  $-\frac{4}{3}$

B.  $-\frac{2}{3}$

C.  $-\frac{3}{2}$

D.  $-\frac{5}{3}$

**Lời giải**



Kẻ  $MK \parallel BP (K \in AC)$ .

Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên suy ra  $K$  là trung điểm của  $CP$

Vì  $MK \parallel BP \Rightarrow MK \parallel NP$  mà  $N$  là trung điểm của  $AM$  nên suy ra  $P$  là trung điểm của  $AK$

Do đó:  $AP = PK = KC$ . Vậy  $\overrightarrow{AC} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CP} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$ .

**Câu 4:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Điều kiện cần và đủ để ba điểm thẳng hàng là:

A.  $AB = AC$

B.  $\exists k \neq 0 : \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

C.  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

D.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MC}, \forall$  điểm  $M$



## Lời giải

Ta có:  $\exists k \neq 0: \overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AC}$

**Câu 5:** Cho  $\triangle ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$  và  $K$  là điểm trên  $AC$  sao cho  $AK = \frac{1}{3}AC$ . Đẳng thức nào sau đây là điều kiện cần và đủ để ba điểm  $B, I, K$  thẳng hàng.

- A.  $\overrightarrow{BK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$       B.  $\overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$       C.  $\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BI}$       D.  $\overrightarrow{BK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BI}$

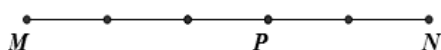
## Lời giải

Ta có:  $2\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BI} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$  (1)

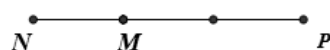
$$\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{BK} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2)  $\Leftrightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow B, I, K$  thẳng hàng.

**Câu 6:** Trên đường thẳng  $MN$  lấy điểm  $P$  sao cho  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP}$ . Điểm  $P$  được xác định đúng trong hình vẽ nào sau đây:



Hình 1



Hình 2



Hình 3



Hình 4

- A. Hình 3.      B. Hình 4.      C. Hình 1.      D. Hình 2.

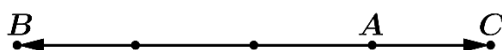
## Lời giải

Ta có:  $\overrightarrow{MN} = -3\overrightarrow{MP} \Rightarrow \overrightarrow{MN}$  ngược hướng với  $\overrightarrow{MP}$  và  $|\overrightarrow{MN}| = 3|\overrightarrow{MP}|$ .

**Câu 7:** Cho ba điểm phân biệt  $A, B, C$ . Nếu  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$  thì đẳng thức nào dưới đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$       B.  $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$       C.  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$       D.  $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$

## Lời giải



**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức vectơ sau  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

- A.  $M$  là trung điểm của  $BC$   
 B.  $M$  là trung điểm của  $IC$   
 C.  $M$  là trung điểm của  $IA$   
 D.  $M$  là điểm trên cạnh  $IC$  sao cho  $IM = 2MC$

## Lời giải

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow M \text{ là trung điểm của } IC.$$



**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  có điểm  $O$  thỏa mãn:  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}|$ .

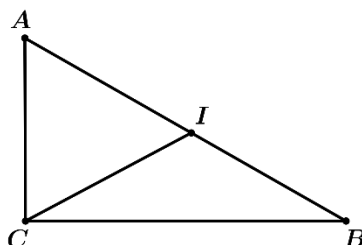
**A.** Tam giác  $ABC$  đều

**B.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $C$

**C.** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$

**D.** Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$

**Lời giải**



Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

Ta có:  $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{BA}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}| = AB$

$\Leftrightarrow |2\overrightarrow{CI}| = AB \Leftrightarrow 2CI = AB \Leftrightarrow CI = \frac{1}{2}AB$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $C$ .

**Câu 10:** Cho đoạn thẳng  $AB$  và  $M$  là một điểm trên đoạn  $AB$  sao cho  $MA = \frac{1}{5}AB$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là **sai**?

**A.**  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB}$

**B.**  $\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{MB}$

**C.**  $\overrightarrow{MB} = -4\overrightarrow{MA}$

**D.**  $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$

**Lời giải**

Ta thấy  $\overrightarrow{MB}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng nên  $\overrightarrow{MB} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}$  là sai.

**Câu 11:** Cho  $\triangle ABC$  có  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Vị trí điểm  $N$  thỏa mãn  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB}$  xác định bởi hệ thức:

**A.**  $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BI}$

**B.**  $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{BI}$

**C.**  $\overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

**D.**  $\overrightarrow{BN} = 3\overrightarrow{BI}$

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NB} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{NB}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = -\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{NI} = -\overrightarrow{NB} \Rightarrow \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

**Câu 12:** Cho đoạn  $AB$  và điểm  $I$  sao cho  $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ . Tìm số  $k \in \mathbb{R}$  sao cho  $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$ .

**A.**  $k = \frac{3}{4}$

**B.**  $k = \frac{3}{5}$

**C.**  $k = \frac{2}{5}$

**D.**  $k = \frac{3}{2}$

**Lời giải**

Ta có:  $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 3\overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \Rightarrow k = \frac{3}{5}$ .

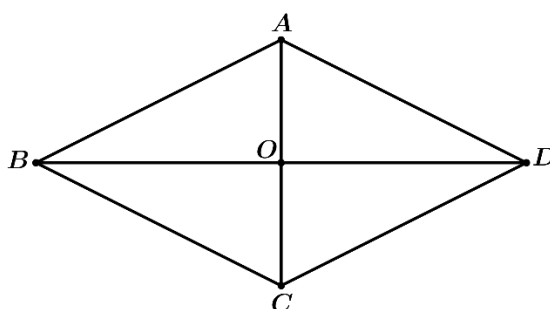


**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh  $a$ ,  $\angle ABC = 60^\circ$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC, BD$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Vector - không có điểm đầu là  $A$  thì nó có điểm cuối là  $A$ .
- b) Độ dài của  $\overrightarrow{AC}$  bằng  $a$ .
- c)  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  không cùng phương.
- d)  $BD = 2a$

**Lời giải**

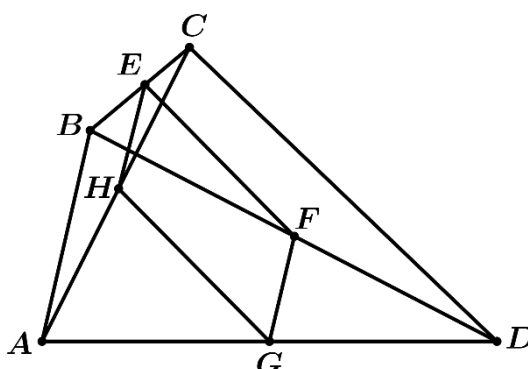


- a) Đúng: Vector - không có điểm đầu là  $A$  thì nó có điểm cuối là  $A$
- b) Đúng: Ta có  $\triangle ABC$  đều nên  $AC = a$ .
- c) Sai:  $AB \parallel DC$  nên  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng phương.
- d) Sai:  $BD = 2BO = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

**Câu 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $E, F, G, H$  theo thứ tự là trung điểm của  $BC, BD, AD, AC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $EF$  là đường trung bình của các tam giác  $BCD$ .
- b)  $GH = \frac{1}{3}CD$ .
- c)  $EFGH$  là hình bình hành.
- d)  $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{FE}$ .

**Lời giải**





Ta có  $EF, GH$  lần lượt là đường trung bình của các tam giác  $BCD, ACD$  nên

$EF \parallel GH \parallel CD$  và  $EF = GH = \frac{1}{2}CD$ . Vì vậy  $EFGH$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ .

a) Đúng:  $EF$  là đường trung bình của các tam giác  $BCD$ .

b) Sai:  $GH = \frac{1}{2}CD$ .

c) Đúng:  $EFGH$  là hình bình hành.

d) Sai:  $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{EF}$ .

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $G$  là trọng tâm. Gọi  $G'$  là điểm đối xứng với  $G$  qua trung điểm  $M$  của  $BC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

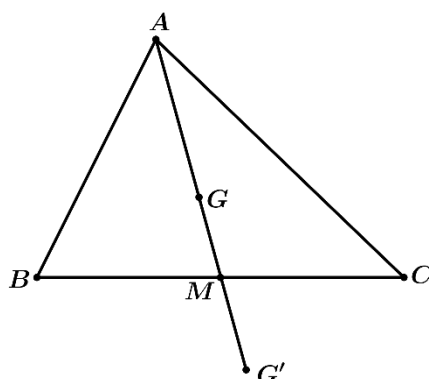
a)  $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$  cùng hướng.

b)  $GA = 3GM$ .

c)  $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$ .

d)  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}, \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$ .

**Lời giải**



Dễ thấy hai vector  $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$  cùng hướng (1)

Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ ,  $G'$  là điểm đối xứng với  $G$  qua  $M$  nên  $G'G = 2GM$ .

Suy ra  $GA = G'G \Rightarrow |\overrightarrow{GA}| = |\overrightarrow{G'G}|$  (2)

Từ (1) và (2) ta có:  $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$  và  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}, \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$ .

a) Đúng:  $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{G'G}$  cùng hướng.

b) Sai:  $GG' = 3GM$ .

c) Đúng:  $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{G'G}$ .

d) Đúng:  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{G'C}, \overrightarrow{BG'} = \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{MC}, \overrightarrow{GM} = \overrightarrow{MG'}, \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GG'}$ .

**Câu 4:** Cho hình thang  $ABCD$  với hai đáy là  $AB$  và  $CD$ ,  $AB < CD$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a)  $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{CD}|$ .
- b)  $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ .
- c)  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng hướng.
- d) Nếu  $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$  thì  $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ .

**Lời giải**

- a) Ta có:  $|\overrightarrow{AB}| < |\overrightarrow{CD}|$ .
- b) Ta có:  $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}$  không cùng hướng nên  $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{BC}$ .
- c)  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng hướng.
- d) Ta có:  $|\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AD}|$  nên hình thang  $ABCD$  là hình thang cân  $\Rightarrow |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Cho ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Gọi điểm  $M$  là trọng tâm  $\triangle ABC$  và thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{MB} + \beta \overrightarrow{MC}$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ). Tính  $2\alpha + \beta$ .

**Lời giải**

Ta có  $M$  là trọng tâm thì  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

So sánh với  $\overrightarrow{MA} = \alpha \overrightarrow{MB} + \beta \overrightarrow{MC} \Rightarrow \alpha = -1; \beta = -1$  suy ra  $2\alpha + \beta = -3$

**Câu 2:** Cho tam giác  $\triangle ABC$ . Các điểm  $I, J$  thỏa mãn hệ thức  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI} = 3\overrightarrow{AC}$ . Biết  $IC \parallel BJ$  thì

$\overrightarrow{CI} = -\frac{a}{b}\overrightarrow{BJ}, (a, b \in \mathbb{N}^*)$  với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản và  $a, b \in \mathbb{Z}$ . Tính  $a + b$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{2AC} + \overrightarrow{BC})$  (1)

$\overrightarrow{AJ} = 3\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \overrightarrow{CI} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BJ} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{3} \Rightarrow a + b = 4$ .

**Câu 3:** Một vật đồng chất được thả vào một cốc chất lỏng. Ở trạng thái cân bằng, vật chìm một nửa thể tích trong chất lỏng. Tìm mối liên hệ giữa trọng lực  $\vec{P}$  của vật và lực đẩy Archimedes  $\vec{F}$  mà chất lỏng tác động lên vật. Tính tỉ số giữa trọng lượng riêng của vật và của chất lỏng.

**Lời giải**

Lực đẩy Archimedes  $\vec{F}_A$  và trọng lực  $\vec{P}$  đều tác động lên vật theo phương thẳng đứng, hai lực này ngược hướng. Do ở trạng thái cân bằng vật nổi (chìm một nửa), nên hai lực này có cường độ bằng nhau.



Gọi  $d$ ,  $d'$  tương ứng là trọng lượng riêng của vật và trọng lượng riêng của chất lỏng: gọi  $V$  là thể tích của vật. Khi đó trọng lượng của vật bằng  $P = |\vec{P}| = dV$  (1)

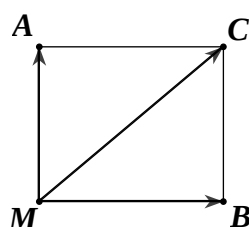
Lực đẩy Archimedes tác động lên vật có cường độ bằng  $F_A = |\vec{F}_a| = d' \cdot \frac{V}{2}$  (2)

Từ (1) và (2) để ý rằng  $P = F_A$  suy ra  $\frac{d}{d'} = 2$ .

**Câu 4:** Cho hai lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$  cùng tác động vào một vật đặt tại điểm  $M$ . Cho biết cường độ lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $50N$ , tam giác  $MAB$  vuông tại  $M$ . Điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC}$ .

Tính độ dài của  $(\vec{MA} + \vec{MB})\sqrt{2}$ .

**Lời giải**

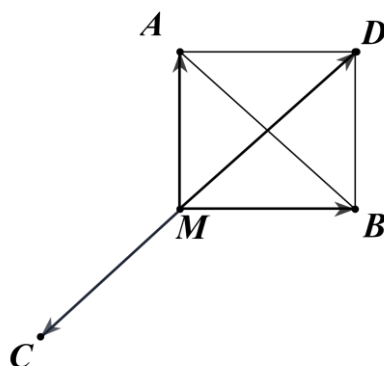


Ta có  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MC} \Rightarrow |\vec{MA} + \vec{MB}| = |\vec{MC}|$

Lại có  $\triangle MAB$  vuông tại  $M$  nên ta có  $|\vec{MC}| = \sqrt{MA^2 + MB^2} = 50\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2}(|\vec{MA}| + |\vec{MB}|) = 100$

**Câu 5:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \vec{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \vec{MC}$ , cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên khi đó. Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $100N$  và góc  $AMB = 90^\circ$ . Tính cường độ lực  $\vec{F}_3$  (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

**Lời giải**



Vẽ hình vuông  $ADBM$ , cạnh  $MA = 100 \Rightarrow MD = 100\sqrt{2}$

Lại có  $\vec{MA} + \vec{MB} = \vec{MD} \Rightarrow \vec{F}_3 = -\vec{MD} \Rightarrow |\vec{F}_3| = 100\sqrt{2} \approx 141$



**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  biết  $AB = 27$  (cm). Điểm  $M$  thỏa mãn:  $\left| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \right|$ . Khi đó điểm  $M$  nằm trên đường tròn có bán kính bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

Vì  $A, B, C$  cố định nên ta chọn điểm  $I$  thỏa mãn:  $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{IA} + 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}) + 4(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IA} = -3\overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{3\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{AC}}{9}$$

$$\Rightarrow I \text{ duy nhất từ đó } 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 9\overrightarrow{MI} + (2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC}) = 9\overrightarrow{MI} \text{ và } \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Từ giả thiết ta suy ra } \left| 9\overrightarrow{MI} \right| = \left| \overrightarrow{BA} \right| \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{9} = 3 \text{ (cm)}$$

-----HẾT-----



## BÀI

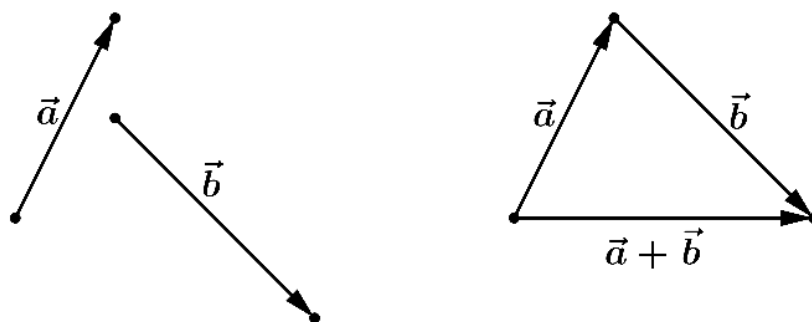
## 02

## TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO'

## A

## LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

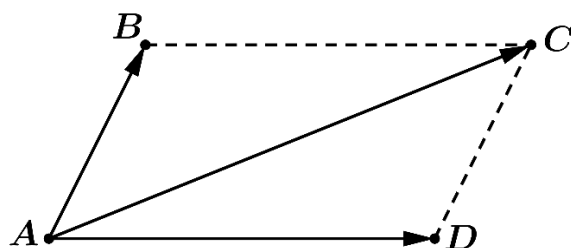
## 1 Tổng của hai vectơ



Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Lấy một điểm  $A$  tùy ý ta vẽ  $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$ . Khi đó vectơ  $\overrightarrow{AC}$  được gọi là tổng của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  và được kí hiệu là  $\vec{a} + \vec{b}$ .

Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.

**Quy tắc ba điểm:** Với ba điểm bất kì  $A, B, C$  ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ .



**Quy tắc hình bình hành:** Nếu  $ABCD$  là một hình bình hành thì  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

Với ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  tùy ý:

- Tính chất giao hoán:  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
- Tính chất kết hợp:  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
- Tính chất của vectơ – không:  $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$

**Chú ý:** Do các vectơ  $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$  và  $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$  bằng nhau, nên ta còn viết chúng dưới dạng  $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$  và gọi là tổng của ba vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ . Tương tự, ta cũng có thể viết tổng của một số vectơ mà không cần dùng dấu ngoặc.

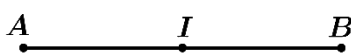
**2 Hiệu của hai vector**

- Vector có cùng độ dài và ngược hướng với véc tơ  $\vec{a}$  được gọi là vector đối của vector  $\vec{a}$ .  
Vector đối của vector  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $-\vec{a}$ .
- Vector  $\vec{0}$  được coi là vector đối của chính nó.
- Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta gọi hiệu của hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là vector  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

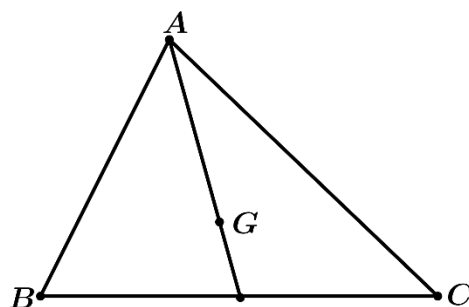
**Chú ý 1:** Hai véc tơ đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng  $\vec{0}$

**Quy tắc về hiệu vector:** Với ba điểm  $O, A, B$  tùy ý, ta luôn có:  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .

**Chú ý 2:**



- Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .



- Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ .

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Tính tổng và hiệu của hai vectơ****Phương pháp:**

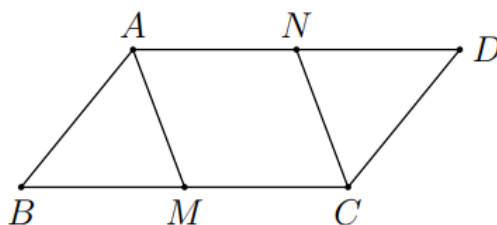
- Sử dụng khái niệm tổng và hiệu của hai vectơ
- Sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành
- Sử dụng quy tắc trung điểm, trọng tâm của tam giác

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho hình bình hành  $ABCD$  với  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $BC$  và  $AD$ . Tìm tổng của hai vectơ:

a)  $\overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{MC}$

b)  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{CD}$

**Lời giải**

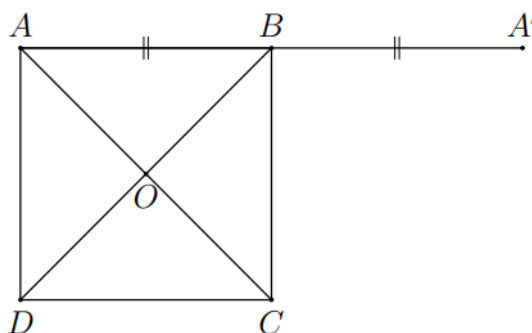
a) Vì  $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AN}$  nên ta có  $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}$ .

b) Vì  $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$  nên ta có  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BM}$ .

**Bài tập 2:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$  với tâm là  $O$ . Tính:

a) Độ dài vectơ  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}$

b) Tính  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}|$

**Lời giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BO}$ .

Mặt khác  $BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$  nên  $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{CB}| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

b) Gọi  $A'$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $B$ .

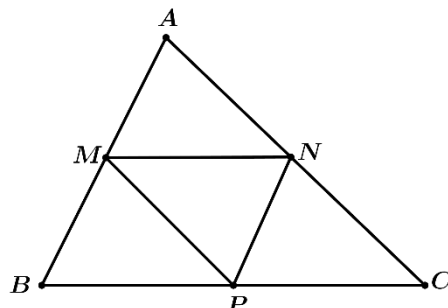
Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'} = \overrightarrow{AA'}$  nên  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AA'}| = 2a$ .



**Bài tập 3:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M$ ,  $N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB$ ,  $AC$  và  $BC$ .

- a) Tìm các hiệu sau  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$ ;  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$  và  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$
- b) Phân tích vector  $\overrightarrow{AM}$  theo hai vector  $\overrightarrow{MN}$  và  $\overrightarrow{MP}$

**Lời giải**



- a) Theo quy tắc ba điểm, thì  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$ .

Vì  $MP$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  và  $\overrightarrow{MP}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{NC}$  nên ta có  $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$

Do vậy:  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$ . Vì  $-\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$  nên  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ .

- b) Ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP}$  nên có phân tích sau  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$ .

**Bài tập 4:** Cho bốn điểm bất kỳ  $A$ ,  $B$ ,  $C$  và  $D$ . Hãy chứng minh đẳng thức:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

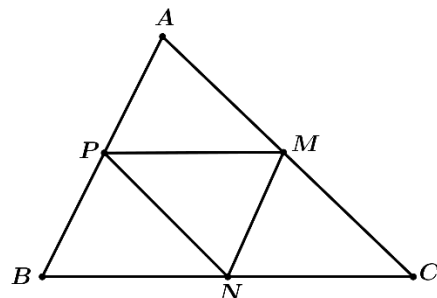
**Lời giải**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

**Bài tập 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Chứng minh rằng:

- a)  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$
- b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ , với  $O$  là điểm bất kì.

**Lời giải**



- a) Vì  $PN$ ,  $MN$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  nên  $PN \parallel BM$ ,  $MN \parallel BP$  suy ra tứ giác  $BMNP$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{PN}$  và  $N$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{NA}$ .

Do đó theo quy tắc ba điểm ta có:  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{NA}) + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$ .

- b) Theo quy tắc ba điểm ta có:



$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} &= (\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA}) + (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NC}) = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) + \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC} \\ &= (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}) - (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP})\end{aligned}$$

Theo câu a)  $\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AP} = \vec{0}$  ta suy ra  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OP}$ .

**Bài tập 6:** Cho  $n$  điểm  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ , xác định vectơ  $\overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}$ .

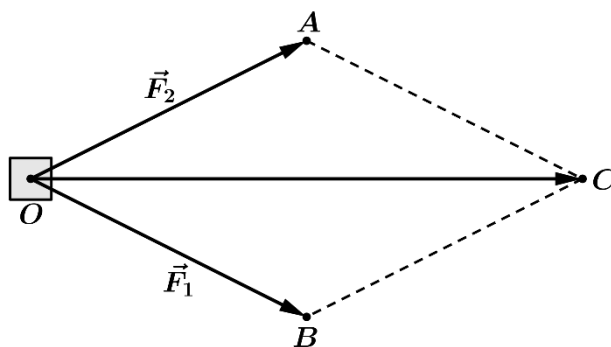
**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2}$$

$$= \overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{A_2A_3} + \dots + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-1}A_n}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{A_{n-1}A_n} + \overrightarrow{A_{n-2}A_{n-1}} + \overrightarrow{A_{n-3}A_{n-2}} + \dots + \overrightarrow{A_2A_3} + \overrightarrow{A_1A_2} = \overrightarrow{A_1A_n}.$$

**Bài tập 7:** Có hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động vào một vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều có cường độ là 30 (N) và chúng hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ bằng bao nhiêu?



**Lời giải**

Giả sử  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}, \vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$ .

Theo quy tắc hình bình hành, suy ra  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{OC}$  như hình vẽ.

Ta có  $AOB = 60^\circ, OA = OB = 50$  nên tam giác  $OAB$  đều suy ra  $OC = 30\sqrt{3}$ .

Vậy  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\overrightarrow{OC}| = 30\sqrt{3}(\text{N})$ .



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho 3 điểm  $A, B, C$  phân biệt. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$ .

B.  $\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NP}$ .

C.  $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CB}$ .

D.  $\overrightarrow{AA} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải**

$$\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NP}.$$

**Câu 2:** Tính tổng  $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR}$ .

A.  $\overrightarrow{MR}$ .

B.  $\overrightarrow{MN}$ .

C.  $\overrightarrow{PR}$ .

D.  $\overrightarrow{MP}$ .

**Lời giải**

$$\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{RN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RN} = \overrightarrow{MN}$$

**Câu 3:** Cho 4 điểm  $A, B, C, D$  phân biệt. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ .

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA}$ .

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$ .

**Lời giải**

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}) = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB} + \vec{0} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

**Câu 4:** Cho tam giác đều  $ABC$ , cạnh  $2a$  và có  $P, N, M$  lần lượt là trung điểm  $BC, CA$  và  $AB$ . Giá trị của  $|\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{PC}|$  là

A. 0

B.  $a$

C.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

D.  $2a$

**Lời giải**

$$\text{Theo quy tắc 3 điểm ta có } |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{PC}| = |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CM}| = |\overrightarrow{AM}| = AM = a.$$

**Câu 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}$ .

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$ .

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

$$\text{Quy tắc hình bình hành: } \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}.$$

**Câu 6:** Cho hình vuông  $ABCD$ , tâm  $O$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A.  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA}$ .

B.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{CA}$ .

C.  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}$ .

D.  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ .

**Lời giải**

$$\text{Quy tắc hình bình hành: } \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CA}.$$



**Câu 7:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$  và  $AD$ . Tính tổng  $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC}$

**A.**  $\overrightarrow{AC}$ .

**B.**  $\overrightarrow{NM}$ .

**C.**  $\overrightarrow{CA}$ .

**D.**  $\overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{AC}$ .

**Câu 8:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .

**B.**  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

**C.**  $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{DO} = \vec{0}$ .

**D.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

Vì  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$  nên ta có:  $\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

**Câu 9:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $M$  tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

**A.**  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ .

**B.**  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$ .

**C.**  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$ .

**D.**  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ .

**Lời giải**

Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Ta có:  $\begin{cases} \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MO} \\ \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MO} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ .

**Câu 10:** Cho  $\triangle ABC$ ,  $AM, BN, CP$  là các trung tuyến.  $D, E, F$  là trung điểm của  $AM, BN$  và  $CP$ . Với  $O$  là điểm bất kì. Đẳng thức nào sau đây đúng?

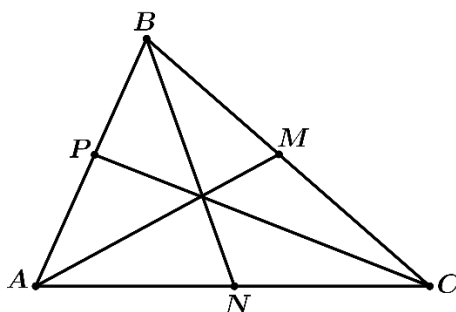
**A.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$ .

**B.**  $2(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$ .

**C.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$ .

**D.**  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF})$ .

**Lời giải**



Ta có:  $\begin{cases} 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OD} \quad (1) \\ \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{ON} = 4\overrightarrow{OE} \quad (2) \\ \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OF} \quad (3) \end{cases}$

Cộng vế theo vế (1), (2), (3) ta được:

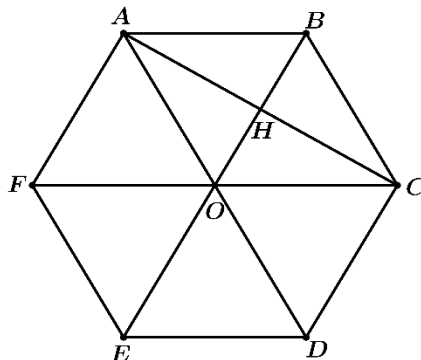
$$4(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 4(\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$$



**Câu 11:** Cho lục giác đều  $ABCDEF$  cạnh  $a$  có tâm  $O$ . Tính giá trị  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}|$ .

- A.  $a$ .                      B.  $a\sqrt{3}$ .                      C.  $a\sqrt{2}$ .                      D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**



Ta có:  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO}| = |\overrightarrow{AC}| = AC$ .

Vì  $ABCDEF$  là lục giác đều nên  $\triangle ABO$  đều. Gọi  $H$  là trung điểm  $BO \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Vì  $ABCO$  là hình bình hành nên  $AC = 2AH = a\sqrt{3}$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  biết  $AB = 3, AC = 4$ . Tính độ dài vector  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ .

- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B. 3.                      C. 4.                      D. 5.

**Lời giải**

Dựng hình chữ nhật  $ABDC$ . Ta có:  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

**Câu 13:** Cho hình thang  $ABCD$  có  $AB$  song song với  $CD$  biết  $AB = 2, CD = 1$ . Gọi  $O$  là trung điểm  $AD$ . Độ dài vector  $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$  bằng

- A. 0.                      B. 1.                      C.  $\frac{3}{2}$ .                      D. 3.

**Lời giải**

Ta có:  $|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| \Rightarrow |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{DC}| = 3$ .

( Vì  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  là 2 véc tơ cùng hướng ).

**Câu 14:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng 5. Độ dài vector  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD}$  bằng

- A.  $5\sqrt{2}$ .                      B. 5.                      C.  $5\sqrt{3}$ .                      D. 10.

**Lời giải**

Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ .

Ta có:  $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MD} = (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}) + 3(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}) - 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})$



$$= \vec{OA} - 2\vec{OB} + 3\vec{OC} - 2\vec{OD} = -2\vec{OA} \Rightarrow |\vec{MA} - 2\vec{MB} + 3\vec{MC} - 2\vec{MD}| = |-2\vec{OA}| = 2OA = AC = 5\sqrt{2}$$

**Câu 15:** Cho hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động vào vật đứng tại điểm  $O$ , biết hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều có cường độ  $60N$  và hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi vật đó phải chịu một lực tổng hợp có cường độ là bao nhiêu?

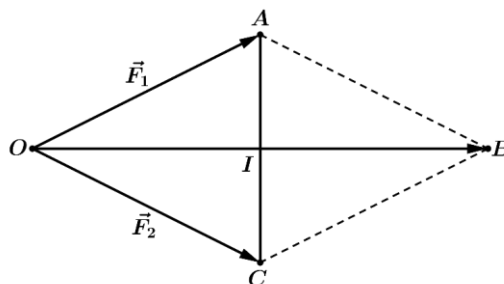
A. 30.

B.  $30\sqrt{3}$ .

C. 120.

D.  $60\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

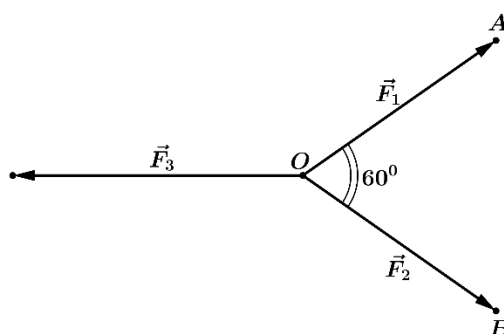


Dựng hình bình hành  $OACB$  như hình vẽ.

Tổng hợp lực tác động vào vật tại  $O$  là:  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OA} + \vec{OC} = \vec{OB}$

Độ lớn tổng hợp lực:  $|\vec{F}| = |\vec{OB}| = OB = 2OI = 2 \cdot \frac{60\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}$  do  $\triangle OAC$  đều.

**Câu 16:** Cho ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào vật đứng tại điểm  $O$  minh hoạ như hình vẽ. Biết sau khi tác động lực thì vật đứng yên. Hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều có cường độ  $100N$  và hợp với nhau một góc  $60^\circ$ . Hỏi cường độ lực  $\vec{F}_3$  là bao nhiêu?



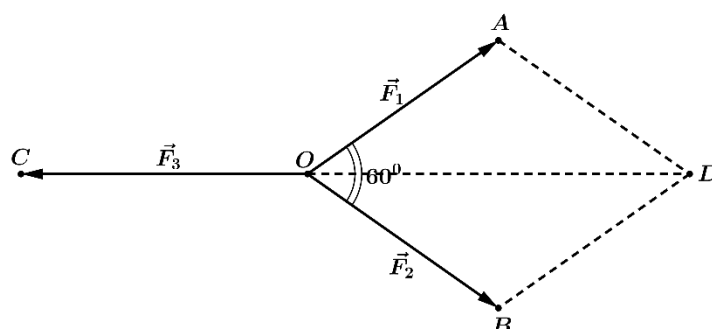
A.  $50\sqrt{3}$ .

B.  $100\sqrt{3}$ .

C. 100.

D. 200.

**Lời giải**





Dựng hình bình hành  $OADB$  như hình vẽ.

Tổng hợp lực tác động vào vật tại  $O$  là:  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$

Vì vật đứng yên nên  $\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OC} = -(\vec{OA} + \vec{OB})$ .

$$|\vec{F}_3| = |-(\vec{OA} + \vec{OB})| = |\vec{OA} + \vec{OB}| = |\vec{OD}| = OD = 2OI = 2 \cdot \frac{100\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3}. \text{ ( Vì } \triangle OAB \text{ đều )}$$

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh  $a$  có  $AH$  là đường cao. Khi đó  $|\vec{AC} + \vec{AH}|$  bằng

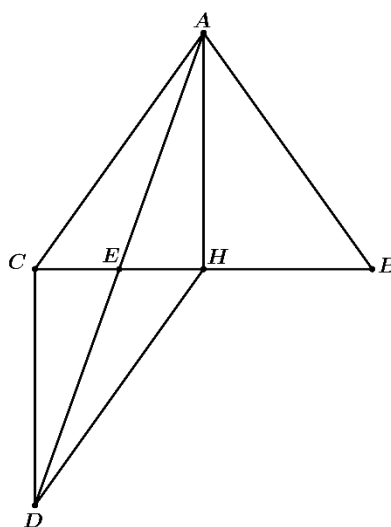
A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**B.**  $\frac{a\sqrt{13}}{2}$ .

C.  $2a$ .

D.  $a\sqrt{3}$ .

Lời giải



Tam giác  $\triangle ABC$  đều cạnh  $a$  có  $AH$  là trung tuyến  $\Rightarrow HB = HC = \frac{a}{2}$

Đường cao:  $AH = \sqrt{AB^2 - HB^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Gọi  $D$  là điểm sao cho  $ACDH$  là hình bình hành ta có:  $\vec{AC} + \vec{AH} = \vec{AD}$

$\Rightarrow |\vec{AC} + \vec{AH}| = |\vec{AD}| = AD$ . Gọi  $E = AD \cap CH$  thì  $AD = 2AE$ .

Xét tam giác  $AHE$  vuông tại  $H$  có:  $AE = \sqrt{AH^2 + EH^2} = \frac{a\sqrt{13}}{4}$  nên  $AD = 2AE = \frac{a\sqrt{13}}{2}$ .

**Câu 18:** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $AB = a, AC = 2a$  và  $BAC = 120^\circ$ . Khi đó  $|\vec{AB} + \vec{AC}|$  bằng

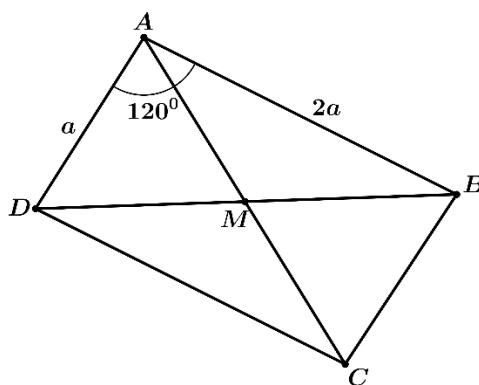
A.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**B.**  $a\sqrt{3}$ .

C.  $a\sqrt{2}$ .

D.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

Lời giải



Xét tam giác  $ABC$  ta có:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A = 7a^2$ .

Gọi  $M$  là trung điểm cạnh  $BC$ , ta có:  $AM^2 = \frac{2(AB^2 + AC^2) - BC^2}{4} = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Mặt khác, gọi  $D$  là điểm sao cho tứ giác  $ABDC$  là hình bình hành.

Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Rightarrow |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AM = a\sqrt{3}$ .

**Câu 19:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh  $3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $C$  qua  $D$ . Giá trị của  $|\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DM}|$  bằng

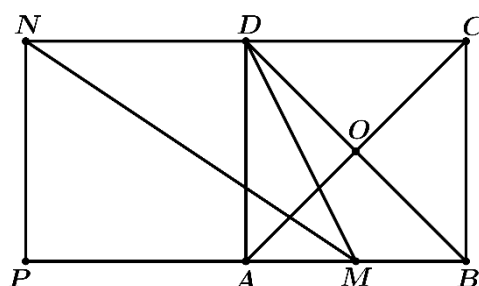
A.  $\frac{3a\sqrt{15}}{2}$ .

B.  $3a\sqrt{5}$ .

C.  $\frac{3a\sqrt{13}}{2}$ .

D.  $\frac{3a\sqrt{5}}{4}$ .

Lời giải



Ta thấy:  $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{ND} + \overrightarrow{DM} = \overrightarrow{NM}$

Qua  $N$  kẻ đường thẳng song song với  $AD$  cắt  $AB$  tại  $P$ .

Khi đó tứ giác  $ADNP$  là hình vuông và  $PM = PA + AM = 3a + \frac{3a}{2} = \frac{9a}{2}$

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác vuông  $NPM$  ta có:

$$MN^2 = NP^2 + PM^2 = (3a)^2 + \left(\frac{9a}{2}\right)^2 = \frac{117a^2}{4} \Rightarrow MN = \frac{3a\sqrt{13}}{2} \text{ suy ra } |\overrightarrow{NM}| = MN = \frac{3a\sqrt{13}}{2}$$

**Câu 20:** Cho tam giác  $ABC$  đều có độ dài cạnh bằng  $a$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác. Độ dài  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}$  bằng

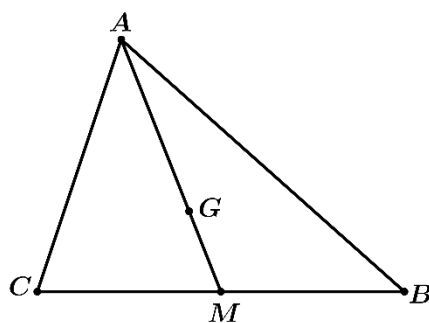
A.  $a\sqrt{3}$ .

B.  $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$ .

C.  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

D.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Lời giải



Ta có  $M$  là trung điểm của  $BC$ , nên  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{AG}$ .

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{AG}| = AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

**Câu 21:** Trên đường tròn  $C(O; R)$  lấy điểm cố định  $A$ ;  $B$  là điểm di động trên đường tròn đó. Gọi  $M$  là điểm di động sao cho  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ . Khi đó tập hợp điểm  $M$  là:

- A. Đường tròn tâm  $O$  bán kính  $2R$ .      **B.** Đường tròn tâm  $A$  bán kính  $R$ .  
C. Đường thẳng song song với  $OA$ .      D. Đường tròn tâm  $C$  bán kính  $R\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \Rightarrow O, A, M, B$  theo thứ tự là các đỉnh của hình bình hành. Do  $AM = OB = R \Rightarrow$  Tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $A$  bán kính  $R$ .

**Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CA$  và dựng điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ . Khi đó, điểm  $K$  trùng với điểm nào trong các điểm sau:

- A.  $N$ .      **B.**  $P$ .      C.  $A$ .      D.  $B$ .

**Lời giải**

Ta có:  $M$  là trung điểm  $AB$  nên  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{NC}.$$

Theo tính chất đường trung bình của tam giác thì tứ giác  $MPCN$  là hình bình hành

Suy ra  $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NC}$ . Do đó điểm  $K$  trùng với điểm  $P$ .

**Câu 23:** Cho  $n$  điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Bạn Bình kí hiệu chúng là  $B_1, B_2, \dots, B_n$  ( $A_i \neq B_n$ ). Vectơ tổng  $\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n}$  bằng

- A.**  $\vec{0}$ .      B.  $\overrightarrow{A_1A_n}$ .      C.  $\overrightarrow{B_1B_n}$ .      D.  $\overrightarrow{A_1B_n}$ .

**Lời giải**

Lấy điểm  $O$  bất kì.

$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n} = (\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{A_2O} + \dots + \overrightarrow{A_nO}) + (\overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n})$$

$$\text{Vì } \{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\} \text{ nên } \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OB_2} + \dots + \overrightarrow{OB_n} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \dots + \overrightarrow{OA_n}$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \dots + \overrightarrow{A_nB_n} = (\overrightarrow{A_1O} + \overrightarrow{OA_1}) + (\overrightarrow{A_2O} + \overrightarrow{OA_2}) + \dots + (\overrightarrow{A_nO} + \overrightarrow{OA_n}) = \vec{0}.$$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.****Câu 1:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $2a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = 2a$

c)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = 2a$

d)  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = 2a\sqrt{3}$

**Lời giải**

a) Ta có theo quy tắc ba điểm:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b) Ta có theo quy tắc trừ:  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = 2a$

c)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}| = |\vec{0}| = 0$

d) Gọi  $E$  là trung điểm của  $CD$  theo tính chất trung điểm đoạn thẳng ta có:

$$|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AE}| = 2\sqrt{AD^2 + DE^2} = 2\sqrt{4a^2 + a^2} = 2a\sqrt{5}.$$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$ . Bên ngoài của tam giác vẽ các hình bình hành  $ABIJ, BCPQ, CARS$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{RJ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}$

b)  $\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{QB}$

c)  $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}$

d)  $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$

**Lời giải**

a) Đúng:  $\overrightarrow{RJ} = \overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}$ .

b) Sai:  $\overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}$

c) Sai:  $\overrightarrow{PS} = \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}$

$$\begin{aligned} \text{d) Đúng: Khi đó: } \overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{AJ}) + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BQ}) + (\overrightarrow{PC} + \overrightarrow{CS}) \\ &= (\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) = (\overrightarrow{SC} + \overrightarrow{CS}) + (\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IB}) + (\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{PC}) = \overrightarrow{SS} + \overrightarrow{BB} + \overrightarrow{CC} = \vec{0} \end{aligned}$$

Vậy  $\overrightarrow{RJ} + \overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{PS} = \vec{0}$ .

**Câu 3:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

b) Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$ . Khi đó  $ADEC$  là hình thang.



c)  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = a\sqrt{2}$

d)  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$ .

**Lời giải**a) Đúng: Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$ .b) Sai: Gọi  $E$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$ .Do  $CE = AD = a, CE \parallel AD$  nên  $ADEC$  là hình bình hành.c) Đúng: Theo định lý Pytago:  $AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AC = a\sqrt{2}$ Vậy  $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = a\sqrt{2}$ .d) Sai: Ta có:  $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AE}$ . Áp dụng định lý Pytago cho tam giác  $ABE$ :

$$AE^2 = AB^2 + BE^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 \Rightarrow AE = a\sqrt{5}. \text{ Vậy } |\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}| = AE = a\sqrt{5}$$

**Câu 4:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$  có cạnh  $AB = 2a, BC = a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

b)  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$ .

c)  $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = a\sqrt{3}$ .

d)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}| = a\sqrt{5}$

**Lời giải**a) Đúng: Ta có theo quy tắc hình bình hành:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ b) Đúng: Ta có theo tính chất  $O$  là tâm hình chữ nhật thì  $O$  là trung điểm các đoạn  $AC, BD$ 

nên:  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$

c) Sai: Theo quy tắc hình bình hành ta có:  $|\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{DB}| = DB = a\sqrt{5}$ .d) Sai: Gọi  $E$  là trung điểm của  $CB$  ta có:

$$|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DB}| = |\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}| = 2|\overrightarrow{DE}| = 2\sqrt{DC^2 + CE^2} = 2\sqrt{4a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{17}$$

**Câu 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$

b)  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$

c)  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MP}$



d)  $\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CM}$ .

**Lời giải**

a) Đúng: Dễ thấy tứ giác  $AMPN, MNCP$  là hình bình hành

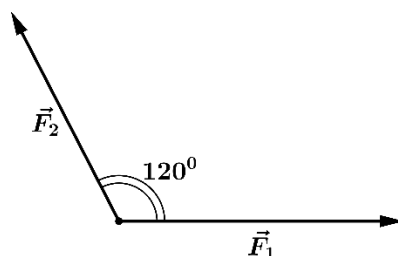
Ta có theo quy tắc ba điểm :  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$

b) Sai: Ta có theo quy tắc trừ :  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN} \left( \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP} \right)$ .

c) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ .

d) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{CP} - \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CM}$ .

**Câu 6:** Hình vẽ dưới biểu diễn hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  cùng tác động lên một vật, cho  $|\vec{F}_1| = 3N, |\vec{F}_2| = 2N$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a)  $\vec{F}_1$  cùng hướng với  $\vec{F}_2$

b)  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$

c)  $|\vec{F}_1 - \vec{F}_2| = |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2|$

d)  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{19}$

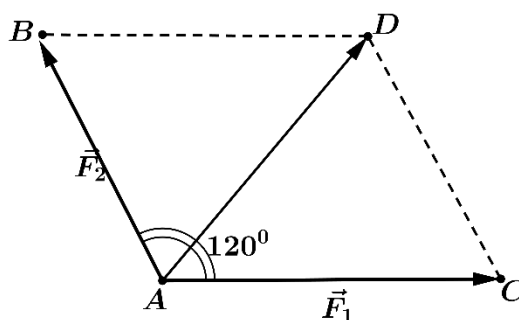
**Lời giải**

a) Sai:  $\vec{F}_1$  không cùng hướng với  $\vec{F}_2$

b) Sai:  $\vec{F}_1$  không cùng hướng với  $\vec{F}_2$  nên  $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2| \neq |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2|$

c) Sai:  $\vec{F}_1$  không ngược hướng với  $\vec{F}_2$

d) Đúng: Dựng hình bình hành  $ABDC$  với hai cạnh là hai vector  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  như hình vẽ:





Ta có:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{AC} + \vec{AB} = \vec{AD} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = |\vec{AD}| = AD$

Xét  $\triangle ABD$  ta có:  $BD = AC = |\vec{F}_1| = 3, AB = |\vec{F}_2| = 2$  và  $ABD = 180^\circ - BAC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

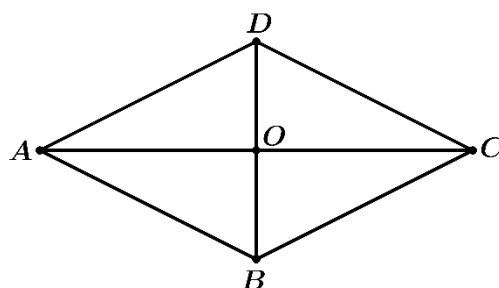
Theo định lí cosin ta có:  $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2 \cdot AB \cdot BD \cdot \cos ABD$

$\Leftrightarrow AD^2 = 2^2 + 3^2 - 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ \Leftrightarrow AD^2 = 19 \Leftrightarrow AD = \sqrt{19} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = \sqrt{19}.$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $O$  và có cạnh bằng  $a$ ,  $BAD = 60^\circ$ . Cho hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  có điểm đặt  $A$  theo hướng của  $\vec{AD}; \vec{AB}$ . Cường độ của hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  đều là  $50N$ . Tính cường độ tổng hợp lực của hai lực  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

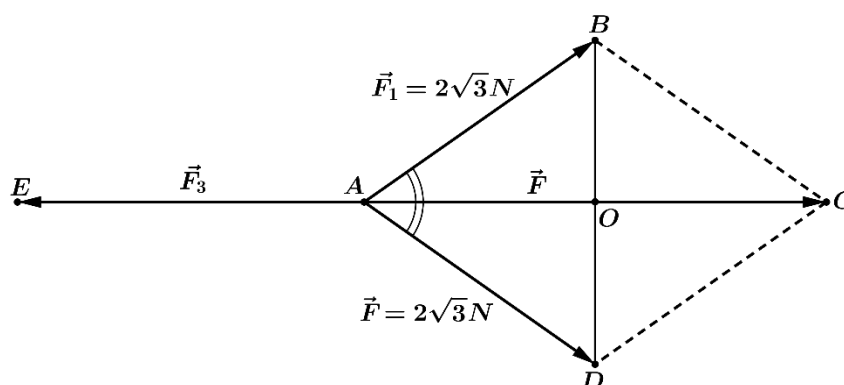
**Lời giải**



Ta có:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{AD} + \vec{AB} = \vec{AC} \Rightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = AC = 2AO = 2 \cdot \frac{50\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3},$

**Câu 2:** Cho hình thoi  $ABCD$  cạnh  $a$  có  $BAD = 60^\circ$ . Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo. Biểu diễn các lực  $\vec{F}_1 = \vec{AB}, \vec{F}_2 = \vec{AD}, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật đặt tại điểm  $A$  và ở trạng thái cân bằng biết  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 2\sqrt{3}N$ . Tính độ lớn của lực  $\vec{F}_3$ .

**Lời giải**

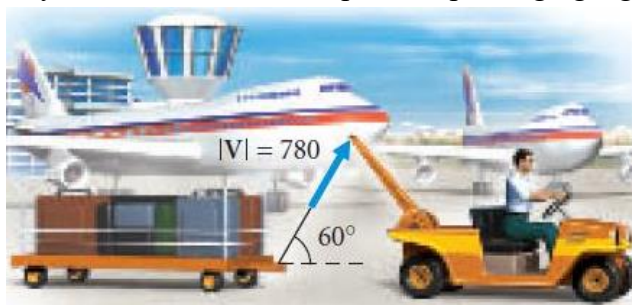


Ta có tam giác  $ABD$  đều  $AC = 2AO = 2 \cdot \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 6$

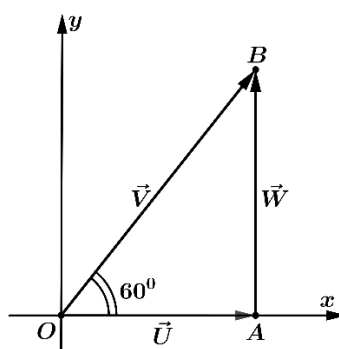
Do  $A$  ở vị trí cân bằng nên hai lực  $\vec{F}$  và  $\vec{F}_3$  có cùng cường độ và ngược hướng tức là các vectơ  $\vec{AC}$  và  $\vec{AD}$  đối nhau. Vậy cường độ lực  $\vec{F}_3$  bằng  $|\vec{F}_3| = |\vec{F}| = AE = 6N$



**Câu 3:** Một toa xe hành lý đang được kéo với một lực  $\vec{V}$  với độ lớn  $780\text{ N}$  và tạo với hướng chuyển động một góc  $60^\circ$ . Ta thấy  $\vec{V}$  theo hai lực thành phần có phương ngang và phương thẳng đứng.



Xét hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ với  $\vec{OB} = \vec{V}$  và  $(Ox; OB) = 60^\circ$ .



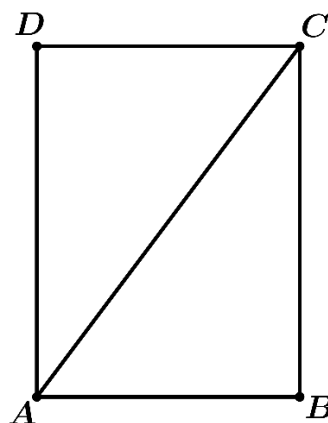
Khi xe kéo một đoạn đường 10 mét tính công sinh ra.

**Lời giải**

Công sinh ra khi xe kéo một đoạn đường 10 m:  $A = \vec{F} \cdot \vec{d} = 780 \cdot 10 \cdot \cos 60^\circ = 3900 (J)$

**Câu 4:** Một khúc sông rộng 200m. Một chiếc thuyền chèo qua sông với vận tốc chèo 15km/h theo phương vuông góc với bờ sông. Biết rằng vận tốc nước chảy là 3 km/h. Một lần khác thuyền muốn đến bờ bên kia tại điểm cách điểm đến theo phương vuông góc một khoảng bằng 50m. Tính vận tốc chèo của thuyền (biết rằng vận tốc dòng nước không đổi)

**Lời giải**



Gọi  $C$  là điểm đến của thuyền theo phương vuông góc và  $D$  là điểm đến của thuyền.

Ta có:  $\tan DAB = \frac{DB}{AB} = \frac{200}{50} = 4$ .

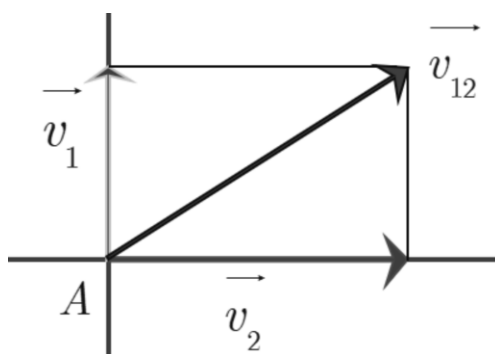


Vector vận tốc dòng nước cùng hướng  $\overrightarrow{AB}$  và vector vận tốc thuyền cùng hướng  $\overrightarrow{AC}$ .

Suy ra vận tốc chéo của thuyền là  $v = 3 \cdot \tan DAB = 3 \cdot 4 = 12$  (km/h).

**Câu 5:** Hai ô tô cùng xuất phát từ A theo hai hướng vuông góc với nhau, vận tốc tương ứng của hai xe là  $x$  (km/h) và  $(100 - x\sqrt{3})$  (km/h). Hỏi  $x$  bằng bao nhiêu để vận tốc tương đối giữa xe ô tô thứ nhất và người ngồi trên xe ô tô thứ hai là nhỏ nhất:

**Lời giải**



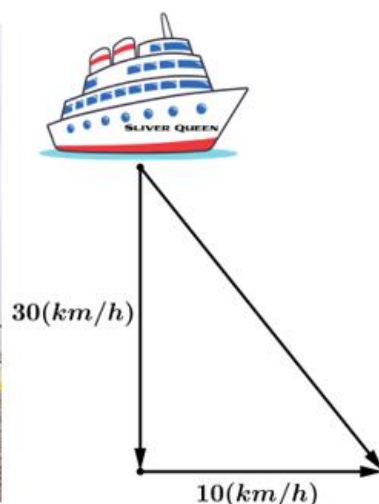
Vận tốc tương đối của xe ô tô thứ nhất đối với ô tô thứ hai là:  $\overrightarrow{v_{12}} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ . Theo quy tắc hình bình hành thì  $|\overrightarrow{v_{12}}|$  là đường chéo của hình chữ nhật có hai cạnh là  $|\overrightarrow{v_1}|$  và  $|\overrightarrow{v_2}|$

$$|\overrightarrow{v_{12}}|^2 = |\overrightarrow{v_1}|^2 + |\overrightarrow{v_2}|^2 = x^2 + (100 - x\sqrt{3})^2 = 4x^2 - 200\sqrt{3}x + 10000 = (2x - 50\sqrt{3})^2 + 2500 \geq 2500$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{v_{12}}| \geq 50$$

Vậy vận tốc tương đối của xe ô tô thứ nhất đối với người ngồi trên xe ô tô thứ hai nhỏ nhất 50 (km/h)

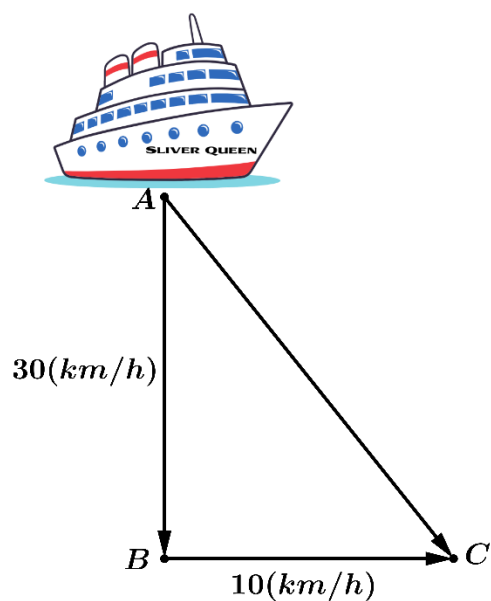
**Câu 6:** VinFast là một hãng xe ô tô điện của Việt Nam. Năm 2023, VinFast đã xuất khẩu gần 1900 chiếc xe điện VF8 sang thị trường Bắc Mỹ bằng tàu Silver Queen. Biết rằng con tàu có vector vận tốc chỉ theo hướng Nam, vận tốc của dòng nước là một vector theo hướng Đông như hình minh họa dưới đây. Tính độ dài vector tổng của hai vector nói trên (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



**Lời giải**



Gọi vector vận tốc của tàu là  $\overrightarrow{AB}$  và vector vận tốc của dòng nước là vector  $\overrightarrow{BC}$



Ta có vector tổng là  $\vec{F} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

Độ dài vector tổng là:  $|\vec{F}| = |\overrightarrow{AC}| = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{30^2 + 10^2} = 10\sqrt{10}$  (km/h)

Vậy độ dài vector tổng là  $10\sqrt{10} \approx 31,6$  (km/h)

-----HẾT-----

**Dạng 2: Bài toán liên quan đến vectơ đối và hiệu của hai vectơ****Phương pháp:**

- Vectơ có cùng độ dài và ngược hướng với vectơ  $\vec{a}$  được gọi là vectơ đối của vectơ  $\vec{a}$ .
- Vectơ đối của vectơ  $\vec{a}$  được kí hiệu là  $-\vec{a}$ .
- Vectơ  $\vec{0}$  được coi là vectơ đối của chính nó.
- Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta gọi hiệu của hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là vectơ  $\vec{a} + (-\vec{b})$ , kí hiệu  $\vec{a} - \vec{b}$ .

**Chú ý:** Hai vectơ đối nhau khi và chỉ khi tổng của chúng bằng  $\vec{0}$

**Quy tắc về hiệu vectơ:** Với ba điểm  $O, A, B$  tùy ý, ta luôn có:  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$ .

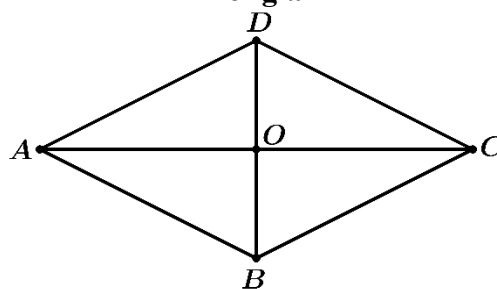
**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho hình thoi  $ABCD$ , gọi  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Chứng minh rằng :

a)  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AO}$

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$

**Lời giải**



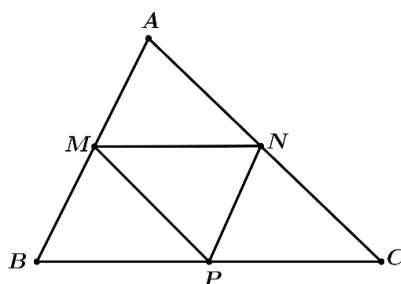
a)  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DO} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AO}$ .

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ .

**Bài tập 2:** Cho tam giác  $ABC$ . Các điểm  $M, N$  và  $P$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, AC$  và  $BC$ .

Tìm các hiệu sau:  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}$ ;  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN}$  và  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC}$ .

**Lời giải**



Theo quy tắc ba điểm:  $\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{NM}$ .

Vì  $-\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{NP}$  nên  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$ .

Vì  $MP$  là đường trung bình của tam giác  $ABC$  và  $\overrightarrow{MP}$  cùng hướng với  $\overrightarrow{NC}$  nên ta có  $\overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MP}$

Do vậy  $\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{NC} = \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{PN}$ .

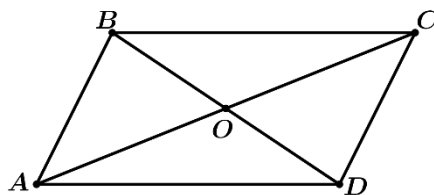


**Bài tập 3:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Chứng minh rằng:

a)  $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$ .

**Lời giải**



a) Ta có  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{OA}$  do đó:  $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ .

b) Ta có  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$  do đó:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ .

**Bài tập 4:** Cho hai điểm  $A$  và  $B$ . Tìm tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$ .

**Lời giải**

Vẽ hình bình hành  $AMBN$ .

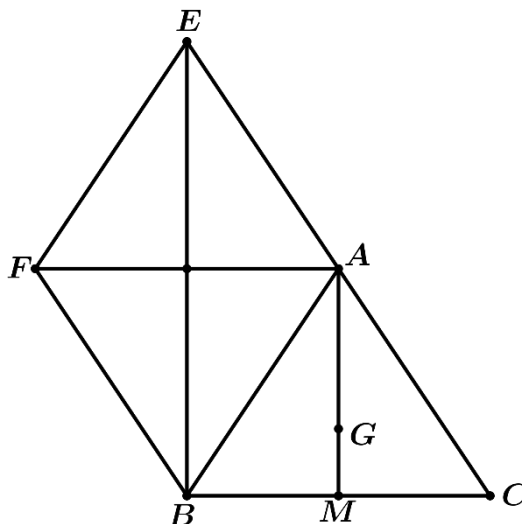
Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MN}| = MN = 2MO$

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{BA}| = BA \Rightarrow 2MO = AB \Rightarrow MO = \frac{AB}{2}.$$

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là đường tròn đường kính  $AB$ .

**Bài tập 5:** Cho tam giác  $ABC$  đều, cạnh  $a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Tính  $|\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AB}|$  và  $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}|$  theo  $a$ .

**Lời giải**



Tính  $|\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AB}|$  ta có:  $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BG} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AG}$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AG}| = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Tính  $|\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}|$  ta vẽ hình bình hành  $BAEF$ .

$$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{BE} \Rightarrow |\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BE}| = BE = 2AM = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$



**Bài tập 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$ . Hãy tính độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM}$ .

**Lời giải**

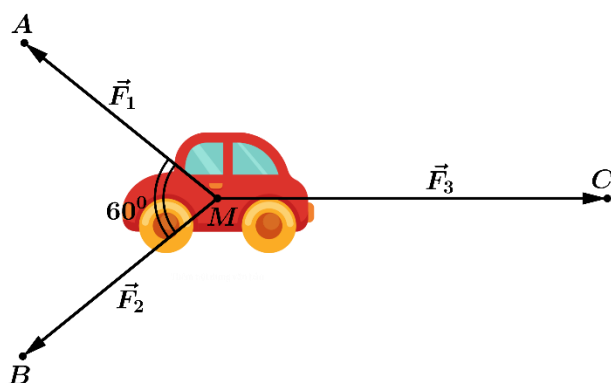
Vì tứ giác  $APMN$  là hình bình hành nên  $\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AM}$ , kết hợp với quy tắc trừ ta có:

$$\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM}.$$

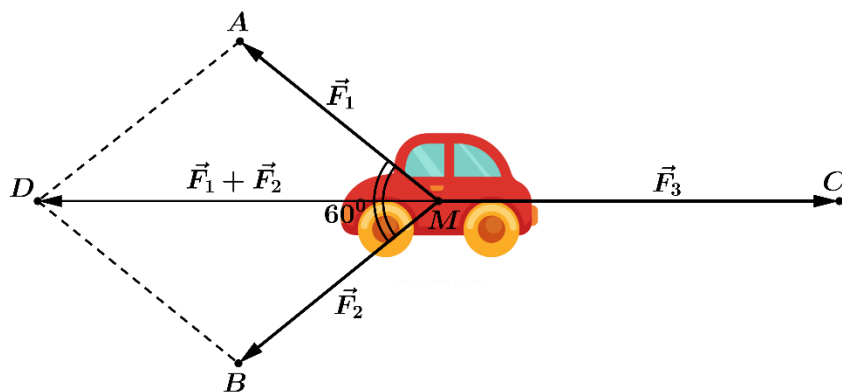
Mà  $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{BM} = \vec{0}$  do  $M$  là trung điểm của  $BC$ .

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM} = \vec{0} \Rightarrow |\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BM}| = |\vec{0}| = 0$$

**Bài tập 7:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{MA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{MB}$ ,  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{MC}$  cùng tác động vào một ô tô tại điểm  $M$  và ô tô đứng yên. Cho biết cường độ hai lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $25N$  và góc  $AMB = 60^\circ$ . Khi đó tính cường độ  $\vec{F}_3$ .



**Lời giải**



Ta có:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MD}$  (với  $D$  là điểm sao cho  $AMBD$  là hình bình hành)

Ta có:  $MA = |\overrightarrow{MA}| = |\vec{F}_1| = 25N$  và  $MB = |\overrightarrow{MB}| = |\vec{F}_2| = 25N$

Do  $AMB = 60^\circ$  nên  $\triangle MAB$  là tam giác đều nên  $MD = 2 \cdot \frac{25\sqrt{3}}{2} = 25\sqrt{3}(N)$

Do ô tô đứng yên nên cường độ lực tác dụng lên ô tô bằng 0 hay  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$

Suy ra:  $\vec{F}_3 = -(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \Rightarrow |\vec{F}_3| = |-(\vec{F}_1 + \vec{F}_2)| = |\overrightarrow{DM}| = MD = 25\sqrt{3}(N)$

Vậy cường độ của  $\vec{F}_3$  là  $25\sqrt{3}(N)$

## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là các vectơ khác  $\vec{0}$  với  $\vec{a}$  là vectơ đối của  $\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.** Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương.
- B.** Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  ngược hướng.
- C.** Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng độ dài.
- D.** Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  chung điểm đầu.

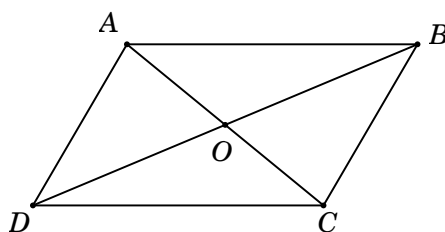
## Lời giải

Ta có  $\vec{a} = -\vec{b}$ . Do đó  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương, cùng độ dài và ngược hướng nhau.

**Câu 2:** Gọi  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.**  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$ . **B.**  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .  
**C.**  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ . **D.**  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$ .

### Lời giải



Ta có  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$

Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ .

Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$

**Câu 3:** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ .

- A.**  $\overrightarrow{BC}$ .                  **B.**  $\overrightarrow{DA}$ .                  **C.**  $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .                  **D.**  $\overrightarrow{AB}$ .

## Lời giải

$$\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}.$$

**Câu 4:** Cho  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Hỏi vector  $(\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO})$  bằng vector nào?

- A.**  $\overrightarrow{BA}$ .                  **B.**  $\overrightarrow{BC}$ .                  **C.**  $\overrightarrow{DC}$ .                  **D.**  $\overrightarrow{AC}$ .

## Lời giải

$$\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DO} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

**Câu 5:** Chọn khẳng định sai:

- A.** Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .



B. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB}$ .

C. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{IB} = \vec{0}$ .

D. Nếu  $I$  là trung điểm đoạn  $AB$  thì  $\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{BI} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

$$\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{BA} \neq \vec{0}.$$

**Câu 6:** Cho 4 điểm bất kỳ  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây là đúng:

A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CO}$ .

**B.**  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$ .

C.  $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ .

D.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .

**Lời giải**

$$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}.$$

**Câu 7:** Cho các điểm phân biệt  $A, B, C, D$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA}$ .

B.  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AD}$ .

C.  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA}$ .

**D.**  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}, \quad \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DB}.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{BC}.$$

**Câu 8:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và điểm  $M$  tùy ý. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ .

B.  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MB}$ .

C.  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MD}$ .

**D.**  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \text{ (đúng)}.$$

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M, N, D$  lần lượt là trung điểm của  $AB, AC, BC$ . Khi đó, các vector đối của vector  $\overrightarrow{DN}$  là:

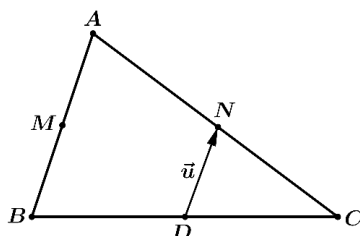
**A.**  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$ .

B.  $\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$ .

C.  $\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{AM}$ .

D.  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{ND}$ .

**Lời giải**



Nhìn hình ta thấy vector đối của vector  $\overrightarrow{DN}$  là:  $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{ND}$ .

**Câu 10:** Cho hình bình hành  $ABCD$  tâm  $O$ . Khi đó  $\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$  bằng

A.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB}$ .

B.  $\overrightarrow{AB}$ .

C.  $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{DO}$ .

D.  $\overrightarrow{CD}$ .

**Lời giải**



Ta có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$  (quy tắc 3 điểm).

**Câu 11:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CB}$ .

B.  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC}$ .

C.  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD}$ .

D.  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$ .

**Câu 12:** Cho Cho lục giác đều  $ABCDEF$  và  $O$  là tâm của nó. Đẳng thức nào dưới đây là đẳng thức **sai**?

A.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{EO} = \vec{0}$ .

B.  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AD}$ .

C.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{EB} - \overrightarrow{OC}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{OA} = 2\overrightarrow{AO} \neq \vec{0}$ .

**Câu 13:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Khi đó  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$  bằng vectơ nào sau đây?

A.  $\vec{0}$ .

B.  $\overrightarrow{BC}$ .

C.  $\overrightarrow{AD}$ .

**D.  $\overrightarrow{CB}$ .**

**Lời giải**

Theo quy tắc trừ hai vectơ ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ .

**Câu 14:** Cho 4 điểm bất kì  $A, B, C, O$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{BA}$ .

**B.  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$ .**

C.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}$ .

**Lời giải**

Theo quy tắc về hiệu hai vectơ ta có  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CO}$  đúng

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và  $AB = 3a, AC = 4a$ . Giá trị  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$  bằng:

**A.  $5a$ .**

B.  $2a$ .

C.  $a$ .

D.  $a\sqrt{5}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = 5a$ .

**Câu 16:** Gọi  $O$  là tâm hình vuông  $ABCD$ . Tính  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$ .

A.  $\overrightarrow{AD}$ .

**B.  $\overrightarrow{DA}$ .**

C.  $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$ .

D.  $\overrightarrow{AB}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$ .

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ ,  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ . Khi đó  $M$  là điểm sao cho

**A.  $MACB$  là hình bình hành.**

B.  $MABC$  là hình bình hành.

C.  $MBAC$  là hình bình hành.

D.  $MCAB$  là hình bình hành.

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BC}$ . Vậy  $M$  là điểm sao cho  $MACB$  là hình bình hành.



**Câu 18:** Cho hình bình hành  $ABCD$ , giao điểm của hai đường chéo là  $O$ . Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

A.  $\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ .

B.  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB}$ .

C.  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ .

D.  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \vec{0}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{DB} \neq \vec{0}$ .

**Câu 19:** Cho hình bình hành  $ABCD$  và  $O$  là một điểm bất kỳ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ .

B.  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC}$ .

C.  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ .

D.  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$ .

**Lời giải**

Ta có khẳng định  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$  đúng vì  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$  (theo tính chất hình bình hành)

**Câu 20:** Cho hai điểm cố định  $A, B$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ . Tập hợp các điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$  là

A. đường tròn đường kính  $AB$ .

B. đường trung trực của  $AB$ .

C. đường tròn tâm  $I$  bán kính  $AB$ .

D. nửa đường tròn đường kính  $AB$ .

**Lời giải**

Dựng hình bình hành  $MADB$ . Ta có  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MD}| = 2MI$

Do đó  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 2MI = BA \Leftrightarrow MI = \frac{AB}{2}$ .

Suy ra  $M$  nằm trên đường tròn đường kính  $AB$ .

**Câu 21:** Tam giác  $ABC$  là tam giác vuông với điều kiện nào sau đây?

A.  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$ .

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .

C.  $|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$ .

D.  $|\overrightarrow{AB}| - |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$

**Lời giải**

Dựng hình bình hành  $ABCD$ . Theo quy tắc hình bình hành:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ , theo quy tắc hiệu hai vector ta có:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$ . Từ  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}|$  tức  $AD = BC$ . Nên hình bình hành  $ABCD$  có hai đường chéo bằng nhau, suy ra nó là hình chữ nhật, tức tam giác  $ABC$  vuông.

**Câu 22:** Cho tam giác đều  $ABC$  có độ dài cạnh bằng 3. Độ dài của vector  $\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$  bằng

A. 3.

B.  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ .

C. 0.

D. 6.

**Lời giải**

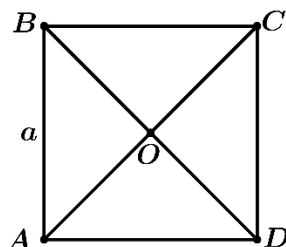
Ta có:  $\vec{x} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB}$  do đó  $|\vec{x}| = |\overrightarrow{CB}| = BC = 3$ .



**Câu 23:** Cho hình vuông  $ABCD$  có cạnh là  $a$ .  $O$  là giao điểm của hai đường chéo. Tính  $|\vec{OA} - \vec{CB}|$ .

- A.  $a\sqrt{3}$ .      B.  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .      C.  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $a\sqrt{2}$ .

**Lời giải**



Ta có:  $|\vec{OA} - \vec{CB}| = |\vec{OA} + \vec{BC}| = |\vec{OA} + \vec{AD}| = |\vec{OD}| = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

**Câu 24:** Cho tam giác vuông cân  $ABC$  với  $AB = AC = a$ . Tính độ dài vector  $\vec{v} = \frac{11}{4}\vec{AB} - \frac{3}{7}\vec{AC}$ .

- A.  $2a$ .      B.  $\frac{\sqrt{6073}}{28}a$ .      C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ .      D.  $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ .

**Lời giải**

Dựng các vector  $\begin{cases} \vec{AD} = \frac{11}{4}\vec{AB} \\ \vec{AE} = \frac{3}{7}\vec{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AD = \frac{11}{4}a \\ AE = \frac{3}{7}a \end{cases}$ .

Ta có  $|\vec{v}| = \left| \frac{11}{4}\vec{AB} - \frac{3}{7}\vec{AC} \right| = |\vec{AD} - \vec{AE}| = |\vec{ED}| = ED$ .

Tam giác vuông tại  $A$ , theo định lý Pytago ta có:

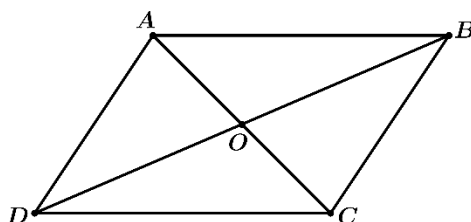
$$ED = \sqrt{AD^2 + AE^2} = \sqrt{\frac{121}{16}a^2 + \frac{9}{49}a^2} = \frac{\sqrt{6073}}{28}a.$$

**Câu 25:** Cho 2 vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  tạo với nhau góc  $60^\circ$ . Biết  $|\vec{a}| = 6; |\vec{b}| = 3$ . Tính  $|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|$

- A.  $3(\sqrt{7} + \sqrt{5})$ .      B.  $3(\sqrt{7} + \sqrt{3})$ .      C.  $6(\sqrt{5} + 3)$ .      D.  $\frac{1}{2}(2\sqrt{3} + \sqrt{51})$ .

**Lời giải**

Dựng hình bình hành  $ABCD$ , với  $\vec{a} = \vec{DA}$ ,  $\vec{b} = \vec{DC}$ .





Ta có:  $AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2.DA.DC.\cos 60^\circ = 6^2 + 3^2 - 2.6.3.\frac{1}{2} = 27$ .

$$DO^2 = \frac{AD^2 + DC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{6^2 + 3^2}{2} - \frac{27}{4} = \frac{63}{4}.$$

$$|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{DA} + \vec{DC}| = |\vec{DB}| = 2DO = 3\sqrt{7}; |\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{DA} - \vec{DC}| = |\vec{CA}| = CA = 3\sqrt{3}.$$

$$\text{Do đó: } |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}| = 3(\sqrt{7} + \sqrt{3}).$$

**Câu 26:** Cho 2 lực  $F_1, F_2$  có cùng điểm đặt tại  $O$  và có cường độ lần lượt bằng  $6N, 8N$ . Tìm cường độ lực tổng hợp của  $F_1, F_2$  biết góc giữa chúng bằng  $90^\circ$ .

A.  $10N$ .

B.  $14N$ .

C.  $10\sqrt{3}N$ .

D.  $8N$ .

**Lời giải**

Dựng  $\vec{OB} = \vec{F}_1, \vec{OD} = \vec{F}_2$ .

Ta có:  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{OB} + \vec{OD} = 2\vec{OI}$  với  $I$  là trung điểm của  $BD$ .

$$\text{Do đó: } |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = 2|\vec{OI}| = 2OI = DB = \sqrt{OB^2 + OD^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10.$$

**Câu 27:** Cho ba lực  $\vec{F}_1 = \vec{MA}, \vec{F}_2 = \vec{MB}, \vec{F}_3 = \vec{MC}$  cùng tác động vào một vật tại điểm  $M$  và vật đứng yên. Cho biết cường độ của  $F_1, F_2$  đều bằng  $100N$  và  $AMB = 60^\circ$ . Khi đó cường độ lực của  $F_3$  là

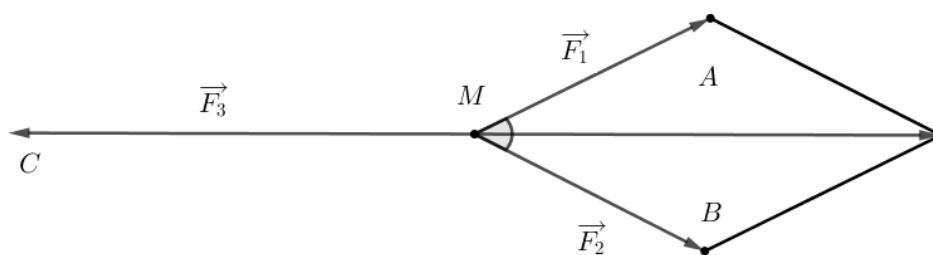
A.  $100N$ .

B.  $200N$ .

C.  $50\sqrt{3}N$ .

D.  $100\sqrt{3}N$ .

**Lời giải**



Vật đứng yên nên  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Leftrightarrow -\vec{F}_3 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$

$$\text{Do đó } |\vec{F}_3| = |-\vec{F}_3| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2| = MC = 100\sqrt{3}(N).$$



**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho  $\Delta ABC$  đều cạnh  $a$ , với  $I$  là trung điểm cạnh  $AC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{CI}$

b)  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}$

c)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$

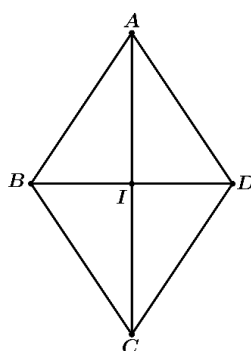
d) Điểm  $M$  thỏa mãn đẳng thức  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IC}$  là một đỉnh của hình bình hành  $ABCM$ .

**Lời giải**

a) Đúng: Ta có  $I$  là trung điểm cạnh  $AC$  suy ra  $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CI}$  ngược hướng và cùng độ dài.

b) Sai: Ta có  $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC}$ .

c) Đúng: Ta có  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AI = 2a \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$



d) Đúng:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IM} = \overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$  nên  $M$  là một đỉnh của hình bình hành  $ABCM$ .

**Câu 2:** Cho hình thoi  $ABCD$  tâm  $H$  có cạnh bằng  $a$  và  $ABC = 60^\circ$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

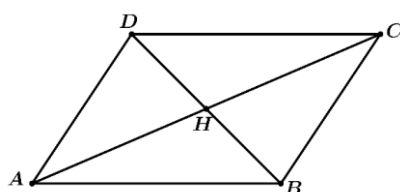
a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$

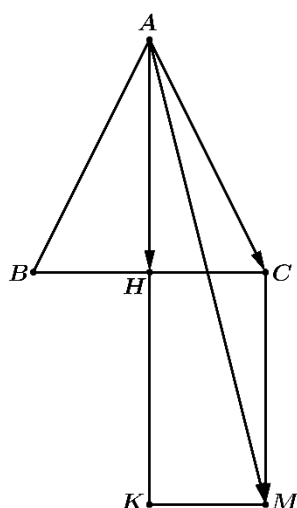
b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

c)  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AD}$

d)  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}| = a\sqrt{13}$

**Lời giải**





Dựng  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AH} \Rightarrow AHMC$  là hình bình hành  $\Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AM} \Rightarrow |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}| = AM$ .

Gọi  $K$  đối xứng với  $A$  qua  $BC \Rightarrow \triangle AKM$  vuông tại  $K$ .

$$AK = 2AH = a\sqrt{3}; KM = CH = \frac{a}{2}; AM = \sqrt{AK^2 + KM^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2}.$$

a) Đúng:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  là quy tắc hình bình hành.

b) Đúng:  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$  là quy tắc trừ.

c) Sai: Ta có  $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{DA}$ .

d) Sai:  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AH}| = \frac{a\sqrt{13}}{2}$

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

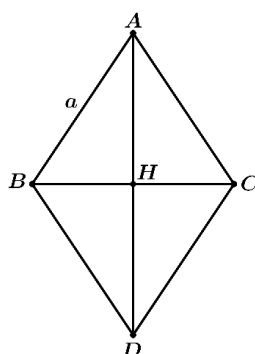
a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ .

b)  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ .

c)  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = 0$ .

d)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = a\sqrt{3}$ .

**Lời giải**





a) Sai:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

b) Đúng:  $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

c) Sai: Ta có  $|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = CB = a$ .

d) Đúng: Gọi  $H$  là trung điểm của cạnh  $BC$  và  $D$  là điểm đối xứng với  $A$  qua  $H$ .

Vì tứ giác  $ABDC$  có hai đường chéo  $AD$  và  $BC$  cắt nhau tại trung điểm mỗi đường nên  $ABDC$  là hình bình hành. Mà  $AB = AC$  (vì tam giác  $ABC$  đều) nên  $ABDC$  là hình thoi.

Áp dụng quy tắc hình bình hành trong hình thoi  $ABDC$  ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ .

Do đó  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = AD = 2AH$ .

Đường trung tuyến  $AH$  của tam giác đều  $ABC$  cũng là đường cao nên  $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

Suy ra  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = 2AH = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

**Câu 4:** Cho  $O$  là tâm hình bình hành  $ABCD$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

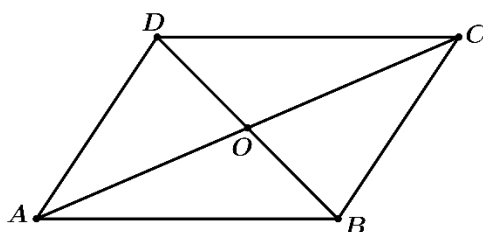
a)  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$

b)  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$

c)  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}$

d)  $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$

**Lời giải**



a) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$ .

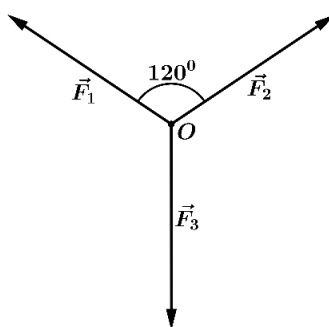
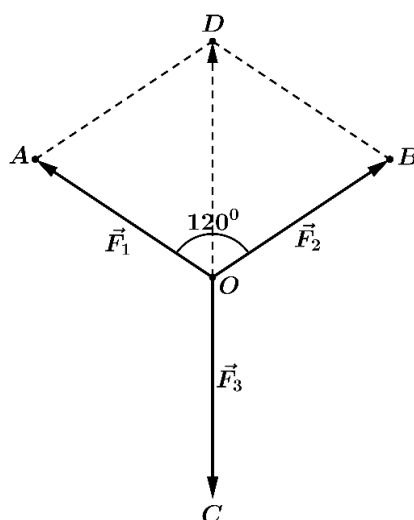
b) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DB}$ .

c) Sai: Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AD} \end{cases}$ .

d) Đúng: Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Trên hình biểu diễn ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  cùng tác động vào một vật ở vị trí cân bằng  $O$ . Cho biết cường độ của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  đều bằng  $100N$  và góc tạo bởi  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$  bằng  $120^\circ$ . Tính cường độ lực  $\vec{F}_3$ .

**Lời giải**

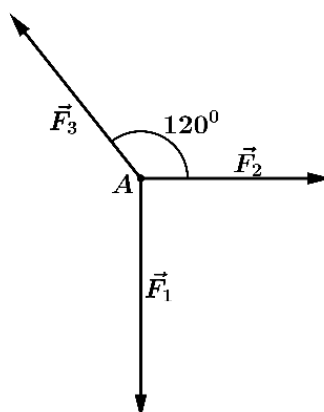
Ta sử dụng các vec tơ  $\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OD}$  lần lượt biểu diễn các lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  và hợp lực  $\vec{F}$  của  $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ .

Khi đó  $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2, |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = 100$  nên tứ giác  $AOBD$  là hình thoi.

Từ đó ta có  $\angle OAD = 60^\circ \Rightarrow \triangle AOD$  đều  $\Rightarrow |\vec{F}| = OD = OA = 100$ .

Do vật ở vị trí cân bằng nên hai lực  $\vec{F}, \vec{F}_3$  ngược hướng và có cùng cường độ  $\Rightarrow |\vec{F}_3| = 100(N)$

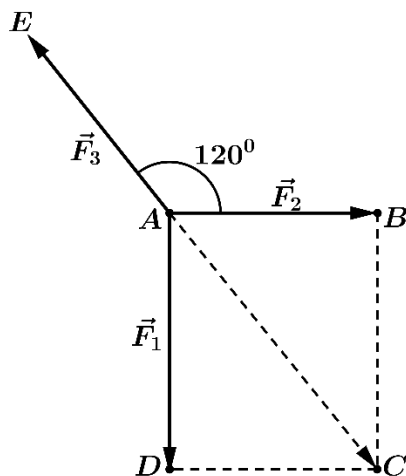
**Câu 2:** Chất điểm  $A$  chịu tác động của ba lực  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$  như hình vẽ





và ở trạng thái cân bằng (tức là  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ ). Tính độ lớn của lực  $\vec{F}_3$  biết  $\vec{F}_1$  có độ lớn bằng  $20N$  (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

**Lời giải**



Đặt  $\vec{u} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ . Dựng hình bình hành  $ABCD$  như hình vẽ  $\Rightarrow \vec{u} = \vec{AC}$

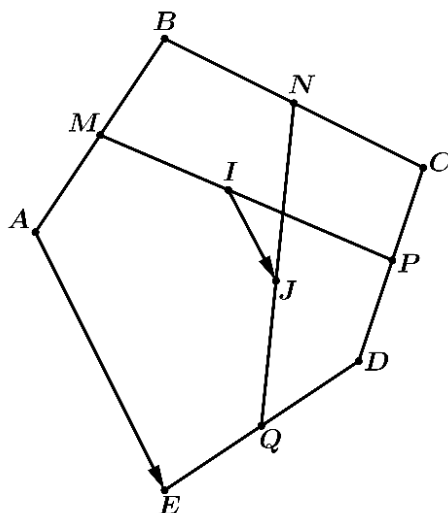
Vì chất điểm  $A$  ở trạng thái cân bằng nên  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} + \vec{AC} = \vec{0}$  nên hai vector  $\vec{u}, \vec{AC}$  là hai vector đối nhau.

Ta có  $|\vec{F}_1| = AD = 20, |\vec{F}_2| = AB, |\vec{F}_3| = AC$

Lại có  $CAB = 180^\circ - EAB = 60^\circ \Rightarrow CAD = 30^\circ \Rightarrow AC = \frac{AD}{\cos 30^\circ} = \frac{40\sqrt{3}}{3} \approx 23 \Rightarrow |\vec{F}_3| = 23$

**Câu 3:** Cho ngũ giác  $ABCDE$ . Gọi  $M, N, P, Q$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CD, DE$ . Gọi  $I$  và  $J$  lần lượt là trung điểm các đoạn  $MP$  và  $NQ$ . Biết rằng  $\vec{IJ} = \frac{a}{b} \vec{AE}$  ( $a, b \in \mathbb{N}$ ),  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $a + b$ .

**Lời giải**



Ta có:  $2\vec{IJ} = \vec{IQ} + \vec{IN} = \vec{IM} + \vec{MQ} + \vec{IP} + \vec{PN} = \vec{MQ} + \vec{PN}$

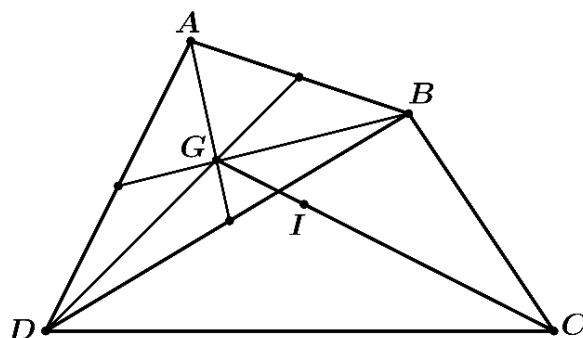
$$\begin{cases} \vec{MQ} = \vec{MA} + \vec{AE} + \vec{EQ} \\ \vec{MQ} = \vec{MB} + \vec{BD} + \vec{DQ} \end{cases} \Rightarrow 2\vec{MQ} = \vec{AE} + \vec{BD} \Leftrightarrow \vec{MQ} = \frac{1}{2}(\vec{AE} + \vec{BD}), \vec{PN} = -\frac{1}{2}\vec{BD}$$



Suy ra:  $2\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{1}{4} \Rightarrow a + b = 5.$

**Câu 4:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$ ,  $I$  là điểm trên  $GC$  sao cho  $IC = 3IG$ . Với mọi điểm  $M$  ta luôn có  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = x\overrightarrow{MI}$ . Tính  $3x + 2024$ .

**Lời giải**



Ta có:  $3\overrightarrow{IG} = -\overrightarrow{IC}.$

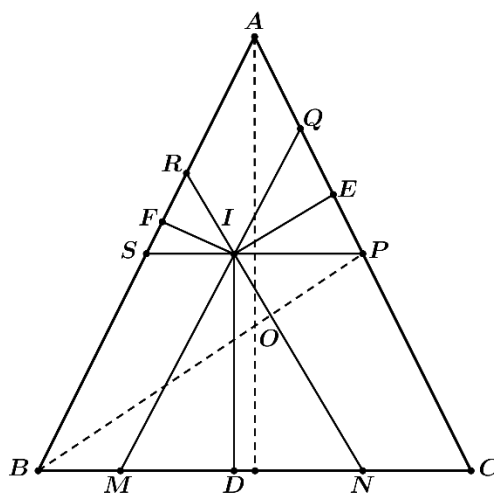
Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABD$  nên

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 3\overrightarrow{IG} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IC} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó: } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID} \\ &= 4\overrightarrow{MI} + (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = 4\overrightarrow{MI} + \vec{0} = 4\overrightarrow{MI} \Rightarrow x = 3 \Rightarrow 3x + 2024 = 2036 \end{aligned}$$

**Câu 5:** Cho tam giác đều  $ABC$  có tâm  $O$ . Gọi  $I$  là một điểm tùy ý bên trong tam giác  $ABC$ . Hạ  $ID, IE, IF$  tương ứng vuông góc với  $BC, CA, AB$ . Giả sử  $\overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \frac{a}{b}\overrightarrow{IO}$  (với  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản). Tính  $a + b$ .

**Lời giải.**



Qua điểm  $I$  dựng các đoạn  $MQ \parallel AB, PS \parallel BC, NR \parallel CA$ .

Vì  $ABC$  là tam giác đều nên các tam giác  $IMN, IPQ, IRS$  cũng là tam giác đều.

Suy ra  $D, E, F$  lần lượt là trung điểm của  $MN, PQ, RS$ .



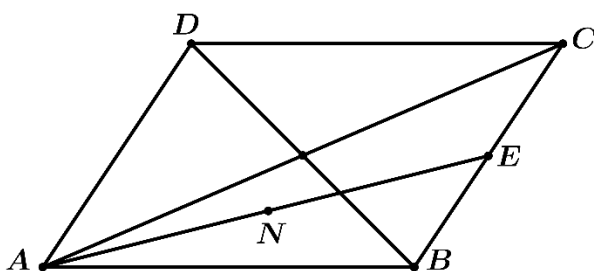
$$\text{Khi đó: } \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{IE} + \overrightarrow{IF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{IR} + \overrightarrow{IS})$$

$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{IQ} + \overrightarrow{IR}) + (\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IS}) + (\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IP})] = \frac{1}{2}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 3\overrightarrow{IO} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IO} \Rightarrow a = 3, b = 2. \text{ Do đó: } a + b = 5.$$

**Câu 6:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $E, N$  lần lượt là trung điểm của  $BC, AE$ . Biết  $p$  và  $q$  thỏa mãn  $\overrightarrow{DN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$ . Tính  $p + q$ .

**Lời giải**



$$\text{Ta có: } \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{CB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Vậy } p = \frac{5}{4}, q = -\frac{3}{4} \Rightarrow p + q = \frac{1}{2} = 0,5$$

-----HẾT-----



## BÀI

## 03

## TÍCH CỦA MỘT VECTO' VỚI MỘT SỐ

## A

## LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

## 1 Tích của một vectơ với một số

Tích của một vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số thực  $k > 0$  là một vectơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , cùng hướng với  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $k|\vec{a}|$ .

Tích của một vectơ  $\vec{a} \neq \vec{0}$  với một số thực  $k < 0$  là một vectơ, kí hiệu là  $k\vec{a}$ , ngược hướng với  $\vec{a}$  và có độ dài bằng  $(-k)|\vec{a}|$ .

**Chú ý:** Ta quy ước  $k\vec{a} = \vec{0}$  nếu  $\vec{a} = \vec{0}$  hoặc  $k = 0$ .

**Nhận xét:** Vectơ  $k\vec{a}$  có độ dài bằng  $|k||\vec{a}|$  và cùng hướng với  $\vec{a}$  nếu  $k \geq 0$ , ngược hướng  $\vec{a}$  nếu  $\vec{a} \neq \vec{0}$  và  $k < 0$ .

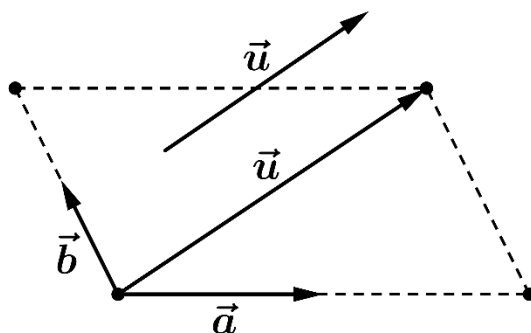
## 2 Các tính chất của phép nhân vectơ với một số

Với hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  và hai số thực  $k, t$ , ta luôn có:

- $k(t\vec{a}) = (kt)\vec{a}$
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}; k(\vec{a} - \vec{b}) = k\vec{a} - k\vec{b}$
- $(k + t)\vec{a} = k\vec{a} + t\vec{a}$
- $1\vec{a} = \vec{a}; (-1)\vec{a} = -\vec{a}$ .

**Nhận xét:**

- Điểm  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AB$  khi và chỉ khi  $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ .
- Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  khi và chỉ khi  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$ .



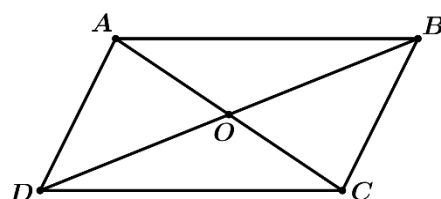
**Chú ý:** Mọi vectơ  $\vec{u}$  đều biểu thị (phân tích) được một cách duy nhất theo hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ , nghĩa là có duy nhất cặp số  $(x; y)$  sao cho  $\vec{u} = x\vec{a} + y\vec{b}$ .

**B** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**Dạng 1: Xác định tích của một vectơ với một số****Phương pháp:**

- Sử dụng khái niệm tích của vectơ với một số
- Sử dụng tính chất tích vectơ với một số
- Sử dụng quy tắc trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác.

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $O$  là giao điểm của  $AC, BD$  và  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Tìm vectơ trong các trường hợp sau:



a)  $2\overrightarrow{AO}$

b)  $-\frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$

c)  $2\overrightarrow{AM}$

d)  $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$

**Lời giải**

a) Vì  $O$  là giao điểm giữa  $AC, BD$  nên  $O$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow 2\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AC}$ .

b) Vì  $O$  là giao điểm giữa  $AC, BD$  nên  $O$  là trung điểm của  $BD \Rightarrow -\frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BO}$

c) Vì  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên  $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}$ .

d) Vì  $M$  là trung điểm của  $AB$  nên  $\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BM}$ .

**Bài tập 2:** Thực hiện các phép toán sau:

a)  $2(\vec{u} + \vec{v})$

b)  $(a - b)\vec{m}$

c)  $7(-3\vec{c})$

d)  $\vec{c} + 7\vec{c}$

e)  $9\vec{c} - 7\vec{c}$

f)  $-3(\vec{u} - \vec{v})$

g)  $(2a + b)\vec{n}$

h)  $-3\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right)$

i)  $2\vec{a} + 7\vec{a}$

j)  $3\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b}$

**Lời giải**

a)  $2(\vec{u} + \vec{v}) = 2\vec{u} + 2\vec{v}$

b)  $(a - b)\vec{m} = a\vec{m} - b\vec{m}$

c)  $7(-3\vec{c}) = -21\vec{c}$



d)  $\vec{c} + 7\vec{c} = 8\vec{c}$

e)  $9\vec{c} - 7\vec{c} = (9-7)\vec{c} = 2\vec{c}$  f)  $-3(\vec{u} - \vec{v}) = -3\vec{u} + 3\vec{v}$

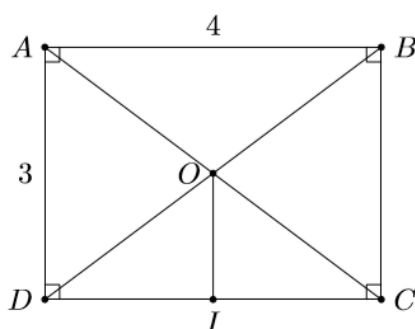
g)  $(2a+b)\vec{n} = 2a\vec{n} + b\vec{n}$

h)  $-3\left(\frac{2}{3}\vec{c}\right) = \left(-3 \cdot \frac{2}{3}\right)\vec{c} = -2\vec{c}$  i)  $2\vec{a} + 7\vec{a} = 9\vec{a}$

j)  $3\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{b} = \left(3 - \frac{1}{3}\right)\vec{b} = \frac{8}{3}\vec{b}.$

**Bài tập 3:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  tâm  $O$  có  $AB = 4, AD = 3$ . Tính  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$

**Lời giải**



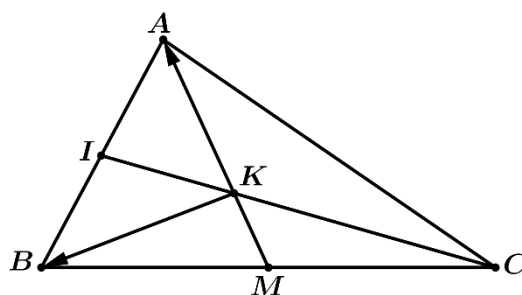
Gọi  $I$  là trung điểm của  $DC$  thì ta có  $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = |2\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD}| = |2(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})| = 2|\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}|$   
 $\Rightarrow |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = 2|2\overrightarrow{OI}| = 4OI = 2BC = 2 \cdot 3 = 6.$

**Bài tập 4:** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Tìm điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB}$

b) Tìm điểm  $M$  sao cho  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$

**Lời giải**



a) Ta có:  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{KB} - \overrightarrow{KC} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = \vec{0}$

$\Rightarrow K$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

b) Gọi  $I$  là trung điểm của  $AB$ .

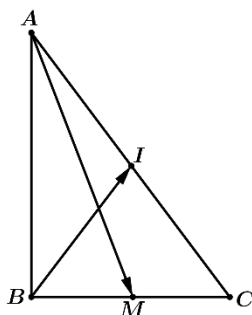
Ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Rightarrow M$  là trung điểm của  $IC$ .

**Bài tập 5:** Cho  $\Delta ABC$  vuông tại  $B$  có  $A = 30^\circ$ ,  $AB = a$ . Gọi  $I$  là trung điểm của  $AC$ . Hãy tính:

a)  $|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}|$

b)  $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$

**Lời giải**

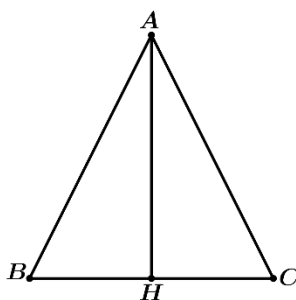


Ta có:  $BC = AB \tan A = a \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ,  $AC = \frac{AB}{\cos A} = \frac{a}{\cos 30^\circ} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$$\text{a) } |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}| = |2\overrightarrow{BI}| = 2|\overrightarrow{BI}| = 2BI = 2 \cdot \frac{AC}{2} = AC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{b) } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AM}| = 2|\overrightarrow{AM}| = 2AM = 2\sqrt{AB^2 + BM^2} = 2\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2} = \frac{a\sqrt{39}}{3}.$$

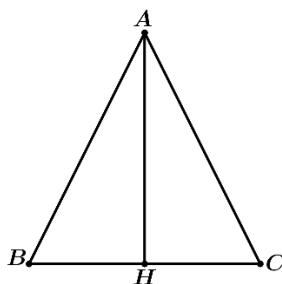
**Bài tập 6:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính



$$\text{a) } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}|$$

$$\text{b) } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}|$$

**Lời giải**



$$\text{a) } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}| = |(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AC}| = 2|\overrightarrow{AC}| = 2AC = 2a.$$

b) Gọi  $H$  là trung điểm của  $BC$ .

$$\text{Ta có: } |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2|\overrightarrow{AH}| = 2AH = 2\sqrt{AB^2 - BH^2} = 2\sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = a\sqrt{3}$$

**Bài tập 7:** Cho tam giác  $ABC$ .

a) Hãy xác định điểm  $M$  để  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$ , ta có  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = 4\overrightarrow{OM}$ .



## Lời giải

$$a) \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA} = -(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$$

$$b) \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{OM}.$$

**Bài tập 8:** Cho hai điểm phân biệt  $A$  và  $B$ .

a) Hãy xác định điểm  $K$  sao cho  $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ .

b) Chứng minh rằng với mọi điểm  $O$  ta luôn có  $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ .

## Lời giải

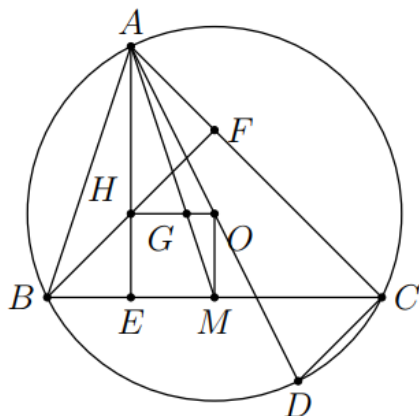
$$a) \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} + 2(\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$b) \text{Ta có: } \overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$$

$$\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}) = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{KA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK} + \frac{1}{3}(-2\overrightarrow{KB}) + \frac{2}{3}\overrightarrow{KB} = \overrightarrow{OK}$$

**Bài tập 9:** Cho tam giác  $ABC$  với  $H$ ,  $O$ ,  $G$  lần lượt là trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp và trọng tâm của tam giác. Chứng minh  $\overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ .

## Lời giải



Gọi  $D$  là điểm đối xứng của  $A$  qua  $O$  nên ta có  $BH \parallel DC$  (cùng vuông góc với  $AC$ ) (1)

Mặt khác  $CH \parallel BD$  (cùng vuông góc với  $AB$ ) (2)

Từ (1) và (2) suy ra tứ giác  $BHCD$  là hình bình hành

Vậy ba điểm  $H$ ,  $M$ ,  $D$  thẳng hàng  $\Rightarrow \overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$ .

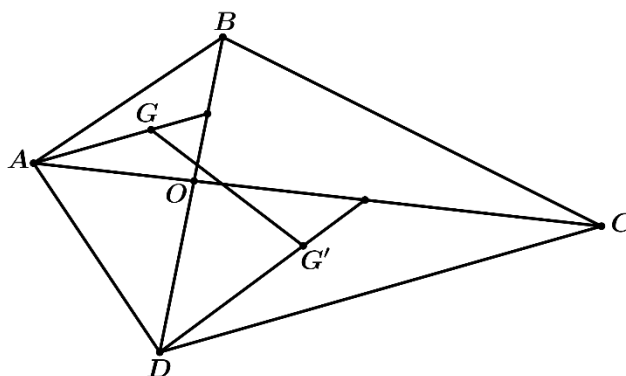
Ta có  $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ .

Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = 3\overrightarrow{OG}$ .



**Bài tập 10:** Cho tứ giác  $ABCD$ ,  $O$  là giao điểm của hai đường chéo  $AC$  và  $BD$ . Gọi  $G$ ,  $G'$  theo thứ tự là trọng tâm của tam giác  $OAB$  và  $OCD$ . Chứng minh rằng  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$ .

**Lời giải**



Vì  $G'$  là trọng tâm của tam giác  $OCD$  nên ta có:  $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$  (1)

Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $OAB$  nên ta có  $\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{GO} = -(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$  (2)

Từ (1) và (2)  $\Rightarrow \overrightarrow{GG'} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GD} - \overrightarrow{GB}) = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}) \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{GG'}$



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho đoạn thẳng  $AB$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Đẳng thức vector nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MA}$ .      B.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ .      C.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BM}$ .

**Lời giải**

Ta có  $AM = \frac{1}{2}AB$  mà  $\overrightarrow{AM}$  và  $\overrightarrow{AB}$  cùng hướng  $\Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ .

**Câu 2:** Đẳng thức nào sau đây mô tả **đúng** hình vẽ bên



- A.  $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AI}$ .      B.  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{IA}$ .      C.  $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AI}$ .

**Lời giải**

Ta có  $AB = 3AI$  mà  $\overrightarrow{AI}$  và  $\overrightarrow{AB}$  ngược hướng  $\Rightarrow \overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AI}$ .

**Câu 3:** Cho  $\vec{a} = k\vec{b}$ . Đẳng thức vector nào sau đây **đúng**?

- A.  $|\vec{a}| = k|\vec{b}|$ .      B.  $|\vec{a}| = |k||\vec{b}|$ .      C.  $|\vec{a}| = -k|\vec{b}|$ .      D.  $\vec{a} = |k|\vec{b}$ .

**Lời giải**

Theo định nghĩa ta có  $|\vec{a}| = |k||\vec{b}|$

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$ .      B.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA}$ .      C.  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$ .      D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AM}$ .

**Lời giải**

Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên ta có:  $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GM}$ .

**Câu 5:** Cho vector  $\vec{b} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{a} = -3\vec{b}$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  ngược hướng.      B.  $|\vec{a}| = 3|\vec{b}|$ .  
C. Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.      D. Hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng hướng.

**Lời giải**

Ta có  $\vec{a} = -3\vec{b}$  nên hai vector  $\vec{b}$  và  $\vec{a}$  ngược hướng.

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$  và  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .      B.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .  
C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$ .      D.  $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$ .

**Lời giải**

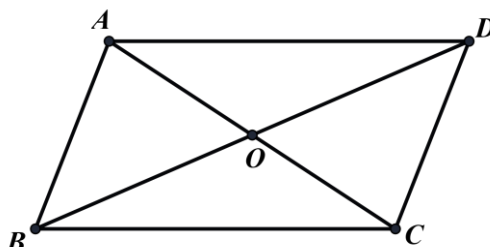


Điểm  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .

**Câu 7:** Gọi  $O$  là giao điểm hai đường chéo  $AC$  và  $BD$  của hình bình hành  $ABCD$ . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BO}$ .    B.  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ .    C.  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CO}$ .    D.  $\overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{OB}$ .

Lời giải



Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \neq 2\overrightarrow{BO}$  suy ra sai.

Ta có  $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CO}$

**Câu 8:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Tổng các vectơ  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}$  là

- A.  $2\overrightarrow{BD}$ .    B.  $2\overrightarrow{AC}$ .    C.  $\overrightarrow{DB}$ .    D.  $3\overrightarrow{AB}$ .

Lời giải

Do hình bình hành  $ABCD$  nên ta có  $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BD}$ .

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$ , gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- A.  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ .    B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .  
C.  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ .    D.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ .

Lời giải

Do  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên ta có:

$$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).$$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$  thỏa mãn  $BM = 2MC$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ .    B.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .  
C.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .    D.  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ .

Lời giải

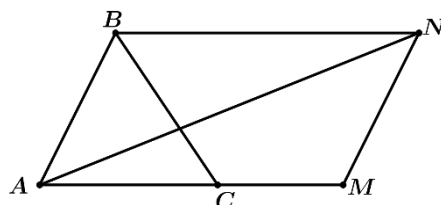
Do điểm  $M$  thuộc cạnh  $BC$  thỏa mãn  $BM = 2MC$  nên ta có:

$$\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM} + 2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

**Câu 11:** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Tính độ dài của vectơ  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$ .

- A.  $a\sqrt{7}$ .    B.  $a\sqrt{3}$ .    C.  $3a$ .    D.  $a\sqrt{5}$ .

Lời giải



Dựng điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AC}$ .

Dựng hình bình hành  $ABNM$  nên khi đó  $\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$

Dựng điểm  $M$  thỏa mãn  $AN^2 = AB^2 + BN^2 - 2 \cdot AB \cdot BN \cdot \cos 120^\circ = 7a^2 \Rightarrow AN = a\sqrt{7}$

Suy ra  $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}| = a\sqrt{7}$ .

**Câu 12:** Biết rằng hai vec tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  không cùng phương nhưng hai vec tơ  $2\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x+1)\vec{b}$  cùng phương. Khi đó giá trị của  $x$  là

**A.**  $\frac{1}{2}$ .

**B.**  $-\frac{3}{2}$ .

**C.**  $-\frac{1}{2}$ .

**D.**  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có  $2\vec{a} + 3\vec{b}$  và  $\vec{a} + (x+1)\vec{b}$  cùng phương nên có tỉ lệ:  $\frac{1}{2} = \frac{x+1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$ .

**Câu 13:** Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ ,  $AB = a$ . Độ dài vector  $4\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$  bằng:

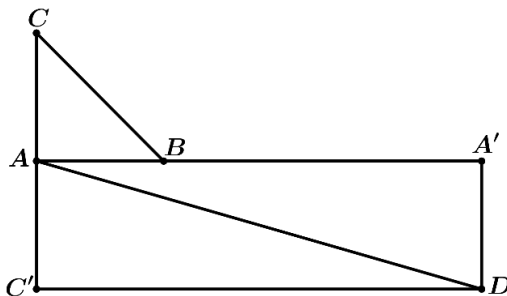
**A.**  $a\sqrt{15}$ .

**B.**  $3a$ .

**C.**  $4a$ .

**D.**  $a\sqrt{17}$ .

**Lời giải**



Vẽ  $\overrightarrow{AB'} = 4\overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AC'} = -\overrightarrow{AC}$  và hình bình hành  $AC'DB'$

Ta có:  $|\overrightarrow{4AB} - \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AC'}| = |\overrightarrow{AD}| = AD$

Do đó:  $AD = \sqrt{AB'^2 + AC'^2} = \sqrt{16a^2 + a^2} = a\sqrt{17}$ .

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm  $AB$ , điểm  $N$  thuộc cạnh  $BC$  sao cho  $BN = 3NC$ . Gọi  $I$  là giao điểm của  $AN, CM$ . Đẳng thức nào sau đây **đúng**?

**A.**  $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IN}$ .

**B.**  $\overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{IN}$ .

**C.**  $\overrightarrow{AN} = 4\overrightarrow{IN}$ .

**D.**  $\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{IN}$ .

**Lời giải**

Gọi  $P \in BC$  thỏa mãn  $MP \parallel AN$ .

Xét  $\triangle CMP$  ta có:  $\begin{cases} IN \parallel MP \\ CN = \frac{2}{5}CP \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MP} \quad (1)$



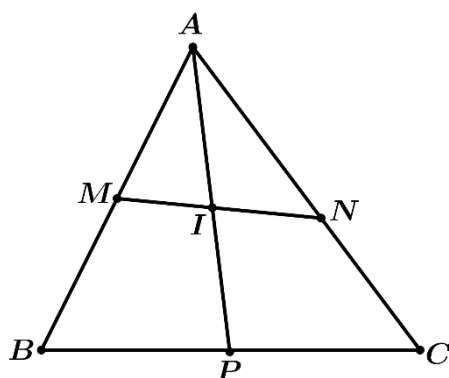
Xét  $\triangle ABN$  ta có: 
$$\begin{cases} MP \parallel AN \\ BM = \frac{1}{2}AB \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\overrightarrow{IN} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{IN}$ .

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  có  $M$  là trung điểm  $AB$ ,  $N$  thuộc cạnh  $AC$  thỏa mãn  $AN = 2NC$ ,  $P$  thuộc đường thẳng  $BC$  sao cho  $AP$  cắt  $MN$  tại trung điểm  $I$  của  $MN$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.**  $\overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$ .      **B.**  $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$ .      **C.**  $\overrightarrow{CP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{CB}$ .      **D.**  $\overrightarrow{CP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải**



Đặt  $\overrightarrow{BP} = x\overrightarrow{BC}$ .

Ta có  $I$  là trung điểm  $MN \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + x(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} \quad (2)$

Ta có  $A, I, P$  thẳng hàng nên  $\frac{1-x}{\frac{1}{4}} = \frac{x}{\frac{1}{3}} \Rightarrow x = \frac{4}{7} \Rightarrow \overrightarrow{BP} = \frac{4}{7}\overrightarrow{BC}$ .

**Câu 16:** Cho vector  $\vec{a} \neq \vec{0}$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** Khi  $k < 0$  hai vector  $\vec{a}, k\vec{a}$  luôn cùng hướng  
**B.** Hai vector  $\vec{a}, k\vec{a}$  không cùng phương  $\forall k \in \mathbb{R}$ .  
**C.** Hai vector  $\vec{a}, k\vec{a}$  có độ dài bằng nhau  $\forall k \in \mathbb{R}$ .  
**D.** Khi  $k < 0$  hai vector  $\vec{a}, k\vec{a}$  luôn ngược hướng.

**Lời giải**

Khi  $k < 0$  hai vector  $\vec{a}, k\vec{a}$  luôn ngược hướng.

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $M$  và  $N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $AC$ . Khẳng định nào sau đây sai?

- A.**  $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AM}$ .      **B.**  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{NC}$ .      **C.**  $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{MN}$ .      **D.**  $\overrightarrow{CN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{MN}$ .



**Câu 18:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

A.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$ .

B.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AC}$ .

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AC}$ .

D.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

Theo quy tắc hình bình hành ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AC}$

**Câu 19:** Cho tam giác  $ABC$  có trung tuyến  $AM$ . Gọi  $I$  là trung điểm  $AM$ . Đẳng thức nào sau đây đúng?

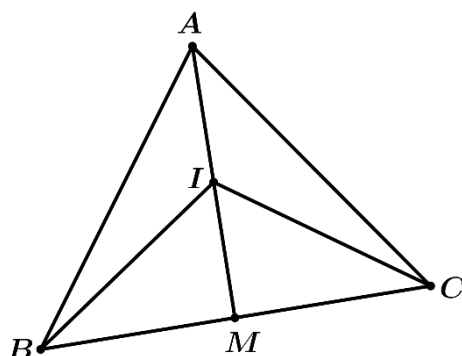
A.  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

B.  $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ .

C.  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 4\overrightarrow{IA}$ .

D.  $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \overrightarrow{IA}$ .

**Lời giải**



Ta có:  $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{IA} + (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 2\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IM} = 2(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IM}) = \vec{0}$

**Câu 20:** Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AD, BC$  của tứ giác  $ABCD$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

A.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{MN}$ .

B.  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

C.  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{MN}$ .

D.  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MN}$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}) + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BN}) \\ &= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}) + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MD}) + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{BN}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} + \vec{0} + \vec{0} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB}. \end{aligned}$$

**Câu 21:** Cho ba điểm  $M, N, P$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MP}$ . Với điểm  $O$  bất kì, đẳng thức nào dưới đây đúng?

A.  $\overrightarrow{OM} = -\frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$ .

B.  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} - 2\overrightarrow{OP})$ .

C.  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$ .

D.  $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP})$ .

**Lời giải**

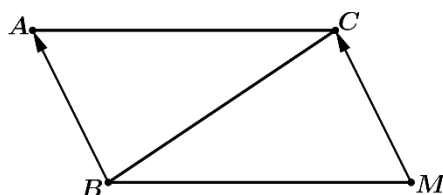
Ta có  $\overrightarrow{MN} = -2\overrightarrow{MP} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MP} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{PM} = \vec{0}$ .

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{OM}) = \frac{1}{3}[(\overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NM}) + 2(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM})] = \frac{1}{3}[(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}) + (\overrightarrow{NM} + 2\overrightarrow{PM})] \\ &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{ON} + 2\overrightarrow{OP}). \end{aligned}$$



- Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ . Nếu điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$  thì ta có
- A.**  $ABMC$  là hình bình hành.      **B.**  $ABCM$  là hình bình hành.  
**C.**  $M$  là trung điểm  $BC$ .      **D.**  $M$  là trung điểm  $AB$ .

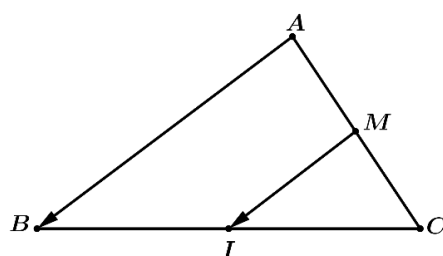
**Lời giải**



Ta có:  $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow ABMC$  là hình bình hành.

- Câu 23:** Cho tam giác  $ABC$  và điểm  $M$  thỏa mãn  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ . Tìm vị trí điểm  $M$ .
- A.**  $M$  là trung điểm của  $AC$ .  
**B.**  $M$  là trung điểm của  $AB$ .  
**C.**  $M$  là trung điểm của  $BC$ .  
**D.**  $M$  là điểm thứ tư của hình bình hành  $ABCM$ .

**Lời giải**



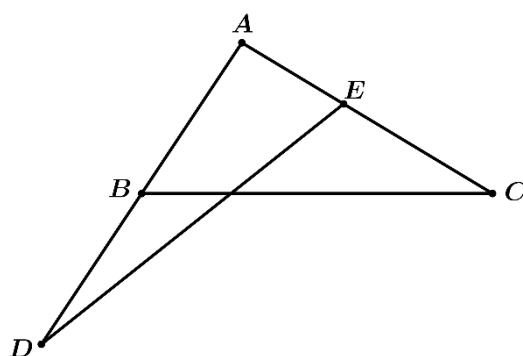
$\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{MI} = \overrightarrow{AB}$  (với  $I$  là trung điểm của  $BC$ ).

$\Leftrightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \Rightarrow M$  là trung điểm của  $AC$ .

- Câu 24:** Cho tam giác  $ABC$ . Lấy điểm  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $B$  và lấy điểm  $E$  trên đoạn  $AC$  sao cho  $3AE = 2EC$ . Nếu  $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$  thì giá trị  $m.n$  là

- A.**  $m.n = -\frac{2}{5}$ .      **B.**  $m.n = -\frac{4}{5}$ .      **C.**  $m.n = \frac{4}{5}$ .      **D.**  $m.n = \frac{2}{5}$ .

**Lời giải**



Ta có  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \Rightarrow m = -2, n = \frac{2}{5} \Rightarrow m.n = -\frac{4}{5}$ .



**Câu 25:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có hai cạnh  $AB = a, BC = 2a$ . Khi đó  $|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}|$  bằng

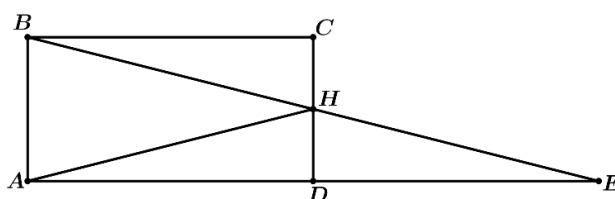
**A.**  $a\sqrt{17}$ .

**B.**  $5a$ .

**C.**  $3a$ .

**D.**  $2\sqrt{2}a$ .

**Lời giải**



$$|\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}| = |2\overrightarrow{AH}| = 2AH = BE = \sqrt{AB^2 + AE^2} = \sqrt{a^2 + 16a^2} = a\sqrt{17}.$$

**Câu 26:** Cho  $AD$  và  $BE$  là hai phân giác trong của tam giác  $ABC$ . Biết  $AB = 4, BC = 5$  và  $CA = 6$ . Khi đó  $\overrightarrow{DE}$  bằng

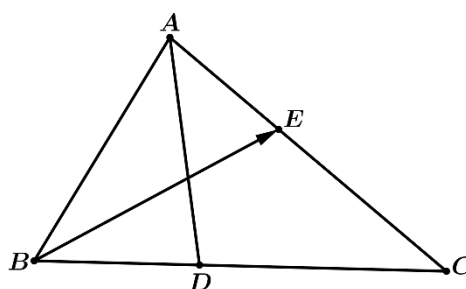
**A.**  $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ .

**B.**  $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$ .

**C.**  $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ .

**D.**  $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$ .

**Lời giải**



Ta có  $AD$  là phân giác trong của tam giác  $ABC$  nên  $\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{CD}{CD + BD} = \frac{6}{6 + 4} = \frac{3}{5}$ .

$$\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{3}{5} \Rightarrow \overrightarrow{CD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}.$$

Tương tự  $\frac{CE}{CA} = \frac{5}{9} \Rightarrow \overrightarrow{CE} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA}$  nên  $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CD} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$ .

**Câu 27:** Cho hình thang  $ABCD$  có 2 đáy là  $AB = a$  và  $CD = 2a$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AD$  và  $BC$ . Khi đó  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MN}|$  bằng

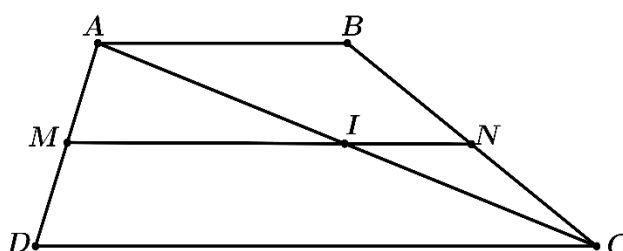
**A.**  $\frac{a}{2}$ .

**B.**  $\frac{3a}{2}$ .

**C.**  $2a$ .

**D.**  $3a$ .

**Lời giải**





Gọi  $I$  là trung điểm  $AC$ . Khi đó  $MI$  là đường trung bình của tam giác  $ACD \Rightarrow MI = \frac{CD}{2} = a$

$MN$  là đường trung bình của hình thang  $ABCD$

$$\Rightarrow MN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{a + 2a}{2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow \overline{MI} = \frac{2}{3} \overline{MN}.$$

$$\left| (\overline{MA} + \overline{MC}) - \overline{MN} \right| = \left| 2\overline{MI} - \overline{MN} \right| = \left| 2 \cdot \frac{2}{3} \overline{MN} - \overline{MN} \right| = \left| \frac{1}{3} \overline{MN} \right| = \frac{1}{3} MN = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{a}{2}.$$

**Câu 28:** Cho tam giác  $ABC$ ,  $I, J, K$  lần lượt là các điểm thỏa  $\overline{BI} = \frac{1}{3} \overline{BC}$ ;  $\overline{CJ} = \frac{1}{3} \overline{CA}$ ;  $\overline{AK} = \frac{1}{3} \overline{AB}$ . Khi đó phát biểu nào dưới đây là phát biểu **sai**?

**A.**  $\overline{IK} = -\frac{1}{3} \overline{AC} - \frac{1}{3} \overline{AB}.$

**B.** Hai tam giác  $ABC$  và  $IJK$  có cùng trọng tâm.

**C.**  $\overline{IC} + \overline{JA} + \overline{KB} = \vec{0}.$

**D.**  $\overline{BK} = -\frac{2}{3} \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AC}$

**Lời giải**

Ta có:  $\overline{AK} = \frac{1}{3} \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} + \overline{BK} = \frac{1}{3} \overline{AB} \Rightarrow \overline{BK} = -\frac{2}{3} \overline{AB}$

Ta có:  $\overline{IK} = \overline{BK} - \overline{BI} = -\frac{2}{3} \overline{AB} - \frac{1}{3} \overline{BC} = -\frac{1}{3} \overline{AC} - \frac{1}{3} \overline{AB}$  (đúng)

Ta có:  $\overline{IC} + \overline{JA} + \overline{KB} = \overline{IB} + \overline{BC} + \overline{JC} + \overline{CA} + \overline{KA} + \overline{AB} = \overline{IB} + \overline{JC} + \overline{KA}$

$= -\frac{1}{3} \overline{BC} - \frac{1}{3} \overline{CA} - \frac{1}{3} \overline{AB} = \vec{0}$  (đúng)

Gọi  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm của hai tam giác  $ABC$  và  $IJK$ .

Suy ra  $\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0}$  và  $\overline{IG'} + \overline{JG'} + \overline{KG'} = \vec{0}$

Ta có:  $\overline{IC} + \overline{JA} + \overline{KB} = \vec{0} \Rightarrow \overline{IG'} + \overline{G'G} + \overline{GC} + \overline{JG'} + \overline{G'G} + \overline{GA} + \overline{KG'} + \overline{G'G} + \overline{GB} = \vec{0}$

$\Rightarrow 3\overline{G'G} + \overline{IG'} + \overline{JG'} + \overline{KG'} + \overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC} = \vec{0} \Rightarrow 3\overline{G'G} = \vec{0}$

Vậy  $G$  và  $G'$  trùng nhau (đúng)

**Câu 29:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  là các điểm nằm trên các cạnh  $AB$  và  $CD$  sao cho  $AM = \frac{1}{3} AB, CN = \frac{1}{2} CD$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle BMN$ . Hãy phân tích  $\overline{AG}$  theo hai vectơ  $\overline{AB} = \vec{a}, \overline{AC} = \vec{b}$ .

**A.**  $\overline{AG} = \frac{1}{18} \vec{a} + \frac{5}{3} \vec{b}$

**B.**  $\overline{AG} = \frac{1}{18} \vec{a} + \frac{1}{5} \vec{b}$

**C.**  $\overline{AG} = \frac{5}{18} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b}$

**D.**  $\overline{AG} = \frac{5}{18} \vec{a} - \frac{1}{3} \vec{b}.$

**Lời giải**



Ta có  $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AG}$  mà  $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$  và

$$\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{5}{18}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}.$$

**Câu 30:** Tập hợp điểm  $M$  thỏa mãn hệ thức:  $|\overrightarrow{3MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$  là:

A. Một đường tròn có bán kính là  $\frac{AB}{2}$

B. Một đường tròn có bán kính là  $\frac{CB}{3}$

C. Một điểm.

D. Một đường thẳng qua  $A$  và song song với  $BC$

**Lời giải**

Chọn điểm  $I$  sao cho:  $3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Ta có: } 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$$

$$\Rightarrow 3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) - 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = 3\overrightarrow{MI}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{3MA} + 2\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow 3MI = CB \Leftrightarrow MI = \frac{1}{3}CB$$

Vậy tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $I$  bán kính  $\frac{CB}{3}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có tâm  $O$ ,  $M$  là một điểm bất kỳ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

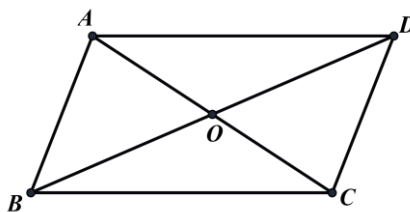
a)  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

b)  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{OA}$ .

c)  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 4\overrightarrow{MO}$ .

d) Nếu  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO}$  thì  $M$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .

**Lời giải**



a) Đúng: Theo quy tắc hình bình hành ta có:  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ .

b) Sai: Do  $ABCD$  hình bình hành tâm  $O$  nên  $O$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO}$ .



c) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$

$$= \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD} = 4\overrightarrow{MO} + \left( \underbrace{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}}_0 \right) + \left( \underbrace{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}}_0 \right) = 4\overrightarrow{MO}.$$

d) Đúng :  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 6\overrightarrow{MO} \Rightarrow 4\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{MO} \Rightarrow -\overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO} \Rightarrow \overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MO}$

Mặt khác  $BO$  là trung tuyến của  $\Delta ABC$  nên suy ra  $M$  là trọng tâm  $\Delta ABC$ .

**Câu 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB$  và  $CD$ . Gọi  $G$  là trung điểm  $MN$ . Gọi  $O$  là điểm bất kì. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau :

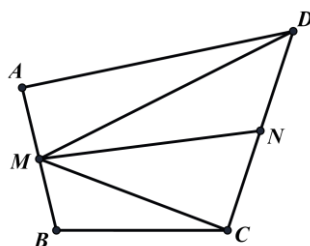
a)  $\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

b)  $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

c)  $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN}$ .

d)  $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ .

**Lời giải**



a) Đúng : Do  $M$  là trung điểm các cạnh  $AB$  nên  $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} = \vec{0}$

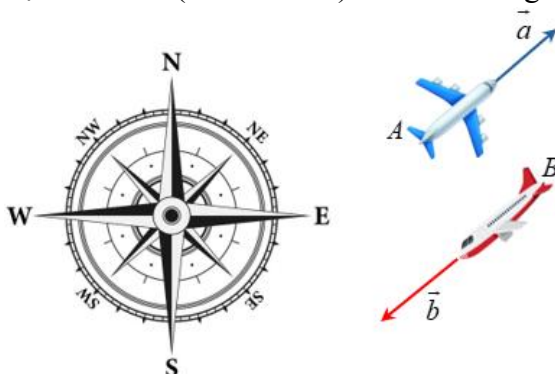
Do  $N$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $DC$  nên  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ .

b) Đúng:  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$ .

c) Mặt khác:  $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ .

d) Đúng:  $\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) = \frac{1}{4}(2\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}) = \frac{1}{2}.2\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OG}$ .

**Câu 3:** Máy bay A đang bay về hướng đông bắc với tốc độ 600 km/h. Cùng lúc đó, máy bay B đang bay về hướng tây nam với tốc độ 800 km/h (như hình vẽ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:





- a) Vector vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay B ngược hướng với vector vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay A.
- b)  $|\vec{a}| = 800 \text{ (km/h)}; |\vec{b}| = 600 \text{ (km/h)}$
- c)  $\vec{b} = \frac{-4}{3}\vec{a}$ .
- d)  $\vec{a} = \frac{4}{3}\vec{b}$ .

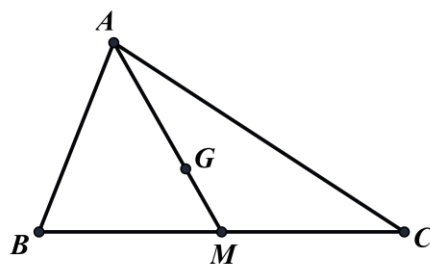
**Lời giải**

Ta thấy hướng đông bắc ngược hướng với hướng tây nam.

- a) Đúng: vector vận tốc  $\vec{b}$  của máy bay B ngược hướng với vector vận tốc  $\vec{a}$  của máy bay A (1)
- b) Đúng: Theo đề bài ta có  $|\vec{a}| = 800 \text{ (km/h)}; |\vec{b}| = 600 \text{ (km/h)}$
- c) Đúng: Khi đó  $\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|} = \frac{600}{800} = \frac{3}{4} \Rightarrow |\vec{b}| = \frac{3}{4}|\vec{a}|$  (2) suy ra  $\vec{b} = \frac{-3}{4}\vec{a}$ .
- d) Sai:  $\vec{a} = \frac{-3}{4}\vec{b}$ .

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  với trung tuyến  $AM$  và trọng tâm  $G$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tổng  $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ .
- b) Biểu diễn  $\vec{GA} = \frac{2}{3}\vec{AM}$ .
- c) Với mọi điểm  $N$  thì  $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = 3\vec{GN}$
- d) Phân tích  $\vec{AG}$  theo hai vector  $\vec{AB}, \vec{AC}$  ta được  $\vec{AG} = \frac{\vec{AB} + \vec{AC}}{3}$

**Lời giải**

- a) Đúng: Vì  $M$  là trung điểm của  $BC$  nên  $\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ .
- b) Sai: Ta có  $GA = \frac{2}{3}AM$  Mặt khác  $\vec{GA}$  và  $\vec{AM}$  ngược hướng  $\vec{GA} = -\frac{2}{3}\vec{AM}$ .
- c) Đúng : Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên

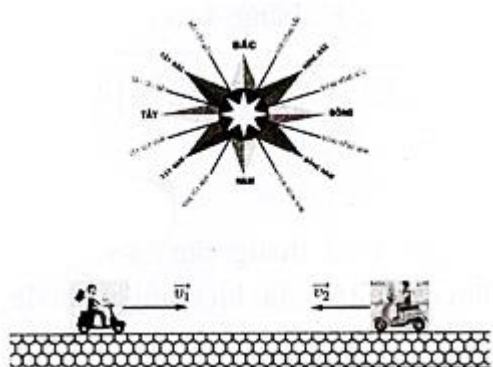


$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{NA} - \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{NB} - \overrightarrow{NG} + \overrightarrow{NC} - \overrightarrow{NG} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 3\overrightarrow{NG}$$

d) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Một người đi xe máy từ Tây sang hướng Đông với vận tốc 40 km/h được biểu thị bởi vector  $\vec{v}_1$  và một người khác đi xe máy từ hướng Đông sang hướng Tây với vận tốc 60 km/h được biểu thị bởi vector  $\vec{v}_2$ . Biết rằng  $\vec{v}_2 = -\frac{a}{b}\vec{v}_1$  ( $a, b \in \mathbb{N}^*$ ),  $\frac{a}{b}$  là phân số tối giản. Tính  $2a + 3b$ .



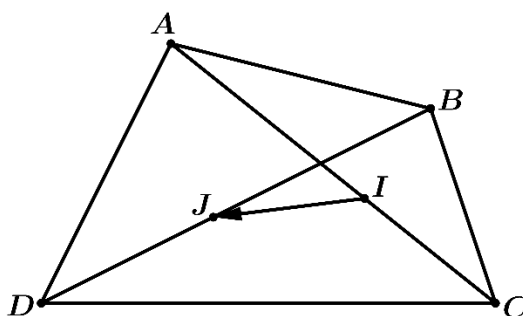
#### Lời giải

Ta có:  $\vec{v}_2$  ngược hướng với  $\vec{v}_1$  và có độ lớn bằng  $\frac{60}{40} = \frac{3}{2}$  lần độ lớn vector  $\vec{v}_1$ .

Vì vậy  $\vec{v}_2 = -\frac{3}{2}\vec{v}_1 \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow 2a + 3b = 12$ .

**Câu 2:** Cho tứ giác  $ABCD$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AC$  và  $BD$ . Biết rằng biểu thức  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{IJ}$ . Tìm giá trị của  $k$

#### Lời giải



Ta có  $\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} & (1) \\ \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DJ} & (2) \end{cases}$

Cộng theo vế (1) và (2) ta được:

$$2\overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{DJ}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{IJ} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$$

Suy ra  $k = 2$

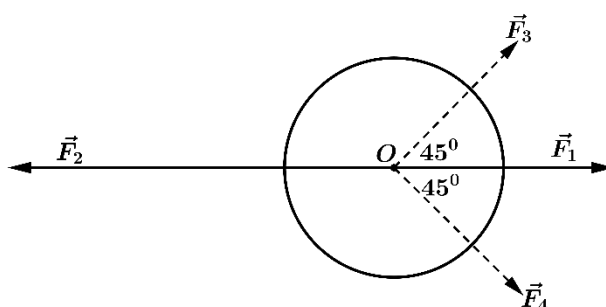


**Câu 3:** Nếu  $G$  và  $G'$  lần lượt là trọng tâm tam giác  $ABC$  và  $A'B'C'$  thì  $k\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ . Tìm giá trị của  $k$ .

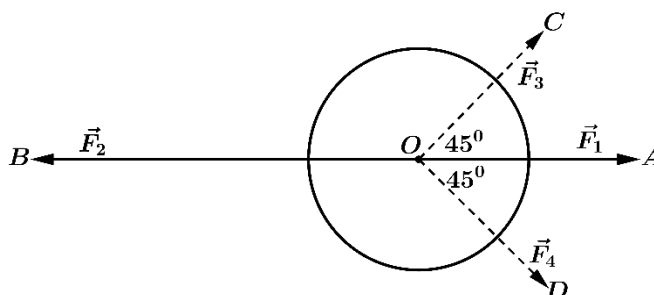
**Lời giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} \\ &= 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) = 3\overrightarrow{GG'} + \vec{0} + \vec{0} = 3\overrightarrow{GG'} \text{ suy ra } k = 3 \end{aligned}$$

**Câu 4:** Một vật đang ở vị trí  $O$  chịu hai lực tác dụng ngược chiều nhau là  $\vec{F}_1$  và  $\vec{F}_2$ , trong đó độ lớn lực  $\vec{F}_2$  lớn gấp đôi độ lớn lực  $\vec{F}_1$ . Người ta muốn vật dừng lại nên cần tác dụng vào vật hai lực  $\vec{F}_3, \vec{F}_4$  có phương hợp với lực  $\vec{F}_1$  các góc  $45^\circ$  như hình vẽ, chúng có độ lớn bằng nhau và bằng  $20\text{ N}$ . Tìm độ lớn của lực  $\vec{F}_2$  (kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy).



**Lời giải**



Ta có:  $\vec{F}_2 = -2\vec{F}_1$ . Để vật trở về trạng thái cân bằng thì hợp lực bằng  $\vec{0}$ .

$$\Leftrightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_1 - 2\vec{F}_1 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1.$$

Đặt  $\vec{F}_1 = \overrightarrow{OA}$ ,  $\vec{F}_2 = \overrightarrow{OB}$ ,  $\vec{F}_3 = \overrightarrow{OC}$ ,  $\vec{F}_4 = \overrightarrow{OD}$ .

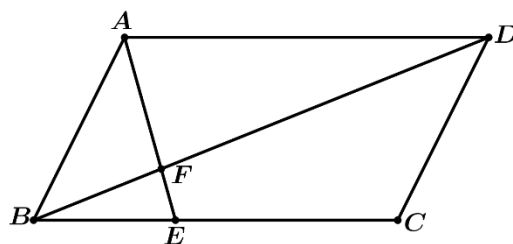
Ta có:  $\vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \vec{F}_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA}$  do đó  $OCAD$  là hình bình hành.

Mặt khác:  $OC = OD = 20$  và  $COD = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ$  nên  $OCAD$  là hình vuông.

Khi đó:  $|\vec{F}_1| = OA = 20\sqrt{2}\text{ N}$ ,  $|\vec{F}_2| = 2|\vec{F}_1| = 40\sqrt{2}\text{ N} \approx 56,6\text{ N}$ .

**Câu 5:** Cho hình bình hành  $ABCD$ . Gọi  $E$  và  $F$  là 2 điểm thỏa  $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ ,  $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$ . Khi đó  $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AF}$ . Tính  $3k + 2025$

**Lời giải**



Ta phân tích  $\overrightarrow{AE}$  và  $\overrightarrow{AF}$  theo 2 vectơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{AD}$ .

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD};$$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}.$$

$$\text{Xét hệ: } \begin{cases} \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \\ \frac{4}{3}\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AF} \Rightarrow k = \frac{4}{3}$$

Khi đó:  $3k + 2024 = 2029$

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của  $\triangle ABC$ . Biết rằng tập hợp các điểm  $M$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 6$  là một đường tròn. Tính bán kính của đường tròn đó.

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MG}| = 3MG \Leftrightarrow MG = 2$$

Vậy tập hợp điểm  $M$  là đường tròn tâm  $G$  bán kính bằng 2.

-----HẾT-----

BÀI

04

VECTƠ TRONG MẶT PHẪNG TOẠ ĐỘ

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Toạ độ vector

Với mỗi vector  $\vec{u}$  trên mặt phẳng  $Oxy$ , có duy nhất cặp số  $(x_0; y_0)$  sao cho  $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ . Ta nói vector  $\vec{u}$  có toạ độ  $(x_0; y_0)$  và nếu  $\vec{u} = (x_0; y_0)$  hay  $\vec{u}(x_0; y_0)$ . Các số  $x_0; y_0$  tương ứng được gọi là hoành độ, tung độ của  $\vec{u}$ .

**Nhận xét:** Hai vector bằng nhau khi và chỉ khi chúng có cùng toạ độ.

$$\text{Hai vector } \vec{u}(x; y) = \vec{u}'(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$

2 Biểu thức toạ độ của các phép toán vector

Cho hai vector  $\vec{u} = (x; y)$  và  $\vec{v} = (x'; y')$ . Khi đó ta có:

$$\bullet \vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y') \quad \bullet \vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y') \quad \bullet k\vec{u} = (kx; ky) \text{ với } k \in \mathbb{R}$$

**Nhận xét:** Vector  $\vec{v} = (x'; y')$  cùng phương với vector  $\vec{u} = (x; y) \neq \vec{0}$  khi và chỉ khi tồn tại số  $k$  sao cho  $x' = kx, y' = ky$  (hay là  $\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y}$  nếu  $xy \neq 0$ ).

Nếu điểm  $M$  có toạ độ  $(x; y)$  thì vector  $\overrightarrow{OM}$  có toạ độ  $(x; y)$  và có độ dài  $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

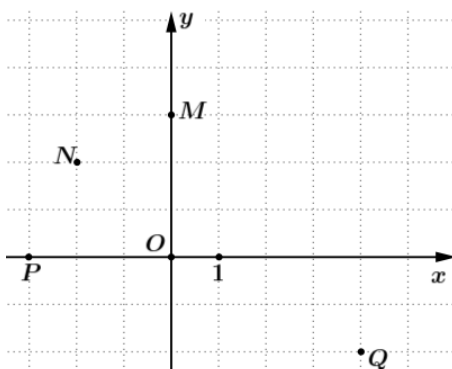
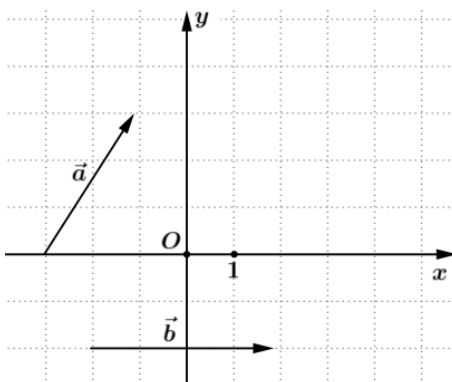
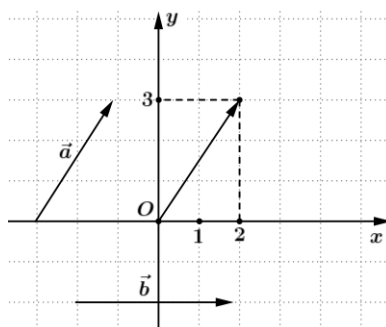
**Nhận xét:** Với  $\vec{u} = (x; y)$  ta lấy điểm  $M(x; y)$  thì  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$ . Do đó  $|\vec{u}| = |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

Chẳng hạn, vector  $\vec{u} = (2; -1)$  có độ dài là  $|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$ .

Với hai điểm  $M(x; y)$  và  $N(x'; y')$  thì  $\overrightarrow{MN} = (x' - x; y' - y)$  và khoảng cách giữa hai điểm  $M, N$  là  $MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}$ .

**Chú ý:**

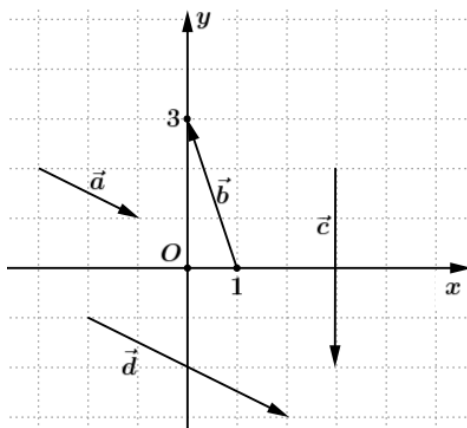
- Trung điểm  $M$  của đoạn thẳng  $AB$  có toạ độ là  $\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}\right)$ .
- Trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$  có toạ độ là  $\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}\right)$

**B** PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN**Dạng 1: Tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ****Phương pháp:** Sử dụng lý thuyết đã được nêu để giải quyết các vấn đề yêu cầu**BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài tập 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $M, N, P, Q$  như hình vẽ. Tìm tọa độ của các vectơ  $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}$ .**Lời giải**Ta có:  $M(0;3), N(-2;2), P(-3;0), Q(4;-2)$ .Do đó:  $\overrightarrow{OM} = (0;3), \overrightarrow{ON} = (-2;2), \overrightarrow{OP} = (-3;0), \overrightarrow{OQ} = (4;-2)$ .**Bài tập 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ . Tìm tọa độ các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  dưới hình vẽ.**Lời giải**



Ta có:  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  và  $A(2;3)$  nên  $\vec{a} = (2;3)$  và tương tự  $\vec{b} = (4;0)$ .

**Bài tập 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm tọa độ các vector  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$  dưới hình vẽ.



**Lời giải**

Ta có:  $\vec{a} = (2;-1), \vec{b} = (-1;3), \vec{c} = (0;-4), \vec{d} = (4;-2)$ .

**Bài tập 4:** Thực hiện các yêu cầu sau đây:

- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{a} = (3;-7)$ . Hãy biểu diễn vector  $\vec{a}$  qua hai vector  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$ .
- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(-2;5)$ . Hãy biểu diễn vector  $\overrightarrow{OA}$  qua hai vector  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$ .
- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $B(1;\sqrt{2})$ . Hãy biểu diễn vector  $\overrightarrow{OB}$  qua hai vector  $\vec{i}$  và  $\vec{j}$ .
- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{u} = (a+1;b-2)$  và vector  $\vec{v} = (-3;3)$ . Hãy tìm  $a$  và  $b$  để vector  $\vec{u}$  bằng vector  $\vec{v}$ .
- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{u} = (a-2;b+2)$  và vector  $\vec{v} = 2\vec{i}-3\vec{j}$ . Hãy tìm  $a$  và  $b$  để vector  $\vec{u}$  bằng vector  $\vec{v}$ .

**Lời giải**

- Vì  $\vec{a} = (3;-7)$  nên  $\vec{a} = 3\vec{i} + (-7)\vec{j} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ .
- Vì điểm  $A(-2;5)$  nên  $\overrightarrow{OA} = (-2;5)$  do đó:  $\overrightarrow{OA} = -2\vec{i} + 5\vec{j}$ .
- Vì điểm  $B(1;\sqrt{2})$  nên  $\overrightarrow{OB} = (1;\sqrt{2})$  do đó:  $\overrightarrow{OB} = \vec{i} + \sqrt{2}\vec{j}$ .
- Ta có:  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1=-3 \\ b-2=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-4 \\ b=5 \end{cases}$ . Vậy  $a = -4$  và  $b = 5$ .
- Ta có:  $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$  hay  $\vec{v} = (2;-3)$ .  
Để  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2=2 \\ b+2=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=-5 \end{cases}$ . Vậy  $a = 4$  và  $b = -5$ .

**Bài tập 5:** Thực hiện các yêu cầu sau đây:

- Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{u} = (2a-1;4)$  và vector  $\vec{v} = (-1;-2b-2)$ . Hãy tìm  $a$  và  $b$  để vector  $\vec{u}$  bằng vector  $\vec{v}$ .



- b) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{u} = (a - 2; b + 2)$  và vector  $\vec{v} = (2a + 2; -b + 4)$ . Hãy tìm  $a$  và  $b$  để vector  $\vec{u}$  bằng vector  $\vec{v}$ .
- c) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(5; 2)$ ,  $B(10; 8)$ . Tìm tọa độ của vector  $\overrightarrow{AB}$ ?
- d) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(1; 3)$ ,  $B(-1; 2)$ ,  $C(-2; 1)$ . Tìm tọa độ của vector  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ ?
- e) Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(2; 1)$ ,  $B(0; -3)$ ,  $C(3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  để  $ABCD$  là hình bình hành.

**Lời giải**

a) Ta có:  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = -1 \\ 4 = -2b - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$ . Vậy  $a = 0$  và  $b = -3$ .

b) Ta có:  $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2 = 2a + 2 \\ b + 2 = -b + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 1 \end{cases}$ . Vậy  $a = -4$  và  $b = 1$ .

c) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (5; 6)$ .

d) Ta có  $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} = (1; 1)$ .

e) Gọi  $D(x; y)$ ,  $ABCD$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 = 3 \\ y - 1 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$ . Vậy  $D(5; 5)$ .



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\vec{a} = -2\vec{j}$ . Khi đó tọa độ vector  $\vec{a}$  là

- A.  $\vec{a} = (-2; 0)$ .      B.  $\vec{a} = (0; -2)$ .      C.  $\vec{a} = (-2; -2)$ .      D.  $\vec{a} = (2; 0)$ .

**Lời giải**

Tọa độ vector  $\vec{a}$  là  $\vec{a} = (0; -2)$ .

**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = (x - 4; 3)$ ,  $\vec{b} = (-2; y + 1)$ . Giá trị của  $x$  và  $y$  để  $\vec{a} = \vec{b}$  là

- A.  $x = 6; y = 2$ .      B.  $x = 2; y = -2$ .      C.  $x = -2; y = 2$ .      D.  $x = 2; y = 2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = -2 \\ 3 = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}.$$

**Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vector  $\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 2\vec{j}$ . Khi đó tọa độ của điểm  $M$  là

- A.  $M(1; -2)$ .      B.  $M(1; 2)$ .      C.  $M(0; -2)$ .      D.  $M(-1; 2)$ .

**Lời giải**

Vì  $\overrightarrow{OM} = \vec{i} - 2\vec{j}$  nên  $M(1; -2)$ .

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $A(1; 2)$ ;  $B(-1; 0)$ ;  $C(2; 0)$ . Tìm tọa độ của điểm  $D$  để tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

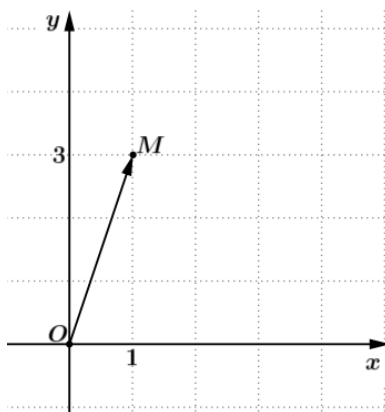
- A.  $D(4; 2)$ .      B.  $D(0; 2)$ .      C.  $D(0; -2)$ .      D.  $M(1; 2)$ .

**Lời giải**

Gọi  $D(x_D; y_D)$ . Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-2; -2)$ ;  $\overrightarrow{DC} = (2 - x_D; -y_D)$

$$\text{Tứ giác } ABCD \text{ là hình bình hành khi và chỉ khi } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 2 - x_D \\ -2 = -y_D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 2 \end{cases}$$

**Câu 5:** Cho điểm  $M$  trong hệ trục tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ. Tọa độ điểm  $M$  là



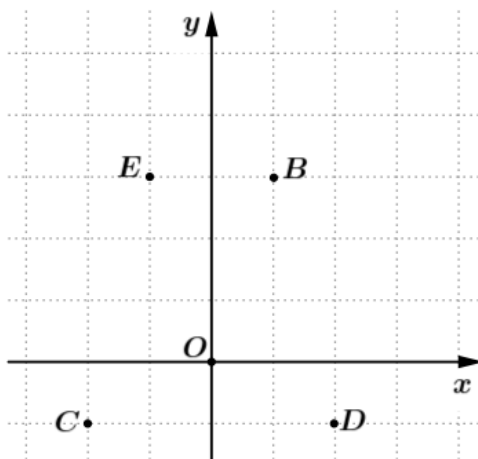
- A.  $(-1; 2)$ .      B.  $(1; 3)$ .      C.  $(1; -3)$ .      D.  $(3; 1)$ .



## Lời giải

Tọa độ điểm  $M$  là  $(1;3)$ .

**Câu 6:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $B, C, D, E$  như hình vẽ. Điểm nào sau đây có tọa độ  $(-1;2)$ ?



A. B.

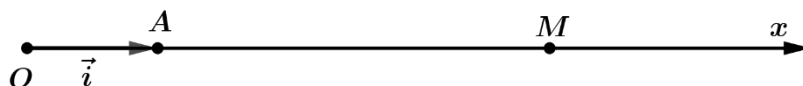
B. C.

C. D.

D. E.

## Lời giải

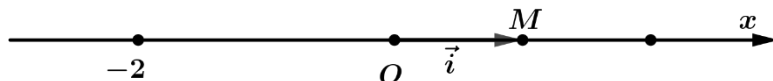
**Câu 7:** Trên trục số  $Ox$ , gọi  $A$  là điểm biểu diễn số 1 và đặt  $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ . Gọi  $M$  là điểm biểu diễn số 4. Biểu thị vector  $\overrightarrow{OM}$  theo vec tơ  $\vec{i}$  ta được

A.  $\overrightarrow{OM} = 3\vec{i}$ B.  $\overrightarrow{OM} = 5\vec{i}$ C.  $\overrightarrow{OM} = \frac{5}{2}\vec{i}$ .D.  $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i}$ .

## Lời giải

Do  $A$  là điểm biểu diễn số 1 và  $M$  là điểm biểu diễn số 4 nên vec tơ  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{OM}$  cùng phương, cùng hướng và  $|\overrightarrow{OM}| = 4|\overrightarrow{OA}|$  suy ra  $\overrightarrow{OM} = 4\overrightarrow{OA} = 4\vec{i}$ .

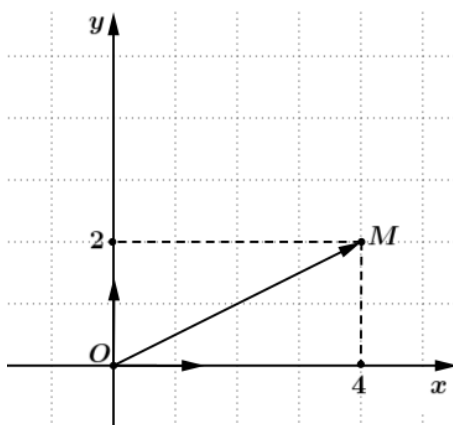
**Câu 8:** Trên trục số  $Ox$ , gọi  $A$  là điểm biểu diễn số 1 và đặt  $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$ . Gọi  $N$  là điểm biểu diễn số  $-2$ . Biểu thị vec tơ  $\overrightarrow{ON}$  theo vec tơ  $\vec{i}$  ta được

A.  $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i}$ .B.  $\overrightarrow{ON} = -\vec{i}$ .C.  $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i}$ .D.  $\overrightarrow{ON} = -3\vec{i}$ .

## Lời giải

Do  $A$  là điểm biểu diễn số 1 và  $N$  là điểm biểu diễn số  $-2$  nên vec tơ  $\overrightarrow{OA}$  và  $\overrightarrow{ON}$  cùng phương, ngược hướng và  $|\overrightarrow{ON}| = 2|\overrightarrow{OA}|$ . Suy ra  $\overrightarrow{ON} = -2\overrightarrow{OA} = -2\vec{i}$ .

**Câu 9:** Biểu thị vec tơ  $\overrightarrow{OM}$  (hình vẽ) theo các vec tơ  $\vec{i}; \vec{j}$  ta được:



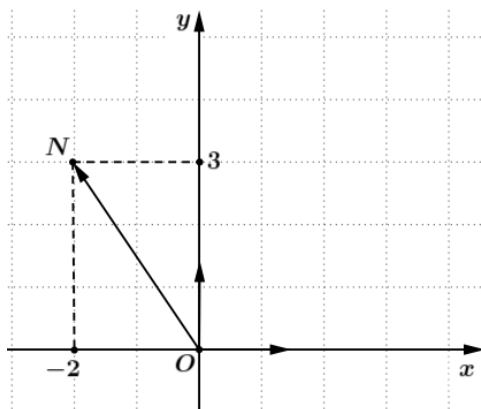
- A.  $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$ .      B.  $\overrightarrow{OM} = -4\vec{i} + 2\vec{j}$ .      C.  $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ .      D.  $\overrightarrow{OM} = -4\vec{i} - 2\vec{j}$ .

Lời giải

Gọi  $N(4;0), K(0;2)$ . Theo quy tắc hình bình hành  $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{OK}$ .

Ta có  $\overrightarrow{ON} = 4\vec{i}; \overrightarrow{OK} = 2\vec{j}$  nên  $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ .

**Câu 10:** Biểu thị vec tơ  $\overrightarrow{ON}$  (hình vẽ) theo các vec tơ  $\vec{i}; \vec{j}$  ta được:



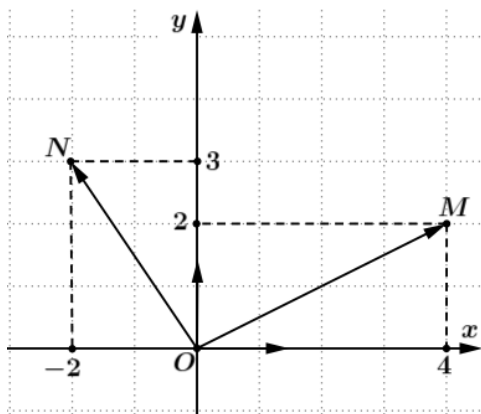
- A.  $\overrightarrow{ON} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$ .      B.  $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} - 3\vec{j}$ .      C.  $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ .      D.  $\overrightarrow{ON} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ .

Lời giải

Gọi  $H(-2;0), K(0;3)$ . Theo quy tắc hình bình hành  $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OK}$ .

Ta có  $\overrightarrow{OH} = -2\vec{i}; \overrightarrow{OK} = 3\vec{j}$  nên  $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ .

**Câu 11:** Biểu thị vec tơ  $\overrightarrow{MN}$  (hình vẽ) theo các vec tơ  $\vec{i}; \vec{j}$  ta được:





A.  $\overrightarrow{MN} = -6\vec{i} + 5\vec{j}$ .      B.  $\overrightarrow{MN} = -\vec{i} + 5\vec{j}$ .      C.  $\overrightarrow{MN} = -6\vec{i} + \vec{j}$ .      D.  $\overrightarrow{MN} = -6\vec{i} - 5\vec{j}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{OM} = 4\vec{i} + 2\vec{j}$ ,  $\overrightarrow{ON} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

Vì  $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$  nên  $\overrightarrow{MN} = (-2\vec{i} + 3\vec{j}) - (4\vec{i} + 2\vec{j}) = -6\vec{i} + \vec{j}$

**Câu 12:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , biết  $\vec{u} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$ . Tọa độ của vector  $\vec{u}$  là

A.  $(6; -2)$ .      B.  $(-2; 6)$ .      C.  $(-6; 2)$ .      D.  $(2; -6)$ .

**Lời giải**

Biết  $\vec{u} = -2\vec{i} + 6\vec{j}$  nên tọa độ của vector  $\vec{u} = (-2; 6)$

**Câu 13:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , vector cùng phương với  $\vec{u} = \left(-\frac{5}{3}; 1\right)$  là

A.  $\vec{v}_1 = (-5; 2)$ .      B.  $\vec{v}_2 = \left(\frac{5}{3}; 1\right)$ .      C.  $\vec{v}_3 = \left(-1; \frac{5}{3}\right)$ .      D.  $\vec{v}_4 = (10; -6)$ .

**Lời giải**

Ta có  $\vec{v}_1 = -6\vec{u}$  nên hai vector cùng phương.

**Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , biết  $\vec{u} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$ . Độ dài của vector  $\vec{u}$  là

A.  $\sqrt{53}$ .      B.  $3\sqrt{5}$ .      C.  $\sqrt{5}$ .      D. 3.

**Lời giải**

Biết  $\vec{u} = 7\vec{i} - 2\vec{j}$  nên tọa độ của vector  $\vec{u} = (7; -2)$

Độ dài của vector  $\vec{u}$  là  $|\vec{u}| = \sqrt{7^2 + (-2)^2} = \sqrt{53}$

**Câu 15:** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho 4 điểm  $A(3; 0), B(4; -3), C(8; -1), D(-2; 1)$ . Ba điểm nào trong bốn điểm đã cho thẳng hàng?

A. B, C, D.      B. A, B, C.      C. A, B, D.      D. A, C, D.

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AC} = (5; -1); \overrightarrow{AD} = (-5; 1) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AD}$  nên ba điểm A, C, D thẳng hàng.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho  $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a} = (-1; 3)$

b)  $\vec{b} = (1; 2)$

c)  $\vec{a} + \vec{b} = (1; 5)$

d)  $\vec{a} - \vec{b} = (2; 1)$



## Lời giải

Ta có:  $\vec{a} = (-1; 3); \vec{b} = (1; 2) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (0; 5); \vec{a} - \vec{b} = (-2; 1)$ .

a) Đúng:  $\vec{a} = (-1; 3)$

b) Đúng:  $\vec{b} = (1; 2)$

c) Sai:  $\vec{a} + \vec{b} = (0; 5)$

d) Sai:  $\vec{a} - \vec{b} = (-2; 1)$

**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = 3\vec{i} + \vec{j}, \vec{b} = -2\vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a} = (-3; 1)$

b)  $\vec{b} = (0; -2)$

c)  $\vec{a} + \vec{b} = (3; 1)$

d)  $\vec{a} - \vec{b} = (3; -3)$

## Lời giải

Ta có:  $\vec{a} = (3; 1), \vec{b} = (0; -2) \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = (3; -1); \vec{a} - \vec{b} = (3; 3)$ .

a) Sai:  $\vec{a} = (3; 1)$

b) Đúng:  $\vec{b} = (0; -2)$

c) Sai:  $\vec{a} + \vec{b} = (3; -1)$

d) Sai:  $\vec{a} - \vec{b} = (3; 3)$

**Câu 3:** Cho  $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}, \vec{b} = \vec{i} - \vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a} = (3; -2)$

b)  $\vec{b} = (-1; 1)$

c)  $2\vec{a} + 3\vec{b} = (9; 1)$

d)  $\vec{a} - 2\vec{b} = (1; 4)$

## Lời giải

Ta có:  $\vec{a} = (3; 2), \vec{b} = (1; -1) \Rightarrow \begin{cases} 2\vec{a} = (6; 4) \\ 3\vec{b} = (3; -3) \end{cases} \Rightarrow 2\vec{a} + 3\vec{b} = (9; 1); -2\vec{b} = (-2; 2) \Rightarrow \vec{a} - 2\vec{b} = (1; 4)$ .

a) Sai:  $\vec{a} = (3; 2)$

b) Sai:  $\vec{b} = (1; -1)$

c) Đúng:  $2\vec{a} + 3\vec{b} = (9; 1)$

d) Đúng:  $\vec{a} - 2\vec{b} = (1; 4)$

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho các vector  $\vec{a} = (2; -2), \vec{b} = (4; 1)$  và  $\vec{c} = (0; -1)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a)  $2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c} = (0; -2)$
- b) Vector  $\vec{e} = (1; -1)$  cùng phương, cùng hướng với vector  $\vec{a}$
- c) Vector  $\vec{f} = \left(-1; -\frac{1}{4}\right)$  cùng phương, cùng hướng với vector  $\vec{b}$
- d)  $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}$

**Lời giải**

a) Đúng: Ta có: 
$$\begin{cases} 2\vec{a} = (4; -4) \\ -\vec{b} = (-4; -1) \\ -3\vec{c} = (0; 3) \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} - 3\vec{c} = (0; -2).$$

b) Đúng: Ta có  $\vec{a} = (2; -2) = 2\vec{e}$  nên  $\vec{a}, \vec{e}$  là hai vector cùng phương với nhau, hơn nữa chúng cùng hướng với nhau vì  $\vec{a} = k\vec{e}, k = 2 > 0$ .

c) Sai: Tương tự:  $\vec{b} = (4; 1) = -4\vec{f}$ , tức là  $\vec{b} = k\vec{f}, k = -4 < 0$  nên  $\vec{b}$  và  $\vec{f}$  là hai vector cùng phương, ngược hướng với nhau.

d) Đúng: Gọi  $m, n$  là các số thỏa mãn  $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$  ( $\vec{b}, \vec{c}$  không cùng phương).

Khi đó: 
$$\begin{cases} 2 = m \cdot 4 + n \cdot 0 \\ -2 = m \cdot 1 + n \cdot (-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{2} \\ n = \frac{5}{2} \end{cases}. \text{ Vậy } \vec{a} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{5}{2}\vec{c}.$$

**Câu 5:** Cho các vector  $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}, \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{i} - 5\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i}, \vec{d} = -2\vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\vec{a} = (2; 3)$
- b)  $\vec{b} = \left(\frac{1}{3}; 5\right)$
- c)  $\vec{c} = (0; 3)$
- d)  $\vec{d} = (0; -2)$

**Lời giải**

Ta có:  $\vec{a} = (2; 3); \vec{b} = \left(\frac{1}{3}; -5\right); \vec{c} = (3; 0); \vec{d} = (0; -2).$

- a) Đúng:  $\vec{a} = (2; 3)$
- b) Sai:  $\vec{b} = \left(\frac{1}{3}; -5\right)$

c) Sai:  $\vec{c} = (0; 3; 0)$ d) Đúng:  $\vec{d} = (0; -2)$ 

**Câu 6:** Cho các vector  $\vec{a} = \vec{i} - 3\vec{j}$ ,  $\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$ ,  $\vec{c} = -\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j}$ ,  $\vec{d} = -4\vec{j}$ ,  $\vec{e} = 3\vec{i}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a} = (1; -3)$ b)  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ c)  $\vec{c} = \left(1; \frac{3}{2}\right)$ d)  $\vec{d} = (0; -4)$ ,  $\vec{e} = (3; 0)$ **Lời giải**

Ta có:  $\vec{a} = (1; -3)$ ,  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ ,  $\vec{c} = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$ ,  $\vec{d} = (0; -4)$ ,  $\vec{e} = (3; 0)$ .

a) Đúng:  $\vec{a} = (1; -3)$ b) Đúng:  $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; 1\right)$ c) Sai:  $\vec{c} = \left(-1; \frac{3}{2}\right)$ d) Đúng:  $\vec{d} = (0; -4)$ ,  $\vec{e} = (3; 0)$ **PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Cho  $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$  và  $\vec{v} = \vec{i} + x\vec{j}$ . Xác định  $x$  sao cho  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

**Lời giải**

Ta có  $\begin{cases} \vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow \vec{u} = (2; -1) \\ \vec{v} = \vec{i} + x\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = (1; x) \end{cases}$ .

Để  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương  $\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{x}{-1} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ .

**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = (-5; 0)$ ,  $\vec{b} = (4; x)$ . Tìm  $x$  để hai vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương.

**Lời giải**

Hai vector  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  cùng phương  $\Leftrightarrow -5.x = 0.4 \Rightarrow x = 0$ .

**Câu 3:** Cho  $\vec{a} = (x; 2)$ ,  $\vec{b} = (-5; 1)$ ,  $\vec{c} = (x; 7)$ . Tìm  $x$  biết  $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\begin{cases} 2\vec{a} = (2x; 4) \\ 3\vec{b} = (-15; 3) \end{cases} \Rightarrow 2\vec{a} + 3\vec{b} = (2x - 15; 7)$ .



$$\text{Để } \vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2x - 15 \\ 7 = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 15.$$

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vectơ  $\vec{a} = (2; -1)$ ,  $\vec{b} = (1; 1)$  và  $\vec{d} = (2m + 2; 1 - m^2)$ . Tìm  $m$  dương biết rằng  $\vec{d}$  cùng phương với  $\vec{a}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\vec{d}$  cùng phương với  $\vec{a}$  khi và chỉ khi  $\frac{2m + 2}{2} = \frac{1 - m^2}{-1}$

$$\Leftrightarrow -2m - 2 = 2 - 2m^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 2 \end{cases}.$$

Vì  $m$  dương nên  $m = 2$  thỏa mãn.

**Câu 5:** Cho  $A(2; -4)$ ;  $B(6; 0)$ ;  $C(m; 4)$ . Xác định  $m$  để ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (4; 4)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (m - 2; 8)$ .

$$\text{Để } A, B, C \text{ thẳng hàng} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \frac{m - 2}{4} = \frac{8}{4} \Leftrightarrow m = 10.$$

Vậy  $m = 10$  thì  $A, B, C$  thẳng hàng.

**Câu 6:** Sự chuyển động của một tàu thủy được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Tàu khởi hành từ vị trí  $A(1; 2)$  chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vectơ  $\vec{v} = (3; 4)$ . Xác định vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

**Lời giải**

Gọi  $B(x; y)$  là vị trí của tàu (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 1,5 giờ.

Do tàu khởi hành từ  $A$  đi chuyển với vận tốc được biểu thị bởi vectơ  $\vec{v} = (3; 4)$  nên cứ sau mỗi giờ, tàu đi chuyển được một quãng bằng  $|\vec{v}|$ .

Vậy sau 1,5 giờ tàu di chuyển tới  $B$  ta được:  $\overrightarrow{AB} = 1,5 \cdot \vec{v}$

$$\Leftrightarrow (x - 1; y - 2) = 1,5 \cdot (3; 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = 4,5 \\ y - 2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5,5 \\ y = 8 \end{cases}$$

Vậy sau 1,5 giờ tàu ở vị trí (trên mặt phẳng tọa độ) là  $B(5,5; 8)$ .

-----HẾT-----

**Dạng 2: Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ****Phương pháp:** Sử dụng lý thuyết đã được nêu

- Dùng định nghĩa vectơ  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$  thì  $\vec{u} = (x; y)$  hay  $\vec{u}(x; y)$ .
- Sử dụng các phép biến đổi về tọa độ của vectơ.
- Áp dụng công thức khoảng cách giữa hai điểm.
- Cho đoạn thẳng  $AB$  có  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$ . Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm  $I(x_I; y_I)$  của đoạn thẳng  $AB$  là:

$$x_I = \frac{x_A + x_B}{2}, y_I = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

- Cho tam giác  $ABC$  có  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B), C(x_C; y_C)$ . Khi đó tọa độ của trọng tâm  $G(x_G; y_G)$  của tam giác  $ABC$  được tính theo công thức:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

**BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài tập 1:** Cho  $\vec{a} = (1; 2); \vec{b} = (-3; 4); \vec{c} = (-1; 3)$ . Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u}$  biết:

a)  $2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0}$

b)  $3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c}$

**Lời giải**

a) Ta có  $2\vec{u} - 3\vec{a} + \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$  suy ra  $\vec{u} = \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}; 3 - 2\right) = (3; 1)$

b) Ta có  $3\vec{u} + 2\vec{a} + 3\vec{b} = 3\vec{c} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{2}{3}\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Suy ra  $\vec{u} = \left(-\frac{2}{3} + 3 - 1; -\frac{4}{3} - 4 + 3\right) = \left(\frac{4}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ .

**Bài tập 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $\vec{a} = 2\vec{i}, \vec{b} = -3\vec{j}, \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ .

a) Tìm tọa độ của các vectơ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ .

b) Phân tích vectơ  $\vec{c}$  theo hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\vec{a} = (2; 0), \vec{b} = (0; -3), \vec{c} = (3; -4)$ .

Khi đó  $3\vec{a} = (6; 0), -2\vec{b} = (0; 6)$  nên  $\vec{m} = 3\vec{a} - 2\vec{b} = (6 + 0; 0 + 6) = (6; 6)$ .

b) Ta có hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  không cùng phương.

Theo yêu cầu của đề bài ta cần tìm bộ số  $x, y$  thỏa mãn  $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$ 

Suy ra  $x(2; 0) + y(0; -3) = (3; -4) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 0 = 3 \\ 0 - 3y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$ .



Vậy ta viết được  $\vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{4}{3}\vec{b}$ .

**Bài tập 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $A(2;1)$ ,  $B(-1;-2)$ ,  $C(-3;2)$ .

- Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AC$ .
- Chứng minh ba điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tạo thành một tam giác.
- Tìm tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**

- Gọi  $M$  là trung điểm  $AC$  thì  $M\left(\frac{2-3}{2}; \frac{1+2}{2}\right)$  hay  $M\left(\frac{-1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .
- Tính được  $\overline{AB} = (-3; -3)$ ,  $\overline{AC} = (-5; 1)$  dẫn đến hai vectơ đó không cùng phương. Nói cách khác ba điểm  $A$ ,  $B$ ,  $C$  tạo thành một tam giác.
- Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì  $G\left(\frac{2-1-3}{3}; \frac{1-2+2}{3}\right)$  hay  $G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .

**Bài tập 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(2;1)$ ,  $B(-1;-2)$ ,  $C(-3;2)$ .

- Tìm tọa độ điểm  $E$  sao cho  $C$  là trung điểm của đoạn thẳng  $EB$ .
- Xác định tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.

**Lời giải**

- Do  $C$  là trung điểm của đoạn thẳng  $EB$  nên  $\begin{cases} 2x_C = x_E + x_B \\ 2y_C = y_E + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -5 \\ y_E = 6 \end{cases}$ .

Vậy  $E(-5;6)$ .

- Gọi  $D(x_D; y_D) \Rightarrow \overline{DC} = (-3 - x_D; 2 - y_D)$ .

Do tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nên  $\overline{AB} = \overline{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - x_D = -3 \\ 2 - y_D = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 5 \end{cases}$ .

Ta thấy  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  không thẳng hàng. Vậy  $D(0;5)$

**Bài tập 5:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các điểm  $A(1;3)$ ,  $B(4;0)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa  $3\overline{AM} + \overline{AB} = \vec{0}$ ?

**Lời giải**

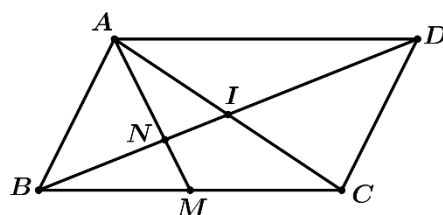
Giả sử  $M(x_M; y_M)$  suy ra  $\overline{AM} = (x_M - 1; y_M - 3)$  và  $\overline{AB} = (3; -3)$ .

Ta có:  $3\overline{AM} + \overline{AB} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x_M - 1) + 3 = 0 \\ 3(y_M - 3) - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 4 \end{cases} \Rightarrow M(0;4)$ .

**Bài tập 6:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hình bình hành  $ABCD$  có  $A(3;4)$ ,  $C(8;1)$ . Gọi  $M$  là trung điểm của cạnh  $BC$ ,  $N$  là giao điểm của  $BD$  và  $AM$ . Xác định các đỉnh còn lại của hình bình hành  $ABCD$ , biết  $N\left(\frac{13}{3}; 2\right)$ .

**Lời giải**

Do  $I$  là tâm của hình bình hành  $ABCD$  ta có  $I$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AC$  nên tọa độ của điểm  $I\left(\frac{11}{2}; \frac{5}{2}\right)$



Xét tam giác  $ABC$  thì  $BI$ ,  $AM$  là hai đường trung tuyến nên  $N$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

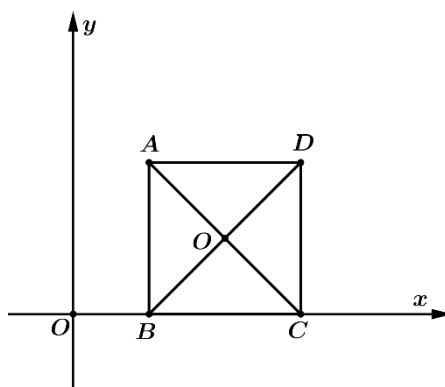
$$\text{Do đó } \begin{cases} \frac{13}{3} = \frac{3 + x_B + 8}{3} \\ 2 = \frac{4 + y_B + 1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2 \\ y_B = 1 \end{cases} \Rightarrow B(2;1).$$

$$\text{Gọi } D(x_D; y_D). \text{ Do } I \text{ trung điểm của } BD \text{ nên } \begin{cases} 2 + x_D = 11 \\ 1 + y_D = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 9 \\ y_D = 4 \end{cases} \text{ nên } D(9;4).$$

Vậy  $\vec{u}(x; y)$ ,  $D(9;4)$ .

**Bài tập 7:** Trong hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $I$  và có  $A(1;3)$ . Biết điểm  $B$  thuộc trục  $Ox$  và  $\overrightarrow{BC}$  cùng hướng với  $\vec{i}$ . Tìm tọa độ các vectơ  $\overrightarrow{AC}$ ?

**Lời giải**

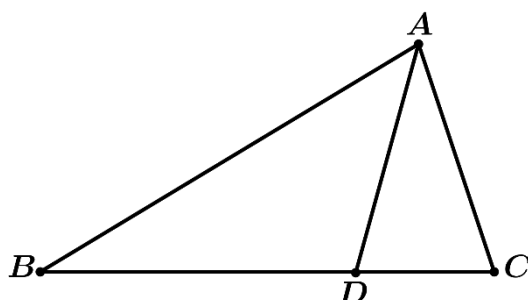


Từ giả thiết ta xác định được hình vuông trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  như hình vẽ bên.

Vì điểm  $A(1;3)$  suy ra  $AB = 3$ ,  $OB = 1$ . Do đó  $B(1;0)$ ,  $C(4;0)$ ,  $D(4;3)$ .

**Bài tập 8:** Cho tam giác  $ABC$  với  $AB = 5$  và  $AC = 1$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  là của chân đường phân giác trong góc  $A$  biết  $B(7;-2)$ ;  $C(1;4)$ .

**Lời giải**



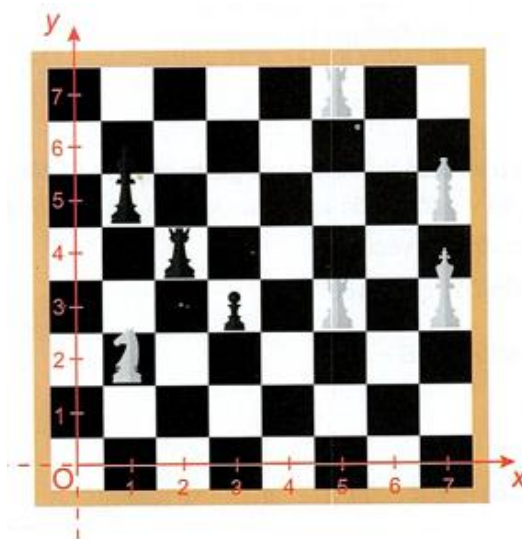


Theo tính chất đường phân giác:  $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = 5 \Rightarrow DB = 5DC \Rightarrow \overrightarrow{DB} = -5\overrightarrow{DC}$ .

Gọi  $D(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{DB} = (7 - x; -2 - y); \overrightarrow{DC} = (1 - x; 4 - y)$ .

Suy ra:  $\begin{cases} 7 - x = -5(1 - x) \\ -2 - y = -5(4 - y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$ . Vậy  $D(2; 3)$  nên  $\overrightarrow{AC} = (3; -3)$ .

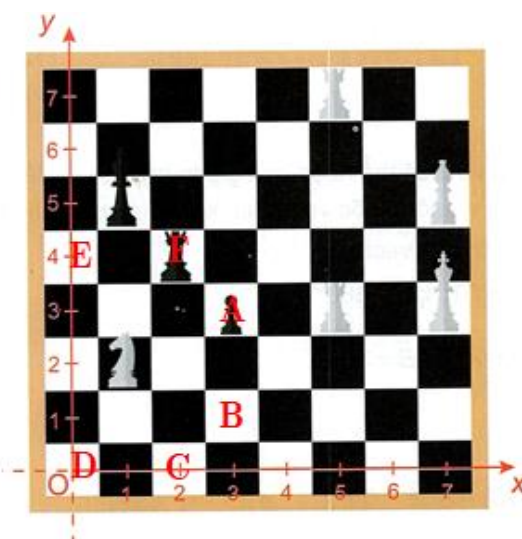
**Bài tập 9:** Trong hình bàn cờ vu dưới đây, quân mã đang ở vị trí có tọa độ  $(1; 2)$ . Hỏi sau một nước đi, quân mã có thể đến những vị trí nào?



### Lời giải

Quân mã đi theo đường chéo hình chữ nhật có chiều dài 3 ô, chiều rộng 2 ô.

Do đó từ vị trí hiện tại, quân mã có thể đi đến các vị trí  $A, B, C, D, E, F$  như dưới đây:



Điểm  $A$  có tọa độ  $(3; 3)$ ,  $B$  có tọa độ  $(3; 1)$ ,  $C$  có tọa độ  $(2; 0)$ ,  $D$  có tọa độ  $(0; 0)$

$E$  có tọa độ  $(0; 4)$ ,  $F$  có tọa độ  $(2; 4)$

Vậy quân mã có thể đi đến các vị trí  $A(3; 3), B(3; 1), C(2; 0), D(0; 0), E(0; 4), F(2; 4)$ .



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng Oxy, cho  $M(x_M; y_M)$  và  $N(x_N; y_N)$ . Tọa độ trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $MN$  là

- A.  $I\left(\frac{x_M - x_N}{2}; \frac{y_M - y_N}{2}\right)$ .  
 B.  $I\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}\right)$ .  
 C.  $I\left(\frac{x_M + x_N}{3}; \frac{y_M + y_N}{3}\right)$ .  
 D.  $I\left(\frac{x_M + y_M}{2}; \frac{x_N + y_N}{2}\right)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $I(x_I; y_I)$  là trung điểm của đoạn thẳng  $MN$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} \\ y_I = \frac{y_M + y_N}{2} \end{cases} \text{ Vậy } I\left(\frac{x_M + x_N}{2}; \frac{y_M + y_N}{2}\right).$$

**Câu 2:** Cho  $\vec{a} = (3; -4)$ ;  $\vec{b} = (-1; 2)$ . Tìm tọa độ vector  $\vec{a} + \vec{b}$ .

- A.  $(-4; 6)$ .  
 B.  $(2; -2)$ .  
 C.  $(4; -6)$ .  
 D.  $(-3; -8)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \vec{a} + \vec{b} = (3 + (-1); -4 + 2) = (2; -2).$$

**Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm  $A(3; -5)$ ,  $B(1; 7)$ . Trung điểm  $I$  của đoạn thẳng  $AB$  có tọa độ là

- A.  $I(2; -1)$ .  
 B.  $I(-2; 12)$ .  
 C.  $I(4; 2)$ .  
 D.  $I(2; 1)$ .

**Lời giải**

$$\text{Tọa độ trung điểm } I(x_I; y_I) \text{ của đoạn thẳng } AB: \begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{3+1}{2} = 2 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-5+7}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1).$$

**Câu 4:** Trong mặt phẳng Oxy, cho  $\vec{a} = (-5; 0)$ ,  $\vec{b} = (4; x)$ . Tìm giá trị của  $x$  để hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

- A. 4.  
 B. -1.  
 C. 0.  
 D. -5.

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \vec{a} = (-5; 0), \vec{b} = (4; x) \text{ cùng phương} \Leftrightarrow \exists k: \vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow x = 0$$

**Câu 5:** Cho hai vector  $\vec{a} = (1; -4)$ ,  $\vec{b} = (-3; 2)$ . Tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  là

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5$ .  
 B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -11$ .  
 C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -10$ .  
 D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$ .



## Lời giải

Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot (-3) + (-4) \cdot 2 = -11$ .

**Câu 6:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho 2 điểm  $A(-2; -2)$  và  $B(5; -4)$ . Tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $OAB$  là

- A.  $G(1; -2)$ .      B.  $G(3; -6)$ .      C.  $G(-1; -2)$ .      D.  $G(-1; 2)$ .

## Lời giải

Tọa độ trọng tâm  $G: x_G = \frac{x_O + x_A + x_B}{3} = 1; y_G = \frac{y_O + y_A + y_B}{3} = -2$ . Vậy  $G(1; -2)$ .

**Câu 7:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (-1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; 2)$ . Tọa độ của vector  $\vec{v} = -2\vec{a} + 3\vec{b}$  là

- A.  $\vec{v} = (8; 2)$ .      B.  $\vec{v} = (11; 8)$ .      C.  $\vec{v} = (11; 2)$ .      D.  $\vec{v} = (2; 4)$ .

## Lời giải

Giả sử  $\vec{v} = (x; y)$ , suy ra  $\begin{cases} x = -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 = 11 \\ y = -2 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2 \end{cases}$ . Vậy  $\vec{v} = (11; 2)$ .

**Câu 8:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có trọng tâm  $G$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  biết  $A(2; 1), B(-3; 0), G(1; 1)$ ?

- A.  $C(4; 2)$ .      B.  $C(4; -2)$ .      C.  $C(-2; 0)$ .      D.  $C(2; 0)$ .

## Lời giải

Ta có:  $\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3 - 2 + 3 \\ y_C = 3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 4 \\ y_C = 2 \end{cases} \Rightarrow C(4; 2)$ .

**Câu 9:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho các điểm  $A(1; 3), B(4; 0), C(2; -5)$ . Tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0}$  là

- A.  $M(1; 18)$ .      B.  $M(-1; 18)$ .      C.  $M(-18; 1)$ .      D.  $M(1; -18)$ .

## Lời giải

Gọi điểm  $M(x_M; y_M)$ .

Theo bài ra  $\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (1 - x_M) + (4 - x_M) - 3(2 - x_M) = 0 \\ (3 - y_M) + (0 - y_M) - 3(-5 - y_M) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = 1 \\ y_M = -18 \end{cases}$ .

Vậy  $M(1; -18)$ .

**Câu 10:** Cho  $A(1; 2), B(-2; 6)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc trục  $Oy$  sao cho ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng?

- B.  $M(0; 3)$ .      B.  $M\left(0; \frac{10}{3}\right)$ .      C.  $M\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ .      D.  $M\left(0; \frac{5}{2}\right)$ .

## Lời giải



Vì  $M$  thuộc trục  $Oy$  nên  $M(0; y)$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} = (-3; 4)$ ,  $\overrightarrow{AM} = (-1; y - 2)$ . Để ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng thì  $\frac{-1}{-3} = \frac{y-2}{4}$ .

$$\Leftrightarrow 4 = 3y - 6 \Leftrightarrow y = \frac{10}{3} \text{ nên } M\left(0; \frac{10}{3}\right).$$

**Câu 11:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(2; 2), B(-1; 6)$ . Tìm tọa độ điểm  $I$  sao cho  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AI$ .

- A.  $I\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$ .      B.  $I(0; 14)$ .      C.  $I(-4; 10)$ .      D.  $I\left(\frac{1}{2}; 4\right)$ .

**Lời giải**

Điểm  $B$  là trung điểm của đoạn thẳng  $AI$  nên ta có 
$$\begin{cases} \frac{2+x_I}{2} = -1 \\ \frac{2+y_I}{2} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = -4 \\ y_I = 10 \end{cases}.$$

Vậy  $I(-4; 10)$ .

**Câu 12:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2; -2), B(-2; 1), C(2; -2)$ . Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

- A.  $\triangle ABC$  vuông.      B. Chu vi tam giác  $\triangle ABC$  bằng  $P = 12$ .  
C.  $\cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) = \frac{4}{5}$ .      D.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 16$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (0; 3) \Rightarrow AB = 3$ ;  $\overrightarrow{AC} = (4; 0) \Rightarrow AC = 4$ ;  $\overrightarrow{BC} = (4; -3) \Rightarrow BC = 5$

Do  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  nên  $\triangle ABC$  vuông và chu vi tam giác  $P = 12$ .

Mặt khác,  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 16 \Rightarrow \cos(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{CB}) = \frac{-\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}}{AC \cdot CB} = \frac{-16}{4 \cdot 5} = -\frac{4}{5}$ .

**Câu 13:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(1; -2); B(3; -5)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên trục  $Ox$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

- A.  $(-4; 0)$ .      B.  $(-2; 0)$ .      C.  $(2; 0)$ .      D.  $(4; 0)$ .

**Lời giải**

Do  $C \in Ox$  nên gọi tọa độ điểm  $C$  là:  $C(x; 0)$ .

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2; -3)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (x-1; 2)$ .

Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow 2(x-1) - 6 = 0$

$\Leftrightarrow 2(x-1) = 6 \Leftrightarrow x = 4$ . Vậy  $C(4; 0)$ .

**Câu 14:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-3;2)$ ,  $B(4;3)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc trục  $Ox$  và có hoành độ dương để tam giác  $MAB$  vuông tại  $M$ .

- A.  $M(7;0)$ .      B.  $M(-2;0)$ .      C.  $M(9;0)$ .      D.  $M(3;0)$ .

**Lời giải**

Ta có  $M \in Ox \Leftrightarrow M(m;0)$  (theo giả thiết thì  $m > 0$ )

Ta có  $\overrightarrow{AM} = (m+3; -2)$ ,  $\overrightarrow{BM} = (m-4; -3)$

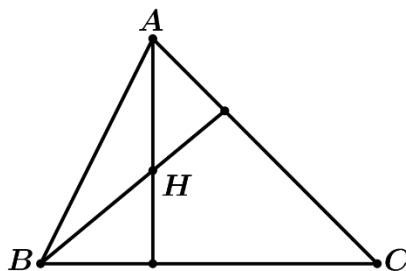
Tam giác  $ABM$  vuông tại  $M \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \Leftrightarrow (m+3)(m-4) + (-2)(-3) = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \text{ (tm)} \\ m = -2 \text{ (l)} \end{cases}. \text{ Vậy } M(3;0).$$

**Câu 15:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(5;3)$ ,  $B(2;-1)$ ,  $C(-1;5)$ . Tìm tọa độ điểm  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$ .

- A.  $H(3;2)$ .      B.  $H(3;-2)$ .      C.  $H\left(2; \frac{7}{3}\right)$ .      D.  $H\left(-2; -\frac{7}{3}\right)$ .

**Lời giải**



Gọi  $H(x;y)$  là trực tâm của tam giác  $ABC$ . Khi đó  $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} (*)$ .

$$\overrightarrow{AH} = (x-5; y-3); \overrightarrow{BC} = (-3; 6); \overrightarrow{BH} = (x-2; y+1); \overrightarrow{AC} = (-6; 2).$$

$$\text{Khi đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases} -3(x-5) + 6(y-3) = 0 \\ -6(x-2) + 2(y+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y = -1 \\ 3x - y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}. \text{ Vậy } H(3;2).$$

**Câu 16:** Cho  $A(0;3)$ ,  $B(4;2)$ . Điểm  $D$  thỏa  $\overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0}$ , tọa độ  $D$  là:

- A.  $(-3;3)$ .      B.  $(8;-2)$ .      C.  $(-8;2)$ .      D.  $\left(2; \frac{5}{2}\right)$ .

**Lời giải**

$$\text{Đặt } D(x;y): \overrightarrow{OD} + 2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} = \vec{0} \Leftrightarrow (x;y) + 2(x;3-y) - 2(4-x;2-y) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - 8 = 0 \\ y + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = -2 \end{cases} \Rightarrow D(8;-2).$$



**Câu 17:** Cho  $A(1;2), B(-2;6)$ . Điểm  $M$  trên trục  $Oy$  sao cho ba điểm  $A, B, M$  thẳng hàng thì tọa độ điểm  $M$  là:

- A.**  $\left(0; \frac{10}{3}\right)$ .      **B.**  $\left(0; -\frac{10}{3}\right)$ .      **C.**  $\left(\frac{10}{3}; 0\right)$ .      **D.**  $\left(-\frac{10}{3}; 0\right)$ .

**Lời giải**

Đặt  $M(0; y)$ . Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-2-1; 6-2) = (-3; 4)$ ,  $\overrightarrow{MA} = (1; 2-y)$ .

Yêu cầu bài toán là  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{MA} \Leftrightarrow \frac{1}{-3} = \frac{2-y}{4} \Leftrightarrow 3y = 10 \Leftrightarrow y = \frac{10}{3}$

**Câu 18:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $B(5;-4), C(3;7)$ . Tọa độ của điểm  $E$  đối xứng với  $C$  qua  $B$  là

- A.**  $E(1;18)$ .      **B.**  $E(7;15)$ .      **C.**  $E(7;-1)$ .      **D.**  $E(7;-15)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $E$  đối xứng với  $C$  qua  $B \Rightarrow B$  là trung điểm đoạn thẳng  $EC$

$$\text{Do đó ta có: } \begin{cases} 5 = \frac{x_E + 3}{2} \\ -4 = \frac{y_E + 7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 7 \\ y_E = -15 \end{cases} \Rightarrow E(7; -15)$$

**Câu 19:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các điểm  $A(-3;3), B(1;4), C(2;-5)$ . Tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$  là:

- A.**  $M\left(\frac{1}{6}; \frac{5}{6}\right)$ .      **B.**  $M\left(-\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ .      **C.**  $M\left(\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right)$ .      **D.**  $M\left(\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}\right)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3-x_M) - (2-1) = 4(x_M-2) \\ 2(3-y_M) - (-5-4) = 4(y_M+5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{6} \\ y_M = -\frac{5}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}; -\frac{5}{6}\right).$$

**Câu 20:** Cho  $\vec{a} = (2016\sqrt{2015}; 0)$ ,  $\vec{b} = (4; x)$ . Hai vector  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương nếu

- A.**  $x = 504$ .      **B.**  $x = 0$ .      **C.**  $x = -504$ .      **D.**  $x = 2017$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\vec{a}, \vec{b}$  cùng phương  $\Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Rightarrow x = 0$ .

**Câu 21:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (m-2; 2n+1), \vec{b} = (3; -2)$ . Nếu  $\vec{a} = \vec{b}$  thì

- A.**  $m = 5, n = -3$ .      **B.**  $m = 5, n = -\frac{3}{2}$ .      **C.**  $m = 5, n = -2$ .      **D.**  $m = 5, n = 2$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 = 3 \\ 2n+1 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ n = -\frac{3}{2} \end{cases}.$$



**Câu 22:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho  $A(2;-1)$ . Điểm  $B$  là điểm đối xứng của  $A$  qua trục hoành.

Tọa độ điểm  $B$  là:

- A.  $B(2;1)$ .                      B.  $B(-2;-1)$ .                      C.  $B(1;2)$ .                      D.  $B(1;-2)$ .

**Lời giải**

Ta có  $B$  là điểm đối xứng của  $A$  qua trục hoành  $\Rightarrow B(2;1)$ .

**Câu 23:** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(3;-1), B(-4;2), C(4;3)$ . Tìm  $D$  để  $ABDC$  là hình bình hành?

- A.  $D(3;6)$ .                      B.  $D(-3;6)$ .                      C.  $D(3;-6)$ .                      D.  $D(-3;-6)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $ABDC$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} -4-3 = x_D-4 \\ 2+1 = y_D-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -3 \\ y_D = 6 \end{cases} \Rightarrow D(-3;6)$ .

**Câu 24:** Cho  $K(1;-3)$ . Điểm  $A \in Ox, B \in Oy$  sao cho  $A$  là trung điểm  $KB$ . Tọa độ  $\overrightarrow{OB} - 2\overrightarrow{OA}$  là:

- A.  $(-1;3)$ .                      B.  $\left(\frac{1}{3};0\right)$ .                      C.  $(0;3)$ .                      D.  $(1;-3)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $A \in Ox, B \in Oy \Rightarrow A(x;0), B(0;y)$

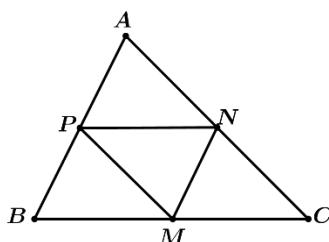
Điểm  $A$  là trung điểm  $KB \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1+0}{2} \\ 0 = \frac{-3+y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 3 \end{cases}$ . Vậy  $B(0;3)$ .

Khi đó  $\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (0;3) - 2\left(\frac{1}{2};0\right) = (-1;3)$ .

**Câu 25:** Cho  $M(2;0), N(2;2), P(-1;3)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$  của  $\triangle ABC$ . Tọa độ  $B$  là:

- A.  $(1;1)$ .                      B.  $(-1;-1)$ .                      C.  $(-1;1)$ .                      D.  $(1;-1)$ .

**Lời giải**



Ta có  $BPNM$  là hình bình hành nên  $\begin{cases} x_B + x_N = x_P + x_M \\ y_B + y_N = y_P + y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B + 2 = -1 + 2 \\ y_B + 2 = 3 + 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = -1 \\ y_B = 1 \end{cases}$ .

**Câu 26:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các điểm  $A(1;-2), B(0;3), C(-3;4), D(-1;8)$ . Ba điểm nào trong 4 điểm đã cho thẳng hàng?

- A.  $A, B, C$ .                      B.  $B, C, D$ .                      C.  $A, B, D$ .                      D.  $A, C, D$ .



## Lời giải

Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-1; 5)$  và  $\overrightarrow{DA} = (-2; 10) \Rightarrow \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{AB} \Rightarrow A, B, D$  thẳng hàng.

**Câu 27:** Tam giác  $ABC$  có  $C(-2; -4)$ , trọng tâm  $G(0; 4)$ , trung điểm cạnh  $BC$  là  $M(2; 0)$ . Tọa độ  $A$  và  $B$  là:

**A.**  $A(4; 12), B(4; 6)$ .

**B.**  $A(-4; -12), B(6; 4)$ .

**C.**  $A(-4; 12), B(6; 4)$ .

**D.**  $A(4; -12), B(-6; 4)$ .

## Lời giải

Điểm  $M$  là trung điểm của  $BC \Rightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C = 2.2 - (-2) = 6 \\ y_B = 2y_M - y_C = 2.0 - (-4) = 4 \end{cases} \Rightarrow B(6; 4)$

Gọi  $A(x_A; y_A) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2 - x_A; -y_A), \overrightarrow{GM} = (2; -4)$

Ta có:  $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{GM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x_A = 3.2 \\ -y_A = 3.(-4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = -4 \\ y_A = 12 \end{cases} \Rightarrow A(-4; 12).$

**Câu 28:** Sự chuyển động của một ca nô được thể hiện trên một mặt phẳng tọa độ như sau: Ca nô khởi hành từ vị trí  $A(2; 3)$  chuyển động thẳng đều với vận tốc (tính theo giờ) được biểu thị bởi vector  $\vec{v} = (2; 1)$ . Xác định vị trí Ca nô (trên mặt phẳng tọa độ) tại thời điểm sau khi khởi hành 2 giờ.

**A.**  $(4; 6)$ .

**B.**  $(4; 2)$ .

**C.**  $(5; 6)$ .

**D.**  $(6; 5)$ .

## Lời giải

Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  ta biểu diễn  $\vec{v} = (2; 1)$  bởi vector  $\overrightarrow{OC} = (2; 1)$ . Gọi  $B(x; y)$  là điểm biểu diễn vị trí của Ca nô tại thời điểm sau khi khởi hành 2 giờ.

Khi đó  $\overrightarrow{AB} = 2.\vec{v} = 2.\overrightarrow{OC} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = 2.2 \\ y - 3 = 2.1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 5 \end{cases} \Rightarrow B(6; 5).$

Vậy sau 2 giờ khởi hành Ca nô đến vị trí điểm  $B(6; 5)$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$  với  $A(4\sqrt{3}; -1), B(0; 3), C(8\sqrt{3}; 3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $AC = 8$

b) Tam giác  $ABC$  cân tại  $B$

b)  $S_{\triangle ABC} = 16\sqrt{3}$

b)  $\angle ABC = 30^\circ$

## Lời giải



a) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-4\sqrt{3}; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{(-4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$

$$\overrightarrow{AC} = (4\sqrt{3}; 4) \Rightarrow AC = \sqrt{(4\sqrt{3})^2 + 4^2} = 8$$

$$\overrightarrow{BC} = (8\sqrt{3}; 0) \Rightarrow BC = \sqrt{(8\sqrt{3})^2 + 0^2} = 8\sqrt{3}.$$

Ta thấy  $AB = AC = 8$  nên tam giác  $ABC$  cân tại  $A$ .

b) Sai: Chu vi tam giác  $ABC$  là  $2p = AB + AC + BC = 8 + 8 + 8\sqrt{3} = 8(2 + \sqrt{3})$ .

c) Sai: Nửa chu vi tam giác là  $p = 4(2 + \sqrt{3})$ .

Diện tích tam giác:  $S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-AB)(p-AC)(p-BC)} = 16\sqrt{3}$ .

d) Đúng: Ta có:  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB.AC} = \frac{8^2 + 8^2 - (8\sqrt{3})^2}{2.8.8} = -\frac{1}{2} \Rightarrow BAC = 120^\circ$ .

Vì tam giác  $ABC$  cân tại  $A$  nên  $ABC = ACB = 30^\circ$ .

**Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\Delta ABC$  với  $A(4;6), B(5;1), C(1;-3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} = (1; -5)$

b) Tọa độ điểm  $D$  thuộc  $Ox$  cách đều hai điểm  $A, B$  có hoành độ bằng 13

c)  $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right)$  là tọa độ tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$

d) Bán kính  $R$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  bằng  $\frac{\sqrt{13}}{2}$

### Lời giải

a) Đúng:  $\overrightarrow{AB} = (1; -5)$

b) Sai: Gọi  $D(x; 0) \in Ox \Rightarrow AD = \sqrt{(x-4)^2 + (0-6)^2} = \sqrt{x^2 - 8x + 52}$ ;

Khi đó  $BD = \sqrt{(x-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{x^2 - 10x + 26}$ .

Ta có:  $AD^2 = BD^2 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 52 = x^2 - 10x + 26 \Leftrightarrow 2x = -26 \Leftrightarrow x = -13$ . Vậy  $D(-13; 0)$ .

c) Đúng: Gọi  $I(x; y)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\Delta ABC$ .

$$\text{Ta có: } IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-6)^2 = (x-5)^2 + (y-1)^2 \\ (x-4)^2 + (y-6)^2 = (x-1)^2 + (y+3)^2 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 10y = -26 \\ -6x - 18y = -42 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{ nên } I\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

d) Sai: Bán kính đường tròn là:  $R = IA = \sqrt{\left(-\frac{1}{2} - 4\right)^2 + \left(\frac{5}{2} - 6\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{2}.$

**Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho bốn điểm  $A(7; -3), B(8; 4), C(1; 5)$  và  $D(0; -2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- $\overrightarrow{AB} = (1; 7), \overrightarrow{AC} = (-6; 8)$
- $A, B, C$  là ba đỉnh một tam giác.
- Tọa độ điểm  $K(8; 4)$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ .
- Bốn điểm  $A, B, C, D$  là bốn đỉnh của một hình vuông.

**Lời giải**

a) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (1; 7), \overrightarrow{AC} = (-6; 8).$

b) Sai: Vì  $\frac{1}{-6} \neq \frac{7}{8}$  nên hai vector  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  không cùng phương, suy ra ba điểm  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

c) Đúng: Gọi  $K(x; y)$  là điểm cần tìm ta có:  $\overrightarrow{AK} = (x - 7; y + 3)$

$$\overrightarrow{BK} = (x - 8; y - 4); \overrightarrow{BC} = (-7; 1).$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \text{ (do } AK \perp BC) \\ \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{BC} \text{ cùng phu'ong} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7(x - 7) + 1(y + 3) = 0 \\ \frac{x - 8}{-7} = \frac{y - 4}{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7x + y = -52 \\ x + 7y = 36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy  $K(8; 4).$

d) Sai: Ta có:  $\overrightarrow{DC} = (1; 7) = \overrightarrow{AB} \Rightarrow ABCD$  là hình bình hành (1)

Mặt khác:  $\overrightarrow{AD} = (-7; 1)$  và  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 1 \cdot (-7) + 7 \cdot 1 = 0 \Rightarrow AB \perp AD$  (2);  $AB = AD = 5\sqrt{2}$  (3).

Từ (1), (2), (3) suy ra  $ABCD$  là bốn đỉnh của một hình vuông.

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(3; -5), B(1; 0)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- $I\left(2; \frac{5}{2}\right)$  là trung điểm của  $AB$
- Tọa độ điểm  $C$  sao cho  $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$  là  $C(6; -15)$



c) Tọa độ điểm  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $C$  là  $D(9;25)$

d) Tọa độ điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k = -3$  là  $M\left(\frac{3}{2}; \frac{5}{4}\right)$

### Lời giải

a) Sai:  $I\left(2; -\frac{5}{2}\right)$  là trung điểm của  $AB$

b) Đúng: Gọi  $C(x_C; y_C)$ . Ta có:  $\overrightarrow{OC} = (x_C; y_C)$ ,  $\overrightarrow{AB} = (-2; 5) \Rightarrow -3\overrightarrow{AB} = (6; -15)$ ;

Khi đó  $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 6 \\ y_C = -15 \end{cases} \Rightarrow C(6; -15)$ .

c) Sai: Điểm  $D$  đối xứng với  $A$  qua  $C$  hay  $C$  là trung điểm của  $AD \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_D}{2} \\ y_C = \frac{y_A + y_D}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 2x_C - x_A = 2 \cdot 6 - 3 = 9 \\ y_D = 2y_C - y_A = 2(-15) - (-5) = -25 \end{cases} \Rightarrow D(9; -25)$ .

d) Sai:  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} = k\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A - x_M = k(x_B - x_M) \\ y_A - y_M = k(y_B - y_M) \end{cases}$ .

Suy ra:  $\begin{cases} x_M = \frac{x_A - k \cdot x_B}{1 - k} \\ y_M = \frac{y_A - k \cdot y_B}{1 - k} \end{cases}$  mà  $k = 3$  nên  $\begin{cases} x_M = \frac{3 + 3 \cdot 1}{4} = \frac{3}{2} \\ y_M = \frac{-5 + 3 \cdot 0}{4} = -\frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$ .

**Câu 5:** Cho ba điểm  $A(-1;1), B(2;1), C(-1;-3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

b)  $S_{\triangle ABC} = 12$

c) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi  $D(-4; -3)$

d) Điểm  $N$  thuộc trục  $Oy$  sao cho  $N$  cách đều  $B, C$  có tung độ bằng  $-\frac{5}{8}$

### Lời giải

a) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AB} = (3; 0)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (0; -4)$ .

Xét số thực  $k$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases} 3 = k \cdot 0 \\ 0 = k(-4) \end{cases}$  (vô lí).



Do vậy không tồn tại số  $k$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$  hay hai vectơ  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  không cùng phương; suy ra ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng. Vậy  $A, B, C$  là ba đỉnh của một tam giác.

b) Sai: Ta có  $AB = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3, AC = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4, \overrightarrow{BC} = (-3; -4), BC = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$

Dễ thấy  $AB^2 + AC^2 = BC^2$  nên  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .

Chu vi tam giác  $ABC$  là:  $2p = AB + AC + BC = 3 + 4 + 5 = 12.$

Diện tích tam giác là:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$

c) Đúng: Gọi  $D(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (-1 - x; -3 - y), \overrightarrow{AB} = (3; 0).$

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 - x = 3 \\ -3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow D(-4; -3)$

d) Đúng: Gọi  $N(0; y) \Rightarrow \begin{cases} BN^2 = (0 - 2)^2 + (y - 1)^2 \\ CN^2 = (0 + 1)^2 + (y + 3)^2 \end{cases}$

Điểm  $N$  cách đều  $B$  và  $C \Leftrightarrow BN = CN \Leftrightarrow BN^2 = CN^2$

$\Leftrightarrow 2^2 + (y - 1)^2 = 1^2 + (y + 3)^2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 5 = y^2 + 6y + 10 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{8} \Rightarrow N\left(0; -\frac{5}{8}\right)$

**Câu 6:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(4; 1), B(2; 4), C(2; -2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $ABCD$  là hình bình hành khi  $D(4; 5)$

b) Tọa độ điểm  $E$  để tam giác  $BCE$  nhận điểm  $A$  làm trọng tâm là  $E(8; 1)$

c) Tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  là  $H\left(\frac{13}{2}; 1\right)$

d) Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  là  $I\left(\frac{3}{4}; 1\right)$

**Lời giải**

a) Sai: Gọi  $D(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (2 - x; -2 - y), \overrightarrow{AB} = (-2; 3)$  nên  $ABCD$  là hình bình hành

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - x = -2 \\ -2 - y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \end{cases}$  hay  $D(4; -5).$

b) Đúng: Tam giác  $BCE$  nhận điểm  $A$  làm trọng tâm nên

$\begin{cases} x_A = \frac{x_B + x_C + x_E}{3} \\ y_A = \frac{y_B + y_C + y_E}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = \frac{2 + 2 + x_E}{3} \\ 1 = \frac{4 - 2 + y_E}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 8 \\ y_E = 1 \end{cases}$  nên  $E(8; 1).$



c) Đúng: Gọi  $H(x; y) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (x-4; y-1), \overrightarrow{BH} = (x-2; y-4); \overrightarrow{BC} = (0; -6), \overrightarrow{AC} = (-2; -3)$

$$H \text{ là trực tâm tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0(x-4) - 6(y-1) = 0 \\ -2(x-2) - 3(y-4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{13}{2} \\ y = 1 \end{cases} \text{ hay } H\left(\frac{13}{2}; 1\right)$$

d) Đúng: Gọi  $I(x; y)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

$$\text{Ta có: } IA = IB = IC \Leftrightarrow \begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \\ (x-4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8x - 2y + 17 = -4x - 8y + 20 \\ -8x - 2y + 17 = -4x + 4y + 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x + 6y = 3 \\ -4x - 6y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I\left(\frac{3}{4}; 1\right)$$

**Câu 7:** Cho  $A(1;1), B(2;4), C(10;-2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\triangle ABC$  vuông tại  $A$ .

b)  $S_{\triangle ABC} = 12$

c) Độ dài trung tuyến  $BN = \frac{\sqrt{13}}{2}$

d)  $I(6;1)$  là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC$ .

#### Lời giải

a) Đúng:  $AB = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}; BC = \sqrt{64+36} = 10; AC = \sqrt{81+9} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$ .

Khi đó  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = 100 \Rightarrow \triangle ABC$  vuông tại  $A$ .

b) Sai:  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{10} \cdot 3\sqrt{10} = 15$ .

c) Sai: Gọi  $N$  là trung điểm  $AC \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{1+10}{2} = \frac{11}{2} \\ y_N = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow N\left(\frac{11}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

Khi đó  $BN = \sqrt{\left(\frac{11}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} - 4\right)^2} = \frac{\sqrt{136}}{2}$ .



d) Đúng: Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle ABC \cdot \triangle ABC$  vuông tại  $A \Rightarrow I$  là trung điểm

$$BC \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{2 + 10}{2} = 6 \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4 - 2}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(6;1).$$

**Câu 8:** Cho hai điểm  $A(3;-5), B(1;0)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} = (-2;5)$

a) Tọa độ điểm  $C$  sao cho  $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB}$  là  $C(6;-5)$

c) Tọa độ điểm  $D$  đối xứng của  $A$  qua  $C$  có hoành độ bằng 7

d) Tọa độ điểm  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k = -3$  là  $M\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$

### Lời giải

a) Đúng: Gọi  $C(a;b) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (a,b); \overrightarrow{AB} = (-2;5)$

b) Sai:  $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 6 \\ b = -15 \end{cases}$  nên  $C(6;-15)$ .

c) Sai: Gọi  $D(c;d) \Rightarrow \overrightarrow{CD} = (c-6;d+15); \overrightarrow{AC} = (3;-10)$

Khi đó:  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \begin{cases} c-6=3 \\ d+15=-10 \end{cases} \Rightarrow D(9;-25)$

d) Đúng: Gọi  $M(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{MA} = (3-x;-5-y); \overrightarrow{MB} = (1-x;-y)$ .

Vì  $M$  chia đoạn  $AB$  theo tỉ số  $k = -3 \Rightarrow \overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \begin{cases} 3-x = -3(1-x) \\ -5-y = -3(-y) \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{4}\right)$

**Câu 9:** Cho ba điểm  $A(1;-2), B(0;4), C(3;2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} = (-1;6)$

b)  $\overrightarrow{AC} = (2;4); \overrightarrow{BC} = (3;-2)$

c) Tọa độ trung điểm của đoạn  $AB$  là  $I\left(\frac{1}{2};1\right)$

d) Tọa độ điểm  $N$  sao cho  $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0}$  là  $N(11;12)$

### Lời giải

a) Đúng:  $\overrightarrow{AB} = (-1;6)$

b) Đúng:  $\overrightarrow{AC} = (2;4); \overrightarrow{BC} = (3;-2)$



c) Đúng: Vì  $I$  là trung điểm của đoạn  $AB$  nên 
$$\begin{cases} x_I = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{-2+4}{2} = 1 \end{cases} \text{ nên } I\left(\frac{1}{2}; 1\right).$$

d) Sai: Gọi  $N(x; y)$ . Ta có  $\overrightarrow{AN} = (x-1; y+2); \overrightarrow{BN} = (x; y-4); \overrightarrow{CN} = (x-3; y-2)$

Vi  $\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{BN} - 4\overrightarrow{CN} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1+2x-4(x-3)=0 \\ y+2+2(y-4)-4(y-2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=11 \\ y=2 \end{cases} \text{ nên } N(11; 2)$

**Câu 10:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(2;1), B(-1;-2), C(-3;2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $AC$  là  $M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

b)  $\overrightarrow{AB} = (-3; -3), \overrightarrow{AC} = (-5; 1)$

c) Ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

d) Tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$  là  $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

**Lời giải**

a) Đúng: Gọi  $M$  là trung điểm  $AC \Rightarrow \begin{cases} x_M = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2} \\ y_M = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right).$

b) Đúng: Tính được  $\overrightarrow{AB} = (-3; -3), \overrightarrow{AC} = (-5; 1)$  dẫn đến hai vector đó không cùng phương.

c) Sai: Nói cách khác ba điểm  $A, B, C$  tạo thành một tam giác.

d) Sai: Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC \Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{2-1-3}{3} = -\frac{2}{3} \\ y_G = \frac{1-2+2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right).$

**Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(-2;5), B(-4;-2), C(1;5)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b)  $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$  là tọa độ trọng tâm của tam giác  $ABC$ .

c) Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành khi đó tọa độ điểm  $D$  là  $D(3;10)$

d)  $\angle ACB = 45^\circ$



## Lời giải

a) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (-2; -7), \overrightarrow{AC} = (3; 0)$ .

Do  $\frac{3}{-2} \neq \frac{0}{-7}$  nên  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  không cùng phương nên ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Đúng: Do  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  nên  $G\left(-\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$ .

c) Sai: Giả sử  $D(x; y)$  nên ta có  $\overrightarrow{AB} = (-2; -7), \overrightarrow{DC} = (1-x; 5-y)$ .

Tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành nếu  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = 1-x \\ -7 = 5-y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 12 \end{cases}$  nên  $D(3; 12)$ .

d) Sai: Ta có:  $AB = \sqrt{(-2)^2 + (-7)^2} = \sqrt{53}; AC = \sqrt{[1-(-2)]^2 + (5-5)^2} = 3,$

$$BC = \sqrt{[1-(-4)]^2 + [5-(-2)]^2} = \sqrt{74}.$$

Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \cdot 3 + (-7) \cdot 0 = -6$ .

Suy ra:  $\cos BAC = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-6}{\sqrt{53} \cdot 3} = -\frac{2\sqrt{53}}{53}$  nên  $BAC \approx 106^\circ$ .

Ta có:  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 2 \cdot 5 + 7 \cdot 7 = 59$ .

Suy ra  $\cos ABC = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{59}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{74}}$  nên  $ABC \approx 20^\circ$ .

Vậy  $ACB = 180^\circ - (BAC + ABC) \approx 180^\circ - (106^\circ + 20^\circ) = 54^\circ$ .

**Câu 12:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$  có các đỉnh thỏa mãn  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j}, \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j}, \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + \vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $A(2; -1), B(1; 1), C(4; 1)$

b)  $E$  là trung điểm  $AB$  nên  $E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$

c)  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$  nên  $G\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$

d) Điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành nên  $D(2; -1)$

## Lời giải

a) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} - \vec{j} \Rightarrow A(2; -1), \overrightarrow{OB} = \vec{i} + \vec{j} \Rightarrow B(1; 1), \overrightarrow{OC} = 4\vec{i} + \vec{j} \Rightarrow C(4; 1)$ .



b) Đúng:  $E$  là trung điểm  $AB$  nên  $x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$ ,  $y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{-1+1}{2} = 0$  hay

$$E\left(\frac{3}{2}; 0\right)$$

c) Sai:  $G$  là trọng tâm  $\triangle ABC$  nên  $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{2+1+4}{3} = \frac{7}{3}$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-1+1+1}{3} = \frac{1}{3} \text{ hay } G\left(\frac{7}{3}; \frac{1}{3}\right).$$

d) Sai: Ta có:  $ABCD$  là hình bình hành

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_A = x_C - x_B \\ y_D - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 2 = 4 - 1 \\ y_D + 1 = 1 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = -1 \end{cases}. \text{ Vậy } D(5; -1).$$

**Câu 13:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các điểm  $A(-4;1), B(2;4), C(2;-2)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tọa độ điểm  $D$  sao cho  $C$  là trọng tâm tam giác  $ABD$  là  $D(8;11)$

b) Tọa độ điểm  $E$  thuộc trục hoành sao cho  $A, B, E$  thẳng hàng là  $E(-6;0)$

c)  $\overrightarrow{BC} = (0; -6), \overrightarrow{AC} = (6; -3)$

d) Tọa độ  $F$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CF}$  là  $F(20;5)$

### Lời giải

a) Sai: Điểm  $C$  là trọng tâm tam giác  $ABD$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_C = \frac{x_A + x_B + x_D}{3} \\ y_C = \frac{y_A + y_B + y_D}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 = \frac{-4 + 2 + x_D}{3} \\ -2 = \frac{1 + 4 + y_D}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = -11 \end{cases} \text{ nên } D(8; -11).$$

b) Đúng: Gọi  $E(x;0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{AE} = (x+4; -1), \overrightarrow{AB} = (6;3)$ .

Ba điểm  $A, B, E$  thẳng hàng  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}$  cùng phương  $\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \frac{x+4}{6} = \frac{-1}{3} \Leftrightarrow x+4 = -2 \Leftrightarrow x = -6$ .

Vậy  $E(-6;0)$ .

c) Đúng: Gọi  $F(x; y)$ . Ta có:  $\overrightarrow{AF} = (x+4; y-1), \overrightarrow{BC} = (0; -6), \overrightarrow{AC} = (6; -3)$

$$\Rightarrow -2\overrightarrow{AC} = (-12; 6), \overrightarrow{CF} = (x-2; y+2), 2\overrightarrow{CF} = (2x-4; 2y+4).$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CF} = (2x-16; 2y+4).$$



d) Sai: Ta có  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{CF} \Leftrightarrow \begin{cases} x+4=2x-16 \\ y-1=2y+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=20 \\ y=-5 \end{cases}$ . Vậy  $F(20; -5)$ .

**Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(-2; -1), B(1; 3), C(2; -3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $A, B, C$  là ba đỉnh một tam giác.

b) Điểm  $I(0; -2)$  là trung điểm của  $AB$

b) Điểm  $M$  thuộc  $Ox$  sao cho  $AM + BM$  bé nhất có hoành độ bằng  $\frac{5}{4}$

c) Điểm  $N$  thuộc  $Oy$  sao cho  $BN + CN$  bé nhất có tung độ bằng 2

### Lời giải

a) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{AB} = (3; 4), \overrightarrow{AC} = (4; -2)$  vì  $\frac{3}{4} \neq \frac{4}{-2} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$  không cùng phương.

Vậy  $A, B, C$  không thẳng hàng hay  $A, B, C$  là ba đỉnh một tam giác.

b) Sai: Trung điểm  $AB$  có tọa độ  $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$

c) Sai: Do  $y_A \cdot y_B = -1.3 < 0$  nên hai điểm  $A, B$  nằm khác phía so với trục  $Ox$ . Vì  $M$  thuộc  $Ox$  mà  $AM + BM$  bé nhất nên  $A, M, B$  thẳng hàng hay  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$  cùng phương.

Gọi  $M(x; 0) \in Ox \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (x+2; 1)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}$  cùng phương  $\Leftrightarrow \frac{x+2}{3} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 4x+8=3 \Leftrightarrow x = -\frac{5}{4}$ .

Vậy  $M\left(-\frac{5}{4}; 0\right)$ .

d) Sai: Do  $x_B \cdot x_C = 1.2 > 0$  nên hai điểm  $B, C$  nằm cùng phía so với trục  $Oy$ .

Lấy  $C'$  đối xứng với  $C$  qua  $Oy$ , suy ra  $C'(-2; -3)$  (lúc này  $C'$  và  $B$  khác phía so với trục  $Oy$ )

Vì  $N$  thuộc  $Oy$  nên  $CN = C'N$ .

Do vậy  $BN + CN = BN + C'N$  mà tổng này bé nhất khi và chỉ khi  $B, N, C'$  thẳng hàng hay  $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BN}$  cùng phương.

Gọi  $N(0; y) \in Oy \Rightarrow \overrightarrow{BN} = (-1; y-3), \overrightarrow{BC'} = (-3; -6)$ .

Ta có  $\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{BN}$  cùng phương  $\Leftrightarrow \frac{-1}{-3} = \frac{y-3}{-6} \Leftrightarrow 6 = -3y+9 \Leftrightarrow y = 1$ .

Vậy  $N(0; 1)$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho các điểm  $A(-3;3), B(1;4), C(2;-1)$ . Tọa độ điểm  $M(a;b)$  thỏa mãn  $2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM}$ . Tính  $b - a$

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{CM} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3 - x_M) - (2 - 1) = 4(x_M - 2) \\ 2(3 - y_M) - (-1 - 4) = 4(y_M + 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{1}{6} \\ y_M = \frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{6}; \frac{7}{6}\right).$$

$$\text{Khi đó } \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = \frac{7}{6} \end{cases} \Rightarrow b - a = 1.$$

**Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;3), B(-3;1), C(5;-6)$ . Biết rằng điểm  $F(0;a)$  trên  $Oy$  thỏa mãn  $|\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất. Tính  $2a + 9$

**Lời giải**

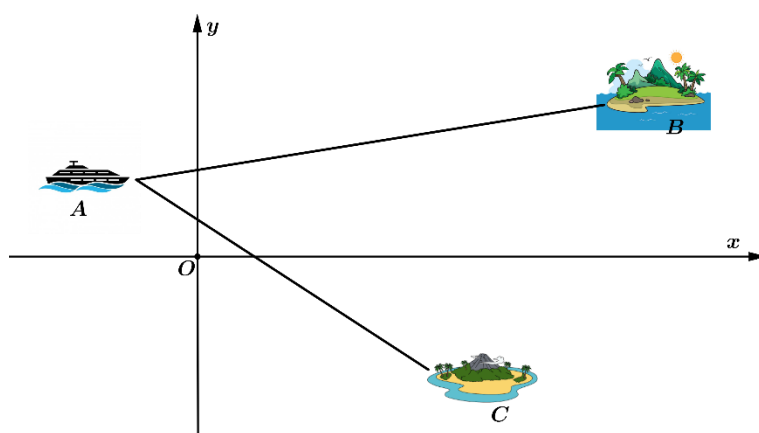
Gọi  $J$  là điểm sao cho  $\overrightarrow{JA} + 3\overrightarrow{JB} - 2\overrightarrow{JC} = \vec{0} \Rightarrow J(-9;9)$ .

Suy ra  $\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FJ} \Rightarrow |\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC}| = 2FJ$ .

Để  $|\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC}|$  đạt giá trị nhỏ nhất khi  $FJ$  nhỏ nhất.

Khi đó  $F$  là hình chiếu của  $J$  trên  $Oy$  nên  $F(0;9) \Rightarrow a = 9 \Rightarrow 2a + 9 = 27$ .

**Câu 3:** Một trò chơi trên máy tính đang mô phỏng một vùng biển có hai hòn đảo nhỏ có tọa độ  $B(50;30), C(32;-32)$ . Một con tàu đang neo đậu tại điểm  $A(-10;20)$ . Cho biết một đơn vị trên trục tọa độ tương ứng với 1km. Tính tổng khoảng cách từ con tàu đến mỗi hòn đảo.

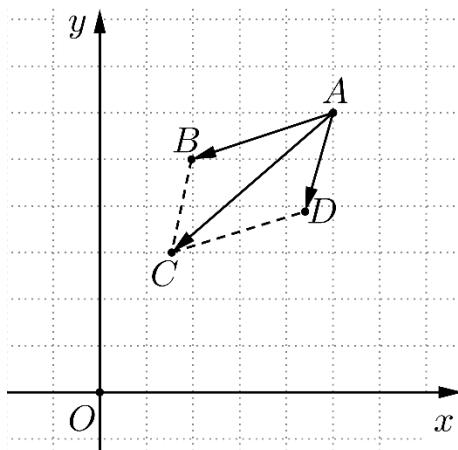
**Lời giải**

Vì con tàu đang neo đậu tại điểm  $A(-10;20)$  và hòn đảo  $B(50;30)$  nên khoảng cách từ con tàu đến hòn đảo  $B$  là:  $AB = \sqrt{(50+10)^2 + (30-20)^2} \approx 60,8 \text{ (km)}$

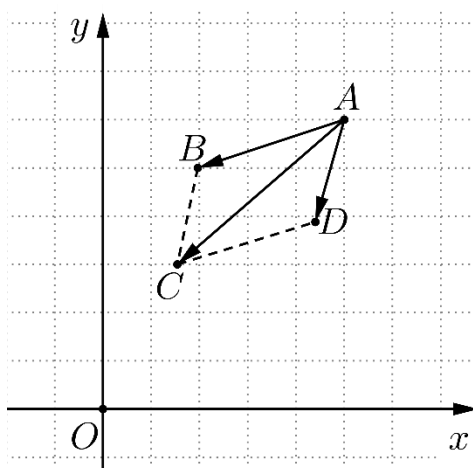


Vì con tàu đang neo đậu tại điểm  $A(-10;20)$  và hòn đảo  $C(32;-23)$  nên khoảng cách từ con tàu đến hòn đảo  $C$  là  $AC = \sqrt{(32+10)^2 + (-23-20)^2} \approx 60,1(\text{km})$

**Câu 4:** Hai máy tời kéo tàu biển được đặt ở hai vị trí  $B, D$  dọc theo kênh đào được minh họa ở hình dưới đây. Hai máy tời đó kéo một con tàu từ vị trí  $A$  hướng đến vị trí  $C$ . Biết tọa độ các điểm  $A\left(\frac{13}{2};8\right), B(3;7), D(6;4)$ . Biết điểm  $C(a;b)$  tính  $a+b$ .



**Lời giải**



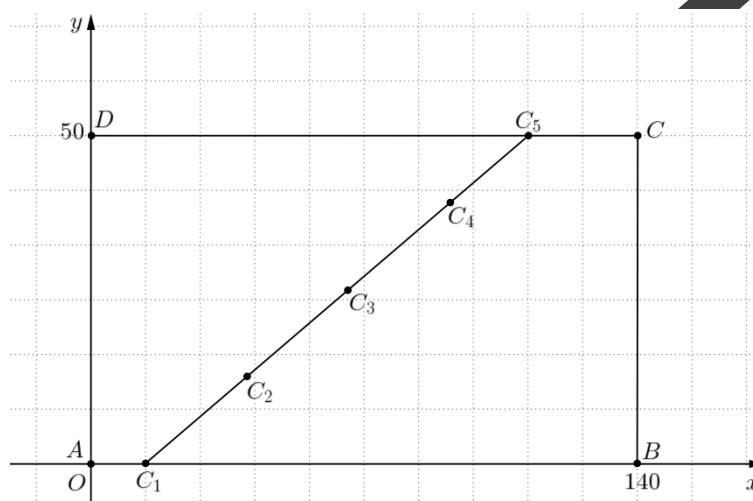
Ta có  $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{7}{2}; -1\right), \overrightarrow{AD} = \left(-\frac{1}{2}; -4\right)$ .

Mặt khác tàu di chuyển từ  $A$  đến  $C$  nên  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AC} = (-4; -5)$

$$\text{Gọi } C(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{AC} = \left(x - \frac{13}{2}; y - 8\right) \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{13}{2} = -4 \\ y - 8 = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{5}{2} \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 5,5$$

**Câu 5:** Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật  $ABCD$  với độ dài  $AB = 140\text{m}$ ,  $AD = 50\text{m}$ . Người ta dự định làm 5 cột điện liên tiếp thẳng hàng và cách đều nhau. Cột thứ nhất nằm trên bờ  $AB$  và cách đỉnh  $A$  một khoảng bằng  $10\text{m}$ . Cột thứ năm nằm trên bờ  $CD$  và cách đỉnh  $C$  một khoảng bằng  $30\text{m}$ . Khoảng cách từ cột thứ tư đến bờ  $AD$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**



Chọn hệ trục như hình vẽ  $A(0;0), B(140;0), C(140;50), D(0;50)$ .

Chọn vị trí 5 cột điện ở  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  như hình vẽ.

Vì  $C_1 \in AB$  và cách đỉnh  $A$  một đoạn bằng 10 m nên  $C_1(10;0)$ .

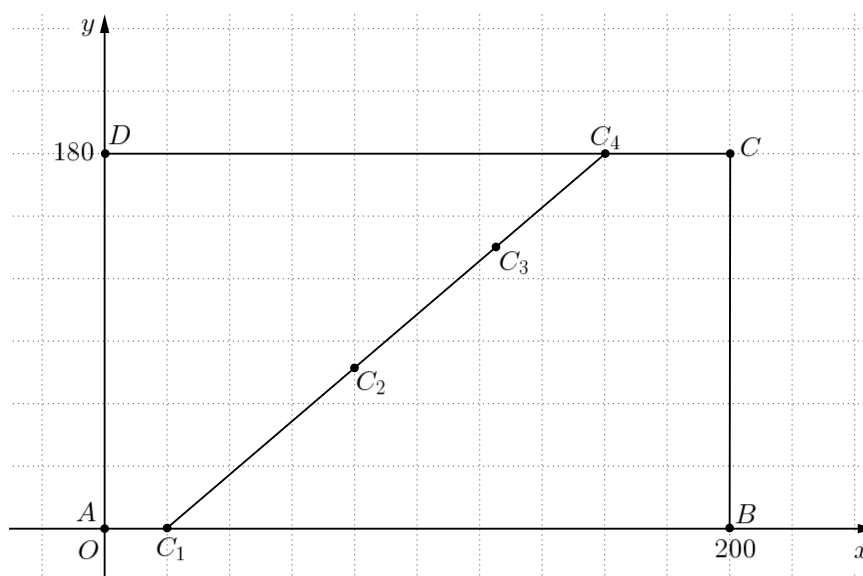
Vì  $C_5 \in BD$  và cách đỉnh  $C$  một đoạn bằng 30 m nên  $C_5(110;50)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{C_1C_4} = \frac{3}{4}\overrightarrow{C_1C_5} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OC_4} = 3\overrightarrow{OC_5} + \overrightarrow{OC_1} \Rightarrow C_4(85;37,5) \Rightarrow d(C_4, AD) = 85 \text{ m}$ .

**Câu 6:** Để kéo đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật  $ABCD$  với độ dài  $AB = 200 \text{ m}$ ,  $AD = 180 \text{ m}$  người ta dự định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều. Cột thứ nhất nằm trên bờ  $AB$  và cách đỉnh  $A$  khoảng cách 20 m, cột thứ tư nằm trên bờ  $CD$  và cách đỉnh  $C$  một khoảng cách 30 m. Tính các khoảng cách từ vị trí các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ  $AB, AD$ .

### Lời giải

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho  $A(0;0), B(200;0), C(200;180), D(0;180)$ . Gọi vị trí các cột điện được trông là  $C_1, C_2, C_3, C_4$ .





Do  $C_1$  thuộc cạnh  $AB$  và  $AC_1 = 20$  nên  $C_1(20;0)$ , do  $C_4$  thuộc cạnh  $CD$  và  $C_4C = 30$  nên  $C_4(170;180)$ .

Suy ra  $\overrightarrow{C_1C_4} = (150;180)$  (1)

Do bốn cột điện  $C_1, C_2, C_3, C_4$  được trồng liên tiếp, cách đều trên một đường thẳng, nên  $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$  và  $\overrightarrow{C_1C_3} = \frac{2}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$ .

Gọi toạ độ của  $C_2$  đối với hệ trục đang xét là  $(x; y)$ . Khi đó  $\overrightarrow{C_1C_2} = (x - 20; y)$ .

Từ đó kết hợp với (1) và do  $\overrightarrow{C_1C_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{C_1C_4}$  nên 
$$\begin{cases} x - 20 = \frac{150}{3} = 50 \\ y = \frac{180}{3} = 60. \end{cases}$$

Suy ra  $x = 70, y = 60$ , tức là  $C_2(70;60)$ .

Khi đó  $d(C_2; AB) = d(C_2; Ox) = 60\text{ m}$  và  $d(C_2; AD) = d(C_2; Oy) = 70\text{ m}$ .

Hoàn toàn tương tự, cũng được  $d(C_3; AB) = 120\text{ m}$  và  $d(C_3; AD) = 120\text{ m}$ .

-----HẾT-----



## BÀI

## 05

## TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTO'

## A

## LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

## 1 Định nghĩa

Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Tích vô hướng của  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một số, kí hiệu là  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ , được xác định bởi công thức sau:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b})$

Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng vectơ  $\vec{0}$  ta quy ước  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

**Chú ý:**

- Với  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  ta có  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- Khi  $\vec{a} = \vec{b}$  tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{a}$  được kí hiệu là  $\vec{a}^2$  và số này được gọi là bình phương vô hướng của vectơ  $\vec{a}$
- Ta có:  $\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

## 2 Các tính chất của tích vô hướng

Người ta chứng minh được các tính chất sau đây của tích vô hướng: Với ba vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  bất kì và mọi số thực  $k$  ta có:

- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$  (tính chất giao hoán)
- $\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$  (tính chất phân phối)
- $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0$ ,  $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

**Nhận xét.** Từ các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ ta suy ra:

- $(\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2$
- $(\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 - \vec{b}^2$

## 3 Các tính chất của tích vô hướng của hai vectơ

Trên mặt phẳng tọa độ  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ . Khi đó tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  là:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

**Nhận xét:** Hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$ ,  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  đều khác vectơ  $\vec{0}$  vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

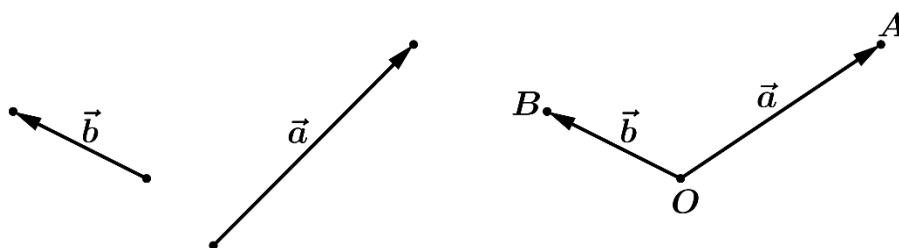
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

**4 Ứng dụng tích vô hướng của hai vector**

- **Độ dài của vector:** Độ dài của vector  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  được tính theo công thức:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$
- **Góc giữa hai vector:** Từ định nghĩa tích vô hướng của hai vector ta suy ra kết luận nếu  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$  đều khác  $\vec{0}$  thì ta có:  $\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ .
- **Khoảng cách giữa hai điểm:** Khoảng cách giữa hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$  được tính theo công thức:  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .

**5 Góc giữa hai vector**

**Định nghĩa:** Cho hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  đều khác vector  $\vec{0}$ . Từ một điểm  $O$  bất kì ta vẽ  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$  và  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ . Góc  $AOB$  với số đo từ  $0^\circ$  đến  $180^\circ$  được gọi là góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Ta kí hiệu góc giữa hai vector  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là  $(\vec{a}, \vec{b})$ . Nếu  $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$  thì ta nói rằng  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  vuông góc với nhau, kí hiệu là  $\vec{a} \perp \vec{b}$  hoặc  $\vec{b} \perp \vec{a}$ .



**Chú ý:** Từ định nghĩa ta có  $(\vec{a}, \vec{b}) = (\vec{b}, \vec{a})$ .

**B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN****Dạng 1: Xác định tích vô hướng của hai vectơ****Phương pháp:**

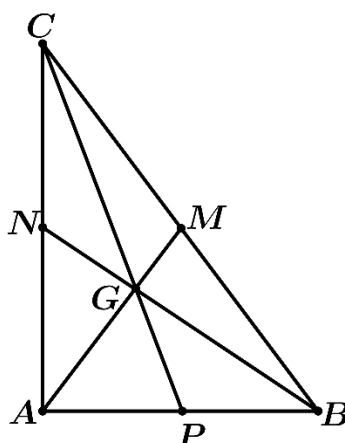
- Dựa vào định nghĩa  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}; \vec{b})$
- Sử dụng tính chất và các hằng đẳng thức của tích vô hướng của hai vectơ

**BÀI TẬP TỰ LUẬN**

**Bài tập 1:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $BC = 2a$  và  $G$  là trọng tâm.

- Tính các tích vô hướng:  $\vec{BA} \cdot \vec{BC}$ ;  $\vec{BC} \cdot \vec{CA}$
- Tính giá trị của biểu thức  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB}$
- Tính giá trị của biểu thức  $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA}$

**Lời giải**



a) Theo định nghĩa tích vô hướng ta có  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = |\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}| \cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = 2a^2 \cos(\vec{BA}, \vec{BC})$ .

Mặt khác  $\cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = \cos ABC = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$  nên  $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = a^2$

Ta có  $\vec{BC} \cdot \vec{CA} = -\vec{CB} \cdot \vec{CA} = -|\vec{CB}| \cdot |\vec{CA}| \cos ACB$

Theo định lý Pitago ta có  $CA = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3} \Rightarrow \vec{BC} \cdot \vec{CA} = -a\sqrt{3} \cdot 2a \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2a} = -3a^2$

b) Từ  $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA} = \vec{0}$  và hằng đẳng thức

$$(\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA})^2 = AB^2 + BC^2 + CA^2 + 2(\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB})$$

Ta có  $\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC} \cdot \vec{CA} + \vec{CA} \cdot \vec{AB} = -\frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2) = -4a^2$



c) Tương tự: vì  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$  nên  $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $BC, CA, AB$

Để thấy tam giác  $ABM$  đều nên  $GA^2 = \left(\frac{2}{3}AM\right)^2 = \frac{4a^2}{9}$

Theo định lý Pitago ta có:  $GB^2 = \frac{4}{9}BN^2 = \frac{4}{9}(AB^2 + AN^2) = \frac{4}{9}\left(a^2 + \frac{3a^2}{4}\right) = \frac{7a^2}{9}$

Khi đó:  $GC^2 = \frac{4}{9}CP^2 = \frac{4}{9}(AC^2 + AP^2) = \frac{4}{9}\left(3a^2 + \frac{a^2}{4}\right) = \frac{13a^2}{9}$

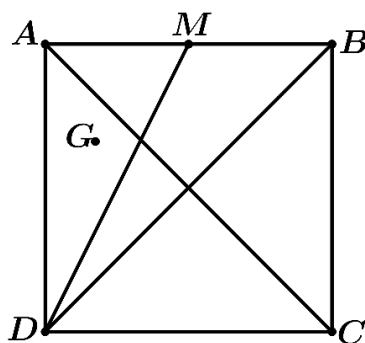
Suy ra  $\vec{GA} \cdot \vec{GB} + \vec{GB} \cdot \vec{GC} + \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{1}{2}\left(\frac{4a^2}{9} + \frac{7a^2}{9} + \frac{13a^2}{9}\right) = -\frac{4a^2}{3}$ .

**Bài tập 2:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ .  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Tính giá trị các biểu thức sau:

a)  $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC})$

b)  $\vec{CG} \cdot (\vec{CA} + \vec{DM})$

Lời giải



a) Theo quy tắc hình bình hành ta có  $\vec{AB} + \vec{AD} = \vec{AC}$

Do đó  $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC}) = \vec{AC} \cdot \vec{BD} + \vec{AC} \cdot \vec{BC} = \vec{CA} \cdot \vec{CB} = |\vec{CA}| \cdot |\vec{CB}| \cos ACB$

$(\vec{AC} \cdot \vec{BD} = 0$  vì  $\vec{AC} \perp \vec{BD})$

Mặt khác  $ACB = 45^\circ$  và theo định lý Pitago ta có:  $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$

Suy ra  $(\vec{AB} + \vec{AD})(\vec{BD} + \vec{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$

b) Vì  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$  nên  $\vec{CG} = \vec{CD} + \vec{CA} + \vec{CM}$

Mặt khác theo quy tắc hình bình hành và hệ thức trung điểm ta có  $\vec{CA} = -(\vec{AB} + \vec{AD})$

Hơn nữa  $\vec{CM} = \frac{1}{2}(\vec{CB} + \vec{CA}) = \frac{1}{2}[\vec{CB} - (\vec{AB} + \vec{AD})] = -\frac{1}{2}(\vec{AB} + 2\vec{AD})$



$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CG} = -\overrightarrow{AB} - (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}) = -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

$$\text{Ta lại có } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM} = -(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AD} = -\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right)$$

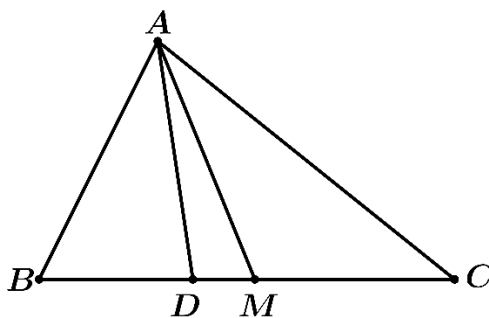
$$\text{Nên } \overrightarrow{CG} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DM}) = \left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD}\right) = \frac{5}{4}AB^2 + 4AD^2 = \frac{21a^2}{4}.$$

**Bài tập 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ .  $M$  là trung điểm của  $BC$ ,  $D$  là chân đường phân giác trong góc  $A$ .

a) Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$  từ đó suy ra  $\cos A$ .

b) Tính  $\overrightarrow{AM}^2$  và  $\overrightarrow{AD}^2$

**Lời giải**



$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2] = \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - CB^2] = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos A = cb \cos A$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) = cb \cos A \text{ hay } \cos A = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{b) Vì } M \text{ là trung điểm của } BC \text{ nên } \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$$

$$\text{Theo câu a) ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + b^2\right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

$$\text{Theo tính chất đường phân giác thì } \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC} \overrightarrow{DC} = \frac{b}{c} \overrightarrow{DC} (*)$$

Mặt khác  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$  thay vào (\*) ta được



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} &= \frac{b}{c}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC} \\
\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 &= (b\overrightarrow{AB})^2 + 2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + (c\overrightarrow{AC})^2 \\
\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 &= b^2c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + c^2b^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)
\end{aligned}$$

$$\text{Hay } \overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a).$$

**Bài tập 4:** Cho hình chữ nhật  $ABCD$  có  $AB = a, AD = 2a$ . Gọi  $M, N$  là các điểm lần lượt thuộc các cạnh  $AB, AC$  sao cho  $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{MB}$  và  $3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$ . Tính độ dài của đoạn thẳng  $MN$  theo  $a$ .

**Lời giải**

$$\begin{aligned}
\text{Ta có } \overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} = -\frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{12}(-5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AD})
\end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } MN^2 = \frac{1}{144}(25AB^2 - 30\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + 9AD^2) = \frac{1}{144}(25a^2 - 0 + 36a^2) = \frac{61a^2}{144} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{61}}{12}.$$

**Bài tập 5:** Cho tam giác  $ABC$ . Chứng minh rằng với  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  thì ta có:

$$\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA} = -\frac{1}{6}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

**Lời giải**

Do  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên ta có:  $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} = GA\cdot GB\cdot\cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$

$$\begin{aligned}
&= GA\cdot GB\cdot\cos AGB = GA\cdot GB \cdot \frac{GA^2 + GB^2 - AB^2}{2GA\cdot GB} = \frac{GA^2 + GB^2 - AB^2}{2} = \frac{\frac{4m_a^2}{9} + \frac{4m_b^2}{9} - AB^2}{2} \\
&= \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{AC^2 + AB^2}{2} - \frac{BC^2}{4}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{BC^2 + BA^2}{2} - \frac{AC^2}{4}\right) - AB^2}{2} \\
&= \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{AC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} + AB^2\right) - AB^2}{2} \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\text{Tương tự ta có: } \overrightarrow{GB}\cdot\overrightarrow{GC} = \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{BA^2}{4} + \frac{CA^2}{4} + BC^2\right) - BC^2}{2} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{GC}\cdot\overrightarrow{GA} = \frac{\frac{4}{9}\left(\frac{CB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} + AC^2\right) - AC^2}{2} \quad (3)$$



Từ (1), (2) và (3) ta có:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} &= \frac{\frac{4}{9} \left( \frac{AC^2}{4} + \frac{BC^2}{4} + AB^2 \right) - AB^2}{2} + \frac{\frac{4}{9} \left( \frac{BA^2}{4} + \frac{CA^2}{4} + BC^2 \right) - BC^2}{2} \\
 &\quad + \frac{\frac{4}{9} \left( \frac{CB^2}{4} + \frac{AB^2}{4} + AC^2 \right) - AC^2}{2} \\
 &= \frac{\frac{4}{9} \left( \frac{3AB^2}{2} + \frac{3BC^2}{2} + \frac{3AC^2}{2} \right) - (AB^2 + BC^2 + CA^2)}{2} \\
 &= \frac{\frac{2}{3} (AB^2 + BA^2 + CA^2) - (AB^2 + BA^2 + CA^2)}{2} = \frac{-\frac{1}{3} (AB^2 + BC^2 + CA^2)}{2} \\
 &= -\frac{1}{6} (AB^2 + BC^2 + CA^2).
 \end{aligned}$$



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng và đều khác vectơ  $\vec{0}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .      B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ .      C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -1$ .      D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Lời giải**

Do  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là hai vectơ cùng hướng nên  $(\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \longrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$ .

Vậy  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

**Câu 2:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ . Đẳng thức nào sau đây sai?

- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$       B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$   
C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$       D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

**Lời giải**

Nhận thấy C và D chỉ khác nhau về hệ số  $\frac{1}{2}$  và  $\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2)$ .  $\frac{1}{4}$  nên thử kiểm tra đáp án C và D.

Ta có  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2 = 4\vec{a} \cdot \vec{b} \longrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a} + \vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

- A đúng: vì  $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$
- B đúng: vì  $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = (\vec{a} - \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{a} - \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)$

**Câu 3:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2a^2$ .      B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  là góc  $A$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$ .

Do đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$ .

**Câu 4:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  là góc ngoài của góc  $B$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

**Câu 5:** Gọi  $G$  là trọng tâm tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}a^2$       B.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{1}{2}a^2$       C.  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{a^2}{6}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}a^2$

**Lời giải**

Dựa vào đáp án, ta có nhận xét sau:

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$  là góc  $A$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$$

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$  là góc ngoài của góc  $C$  nên  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

Xác định được góc  $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB})$  là góc  $AGB$  nên  $(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos(\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}) = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$$

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG})$  là góc  $GAB$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = 30^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AG} = AB \cdot AG \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AG}) = a \cdot \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \cos 30^\circ = \frac{a^2}{2}$$

**Câu 6:** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng  $a$  và chiều cao  $AH$ . Mệnh đề nào sau đây là sai?

A.  $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$       B.  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{HA}) = 150^\circ$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$       D.  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = \frac{a^2}{2}$

**Lời giải**

Xác định được góc  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})$  là góc ngoài của góc  $A$  nên  $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^\circ$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = AC \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{2}$$

**Câu 7:** Cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$  và có  $AB = AC = a$ . Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

A.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2$       B.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$       C.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$       D.  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$

**Lời giải**



Xác định được góc  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})$  là góc ngoài của góc  $B$  nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 135^\circ$

Do đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 135^\circ = -a^2$

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AB = c$ ,  $AC = b$ . Tính  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ .

- A.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2$       **B.**  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = c^2$       C.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 + c^2$       D.  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = b^2 - c^2$

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos B = c \cdot \sqrt{b^2 + c^2} \cdot \frac{c}{\sqrt{b^2 + c^2}} = c^2$

**Cách khác:** Tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  suy ra  $AB \perp AC \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

Ta có  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = AB^2 = c^2$

**Câu 9:** Cho ba điểm  $A, B, C$  thỏa  $AB = 2$  cm,  $BC = 3$  cm,  $CA = 5$  cm. Tính  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

- A.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 13$       **B.**  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 15$       C.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 17$       D.  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 19$

**Lời giải**

Ta có  $AB + BC = CA \Rightarrow$  ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng và  $AC \rightarrow I(4; -1)$ . nằm giữa  $A, C$ .

Khi đó  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = CA \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 3 \cdot 5 \cdot \cos 0^\circ = 15$

**Cách khác:** Ta có  $AB^2 = \overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA})^2 = CB^2 - 2\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + CA^2$

Suy ra  $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(CB^2 + CA^2 - AB^2) = \frac{1}{2}(3^2 + 5^2 - 2^2) = 15$

**Câu 10:** Cho tam giác  $ABC$  có  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$ . Tính  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC}$

- A.**  $P = b^2 - c^2$       B.  $P = \frac{c^2 + b^2}{2}$       C.  $P = \frac{c^2 + b^2 + a^2}{3}$       **D.**  $P = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2}$

**Lời giải**

Ta có  $P = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BC} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$   
 $= (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 = AC^2 - AB^2 = b^2 - c^2$

**Câu 11:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Tính  $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA})$

- A.  $P = -1$       B.  $P = 3a^2$       **C.**  $P = -3a^2$       D.  $P = 2a^2$

**Lời giải**

Từ giả thiết suy ra  $AC = a\sqrt{2}$

Ta có:  $P = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{AC}^2$   
 $= -CA \cdot CD \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) - AC^2 = -a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ - (a\sqrt{2})^2 = -3a^2$



- Câu 12:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(3;-1)$  và  $B(2;10)$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB}$
- A.  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -4$ .      B.  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ .      C.  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 4$ .      D.  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = 16$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AO} = (-3;1)$ ,  $\overrightarrow{OB} = (2;10)$ . Suy ra  $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OB} = -3 \cdot 2 + 1 \cdot 10 = 4$ .

- Câu 13:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = 4\vec{i} + 6\vec{j}$  và  $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j}$ . Tính tích vô hướng  $\vec{a} \cdot \vec{b}$
- A.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -30$ .      B.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 3$ .      C.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 30$ .      D.  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 43$ .

**Lời giải**

Từ giả thiết suy ra  $\vec{a} = (4;6)$  và  $\vec{b} = (3;-7)$  suy ra  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4 \cdot 3 + 6 \cdot (-7) = -30$

- Câu 14:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-3;2)$  và  $\vec{b} = (-1;-7)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{c}$  biết  $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$  và  $\vec{c} \cdot \vec{b} = -20$
- A.  $\vec{c} = (-1;-3)$       B.  $\vec{c} = (-1;3)$       C.  $\vec{c} = (1;-3)$       D.  $\vec{c} = (1;3)$

**Lời giải**

Gọi  $\vec{c} = (x;y)$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \vec{c} \cdot \vec{a} = 9 \\ \vec{c} \cdot \vec{b} = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 9 \\ -x - 7y = -20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \longrightarrow \vec{c} = (-1;3)$$

- Câu 15:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1;2)$ ,  $\vec{b} = (4;3)$  và  $\vec{c} = (2;3)$ . Tính  $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c})$ .
- A.  $P = 0$       B.  $P = 18$       C.  $P = 20$       D.  $P = 28$

**Lời giải**

Ta có  $\vec{b} + \vec{c} = (6;6)$  suy ra  $P = \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = 1 \cdot 6 + 2 \cdot 6 = 18$ .

- Câu 16:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ;  $AC = a\sqrt{3}$  và  $AM$  là trung tuyến. Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM}$
- A.  $\frac{a^2}{2}$ .      B.  $a^2$ .      C.  $-a^2$ .      D.  $-\frac{a^2}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  và có  $AM$  là trung tuyến nên  $AM = \frac{BC}{2}$ .

$$AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{AB^2 + AC^2}}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + 3a^2}}{2} = a.$$

Tam giác  $AMB$  có  $AB = BM = AM = a$  nên là tam giác đều suy ra góc  $MAB = 60^\circ$ .

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AM}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = -a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = -\frac{a^2}{2}.$$

**Câu 17:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $B = 30^\circ, AC = 2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .

- A.**  $P = -2$ .                      **B.**  $P = 2\sqrt{3}$ .                      **C.**  $P = 2$ .                      **D.**  $P = -2\sqrt{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}) \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BM}^2$$

$$BC = \frac{AC}{\sin 30^\circ} = 4; AB = AC \cdot \cot 30^\circ = 2\sqrt{3}; BM = 2$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM}^2 = 4; \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = 2\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \cos 150^\circ = -6 \Rightarrow P = -2$$

**Câu 18:** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AB = 2a, AD = 3a, BAD = 60^\circ$ . Điểm  $K$  thuộc  $AD$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = -2\overrightarrow{DK}$ . Tính tích vô hướng  $\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC}$

- A.**  $3a^2$ .                      **B.**  $6a^2$ .                      **C.**  $0$ .                      **D.**  $a^2$ .

**Lời giải**

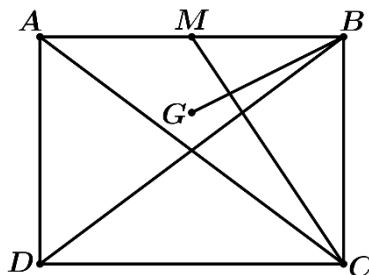
$$\text{Ta có } \overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\text{Khi đó } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}\right) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = -AB^2 + \frac{2}{3}AD^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{AC} = -4a^2 + \frac{2}{3} \cdot 9a^2 - \frac{1}{3} \cdot 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = a^2.$$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 1:** Cho hình chữ nhật  $ABCD, AB = 4a, AD = 3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $AB, G$  là trọng tâm tam giác  $ACM$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a)  $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - 3\overrightarrow{BC}$

b)  $\overrightarrow{BG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ .

c)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$

b)  $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = -a^2$ .



## Lời giải

a) Sai: Ta có:  $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BM} - \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}$ .

b) Sai: Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ACM$  nên

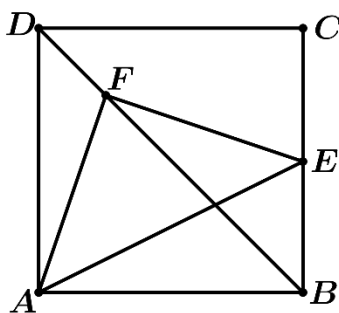
$$3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

c) Đúng: Vì  $ABCD$  là hình chữ nhật nên  $BC = AD = 3a$ ;  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ .

d) Sai: Ta có:  $\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{CM} = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BC}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}^2$

$$= \frac{1}{4}(4a)^2 - \frac{1}{3} \cdot 4a \cdot 3a - \frac{1}{3}(3a)^2 = -3a^2.$$

**Câu 2:** Cho hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ . Lấy  $E$  là trung điểm của  $BC$ , điểm  $F$  thỏa mãn  $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a)  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b)  $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD}$ .

c)  $\overrightarrow{EF} = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ .

d) Tam giác  $AEF$  vuông cân.

## Lời giải

a) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ .

b) Sai:  $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ .

c) Đúng:  $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\right) - \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) = \frac{-3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$ .



$$\text{d) Đúng: Ta có: } \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{EF} = \left( \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \right) \cdot \left( -\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \right)$$

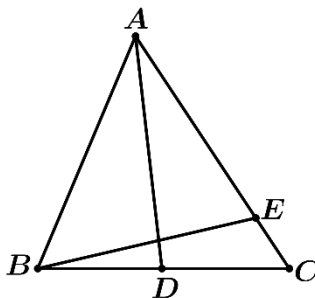
$$= \frac{-3}{16} \overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{3}{16} \overrightarrow{AD}^2 = 0 \Rightarrow AF \perp EF.$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AF}^2 = \left( \frac{1}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \right)^2 = \frac{1}{16} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{3}{8} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{9}{16} \overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8} \overrightarrow{AB}^2.$$

$$\overrightarrow{EF}^2 = \left( -\frac{3}{4} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{AD} \right)^2 = \frac{9}{16} \overrightarrow{AB}^2 - \frac{3}{8} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \frac{1}{16} \overrightarrow{AD}^2 = \frac{5}{8} \overrightarrow{AB}^2.$$

$$\Rightarrow AF^2 = EF^2 = \frac{5}{8} \overrightarrow{AB}^2 \Rightarrow AF = EF. \text{ Vậy tam giác } AEF \text{ vuông cân tại } F.$$

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 4\sqrt{2}, AC = 6, \angle BAC = 45^\circ$ . Gọi  $D$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Điểm  $E$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AC}$  ( $k \in \mathbb{R}$ ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 20$

b)  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$

c)  $BC = 3\sqrt{5}$

d)  $AD \perp BE$  khi  $k = \frac{14}{15}$ .

### Lời giải

a) Sai: Ta có  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos A = 4\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^\circ = 24$ .

b) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ ;  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$ .

Khi đó:  $\overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}^2 = 6^2 - 2 \cdot 24 + (4\sqrt{2})^2 = 20$

$$\Rightarrow BC = 2\sqrt{5}$$

Mặt khác:  $\overrightarrow{AD}^2 = \left( \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \right)^2 = \frac{1}{4} (\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$



$$= \frac{1}{4} \left[ (4\sqrt{2})^2 + 2.24 + 6^2 \right] = 29 \Rightarrow AD = \sqrt{29}.$$

c) Sai: Ta có:  $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ .

$$\begin{aligned} \text{Từ đó ta có: } \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} &= \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot (k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{2} (k\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + k\overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AB}^2 - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2} \left[ 24k + 6^2 \cdot k - (4\sqrt{2})^2 - 24 \right] = 30k - 28. \end{aligned}$$

d) Đúng: Khi đó  $AD \perp BE \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BE} = 0 \Leftrightarrow 30k - 28 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{14}{15}$ .

**Câu 4:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $AB = a, BC = 2a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $ACB = 60^\circ$

b)  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = a^2$

c)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = 3a^2$ .

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -4a^2$

#### Lời giải

a) Đúng: Xét tam giác vuông  $ABC$ :  $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$ ,

Khi đó:  $\cos ABC = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow ABC = 60^\circ \Rightarrow ACB = 30^\circ$ .

b) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = BA \cdot BC \cdot \cos ABC = a \cdot 2a \cdot \frac{1}{2} = a^2$ .

c) Sai: Ta có:  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}| \cos ACB$

$$= -CB \cdot CA \cdot \cos 30^\circ = -2a \cdot a \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3a^2$$

d) Đúng: Vì tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  nên  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -a^2, \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = -3a^2$ .

Suy ra  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -a^2 - 3a^2 = -4a^2$ .

**Câu 5:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$ , có cạnh  $a$ . Biết  $M$  là trung điểm của  $AB$ ,  $G$  là trọng tâm tam giác  $ADM$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = a^2$

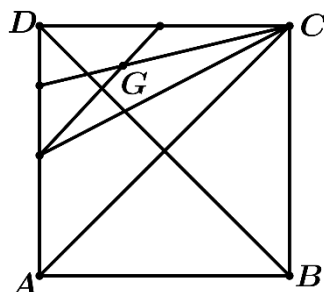
b)  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{3}$



c)  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

d)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a^2$

Lời giải



a) Sai: Độ dài đường chéo hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$  là:  $AC = BD = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

$$= -AB \cdot AC \cdot \cos BAC = -a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = -a^2$$

b) Sai:  $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AM}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}) = AM \cdot AC \cdot \cos CAM = \frac{a}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}$ .

c) Đúng: Ta có:  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DB}| \cdot \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) - \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$= DA \cdot DB \cdot \cos ADB - \frac{1}{2} AD \cdot AC \cdot \cos CAD$$

$$= a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ - \frac{1}{2} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 45^\circ = a^2 - \frac{1}{2} a^2 = \frac{1}{2} a^2$$

d) Đúng: Ta có  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$  (quy tắc hình bình hành).

Do đó  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

$$= \underbrace{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}}_0 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos ACB = a \cdot a\sqrt{2} \cos 45^\circ = a^2$$

(trong đó  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$  vì  $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ ).

**Câu 6:** Cho hình vuông  $ABCD$  tâm  $O$  cạnh bằng  $a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2a^2$

b)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = a^2$

c)  $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = -a^2$

d)  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2$



## Lời giải

a) Sai: Do  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}$  cùng hướng nên  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = 0^\circ$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \cdot DC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}) = a \cdot a \cdot \cos 0^\circ = a^2$$

b) Sai: Hai vectơ  $\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{OC}$  cùng hướng do đó  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) = BAO = 45^\circ$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OC} = AB \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}) = a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 45^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

c) Đúng: Hai vectơ  $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}$  ngược hướng do đó  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = 180^\circ$ .

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{OC} = CA \cdot OC \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{OC}) = a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 180^\circ = -a^2.$$

d) Đúng: Ta có:  $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$

(trong đó  $AC \perp BD \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$ ).

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = CA \cdot CB \cdot \cos ACB = a\sqrt{2} \cdot a \cdot \cos 45^\circ = a^2.$$

$$\text{Vậy } (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = a^2.$$

**Câu 7:** Cho hình thang  $ABCD$  vuông tại  $A$  và  $B$ , biết  $AD = a, BC = 3a$  và cạnh  $AB = 2a$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

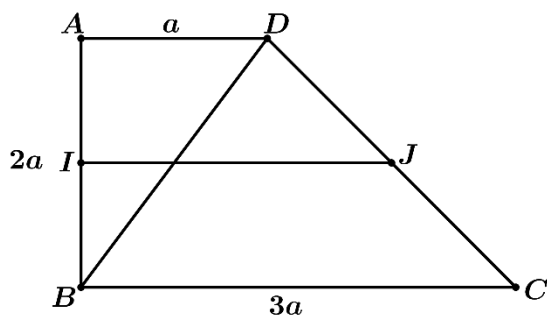
a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -4a^2$

b)  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 2a^2$

c)  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = -2a^2$

d) Gọi  $I, J$  lần lượt là trung điểm của  $AB, CD$ . Khi đó  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = 6a^2$

## Lời giải



$$\begin{aligned} \text{a) Đúng: Tính } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} \text{ thì ta có } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \underbrace{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 \\ &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}^2 = -AB^2 = -4a^2. \end{aligned}$$



b) Sai: Tính  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$  thì ta có  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = BC \cdot BD \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}) = BC \cdot BD \cdot \cos DBC$

$$= BC \cdot BD \cdot \cos BDA = BC \cdot BD \cdot \frac{AD}{BD} = BC \cdot AD = 3a^3$$

(trong đó  $DBC = BDA$  vì là hai góc so le trong).

c) Sai: Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$ .

Ta có:  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

$$= -\overrightarrow{AB}^2 + 0 + 0 + BC \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = -AB^2 + 3a \cdot a \cdot 1 = -(2a)^2 + 3a^2 = -a^2$$

d) Đúng: Tính  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ}$ .

Ta có  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IJ} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IJ} = BC \cdot IJ \cdot \cos 0^\circ = 3a \cdot 2a \cdot 1 = 6a^2$ .

**Câu 8:** Cho tam giác  $ABC$  đều có cạnh  $a$ , có trọng tâm  $G$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{2}$

b)  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{a^2}{4}$

c)  $\angle AGB = 120^\circ$

c)  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{a^2}{6}$

### Lời giải

a) Đúng:  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}a^2$

b) Sai:  $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AG}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{AC}) = AG \cdot AC \cdot \cos 30^\circ = \frac{1}{2}a^2$

c) Đúng: Tam giác  $AGB$  có  $\angle GAB = \angle GBA = 30^\circ \Rightarrow \angle AGB = 120^\circ$

d) Sai:  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \cdot GB \cdot \cos \angle AGB = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cos 120^\circ = -\frac{a^2}{6}$

**Câu 9:** Cho tam giác  $ABC$  có  $AB = 2a, AC = 3a, \angle BAC = 60^\circ$ . Gọi  $I$  là trung điểm đoạn thẳng  $BC$ . Điểm  $J$  thuộc đoạn  $AC$  thỏa mãn  $12AJ = 7AC$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4a^2$

b)  $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$



$$c) \overrightarrow{BJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}$$

$$d) AI \perp BJ$$

**Lời giải**

$$a) \text{ Sai: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos BAC = 2a \cdot 3a \cdot \cos 60^\circ = 3a^2$$

$$b) \text{ Sai: Do } I \text{ là trung điểm } BC \text{ nên } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$c) \text{ Đúng: } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}$$

$$\begin{aligned} c) \text{ Đúng: } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BJ} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \left( -\overrightarrow{AB} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC} \right) = \frac{1}{2} \left( -\overrightarrow{AB}^2 + \frac{7}{12} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{7}{12} \overrightarrow{AC}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -4a^2 + \frac{7}{12} \cdot 3a^2 - 3a^2 + \frac{7}{12} \cdot 9a^2 \right) = 0 \end{aligned}$$

Vậy  $AI \perp BJ$

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh bằng 4. Khi đó hãy tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos BAC = AB^2 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} AB^2 = \frac{1}{2} \cdot 4^2 = 8.$$

**Câu 2:** Cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$  có  $B = 30^\circ$ ,  $AC = 2$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM}$ .

**Lời giải**

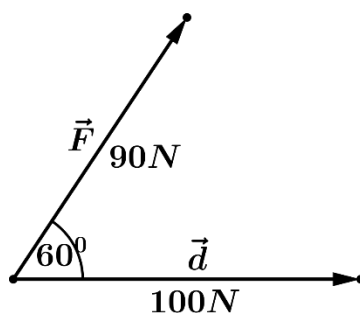
$$\text{Ta có } \triangle ABC \text{ vuông tại } A \text{ có } AB = \frac{AC}{\tan B} = \frac{2}{\tan 30^\circ} = 2\sqrt{3}.$$

$$\text{Suy ra } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4.$$

$$\begin{aligned} P &= \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{4}(-AB \cdot BC \cdot \cos B + AC \cdot BC \cdot \cos C) = \frac{1}{4}(-2\sqrt{3} \cdot 4 \cdot \cos 30^\circ + 2 \cdot 4 \cdot \cos 60^\circ) = -2. \end{aligned}$$

**Câu 3:** Một người dùng một lực  $\vec{F}$  có độ lớn là 90 N làm một vật dịch chuyển một đoạn 100 m. Biết lực  $\vec{F}$  hợp với hướng dịch chuyển một góc  $60^\circ$ . Tính công sinh bởi lực  $\vec{F}$ .

**Lời giải**



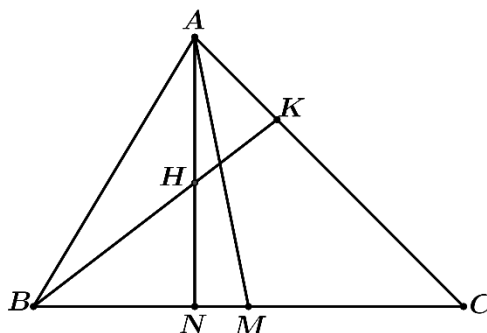
Công sinh bởi lực  $\vec{F}$  được tính bằng công thức:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{d} = |\vec{F}| \cdot |\vec{d}| \cdot \cos(\vec{F}, \vec{d}) = 90 \cdot 100 \cdot \cos 60^\circ = 4500 \text{ (J)}$$

Vậy công sinh bởi lực  $\vec{F}$  có độ lớn bằng 4500 (J)

**Câu 4:** Cho đoạn thẳng  $BC$  cố định có độ dài bằng 4. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng  $BC, BM$ . Trên đường thẳng vuông góc  $BC$  tại  $N$  lấy điểm  $A$  bất kì. Gọi  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$  và  $BH \cap AC = K$ . Giá trị biểu thức  $P = MH \cdot BK$  bằng:

**Lời giải**



Theo giả thiết tam giác  $AMB$  cân tại  $A$  nên  $AB = AM$ ,  $AMH = ABH$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$= (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA})^2 + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{MB}^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AH}$$

$$= \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BA}(2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AH}) = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH})$$

$$= \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CH} = \frac{1}{4}BC^2 = 4 \quad (1)$$

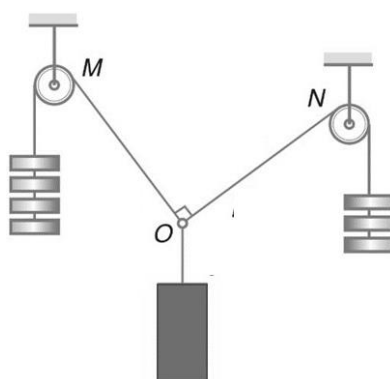
$$\text{Mặt khác: } \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{MA} = MH \cdot MA \cdot \cos AMH = MH \cdot AB \cdot \cos ABH = MH \cdot AB \cdot \frac{BK}{AB} = MH \cdot BK \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $MH \cdot BK = 4$

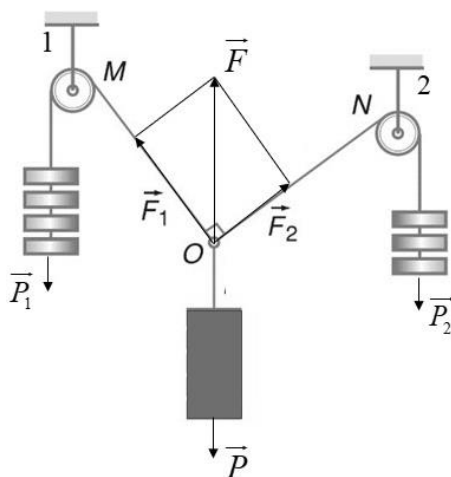
**Câu 5:** Người ta mắc lệch hai ròng rọc cố định để treo một vật có trọng lượng  $200 \text{ (N)}$ . Biết rằng ở mỗi đầu dây của các ròng rọc người ta đặt các quả cân có trọng lượng  $20 \text{ (N)}$ . Hỏi số quả cân cần



thiết để giữ vật cân bằng sao cho hai dây căng vật của hai ròng rọc tạo với nhau một góc  $90^\circ$  (như hình vẽ).



**Lời giải**



Gọi trọng lượng các quả cân đặt ở các ròng rọc thứ nhất là  $\overrightarrow{P_1}$  (tương ứng với  $m$  quả cân) và  $\overrightarrow{P_2}$  (tương ứng với  $n$  quả cân). Các lực căng tạo ra bởi các ròng rọc là  $\overrightarrow{F_1}$  và  $\overrightarrow{F_2}$ ,  $\overrightarrow{P}$  là trọng lượng của vật.

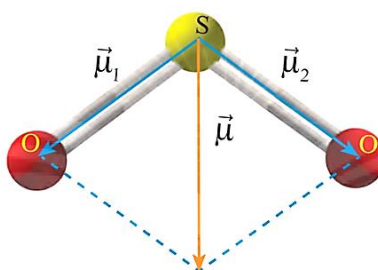
Ta có:  $|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{P_1}| = 20m$ ;  $|\overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{P_2}| = 20n$ .

$$|\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}| = |\overrightarrow{F}| = |\overrightarrow{P}| = 200 \text{ (N)}$$

$$\Rightarrow |\overrightarrow{F_1}|^2 + |\overrightarrow{F_2}|^2 = (20m)^2 + (20n)^2 = 200^2 \Rightarrow m^2 + n^2 = 10^2$$

Vì  $m, n \in \mathbb{N}$ ;  $m, n \geq 1 \Rightarrow m, n \in \{6, 8\}$ . Vậy số quả cân cần thiết là 14.

**Câu 6:** Phân tử sulfur dioxide ( $\text{SO}_2$ ) có cấu tạo hình chữ V, góc liên kết  $\text{OSO}$  gần bằng  $120^\circ$ . Người ta biểu diễn sự phân cực giữa nguyên tử S với mỗi nguyên tử O bằng các vectơ  $\overrightarrow{\mu_1}$  và  $\overrightarrow{\mu_2}$ , có cùng phương với liên kết cộng hoá trị, có chiều từ nguyên tử S về mỗi nguyên tử O và cùng có độ dài là 1,6 đơn vị (Hình 6). Cho biết vectơ tổng  $\overrightarrow{\mu} = \overrightarrow{\mu_1} + \overrightarrow{\mu_2}$  được dùng để biểu diễn sự phân cực của cả phân tử  $\text{SO}_2$ . Tính độ dài của  $\overrightarrow{\mu}$ .





Từ điểm cuối của vector  $\vec{\mu}_1$  vẽ vector  $\vec{\mu}_3 = \vec{\mu}_2$  suy ra  $\vec{\mu} = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_2 = \vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_3 \Rightarrow |\vec{\mu}| = |\vec{\mu}_1 + \vec{\mu}_3|$

Ta có:  $(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2) = 120^\circ \Rightarrow (\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_3) = 60^\circ \Rightarrow |\vec{\mu}|^2 = |\vec{\mu}_1|^2 + |\vec{\mu}_3|^2 - 2|\vec{\mu}_1||\vec{\mu}_3|\cos(\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_3)$

$$= 1,6^2 + 1,6^2 - 2.1,6.1,6.\cos 60^\circ = \frac{64}{25} \Rightarrow |\vec{\mu}| = \sqrt{\frac{64}{25}} = 1,6$$

Vậy độ dài của  $\vec{\mu}$  là 1,6 đơn vị

-----HẾT-----

**Dạng 2: Góc giữa hai vectơ. Biểu thức tọa độ và tính chất của tích vô hướng****Phương pháp:** Sử dụng lý thuyết đã nêu để tính toán

- Để tính góc của hai vectơ ta sử dụng công thức:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

Cho  $\vec{a} = (x_1; y_1), \vec{b} = (x_2; y_2)$ .

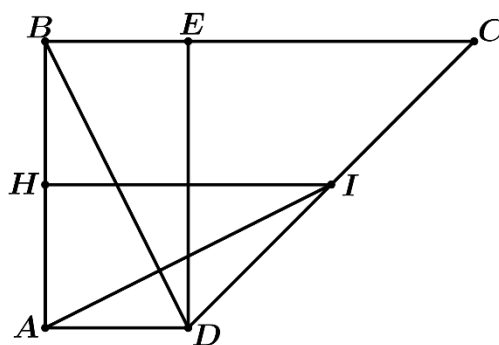
- Tích vô hướng hai vectơ là  $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2$
- Góc của hai vectơ được xác định bởi công thức  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$

**Chú ý:** Hai vectơ  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0$ . Để xác định độ dài một vectơ đoạn thẳng thì ta sử dụng công thức:

- Nếu  $\vec{a} = (x; y)$  thì  $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- Nếu  $A(x_A; y_A), B(x_B; y_B)$  thì  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

**BÀI TẬP TỰ LUẬN****Bài tập 1:** Cho hình thang  $ABCD$  có đáy lớn  $BC = 3a$ , đáy nhỏ  $AD = a$ , đường cao  $AB = 2a$ 

- Tính  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ ;  $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ ;  $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}$
- Gọi  $I$  là trung điểm của  $CD$ . Hãy tính góc giữa  $AI$  và  $BD$ .

**Lời giải**Dựng  $DE \perp BC, E \in BC \Rightarrow ABED$  là hình chữ nhật do đó  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{CD}$ 

$$= -\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = -|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cdot \cos(\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DC}) = -DE \cdot DC \cdot \cos 45^\circ = -2a \cdot 2a \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -4a^2$$

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{BD} = 3 \cdot |\overrightarrow{BE}| \cdot |\overrightarrow{BD}| \cdot \cos DBE = 3BE \cdot BD \cdot \frac{BE}{BD} = 3 \cdot a^2$$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$= |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}| \cdot \cos 0^\circ - \overrightarrow{AB}^2 = BC \cdot AD - AB^2 = 3a \cdot a - 4a^2 = -a^2$$

(Vì  $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ ;  $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ ).



b) Gọi  $H$  trung điểm của  $AB$  suy ra  $HI$  là đường trung bình của hình thang  $ABCD$ .

$$\text{Do đó } HI = \frac{AD + BC}{2} = 2a$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{HI} - \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} - \underbrace{\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB}}_0 - \underbrace{\overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD}}_0 + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Mặt khác } \overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AD} = HI \cdot AD \cdot \cos 0^\circ = 2a \cdot a = 2a^2$$

$$\overrightarrow{HI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{HI} \perp \overrightarrow{AB}); \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \text{ (do } \overrightarrow{HA} \perp \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 = -2a^2$$

Vậy  $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AI} \perp \overrightarrow{BD} \Rightarrow$  góc giữa  $AI$  và  $BD$  bằng  $90^\circ$ .

**Bài tập 2:** Cho các vector  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và thỏa mãn điều kiện  $|2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3$ . Tính  $\cos(\vec{a}, \vec{b})$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } |2\vec{a} - 3\vec{b}| = 3 \Leftrightarrow (2\vec{a} - 3\vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow 4\vec{a}^2 - 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9\vec{b}^2 = 16$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 - 12|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9b^2 = 16 \Leftrightarrow 4 - 12\cos(\vec{a}, \vec{b}) + 9 = 16 \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{4}.$$

**Bài tập 3:** Cho các vector  $\vec{a}, \vec{b}$  có độ dài bằng 1 và góc tạo bởi hai vector bằng  $60^\circ$ . Xác định cosin góc giữa hai vector  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  với  $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b})(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{b}^2 = a^2 + |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) - 2b^2 = -\frac{1}{2}.$$

$$\bullet \vec{u}^2 = (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4\vec{b}^2 = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 4 \cdot 1 = 7 \Rightarrow |\vec{u}| = \sqrt{7}$$

$$\bullet \vec{v}^2 = (\vec{a} - \vec{b})^2 = \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ + 1 = 1 \Rightarrow |\vec{v}| = 1$$

$$\text{Khi đó } \vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Rightarrow \cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-\frac{1}{2}}{\sqrt{7} \cdot 1} = -\frac{\sqrt{7}}{14}.$$

**Bài tập 4:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2)$ ,  $B(-2;6)$ ,  $C(9;8)$ .

a) Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$

b) Tính góc  $B$  của tam giác  $ABC$

c) Xác định hình chiếu của  $A$  lên cạnh  $BC$

**Lời giải**

$$\text{a) Ta có } \overrightarrow{AB}(-3;4), \overrightarrow{AC}(8;6) \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 0$$

Do đó  $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$  hay tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$

$$\text{b) Ta có } \overrightarrow{BC}(11;2), \overrightarrow{BA}(3;-4)$$

$$\text{Suy ra } \cos B = \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \frac{11 \cdot 3 + 2 \cdot (-4)}{\sqrt{11^2 + 2^2} \sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$



c) Gọi  $H(x; y)$  là hình chiếu của  $A$  lên  $BC$

Ta có:  $\overrightarrow{AH}(x-1; y-2)$ ,  $\overrightarrow{BH}(x+2; y-6)$ ,  $\overrightarrow{BC}(11; 2)$

$$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 11(x-1) + 2(y-2) = 0 \text{ hay } 11x + 2y - 15 = 0 \quad (1)$$

Mặt khác  $\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BC}$  cùng phương nên  $\frac{x+2}{11} = \frac{y-6}{2} \Leftrightarrow 2x - 11y + 70 = 0 \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $x = \frac{1}{5}$ ,  $y = \frac{32}{5}$

Vậy hình chiếu của  $A$  lên  $BC$  là  $H\left(\frac{1}{5}; \frac{32}{5}\right)$

**Bài tập 5:** Cho các điểm  $A(4\sqrt{3}; -1)$ ,  $B(0; 3)$ ,  $C(8\sqrt{3}; 3)$ .

a) Tính các cạnh của tam giác  $ABC$ .

b) Tính các góc của tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-4\sqrt{3}; 4) \Rightarrow AB = \sqrt{48 + 16} = 8$ ;  $\overrightarrow{BC} = (8\sqrt{3}; 0) \Rightarrow BC = 8\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{CA} = (-4\sqrt{3}; -4) \Rightarrow AC = 8$$

b) Ta có:  $\cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{128 - 192}{128} = -\frac{1}{2}$ .

Suy ra  $A = 120^\circ$  và vì tam giác cân tại  $A$  nên  $B = C = 30^\circ$ .

**Bài tập 6:** Cho các điểm  $A(-1; -1)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(6; 0)$ .

a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Tính góc  $B$  và diện tích tam giác  $ABC$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\overrightarrow{AB} = (4; 2)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (7; 1)$ . Vì  $\frac{4}{7} \neq \frac{2}{1}$  nên ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.

b) Ta có  $\overrightarrow{BA} = (-4; -2)$ ,  $\overrightarrow{BC} = (3; -1)$ .

$$\text{Do đó } \cos B = \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{(-4) \cdot 3 + (-2) \cdot (-1)}{\sqrt{16 + 4} \cdot \sqrt{9 + 1}} = \frac{-10}{\sqrt{200}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ nên } B = 135^\circ.$$

$$\text{Hạ đường cao } AH \text{ ta có } S = \frac{1}{2} BC \cdot AB \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{9 + 1} \cdot \sqrt{16 + 4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5.$$

**Bài tập 7:** Cho các điểm  $A(1; 3)$ ,  $B(4; 2)$ .

a) Tìm tọa độ điểm  $D$  nằm trên trục  $Ox$  và cách đều hai điểm  $A$  và  $B$ .

b) Tính chu vi và diện tích tam giác  $OAB$ .

**Lời giải**

a) Vì  $D$  nằm trên trục  $Ox$  nên  $D(x; 0)$ .

$$\text{Ta có } DA = DB \Leftrightarrow DA^2 = DB^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 3^2 = (x-4)^2 + 2^2$$



$$\Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x + 9 = x^2 + 16 - 8x + 4 \Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ nên } D\left(\frac{5}{3}; 0\right).$$

b) Chu vi tam giác :

$$OA + OB + OC = \sqrt{1^2 + 3^2} + \sqrt{4^2 + 2^2} + \sqrt{3^2 + 1^2} = 2\sqrt{10} + \sqrt{20} = 2(\sqrt{10} + \sqrt{5})$$

Ta có  $OA = AB = \sqrt{10}$  và  $OB = \sqrt{20} = AC\sqrt{2}$  nên tam giác  $OAB$  là tam giác vuông cân tại  $A$ .

$$\text{Vậy diện tích tam giác } OAB \text{ là } S = \frac{OA \cdot OB}{2} = 5.$$

**Bài tập 8:** Cho ba điểm  $A(3;4)$ ,  $B(2;1)$  và  $C(-1;-2)$ . Tìm điểm  $M$  nằm trên đường thẳng  $BC$  sao cho góc  $AMB = 45^\circ$

### Lời giải

Giả sử  $M(x; y)$  suy ra  $\overrightarrow{MA}(3-x; 4-y)$ ,  $\overrightarrow{MB}(2-x; 1-y)$ ,  $\overrightarrow{BC}(-3; -3)$

Vì  $AMB = 45^\circ$  suy ra  $|\cos AMB| = |\cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{BC})|$

$$\Leftrightarrow \cos 45^\circ = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|-3(3-x) - 3(4-y)|}{\sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} \sqrt{9+9}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(3-x)^2 + (4-y)^2} = |x+y-7| \quad (*)$$

Mặt khác  $M$  thuộc đường thẳng  $BC$  nên hai vectơ  $\overrightarrow{MB}$ ,  $\overrightarrow{BC}$  cùng phương

Suy ra  $\frac{2-x}{-3} = \frac{1-y}{-3} \Leftrightarrow x = y+1$  thế vào  $(*)$  ta được

$$\sqrt{(2-y)^2 + (4-y)^2} = |2y-6| \Leftrightarrow y^2 - 6y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = 2 \text{ hoặc } y = 4$$

Với  $y = 2 \Rightarrow x = 3$  ta có  $\overrightarrow{MA}(0; 2)$ ,  $\overrightarrow{MB}(-1; -1) \Rightarrow \cos AMB = \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó  $AMB = 135^\circ$  (không thỏa mãn)

Với  $y = 4 \Rightarrow x = 5$ ,  $\overrightarrow{MA}(-2; 0)$ ,  $\overrightarrow{MB}(-3; -3) \Rightarrow \cos AMB = \cos(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MB}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Khi đó  $AMB = 45^\circ$ . Vậy  $M(5; 4)$  là điểm cần tìm.

**Bài tập 9:** Cho 3 điểm  $A(1;3)$ ,  $B(2;4)$ ,  $C(-3;5)$ .

a) Xác định tọa độ điểm  $M$  trên trục hoành sao cho  $P = |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}|$  nhỏ nhất.

b) Xác định tọa độ điểm  $N$  trên trục tung sao cho  $Q = 2|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB}| + 3|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}|$  nhỏ nhất.

### Lời giải

$$\text{a) Gọi } M \in Ox \Rightarrow M(x_M; 0). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{MA} = (1-x_M; 3) \\ \overrightarrow{MB} = (2-x_M; 4) \\ \overrightarrow{MC} = (-3-x_M; 5) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC} = (22+x_M; -10)$$



Biểu thức  $P = |\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{MC}| = \sqrt{(22 + x_M)^2 + 10^2} \geq 10$ .

Dấu "=" xảy ra  $22 + x_M = 0 \Leftrightarrow x_M = -22 \Rightarrow M(-22; 0)$ .

b) Gọi  $N(x_N; y_N)$

Ta có  $\overrightarrow{NA} = (1 - x_N; 3 - y_N)$ ;  $\overrightarrow{NB} = (2 - x_N; 4 - y_N)$ ;  $\overrightarrow{NC} = (-3 - x_N; 5 - y_N)$ .

$\Rightarrow \overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB} = (5 - 3x_N; 11 - 3y_N)$ ;  $\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC} = (-2 - 2x_N; 8 - 2y_N)$ .

Biểu thức  $Q = 2|\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NB}| + 3|\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NC}|$

$$= 2\sqrt{(5 - 3x_N)^2 + (11 - 3y_N)^2} + 3\sqrt{(-2 - 2x_N)^2 + (8 - 2y_N)^2}$$

$$= 6\left[\sqrt{\left(\frac{5}{3} - x_N\right)^2 + \left(\frac{11}{3} - y_N\right)^2} + \sqrt{(-1 - x_N)^2 + (4 - y_N)^2}\right]$$

$$= 6(KN + HN) \geq 6HK, H\left(\frac{5}{3}; \frac{11}{3}\right), K(-1; 4).$$

**Nhận xét:**  $H, K$  nằm về hai phía so với trục  $Oy$  nên dấu "=" xảy ra  $\Leftrightarrow N$  nằm giữa  $H, K$

Gọi  $N(0; y)$   $\overrightarrow{KH} = \left(\frac{8}{3}; -\frac{1}{3}\right)$ ;  $\overrightarrow{KN} = (1; y - 4)$  cùng phương  $\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{8}{3}} = \frac{y - 4}{1} \Rightarrow y = \frac{31}{8} \Rightarrow N\left(0; \frac{31}{8}\right)$



## BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.**

**Câu 1:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  khác  $\vec{0}$ . Xác định góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  biết  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ .

- A.  $\alpha = 90^\circ$ .                      B.  $\alpha = 0^\circ$ .                      C.  $\alpha = 45^\circ$ .                      D.  $\alpha = 180^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \alpha$ . Mà  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$  nên  $\cos \alpha = -1$  suy ra  $\alpha = 180^\circ$ .

**Câu 2:** Tam giác  $ABC$  có  $A(1;2)$ ,  $B(0;4)$ ,  $C(3;1)$ . Góc  $BAC$  của tam giác  $ABC$  gần với giá trị nào dưới đây?

- A.  $90^\circ$ .                      B.  $36^\circ 52'$ .                      C.  $143^\circ 7'$ .                      D.  $53^\circ 7'$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (-1;2)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (2;-1)$  nên  $\cos BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-2-2}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{-4}{5} \Rightarrow BAC = 143^\circ 7'$ .

**Câu 3:** Cho hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  khác vectơ-không thỏa mãn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  bằng:

- A.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 45^\circ$ .                      B.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 0^\circ$ .                      C.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ$ .                      D.  $(\vec{a}; \vec{b}) = 90^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có: 
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) \end{cases} \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = -1 \Leftrightarrow (\vec{a}; \vec{b}) = 180^\circ.$$

**Câu 4:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  thỏa mãn:  $|\vec{a}| = 4$ ;  $|\vec{b}| = 3$ ;  $|\vec{a} - \vec{b}| = 4$ . Gọi  $\alpha$  là góc giữa hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$ . Chọn phát biểu **đúng**.

- A.  $\alpha = 60^\circ$ .                      B.  $\alpha = 30^\circ$ .                      C.  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ .                      D.  $\cos \alpha = \frac{3}{8}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $|\vec{a} - \vec{b}| = 4 \Leftrightarrow (\vec{a} - \vec{b})^2 = 16 \Leftrightarrow \vec{a}^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2 = 16$

$$\Leftrightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos \alpha + 3^2 = 16 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{3}{8}$$

**Câu 5:** Cho hai vectơ  $\vec{a} = (4;3)$  và  $\vec{b} = (1;7)$ . Số đo góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng

- A.  $45^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Lời giải**



Ta có  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 7}{\sqrt{4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + 7^2}} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  nên  $\alpha = 45^\circ$ .

**Câu 6:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 5)$ ,  $\vec{b} = (3; -7)$ . Tính góc  $\alpha$  giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- A.  $\alpha = 60^\circ$ .                      B.  $\alpha = 120^\circ$ .                      C.  $\alpha = 45^\circ$ .                      D.  $\alpha = 135^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{4 + 25} \cdot \sqrt{9 + 49}} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \alpha = 135^\circ$ .

**Câu 7:** Trên mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (2; 1)$  và  $\vec{b} = (3; -6)$ . Góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng

- A.  $0^\circ$ .                      B.  $90^\circ$ .                      C.  $180^\circ$ .                      D.  $60^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 1 \cdot (-6)}{\sqrt{2^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-6)^2}} = 0 \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ$ .

**Câu 8:** Cho hai vectơ  $\vec{a}; \vec{b}$  khác vectơ  $\vec{0}$  thỏa mãn  $\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ . Khi đó góc giữa hai vectơ  $\vec{a}; \vec{b}$  là

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $120^\circ$ .                      C.  $150^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có  $|\vec{a}| = |-\vec{a}|$ . Vậy  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \Rightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$ .

**Câu 9:** Cho vectơ  $\vec{a}(1; -2)$ . Với giá trị nào của  $y$  thì vectơ  $\vec{b} = (3; y)$  tạo với vectơ  $\vec{a}$  một góc  $45^\circ$

- A.  $y = -9$ .                      B.  $\begin{cases} y = -1 \\ y = 9 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} y = 1 \\ y = -9 \end{cases}$ .                      D.  $y = -1$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}}$ .

Góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  bằng  $45^\circ$  suy ra  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{3 - 2y}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{9 + y^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$  (1)

(1)  $\Leftrightarrow \sqrt{90 + 10y^2} = 6 - 4y \Leftrightarrow \begin{cases} 6 - 4y \geq 0 \\ 90 + 10y^2 = (6 - 4y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \leq \frac{3}{2} \\ y^2 - 8y - 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = -1$ .

**Câu 10:** Cho hai vectơ  $\vec{a}, \vec{b}$  sao cho  $|\vec{a}| = \sqrt{2}$ ,  $|\vec{b}| = 2$  và hai vectơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau. Tính góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

- A.  $120^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $90^\circ$ .                      D.  $30^\circ$ .



## Lời giải

Vì hai véc tơ  $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ ,  $\vec{y} = 2\vec{a} - \vec{b}$  vuông góc với nhau nên

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow 2\vec{a}^2 - \vec{b}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow 2|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 + |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sqrt{2})^2 - 2^2 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 90^\circ.$$

**Câu 11:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vector  $\vec{u} = (3; 4)$  và  $\vec{v} = (-8; 6)$ . Khẳng định nào đúng?

**A.**  $\vec{u} = -\vec{v}$ .

**B.**  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .

**C.**  $|\vec{u}| = |\vec{v}|$ .

**D.**  $\vec{u}$  và  $\vec{v}$  cùng phương.

## Lời giải

Ta có:  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot (-8) + 4 \cdot 6 = 0$ . Do đó  $\vec{u} \perp \vec{v}$ .

**Câu 12:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; 2), B(-3; 1)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên trục  $Oy$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .

**A.**  $C(6; 0)$ .

**B.**  $C(0; 6)$ .

**C.**  $C(-6; 0)$ .

**D.**  $C(0; -6)$ .

## Lời giải

Ta có  $C \in Oy \Leftrightarrow C(0; y)$  nên  $\overrightarrow{AB} = (-4; -1)$ ,  $\overrightarrow{AC} = (-1; y - 2)$ .

$$\text{Ba điểm } A, B, C \text{ tạo thành một tam giác vuông tại } A \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AC} \neq \vec{0} \\ \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow y = 6.$$

Vậy  $C(0; 6)$ .

**Câu 13:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1; 2), B(0; 3), C(5; -2)$ . Tìm tọa độ chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$ .

**A.**  $(0; 3)$ .

**B.**  $(0; -3)$ .

**C.**  $(3; 0)$ .

**D.**  $(-3; 0)$ .

## Lời giải

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (1; 1)$ ;  $\overrightarrow{AC} = (6; -4)$ ;  $\overrightarrow{BC} = (5; -5)$ .

Nhận thấy rằng  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 1 \cdot 5 + 1 \cdot (-5) = 0$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

Vậy chân đường cao hạ từ đỉnh  $A$  của tam giác  $ABC$  trùng với đỉnh  $B(0; 3)$ .

**Câu 13.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai vector  $\vec{u} = (1; 2)$  và  $\vec{v} = (4m; 2m - 2)$ . Tìm  $m$  để vector  $\vec{u}$  vuông góc với  $\vec{v}$ .

**A.**  $m = \frac{1}{2}$ .

**B.**  $m = -\frac{1}{2}$ .

**C.**  $m = 1$ .

**D.**  $m = -1$ .

## Lời giải



Hai vector  $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow 4m + 2 \cdot (2m - 2) = 0 \Leftrightarrow 8m - 4 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$ .

**Câu 14:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;0), B(4;0), C(0;m), m \neq 0$ . Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ . Xác định  $m$  để tam giác  $GAB$  vuông tại  $G$ .

- A.**  $m = -\sqrt{6}$ .      **B.**  $m = \pm 3\sqrt{6}$ .      **C.**  $m = 3\sqrt{6}$ .      **D.**  $m = \pm\sqrt{6}$ .

**Lời giải**

Gọi  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$  suy ra  $G\left(1; \frac{m}{3}\right)$ .

Ta có  $\overrightarrow{GA} = \left(-2; -\frac{m}{3}\right); \overrightarrow{GB} = \left(3; -\frac{m}{3}\right)$ .

Để tam giác  $GAB$  vuông tại  $G$  thì  $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = 0 \Leftrightarrow -6 + \frac{m^2}{9} = 0 \Leftrightarrow m = \pm 3\sqrt{6}$ .

**Câu 15:** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;-1), B(3;-3), C(6;0)$ . Diện tích  $DABC$  là

- A.** 6.      **B.**  $6\sqrt{2}$ .      **C.** 12.      **D.** 9.

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AB} = (2;-2), \overrightarrow{BC} = (3;3)$

Ta thấy  $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

Vậy  $S_{ABC} = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2} = 6$

**Câu 16:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $B(-1;3)$  và  $C(3;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $A$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

- A.**  $A(0;0)$  hoặc  $A(2;-4)$ .      **B.**  $A(0;0)$  hoặc  $A(2;4)$ .  
**C.**  $A(0;0)$  hoặc  $A(-2;-4)$ .      **D.**  $A(0;0)$  hoặc  $A(-2;4)$ .

**Lời giải**

Tìm tọa độ điểm  $A$  sao cho tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A$ .

Gọi  $A(x;y)$ . Tam giác  $ABC$  vuông cân tại  $A \Leftrightarrow \begin{cases} AB = AC \\ AB \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (-1-x)^2 + (3-y)^2 = (3-x)^2 + (1-y)^2 \\ (-1-x)(3-x) + (3-y)(1-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = y \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0, y = 0 \\ x = 2, y = 4 \end{cases}. \text{ Vậy } A(0;0) \text{ hoặc } A(2;4).$$

**Câu 17:** Tìm bán kính đường tròn đi qua ba điểm  $A(0;4), B(3;4), C(3;0)$ .



**A.**  $\frac{5}{2}$ .

**B.**  $\frac{\sqrt{10}}{2}$ .

**C.** 5.

**D.** 3.

**Lời giải**

Tính được  $AB = 3, BC = 4$  và  $AC = 5 \Rightarrow AB^2 + BC^2 = AC^2$  nên tam giác  $ABC$  vuông tại  $B$ .

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp  $R = \frac{1}{2}AC = \frac{5}{2}$ .

**Câu 18:** Trong mặt phẳng tọa độ ( $Oxy$ ) cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;0); B(-1;1); C(5;-1)$ . Tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  là

**A.**  $H(-1;-9)$ .

**B.**  $H(-8;-27)$ .

**C.**  $H(-2;5)$ .

**D.**  $H(3;14)$ .

**Lời giải**

$$\text{Gọi } H(x; y) \text{ là trực tâm của tam giác } ABC \Leftrightarrow \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AH} = (x-1; y); \overrightarrow{BC} = (6; -2); \overrightarrow{BH} = (x+1; y-1); \overrightarrow{AC} = (4; -1).$$

$$\text{Suy ra: } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} 6(x-1) - 2y = 0 \\ 4(x+1) - 1(y-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 6 \\ 4x - y = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -8 \\ y = -27 \end{cases}.$$

$$\text{Vậy } H(-8; -27).$$

**Câu 19:** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ ; cho tam giác  $ABC$  có  $A(-1;1)$ ,  $B(1;3)$  và trọng tâm là  $G(-2; \frac{2}{3})$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên tia  $Oy$  sao cho tam giác  $MBC$  vuông tại  $M$ .

**A.**  $M(0;-3)$ .

**B.**  $M(0;3)$ .

**C.**  $M(0;4)$ .

**D.**  $M(0;-4)$ .

**Lời giải**

Ta có  $G$  là trọng tâm  $\Delta ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 3(-2) - (-1) - 1 = -6 \\ y_C = 3 \cdot \frac{2}{3} - 1 - 3 = -2 \end{cases} \Rightarrow C(-6; -2)$$

$$\text{Ta có } M \in Oy \Rightarrow M(0; m)$$

$$\text{Gọi } I \text{ là trung điểm của đoạn } BC \text{ ta có: } \begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = -\frac{5}{2} \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I\left(-\frac{5}{2}; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BM} = (-1; m-3); \overrightarrow{CM} = (6; m+2); \overrightarrow{CB} = (7; 5); \overrightarrow{IM} = \left(\frac{5}{2}; m - \frac{1}{2}\right)$$



Tam giác  $\triangle MBC$  vuông cân tại  $M$  khi: 
$$\begin{cases} \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{IM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-3)(m+2) - 6 = 0 \\ 5\left(m - \frac{1}{2}\right) + 7 \cdot \frac{5}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - m - 12 = 0 \\ m = -3 \end{cases} \Leftrightarrow m = -3 \Rightarrow M(0; -3).$$

- Câu 20:** Trên hệ trục tọa độ  $xOy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(4;3)$ ,  $B(2;7)$ ,  $C(-3;-8)$ . Tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh  $A$  xuống cạnh  $BC$  là
- A.  $(1;-4)$ .      B.  $(-1;4)$ .      C.  $(1;4)$ .      D.  $(4;1)$ .

**Lời giải**

Gọi  $D(x;y)$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  xuống cạnh  $BC$  ta có  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$  và  $D, B, C$  thẳng hàng

Mà  $\overrightarrow{AD} = (x-4; y-3)$ ;  $\overrightarrow{BC} = (-5; -15)$ ;  $\overrightarrow{BD} = (x-2; y-7)$  nên ta có hệ

$$\begin{cases} x-4+3(y-3)=0 \\ 3(x-2)-y+7=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}.$$

- Câu 21:** Cho ba điểm  $A, B, C$  phân biệt. Tập hợp những điểm  $M$  mà  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$  là:
- A. Đường tròn đường kính  $AB$ .  
B. Đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .  
 C. Đường thẳng đi qua  $B$  và vuông góc với  $AC$ .  
 D. Đường thẳng đi qua  $C$  và vuông góc với  $AB$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA}) \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0$ .

Tập hợp điểm  $M$  là đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với  $BC$ .

- Câu 22:** Cho tam giác  $ABC$ , điểm  $J$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ ,  $I$  là trung điểm của cạnh  $AB$ , điểm  $K$  thỏa mãn  $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ .

Một điểm  $M$  thay đổi nhưng luôn thỏa mãn  $(3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0$ .

Tập hợp điểm  $M$  là đường nào trong các đường sau.

- A. Đường tròn đường kính  $IJ$ .      B. Đường tròn đường kính  $IK$ .  
C. Đường tròn đường kính  $JK$ .      D. Đường trung trực đoạn  $JK$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + 2\overrightarrow{KC} = 4\overrightarrow{MK}$ .

Lấy điểm  $J$  thỏa mãn  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$ . Ta có  $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AC}}{2}$  mà  $\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{KJ}$  nên

$$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AK} + \overrightarrow{KJ} = \overrightarrow{AK} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}.$$



$$\text{Lại có } \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Suy ra  $J$  là điểm cố định nằm trên đoạn thẳng  $BC$  xác định bởi hệ thức  $\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$ .

$$\text{Ta có } 3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{MK} + 3\overrightarrow{KJ} = 3\overrightarrow{MJ}.$$

$$\text{Như vậy } (3\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{AK}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}) = 0 \Leftrightarrow (3\overrightarrow{MJ}) \cdot (4\overrightarrow{MK}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 0.$$

Từ đó suy ra điểm  $M$  thuộc đường tròn đường kính  $JK$ .

Vì  $J, K$  là các điểm cố định nên điểm  $M$  luôn thuộc một đường tròn đường kính  $JK$  là đường tròn cố định.

## PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vector  $\vec{a} = (-2; 3), \vec{b} = (4; 1)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = 12$

b)  $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 4$

c) Vector  $\vec{c} = m\vec{i} + \vec{j}$  vuông góc với  $\vec{a}$  khi  $m = \frac{3}{2}$

d) Tọa độ vector  $\vec{d}$  sao cho  $\vec{a} \cdot \vec{d} = 4, \vec{b} \cdot \vec{d} = -2$  bằng  $\left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right)$

### Lời giải

a) Sai: Ta có  $\vec{a} - \vec{b} = (-6; 2) \Rightarrow \vec{a}(\vec{a} - \vec{b}) = -2(-6) + 3 \cdot 2 = 18;$

b) Đúng:  $\vec{a} + \vec{b} = (2; 4); 2\vec{a} - \vec{b} = (-8; 5) \Rightarrow (\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b}) = 2(-8) + 4 \cdot 5 = 4.$

c) Đúng: Ta có:  $\vec{c} = (m; 1)$  mà do  $\vec{c} \perp \vec{a}$  nên  $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow -2m + 3 \cdot 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}.$

d) Đúng: Gọi  $\vec{d} = (x; y)$  nên ta có: 
$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{d} = 4 \\ \vec{b} \cdot \vec{d} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{5}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases} \Rightarrow \vec{d} = \left(-\frac{5}{7}; \frac{6}{7}\right).$$

**Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho các vector  $\vec{a} = (2; 5), \vec{b} = (3; -7), \vec{c} = (1; 1)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 29$

b)  $(\vec{a}, \vec{b}) = 15^\circ$



c)  $(\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$

d) Để  $\vec{d} = (4x+1)\vec{i} + (x+4)\vec{j}$  tạo với vector  $\vec{c}$  một góc  $45^\circ$  thì  $x = -\frac{1}{4}$ .

**Lời giải**

a) Ta có  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{2 \cdot 3 + 5 \cdot (-7)}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-7)^2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 135^\circ$

Khi đó:  $\cos(\vec{a}, \vec{c}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 1}{\sqrt{2^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{7\sqrt{58}}{58} \Rightarrow (\vec{a}, \vec{c}) \approx 23,1986^\circ$ .

b) Ta có:  $\vec{d} = (4x+1; x+4)$  tạo với  $\vec{c}$  một góc  $45^\circ$  nên:

$$\cos(\vec{d}, \vec{c}) = \frac{\vec{d} \cdot \vec{c}}{|\vec{d}| \cdot |\vec{c}|} = \frac{4x+1+x+4}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(4x+1)^2 + (x+4)^2}} = \cos 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{5x+5}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{17x^2 + 16x + 17}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow 5x+5 = \sqrt{17x^2 + 16x + 17}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 17x^2 + 16x + 17 = 25x^2 + 50x + 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 8x^2 + 34x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4}.$$

**Câu 3:** Cho tam giác  $ABC$  đều và kẻ đường cao  $AH$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 30^\circ$

b)  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$

c)  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

d)  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 130^\circ$

**Lời giải**

a) Sai: Ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 60^\circ$ .

b) Đúng: Ta có  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{CB}) = 90^\circ$  do  $AH \perp BC$ .

c) Đúng: Cách giải 1: Gọi  $D$  là điểm đối xứng với  $B$  qua  $C$  ta có:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CD}$ .

Khi đó:  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \angle ACD = 120^\circ$ .

Cách giải 2: Áp dụng tính chất được rút ra từ định nghĩa:

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (-\vec{a}, \vec{b}) = 180^\circ - (\vec{a}, -\vec{b}) \text{ ta được:}$$



$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BC}) = 180^\circ - (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = 180^\circ - ACB = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

d) Sai: Ta có  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AB}) = 180^\circ - BAH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$

**Câu 4:** Cho hình thoi  $ABCD$  có cạnh bằng 2 và góc  $B$  bằng  $60^\circ$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

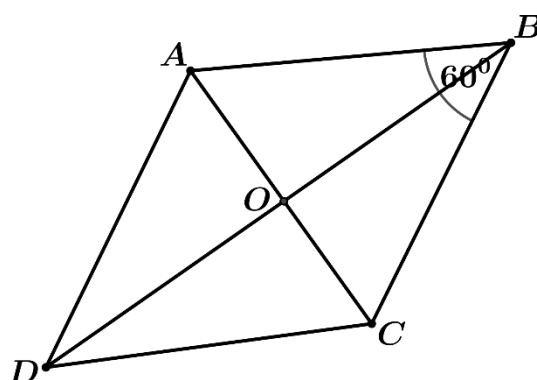
a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 30^\circ$

c)  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = 3$

d)  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -3$

**Lời giải**



a) Đúng: Xét hình thoi  $ABCD$  có  $ABC = 60^\circ \Rightarrow BAD = 120^\circ$

Xét tam giác  $ABC$  có  $AB = BC = 2, ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABC$  đều cạnh 2  $\Rightarrow OB = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$

b) Sai: Ta có  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = BAC = 60^\circ$

Khi đó:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA}) = 180^\circ - (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = 180^\circ - BAD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

c) Sai: Ta có:  $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DC} = |\overrightarrow{DA}| \cdot |\overrightarrow{DC}| \cos(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}) = DA \cdot DC \cdot \cos ADC = 2 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 2$

d) Đúng:  $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BA} = -|\overrightarrow{BO}| \cdot |\overrightarrow{BA}| \cdot \cos ABO = -BO \cdot BA \cdot \cos 30^\circ = -\sqrt{3} \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -3.$

**Câu 5:** Cho tam giác đều  $ABC$ , đường cao  $AH$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 60^\circ$

b)  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 120^\circ$

c)  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$



d)  $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$

**Lời giải**

a) Đúng:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \angle BAC = 60^\circ$ .

b) Đúng: Dựng hình bình hành  $ABCD$  ta có:  $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ .

Suy ra:  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \angle BAD = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

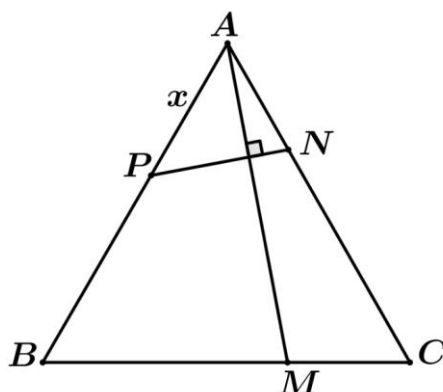
c) Đúng: Tam giác  $ABC$  đều nên  $AH \perp BC$  suy ra  $(\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{BC}) = 90^\circ$

d) Sai: Dựng hình bình hành  $ABEH$  ta có:  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HE}$ .

Suy ra:  $(\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HE}) = \angle AHE = 180^\circ - \angle BAH = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

**Câu 1:** Cho tam giác  $ABC$  đều cạnh 1. Lấy  $M, N, P$  lần lượt nằm trên ba cạnh  $BC, CA, AB$  sao cho  $BM = 2MC, AC = 3AN, AP = x, x > 0$ . Tìm  $x$  để  $AM$  vuông góc với  $NP$  (kết quả làm trong đến hai chữ số thập phân).

**Lời giải**

Đặt  $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = \vec{b} \\ \overrightarrow{AC} = \vec{c} \end{cases}$  thì ta có  $|\vec{b}| = |\vec{c}| = a$  và  $\vec{b} \cdot \vec{c} = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Ta có  $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{b} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} = \vec{b} + \frac{2}{3}(\vec{c} - \vec{b}) = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c})$

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} = -\frac{x}{a}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} = \frac{1}{3a}(-3x\vec{b} + a\vec{c})$

Theo yêu cầu bài toán ta có  $AM \perp PN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow (\vec{b} + 2\vec{c}) \cdot (-3x\vec{b} + a\vec{c}) = 0$

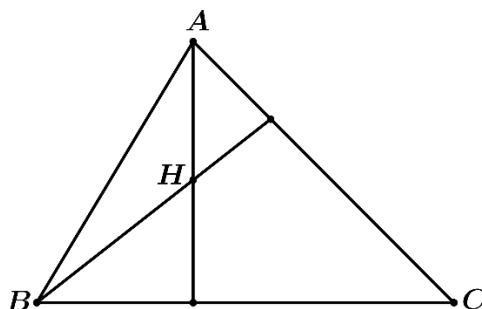
$\Leftrightarrow -3x\vec{b} \cdot \vec{b} + a(\vec{b} \cdot \vec{c}) - 6x(\vec{b} \cdot \vec{c}) + 2a\vec{c} \cdot \vec{c} = 0 \Leftrightarrow -3xa^2 + \frac{a^3}{2} - 6xa^2 + 2a^3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{12}$ .

Khi đó  $x = 0,83$



**Câu 2:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$ . Biết  $A(3;-1), B(-1;2)$  và  $I(1;-1)$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ . Trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$  có tọa độ  $(a;b)$ . Tính  $a + 3b$ .

**Lời giải**



Giả sử  $C(x_C; y_C)$  và  $H(x_H; y_H)$ . Và có  $I$  là trọng tâm tam giác  $ABC$  nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = x_I \\ \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = y_I \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_C = 1 \\ y_C = -4 \end{cases} \Rightarrow C(1; -4)$$

Ta có:  $\overrightarrow{AH} = (x_H - 3; y_H + 1); \overrightarrow{BC} = (2; -6)$  và  $\overrightarrow{BH} = (x_H + 1; y_H - 2); \overrightarrow{AC} = (-2; -3)$

Do  $H$  là trực tâm tam giác  $ABC$  nên

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_H - 3) - 6(y_H + 1) = 0 \\ -2(x_H + 1) - 3(y_H - 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = \frac{10}{3} \\ y_H = -\frac{8}{9} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{10}{3}; b = -\frac{8}{9} \Rightarrow S = \frac{2}{3}.$$

**Câu 3:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3;0), B(3;0)$  và  $C(2;6)$ . Gọi  $H(a;b)$  là tọa độ trực tâm tam giác đã cho. Tính  $a + 6b$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{AH} = (a + 3; b), \overrightarrow{BC} = (-1; 6), \overrightarrow{BH} = (a - 3; b), \overrightarrow{AC} = (5; 6)$ .

$$\begin{aligned} \text{Vì } H \text{ là trực tâm } \triangle ABC \text{ nên } \begin{cases} AH \perp BC \\ BH \perp AC \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -a + 6b = 3 \\ 5a + 6b = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = \frac{5}{6} \end{cases} \\ &\Rightarrow a + 6b = 7. \end{aligned}$$

**Câu 4:** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M(3;1)$ . Giả sử  $A(a;0)$  và  $B(0;b)$  là hai điểm sao cho tam giác  $MAB$  vuông tại  $M$  và có diện tích nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức  $T = a^2 + b^2$ .

**Lời giải**

Ta có  $\overrightarrow{MA} = (a - 3; -1), \overrightarrow{MB} = (-3; b - 1)$ .

Tam giác  $MAB$  là tam giác vuông tại  $M$  khi và chỉ khi

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow -3(a - 3) - (b - 1) = 0 \Leftrightarrow b = 10 - 3a \quad (*)$$



Với  $a \geq 0, b \geq 0$  suy ra  $0 \leq a \leq \frac{10}{3}$  (\*\*)

$$S_{MAB} = \frac{1}{2} MA \cdot MB = \frac{1}{2} \sqrt{(a-3)^2 + 1} \cdot \sqrt{9 + (b-1)^2} = \frac{3}{2} (a^2 - 6a + 10) = \frac{3}{2} (a-3)^2 + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$$

Do đó  $\min S_{MAB} = \frac{3}{2}$  đạt được khi  $a = 3$  khi đó  $b = 1$ . Vậy  $T = a^2 + b^2 = 10$ .

**Câu 5:** Mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$  cho các điểm  $A(1;3), B(-2;3), C(-2;1)$ . Điểm  $M(a;b)$  thuộc đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ  $Oxy$  sao cho  $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$  nhỏ nhất. Khi đó tính giá trị biểu thức  $S = 12a - 8b$ .

### Lời giải

Gọi  $I(x;y)$  sao cho  $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = (-9 - 6x; 12 - 6y) \Leftrightarrow \begin{cases} -9 - 6x = 0 \\ 12 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ y = 2 \end{cases} \text{ suy ra } I\left(-\frac{3}{2}; 2\right).$$

$$\text{Ta có } |\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})| = 6|\overrightarrow{MI}| = 6MI$$

Đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ  $Oxy$  có phương trình  $y = -x$ .

Điểm  $M(a;b)$  thuộc đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ  $Oxy$  nên có tọa độ dạng  $M(a; -a)$  trong đó  $b = -a$ .

Ta có  $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $MI$  nhỏ nhất khi và chỉ khi  $M$  là hình chiếu của  $I\left(-\frac{3}{2}; 2\right)$  lên đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ  $Oxy$ .

Khi đó:  $\overrightarrow{IM} \perp \vec{v}$  trong đó  $P(-1;1)$  thuộc đường phân giác thứ hai của hệ tọa độ  $Oxy$  và  $\vec{v} = \overrightarrow{OP} = (-1;1)$ .

$$\text{Ta có } I\left(-\frac{3}{2}; 2\right), M(a; -a) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(a + \frac{3}{2}; -a - 2\right).$$

$$\text{Do đó: } \overrightarrow{IM} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow -1 \cdot \left(a + \frac{3}{2}\right) + 1 \cdot (-a - 2) = 0 \Leftrightarrow -2a = \frac{7}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{7}{4} \Rightarrow b = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Vậy } S = 12 \cdot \left(-\frac{7}{4}\right) - 8 \cdot \frac{7}{4} = -35.$$

**Câu 6:** Một máy bay đang bay từ hướng đông sang hướng tây với tốc độ 650 (km/h) thì gặp luồng gió thổi từ hướng đông bắc sang hướng tây nam với tốc độ 35 (km/h). Máy bay bị thay đổi vận tốc sau khi gặp gió thổi. Tìm tốc độ mới của máy bay (làm tròn kết quả đến hàng phần mười theo đơn vị km/h).

### Lời giải

Gọi  $\vec{v}_0$  là vận tốc của máy bay khi không có gió là  $|\vec{v}_0| = 650$  (km/h)

Gọi  $\vec{v}_1$  là vận tốc của gió thì  $|\vec{v}_1| = 35$ ;  $\vec{v}_2$  là vận tốc của máy bay khi có gió.



Ta có:  $\vec{v}_2 = \vec{v}_0 + \vec{v}_1$  mà theo giả thiết  $(\vec{v}_1, \vec{v}_0) = 45^\circ$  nên ta có:

$$\vec{v}_2^2 = (\vec{v}_0 + \vec{v}_1)^2 = \vec{v}_0^2 + \vec{v}_1^2 + 2\vec{v}_0 \cdot \vec{v}_1 = |\vec{v}_0|^2 + |\vec{v}_1|^2 + 2|\vec{v}_0| \cdot |\vec{v}_1| \cdot \cos 45^\circ$$

$$= 650^2 + 35^2 + 2 \cdot 650 \cdot 35 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 455898,36 \text{ suy ra } |\vec{v}_2| \approx 675,2 \text{ (km/h).}$$

-----HẾT-----

