

ĐỀ CHÍNH THỨC  
(Đề thi có 01 trang)

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 180 phút, không kể thời gian phát đề

Câu 1. (3,0 điểm) Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ac} + \frac{c^2}{1+2ab}.$$

Câu 2. (3,0 điểm) Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi 
$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng dãy số  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

b) Tính giá trị của tích vô hạn  $P = \prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \dots$

Câu 3. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thỏa mãn đồng thời các điều kiện sau:

i)  $f(0) \neq -1$ .

ii)  $f(x^2 + 2f(y)) = 2y + f^2(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

Câu 4. (3,0 điểm) Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt  $u_n = (4 - \sqrt{15})^n + (4 + \sqrt{15})^n$ . Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $u_n$  chia hết cho 2 và  $A = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2025}^2$  chia hết cho 8.

Câu 5. (3,0 điểm) Cho 21 ô vuông được xếp thành một hàng dọc liên tiếp nhau. Người ta tô một trong hai màu đen hoặc trắng cho mỗi ô vuông sao cho:

i) Không tô đen 2 ô liên tiếp nhau.

ii) Không tô trắng quá 2 ô liên tiếp nhau.

Hỏi có bao nhiêu cách tô màu thỏa mãn đồng thời các điều kiện trên?

Câu 6. (5,0 điểm) Cho tam giác  $ABC$  không cân. Đường tròn tâm  $I$  nội tiếp tam giác  $ABC$ , tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $D$ . Đường thẳng đi qua  $D$  vuông góc  $IA$ , cắt  $IB, IC$  lần lượt tại  $P, Q$ .

a) Chứng minh các điểm  $B, P, C, Q$  cùng thuộc một đường tròn  $(\omega)$ .

b) Gọi  $K$  là tâm đường tròn  $(\omega)$ . Chứng minh ba điểm  $K, A, D$  thẳng hàng.

# Lời giải tham khảo các bài toán trong đề thi chọn ĐTQG Thành phố Cần Thơ năm 2025 - 2026

SMFE - Simple Math for Everyone

Bàn luận toán học số 12 - Ngày 23 tháng 8 năm 2025

## 1 Đề bài

**Bài toán 1. (3,0 điểm)** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thoả mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{1 + 2bc} + \frac{b^2}{1 + 2ac} + \frac{c^2}{1 + 2ab}.$$

**Bài toán 2. (3,0 điểm)** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

- (a) Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.  
(b) Tính giá trị của tích vô hạn

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 u_2 u_3 \dots$$

**Bài toán 3. (3,0 điểm)** Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

- i.  $f(0) \neq -1$ .  
ii.  $f(x^2 + 2f(y)) = 2y + f^2(x)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 4. (3,0 điểm)** Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt

$$u_n = (4 - \sqrt{15})^n + (4 + \sqrt{15})^n.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $u_n$  chia hết cho 2 và

$$A = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2025}^2$$

chia hết cho 8.

**Bài toán 5. (3,0 điểm)** Cho 21 ô vuông được xếp thành hàng dọc liên tiếp nhau. Người ta tô một trong hai màu đen hoặc trắng cho mỗi ô vuông sao cho

- i. Không tô đen 2 ô liên tiếp nhau.
- ii. Không tô trắng quá 2 ô liên tiếp nhau.

Có bao nhiêu cách tô thỏa mãn đồng thời các điều kiện trên.

**Bài toán 6. (5,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  không cân. Đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $D$ . Đường thẳng qua  $D$  vuông góc với  $IA$ , cắt  $IB, IC$  lần lượt tại  $P, Q$ .

- (a) Chứng minh bốn điểm  $B, C, P, Q$  cùng thuộc một đường tròn  $(\omega)$ .
- (b) Gọi  $K$  là tâm đường tròn  $(\omega)$ . Chứng minh ba điểm  $A, K, D$  thẳng hàng.

## 2

## Lời giải

**Bài toán 1. (3,0 điểm)** Cho  $a, b, c$  là các số thực dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a^2}{1+2bc} + \frac{b^2}{1+2ac} + \frac{c^2}{1+2ab}.$$

## LỜI GIẢI

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy - Schwarz, ta được

$$P = \sum \frac{a^2}{1+2bc} = \sum \frac{a^4}{a^2+2a^2bc} \geq \frac{(a^2+b^2+c^2)^2}{a^2+b^2+c^2+2abc(a+b+c)}.$$

Mặt khác, ta lại có

$$1 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq 3(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geq 3abc(a + b + c) \implies abc(a + b + c) \leq \frac{1}{3}.$$

Do đó  $P \geq \frac{3}{5}$ . Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Bài toán 2. (3,0 điểm)** Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n}{2}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

- (a) Chứng minh rằng dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.  
 (b) Tính giá trị của tích vô hạn

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 u_2 u_3 \dots$$

## LỜI GIẢI

(a) Bằng quy nạp, dễ dàng chỉ ra được  $0 < u_n < 1$  với mọi  $n$ . Mặt khác, ta xét

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1 + u_n - 2u_n^2}{2 \left( \sqrt{\frac{1+u_n}{2}} + u_n \right)} > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó, dãy  $(u_n)$  tăng. Kết hợp với việc dãy bị chặn trên bởi 1, ta suy ra dãy  $(u_n)$  có giới hạn hữu hạn. Đặt  $\lim u_n = L$ , chuyển qua giới hạn, ta được

$$L = \sqrt{\frac{1+L}{2}} \iff L = 1.$$

Vậy  $\lim u_n = 1$ .

(b) Ta có  $u_1 = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$  và

$$u_2 = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{3}}{2}} = \cos \frac{\pi}{2 \cdot 3}.$$

Ta sẽ chứng minh  $u_n = \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$  bằng quy nạp. Thật vậy, giả sử  $u_k = \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-1}}$ .

Khi đó

$$u_{k+1} = \sqrt{\frac{1 + \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-1}}}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 2 \cos^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} - 1}{2}} = \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}.$$

Vì vậy theo nguyên lí quy nạp, ta được  $u_n = \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}$  với mọi  $n$ . Như vậy ta được

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n u_i &= \prod_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{i-1}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{i-1}} \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-1} \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{i-1}} \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-2}}}{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}} \\ &= \dots \\ &= \frac{\frac{1}{2^n} \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}}. \end{aligned}$$

Khi đó, tích vô hạn ta cần tính có giá trị là

$$\prod_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 u_2 u_3 \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^n u_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{\sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}} \sim \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} \cdot \sin \frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{3 \cdot 2^{n-1}}} = \frac{3 \sin \frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{4\pi}.$$

**Bài toán 3. (3,0 điểm)** Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  thoả mãn đồng thời các điều kiện sau

- i.  $f(0) \neq -1$ .
- ii.  $f(x^2 + 2f(y)) = 2y + f^2(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .

### LỜI GIẢI

Kí hiệu  $P(x, y)$  là phép thế  $x, y$  vào phương trình đề cho. Giả sử tồn tại hàm số thoả mãn yêu cầu đề bài

$$(x^2 + 2f(y)) = 2y + f^2(x), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Xét  $P(0, y)$ , ta được

$$f(2f(y)) = 2y + f^2(0), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Giả sử tồn tại  $a, b \in \mathbb{R}$  sao cho  $f(a) = f(b)$ . Thay lần lượt  $y$  bởi  $m$  và  $y$  bởi  $n$  trong (2), ta được

$$\begin{cases} f(2f(m)) = 2m + f^2(0) \\ f(2f(n)) = 2n + f^2(0) \end{cases} \implies a = b.$$

Do đó, hàm  $f$  đơn ánh. Mặt khác dễ thấy hàm  $f$  toàn ánh nên ta suy ra hàm  $f$  là song ánh. Do đó tồn tại duy nhất số thực  $a$  sao cho  $f(a) = 0$ , đặt  $b = f(0)$ . Ở (1), xét  $P(a, 0)$ , ta thu được

$$f(a^2 + 2b) = 2 \cdot 0 + f^2(a) = 0 = f(a) \implies a^2 + 2b = a. \quad (3)$$

Ở (1), xét  $P(0, a)$ , ta được

$$f(0) = 2a + f^2(0) \implies b = 2a + b^2. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) và giả thiết  $b \neq -1$ , ta tìm được  $a = b = 0$ . Do đó  $f(0) = 0$  và (2) trở thành  $f(2f(y)) = 2y$  với mọi  $y \in \mathbb{R}$ . Từ (1), thay  $y = 0$  ta được

$$f(x^2) = f^2(x), \forall x \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Từ đây ta suy ra

$$f(x^2 + 2f(y)) = f(x^2) + f(2f(y)), \forall x, y \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Do  $f$  toàn ánh nên từ (6), ta suy ra

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \forall x \geq 0, y \in \mathbb{R}.$$

Thay  $y$  bởi  $-x$ , ta thu được  $f$  là hàm lẻ. Xét  $x < 0, y \in \mathbb{R}$ , ta có

$$f(x + y) + f(-x) = f(y) \implies f(x + y) = f(y) - f(-x) = f(x) + f(y).$$

Từ đây, ta suy ra  $f$  là hàm cộng tính trên  $\mathbb{R}$ . Mặt khác, ta có  $f(x) \geq 0$  với mọi  $x \geq 0$  nên  $f(x) = cx$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Thử lại, ta được  $c = 1$ . Vậy hàm số duy nhất thỏa mãn đề bài là  $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$ .

**Bài toán 4. (3,0 điểm)** Với mỗi số nguyên dương  $n$ , đặt

$$u_n = (4 - \sqrt{15})^n + (4 + \sqrt{15})^n.$$

Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương  $n$  thì  $u_n$  chia hết cho 2 và

$$A = u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_{2025}^2$$

chia hết cho 8.

### LỜI GIẢI

Ta thấy rằng  $4 \pm \sqrt{15}$  là các nghiệm của phương trình

$$x^2 - 8x + 1 = 0$$

nên ta có thể suy ra dãy  $(u_n)$  được xác định như sau

$$\begin{cases} u_1 = 8, u_2 = 62 \\ u_{n+2} = 8u_{n+1} - u_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Từ đây, ta thấy  $u_n \in \mathbb{Z}$  với mọi  $n$  và  $u_{n+2} \equiv -u_n \pmod{8}$ . Do  $u_1 \equiv 0 \pmod{8}$  và  $u_2 \equiv 6 \pmod{8}$  nên ta suy ra

$$\begin{cases} u_{2n} \equiv 2 \pmod{4} \\ u_{2n-1} \equiv 0 \pmod{8} \end{cases}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Do đó  $u_n$  chia hết cho 2 với mọi  $n$  và

$$A \equiv 1012 \cdot 0 + 1013 \cdot 4 \equiv 0 \pmod{8}.$$

**Bài toán 5. (3,0 điểm)** Cho 21 ô vuông được xếp thành hàng dọc liên tiếp nhau. Người ta tô một trong hai màu đen hoặc trắng cho mỗi ô vuông sao cho

- i. Không tô đen 2 ô liên tiếp nhau.
- ii. Không tô trắng quá 2 ô liên tiếp nhau.

Có bao nhiêu cách tô thỏa mãn đồng thời các điều kiện trên.

### LỜI GIẢI

Với mỗi số nguyên dương  $n$ , ký hiệu  $S_n$  là cách tô màu cho  $n$  ô vuông thỏa mãn đề bài;  $x_n, y_n$  là số cách tô riêng tương ứng với ô đầu tiên được tô màu đen và trắng. Khi đó

$$S_n = x_n + y_n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Xét một cách tô mà ô vuông đầu tiên được tô màu đen. Theo (i.), ô vuông thứ hai phải được tô trắng nên

$$x_n = y_{n-1}, \forall n \geq 2. \quad (7)$$

Xét một cách tô mà ô vuông đầu tiên được tô màu trắng và ta xét hai trường hợp sau

- **Trường hợp 1.** Ô vuông thứ hai được tô màu trắng. Khi đó ô vuông thứ ba là màu đen và số cách tô là  $x_{n-2}$ .
- **Trường hợp 2.** Ô vuông thứ hai là màu đen. Khi đó số cách tô là  $x_{n-1}$ .

Qua hai cách đếm trên, ta suy ra  $y_n = x_{n-1} + x_{n-2}$  với mọi  $n \geq 3$ . Kết hợp với (7), ta suy ra  $x_n = x_{n-2} + x_{n-3}$  với mọi  $n \geq 4$ . Mà ta có thể đếm được  $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 2$  nên ta có thể đếm được  $x_{21} = 265, x_{22} = 351$ . Do đó

$$S_{21} = x_{21} + y_{21} = x_{21} + x_{22} = 616.$$

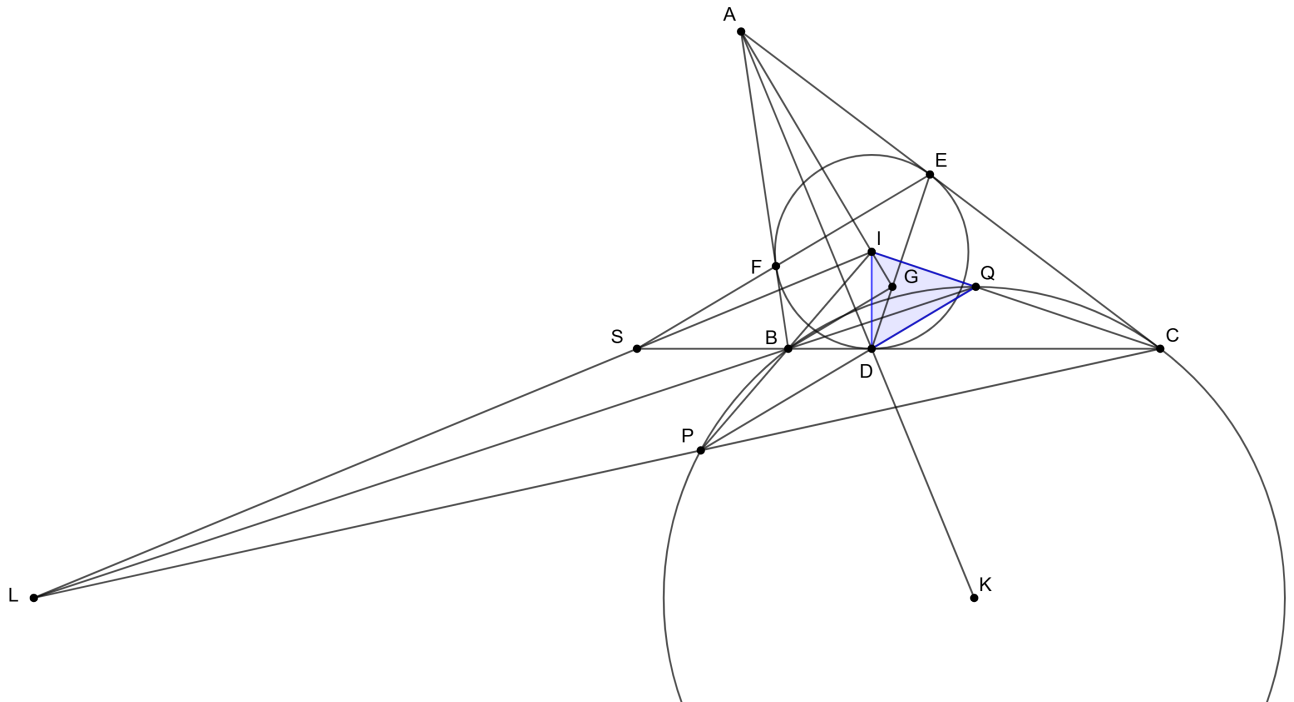
Vậy ta có 616 cách tô thỏa mãn.

**Bài toán 6. (5,0 điểm)** Cho tam giác  $ABC$  không cân. Đường tròn  $(I)$  nội tiếp tam giác tiếp xúc với cạnh  $BC$  tại  $D$ . Đường thẳng qua  $D$  vuông góc với  $IA$ , cắt  $IB, IC$  lần lượt tại  $P, Q$ .

- (a) Chứng minh bốn điểm  $B, C, P, Q$  cùng thuộc một đường tròn  $(\omega)$ .
- (b) Gọi  $K$  là tâm đường tròn  $(\omega)$ . Chứng minh ba điểm  $A, K, D$  thẳng hàng.

LỜI GIẢI

Xét thể hình như hình vẽ.



- (a) Gọi  $E, F$  là tiếp điểm của đường tròn  $(I)$  với  $AC, AB$ .  $AI$  cắt  $DE$  tại  $G$ . Theo bổ đề Iran, ta có  $AG \perp BG$  hay  $\angle IGD + \angle IBD = 180^\circ$ . Mặt khác, dễ thấy  $G$  là trực tâm của tam giác  $IDQ$  nên

$$\angle IGD + \angle IQD = 180^\circ \iff \angle IBD = \angle IQD \iff \angle PBC = \angle PQC.$$

Do đó bốn điểm  $P, B, Q, C$  cùng thuộc đường tròn  $(\omega)$ .

- (b) Gọi  $BQ$  cắt  $CP$  tại  $L$ ,  $EF$  cắt  $BC$  tại  $S$ . Khi đó  $LI$  là đối cực của  $D$  với  $(K)$ . Mặt khác, ta có  $(SD, BC) = -1$  nên ta suy ra  $S, D$  liên hợp với  $(K)$ . Do đó  $S, L, I$  thẳng hàng. Mặt khác ta có  $SI \perp AD$  và  $DK \perp IL$  nên ta suy ra ba điểm  $K, A, D$  thẳng hàng.