SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG DỰ THI QUỐC GIA CÁC MÔN VĂN HÓA LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2025 - 2026

Môn thi: **TOÁN (BẢNG B)**
Ngày thi: *22 tháng 9 năm 2025*
Thời gian làm bài: *180 phút*

Bài I (5,0 *điểm*)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_1 = 9$ và $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2+1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

a) Chứng minh (u_n) là một dãy số tăng.

b) Xét dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = \dfrac{1}{u_1+1} + \dfrac{1}{u_2+1} + \ldots + \dfrac{1}{u_n+1}$ với mọi số nguyên dương n. Chứng minh dãy số (v_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài II (5,0 *điểm*)

Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên có bậc bằng 2026 thỏa mãn: $P(x)$ không phân tích được thành tích của hai đa thức với hệ số nguyên có bậc lớn hơn hoặc bằng 1. Chứng minh rằng nếu r là một nghiệm thực của $P(x)$ thì $5r+8$ không là nghiệm của $P(x)$.

Bài III (6,0 *điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB < AC < BC)$ nội tiếp đường tròn (O). Gọi CD là đường kính của đường tròn (O). Đường thẳng đối xứng với đường thẳng BA qua đường thẳng BD cắt đường thẳng CD tại điểm E. Đường thẳng AC cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABE tại điểm thứ hai F.

a) Chứng minh tam giác FBC là một tam giác cân.

b) Gọi H là giao điểm của đường thẳng BD và đường thẳng EA, I là giao điểm của đường thẳng AD và đường thẳng EB. Gọi K là giao điểm của đường thẳng HI và đường thẳng AB, J là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE. Tia đối của tia OJ cắt đường tròn ngoại tiếp của tam giác CDK tại điểm L. Chứng minh $OL = 2OJ$.

Bài IV (4,0 *điểm*)

Cho tập hợp $S = \{1;2;3;\ldots;2025\}$ gồm 2025 số nguyên dương đầu tiên. Xét một tập con M của tập hợp S có nhiều hơn một phần tử thỏa mãn: với mỗi $a, b \in M$, nếu $2b - a \in S$ thì $2b - a \in M$.

Gọi k là số phần tử của tập hợp M. Chứng minh tồn tại k tập hợp $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập con của tập hợp số tự nhiên $\mathbb{N}$ và thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $\bigcup\limits_{i=1}^{k} A_i = \mathbb{N}$ và $A_i \cap A_j = \varnothing, \forall i, j \in \{1;2;\ldots;k\}, i \neq j$.

ii) Với mỗi $a, b \in M$, tồn tại $i, j \in \{1;2;\ldots;k\}$ sao cho $\{a + x \mid x \in A_i\} = \{b + y \mid y \in A_j\}$.

------------- **Hết** -------------

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HÀ NỘI

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG THÀNH PHỐ VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG DỰ THI QUỐC GIA CÁC MÔN VĂN HÓA LỚP 12 THPT NĂM HỌC 2025 - 2026

Môn thi: **TOÁN (BẢNG B)**
Ngày thi: *23 tháng 9 năm 2025*
Thời gian làm bài: *180 phút*

Bài V (5,0 *điểm*)

Tìm tất cả hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f\left(f(x)+f(y)\right)+xf(y)=yf(x)+f(2x)+2$$

với mọi số thực x và y.

Bài VI (4,0 *điểm*)

Cho tam giác nhọn ABC $(AB<AC)$ có đường cao AD. Trên đoạn thẳng AD lấy điểm K (K khác A và D), trên đoạn thẳng DC lấy điểm M (M khác D và C). Tia BK cắt đoạn thẳng AC tại điểm E và tia CK cắt đoạn thẳng AB tại điểm F. Đường thẳng EF cắt các đường thẳng AM, MK và AD lần lượt tại các điểm G, I và H. Đường trung trực của đoạn thẳng HD cắt đường thẳng EF tại điểm T. Chứng minh đường tròn ngoại tiếp của các tam giác AEF, AIG và THD cùng đi qua một điểm.

Bài VII (6,0 *điểm*)

Xét một đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ có bậc lớn hơn hoặc bằng 1 thỏa mãn: với mỗi số nguyên dương n, tồn tại số hữu tỉ r_n khác n sao cho $f(r_n)=f(n)$.

a) Chứng minh bậc của $f(x)$ là số nguyên dương chẵn và tồn tại hằng số c sao cho $|r_n|\le c.n$ với mọi số nguyên dương n.

b) Chứng minh tồn tại số hữu tỉ q sao cho $f(x)=f(q-x)$ với mọi số hữu tỉ x.

Bài VIII (5,0 *điểm*)

Với mỗi số nguyên dương x, ký hiệu $v_2(x)$ là số nguyên không âm y lớn nhất sao cho x chia hết cho 2^y.

Cho 100 số nguyên dương đôi một khác nhau $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Gọi S là tập hợp tất cả số nguyên không âm m sao cho tồn tại $i\in\{1;2;\ldots;100\}$ để $m=v_2(a_i)$.

Chứng minh rằng $S=\{0;1;2;\ldots;99\}$ khi và chỉ khi với mỗi số nguyên k, tồn tại các số $b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ thuộc tập hợp $\{0;1\}$ sao cho

$$k\equiv b_1a_1+b_2a_2+\cdots+b_{100}a_{100} \pmod{2^{100}}.$$

------------- Hết -------------