

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: TOÁN (Vòng 1)

Ngày thi: 23/9/2025

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

**Câu 1 (6,00 điểm):**

a) Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = \frac{1}{5}$  và  $u_{n+1} = \frac{n+1}{5n}u_n, \forall n \geq 1$ . Chứng minh dãy số  $(v_n)$

với  $v_n = \frac{u_n}{n}, \forall n \geq 1$  là một cấp số nhân và tính  $\lim(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$ .

b) Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi  $x_1 = 1$  và  $x_{n+1} = \frac{x_n}{n^2 x_n + 1}, \forall n \geq 1$ . Xét dãy số  $(S_n)$  xác định

bởi  $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  với  $n \geq 1$ . Chứng minh dãy số  $(S_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Câu 2 (7,00 điểm):**

a) Cho các số nguyên dương  $m, k$  với  $k < m$  thỏa mãn  $1 + 2 + \dots + k = (k+1) + (k+2) + \dots + m$ .

Chứng minh  $2(2k+1)^2 - 1 = (2m+1)^2$ .

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(m; k)$  với  $k < m < 2025$  thỏa mãn

$$1 + 2 + \dots + k = (k+1) + (k+2) + \dots + m.$$

**Câu 3 (7,00 điểm):**

Cho tam giác nhọn  $ABC$  ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn  $(O)$ . Kẻ ba đường cao  $AD, BE, CF$  của tam giác  $ABC$ . Đường thẳng  $EF$  cắt  $(O)$  tại hai điểm  $M, N$  sao cho  $E$  nằm giữa  $F$  và  $N$ . Đường thẳng  $BC$  cắt  $EF$  tại  $P$ . Đường thẳng đi qua  $D$  và song song với  $EF$  cắt  $AB, AC, CF$  lần lượt tại  $Q, R, S$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác  $DEF$  và  $DMN$ .

a) Chứng minh ba đường tròn  $(PQR), (DEF), (DMN)$  cùng đi qua một điểm.

b) Chứng minh hai đường thẳng  $IJ$  và  $AD$  song song với nhau.

c) Chứng minh  $D$  là trung điểm của đoạn thẳng  $QS$ .

————— HẾT —————

**ĐỀ THI CHÍNH THỨC**

(Đề thi có 01 trang)

Môn thi: TOÁN (Vòng 2)

Ngày thi: 24/9/2025

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian phát đề)

**Câu 1 (4,00 điểm):**

Cho đa thức  $P(x) = 5(x-4)^2(x-6) + 1$ .

- Chứng minh  $P(x)$  có ba nghiệm thực phân biệt.
- Gọi ba nghiệm thực phân biệt của  $P(x)$  là  $a, b, c$ . Chứng minh  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác và tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác đó.

**Câu 2 (6,00 điểm):**

Tìm tất cả các hàm số  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  thỏa mãn  $f(x)f(yf(x)) = f(x+y)$  với mọi  $x, y > 0$ .

**Câu 3 (6,00 điểm):**

Cho tam giác nhọn, không cân  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , có trọng tâm  $G$  và ba đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Các tia  $GD, GE, GF$  cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại  $X, Y, Z$ . Gọi  $X', Y', Z'$  lần lượt là các điểm đối xứng của  $X, Y, Z$  qua trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$  của tam giác  $ABC$ .

- Chứng minh  $GD.GX = GE.GY = GF.GZ$ .
- Chứng minh  $HX', HY', HZ'$  lần lượt cắt  $BC, CA, AB$  tại ba điểm nằm trên một đường thẳng vuông góc với  $OH$ .
- Chứng minh các đường thẳng  $AX', BY', CZ'$  đồng quy.

**Câu 4 (4,00 điểm):**

Cho tập hữu hạn  $S$  có  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Gọi  $\mathbb{F}(S)$  là họ tất cả các tập con khác rỗng của  $S$ . Với mỗi  $x \in S$  ta kí hiệu  $d(x)$  là số các tập con thuộc  $\mathbb{F}(S)$  chứa  $x$ . Chứng minh

$$\sum_{x \in S} d(x) = \sum_{A \in \mathbb{F}(S)} |A|.$$

**HẾT**

## 2 LỜI GIẢI

### 2.1 Ngày 1

**Bài 1:**

1. Cho dãy số  $(u_n)$  xác định bởi  $u_1 = \frac{1}{5}$  và  $u_{n+1} = \frac{n+1}{5n}u_n, \forall n \geq 1$ . Chứng minh rằng dãy số  $(v_n)$  với  $v_n = \frac{u_n}{n}, \forall n \geq 1$  là một cấp số nhân và tính  $\lim(v_1 + v_2 + \dots + v_n)$ .
2. Cho dãy số  $(x_n)$  xác định bởi  $x_1 = 1$  và  $x_{k+1} = \frac{x_k}{n^2x_k + 1}, \forall n \geq 1$ . Xét dãy số  $(S_n)$  xác định bởi  $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  với  $n \geq 1$ . Chứng minh dãy số  $(S_n)$  có giới hạn hữu hạn.

**Lời giải:**

1. Từ giả thiết, ta có biến đổi sau, với mọi  $n \geq 1$ :

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)}{5n}u_n \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{u_n}{5n} \Rightarrow v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n.$$

Do đó,  $(v_n)$  là một cấp số nhân. Bây giờ, ta xét công thức tổng lùi vô hạn của cấp số nhân  $(v_n)$  thì ta có:

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

Do vậy  $\lim(v_1 + v_2 + \dots + v_n) = \frac{1}{4}$ .

2. Trước hết, ta chứng minh bằng quy nạp rằng  $x_n > 0, \forall n \geq 1$ . Thật vậy, với  $n = 1$  thì khẳng định của ta đúng. Giả sử khẳng định của ta đúng đến  $n = k \geq 1$ , khi đó ta có

$$x_{k+1} = \frac{x_k}{k^2x_k + 1} > 0$$

Do đó, khẳng định ban đầu cũng đúng với  $n = k + 1$ . Theo nguyên lý quy nạp Toán học, khẳng định của ta đúng.

Do đó, ta có  $S_{n+1} = S_n + x_n > S_n, \forall n \geq 1$ ; nói cách khác,  $(S_n)$  là dãy tăng. Mặt khác:

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{n^2x_n + 1} < \frac{x_n}{n^2x_n} = \frac{1}{n^2}, \forall n \geq 1.$$

Do đó, ta suy ra được với mọi  $n \geq 3$  thì:

$$\begin{aligned} S_n &= x_1 + x_2 + \dots + x_n < x_1 + x_2 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(n-1)^2} \\ &< x_1 + x_2 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-2)(n-1)} \\ &< x_1 + x_2 + 1. \end{aligned}$$

Vậy  $(S_n)$  là dãy tăng và bị chặn. Do đó, theo nguyên lý Weierstrass thì  $(S_n)$  là dãy số có giới hạn hữu hạn. (đpcm)

1. Cho số nguyên dương  $m, k$  với  $k < m$  thỏa mãn  $1 + 2 + \dots + k = (k + 1) + (k + 2) \dots + m$ . Chứng minh  $2(2k + 1)^2 - 1 = (2m + 1)^2$ .
2. Tìm tất cả các cặp số nguyên dương  $(m, k)$  với  $k < m < 2025$  thỏa mãn

$$1 + 2 + \dots + k = (k + 1) + (k + 2) + \dots + m.$$

**Lời giải:**

1. Ta có biến đổi sau:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + k = (k + 1) + (k + 2) + \dots + m &\iff 2(1 + 2 + \dots + k) = 1 + 2 + \dots + m \\ &\iff k(k + 1) = \frac{m(m + 1)}{2} \\ &\iff 8(k^2 + k) = 4m^2 + 4m \\ &\iff 2(2k + 1)^2 + 1 = (2m + 1)^2. \end{aligned}$$

Do đó, ta có điều phải chứng minh.

2. Xét phương trình Pell loại II là  $x^2 - 2y^2 = -1$  (1). Xét phương trình Pell loại 1 liên kết với phương trình trên là  $x^2 - 2y^2 = 1$ , ta thấy rằng bộ nghiệm nguyên dương nhỏ nhất của phương trình trên là  $(3, 2)$ .

Ta xét hệ phương trình  $x^2 + 2y^2 = 3$  và  $2xy = 2$ , ta thấy rằng hệ phương trình có bộ nghiệm nguyên dương duy nhất là  $(1, 1)$ , nên theo định lý về sự xây dựng tất cả các bộ nghiệm của phương trình Pell bậc 2, bộ số  $(x_n, y_n)$  với mọi  $n$  tự nhiên là tất cả các nghiệm của phương trình (1), trong đó  $(x_n), (y_n)$  được định nghĩa như sau:

$$\begin{aligned} x_0 = 1, x_1 = 7, x_{n+2} &= 6x_{n+1} - x_n; \\ y_0 = 1, y_1 = 5, y_{n+2} &= 6y_{n+1} - y_n. \end{aligned}$$

Trở lại bài toán, để  $k, m$  thỏa mãn yêu cầu đề bài thì ta cần  $2m + 1 = x_n$  và  $2k + 1 = y_n$ , với  $n$  nguyên dương nào đó. Rõ ràng,  $n \neq 0$ . Vì  $m < 2025$  nên  $x_n < 4099$ . Bằng chứng minh quy nạp, ta thấy rằng  $(x_n)$  là dãy tăng ngặt, kéo theo:  $x_{n+1} > 5x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . Từ đây, ta suy ra:

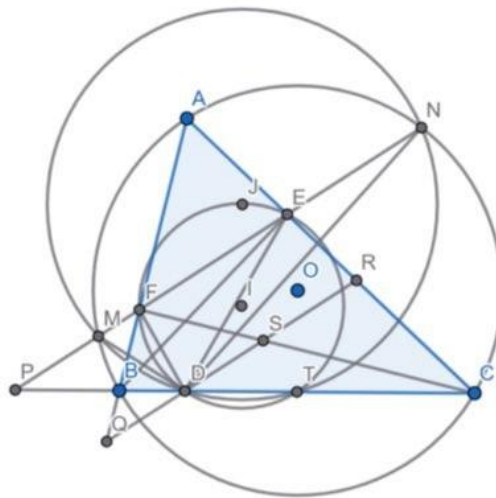
$$x_n < 5^n, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

Vậy,  $5^n < 4099 < 5^5$ , tức là  $n < 5$ . Kiểm tra các giá trị  $n$  tương ứng từ 1 đến 4, ta thu được các bộ  $(x_n, y_n)$  là  $(7, 5), (41, 29), (239, 169), (1393, 985)$ . Do đó, ta thu được tất cả các bộ  $(m, k)$  thỏa mãn yêu cầu đề bài là  $(3, 2); (20, 14); (119, 84); (696, 492)$ .

**Bài 3:** Cho tam giác  $ABC$  nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp đường tròn ( $O$ ). Kẻ ba đường cao  $AD, BE, CF$  của tam giác  $ABC$ . Đường thẳng  $EF$  cắt ( $O$ ) tại hai điểm  $M, N$  sao cho  $E$  nằm giữa  $F$  và  $N$ . Đường thẳng  $BC$  cắt  $EF$  tại  $P$ . Đường thẳng đi qua  $D$  song song với  $EF$  cắt  $AB, AC, CF$  lần lượt tại  $Q, R, S$ . Gọi  $I, J$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp của các tam giác  $DEF$  và  $DMN$ .

1. Chứng minh ba đường tròn  $(PQR), (DEF), (DMN)$  cùng đi qua một điểm.
2. Chứng minh hai đường thẳng  $IJ$  và  $AD$  song song với nhau.
3. Chứng minh  $D$  là trung điểm của đoạn thẳng  $QS$ .

**Lời giải:**



1. Gọi  $T$  là trung điểm của đoạn thẳng  $BC$ . Khi đó,  $T, E, F, D$  cùng thuộc đường tròn Euler của tam giác  $ABC$ , hay nói cách khác  $T \in (DEF)$ .  
 Vì  $AD, BE, CF$  đồng quy, và  $P$  là giao điểm của  $EF$  và  $BC$  nên ta suy ra được  $A(PDBC) = -1$ , tức là  $(PDBC) = -1$ . Do  $T$  là trung điểm của  $BC$  nên theo định lý Maclaurin thì  $PD.PT = PB.PC$ ; mà  $PB.PC = PM.PN$  theo phương tích của đường tròn ( $O$ ), nên ta suy ra  $PM.PN = PD.PT$ . Vậy  $T \in (DMN)$ .  
 Cuối cùng, cũng theo định lý Maclaurin thì  $DB.DC = DP.DT$ . Do  $QR // EF$  nên ta có  $\angle DQB = \angle AFE = \angle CRD$ , từ đó  $BRCQ$  là tứ giác nội tiếp. Vậy  $DR.DQ = DB.DC = DT.DP$ , kéo theo  $RTQP$  là tứ giác nội tiếp, hay  $T \in (PQR)$ .  
 Tóm lại,  $(DMN), (DEF), (PQR)$  đều đi qua điểm  $T$ . (đpcm)
2. Do  $I, J$  lần lượt là tâm của  $(DEF)$  và  $(DMN)$  nên  $IJ$  vuông góc với  $DT$  là dây cung chung của 2 đường tròn này. Mà,  $AD$  vuông góc với  $DT$ , nên ta suy ra  $IJ // AD$ . (đpcm)
3. Ta có:  $(PDBC) = -1 \Rightarrow F(PDBC) = -1 \Rightarrow F(MDQS) = -1$ .  
 Vì  $FM // QS$ , ta suy ra được  $D$  là trung điểm của  $SQ$ . (đpcm)

## 2.2 Ngày 2

**Bài 1:** Cho đa thức  $P(x) = 5(x - 4)^2(x - 6) + 1$ .

1. Chứng minh  $P(x)$  có ba nghiệm thực phân biệt.
2. Gọi ba nghiệm thực phân biệt của  $P(x)$  là  $a, b, c$ . Chứng minh  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác với tính bán kính đường tròn nội tiếp của tam giác đó.

### Lời giải:

1. Ta có  $P(x) = 5(x - 4)^2(x - 6) + 1 = 5x^3 - 70x^2 + 320x - 479$ .  
Nhận xét rằng phương trình  $P'(x) = 0$  tương đương với phương trình  $15x^2 - 140x + 320 = 0$  có 2 nghiệm thực phân biệt là  $\frac{16}{3}$  và 4, do đó ta kết luận  $P(x)$  có ba nghiệm thực phân biệt. (đpcm)
2. Không mất tính tổng quát, giả sử rằng  $a < b < c$ . Trước hết, ta có:

$$P(3) = -14, P(4) = 1, P(5) = -4, P(6) = 1.$$

Khi đó, ta thấy rằng  $P(3).P(4) < 0, P(4).P(5) < 0, P(5).P(6) < 0$ . Vì  $P$  là hàm liên tục (đa thức), nên theo định lý giá trị trung gian, ta suy ra được  $a \in (3, 4), b \in (4, 5), c \in (5, 6)$ . Từ đây, ta có  $a, b, c > 0$ , và  $a + b > 4 + 3 > 6 > c$ , nên ta chỉ ra được rằng  $a, b, c$  là độ dài ba cạnh của một tam giác.

Bây giờ, ta tính diện tích tam giác  $ABC$ . Áp dụng định lý Vi-ét, ta có

$$a + b + c = 14, ab + bc + ca = 32, abc = \frac{479}{5}.$$

Đặt  $p = \frac{a + b + c}{2} = 7$ . Theo hệ thức Heron, ta có:

$$S_{ABC} = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)} = \sqrt{\frac{7P(7)}{5}} = \sqrt{\frac{322}{5}}$$

Mặt khác, ta cũng có công thức  $S_{ABC} = pr$ , với  $r$  là bán kính tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ . Do đó ta suy ra  $r = \frac{\sqrt{1610}}{35}$ .

**Bài 2:** Tìm tất cả các hàm số  $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  thỏa mãn

$$f(x)f(yf(x)) = f(x+y), \forall x, y > 0.$$

**Lời giải:**

Đặt (1) là phương trình hàm ban đầu.

Trước hết ta chứng minh  $f(x) \leq 1, \forall x > 0$ . Thật vậy, giả sử tồn tại  $a > 0$  thỏa mãn  $f(a) > 1$ , khi đó từ (1) cho  $x = a$  và  $y = \frac{a}{f(a) - 1}$ , ta được

$$f(a) \cdot f\left(\frac{af(a)}{f(a) - 1}\right) = f\left(\frac{af(a)}{f(a) - 1}\right).$$

Do đó,  $f(a) = 1$ , mâu thuẫn. Vậy giả sử là sai, nên ta suy ra  $f(x) \leq 1, \forall x > 0$ . Từ đây, ta suy ra được  $f(x+y) \leq f(x), \forall x, y > 0$ . (2)

Ta xét 2 trường hợp như sau:

+) TH1: Nếu  $f$  đơn ánh, từ (1) cho  $y \rightarrow \frac{y}{f(x)}$  ta suy ra  $f(x)f(y) = f\left(x + \frac{y}{f(x)}\right), \forall x, y > 0$ .

Hoán đổi vai trò  $x, y$  và so sánh, sử dụng đơn ánh ta được  $x + \frac{y}{f(x)} = y + \frac{x}{f(y)}, \forall x, y > 0$ . Cho

$y = 1$ , ta suy ra  $f(x) = \frac{1}{1 + kx}, \forall x > 0; k > 0$ . Thử lại, thỏa mãn.

+) TH2: Nếu tồn tại  $a < b$  thỏa mãn  $f(a) = f(b) = c$ , thì từ (2) ta suy ra được  $f(x) = c, \forall x \in [a, b]$ . Từ (1) thay  $x = a, y = b - a$  thì ta suy ra  $f((b-a)c) = 1$ . Do đó, tồn tại  $m > 0$  thỏa mãn  $f(m) = 1$ . Thay  $x = m$  vào (1) ta suy ra  $f(y) = f(y+m), \forall y > 0$ . Vậy  $f$  là hàm tuần hoàn chu kỳ  $m$ , là hàm giảm không nghiêm ngặt nên ta suy ra  $f$  là hàm hằng. Do  $f((b-a)c) = 1$  nên  $f(x) = 1, \forall x > 0$ .

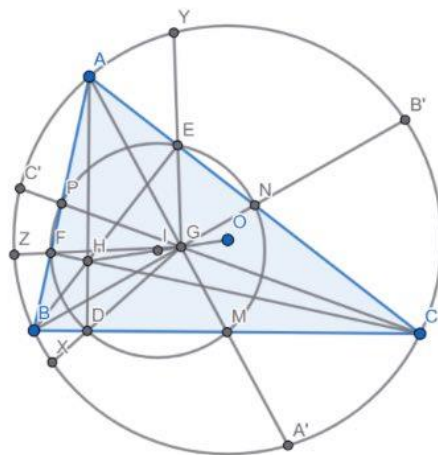
Tóm lại,  $f(x) = \frac{1}{1 + kx}, \forall x > 0; k > 0$  và  $f(x) = 1, \forall x > 0$  thỏa mãn yêu cầu đề bài.

**Bài 3:** Cho tam giác nhọn, không cân  $ABC$  nội tiếp đường tròn  $(O)$ , có trọng tâm  $G$  và ba đường cao  $AD, BE, CF$  cắt nhau tại  $H$ . Các tia  $GD, GE, GF$  cắt đường tròn  $(O)$  lần lượt tại  $X, Y, Z$ . Gọi  $X', Y', Z'$  lần lượt là các điểm đối xứng của  $X, Y, Z$  qua trung điểm các cạnh  $BC, CA, AB$  của tam giác  $ABC$ .

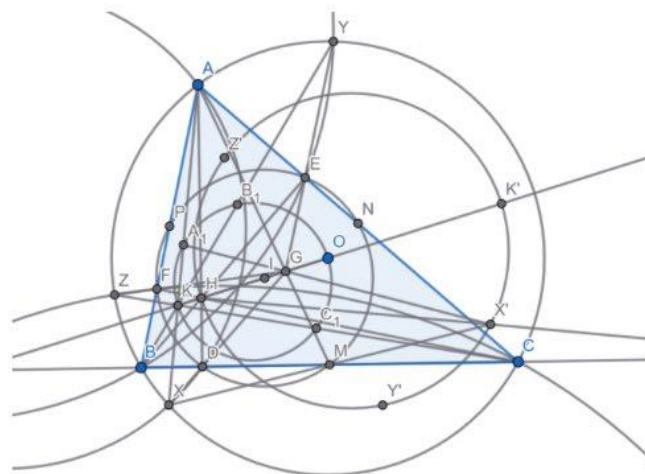
1. Chứng minh  $GD.GX = GE.GY = GF.GZ$ .
2. Chứng minh  $HX', HY', HZ'$  lần lượt cắt  $BC, CA, AB$  tại ba điểm nằm trên một đường thẳng vuông góc với  $OH$ .
3. Chứng minh các đường thẳng  $AX', BY', CZ'$  đồng quy.

Lời giải:

1/



Vì  $G$  là trọng tâm của tam giác  $ABC$ , nên  $\overline{GA} = -2\overline{GM}, \overline{GB} = -2\overline{GN}, \overline{GC} = -2\overline{GP}$ . Hơn thế nữa, theo phương tích thì  $\overline{GA}.GA' = \overline{GB}.GB' = \overline{GC}.GC'$ , do đó ta suy ra  $\overline{GM}.GA' = \overline{GN}.GB' = \overline{GP}.GC'$ . Xét phép nghịch đảo  $f$  tâm  $G$ , phương tích  $\overline{GM}.GA'$ , ta có  $f(M) = A', f(N) = B', f(P) = C'$ , nên ta được  $f((MNP)) = (A'B'C')$ . Từ đây, theo giả thiết, ta có  $f(D) = X, f(E) = Y, f(F) = Z$ , do đó ta suy ra được  $GD.GX = GE.GY = GF.GZ$ . (đpcm)



2/ Trước hết ta chứng minh  $AX, BY, CZ$  đồng quy. Xét ba đường tròn  $(ADX), (BEY), (CEZ)$ , có  $HA.HD = HB.HE = HC.HF$  và  $GA.GX = GB.GY = GC.GZ$  nên  $HG$  là trục chung

của ba đường tròn. Mặt khác, xét dây cung chung của  $(O)$  với lần lượt các đường tròn  $(ADX)$ ,  $(BEY)$ ,  $(CFZ)$  là  $AX, BY, CZ$ , nên ta suy ra được  $AX, BY, CZ, HG$  đồng quy tại điểm  $K$ . Thêm nữa, gọi  $A_1, B_1, C_1$  là các trung điểm của  $AX, BY, CZ$ , khi đó:  $A_1, B_1, C_1 \in (OK)$ .

Do  $M$  là trung điểm của  $XX'$  và  $BC$  nên  $BXCX'$  là hình bình hành. Vậy nên,  $\angle BX'C = \angle BXC = 180^\circ - \angle BAC = \angle BHC$ . Do đó  $BHX'C$  là tứ giác nội tiếp.

Bây giờ, xét tam giác  $AXX'$  có  $M$  là trung điểm của  $XX'$ , hơn thế nữa  $\overline{GA} = -2\overline{GM}$ , nên  $G$  chính là trọng tâm của tam giác  $AXX'$ . Do đó,  $X', G, A_1$  thẳng hàng và  $\overline{GX'} = -2\overline{GA_1}$ . Như vậy, nếu ta dựng điểm  $K'$  thỏa mãn  $\overline{GK} = 2\overline{GK'}$ , thì theo tính chất của phép vị tự tâm  $G$ , tỉ số  $-2$  thì với  $A_1 \in (OK)$  thì  $X' \in (HK')$ . Tương tự, ta có  $Y', Z' \in (HK')$ . Vậy  $X', Y', Z', H, K$  đồng viên trên đường tròn đường kính  $(HK)$ .

Gọi giao điểm của  $HX'$  và  $BC$  là  $A_2$ . Nếu ta gọi  $J$  là tâm của  $(HK)$ , thì  $J \in OH$ . Hơn thế nữa, ta có  $\overline{A_2H} \cdot \overline{A_2X'} = \overline{A_2B} \cdot \overline{A_2C}$ , do vậy phương tích của  $A_2$  lên  $(O)$  sẽ bằng phương tích của  $A_2$  lên  $(J)$ . Vậy  $A_2$  thuộc trục đẳng phương của  $(O)$  và  $(J)$ . Tương tự, gọi  $B_2, C_2$  lần lượt là giao điểm của  $HY', HZ'$  lên  $CA, AB$  thì  $B_2, C_2$  thuộc trục đẳng phương của  $(O)$  và  $(J)$ . Nói cách khác,  $A_2, B_2, C_2$  cùng nằm trên một đường thẳng vuông góc với  $OH$ . (đpcm)

3/ Trước hết, do  $AX, BY, CZ$  đồng quy nên ta suy ra được  $\prod \frac{XC}{XB} = 1$ . Áp dụng định lý sin trong các tam giác  $AX'B$  và  $AX'C$ , ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\sin \angle X'AB}{X'B} &= \frac{\sin \angle ABX'}{AX'} =; \frac{\sin \angle X'AC}{X'C} = \frac{\sin \angle ACX'}{AX'} \\ \Rightarrow \frac{\sin \angle X'AB}{\sin \angle X'AC} &= \frac{X'C \cdot \sin \angle ABX'}{X'B \cdot \sin \angle ACX'} = \frac{XC}{XB} \cdot \frac{\sin \angle ABX'}{\sin \angle ACX'} \end{aligned}$$

Do đó, ta có  $\prod \frac{\sin \angle X'AB}{\sin \angle X'AC} = \prod \frac{XC}{XB} \cdot \frac{\sin \angle ABX'}{\sin \angle ACX'} = \prod \frac{\sin \angle (AB, XC)}{\sin \angle (AC, XB)} = 1$ . Vậy, ta suy ra được  $AX', BY', CZ'$  đồng quy. (đpcm)

**Bài 4:** Cho tập hữu hạn  $S$  có  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Gọi  $F(S)$  là họ tất cả các tập con khác rỗng của  $S$ . Với mỗi  $x \in S$  ta kí hiệu  $d(x)$  là số các tập con thuộc  $F(S)$  chứa  $x$ . Chứng minh

$$\sum_{x \in S} d(x) = \sum_{A \in F(S)} |A|.$$

**Lời giải:**

Ta đếm số bộ  $(x, A)$  thỏa mãn  $x$  là phần tử của  $A$ , với  $A$  là tập hợp con khác rỗng của  $S$ .

+) Cách 1: Ta chọn trước  $x \in S$ . Khi đó, số cách chọn tập  $A$  thỏa mãn  $A$  chứa  $x$  theo định nghĩa sẽ là  $d(x)$ . Vậy, số bộ  $(x, A)$  thỏa mãn là  $\sum_{x \in S} d(x)$ .

+) Cách 2: Ta chọn trước  $A \in F(S)$ . Khi đó, số cách chọn phần tử  $x$  thỏa mãn là số lượng phần tử của  $A$ , hay nói cách khác là  $|A|$ . Vậy, số bộ  $(x, A)$  thỏa mãn là  $\sum_{A \in F(S)} |A|$ .

Tổng hợp lại, ta có  $\sum_{x \in S} d(x) = \sum_{A \in F(S)} |A|$ . (đpcm)