UBND TỈNH HÀ NAM
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 02 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH
Năm học 2024 - 2025

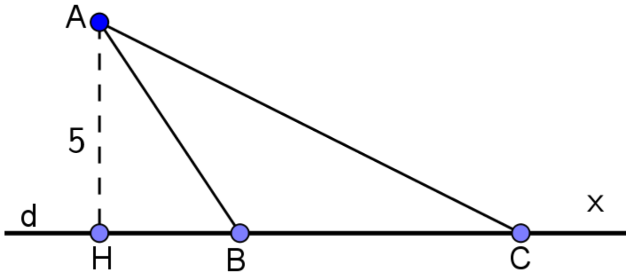
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 180 phút

Câu I (*6,0 điểm*).

1. Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3x-9}{x-2}$. Tìm tọa độ của điểm M nằm trên trục hoành sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất.

2. Trên một khúc sông có dòng nước lặng, một chiếc tàu chạy với tốc độ không đổi, chi phí nhiên liệu được tính bởi hai phần: Phần thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ và mất chi phí là 700 nghìn đồng/giờ; Phần thứ hai tỉ lệ thuận với bình phương của tốc độ, khi tàu chạy với tốc độ 10 km/h thì chi phí phần thứ hai là 70 nghìn đồng/giờ. Tìm tốc độ của tàu để tổng chi phí nhiên liệu khi tàu chạy 1 km trên sông là nhỏ nhất. (Bỏ qua vận tốc của dòng nước)

3. Xét điểm A và đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên d. Xét hai điểm B và C di chuyển trên tia Hx sao cho $HC=3HB$ (Như hình vẽ bên dưới). Biết rằng $AH=5$. Khi độ lớn của góc BAC lớn nhất hãy tính độ dài đoạn BC.



Câu II (*3,5 điểm*).

1. Giải phương trình sau trên tập số thực: $e^{3x}+e^{x}=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$.

2. Bảng sau thống kê mức lương của hai công ty A, B (đơn vị: triệu đồng) trong cùng một tháng

Nhóm	$[10;15)$	$[15;20)$	$[20;25)$	$[25;30)$	$[30;35)$	$[35;40)$
Công ty A	15	18	10	10	5	2
Công ty B	25	15	7	5	5	3

Người ta có thể sử dụng độ lệch chuẩn để so sánh mức độ đồng đều về mức lương của các công ty. Mức lương của công ty nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì sẽ đồng đều hơn. Theo quan điểm trên, hãy so sánh mức độ đồng đều về mức lương của công ty A và công ty B.

Câu III (*3,0 điểm*).

1. Cho hàm số $f(x)\neq 0, \forall x\in[0;+\infty)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn $f(1)=-\dfrac{1}{12}$ và $f'(x)=(2x+5)\cdot\left(f(x)\right)^2\ \forall x\in(0;+\infty)$. Tính tổng $S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2025)$.

2. Một chất điểm A chuyển động trên trục Ox, với vận tốc $v(t)=-2t+3$ (m/s), trong đó thời điểm $t=0$ (giây) tính từ lúc chất điểm bắt đầu chuyển động và khi đó chất điểm ở tại gốc tọa độ. Tại thời điểm $t=0$, tại gốc tọa độ một chất điểm B khác A chuyển động trên trục Ox với vận tốc $v_1(t)=3^t\ln 3$ (m/s). Sau khoảng thời gian bao lâu thì hai chất điểm gặp nhau lần thứ hai (thời điểm $t=0$ được xem là thời điểm hai chất điểm gặp nhau lần thứ nhất)?

Câu IV (*5,5 điểm*).

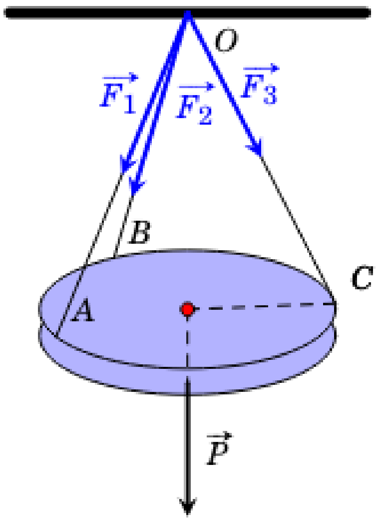
1. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$, có $BAD = BCD = 90^o$, $BD = 1$, $ABD = CBD = 30^0$. Cho biết tứ giác $AA'C'C$ là hình thoi có $A'AC = 60^o$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

2. Trong không gian $Oxyz$, xét điểm $M(a;b;c)$, $a > 0, b > 0, c > 0$ sao cho $MOy = MOz = 60^0$ và $OM = 12$. Gọi A, B lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các trục Ox, Oy.

a) Tìm tọa độ của điểm M.

b) Tìm tọa độ của điểm C sao cho tứ giác $ABMC$ là hình thang có đáy là AB và diện tích hình thang $ABMC$ gấp ba lần diện tích tam giác MAB.

3. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (Hình vẽ bên dưới). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L (dm). Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính của chiếc đèn là 5 dm. Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó $F = F(L)$ là một hàm số với biến số L. Xác định hàm số $F = F(L)$ và tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 9,75 N.



Câu V (*2,0 điểm*). Gọi (H) là miền giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \dfrac{\ln(x+1) - x + 2x^2}{x^2}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1$, $x = 2025$. Chọn ngẫu nhiên một điểm $M(x_0; y_0), x_0 \in \mathbb{N}, y_0 \in \mathbb{N}$ thuộc miền (H). Tính xác suất để điểm $M(x_0; y_0)$ được chọn thỏa mãn $x_0 > 2025y_0$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:..Số báo danh:..

Cán bộ coi thi số 1:...Cán bộ coi thi số 2:..

UBND TỈNH HÀ NAM

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP TỈNH

Năm học 2024 - 2025

HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN

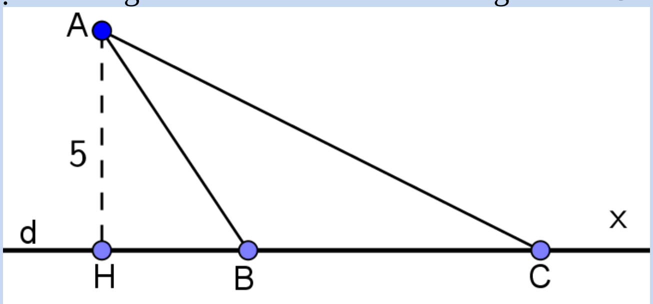
(Hướng dẫn chấm thi có 08 trang)

I. HƯỚNG DẪN CHUNG

- *Hướng dẫn chấm chỉ trình bày sơ lược các bước giải, lời giải của học sinh cần lập luận chặt chẽ, hợp logic. Nếu học sinh trình bày cách làm khác mà đúng thì vẫn được điểm theo thang điểm tương ứng.*
- *Đối với bài toán hình học nếu học sinh chứng minh có sử dụng đến hình vẽ thì yêu cầu phải vẽ hình, nếu học sinh vẽ hình sai hoặc không vẽ hình thì không cho điểm phần tương ứng.*
- *Điểm toàn bài không làm tròn.*

II. ĐÁP ÁN VÀ THANG ĐIỂM

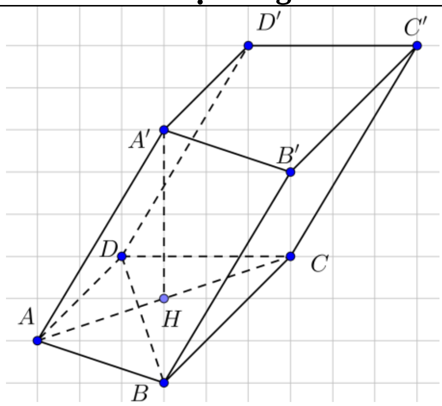
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
I (6,0 điểm)	**1.** Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2+3x-9}{x-2}$. Tìm tọa độ của điểm M nằm trên trục hoành sao cho chu vi tam giác MAB nhỏ nhất.	**2,0**
	TXĐ: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$. Ta có $y'=\dfrac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$.	0,25
	Tính được tọa độ hai điểm cực trị của đồ thị là $A(1;5),B(3;9)$.	0,25
	Nhận xét A,B nằm về cùng phía so với trục hoành. Gọi B_1 đối xứng với B qua trục hoành, khi đó $B_1(3;-9)$.	0,5
	Khi đó chu vi tam giác MAB là: $MA+MB+AB=MA+MB_1+2\sqrt{5}\ge AB_1+2\sqrt{5}=10\sqrt{2}+2\sqrt{5}.$	0,25
	Dấu $"="\Leftrightarrow M=AB_1\cap Ox.$	0,25
	Phương trình $AB_1: y=-7x+12.$	0,25
	Vậy $M\left(\dfrac{12}{7};0\right)$.	0,25
	2. Trên một khúc sông có dòng nước lặng, một chiếc tàu chạy với tốc độ không đổi, chi phí nhiên liệu được tính bởi hai phần: Phần thứ nhất không phụ thuộc vào tốc độ và mất chi phí là 700 nghìn đồng/giờ; Phần thứ hai tỉ lệ thuận với bình phương của tốc độ, khi tàu chạy với tốc độ 10 km/h thì chi phí phần thứ hai là 70 nghìn đồng/giờ. Tìm tốc độ của tàu để tổng chi phí nhiên liệu khi tàu chạy 1 km trên sông là nhỏ nhất. (Bỏ qua vận tốc của dòng nước)	**2,0**
	Gọi x (km/h) là tốc độ của tàu ($x>0$). Thời gian để tàu chạy 1 km trên sông là $\dfrac{1}{x}$ (giờ). Chi phí cho phần thứ nhất để tàu chạy 1 km là $p_1=700\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{700}{x}$ (nghìn đồng)	0,5
	Chi phí cho phần thứ hai để tàu chạy 1 km là $p_2=kx^2\cdot\dfrac{1}{x}=kx$ (nghìn đồng). Khi $x=10$ thì $p_2=70$ nên $k=7$. Do đó $p_2=7x$ (nghìn đồng).	0,5
	Tổng chi phí để tàu chạy 1 km trên khúc sông là $f(x)=\dfrac{700}{x}+7x$ (nghìn đồng).	0,25
	Xét hàm số: $f(x)=\dfrac{700}{x}+7x, x>0.$ Ta có $f'(x)=-\dfrac{700}{x^2}+7.$	0,25

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Sơ lược lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td>Giải phương trình $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=10$ (thỏa mãn) hoặc $x=-10$ (loại).</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Lập BBT của hàm số f(x),
<table>
<tr><td>x</td><td>0 10 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$+\infty$ ↘ 140 ↗ $+\infty$</td></tr>
</table>
Ta tìm được $\min\limits_{x>0} f(x) = f(10) = 140$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Vậy tốc độ của tàu để tổng chi phí nhiên liệu khi tàu chạy 1 km trên sông nhỏ nhất là 10 km/h.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>3. Xét điểm A và đường thẳng d. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên d. Xét hai điểm B và C di chuyển trên tia Hx sao cho $HC=3HB$ (Như hình vẽ bên dưới). Biết rằng $AH=5$. Khi độ lớn của góc BAC lớn nhất thì khoảng cách BC là bao nhiêu?

</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td></td><td>Đặt $HB=x\ge 0,$ suy ra $HC=3x.$
Khi đó $AB=\sqrt{25+x^2};\ AC=\sqrt{25+9x^2};BC=2x.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Xét tam giác ABC, theo Định lý cos, ta có
$$cosBAC=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2ACAB}=\frac{50+6x^2}{2\sqrt{25+x^2}\sqrt{25+9x^2}}=\sqrt{\frac{\left(3x^2+25\right)^2}{9x^4+250x^2+625}}$$
$$=\sqrt{\frac{9x^4+150x^2+625}{9x^4+250x^2+625}}.$$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có góc BAC lớn nhất khi và chỉ khi $\cos BAC$ nhỏ nhất.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Đặt $t=x^2\ge 0$ và xét hàm số $f(t)=\dfrac{9t^2+150t+625}{9t^2+250t+625}, t\ge 0.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>$$f'(t)=\frac{900t^2-62500}{\left(9t^2+250t+625\right)^2};\ f'(t)=0\Rightarrow t=\pm\frac{25}{3}.$$
Ta có :</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>
<table>
<tr><td>t</td><td>0 $\frac{25}{3}$ $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(t)$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr>
<tr><td>$f(t)$</td><td>1 ↘ $0,75$ ↗ 1</td></tr>
</table></td><td>0,25</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Sơ lược lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td>Vậy GTNN của $\cos BAC$ là $\sqrt{0,75}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Dấu bằng xảy ra khi và $t=\dfrac{25}{3}\Rightarrow x^2=\dfrac{25}{3}\Rightarrow x=\dfrac{5\sqrt{3}}{3}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vậy $BC=2x=\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="7">Câu II
(3,5 điểm)</td><td>1. Giải phương trình sau trên tập số thực: $e^{3x}+e^x=2\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)\left(1+x\sqrt{1-x^2}\right)$.</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>Điều kiện: $x\in[-1;1]$.
Đặt $x+\sqrt{1-x^2}=t$. Vì $x\in[-1;1]\Rightarrow t\in\left[-1;\sqrt{2}\right]$.
Ta có: $t^2=\left(x+\sqrt{1-x^2}\right)^2=1+2x\sqrt{1-x^2}\Rightarrow x\sqrt{1-x^2}=\dfrac{t^2-1}{2}$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Phương trình đã cho trở thành: $e^{3x}+e^x=t^3+t.\ (*)$
Xét hàm số $h(u)=u^3+u, h'(u)=3u^2+1>0\ \forall u$ do đó hàm số $h(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.
Suy ra $e^x=t\Rightarrow e^x=x+\sqrt{1-x^2}$ (*)</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>$\Leftrightarrow e^x-x=\sqrt{1-x^2}$.
Xét hàm số $f(x)=e^x-x,\ x\in\mathbb{R}$.
Ta có $f'(x)=e^x-1$ và $f'(x)=0\Rightarrow x=0$
BBT:
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td></td><td>0</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td></td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td><td></td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td></td><td>$\searrow$</td><td>1</td><td>$\nearrow$</td><td></td></tr>
</table>
Suy ra $e^x-x\ge 1\ \forall x\in\mathbb{R}$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Mặt khác $1\ge\sqrt{1-x^2}\ \ \forall x\in[-1;1]$.
Suy ra $e^x-x\ge\sqrt{1-x^2}\ \ \forall x\in[-1;1]$.
Vậy phương trình (*) có nghiệm duy nhất là $x=0$.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2. Bảng sau thống kê mức lương của hai công ty A, B (đơn vị: triệu đồng) trong cùng một tháng
<table>
<tr><td>Nhóm</td><td>$[10;15)$</td><td>$[15;20)$</td><td>$[20;25)$</td><td>$[25;30)$</td><td>$[30;35)$</td><td>$[35;40)$</td></tr>
<tr><td>Công ty A</td><td>15</td><td>18</td><td>10</td><td>10</td><td>5</td><td>2</td></tr>
<tr><td>Công ty B</td><td>25</td><td>15</td><td>7</td><td>5</td><td>5</td><td>3</td></tr>
</table>
Người ta có thể dùng độ lệch chuẩn để so sánh mức độ đồng đều về mức lương của các công ty. Mức lương của công ty nào có độ lệch chuẩn nhỏ hơn thì sẽ đồng đều hơn. Theo quan điểm trên, hãy so sánh mức độ đồng đều về mức lương của công ty A và công ty B.</td><td>1,5</td></tr>
</table>

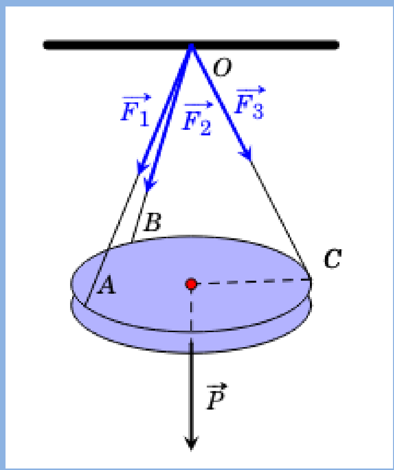
Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Xét mẫu số liệu về lương của công ty A: Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là $\overline{x}_1=\dfrac{15\cdot 12,5+18\cdot 17,5+10\cdot 22,5+10\cdot 27,5+5\cdot 32,5+2\cdot 37,5}{60}\approx 20,67$ (triệu đồng).	0,25
	Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $s_1^2=\dfrac{15\cdot(12,5-20,67)^2+18\cdot(17,5-20,67)^2+10\cdot(22,5-20,67)^2}{60}$ $+\dfrac{10\cdot(27,5-20,67)^2+5\cdot(32,5-20,67)^2+2\cdot(37,5-20,67)^2}{60}\approx 49,1389.$ Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu công ty A là $s_1\approx\sqrt{49,1389}\approx 7$ (triệu đồng).	0,5
	Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B : Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là $\overline{x}_2=\dfrac{25\cdot 12,5+15\cdot 17,5+7\cdot 22,5+5\cdot 27,5+5\cdot 32,5+3\cdot 37,5}{60}\approx 19,08$ (triệu đồng).	0,25
	Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $s_2^2=\dfrac{25\cdot(12,5-19,08)^2+15\cdot(17,5-19,08)^2+7\cdot(22,5-19,08)^2}{60}$ $+\dfrac{5\cdot(27,5-19,08)^2+5\cdot(32,5-19,08)^2+3\cdot(37,5-19,08)^2}{60}\approx 57,9097.$ Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu công ty B là $s_2\approx\sqrt{57,9097}\approx 7,61$ (triệu đồng).	0,25
	Vì $s_1\approx 7<s_2\approx 7,61$ nên công ty A có mức lương đồng đều hơn mức lương công ty B. ***Chú ý: Nếu học sinh sử dụng máy tính cho kết quả đúng, thì cho 0,75 điểm.***	0,25
III (3,0 điểm)	1. Cho hàm số $f(x)\neq 0,\forall x\in[0;+\infty)$ có đạo hàm liên tục trên $(0;+\infty)$ thỏa mãn điều kiện $f'(x)=(2x+5)\cdot(f(x))^2\ \forall x\in(0;+\infty)$ và $f(1)=-\dfrac{1}{12}$. Tính tổng $S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2025)$.	**1,5**
	Với $x>0$ ta có: Biến đổi $f'(x)=(2x+5).f^2(x)\Leftrightarrow\dfrac{f'(x)}{f^2(x)}=2x+5\Leftrightarrow\left(-\dfrac{1}{f(x)}\right)'=2x+5$	**0,5**
	$\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=\int(2x+5)dx$ $\Leftrightarrow-\dfrac{1}{f(x)}=x^2+5x+C\Rightarrow f(x)=-\dfrac{1}{x^2+5x+C}$.	**0,25**
	Mà $f(1)=-\dfrac{1}{12}$ nên $C=6$. Do đó $f(x)=-\dfrac{1}{x^2+5x+6}=-\dfrac{1}{(x+2)(x+3)}=-\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{x+3}\right)$.	**0,25**
		0,5

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Sơ lược lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td>Khi đó:
$S=f(1)+f(2)+f(3)+...+f(2025)$
$=-\left(\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+...+\frac{1}{2026.2027}+\frac{1}{2027.2028}\right)$
$=-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2026}-\frac{1}{2027}+\frac{1}{2027}-\frac{1}{2028}\right)$
$=-\frac{1}{3}+\frac{1}{2028}=-\frac{225}{676}.$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>2. Một chất điểm A chuyển động trên trục $Ox,$ với vận tốc $v(t)=-2t+3$ (m/s), trong đó thời điểm $t=0$ giây tính từ lúc chất điểm bắt đầu chuyển động và khi đó chất điểm ở tại gốc tọa độ. Tại thời điểm $t=0,$ tại gốc tọa độ một chất điểm B khác A chuyển động trên trục Ox với vận tốc $v_1(t)=3^t\ln 3$ (m/s). Sau khoảng thời gian bao lâu thì hai chất điểm gặp nhau lần thứ hai (thời điểm $t=0$ được xem là thời điểm hai chất điểm gặp nhau lần thứ nhất)?</td><td>1,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Xét chất điểm A: Ta có $s(t)=\int v(t)\,dt=\int(-2t+3)\,dt=-t^2+3t+c.$
Do $s(0)=0\Rightarrow c=0.$ Vậy $s(t)=-t^2+3t$ (m).</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Xét chất điểm B: Ta có $s_1(t)=\int v_1(t)\,dt=\int 3^t\ln 3dt=3^t+c_1.$
Do $s_1(0)=0\Rightarrow c_1=-1.$ Vậy $s_1(t)=3^t-1$ (m).</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Xét phương trình $3^t-1=-t^2+3t\Leftrightarrow 3^t-1+t^2-3t=0$.
Xét hàm số $f(t)=3^t+t^2-3t-1,\ t\ge 0.$
Ta có:
$f'(t)=3^t\ln 3+2t-3;$
$f''(t)=3^t\ln^2 3+2>0\,\forall t\ge 0.$
Suy ra $f'(t)=0$ có tối đa 1 nghiệm t_0. BBT:
<table>
<tr><td>t</td><td>0 t_0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(t)$</td><td>$-$ 0 $+$</td></tr>
<tr><td>$f(t)$</td><td>$\searrow$ $\nearrow$</td></tr>
</table>
Suy ra phương trình $f(t)=0$ có tối đa 2 nghiệm phân biệt.</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Ta có $f(0)=f(1)=0$. Suy ra phương trình $f(t)=0$ có hai nghiệm phân biệt $t=0,t=1.$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Sau khoảng thời gian 1 giây thì hai chất điểm gặp nhau lần thứ hai.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>IV
(5,5 điểm)</td><td>1. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D',$ có $BAD=BCD=90^o,\ BD=1,$ $ABD=CBD=30^0.$ Cho biết tứ giác $AA'C'C$ là hình thoi có $A'AC=60^o$ và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'.$</td><td>1,5</td></tr>
</table>

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	 Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính BD. Theo định lý sin trong tam giác ABC ta có: $\frac{AC}{\sin ABC} = BD \Rightarrow AC = BD\sin ABC = 1\cdot\sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vì AA'C'C là hình thoi và $A'AC = 60^o$ nên tam giác $A'AC$ là tam giác đều.	0,5
	Hai mặt phẳng (ABCD) và (AA'C'C) vuông góc và có giao tuyến AC nên nếu gọi A'H là đường cao của tam giác A'AC thì $A'H \perp (ABCD)$, $A'H = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$.	0,25
	Tam giác vuông BAD có $AB = BD\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tam giác vuông BCD có $BC = BD\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.	0,25
	Ta có $S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}BA\cdot BD\cdot\sin 30^0 + \frac{1}{2}BC\cdot BD\cdot\sin 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$.	0,25
	Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD}.A'H = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$.	0,25
	2. Trong không gian $Oxyz$, xét điểm $M(a;b;c)$, $a>0$, $b>0, c>0$ sao cho $OM = 12$, $MOy = MOz = 60^0$. Gọi A, B lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm M lên các trục Ox, Oy. **a)** Tìm tọa độ của điểm M. **b)** Tìm tọa độ của điểm C sao cho tứ giác $ABMC$ là hình thang có đáy là AB và diện tích hình thang $ABMC$ gấp ba lần diện tích tam giác MAB.	**2,0**
	a) Gọi D là hình chiếu vuông góc của M lên trục Oz. Ta có $OD = OM\cdot\cos MOz = 6$; $OB = OM\cdot\cos MOy = 6$.	0,5
	Mặt khác $OM^2 = OA^2 + OB^2 + OD^2 \Leftrightarrow 12^2 = OA^2 + 6^2 + 6^2 \Leftrightarrow OA = 6\sqrt{2}$.	0,25
	Vậy $M\left(6\sqrt{2};6;6\right)$.	0,25
	b) Ta có: $A\left(6\sqrt{2};0;0\right), B(0;6;0)$. Hơn nữa: $S_{ABMC} = \frac{(AB+CM)d(M;AB)}{2} = \frac{(AB+CM)\cdot 2\cdot S_{\Delta MAB}}{2\cdot AB}$ $\Leftrightarrow 3S_{\Delta MAB} = \frac{(AB+CM)\cdot S_{\Delta MAB}}{AB} \Leftrightarrow CM = 2AB$.	0,5
	Mà ABMC là hình thang có đáy AB nên $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{AB}$ (1).	0,25
	Ta có: $\overrightarrow{AB} = \left(-6\sqrt{2};6;0\right)$; $\overrightarrow{CM} = \left(6\sqrt{2} - x_C;6 - y_C;6 - z_C\right)$. Từ (1), suy ra $C\left(18\sqrt{2};-6;6\right)$.	0,25

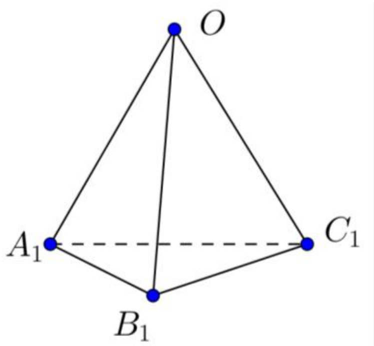
<table>
<tr><th>Câu</th><th>Sơ lược lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td>

3. Một chiếc đèn tròn được treo song song với mặt phẳng nằm ngang bởi ba sợi dây không dãn xuất phát từ điểm O trên trần nhà lần lượt buộc vào ba điểm A, B, C trên đèn tròn sao cho tam giác ABC đều (Hình vẽ bên dưới). Độ dài của ba đoạn dây OA, OB, OC đều bằng L (dm). Trọng lượng của chiếc đèn là 27 N và bán kính của chiếc đèn là 5 dm. Gọi F là độ lớn của các lực căng $\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{F_3}$ trên mỗi sợi dây. Khi đó $F = F(L)$ là một hàm số với biến số L. Xác định hàm số $F = F(L)$ và tìm chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây, biết rằng mỗi sợi dây đó được thiết kế để chịu được lực căng tối đa là 9,75 N.



</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td></td><td>

Gọi A_1, B_1, C_1 lần lượt là các điểm sao cho $\overrightarrow{OA_1} = \overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{F_2}, \overrightarrow{OC_1} = \overrightarrow{F_3}$. Khi đó hai vecto $\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA}$ cùng hướng, do đó tồn tại số $k > 0$ sao cho $\overrightarrow{OA_1} = k\overrightarrow{OA}$, tương tự $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC_1} = k\overrightarrow{OC}$.



Suy ra $F = \left|\overrightarrow{F_1}\right| = k\left|\overrightarrow{OA}\right| = k \cdot L.$ (1)

</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>

Do chiếc đèn ở vị trí cân bằng nên $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} = \overrightarrow{P}$. Gọi I là tâm chiếc đèn hình tròn. Vì tam giác ABC đều nên I cũng là trọng tâm của tam giác ABC. Khi đó

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OI} \Leftrightarrow \frac{1}{k}\left(\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}\right) = 3\overrightarrow{OI}$ suy ra $\overrightarrow{P} = 3k \cdot \overrightarrow{OI}$.

Theo giả thiết trọng lượng của chiếc đèn là 27N, do đó $IO = \frac{9}{k}$.

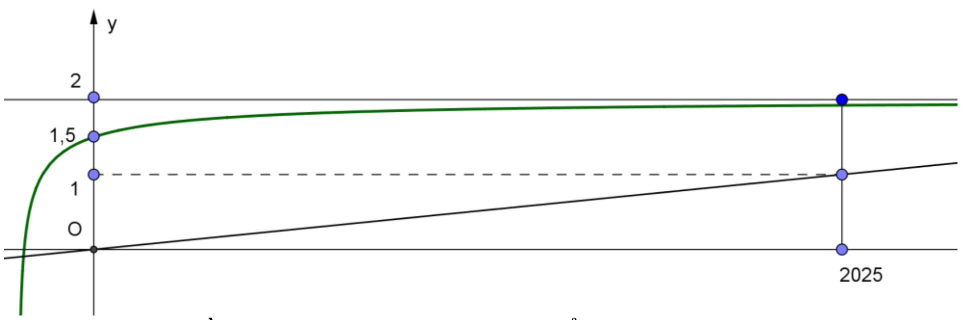
</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>

Ta có $OI = \sqrt{OA^2 - AI^2} = \sqrt{L^2 - 25}$ (điều kiện: $L > 5$)

Suy ra $\frac{9}{k} = \sqrt{L^2 - 25} \Rightarrow k = \frac{9}{\sqrt{L^2 - 25}}$.

Thay $k = \frac{9}{\sqrt{L^2 - 25}}$ vào (1) ta có $F = \frac{9L}{\sqrt{L^2 - 25}}$ (N).

</td><td>0,5</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Câu</th><th>Sơ lược lời giải</th><th>Điểm</th></tr>
<tr><td></td><td>Ta có $F' = \dfrac{-9\cdot 25}{\sqrt{\left(L^2-25\right)^3}} < 0\ \forall L > 5.$
BBT
<table><tr><td>L</td><td>5 $+\infty$</td></tr><tr><td>F'</td><td>$-$</td></tr><tr><td>F</td><td>$+\infty$ $\searrow$ 9</td></tr></table></td><td>0,5</td></tr>
<tr><td></td><td>Khi lực căng của mỗi sợi dây bằng 9,75 N, ta có:
$\dfrac{9L}{\sqrt{L^2-25}} = 9,75 \Leftrightarrow 36L = 39\sqrt{L^2-25} \Leftrightarrow L = 13$ (thỏa mãn điều kiện $L > 5$)</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td>Dựa vào BBT ở trên ta thấy chiều dài tối thiểu của mỗi sợi dây để lực căng tối đa là 9,75 N là 13 dm.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td rowspan="9">V
(2,0 điểm)</td><td>Gọi (H) là miền giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \dfrac{\ln(x+1) - x + 2x^2}{x^2}$, trục hoành và các đường thẳng $x = 1, x = 2025$. Chọn ngẫu nhiên một điểm $M(x_0; y_0), x_0 \in \mathbb{N}, y_0 \in \mathbb{N}$ thuộc miền (H). Tính xác suất để điểm $M(x_0; y_0)$ được chọn thỏa mãn $x_0 > 2025y_0$.</td><td>2,0</td></tr>
<tr><td>Với $x > 0$, ta có $f'(x) = \dfrac{\dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)}{x^3}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Xét $g(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1);\quad g'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} + 1 - \dfrac{2}{x+1} = \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Ta có $g'(x) \ge 0, \forall x > 0$ nên hàm số g(x) đồng biến trên $(0;+\infty)$;
g(0) = 0. Với mọi x > 0 thì g(x) > g(0) hay g(x) >0
Do đó $f'(x) > 0, \forall x > 0$. Vậy hàm số đã cho đồng biến trên $(0;+\infty)$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Ta chứng minh: $\dfrac{\ln(x+1) - x + 2x^2}{x^2} < 2\ \forall x > 0 \Leftrightarrow \ln(x+1) - x < 0\ \forall x > 0$
Lập BBT của hàm số $\ln(x+1) - x$ ta chứng minh được $\ln(x+1) - x < 0\ \forall x > 0.$</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>Từ các điều trên ta có được miền (H) như hình sau:


Suy ra trong miền (H) có $2025\cdot 2 = 4050$ điểm nguyên.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Trong đó có đúng 2025 điểm $M(x_0; y_0)$ thỏa mãn $x_0 > 2025y_0$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td>Vậy xác suất cần tìm là $\dfrac{2025}{4050} = \dfrac{1}{2}$.</td><td>0,25</td></tr>
</table>

-----HẾT-----