SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 02 trang)

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 CẤP THÀNH PHỐ
NĂM HỌC 2024 - 2025
MÔN: TOÁN
Ngày thi: 25/02/2025
Thời gian làm bài: 120 phút (*không kể thời gian phát đề*)

Bài 1: (4 điểm)

1. Cho biết chu kỳ bán rã của nguyên tố phóng xạ Poloni 210 là 138 ngày, nghĩa là sau mỗi chu kỳ 138 ngày thì khối lượng của mẫu vật Poloni 210 chỉ còn lại một nửa.

a) Tính khối lượng còn lại của 64 gam Poloni 210 sau 552 ngày.

b) Hỏi sau bao nhiêu ngày thì 64 gam Poloni 210 còn lại 1 gam?

2. Một người muốn mua một thanh gỗ đủ để cắt ra làm thành các thanh ngang của một cái thang. Biết rằng chiều dài của các thanh ngang để làm cái thang đó (tính từ bậc dưới cùng lên) lần lượt là 49 cm, 47 cm, 45 cm,… , 35 cm, 33 cm (mỗi thanh ngang ngắn hơn 2 cm so với thanh ngang bậc dưới liền kề).

a) Hỏi cái thang đó có bao nhiêu thanh ngang?

b) Hỏi thanh gỗ cần mua có chiều dài ít nhất là bao nhiêu cm? Biết rằng mỗi lần cắt thanh gỗ thì phần gỗ bị cắt (thành mùn cưa) dài $0,5$ cm.

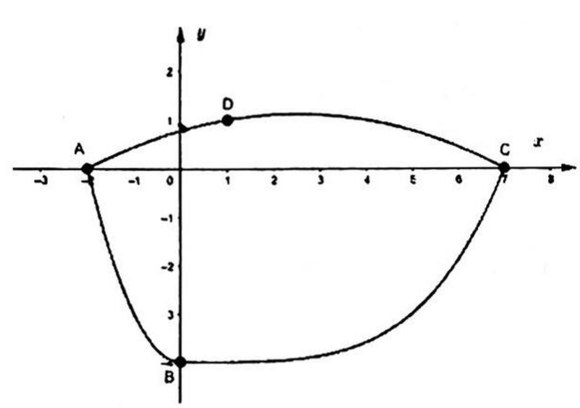
Bài 2: (4 điểm)

Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C). Tìm tất cả các điểm A thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại A cắt trục hoành và (C) lần lượt tại 2 điểm phân biệt $M, N (N \neq A)$ thỏa mãn A là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Bài 3: (3 điểm)

Một công ty thiết kế tròng kính sao cho mỗi phần đường viền của tròng kính là một phần đồ thị của hàm số bậc hai hoặc một phần đồ thị của hàm số bậc bốn rồi ghép chúng lại với nhau như hình vẽ bên dưới (*sau đó họ sẽ điều chỉnh theo tỷ lệ phù hợp*). Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới, biết rằng $A(-2;0), B(0;-4), C(7;0)$ và $D(1;k)$ với $k > 0$.

Cho biết đường cong (C_1) đi qua các điểm A, D, C là một phần của đồ thị hàm số bậc hai nào đó, đường cong (C_2) ứng với đường viền nối A với B là một phần của đồ thị hàm số $y = bx^2 + c$, còn đường cong (C_3) ứng với đường viền nối B với C là một phần của đồ thị hàm số $y = mx^4 + n$. Tính k biết diện tích tròng kính đó bằng $33,44$ (đơn vị diện tích).



Bài 4: (3 điểm)

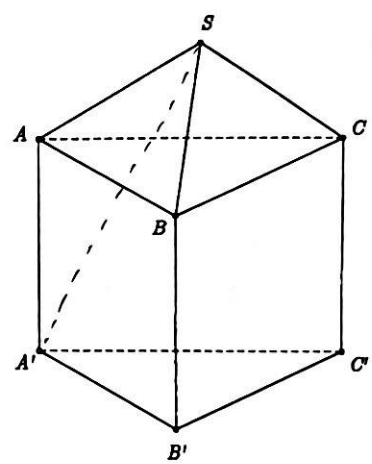
Luật Benford chỉ ra rằng khi chọn ngẫu nhiên một số liệu trong một bảng số liệu gồm số lượng đủ lớn các số liệu (*như độ dài các con sông trên thế giới, số lượng các loài côn trùng trên thế giới,...*) thì xác suất để chữ số đầu tiên bên trái của số liệu đó là k (với $1 \leq k \leq 9$) bằng $p_k = \log_{10}\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

a) Chứng minh $p_1 + p_2 + \cdots + p_9 = 1$ và tìm số k nhỏ nhất để $p_1 + p_2 + \cdots + p_k \geq \dfrac{3}{4}$.

b) Một người muốn làm giả số liệu nhầm tưởng rằng các chữ số đầu tiên bên trái của các số liệu trong một bảng số liệu bất kỳ sẽ tuân theo quy tắc ngẫu nhiên từ 1 đến 9 và cùng khả năng xảy ra. Xét phép thử chọn ngẫu nhiên một số liệu trong một bảng số liệu gồm số lượng đủ lớn các số liệu. Chứng minh rằng nếu tính xác suất cho biến cố "chữ số đầu tiên bên trái của số liệu đó lớn hơn 5" thì người muốn làm giả số liệu đó sẽ tính ra kết quả lớn hơn hai lần kết quả khi tính theo Luật Benford.

Bài 5: (3 điểm)

Một chi tiết máy được ghép từ hai khối kim loại có dạng khối chóp tam giác $S.ABC$ và khối lăng trụ đứng $A'B'C'.ABC$ như hình vẽ bên. Biết rằng độ dài cạnh bên của lăng trụ đứng $A'B'C'.ABC$ là a và hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nằm bên trong tam giác ABC. Đồng thời, chi tiết máy này có đặc điểm như sau:



- Các khoảng cách từ S đến các điểm A, B, C bằng nhau và cùng bằng $\dfrac{1}{2}$ khoảng cách từ S đến A'.
- Các góc giữa các mặt phẳng $(SAB), (SBC), (SCA)$ với mặt phẳng (ABC) cùng bằng α và $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}\tan\beta$ trong đó β là góc giữa SA' với mặt phẳng $(A'B'C')$.

Tính theo a thể tích của chi tiết máy này.

Bài 6: (3 điểm)

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(0;7;2); B(0;0;10,8)$. Tìm giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của độ dài đoạn thẳng MN, biết M là điểm thuộc mặt phẳng Oxy thỏa mãn $AM = 2,5$ và N thuộc mặt phẳng $(\alpha): z - 12 = 0$ thỏa mãn $BN = 1,3$.

HẾT

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

PHẦN II: BÀI GIẢI

Câu 1: 1. Gọi n là số chu kỳ bán rã của Poloni 210 ($n \in \mathbb{N}^*$)

Khối lượng còn lại của 64 g Poloni 210 sau n chu kỳ là: $m = 64.\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (g)

a) Số chu kỳ bán rã của Poloni 210 sau 552 ngày là: $n = \frac{552}{138} = 4$ (chu kỳ)

Khối lượng còn lại của 64 g Poloni 210 sau 552 ngày là: $m = 64.\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4$ (g)

b) 64 gam Poloni 210 còn lại 1 gam nên:

$$m = 64.\left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 \Longleftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{64} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 \Longleftrightarrow n = 6 \text{ (chu kỳ)}$$

Vậy sau: $6.138 = 828$ ngày thì 64 g Poloni 210 còn lại 1 gam.

2.a) Độ dài của các thanh ngang phân bố theo quy luật cấp số cộng với $u_1 = 49$ cm, $u_n = 33$ cm ($n \in \mathbb{N}^*$), công sai $d = -2$.

Có $u_n = u_1 + (n-1).d \Longleftrightarrow 33 = 49 + (n-1).(-2) \Longleftrightarrow n = 9$

Vậy cái thang này có 9 thanh ngang.

b) Từ 1 thanh gỗ ban đầu nếu muốn cắt ra thành 9 thanh ngang thì phải thực hiện 8 lần cắt.

Khi đó chiều dài phần gỗ bị cắt thành mùn cưa là: $8.0,5 = 4$ (cm).

Tổng chiều dài của 9 thanh ngang:

$$S = u_1 + u_2 + \ldots + u_9 = \frac{n.(u_1 + u_9)}{2} = \frac{9.(49+33)}{2} = 369 \text{ (cm)}$$

Vậy chiều dài ít nhất của thanh gỗ cần mua là: $369 + 4 = 373$ (cm).

Câu 2: A thuộc đồ thị $(C): y = x^3 - 3x \Longrightarrow A(a; a^3 - 3a)$

Gọi d là tiếp tuyến của đồ thị (C) tại A. Ta có: $y' = 3x^2 - 3 \Longrightarrow$ hệ số góc của tiếp tuyến d là:

$$k = 3a^2 - 3 \Longrightarrow \text{ pttt d: } y = (3a^2-3).(x-a) + a^3 - 3a = (3a^2-3).x - 2a^3$$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và d:

$$x^3 - 3x = (3a^2-3).x - 2a^3 \Longleftrightarrow x^3 - 3a^2.x + 2a^3 = 0 \Longleftrightarrow (x-a)^2.(x+2a) = 0 \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = a \\ x = -2a \end{array}\right.$$

Từ đây suy ra tiếp tuyến d cắt (C) tại điểm N $(N \neq A)$ có hoành độ $x_N = -2a$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (C) và trục hoành Ox $(y = 0)$:

$$(3a^2 - 3).x - 2a^3 = 0 \ (1) \iff x = \frac{2a^3}{3a^2 - 3}$$

$(3a^2 - 3 \neq 0$ vì nếu $3a^2 - 3 = 0$ thì phương trình (1) vô nghiệm, điều này là vô lý vì pt (1) luôn có nghiệm là hoành độ của điểm $M)$

$\Longrightarrow$ hoành độ của điểm M là: $x_M = \dfrac{2a^3}{3a^2 - 3}$

Vì A là trung điểm của đoạn MN nên:

$$x_M + x_N = 2x_A \iff \frac{2a^3}{3a^2 - 3} + (-2a) = 2a \ (2)$$

Ta xét 2 trường hợp:

Trường hợp 1: $a = 0 \Longrightarrow (2)$ đúng $\Longrightarrow$ pttt $d : y = -3x$. Khi đó, 2 điểm $M,\ N$ có tọa độ đều là $(0;0) \Longrightarrow$ điều này vô lý vì $M,\ N$ là 2 điểm phân biệt $\Longrightarrow$ loại $a = 0$.

Trường hợp 2: $a \neq 0$. Ta có:

$$(2) \iff \frac{a^2}{3a^2 - 3} - 1 = 1 \iff \left[\begin{array}{l} a = \sqrt{\dfrac{6}{5}} \\ a = -\sqrt{\dfrac{6}{5}} \end{array}\right.$$

- Với $a = \sqrt{\dfrac{6}{5}}$, hoành độ 2 điểm M, N là: $x_M = \dfrac{4\sqrt{30}}{5}; x_N = -2.\sqrt{\dfrac{6}{5}} \Longrightarrow x_M \neq x_N$

$\Longrightarrow$ thỏa điều kiện $M \neq N \Longrightarrow$ nhận $a = \sqrt{\dfrac{6}{5}} \Longrightarrow A\left(\sqrt{\dfrac{6}{5}}; -\dfrac{9\sqrt{30}}{25}\right)$

- Với $a = -\sqrt{\dfrac{6}{5}}$, hoành độ 2 điểm M, N là: $x_M = -\dfrac{4\sqrt{30}}{5}; x_N = 2.\sqrt{\dfrac{6}{5}} \Longrightarrow x_M \neq x_N$

$\Longrightarrow$ thỏa điều kiện $M \neq N \Longrightarrow$ nhận $a = -\sqrt{\dfrac{6}{5}} \Longrightarrow A\left(-\sqrt{\dfrac{6}{5}}; \dfrac{9\sqrt{30}}{25}\right)$

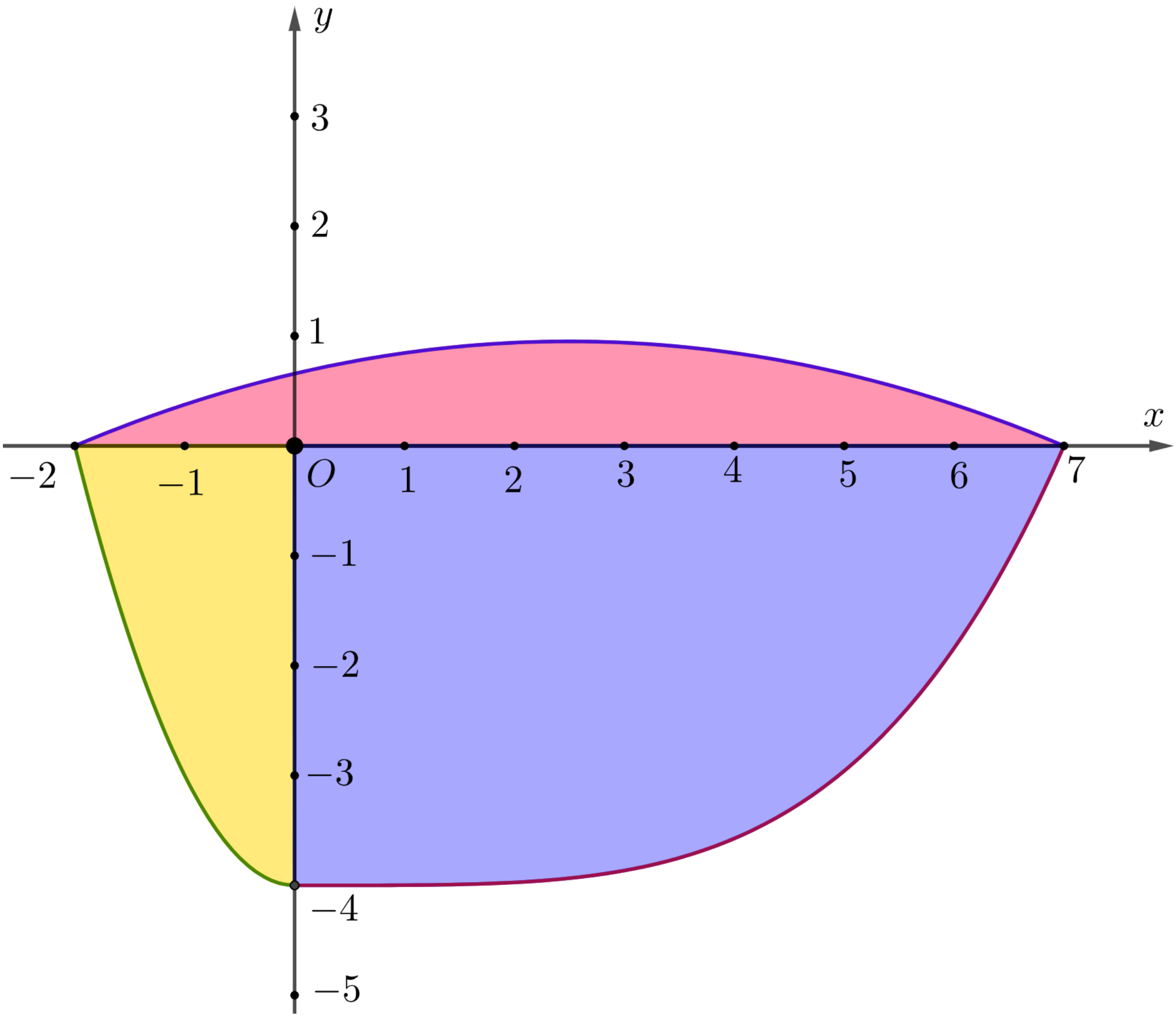
Vậy có 2 điểm A thỏa yêu cầu là:

$$\left(\sqrt{\frac{6}{5}}; -\frac{9\sqrt{30}}{25}\right); \left(-\sqrt{\frac{6}{5}}; \frac{9\sqrt{30}}{25}\right)$$

Câu 3:

Vì $A(-2;0), B(0;-4) \in (C_2): y = bx^2 + c$ nên:

$$\begin{cases} b.(-2)^2 + c = 0 \\ b.0^2 + c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} b = 1 \\ c = -4 \end{cases} \implies (C_2): y = x^2 - 4$$



Vì $B(0;-4), C(7;0) \in (C_3): y = mx^4 + n$ nên:

$$\begin{cases} m.0^4 + n = -4 \\ m.7^4 + n = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} n = -4 \\ m = \dfrac{4}{2401} \end{cases} \implies (C_3): y = \frac{4}{2401}x^4 - 4$$

Diện tích S_2: $S_2 = \int\limits_{-2}^{0} \left[0 - \left(x^2 - 4\right)\right] \mathrm{d}x = \dfrac{16}{3}$

Diện tích S_3: $S_3 = \int\limits_{0}^{7} \left[0 - \left(\dfrac{4}{2401}x^4 - 4\right)\right] \mathrm{d}x = \dfrac{112}{5}$

Gọi $y = a'x^2 + b'x + c$ $(a' < 0)$ là phương trình của đường cong (C_1).

Vì $A(-2;0), C(7;0), D(1;k) \in (C_1)$ nên:

$$\begin{cases} a'.(-2)^2 + b'.(-2) + c' = 0 \\ a'.7^2 + b'.7 + c' = 0 \\ a'.1^2 + b'.1 + c' = k \end{cases} \iff \begin{cases} 4.a' - 2.b' + c' = 0 \ (1) \\ 49.a' + 7.b' + c' = 0 \ (2) \\ a' + b' + c' = k \ (3) \end{cases}$$

Tổng diện tích tròng kính:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = 33,44 \iff S_1 = 33,44 - \frac{16}{3} - \frac{112}{5} = \frac{428}{75}$$

mà $S_1 = \int\limits_{-2}^{7} \left(a'x^2 + b'x + c' - 0\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{-2}^{7} \left(a'x^2 + b'x + c'\right) \mathrm{d}x = 117a' + \dfrac{45}{2}b' + 9c'$

$\Longrightarrow 117a' + \dfrac{45}{2}b' + 9c' = \dfrac{428}{75}$ (4)

Từ $(1),(2),(4) \Longrightarrow \begin{cases} a' = -\dfrac{856}{18225} \\ b' = \dfrac{856}{3645} \\ c' = 0,657558299 \end{cases}$

Từ $(3) \Longrightarrow k \approx 0,8454321$

Bài 4:

a) Ta có: $p_k = \log_{10}\left(1 + \dfrac{1}{k}\right) = \log_{10}\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log(k)$

Từ đó, ta có:

$$p_1 = \log 2 - \log 1;\ p_2 = \log 3 - \log 2;\ \ldots;\ p_9 = \log 10 - \log 9$$

$$\Longrightarrow p_1 + p_2 + \ldots + p_9 = \left(\log 2 - \log 1\right) + \left(\log 3 - \log 2\right) + \ldots + \left(\log 10 - \log 9\right) = \left(\log 10 - \log 1\right) = 1$$

Ta cũng có:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k = \left(\log 2 - \log 1\right) + \left(\log 3 - \log 2\right) + \ldots + \left(\log(k+1) - \log k\right)$$

$$= \log(k+1) - \log 1 = \log(k+1)$$

Do đó:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_k \geq \frac{3}{4} \iff \log(k+1) \geq \frac{3}{4} \iff k \geq 10^{\frac{3}{4}} - 1$$

mà $1 \le k \le 9$ và $k \in \mathbb{N}^* \Longrightarrow$ giá trị nhỏ nhất của k là $k = 5$

b) Gọi A là biến cố :"Chữ số đầu tiên bên trái của số liệu lớn hơn 5"

Số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 9$

Số khả năng người làm giả số liệu khi thực hiện biến cố: $n(A) = 4$

Xác suất của biến cố A của người làm giả số liệu: $P_1(A) = \dfrac{\text{n(A)}}{\text{n}(\Omega)} = \dfrac{4}{9}$

Xác suất biến cố A theo luật Benford:

$$P_2(A) = p_6 + p_7 + p_8 + p_9 = (\log 7 - \log 6) + (\log 8 - \log 7) + (\log 9 - \log 8) + (\log 10 - \log 9)$$

$$= \log 10 - \log 6 = 1 - \log 6$$

Ta có: $P_1(A) > 2.P_2(A)$ $\left(\dfrac{4}{9} > 2.(1 - \log 6)\right)$

Vậy: Nếu tính xác suất cho biến cố "chữ số đầu tiên bên trái của số liệu đó lớn hơn 5" thì người muốn làm giả số liệu đó sẽ tính ra kết quả lớn hơn hai lần kết quả khi tính theo luật Benford.

Bài 5:

Vẽ $SH \perp (ABC)$ tại H, kéo dài SH cắt $(A'B'C')$ tại T.

Vì $SH \perp (ABC)$ mà $(ABC)//(A'B'C') \Longrightarrow SH \perp (A'B'C')$ tại T.

Trong (ABC), vẽ $HK \perp AB$ tại K, vẽ $HE \perp BC$ tại E.

Ta có: $\begin{cases} HK \perp AB \\ HK \text{ là hình chiếu vuông góc của } SK \text{ lên}(ABC) \end{cases}$

$\Longrightarrow SK \perp AB$ tại K mà $\triangle SAB$ cân tại $S \Longrightarrow K$ là trung điểm AB.

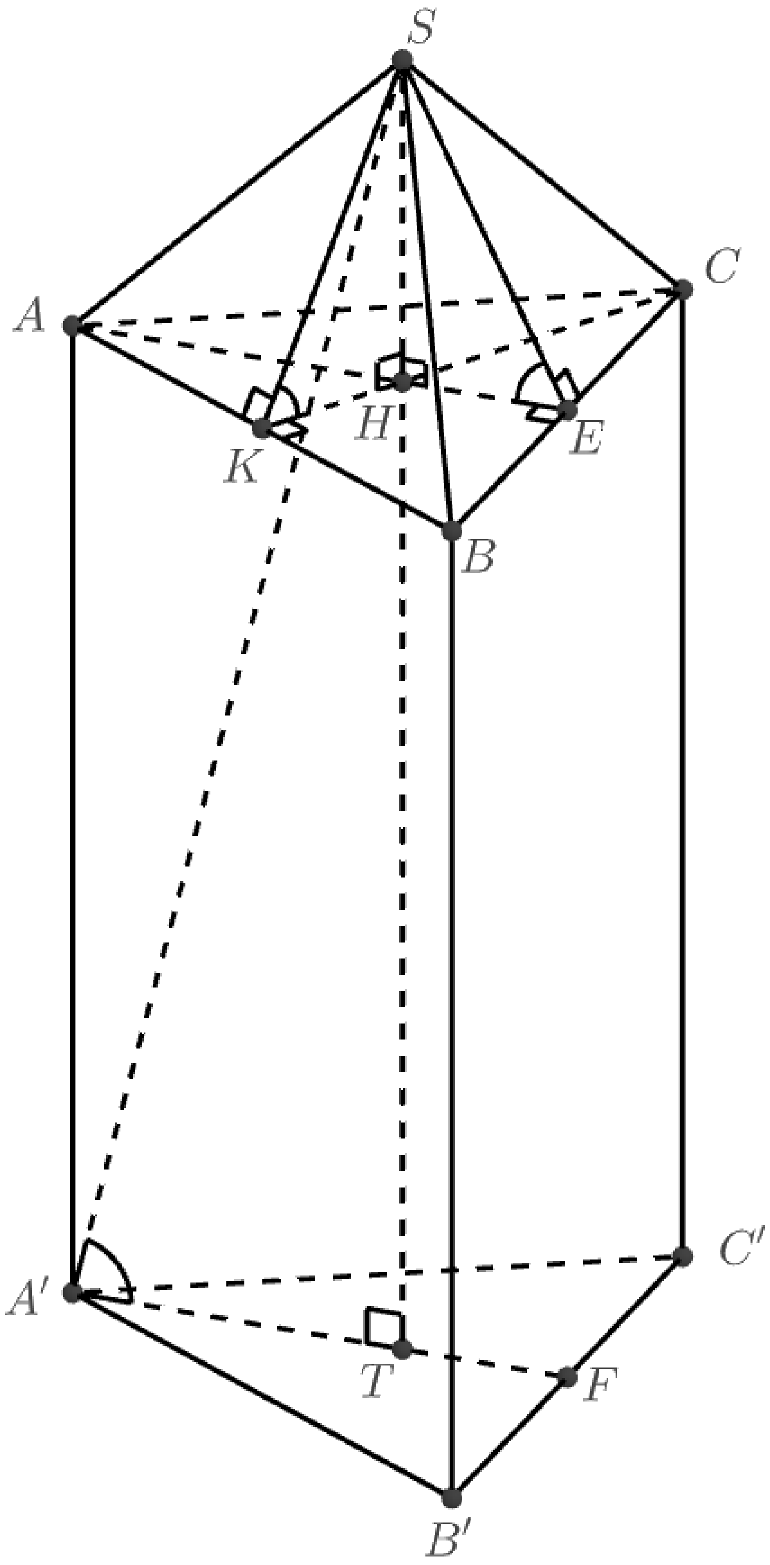
Lập luận tương tự, ta có $SE \perp BC$ tại E và E là trung điểm BC.

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (ABC) = AB \\ \text{Trong } (SAB) : SK \perp AB \text{ tại } K \\ \text{Trong } (ABC) : HK \perp AB \text{ tại } K \end{cases}$

$\Longrightarrow [(SAB),(ABC)] = (SK, KH) = \widehat{SKH}$ ($\triangle SHK$ vuông tại H).

Chứng minh tương tự, ta có: $[(SBC),(ABC)] = \widehat{SEH} \Longrightarrow \widehat{SKH} = \widehat{SEH} = \alpha$

$\Longrightarrow \widehat{KSH} = \widehat{ESH} = 90^o - \alpha \Longrightarrow \triangle SHK = \triangle SHE$ (g-c-g) $\Longrightarrow SK = SE$



$\Longrightarrow \triangle SKB = \triangle SEB$ (ch-cgv) $\Longrightarrow BK = BE \Longrightarrow AB = BC$

Chứng minh tương tự, ta có: $AB = AC \Longrightarrow AB = BC = CA \Longrightarrow \triangle ABC$ đều $\Longrightarrow \triangle A'B'C'$ đều.

$\Longrightarrow S.ABC$ là hình chóp tam giác đều mà $SH \perp (ABC)$ tại $H \Longrightarrow$ hai đường trung tuyến AE, CK của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H.

Có: $\begin{cases} ST \perp (A'B'C') \text{ tại } T \\ SA' \cap (A'B'C') = A' \end{cases} \Longrightarrow A'T$ là hình chiếu vuông góc của SA' lên $(A'B'C')$

$\Longrightarrow [SA', (A'B'C')] = (SA', A'T) = \widehat{SA'T} = \beta$

Đặt $AB = BC = CA = x$ $(x > 0) \Longrightarrow A'B' = B'C' = C'A' = x$.

Đặt $SH = y \Longrightarrow ST = SH + HT = y + a$.

Do $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ là các tam giác đều có cạnh là x nên:

$AE = A'F = CK = \dfrac{x\sqrt{3}}{2} \Longrightarrow AH = A'T = \dfrac{2}{3}.\dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{3}, KH = \dfrac{1}{3}.\dfrac{x\sqrt{3}}{2} = \dfrac{x\sqrt{3}}{6}$

Xét $\Delta SA'T:$ $\tan\beta = \dfrac{ST}{A'T} = \dfrac{y+a}{\dfrac{x\sqrt{3}}{3}} = \dfrac{(y+a)\sqrt{3}}{x}$ (1)

Xét $\triangle SKH:$ $\tan\widehat{SKH} = \tan\alpha = \dfrac{SH}{KH} = \dfrac{y}{\dfrac{x\sqrt{3}}{6}} = \dfrac{2\sqrt{3}y}{x}$ (2)

Vì $\tan\alpha = \dfrac{1}{2}.\tan\beta$ nên từ (1), (2) $\Longrightarrow \dfrac{2\sqrt{3}y}{x} = \dfrac{1}{2}.\dfrac{(y+a)\sqrt{3}}{x} \Longleftrightarrow y = \dfrac{a}{3}$

Xét $\triangle SHA:$ $SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \sqrt{y^2 + \left(\dfrac{x\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3y^2}{3}}$ (3)

Xét $\triangle SA'T:$ $SA' = \sqrt{ST^2 + A'T^2} = \sqrt{(y+a)^2 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{x^2 + 3(y+a)^2}{3}}$ (4)

Mặt khác, vì: $SA = \dfrac{1}{2}SA'$ nên từ (3), (4) ta có: $\sqrt{\dfrac{x^2+3y^2}{3}} = \dfrac{1}{2}.\sqrt{\dfrac{x^2+3(y+a)^2}{3}} \Longleftrightarrow x = \dfrac{2a}{\sqrt{3}}$

Diện tích tam giác ABC: $S_{ABC} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{4} = \left(\dfrac{2a}{\sqrt{3}}\right)^2.\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{3}$

Thể tích hình chóp $S.ABC$: $V_{S.ABC} = \dfrac{1}{3}.SH.S_{ABC} = \dfrac{1}{3}.\dfrac{a}{3}.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{27}$

Thể tích hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$: $V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a.\dfrac{a^2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3}$

Thể tích của chi tiết máy: $V = V_{S.ABC} + V_{ABC.A'B'C'} = \dfrac{a^3\sqrt{3}}{27} + \dfrac{a^3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{10a^3\sqrt{3}}{27}$

Bài 6:

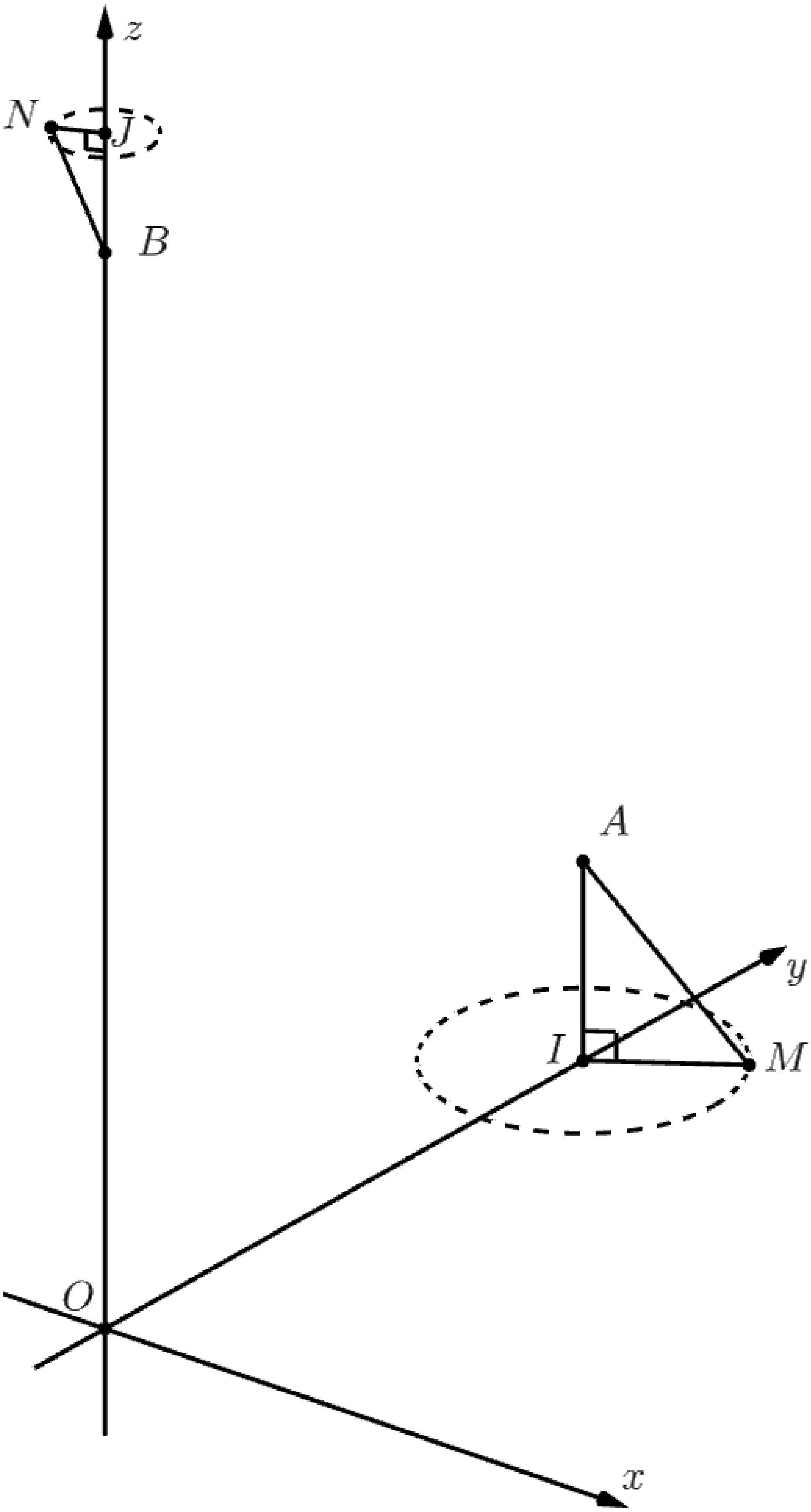
Trong mặt phẳng yOz, vẽ $AI \perp Oy$ tại $I \Longrightarrow AI \,//\, Oz$ mà $Oz \perp (xOy) \Longrightarrow AI \perp (xOy)$

$\Longrightarrow I$ là hình chiếu vuông góc của A lên mp $xOy \Longrightarrow I(0;7;0)$

$\Longrightarrow AI \perp IM \Longrightarrow \triangle AIM$ vuông tại I.

Ta có: $\overrightarrow{IA} = (0;0;2) \Longrightarrow IA = 2$.

Xét $\triangle AIM: IM = \sqrt{AM^2 - AI^2} = \sqrt{2,5^2 - 2^2} = 1,5$



Trong mp xOy, ta có: $IM = 1,5 \Longrightarrow$ trong mp xOy, M thuộc đường tròn (C_1) tâm $I(0;7)$, bán kính $R = 1,5$ có pt: $x^2 + (y-7)^2 = 1,5^2$ (1)

Gọi $M(x_1; y_1; 0)$, từ (1) $\Longrightarrow x_1^2 + (y_1 - 7)^2 = 1,5^2$

$\Longrightarrow$ ta có thể đặt: $x_1 = 1,5\sin t_1;\ y_1 = 7 + 1,5\cos t_1\ (t_1 \in \mathbb{R}) \Longrightarrow M(1,5\sin t_1; 7 + 1,5\cos t_1; 0)$

Gọi J là hình chiếu của B lên mp $(\alpha): z - 12 = 0 \Longrightarrow J(0;0;12)$

Vì $BJ \perp (\alpha) \Longrightarrow BJ \perp JN \Longrightarrow \triangle BJN$ vuông tại J.

Có: $\overrightarrow{BJ} = (0;0;1,2) \Longrightarrow BJ = 1,2$

Xét $\triangle BJN: JN = \sqrt{BN^2 - BJ^2} = \sqrt{1,3^2 - 1,2^2} = 0,5$

Trong mp (α), ta có: $JN = 0,5 \Longrightarrow$ trong mp $(\alpha), N$ thuộc đường tròn (C_2) tâm $J(0;0)$, bán kính $R = 0,5$ có pt: $x^2 + y^2 = 0,5^2$ (2)

Gọi $N(x_2; y_2; 12)$, từ (2) $\Longrightarrow x_2^2 + y_2^2 = 0,5^2$

$\Longrightarrow$ ta có thể đặt: $x_2 = 0,5\sin t_2;\ y_2 = 0,5\cos t_2\ (t_2 \in \mathbb{R}) \Longrightarrow N(0,5\sin t_2; 0,5\cos t_2; 12)$

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (0,5\sin t_2 - 1,5\sin t_1; 0,5\cos t_2 - 1,5\cos t_1; 12)$

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow MN^2 &= (0,5\sin t_2 - 1,5\sin t_1)^2 + (0,5\cos t_2 - 1,5\cos t_1)^2 + 12^2 \\
&= \frac{293}{2} - 1,5(\sin t_1.\sin t_2 + \cos t_1.\cos t_2) = \frac{293}{2} - 1,5\cos(t_1 - t_2)
\end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
1 \ge \cos(t_1 - t_2) \ge -1 &\Longleftrightarrow -1,5 \le -1,5\cos(t_1 - t_2) \le 1,5 \\
&\Longleftrightarrow 145 \le \frac{293}{2} - 1,5\cos(t_1 - t_2) \le 148 \\
&\Longleftrightarrow 145 \le MN^2 \le 148 \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{145} \le MN \le 2\sqrt{37}
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

MN đạt GTNN là $\sqrt{145}$ khi $\cos(t_1 - t_2) = 1 \Longleftrightarrow t_1 - t_2 = \text{k}2\pi\ (\text{k} \in \mathbb{Z})$

MN đạt GTLN là $2\sqrt{37}$ khi $\cos(t_1 - t_2) = -1 \Longleftrightarrow t_1 - t_2 = \pi + \text{k}2\pi\ (\text{k} \in \mathbb{Z})$