SỞ GD & ĐT THANH HÓA **TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN**	**KIỂM TRA KHẢO SÁT CHỌN HỌC SINH** **DỰ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH** **THI CHỌN HSG CẤP QUỐC GIA NĂM HỌC 2025 - 2026**
ĐỀ THI CHÍNH THỨC *(Đề thi có 01 trang, 03 bài)*	Môn: **TOÁN** Ngày kiểm tra: **25/08/2025** Thời gian làm bài: **180** phút ***(không kể thời gian phát đề)***

Bài 1. **(*6 điểm*)** Tìm tất cả các hàm số $f:(0;+\infty)\to(0;+\infty)$ thỏa mãn

$$f\left(x+2f(y)\right)=f(x+y)+2y+2f(y),\ \forall x,y>0.$$

Bài 2. **(*7 điểm*)** Cho n điểm trong mặt phẳng, với $n>4$ và không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ giác lồi có đỉnh nằm trong số n điểm đã cho.

Bài 3. **(*7 điểm*)** Cho p là số nguyên tố. Với mỗi số nguyên dương k, đặt A_k là tổng lũy thừa bậc k của $p-1$ số nguyên dương đầu tiên.

a) Chứng minh rằng nếu $p\ge 7$ và k là một số nguyên dương lẻ sao cho $3<k<p-1$ thì $kpA_{k-1}-2A_k$ chia hết cho p^4.

b) Nếu $p\ge 5$ thì $p^2A_{p-1}-2A_p$ có chia hết cho p^5 không? Vì sao?

......................Hết......................

SỞ GD & ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT CHUYÊN LAM SƠN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC
(Đề thi có 01 trang, 03 bài)

KIỂM TRA KHẢO SÁT CHỌN HỌC SINH
DỰ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN CỦA TỈNH
THI CHỌN HSG CẤP QUỐC GIA NĂM HỌC 2025 - 2026
Môn: **TOÁN**
Ngày kiểm tra: **26/08/2025**
Thời gian làm bài: **180** phút *(không kể thời gian phát đề)*

Bài 4. (6 *điểm*) Cho tập $S=\{1,2,...,2025\}$ và $A_1,A_2,...,A_k$ là các tập con của S sao cho với mọi $1\le i<j\le k$ có đúng một trong các tập $A_i\cap A_j, A_i'\cap A_j, A_i\cap A_j', A_i'\cap A_j'$ là tập rỗng. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của k.

(Với $A\subset S$, kí hiệu A' là phần bù của tập A trong tập S).

Bài 5. (7 *điểm*) Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H và M là trung điểm của AH. Gọi $(O_1),(O_2)$ là các đường tròn đi qua H và lần lượt tiếp xúc với BC ở B,C. Gọi X,Y lần lượt là tâm các đường tròn bàng tiếp góc H của hai tam giác HMO_1, HMO_2.

a) Chứng minh rằng XY song song với O_1O_2.

b) Giả sử O_1O_2 cắt BC ở T. Đường tròn (MOT) cắt OH tại K khác O. Chứng minh rằng tâm của đường tròn (AOK) nằm trên một đường trung bình của tam giác ABC.

Bài 6. (7 *điểm*) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên sao cho tồn tại số M để $n^{n-1}-1$ chia hết cho $P(n)$ với mọi $n\in\mathbb{N}, n\ge M$.

......................Hết....................

Chương 1

ĐTQG CHUYÊN LAM SƠN - THANH HÓA 2025

Bài toán 0.1. **(LMF - Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - P1)**

Tìm tất cả các hàm số $f : (0; +\infty) \to (0; +\infty)$ thoả mãn

$$f(x + 2f(y)) = f(x + y) + 2y + 2f(y), \quad \forall x, y > 0.$$

Lời giải.

Gọi $P(x, y)$ là phép thế

$$f(x + 2f(y)) = f(x + y) + 2y + 2f(y), \quad x, y > 0.$$

Giả sử tồn tại $x_0 > 0$ sao cho $x_0 > 2f(x_0)$.

$$P(x_0 - 2f(x_0), x_0) \Rightarrow f(2x_0 - 2f(x_0)) + 2x_0 + f(x_0) = 0, \quad \text{vô lý.}$$

Do đó

$$2f(x) \geq x \quad \forall x > 0.$$

Với mỗi $t > 0$, đặt

$$a = 2f(t) - t \geq 0, \qquad b = 2f(t) + 2t = a + 3t > 0.$$

Khi đó với mọi $x > t$, xét $P(x - t, t)$:

$$f(x + a) = f(x) + b.$$

Từ đó với mọi $x > 0, y > t$:

$$\begin{aligned} P(x, y + a) &\Rightarrow f(x + 2f(y) + 2b) = f(x + y) + b + 2y + 2a + 2f(y) + 2b, \\ &\Rightarrow f(x + 6t + 2f(y) + 2a) = f(x + y) + 2y + 2f(y) + 2a + 3b, \\ &\Rightarrow f(x + 6t + 2f(y)) + 2b = f(x + y) + 2y + 2f(y) + 2a + 3b, \\ &\Rightarrow f(x + 6t + 2f(y)) = f(x + y) + 2y + 2f(y) + 2a + b = f(x + y) + 2y + 2f(y) + 6f(t). \end{aligned}$$

Mặt khác, từ $P(x + 6t, y)$:

$$f(x + 6t + 2f(y)) = f(x + y + 6t) + 2y + 2f(y).$$

Vì vậy:

$$f(x + y + 6t) = f(x + y) + 6f(t), \quad \forall x > 0, y > t.$$

Vì $t > 0$ tùy ý, ta có:

$$f(x + 6y) = f(x) + 6f(y), \quad \forall x > y > 0.$$

Gọi $Q(x, y)$ là phép thế $f(x + 6y) = f(x) + 6f(y)$ với $x > y > 0$.

Lấy $x, y > 0$ và $z > x + y$ tùy ý:

Từ $Q(z, x + y)$ ta có:

$$f(z + 6x + 6y) = f(z) + 6f(x + y).$$

Từ $Q(z + 6x, y)$ ta có:

$$f(z + 6x + 6y) = f(z + 6x) + 6f(y).$$

Hơn nữa:

$$f(z+6x+6y)=f(z)+6f(x)+6f(y).$$

Suy ra:

$$f(x+y)=f(x)+f(y), \quad \forall x,y>0.$$

Để ý f là hàm cộng tính trên $\mathbb{R}^+$, nên tồn tại $a\in\mathbb{R}$ sao cho

$$f(x)=ax, \quad \forall x>0.$$

Thay vào phương trình ban đầu, ta được

$$f(x)=2x, \quad \forall x>0.$$

Nhận xét.

Lời giải trên sử dụng phương pháp **Hàm nửa tuần hoàn**:
Với $a,b\in\mathbb{R}$, nếu $f(x+a)=f(x)+b$ với mọi x đủ lớn thì $b=ka$.

Bài toán 0.2. **(LMF - Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - P2)**

Cho n điểm trong mặt phẳng, với $n>4$ và không có ba điểm nào thẳng hàng. Chứng minh rằng có ít nhất $\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$ tứ giác lồi có đỉnh nằm trong số n điểm đã cho.

Lời giải.

Đầu tiên ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 0.1.

Với 5 điểm trên mặt phẳng mà không có ba điểm nào thẳng hàng thì có ít nhất 1 tứ giác lồi.

Xét bao lồi của 5 điểm này, nếu bao lồi đó có 4 hoặc 5 đỉnh thì ta có ngay điều phải chứng minh.

Giả sử bao lồi đó chỉ có 3 đỉnh, giả sử là tam giác ABC có P và Q nằm trong tam giác.

Xét bốn điểm A,B,P,Q. Nếu bốn điểm này có bao lồi là tứ giác thì bài toán được giải quyết.

Nếu bao lồi của bốn điểm này là tam giác thì rõ ràng A hoặc B không thể nằm trong tam giác của ba điểm còn lại (vì A,B là đỉnh của bao lồi). Vì thế P nằm trong tam giác ABQ hoặc Q nằm trong tam giác ABP.

Tương tự xét bốn điểm B,C,P,Q và C,A,P,Q suy ra nếu không có tứ giác lồi nào thì P hoặc Q nằm trong tam giác tạo bởi ba điểm còn lại.

Để ý đường thẳng PQ chia tam giác ABC thành hai phần khác nhau, do đó tồn tại hai đỉnh X,Y trong ba đỉnh A,B,C sao cho hai điểm X,Y nằm ở hai phía khác nhau so với PQ.

Từ đó xét bốn điểm X,P,Y,Q ta có được mâu thuẫn nếu không có tứ giác lồi nào, vì lúc này P nằm trong tam giác XYQ hoặc Q nằm trong tam giác XYP (vô lý do X và Y nằm khác phía nhau so với PQ). Từ đó ta có điều phải chứng minh cho bổ đề.

Quay lại bài toán ban đầu:

Mỗi bộ 5 điểm cho ta ít nhất một tứ giác lồi, do đó từ n điểm ta có ít nhất C_n^5 tứ giác lồi.

Tuy nhiên số tứ giác lồi ở đây có thể bị lặp tối đa $n-4$ lần (mỗi tứ giác lồi cố định sẽ đi cùng với $n-4$ điểm thứ 5) nên số tứ giác lồi ít nhất là $\dfrac{C_n^5}{n-4}=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{120}\geq\dfrac{(n-3)(n-4)}{2}$ với mọi $n\geq 5$.

Bài toán 0.3. **(LMF - Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - P3)**

Cho p là số nguyên tố. Với mỗi số nguyên dương k, đặt A_k là tổng luỹ thừa bậc k của $p-1$ số nguyên dương đầu tiên.

1. Chứng minh rằng nếu $p \geq 7$ và k là một số nguyên dương lẻ sao cho $3 < k < p-1$ thì $kpA_{k-1} - 2A_k$ chia hết cho p^4.
2. Nếu $p \geq 5$ thì $p^2A_{p-1} - 2A_p$ có chia hết cho p^5 không? Vì sao?

Lời giải.

Đầu tiên ta chứng minh các bổ đề sau:

Bổ đề 0.2.

A_k chia hết cho p với mọi k nguyên dương không chia hết cho $p-1$.

Gọi g là căn nguyên thủy modulo p. Khi đó $A_k \equiv 1 + g^k + ... + g^{(p-2)k} \equiv \dfrac{g^{(p-1)k} - 1}{g^k - 1} \equiv 0 \pmod{p}$.

Bổ đề 0.3.

$A_t \equiv 0 \pmod{p^2}$ với mọi $3 \leq t \leq p-1$ lẻ.

Xét theo modulo p^2 và kết hợp bổ đề ta có:

$$A_t = \sum_{i=1}^{p-1} i^t = \sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (i^t + (p-i)^t) = p\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} (i^{t-1} - i^{t-2}(p-i) + ... + (p-i)^{t-1}) \equiv p\sum_{i=1}^{\frac{p-1}{2}} i^{t-1} \equiv \frac{p}{2}\sum_{i=1}^{p-1} i^{t-1} \equiv 0.$$

Quay lại bài toán ban đầu:

1. Ta có $2A_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{p-1}(i^k + (p-i)^k) = \sum_{i=1}^{p-1}(p^k - C_k^1p^{k-1}i + ... + C_k^{k-1}pi^{k-1})$

$$\equiv \sum_{i=1}^{p-1}(C_k^{k-3}p^3i^{k-3} - C_k^{k-2}p^2i^{k-2} + C_k^{k-1}pi^{k-1})$$

$$\equiv C_k^3p^3\sum_{i=1}^{p-1} i^{k-3} - C_k^2p^2\sum_{i=1}^{p-1} i^{k-2} + C_k^1p\sum_{i=1}^{p-1} i^{k-1}$$

$$\equiv \frac{k(k-1)(k-2)}{6}p^3A_{k-3} - \frac{k(k-1)}{2}p^2A_{k-2} + kpA_{k-1}$$

$$\equiv -\frac{k(k-1)}{2}p^2A_{k-2} + kpA_{k-1} \equiv kpA_{k-1} \pmod{p^4}.$$

Do đó $kpA_{k-1} - 2A_k$ chia hết cho p^4.

2. Tương tự câu trên ta có $2A_p \equiv -C_p^4p^4A_{p-4} + C_p^3p^3A_{p-3} - C_p^2p^2A_{p-2} + C_p^1pA_{p-1} \pmod{p^5}$.

Để ý A_{p-4} chia hết cho p, A_{p-3} chia hết cho p, C_p^3 chia hết cho p, A_{p-2} chia hết cho p^2 và C_p^2 chia hết cho p nên $2A_p \equiv p^2A_{p-1} \pmod{p^5}$.

Vì vậy $p^2A_{p-1} - 2A_p$ chia hết cho p^5.

Bài toán 0.4. **(LMF - Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - P4)**

Cho tập $S = \{1, 2, \ldots, 2025\}$ và $A_1, A_2, \ldots, A_k$ là các tập con của S sao cho với mọi $1 \le i < j \le k$ có đúng một trong các tập $A_i \cap A_j, A'_i \cap A_j, A_i \cap A'_j, A'_i \cap A'_j$ là tập rỗng. Tìm giá trị lớn nhất có thể có của k.
(Với $A \subset S$, kí hiệu A' là phần bù của tập A trong tập S).

Lời giải.

Tổng quát bài toán với $2025 = n$, để ý các $2n - 3$ tập con sau đây thỏa mãn:

$$\{1\}, \{2\}, \ldots, \{n\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \ldots, \{1, 2, 3, \ldots, n-2\}.$$

Do đó $k \ge 2n - 3$. Ta sẽ chứng minh rằng $k = 2n - 3$ là giá trị lớn nhất của k thỏa mãn yêu cầu đè bài.

Với $n = 2$, rõ ràng $k \le 1$. Với $n = 3$, dễ thấy $k \le 3$.

Giả sử giá trị lớn nhất của k là $2n - 5$ với mọi $n - 1 \ge 3$.

Gọi $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ là một họ các tập con cực đại thoả mãn yêu cầu bài toán.

Rõ ràng $k \ge 2n - 3$ theo ví dụ ban đầu.

Lưu ý rằng tập rỗng và tập S đều không thuộc M.

Nếu trong M không có cả $\{i\}$ lẫn $\{i\}'$ với $1 \le i \le n$, ta có thể thêm một trong hai tập đó vào và làm lớn hơn họ M. Rõ ràng cả $\{i\}$ và $\{i\}'$ không thể đồng thời thuộc M, do đó chỉ một trong hai tập $\{i\}$ hoặc $\{i\}'$ thuộc M với mọi $1 \le i \le n$.

Xét $X \in M$, ta có thể thay X bởi X'. Do đó ta có thể giả sử rằng

$$|A_i| \le \frac{n}{2}, \quad \forall 1 \le i \le n.$$

Bây giờ ta chọn một tập $A \in M$ sao cho $|A| \ge 2$ và

$$|A| \le |B|, \quad \forall B \in M \text{ với } |B| \ge 2.$$

Vì $2n - 3 > n$, do đó theo nguyên lí Dirichlet thì luôn tồn tại ít nhất một tập như vậy. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử 1, 2 thuộc tập A.

Xét tập $B \in M$ bất kỳ khác $\{1\}$, $\{2\}$ và A. Ta có các trường hợp sau:

- Nếu $A \cap B = \emptyset$, khi đó $1, 2 \notin B$.
- Nếu $A \cap B' = \emptyset$ thì $A \subset B$, do đó $1, 2 \in B$.
- Nếu $A' \cap B = \emptyset$ thì $B \subset A$ và do đó $|B| = 1$, mâu thuẫn với giả thiết $|B| \ge 2$. Vậy $1, 2 \notin B$.
- Nếu $A' \cap B' = \emptyset$, thì $A \cup B = M$.

  Với n lẻ, ta có $|A|, |B| \le \dfrac{n-1}{2}$ và do đó $|A \cup B| \le n - 1$.

  Với n chẵn, trường hợp duy nhất là $|A| = |B| = \dfrac{n}{2}$ nhưng khi đó $B = A'$ và $A \cap B = \emptyset$.

Vì vậy $\{1, 2\} \subset B$ hoặc $\{1, 2\} \cap B = \emptyset$ với mọi $B \in M$ khác $\{1\}$, $\{2\}$ và A.

Do đó bằng cách bỏ $\{1\}$ và $\{2\}$ ra khỏi M rồi gộp 1, 2 thành một phần tử duy nhất, ta thu được một họ cực đại các tập con ứng với trường hợp $n - 1$.

Theo giả thiết quy nạp ta có $k - 2 \le 2n - 5$ và đồng thời $k \ge 2n - 3$.

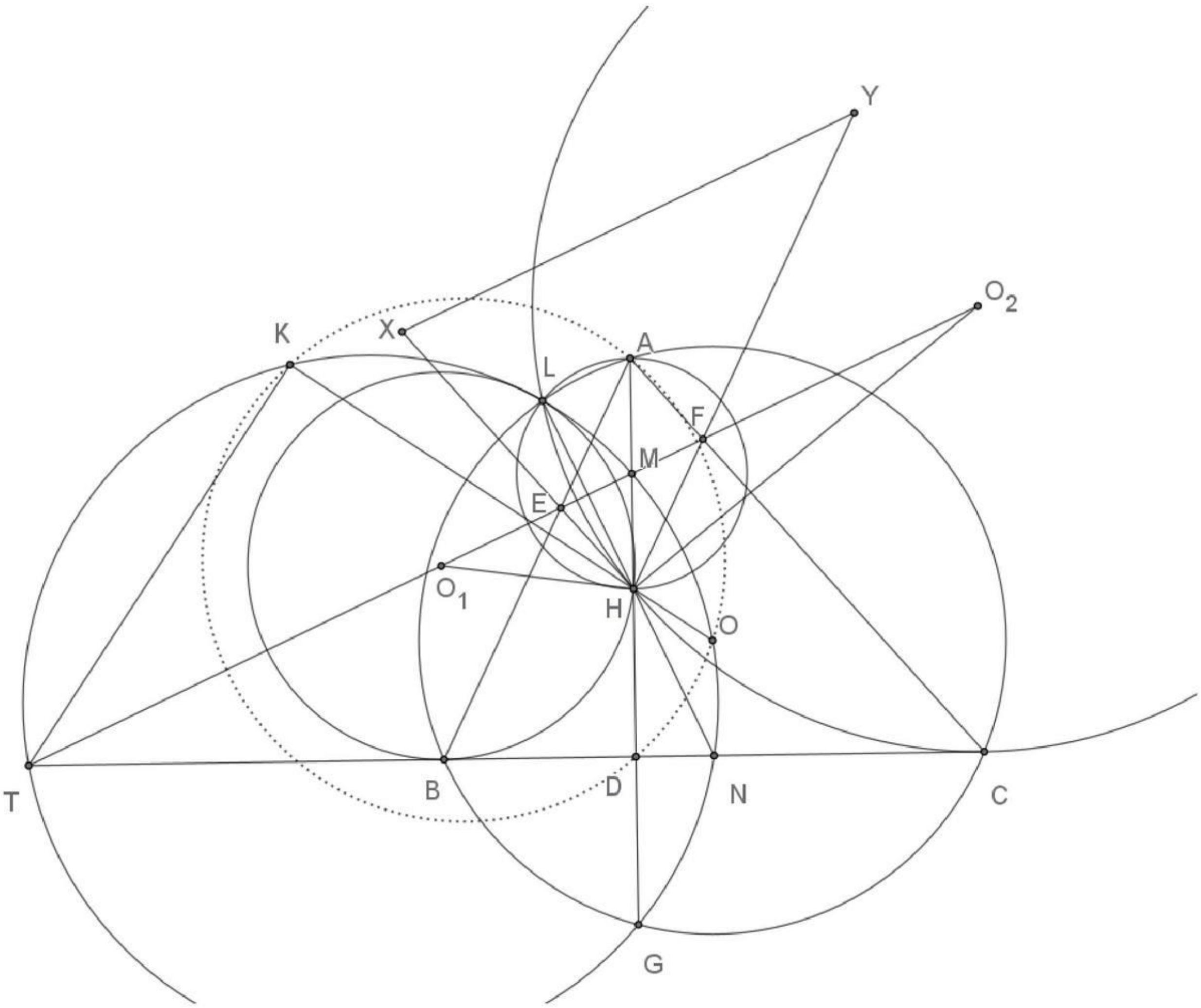
Từ đó $k_{\max} = 2n - 3$ nên giá trị lớn nhất của k thỏa mãn yêu cầu đề bài là 4047.

Bài toán 0.5. **(LMF - Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - P5)**

Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có trực tâm H và M là trung điểm AH. Gọi $(O_1), (O_2)$ là các đường tròn đi qua H và lần lượt tiếp xúc với BC ở B, C. Gọi X, Y lần lượt là tâm các đường tròn bàng tiếp góc H của hai tam giác HMO_1, HMO_2.

1. Chứng minh rằng XY song song với O_1O_2.
2. Giả sử O_1O_2 cắt BC ở T. Đường tròn (MOT) cắt OH tại K khác O. Chứng minh rằng tâm của đường tròn (AOK) nằm trên một đường trung bình của tam giác ABC.

Lời giải.



1. Kí hiệu (M) là đường tròn đường kính AH. Gọi L là giao điểm của (O) với (M) khác A.

   Khi đó L là điểm H-Humpty của tam giác HBC.

   Khi đó theo tính chất điểm Humpty thì L cũng thuộc đường tròn (O_1) và (O_2).

   Vì vậy M thuộc đoạn thẳng O_1O_2.

   Gọi E, F lần lượt là giao điểm của các cặp đường thẳng HX và AB, HY và AC.

   Vì $HX \| AC$ và $HY \| AB$ nên suy ra tứ giác $AEHF$ là hình bình hành.

Khi đó áp dụng định lý Thales ta có $XY \| O_1O_2$ do

$$\frac{XE}{XH} = \frac{ME}{MH} = \frac{MF}{MH} = \frac{YF}{YH}$$

2. Gọi N là trung điểm của đoạn thẳng BC.

Để ý $OL = OA$, mà $MA = ML$ nên $OM \perp AL$.

Ta cũng có $AL \| O_1O_2$ (cùng vuông góc với HL) nên $\angle TMO = 90^\circ$, suy ra $\angle TKO = 90^\circ$.

Gọi G là điểm đối xứng với H qua BC.

Ta có $AONM, MONH$ là các hình bình hành nên dễ thấy $MONG$ là hình thang cân.

Do đó các điểm O, N, G, M, T, L cùng thuộc đường tròn đường kính TO. Suy ra

$$HK \cdot HO = HM \cdot HG = \frac{1}{2}HA \cdot 2HD = HA \cdot HD$$

nên $D \in (AOK)$. Do đó tâm của (AOK) thuộc trung trực AD, và đây cũng là đường trung bình song song BC của tam giác ABC.

Bài toán 0.6. **(LMF - Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa - P6)**

Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ với hệ số nguyên sao cho tồn tại số M để $n^{n-1} - 1$ chia hết cho $P(n)$ với mọi $n \in \mathbb{N}, n \geq M$.

Lời giải.

Đặt $P(x) = (x-1)^m Q(x)$ với $Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn $Q(1) \neq 0$, ở đây m là số tự nhiên.
Giả sử $\deg Q \geq 1$, khi đó $Q(n) \mid n^{n-1} - 1$ với mọi $n \geq M$.
Theo định lý Schur, tồn tại vô số số nguyên tố p sao cho tồn tại số nguyên n_0 để $p \mid Q(n_0)$.
Theo định lý CRT, tồn tại $n \geq M$ để $n \equiv n_0 \pmod p$ và $n \equiv 2 \pmod{p-1}$.
Suy ra $Q(n) \equiv Q(n_0) \equiv 0 \pmod p$ nên $p \mid n^{n-1} - 1$.
Dễ thấy $\gcd(n, p) = 1$.
Mà theo định lý Fermat nhỏ ta có $p \mid n^{n-2} - 1$.
Vì thế $p \mid n^{n-2}(n-1)$ nên $p \mid n - 1$ nên $n \equiv 1 \pmod p$.
Do đó $Q(1) \equiv Q(n) \equiv 0 \pmod p$ hay $p \mid Q(1)$.
Chọn $p > |Q(1)|$ suy ra $Q(1) = 0$, vô lý.
Vì thế $Q(x) \equiv c \in \mathbb{Z}$ hay $P(x) \equiv c(x-1)^m$.
Không mất tính tổng quát, giả sử $c > 0$ (rõ ràng $c \neq 0$).
Nếu $c \geq 2$, xét $\dfrac{n^{n-1}-1}{P(n)} = \dfrac{n^{n-1}-1}{c(n-1)^m} = \dfrac{n^{n-2} + n^{n-3} + \ldots + n^2 + n + 1}{c(n-1)^{m-1}}$.
Từ đó c là ước của $\dfrac{n^{n-1}-1}{n-1}$ với mọi $n \geq M$.
Gọi q là ước nguyên tố của c, chọn $n \equiv 2 \pmod q$ sao cho $n \geq M$.
Khi đó $0 \equiv n^{n-1} - 1 \equiv n - 1 \equiv 1 \pmod q$, vô lý.
Vì thế $c = 1$ nên $P(x) = (x-1)^m$ nên $(n-1)^m \mid n^{n-1} - 1 \forall n \geq M$.
Gọi r là ước nguyên tố của $n - 1$.
Theo bổ đề LTE ta có $mv_r(n-1) \leq v_r(n^{n-1} - 1) = 2v_r(n-1)$ nên $m \leq 2$.
Do đó $P(x) \in \{1; -1; (x-1); -(x-1); (x-1)^2; -(x-1)^2\}$.
Thử lại thấy tất cả các đa thức trên thỏa mãn yêu cầu đề bài.