SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHÙNG KHẮC KHOAN - THẠCH THẤT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HSG CẤP TRƯỜNG
KHỐI 10, 11-NĂM HỌC 2024-2025
ĐỀ THI MÔN: TOÁN- LỚP 10
Thời gian làm bài 150 phút
(không kể thời gian giao đề)
(Đề thi gồm 02 trang)

Số báo danh:.....Họ và tên.....

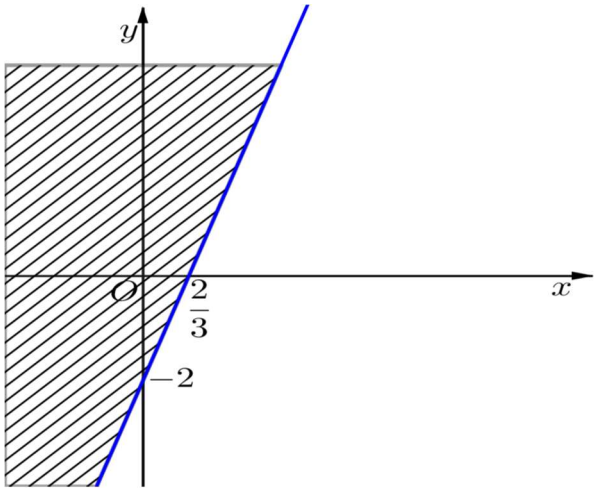
Câu 1: (4 điểm)

1) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}} + \sqrt{2x-1}$

2) Tìm m để hàm số $y = \frac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

Câu 2: (2điểm)

Khi biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $ax + by + 2 \leq 0$. ta được miền nghiệm trong hình vẽ sau đây. Hãy tìm giá trị a và b

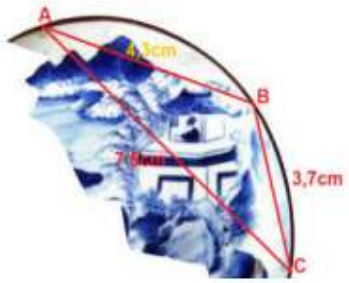


Câu 3: (3 điểm)

Một hộ nông dân định trồng dứa và củ đậu trên diện tích $8ha$. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng dứa thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180 công.

Câu 4: (2 điểm)

Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả như hình vẽ ($AB = 4,3\,cm; BC = 3,7\,cm;\ CA = 7,5\ cm$). Tính đường kính của chiếc đĩa này.(kết quả làm tròn đến phần trăm)



Câu 5: (4 điểm)

1) Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm O và có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác OBC, OCA, OAB và G' là trọng tâm của tam giác MNP .Chứng minh ba điểm O, G, G' thẳng hàng.

2) Cho tam giác ABC có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm tọa độ điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$. (S là diện tích)

Câu 6: (5 điểm)

a) Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính giá trị biểu thức sau: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$

b) Cho tam giác ABC đều cạnh a. Lấy các điểm M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = \frac{1}{3}BC, AC = 2AN, AP = x, 0 < x < a$. Tính x theo a để AM vuông góc với NP.

c) Cho tam giác ABC có AB = c, BC = a, CA = b. Trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AD và $\frac{CM}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính giá trị của $\cos A$

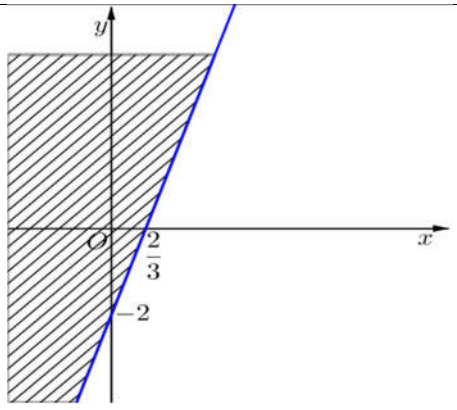
---------- HẾT ----------

(Thí sinh không dùng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

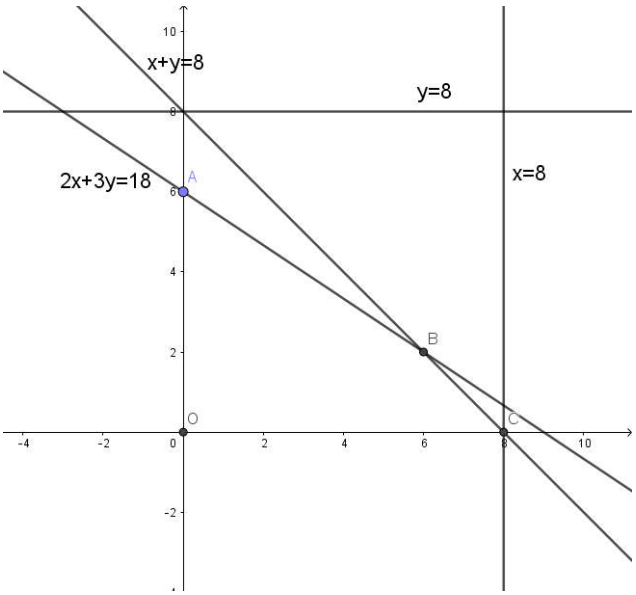
ĐÁP ÁN THANG ĐIỂM

Để được điểm tối đa cần lập luận chính xác chặt chẽ, trình bày rõ ràng

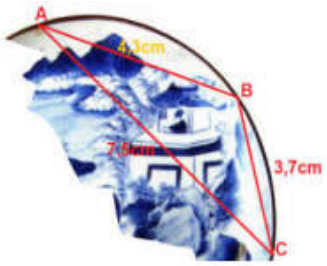
Câu 1	Nội dung	Điểm
2	a) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}} + \sqrt{2x-1}$ y xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 2-3x>0 \\ 2x-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{2}{3} \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x < \frac{2}{3}.$ **Vậy** tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sqrt{2-3x}} + \sqrt{2x-1}$ là $[\frac{1}{2};\frac{2}{3})$.	1 1
2	b) Tìm m để hàm số $y = \frac{x\sqrt{2}+1}{x^2+2x-m+1}$ có tập xác định là $\mathbb{R}$. Hàm số có tập xác định $\mathbb{R}$ khi $x^2+2x-m+1 \neq 0, \forall x \Leftrightarrow$ $\Delta' = 1+m-1 < 0 \Leftrightarrow m < 0.$	1 1

Câu 2	Nội dung	Điểm
2	Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $ax+by+2 \leq 0$. ta được miền nghiệm tìm a và b	
	 Biểu diễn hình học tập nghiệm của bất phương trình $ax+by+2 \leq 0$. ta được phần không chứa gốc tọa độ 0 phương trình $ax+by+2=0$ của (d) qua (0;-2) và (2/3;0) thay vào tính được a = -3 và b=1	1 1

Câu 3	Nội dung	Điểm

	Một hộ nông dân định trồng dứa và củ đậu trên diện tích $8ha$. Trên diện tích mỗi ha, nếu trồng dứa thì cần 20 công và thu 3 triệu đồng, nếu trồng củ đậu thì cần 30 công và thu 4 triệu đồng. Hỏi cần trồng mỗi loại cây trên với diện tích là bao nhiêu ha để thu được nhiều tiền nhất, biết rằng tổng số công không quá 180.	
3	Gọi x, y lần lượt là số ha trồng dứa và củ đậu. Có $0 \le x \le 8; 0 \le y \le 8;\ x + y \le 8;\ 20x + 30y \le 180 \Rightarrow 2x + 3y \le 18$. Số tiền thu được là $T(x, y) = 3x + 4y$. Ta có hệ $\begin{cases} 0 \le x \le 8 \\ 0 \le y \le 8 \\ x + y \le 8 \\ 2x + 3y \le 18 \end{cases}$  Miền nghiệm của hệ là miền tứ giác $OABC$ với $A(0; 6), B(6; 2), C(0; 8)$. Khi đó $T(x, y)$ đạt cực đại tại một trong các đỉnh của $OABC$. Có $T(0,0) = 0; T(0; 6) = 24; T(6; 2) = 26; T(8; 0) = 24$. Vậy cần trồng 6 ha dứa và 2 ha củ đậu.	**1** **0,5** **0,5** **0,5** **0,5**

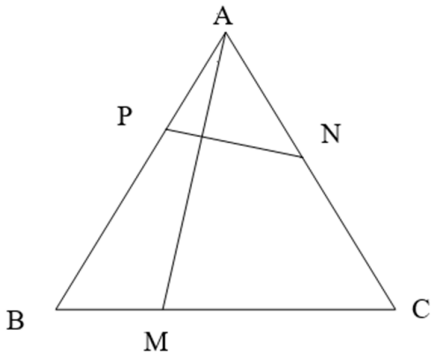
Câu 4	**Nội dung**	**Điểm**
2	Trong khi khai quật một ngôi mộ cổ, các nhà khảo cổ học đã tìm được một chiếc đĩa cổ hình tròn bị vỡ, các nhà khảo cổ muốn khôi phục lại hình dạng chiếc đĩa này. Để xác định bán kính của chiếc đĩa, các nhà khảo cổ lấy 3 điểm trên chiếc đĩa và tiến hành đo đạc thu được kết quả	

	như hình vẽ ($AB = 4,3\,cm; BC = 3,7\,cm;\ CA = 7,5\ cm$). Tính bán kính của chiếc đĩa này.  Bán kính R của chiếc đĩa bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Nửa chu vi của tam giác ABC là: $p = \frac{AB+BC+CA}{2} = \frac{4,3+3,7+7,5}{2} = \frac{31}{4} cm.$ Diện tích tam giác ABC là: $S = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-CA)} \approx 5,2\,cm^2.$ Mà $S = \frac{AB.BC.CA}{4R} \Rightarrow R = \frac{AB.BC.CA}{4S} \approx 5,73\,cm.$ 2R = 11,46 cm	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**

Câu 5	**Nội dung**	**Điểm**
2	1) Cho tam giác ABC không cân, nội tiếp đường tròn tâm O và có trọng tâm G. Gọi M, N, P lần lượt là trọng tâm các tam giác OBC, OCA, OAB và G' là trọng tâm của tam giác MNP.Chứng minh ba điểm O, G, G' thẳng hàng. Ta có $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right), \overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\right), \overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$ Suy ra $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right) = 2\overrightarrow{OG}$ Lại có G' là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP} = 3\overrightarrow{OG'}$ Suy ra $3\overrightarrow{OG'} = 2\overrightarrow{OG} \Rightarrow O, G, G'$ thẳng hàng	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**

2	**2)** Cho tam giác ABC có $A(3;4), B(2;1), C(-1;-2)$. Tìm điểm M trên đường thẳng BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{ABM}$. (S là diện tích) Ta có $S_{ABC} = 3S_{ABM} \Leftrightarrow BC = 3BM \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \pm 3\overrightarrow{BM}$ Gọi $M(x;y) \Rightarrow \overrightarrow{BM}(x-2;y-1); \overrightarrow{BC}(-3;-3)$ Suy ra $\begin{cases} -3 = 3(x-2) \\ -3 = 3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} -3 = -3(x-2) \\ -3 = -3(y-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ Vậy có hai điểm thỏa mãn $M_1(1;0), M_2(3;2)$.	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**

Câu 6	**Nội dung**	**Điểm**
2	1-Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a. Tính giá trị các biểu thức sau: $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC})$ Theo quy tắc hình bình hành ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ Do đó $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$ $= \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \lvert\overrightarrow{CA}\rvert.\lvert\overrightarrow{CB}\rvert \cos\widehat{ACB}$ $(\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD} = 0$ vì $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD})$ Mặt khác $\widehat{ACB} = 45^0$ và theo định lý Pitago ta có : $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$ Suy ra $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC}) = a.a\sqrt{2}\, cos\, 45^0 = a^2$	**0,5** **0,5** **0,5** **0,5**
2	Cho tam giác ABC đều cạnh a. Lấy các điểm M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh BC, CA, AB sao cho $BM = \frac{1}{3}BC, AC = 2AN, AP = x, 0 < x < a$. Tính x theo a để AM vuông góc với NP.	



Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **0,5**

$$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AN} = \frac{x}{a}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$ **0,5**

$$AM \perp NP \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{NP} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{x}{a}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2xa}{3} - \frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{3}a.a.\frac{1}{2} + \frac{1}{3}.\frac{x}{a}.a.a.\frac{1}{2} = 0$$

$\Leftrightarrow x = \frac{2a}{5}$. **0,5**

1 Cho tam giác ABC có $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AD và $\frac{CM}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính giá trị của $\cos A$

Ta có: $\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{2}$ **0,5**

Theo giả thiết: $AD \perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CM} = 0$

$\Leftrightarrow \left(b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}\right) = 0 \Leftrightarrow bc^2 + bc^2\cos A - 2cb^2\cos A - 2cb^2 = 0$

$\Leftrightarrow (c - 2b)(1 + \cos A) = 0 \Rightarrow c = 2b$ $(do\ \cos A > -1)$

Khi đó: $CM^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 - b^2}{2}$

$AD^2 = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)^2 = \frac{1}{9}\left(AB^2 + 4AC^2 + 4\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right) = \frac{2}{9}\left(9b^2 - a^2\right)$ **0,5**

$\frac{CM}{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{CM^2}{AD^2} = \frac{9}{4}.\frac{a^2 - b^2}{9b^2 - a^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a^2 = 3b^2$

$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5b^2 - a^2}{4b^2} = \frac{1}{2}$.