SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI **TRƯỜNG THPT PHÙNG KHẮC KHOAN - THẠCH THẤT**	**KỲ THI CHỌN HSG CẤP TRƯỜNG KHỐI 10, 11-NĂM HỌC 2024-2025 ĐỀ THI MÔN: TOÁN – LỚP 11** *Thời gian làm bài 150 phút (không kể thời gian giao đề)* (Đề thi gồm 02 trang)
ĐỀ CHÍNH THỨC	

Số báo danh:....................Họ và tên...

Câu 1. (2,0 điểm) .

a. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

b. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $y=\frac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$.

Câu 2. (2,0 điểm). Tìm nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x-1=0$ trong đoạn $[0;\pi]$.

Câu 3. (4,0 điểm).

a. Tìm số hạng thứ 10 và xét tính tăng, giảm của dãy số $u_n=\frac{1}{n^2+n}$.

b. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao 81 mét. Mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên hai phần ba độ cao của lần rơi trước. Tính tổng các khoảng cách rơi và nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa.

Câu 4. (1,5 điểm).

Một người gửi vào ngân hàng số tiền tiết kiệm là 73 triệu đồng theo hình thức lãi kép, nhằm mục đích sau 5 năm thu được số tiền là 100 triệu đồng . Tuy nhiên vì kế hoạch tài chính thay đổi nên người đó không rút tiền ra mà để sau 10 năm mới rút toàn bộ gốc và lãi. Giả sử trong suốt quá trình gửi 10 năm, lãi suất của ngân hàng không thay đổi. Tính số tiền cả gốc và lãi mà người đó nhận về sau 10 năm gửi ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị và tính theo đơn vị triệu đồng).

Câu 5. (4,0 điểm).

a. Tính $\lim u_n$ với $u_n=\frac{1}{1.3}+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

b. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=0$.

Câu 6. (6,5 điểm).

a. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J, K là ba điểm lần lượt nằm trên các cạnh SA, AB, BC. Tìm giao tuyến của (SAK) với (SBD), giao điểm của IK với (SBD), giao điểm của SD với $(\mathrm{IJ}K)$.

b. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD và $AD=2BC$ .Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD.Chứng minh $OG//(SBC)$.

c. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên $\left(SAB\right)$ là tam giác vuông tại A, $SA = a\sqrt{3}$, $SB = 2a$. Điểm M nằm trên đoạn AD sao cho $AM = 2MD$. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng qua M và song song với $\left(SAB\right)$. Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng $\left(P\right)$.

------------- HẾT -------------

(Thí sinh không dùng tài liệu, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

ĐÁP ÁN.

Câu 1. (2,0 điểm) .

a. Tìm tập xác định D của hàm số $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$.

b. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số: $y=\frac{\sin x-\tan x}{\sin x+\cot x}$

a. Hàm số $y=\tan\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)$ xác định khi và chỉ khi $\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{4}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$.	***0,5 điểm***
Suy ra $x\neq\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$. Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{3\pi}{8}+\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$.	***0,5 điểm***
b. Hàm số xác định khi $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\\ \sin x+\cot x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\\ \sin^2 x+\cos x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \sin x\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\neq\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}.$ Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\right\}$; $\forall x\in D\Rightarrow -x\in D$	***0,5 điểm***
Ta có: $f(-x)=\frac{\sin(-x)-\tan(-x)}{\sin(-x)+\cot(-x)}=\frac{-\sin x+\tan x}{-\sin x-\cot x}=\frac{\sin x\text{ - }\tan x}{\sin x+\cot x}=f(x)$ Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.	***0,5 điểm***

Câu 2. (2,0 điểm). Tìm nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x-1=0$ trong đoạn $[0;\pi]$.

Phương trình $2\cos 2x-1=0\Leftrightarrow\cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2x=\frac{\pi}{3}+k2\pi\\ 2x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\ x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{array}\right.$.	***1,0 điểm***
Xét $x\in[0;\pi]\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\leq\frac{\pi}{6}+k\pi\leq\pi\\ 0\leq-\frac{\pi}{6}+k\pi\leq\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{-1}{6}\leq k\leq\frac{5}{6}\\ \frac{1}{6}\leq k\leq\frac{7}{6}\end{array}\right.$ mà $k\in\mathbb{Z}$ suy ra $\left[\begin{array}{l}k=0\\ k=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}\\ x=\frac{5\pi}{6}\end{array}\right.$.	***1,0 điểm***

Vậy nghiệm lớn nhất của phương trình $2\cos 2x-1=0$ trong đoạn $\left[0;\pi\right]$ là $x=\dfrac{5\pi}{6}$.	

Câu 3. (4,0 điểm).

a. Tìm số hạng thứ 10 và xét tính tăng, giảm của dãy số $u_n=\dfrac{1}{n^2+n}$.

b. Một quả bóng cao su được thả từ độ cao 81 mét. Mỗi lần chạm đất quả bóng lại nảy lên hai phần ba độ cao của lần rơi trước. Tính tổng các khoảng cách rơi và nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa.

a. Số hạng thứ 10 của dãy số là $u_{10}=\dfrac{1}{10^2+10}=\dfrac{1}{110}$	***1,0 điểm***
Ta có $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{\left(n+1\right)^2+\left(n+1\right)}-\dfrac{1}{n^2+n}=\dfrac{1}{\left(n+1\right)\left(n+2\right)}-\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}$ $=\dfrac{-2}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}<0$ với $n\geq 1$. Do đó $\left(u_n\right)$ là dãy giảm.	***1,0 điểm***
b. Gọi r_i là khoảng cách *lần rơi* thứ i. Ta có $r_1=81$, $r_2=\dfrac{2}{3}.81,\ldots,$ $r_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}.81$,… Suy ra tổng các khoảng cách rơi của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lần rơi thứ n bằng $81.\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^n}{1-\dfrac{2}{3}}$.	***1,0 điểm***
Gọi t_i là khoảng cách *lần nảy* thứ i. Ta có $t_1=\dfrac{2}{3}.81$, $t_2=\left(\dfrac{2}{3}\right).\dfrac{2}{3}81,\ldots,$ $t_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\dfrac{2}{3}.81,\ldots$ Suy ra tổng các khoảng cách nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến đến lần nảy thứ n bằng $\dfrac{2}{3}.81.\dfrac{1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{2}{3}}$.	***0,5 điểm***

Vậy tổng các khoảng cách rơi và nảy của quả bóng từ lúc thả bóng cho đến lúc bóng không nảy nữa bằng $\mathrm{S}=\lim\left(81.\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n}}{1-\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}.81.\dfrac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}{1-\frac{2}{3}}\right)$ $=81.\dfrac{1-0}{1-\frac{2}{3}}+\dfrac{2}{3}.81.\dfrac{1-0}{1-\frac{2}{3}}=405(m)$.	***0,5 điểm***

Câu 4. (1,5 điểm).

Một người gửi vào ngân hàng số tiền tiết kiệm là 73 triệu đồng theo hình thức lãi kép, nhằm mục đích sau 5 năm thu được số tiền là 100 triệu đồng . Tuy nhiên vì kế hoạch tài chính thay đổi nên người đó không rút tiền ra mà để sau 10 năm mới rút toàn bộ gốc và lãi. Giả sử trong suốt quá trình gửi 10 năm, lãi suất của ngân hàng không thay đổi. Tính số tiền cả gốc và lãi mà người đó nhận về sau 10 năm gửi ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị và tính theo đơn vị triệu đồng).

Gọi $r\ (r>0)$ là lãi suất gửi tiền, từ giả thiết của bài toán, theo công thức lãi kép ta có: $73.(1+r)^5=100 \Leftrightarrow 1+r=\sqrt[5]{\dfrac{100}{73}} \Leftrightarrow r=\sqrt[5]{\dfrac{100}{73}}-1$.	***0,75 điểm***
Suy ra tổng số tiền người đó thu được sau 10 năm là: $73.(1+r)^{10}=73.\left(\dfrac{100}{73}\right)^2 \approx 137$ (triệu đồng).	***0,75 điểm***

Câu 5. (4,0 điểm).

a. Tính $\lim u_n$ với $u_n=\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{3.5}+\dfrac{1}{5.7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$.

b. Tìm m để hàm số $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x} & \text{khi } x<0\\ m+\dfrac{x^3-3x+1}{x+2} & \text{khi } x\ge 0\end{cases}$ liên tục tại điểm $x_0=0$.

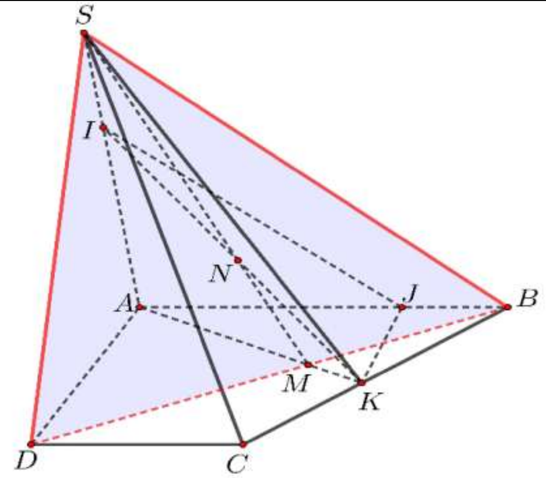
a. *Ta có* $u_n=\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ $=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$	***1,0 điểm***
$\lim u_n=\lim\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$.	***1,0 điểm***
b. +)Tập xác định $D=[-1;+\infty)\setminus\{0\}$. +) $f(0)=m+\frac{1}{2}$	***0,5 điểm***
+) $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)+\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)}{x}$ $=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}+\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}$ +) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1+x}+1\right)}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1+x-1}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}$ $=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$	***0,5 điểm***
+) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-\sqrt[3]{1+x}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\left(1-\sqrt[3]{1+x}\right)\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}$ $=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1-(1+x)}{x\left[1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2\right]}=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{-1}{1+\sqrt[3]{1+x}+\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^2}=\frac{-1}{3}$ $\Rightarrow\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.	***0,5 điểm***
$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(m+\frac{x^3-3x+1}{x+2}\right)=m+\frac{1}{2}$. Để hàm số liên tục tại $x=0$ thì $\lim\limits_{x\to0^+}=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)\Leftrightarrow m+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\Leftrightarrow m=-\frac{1}{3}$. Vậy $m=-\frac{1}{3}$.	***0,5 điểm***

Câu 6. (6,5 điểm).

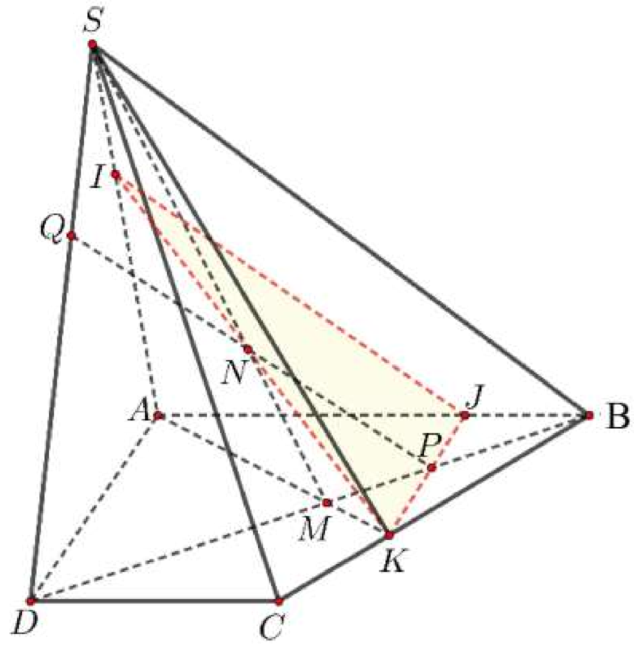
a. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AB. Gọi I, J, K là ba điểm lần lượt nằm trên các cạnh $SA,\ AB,\ BC$. Tìm giao tuyến của (SAK) với (SBD), giao điểm của IK với (SBD), giao điểm của SD với $(\mathrm{IJ}K)$.

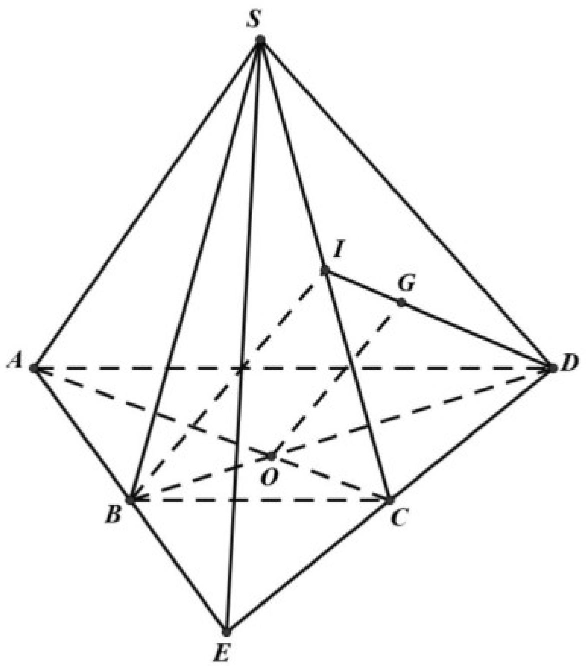
b. Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang, đáy lớn AD và $AD = 2BC$ .Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Chứng minh $OG//(SBC)$.

c. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên (SAB) là tam giác vuông tại A, $SA = a\sqrt{3}$, $SB = 2a$. Điểm M nằm trên đoạn AD sao cho $AM = 2MD$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

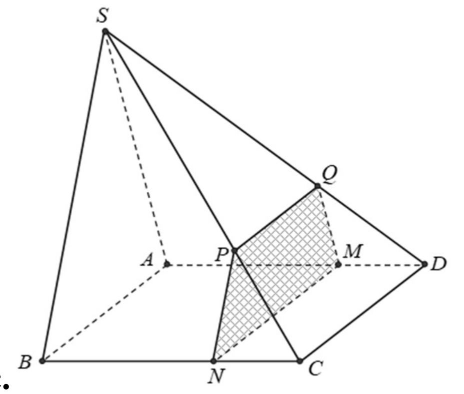
<table>
<tr><td>


a.
Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi M là giao điểm của BD và AK.
Ta có : $\begin{cases} M \in BD \\ M \in AK \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in (SBD) \\ M \in (SAK) \end{cases} \Rightarrow \{M\} = (SBD) \cap (SAK)$.
Mặt khác : $\{S\} = (SBD) \cap (SAK)$.
$SM = (SBD) \cap (SAK)$ hay SM là giao tuyến của 2 mặt phẳng (SBD) và (SAK).
</td><td>0,5 điểm</td></tr>
<tr><td>
Trong mặt phẳng (SAK), gọi N là giao điểm của SM và IK.
$\begin{cases} N \in SM \subset (SBD) \\ N \in IK \end{cases} \Rightarrow \{N\} = IK \cap (SBD)$.
Vậy N là giao điểm của IK và (SBD).
</td><td>0,75 điểm</td></tr>
</table>

 Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi P là giao điểm của BD và JK. $\begin{cases} P \in BD \subset (SBD) \\ P \in IK \subset (\text{IJ}K) \end{cases}$; $\begin{cases} N \in SM \subset (SBD) \\ N \in IK \subset (\text{IJ}K) \end{cases}$ Trong mặt phẳng (SBD), gọi Q là giao điểm của PN và SD. $\Rightarrow \begin{cases} Q \in SD \\ Q \in PN \subset (\text{IJ}K) \end{cases} \Rightarrow SD \cap (\text{IJ}K) = \{Q\}$. Vậy Q là giao điểm của SD và $(\text{IJ}K)$.	**0,75 điểm**

 ***b.*** Tứ giác $ABCD$ là hình thang , đáy lớn $AD \Rightarrow AD // BC$ Gọi E là giao điểm của AB và DC	***0,5 điểm***

Khi đó $\Delta EBC \sim \Delta EAD \Rightarrow \dfrac{EB}{EA} = \dfrac{EC}{ED} = \dfrac{BC}{AD} = \dfrac{1}{2}$ $\Rightarrow EB = \dfrac{EA}{2};\ EC = \dfrac{ED}{2} \Rightarrow B, C$ lần lượt là trung điểm của $AE;\ DE$ $\Rightarrow BD; AC$ là đường trung tuyến trong tam giác ADE.	
Mà $\{O\} = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trọng tâm của tam giác $ADE \Rightarrow \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3}$. Gọi I là trung điểm của SC. Vì G là trọng tâm của tam giác $SDC \Rightarrow \dfrac{DG}{DI} = \dfrac{2}{3}$. Xét ΔDGO và ΔDIB có $\dfrac{DG}{DI} = \dfrac{DO}{DB} = \dfrac{2}{3}$ và góc D chung . $\Delta DGO \sim \Delta DIB \Rightarrow OG // IB$.	**0,5 điểm**
Ta có : $\begin{cases} OG // IB \\ OG \not\subset (SBC) \\ IB \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow OG // (SBC)$ (đpcm).	**0,5 điểm**


c.
Ta có: $\begin{cases} (P) // (SAB) \\ M \in AD, M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (ABCD) = MN \\ (P) \cap (SCD) = PQ \end{cases}$ và $MN // PQ // AB$
Lại có $\begin{cases} (P) // (SAB) \\ M \in AD, M \in (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (P) \cap (SAD) = MQ \\ (P) \cap (SBC) = NP \end{cases}$ và $\begin{cases} MQ // SA \\ NP // SB \end{cases}$
Từ đó suy ra (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang $MNPQ$.
	1,0 điểm

Tam giác SAB vuông tại A nên $SA \perp AB \Rightarrow MN \perp MQ$ Suy ra hình thang $MNPQ$ vuông tại M và Q. Do $MQ // SA \Rightarrow \dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{DQ}{DS} \Rightarrow MQ = \dfrac{1}{3}SA$ và $\dfrac{DQ}{DS} = \dfrac{1}{3}$. Do $PQ // CD \Rightarrow \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SQ}{SD} \Rightarrow PQ = \dfrac{2}{3}AB$, với $AB = \sqrt{SB^2 - SA^2} = a$	**1,0 điểm**
Ta có : $S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}MQ.(PQ + MN) \Leftrightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}\dfrac{SA}{3}.\left(\dfrac{2AB}{3} + AB\right) \Leftrightarrow S_{MNPQ} = \dfrac{5a^2\sqrt{3}}{18}$	**1,0 điểm**

Vậy diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) bằng $\frac{5a^2\sqrt{3}}{18}$.	

Hết