SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO **HẢI DƯƠNG**	KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CẤP TỈNH NĂM HỌC 2024-2025
ĐỀ CHÍNH THỨC	**Môn thi: TOÁN** Ngày thi: 29/10/2024 *Thời gian làm bài: 180 phút, không tính thời gian phát đề* (Đề thi có 02 trang, 05 câu)

Câu I. (*2,0 điểm*)

1. Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(1;-3)$. Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị (C). Tính diện tích của tam giác MAB.

2. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x)=90-0,01x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+15x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 15 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm). Hỏi A bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận cao nhất?

Câu II. (*2,0 điểm*)

1. Doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\dfrac{24000}{1+6e^{-t}}$ với $t\geq 0$, trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tốc độ bán hàng lớn nhất đạt được khi $t=ln\,a$. Tìm a.

2. Có bao nhiêu số nguyên y để với mỗi y có đúng 2 số thực x thỏa mãn bất phương trình: $\dfrac{2e^x}{\sqrt{16.e^x-y}}+ln\left(16.e^x-y\right)\leq 2x+2$.

Câu III. (*2,0 điểm*)

1. Trong trận thi đấu bóng bàn đơn nam giữa vận động viên Nguyễn Đức Tuân (người từng đoạt huy chương vàng đơn nam môn bóng bàn tại Seagames 31) với một vận động viên nước ngoài, trận đấu gồm tối đa 5 set (séc), người nào thắng trước 3 set sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất để vận động viên Tuân thắng mỗi set là $0,6$. Tính xác suất để vận động viên Tuân giành chiến thắng trong trận đấu.

2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{2\sqrt{x}}{y}+2 \\ y\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} \end{cases}$

Câu IV. (***3,0 điểm***)

1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều có cạnh bằng 1 và $SA\perp(ABC)$. Gọi M,N lần lượt thuộc các cạnh SB,SC sao cho $SM=3MB$, $NC=2NS$. Tính độ dài đoạn SA và côsin của góc giữa hai đường thẳng MN và AC, biết rằng AN vuông góc CM.

2. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC=a$. Biết rằng đường thẳng BC' hợp với mặt phẳng $(ACC'A')$ một góc 30^0 và đường thẳng BC' hợp với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$.

a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN.

Câu V. (***1,0 điểm***)

Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0\le a\le b\le c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\left(a^2-b^2\right)(b-c)+c^2(1-c)$$

- - - - - - - - HẾT- - - - - - - - -

Thí sinh không được sử dụng máy tính cầm tay, cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Họ và tên thí sinh: …………………………………… Số báo danh: ……………Phòng thi …………

Cán bộ coi thi số 1 ……………………………… Cán bộ coi thi số 2 ………………………………

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
HẢI DƯƠNG

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI LỚP 12 THPT CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 – 2025
Môn thi: TOÁN
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

Câu	ý	Nội Dung	Điểm
I	1	Cho hàm số $y=\dfrac{x^2-2x-2}{x+1}$ có đồ thị (C) và điểm $M(1;-3)$. Gọi A,B là hai điểm cực trị của đồ thị (C). Tính diện tích của tam giác MAB.	
		Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ $y'=\dfrac{(2x-2)(x+1)-(x^2-2x-2)}{(x+1)^2}=\dfrac{x^2+2x}{(x+1)^2}$ $y'=0\Rightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$ $y'>0\Leftrightarrow x\in(-\infty;-2)\cup(0;+\infty)$; $y'<0\Leftrightarrow x\in(-2;-1)\cup(-1;0)$	0,25
		Hai điểm cực trị của đồ thị (C) là $A(-2;-6),B(0;-2)$ $\overrightarrow{AB}=(2;4)\Rightarrow AB=2\sqrt{5}$	0,25
		Phương trình đường thẳng AB là: $2x-y-2=0$. Ta có: $d(M,AB)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$	0,25
		$S_{MAB}=\dfrac{1}{2}.d(M,AB).AB=\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{\sqrt{5}}.2\sqrt{5}=3$	0,25
	2	Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x)=90-0,01x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x)=100+15x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 15 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm). Hỏi A bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận cao nhất?	
		Doanh thu của A khi bán x tấn sản phẩm $D(x)=p(x).x=(90-0,01x^2).x=-0,01x^3+90x$	0,25
		Lợi nhuận của A khi bán x tấn sản phẩm $L(x)=D(x)-C(x)=-0,01x^3+90x-(100+15x)$ $=-0,01x^3+75x-100$	0,25
		$L'(x)=-0,03x^2+75$ $L'(x)=0\Leftrightarrow-0,03x^2+75=0\Leftrightarrow x^2=\dfrac{75}{0,03}=2500\Leftrightarrow x=50$ Bảng biến thiên:	0,25

x	0	50	100
$L'(x)$	$+$	0	$-$
$L(x)$	$L(0)$ $\nearrow$	$L(50)$	$\searrow$ $L(100)$

Vậy để thu được lợi nhuận cao nhất thì A cần bán cho B 50 tấn sản phẩm — 0,25

II — **1**

Doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) được mô hình hoá bằng hàm số $f(t)=\dfrac{24000}{1+6e^{-t}}, t\geq 0$ trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tốc độ bán hàng lớn nhất đạt được khi $t=ln\,a$. Tìm a.

Tốc độ bán hàng là: $f'(t)=\dfrac{-24000.\left(1+6.e^{-t}\right)'}{\left(1+6.e^{-t}\right)^2}=144000.\dfrac{e^{-t}}{\left(1+6.e^{-t}\right)^2}$ — 0,25

Xét hàm số: $g(t)=\dfrac{e^{-t}}{\left(1+6.e^{-t}\right)^2}, t\in[0;+\infty)$

$g'(t)=\dfrac{-e^{-t}.\left(1+6.e^{-t}\right)^2-e^{-t}.2.\left(1+6.e^{-t}\right).\left(-6.e^{-t}\right)}{\left(1+6.e^{-t}\right)^4}=\dfrac{e^{-t}.\left(6e^{-t}-1\right)}{\left(1+6.e^{-t}\right)^3}$ — 0,25

$g'(t)=0\Leftrightarrow e^{-t}=\dfrac{1}{6}\Leftrightarrow t=ln6$

Bảng biến thiên:

t	0	$ln6$	$+\infty$
$g'(t)$	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\dfrac{1}{49}$ $\nearrow$	$\dfrac{1}{24}$	$\searrow$ 0

0,25

Vậy $\max\limits_{[0;+\infty)} g(t)=\dfrac{1}{24}\Rightarrow \max\limits_{[0;+\infty)} f'(t)=144000.\dfrac{1}{24}=6000$. Tốc độ bán hàng lớn nhất là 6000 trong một năm đạt được khi $t=ln6\Rightarrow ln\,a=ln6\Leftrightarrow a=6$. — 0,25

2

Có bao nhiêu số nguyên y để với mỗi y có đúng 2 số thực x thỏa mãn bất phương trình: $\dfrac{2e^x}{\sqrt{16.e^x-y}}+ln\left(16.e^x-y\right)\leq 2x+2$ (*).

Điều kiện: $16.e^x-y>0$

Đặt $t=\sqrt{16.e^x-y}\,(t>0)$. Suy ra $t^2=16.e^x-y\Rightarrow e^x=\dfrac{t^2+y}{16}\Rightarrow x=ln\dfrac{t^2+y}{16}$

Ta có bất phương trình trở thành: $\dfrac{2\left(t^2+y\right)}{16t}+lnt^2\leq 2.ln\dfrac{t^2+y}{16}+2$ — 0,25

		$\Leftrightarrow 2ln\dfrac{t^2+y}{16t}-\dfrac{2\left(t^2+y\right)}{16t}+2\ge 0 \Leftrightarrow ln\dfrac{t^2+y}{16t}-\dfrac{t^2+y}{16t}+1\ge 0$ Đặt $a=\dfrac{t^2+y}{16t}\left(a>0\right)$. Ta có: $ln\,a-a+1\ge 0\ (1)$	
		Xét hàm số $g\left(a\right)=ln\,a-a+1\Rightarrow g'\left(a\right)=\dfrac{1}{a}-1$ $g'\left(a\right)=0\Leftrightarrow a=1$ Bảng biến thiên: (see table 1 below) Từ bảng biến thiên ta có: $g\left(a\right)\le 0,\ \forall a\in\left(0;+\infty\right)\Leftrightarrow ln\,a+1-a\le 0,\ \forall a\in\left(0;+\infty\right)\ (2)$ Từ $(1),(2)$ ta có $a=1\Rightarrow\dfrac{t^2+y}{16t}=1\Rightarrow t^2+y=16t\Rightarrow 16.e^x-y+y=16\sqrt{16.e^x-y}$ $\Rightarrow e^x=\sqrt{16.e^x-y}\Leftrightarrow y=16.e^x-e^{2x}$	0,25
		Xét hàm số $h\left(x\right)=16.e^x-e^{2x}$ $h'\left(x\right)=16.e^x-2.e^{2x}$ $h'\left(x\right)=0\Leftrightarrow e^x=8\Leftrightarrow x=ln8$ Bảng biến thiên: (see table 2 below)	0,25
		Từ bảng biến thiên suy ra để với mỗi số nguyên y có đúng 2 số thực x thỏa mãn bất phương trình thì $y\in\left\{1;2;...;63\right\}$. Vậy có 63 giá trị của y thỏa mãn.	0,25
III	**1**	Trong trận thi đấu bóng bàn đơn nam giữa vận động viên Nguyễn Đức Tuân (người từng đoạt huy chương vàng đơn nam môn bóng bàn tại Seagame 31) với một vận động viên nước ngoài, trận đấu gồm tối đa 5 set (séc), người nào thắng trước 3 set sẽ giành chiến thắng chung cuộc. Xác suất để vận động viên Tuân thắng mỗi set là $0,6$. Tính xác suất để vận động viên Tuân giành chiến thắng trong trận đấu.	
		Gọi A_k là biến cố: "Tuân thắng ở séc thứ k, $k\in\left\{1;2;3;4;5\right\}$". Theo giả thiết ta có $P\left(A_k\right)=0,6\Rightarrow P\left(\overline{A_k}\right)=0,4$. Các biến cố A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 đôi một độc lập.	0,25
		Để Tuân thắng trận đấu xảy ra các trường hợp sau:	0,25

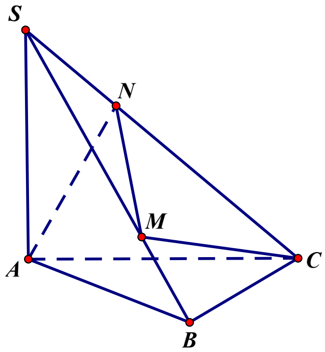
Table 1:

a	0		1		$+\infty$
$g'(a)$	||	+	0	−	
$g(a)$	|| $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

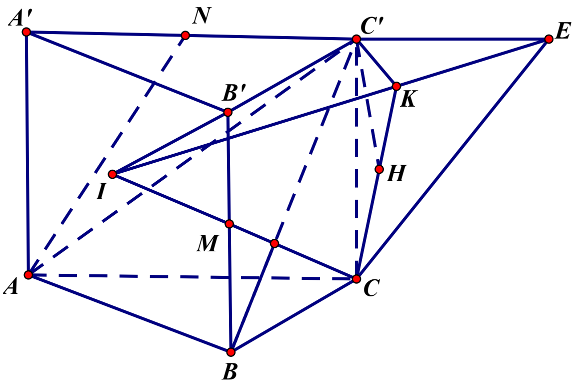
Table 2:

x	$-\infty$		$ln\ 8$		$+\infty$
$h'(x)$		+	0	−	
$h(x)$	0	↗	64	↘	$-\infty$

		Trường hợp 1: Trận đấu có 3 séc, khi đó Tuân thắng cả 3 séc. Xác suất trong trường hợp này là: $P_1 = (0,6)^3$ Trường hợp 2: Trận đấu có 4 séc, khi đó Tuân thua 1 trong 3 séc đầu và thắng séc thứ 4. Số cách chọn 1 séc thua là C_3^1. Nên xác suất trường hợp này là $P_2 = C_3^1.(0,4).(0,6)^3$	
		Trường hợp 3: Trận đấu có 5 séc, khi đó Tuân thua 2 trong 4 séc đầu và thắng séc thứ 5. Số cách chọn 2 séc thua là C_4^2. Nên xác suất trường hợp này là $P_3 = C_4^2.(0,4)^2.(0,6)^3$	0,25
		Các biến cố trong các trường hợp $1,2,3$ đôi một xung khắc. Vậy xác suất để Tuân thắng trận đấu là: $P = P_1 + P_2 + P_3 = (0,6)^3 + C_3^1.(0,4).(0,6)^3 + C_4^2.(0,4)^2.(0,6)^3$ $= (0,6)^3(1 + 1,2 + 6.0,16) = 0,68256$	0,25
		Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{2\sqrt{x}}{y} + 2 \\ y\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right) = \sqrt{3x^2+3} \end{cases}$	
		Điều kiện xác định: $\begin{cases} x > 0 \\ y \neq 0 \end{cases}$. Vì $\sqrt{x^2+1} - 1 > 0, \forall x > 0$ nên từ $(2) \Rightarrow y > 0$ $(1) \Rightarrow y\sqrt{x} + y^2 = 2x\sqrt{x} + 2xy \Leftrightarrow \sqrt{x}(y - 2x) + y(y - 2x) = 0$ $\Leftrightarrow (y - 2x)\left(\sqrt{x} + y\right) = 0 \Leftrightarrow y = 2x \qquad (3)$	0,25
	2	(Vì $x > 0; y > 0$ nên $\sqrt{x} + y > 0$) Thay (3) vào (2) ta có $2x\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right) = \sqrt{3x^2+3} \Leftrightarrow \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2+3}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ (*)	0,25
		Xét các hàm số $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{3x^2+3}}; g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1} - 1}, x \in (0; +\infty)$ Ta có $f'(x) = \dfrac{6}{\left(\sqrt{3x^2+3}\right)^3} > 0,\ g'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{x^2+1}.\left(\sqrt{x^2+1} - 1\right)^2} < 0, \forall x > 0$ Vậy $f(x)$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ và $g(x)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.	0,25
		Mặt khác $f\left(\sqrt{3}\right) = g\left(\sqrt{3}\right) = 1$ nên $x = \sqrt{3}$ là nghiệm phương trình (*) Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = \left(\sqrt{3}; 2\sqrt{3}\right)$	0,25
IV	**1**	Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều có cạnh bằng 1 và $SA \perp (ABC)$. Gọi M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, SC sao cho $SM = 3MB$, $NC = 2NS$. Tính độ dài đoạn SA và côsin của góc giữa hai đường thẳng MN và AC biết rằng AN vuông góc	

		CM .	
		 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SN}=\overrightarrow{AS}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{AS}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}\right)=\frac{1}{3}\left(2\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC}\right)$ $\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{AB}\right)$ $=\frac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)$	0,25
		$AN\perp CM\Rightarrow \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}=0\Leftrightarrow \frac{1}{12}\left(2\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AC}\right).\left(3\overrightarrow{AB}-4\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AS}\right)=0$ $\Leftrightarrow 2AS^2+3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-4AC^2=0\Leftrightarrow 2SA^2+3.AB.AC.cos60^0-4AC^2=0$ $\Leftrightarrow 2SA^2+3.1^2.\frac{1}{2}-4.1^2=0\Leftrightarrow SA^2=\frac{5}{4}\Leftrightarrow SA=\frac{\sqrt{5}}{2}$	0,25
		Gọi α là góc giữa MN và AC. $cos\alpha=\left\|cos\left(\overrightarrow{MN},\overrightarrow{AC}\right)\right\|=\frac{\left\|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$ $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{SN}-\overrightarrow{SM}=\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{SB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AS}\right)-\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AS}\right)$ $=\frac{1}{12}\left(4\overrightarrow{AC}-9\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AS}\right)$ $MN^2=\overrightarrow{MN}^2=\frac{1}{144}\left(16AC^2+81AB^2+25AS^2-72.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)=\frac{369}{576}$ $\Rightarrow MN=\frac{\sqrt{41}}{8}$	0,25
		$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC}=\frac{1}{12}\left(4\overrightarrow{AC}-9\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AS}\right).\overrightarrow{AC}=\frac{1}{12}\left(4AC^2-9AB.AC.cos60^0\right)=-\frac{1}{24}$ $cos\alpha=\frac{\left\|\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{MN}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\frac{\left\|-\frac{1}{24}\right\|}{\frac{\sqrt{41}}{8}.1}=\frac{\sqrt{41}}{123}$	0,25
	2	Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AC=a$. Biết rằng đường thẳng BC' hợp với mặt phẳng $\left(ACC'A'\right)$ một góc 30^0 và đường thẳng BC' hợp với mặt phẳng đáy một góc α sao cho $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{3}$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BB' và $A'C'$.	

<table>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">a) Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>



$\begin{cases} AB \perp AA' \\ AB \perp AC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (ACC'A') \Rightarrow$ Góc giữa BC' và $(ACC'A')$ là góc $\widehat{BC'A} = 30^0$.
Góc giữa BC' và (ABC) là góc $\widehat{C'BC} = \alpha$.</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Đặt $AB = x \Rightarrow \begin{cases} BC' = 2x \\ AC' = x\sqrt{3} \\ CC' = \sqrt{3x^2 - a^2} \end{cases}$
Ta có
$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{CC'}{BC'} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3x^2 - a^2}}{2x} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow 3\sqrt{3x^2 - a^2} = 2\sqrt{6}x$
$\Leftrightarrow 27x^2 - 9a^2 = 24x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3a^2 \Leftrightarrow x = a\sqrt{3}$
$AA' = \sqrt{3.3a^2 - a^2} = 2\sqrt{2}\,a$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$S_{ABC} = \dfrac{1}{2}AB.AC = \dfrac{1}{2}.a\sqrt{3}.a = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = 2\sqrt{2}a.\dfrac{\sqrt{3}a^2}{2} = a^3\sqrt{6}$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td colspan="2">b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và AC'.</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Kẻ $CE // AN\left(E \in A'C'\right), I = CM \cap B'C'$
$AN // (CIE) \Rightarrow d(AN, CM) = d\left(AN, (CIE)\right)$
$= d\left(N, (CIE)\right) = 2.d\left(C', (CIE)\right)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Kẻ $C'K \perp IE, C'H \perp CK \Rightarrow C'H \perp (CIE) \Rightarrow C'H = d\left(C', (CIE)\right)$</td><td>0,25</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>Xét tam giác $C'IE$ có:</td><td>0,25</td></tr>
</table>

		$C'I=4a, C'E=\dfrac{a}{2}, \widehat{IC'E}=120^0 \Rightarrow \begin{cases} S_{IC'E}=\dfrac{1}{2}.4a.\dfrac{a}{2}.\sin 120^0=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2} \\ IE=\sqrt{16a^2+\dfrac{a^2}{4}-2.4a.\dfrac{a}{2}.\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=\dfrac{a\sqrt{73}}{2} \end{cases}$ $\Rightarrow C'K=\dfrac{S_{IC'E}}{IE}=\dfrac{2\sqrt{3}a}{\sqrt{73}}$	
		$\dfrac{1}{C'H^2}=\dfrac{1}{C'K^2}+\dfrac{1}{CC'^2}\Rightarrow C'H=\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{149}}a\Rightarrow d\left(AN,CM\right)=\dfrac{4\sqrt{6}}{\sqrt{149}}a$	0,25
V		Cho các số thực a,b,c thỏa mãn $0\le a\le b\le c\le 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P=\left(a^2-b^2\right)\left(b-c\right)+c^2\left(1-c\right)$	
		Xét hàm số: $f\left(a\right)=\left(a^2-b^2\right)\left(b-c\right)+c^2\left(1-c\right),\ a\in\left[0;b\right]$ $f'\left(a\right)=2.\left(b-c\right).a\le 0,\forall a\in\left[0;b\right],b\in\left[0;c\right]$. Suy ra hàm số $f\left(a\right)$ nghịch biến trên $\left[0;b\right]\Rightarrow f\left(a\right)\le f\left(0\right)=-b^2\left(b-c\right)+c^2\left(1-c\right)$	0,25
		Xét hàm số: $g\left(b\right)=-b^2\left(b-c\right)+c^2\left(1-c\right),b\in\left[0;c\right]$ $g'\left(b\right)=-3b^2+2bc$ $g'\left(b\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=\dfrac{2c}{3} \end{array}\right.$ $g\left(0\right)=c^2\left(1-c\right);g\left(\dfrac{2c}{3}\right)=-\dfrac{23}{27}c^3+c^2;g\left(c\right)=c^2\left(1-c\right).$ Suy ra $g\left(b\right)\le g\left(\dfrac{2c}{3}\right)=-\dfrac{23}{27}c^3+c^2$	0,25
		Xét hàm số: $h\left(c\right)=-\dfrac{23}{27}c^3+c^2,c\in\left[0;1\right]$ $h'\left(c\right)=-\dfrac{23}{9}c^2+2c$ $h'\left(c\right)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=0 \\ c=\dfrac{18}{23} \end{array}\right.$ $h\left(0\right)=0;h\left(\dfrac{18}{23}\right)=\dfrac{108}{529};h\left(1\right)=\dfrac{4}{27}$	0,25
		$\max\limits_{[0;1]} h\left(c\right)=h\left(\dfrac{18}{23}\right)=\dfrac{108}{529}$ Vậy giá trị lớn nhất của $P=\dfrac{108}{529}$ khi $a=0;b=\dfrac{12}{23};c=\dfrac{18}{23}$	0,25