TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI
TỔ TOÁN TIN

ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI
NĂM HỌC 2025-2026
Môn: **TOÁN**
Thời gian: **180 phút**
Ngày thi thứ nhất: **26/8/2025**
(Đề thi gồm 01 trang, có 03 câu)

Câu 1 (7,0 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện:

$$f(x)f(y)=xf\left(f(y-x)\right)+xf(2x)+f\left(x^2\right),\ \forall x,y\in\mathbb{R}.$$

Câu 2 (7,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn không cân $(AB<AC)$ nội tiếp trong đường tròn (O). Kẻ các đường kính AA', BB', CC' của (O) và giả sử AB', AC' lần lượt cắt $A'C, A'B$ tại M, N. Đường thẳng MN cắt đường thẳng BC và các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E, F.

a) Chứng minh rằng AD là tiếp tuyến của (O).

b) Dựng các điểm X, Y trên đoạn thẳng BC sao cho $EX \parallel AC, FY \parallel AB$. Các đường thẳng EX và FY cắt nhau tại T. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tam giác XYT tiếp xúc với đường tròn (O).

Câu 3 (6,0 điểm). Với số nguyên tố p, đặt $f_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+...+x+1$.

a) Chứng minh rằng nếu $p\mid m$ thì mọi ước nguyên tố của $f_p(m)$ đều nguyên tố cùng nhau với $m(m-1)$.

b) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n sao cho $pn+1$ là số nguyên tố.

----------- HẾT-----------

- *Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.*

TRƯỜNG THPT CHUYÊN LÀO CAI **TỔ TOÁN TIN**	**ĐỀ KHẢO SÁT ĐỘI TUYỂN HỌC SINH GIỎI** **NĂM HỌC 2025-2026** Môn: **TOÁN** Thời gian: **180 phút** Ngày thi thứ hai: **27/8/2025** *(Đề thi gồm 01 trang, có 03 câu)*

Câu 4 (6,0 điểm).

a) Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số thực, bậc 2026 thỏa mãn $P(x^2)+xP(-x)=P(x)^2-\frac{x^2}{4}\ \forall x\in\mathbb{R}$.

b) Cho số nguyên tố $p\neq 19$, chứng minh rằng đa thức $P(x)=x^p-p.19^p.x+p^2$ bất khả quy trên $\mathbb{Z}[x]$.

Câu 5 (7,0 điểm). Một tập hợp con $S\subset\{1,2,\ldots,n\}$ được gọi là *tập tốt* nếu với mọi x thuộc S thì ít nhất một trong hai số $x-1$ hoặc $x+1$ cũng thuộc S.

a) Chứng minh rằng một tập con $S\subset\{1,2,\ldots,n\}, n\geq 5$, gồm 5 phần tử là *tập tốt* khi và chỉ khi nó có dạng $S=A\cup B$, với $A\cap B=\varnothing$, trong đó A gồm 3 số nguyên liên tiếp và B gồm hai số nguyên liên tiếp.

b) Chứng minh rằng số tập con S (S là *tập tốt*) gồm 5 phần tử của $\{1,2,\ldots,n\}, n\geq 5$ là một số chính phương.

Câu 6 (7,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn, không cân nội tiếp đường tròn (O) có trọng tâm G, trực tâm H và các đường cao AD,BE,CF. Các tia GD,GE,GF cắt đường tròn (O) tại X,Y,Z. Gọi X',Y',Z' lần lượt là đối xứng của X,Y,Z qua trung điểm các cạnh BC,CA,AB của tam giác ABC.

a) Chứng minh rằng HX',HY',HZ' lần lượt cắt BC,CA,AB tại ba điểm nằm trên một đường thẳng vuông góc với OH.

b) Chứng minh rằng AX',BY',CZ' đồng quy.

----------- HẾT-----------

- *Thí sinh KHÔNG được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay.*
- *Giám thị KHÔNG giải thích gì thêm.*