

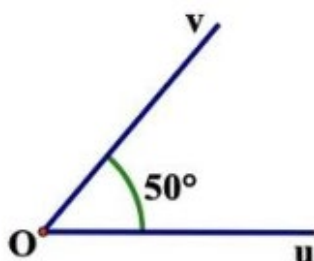


# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC ĐỀ TEST SỐ 01

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Cho góc hình học  $uOv$  có số đo  $50^\circ$  (hình vẽ). Xác định số đo của các góc lượng giác  $(Ou; Ov)$



- A.  $sđ(Ou; Ov) = 50^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $sđ(Ou; Ov) = 50^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .  
 C.  $sđ(Ou; Ov) = -50^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $sđ(Ou; Ov) = -50^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 2:** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 6 giây. Hỏi trong 1 giây, bánh xe quay được bao nhiêu độ:

- A.  $60^\circ$ .      B.  $72^\circ$ .      C.  $240^\circ$ .      D.  $120^\circ$ .

**Câu 3:** Cho góc lượng giác  $(Ou; Ov)$  có số đo là  $\frac{\pi}{4}$ . Số đo của góc lượng giác nào sau đây có cùng tia đầu là  $Ou$  và tia cuối là  $Ov$ ?

- A.  $\frac{3\pi}{4}$ .      B.  $\frac{17\pi}{4}$ .      C.  $\frac{7\pi}{4}$ .      D.  $\frac{5\pi}{4}$ .

**Câu 4:** Đổi số đo góc  $105^\circ$  sang radian, ta được

- A.  $\frac{5\pi}{12} rad$ .      B.  $\frac{7\pi}{12} rad$ .      C.  $\frac{9\pi}{12} rad$ .      D.  $\frac{5\pi}{8} rad$ .

**Câu 5:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  và  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính  $\sin \alpha$ .

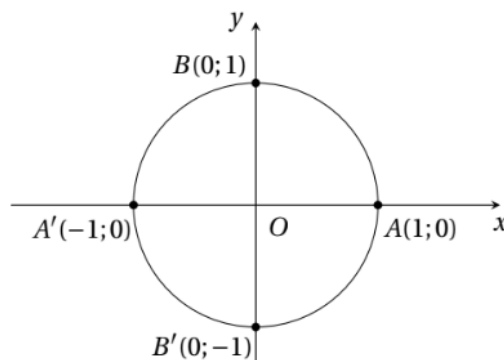
- A.  $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ .      B.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .      C.  $\frac{-\sqrt{2}}{3}$ .      D.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 6:** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 13 vòng trong 4 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong 2 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là  $580mm$ , lấy  $\pi \approx 3,14$ .

- A.  $710,6283 (km)$ .      B.  $1421,2565 (m)$ .      C.  $710,6283 (m)$ .      D.  $1421,2565(km)$ .

**Câu 7:** Trên đường tròn lượng giác, số đo của các góc lượng giác có tia đầu  $OA$ , tia cuối  $OB$  là

- A.  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      B.  $\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .  
 C.  $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .      D.  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$



**Câu 8:** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $\cos \alpha$ .

- A.  $\frac{3}{5}$ .      B.  $\frac{1}{5}$ .      C.  $-\frac{1}{5}$ .      D.  $-\frac{3}{5}$ .

**Câu 9:** Cho một góc lượng giác  $(Ox, Ou)$  có số đo là  $-120^\circ$  và một góc lượng giác  $(Ox, Ov)$  có số đo  $230^\circ$ . Số đo của các góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  là:

- A.  $sđ(Ou, Ov) = 350^\circ + k.360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .      B.  $sđ(Ou, Ov) = 110^\circ + k.360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .  
 C.  $sđ(Ou, Ov) = -350^\circ + k.360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .      D.  $sđ(Ou, Ov) = -110^\circ + k.360^\circ (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 10:** Trên đường tròn bán kính  $r = 15$ , độ dài của cung có số đo  $\alpha = 50^\circ$  là

- A.  $l = 750$ .      B.  $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi}$ .      C.  $l = \frac{15\pi}{180}$ .      D.  $l = \frac{25\pi}{6}$ .

**Câu 11:** Cho  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$  và  $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ . Tính  $\cot \alpha$ .

- A.  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      B.  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      C.  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .      D.  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

**Câu 12:** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{7}$  và  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Khi đó  $\sin \alpha$  bằng

- A.  $\frac{4}{7}$ .      B.  $-\frac{4}{7}$ .      C.  $-\frac{2\sqrt{10}}{7}$ .      D.  $\frac{2\sqrt{10}}{7}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho hình vẽ sau:

a) Số đo góc lượng giác  $(OM, OA)$  là

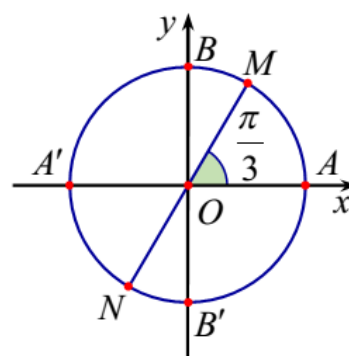
$$sđ(OM, OA) = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

b)  $sđ(ON, OA) = sđ(ON, OM) - sđ(OA, OM)$ .

c) Độ dài cung tròn  $AM$  lớn là:  $l_{AM} = \frac{2\pi}{3}$ .

d) Hai điểm  $M, N$  biểu diễn các cung có số đo là:

$$x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$



**Câu 2:** Cho góc lượng giác  $\alpha$  có số đo theo đơn vị radian là  $\frac{3\pi}{4}$ .

- Góc lượng giác  $\alpha$  có số đo theo đơn vị độ là  $155^\circ$ .
- Điểm biểu diễn góc lượng giác  $\alpha$  là điểm  $M$  trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I.
- Góc lượng giác  $-\frac{5\pi}{4}$  có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc  $\alpha$ .
- Góc lượng giác  $855^\circ$  có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc  $\alpha$ .

**Câu 3:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  và  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ .

- $\sin \alpha > 0$ .
- $\tan \alpha < 0$ .
- $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ .
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(-\alpha) = \frac{7}{5}$ .

**Câu 4:** Cho góc  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) thỏa mãn  $\tan \alpha = 3$ .

- $\cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .
- $\cos \alpha > 0$ .
- $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .
- $P = \frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{3\sin \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{-3}{11}$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

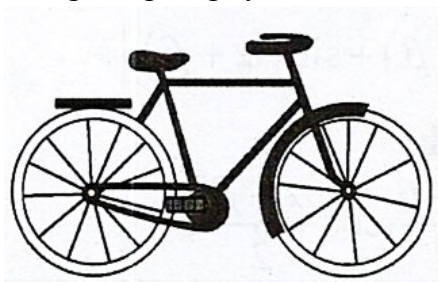
**Câu 1:** Cho  $\cos x = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Câu 2:** Cho  $\tan \alpha = 2$ , Giá trị biểu thức  $P = \frac{4\sin \alpha + 5\cos \alpha}{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}$  là

**Câu 3:** Cho biết  $\cot x = \frac{1}{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{2}{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}$ .

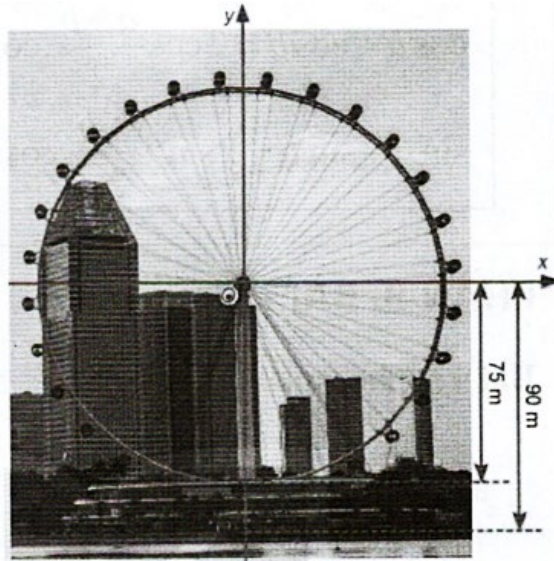
**Câu 4:** Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu rad (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

**Câu 5:** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây.



Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng 340 mm. (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

**Câu 6:** Một chiếc đu quay có bán kính  $75\text{ m}$ , tâm của vòng quay ở độ cao  $90\text{ m}$  so với mặt đất, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

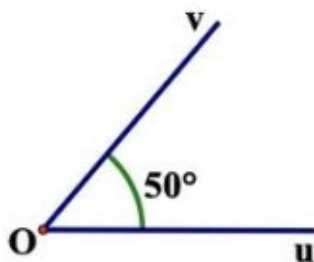


----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Cho góc hình học  $uOv$  có số đo  $50^\circ$  (hình vẽ). Xác định số đo của các góc lượng giác  $(Ou; Ov)$



- A.**  $sđ (Ou; Ov) = 50^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .      **B.**  $sđ (Ou; Ov) = 50^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .  
**C.**  $sđ (Ou; Ov) = -50^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .      **D.**  $sđ (Ou; Ov) = -50^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

**Câu 2:** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 6 giây. Hỏi trong 1 giây, bánh xe quay được bao nhiêu độ:

- A.**  $60^\circ$ .      **B.**  $72^\circ$ .      **C.**  $240^\circ$ .      **D.**  $120^\circ$ .

**Lời giải**

Trong 6s bánh xe quay được:  $2 \cdot 360^\circ = 720^\circ$   
 $\Rightarrow$  Trong 1s bánh xe quay được:  $720^\circ : 6 = 120^\circ$

**Câu 3:** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo là  $\frac{\pi}{4}$ . Số đo của góc lượng giác nào sau đây có cùng tia đầu là  $Ou$  và tia cuối là  $Ov$ ?

- A.**  $\frac{3\pi}{4}$ .      **B.**  $\frac{17\pi}{4}$ .      **C.**  $\frac{7\pi}{4}$ .      **D.**  $\frac{5\pi}{4}$ .

**Lời giải**

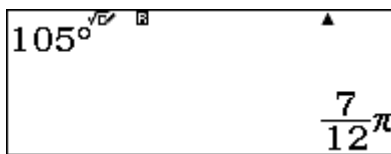
Ta có  $\frac{17\pi}{4} = 4\pi + \frac{\pi}{4}$  nên suy ra góc lượng giác có số đo  $\frac{17\pi}{4}$  có cùng tia đầu là  $Ou$  và tia cuối là  $Ov$  với góc  $\frac{\pi}{4}$ .

**Câu 4:** Đổi số đo góc  $105^\circ$  sang radian, ta được

- A.**  $\frac{5\pi}{12} rad$ .      **B.**  $\frac{7\pi}{12} rad$ .      **C.**  $\frac{9\pi}{12} rad$ .      **D.**  $\frac{5\pi}{8} rad$ .

**Lời giải**

**Cách 1:** Ta có:  $105^\circ = \left(\frac{105\pi}{180}\right) rad = \frac{7\pi}{12} rad$ .



**Cách 2:** Sử dụng MTCT

**Câu 5:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  và  $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ . Tính  $\sin \alpha$ .

A.  $\frac{-2\sqrt{2}}{3}$ .

B.  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

C.  $\frac{-\sqrt{2}}{3}$ .

D.  $\frac{\sqrt{2}}{3}$ .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \sin \alpha = \frac{-2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Do  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  nên chọn  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

**Câu 6:** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 13 vòng trong 4 giây. Tính độ dài quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong 2 phút, biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 580mm, lấy  $\pi \approx 3,14$ .

A. 710,6283 (km).

B. 1421,2565 (m).

C. 710,6283 (m).

D. 1421,2565 (km).

Lời giải

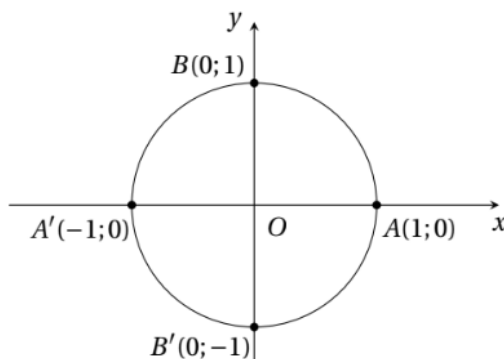
Đôi 2 phút = 120 giây

Mỗi giây xe đi được số vòng là  $\frac{13}{4}$

Trong 2 phút bánh xe quay được  $120 \cdot \frac{13}{4} = 390$  vòng

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong hai phút là  $390 \cdot 580 \cdot \pi = 710628,2582 \text{ (mm)} = 710,628 \text{ m}$

**Câu 7:** Trên đường tròn lượng giác, số đo của các góc lượng giác có tia đầu OA, tia cuối OB là



A.  $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

B.  $\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

C.  $-\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

D.  $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

Ta có  $(OA, OB) = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 8:** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $\cos \alpha$ .

A.  $\frac{3}{5}$ .

B.  $\frac{1}{5}$ .

C.  $-\frac{1}{5}$ .

D.  $-\frac{3}{5}$ .

Lời giải

Ta có  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ . Mặt khác vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên

$$\cos \alpha < 0. \text{ Vậy } \cos \alpha = -\frac{3}{5}.$$

**Câu 9:** Cho một góc lượng giác  $(Ox, Ou)$  có số đo là  $-120^\circ$  và một góc lượng giác  $(Ox, Ov)$  có số đo  $230^\circ$ . Số đo của các góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  là:

- A.**  $sđ(Ou, Ov) = 350^\circ + k.360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).      **B.**  $sđ(Ou, Ov) = 110^\circ + k.360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).  
**C.**  $sđ(Ou, Ov) = -350^\circ + k.360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).      **D.**  $sđ(Ou, Ov) = -110^\circ + k.360^\circ$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Lời giải**

Với ba tia  $Ou, Ov, Ox$  bất kì, ta có:

$$\begin{aligned} sđ(Ou, Ov) &= sđ(Ox, Ov) - sđ(Ox, Ou) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z}). \\ &= 230^\circ - (-120^\circ) + k.360^\circ = 350^\circ + k.360^\circ, \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

**Câu 10:** Trên đường tròn bán kính  $r = 15$ , độ dài của cung có số đo  $\alpha = 50^\circ$  là

- A.**  $l = 750$ .      **B.**  $l = 15 \cdot \frac{180}{\pi}$ .      **C.**  $l = \frac{15\pi}{180}$ .      **D.**  $l = \frac{25\pi}{6}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } 50^\circ = \frac{5\pi}{18} \Rightarrow l = r\alpha = \frac{25\pi}{6}.$$

**Câu 11:** Cho  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$  và  $\alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ . Tính  $\cot \alpha$ .

- A.**  $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      **B.**  $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ .      **C.**  $\frac{\sqrt{5}}{3}$ .      **D.**  $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ .

**Lời giải**

$$\text{Vì } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{cases}$$

$$\text{Do } \alpha \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right) \text{ nên } \sin \alpha < 0 \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Khi đó } \cot \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

**Câu 12:** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{7}$  và  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ . Khi đó  $\sin \alpha$  bằng

- A.**  $\frac{4}{7}$ .      **B.**  $-\frac{4}{7}$ .      **C.**  $-\frac{2\sqrt{10}}{7}$ .      **D.**  $\frac{2\sqrt{10}}{7}$ .

**Lời giải**

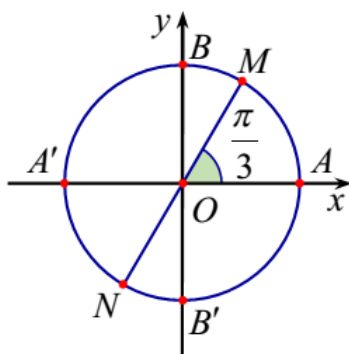
Áp dụng công thức:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{40}{49} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{2\sqrt{10}}{7} \\ \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7} \end{cases}$$

Do  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$  nên  $\sin \alpha < 0$ . Vậy  $\sin \alpha = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho hình vẽ sau:



a) Số đo góc lượng giác  $(OM, OA)$  là  $sđ(OM, OA) = \frac{\pi}{3} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

b)  $sđ(ON, OA) = sđ(ON, OM) - sđ(OA, OM)$ .

c) Độ dài cung tròn AM lớn là:  $l_{AM} = \frac{2\pi}{3}$ .

d) Hai điểm  $M, N$  biểu diễn các cung có số đo là:  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Số đo góc lượng giác  $(OM, OA)$  là  $sđ(OM, OA) = -\frac{\pi}{3} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) nên mệnh đề sai.

b) Theo hệ thức Chales:  $sđ(ON, OA) + sđ(OA, OM) = sđ(ON, OM)$   
 $\Rightarrow sđ(ON, OA) = sđ(ON, OM) - sđ(OA, OM)$  nên mệnh đề đúng.

c) Độ dài cung tròn AM lớn là:  $l_{AM} = \frac{5\pi}{3}$  nên mệnh đề sai.

d) Hai điểm  $M, N$  biểu diễn các cung có số đo là:  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) nên mệnh đề đúng

**Câu 2:** Cho góc lượng giác  $\alpha$  có số đo theo đơn vị radian là  $\frac{3\pi}{4}$ .

a) Góc lượng giác  $\alpha$  có số đo theo đơn vị độ là  $155^\circ$ .

b) Điểm biểu diễn góc lượng giác  $\alpha$  là điểm  $M$  trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ I.

c) Góc lượng giác  $-\frac{5\pi}{4}$  có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc  $\alpha$ .

d) Góc lượng giác  $855^\circ$  có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc  $\alpha$ .

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a)  $\frac{3\pi}{4} \text{ rad} = \left(\frac{3 \cdot 180}{4}\right)^\circ = 135^\circ$  nên mệnh đề sai.

b) Điểm biểu diễn góc lượng giác  $\alpha$  là điểm  $M$  trên đường tròn lượng giác thuộc góc phần tư thứ II sao cho góc  $\widehat{AOM} = 135^\circ$  nên mệnh đề sai.

c) Ta có  $\frac{-5\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - 2\pi$  do đó  $-\frac{5\pi}{4}$  cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc  $\alpha$  nên mệnh đề đúng.

d) Ta có  $855^\circ = 135^\circ + 2 \cdot 360^\circ$  do đó  $855^\circ$  có cùng điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác với góc  $\alpha$  nên mệnh đề đúng.

**Câu 3:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$  và  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ .

a)  $\sin \alpha > 0$ .

b)  $\tan \alpha < 0$ .

c)  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ .

d)  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(-\alpha) = \frac{7}{5}$ .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Vì  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  nên  $\sin \alpha < 0$ . Do đó  $\sin \alpha > 0$  nên là sai.

b) Vì  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  nên  $\tan \alpha < 0$ . Do đó  $\tan \alpha < 0$  là đúng.

c) Vì  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$  nên  $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$ . Do đó  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$  là đúng.

d) Vì  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(-\alpha) = \cos \alpha + \sin \alpha = -\frac{1}{5}$ . Do đó  $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(-\alpha) = \frac{7}{5}$  là sai.

**Câu 4:** Cho góc  $\alpha$  ( $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ ) thỏa mãn  $\tan \alpha = 3$ .

a)  $\cot \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$ .

b)  $\cos \alpha > 0$ .

c)  $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

d)  $P = \frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{3\sin \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{-3}{11}$ .

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a)  $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{3}$  nên mệnh đề sai.

b)  $0^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0$ , mà  $\tan \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha > 0$  nên mệnh đề đúng.

c) Ta có:  $0^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0$ .

$$1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{9} = \frac{10}{9} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{3\sqrt{10}}{10}$$

Mệnh đề đúng.

d) Vì  $\tan \alpha = 3$  nên  $\cos \alpha \neq 0$ , chia cả tử và mẫu cho  $\cos \alpha$  ta được:

$$P = \frac{\frac{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{3\sin \alpha + 2\cos \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{2\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - 3}{3\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 2} = \frac{2\tan \alpha - 3}{3\tan \alpha + 2} = \frac{2.3 - 3}{3.3 + 2} = \frac{3}{11}. \text{ Mệnh đề sai.}$$

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Cho  $\cos x = \frac{1}{3}$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Lời giải**

**Trả lời: 3,1**

$$\text{Khi đó: } P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3(1 - \cos^2 x) + 4\cos^2 x = 3\left(1 - \frac{1}{9}\right) + 4 \cdot \frac{1}{9} = \frac{28}{9} \approx 3,1.$$

**Câu 2:** Cho  $\tan \alpha = 2$ , Giá trị biểu thức  $P = \frac{4\sin \alpha + 5\cos \alpha}{2\sin \alpha - 3\cos \alpha}$  là

**Lời giải**

**Trả lời: 13**

$$P = \frac{4\tan \alpha + 5}{2\tan \alpha - 3} = \frac{4.2 + 5}{2.2 - 3} = 13$$

**Câu 3:** Cho biết  $\cot x = \frac{1}{2}$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = \frac{2}{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x}$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 10**

$$\text{Ta có } A = \frac{2}{\sin^2 x - \sin x \cdot \cos x - \cos^2 x} = \frac{\frac{2}{\sin^2 x}}{1 - \cot x - \cot^2 x} = \frac{2(1 + \cot^2 x)}{1 - \cot x - \cot^2 x} = \frac{2\left(1 + \frac{1}{4}\right)}{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}} = 10.$$

**Câu 4:** Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu rad (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

**Lời giải**

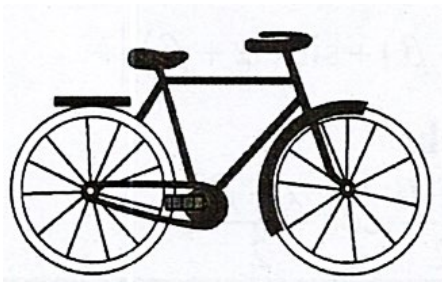
**Trả lời: 5,1**

Trong 2 giây bánh xe đạp quay được  $\frac{2.2}{5} = \frac{4}{5}$  vòng tức là quay được cung có độ dài là

$$l = \frac{4}{5} \cdot 2\pi R = \frac{8}{5}\pi R.$$

$$\text{Ta có } l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{8}{5}\pi R}{R} = \frac{8}{5}\pi \approx 5,1.$$

**Câu 5:** Một bánh xe đạp quay được 25 vòng trong 10 giây.



Tính độ dài quãng đường mà người đi xe thực hiện được trong 2,35 phút, biết rằng bán kính bánh xe bằng  $340\text{ mm}$ . (Tính theo đơn vị mét, kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị).

**Lời giải**

**Trả lời: 753**

Sau 2,35 phút (= 141 giây), số vòng mà bánh xe thực hiện được là:

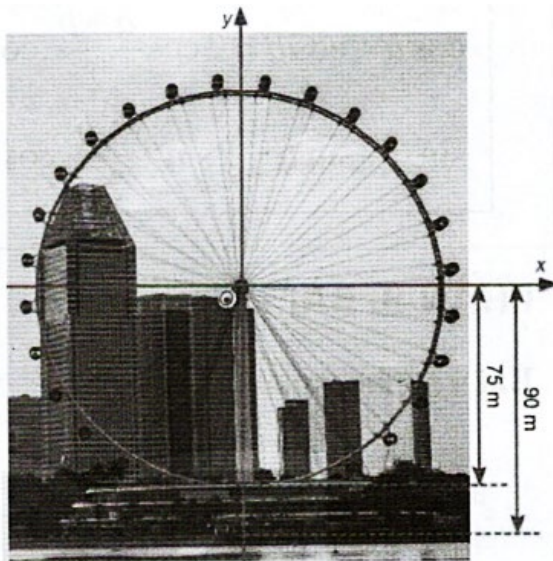
$$\frac{141 \cdot 25}{10} = 352,5 \text{ vòng.}$$

Bán kính bánh xe:  $R = 340\text{ mm} = 0,34\text{ m}$ .

Quãng đường mà người đi xe đạp thực hiện được sau 2,35 phút là:

$$352,5 \cdot 2\pi R = 352,5 \cdot 2\pi \cdot 0,34 = \frac{2397}{10} \pi \approx 753(m).$$

**Câu 6:** Một chiếc đu quay có bán kính  $75\text{ m}$ , tâm của vòng quay ở độ cao  $90\text{ m}$  so với mặt đất, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét so với mặt đất?

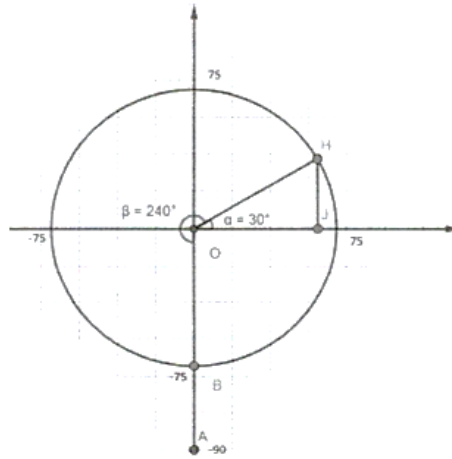


**Lời giải**

**Trả lời: 127,5**

Do tính đối xứng, dù đu quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ, ta đều thấy rằng độ cao của người đó là như nhau sau cùng một khoảng thời gian. Ở đây ta xét đu quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ.

Gắn đu quay có bán kính  $75\text{ m}$ , tâm của vòng quay ở độ cao  $90\text{ m}$  vào hệ trục tọa độ  $Oxy$  ta được hình bên:



Sau 20 phút quay cabin đi được một góc là  $\frac{20}{30} \cdot 360^\circ = 240^\circ$  tức là đến vị trí điểm  $H$ .

Khi đó góc  $\widehat{HOJ} = 30^\circ$  và  $HJ = OH \cdot \sin 30^\circ = 37,5(m)$ .

Vậy sau 20 phút quay, người đó ở độ cao  $37,5 + 90 = 127,5(m)$ .

----- **HẾT** -----



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

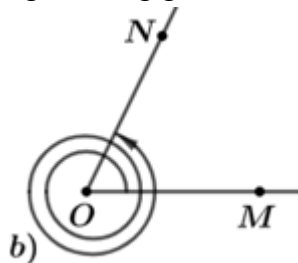
### ĐỀ TEST SỐ 02

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Đổi số đo của góc  $\frac{\pi}{12}$  rad sang đơn vị độ ta được góc có số đo bằng bao nhiêu?

- A.  $15^\circ$ .                      B.  $10^\circ$ .                      C.  $6^\circ$ .                      D.  $5^\circ$ .

**Câu 2:** Cho  $\widehat{MON} = 60^\circ$ . Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình vẽ.



- A.  $420^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $780^\circ$ .                      D.  $-780^\circ$ .

**Câu 3:** Nếu góc lượng giác có  $sđ(Ox, Oz) = -\frac{63\pi}{2}$  thì hai tia  $Ox$  và  $Oz$ .

- A. Trùng nhau.                      B. Vuông góc.  
C. Tạo với nhau một góc bằng  $\frac{3\pi}{4}$ .                      D. Đối nhau.

**Câu 4:** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $30^\circ$ .                      C.  $40^\circ$ .                      D.  $50^\circ$ .

**Câu 5:** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo là  $-\frac{3\pi}{4}$ , góc lượng giác  $(Ou, Ow)$  có số đo là  $\frac{11\pi}{4}$ . Tìm số đo của góc lượng giác  $(Ov, Ow)$ .

- A.  $k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      B.  $2\pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      C.  $\frac{3\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      D.  $-\frac{3\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

**Câu 6:** Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc  $A(1;0)$ , cho điểm  $M$  biểu diễn cho góc lượng giác  $\frac{\pi}{6}$ . Gọi  $N$  là điểm đối xứng với điểm  $M$  qua trục  $Oy$ , điểm  $N$  biểu diễn cho góc lượng giác nào dưới đây?

- A.  $-\frac{\pi}{6}$ .                      B.  $\frac{2\pi}{3}$ .                      C.  $-\frac{7\pi}{6}$ .                      D.  $\frac{7\pi}{6}$ .

**Câu 7:** Cho góc  $\alpha$  thỏa  $\cot\alpha = \frac{3}{4}$  và  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A.  $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ .      B.  $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ .      C.  $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ .      D.  $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ .

**Câu 8:** Đơn giản biểu thức  $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ , ta được:

- A.  $\cos\alpha$ .      B.  $\sin\alpha$ .      C.  $-\cos\alpha$ .      D.  $-\sin\alpha$ .

**Câu 9:** Cho  $\cos(\alpha + 2024\pi) = \frac{-3}{5}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó giá trị của  $\tan\alpha$  là

- A.  $\frac{3}{4}$ .      B.  $-\frac{3}{4}$ .      C.  $\frac{4}{3}$ .      D.  $-\frac{4}{3}$ .

**Câu 10:** Trên đường tròn lượng giác, biết điểm  $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$  là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$ . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.  $\cot\alpha = -\frac{3}{4}$ .      B.  $\tan\alpha = -\frac{3}{4}$ .      C.  $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ .      D.  $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ .

**Câu 11:** Cho góc  $\alpha$  thỏa  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ . Tính giá trị lượng giác của  $\tan\alpha$ .

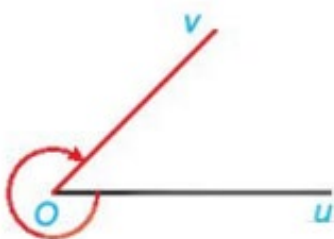
- A.  $-\frac{4}{3}$ .      B.  $\frac{4}{5}$ .      C.  $\frac{4}{3}$ .      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Câu 12:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin\alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $P = \frac{\tan\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

- A.  $P = -\frac{12}{25}$ .      B.  $P = \frac{3}{7}$ .      C.  $P = \frac{12}{25}$ .      D.  $P = -3$ .

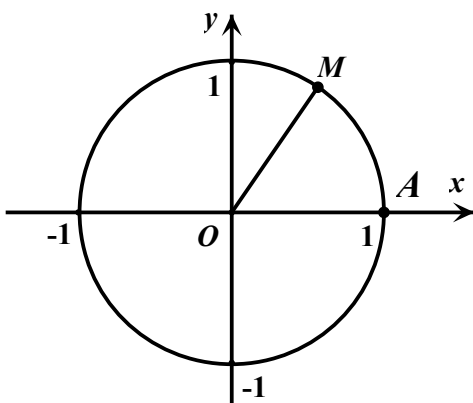
**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  như hình vẽ sau, biết góc hình học  $\widehat{uOv} = 45^\circ$ .



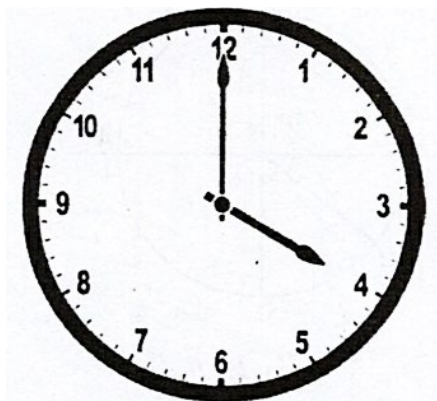
- a) Trong hình vẽ, tia  $Om$  quay quanh gốc  $O$  từ tia  $Ou$  đến tia  $Ov$  theo chiều dương.  
 b) Trong hình vẽ, số đo của góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  bằng  $-315^\circ$ .  
 c) Tia  $Om$  quay quanh gốc  $O$  từ  $Ou$  đến tia  $Ov$  lần đầu tiên theo chiều dương quét một góc lượng giác có số đo  $45^\circ$ .  
 d) Tia  $Om$  quay quanh gốc  $O$  từ tia  $Ou$  đến tia  $Ov$  theo chiều dương chạm tia  $Ov$  năm lần quét một góc lượng giác có số đo là  $1485^\circ$ .

**Câu 2:** Trên đường tròn lượng giác tâm  $O$  và hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M$  sao cho  $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$  như hình vẽ bên dưới:



- a) Số đo của các góc lượng giác có tia đầu là  $OA$  tia cuối là  $OM$  bằng  $\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .
- b) Góc lượng giác có số đo  $\frac{16\pi}{3}$  có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác  $(OA, OM)$
- c) Trên đường tròn lượng giác, số điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  là 6 điểm.
- d) Khi biểu diễn góc  $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  lên đường tròn lượng giác ta được tập hợp điểm là một đa giác đều thì diện tích của đa giác đều đó bằng  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 3:** Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Chiều dài kim giờ, kim phút lần lượt bằng  $8\text{cm}$  và  $10\text{cm}$ .



- a) Đồng hồ chỉ 6 giờ kim giờ quay được góc bằng  $\frac{\pi}{3}$ .
- b) Đồng hồ chỉ 6 giờ kim giờ quét được một cung có độ dài bằng  $\frac{8\pi}{3}$  (cm).
- c) Đồng hồ chỉ 6 giờ 15 phút kim phút quay được góc bằng  $\frac{9\pi}{2}$
- d) Đồng hồ chỉ 6 giờ 15 phút kim phút quét được một cung có độ dài bằng  $90\pi$  (cm).

**Câu 4:** Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha = -\frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi$  (biết  $k \in \mathbb{Z}$ ).

a)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c)  $\tan \alpha = -1$

d)  $\cot \alpha = -1$

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Cho  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Tìm được bao nhiêu giá trị của  $k$  để  $10\pi < \alpha < 11\pi$ .

**Câu 2:** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 5 giây. Giả sử tại thời điểm bắt đầu quay van xe nằm ở vị trí  $V$  vuông góc với mặt đất. Hỏi trong một giây tia  $OV$  ( $O$  là trục bánh xe) quét một góc lượng giác bao nhiêu độ?

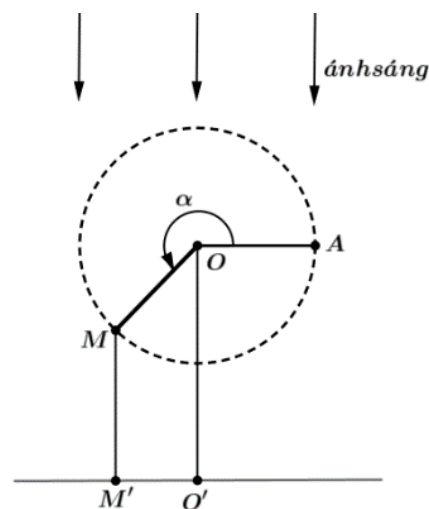


**Câu 3:** Một người đi xe đạp đã đi được quãng đường  $614,8m$  trong thời gian 3 phút. Biết rằng đường kính bánh xe là  $700mm$ . Tính góc lượng giác ( đơn vị Radian) mà bánh xe quay được trong 5 giây (giả sử bánh xe quay theo chiều dương, kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy)?

**Câu 4:** Một đồng hồ có kim giờ dài  $5,5(cm)$ ; kim phút dài  $11(cm)$  và chỉ thời gian lúc 12 giờ. Hỏi hai kim trùng với nhau lần thứ 3 thì tổng độ dài cung của hai kim đã quay là bao nhiêu radian? (làm tròn đến hàng đơn vị)

**Câu 5:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$  và  $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$ . Tính  $\sin \alpha$ .

**Câu 6:** Thanh  $OM$  quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc  $O$  của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là  $OA$ . Hỏi độ dài bóng  $O'M$  của  $OM$  khi thanh quay được  $\frac{60}{13}$  vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh  $OM$  là  $10\text{ cm}$ ? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

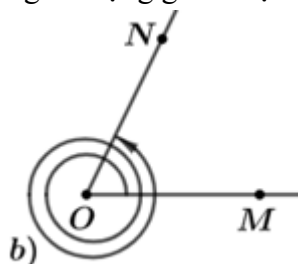
**Câu 1:** Đổi số đo của góc  $\frac{\pi}{12}$  rad sang đơn vị độ ta được góc có số đo bằng bao nhiêu?

- A.**  $15^\circ$ .                      **B.**  $10^\circ$ .                      **C.**  $6^\circ$ .                      **D.**  $5^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\frac{\pi}{12} = \frac{180^\circ}{12} = 15^\circ$ .

**Câu 2:** Cho  $\widehat{MON} = 60^\circ$ . Xác định số đo của góc lượng giác được biểu diễn trong hình vẽ.



- A.**  $420^\circ$ .                      **B.**  $60^\circ$ .                      **C.**  $780^\circ$ .                      **D.**  $-780^\circ$ .

**Lời giải**

Số đo của góc lượng giác được biểu diễn trên hình đã cho là:  $60^\circ + 2.360^\circ = 780^\circ$ .

**Câu 3:** Nếu góc lượng giác có  $sđ(Ox, Oz) = -\frac{63\pi}{2}$  thì hai tia  $Ox$  và  $Oz$ .

- A.** Trùng nhau.                      **B.** Vuông góc.  
**C.** Tạo với nhau một góc bằng  $\frac{3\pi}{4}$ .                      **D.** Đối nhau.

**Lời giải**

Ta có:  $sđ(Ox, Oz) = -\frac{63\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - 32\pi$

Vì hai góc lượng giác có số đo  $-\frac{63\pi}{2}$  và  $\frac{\pi}{2}$  có cùng tia đầu và tia cuối nên hai tia  $Ox$  và  $Oz$  vuông góc với nhau.

**Câu 4:** Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là

- A.**  $60^\circ$ .                      **B.**  $30^\circ$ .                      **C.**  $40^\circ$ .                      **D.**  $50^\circ$ .

**Lời giải**

1 bánh răng tương ứng với  $\frac{360^\circ}{72} = 5^\circ \Rightarrow 10$  bánh răng là  $50^\circ$ .

**Câu 5:** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo là  $-\frac{3\pi}{4}$ , góc lượng giác  $(Ou, Ow)$  có số đo là  $\frac{11\pi}{4}$ . Tìm số đo của góc lượng giác  $(Ov, Ow)$ .

- A.**  $k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      **B.**  $2\pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      **C.**  $\frac{3\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      **D.**  $-\frac{3\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

**Lời giải**

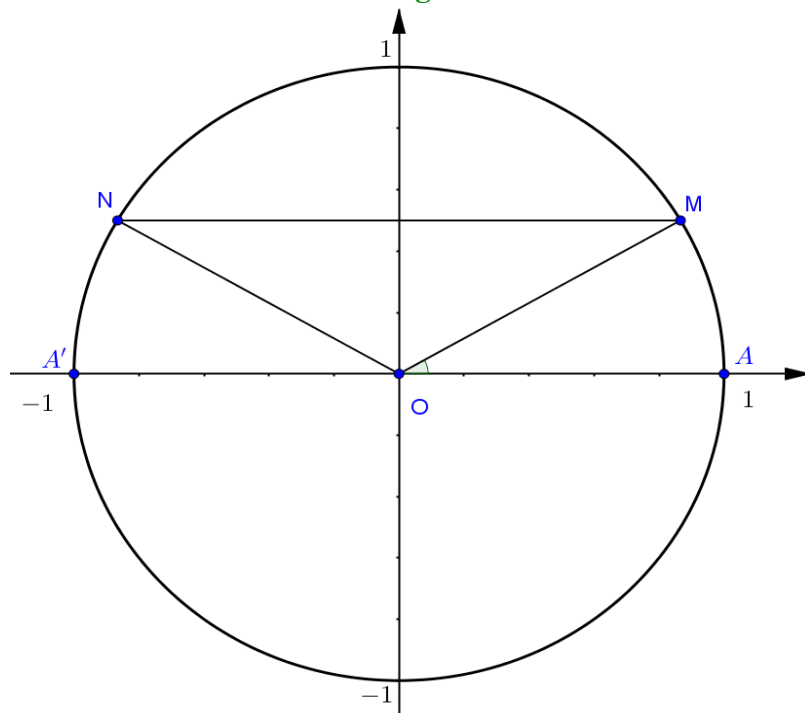
Theo hệ thức Chasles, ta có:

$$(Ov, Ow) = (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi = \frac{11\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + k2\pi = \frac{3\pi}{2} + 2\pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

**Câu 6:** Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc  $A(1;0)$ , cho điểm  $M$  biểu diễn cho góc lượng giác  $\frac{\pi}{6}$ . Gọi  $N$  là điểm đối xứng với điểm  $M$  qua trục  $Oy$ , điểm  $N$  biểu diễn cho góc lượng giác nào dưới đây?

- A.  $-\frac{\pi}{6}$ .                      B.  $\frac{2\pi}{3}$ .                      C.  $-\frac{7\pi}{6}$ .                      D.  $\frac{7\pi}{6}$ .

Lời giải



Ta có  $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{6}$  và do tính đối xứng nên  $\widehat{A'ON} = \frac{\pi}{6}$ . Suy ra  $\widehat{AON} = \frac{5\pi}{6}$ .

Do góc  $\frac{5\pi}{6}$  và  $-\frac{7\pi}{6}$  hơn kém nhau  $2\pi$  nên có cùng điểm biểu diễn

Vậy điểm  $N$  biểu diễn cho góc lượng giác  $-\frac{7\pi}{6}$ .

**Câu 7:** Cho góc  $\alpha$  thỏa  $\cot \alpha = \frac{3}{4}$  và  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $\cos \alpha = \frac{4}{5}$ .                      B.  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ .                      C.  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ .                      D.  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$ .

Lời giải

Áp dụng công thức:  $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$

Do  $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$ .

**Câu 8:** Đơn giản biểu thức  $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ , ta được:

- A.  $\cos \alpha$ .                      B.  $\sin \alpha$ .                      C.  $-\cos \alpha$ .                      D.  $-\sin \alpha$ .

Lời giải

Ta có:  $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$ .

**Câu 9:** Cho  $\cos(\alpha + 2024\pi) = \frac{-3}{5}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó giá trị của  $\tan \alpha$  là

- A.  $\frac{3}{4}$ .                      B.  $-\frac{3}{4}$ .                      **C.  $\frac{4}{3}$ .**                      D.  $-\frac{4}{3}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cos(\alpha + 2024\pi) = \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ .

Vì  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  nên  $\sin \alpha < 0$ . Do đó  $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$ .

Vậy  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{4}{3}$

**Câu 10:** Trên đường tròn lượng giác, biết điểm  $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$  là điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\alpha$

. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.  $\cot \alpha = -\frac{3}{4}$ .                      **B.  $\tan \alpha = -\frac{3}{4}$ .**                      C.  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ .                      D.  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ .

**Lời giải**

Điểm  $M\left(\frac{3}{5}; -\frac{4}{5}\right)$  nên ta có:  $\cos \alpha = \frac{3}{5}$ ;  $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$ , suy ra  $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$  và  $\cot \alpha = -\frac{3}{4}$ .

**Câu 11:** Cho góc  $\alpha$  thỏa  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ,  $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . Tính giá trị lượng giác của  $\tan \alpha$ .

- A.  $-\frac{4}{3}$ .                      B.  $\frac{4}{5}$ .                      **C.  $\frac{4}{3}$ .**                      D.  $\frac{3}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha < 0$ .

Mà  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5}$ .

Vậy  $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$ .

**Câu 12:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{3}{5}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha}$

- A.  $P = -\frac{12}{25}$ .**                      B.  $P = \frac{3}{7}$ .                      C.  $P = \frac{12}{25}$ .                      D.  $P = -3$ .

**Lời giải**

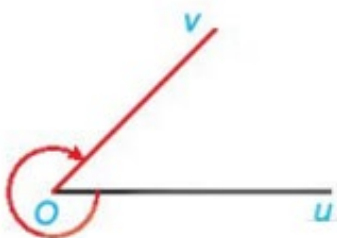
Ta có  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ .

$$\text{Vì } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$$

$$P = \frac{\tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = -\frac{12}{25}.$$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  như hình vẽ sau, biết góc hình học  $\widehat{uOv} = 45^\circ$ .



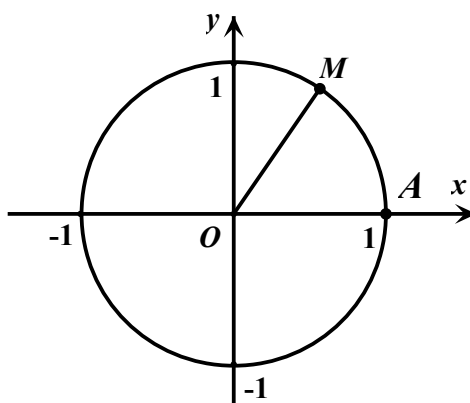
- a) Trong hình vẽ, tia  $Om$  quay quanh góc  $O$  từ tia  $Ou$  đến tia  $Ov$  theo chiều dương.
- b) Trong hình vẽ, số đo của góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  bằng  $-315^\circ$ .
- c) Tia  $Om$  quay quanh góc  $O$  từ  $Ou$  đến tia  $Ov$  lần đầu tiên theo chiều dương quét một góc lượng giác có số đo  $45^\circ$ .
- d) Tia  $Om$  quay quanh góc  $O$  từ tia  $Ou$  đến tia  $Ov$  theo chiều dương chạm tia  $Ov$  năm lần quét một góc lượng giác có số đo là  $1485^\circ$ .

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	----------------	----------------	----------------

- a) Tia  $Om$  quay quanh góc  $O$  từ tia  $Ou$  đến tia  $Ov$  theo chiều kim đồng hồ nên đó là chiều âm suy ra mệnh đề **sai**.
- b) Ta có:  $\widehat{uOv} = 45^\circ \Rightarrow (Ou, Ov) = -315^\circ$  suy ra mệnh đề **đúng**.
- c) Ta có:  $\widehat{uOv} = 45^\circ$ . Tia  $Om$  quay quanh góc  $O$  từ  $Ou$  đến tia  $Ov$  lần đầu tiên theo chiều dương có  $(Ou, Ov) = 45^\circ$  suy ra mệnh đề **đúng**.
- d) Tia  $Om$  quay quanh góc  $O$  từ  $Ou$  đến tia  $Ov$  theo chiều dương chạm tia  $Ov$  năm lần nên ta có  $(Ou, Ov) = 45^\circ + 4.360^\circ = 1485^\circ$  suy ra mệnh đề **đúng**.

**Câu 2:** Trên đường tròn lượng giác tâm  $O$  và hệ trục tọa độ  $Oxy$  cho điểm  $M$  sao cho  $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{3}$  như hình vẽ bên dưới:

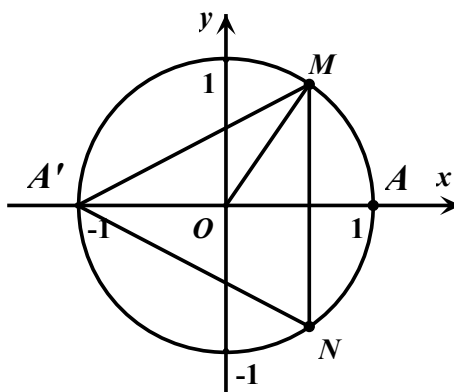


- a) Số đo của các góc lượng giác có tia đầu là  $OA$  tia cuối là  $OM$  bằng  $\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .
- b) Góc lượng giác có số đo  $\frac{16\pi}{3}$  có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác  $(OA, OM)$
- c) Trên đường tròn lượng giác, số điểm biểu diễn góc lượng giác có số đo  $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$  là 6 điểm.
- d) Khi biểu diễn góc  $\alpha = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$  lên đường tròn lượng giác ta được tập hợp điểm là một đa giác đều thì diện tích của đa giác đều đó bằng  $\frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

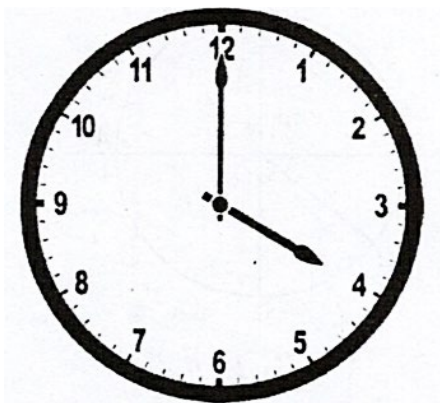
<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	---------------	---------------	---------------

- a) Số đo của góc lượng giác có tia đầu là  $OA$  tia cuối là  $OM$  bằng  $\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .
- b) Ta có  $\frac{16\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + 2.2\pi \Rightarrow$  Góc lượng giác có số đo  $\frac{16\pi}{3}$  có cùng tia đầu và tia cuối với góc lượng giác có số đo  $(OA, OM') = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .
- c) Ta có  $\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$  nên khi biểu diễn trên đường tròn lượng giác ta được 4 điểm.
- d) Ta có tập hợp điểm biểu diễn của  $\alpha$  là tam giác đều có cạnh bằng  $MN = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ .



Diện tích của đa giác biểu diễn là  $S = \frac{3\sqrt{3}}{4}$  (đvdt).

**Câu 3:** Một chiếc đồng hồ có kim giờ và kim phút được cho như trong hình vẽ sau. Chiều dài kim giờ, kim phút lần lượt bằng 8cm và 10cm.



- a) Đồng hồ chỉ 6 giờ kim giờ quay được góc bằng  $\frac{\pi}{3}$ .
- b) Đồng hồ chỉ 6 giờ kim giờ quét được một cung có độ dài bằng  $\frac{8\pi}{3}$  (cm).
- c) Đồng hồ chỉ 6 giờ 15 phút kim phút quay được góc bằng  $\frac{9\pi}{2}$
- d) Đồng hồ chỉ 6 giờ 15 phút kim phút quét được một cung có độ dài bằng  $90\pi$  (cm).

**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

- a) Đồng hồ chỉ 6 giờ kim giờ quay được góc bằng  $\frac{2}{12} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{3}$ .
- b) Đồng hồ chỉ 6 giờ kim giờ quét được một cung có độ dài bằng  $8 \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$  (cm).
- c) Đồng hồ chỉ 6 giờ 15 phút kim phút quay được  $2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$  vòng  
Suy ra kim phút quay được góc bằng  $\frac{9}{4} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2}$ .
- d) Đồng hồ chỉ 6 giờ 15 phút kim phút quét được một cung có độ dài bằng  $10 \cdot \frac{9\pi}{2} = 45\pi$  (cm)

**Câu 4:** Tính được các giá trị lượng giác của góc  $\alpha = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$  (biết  $k \in \mathbb{Z}$ ).

- a)  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- b)  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- c)  $\tan \alpha = -1$
- d)  $\cot \alpha = -1$

**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng:  $\sin \left[ -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi \right] = \sin \left( -\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi \right)$   
 $= \sin \left( -\frac{\pi}{4} + \pi \right) = -\sin \left( -\frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Đúng:

$$\cos\left[-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Sai:  $\tan\left[-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

d) Sai:  $\cot\left[-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Cho  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Tìm được bao nhiêu giá trị của  $k$  để  $10\pi < \alpha < 11\pi$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 1**

$$\text{Do } 10\pi < \alpha < 11\pi \text{ nên } 10\pi < \frac{\pi}{2} + k2\pi < 11\pi \Leftrightarrow \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{19}{4} < k < \frac{21}{4} \Rightarrow k = 5.$$

Vậy có 1 giá trị  $k$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 2:** Bánh xe của người đi xe đạp quay được 12 vòng trong 5 giây. Giả sử tại thời điểm bắt đầu quay van xe nằm ở vị trí  $V$  vuông góc với mặt đất. Hỏi trong một giây tia  $OV$  ( $O$  là trục bánh xe) quét một góc lượng giác bao nhiêu độ?



**Lời giải**

**Trả lời: -864**

Ta có: Trong một giây bánh xe quay được  $\frac{12}{5}$  vòng.

$$\text{Suy ra trong một giây bánh xe quay được góc: } \alpha = \frac{12}{5} \cdot 2\pi (\text{rad}) = \frac{24\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi} = 864^\circ.$$

Do khi bánh xe quay thì tia  $OV$  chuyển động cùng chiều với kim đồng hồ nên trong một giây tia  $OV$

quét một góc lượng giác  $-864^\circ$ .

**Câu 3:** Một người đi xe đạp đã đi được quãng đường  $614,8m$  trong thời gian 3 phút. Biết rằng đường kính bánh xe là  $700mm$ . Tính góc lượng giác ( đơn vị Radian) mà bánh xe quay được trong 5 giây (giả sử bánh xe quay theo chiều dương, kết quả làm tròn đến một chữ số sau dấu phẩy)?

**Lời giải**

**Trả lời: 48,8**

Đổi đơn vị:  $700mm = 0,7m$ .

Chu vi bánh xe là  $C = 2\pi r = 0,7\pi m$ .

$$\text{Trong 3 phút bánh xe quay được số vòng là: } n = \frac{614,8}{0,7\pi} = \frac{6148}{7\pi} (\text{vòng}).$$

Do đó, trong 5 giây bánh xe quay được  $\frac{5}{180} \cdot \frac{6148}{7\pi}$  (vòng).

Mỗi vòng bánh xe đã quay được một góc  $360^\circ$  tương ứng với  $2\pi$  (radian) nên trong 5 giây bánh xe đã quay được góc lượng giác có số đo là:  $\alpha = \frac{5}{180} \cdot \frac{6148}{7\pi} \cdot 2\pi = 48,8$ .

**Câu 4:** Một đồng hồ có kim giờ dài 5,5(cm); kim phút dài 11(cm) và chỉ thời gian lúc 12 giờ. Hỏi hai kim trùng với nhau lần thứ 3 thì tổng độ dài cung của hai kim đã quay là bao nhiêu radian? (làm tròn đến hàng đơn vị)

**Lời giải**

**Trả lời: 236**

Giả sử hai kim gặp nhau lần thứ nhất thì kim giờ quay một góc là  $\alpha$ . Khi đó, kim phút quay một góc là  $\alpha + 2\pi$ .

Vận tốc quay của kim giờ là:  $2\pi : 12 = \frac{\pi}{6}$  (rad/h).

Vận tốc quay của kim phút là:  $2\pi : 1 = 2\pi$  (rad/h).

Thời gian để kim giờ quay được góc  $\alpha$  là:  $\alpha : \frac{\pi}{6} = \frac{6\alpha}{\pi}$  (giờ).

Thời gian để kim phút quay được góc  $(\alpha + 2\pi)$  là:  $\frac{\alpha + 2\pi}{2\pi}$  (giờ).

Vì kim giờ và phút gặp nhau nên  $\frac{6\alpha}{\pi} = \frac{\alpha + 2\pi}{2\pi} \Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{11}$ .

Khi kim giờ và kim phút gặp nhau lần 3 thì góc quay của kim giờ là:  $3 \cdot \frac{2\pi}{11} = \frac{6\pi}{11}$

Và kim phút quay góc là:  $\frac{6\pi}{11} + 3 \cdot 2\pi = \frac{72\pi}{11}$ .

Suy ra tổng độ dài cung của 2 kim đã quay là:  $\frac{6\pi}{11} \cdot 5,5 + \frac{72\pi}{11} \cdot 11 = 75\pi$  (cm)  $\approx 236$  (cm).

**Câu 5:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$  và  $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$ . Tính  $\sin \alpha$ .

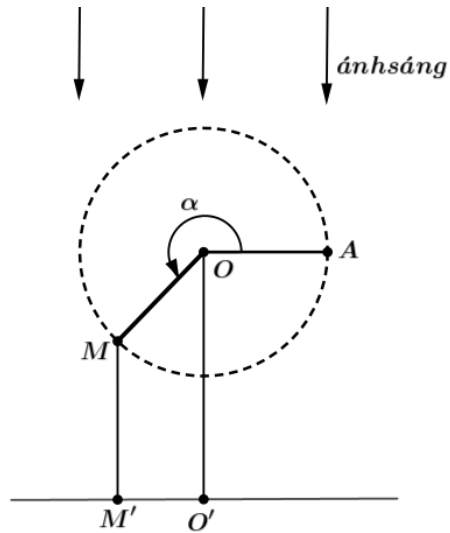
**Lời giải**

**Trả lời: 0,8**

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\pi}{2} + 504 \cdot 2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 504 \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}. \text{ Mà } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{3}{5}} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

**Câu 6:** Thanh  $OM$  quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc  $O$  của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là  $OA$ . Hỏi độ dài bóng  $O'M$  của  $OM$  khi thanh quay được  $\frac{60}{13}$  vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh  $OM$  là 10 cm ? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



**Lời giải**

**Trả lời: 7,5**

Ta có  $\alpha = \frac{60}{13} \cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}$ . Suy ra  $O'M' = |OM\cos\alpha| = \left|10\cos\frac{120\pi}{13}\right| \approx 7,5$  cm.

----- **HẾT** -----



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

### ĐỀ TEST SỐ 01

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Rút gọn biểu thức  $\sin 2a \cdot \cos a - \cos 2a \cdot \sin a$ , ta được:

- A.  $\cos a$ .                      B.  $\cos 3a$ .                      C.  $\sin a$ .                      D.  $\sin 3a$ .

**Câu 2:** Biểu thức  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$  được viết lại

- A.  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \sin a + \frac{1}{2}$ .                      B.  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a$ .  
C.  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a - \frac{1}{2} \cos a$ .                      D.  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a$ .

**Câu 3:** Nếu hai góc  $a$  và  $b$  có  $\tan a = \frac{1}{3}$  và  $\tan b = \frac{1}{2}$  thì giá trị của  $\tan(a - b)$

- A.  $\frac{1}{7}$ .                      B.  $-\frac{1}{7}$ .                      C. 1.                      D.  $-\frac{1}{5}$ .

**Câu 4:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = \frac{2}{5}$  Tính  $\cos 2\alpha$

- A.  $\frac{17}{25}$ .                      B.  $\frac{8}{25}$ .                      C.  $-\frac{17}{25}$ .                      D.  $-\frac{8}{25}$ .

**Câu 5:** Biến đổi  $\sin 6x + \sin 4x$  thành tích là

- A.  $2 \sin 6x \cos 4x$ .                      B.  $2 \sin x \cos 5x$ .                      C.  $2 \sin 5x \cos x$ .                      D.  $2 \sin 10x \cos 5x$ .

**Câu 6:** Biểu thức  $\sin 35^\circ \cdot \cos 45^\circ$  được viết lại là

- A.  $\frac{1}{2}(\sin 80^\circ + \sin 10^\circ)$ .                      B.  $\frac{1}{2}(\sin 80^\circ - \sin 10^\circ)$ .  
C.  $2(\sin 80^\circ + \sin 10^\circ)$ .                      D.  $2(\sin 80^\circ - \sin 10^\circ)$ .

**Câu 7:** Cho  $\cos x = \frac{4}{5}$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ . Giá trị của  $\sin 2x$  là:

- A.  $\frac{24}{25}$                       B.  $-\frac{24}{25}$                       C.  $-\frac{1}{5}$                       D.  $\frac{1}{5}$

**Câu 8:** Với mọi giá trị của  $\alpha$  sao cho biểu thức có nghĩa, khi đó biểu thức  $\frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4}{1 - 8 \sin^2 \alpha - \cos 4\alpha}$  có kết quả rút gọn bằng

- A.  $2 \tan^4 \alpha$ .                      B.  $\frac{1}{2} \tan^4 \alpha$ .                      C.  $\frac{1}{2} \cot^4 \alpha$ .                      D.  $2 \cot^4 \alpha$ .

**Câu 9:** Biểu thức  $\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}$  bằng  
**A.**  $\tan 10^\circ + \tan 20^\circ$ .    **B.**  $\tan 30^\circ$ .    **C.**  $\cot 10^\circ + \cot 20^\circ$ .    **D.**  $\tan 15^\circ$ .

**Câu 10:** Cho số thực  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ . Tính  $(\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha) \cos \alpha$   
**A.**  $\frac{25}{128}$ .    **B.**  $\frac{1}{16}$ .    **C.**  $\frac{255}{128}$ .    **D.**  $\frac{225}{128}$ .

**Câu 11:** Biểu thức thu gọn của biểu thức  $A = \frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin 3a}{1 + \cos a - 2 \sin^2 2a}$  (với giả thiết biểu thức có nghĩa) là  
**A.**  $\cos a$ .    **B.**  $2 \sin a$ .    **C.**  $\sin a$ .    **D.**  $2 \cos a$ .

**Câu 12:** Cho  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$  với  $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$ . Giá trị của  $\cot 2\alpha$  là:  
**A.**  $-\frac{\sqrt{17}}{8}$     **B.**  $\frac{\sqrt{17}}{8}$     **C.**  $\frac{\sqrt{65}}{4}$     **D.**  $\frac{\sqrt{17}}{9}$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Biết  $\sin a = \frac{8}{17}$ ,  $\tan b = \frac{5}{12}$  và  $a, b$  là các góc nhọn. Khi đó:

a)  $\tan a = \frac{8}{15}$ .

b)  $\sin(a - b) = \frac{21}{221}$ .

c)  $\cos(a + b) = \frac{14}{22}$ .

d)  $\tan 2(a + b) = \frac{171}{140}$ .

**Câu 2:** Cho  $\tan a = \frac{1}{2}$ ,  $0 < a < \frac{\pi}{2}$  và  $\tan b = \frac{1}{3}$ ,  $0 < b < \frac{\pi}{2}$ .

a)  $\cot a = 2$ .

b)  $\tan(a + b) = 1$ .

c)  $\tan(a - b) = 7$ .

d)  $\sin(a - 2b) = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$ .

**Câu 3:** Cho  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó:

a)  $\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$ .

b)  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

c)  $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ .

d)  $\sin 2\alpha = -\frac{5}{4}$ .

**Câu 4:** Cho  $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$ ,  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

a)  $\sin^2 \alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$

b)  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

c)  $\sin 4\alpha = \frac{80}{81}$

d) Biết  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = a + b\sqrt{c}$ . ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$ ) Khi đó  $a + b + c = 0$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Cho  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Biết giá trị của  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a\sqrt{5} - b\sqrt{15}}{10}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$  và  $(a, b) = 1$ . Tính  $a + b$ .

**Câu 2:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Biết giá trị của  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - a\sqrt{6}}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , tính  $a + b$ .

**Câu 3:** Cho  $\cos 2x = \frac{3}{5}$  và  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ . Tính  $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Câu 4:** Tính giá trị của biểu thức  $\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$  với giả thiết biểu thức có nghĩa và  $\tan \alpha = 5$ .

**Câu 5:** Cho góc lượng giác  $a$  thỏa mãn  $\cos 2a = 0,2$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = 2\cos a \cdot \cos 5a - 2\cos 2a \cdot \cos 4a$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Câu 6:** Cho  $\sin x = \frac{1}{3}$  và  $90^\circ < x < 180^\circ$ . Tính giá trị biểu thức  $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$  (Làm tròn đến hàng phần chục).

----- **HẾT** -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Rút gọn biểu thức  $\sin 2a \cdot \cos a - \cos 2a \cdot \sin a$ , ta được:

- A.  $\cos a$ .                      B.  $\cos 3a$ .                      C.  $\sin a$ .                      D.  $\sin 3a$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\sin 2a \cdot \cos a - \cos 2a \cdot \sin a = \sin(2a - a) = \sin a$ .

**Câu 2:** Biểu thức  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$  được viết lại

- A.  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \sin a + \frac{1}{2}$ .                      B.  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a$ .  
C.  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a - \frac{1}{2} \cos a$ .                      D.  $\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \sin a - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a$ .

**Lời giải**

Công thức:  $\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$ .

$$\sin\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \sin a \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \cos a \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin a + \frac{1}{2} \cos a.$$

**Câu 3:** Nếu hai góc  $a$  và  $b$  có  $\tan a = \frac{1}{3}$  và  $\tan b = \frac{1}{2}$  thì giá trị của  $\tan(a - b)$

- A.  $\frac{1}{7}$ .                      B.  $-\frac{1}{7}$ .                      C. 1.                      D.  $-\frac{1}{5}$ .

**Lời giải**

Áp dụng công thức cộng lượng giác ta có  $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b} = -\frac{1}{7}$ .

**Câu 4:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = \frac{2}{5}$  Tính  $\cos 2\alpha$

- A.  $\frac{17}{25}$ .                      B.  $\frac{8}{25}$ .                      C.  $-\frac{17}{25}$ .                      D.  $-\frac{8}{25}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = -\frac{17}{25}.$$

**Câu 5:** Biến đổi  $\sin 6x + \sin 4x$  thành tích là

- A.  $2 \sin 6x \cos 4x$ .                      B.  $2 \sin x \cos 5x$ .                      C.  $2 \sin 5x \cos x$ .                      D.  $2 \sin 10x \cos 5x$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin 6x + \sin 4x = 2 \sin \frac{6x + 4x}{2} \cos \frac{6x - 4x}{2} = 2 \sin 5x \cos x.$$

**Câu 6:** Biểu thức  $\sin 35^\circ \cdot \cos 45^\circ$  được viết lại là

- A.  $\frac{1}{2}(\sin 80^\circ + \sin 10^\circ)$ .                      B.  $\frac{1}{2}(\sin 80^\circ - \sin 10^\circ)$ .  
C.  $2(\sin 80^\circ + \sin 10^\circ)$ .                      D.  $2(\sin 80^\circ - \sin 10^\circ)$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \cos 45^\circ \cdot \sin 35^\circ = \frac{1}{2}(\sin(45^\circ + 35^\circ) - \sin(45^\circ - 35^\circ)) = \frac{1}{2}(\sin 80^\circ - \sin 10^\circ)$$

**Câu 7:** Cho  $\cos x = \frac{4}{5}$ ,  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ . Giá trị của  $\sin 2x$  là:

- A.  $\frac{24}{25}$                       B.  $-\frac{24}{25}$                       C.  $-\frac{1}{5}$                       D.  $\frac{1}{5}$

**Lời giải**

Ta có  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$  vì  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Rightarrow \sin x < 0$

Vậy  $\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) \cdot \frac{4}{5} = -\frac{24}{25}$

**Câu 8:** Với mọi giá trị của  $\alpha$  sao cho biểu thức có nghĩa, khi đó biểu thức  $\frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4}{1 - 8 \sin^2 \alpha - \cos 4\alpha}$  có kết quả rút gọn bằng

- A.  $2 \tan^4 \alpha$ .                      B.  $\frac{1}{2} \tan^4 \alpha$ .                      C.  $\frac{1}{2} \cot^4 \alpha$ .                      D.  $2 \cot^4 \alpha$ .

**Lời giải**

Ta có: 
$$\frac{\sin^2 2\alpha + 4 \sin^2 \alpha - 4}{1 - 8 \sin^2 \alpha - \cos 4\alpha} = \frac{4 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 4 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 2\alpha - 8 \sin^2 \alpha}$$

$$= \frac{4 \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1)}{8 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - 8 \sin^2 \alpha} = \frac{4 \cos^2 \alpha (-\cos^2 \alpha)}{8 \sin^2 \alpha (-\sin^2 \alpha)}$$

$$= \frac{-4 \cos^4 \alpha}{-8 \sin^4 \alpha} = \frac{1}{2} \cot^4 \alpha.$$

**Câu 9:** Biểu thức  $\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ}$  bằng

- A.  $\tan 10^\circ + \tan 20^\circ$ .                      B.  $\tan 30^\circ$ .                      C.  $\cot 10^\circ + \cot 20^\circ$ .                      D.  $\tan 15^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có: 
$$\frac{\sin 10^\circ + \sin 20^\circ}{\cos 10^\circ + \cos 20^\circ} = \frac{2 \sin \frac{10^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{10^\circ - 20^\circ}{2}}{2 \cos \frac{10^\circ + 20^\circ}{2} \cos \frac{10^\circ - 20^\circ}{2}} = \frac{2 \sin 15^\circ \cos 5^\circ}{2 \cos 15^\circ \cos 5^\circ} = \tan 15^\circ.$$

**Câu 10:** Cho số thực  $\alpha$  thỏa mãn  $\sin \alpha = \frac{1}{4}$ . Tính  $(\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha) \cos \alpha$

- A.  $\frac{25}{128}$ .                      B.  $\frac{1}{16}$ .                      C.  $\frac{255}{128}$ .                      D.  $\frac{225}{128}$ .

**Lời giải**

Ta có  $(\sin 4\alpha + 2 \sin 2\alpha) \cos \alpha = 2 \sin 2\alpha (\cos 2\alpha + 1) \cos \alpha = 4 \sin \alpha \cos \alpha (1 - 2 \sin^2 \alpha + 1) \cos \alpha$   
 $= 4 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) (2 - 2 \sin^2 \alpha) = 8 (1 - \sin^2 \alpha)^2 \sin \alpha = 8 \left(1 - \frac{1}{16}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{225}{128}.$

**Câu 11:** Biểu thức thu gọn của biểu thức  $A = \frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin 3a}{1 + \cos a - 2 \sin^2 2a}$  (với giả thiết biểu thức có nghĩa) là

- A.  $\cos a$ .                      B.  $2 \sin a$ .                      C.  $\sin a$ .                      D.  $2 \cos a$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sin 2a + \sin 5a - \sin 3a}{1 + \cos a - 2\sin^2 2a} \\ &= \frac{2\sin a \cos a + 2\cos 4a \sin a}{\cos a + \cos 4a} \\ &= \frac{2\sin a(\cos a + \cos 4a)}{\cos a + \cos 4a} \\ &= 2\sin a \end{aligned}$$

**Câu 12:** Cho  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3}$  với  $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$ . Giá trị của  $\cot 2\alpha$  là:

- A.  $-\frac{\sqrt{17}}{8}$       B.  $\frac{\sqrt{17}}{8}$       C.  $\frac{\sqrt{65}}{4}$       D.  $\frac{\sqrt{17}}{9}$

**Lời giải**

Với  $\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4}$  thì  $\sin \alpha > \cos \alpha$ . Do đó:

$$\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{9}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{8}{9}$$

$$\cot^2 2\alpha = \frac{1}{\sin^2 2\alpha} - 1$$

$$\Leftrightarrow \cot^2 2\alpha = \frac{81}{64} - 1$$

$$\Leftrightarrow \cot^2 2\alpha = \frac{17}{64}$$

$$\pi < \alpha < \frac{5\pi}{4} \Rightarrow 2\pi < 2\alpha < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \cot 2\alpha > 0$$

$$\text{Vậy } \cot 2\alpha = \frac{\sqrt{17}}{8}$$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Biết  $\sin a = \frac{8}{17}$ ,  $\tan b = \frac{5}{12}$  và  $a, b$  là các góc nhọn. Khi đó:

a)  $\tan a = \frac{8}{15}$ .

b)  $\sin(a - b) = \frac{21}{221}$ .

c)  $\cos(a + b) = \frac{14}{22}$ .

d)  $\tan 2(a + b) = \frac{171}{140}$ .

**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Vì  $a, b$  là các góc nhọn nên  $\cos a > 0, \cos b > 0$ .

Ta có:  $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{15}{17} \Rightarrow \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{8}{15}$  nên là mệnh đề đúng.

b)  $\cos b = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 b}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \cos b \tan b = \frac{5}{13}$ . Khi đó:

$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}$  nên là mệnh đề đúng.

c)  $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{15}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{8}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{140}{221}$  nên là mệnh đề sai.

$$\text{d) } \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{8}{15} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{171}{140}$$

$$\tan 2(a + b) = \frac{2 \tan(a + b)}{1 - \tan^2(a + b)} = \frac{2 \cdot \frac{171}{140}}{1 - \left(\frac{171}{140}\right)^2} \approx -5 \text{ nên là mệnh đề sai.}$$

**Câu 2:** Cho  $\tan a = \frac{1}{2}, 0 < a < \frac{\pi}{2}$  và  $\tan b = \frac{1}{3}, 0 < b < \frac{\pi}{2}$ .

a)  $\cot a = 2$ .

b)  $\tan(a + b) = 1$ .

c)  $\tan(a - b) = 7$ .

d)  $\sin(a - 2b) = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$ .

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Ta có  $\tan a \cdot \cot a = 1 \Rightarrow \cot a = \frac{1}{\tan a} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ .

b) Ta có  $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$ .

c) Ta có  $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{1}{7}$ .

d) Ta có

$$\cos^2 a = \frac{1}{1 + \tan^2 a} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \begin{cases} \cos a = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (N)} \\ \cos a = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ (L)} \end{cases} \Rightarrow \sin a = \tan a \cdot \cos a = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos^2 b = \frac{1}{1 + \tan^2 b} = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \begin{cases} \cos b = \frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ (N)} \\ \cos b = -\frac{3\sqrt{10}}{10} \text{ (L)} \end{cases} \Rightarrow \sin b = \tan b \cdot \cos b = \frac{\sqrt{10}}{10}.$$

Suy ra

$$\sin(a - 2b) = \sin a \cos 2b - \cos a \sin 2b = \sin a(1 - 2\sin^2 b) - \cos a \cdot 2 \sin b \cos b = -\frac{2\sqrt{5}}{25}$$

**Câu 3:** Cho  $\tan \alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Khi đó:

a)  $\tan 2\alpha = \frac{4}{3}$ .

b)  $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

c)  $\cos 2\alpha = \frac{3}{5}$ .

d)  $\sin 2\alpha = -\frac{5}{4}$ .

**Lời giải**

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Ta có:  $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{4}{3}$ . Suy ra mệnh đề **đúng**.

b) Ta có:  $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

Vì  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  nên  $\cos \alpha < 0$ , do đó  $\cos \alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ . Suy ra mệnh đề **sai**.

c)  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = \frac{3}{5}$ . Suy ra mệnh đề **đúng**.

d)  $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \Rightarrow \sin 2\alpha = \tan 2\alpha \cdot \cos 2\alpha = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{4}{5}$ . Suy ra mệnh đề **sai**.

**Câu 4:** Cho  $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9}$ ,  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

a)  $\sin^2 \alpha = \frac{1 + \sin 2\alpha}{2}$

b)  $\cos \alpha = \frac{2}{3}$

c)  $\sin 4\alpha = \frac{80}{81}$

d) Biết  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = a + b\sqrt{c}$ . ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ,  $c \geq 0$ ) Khi đó  $a + b + c = 0$ .

**Lời giải**

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------

a)  $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$  nên mệnh đề sai.

b)  $\cos 2\alpha = -\frac{1}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2}{3}$  nên mệnh đề đúng.

c) Ta có  $\sin^2 2\alpha = 1 - \cos^2 2\alpha = 1 - \left(-\frac{1}{9}\right)^2 = \frac{80}{81} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{\sqrt{80}}{9}$ .

$$\Rightarrow \sin 4\alpha = \frac{\sqrt{80}}{81}$$

Vậy mệnh đề trên là sai.

d) Ta có  $\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - 1 = \frac{5}{4}$

Vì  $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  nên  $\tan \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{-\frac{\sqrt{5}}{2} + 1}{1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right) \cdot 1} = -9 + 4\sqrt{5}$$

Vậy  $a = -9, b = 4, c = 5$  nên mệnh đề đúng.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Cho  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Biết giá trị của  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{a\sqrt{5} - b\sqrt{15}}{10}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$  và  $(a, b) = 1$ . Tính  $a + b$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 3**

Ta có:  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ . Vì  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

Ta có:  $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{\sqrt{5}}{10} - \frac{2\sqrt{15}}{10} = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{15}}{10}$ .

Suy ra  $a = 1, b = 2 \Rightarrow a + b = 3$ .

**Câu 2:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Biết giá trị của  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - a\sqrt{6}}{b}$  với  $a, b \in \mathbb{N}^*$ , tính  $a + b$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 8**

Vì  $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ .

Do đó  $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6}$ .

với  $a = 2, b = 6$ . Do đó  $a + b = 8$ .

**Câu 3:** Cho  $\cos 2x = \frac{3}{5}$  và  $\frac{3\pi}{4} < x < \pi$ . Tính  $\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Lời giải**

**Trả lời: -16,6**

$$\text{Vì } \frac{3\pi}{4} < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} \sin x > 0 \\ \cos x < 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 + \frac{3}{5}}{2} = \frac{4}{5} \Rightarrow \cos x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{5}}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\tan\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{3}}{1 + \tan x \cdot \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{-\frac{1}{2} - \sqrt{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}} = -8 - 5\sqrt{3} \approx -16,6.$$

**Câu 4:** Tính giá trị của biểu thức  $\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$  với giả thiết biểu thức có nghĩa và  $\tan \alpha = 5$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 625**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } & \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} \\ &= \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} \\ &= \frac{8\sin^4 \alpha}{8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha = 5^4 = 625. \end{aligned}$$

**Câu 5:** Cho góc lượng giác  $a$  thỏa mãn  $\cos 2a = 0,2$ . Tính giá trị của biểu thức  $A = 2\cos a \cdot \cos 5a - 2\cos 2a \cdot \cos 4a$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: -1,12**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } A &= \cos 6a + \cos 4a - (\cos 6a + \cos 2a) = \cos 4a - \cos 2a \\ &= 2\cos^2 2a - 1 - \cos 2a = 2 \cdot (0,2)^2 - 1 - 0,2 = -1,12. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } A = -1,12.$$

**Câu 6:** Cho  $\sin x = \frac{1}{3}$  và  $90^\circ < x < 180^\circ$ . Tính giá trị biểu thức  $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$  (Làm tròn đến hàng phần chục).

**Lời giải**

**Trả lời: -2,8**

Ta có:  $\sin x = \frac{1}{3}$  và  $90^\circ < x < 180^\circ$ .

$$\Rightarrow \cos x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}, \sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{-4\sqrt{2}}{9}, \cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{7}{9}.$$

thay vào biểu thức ta được: 
$$\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \frac{1 - \frac{4\sqrt{2}}{9} + \frac{7}{9}}{1 - \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{7}{9}} = -2\sqrt{2} \approx -2,8.$$

----- **HẾT** -----



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 2. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC ĐỀ TEST SỐ 02

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Biểu thức  $\sin 7x \cdot \sin x + \cos 7x \cdot \cos x$  bằng:  
**A.**  $\sin 8x$ .                      **B.**  $\cos 6x$ .                      **C.**  $\cos 8x$ .                      **D.**  $\sin 6x$ .
- Câu 2:** Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?  
**A.**  $\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a$                       **B.**  $\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a$   
**C.**  $-\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a$                       **D.**  $-\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a$
- Câu 3:** Cho  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$  thì  $\sin 2x$  bằng  
**A.**  $-\frac{3}{4}$ .                      **B.**  $\frac{3}{4}$ .                      **C.**  $\frac{3}{8}$ .                      **D.**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- Câu 4:** Giả sử  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Giá trị của  $\cos 2\alpha$  bằng  
**A.**  $\frac{5}{16}$ .                      **B.**  $\frac{13}{16}$ .                      **C.**  $-\frac{5}{8}$ .                      **D.**  $\frac{5}{8}$ .
- Câu 5:** Rút gọn biểu thức  $P = \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ .  
**A.**  $-\frac{3}{2} \cos 2a$ .                      **B.**  $\frac{1}{2} \cos 2a$ .                      **C.**  $-\frac{2}{3} \cos 2a$ .                      **D.**  $-\frac{1}{2} \cos 2a$ .
- Câu 6:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$  được:  
**A.**  $\tan \frac{x}{2}$ .                      **B.**  $\cot x$ .                      **C.**  $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ .                      **D.**  $\sin x$ .
- Câu 7:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$ ,  $\cos b = \frac{1}{4}$ .  
 Giá trị  $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b)$  bằng  
**A.**  $-\frac{113}{144}$ .                      **B.**  $-\frac{115}{144}$ .                      **C.**  $-\frac{117}{144}$ .                      **D.**  $-\frac{119}{144}$ .

**Câu 8:** Biết  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$  là

- A.  $P = 0$ .                      B.  $P = -1$ .                      C.  $P = \frac{1}{2}$ .                      D.  $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 9:** Biểu thức  $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$  có kết quả rút gọn bằng:

- A.  $\sin 2\alpha$ .                      B.  $\cos 2\alpha$ .                      C.  $\tan 2\alpha$ .                      D.  $\cot 2\alpha$ .

**Câu 10:** Cho biểu thức  $B = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a}$ . Biểu thức B bằng biểu thức nào dưới đây?

- A.  $\tan a$ .                      B.  $-\tan a$ .                      C.  $\tan 3a$ .                      D.  $-\tan 3a$ .

**Câu 11:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Tính  $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$ .

- A.  $P = -\frac{39}{50}$ .                      B.  $P = \frac{49}{50}$ .                      C.  $P = -\frac{49}{50}$ .                      D.  $P = \frac{39}{50}$ .

**Câu 12:** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \tan \frac{3\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$ .

- A.  $P = \frac{7}{5}$ .                      B.  $P = \frac{5}{7}$ .                      C.  $P = -\frac{5}{7}$ .                      D.  $P = -\frac{7}{5}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

a)  $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

b)  $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$

c)  $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 + \sqrt{5}}{3}$

d)  $D = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1}{9}$

**Câu 2:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

a)  $A = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = -\frac{39}{50}$ .

b)  $B = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3}{5}$

c)  $C = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = -\frac{8}{5}$

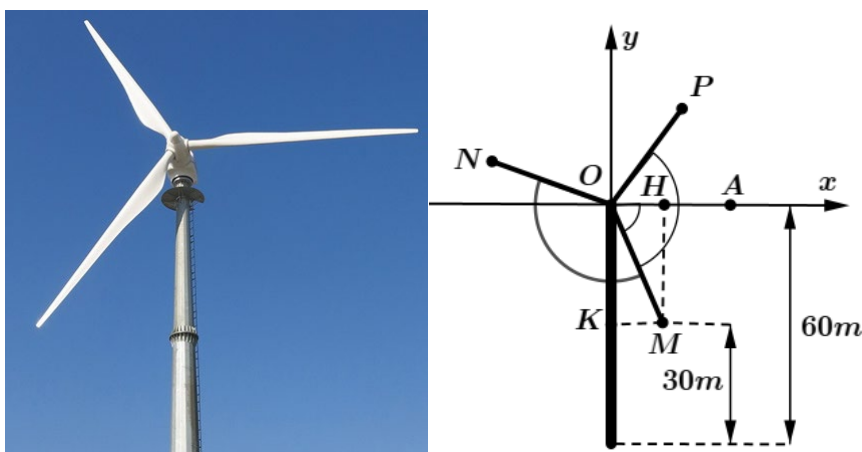
d)  $D = \cos(2\alpha - 3\pi) = \frac{7}{25}$

**Câu 3:** Cho tam giác ABC có  $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ .

- a)  $A + B + C = \pi$ .
- b)  $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$ .
- c)  $\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \tan \frac{B}{2}$ .
- d) Tam giác ABC cân tại B.

**Câu 4:** Trong hình vẽ dưới đây, ba điểm  $M, N, P$  nằm ở đầu các cánh quạt của tuabin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm  $M$  so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là  $\frac{2\pi}{3}$  và số góc  $(OA, OM)$  là  $\alpha$ .

- a)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$
- b) Giá trị sin của góc lượng giác  $(OA, ON)$  là một số âm
- c) Chiều cao của các điểm  $N$  và  $P$  so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.
- d) Chiều cao của các điểm  $P$  so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.



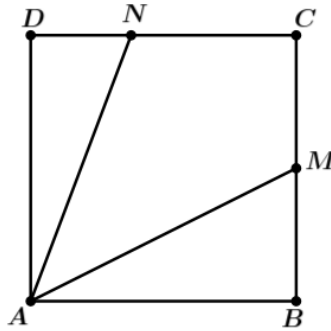
**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.**

**Câu 1:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}; \cos b = \frac{1}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \cos(a + b) \cos(a - b)$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

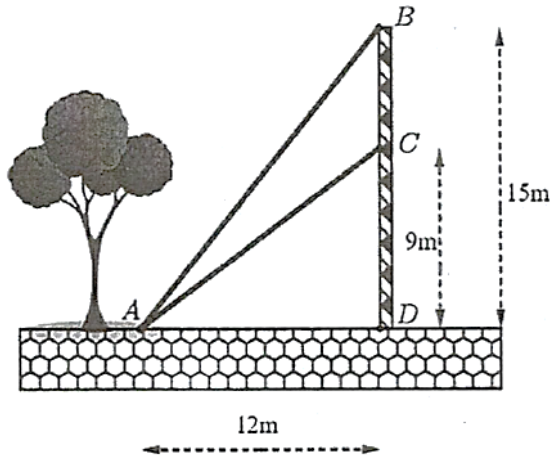
**Câu 2:** Cho  $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha$  với  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $\tan 2\alpha$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Câu 3:** Cho  $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để  $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$ .

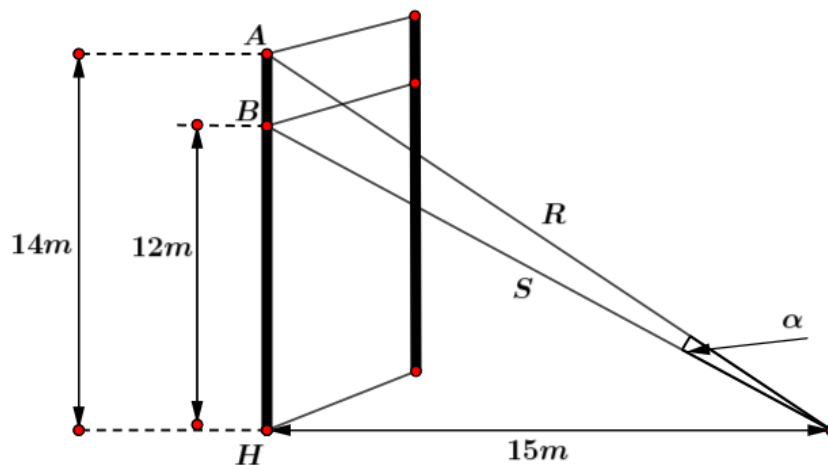
**Câu 4:** Trên một mảnh đất hình vuông  $ABCD$  bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí  $A$  chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc  $C$ . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia  $AM$  và  $AN$  mà ở đó các điểm  $M \in BC$ ;  $N \in DC$  sao cho  $BM = \frac{1}{2}BC$ ,  $DN = \frac{1}{3}DC$ . Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?



**Câu 5:** Từ một vị trí  $A$ , người ta buộc hai sợi cáp  $AB$  và  $AC$  đến một cái trụ cao  $15\text{ m}$ , được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí  $D$ . Biết  $CD = 9\text{ m}$  và  $AD = 12\text{ m}$ . Tìm góc nhọn  $\alpha = \widehat{BAC}$  tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng  $\alpha$  (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).



**Câu 6:** Một sợi cáp  $R$  được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất  $14\text{ m}$ . Một sợi cáp  $S$  khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất  $12\text{ m}$ . Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột  $15\text{ m}$ .



Tính số đo góc  $\alpha$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Biểu thức  $\sin 7x \cdot \sin x + \cos 7x \cdot \cos x$  bằng:  
**A.**  $\sin 8x$ .                      **B.**  $\cos 6x$ .                      **C.**  $\cos 8x$ .                      **D.**  $\sin 6x$ .

**Lời giải**

$$\sin 7x \cdot \sin x + \cos 7x \cdot \cos x = \cos(7x - x) = \cos 6x.$$

- Câu 2:** Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?  
**A.**  $\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a$                       **B.**  $\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a$   
**C.**  $-\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a$                       **D.**  $-\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sin a + \cos a$

**Lời giải**

Áp dụng công thức cộng ta có:

$$\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left( \sin a \cos \frac{\pi}{4} + \cos a \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sin a + \cos a$$

- Câu 3:** Cho  $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$  thì  $\sin 2x$  bằng  
**A.**  $-\frac{3}{4}$ .                      **B.**  $\frac{3}{4}$ .                      **C.**  $\frac{3}{8}$ .                      **D.**  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .

**Lời giải**

Ta có:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2 \sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = -\frac{3}{4}.$$

- Câu 4:** Giả sử  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ . Giá trị của  $\cos 2\alpha$  bằng  
**A.**  $\frac{5}{16}$ .                      **B.**  $\frac{13}{16}$ .                      **C.**  $-\frac{5}{8}$ .                      **D.**  $\frac{5}{8}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2 = \frac{5}{8}.$$

- Câu 5:** Rút gọn biểu thức  $P = \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ .  
**A.**  $-\frac{3}{2} \cos 2a$ .                      **B.**  $\frac{1}{2} \cos 2a$ .                      **C.**  $-\frac{2}{3} \cos 2a$ .                      **D.**  $-\frac{1}{2} \cos 2a$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có: } \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right) \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \left[ \cos \frac{\pi}{2} - \cos 2a \right] = -\frac{1}{2} \cos 2a.$$

- Câu 6:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$  được:

- A.**  $\tan \frac{x}{2}$ .                      **B.**  $\cot x$ .                      **C.**  $\tan^2 \left( \frac{\pi}{4} - x \right)$ .                      **D.**  $\sin x$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin x = \sin \left( 2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ ;  $1 + \cos x = 1 + \cos \left( 2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$

$$\text{Do đó } A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} \left( 2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)}{\cos \frac{x}{2} \left( 2 \cos \frac{x}{2} + 1 \right)} = \tan \frac{x}{2}.$$

- Câu 7:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$ ,  $\cos b = \frac{1}{4}$ .

Giá trị  $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$  bằng

- A.**  $-\frac{113}{144}$ .                      **B.**  $-\frac{115}{144}$ .                      **C.**  $-\frac{117}{144}$ .                      **D.**  $-\frac{119}{144}$ .

**Lời giải**

$$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \frac{1}{2} (\cos 2a + \cos 2b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \left( \frac{1}{3} \right)^2 + \left( \frac{1}{4} \right)^2 - 1 = -\frac{119}{144}$$

- Câu 8:** Biết  $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$  và  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của  $P = \cos \left( 2\alpha - \frac{\pi}{3} \right)$  là

- A.**  $P = 0$ .                      **B.**  $P = -1$ .                      **C.**  $P = \frac{1}{2}$ .                      **D.**  $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}.$$

$$\text{Từ } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \text{ nên } \cos \alpha = -\frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } P &= \cos \left( 2\alpha - \frac{\pi}{3} \right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} \\ &= (2 \cos^2 \alpha - 1) \cdot \frac{1}{2} + 2 \sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha = -1. \end{aligned}$$

- Câu 9:** Biểu thức  $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$  có kết quả rút gọn bằng:

- A.**  $\sin 2\alpha$ .                      **B.**  $\cos 2\alpha$ .                      **C.**  $\tan 2\alpha$ .                      **D.**  $\cot 2\alpha$ .

**Lời giải**

$$\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{2 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2 \cos^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2 \sin 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2 \cos 2\alpha (\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha.$$

- Câu 10:** Cho biểu thức  $B = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a}$ . Biểu thức  $B$  bằng biểu thức nào dưới đây?

- A.**  $\tan a$ .                      **B.**  $-\tan a$ .                      **C.**  $\tan 3a$ .                      **D.**  $-\tan 3a$ .

**Lời giải**

Ta có  $B = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \cdot \sin(-a)}{2 \cos 3a \cdot \sin a} = \tan 3a$ .

**Câu 11:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ . Tính  $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2}$ .

- A.  $P = -\frac{39}{50}$ .      B.  $P = \frac{49}{50}$ .      C.  $P = -\frac{49}{50}$ .      **D.  $P = \frac{39}{50}$ .**

**Lời giải**

Ta có  $P = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)$ .

Từ hệ thức  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  suy ra  $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{3}{5}$ .

Thay  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$  và  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  vào  $P$ , ta được  $P = \frac{39}{50}$ .

**Câu 12:** Cho  $\cos \alpha = \frac{3}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức  $P = \tan \frac{3\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$ .

- A.  $P = \frac{7}{5}$ .      **B.  $P = \frac{5}{7}$ .**      C.  $P = -\frac{5}{7}$ .      D.  $P = -\frac{7}{5}$ .

**Lời giải**

Áp dụng công thức biến đổi tích thành tổng, ta có

$$+ \cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos \alpha) = \frac{1}{2}(2 \cos^2 \alpha - 1 + \cos \alpha) = \frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{9}{16} + \frac{3}{4} - 1\right) = \frac{7}{16}.$$

$$+ \sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos \alpha) = -\frac{1}{2}(2 \cos^2 \alpha - 1 - \cos \alpha) = -\frac{1}{2}\left(2 \cdot \frac{9}{16} - 1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{5}{16}.$$

Khi đó  $P = \tan \frac{3\alpha}{2} \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{3\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{5}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{5}{7}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

a)  $\sin 2\alpha = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

b)  $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$

c)  $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{2 + \sqrt{5}}{3}$

d)  $D = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{1}{9}$

**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a)  $\sin \alpha = \frac{2}{3}$  với  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  suy ra  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{4\sqrt{5}}{9}$

b)  $\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha + 2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha = \frac{2}{3}$

c)  $\sqrt{2} \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}-2}{3}$

d)  $\sin \alpha = \frac{2}{3}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cot \alpha = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$D = \frac{\cot \alpha + \tan \alpha}{\cot \alpha - \tan \alpha} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{\sqrt{5}}} = 9$$

**Câu 2:** Cho góc  $\alpha$  thỏa mãn  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  và  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ .

a)  $A = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = -\frac{39}{50}$ .

b)  $B = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3}{5}$

c)  $C = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = -\frac{8}{5}$

d)  $D = \cos(2\alpha - 3\pi) = \frac{7}{25}$

**Lời giải**

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------

a) Ta có  $A = \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{3\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\sin 2\alpha - \sin \alpha) = \frac{1}{2} \sin \alpha (2 \cos \alpha - 1)$ .

Từ hệ thức  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ , suy ra  $\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}$ .

Do  $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$  nên  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ .

Thay  $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$  và  $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$  vào  $A$ , ta được  $A = \frac{39}{50}$ .

b)  $B = \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \cos \frac{\pi}{3} + \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} = \sin\left[\left(\alpha - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\pi}{3}\right] = \sin \alpha = -\frac{3}{5}$

c) Ta có  $C = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha = -\frac{8}{5}$

d)  $\cos(2\alpha - 3\pi) = \cos(2\alpha - \pi) = -\cos 2\alpha = -(2 \cos^2 \alpha - 1) = 1 - 2 \cdot \left(\frac{-4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}$ .

**Câu 3:** Cho tam giác ABC có  $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C}$ .

a)  $A + B + C = \pi$ .

b)  $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$ .

c)  $\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \tan \frac{B}{2}$ .

d) Tam giác ABC cân tại **B**.

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	----------------	---------------	---------------

a) Vì A, B, C là ba góc của một tam giác nên  $A + B + C = \pi$ . Suy ra MĐ đúng.

b) Áp dụng công thức nhân đôi ta có:  $\sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2}$ . Suy ra MĐ đúng.

c) Ta có:  $\frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} = \frac{2 \sin \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}}{2 \cos \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2}} = \tan \frac{B+C}{2} = \cot \frac{A}{2}$ . Suy ra MĐ sai.

d) Ta có:  $\sin A = \frac{\sin B + \sin C}{\cos B + \cos C} \Rightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \cot \frac{A}{2} \Rightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} = \frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{A}{2}}$

$\Rightarrow 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 1 \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \frac{A}{2} = 0 \Rightarrow \cos A = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ \Rightarrow$  tam giác ABC vuông tại **A**.

Suy ra MĐ sai.

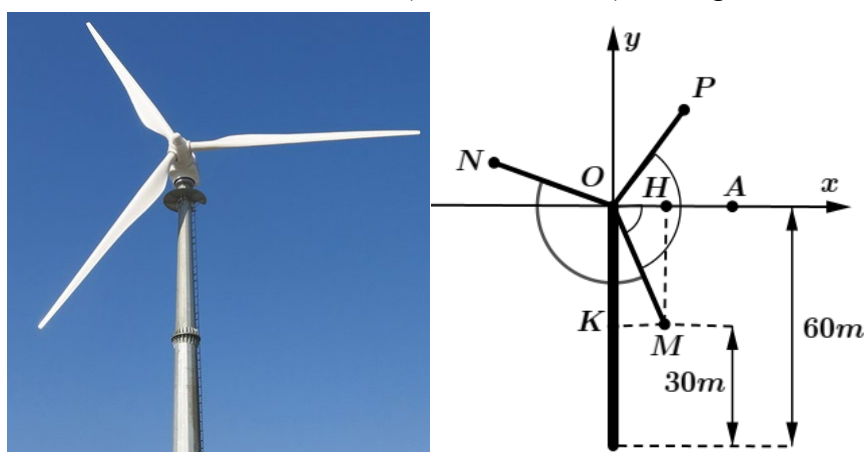
**Câu 4:** Trong hình vẽ dưới đây, ba điểm  $M, N, P$  nằm ở đầu các cánh quạt của tuabin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm  $M$  so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là  $\frac{2\pi}{3}$  và số góc  $(OA, OM)$  là  $\alpha$ .

a)  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

b) Giá trị sin của góc lượng giác  $(OA, ON)$  là một số âm

c) Chiều cao của các điểm  $N$  và  $P$  so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.

d) Chiều cao của các điểm  $P$  so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.



**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	----------------	---------------	---------------

Từ điểm  $M$  kẻ  $MH$  vuông góc với  $Ox$ ,  $MK$  vuông góc với  $Oy$ .

Ta có:  $MH = 60 - 30 = 30$  m khi đó hoành độ điểm  $M$  là 30.

Mặt khác hoành độ điểm  $M$  là:  $x_M = 31 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{30}{31} \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{30}{31}\right)^2} = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

Vì các cạnh quạt tạo thành 3 góc bằng nhau nên  $\widehat{MOP} = \widehat{NOP} = \widehat{MON} = 120^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{AOP} = \widehat{MOP} - \widehat{MOA} \Rightarrow \sin \widehat{AOP} = \sin(\widehat{MOP} - \widehat{MOA})$$

$$= \sin \widehat{MOP} \cdot \cos \widehat{MOA} - \cos \widehat{MOP} \cdot \sin \widehat{MOA} = \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{30}{31} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{61}}{31} \approx 0,96.$$

Vì vậy chiều cao của điểm  $P$  so với mặt đất khoảng:  $31 \cdot \sin a + 60 = 89,76(\text{m})$

Ta có:  $\cos \widehat{AOP} \approx \sqrt{1 - 0,96^2} = 0,28$  suy ra  $\widehat{AON} = \widehat{AOP} + \widehat{PON}$

$$\Rightarrow \sin \widehat{AON} = \sin(\widehat{AOP} + \widehat{PON}) = \sin \widehat{AOP} \cdot \cos \widehat{PON} + \cos \widehat{AOP} \cdot \sin \widehat{PON}$$

$$= 0,96 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - 0,28 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 0,96 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0,28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,23.$$

$$\Rightarrow \sin(OA, ON) = \sin \widehat{AON} \approx -0,23.$$

Vì vậy chiều cao của điểm  $N$  so với mặt đất khoảng:  $31 \cdot \sin a + 60 = 52,87(\text{m})$

a) Đúng:  $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

b) Đúng: Giá trị sin của các góc lượng giác  $(OA, ON)$  là một số âm

c) Sai: Chiều cao của các điểm  $N$  và  $P$  so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.

d) Sai: Chiều cao của các điểm  $P$  so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Cho hai góc nhọn  $a$  và  $b$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}; \cos b = \frac{1}{4}$ . Tính giá trị của biểu thức

$$P = \cos(a+b)\cos(a-b) \text{ (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)}$$

**Lời giải**

**Trả lời: -0,8**

$$\text{Ta có: } \sin^2 a = 1 - \cos^2 a = \frac{8}{9}; \sin^2 b = 1 - \cos^2 b = \frac{15}{16}.$$

$$\text{Do đó } P = (\cos a \cos b - \sin a \sin b)(\cos a \cos b + \sin a \sin b)$$

$$= (\cos a \cos b)^2 - (\sin a \sin b)^2 = \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{16} - \frac{8}{9} \cdot \frac{15}{16} = -\frac{119}{144} \approx -0,8$$

**Câu 2:** Cho  $\cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha$  với  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $\tan 2\alpha$ . (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Lời giải**

**Trả lời: -1,7**

$$\text{Ta có } \cos 4\alpha + 2 = 6 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha - 1 + 2 = 3(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\Leftrightarrow 2 \cos^2 2\alpha + 3 \cos 2\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } 1 + \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} \Rightarrow \tan^2 2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 1 = 3$$

Vì  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \pi < \alpha < 2\pi$  nên  $\sin 2\alpha < 0$ . Mặt khác  $\cos 2\alpha > 0$  do đó  $\tan 2\alpha < 0$

Vậy  $\tan 2\alpha = -\sqrt{3}$

**Câu 3:** Cho  $\sin \alpha + \cos \alpha = m$ . Có bao nhiêu giá trị của tham số  $m$  để  $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 2**

Ta có  $\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right)$ .

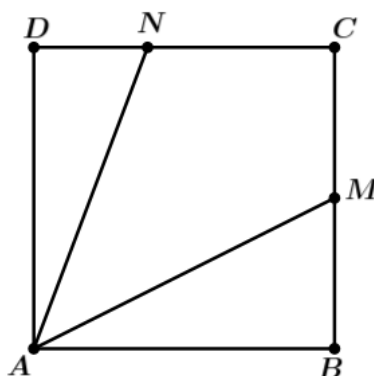
Vì  $-1 \leq \sin \left( \alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$  nên  $-\sqrt{2} \leq \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$ . Suy ra  $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$ .

Ta lại có  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha$ .

Suy ra  $\sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = m^2 - 1$ .

Khi đó,  $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$  hay  $m^2 - 1 = -\frac{3}{4}$  suy ra  $m = \frac{1}{2}$  hoặc  $m = -\frac{1}{2}$  (thỏa mãn điều kiện).

**Câu 4:** Trên một mảnh đất hình vuông  $ABCD$  bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí  $A$  chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc  $C$ . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia  $AM$  và  $AN$  mà ở đó các điểm  $M \in BC$ ;  $N \in DC$  sao cho  $BM = \frac{1}{2}BC$ ,  $DN = \frac{1}{3}DC$ . Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?



**Lời giải**

**Trả lời: 45**

Trong tam giác vuông  $ABM$ ,  $\tan \widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$ .

Trong tam giác vuông  $ADN$ ,  $\tan \widehat{DAN} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$ .

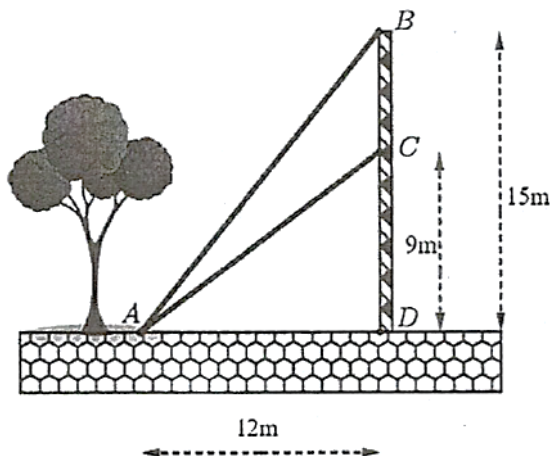
Do đó:  $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \frac{\tan \widehat{BAM} + \tan \widehat{DAN}}{1 - \tan \widehat{BAM} \tan \widehat{DAN}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$

Do  $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 1$  nên  $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 90^\circ - (\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 45^\circ$ .

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng  $45^\circ$ .

**Câu 5:** Từ một vị trí  $A$ , người ta buộc hai sợi cáp  $AB$  và  $AC$  đến một cái trụ cao  $15m$ , được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí  $D$ . Biết  $CD = 9m$  và  $AD = 12m$ . Tìm góc nhọn

$\alpha = \widehat{BAC}$  tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng  $\alpha$  (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).

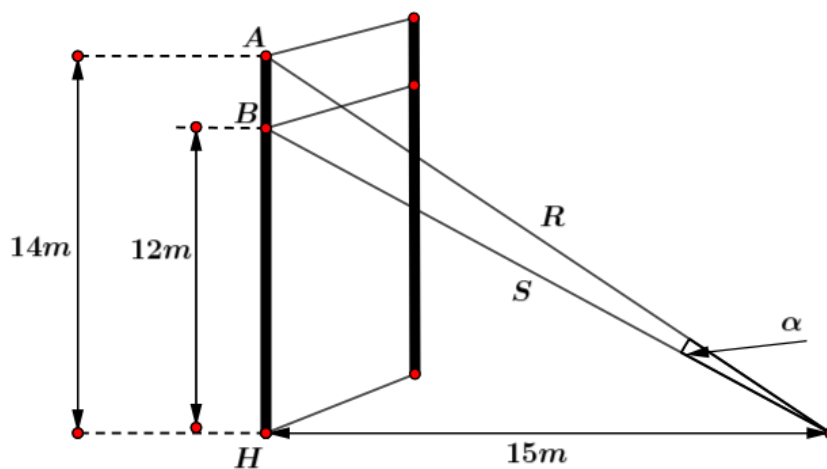


**Lời giải**

**Trả lời: 14,5**

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \tan(\widehat{BAD} - \widehat{CAD}) = \frac{\tan \widehat{BAD} - \tan \widehat{CAD}}{1 + \tan \widehat{BAD} \tan \widehat{CAD}} = \frac{\frac{15}{12} - \frac{9}{12}}{1 + \frac{15}{12} \cdot \frac{9}{12}} = \frac{8}{31} \Rightarrow \alpha \approx 14,5^\circ.$$

**Câu 6:** Một sợi cáp  $R$  được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp  $S$  khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m.



Tính số đo góc  $\alpha$  (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

**Lời giải**

**Trả lời: 4**

$$\text{Ta có: } \alpha = \widehat{AOH} - \widehat{BOH}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } AOH \text{ ta có: } \tan \widehat{AOH} = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } BOH \text{ ta có: } \tan \widehat{BOH} = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \tan(\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \frac{\tan \widehat{AOH} - \tan \widehat{BOH}}{1 + \tan \widehat{AOH} \cdot \tan \widehat{BOH}} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{10}{131}.$$

Suy ra  $\alpha \approx 4^\circ$ .

----- HẾT -----



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 3: HÀM SỐ SỐ LƯỢNG GIÁC ĐỀ TEST SỐ 01

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Hàm số  $y = \tan x$  có tập giá trị là  $\mathbb{R}$ .      B. Hàm số  $y = \cos x$  có tập giá trị là  $[-1; 1]$ .  
C. Hàm số  $y = \sin x$  có tập giá trị là  $[-1; 1]$ .      D. Hàm số  $y = \cot x$  có tập giá trị là  $[0; \pi]$ .

**Câu 2:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là

- A.  $D = \mathbb{R}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ .

**Câu 3:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan \left( 3x + \frac{\pi}{4} \right)$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ .  
C.  $D = \mathbb{R}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 4:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.  $y = \sin x$ .      B.  $y = \sin x + \cos x$ .      C.  $y = -\cos x$ .      D.  $y = \cos x$ .

**Câu 5:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = \cos 3x$ .      B.  $y = -\sin x$ .      C.  $y = \sin 3x$ .      D.  $y = \sin 2x + \cos 2x$ .

**Câu 6:** Tìm tập giá trị  $T$  của hàm số  $y = 2 \cos x + 3$ .

- A.  $T = [1; 5]$ .      B.  $T = [-1; 1]$ .      C.  $T = \mathbb{R}$ .      D.  $T = [0; 3]$ .

**Câu 7:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3 \sin 2x - 5$  lần lượt là:

- A.  $-8$  và  $-2$       B.  $2$  và  $8$ .      C.  $-5$  và  $2$ .      D.  $-5$  và  $3$ .

**Câu 8:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right)$ . Tính

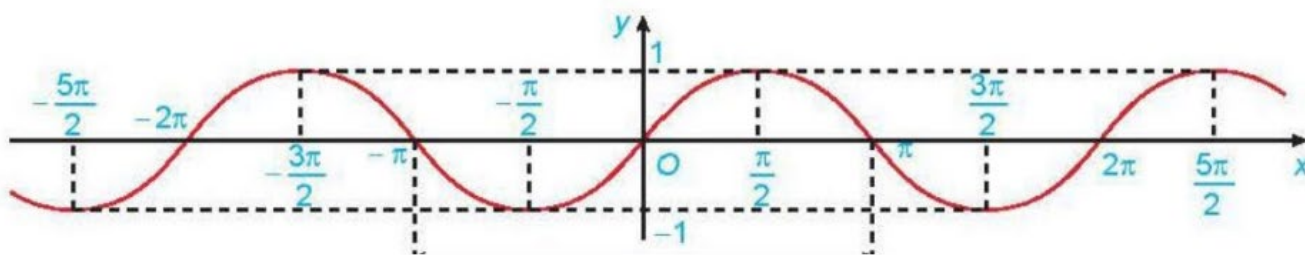
$$P = M - m.$$

- A.  $P = 2\sqrt{2}$ .      B.  $P = 4$ .      C.  $P = \sqrt{2}$ .      D.  $P = 2$ .

**Câu 9:** Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

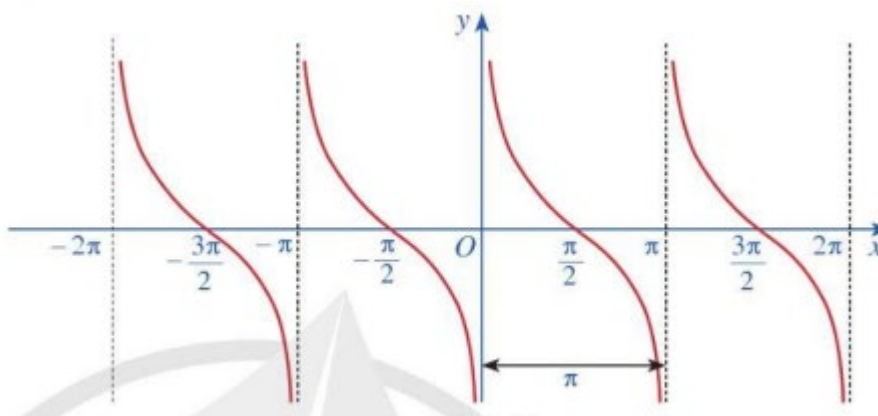
- A.  $(0; \pi)$ .      B.  $(\pi; 2\pi)$ .      C.  $\left( -\frac{\pi}{2}; \pi \right)$ .      D.  $\left( \frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2} \right)$ .

**Câu 10:** Hàm số nào có đồ thị như hình dưới đây



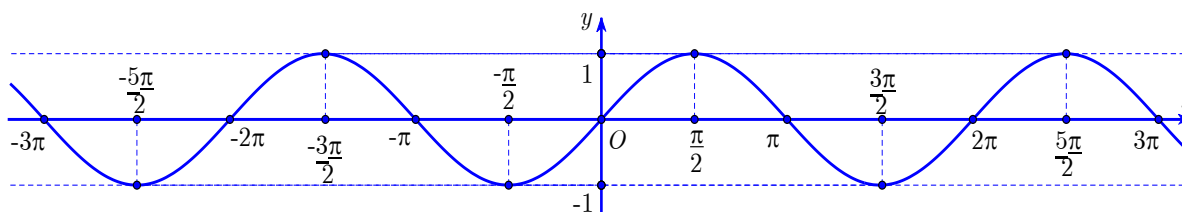
- A.  $y = \sin x$ .      B.  $y = 2 \sin x$ .      C.  $y = \cos x$ .      D.  $y = \sin 2x$ .

**Câu 11:** Đường cong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau?



- A.  $y = \sin x$       B.  $y = \cos x$       C.  $y = \cot x$       D.  $y = \tan x$

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = \sin x$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Dựa vào đồ thị, hãy cho biết có bao nhiêu giá trị của  $x$  trên đoạn  $[-3\pi; 3\pi]$  để  $\sin x = 0$ ?

- A. 5.      B. 7.      C. 11.      D. 13.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho biểu thức  $F = \cos^2 a + 2 \sin a + 2$

- a) Với  $a = \frac{\pi}{2}$  thì  $F = 4$   
 b)  $F = \sin^2 a + 2 \sin a + 3$   
 c)  $F$  đạt giá trị lớn nhất  $\Leftrightarrow \cos a = 1$   
 d) Giá trị nhỏ nhất của  $F$  là 0

**Câu 2:** Cho biểu thức  $A = 2 \sin x - 1$ .

- a)  $\max A = 3$   
 b)  $A$  đạt GTNN tại  $x = \frac{3\pi}{2}$   
 c)  $\max A + \min A = -2$   
 d) Có 8 giá trị nguyên của  $m \in [-10; 10]$  sao cho  $m \leq A, \forall x \in \mathbb{R}$

**Câu 3:** Cho biểu thức  $y = f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .
- b)  $f(x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ .
- c) Không tồn tại  $x \in \mathbb{R}$  để  $f(x) = 0$
- d) Giá trị lớn nhất của biểu thức  $f(x)$  bằng 2.

**Câu 4:** Số giờ có ánh sáng của một thành phố  $A$  trong ngày thứ  $t$  của năm 2023 được cho bởi hàm số

$$y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178} (t - 60) \right| + 10, \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

- a) Trong ngày thứ 60, số giờ có ánh sáng của thành phố  $A$  là 10.
- b) Số giờ có ánh sáng trong một ngày của thành phố  $A$  luôn lớn hơn hoặc bằng 6.
- c) Số giờ có ánh sáng trong một ngày của thành phố  $A$  nhiều nhất bằng 10.
- d) Ngày 29 tháng 5 năm 2023, thành phố  $A$  có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Tập giá trị của hàm số  $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$  chứa tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

**Câu 2:** Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số  $h(t) = 90 \cos \left( \frac{\pi}{10} t \right)$ , trong đó  $h(t)$  là độ cao tính bằng centimet trên mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t$  giây. Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

**Câu 3:** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos 2x + \cos x$ . Tính tổng  $M + m$ . (kết quả làm tròn để hàng phần trăm)

**Câu 4:** Số giờ có ánh sáng của một thành phố  $X$  ở vĩ độ  $40^\circ$  Bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhuận được cho bởi hàm số:  $d(t) = 3 \sin \left[ \frac{\pi}{182} (t - 80) \right] + 12$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày thứ mấy trong năm thì thành phố  $X$  có nhiều giờ ánh sáng nhất?

**Câu 5:** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ cao  $h(m)$  của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t(h)$  được cho bởi công thức  $h = 3 \cos \left( \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} \right) + 12$ . Tìm thời điểm mực của kênh cao nhất?

**Câu 6:** Biết rằng tập giá trị của hàm số  $y = \sin^6 x + \cos^6 x$  là  $T = [a; b]$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 4a + b$

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Khẳng định nào sau đây là sai?

- A. Hàm số  $y = \tan x$  có tập giá trị là  $\mathbb{R}$ .      B. Hàm số  $y = \cos x$  có tập giá trị là  $[-1;1]$ .  
 C. Hàm số  $y = \sin x$  có tập giá trị là  $[-1;1]$ .      D. Hàm số  $y = \cot x$  có tập giá trị là  $[0;\pi]$ .

**Lời giải**

Hàm số  $y = \cot x$  có tập giá trị là  $\mathbb{R}$  nên D sai.

**Câu 2:** Tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là

- A.  $D = \mathbb{R}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 C.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Do đó, tập xác định của hàm số  $y = \cot x$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 3:** Tập xác định của hàm số  $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .  
 C.  $D = \mathbb{R}$ .      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

Hàm số xác định khi:  $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

**Câu 4:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.  $y = \sin x$ .      B.  $y = \sin x + \cos x$ .      C.  $y = -\cos x$ .      D.  $y = \cos x$ .

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = \sin x$  có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số  $y = \sin x$  là hàm số lẻ.

Xét hàm số  $y = \sin x + \cos x = f(x)$  có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$ ;  $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Suy ra  $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq \pm f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$  nên hàm số  $y = \sin x + \cos x$  không là hàm số chẵn và không là hàm số lẻ.

Xét hàm số  $y = -\cos x$  có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $-\cos(-x) = -\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số  $y = -\cos x$  là hàm số chẵn.

Xét hàm số  $y = \cos x$  có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.

**Câu 5:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.**  $y = \cos 3x$ .      **B.**  $y = -\sin x$ .      **C.**  $y = \sin 3x$ .      **D.**  $y = \sin 2x + \cos 2x$ .

**Lời giải**

Xét các đáp án ta thấy ở phương án A hàm số  $y = \cos 3x$  có

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$  thỏa mãn  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ .

$f(-x) = \cos(-3x) = \cos 3x = f(x), \forall x \in D$  do đó  $y = \cos 3x$  là hàm số chẵn.

Các hàm số ở các đáp án còn lại không thỏa mãn định nghĩa hàm số chẵn.

**Câu 6:** Tìm tập giá trị  $T$  của hàm số  $y = 2 \cos x + 3$ .

- A.**  $T = [1; 5]$ .      **B.**  $T = [-1; 1]$ .      **C.**  $T = \mathbb{R}$ .      **D.**  $T = [0; 3]$ .

**Lời giải**

Với mọi số thực  $x$ , ta luôn có  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 \cos x + 3 \leq 5$  hay  $y \in [1; 5]$ .

Vậy tập giá trị của hàm số  $y = 2 \cos x + 3$  là  $T = [1; 5]$ .

**Câu 7:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số  $y = 3 \sin 2x - 5$  lần lượt là:

- A.**  $-8$  và  $-2$       **B.**  $2$  và  $8$ .      **C.**  $-5$  và  $2$ .      **D.**  $-5$  và  $3$ .

**Lời giải**

Ta có:  $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin 2x \leq 3 \Rightarrow -8 \leq 3 \sin 2x - 5 \leq -2$ .

**Câu 8:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ . Tính

$P = M - m$ .

- A.**  $P = 2\sqrt{2}$ .      **B.**  $P = 4$ .      **C.**  $P = \sqrt{2}$ .      **D.**  $P = 2$ .

**Lời giải**

Vì  $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall x$  nên  $-2 \leq y \leq 2$ .

Vậy  $P = M - m = 2 - (-2) = 4$ .

**Câu 9:** Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên khoảng nào trong các khoảng sau?

- A.**  $(0; \pi)$ .      **B.**  $(\pi; 2\pi)$ .      **C.**  $\left(-\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ .      **D.**  $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ .

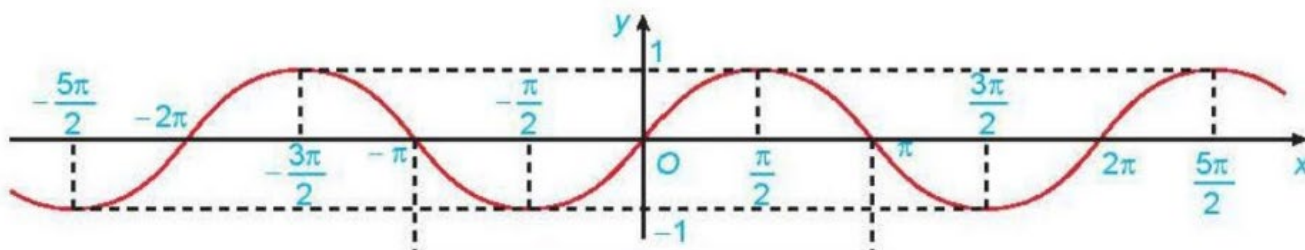
**Lời giải**

Hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên mỗi khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$ .

Với  $k = 2$ , ta có khoảng  $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ .

Vậy hàm số  $y = \tan x$  đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right)$ .

**Câu 10:** Hàm số nào có đồ thị như hình dưới đây

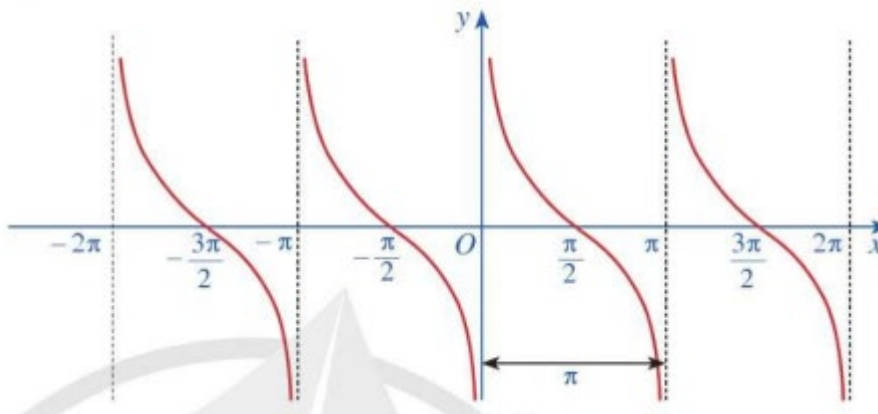


- A.  $y = \sin x$       B.  $y = 2 \sin x$       C.  $y = \cos x$       D.  $y = \sin 2x$

**Lời giải**

Đồ thị là của hàm số  $y = \sin x$ .

**Câu 11:** Đường cong hình bên dưới là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau?

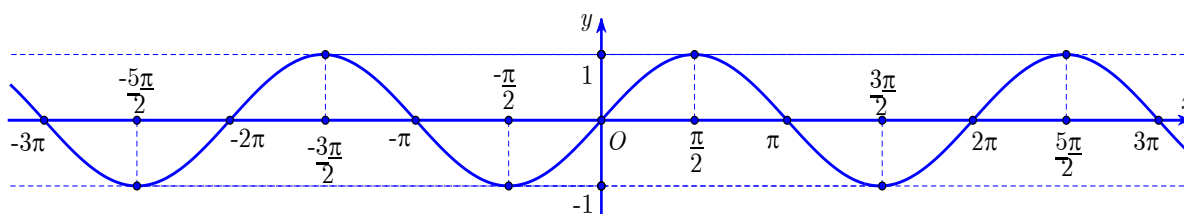


- A.  $y = \sin x$       B.  $y = \cos x$       C.  $y = \cot x$       D.  $y = \tan x$

**Lời giải**

Đường cong đã cho là đồ thị của hàm số  $y = \cot x$ .

**Câu 12:** Cho hàm số  $y = \sin x$  có đồ thị như hình vẽ dưới đây.



Dựa vào đồ thị, hãy cho biết có bao nhiêu giá trị của  $x$  trên đoạn  $[-3\pi; 3\pi]$  để  $\sin x = 0$ ?

- A. 5.      B. 7.      C. 11.      D. 13.

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị ta thấy trên đoạn  $[-3\pi; 3\pi]$  đồ thị của hàm số  $y = \sin x$  cắt trục  $Ox$  tại 7 điểm có hoành độ lần lượt là  $x = -3\pi; x = -2\pi; x = -\pi; x = 0; x = \pi; x = 2\pi; x = 3\pi$ . Do đó, có 7 giá trị  $x$  trên đoạn  $[-3\pi; 3\pi]$  để  $\sin x = 0$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho biểu thức  $F = \cos^2 a + 2 \sin a + 2$

a) Với  $a = \frac{\pi}{2}$  thì  $F = 4$

b)  $F = \sin^2 a + 2 \sin a + 3$

c)  $F$  đạt giá trị lớn nhất  $\Leftrightarrow \cos a = 1$

d) Giá trị nhỏ nhất của  $F$  là 0

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	---------------	----------------

a) Với  $a = \frac{\pi}{2}$  thì  $F = \cos^2 \frac{\pi}{2} + 2 \sin \frac{\pi}{2} + 2 = 4$  nên mệnh đề đúng.

b)  $F = \cos^2 a + 2 \sin a + 2 = 1 - \sin^2 a + 2 \sin a + 2 = -\sin^2 a + 2 \sin a + 3$  nên mệnh đề sai.

c) Ta có:  $F = -\sin^2 a + 2 \sin a + 3 \Rightarrow F$  đạt giá trị lớn nhất  $\Leftrightarrow \sin a = 1$  nên mệnh đề sai

d)  $F = \cos^2 a + 2 \sin a + 2 = -\sin^2 a + 2 \sin a + 3 = -(\sin a - 1)^2 + 4$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin \alpha - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq (\sin \alpha - 1)^2 \leq 4$$

$$-4 \leq -(\sin \alpha - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq F \leq 4$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của  $F$  là 0 nên mệnh đề đúng.

**Câu 2:** Cho biểu thức  $A = 2 \sin x - 1$ .

a)  $\max A = 3$

b)  $A$  đạt GTNN tại  $x = \frac{3\pi}{2}$

c)  $\max A + \min A = -2$

d) Có 8 giá trị nguyên của  $m \in [-10; 10]$  sao cho  $m \leq A, \forall x \in \mathbb{R}$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	----------------	----------------	----------------

a) Do  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 2 \sin x - 1 \leq 1$  nên  $\max A = 1$  khi  $\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

b)  $\min A = -3$  khi  $\sin x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

c)  $\max A + \min A = -3 + 1 = -2$

d)  $m \leq A, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \leq \min A \Leftrightarrow m \leq -3$ , suy ra có 8 giá trị nguyên của  $m \in [-10; 10]$

**Câu 3:** Cho biểu thức  $y = f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a)  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$ .

b)  $f(x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ .

c) Không tồn tại  $x \in \mathbb{R}$  để  $f(x) = 0$

d) Giá trị lớn nhất của biểu thức  $f(x)$  bằng 2.

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	----------------	----------------	---------------

a)  $f(x)$  xác định với  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

b) Ta có  $f(x) = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cdot \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ .

c) Ta có  $f(x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{8} (5 + 3 \cos 4x) = 0$ . Khi đó,  $5 + 3 \cos 4x = 0$ , hay  $\cos 4x = \frac{-5}{3}$  (vô lí)

d) Ta có  $f(x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x = \frac{1}{8}(5 + 3 \cos 4x)$ . Do  $-1 \leq \cos 4x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq f(x) \leq 1$

nên giá trị lớn nhất của hàm số là 1.

**Câu 4:** Số giờ có ánh sáng của một thành phố  $A$  trong ngày thứ  $t$  của năm 2023 được cho bởi hàm số

$$y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| + 10, \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365.$$

a) Trong ngày thứ 60, số giờ có ánh sáng của thành phố  $A$  là 10.

b) Số giờ có ánh sáng trong một ngày của thành phố  $A$  luôn lớn hơn hoặc bằng 6.

c) Số giờ có ánh sáng trong một ngày của thành phố  $A$  nhiều nhất bằng 10.

d) Ngày 29 tháng 5 năm 2023, thành phố  $A$  có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Ta có:  $y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178}(60 - 60) \right| + 10 = 10$ .

b) Vì  $\sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| \geq -1 \Rightarrow y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| + 10 \geq 6$ .

c) Vì  $\sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| \leq 1 \Rightarrow y = 4 \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| + 10 \leq 14$ .

d) Ngày có ánh nắng mặt trời chiếu nhiều nhất

$$\Leftrightarrow y = 14 \Leftrightarrow \sin \left| \frac{\pi}{178}(t - 60) \right| = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{178}(t - 60) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 149 + 356k.$$

$$\text{Mà } 0 < t \leq 365 \Leftrightarrow 0 < 149 + 356k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{149}{356} < k \leq \frac{54}{89}.$$

Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 0$ .

Với  $k = 0 \Rightarrow t = 149$  tức rơi vào ngày 29 tháng 5 (vì ta đã biết tháng 1 và 3 có 31 ngày, tháng 4 có 30 ngày, riêng đối với năm 2023 thì không phải năm nhuận nên tháng 2 có 28 ngày hoặc dựa vào dữ kiện  $0 < t \leq 365$  thì ta biết năm này tháng 2 chỉ có 28 ngày).

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Tập giá trị của hàm số  $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$  chứa tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

**Lời giải**

**Trả lời: 5**

*TXĐ:*  $D = \mathbb{R}$

Ta có  $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x = 5 + 2 \sin 4x$ .

$\forall x \in \mathbb{R}$ , ta có:  $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin 4x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 5 + 2 \sin 4x \leq 7$

$\Rightarrow 3 \leq y \leq 7 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$  nên  $y$  có 5 giá trị nguyên.

**Câu 2:** Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình

hoá bởi hàm số  $h(t) = 90 \cos \left( \frac{\pi}{10} t \right)$ , trong đó  $h(t)$  là độ cao tính bằng centimét trên mực nước

biển trung bình tại thời điểm  $t$  giây. Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

**Lời giải**

**Trả lời: 90**

Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kỳ dao động.

Ta có:  $h(20) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 20\right) = 90$  ( cm).

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

**Câu 3:** Gọi  $M$  và  $m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = \cos 2x + \cos x$ . Tính tổng  $M + m$ . (kết quả làm tròn để hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 0,88**

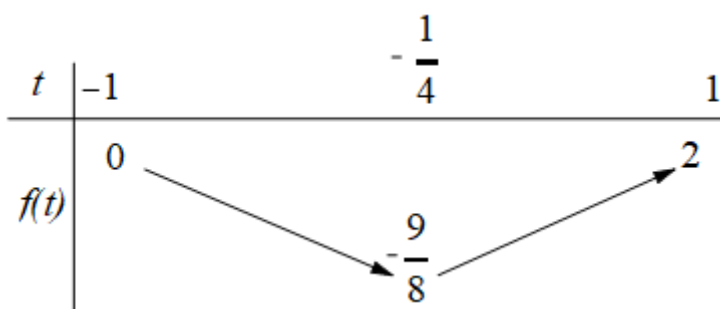
$y = \cos 2x + \cos x$ . TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ .

$y = \cos 2x + \cos x = 2 \cos^2 x + \cos x - 1$ .

Đặt:  $t = \cos x$ ,  $t \in [-1; 1]$ , ta xét hàm số  $f(t) = 2t^2 + t - 1$  với  $t \in [-1; 1]$

Đồ thị của hàm số  $y = f(t)$  là parabol có đỉnh  $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$ .

BBT:



Dựa vào BBT ta có:  $M = \max_{[-1;1]} f(t) = 2$ ,  $m = \min_{[-1;1]} f(t) = -\frac{9}{8}$ .

Vậy  $M + m = \frac{7}{8}$ .

**Câu 4:** Số giờ có ánh sáng của một thành phố  $X$  ở vĩ độ  $40^\circ$  Bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhuận được cho bởi hàm số:  $d(t) = 3 \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12$ ,  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày thứ mấy trong năm thì thành phố  $X$  có nhiều giờ ánh sáng nhất?

**Lời giải**

**Trả lời: 171**

Ta có:  $d(t) = 3 \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \leq 3 + 12 = 15$

Dấu bằng xảy ra khi  $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

$\Leftrightarrow t = 171 + 364k$ .

Mặt khác  $t \in (0; 365]$  nên  $0 < 171 + 364k \leq 365 \Leftrightarrow -\frac{171}{364} < k \leq \frac{194}{364}$ .

Mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 0$ .

Vậy  $t = 171$ . Do đó, ngày thứ 171 là ngày có nhiều ánh sáng nhất trong năm.

**Câu 5:** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ cao  $h(m)$  của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t(h)$  được cho bởi công thức  $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$ . Tìm thời điểm mực của kênh cao nhất ?

**Lời giải**

**Trả lời: 10**

Mực nước cao nhất của kênh là 15m đạt được khi  $\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3} = k2\pi$   
 $\Leftrightarrow t = -2 + 12k$ .

Vì  $t > 0 \Leftrightarrow -2 + 12k > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{6}$ .

Chọn số  $k$  nguyên dương nhỏ nhất thỏa  $k > \frac{1}{6}$  là  $k = 1 \Rightarrow t = 10$ .

**Câu 6:** Biết rằng tập giá trị của hàm số  $y = \sin^6 x + \cos^6 x$  là  $T = [a; b]$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 4a + b$

**Lời giải**

**Trả lời: 2**

Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$ .

Do  $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{4}$ .

Vậy giá trị của hàm số là  $T = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$  nên  $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow P = 4a + b = 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 2$

----- HẾT -----



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 3: HÀM SỐ SỐ LƯỢNG GIÁC

### ĐỀ TEST SỐ 02

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Tập xác định của hàm số  $y = 2 + \cot x$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .                      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .                                      D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 2:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = -\sin x$ .                      B.  $y = \cos x$ .                      C.  $y = \cos x \sin x$ .                      D.  $y = \sin x$ .

**Câu 3:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.  $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ .                      B.  $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ .                      C.  $y = \cos x$ .                      D.  $y = \sin^2 x$ .

**Câu 4:** Cho các hàm số  $y = \cos x, y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$ . Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số chẵn?

- A. 1.                                      B. 3.                                      C. 2.                                      D. 4.

**Câu 5:** Trong các hàm số  $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$  có bao nhiêu hàm số có chu kì là  $2\pi$ ?

- A. 0.                                      B. 1.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Câu 6:** Tập giá trị của hàm số  $y = 2 \sin x + 1$  bằng

- A.  $[-1; 1]$ .                              B.  $[-2; 2]$ .                              C.  $[-1; 3]$ .                              D.  $[-3; 1]$ .

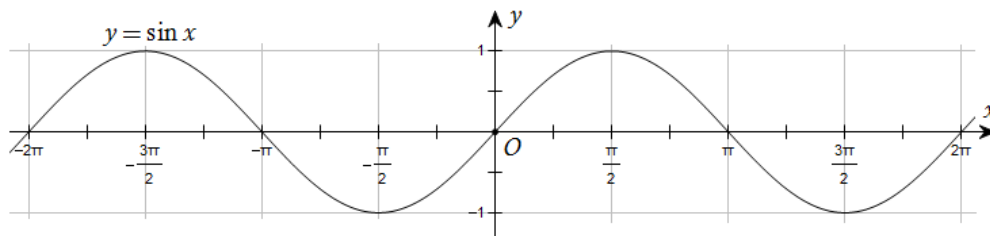
**Câu 7:** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = 3 \sin 3x - 4$  lần lượt là

- A. 7; 1.                                      B. 1; -4.                                      C. 3; -4.                                      D. -1; -7.

**Câu 8:** Giá trị bé nhất của hàm số  $y = -3 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + 2$  là

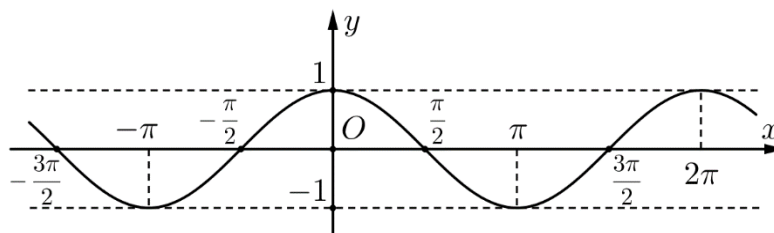
- A. 5.                                      B. 2.                                      C. 1.                                      D. -1.

**Câu 9:** Dựa vào đồ thị đã vẽ, chọn khẳng định đúng về hàm số  $y = \sin x$



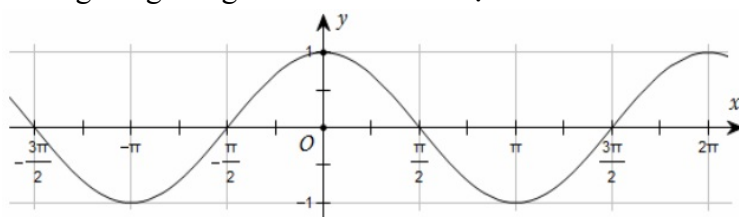
- A. Đồng biến trên khoảng  $\left( -\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2} \right)$ .                      B. Nghịch biến trên khoảng  $\left( \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right)$ .  
 C. Đồng biến trên khoảng  $(-\pi; \pi)$ .                                      D. Nghịch biến trên khoảng  $\left( -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right)$ .

**Câu 10:** Xét hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ . Khẳng định nào sau đây là sai?



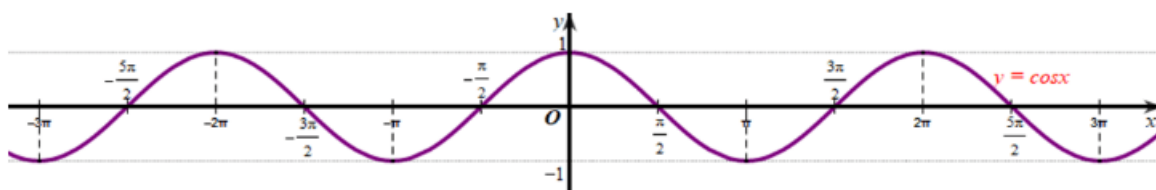
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$ .
- B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$ .
- C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; \pi)$ .
- D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\frac{\pi}{2}; 0)$ .

**Câu 11:** Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?



- A.  $y = 1 + \sin 2x$ .
- B.  $y = \cos x$ .
- C.  $y = -\sin x$ .
- D.  $y = -\cos x$ .

**Câu 12:** Có bao nhiêu giá trị của  $x$  trên đoạn  $[-2\pi; \frac{3\pi}{2}]$  để hàm số  $y = \cos x$  nhận giá trị bằng 0.



- A. 4.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 5.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho hàm số  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- a) Tập xác định của hàm số  $D = \mathbb{R}$
- b)  $f(-\pi) = -f(\pi)$
- c)  $f(-x) = f(x)$
- d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn

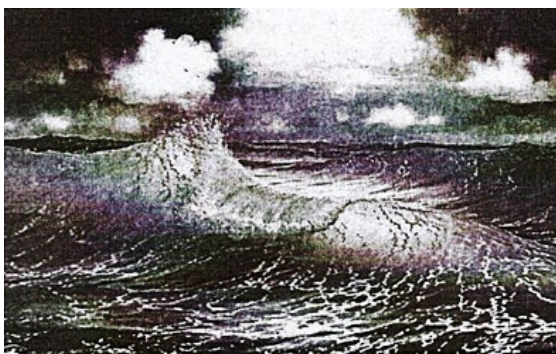
**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x) = \cos 2x + \cos x$ .

- a) Tập xác định của hàm số trên là  $\mathbb{R}$ .
- b) Hàm số trên là hàm số chẵn.
- c) Đặt  $t = \cos x$  thì hàm số trở thành  $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$ .
- d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là  $-1$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$ .

- Hàm số có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .
- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = 12\pi$ .
- Hàm số là hàm số lẻ.
- Giá trị lớn nhất của hàm số là 13.

**Câu 4:** Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t$  (giây) của mỗi con sóng được cho bởi hàm số  $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$ , trong đó  $h(t)$  được tính bằng centimet.



- Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 cm.
- Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm
- Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc  $t = 0$  giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây
- Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc  $t = 0$  giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

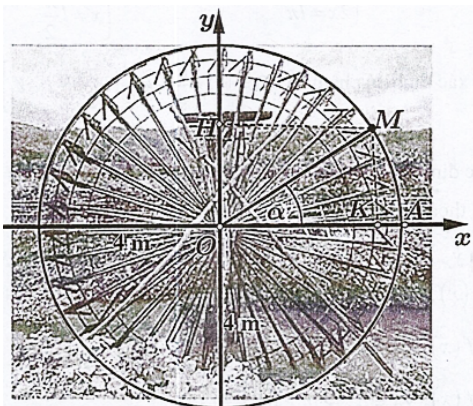
**Câu 1:** Biết rằng tập giá trị của hàm số  $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$  là  $T = [a; b]$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 10a - 2b$ ?

**Câu 2:** Biết rằng tập giá trị của hàm số  $y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4}$  là  $T = [a; b]$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 11(a + b)$ ?

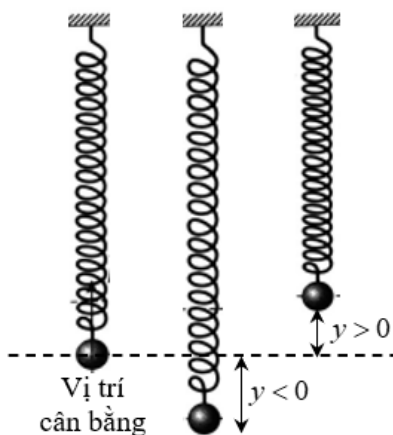
**Câu 3:** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ  $40^\circ$  bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhuận được cho bởi hàm số  $d(t) = 3 \sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ ,  $0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

**Câu 4:** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm  $t$  (giờ) trong một ngày bởi công thức  $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$ . Mực nước của kênh cao nhất khi  $t$  bằng bao nhiêu?

**Câu 5:** Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm  $O$ , bán kính là  $4m$ . Xét chất điểm  $M$  thuộc đường tròn đó và góc  $\alpha = (\overline{OA}, \overline{OM})$ . Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn  $(O;4)$  và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ( $t = 0$  giây khi điểm  $M$  trùng  $A$ ). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm  $M$  ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



**Câu 6:** Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $y = 25\sin 4\pi t$  ở đó  $y$  được tính bằng centimet còn thời gian  $t$  được tính bằng giây. Gọi  $a$  là chu kì dao động của con lắc lò xo;  $b$  (Hz) là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và  $c$  (cm) là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính  $a + b + c$



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Tập xác định của hàm số  $y = 2 + \cot x$  là

- A.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      B.  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 C.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .      **D.  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .**

**Lời giải**

Điều kiện:  $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Vậy tập xác định của hàm số là  $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 2:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.  $y = -\sin x$ .      **B.  $y = \cos x$ .**      C.  $y = \cos x \sin x$ .      D.  $y = \sin x$ .

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = \cos x$  có tập xác định  $\mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$  ta có  $-x \in \mathbb{R}$

Đặt  $f(x) = \cos x$ . Khi đó  $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ .

Do đó  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.

**Câu 3:** Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.  $y = \frac{\tan x}{\sin x}$ .      **B.  $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ .**      C.  $y = \cos x$ .      D.  $y = \sin^2 x$ .

**Lời giải**

Ta có tập xác định của hàm số  $y = \frac{\cot x}{\cos x}$  là  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

Suy ra  $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$  và  $f(-x) = \frac{\cot(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\cot x}{\cos x} = -f(x)$ .

Vậy hàm số  $y = \frac{\cot x}{\cos x}$  là hàm số lẻ.

**Câu 4:** Cho các hàm số  $y = \cos x, y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$ . Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số chẵn?

- A. 1.**      B. 3.      C. 2.      D. 4.

**Lời giải**

Ta có  $y = \cos x$  là hàm số chẵn.

**Câu 5:** Trong các hàm số  $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$  có bao nhiêu hàm số có chu kì là  $2\pi$ ?

- A. 0.      B. 1.      **C. 2.**      D. 3.

**Lời giải**

Chỉ có  $y = \sin x, y = \cos x$  là hai hàm số có chu kì bằng  $2\pi$ .

**Câu 6:** Tập giá trị của hàm số  $y = 2\sin x + 1$  bằng

- A.  $[-1; 1]$ .      B.  $[-2; 2]$ .      **C.  $[-1; 3]$ .**      D.  $[-3; 1]$ .

**Lời giải**

Ta có:  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin x \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq 2\sin x + 1 \leq 3$

Vậy tập giá trị của hàm số là  $[-1; 3]$ .

**Câu 7:** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = 3\sin 3x - 4$  lần lượt là

- A. 7;1.                      B. 1;-4.                      C. 3;-4.                      D. -1;-7.

**Lời giải**

Ta có  $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin 3x \leq 3 \Leftrightarrow -7 \leq 3\sin 3x - 4 \leq -1$ .

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là  $-1$  khi  $\sin 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $-7$  khi  $\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ).

**Câu 8:** Giá trị bé nhất của hàm số  $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$  là

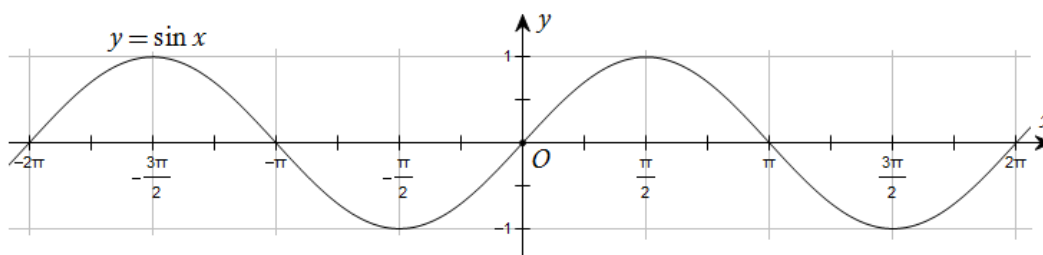
- A. 5.                      B. 2.                      C. 1.                      D. -1.

**Lời giải**

Ta có  $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3$   
 $\Leftrightarrow -1 \leq 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \leq 5$ .

Vậy giá trị bé nhất của hàm số  $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$  là  $-1$ .

**Câu 9:** Dựa vào đồ thị đã vẽ, chọn khẳng định đúng về hàm số  $y = \sin x$

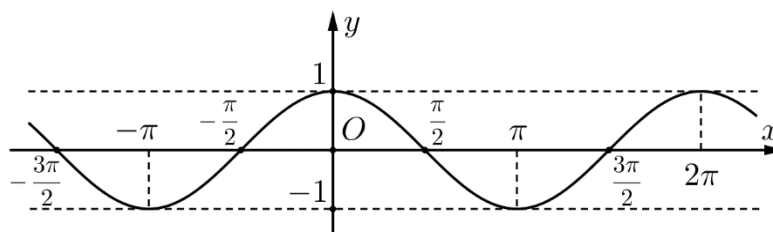


- A. Đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{-3\pi}{2}; \frac{-\pi}{2}\right)$ .                      B. Nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ .  
 C. Đồng biến trên khoảng  $(-\pi; \pi)$ .                      D. Nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Lời giải**

Từ đồ thị ta chọn ý B

**Câu 10:** Xét hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ . Khẳng định nào sau đây là sai?



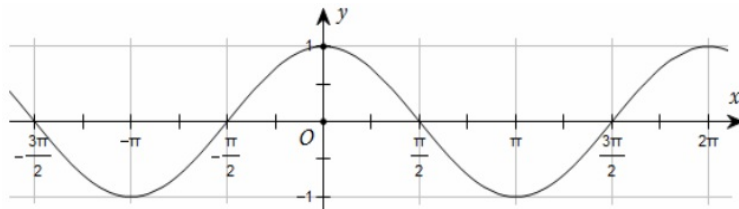
- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$ .  
 B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$ .  
 C. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; \pi)$ .

D. Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ .

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ , ta thấy hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\pi; 0)$  và hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; \pi)$ , nên B sai.

**Câu 11:** Đường cong trong hình dưới là đồ thị của hàm số nào trong các hàm số sau đây?



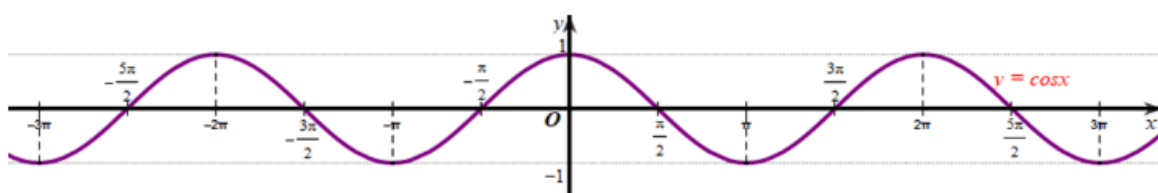
- A.  $y = 1 + \sin 2x$ .      B.  $y = \cos x$ .      C.  $y = -\sin x$ .      D.  $y = -\cos x$ .

**Lời giải**

+ Vì đồ thị hàm số đi qua điểm  $(0; 1)$  nên loại đáp án C, D

+ Vì đồ thị hàm số đi qua điểm  $\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$  nên loại đáp án A

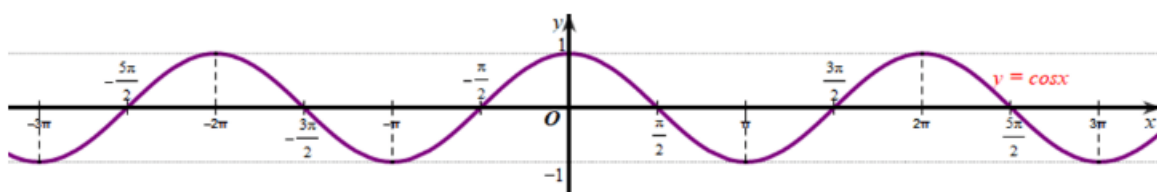
**Câu 12:** Có bao nhiêu giá trị của  $x$  trên đoạn  $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$  để hàm số  $y = \cos x$  nhận giá trị bằng 0.



- A. 4.      B. 2.      C. 3.      D. 5.

**Lời giải**

Ta có đồ thị hàm số  $y = \cos x$ :



Từ đồ thị hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ , ta thấy hàm số  $y = \cos x$  nhận giá trị bằng 0

khi  $x \in \left\{-\frac{3\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right\}$ .

Vậy có 4 giá trị của  $x$  thỏa mãn bài toán.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho hàm số  $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$ .

- a) Tập xác định của hàm số  $D = \mathbb{R}$   
 b)  $f(-\pi) = -f(\pi)$

c)  $f(-x) = f(x)$

d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Đúng: Tập xác định của hàm số:  $D = \mathbb{R}$ .

b) Sai: Ta có  $f(-\pi) = -2 \neq -f(\pi) = 2$

c) Đúng: Với mọi  $x \in D$  ta có:

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-x) - 1 = \sin^2 x + \cos x - 1 = f(x).$$

d) Đúng: Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x) = \cos 2x + \cos x$ .

a) Tập xác định của hàm số trên là  $\mathbb{R}$ .

b) Hàm số trên là hàm số chẵn.

c) Đặt  $t = \cos x$  thì hàm số trở thành  $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$ .

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là  $-1$ .

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Đúng: Tập xác định của hàm số trên là  $\mathbb{R}$ .

b) Đúng: Hàm số trên là hàm số chẵn. Vì 
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = \cos(-2x) + \cos(-x) = f(x) \end{cases}$$

c) Đúng: Đặt  $t = \cos x$  thì hàm số trở thành  $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$ .

Ta có  $y = \cos 2x + \cos x$ ;  $y = \cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$ .

Đặt:  $t = \cos x$ ,  $t \in [-1; 1]$  khi đó  $f(t) = 2t^2 + t - 1$ .

d) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là  $0$ . Với hàm số  $f(t) = 2t^2 + t - 1$  ở câu c:

Đồ thị của hàm số  $f$  là parabol có đỉnh  $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$ .

Bảng biến thiên:

$t$	$-1$	$-\frac{1}{4}$	$1$
$f(t)$	$0$	$-\frac{9}{8}$	$2$

Dựa vào bảng biến thiên ta có:  $m = \min_{[-1; 1]} f(t) = -\frac{9}{8}$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$ .

a) Hàm số có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$ .

b) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = 12\pi$ .

c) Hàm số là hàm số lẻ.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số là  $13$ .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng: Hàm số  $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$  có tập xác định là  $D = \mathbb{R}$

b) Sai: Hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$ . Nên mệnh đề b sai.

c) Sai: Ta có  $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

Tập xác định  $D = \mathbb{R}$  với  $\forall x \in D$  thì  $-x \in D$ .

Ta có  $y(x) = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$  và  $y(-x) = 2\cos\left(\frac{\pi(-x)}{6}\right) + 11 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$ .

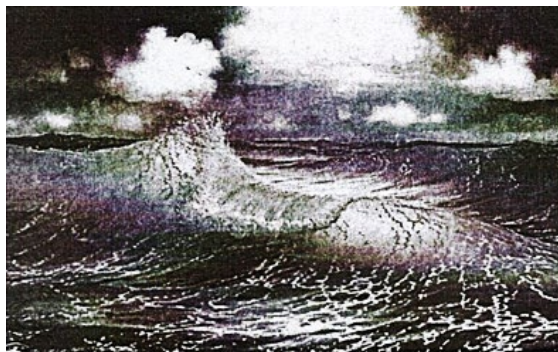
Vậy  $y(x) = y(-x)$  nên hàm số  $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$  là hàm số chẵn.

d) Đúng: Ta có  $y = 2\sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

Nên  $-2 \leq 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 9 \leq 2\cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11 \leq 13 \Leftrightarrow 9 \leq y \leq 13$ .

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 13.

**Câu 4:** Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm  $t$  (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số  $h(t) = 75\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$ , trong đó  $h(t)$  được tính bằng centimét.



a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 cm.

b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm

c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc  $t = 0$  giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây

d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc  $t = 0$  giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------

a) Đúng: Khi  $t = 5$  ta có:  $h(5) = 75\sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{8}\right) \approx 69,3$  cm.

b) Đúng: Khi  $t = 20$  ta có:  $h(20) = 75\sin\left(\frac{\pi \cdot 20}{8}\right) = 75$  cm.

c) Sai:

d) Sai: Ta có:  $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Rightarrow 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 75$  hay  $h(t) \leq 75$ .

Giá trị lớn nhất của  $h(t)$  là 75 khi đó  $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{8} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow t = 4 + 16k (k \in \mathbb{Z})$ . Vì  $t \in [0; 30] \Rightarrow t \in \{4; 20\}$  (ứng với  $k$  bằng 0 và 1).

Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì con sóng đạt chiều cao cực đại là 75 cm.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Biết rằng tập giá trị của hàm số  $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$  là  $T = [a; b]$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 10a - 2b$ ?

**Lời giải**

**Trả lời: -8**

Hàm số có tập xác định  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2\sin x + 2 = -\sin^2 x + 2\sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$

Do  $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow 4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4$ .

Vậy giá trị của hàm số là  $T = [0; 4]$  nên  $\begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = 10a - 2b = 10 \cdot 0 - 2 \cdot 4 = -8$ .

**Câu 2:** Biết rằng tập giá trị của hàm số  $y = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x + 4}$  là  $T = [a; b]$ . Tính giá trị biểu thức  $P = 11(a + b)$ ?

**Lời giải**

**Trả lời: -8**

Tập xác định hàm số  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $y = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x + 4} \Leftrightarrow y(\sin x + 2\cos x + 4) = 2\sin x + \cos x$

$\Leftrightarrow (y - 2)\sin x + (2y - 1)\cos x = -4y$ .

Điều kiện để tồn tại cặp  $(x; y)$  là  $(y - 2)^2 + (2y - 1)^2 \geq (-4y)^2$

$\Leftrightarrow -11y^2 - 8y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4 - \sqrt{71}}{11} \leq y \leq \frac{-4 + \sqrt{71}}{11}$ .

Vậy miền giá trị hàm số là  $T = \left[ \frac{-4 - \sqrt{71}}{11}; \frac{-4 + \sqrt{71}}{11} \right]$  nên  $P = 11(a + b) = -8$

**Câu 3:** Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ  $40^\circ$  bắc trong ngày thứ  $t$  của một năm không nhuận được cho bởi hàm số  $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12, t \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq 365$ . Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

**Lời giải**

**Trả lời: 353**

Ta có:  $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] \geq -1 \quad \forall t \Rightarrow d(t) \geq 3 \cdot (-1) + 12 = 9$ . Dấu "=" xảy ra khi:

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t-80 = -91 + 364k \Leftrightarrow t = -11 + 364k$$

$$\text{Mà } 0 < t \leq 365 \Rightarrow 0 < -11 + 364k \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} < k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 353.$$

Vậy thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất vào ngày thứ 353 trong năm.

**Câu 4:** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm  $t$  (giờ) trong một ngày bởi công thức  $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$ . Mực nước của kênh cao nhất khi  $t$  bằng bao nhiêu?

**Lời giải**

**Trả lời: 14**

Mực nước của kênh cao nhất khi độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất.

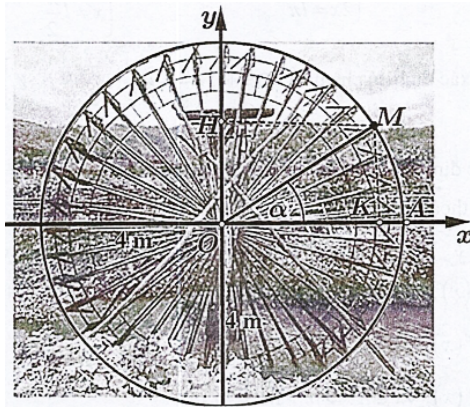
$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12 \leq 15.$$

$$\max h = 15 \text{ khi } \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 16k.$$

$$\text{Trong 1 ngày có 24 giờ nên } 0 \leq -2 + 4k \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{26}{16}.$$

Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 1 \Rightarrow t = 14$  giờ.

**Câu 5:** Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm  $O$ , bán kính là  $4m$ . Xét chất điểm  $M$  thuộc đường tròn đó và góc  $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$ . Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn  $(O; 4)$  và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ( $t = 0$  giây khi điểm  $M$  trùng  $A$ ). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm  $M$  ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



**Lời giải**

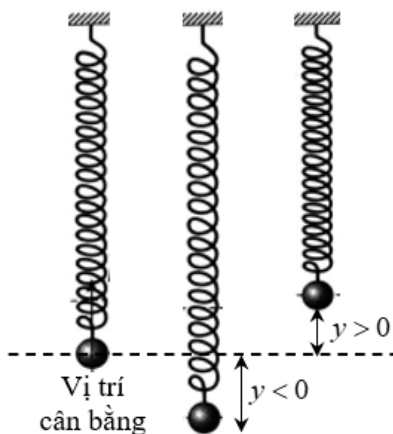
**Trả lời: 10**

$$\text{Ta có: } h(x) = 4 + 4 \sin \alpha.$$

Khi  $M$  ở vị trí cao nhất so với mặt nước tức là  $h(x) = 8$  thì  $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$  (vì chỉ xét 1

vòng quay đầu tiên). Thời gian thực hiện của guồng nước là:  $t = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 40}{2\pi} = 10$  (giây).

**Câu 6:** Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $y = 25\sin 4\pi t$  ở đó  $y$  được tính bằng centimét còn thời gian  $t$  được tính bằng giây. Gọi  $a$  là chu kì dao động của con lắc lò xo;  $b$  (Hz) là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và  $c$  (cm) là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính  $a + b + c$



**Lời giải**

**Trả lời: 52,5**

Hàm số  $y = 25\sin 4\pi t$  tuần hoàn với chu kì  $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$  suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là  $T = \frac{1}{2}$  giây nên  $a = 0,5$ .

Vì chu kì dao động của con lắc là  $T = \frac{1}{2}$  giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là  $b = f = \frac{1}{T} = 2$  Hz.

Vì phương trình dao động của con lắc là  $y = 25\sin 4\pi t$  nên biên độ dao động của nó là  $A = 25$  cm. Từ đó khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là  $c = 2A = 50$  cm.

Vậy  $a + b + c = 0,5 + 2 + 50 = 52,5$ .

----- HẾT -----



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN ĐỀ TEST SỐ 01

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Tìm tập nghiệm của phương trình  $\sin x = 0$  là.

- A.  $S = \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .                      B.  $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .  
 C.  $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .                      D.  $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 2:** Phương trình  $1 - \cos 2x = 0$  có tập nghiệm là:

- A.  $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .    B.  $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .    C.  $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .    D.  $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 3:** Số nghiệm của phương trình  $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$  với  $\pi \leq x \leq 5\pi$  là:

- A. 0.                      B. 3.                      C. 1.                      D. 2.

**Câu 4:** Nghiệm của phương trình  $\cos x = \cos 60^\circ$  là

- A.  $x = 120^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .                      B.  $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = 120^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$ .  
 C.  $x = \pm 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .                      D.  $x = 60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 5:** Tập nghiệm  $S$  của phương trình  $\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0$ .

- A.  $S = \left\{-\frac{\pi}{9} + k3\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .                      B.  $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .  
 C.  $S = \{-\pi + k3\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ .                      D.  $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .

**Câu 6:** Tập nghiệm của phương trình  $\sin x = \sqrt{3} \cos x$  là

- A.  $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .    B.  $\emptyset$ .    C.  $\{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .    D.  $\{\sqrt{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 7:** Nghiệm của phương trình  $\cot 2x = -\sqrt{3}$  là

- A.  $x = \operatorname{arccot}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      B.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .  
 C.  $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .                      D.  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 8:** Nghiệm của phương trình  $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  là

A.  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

B.  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

C.  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

D.  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 9:** Số nghiệm của phương trình  $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$  trên  $[0; 2\pi]$  là:

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2

**Câu 10:** Số nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{2}{5}$  trên khoảng  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$  là:

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

**Câu 11:** Tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A.  $\frac{\pi}{12}$ .

B.  $-\frac{2\pi}{3}$ .

C.  $\frac{\pi}{4}$ .

D.  $-\frac{3\pi}{4}$

**Câu 12:** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan 2x = \tan x$  trên  $[-\pi; 2\pi]$  là

A.  $\pi$ .

B.  $\frac{\pi}{2}$ .

C.  $4\pi$ .

D.  $2\pi$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho phương trình lượng giác  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ .

a) Phương trình đã cho tương đương  $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$

b) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có 3 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{3\pi}{2}$

d) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{11\pi}{12}$

**Câu 2:** Cho phương trình lượng giác  $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

a) Phương trình đã cho tương đương  $\cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

b) Phương trình đã cho có nghiệm  $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  bằng  $\frac{-5\pi}{9}$

d) Trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{9}$

**Câu 3:** Cho phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ .

a) Phương trình đã cho có nghiệm  $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

b) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có 2 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{7\pi}{6}$

d) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{5\pi}{6}$

**Câu 4:** Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x = 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$ ; trong đó  $t$  là

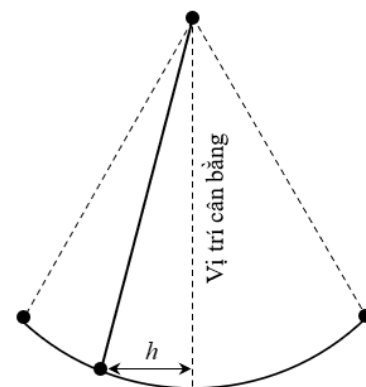
thời gian được tính bằng giây và quãng đường  $h = |x|$  được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng.

a) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là  $h = 1,5 \text{ m}$ .

b) Trong 10 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất

c) Khi vật ở vị trí cân bằng thì  $\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$

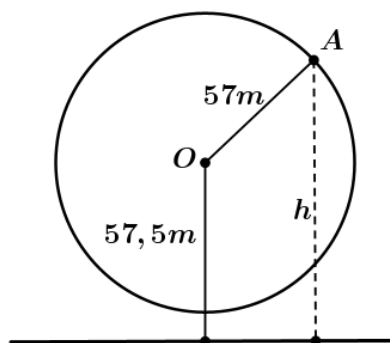
d) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng 4 lần?



**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.**

**Câu 1:** Phương trình  $\cos x = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc nửa khoảng  $(0; 2021\pi]$ ?

**Câu 2:** Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách  $h$  (m) từ một cabin gắn tại điểm  $A$  của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức:  $h(t) = 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$  với  $t$  là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ( $t \geq 0$ ). Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm  $t = 0$  (phút), tại thời điểm nào của  $t$  thì cabin ở vị trí cao nhất?



**Câu 3:** Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức  $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$ , ở đó  $S$  được tính bằng mét, còn  $t$  là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tại thời điểm nào trong buổi sáng thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

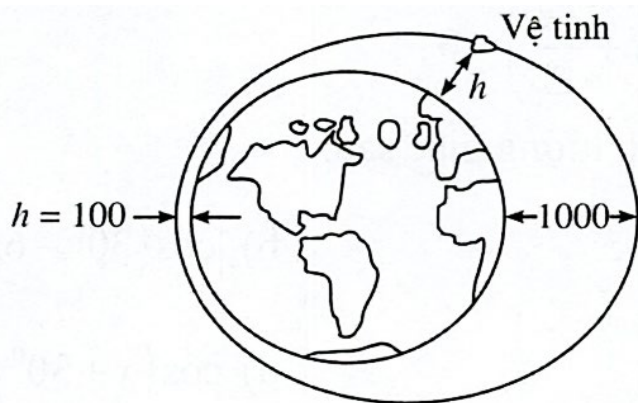
**Câu 4:** Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x = 2 \cos \left( 5t - \frac{\pi}{6} \right)$ . Ở đây thời gian  $t$  tính bằng giây và quãng đường  $x$  tính bằng centimet. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

**Câu 5:** Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):

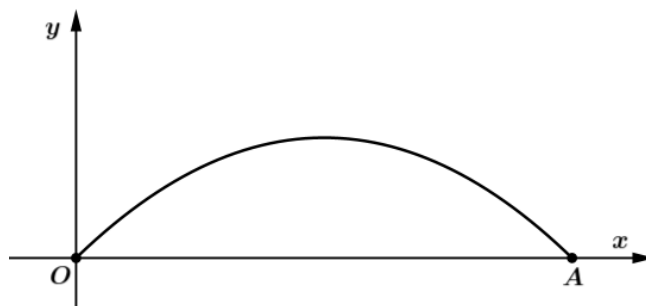
Độ cao  $h$  (tính bằng kilômet) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi

công thức  $h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$ . Trong

đó  $t$  là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất  $250 \text{ km}$ . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



**Câu 6:** Một cây cầu có dạng cung  $OA$  của đồ thị hàm số  $y = 4,8 \sin \frac{x}{9}$  và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình dưới đây:



Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Tính chiều rộng tối đa của khối hàng hóa đó để sà lan có thể đi qua được gầm cầu.



----- HẾT -----



**Lời giải**

Ta có  $\sin x = \sqrt{3} \cos x$ .

Với  $\cos x = 0$  thay vào phương trình, ta thấy vô nghiệm.

Với  $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ , ta có  $\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

So với điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là  $\{\arctan 2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$ .

**Câu 7:** Nghiệm của phương trình  $\cot 2x = -\sqrt{3}$  là

**A.**  $x = \operatorname{arccot}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .                      **B.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

**C.**  $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .                      **D.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cot 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

**Câu 8:** Nghiệm của phương trình  $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  là

**A.**  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      **B.**  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .                      **D.**  $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 9:** Số nghiệm của phương trình  $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$  trên  $[0; 2\pi]$  là:

**A.** 5.                      **B.** 3.                      **C.** 4.                      **D.** 2

**Lời giải**

Ta có  $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}$ .

Khi đó  $x \in [0; 2\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{5} \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{-5}{12} \leq k \leq \frac{55}{12}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0; 1; 2; 3; 4$

Vậy có 5 nghiệm thuộc khoảng  $[0; 2\pi]$ .

**Câu 10:** Số nghiệm của phương trình  $\cos x = \frac{2}{5}$  trên khoảng  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$  là:

**A.** 2.                      **B.** 1.                      **C.** 4.                      **D.** 3.

**Lời giải**

Ta có  $\cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2}{5} + k2\pi$ . Vì  $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow x = \arccos \frac{2}{5}; x = -\arccos \frac{2}{5} + 2\pi$

là thỏa mãn.

**Câu 11:** Tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A.  $\frac{\pi}{12}$ .

B.  $\frac{-2\pi}{3}$ .

C.  $\frac{\pi}{4}$ .

D.  $\frac{-3\pi}{4}$ .

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}$$

$$\text{Cho } k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 0 \end{cases} . \text{ Cho } k = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5\pi}{6} \\ x = -\pi \end{cases}$$

**Câu 12:** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan 2x = \tan x$  trên  $[-\pi; 2\pi]$  là

A.  $\pi$ .

B.  $\frac{\pi}{2}$ .

C.  $4\pi$ .

D.  $2\pi$ .

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định: } \begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Khi đó  $\tan 2x = \tan x \Leftrightarrow 2x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Do  $x \in [-\pi; 2\pi]$  nên  $x \in \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trên  $[-\pi; 2\pi]$  là  $2\pi$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho phương trình lượng giác  $\sin 2x = -\frac{1}{2}$ .

a) Phương trình đã cho tương đương  $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$

b) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có 3 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{3\pi}{2}$

d) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{11\pi}{12}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai:  $\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin -\frac{\pi}{6}$

b) Sai: Phương trình đã cho  $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$0 < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-\pi}{12} + k\pi < \pi \\ 0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} \\ x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$

c) Đúng: Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; \pi)$   $\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$

d) Đúng: Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{11\pi}{12}$

**Câu 2:** Cho phương trình lượng giác  $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ .

a) Phương trình đã cho tương đương  $\cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

b) Phương trình đã cho có nghiệm  $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  bằng  $\frac{-5\pi}{9}$

d) Trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{9}$

**Lời giải**

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai:  $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{3}\right)$ .

b) Sai: Phương trình đã cho  $\Leftrightarrow 3x = \frac{-\pi}{3} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$

c) Đúng:  $-\frac{\pi}{2} < \frac{-\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} < 0 \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{1}{3} \Rightarrow k = \{-1; 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{9} \\ x = \frac{-4\pi}{9} \end{cases}$ .

d) Đúng: Trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$  phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{9}$

**Câu 3:** Cho phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ .

a) Phương trình đã cho có nghiệm  $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

b) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có 2 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{7\pi}{6}$

d) Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{5\pi}{6}$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	----------------	---------------	----------------

a) Đúng: Ta có:  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

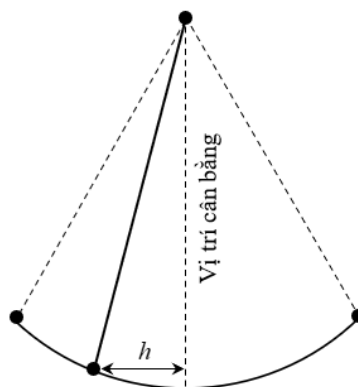
b) Đúng: Vì  $x \in (0; \pi)$  nên  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng  $(0; \pi)$  là  $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$ .

c) Sai:  $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$

d) Đúng: Trong khoảng  $(0; \pi)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{5\pi}{6}$

**Câu 4:** Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x = 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$ ; trong đó  $t$  là thời gian được tính bằng giây và quãng đường  $h = |x|$  được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng.



a) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là  $h = 1,5 \text{ m}$ .

b) Trong 10 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất

c) Khi vật ở vị trí cân bằng thì  $\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$

d) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng 4 lần?

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	---------------	----------------	---------------

Ta có  $h = |x| = \left|1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)\right| \leq 1,5$ .

a) Đúng: Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là  $h = 1,5 \text{ m}$ .

Khi đó  $\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t\pi}{4} = k2\pi \\ \frac{t\pi}{4} = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8k \\ t = 4 + 8k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

b) Sai: Vậy trong 10 giây đầu tiên thì vật ở xa vị trí cân bằng nhất tại các thời điểm:  
 $t = 0, t = 4, t = 8$  (giây).

c) Đúng: Khi vật ở vị trí cân bằng thì  $x = 0 \Leftrightarrow 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$   
 $\Leftrightarrow \frac{t\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 2 + 4k (k \in \mathbb{Z}).$

d) Sai: Vậy trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật ở vị trí cân bằng tại các thời điểm  $t = 2; t = 6$   
 $t = 10; t = 14, t = 18$  (giây); tức là có 5 lần vật qua vị trí cân bằng.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Phương trình  $\cos x = 0$  có bao nhiêu nghiệm thuộc nửa khoảng  $(0; 2021\pi]$ ?

**Lời giải**

**Trả lời: 2021**

Ta có  $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi.$

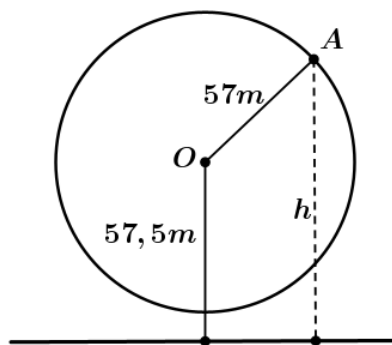
Do đó phương trình có 2 nghiệm trên nửa khoảng  $(0; 2\pi]$ .

Suy ra phương trình có 2020 nghiệm trên nửa khoảng  $(0; 2020\pi]$ .

Trên nửa khoảng  $(2020\pi; 2021\pi]$  phương trình có thêm 1 nghiệm nữa.

Vậy phương trình  $\cos x = 0$  có 2021 nghiệm thuộc nửa khoảng  $(0; 2021\pi]$ .

**Câu 2:** Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách  $h$  (m) từ một cabin gắn tại điểm  $A$  của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức:  $h(t) = 57\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$  với  $t$  là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ( $t \geq 0$ ). Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm  $t = 0$  (phút), tại thời điểm nào của  $t$  thì cabin ở vị trí cao nhất?



**Lời giải**

**Trả lời: 7,5**

Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi  $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$  hay  $t = 7,5$  (phút)

**Câu 3:** Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức  $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$ , ở đó  $S$  được tính bằng mét, còn  $t$  là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tại thời điểm nào trong buổi sáng thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

**Lời giải**

**Trả lời: 9**

Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà khi:

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right| = 40 \Leftrightarrow \cot \frac{\pi}{12} t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12} t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k (k \in \mathbb{Z})$$

Vì  $0 \leq t \leq 12$  nên  $t = 3$  hoặc  $t = 9$ , tức là tại thời điểm 9 giờ sáng thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

**Câu 4:** Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x = 2 \cos \left( 5t - \frac{\pi}{6} \right)$ . Ở đây thời gian  $t$  tính bằng giây và quãng đường  $x$  tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

**Lời giải**

**Trả lời: 9**

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hoà là vị trí vật đứng yên khi đó  $x = 0$  ta có:

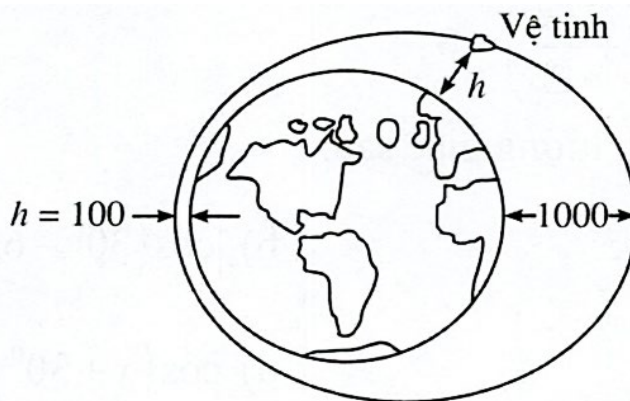
$$2 \cos \left( 5t - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow \cos \left( 5t - \frac{\pi}{6} \right) = 0 \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + k \frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là  $0 \leq t \leq 6$  hay  $0 \leq \frac{2\pi}{15} + k \frac{\pi}{5} \leq 6$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{90 - 2\pi}{3\pi} \text{ vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

**Câu 5:** Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao  $h$  (tính bằng kilômét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức  $h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$ . Trong đó  $t$  là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo.

Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km. Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Lời giải**

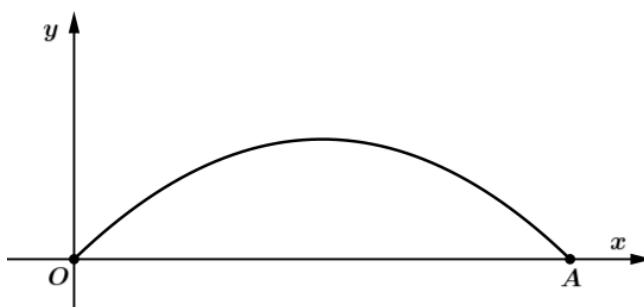
**Trả lời: 36,6**

Ta có phương trình:  $550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50}t = 250 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50}t = -\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{50}t \approx 2,3 + k2\pi \\ \frac{\pi}{50}t \approx -2,3 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 36,61 + k100 \\ t \approx -36,61 + k100 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, tại thời điểm  $t \approx 36,6$  (phút) thì ta có thể thực hiện thí nghiệm đó.

**Câu 6:** Một cây cầu có dạng cung  $OA$  của đồ thị hàm số  $y = 4,8\sin \frac{x}{9}$  và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình dưới đây:



Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Tính chiều rộng tối đa của khối hàng hóa đó để sà lan có thể đi qua được gầm cầu.



**Lời giải**

**Trả lời: 13**

Giải phương trình  $y = 0 \Leftrightarrow 4,8\sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} = k\pi \Leftrightarrow x = k9\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Do đó đồ thị cắt trục  $Ox$  tại các điểm có hoành độ  $0; 9\pi; 18\pi; \dots$

Vì thế  $A(9\pi; 0)$  nên chiều rộng của con sông là  $OA = 9\pi \approx 28,3m$

Xét đường thẳng  $y = 3,6$

Ta có  $y = 4,8\sin \frac{x}{9} \leq 4,8$ , nên đường thẳng  $y = 3,6$  cắt một phần đồ thị của hàm số

$y = 4,8\sin \frac{x}{9}$  tại hai điểm  $M(x_1; 3,6), N(x_2; 3,6)$ .

Giải phương trình  $4,8\sin \frac{x}{9} = 3,6 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \frac{3}{4}$  (1),  $x_1, x_2$  là hai nghiệm dương nhỏ nhất của (1)

$-1 \leq \frac{3}{4} \leq 1$  nên tồn tại một số  $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sao cho  $\sin \alpha = \frac{3}{4}$ .

$$\text{Ta có } \sin \frac{x}{9} = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} = \alpha + k2\pi \\ \frac{x}{9} = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9\alpha + k18\pi \\ x = 9\pi - 9\alpha + k18\pi \end{cases}$$

Do  $x_1; x_2 \in (0; 9\pi)$  nên  $x_1 \approx 9\alpha \approx 7,6325$ ;  $x_2 \approx 9\pi - 9\alpha \approx 20,6418$  nên  $x_2 - x_1 < 13,1$ .

Vậy chiều rộng của khối hàng hoá tối đa là  $13m$

----- **HẾT** -----



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## BÀI 4: PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

### ĐỀ TEST SỐ 02

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Phương trình  $\cos 3x = \cos \frac{\pi}{15}$  có nghiệm là:

- A.**  $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$ .      **B.**  $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$ .      **C.**  $x = \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$ .      **D.**  $x = \frac{-\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$ .

**Câu 2:** Nghiệm của phương trình  $2 \sin x + 1 = 0$  là

- A.**  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ .      **B.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ .  
**C.**  $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{8} + k2\pi$ .      **D.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ .

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình  $\sin \frac{x}{2} = 1$  là

- A.**  $x = \pi + k2\pi$ .      **B.**  $x = k2\pi$ .      **C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .      **D.**  $x = \pi + k4\pi$ .

**Câu 4:** Giải phương trình  $2 \cos x = -1$  được nghiệm là

- A.**  $\left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **B.**  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **C.**  $\left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **D.**  $\left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 5:** Giải phương trình  $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$ .

- A.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .      **B.**  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .  
**C.**  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .      **D.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 6:** Nghiệm của phương trình  $\tan x - 1 = 0$  là

- A.**  $x = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{2}$ .      **B.**  $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ .      **C.**  $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi$ .      **D.**  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**Câu 7:** Tìm nghiệm của phương trình  $\cot x = \sqrt{3}$ .

- A.**  $x = 60^\circ + k.180^\circ$ .      **B.**  $x = 60^\circ + k.360^\circ$ .      **C.**  $x = 30^\circ + k.180^\circ$ .      **D.**  $x = -60^\circ + k.180^\circ$ .

**Câu 8:** Hỏi trên  $\left[ 0; \frac{\pi}{2} \right]$ , phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 1.      **B.** 2.      **C.** 3.      **D.** 4.

**Câu 9:** Số nghiệm của phương trình  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  trong khoảng  $(0; 3\pi)$  là

- A.** 4.      **B.** 1.      **C.** 6.      **D.** 2.

**Câu 10:** Nghiệm của phương trình  $2\sin x - \sqrt{3} = 0$  là

- A.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$       B.  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- C.  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$       D.  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 11:** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan 5x - \tan x = 0$  trên nửa khoảng  $[0; \pi)$  bằng

- A.  $\pi.$       B.  $\frac{5\pi}{2}.$       C.  $\frac{3\pi}{2}.$       D.  $2\pi.$

**Câu 12:** Nghiệm của phương trình  $\tan 3x = \tan x$  là :

- A.  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$       B.  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$       C.  $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$       D.  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho phương trình lượng giác  $\tan(2x - 15^\circ) = 1.$

- a) Phương trình đã cho có nghiệm  $x = 30^\circ + k90 (k \in \mathbb{Z})$   
 b) Trong khoảng  $(-180^\circ; 90^\circ)$  thì phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-30^\circ$   
 c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(-180^\circ; 90^\circ)$  bằng  $180^\circ$   
 d) Trong khoảng  $(-180^\circ; 90^\circ)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $60^\circ$

**Câu 2:** Cho phương trình lượng giác  $2\cos x = \sqrt{3}.$

- a) Phương trình có nghiệm  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$   
 b) Trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  phương trình có 4 nghiệm  
 c) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  bằng  $\frac{25\pi}{6}$   
 d) Trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{13\pi}{6}$

**Câu 3:** Cho phương trình lượng giác  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

- a) Phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$   
 b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{2\pi}{9}$   
 c) Trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  phương trình đã cho có 3 nghiệm  
 d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  bằng  $\frac{7\pi}{9}$

**Câu 4:** Cho phương trình lượng giác  $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

a) Phương trình đã cho có nghiệm  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{3}$

c) Khi  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$  thì phương trình có ba nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$  bằng  $\frac{\pi}{6}$

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin(\cos x) = 0$  trên đoạn  $[1; 2021]$ .

**Câu 2:** Số giờ có ánh sáng mặt trời của thành phố B trong ngày thứ  $t$  (ở đây  $t$  là số ngày tính từ ngày mùng 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hóa bởi hàm số:

$$S(t) = 12 + 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365. \text{ Hỏi vào ngày thứ mấy trong khoảng}$$

thời gian 6 tháng đầu trong năm thì thành phố B có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

**Câu 3:** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước

trong kênh được tính tại thời điểm  $t$  (giờ) trong một ngày bởi công thức  $h = -3 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{6}\right) + 12$

. Hỏi trong một ngày có mấy thời điểm con sông có mực nước sâu nhất?

**Câu 4:** Chiều cao  $h(m)$  của một cabin trên vòng quay vào thời điểm  $t$  giây sau khi bắt đầu chuyển động

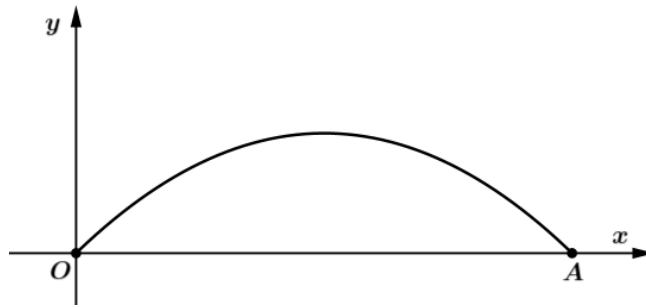
được cho bởi công thức  $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$ . Cabin đạt độ cao tối đa bao nhiêu lần trong

10 phút đầu tiên kể từ khi bắt đầu chuyển động?

**Câu 5:** Số các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình:  $(3 \cos x - 2)(2 \cos x + 3m - 1) = 0$  có 3

nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ ?

**Câu 6:** Một cây cầu có dạng cung  $OA$  của đồ thị hàm số  $y = 4,8 \sin \frac{x}{9}$  và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình dưới đây:



Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là 9m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Tính chiều cao tối đa của khối hàng hóa đó để sà lan có thể đi qua được gầm cầu.



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Phương trình  $\cos 3x = \cos \frac{\pi}{15}$  có nghiệm là:

- A.**  $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$ .      **B.**  $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$ .      **C.**  $x = \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$ .      **D.**  $x = \frac{-\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$ .

**Lời giải**

Ta có  $\cos 3x = \cos 12^\circ \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{15} \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 2:** Nghiệm của phương trình  $2 \sin x + 1 = 0$  là

- A.**  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ .      **B.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ .  
**C.**  $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{8} + k2\pi$ .      **D.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ .

**Lời giải**

Ta có:  $2 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình có nghiệm là  $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$ .

**Câu 3:** Nghiệm của phương trình  $\sin \frac{x}{2} = 1$  là

- A.**  $x = \pi + k2\pi$ .      **B.**  $x = k2\pi$ .      **C.**  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ .      **D.**  $x = \pi + k4\pi$ .

**Lời giải**

Ta có  $\sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 4:** Giải phương trình  $2 \cos x = -1$  được nghiệm là

- A.**  $\left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **B.**  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **C.**  $\left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .      **D.**  $\left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Lời giải**

Ta có  $2 \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 5:** Giải phương trình  $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$ .

- A.**  $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .      **B.**  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$ .  
**C.**  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .      **D.**  $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

Điều kiện:  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . Ta có  $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$

Với điều kiện  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$  thì phương trình  $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ . Vậy phương trình có nghiệm là  $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 6:** Nghiệm của phương trình  $\tan x - 1 = 0$  là

- A.**  $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ .      **B.**  $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$ .      **C.**  $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi$ .      **D.**  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Câu 7:** Tìm nghiệm của phương trình  $\cot x = \sqrt{3}$ .

- A.**  $x = 60^\circ + k.180^\circ$ .      **B.**  $x = 60^\circ + k.360^\circ$ .      **C.**  $x = 30^\circ + k.180^\circ$ .      **D.**  $x = -60^\circ + k.180^\circ$ .

**Lời giải**

Ta có:  $\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

**Câu 8:** Hỏi trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , phương trình  $\sin x = \frac{1}{2}$  có bao nhiêu nghiệm?

- A.** 1.      **B.** 2.      **C.** 3.      **D.** 4.

**Lời giải**

Ta có:  $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

Trên đoạn  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  chỉ có một nghiệm  $x = \frac{\pi}{6}$  thoả mãn.

**Câu 9:** Số nghiệm của phương trình  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  trong khoảng  $(0; 3\pi)$  là

- A.** 4.      **B.** 1.      **C.** 6.      **D.** 2.

**Lời giải**

Ta có  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$ .

Mà  $x \in (0; 3\pi)$  nên  $\begin{cases} 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi < 3\pi \\ 0 < \frac{\pi}{3} + k\pi < 3\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{6} < k < \frac{17}{6} \\ -\frac{1}{3} < k < \frac{8}{3} \end{cases}$  và do  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $\begin{cases} k \in \{0; 1; 2\} \\ k \in \{0; 1; 2\} \end{cases}$ .

Vậy phương trình  $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  có 6 nghiệm trong khoảng  $(0; 3\pi)$

**Câu 10:** Nghiệm của phương trình  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$  là

**A.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**B.**  $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**C.** 
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**D.**  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

Ta có  $2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

**Câu 11:** Tổng các nghiệm của phương trình  $\tan 5x - \tan x = 0$  trên nửa khoảng  $[0; \pi)$  bằng

**A.**  $\pi.$

**B.**  $\frac{5\pi}{2}.$

**C.**  $\frac{3\pi}{2}.$

**D.**  $2\pi.$

**Lời giải**

Ta có:  $\tan 5x - \tan x = 0$  (1). Điều kiện:  $\begin{cases} 5x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Phương trình (1)  $\Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4} (k \in \mathbb{Z})$

Do  $x \in [0; \pi)$  và kết hợp với điều kiện suy ra  $x \in \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}.$

Tổng các nghiệm:  $0 + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi.$

**Câu 12:** Nghiệm của phương trình  $\tan 3x = \tan x$  là :

**A.**  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**B.**  $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

**C.**  $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}.$

**D.**  $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

**Lời giải**

Điều kiện:  $\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}.$

Ta có:  $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Kết hợp điều kiện, khi đó phương trình có nghiệm là  $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho phương trình lượng giác  $\tan(2x - 15^\circ) = 1.$

a) Phương trình đã cho có nghiệm  $x = 30^\circ + k90 (k \in \mathbb{Z})$

- b) Trong khoảng  $(-180^\circ; 90^\circ)$  thì phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-30^\circ$   
 c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $(-180^\circ; 90^\circ)$  bằng  $180^\circ$   
 d) Trong khoảng  $(-180^\circ; 90^\circ)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $60^\circ$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	---------------	---------------	---------------

a) Đúng:  $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$

b) Sai:  $-180^\circ < x < 90^\circ \Rightarrow -180^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = \{-2; -1; 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = -150^\circ \\ x = -60^\circ \\ x = 30^\circ \end{cases}$

c) Sai:  $-150 + (-60) + 30 = -180$

d) Sai: Trong khoảng  $(-180^\circ; 90^\circ)$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $30^\circ$

**Câu 2:** Cho phương trình lượng giác  $2 \cos x = \sqrt{3}$ .

a) Phương trình có nghiệm  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) Trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  phương trình có 4 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  bằng  $\frac{25\pi}{6}$

d) Trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{13\pi}{6}$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	---------------	----------------	----------------

a) Sai: Ta có:  $2 \cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

b) Sai: Vì  $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  nên  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$ .

Vậy nghiệm  $x$  thỏa mãn đề bài là:  $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$ .

c) Đúng:  $\frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$

d) Đúng: Trong đoạn  $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$  phương trình có nghiệm lớn nhất bằng  $\frac{13\pi}{6}$

**Câu 3:** Cho phương trình lượng giác  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

a) Phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{2\pi}{9}$

c) Trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  phương trình đã cho có 3 nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  bằng  $\frac{7\pi}{9}$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Đúng</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	----------------	---------------	----------------

a) Sai: Phương trình có nghiệm  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

b) Đúng: Ta có:  $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

c) Sai: Vì  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  nên  $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{9}$ .

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

d) Đúng:  $\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$ .

**Câu 4:** Cho phương trình lượng giác  $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ .

a) Phương trình đã cho có nghiệm  $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{3}$

c) Khi  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$  thì phương trình có ba nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng  $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$  bằng  $\frac{\pi}{6}$

**Lời giải**

<b>a) Sai</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Sai</b>	<b>d) Đúng</b>
---------------	---------------	---------------	----------------

a) Sai: Phương trình tương đương với:  $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

b) Sai: Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng  $-\frac{\pi}{6}$

c) Sai: Vì  $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{7\pi}{12} < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{7}{6} < k < \frac{2}{3}$

Do  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{-1; 0\}$ . Với  $k = -1$  thì  $x = \frac{-\pi}{6}$ , với  $k = 0$  thì  $x = \frac{\pi}{3}$ .

Vậy  $x = \frac{-\pi}{6}$  và  $x = \frac{\pi}{3}$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d) Đúng:  $\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Tìm số nghiệm của phương trình  $\sin(\cos x) = 0$  trên đoạn  $[1; 2021]$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 643**

Ta có:  $\sin(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$ .

Mà:  $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq k\pi \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\pi} \leq k \leq \frac{1}{\pi} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0$ .

$\Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi \ (m \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \in [1; 2021]} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{2021}{\pi} - \frac{1}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 2; \dots; 642\}$

$\Rightarrow$  có 643 nghiệm thỏa mãn bài toán.

**Câu 2:** Số giờ có ánh sáng mặt trời của thành phố B trong ngày thứ  $t$  (ở đây  $t$  là số ngày tính từ ngày mùng 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hóa bởi hàm số:

$S(t) = 12 + 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right)$  với  $t \in \mathbb{Z}$  và  $0 < t \leq 365$ . Hỏi vào ngày thứ mấy trong khoảng

thời gian 6 tháng đầu trong năm thì thành phố B có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

**Lời giải**

**Trả lời: 34**

Thành phố B có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu

$12 + 2,83 \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) = 10 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t-80)\right) = -\frac{200}{283}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{365}(t-80) \approx -0,78 + k2\pi \\ \frac{2\pi}{365}(t-80) \approx 3,93 + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

Từ đó ta được  $\begin{cases} t \approx 34,69 + 365k \\ t \approx 308,3 + 365k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

Vì  $0 < t \leq 365$  nên  $k = 0$  suy ra  $t \approx 34,69$  (nhận) hoặc  $t \approx 308,3$  (loại)

Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm, tức là ngày 3 tháng 2 thì thành phố B sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.

**Câu 3:** Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm  $t$  (giờ) trong một ngày bởi công thức  $h = -3 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{6}\right) + 12$ .  
Hỏi trong một ngày có mấy thời điểm con sông có mực nước sâu nhất?

**Lời giải**

**Trả lời: 10**

Ta có:  $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1, \forall t \in \mathbb{R}$

Suy ra  $h = -3 \cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{6}\right) + 12 \leq 15$ . Dấu bằng xảy ra khi  $\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{6} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow t = 10 + 24k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Do  $0 \leq t \leq 24; t \in \mathbb{Z}$  nên chỉ có  $k = 0$  thỏa mãn.

Vậy vào thời điểm  $t = 10$  (giờ) thì con sông có mực nước sâu nhất.

**Câu 4:** Chiều cao  $h(m)$  của một cabin trên vòng quay vào thời điểm  $t$  giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức  $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$ . Cabin đạt độ cao tối đa bao nhiêu lần trong 10 phút đầu tiên kể từ khi bắt đầu chuyển động?

**Lời giải**

**Trả lời: 12**

Ta có  $h(t) = 30 + 20 \sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 50$

Cabin đạt độ cao tối đa khi  $\sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{25}{6} + 50k \quad (k \in \mathbb{Z})$ .

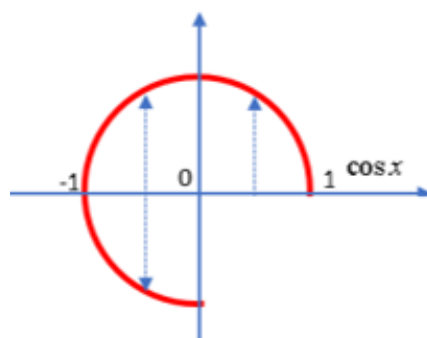
Vì  $0 \leq t \leq 600 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{25}{6} + 50k \leq 600 \Leftrightarrow -\frac{1}{12} \leq k \leq 12 - \frac{1}{12}$ .

Mà  $k \in \mathbb{Z}$ , suy ra  $k \in \{0; 1; \dots; 11\}$ . Vậy có 12 lần cabin đạt độ cao tối đa bao nhiêu lần trong 10 phút đầu tiên kể từ khi bắt đầu chuyển động.

**Câu 5:** Số các giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình:  $(3 \cos x - 2)(2 \cos x + 3m - 1) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$ ?

**Lời giải**

**Trả lời: 0**



Phương trình:  $(3 \cos x - 2)(2 \cos x + 3m - 1) = 0$  (\*)

Đặt  $t = \cos x$ , ta chú ý rằng (quan sát hình vẽ):

Nếu  $t = -1$  thì tồn tại 1 giá trị  $x = \pi$ .

Nếu với mỗi  $t \in (-1; 0)$  thì tồn tại 2 giá trị  $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \setminus \{\pi\}$ .

Nếu với mỗi  $t \in [0; 1)$  thì tồn tại 1 giá trị  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

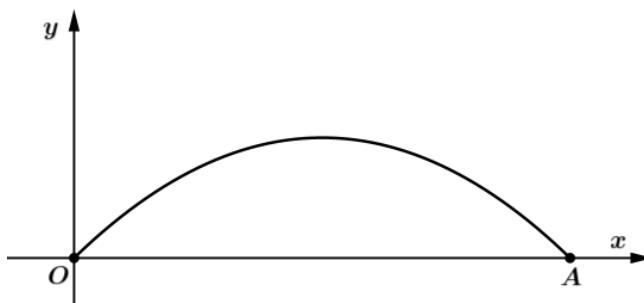
Phương trình (\*) trở thành:  $(3t - 2)(2t + 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{2}{3} & (1) \\ t = \frac{1 - 3m}{2} & (2) \end{cases}$

Phương trình (1) có 1 nghiệm  $t \in [0; 1]$  nên phương trình (\*) có 1 nghiệm  $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

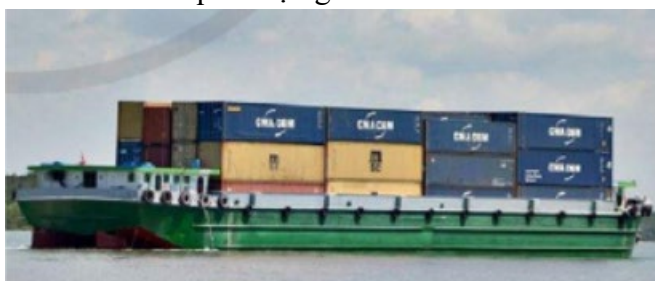
Vậy phương trình (\*) có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $\left(0; \frac{3\pi}{2}\right)$  khi và chỉ khi phương trình (2) phải có 1 nghiệm  $t \in (-1; 0)$ .

Suy ra  $-1 < \frac{1 - 3m}{2} < 0 \Leftrightarrow -2 < 1 - 3m < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} < m < 1$ .

**Câu 6:** Một cây cầu có dạng cung  $OA$  của đồ thị hàm số  $y = 4,8 \sin \frac{x}{9}$  và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình dưới đây:



Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là 9m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Tính chiều cao tối đa của khối hàng hóa đó để sà lan có thể đi qua được gầm cầu.



**Lời giải**

**Trả lời: 4,2**

Giải phương trình  $y = 0 \Leftrightarrow 4,8 \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} = k\pi \Leftrightarrow x = k9\pi (k \in \mathbb{Z})$ .

Do đó đồ thị cắt trục  $Ox$  tại các điểm có hoành độ  $0; 9\pi; 18\pi; \dots$

Vì thế  $A(9\pi; 0)$  nên chiều rộng của con sông là  $OA = 9\pi \approx 28,3m$

c) Cho  $0 < m < 4,8$ , giải sử đường thẳng  $y = m$  cắt  $(C)$  tại hai điểm  $P(x_3; m), Q(x_4; m), x_3, x_4$

là hai nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình  $4,8 \sin \frac{x}{9} = m$  (\*) sao cho  $x_4 - x_3 = 9$ .

$\Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \frac{m}{4,8}$ , vì  $0 < \frac{m}{4,8} < 1$  nên  $\exists \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  sao cho  $\sin \beta = \frac{m}{4,8}$  (\*)

Khi đó (2) trở thành  $\Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9\beta + k18\pi \\ x = 9(\pi - \beta) + k18\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

Hai nghiệm dương nhỏ nhất của (2) là  $x_3 = 9\beta, x_4 = 9(\pi - \beta)$

Ta có  $x_4 - x_3 = 9(\pi - \beta) - 9\beta = 0$ .

Do vậy  $m = 4,8 \sin \beta$  hay  $m = 4,8 \sin \frac{\pi - 1}{2} \approx 4,2$

Vậy chiều cao của mỗi khối hàng hoá tối đa là  $4,2m$ .

----- **HẾT** -----



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

### ĐỀ TEST SỐ 01

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Tính độ dài của cung trên đường tròn có bán kính  $R = 20(cm)$  và số đo  $\alpha = \frac{2\pi}{5}$
- A.**  $15,7(cm)$ .      **B.**  $18,8(cm)$ .      **C.**  $25,13(cm)$ .      **D.**  $21,99(cm)$ .
- Câu 2:** Trên đường tròn lượng giác điểm gốc  $A$ , điểm  $M$  thuộc đường tròn sao cho góc lượng giác  $(OA; OM)$  có số đo  $55^\circ$ . Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $M$  qua trục tung. Số đo của góc lượng giác  $(OA, ON)$  là
- A.**  $55^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .    **B.**  $125^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .    **C.**  $35^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .    **D.**  $235^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .
- Câu 3:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $\tan \alpha$ .
- A.**  $\tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .      **B.**  $\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .      **C.**  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ .      **D.**  $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ .
- Câu 4:** Cho các hàm số
- 1)  $y = \sin x$ .
  - 2)  $y = \sin x - \tan x$ .
  - 3)  $y = \sin^2 x$ .
  - 4)  $y = \cot 2x$ .
  - 5)  $y = \cos x + \cot x$ .
- Có bao nhiêu hàm số lẻ trong các hàm số trên?
- A.** 4.      **B.** 2.      **C.** 1.      **D.** 3.
- Câu 5:** Cho góc lượng giác  $(Ox, Ou) = -50^\circ$  và một góc lượng giác  $(Ox, Ov) = 120^\circ$ . Số đo của góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  là
- A.**  $170^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .      **B.**  $170^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .  
**C.**  $170^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{R}$ .    **D.**  $170^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{R}$ .
- Câu 6:** Cho  $\cos a = \frac{1}{3}$ , khi đó giá trị của  $\cos 2a$  bằng:
- A.**  $\frac{8}{9}$ .      **B.**  $\frac{7}{9}$ .      **C.**  $-\frac{7}{9}$ .      **D.**  $-\frac{8}{9}$ .
- Câu 7:** Rút gọn biểu thức  $B = \frac{\sin 2\alpha + \sin 4\alpha + \sin 6\alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ , ta được
- A.**  $4\sin 2\alpha$ .      **B.**  $\sin 2\alpha$ .      **C.**  $2\sin 2\alpha$ .      **D.**  $\sin 3\alpha$ .

**Câu 8:** Tìm tập xác định của hàm số  $y = 3 \tan^2 \left( \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} \right)$ .

**A.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**B.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**C.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**D.**  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

**Câu 9:** Gọi  $M, m$  lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số  $y = 5 \sin \left( x + \frac{\pi}{6} \right) + 9$ . Tính tổng  $T = M + m$ .

**A.**  $T = 18$ .

**B.**  $T = 4$ .

**C.**  $T = 9$ .

**D.**  $T = 14$ .

**Câu 10:** Tính tổng các nghiệm của phương trình  $2 \cos \left( x - \frac{\pi}{4} \right) + \sqrt{2} = 0$  trên  $\left( -\pi; \frac{3\pi}{2} \right)$

**A.**  $-\frac{\pi}{2}$ .

**B.**  $\frac{\pi}{2}$ .

**C.**  $\frac{3\pi}{2}$ .

**D.**  $\pi$ .

**Câu 11:** Giá trị của biểu thức  $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{42} - \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{42}$  là

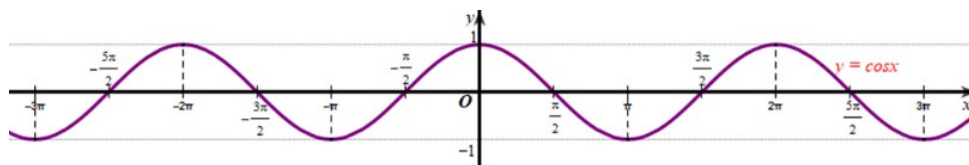
**A.**  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**B.**  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**C.**  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

**D.**  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 12:** Cho đồ thị hàm số  $y = \cos x$ .



Số giao điểm của đường thẳng  $y = \frac{1}{3}$  với đồ thị hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[-\pi; 2\pi]$  là

**A.** 3.

**B.** 2.

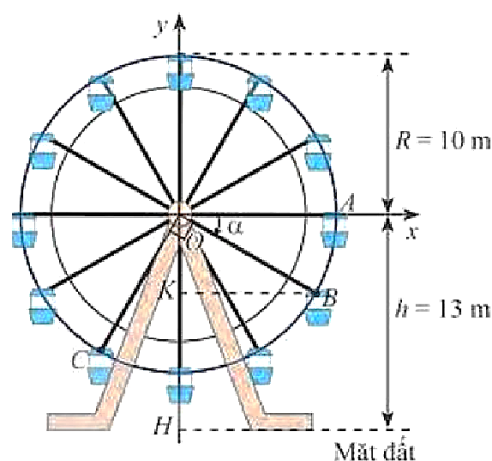
**C.** 1.

**D.** 4.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Trong hình bên, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm  $B$  và  $C$ .

Với  $\alpha$  là số đo của một góc lượng giác tia đầu  $OA$ , tia cuối  $OB$ .



a) Chiều cao từ điểm  $B$  đến mặt đất được tính bởi công thức  $(13 + 10 \sin \alpha)$  mét.

b) Độ cao của điểm  $B$  so với mặt đất khi  $\alpha = -30^\circ$  là  $8m$ .

c) Chiều cao từ điểm  $B$  đến mặt đất bằng  $23m$  khi và chỉ khi  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ .

d) Khi điểm  $B$  cách mặt đất  $4m$  thì điểm  $C$  cách mặt đất là  $12,96m$ .

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

- Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$
- Rút gọn hàm số trở thành  $y = \sin 2x$
- Hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $T = \pi$
- Nếu  $\sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}$  thì giá trị biểu thức  $P = \frac{2 \tan 2x + \cot 2x}{4 \tan 2x - 3 \cot 2x}$  là  $\frac{5}{14}$

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$ .

- Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$  và là hàm số chẵn.
- Hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$  đồng thời có tập giá trị là  $T = [0; 1]$ .
- Tập nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  là  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- Tổng các nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  trong đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{3\pi}{2}$ .

**Câu 4:** Cho phương trình lượng giác  $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - m + 1 = 0$ , trong đó  $m \in \mathbb{R}$  là tham số.

- $\frac{\pi}{6}$  là nghiệm của phương trình khi và chỉ khi  $m = 1$ .
- Khi  $m = 0$  phương trình có tập nghiệm là  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .
- Tập các giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm là  $[-1; 1]$ .
- Khi  $m = 1$  phương trình có 6 nghiệm phân biệt trong đoạn  $[0; 6\pi]$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Khi  $A$  có nghĩa, biểu thức  $A = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y$  có giá trị bằng

**Câu 2:** Một cái thang đơn có chiều dài  $5m$  có ghi “đề đảm bảo an toàn cần đặt thang sao cho góc tạo thành giữa thang và mặt đất nằm trong khoảng  $65^\circ$  đến  $75^\circ$ ”. Chiều cao lớn nhất tính từ mặt đất đến điểm cao nhất đặt thang là bao nhiêu (đơn vị mét)? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Câu 3:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sin^2 x + \cos x - 3$  là

**Câu 4:** Hình vẽ bên dưới là hai bánh răng của một động cơ, chúng có cùng kích thước. Khi động cơ hoạt động, hai bánh răng quay đều, cùng chiều. Biết tốc độ quay của bánh răng ở hình 2 gấp ba tốc độ quay của bánh răng ở hình 1 và phương trình biểu thị độ cao của điểm  $A$  ở bánh răng thứ nhất

là  $h = 2R + R \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$  (trong đó  $R$  là bán

kính bánh răng,  $t$  là thời gian tính bằng phút,  $h$  là độ cao của điểm  $A$ ). Giả sử tại thời điểm bắt đầu khởi động, hai điểm  $A, B$  có độ cao bằng nhau và tâm của hai bánh răng  $O_1, O_2$  ở độ cao  $2R$  so với mặt đất. Tìm thời điểm đầu tiên sau khi động cơ hoạt động hai điểm  $A, B$  có độ cao bằng nhau.

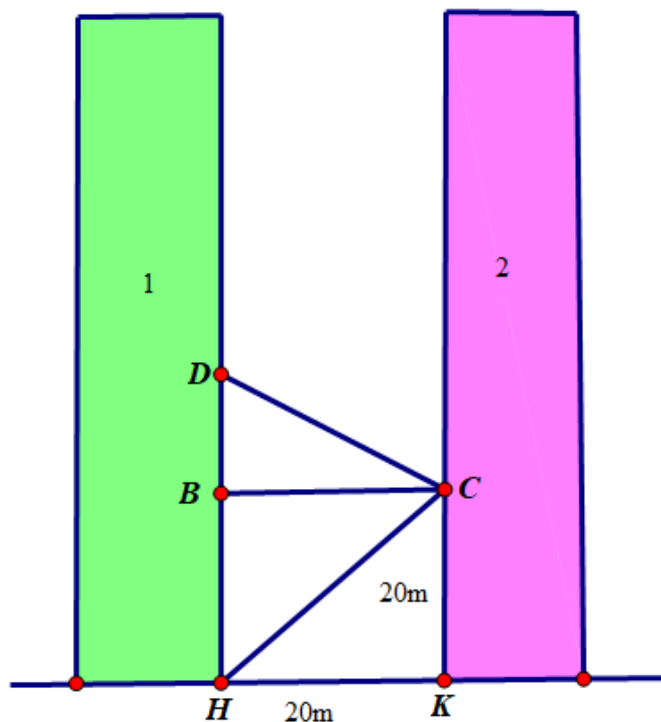


Hình 1

Hình 2

**Câu 5:** Tìm số giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2m + 2025$  nhận giá trị không âm trên tập xác định của nó.

**Câu 6:** Hai chung cư cao tầng với độ cao đều là  $90m$  xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là  $HK = 20m$ . Để đảm bảo an ninh cho tòa số 1 người ta cần lắp một số camera an ninh ở vị trí tòa số 2 như hình vẽ. Để góc quan sát của camera tại vị trí thấp nhất là sàn của tòa nhà số 1 người ta lắp camera đầu tiên cách sàn tòa nhà số 2 đúng  $20m$ . Biết góc quan sát theo chiều dọc của camera là  $80^\circ$ . Hỏi cần lắp tối thiểu bao nhiêu camera để đảm bảo có đủ góc quay của tất cả các tầng của tòa nhà số 1?



----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

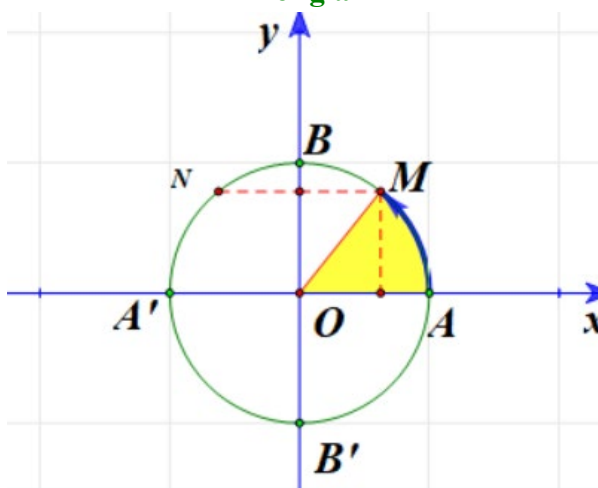
- Câu 1:** Tính độ dài của cung trên đường tròn có bán kính  $R = 20(cm)$  và số đo  $\alpha = \frac{2\pi}{5}$
- A.  $15,7(cm)$ .                      B.  $18,8(cm)$ .                      C.  **$25,13(cm)$** .                      D.  $21,99(cm)$ .

Lời giải

Ta có  $l = R.\alpha = 20.\frac{2\pi}{5} = 8\pi \approx 25,13(cm)$ .

- Câu 2:** Trên đường tròn lượng giác điểm gốc  $A$ , điểm  $M$  thuộc đường tròn sao cho góc lượng giác  $(OA;OM)$  có số đo  $55^\circ$ . Gọi  $N$  là điểm đối xứng với  $M$  qua trục tung. Số đo của góc lượng giác  $(OA,ON)$  là
- A.  $55^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .    B.  **$125^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$** .    C.  $35^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .    D.  $235^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

Lời giải



Vì góc lượng giác  $(OA;OM)$  có số đo bằng  $55^\circ$  nên  $\widehat{AOM} = 55^\circ$ ,  $N$  là điểm đối xứng với  $M$  qua trục  $Oy$  nên  $\widehat{AON} = 125^\circ$ . Do đó góc lượng giác  $(OA,ON)$  có số đo là  $125^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ .

- Câu 3:** Cho  $\sin \alpha = \frac{1}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Tính  $\tan \alpha$ .
- A.  $\tan \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ .                      B.  **$\tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$** .                      C.  $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$ .                      D.  $\tan \alpha = -2\sqrt{2}$ .

Lời giải

Ta có  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$ , mà  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$  nên  $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

- Câu 4:** Cho các hàm số
- 1)  $y = \sin x$ .
  - 2)  $y = \sin x - \tan x$ .
  - 3)  $y = \sin^2 x$ .
  - 4)  $y = \cot 2x$ .
  - 5)  $y = \cos x + \cot x$ .



A.  $T = 18$ .

B.  $T = 4$ .

C.  $T = 9$ .

D.  $T = 14$ .

Lời giải

Với  $\forall x \in \mathbb{R}$  ta có  $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1$ .

Suy ra  $4 \leq 5 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 9 \leq 14 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 14$ .

Giá trị lớn nhất của hàm số là  $M = 14$  khi  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là  $m = 4$  khi  $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 10:** Tính tổng các nghiệm của phương trình  $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0$  trên  $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

A.  $-\frac{\pi}{2}$ .

B.  $\frac{\pi}{2}$ .

C.  $\frac{3\pi}{2}$ .

D.  $\pi$ .

Lời giải

Phương trình  $2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{3\pi}{4}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

TH1:  $-\pi < \pi + k2\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -1 < k < \frac{1}{4} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \Rightarrow x_1 = \pi$ .

TH2:  $-\pi < -\frac{\pi}{2} + k2\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < 1 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{\pi}{2}$ .

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho trên  $\left(-\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$  là  $x_1 + x_2 = \pi + \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ .

**Câu 11:** Giá trị của biểu thức  $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{42} - \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{42}$  là

A.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

B.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

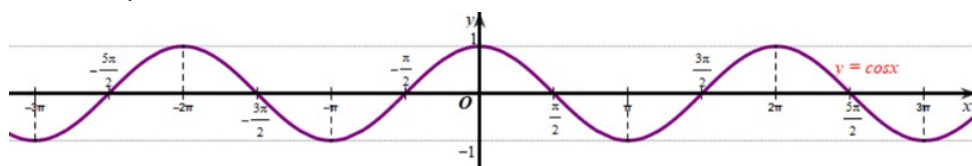
C.  $\frac{\sqrt{3}}{4}$ .

D.  $\frac{1}{2}$ .

Lời giải

Ta có  $\cos \frac{\pi}{7} \cos \frac{\pi}{42} - \sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{\pi}{42} = \cos\left(\frac{\pi}{7} + \frac{\pi}{42}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

**Câu 12:** Cho đồ thị hàm số  $y = \cos x$ .



Số giao điểm của đường thẳng  $y = \frac{1}{3}$  với đồ thị hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[-\pi; 2\pi]$  là

A. 3.

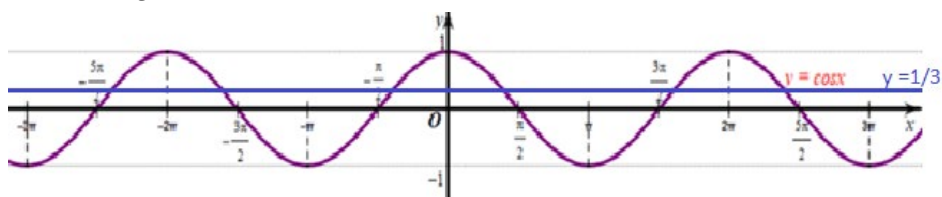
B. 2.

C. 1.

D. 4.

Lời giải

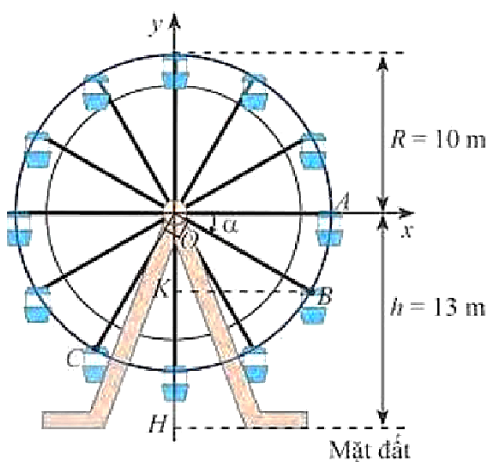
Vẽ đường thẳng  $y = \frac{1}{3}$  trên cùng hệ tọa độ có đồ thị của hàm số  $y = \cos x$ .



Dựa vào đồ thị ta có: Số giao điểm của đường thẳng  $y = \frac{1}{3}$  với đồ thị hàm số  $y = \cos x$  trên đoạn  $[-\pi; 2\pi]$  là 3.

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Trong hình bên dưới, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu với điểm  $B$  và  $C$ .



Với  $\alpha$  là số đo của một góc lượng giác tia đầu  $OA$ , tia cuối  $OB$ .

- a) Chiều cao từ điểm  $B$  đến mặt đất được tính bởi công thức  $(13 + 10 \sin \alpha)$  mét.
- b) Độ cao của điểm  $B$  so với mặt đất khi  $\alpha = -30^\circ$  là  $8m$ .
- c) Chiều cao từ điểm  $B$  đến mặt đất bằng  $23m$  khi và chỉ khi  $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$ .
- d) Khi điểm  $B$  cách mặt đất  $4m$  thì điểm  $C$  cách mặt đất là  $12,96m$ .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------

- a) Đúng: Chiều cao từ điểm  $B$  đến mặt đất bằng  $KH$   
 - Nếu điểm  $B$  nằm ở nửa đường tròn trên thì  $\alpha > 0, \sin \alpha > 0$  và  $OK = 10 \sin \alpha$   
 Ta có:  $KH = OH + OK = 13 + 10 \sin \alpha$   
 - Nếu điểm  $B$  nằm ở nửa đường tròn dưới thì  $\alpha < 0, \sin \alpha < 0$  và  $OK = 10 \cdot (-\sin \alpha)$ .  
 Ta có:  $KH = OH - OK = 13 - 10 \cdot (-\sin \alpha) = 13 + 10 \sin \alpha$
- b) Đúng: Khi  $\alpha = -30^\circ, KH = 13 + 10 \cdot \frac{-1}{2} = 8$
- c) Đúng: Ta có  $13 + 10 \sin \alpha = 23 \Leftrightarrow \sin \alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$
- d) Đúng: Gọi  $(OA, OC) = \beta$ . Ta có:  $\beta = \alpha - 90^\circ$

Khi  $KH = 4$ . Suy ra  $\sin \alpha = \frac{-9}{10}, \alpha < 0$

$$\sin \beta = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{-9}{10}\right)^2} = \frac{-\sqrt{19}}{10}$$

Điểm  $C$  cách mặt đất là:  $13 + 10 \sin \beta \approx 12,96$

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ .

a) Tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$

b) Rút gọn hàm số trở thành  $y = \sin 2x$

c) Hàm số tuần hoàn với chu kì  $T = \pi$

d) Nếu  $\sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3}$  thì giá trị biểu thức  $P = \frac{2 \tan 2x + \cot 2x}{4 \tan 2x - 3 \cot 2x}$  là  $\frac{5}{14}$

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Sai</b>
----------------	---------------	----------------	---------------

Cho hàm số  $y = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ . Xét tính đúng - sai của các phát biểu sau:

a) Hàm số có tập xác định của hàm số là  $\mathbb{R}$  nên mệnh đề đúng

b) Ta có

$$y = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) - \cos 2x = -\sin 2x$$

Mệnh đề đã cho sai.

c) Ta có

$$y = f(x) = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos 2x - \sin 2x) - \cos 2x = -\sin 2x.$$

+ Tập xác định  $D = \mathbb{R}$

+ Ta có:

i)  $x + \pi \in D$  và  $x - \pi \in D, \forall x \in D$

ii)  $f(x + \pi) = -\sin 2(x + \pi) = -\sin 2x = f(x), \forall x \in D$

Vậy hàm số  $y = \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin 2x$  là hàm số tuần hoàn với chu kì  $\pi$ .

Mệnh đề đã cho đúng.

d) Ta có

$$\sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin 2x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \cos^2 2x = 1 - \sin^2 2x = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$$

$$P = \frac{2 \tan 2x + \cot 2x}{4 \tan 2x - 3 \cot 2x} = \frac{2 \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos 2x}{\sin 2x}}{4 \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - 3 \frac{\cos 2x}{\sin 2x}} = \frac{2 \sin^2 2x + \cos^2 2x}{4 \sin^2 2x - 3 \cos^2 2x} = \frac{2 \cdot \frac{1}{9} + \frac{8}{9}}{4 \cdot \frac{1}{9} - 3 \cdot \frac{8}{9}} = -\frac{1}{2}$$

Mệnh đề đã cho sai.

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2}$ .

- a) Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$  và là hàm số chẵn.  
 b) Hàm số đã cho là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$  đồng thời có tập giá trị là  $T = [0; 1]$ .  
 c) Tập nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  là  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 d) Tổng các nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  trong đoạn  $[0; \pi]$  là  $\frac{3\pi}{2}$ .

**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng.

b) Đúng: vì hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$

và  $\forall x \in \mathbb{R}$  ta có:  $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \cos 2x \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 1$  nên

tập giá trị của hàm số là  $T = [0; 1]$

c) Đúng:  $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ .

d) Sai  $0 \leq x \leq \pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{3}{2}$ .

Vì  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k = 0; 1$ .

Vì  $x \in [0; \pi]$  nên  $x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}$ .

Do đó tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn  $[0; \pi]$  bằng  $\pi$ .

**Câu 4:** Cho phương trình lượng giác  $2 \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) - m + 1 = 0$ , trong đó  $m \in \mathbb{R}$  là tham số.

- a)  $\frac{\pi}{6}$  là nghiệm của phương trình khi và chỉ khi  $m = 1$ .  
 b) Khi  $m = 0$  phương trình có tập nghiệm là  $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; -\pi + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .  
 c) Tập các giá trị của  $m$  để phương trình có nghiệm là  $[-1; 1]$ .  
 d) Khi  $m = 1$  phương trình có 6 nghiệm phân biệt trong đoạn  $[0; 6\pi]$ .

**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng:  $\frac{\pi}{6}$  là nghiệm của phương trình  $\Leftrightarrow 2 \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} \right) - m + 1 = 0 \Leftrightarrow -m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$ .

b) Đúng: Với  $m = 0$  phương trình trở thành:

$$2 \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases} \quad (\text{với } k \in \mathbb{Z}).$$

c) Sai:  $2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - m + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-m}{2}$ .

Phương trình trên có nghiệm  $\Leftrightarrow -1 \leq \frac{1-m}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 1-m \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$ .

d) Đúng: Với  $m = 1$  phương trình trở thành:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Theo bài ra  $x \in [0; 6\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + k\pi \leq 6\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} \leq k\pi \leq \frac{35\pi}{6} \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{35}{6}$ .

Mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ .

Suy ra phương trình có 6 nghiệm trong đoạn  $[0; 6\pi]$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Khi  $A$  có nghĩa, biểu thức  $A = \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y$  có giá trị bằng

**Lời giải**

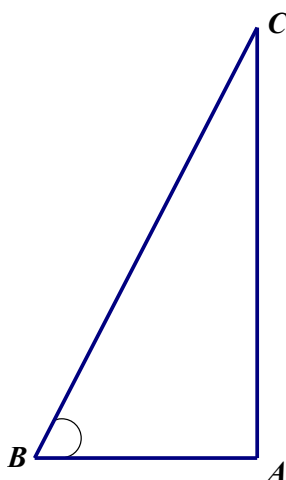
**Trả lời: -1**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{\cos^2 x - \sin^2 y}{\sin^2 x \sin^2 y} - \cot^2 x \cot^2 y \\ &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \cdot \frac{1}{\sin^2 y} - \frac{1}{\sin^2 x} - \cot^2 x \cot^2 y \\ &= \cot^2 x (1 + \cot^2 y) - (1 + \cot^2 x) - \cot^2 x \cot^2 y \\ &= \cot^2 x + \cot^2 x \cot^2 y - 1 - \cot^2 x - \cot^2 x \cot^2 y \\ &= -1. \end{aligned}$$

**Câu 2:** Một cái thang đơn có chiều dài  $5m$  có ghi “để đảm bảo an toàn cần đặt thang sao cho góc tạo thành giữa thang và mặt đất nằm trong khoảng  $65^\circ$  đến  $75^\circ$ ”. Chiều cao lớn nhất tính từ mặt đất đến điểm cao nhất đặt thang là bao nhiêu (đơn vị mét)? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

**Lời giải**

**Trả lời: 4,83**



Thang đơn có chiều dài  $BC = 5m$ , tạo với mặt đất góc  $\widehat{ABC} = \alpha$ .

Chiều cao tính từ mặt đất đến điểm cao nhất đặt thang là  $AC = BC \cdot \sin \alpha = 5 \sin \alpha$ .

Do  $65^\circ \leq \alpha \leq 75^\circ$  nên  $5 \sin 65^\circ \leq 5 \sin \alpha \leq 5 \sin 75^\circ \Leftrightarrow 5 \sin 65^\circ \leq AC \leq 5 \sin 75^\circ$ .

Suy ra chiều cao lớn nhất từ điểm cao nhất đặt thang so với mặt đất là

$$AC = 5 \cdot \sin 75^\circ \approx 4,83(m) \text{ khi } \alpha = 75^\circ$$

**Câu 3:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = \sin^2 x + \cos x - 3$  là

**Lời giải**

**Trả lời: -1,75**

**Cách 1.**

Ta có  $y = \sin^2 x + \cos x - 3 = -\cos^2 x + \cos x - 2$ .

Đặt  $t = \cos x, -1 \leq t \leq 1$ . Khi đó  $y = -t^2 + t - 2$ .

Hàm số  $y = -t^2 + t - 2$  có đồ thị là một parabol đỉnh  $I\left(\frac{1}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ , hướng bề lõm xuống dưới. Từ

đó, ta có bảng biến thiên:

$t$	-1	$\frac{1}{2}$	1
$y$	-4	$-\frac{7}{4}$	-2

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng  $-\frac{7}{4}$  khi  $t = \frac{1}{2}$  hay  $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Cách 2.**

Ta có  $y = \sin^2 x + \cos x - 3 = -\cos^2 x + \cos x - 2$ .

Đặt  $t = \cos x, -1 \leq t \leq 1$ .

Khi đó  $y = -t^2 + t - 2 = -\left(t^2 - t + \frac{1}{4}\right) - \frac{7}{4} = -\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{7}{4} \leq -\frac{7}{4} \forall t \in [-1; 1]$ .

Dấu bằng xảy ra khi  $t = \frac{1}{2}$  hay  $\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Vậy hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng  $-\frac{7}{4}$  khi  $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Câu 4:** Hình vẽ bên dưới là hai bánh răng của một động cơ, chúng có cùng kích thước. Khi động cơ hoạt động, hai bánh răng quay đều, cùng chiều. Biết tốc độ quay của bánh răng ở hình 2 gấp ba tốc độ quay của bánh răng ở hình 1 và phương trình biểu thị độ cao của điểm  $A$  ở bánh răng thứ nhất là  $h = 2R + R \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$  (trong đó  $R$  là bán kính bánh răng,  $t$  là thời gian tính bằng phút,  $h$  là độ cao của điểm  $A$ ). Giả sử tại thời điểm bắt đầu khởi động, hai điểm  $A, B$  có độ cao bằng nhau và tâm của hai bánh răng  $O_1, O_2$  ở độ cao  $2R$  so với mặt đất. Tìm thời điểm đầu tiên sau khi động cơ hoạt động hai điểm  $A, B$  có độ cao bằng nhau.



Hình 1

Hình 2

**Lời giải**

**Trả lời: 1,25**

Vì hai bánh răng có cùng kích thước, tốc độ của bánh răng thứ hai gấp ba tốc độ của bánh răng thứ nhất và tại thời điểm ban đầu, hai điểm  $A$ ,  $B$  có độ cao bằng nhau nên phương trình biểu

thị độ cao của điểm  $B$  là  $h' = 2R + R \sin\left(\frac{3\pi}{5}t\right)$ .

Hai điểm  $A$ ,  $B$  có độ cao bằng nhau khi  $h = h'$ . Ta có phương trình:

$$2R + R \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = 2R + R \sin\left(\frac{3\pi}{5}t\right) \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{5}t\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3\pi}{5}t = \frac{\pi}{5}t + k2\pi \\ \frac{3\pi}{5}t = \pi - \frac{\pi}{5}t + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\pi t = k10\pi \\ 4\pi t = 5\pi + k10\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5k \\ t = \frac{5}{4} + \frac{5}{2}k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Họ nghiệm thứ nhất có nghiệm dương nhỏ nhất là  $t = 5$ .

Họ nghiệm thứ hai có nghiệm dương nhỏ nhất là  $t = \frac{5}{4}$ .

Vậy thời điểm đầu tiên sau khi động cơ hoạt động, hai điểm  $A$ ,  $B$  có độ cao bằng nhau là  $t = \frac{5}{4}$  phút.

**Câu 5:** Tìm số giá trị nguyên âm của tham số  $m$  để hàm số  $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2m + 2025$  nhận giá trị không âm trên tập xác định của nó.

**Lời giải**

**Trả lời: 1011**

TXĐ :  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $f(x) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x\right) + 2m + 2025$

$$= 2\left(\sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) + 2m + 2025 = 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2m + 2025.$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ , ta có

$$-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -2 + 2m + 2025 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2m + 2025 \leq 2 + 2m + 2025.$$

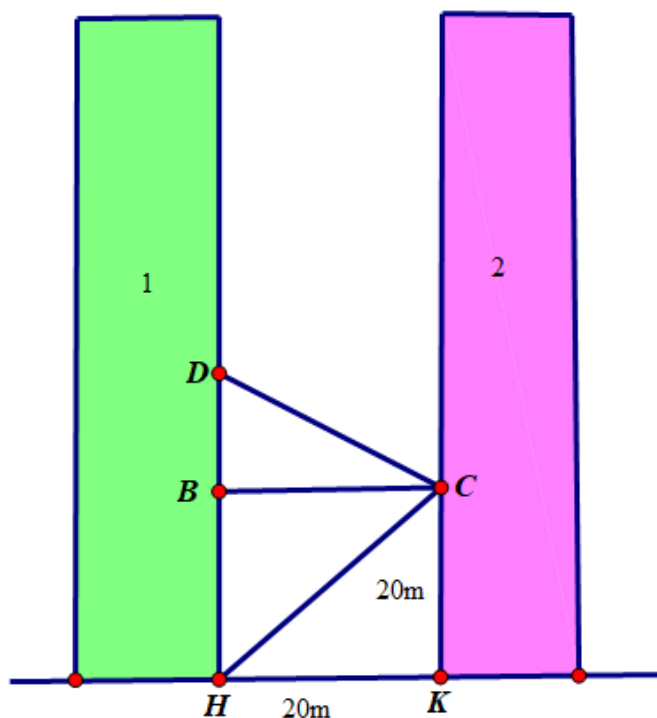
$$\Leftrightarrow 2m + 2023 \leq 2 \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2m + 2025 \leq 2m + 2027$$

Hàm số  $f(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2m + 2025$  nhận giá trị không âm trên tập xác định của nó

$$\Leftrightarrow 2m + 2023 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{2023}{2} = -1011,5.$$

Mà  $m$  nguyên âm nên  $m \in \{-1011; -1010; \dots; -1\}$

**Câu 6:** Hai chung cư cao tầng với độ cao đều là  $90m$  xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là  $HK = 20m$ . Để đảm bảo an ninh cho tòa số 1 người ta cần lắp một số camera an ninh ở vị trí tòa số 2 như hình vẽ. Để góc quan sát của camera tại vị trí thấp nhất là sàn của tòa nhà số 1 người ta lắp camera đầu tiên cách sàn tòa nhà số 2 đúng  $20m$ . Biết góc quan sát theo chiều dọc của camera là  $80^\circ$ . Hỏi cần lắp tối thiểu bao nhiêu camera để đảm bảo có đủ góc quay của tất cả các tầng của tòa nhà số 1?



**Lời giải**

**Trả lời: 3**

Xét tam giác vuông  $HCK$  ta có:  $HK = CK = 20 \Rightarrow \begin{cases} CH = 20\sqrt{2} \\ \widehat{HCK} = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow \widehat{HCB} = 45^\circ.$

Mà  $\widehat{HCD} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BCD} = 35^\circ \Rightarrow BD = BC \tan 35^\circ \Rightarrow DH = DB + BH$   
 $= BC \tan 35^\circ + 20 = 20 \tan 35^\circ + 20 \approx 34,004m.$

Vì tòa nhà cao  $90m$  nên ta cần lắp tối thiểu 3 camera thì sẽ có đủ góc quay của cả tòa nhà đó.

----- HẾT -----



# HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

## ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG 1

### ĐỀ TEST SỐ 02

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Biết  $\cos 2x = \frac{2}{3}$ . Tính  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

**A.**  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{7}{12}$ .

**B.**  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{12}$ .

**C.**  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{12}$ .

**D.**  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{12}$ .

**Câu 2:** Nghiệm của phương trình:  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  là

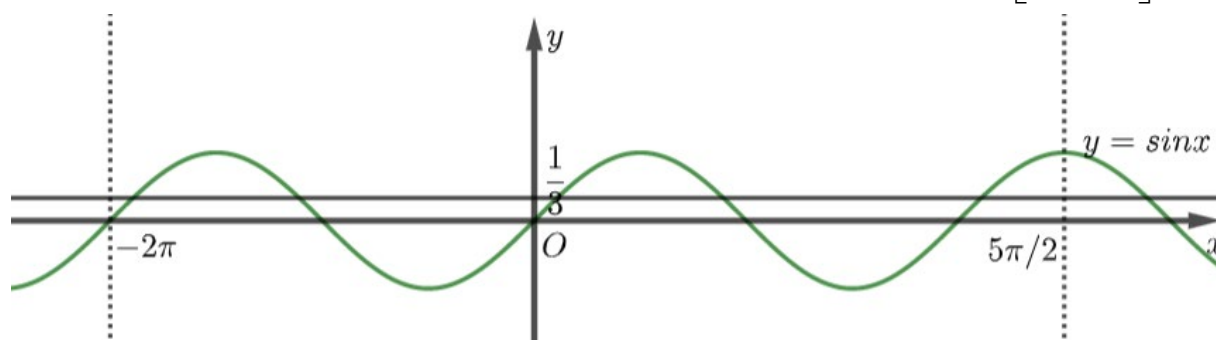
**A.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**C.**  $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 3:** Dùng đồ thị hàm số, cho biết số nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{3}$  trên đoạn  $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ ?



**A.** 4.

**B.** 6.

**C.** 3.

**D.** 5.

**Câu 4:** Cho  $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$ ,  $\cos b = \frac{1}{4}$ . Giá trị  $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$  bằng:

**A.**  $-\frac{113}{144}$ .

**B.**  $-\frac{115}{144}$ .

**C.**  $-\frac{117}{144}$ .

**D.**  $-\frac{119}{144}$ .

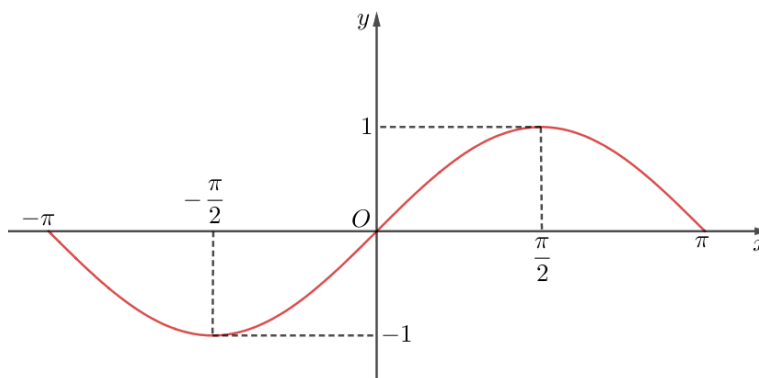
**Câu 5:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$

- A.  $\cos x$ .                      B.  $2 \cos x - 1$ .                      C.  $2 \cos x$ .                      D.  $\cos x - 1$ .

**Câu 6:** Gọi  $a, b$  lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0$ . Tính  $a + b$ .

- A. 0.                      B.  $\frac{3\pi}{10}$ .                      C.  $-\frac{3\pi}{10}$ .                      D.  $-\frac{2\pi}{5}$ .

**Câu 7:** Cho đồ thị hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  là

- A. 2.                      B. 4.                      C. 1.                      D. Vô số.

**Câu 8:** Cho  $\cos 2a = \frac{2}{3}$  với  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ . Khi đó  $\sin a$  bằng

- A.  $\frac{1}{3}$ .                      B.  $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ .                      C.  $-\frac{1}{3}$ .                      D.  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ .

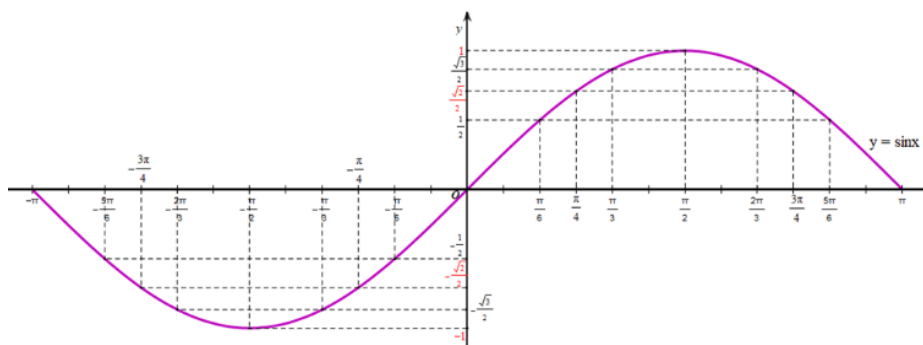
**Câu 9:** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo là  $\frac{2\pi}{3}$ , góc lượng giác  $(Ou, Ow)$  có số đo là  $\frac{11\pi}{12}$ . Tìm số đo góc lượng giác  $(Ov, Ow)$ .

- A.  $(Ov, Ow) = -\frac{\pi}{4} - k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .                      B.  $(Ov, Ow) = \frac{19\pi}{12} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .  
 C.  $(Ov, Ow) = \frac{\pi}{4}$ .                      D.  $(Ov, Ow) = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ .

**Câu 10:** Cho biểu thức  $B = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a}$ . Biểu thức  $B$  bằng biểu thức nào dưới đây?

- A.  $\tan a$ .                      B.  $-\tan a$ .                      C.  $\tan 3a$ .                      D.  $-\tan 3a$ .

**Câu 11:** Cho đồ thị hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ .



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $(-\pi; \pi)$ .
- B. Hàm số  $y = \sin x$  nghịch biến trên khoảng  $(-\pi; \pi)$ .
- C. Hàm số  $y = \sin x$  nghịch biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .
- D. Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 12:** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của biểu thức  $P = \frac{2 \cot \alpha - \tan \alpha}{3 \tan \alpha + \cot \alpha}$  là

- A.  $-\frac{2}{57}$ .
- B.  $\frac{4}{57}$ .
- C.  $-\frac{4}{57}$ .
- D.  $\frac{2}{57}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

- a) Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ ; là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$  và có tập giá trị là  $T = [-1; 1]$ .
- b) Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  trên đường tròn lượng giác là 4.
- c) Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  trên khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{7\pi}{6}$ .
- d) Phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  có tất cả 16 nghiệm phân biệt trên khoảng  $[0; 10\pi]$ .

**Câu 2:** Cho hai hàm số  $f(x) = \sin x$ ;  $g(x) = \sin 3x$ .

- a) Cả hai hàm số đã cho đều xác định trên  $\mathbb{R}$ ; là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  và có tập giá trị là  $T = [-1; 1]$ .
- b) Tập nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  là  $S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
- c) tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $f(x) = g(x)$  là 0.
- d) Tổng tất cả các nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $\left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương trình  $f(x) = g(x)$  bằng  $\frac{29\pi}{4}$ .

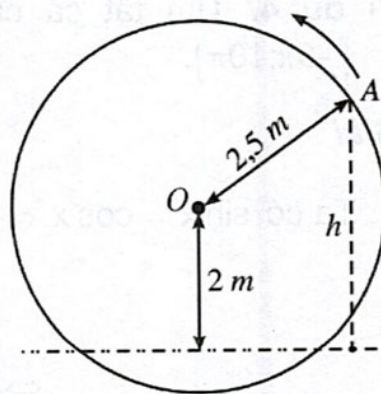
**Câu 3:** Cho phương trình  $(2 \sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$ .

- a)  $x = \frac{\pi}{6}$  là một nghiệm của phương trình.
- b) Phương trình có tập nghiệm là:  $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$ .
- c) Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là  $x = -\pi$
- d) Tổng các nghiệm của phương trình thuộc nửa khoảng  $[-2\pi; 3\pi)$  bằng  $3\pi$ .

- Câu 4:** Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$ . Ở đây, thời gian  $t$  tính bằng giây. Các mệnh đề sau đúng hay sai?
- Tại thời điểm  $t = 0$  là vật có li độ  $x = \frac{3}{2}$
  - Vật đạt biên độ cực đại lần đầu tiên tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{2}$
  - Vật bắt đầu chuyển động đến khi đi qua vị trí cân bằng lần đầu tiên trong khoảng thời gian là  $\frac{5\pi}{12}$  giây.
  - Trong thời gian từ 0 đến 30 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 18 lần.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

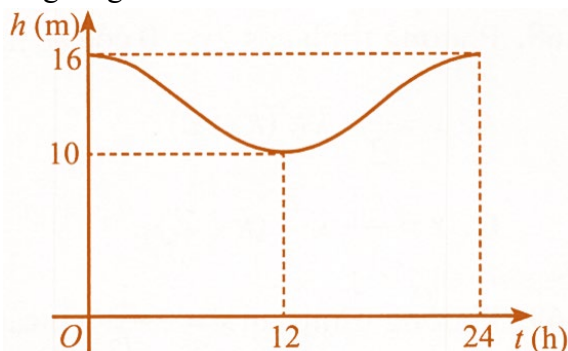
- Câu 1:** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t$  (h) được cho bởi công thức  $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$ .  
 Tìm thời gian (đơn vị giờ) ngắn nhất để mực nước của kênh là cao nhất?
- Câu 2:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = \sin^2 x + 4\sin x - 5$  trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  là
- Câu 3:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin(\cos 2x) = 0$  trên  $[0; 2\pi]$  bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)
- Câu 4:** Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách  $h$  (mét) tính từ một chiếc gàu gắn tại điểm  $A$  trên guồng đến mặt nước là  $h = |y|$  trong đó  $y = 2 + 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$  với  $x$  là thời gian quay của guồng ( $x \geq 0$ ), tính bằng phút; ta quy ước rằng  $y > 0$  khi gàu ở trên mặt nước và  $y < 0$  khi gàu ở dưới mặt nước.



Mô phỏng guồng nước

Chiếc gàu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào (đơn vị phút)?

**Câu 5:** Mức nước cao nhất tại một cảng biển là  $16m$  khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mức nước thấp nhất là  $10m$ . Đồ thị ở bên dưới mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm.



Biết chiều cao của mực nước  $h(m)$  theo thời gian  $t(h)(0 \leq t \leq 24)$  được cho bởi công thức  $h = m + a \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$  với  $m, a$  là các số thực dương cho trước. Tìm thời điểm lần đầu tiên trong ngày khi chiều cao của mực nước là  $11,5m$ .

**Câu 6:** Tìm số giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình:  $(3 \cos x - 2)(2025 \cdot \cos x + 3m - 1) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ ?

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

**PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1:** Biết  $\cos 2x = \frac{2}{3}$ . Tính  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

**A.**  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{7}{12}$ .

**B.**  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{7}{12}$ .

**C.**  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{12}$ .

**D.**  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{12}$ .

**Lời giải**

Áp dụng công thức:  $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(\cos \frac{2\pi}{3} - \cos 2x\right) = -\frac{7}{12}$ .

**Câu 2:** Nghiệm của phương trình:  $\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$  là

**A.**  $\begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**B.**  $\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

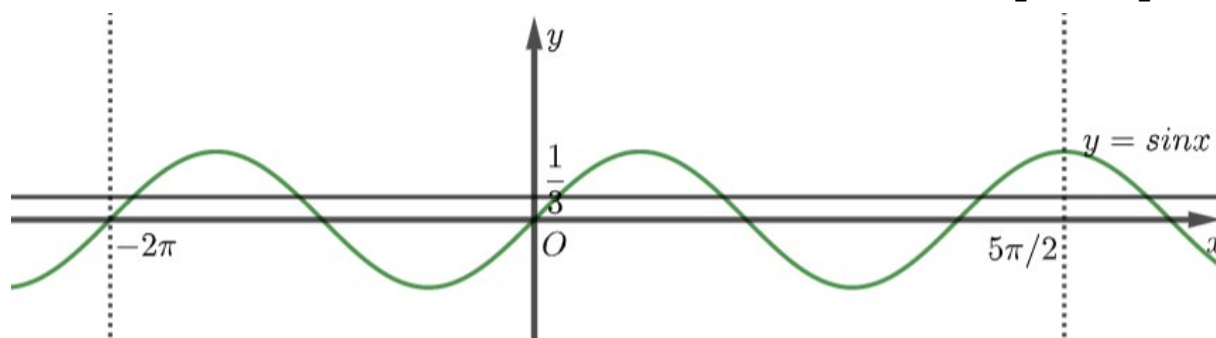
**C.**  $\begin{cases} x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**D.**  $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$ .

**Lời giải**

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

**Câu 3:** Dùng đồ thị hàm số, cho biết số nghiệm của phương trình  $\sin x = \frac{1}{3}$  trên đoạn  $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ ?



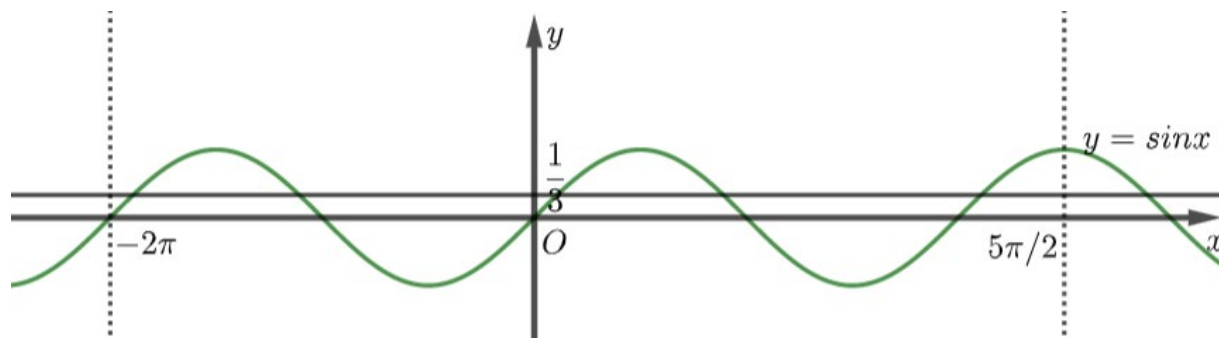
**A.** 4.

**B.** 6.

**C.** 3.

**D.** 5.

**Lời giải**



Ta thấy đường thẳng  $y = \frac{1}{3}$  cắt đồ thị hàm số  $y = \sin x$  tại 5 điểm trên đoạn  $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$  nên phương trình  $\sin x = \frac{1}{3}$  có 5 nghiệm phân biệt trên đoạn  $\left[-2\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$ .

**Câu 4:** Cho  $a, b \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ . Biết  $\cos a = \frac{1}{3}$ ,  $\cos b = \frac{1}{4}$ . Giá trị  $\cos(a+b) \cdot \cos(a-b)$  bằng:

- A.  $-\frac{113}{144}$ .      B.  $-\frac{115}{144}$ .      C.  $-\frac{117}{144}$ .      D.  $-\frac{119}{144}$ .

Lời giải

Ta có

$$\cos(a+b) \cdot \cos(a-b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{144}.$$

**Câu 5:** Rút gọn biểu thức  $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$

- A.  $\cos x$ .      B.  $2 \cos x - 1$ .      C.  $2 \cos x$ .      D.  $\cos x - 1$ .

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } A &= \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x} \\ &= \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x} \\ &= \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x. \end{aligned}$$

**Câu 6:** Gọi  $a, b$  lần lượt là nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0. \text{ Tính } a + b.$$

- A. 0.      B.  $\frac{3\pi}{10}$ .      C.  $-\frac{3\pi}{10}$ .      D.  $-\frac{2\pi}{5}$ .

Lời giải

$$\text{Phương trình } \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{5} = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k \frac{\pi}{2} \text{ với } k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có:

+)  $\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2} > 0 \Leftrightarrow k > -\frac{1}{5} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; \dots\} \Rightarrow$  nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là

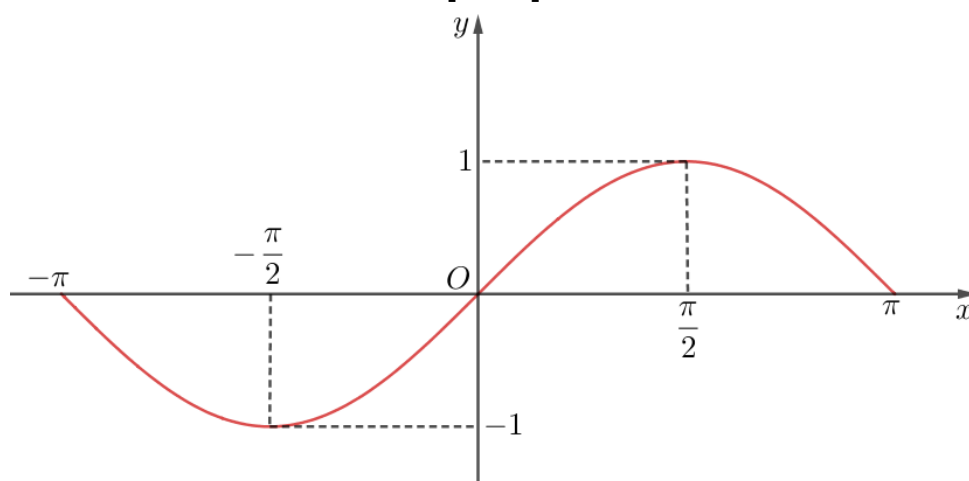
$$a = \frac{\pi}{10}.$$

+)  $\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2} < 0 \Leftrightarrow k < -\frac{1}{5} \Rightarrow k \in \{-1; -2; -3; \dots\} \Rightarrow$  nghiệm âm lớn nhất của phương trình là

$$b = \frac{\pi}{10} - \frac{\pi}{2} = -\frac{2\pi}{5}.$$

Vậy  $a + b = \frac{\pi}{10} - \frac{2\pi}{5} = -\frac{3\pi}{10}.$

**Câu 7:** Cho đồ thị hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  như hình vẽ.



Số nghiệm của phương trình  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  là

**A. 2.**

**B. 4.**

**C. 1.**

**D. Vô số.**

**Lời giải**

Ta có:  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Số nghiệm của phương trình  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$  là số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \sin x$  và đường thẳng  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy: Đường thẳng  $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$  cắt đồ thị hàm số  $y = \sin x$  tại 2 điểm phân biệt trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ .

Vậy phương trình:  $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$  có 2 nghiệm trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ .

**Câu 8:** Cho  $\cos 2a = \frac{2}{3}$  với  $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ . Khi đó  $\sin a$  bằng

**A.  $\frac{1}{3}$ .**

**B.  $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ .**

**C.  $-\frac{1}{3}$ .**

**D.  $\frac{1}{\sqrt{6}}$ .**

**Lời giải**

$$\text{Ta có } \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2} = \frac{1 - \frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{6} \Rightarrow \begin{cases} \sin a = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \sin a = -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{cases}.$$

$$\text{Mà } \frac{\pi}{2} < a < \pi \Rightarrow \sin a > 0. \text{ Do đó } \sin a = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

**Câu 9:** Cho góc lượng giác  $(Ou, Ov)$  có số đo là  $\frac{2\pi}{3}$ , góc lượng giác  $(Ou, Ow)$  có số đo là  $\frac{11\pi}{12}$ . Tìm số đo góc lượng giác  $(Ov, Ow)$ .

**A.**  $(Ov, Ow) = -\frac{\pi}{4} - k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$       **B.**  $(Ov, Ow) = \frac{19\pi}{12} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

**C.**  $(Ov, Ow) = \frac{\pi}{4}.$       **D.**  $(Ov, Ow) = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$

**Lời giải**

$$\text{Theo hệ thức Chales: } (Ou, Ov) + (Ov, Ow) = (Ou, Ow) + k2\pi$$

$$\text{Suy ra } (Ov, Ow) = (Ou, Ow) - (Ou, Ov) + k2\pi = \frac{11\pi}{12} - \frac{2\pi}{3} + k2\pi = \frac{\pi}{4} + k2\pi.$$

$$\text{Vậy } (Ov, Ow) = \frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}).$$

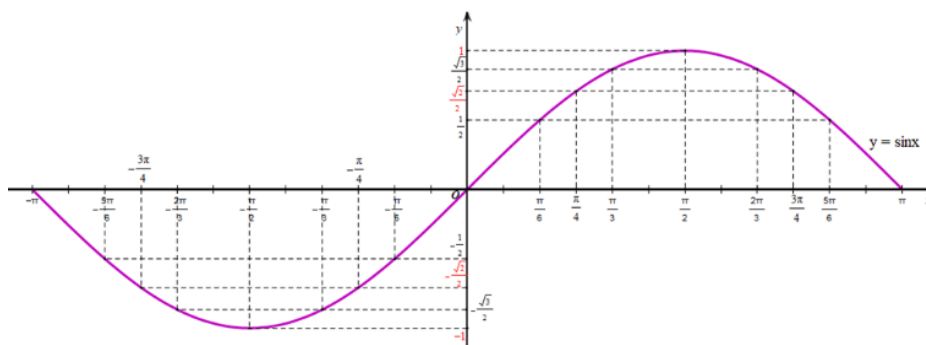
**Câu 10:** Cho biểu thức  $B = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a}$ . Biểu thức  $B$  bằng biểu thức nào dưới đây?

**A.**  $\tan a.$       **B.**  $-\tan a.$       **C.**  $\tan 3a.$       **D.**  $-\tan 3a.$

**Lời giải**

$$\text{Ta có } B = \frac{\cos 2a - \cos 4a}{\sin 4a - \sin 2a} = \frac{-2 \sin 3a \cdot \sin(-a)}{2 \cos 3a \cdot \sin a} = \tan 3a.$$

**Câu 11:** Cho đồ thị hàm số  $y = \sin x$  trên đoạn  $[-\pi; \pi]$ .



Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A.** Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $(-\pi; \pi)$ .  
**B.** Hàm số  $y = \sin x$  nghịch biến trên khoảng  $(-\pi; \pi)$ .  
**C.** Hàm số  $y = \sin x$  nghịch biến trên khoảng  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .  
**D.** Hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ .

**Lời giải**

Dựa vào đồ thị ta thấy hàm số  $y = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ .

**Câu 12:** Cho  $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ ,  $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ . Giá trị của biểu thức  $P = \frac{2 \cot \alpha - \tan \alpha}{3 \tan \alpha + \cot \alpha}$  là

- A.  $-\frac{2}{57}$ .      B.  $\frac{4}{57}$ .      C.  $-\frac{4}{57}$ .      **D.  $\frac{2}{57}$ .**

**Lời giải**

Ta có:  $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$ .

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}$ . Khi đó  $\begin{cases} \tan \alpha = -\frac{4}{3} \\ \cot \alpha = -\frac{3}{4} \end{cases}$ .

Vậy  $P = \frac{2 \cot \alpha - \tan \alpha}{3 \tan \alpha + \cot \alpha} = \frac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \frac{4}{3}}{3 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - \frac{3}{4}} = \frac{2}{57}$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ .

a) Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ ; là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$  và có tập giá trị là  $T = [-1; 1]$ .

b) Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  trên đường tròn lượng giác là 4.

c) Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  trên khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{7\pi}{6}$ .

d) Phương trình  $f(x) = \frac{1}{2}$  có tất cả 16 nghiệm phân biệt trên khoảng  $[0; 10\pi]$ .

**Lời giải**

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

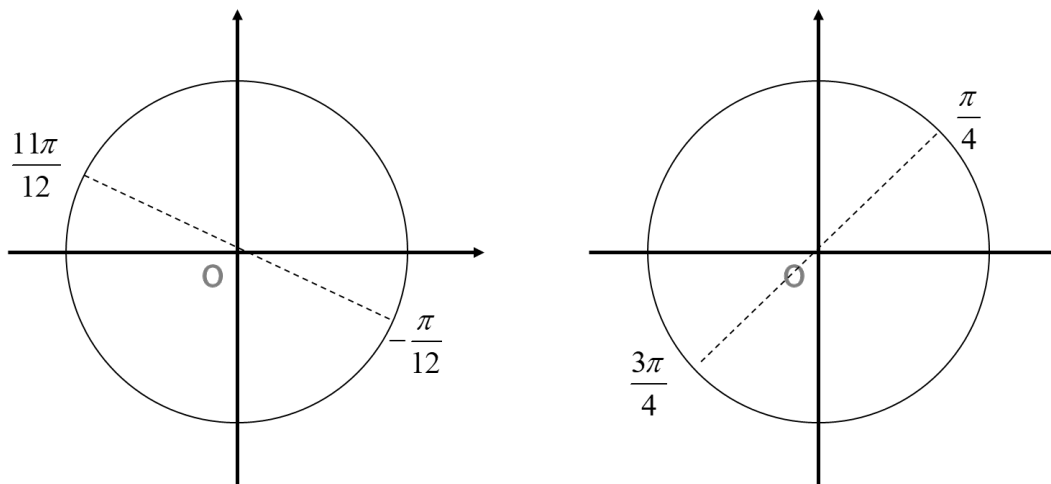
a) Đúng: Hàm số đã cho xác định trên  $\mathbb{R}$ ; là hàm số chẵn; là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $\pi$  và có tập giá trị là  $T = [-1; 1]$ .

b) Đúng: Phương trình  $f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Biểu diễn nghiệm  $x = -\frac{\pi}{12} + k\pi$  trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 1).

Biểu diễn nghiệm  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$  trên đường tròn lượng giác ta được 2 vị trí (hình 2).



Vậy số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình  $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$  trên đường tròn lượng giác là 4.

c) Đúng: Phương trình đã cho có 2 nghiệm trên khoảng  $(0; \pi)$  là  $\frac{\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}$ .

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình đã cho trên khoảng  $(0; \pi)$  bằng  $\frac{7\pi}{6}$ .

d) Sai: Phương trình đã cho có 4 nghiệm trên  $[0; 2\pi]$  là  $\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{11\pi}{12}, \frac{23\pi}{12}$ , suy ra trên khoảng  $[0; 10\pi]$  phương trình đã cho có 20 nghiệm phân biệt.

**Câu 2:** Cho hai hàm số  $f(x) = \sin x$ ;  $g(x) = \sin 3x$ .

a) Cả hai hàm số đã cho đều xác định trên  $\mathbb{R}$ ; là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$  và có tập giá trị là  $T = [-1; 1]$ .

b) Tập nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  là  $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

c) tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình  $f(x) = g(x)$  là 0.

d) Tổng tất cả các nghiệm phân biệt thuộc đoạn  $\left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương trình  $f(x) = g(x)$  bằng  $\frac{29\pi}{4}$ .

**Lời giải**

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------

a) Sai:

+ Cả hai hàm số đã cho đều xác định trên  $\mathbb{R}$ ;

+  $f(x) = \sin x$  là hàm số tuần hoàn với chu kỳ  $2\pi$ , còn hàm số  $g(x) = \sin 3x$  tuần hoàn với chu kỳ  $\frac{2\pi}{3}$ .

+ Cả hai hàm số đã cho đều có tập giá trị là  $T = [-1; 1]$ .

b) Sai:  $\sin 3x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = x + k2\pi \\ 3x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

c) Đúng:

Với  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) thì nghiệm dương nhỏ nhất là  $\pi$ .

Với  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) thì nghiệm dương nhỏ nhất là  $\frac{\pi}{4}$ .

Với  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) thì nghiệm âm lớn nhất là  $-\pi$ .

Với  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) thì nghiệm âm lớn nhất là  $-\frac{\pi}{4}$ .

Do đó, phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất là  $\frac{\pi}{4}$  và nghiệm âm lớn nhất là  $-\frac{\pi}{4}$ . Vậy tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất là 0.

d) Đúng: Với  $x = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), các nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$  là  $x \in \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$ .

Với  $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ), các nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$  là

$$x \in \left\{ \frac{-3\pi}{4}; \frac{-\pi}{4}; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}; \frac{9\pi}{4} \right\}.$$

Tổng các nghiệm thuộc đoạn  $\left[-\pi; \frac{5\pi}{2}\right]$  của phương trình là

$$-\pi + 0 + \pi + 2\pi + \frac{-3\pi}{4} + \frac{-\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} + \frac{9\pi}{4} = \frac{29\pi}{4}.$$

Suy ra d) đúng.

**Câu 3:** Cho phương trình  $(2 \sin x - 1)(\cos x + 1) = 0$ .

a)  $x = \frac{\pi}{6}$  là một nghiệm của phương trình.

b) Phương trình có tập nghiệm là:  $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; -\frac{\pi}{6} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ .

c) Nghiệm âm lớn nhất của phương trình là  $x = -\pi$

d) Tổng các nghiệm của phương trình thuộc nửa khoảng  $[-2\pi; 3\pi)$  bằng  $3\pi$ .

**Lời giải**

<b>a) Đúng</b>	<b>b) Sai</b>	<b>c) Đúng</b>	<b>d) Đúng</b>
----------------	---------------	----------------	----------------

a) Đúng: Thay  $x = \frac{\pi}{6}$  thỏa mãn phương trình.

b) Sai:  $(2 \sin x - 1)(\cos x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \cos x = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$

c) Đúng : Với  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi < 0 \Rightarrow k \leq -1$ . Nghiệm âm lớn nhất là  $x = \frac{-11\pi}{6}$

Với  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi < 0 \Rightarrow k \leq -1$ . Nghiệm âm lớn nhất là  $x = \frac{-7\pi}{6}$

Với  $x = \pi + k2\pi < 0 \Rightarrow k \leq -1$ . Nghiệm âm lớn nhất là  $x = -\pi$

d) Đúng : Theo ý trên ta thấy phương trình có nghiệm: 
$$\left[ \begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \pi + k2\pi \end{array} \right.$$

TH 1: Với  $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \in [-2\pi; 3\pi) \Rightarrow -2\pi < \frac{\pi}{6} + k2\pi < 3\pi \Rightarrow -1 \leq k \leq 1 \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$

TH 2:  $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \in [-2\pi; 3\pi) \Rightarrow -2\pi \leq \frac{5\pi}{6} + k2\pi < 3\pi \Rightarrow -1 \leq k \leq 1 \Rightarrow T = \frac{5\pi}{2}$

TH 3:  $x = \pi + k2\pi \in [-2\pi; 3\pi) \Rightarrow -2\pi \leq \pi + k2\pi < 3\pi \Rightarrow -1 \leq k < 1 \Rightarrow T = 0$

**Câu 4:** Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình  $x = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$

. Ở đây, thời gian  $t$  tính bằng giây. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Tại thời điểm  $t = 0$  là vật có li độ  $x = \frac{3}{2}$

b) Vật đạt biên độ cực đại lần đầu tiên tại thời điểm  $t = \frac{\pi}{2}$

c) Vật bắt đầu chuyển động đến khi đi qua vị trí cân bằng lần đầu tiên trong khoảng thời gian là  $\frac{5\pi}{12}$  giây.

d) Trong thời gian từ 0 đến 30 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 18 lần.

**Lời giải**

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------

a) Đúng.

b) Sai. Vật đạt biên độ cực đại lần đầu tiên tại thời điểm  $t$  sao cho  $2t - \frac{\pi}{3} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{6}$ .

c) Đúng. Vật đi qua vị trí cân bằng lần đầu tiên tại thời điểm  $2t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{12}$

d) Sai.

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hoà là vị trí vật đứng yên, khi đó  $x = 0$ .

Xét phương trình  $3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 0$  ta có:

$$3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2t - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Trong thời gian từ 0 đến 30 giây, tức là  $0 \leq t \leq 30$  hay  $0 \leq \frac{5\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} \leq 30$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{6} \leq k \leq \frac{360 - 5\pi}{6\pi}.$$

Mà  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{0; 1; 2; 3; \dots; 17; 18\}$ .

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 19 lần.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.** Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

**Câu 1:** Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu  $h$  (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian  $t$  (h) được cho bởi công thức  $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$ .

Tìm thời gian (đơn vị giờ) ngắn nhất để mực nước của kênh là cao nhất?

**Lời giải**

**Trả lời: 10**

Ta có:  $-1 \leq \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq h \leq 15$ . Do đó mực nước cao nhất của kênh là 15m đạt được

khi  $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = -2 + 12k$

Vì  $t > 0 \Leftrightarrow -2 + 12k > 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{6}$

Chọn số  $k$  nguyên dương nhỏ nhất thỏa  $k > \frac{1}{6}$  là  $k = 1 \Rightarrow t = 10$ .

**Câu 2:** Giá trị lớn nhất của hàm số  $y = f(x) = \sin^2 x + 4 \sin x - 5$  trên  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  là

**Lời giải**

**Trả lời: 0**

TXĐ:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y = f(x) = (\sin x + 2)^2 - 9$ .

Do  $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow 0 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq \sin x + 2 \leq 3 \Leftrightarrow 4 \leq (\sin x + 2)^2 \leq 9$

$\Leftrightarrow -5 \leq (\sin x + 2)^2 - 9 \leq 0 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 0$ .

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 0 khi  $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ .

**Câu 3:** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin(\cos 2x) = 0$  trên  $[0; 2\pi]$  bằng (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

**Lời giải**

**Trả lời: 12,6**

Ta có  $\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

Vì  $\cos 2x = k\pi \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + m\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + m\frac{\pi}{2} \ (m \in \mathbb{Z})$ .

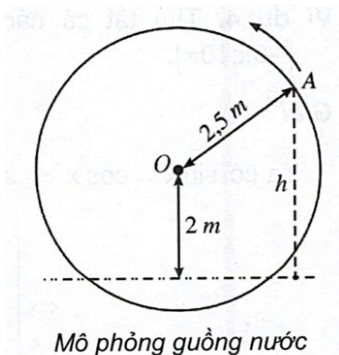
Do  $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3\}$ .

Phương trình có 4 nghiệm trên  $[0; 2\pi]$  là  $x_1 = \frac{\pi}{4}; x_2 = \frac{3\pi}{4}; x_3 = \frac{5\pi}{4}$  và  $x_4 = \frac{7\pi}{4}$ .

Tổng tất cả các nghiệm của phương trình  $\sin(\cos 2x) = 0$  trên  $[0; 2\pi]$  là  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4\pi$ .

**Câu 4:** Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính  $2,5\text{ m}$ ; trục của nó đặt cách mặt nước  $2\text{ m}$  (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách  $h$  (mét) tính từ một chiếc gàu gắn tại điểm  $A$  trên guồng đến mặt nước là  $h = |y|$  trong đó  $y = 2 + 2,5 \sin 2\pi \left( x - \frac{1}{4} \right)$

với  $x$  là thời gian quay của guồng ( $x \geq 0$ ), tính bằng phút; ta quy ước rằng  $y > 0$  khi gàu ở trên mặt nước và  $y < 0$  khi gàu ở dưới mặt nước.



Chiếc gàu cách mặt nước  $2\text{ mét}$  lần đầu tiên khi nào (đơn vị phút)?

**Lời giải**

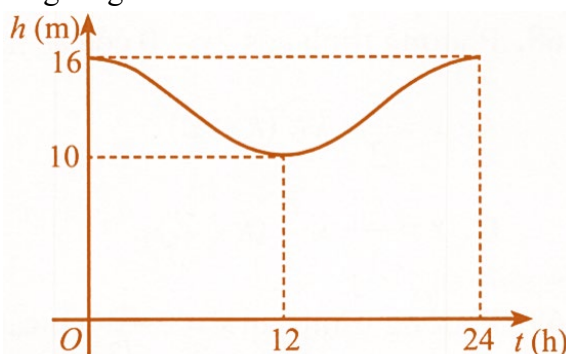
**Trả lời: 0,25**

Gàu cách mặt nước  $2\text{ m}$  khi  $2 + 2,5 \sin 2\pi \left( x - \frac{1}{4} \right) = 2$

$$\Leftrightarrow \sin 2\pi \left( x - \frac{1}{4} \right) = 0 \Leftrightarrow 2\pi \left( x - \frac{1}{4} \right) = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy chiếc gàu cách mặt nước  $2\text{ m}$  lần đầu tiên tại thời điểm  $x = \frac{1}{4}$  phút.

**Câu 5:** Mực nước cao nhất tại một cảng biển là  $16\text{ m}$  khi thủy triều lên cao và sau  $12$  giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là  $10\text{ m}$ . Đồ thị ở bên dưới mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng  $24$  giờ tính từ lúc nửa đêm.



Biết chiều cao của mực nước  $h(m)$  theo thời gian  $t(h)$  ( $0 \leq t \leq 24$ ) được cho bởi công thức

$h = m + a \cos \left( \frac{\pi}{12} t \right)$  với  $m, a$  là các số thực dương cho trước. Tìm thời điểm lần đầu tiên trong ngày khi chiều cao của mực nước là  $11,5\text{ m}$ .

**Lời giải**

**Trả lời: 8**

Chiều cao của mực nước cao nhất là  $m+a$  khi  $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=1$  và thấp nhất bằng  $m-a$  khi

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-1. \text{ Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} m+a=16 \\ m-a=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=13 \\ a=3. \end{cases}$$

Từ đó ta có công thức:  $h=13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ .

Do chiều cao của mực nước là  $11,5m$  nên  $13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-\frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 + 24k \\ t = -8 + 24k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

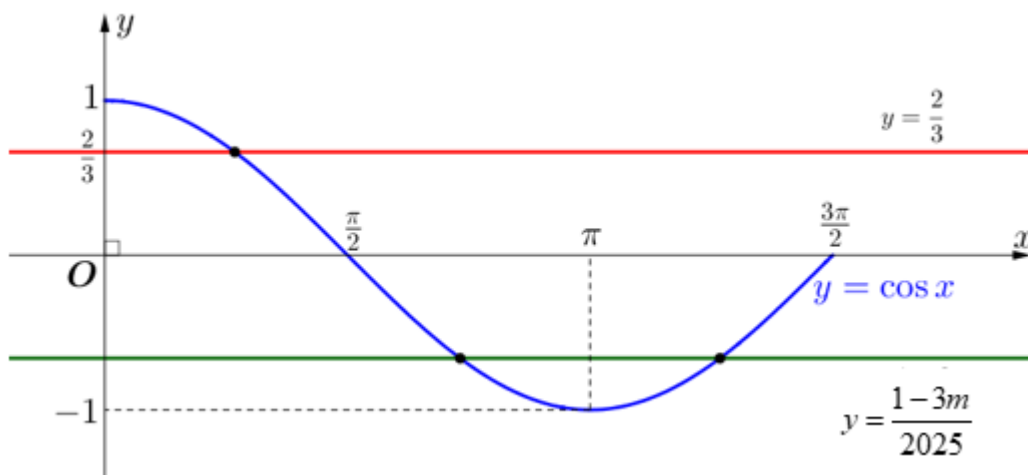
Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có  $t=8$  (h) và  $t=16$  (h).

Vậy thời điểm lần đầu tiên trong ngày khi chiều cao của mực nước là  $11,5m$  là 8h

**Câu 6:** Tìm số giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình:  $(3\cos x - 2)(2025 \cdot \cos x + 3m - 1) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ ?

**Lời giải**

**Trả lời: 675**



$$\text{Phương trình: } (3\cos x - 2)(2025 \cdot \cos x + 3m - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{2}{3} & (1) \\ \cos x = \frac{1-3m}{2025} & (2) \end{cases}.$$

Số nghiệm của phương trình (1) trên  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$  là số giao điểm của đồ thị hàm số  $y = \cos x$  và đường thẳng  $y = \frac{2}{3}$  trên khoảng  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy: Đường thẳng  $y = \frac{2}{3}$  cắt đồ thị hàm số  $y = \cos x$  tại 1 điểm duy nhất trên  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ , suy ra phương trình:  $(3 \cos x - 2)(2025 \cdot \cos x + 3m - 1) = 0$  luôn có 1 nghiệm  $x_0$  thuộc khoảng  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right] \forall m \in \mathbb{R}$ .

Do đó phương trình:  $(3 \cos x - 2)(2025 \cdot \cos x + 3m - 1) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt thuộc  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$  khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác  $x_0$  thuộc khoảng  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

Dựa vào đồ thị ta thấy: Đường thẳng  $y = \frac{1-3m}{2025}$  cắt đồ thị hàm số  $y = \cos x$  tại 2 điểm phân biệt trên  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$  khi  $-1 < \frac{1-3m}{2025} \leq 0 \Leftrightarrow -2025 < 1-3m \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m < \frac{2026}{3} \approx 675,3$ .

Suy với  $\frac{1}{3} \leq m < \frac{2026}{3} \approx 675,3$  phương trình:  $(3 \cos x - 2)(2025 \cdot \cos x + 3m - 1) = 0$  có 3 nghiệm phân biệt thuộc khoảng  $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$ .

Mà  $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{1; \dots; 675\}$

----- **HẾT** -----