

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC
ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

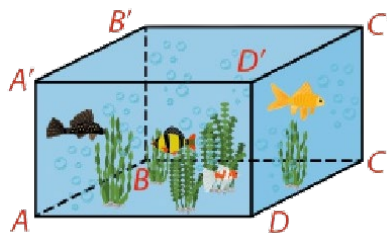
Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

- A. BB' . B. $B'D'$. C. AD' . D. $B'D$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD . Đường thẳng HK vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

- A. AC . B. SB . C. SD . D. AB .

Câu 3: Ta biết hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình chữ nhật. Quan sát một bể nuôi cá cảnh hình hộp chữ nhật sau và cho biết góc giữa hai đường thẳng AA' và $C'D'$ bằng góc nào sau đây?



- A. $(A'A, AB)$. B. $(A'A, AD)$. C. $(A'A, AB)$. D. $(A'A, AB')$.

Câu 4: Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện hoành, quá giang, rui, cột tương ứng được đánh số 1,2,3,4, trong hình sau, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?

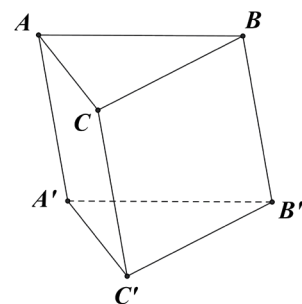


- A. 1-4; 2-4; 1-3 B. 2-4; 1-3 C. 1-4; 3-4; 1-2 D. 1-4, 2-4, 3-4

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

- A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .

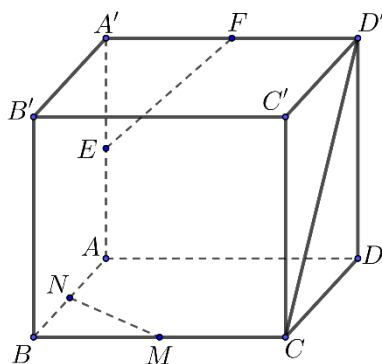
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Góc giữa hai đường thẳng IJ và SC bằng
A. 60° . **B.** 45° . **C.** 90° . **D.** 30° .
- Câu 7:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng
A. 30° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 90° .
- Câu 8:** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA_1 bằng
A. 60° . **B.** 90° . **C.** 45° . **D.** 120° .
- Câu 9:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng
A. 30° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 45° .
- Câu 10:** Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình vẽ)
 Góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng
A. 30° . **B.** 60° .
C. 45° . **D.** 90° .



- Câu 11:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng CD' và AC' .
A. 45° . **B.** 60° .
C. 90° . **D.** 30° .
- Câu 12:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và đường thẳng $B'C$.
A. 60° . **B.** 45° . **C.** 30° . **D.** 90° .

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (như vẽ bên), gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của $BC, AB, AA', A'D'$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Cạnh MN và AA' vuông góc với nhau.		
b)	Góc giữa MN và CD' bằng góc giữa AC và CD' .		
c)	Góc giữa EF và CC' bằng góc giữa AD' và CC' .		
d)	Góc giữa EF và CD' bằng 30° .		

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Gọi G là trọng tâm ΔSBC

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Góc giữa IJ và SA bằng 90° .		
b)	Góc giữa IJ với CD bằng 60° .		
c)	Cosin của góc giữa BI với SA bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.		
d)	Cosin của góc giữa DG và SB bằng $\frac{1}{3}$.		

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với AB và AD , $SC = a\sqrt{3}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SA \perp BC$		
(b)	$SA \perp CD$		
(c)	$BC \perp SB$		
(d)	K là hình chiếu của A lên SB thì $SC \perp AK$		

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của đoạn SB, SD .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$MN // BD$		
b)	MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau		
c)	$AC \perp BD$		
d)	$(MN, AC) = 90^\circ$		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SA và CD

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = \sqrt{2}$, $AA' = 2$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB' và CD' . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 4: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, B'C'$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AC, MN . Tính $\tan \alpha$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a\sqrt{2}$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng

Câu 6: Hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC$. Gọi I là trung điểm của AB . Tính góc giữa SI và BC .

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, ΔSAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh hai đường thẳng AK và SH vuông góc.

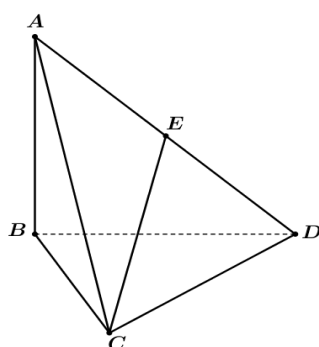
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a; AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

- a) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng BC và SD .
- b) Gọi I là trung điểm của CD . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI .

Câu 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của đỉnh A' xuống mặt đáy (ABC) trùng với trung điểm của BC . Biết cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60° .

- a) Tính tan góc tạo bởi $B'C'$ và $A'C$.
- b) Cosin góc tạo bởi CC' và AB .

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CE .



----- HẾT -----

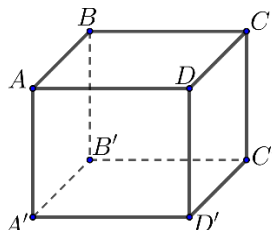
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AD vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

- A.** BB' . **B.** $B'D'$. **C.** AD' . **D.** $B'D$.

Lời giải

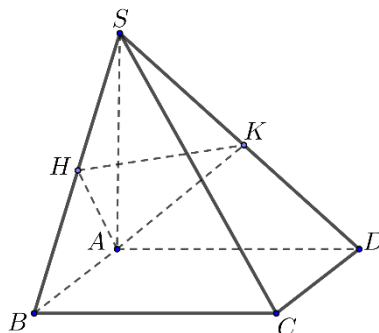


Do $(\overline{AD}, \overline{BB'}) = (\overline{AD}, \overline{DD'}) = \overline{ADD'} = 90^\circ$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD . Đường thẳng HK vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

- A.** AC . **B.** SB . **C.** SD . **D.** AB .

Lời giải



Ta có: $\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90^\circ$

$AB = AD$ (Vì $ABCD$ là hình thoi)

SA cạnh chung

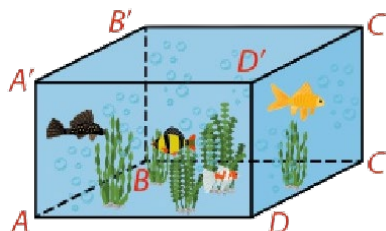
$\Rightarrow \Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow AH = AK, SB = SD, SH = SK$

Theo định lí Thales $\frac{SH}{SB} = \frac{SK}{SD} \Rightarrow HK \parallel BD$

Mà $AC \perp BD$ (Vì BD, AC là hai đường chéo của hình thoi)

$\Rightarrow HK \perp AC$

Câu 3: Ta biết hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình chữ nhật. Quan sát một bể nuôi cá cảnh hình hộp chữ nhật sau và cho biết góc giữa hai đường thẳng AA' và $C'D'$ bằng góc nào sau đây?



- A. $(A'A, AB)$. B. $(A'A, AD)$. C. $(A'A, AB)$. D. $(A'A, AB')$.

Lời giải

Do $D'C'$ song song với AB

Nên góc giữa hai đường thẳng AA' và $C'D'$ bằng góc $(A'A, AB)$

- Câu 4:** Đối với nhà gỗ truyền thống, trong các cấu kiện hoành, quá giang, rui, cột tương ứng được đánh số 1,2,3,4, trong hình sau, những cặp cấu kiện nào vuông góc với nhau?



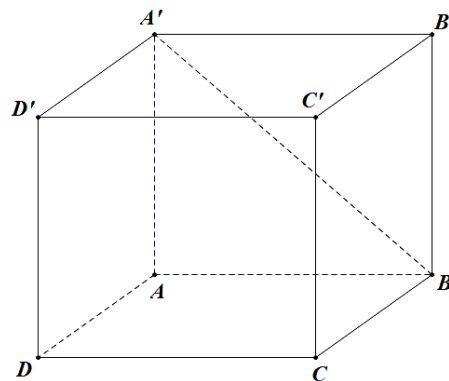
- A. 1-4;2-4;1-3 B. 2-4;1-3 C. 1-4;3-4;1-2 D. 1-4,2-4,3-4

Lời giải

Ta có các cặp đường thẳng vuông góc nhau ở trong hình là 1 và 4, 1 và 3, 2 và 4.

- Câu 5:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng
- A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải

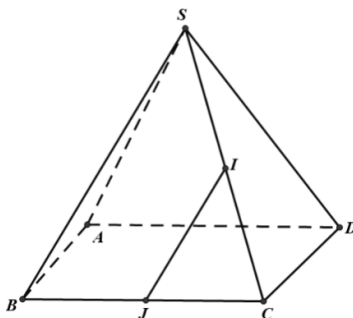


Ta có $AB \parallel CD$ nên $(\widehat{BA', CD}) = (\widehat{BA', AB})$.

Vì $ABB'A'$ là hình vuông nên $(\widehat{BA', AB}) = \widehat{ABA'} = 45^\circ$.

- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Góc giữa hai đường thẳng IJ và SC bằng
- A. 60° . B. 45° . C. 90° . D. 30° .

Lời giải

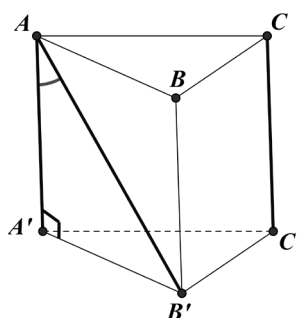


Dễ thấy ΔSBC là tam giác đều. Do $IJ \parallel SB$ nên $(IJ, SC) = (SB, SC) = \widehat{BSC} = 60^\circ$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$. Góc giữa hai đường thẳng AB' và CC' bằng

- A.** 30° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 90° .

Lời giải



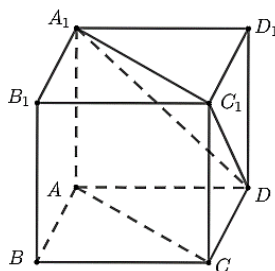
Vì $AA' \parallel CC'$ nên góc giữa CC' và AB' bằng góc giữa AA' và AB' và bằng góc $\widehat{A'AB'}$

Với $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$ thì $\tan \widehat{A'AB'} = \frac{A'B'}{AA'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{A'AB'} = 30^\circ$

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa hai đường thẳng AC và DA_1 bằng

- A.** 60° . **B.** 90° . **C.** 45° . **D.** 120° .

Lời giải



Ta có $AC \parallel A_1C_1$, do đó góc giữa $(AC, DA_1) = (A_1C_1, DA_1)$, bằng góc $\widehat{DA_1C_1}$.

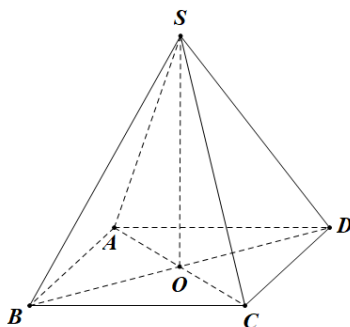
Do $DA_1; A_1C_1, DC_1$ là các đường chéo hình vuông nên bằng nhau. Vậy ΔDA_1C_1 đều,

Vậy góc $\widehat{DA_1C_1}$ bằng 60° .

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

- A.** 30° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 45° .

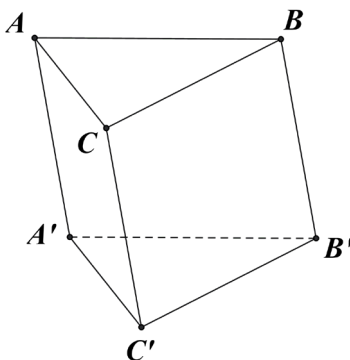
Lời giải



Vì $AB \parallel CD \Rightarrow \widehat{(SA, CD)} = \widehat{(SA, AB)}$.

Tam giác SAB đều cạnh $a \Rightarrow \widehat{SAB} = 60^\circ$. Vậy $\widehat{(SA, CD)} = 60^\circ$.

Câu 10: Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình vẽ)



Góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng

- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Lời giải

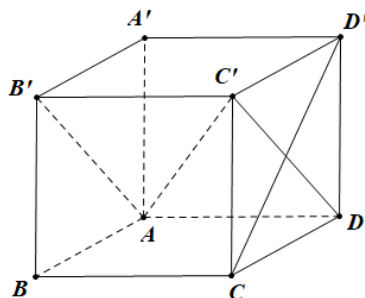
Ta có tam giác ABC là tam giác đều suy ra $\widehat{BAC} = 60^\circ$.

Lại có $CA \parallel C'A' \Rightarrow \widehat{(AB, C'A')} = \widehat{(AB, CA)} = \widehat{BAC} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng 60° .

Câu 11: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng CD' và AC' .

- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .



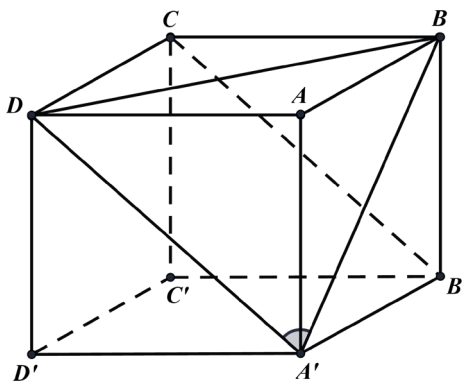
Ta có $CD' \perp C'D$ (tính chất đường chéo hình vuông), $CD' \perp C'B'$ (tính chất hình lập phương).

Suy ra $CD' \perp (AB'C'D) \Rightarrow CD' \perp AC'$. Vậy góc giữa hai đường thẳng CD' và AC' bằng 90° .

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính góc tạo bởi đường thẳng $A'B$ và đường thẳng $B'C$.

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

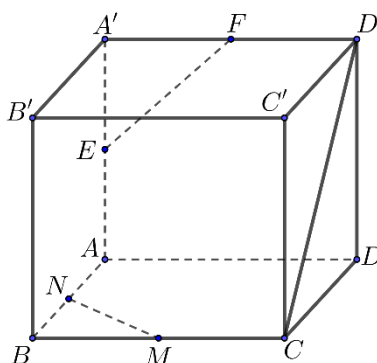


Xét $\triangle DA'B$ có $A'D = A'B = BD$ nên $\triangle DA'B$ là tam giác đều $\Rightarrow \widehat{DA'B} = 60^\circ$.

Ta có $B'C \parallel A'D \Rightarrow (\widehat{A'B; B'C}) = (\widehat{A'B; A'D}) = \widehat{DA'B} = 60^\circ$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 5: Trong không gian, cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (như vẽ bên), gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của $BC, AB, AA', A'D'$.



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Cạnh MN và AA' vuông góc với nhau.		
b)	Góc giữa MN và CD' bằng góc giữa AC và CD' .		
c)	Góc giữa EF và CC' bằng góc giữa AD' và CC' .		
d)	Góc giữa EF và CD' bằng 30° .		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------

a) Đúng

Cạnh MN và AA' vuông góc với nhau.

Ta có: $MN \parallel AC$ (đường trung bình)

Mà $(\widehat{AC, AA'}) = 90^\circ \Rightarrow (\widehat{MN, AA'}) = 90^\circ$

b) Đúng

Góc giữa MN và CD' bằng góc giữa AC và CD' .

Ta có: $MN \parallel AC$ (đường trung bình)

Nên góc giữa MN và CD' bằng góc giữa AC và CD' .

c) Đúng

Góc giữa EF và CC' bằng góc giữa AD' và CC' .

Ta có: $EF \parallel AD'$ (đường trung bình)

Nên góc giữa EF và CC' bằng góc giữa AD' và CC' .

d) Sai

Góc giữa EF và CD' bằng 30° .

Ta có: $EF \parallel AD'$ (đường trung bình)

Nên góc giữa EF và CD' bằng góc $(\widehat{AD', CD'})$.

Xét tam giác ACD' có $AD' = CD' = AC$ (cùng là đường chéo các mặt bên là các hình vuông bằng nhau) nên tam giác ACD' đều.

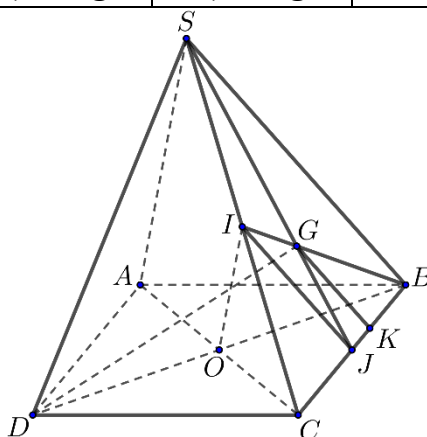
Vậy $(\widehat{AD', CD'}) = \widehat{AD'C} = 60^\circ$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Gọi G là trọng tâm $\triangle SBC$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Góc giữa IJ và SA bằng 90° .		
b)	Góc giữa IJ với CD bằng 60° .		
c)	Cosin của góc giữa BI với SA bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.		
d)	Cosin của góc giữa DG và SB bằng $\frac{1}{3}$.		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------



a) Sai

Góc giữa IJ và SA bằng 90° .

Ta có $IJ \parallel SB \Rightarrow (\widehat{IJ, SA}) = (\widehat{SB, SA}) = \widehat{ASB} = 60^\circ$.

b) Đúng

Góc giữa IJ với CD bằng 60° .

Ta có OJ là đường trung bình của $\triangle BCD$ nên $OJ \parallel CD \Rightarrow (\widehat{IJ, CD}) = (\widehat{IJ, OJ})$

$$\text{Xét } \triangle IOJ \text{ có: } \begin{cases} IJ = \frac{SB}{2} = \frac{a}{2} \\ OJ = \frac{CD}{2} = \frac{a}{2} \\ OI = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2} \end{cases}$$

Vậy ΔIOJ đều nên góc giữa IJ và CD bằng $(\widehat{IJ, OJ}) = \widehat{IJO} = 60^\circ$.

c) **Đúng**

Cosin của góc giữa BI với SA bằng $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $OI \parallel SA$ nên $(\widehat{BI, SA}) = (\widehat{BI, OI})$.

$$\text{Trong } \Delta IOB, \text{ ta có } \cos \widehat{OIB} = \frac{BI^2 + IO^2 - BO^2}{2 \cdot BI \cdot IO} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Do đó } \cos(\widehat{BI, SA}) = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

d) **Sai**

Cosin của góc giữa DG và SB bằng $\frac{1}{3}$.

Kẻ $GK \parallel SB$, $K \in BC$. Khi đó góc giữa DG và SB chính là góc giữa DG và GK .

$$\Delta JGK \text{ đồng dạng } \Delta JSB \text{ nên ta có: } \frac{GK}{SB} = \frac{JK}{JB} = \frac{JG}{JS} = \frac{1}{3} \Rightarrow GK = \frac{1}{3}a; JK = \frac{1}{3}JB = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a}{6}.$$

$$\text{Do đó } CK = CJ + JK = \frac{a}{2} + \frac{a}{6} = \frac{2a}{3}.$$

$$\text{Mà: } DK = \sqrt{DC^2 + CK^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{2a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}a}{3}.$$

Áp dụng định lý cosin trong ΔBDI , ta có:

$$\cos \widehat{DBI} = \frac{BI^2 + BD^2 - DI^2}{2 \cdot DB \cdot BI} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Áp dụng định lý cosin trong ΔBDG , ta có:

$$DG = \sqrt{BD^2 + BG^2 - 2BD \cdot BG \cdot \cos \widehat{DBG}} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - 2 \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3}} = a.$$

Áp dụng định lý cosin trong ΔKDG , ta có:

$$\cos \widehat{DGK} = \frac{GD^2 + GK^2 - DK^2}{2 \cdot GD \cdot GK} = \frac{a^2 + \left(\frac{a}{3}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{13}a}{3}\right)^2}{2 \cdot a \cdot \frac{a}{3}} = -\frac{1}{2}.$$

Suy ra góc giữa hai đường thẳng DG và GK bằng 60° .

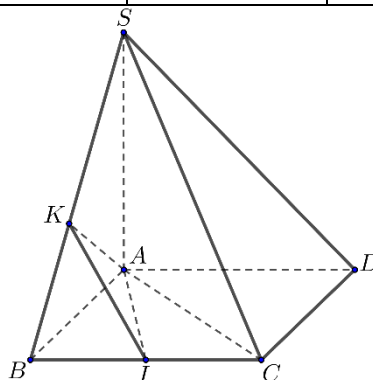
Do đó cosin của góc giữa DG và SB bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với AB và AD , $SC = a\sqrt{3}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
(a)	$SA \perp BC$		
(b)	$SA \perp CD$		
(c)	$BC \perp SB$		
(d)	K là hình chiếu của A lên SB thì $SC \perp AK$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------



a) Đúng

$$SA \perp BC.$$

Ta có $BC \parallel AD$ mà $SA \perp AD \Rightarrow SA \perp BC$.

b) Đúng

$$SA \perp CD.$$

Ta có $CD \parallel AB$ mà $SA \perp AB \Rightarrow SA \perp CD$.

c) Đúng

$$BC \perp SB.$$

Ta có $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{2}$, $BC = a$.

Vậy $SC^2 = 3a^2 = SB^2 + BC^2$, $\Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại B . Vậy $BC \perp SB$.

d) Đúng

K là hình chiếu của A lên SB thì $SC \perp AK$.

Ta có ΔSAB vuông cân tại A và K là hình chiếu của A lên SB

Nên K là trung điểm SB .

Gọi I là trung điểm BC , khi đó $KI \parallel SC$. Suy ra $(SC, AK) = (KI, AK)$.

Trong ΔAKI , ta có $AK = \frac{1}{2}SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $KI = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AI = \sqrt{AB^2 + BI^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Suy ra $AI^2 = \frac{5a^2}{4} = AK^2 + KI^2$, $\Rightarrow \Delta AKI$ vuông tại K .

Vậy $KA \perp KI \Rightarrow KA \perp SC$.

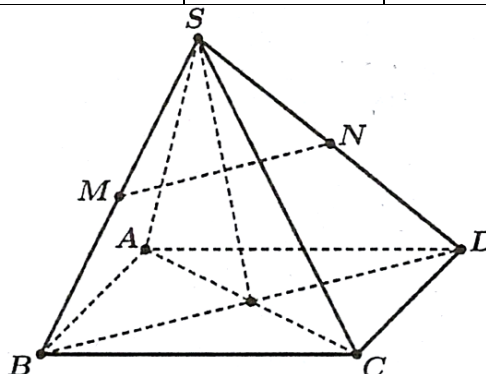
Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của đoạn SB, SD .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$MN \parallel BD$		
b)	MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau		

c)	$AC \perp BD$		
d)	$(MN, AC) = 90^\circ$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------



a) Đúng

$MN // BD$.

Xét tam giác SBD có MN là đường trung bình, suy ra $MN // BD$. (1)

b) Đúng

MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau.

c) Đúng

$AC \perp BD$

Mặt khác: $AC \perp BD$ (hai đường chéo trong hình thoi). (2)

d) Đúng

$(MN, AC) = 90^\circ$

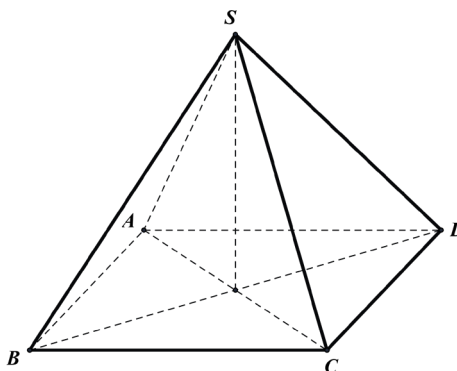
Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp MN$ hay $(MN, AC) = 90^\circ$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$. Các cạnh bên của hình chóp cùng bằng $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và SC .

Lời giải

Trả lời: 45



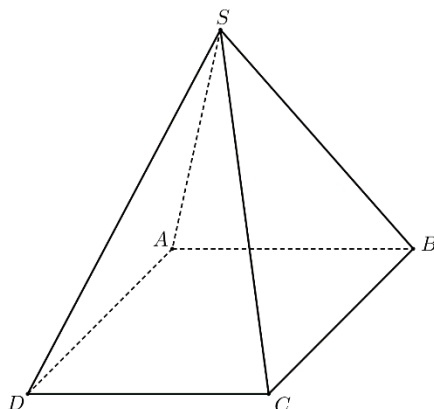
Do $AB // CD$ nên góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng góc giữa hai đường thẳng CD và SC .

Xét tam giác SCD ta có $CD = 2a$, $SC = a\sqrt{2}$, $SD = a\sqrt{2}$ thỏa mãn $SC^2 + SD^2 = CD^2$ nên tam giác SCD vuông tại S . Vậy góc $\widehat{SCD} = 45^\circ$ hay góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng 45° .

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có $SA = AB = a$. Tính góc giữa hai đường thẳng SA và CD

Lời giải

Trả lời: 60



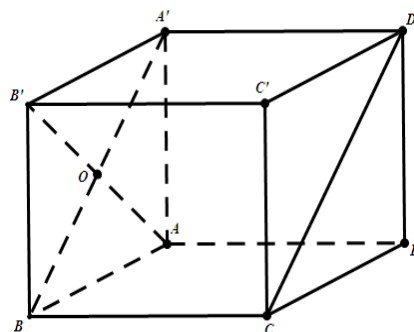
Ta có $CD \parallel AB$ do đó góc giữa SA và CD bằng góc giữa SA và AB bằng góc \widehat{SAB} . Do $S.ABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $SA = AB$ nên $\triangle SAB$ là tam giác đều, do đó $\widehat{SAB} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SA và CD bằng 60° .

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = \sqrt{2}$, $AA' = 2$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng AB' và CD' . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,33



Ta có: $CD' \parallel A'B$ nên $(AB', CD') = (AB', A'B)$ và gọi O là giao điểm của AB' và $A'B$.

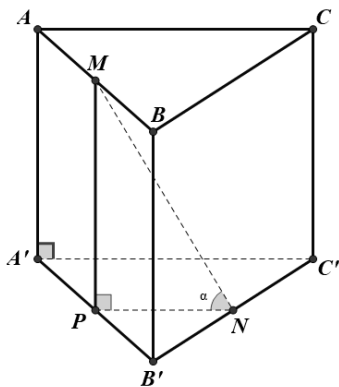
$$\text{Ta có: } OA = OB = \frac{1}{2} AB' = \frac{1}{2} \sqrt{2+4} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Suy ra: } \cos \widehat{AOB} = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2OA \cdot OB} = \frac{\frac{6}{4} + \frac{6}{4} - 2}{2 \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{3}. \text{ Vậy } \cos(AB', CD') = \frac{1}{3}.$$

Câu 4: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, B'C'$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng AC, MN . Tính $\tan \alpha$.

Lời giải

Trả lời: 2



Gọi P là trung điểm $A'B'$ khi đó ta có $AC \parallel PN$.

Do đó góc giữa hai đường thẳng AC, MN chính là góc giữa đường thẳng MN, PN .

Tức là $(\widehat{AC, MN}) = (\widehat{MN, PN}) = \alpha$.

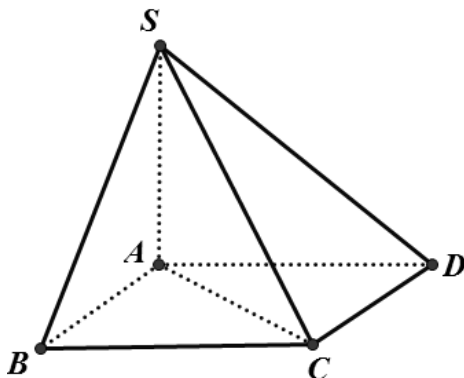
Trong tam giác vuông MPN có: $MP = AA' = a, PN = \frac{a}{2}$ suy ra $MN = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

Vậy $\tan \alpha = \tan \widehat{MNP} = \frac{MP}{PN} = 2$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a\sqrt{2}, AD = 2a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng SC và AB bằng

Lời giải

Trả lời: 0,5



Góc giữa đường thẳng SC và AB bằng góc giữa hai đường thẳng SC và CD .

Mặt khác: $CD \perp SA, CD \perp AD$ nên $CD \perp SD$ hay tam giác SCD vuông tại D .

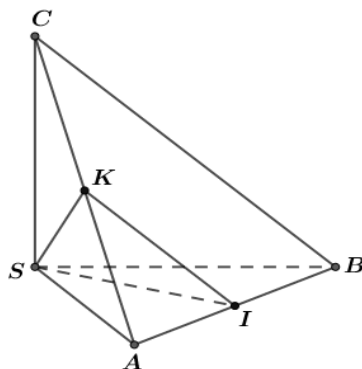
$$\cos \widehat{SCD} = \frac{CD}{SC} = \frac{AB}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2a^2 + 2a^2 + 4a^2}} = \frac{1}{2}.$$

Suy ra góc $SCD = 60^\circ$ nên góc giữa đường thẳng SC và AB bằng 60° .

Câu 6: Hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC$. Gọi I là trung điểm của AB . Tính góc giữa SI và BC .

Lời giải

Trả lời: 60



Gọi K là trung điểm của AC . Khi đó $(\widehat{SI, BC}) = (\widehat{SI, KI}) = \widehat{SIK}$.

Ta có $AB = BC = CA \Rightarrow SI = IK = SK$

Tam giác SIK là tam giác đều nên $\widehat{SIK} = 60^\circ$.

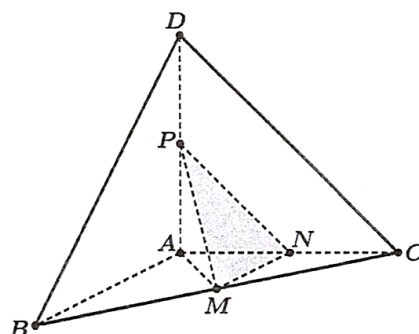
PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau, biết $AB = AC = AD = 1$. Chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc.

Lời giải

Theo định lí Pythagore, ta tính được $BC = CD = BD = \sqrt{2}$.

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, AC, AD .



Tam giác ABC có MN là đường trung bình

$$\text{nên } \begin{cases} MN // AB \\ MN = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Tam giác ACD có NP là đường trung bình

$$\text{nên } \begin{cases} NP // CD \\ NP = \frac{1}{2} CD = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Tam giác ABC vuông tại A có đường trung tuyến $AM = \frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác AMP vuông tại A có:

$$MP = \sqrt{AM^2 + AP^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} MN // AB \\ NP // CD \end{cases} \Rightarrow (AB, CD) = (MN, NP).$$

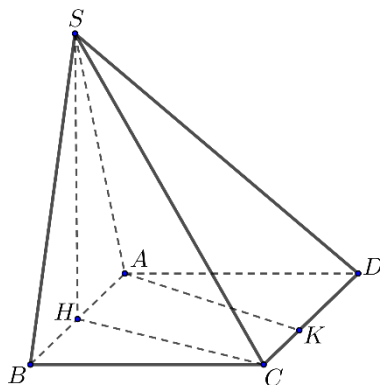
Tam giác MNP có: $MN^2 = \frac{1}{4}, NP^2 = \frac{1}{2}, MP^2 = \frac{3}{4}$ hay $MN^2 + NP^2 = MP^2$.

Suy ra tam giác MNP vuông tại N .

Vậy $(AB, CD) = (MN, NP) = 90^\circ$ hay $AB \perp CD$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, ΔSAB đều và $SC = 2a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Chứng minh hai đường thẳng AK và SH vuông góc.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AH = AK = a \\ AH \parallel AK \end{cases} \Rightarrow AHCK$ là hình bình hành $\Rightarrow AK \parallel CH$.

Do ΔSAB đều cạnh $2a$ nên $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Xét ΔHBC có $HC = \sqrt{BH^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

Xét ΔSHC có: $SH^2 + HC^2 = (a\sqrt{3})^2 + (a\sqrt{5})^2 = 8a^2 = SC^2$

$\Rightarrow \Delta SHC$ vuông tại $H \Rightarrow SH \perp HC$.

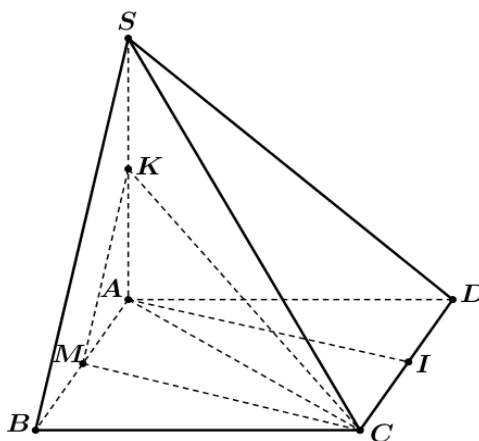
Mà $AK \parallel CH \Rightarrow SH \perp AK$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a; AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$.

a) Tính cosin góc giữa hai đường thẳng BC và SD .

b) Gọi I là trung điểm của CD . Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SB và AI .

Lời giải



a) Do $BC \parallel AD \Rightarrow \widehat{(SD; BC)} = \widehat{(SD; AD)} = \widehat{SDA}$

$$\Delta SAD \text{ vuông tại } A \Rightarrow \cos \widehat{SDA} = \frac{AD}{SD} = \frac{AD}{\sqrt{AD^2 + SA^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

b) Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AB và SA thì MK là đường trung bình của tam giác SAB . Khi đó $MK // SB$, mặt khác $MC // AI$.

Suy ra $(\widehat{SB; AI}) = (\widehat{MK; CM})$.

$$\text{Ta có: } MK = \frac{SB}{2} = \frac{\sqrt{SA^2 + AB^2}}{2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}; MC = \sqrt{MB^2 + BC^2} = \frac{3a}{2}; KC = \sqrt{KA^2 + AC^2} = 2a.$$

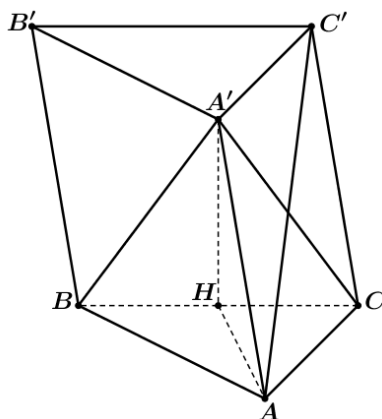
$$\text{Khi đó } \cos \widehat{KMC} = \frac{KM^2 + MC^2 - KC^2}{2.KM.MC} = -\frac{1}{3\sqrt{5}} \Rightarrow \cos(\widehat{SB; AI}) = \frac{1}{3\sqrt{5}}.$$

Câu 4: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , hình chiếu của điểm A' xuống mặt đáy (ABC) trùng với trung điểm của BC . Biết cạnh bên tạo với mặt đáy một góc 60° .

a) Tính tan góc tạo bởi $B'C'$ và $A'C$.

b) Cosin góc tạo bởi CC' và AB .

Lời giải



a) Gọi H là trung điểm BC . Ta có: $BC // B'C' \Rightarrow (\widehat{B'C'; A'C}) = (\widehat{BC; A'C}) = \widehat{A'CH}$.

Mặt khác $A'H \perp (ABC) \Rightarrow (\widehat{AA'; (ABC)}) = \widehat{A'AH} = 60^\circ$.

$$\text{Khi đó: } AH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A'H = AH \tan 60^\circ = \frac{3a}{2}.$$

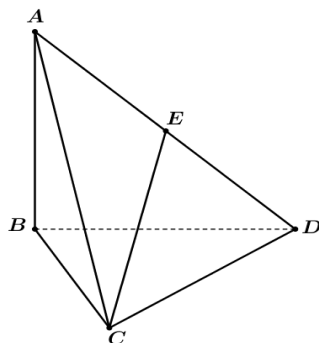
Xét tam giác vuông $A'HC$ ta có $\tan \widehat{A'CH} = \frac{A'H}{HC} = 3$. Vậy $\tan(\widehat{B'C'; A'C}) = 3$.

b) Do $CC' // AA' \Rightarrow (\widehat{CC'; AB}) = (\widehat{AA'; AB})$. Ta có: $AA' = \sqrt{A'H^2 + HA^2} = a\sqrt{3}$

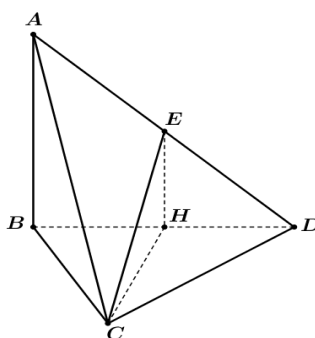
$$A'B = \sqrt{A'H^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{10}}{2} \Rightarrow \cos \widehat{A'AB} = \frac{AA'^2 + AB^2 - A'B^2}{2.AA'.AB} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy } \cos(\widehat{CC'; AB}) = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CE .



Lời giải



Gọi H là trung điểm $BD \Rightarrow EH // AB \Rightarrow EH \perp (BCD)$

Vậy $EH \perp CH$, ta có $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Suy ra $BD = \sqrt{BC^2 + CD^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow CH = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$

Lại có $EH = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4} = CH \Rightarrow \triangle EHC$ vuông cân tại H

Do đó $(\widehat{AB;CE}) = (\widehat{EH;CE}) = \widehat{CEH} = 45^\circ$.

CHƯƠNG

VII

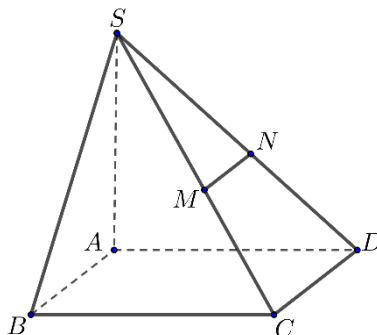
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD (tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A. $MN \perp AC$. B. $MN \perp BD$. C. $MN \perp AB$. D. $MN \perp BC$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC' ?

- A. $A'D$. B. AC . C. BB' . D. AD' .

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với BD .

- A. CC' . B. $B'C'$. C. AB . D. $B'C$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là hình thoi. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $AB \perp AD$. B. $BD \perp A'C'$. C. $DD' \perp DC$. D. $BD \perp AB$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC . Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $AB \perp AD$. B. $IJ \perp SA$. C. $IJ \perp BD$. D. $BD \perp AB$.

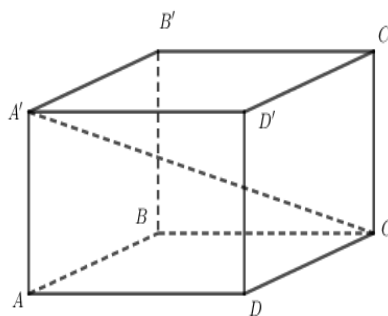
Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'C'$ bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 30° . D. 45° .

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng a . Góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng

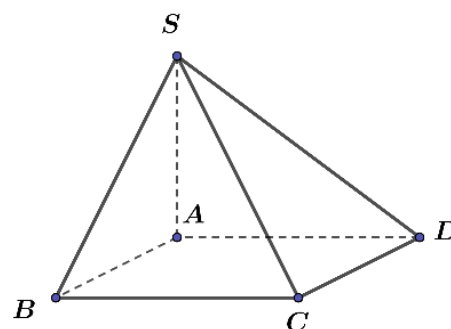
- A. 90° . B. 45° . C. 60° . D. 30° .

- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng
A. 60° . **B.** 90° . **C.** 30° . **D.** 45° .
- Câu 9:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a , $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, góc giữa hai đường thẳng AB và SD là
A. 120° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 90° .
- Câu 10:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa $A'C$ và DD' .



- A.** 90° . **B.** 30° . **C.** 60° . **D.** 45° .

- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $AC = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ bên).



Góc giữa hai đường thẳng BC và SD

- A.** 90° . **B.** 30° .
C. 45° . **D.** 60° .
- Câu 12:** Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC . Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và CD .
A. 30° . **B.** 60° . **C.** 45° . **D.** 90° .

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$BD // B'D'$		
b)	$(AC, B'D') = 90^\circ$		
c)	Tam giác ACD' đều		
d)	$(AC, A'B) = 30^\circ$		

Câu 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a , M là trung điểm cạnh BC , N là trung điểm của AC .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$MN // AB$		
b)	$MD = ND = \frac{a\sqrt{2}}{2}$		
c)	$(AB, DM) = (MN, DM)$		
d)	$\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{3}$		

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Gọi E là trung điểm của AB . Biết $AB = 2a, AD = DC = a$, đồng thời $SA \perp AB, SA \perp AD$ và $SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(SB, DC) = \widehat{SBA}$		
b)	$\tan \widehat{SBA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$		
c)	$DE // BC$		
d)	$(SD, BC) \approx 52,42^\circ$		

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a . Cho biết $SA = a\sqrt{3}, SA \perp AB, SA \perp AD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(AB, SA) = 90^\circ$		
b)	$SA \perp CD$		
c)	$(SD, BC) = (SD, CD)$		
d)	$\widehat{SDA} = 60^\circ$		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD . Góc giữa đường thẳng MN và AC bằng bao nhiêu độ?

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$

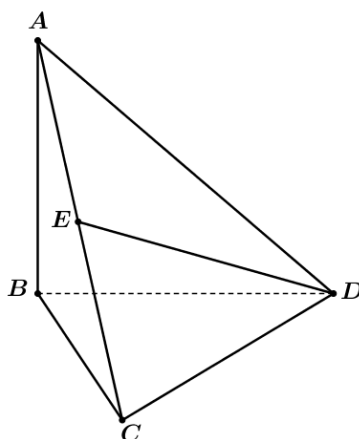
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = 2a, BC = a\sqrt{2}, SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm SD . Tính $\tan \alpha$ với α góc giữa hai đường thẳng SA và CM . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 5: Cho hình lăng trụ tam giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên có độ dài $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' .

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD). Xác định số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C . Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD . Tính góc giữa MN và PQ
- Câu 2:** Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc.
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a$; $AC = a\sqrt{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AB .
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng SC tạo với đáy một góc 30° . Tính cosin của góc giữa
- a) SD và BC .
- b) DH và SC với H là chân đường cao hạ từ S xuống mặt đáy ($ABCD$).
- Câu 5:** Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD). Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DE .

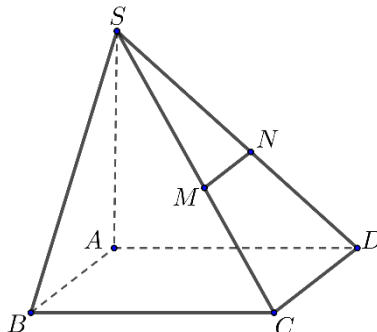


----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD (tham khảo hình vẽ).



Khẳng định nào dưới đây đúng?

- A.** $MN \perp AC$. **B.** $MN \perp BD$. **C.** $MN \perp AB$. **D.** $MN \perp BC$.

Lời giải

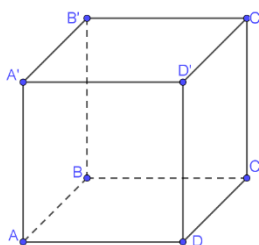
Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD . Suy ra $MN \parallel CD$

$$\text{Ta có } \begin{cases} MN \parallel CD \\ BC \perp CD \end{cases} \Rightarrow MN \perp BC$$

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC' ?

- A.** $A'D$. **B.** AC . **C.** BB' . **D.** AD' .

Lời giải

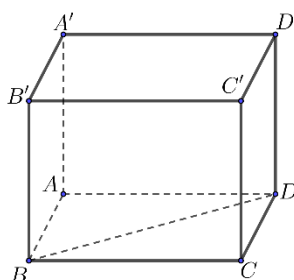


Ta có: $A'D \parallel B'C$, $B'C \perp BC' \Rightarrow A'D \perp BC'$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với BD .

- A.** CC' . **B.** $B'C'$. **C.** AB . **D.** $B'C$.

Lời giải

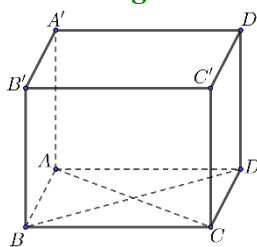


Đường thẳng vuông góc với BD là CC' .

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là hình thoi. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A.** $AB \perp AD$. **B.** $BD \perp A'C'$. **C.** $DD' \perp DC$. **D.** $BD \perp AB$.

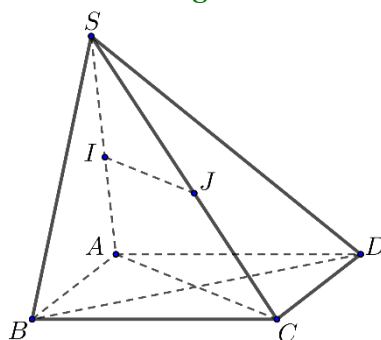
Lời giải



Do $(\widehat{BD, A'C'}) = (\widehat{BD, AC}) = 90^\circ$ (Vì BD, AC là hai đường chéo của hình thoi)

- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC . Phát biểu nào sau đây là đúng?
A. $AB \perp AD$. **B.** $IJ \perp SA$. **C.** $IJ \perp BD$. **D.** $BD \perp AB$.

Lời giải



Do I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC

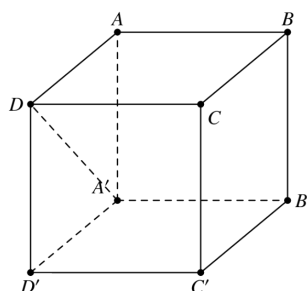
$$\Rightarrow IJ \parallel AC$$

Mà $AC \perp BD$ (Vì BD, AC là hai đường chéo của hình thoi)

$$\Rightarrow IJ \perp BD$$

- Câu 6:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'D$ và $B'C'$ bằng
A. 90° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 45° .

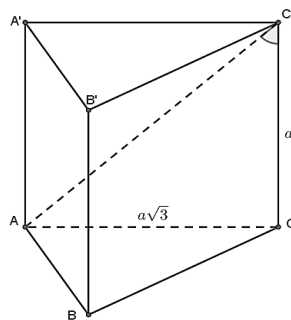
Lời giải



Vì $B'C' \parallel A'D'$ nên $(A'D, B'C') = (A'D, A'D') = \widehat{DA'D'} = 45^\circ$.

- Câu 7:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng $a\sqrt{3}$ và cạnh bên bằng a . Góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng
A. 90° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 30° .

Lời giải



Ta có $BB' \parallel CC' \Rightarrow \widehat{(BB', AC')} = \widehat{(CC', AC')} = \widehat{AC'C}$.

Khi đó $\Delta ACC'$ vuông tại C nên $\tan \widehat{AC'C} = \frac{AC}{CC'} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AC'C} = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng BB' và AC' bằng 60° .

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có độ dài các cạnh $SA = SB = SC = AB = AC = a$ và $BC = a\sqrt{2}$. Góc giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

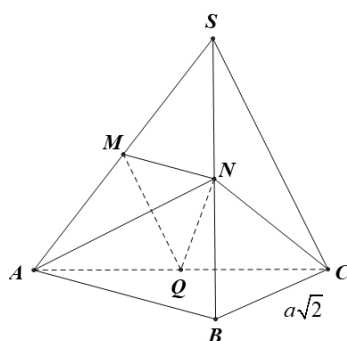
A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải



Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, AC .

Mặt khác, ta có $\begin{cases} MN \parallel AB \\ MQ \parallel SC \end{cases} \Rightarrow \widehat{(AB, SC)} = \widehat{(MN, MQ)}$.

Ta có $AN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $NC = \sqrt{\frac{SC^2 + BC^2}{2} - \frac{SB^2}{4}} = \sqrt{\frac{a^2 + 2a^2}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

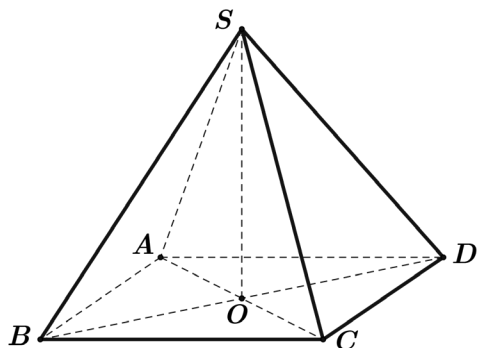
Xét tam giác NAC có $NQ = \sqrt{\frac{NA^2 + NC^2}{2} - \frac{AC^2}{4}} = \sqrt{\frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{5a^2}{4}}{2} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác MNQ có $\cos \widehat{NMQ} = \frac{MN^2 + MQ^2 - NQ^2}{2MN \cdot MQ} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow \widehat{NMQ} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{(MN, MQ)} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

- Câu 9:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh a , $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, góc giữa hai đường thẳng AB và SD là
- A. 120° . B. 60° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

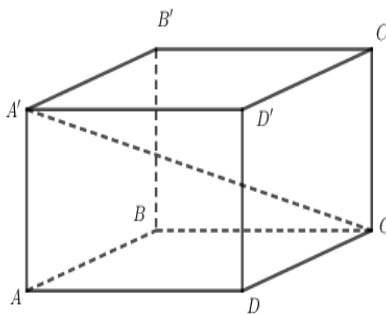


Ta có: $AB \parallel CD \Rightarrow (AB, SD) = (CD, SD)$; $OD = \frac{1}{2}BD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$SD = \sqrt{SO^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2}} = a \Rightarrow SD = SC = CD = a \Rightarrow \Delta SCD \text{ đều} \Rightarrow \widehat{SDC} = 60^\circ.$$

Suy ra $(AB, SD) = (CD, SD) = \widehat{SDC} = 60^\circ$.

- Câu 10:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $AB = AA' = a$, $AD = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa $A'C$ và DD' .



- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

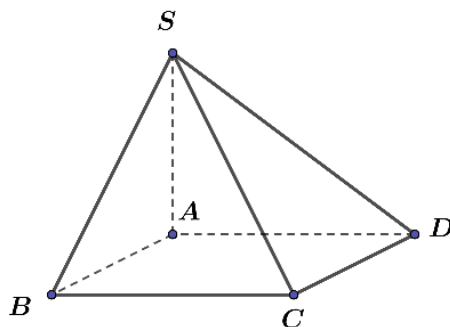
Lời giải

Vì $AA'D'D$ là chữ nhật nên $DD' \parallel AA' \Rightarrow (A'C, DD') = (A'C, AA') = \widehat{AA'C}$.

$$\text{Ta có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Khi đó: } \tan(\widehat{AA'C}) = \frac{AC}{AA'} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{AA'C} = 60^\circ$$

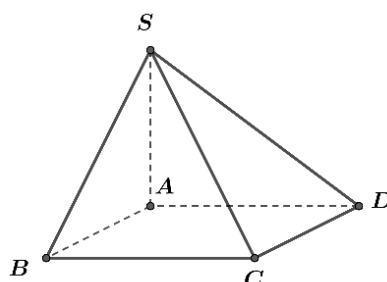
- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $AC = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ bên).



Góc giữa hai đường thẳng BC và SD

- A. 90° . B. 30° . **C. 45° .** D. 60° .

Lời giải



Vì $AD \parallel BC$ nên $(\widehat{BC;SD}) = (\widehat{AD;SD}) = \widehat{SDA}$ (\widehat{SDA} nhọn vì $\triangle SDA$ vuông tại A).

$ABCD$ là hình vuông có đường chéo $AC = 2a \Rightarrow AD = a\sqrt{2}$

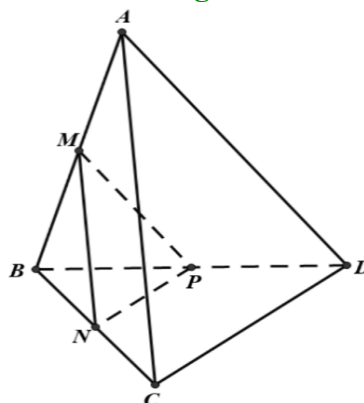
Tam giác vuông SDA có $SA = AD = a\sqrt{2}$, nên tam giác này vuông cân tại $A \Rightarrow \widehat{SDA} = 45^\circ$.

Vậy $(\widehat{BC;SD}) = 45^\circ$.

Câu 12: Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và BC . Tính số đo góc giữa hai đường thẳng MN và CD .

- A. 30° . **B. 60° .** C. 45° . D. 90° .

Lời giải



Gọi P là trung điểm của BD .

Ta có MN, NP, MP lần lượt là đường trung bình của tam giác ABC, BCD, ABD .

Do đó: $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$

$$NP // CD, NP = \frac{1}{2} CD.$$

$$MP // AD, MP = \frac{1}{2} AD.$$

Suy ra $ABCD$ là tứ diện đều $\Rightarrow AC = CD = AD \Rightarrow MN = NP = MP$ nên tam giác MNP là tam giác đều nên $(\widehat{MN, CD}) = (\widehat{MN, NP}) = \widehat{MNP} = 60^\circ$.

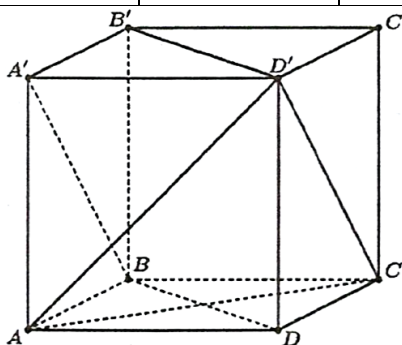
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$BD // B'D'$		
b)	$(AC, B'D') = 90^\circ$		
c)	Tam giác ACD' đều		
d)	$(AC, A'B) = 30^\circ$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------



a) Đúng

$$BD // B'D'$$

Ta có: $BB' // DD', BB' = DD' \Rightarrow BDD'B'$ là hình bình hành $\Rightarrow BD // B'D'$.

b) Đúng

$$(AC, B'D') = 90^\circ$$

Vì vậy $(AC, B'D') = (AC, BD) = 90^\circ$ (do AC và BD là hai đường chéo hình vuông $ABCD$).

c) Đúng

Tam giác ACD' đều

Ta có: $A'D' // BC, A'D' = BC \Rightarrow A'BCD'$ là hình bình hành $\Rightarrow A'B // CD'$.

Vì vậy $(AC, A'B) = (AC, CD')$.

Gọi a là cạnh của hình lập phương thì $AD' = CD' = AC = a\sqrt{2}$ (đường chéo của hình vuông cạnh a).

Suy ra tam giác ACD' đều

d) Sai

$$(AC, A'B) = 30^\circ$$

Nên $(AC, CD') = \widehat{ACD'} = 60^\circ$.

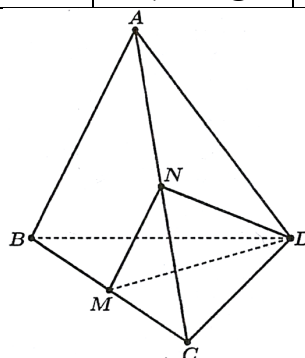
Vậy $(AC, A'B) = 60^\circ$.

Câu 2: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a , M là trung điểm cạnh BC , N là trung điểm của AC .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$MN // AB$		
b)	$MD = ND = \frac{a\sqrt{2}}{2}$		
c)	$(AB, DM) = (MN, DM)$		
d)	$\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{3}$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



a) Đúng

$$MN // AB$$

Gọi N là trung điểm của AC

$$\text{Nên } MN \text{ là đường trung bình của } \triangle ABC \Rightarrow \begin{cases} MN // AB(*) \\ MN = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2} \end{cases}$$

b) Sai

$$MD = ND = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Vì $\triangle BCD$ và $\triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh bằng a nên $MD = ND = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

c) Đúng

$$(AB, DM) = (MN, DM)$$

Từ (*) suy ra: $(AB, DM) = (MN, DM)$.

d) Sai

$$\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Xét $\triangle MND$, ta có:

$$\cos \widehat{DMN} = \frac{MN^2 + MD^2 - ND^2}{2MN \cdot MD} = \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6} > 0$$

$\Rightarrow \widehat{DMN}$ là góc nhọn.

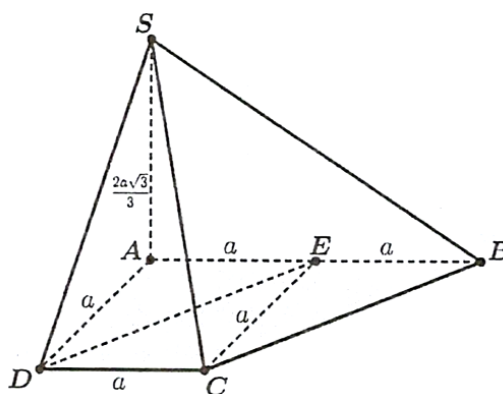
Vậy $(AB, DM) = (MN, DM) = \widehat{DMN}$ nên $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . Gọi E là trung điểm của AB . Biết $AB = 2a, AD = DC = a$, đồng thời $SA \perp AB, SA \perp AD$ và $SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(SB, DC) = \widehat{SBA}$		
b)	$\tan \widehat{SBA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$		
c)	$DE // BC$		
d)	$(SD, BC) \approx 52,42^\circ$		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



a) Đúng

$$(SB, DC) = \widehat{SBA}$$

Vì $CD // AB$

$$\Rightarrow (SB, DC) = (SB, AB) = \widehat{SBA}.$$

b) Sai

$$\tan \widehat{SBA} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{3} (*)$.

c) Đúng

$$DE // BC$$

Gọi E là trung điểm của AB .

Vì $BE // CD, BE = CD = a$ nên $BCDE$ là hình bình hành $\Rightarrow DE // BC$.

d) Sai

$$(SD, BC) \approx 52,42^\circ$$

Khi đó: $(SD, BC) = (SD, DE)$.

$$\text{Ta có: } SE^2 = SA^2 + AE^2 = \frac{4a^2}{3} + a^2 = \frac{7a^2}{3}; SD^2 = SA^2 + AD^2 = \frac{7a^2}{3};$$

$$DE^2 = AD^2 + AE^2 = 2a^2.$$

$$\text{Suy ra } SE = SD = \frac{a\sqrt{21}}{3}, DE = a\sqrt{2}.$$

Áp dụng định lí hàm cosin cho tam giác SDE , ta được:

$$\cos \widehat{SDE} = \frac{SD^2 + DE^2 - SE^2}{2SD \cdot DE} = \frac{2a^2}{2 \cdot \frac{a\sqrt{21}}{3} \cdot a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{42}}{14} > 0 \Rightarrow \widehat{SDE} \text{ là góc nhọn.}$$

Vậy $(SD, BC) = (SD, DE) = \widehat{SDE}$.

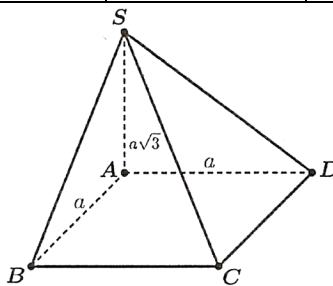
Suy ra: $(SD, BC) = \widehat{SDE} \approx 62,42^\circ$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a . Cho biết $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp AB, SA \perp AD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$(AB, SA) = 90^\circ$		
b)	$SA \perp CD$		
c)	$(SD, BC) = (SD, CD)$		
d)	$\widehat{SDA} = 60^\circ$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Đúng

$$(AB, SA) = 90^\circ$$

Ta có $SA \perp AB \Rightarrow (SA; AB) = 90^\circ$.

b) Đúng

$$SA \perp CD$$

Vì $CD // AB$ (hai cạnh đối trong hình thoi) nên $(CD, SA) = (AB, SA) = 90^\circ$.

Vậy $SA \perp CD$.

c) Sai

$$(\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, CD})$$

Vì $BC // AD$ (hai cạnh đối trong hình thoi) nên $(\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, AD})$.

d) Đúng

$$\widehat{SDA} = 60^\circ$$

Tam giác SAD vuông tại A có: $\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SDA} = 60^\circ$.

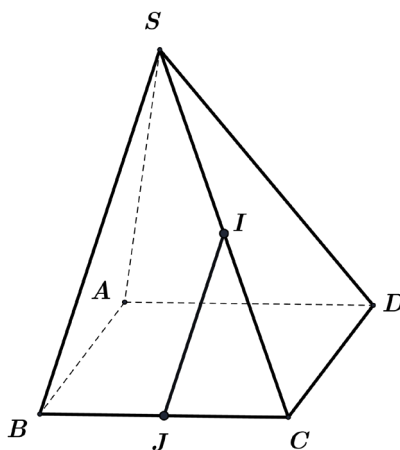
$$\Rightarrow (\widehat{SD, BC}) = (\widehat{SD, AD}) = \widehat{SDA} = 60^\circ.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng

Lời giải

Trả lời: 60



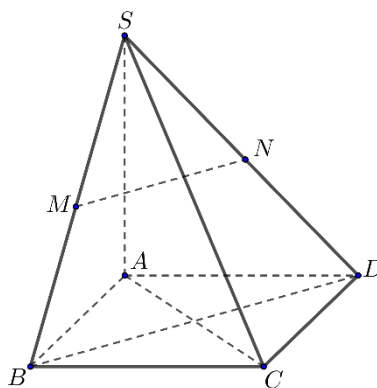
Theo giả thiết ta có IJ là đường trung bình của ΔSBC nên $IJ // SB$.

Vì $IJ // SB$ và $CD // AB$ nên $(IJ, CD) = (SB, AB) = \widehat{SBA} = 60^\circ$ (Do ΔSAB đều).

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của SB , SD . Góc giữa đường thẳng MN và AC bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 90



Ta có $MN // BD$ (vì MN là đường trung bình của ΔSBD)

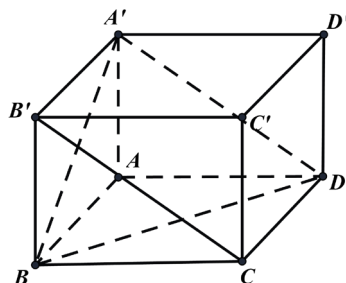
Lại có $AC \perp BD$ (tính chất của hình thoi)

$\Rightarrow MN \perp AC$. Do đó $(\widehat{MN; AC}) = 90^\circ$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$

Lời giải

Trả lời: 60



Theo tính chất hình lập phương ta có: $B'C \parallel A'D$.

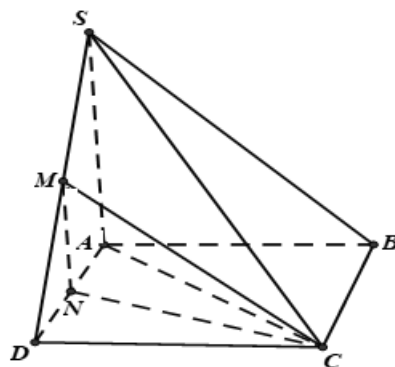
Do đó góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là: góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $A'D$.

Mà tam giác $A'BD$ là tam giác đều nên: $(A'B, B'C) = (A'B, A'D) = 60^\circ$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = 2a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm SD . Tính $\tan \alpha$ với α góc giữa hai đường thẳng SA và CM . (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 4,24

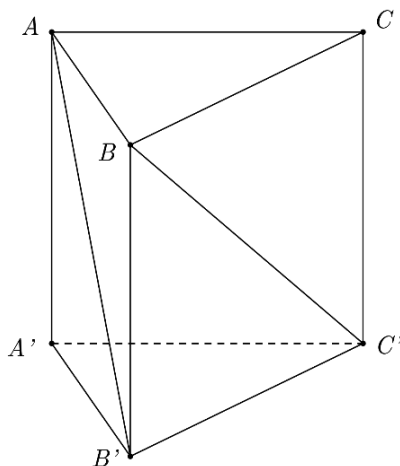


Gọi N là trung điểm của AD , khi đó $MN \parallel SA$ nên $(SA, CM) = (MN, CM) = \widehat{CMN} = \alpha$.

$$\text{Ta có } MN = \frac{SA}{2} = \frac{a}{2}, \quad CN = \sqrt{DN^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (2a)^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

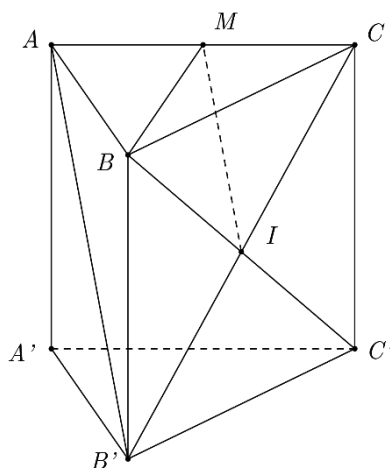
$$\text{Tam giác } MNC \text{ vuông tại } N \text{ nên ta có } \tan \alpha = \frac{NC}{MN} = \frac{\frac{3a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a}{2}} = 3\sqrt{2}.$$

Câu 5: Cho hình lăng trụ tam giác đều cạnh đáy bằng a , cạnh bên có độ dài $a\sqrt{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' .



Lời giải

Trả lời: 60



Gọi I là giao điểm của BC' và $B'C$ khi đó I là trung điểm của hai đường trên, gọi M là trung điểm của AC .

Ta có $IM \parallel AB'$ nên $(AB'; BC') = (IM; BC')$.

$$\text{Ta có } BM = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad IM = \frac{AB'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad BI = \frac{BC'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Do đó $BM = IM = BI$ nên tam giác BIM đều, suy ra $\widehat{BIM} = 60^\circ$.

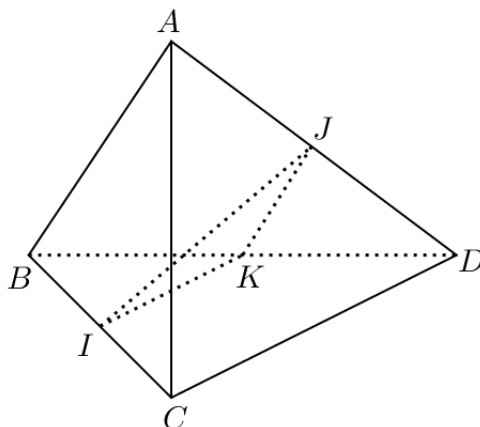
Vậy $(AB'; BC') = (IM; BC') = 60^\circ$.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD = a, IJ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (I, J lần lượt là trung điểm của BC và AD).

Xác định số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

Lời giải

Trả lời: 60



Gọi K là trung điểm của BD . Khi đó IK song song với CD và JK song song với AB .

$$\text{Khi đó } (\widehat{AB, CD}) = (\widehat{KI, KJ}) = \begin{cases} \widehat{IKJ} \\ 180^\circ - \widehat{IKJ} \end{cases}.$$

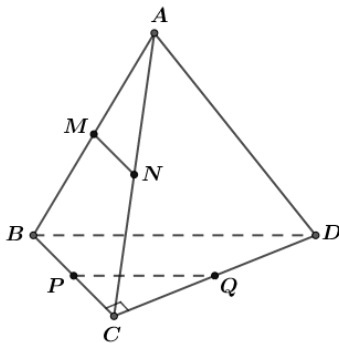
$$\text{Ta có } KI = KJ = \frac{a}{2} \Rightarrow \cos \widehat{IKJ} = \frac{KI^2 + KJ^2 - IJ^2}{2KI \cdot KJ} = \frac{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{3a^2}{4}}{2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Vậy } \widehat{IKJ} = 120^\circ \Rightarrow (\widehat{AB, CD}) = 60^\circ.$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ với đáy BCD là tam giác vuông cân tại C . Các điểm M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, BC, CD . Tính góc giữa MN và PQ

Lời giải



Do MN song song BC và PQ song song BD nên góc giữa MN và PQ bằng góc giữa BC và BD và bằng góc $\widehat{CBD} = 45^\circ$ (do tam giác BCD vuông cân tại C).

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Chứng minh hai đường thẳng AB và CD vuông góc.

Lời giải

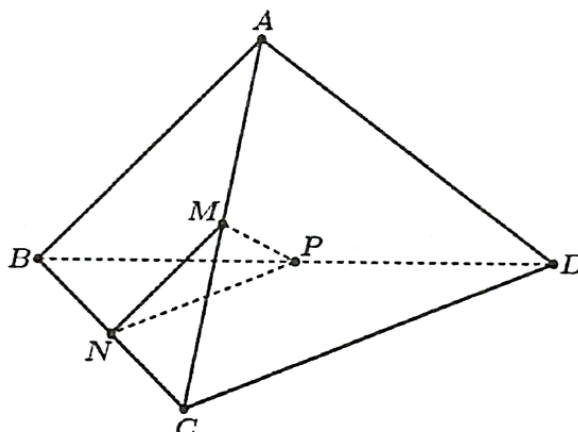
Giả sử tứ diện đều có các cạnh bằng $2a$.

Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AC, BC, BD .

$$\text{Vì } MN \text{ là đường trung bình của tam giác } ABC \text{ nên } \begin{cases} MN // AB \\ MN = \frac{AB}{2} = a \end{cases}.$$

Vì NP là đường trung bình của tam giác BCD nên $\begin{cases} NP // CD \\ NP = \frac{CD}{2} = a \end{cases}$.

Suy ra $(AB, CD) = (MN, NP)$



Các tam giác ABD, BCD là tam giác đều cạnh $2a$ nên

$$AP = CP = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

Tam giác ACP cân tại P có M là trung điểm AC nên $MP \perp AC$.

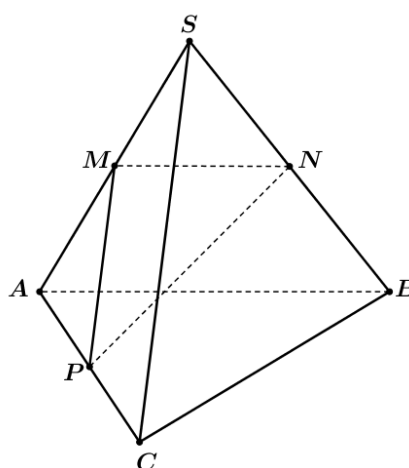
$$\text{Suy ra } MP = \sqrt{CP^2 - CM^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}.$$

Tam giác MNP có $MN^2 = a^2, NP^2 = a^2, MP^2 = 2a^2$ hay $MN^2 + NP^2 = MP^2$.

Suy ra tam giác MNP vuông tại N . Vậy $AB \perp CD$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = a$; $AC = a\sqrt{2}$ và $BC = a\sqrt{3}$. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng SC và AB .

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm SA, SB và AC .

Khi đó $\begin{cases} MP // SC \\ MN // AB \end{cases} \Rightarrow (\widehat{SC; AB}) = (\widehat{MP; MN})$. Khi đó ta có: $MN = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$; $MP = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2}$.

Mặt khác ΔSAC vuông tại $S \Rightarrow SP = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$$BP^2 = \frac{BA^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} = \frac{3}{2}a^2 \Rightarrow BP = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } PN^2 = \frac{PS^2 + PB^2}{2} - \frac{SB^2}{4} = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow NP = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

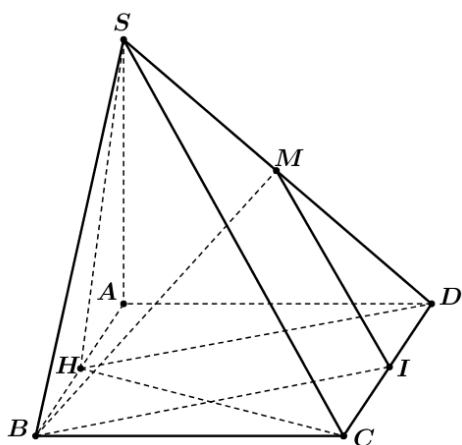
$$\text{Khi đó } \cos \widehat{NMP} = \frac{MN^2 + MP^2 - NP^2}{2 \cdot MN \cdot MP} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMP} = 120^\circ \Rightarrow \varphi = (\widehat{SC; AB}) = 60^\circ.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Tam giác SAB cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy. Biết rằng SC tạo với đáy một góc 30° . Tính cosin của góc giữa

a) SD và BC .

b) DH và SC với H là chân đường cao hạ từ S xuống mặt đáy $(ABCD)$.

Lời giải



a) Do $AB = BC = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh a .

Gọi H là trung điểm của AB , do tam giác SAB tại S nên $SH \perp AB$.

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABC).$$

$$\Delta ABC \text{ đều nên } CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, (\widehat{SC; (ABC)}) = \widehat{SCH} = 30^\circ$$

$$\text{Ta có: } SH = HC \tan 30^\circ = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Do } \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow HD = \sqrt{AH^2 + AD^2 - 2AH \cdot AD \cos 120^\circ} = \frac{a\sqrt{7}}{2}.$$

$$\text{Suy ra } SA = \sqrt{SH^2 + HA^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}, SD = \sqrt{SH^2 + HD^2} = a\sqrt{2}.$$

$$\text{Mặt khác } AD \parallel BC \Rightarrow (\widehat{BC; SD}) = (\widehat{AD; SD}), \cos \widehat{SDA} = \frac{DS^2 + DA^2 - SA^2}{2 \cdot DS \cdot DA} = \frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

$$\text{Do vậy } \cos(\widehat{BC; SD}) = \frac{5\sqrt{2}}{8}.$$

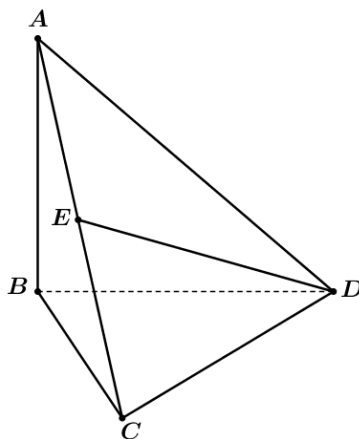
$$\text{b) Gọi } I \text{ là trung điểm } CD \Rightarrow \begin{cases} DH // BI \\ DH = BI = \frac{a\sqrt{7}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Gọi } M \text{ là trung điểm } SD \Rightarrow \begin{cases} MI // SC \\ MI = \frac{SC}{2} = \frac{a}{2} \end{cases}. \text{ Lại có } BD = a\sqrt{3}; SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

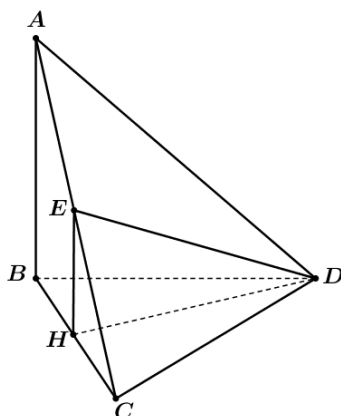
$$\text{Do đó } BM^2 = \frac{BD^2 + BS^2}{2} - \frac{SD^2}{4} = \frac{5}{4}a^2 \Rightarrow \cos \widehat{MIB} = \frac{MI^2 + IB^2 - MB^2}{2 \cdot MI \cdot IB} = \frac{3\sqrt{17}}{14}.$$

$$\text{Suy ra } \cos(\widehat{DH; SC}) = \frac{3\sqrt{17}}{14}.$$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với mặt phẳng (BCD) . Biết tam giác BCD vuông tại C và $AB = \frac{a\sqrt{6}}{2}, AC = a\sqrt{2}, CD = a$. Gọi E là trung điểm của AC (tham khảo hình vẽ bên). Tính góc giữa hai đường thẳng AB và DE .



Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC khi đó: $EH // AB \Rightarrow EH \perp (BCD) \Rightarrow EH \perp HD$.

$$\text{Suy ra } (\widehat{AB; DE}) = (\widehat{EH; DE}). \text{ Ta có: } HE = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{4}, BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

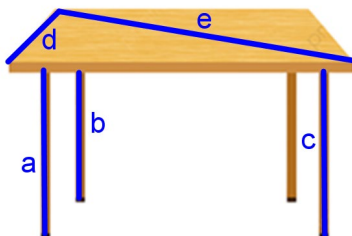
$$\Rightarrow DH = \sqrt{DC^2 + CH^2} = \frac{3a\sqrt{2}}{4} \text{ nên } \tan \widehat{DEH} = \frac{DH}{EH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{DEH} = 60^\circ.$$

Vậy $\widehat{(AB; DE)} = \widehat{(EH; DE)} = \widehat{DEH} = 60^\circ$.

BÀI: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẶNG
ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn (như hình vẽ bên dưới). Hình ảnh này gợi nên hình ảnh đường thẳng (được biểu thị bởi các đường thẳng a, b, c, d, e) vuông góc với mặt bàn (kí hiệu mặt phẳng (P)). Khẳng định nào sau đây **sai**?



- A. $d \perp (P)$. B. $a \perp (P)$. C. $b \perp (P)$. D. $c \perp (P)$.

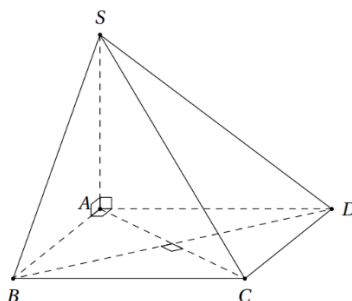
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SB \perp BC$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $SA \perp (ABCD)$. B. $SB \perp (ABCD)$. C. $BC \perp (SAC)$. D. $BC \perp (SAB)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A. $SA \perp (ABCD)$ B. $SO \perp (ABCD)$ C. $AB \perp (SBC)$ D. $AC \perp (SBC)$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $AC \perp (SCD)$. B. $BD \perp (SAD)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $BD \perp (SAC)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Khi đó đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SAB) . B. (SAD) . C. (SCD) . D. (SBD) .

- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
A. $BA \perp (SAC)$. **B.** $BA \perp (SBC)$. **C.** $BA \perp (SAD)$. **D.** $BA \perp (SCD)$.
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Từ A kẻ $AM \perp SB$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
A. $AM \perp (SBD)$. **B.** $AM \perp (SBC)$. **C.** $BC \perp (SAD)$. **D.** $AM \perp (SAD)$.
- Câu 8:** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H . Khẳng định nào sau đây là **sai**?
A. $BC \perp (AHO)$. **B.** $OA \perp (OBC)$. **C.** $AH \perp BC$. **D.** $AH \perp (OBC)$.
- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?
A. $SC \perp (AFB)$. **B.** $SC \perp (AEF)$. **C.** $SC \perp (AEC)$. **D.** $SC \perp (AED)$.
- Câu 10:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $AH \perp (SCD)$. **B.** $AK \perp (SBD)$. **C.** $SC \perp (AHK)$. **D.** $SD \perp (AHK)$.
- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?
A. $BC \perp (SAB)$. **B.** $SH \perp (ABCD)$. **C.** $AB \perp (SAD)$. **D.** $CD \perp (SHK)$.
- Câu 12:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?
A. $AC' \perp (BB'D'D)$. **B.** $AC' \perp (ABCD)$. **C.** $AC' \perp (AA'D'D)$. **D.** $AC' \perp (A'BD)$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

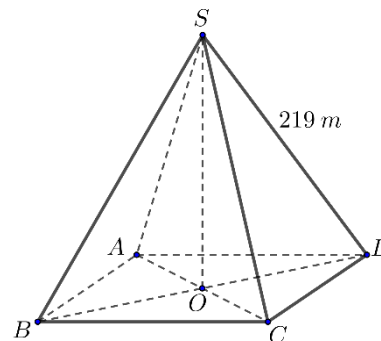
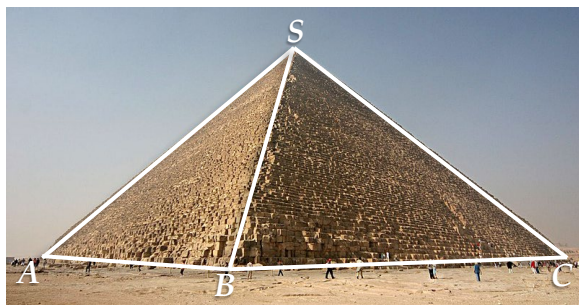
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$BC \perp (SAB)$.		
b)	$CD \perp (SAD)$.		
c)	$AC \perp (SBD)$.		
d)	$BD \perp (SAC)$.		

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tam giác SBC vuông		
b)	Tam giác SCD vuông		
c)	$SC \perp (AHK)$		
d)	$HK \perp SC$		

Câu 3: Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng $230m$, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng $219m$ (kích thước hiện nay). Kim tự tháp Cheops được mô phỏng bởi hình chóp $S.ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD như hình bên dưới. (Theo *britannica.com*).



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3^\circ$.		
b)	Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$).		
c)	Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC .		
d)	Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tự tháp Cheops, ta tính được $SO \approx 146,67m$		

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC .

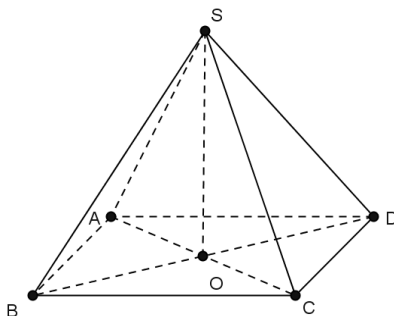
	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tam giác SBC cân tại B .		
b)	AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).		
c)	$(SC, HK) = 90^\circ$		
d)	Giả sử HK cắt BC tại D . Khi đó $(AC, AD) = 90^\circ$.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở B . Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AC và SC . Góc của hai đường thẳng BH, SC bằng bao nhiêu độ?

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD)$; gọi K là trung điểm của cạnh AD . Xác định góc của hai đường thẳng AC và SK .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, $SA = SC$, $SB = SD = 4cm$, đường cao của hình chóp là $2\sqrt{2}$. Tính độ dài đoạn BD (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).
- Câu 5:** Một cột bóng rổ được gắn xuống nền sân phẳng. Người ta gắn một điểm C ở đỉnh của cột sao cho C nằm trên mặt phẳng song song với nền sân và điểm A đặt ở chân cột bóng rổ như hình vẽ. Người ta muốn buộc một sợi dây căng vào hai điểm A và C . Hỏi sợi dây có độ dài bằng bao nhiêu mm? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a . Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD . Khi đó, tỉ số $\frac{SM}{SB}$ bằng

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Chứng minh rằng $BD \perp SC$.
- Câu 2:** Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC . Điểm I là trung điểm của cạnh BC .
- Chứng minh $BC \perp (ADI)$.
 - Gọi AH là đường cao trong tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$

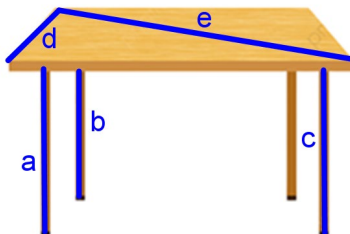
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , điểm I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC . Trên đoạn CI và SA lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$. Chứng minh $MN \perp (ABC)$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn (như hình vẽ bên dưới). Hình ảnh này gợi nên hình ảnh đường thẳng (được biểu thị bởi các đường thẳng a, b, c, d, e) vuông góc với mặt bàn (kí hiệu mặt phẳng (P)). Khẳng định nào sau đây **sai**?



- A.** $d \perp (P)$. **B.** $a \perp (P)$. **C.** $b \perp (P)$. **D.** $c \perp (P)$.

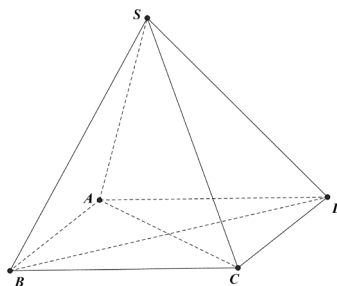
Lời giải

Ta có: $d \subset (P)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SB \perp BC$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A.** $SA \perp (ABCD)$. **B.** $SB \perp (ABCD)$. **C.** $BC \perp (SAC)$. **D.** $BC \perp (SAB)$.

Lời giải



$$\left. \begin{array}{l} BC \perp SB, BC \perp AB \\ SB \cap AB = \{B\} \\ SB, AB \subset (SAB) \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

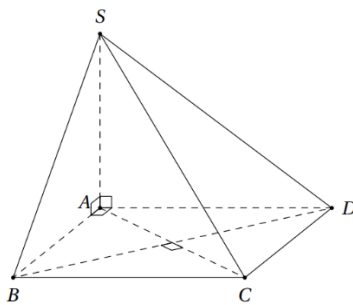
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau và $ABCD$ là hình vuông tâm O . Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** $SA \perp (ABCD)$ **B.** $SO \perp (ABCD)$ **C.** $AB \perp (SBC)$ **D.** $AC \perp (SBC)$

Lời giải

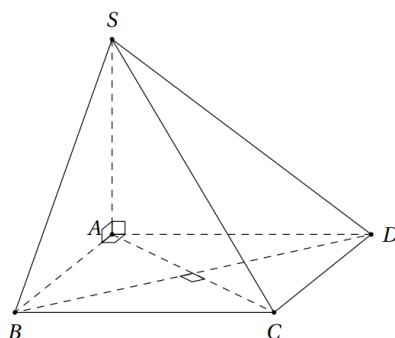
Hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy bằng nhau suy ra $SO \perp (ABCD)$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và SA vuông góc với đáy. Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $AC \perp (SCD)$. B. $BD \perp (SAD)$. C. $AC \perp (SBD)$. **D. $BD \perp (SAC)$.**

Lời giải



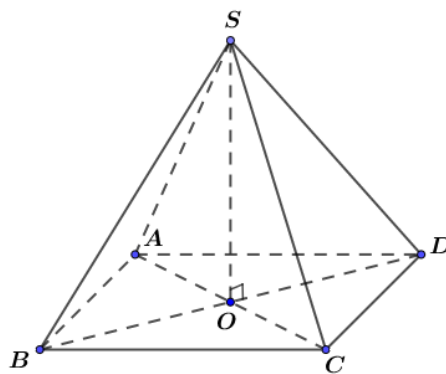
Vì $ABCD$ là hình vuông nên $BD \perp AC$ và $SA \perp (ABCD)$ nên $BD \perp SA$.

Vậy $BD \perp (SAC)$.

- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O và $SO \perp (ABCD)$. Khi đó đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SAB) . B. (SAD) . C. (SCD) . **D. (SBD) .**

Lời giải



Ta có: $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO, SO \subset (SBD)$.

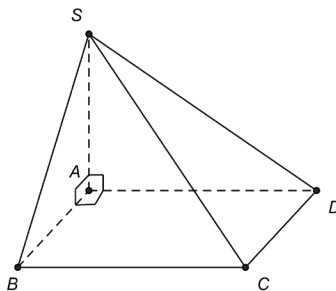
Mặt khác: $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AC \perp BD, BD \subset (SBD)$.

Suy ra: $SO \cap BD = O \Rightarrow AC \perp (SBD)$.

- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $BA \perp (SAC)$. B. $BA \perp (SBC)$. **C. $BA \perp (SAD)$.** D. $BA \perp (SCD)$.

Lời giải

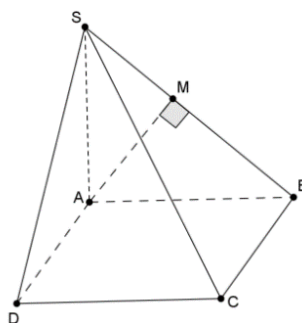


Ta có: $\begin{cases} SA \perp AB \\ DA \perp AB \end{cases} \rightarrow BA \perp (SAD).$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông. Từ A kẻ $AM \perp SB$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** $AM \perp (SBD)$. **B.** $AM \perp (SBC)$. **C.** $BC \perp (SAD)$. **D.** $AM \perp (SAD)$.

Lời giải



Ta có:

$$AM \perp SB$$

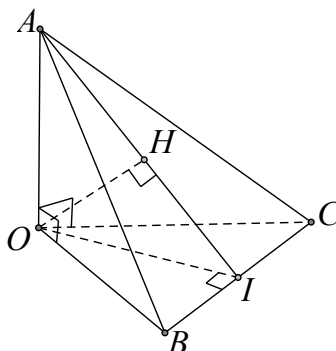
$$\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM.$$

$$\Rightarrow AM \perp (SBC)$$

Câu 8: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ OH vuông góc với mặt phẳng (ABC) tại H . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A.** $BC \perp (AHO)$. **B.** $OA \perp (OBC)$. **C.** $AH \perp BC$. **D.** $AH \perp (OBC)$.

Lời giải



Theo đề bài ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC$ (1). Vậy B đúng.

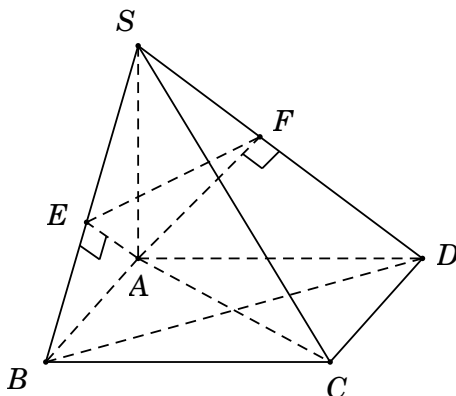
Ta lại có $OH \perp (ABC) \Rightarrow OH \perp BC$ (2). Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AHO) \Rightarrow AH \perp BC$.

Giả sử $AH \perp (OBC)$ mà $OA \perp (OBC)$ suy ra $A;H;O$ thẳng hàng (vô lý)

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $SC \perp (AFB)$. B. $SC \perp (AEF)$. C. $SC \perp (AEC)$. D. $SC \perp (AED)$.

Lời giải



Vì SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $AB \perp BC$ nên suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \subset (SAB)$.

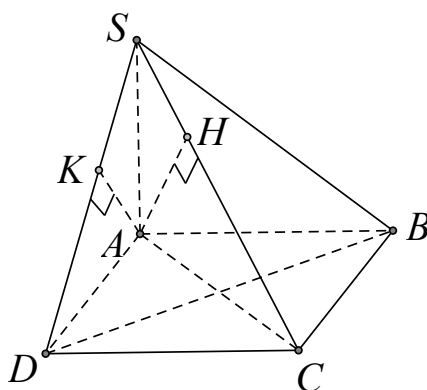
Tam giác SAB có đường cao $AE \Rightarrow AE \perp SB$ mà $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC$.

Tương tự, ta chứng minh được $AF \perp SC$. Do đó $SC \perp (AEF)$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SC, SD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AH \perp (SCD)$. B. $AK \perp (SBD)$. C. $SC \perp (AHK)$. D. $SD \perp (AHK)$.

Lời giải



Ta có $\left. \begin{array}{l} CD \perp SA \\ CD \perp AD \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$.

Ta lại có $AK \perp SD$

Suy ra $AK \perp (SCD)$ (*) $\Rightarrow AK \perp SC$ mà $AH \perp SC$ nên $SC \perp (AHK)$ (**) nên C đúng.

Ta có (SBD) và (SCD) phân biệt; cắt nhau và từ (*) suy ra B sai.

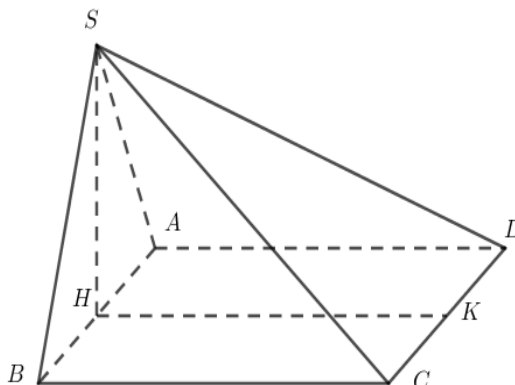
Ta có AH và AH phân biệt; cắt nhau và từ (*) suy ra A sai.

Ta có SC và SD phân biệt; cắt nhau và từ (**) suy ra D sai.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và CD . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- A.** $BC \perp (SAB)$. **B.** $SH \perp (ABCD)$. **C.** $AB \perp (SAD)$. **D.** $CD \perp (SHK)$.

Lời giải



Ta có tam giác SAB đều cạnh a nên $SB = AB = a$.

Mặt khác tam giác SBC có $SB^2 + BC^2 = SC^2 = 2a^2$.

Suy ra tam giác SBC vuông cân tại B . Hay $BC \perp SB$

Mà $BC \perp AB$. Suy ra $BC \perp (SAB)$. Do đó **A** đúng.

Từ $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SH$.

Tam giác SAB đều mà H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$.

Từ và suy ra $SH \perp (ABCD)$. Do đó **B** đúng.

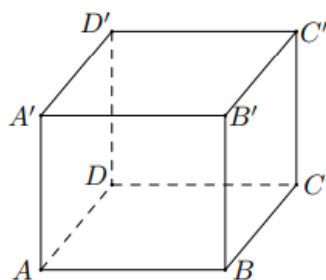
Tam giác SAB đều nên AB không vuông góc với mặt phẳng (SAD) . Do đó **C** sai.

Ta có $\begin{cases} AB \perp HK \\ AB \perp SH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp (SHK)$. Do đó **D** đúng

Câu 12: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng AC' vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A.** $AC' \perp (BB'D'D)$. **B.** $AC' \perp (ABCD)$. **C.** $AC' \perp (AA'D'D)$. **D.** $AC' \perp (A'BD)$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp AC' (1)$

Ta có: $\begin{cases} AD' \perp A'D \text{ (do } ADD'A' \text{ là hv)} \\ D'C' \perp (ADD'A') \Rightarrow D'C' \perp A'D \end{cases} \Rightarrow A'D \perp (AD'C') \Rightarrow A'D \perp AC' (2)$

Từ (1), (2) $\Rightarrow AC' \perp (A'BD)$.

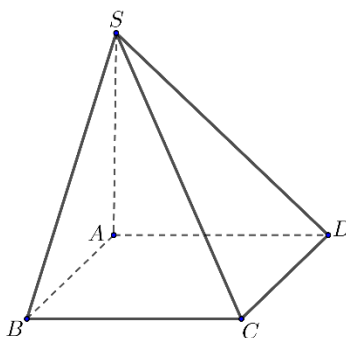
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$BC \perp (SAB)$.		
b)	$CD \perp (SAD)$.		
c)	$AC \perp (SBD)$.		
d)	$BD \perp (SAC)$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Đúng

$$BC \perp (SAB).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

b) Đúng

$$CD \perp (SAD).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$

c) Sai

$$AC \perp (SBD).$$

$$\text{Giả sử } AC \perp (SBD) \Rightarrow AC \perp SB \xrightarrow{AC \perp SA} AC \perp (SAB) \Rightarrow AC \perp AB: \text{ vô lí.}$$

d) Đúng

$$BD \perp (SAC).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

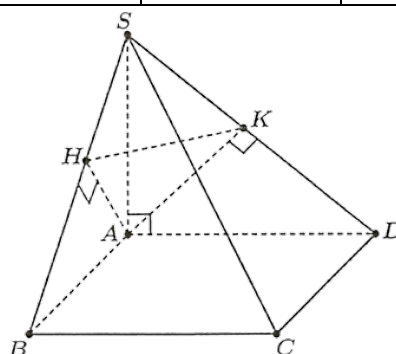
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tam giác SBC vuông		

b)	Tam giác SCD vuông		
c)	$SC \perp (AHK)$		
d)	$HK \perp SC$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
---------	---------	---------	---------



a) Đúng

Tam giác SBC vuông.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \quad (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} BC \perp (SAB) \\ SB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \text{ hay } \Delta SBC \text{ vuông tại } B.$$

b) Đúng

Tam giác SCD vuông.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \quad (SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$

$$\text{Vì } \begin{cases} CD \perp (SAD) \\ SD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow CD \perp SD \text{ hay } \Delta SCD \text{ vuông tại } D.$$

c) Đúng

$SC \perp (AHK)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \quad (BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC. (1)$$

$$\text{Tương tự: } \begin{cases} AK \perp SD \\ AK \perp CD \quad (CD \perp (SAD)) \end{cases} \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC. (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $SC \perp (AHK)$,

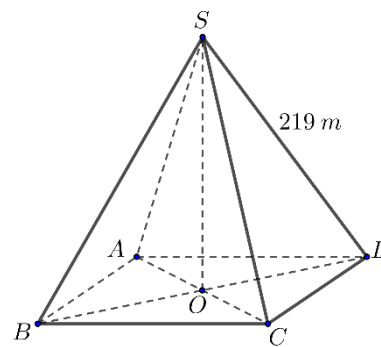
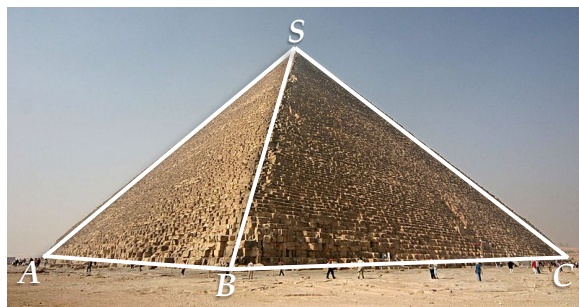
d) Đúng

$HK \perp SC$.

Mà $HK \subset (AHK)$ nên $HK \perp SC$.

Câu 3: Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng $230m$, các cạnh bên bằng nhau và dài

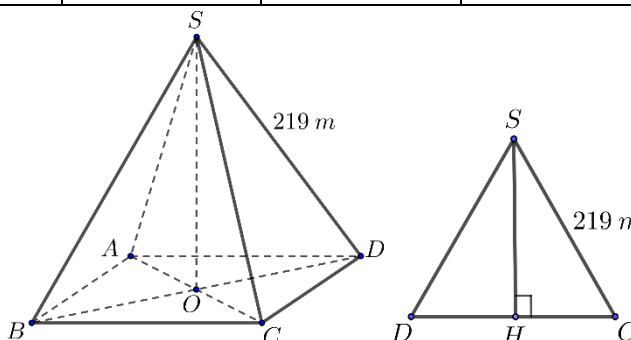
khoảng $219m$ (kích thước hiện nay). Kim tự tháp Cheops được mô phỏng bởi hình chóp $S.ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD như hình bên dưới. (Theo *britannica.com*).



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3^\circ$.		
b)	Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$).		
c)	Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC .		
d)	Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tự tháp Cheops, ta tính được $SO \approx 146,67m$		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



a) Sai

Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3^\circ$.

Tính góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp.

Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AB \parallel CD$.

Khi đó $(SC, AB) = (SC, CD) = \widehat{SCD}$.

Gọi H là trung điểm của CD , suy ra $DH = HC = \frac{CD}{2} = \frac{230}{2} = 115m$.

Vì tam giác SCD có $SC = SD$ nên tam giác SCD cân tại S mà SH là trung tuyến nên SH là đường cao tam giác SCD .

Xét tam giác SHC vuông tại H , ta có: $\cos \widehat{SCD} = \cos \widehat{SCH} = \frac{HC}{SC} = \frac{115}{219} \Rightarrow \widehat{SCD} \approx 58,3^\circ$.

Vậy góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp khoảng $58,3^\circ$.

b) Đúng

Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$).

Xét $\triangle SAC$ cân tại S , ta có: SO là đường cao của $\triangle SAC$ nên $SO \perp AC$

Xét $\triangle SBD$ cân tại S , ta có: SO là đường cao của $\triangle SBD$ nên $SO \perp BD$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \\ AC, BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp (ABCD).$$

c) Đúng

Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC .

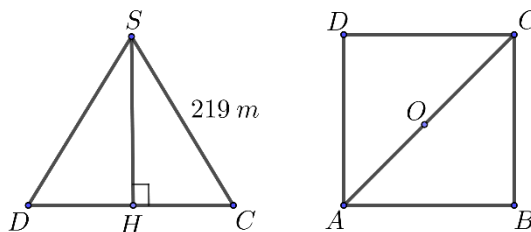
$$\text{Do } \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ AB, BC \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SO \perp AB, SO \perp BC.$$

d) Đúng

Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tự tháp Cheops, ta tính được $SO \approx 146,67 m$

Do chiều cao của kim tự tháp chính là chiều cao của tam giác SAC nên cần tính cạnh SO , với O là trung điểm AC , ta có:

Tam giác SAC có cạnh $SA = SC$ nên tam giác SAC cân tại S .



Xét hình vuông $ABCD$, ta có: $AC = AB\sqrt{2} = 230\sqrt{2} m$.

$$\Rightarrow AO = OC = \frac{AC}{2} = \frac{230\sqrt{2}}{2} = 115\sqrt{2} m.$$

Xét tam giác SOC vuông tại O , ta có:

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{219^2 - (115\sqrt{2})^2} = 7\sqrt{439} m \approx 146,67 m.$$

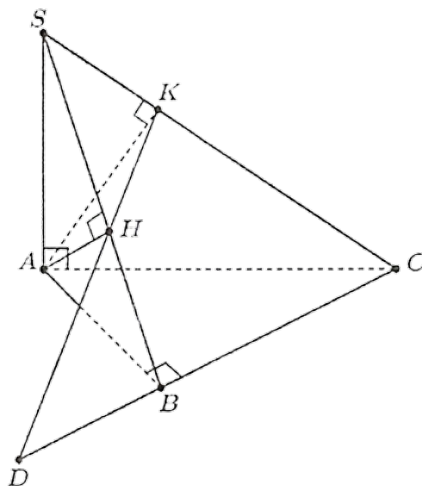
Vậy chiều cao của kim tự tháp Cheops khoảng $146,67 m$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Tam giác SBC cân tại B .		
b)	AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .		
c)	$(SC, HK) = 90^\circ$		
d)	Giả sử HK cắt BC tại D . Khi đó $(AC, AD) = 90^\circ$.		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



a) Sai

Tam giác SBC cân tại B.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA (\text{do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB),$$

mà $SB \subset (SAB)$ nên $BC \perp SB$ hay tam giác SBC vuông tại B.

b) Đúng

AH vuông góc với mặt phẳng (SBC).

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC (BC \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

c) Đúng

$$(SC, HK) = 90^\circ$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AH (AH \perp (SBC)) \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AHK),$$

mà $HK \subset (AHK)$ nên $SC \perp HK$ hay $(SC, HK) = 90^\circ$.

d) Đúng

Giả sử HK cắt BC tại D. Khi đó $(AC, AD) = 90^\circ$.

Vì $(AHK) \equiv (ADK)$ mà $SC \perp (AHK)$ nên $SC \perp (ADK) \Rightarrow SC \perp AD$. (1)

Mặt khác $SA \perp AD$ (do $SA \perp (ABC)$; $AD \subset (ABC)$). (2)

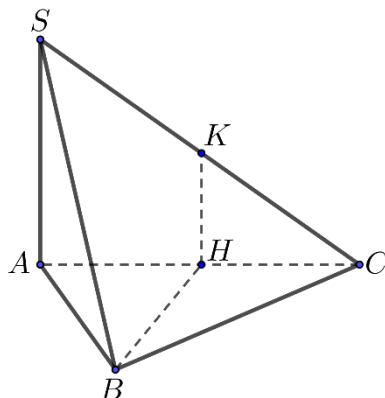
Từ (1) và (2) suy ra $AD \perp (SAC) \Rightarrow AD \perp AC$ hay $(AC, AD) = 90^\circ$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp S.ABCD có cạnh bên $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác cân ở B. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của AC và SC. Góc của hai đường thẳng BH, SC bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 90



Tam giác ABC cân tại B có đường trung tuyến BH nên $BH \perp AC$. (1)

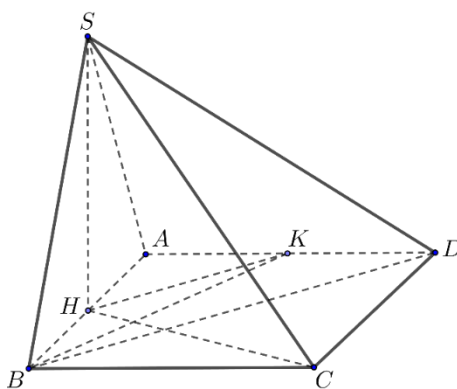
Mặt khác $BH \perp SA$ do $SA \perp (ABC)$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$, mà $SC \subset (SAC)$ nên $BH \perp SC$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H là trung điểm của AB và $SH \perp (ABCD)$; gọi K là trung điểm của cạnh AD . Xác định góc của hai đường thẳng AC và SK .

Lời giải

Trả lời: 90



Vì HK là đường trung bình của tam giác ABD nên $HK \parallel BD$,

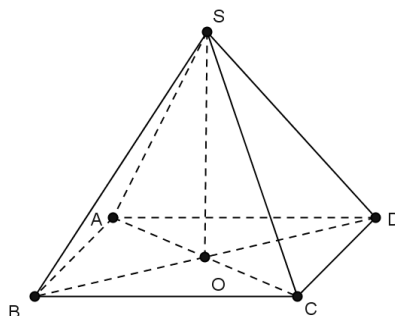
Mà $BD \perp AC \Rightarrow HK \perp AC$. (1)

Mặt khác $SH \perp AC$ (do $SH \perp (ABCD)$). (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AC \perp (SHK)$.

Ta lại có $SK \subset (SHK)$ nên $AC \perp SK$ hay $(AC, SK) = 90^\circ$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành $ABCD$, $SA = SC$, $SB = SD = 4\text{cm}$, đường cao của hình chóp là $2\sqrt{2}$. Tính độ dài đoạn BD (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Trả lời: 5,66

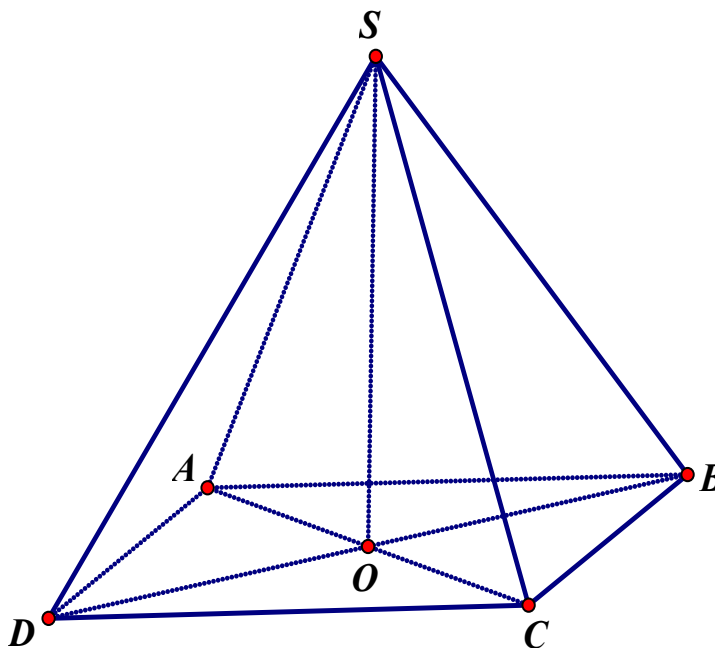
Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \end{cases}$ nên $SO \perp (ABCD)$. Suy ra $SO = 2\sqrt{2}$ là chiều cao của hình chóp.

Xét tam giác SBO có $OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = 2\sqrt{2}$ nên $BD = 4\sqrt{2} \approx 5,66$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \frac{a}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng SC và AB ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

Trả lời: 69



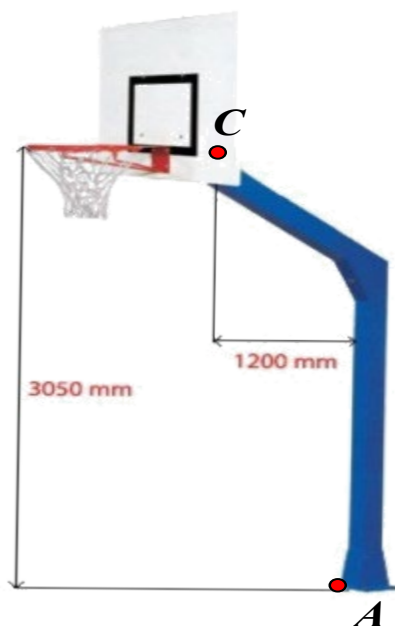
Vì AB song song với DC nên ta có $(SC, AB) = (SC, CD)$.

Ta có tam giác ADC là tam giác đều cạnh a , $DO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $OC = \frac{a}{2}$.

Ta có $SD^2 = OD^2 + SO^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2$; $SC^2 = OC^2 + SO^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$.

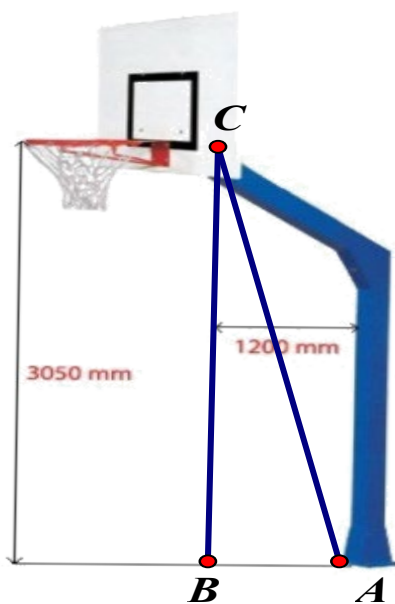
Xét tam giác SCD ta có $\cos \widehat{SCD} = \frac{CS^2 + CD^2 - SD^2}{2.CS.CD} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{SCD} \approx 69^\circ$

Câu 5: Một cột bóng rổ được gắn xuống nền sân phẳng. Người ta gắn một điểm C ở đỉnh của cột sao cho C nằm trên mặt phẳng song song với nền sân và điểm A đặt ở chân cột bóng rổ như hình vẽ. Người ta muốn buộc một sợi dây căng vào hai điểm A và C . Hỏi sợi dây có độ dài bằng bao nhiêu mm? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 3278



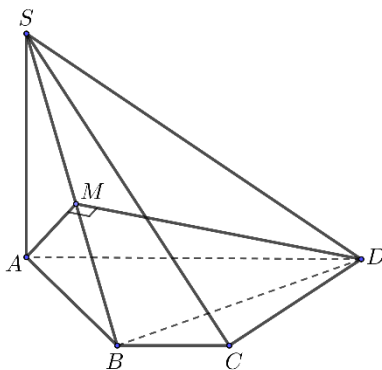
Gọi B hình chiếu vuông góc của C xuống nền sân, khi đó tam giác ABC vuông tại B và $AB = 1200$ mm, $BC = 3050$ mm.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 1200^2 + 3050^2 \Rightarrow AC \approx 3278 \text{ mm.}$$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a . Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên SB sao cho AM vuông góc với MD . Khi đó, tỉ số $\frac{SM}{SB}$ bằng

Lời giải

Trả lời: 0,75



Áp dụng tính chất nửa lục giác đều, ta có $BD \perp AB$.

Mà hình chiếu vuông góc của đường thẳng AM lên $(ABCD)$ là AB .

Vậy $BD \perp AM$.

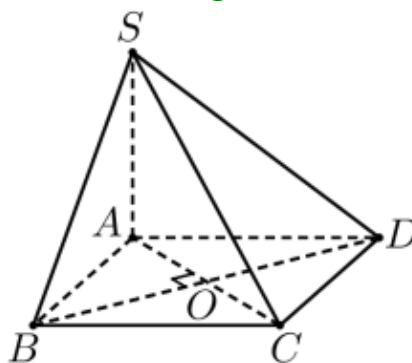
Kết hợp $AM \perp MD$, ta được $AM \perp (SBD)$. Suy ra $AM \perp SB$.

$$\text{Khi đó } \frac{SM}{SB} = \frac{SM \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4}.$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Chứng minh rằng $BD \perp SC$.

Lời giải



$$\text{Ta có: } \begin{cases} SA \perp (ABCD) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow BD \perp SA \quad (1)$$

$$\text{Ta lại có } ABCD \text{ là hình vuông} \Rightarrow BD \perp AC \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) và } SA \cap AC = \{A\} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

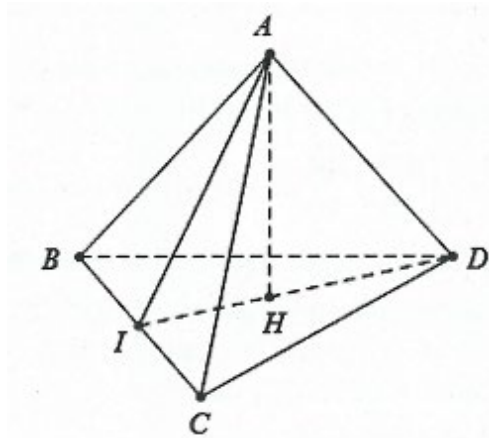
$$\text{Mà } SC \subset (SAC) \Rightarrow BD \perp SC.$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt ABC và BCD là hai tam giác cân có chung đáy BC . Điểm I là trung điểm của cạnh BC .

a) Chứng minh $BC \perp (ADI)$.

b) Gọi AH là đường cao trong tam giác ADI . Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.

Lời giải



a) Do các tam giác ABC và BCD là hai tam giác cân nên tại A và D ta có: $\begin{cases} AI \perp BC \\ DI \perp BC \end{cases}$ (trong tam giác cân đường trung tuyến đồng thời là đường cao). Do đó $BC \perp (AID)$.

b) Do AH là đường cao trong tam giác ADI nên $AH \perp DI$.

Mặt khác $BC \perp (AID) \Rightarrow BC \perp AH$.

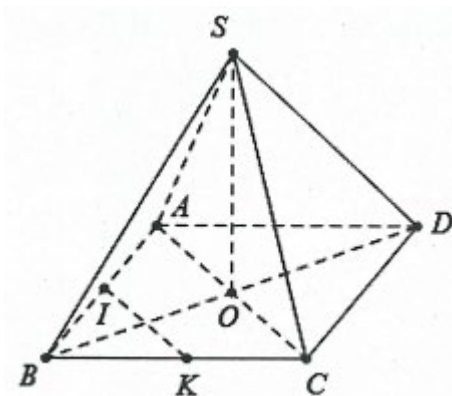
Do đó $AH \perp (BCD)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O và có $SA = SC, SB = SD$.

a) Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh rằng $IK \perp (SBD)$ và $IK \perp SD$

Lời giải



a) Do $SA = SC \Rightarrow \Delta SAC$ cân tại S có trung tuyến SO đồng thời là đường cao
Suy ra $SO \perp AC$. Tương tự ta có: $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$.

b) Do $ABCD$ là hình thoi nên $AC \perp BD$

Mặt khác $SO \perp (ABCD) \Rightarrow AC \perp SO$

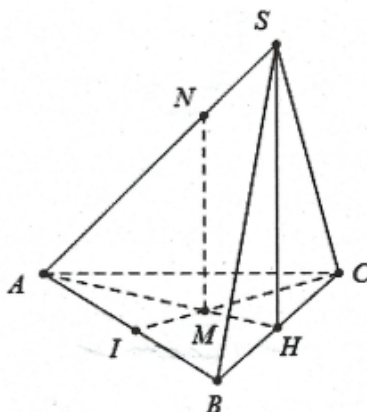
Do vậy $AC \perp (SBD)$.

Suy ra IK là đường trung bình trong tam giác BAC nên $IK \parallel AC$

Mà $AC \perp (SBD) \Rightarrow IK \perp (SBD)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại A , điểm I và H lần lượt là trung điểm của AB và BC . Trên đoạn CI và SA lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $MC = 2MI$, $NA = 2NS$. Biết $SH \perp (ABC)$. Chứng minh $MN \perp (ABC)$.

Lời giải



Do điểm M thuộc đường trung tuyến CI và $MC = 2MI \Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác ABC

$\Rightarrow M = AH \cap CI$. Ta có: $\frac{NA}{NS} = \frac{MA}{MH} = 2 \Rightarrow MN \parallel SH$.

Mặt khác: $SH \perp (ABC) \Rightarrow MN \perp (ABC)$.

BÀI: ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG
ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho điểm M và mặt phẳng (α) có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) ?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. D. 1.

Câu 2: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AM \perp SC$. B. $AM \perp MN$. C. $SA \perp BC$. D. $AN \perp SB$.

Câu 3: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp OA$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , SA vuông góc với đáy, M là trung điểm của BC , J là trung điểm của BM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAM)$. B. $BC \perp (SAC)$. C. $BC \perp (SAB)$. D. $BC \perp (SAJ)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Hỏi đường thẳng SC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

- A. (AHD) B. (SBD) . C. (AKB) D. (AHK)

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Hình chóp có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

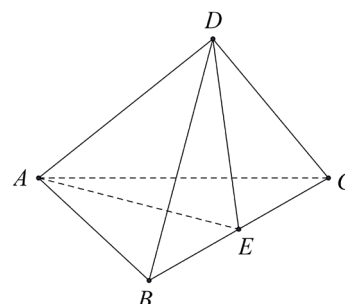
- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy là tam giác đều ABC . Gọi H là trung điểm của AC , K là điểm nằm giữa S và C . Khẳng định nào sau đây **sai**?

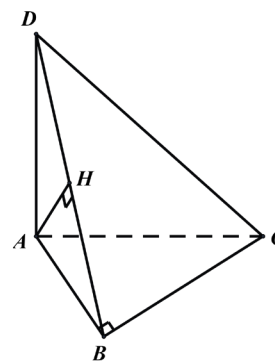
- A. $BH \perp AK$. B. $SA \perp BH$. C. $BC \perp AK$. D. $SC \perp BH$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Gọi E là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BC \perp AD$. B. $BC \perp AE$.
C. $AB \perp DE$. D. $BC \perp (ADE)$.



Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông tại B , AH là đường cao của tam giác DAB . Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $BD \perp AC$. B. $AB \perp DC$.
 C. $AH \perp AC$. D. $AH \perp DC$.

Câu 10: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là sai.

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. D. $OH \perp AO$.

Câu 11: Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $BC \perp (SAC)$. B. $SB \perp AB$. C. $SA \perp (ABC)$. D. $AB \perp SC$.

Câu 12: Cho tứ diện $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SD . Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại K .

Khẳng định 1 : $AK \perp SC$

Khẳng định 2 : $AM \perp SC$

Khẳng định 3 : $BD \perp SC$

Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định trên ?

- A. 1. B. 0. C. 3. D. 2.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC, SB = SD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$SO \perp AC$		
b)	$SO \perp (ABCD)$		
c)	$AC \perp (SBD)$		
d)	$(AC, SB) = 60^\circ$		

Câu 2: Cho hình chóp $SABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC (biết rằng các trực tâm này không trùng với các đỉnh của tam giác ABC và SBC).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$BC \perp (SAH)$.		
b)	$SB \perp (CHK)$.		
c)	$HK \perp (SBC)$.		
d)	$BC \perp (SAB)$.		

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng AH .		
b)	Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .		
c)	Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC) .		
d)	Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$.		

Câu 4: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$ tại H .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$		
b)	Tam giác ABC có ba góc nhọn.		
c)	H là trọng tâm của tam giác ABC .		
d)	$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$		

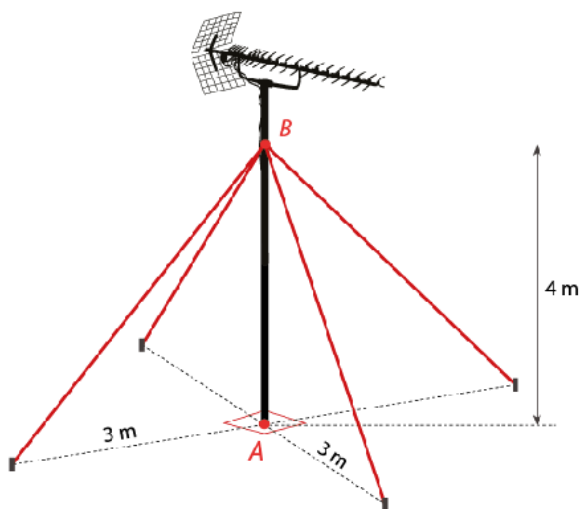
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Xác định góc của hai đường thẳng BC, AD .

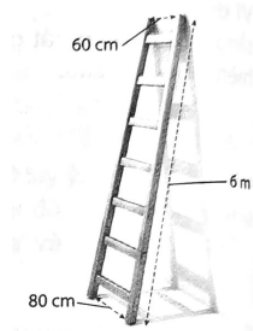
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB . Xác định góc của hai đường thẳng KJ, BD .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD . Biết $SH \perp (ABCD)$. Góc giữa hai đường thẳng BK, SC bằng bao nhiêu độ?

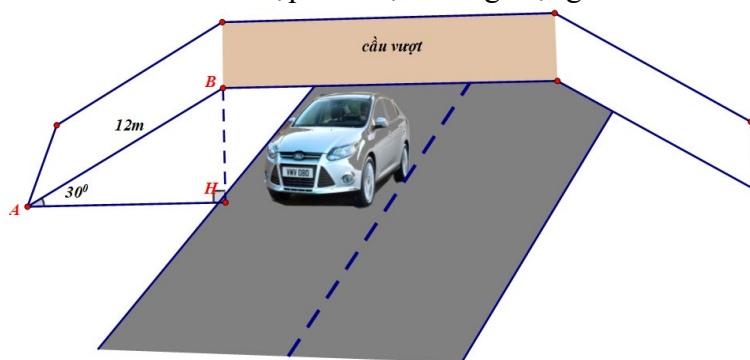
Câu 4: Một cây ăng-ten thẳng đứng với mặt đất và được buộc giằng bởi 4 dây cáp từ một điểm B cách chân A của ăng-ten $4m$. Khoảng cách từ A đến các chân buộc dây giằng lần lượt bằng $3m, 3m, 3m, 4m$. Tổng chiều dài dây cáp dùng để giằng cột ăng-ten là bao nhiêu mét? (không tính các mối nối, làm tròn đến hàng phần chục).



Câu 5: Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao 6 m, hai chân thang cách nhau 80 cm, hai ngọn thang cách nhau 60 cm. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Câu 6: Ở các thành phố lớn để giảm tình trạng tắc nghẽn giao thông và nhằm đảm bảo an toàn thì ở các ngã tư người ta thường xây dựng các cầu vượt dành cho người đi bộ. Hỏi những phương tiện tham gia giao thông phải có chiều cao như thế nào để di chuyển an toàn bên dưới cầu vượt. Biết rằng đường dẫn lên cầu dài 12 mét và hợp với mặt đường một góc 30° ?



PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD .

- Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$, $CD \perp (SAD)$.
- Chứng minh rằng $AM \perp (SBC)$, $AN \perp (SCD)$.
- Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN \parallel BD$.
- Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

- AH, SK, BC đồng quy.
- $SC \perp (BHK)$.
- $HK \perp (SBC)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AB và H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SM, SC, SD . Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho điểm M và mặt phẳng (α) có bao nhiêu đường thẳng đi qua điểm M và vuông góc với mặt phẳng (α) ?

- A. 2. B. Vô số. C. 0. **D. 1.**

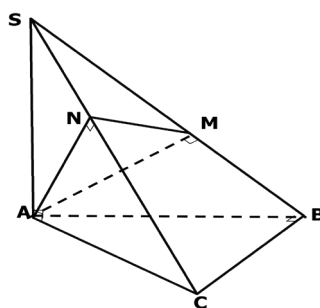
Lời giải

Theo tính chất qua một điểm cho trước chỉ có duy nhất một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

Câu 2: Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AM \perp SC$. B. $AM \perp MN$. C. $SA \perp BC$. **D. $AN \perp SB$.**

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ mà $BC \perp AB \Rightarrow BC \perp (SAB)$, $AM \subset (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

$$\text{Vì } \begin{cases} AM \perp SB \\ AM \perp BC \end{cases} \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$$

$$\text{Vì } \begin{cases} AM \perp (SBC) \\ MN \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AM \perp MN$$

$$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$$

$$\text{Giả sử } AN \perp SB \Rightarrow AN \perp (SBC) \Rightarrow AN \perp BC.$$

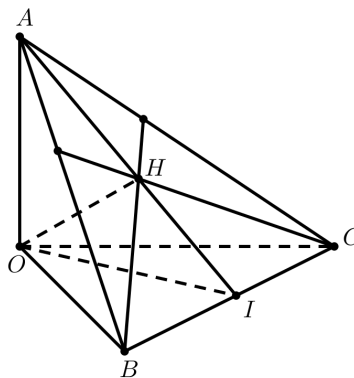
$$\text{Mà } BC \perp SA \text{ nên } BC \perp (SAC) \Rightarrow BC \perp AC$$

Vậy $AN \perp SB$ là sai.

Câu 3: Cho tứ diện $OABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. **D. $OH \perp OA$.**

Lời giải



Ta có $\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp AB$. Vậy phương án A đúng.

Ta có $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp BC$ (1)

Gọi I là chân đường cao kẻ từ đỉnh A của tam giác ABC . Ta có $AI \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (AIO)$, mà $OH \subset (AIO)$ nên $OH \perp BC$ (3)

Tương tự như trên, ta cũng có $OH \perp AC$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra $OH \perp (ABC)$.

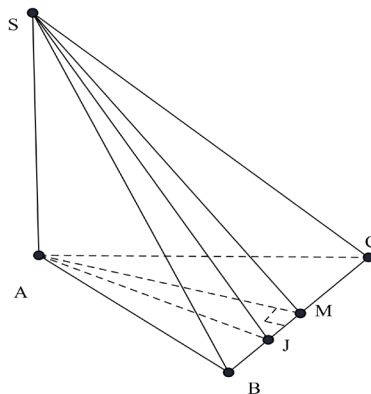
Vậy các phương án B, C đúng.

Tam giác AIO vuông tại O , $H \in AI$ và $H \neq I$ nên phương án D sai.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A , SA vuông góc với đáy, M là trung điểm của BC , J là trung điểm của BM . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $BC \perp (SAM)$. **B.** $BC \perp (SAC)$. **C.** $BC \perp (SAB)$. **D.** $BC \perp (SAJ)$.

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$ (1).

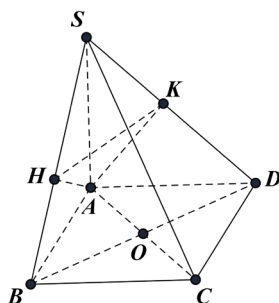
ΔABC cân tại $A \Rightarrow AM \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (SAM)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật tâm O , cạnh SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Hỏi đường thẳng SC vuông góc với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (AHD) **B.** (SBD) . **C.** (AKB) **D.** (AHK)

Lời giải



$$CD \perp SA, CD \perp AD \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AK$$

$$AK \perp CD, AK \perp SD \Rightarrow AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$$

Chứng minh tương tự $AH \perp SC$

$$AK \perp (SCD) \Rightarrow AK \perp SC$$

$$AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$$

Từ đó suy ra $SC \perp (AHK)$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$. Hình chóp có bao nhiêu mặt là tam giác vuông?

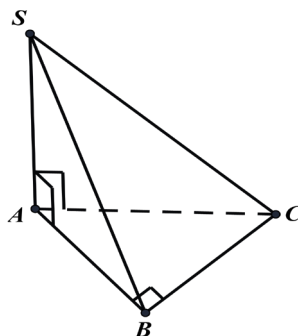
A. 4.

B. 3.

C. 2.

D. 1.

Lời giải



$$\text{Vì } SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AC \\ SA \perp BC \end{cases} \text{ nên các tam giác } SAB \text{ và tam giác } SAC \text{ vuông tại } A.$$

$$\text{Ta cũng có } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp SB \text{ nên tam giác } SBC \text{ và tam giác } ABC \text{ vuông tại } B.$$

Vậy hình chóp $S.ABC$ có bốn mặt là các tam giác vuông.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy là tam giác đều ABC . Gọi H là trung điểm của AC , K là điểm nằm giữa S và C . Khẳng định nào sau đây **sai**?

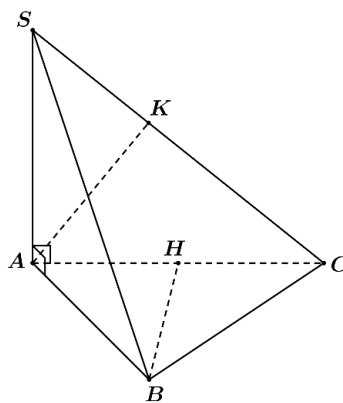
A. $BH \perp AK$.

B. $SA \perp BH$.

C. $BC \perp AK$.

D. $SC \perp BH$.

Lời giải

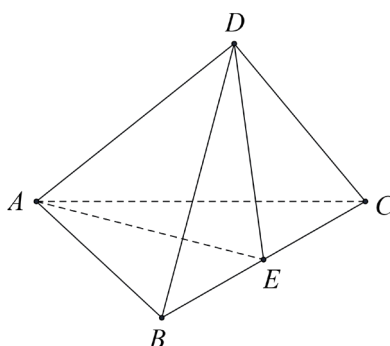


Vì ΔABC đều nên BC không vuông góc với AC

Suy ra BC không vuông góc với (SAC)

Vậy BC không vuông góc với AK

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Gọi E là trung điểm của BC . Khẳng định nào sau đây sai?



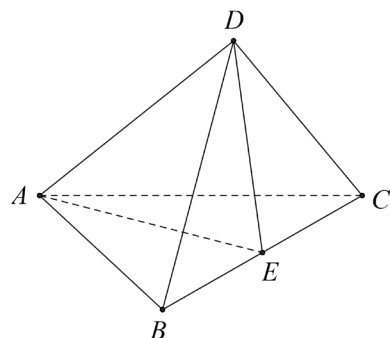
A. $BC \perp AD$.

B. $BC \perp AE$.

C. $AB \perp DE$.

D. $BC \perp (ADE)$.

Lời giải



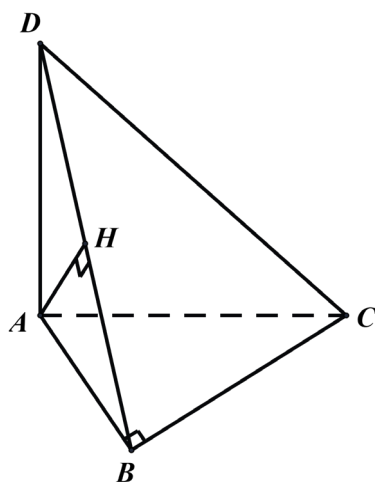
Ta có: $BC \perp AE$ (AE là đường trung tuyến của tam giác ABC cân tại A). (Câu B đúng)

Mặt khác: $BC \perp DE$ (DE là đường trung tuyến của tam giác DBC cân tại D).

Do đó $BC \perp (ADE)$. (Câu D đúng) $\Rightarrow BC \perp AD$. (Câu A đúng)

Vậy câu C là khẳng định sai.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$ có DA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông tại B , AH là đường cao của tam giác DAB . Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $BD \perp AC$. B. $AB \perp DC$. C. $AH \perp AC$. **D. $AH \perp DC$.**

Lời giải

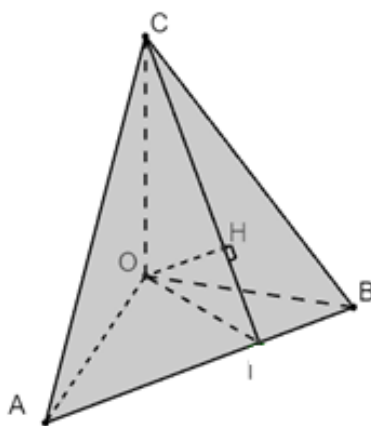
$DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$, mà $AB \perp BC \Rightarrow BC \perp (ABD) \Rightarrow BC \perp AH$

Từ $\left. \begin{array}{l} AH \perp BD \\ AH \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (BCD) \Rightarrow AH \perp DC$

Câu 10: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là trực tâm tam giác ABC . Khẳng định nào sau đây là **sai**.

- A. $AB \perp OC$. B. $OH \perp (ABC)$. C. $OH \perp BC$. **D. $OH \perp AO$.**

Lời giải



Xét phương án A: Do $\left\{ \begin{array}{l} OC \perp OB(gt) \\ OC \perp OA(gt) \end{array} \right.$ mà $OB \cap OA = O \in (OAB)$.

Nên $OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$. Vậy A đúng. Vì thế, loại A.

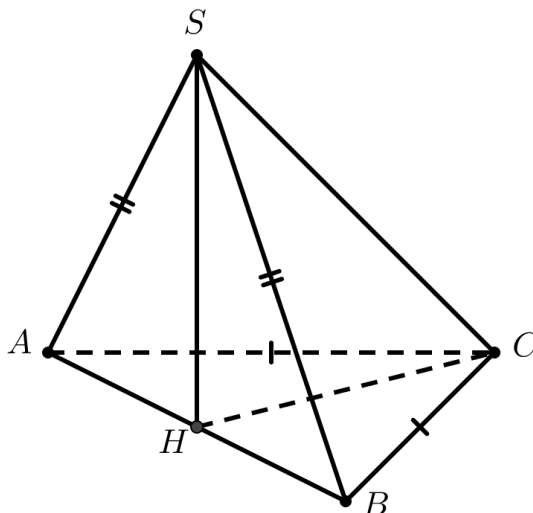
Xét phương án B và C: Do $\left\{ \begin{array}{l} AB \perp CH \\ AB \perp OC(cmt) \\ CH \cap OC = C \in (COH) \end{array} \right. \Rightarrow AB \perp (COH) \Rightarrow AB \perp OH$.

Lại vì: $\left\{ \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp OA(OA \perp (COB)) \\ OA \cap AH = A \in (AOH) \end{array} \right. \Rightarrow BC \perp (AOH) \Rightarrow BC \perp OH$

$$\text{Ngoài ra } \begin{cases} OH \perp CB \\ OH \perp AB \\ CB \cap AB = B \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow OH \perp (ABC).$$

- Câu 11:** Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có $SA = SB$ và $AC = CB$. Khẳng định nào sau đây đúng?
A. $BC \perp (SAC)$. **B.** $SB \perp AB$. **C.** $SA \perp (ABC)$. **D.** $AB \perp SC$.

Lời giải



Cách 1: Gọi H là trung điểm của AB . Vì $SA = SB$ và $AC = CB$ nên $SH \perp AB$ và $CH \perp AB$.
 Suy ra $AB \perp (SHC)$. Do đó $AB \perp SC$.

Cách 2: Vì $SA = SB$ và $AC = CB$ nên S và C cùng nằm trên mặt phẳng trung trực của AB .
 Do đó $AB \perp SC$.

- Câu 12:** Cho tứ diện $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên cạnh SB và SD . Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại K .

Khẳng định 1 : $AK \perp SC$

Khẳng định 2 : $AM \perp SC$

Khẳng định 3 : $BD \perp SC$

Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định trên ?

- A.** 1. **B.** 0. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Giả sử $SC \perp BD \Rightarrow AC \perp BD$. Vậy khẳng định 3 sai.

$$\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$$

$$\begin{cases} AN \perp SD \\ AN \perp CD \end{cases} \Rightarrow AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$$

Tương tự $AM \perp SC$.

$$\text{Khi đó : } SC \perp (AMN) \Rightarrow \begin{cases} SC \perp AK \\ SC \perp AM \end{cases} \text{ . Khẳng định 1 và 2 đúng.}$$

Vậy có 2 khẳng định đúng.

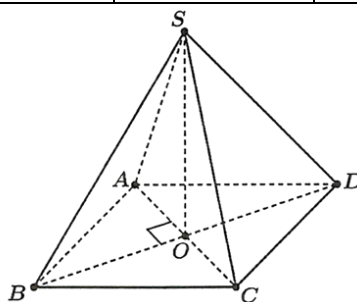
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC, SB = SD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$SO \perp AC$		
b)	$SO \perp (ABCD)$		
c)	$AC \perp (SBD)$		
d)	$(AC, SB) = 60^\circ$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------



a) Đúng

$$SO \perp AC$$

Tam giác SAC cân tại S (do $SA = SC$), mà O là trung điểm AC nên $SO \perp AC$. (1)

b) Đúng

$$SO \perp (ABCD)$$

Tam giác SBD cân tại S (do $SB = SD$), mà O là trung điểm BD nên $SO \perp BD$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $SO \perp (ABCD)$.

c) Đúng

$$AC \perp (SBD)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SO \text{ (} SO \perp (ABCD) \text{)} \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$$

d) Sai

$$(AC, SB) = 60^\circ.$$

Mà $SB \subset (SBD)$ nên $AC \perp SB \Rightarrow (AC, SB) = 90^\circ$.

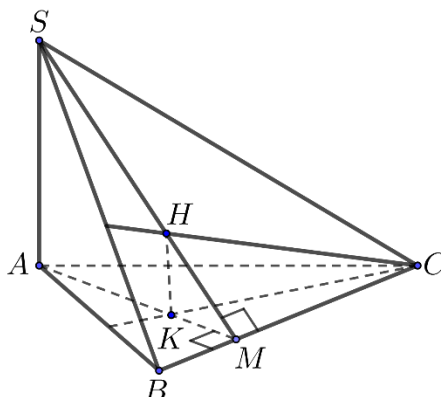
Câu 2: Cho hình chóp $SABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC (biết rằng các trực tâm này không trùng với các đỉnh của tam giác ABC và SBC).

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$BC \perp (SAH)$.		
b)	$SB \perp (CHK)$.		
c)	$HK \perp (SBC)$.		

d) $BC \perp (SAB)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------



a) **Đúng**

$$BC \perp (SAH).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp SH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH).$$

b) **Đúng**

$$SB \perp (CHK).$$

$$\text{Có } \begin{cases} CK \perp AB \\ CK \perp SA \end{cases} \Rightarrow CK \perp (SAB) \Rightarrow CK \perp SB.$$

Lại có $CH \perp SB$. Từ đó suy ra $SB \perp (CHK)$.

c) **Đúng**

$$HK \perp (SBC).$$

$$\text{Có } \begin{cases} BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp HK \\ SB \perp (CHK) \Rightarrow SB \perp HK \end{cases} \Rightarrow HK \perp (SBC).$$

d) **Sai**

$$BC \perp (SAB).$$

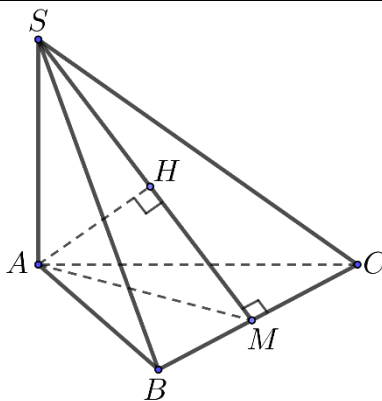
Giả sử $BC \perp (SAB)$, suy ra $CB \perp AB$ (mâu thuẫn giả thiết $K \neq B$).

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng AH .		
b)	Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .		
c)	Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC) .		
d)	Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------



a) Đúng

Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng AH .

Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM nên $AH \perp SM$

$$\text{Mặt khác: } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \Rightarrow BC \perp (SAM). \\ AM, SA \subset (SAM) \end{cases}$$

Mà $AH \subset (SAM)$ nên $BC \perp AH$.

b) Đúng

Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AH \perp SM \\ AH \perp BC \\ SM, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

c) Đúng

Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC) .

$AH \perp (SBC)$ nên SH là hình chiếu của SA lên (SBC)

d) Sai

Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$.

$$\text{Xét tam giác } SAM \text{ vuông tại } A, \text{ ta có: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{11}{6a^2}.$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{6a^2}{11} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{66}}{11}.$$

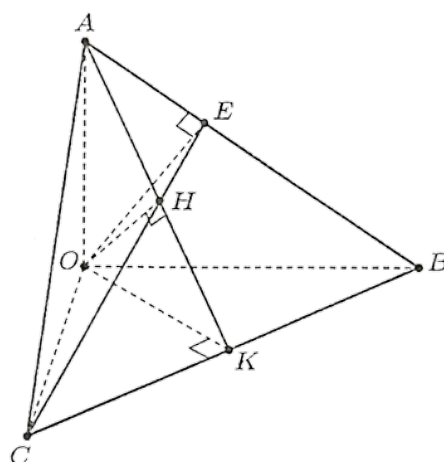
Câu 4: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$ tại H .

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$		
b)	Tam giác ABC có ba góc nhọn.		
c)	H là trọng tâm của tam giác ABC .		

d) $\left| \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right|$

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Đúng

$OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB.$

Ta có: $\begin{cases} OA \perp OB \\ OA \perp OC \end{cases} \Rightarrow OA \perp (OBC) \Rightarrow OA \perp BC;$

$\begin{cases} OB \perp OA \\ OB \perp OC \end{cases} \Rightarrow OB \perp (OAC) \Rightarrow OB \perp AC;$

$\begin{cases} OC \perp OA \\ OC \perp OB \end{cases} \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$

b) Đúng

Tam giác ABC có ba góc nhọn.

Kẻ đường cao OK của tam giác vuông OBC thì K nằm giữa B và C.

Vì $\begin{cases} BC \perp OK \\ BC \perp OA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAK) \Rightarrow BC \perp AK$

Do đó AK là đường cao của tam giác ABC, đồng thời K nằm giữa B và C

Nên các góc $\widehat{ABC}, \widehat{ACB}$ là góc nhọn.

Tương tự, kẻ đường cao OE của tam giác vuông OAB thì E nằm giữa hai điểm A; B.

Ta có: $\begin{cases} AB \perp OE \\ AB \perp OC \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCE) \Rightarrow AB \perp CE.$

Do đó CE là đường cao tam giác ABC, đồng thời E nằm giữa hai điểm A và B

Nên các góc $\widehat{ABC}, \widehat{CAB}$ là góc nhọn.

Vậy tam giác ABC có ba góc đều là góc nhọn.

c) Sai

H là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp OA \\ BC \perp OH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (OAH) \Rightarrow BC \perp AH. (1)$

$$\text{Tương tự } \begin{cases} AB \perp OC \\ AB \perp OH \end{cases} \Rightarrow AB \perp (OCH) \Rightarrow AB \perp CH .(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra H là trực tâm của tam giác ABC .

d) Đúng

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} .$$

$$\text{Tam giác } OBC \text{ vuông tại } O \text{ có đường cao } OK \text{ nên } \frac{1}{OK^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} .(3)$$

$$\text{Tam giác } OAK \text{ vuông tại } O \text{ có đường cao } OH \text{ nên } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OK^2} .(4)$$

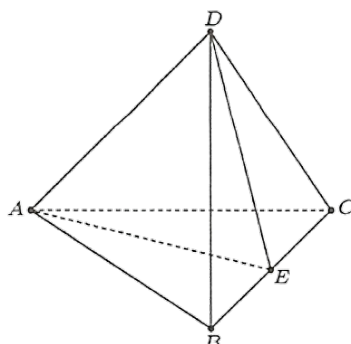
$$\text{Thay (3) vào (4), ta được: } \frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} .$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Xác định góc của hai đường thẳng BC, AD .

Lời giải

Trả lời: 90



Gọi E là trung điểm đoạn BC .

Vì $\triangle ABC$ cân tại A có AE là đường trung tuyến nên $AE \perp BC$. (1)

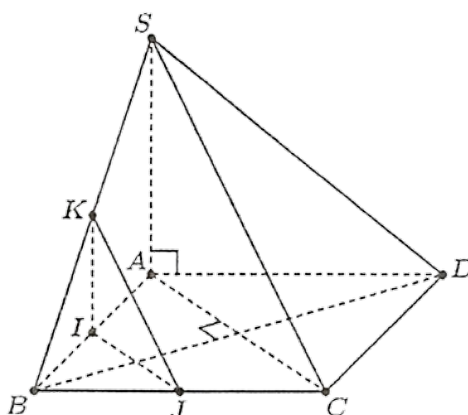
Tương tự, $\triangle DBC$ cân tại D có DE là đường trung tuyến nên $DE \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BC \perp (ADE)$, mà $AD \subset (ADE)$ nên $BC \perp AD$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của AB, BC và SB . Xác định góc của hai đường thẳng KJ, BD .

Lời giải

Trả lời: 90



Vì $SA \perp (ABCD)$

Nên hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là AC , mà $BD \perp AC$ nên $BD \perp SC$.

Từ đó, ta có $BD \perp (SAC)$.

Ta có IK, IJ lần lượt là đường trung bình của các tam giác SAB, ABC

Nên $IK \parallel SA; IJ \parallel AC$.

Suy ra $(IJK) \parallel (SAC)$.

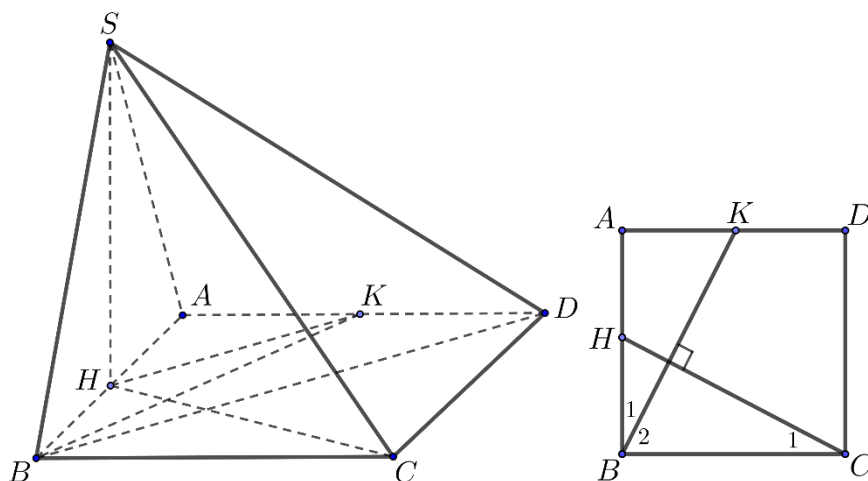
Khi đó: $\begin{cases} (IJK) \parallel (SAC) \\ BD \perp (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp (IJK),$

mà $KJ \subset (IJK)$ nên $KJ \perp BD$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD . Biết $SH \perp (ABCD)$. Góc giữa hai đường thẳng BK, SC bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 90



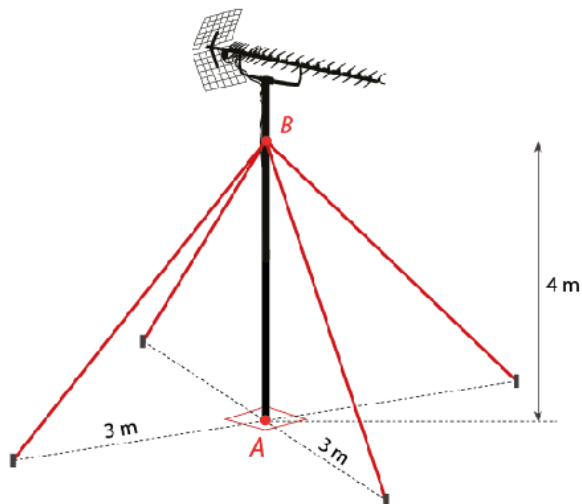
Xét $\triangle BCH, \triangle ABK$ có $\widehat{CBH} = \widehat{BAK} = 90^\circ$; $BC = AB$; $BH = AK$.

Suy ra $\triangle BCH = \triangle ABK \Rightarrow \widehat{B}_1 = \widehat{C}_1$.

Lại có $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{C}_1 + \widehat{B}_2 = 90^\circ \Rightarrow BK \perp CH$

Ta có: $\left. \begin{array}{l} BK \perp CH \\ BK \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow BK \perp (SCH) \Rightarrow BK \perp SC$

Câu 4: Một cây ăng-ten thẳng đứng với mặt đất và được buộc giằng bởi 4 dây cáp từ một điểm B cách chân A của ăng-ten $4m$. Khoảng cách từ A đến các chân buộc dây giằng lần lượt bằng $3m, 3m, 3m, 4m$. Tổng chiều dài dây cáp dùng để giằng cột ăng-ten là bao nhiêu mét? (không tính các mối nối, làm tròn đến hàng phần chục).

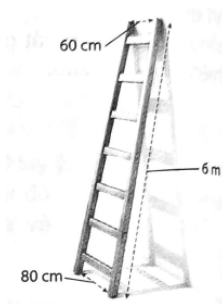


Trả lời: 20,7

Lời giải

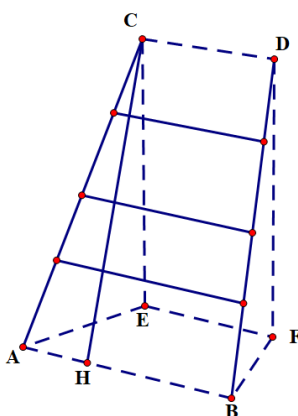
Vì ăng-ten thẳng đứng với mặt đất nên AB vuông góc với mặt đất. Do đó, tổng chiều dài dây cáp dùng để giăng cột ăng-ten là: $3\sqrt{3^2 + 4^2} + \sqrt{4^2 + 4^2} \approx 20,7 \text{ m}$.

Câu 5: Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao 6 m, hai chân thang cách nhau 80 cm, hai ngọn thang cách nhau 60 cm. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 89



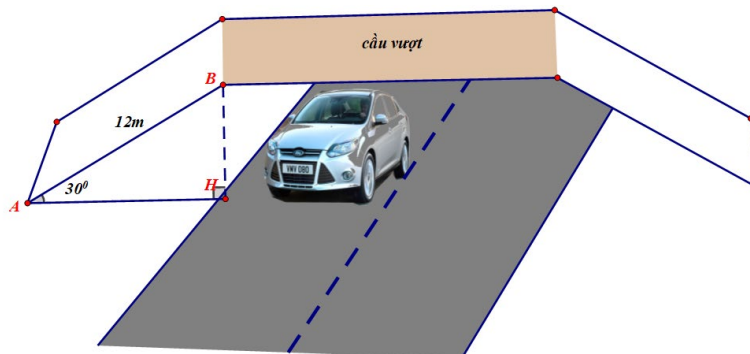
Gọi A, B là hai điểm tại hai vị trí chân thang và C, D là hai điểm tại hai vị trí ngọn thang, EF là đường chân tường. Ta có $EF \parallel AB$ nên $(EF, AC) = (AB, AC) = \widehat{BAC}$.

Kẻ CH vuông góc với AB tại H , khi đó $AH = \frac{AB - CD}{2} = 10 \text{ (cm)} = 0,1 \text{ (m)}$.

Tam giác ACH vuông tại H nên $\cos \widehat{CAH} = \frac{AH}{AC} = \frac{0,1}{6} = \frac{1}{60}$, suy ra $\widehat{CAH} \approx 89^\circ$.

Vậy góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang bằng 89° .

Câu 6: Ở các thành phố lớn để giảm tình trạng tắc nghẽn giao thông và nhằm đảm bảo an toàn thì ở các ngã tư người ta thường xây dựng các cầu vượt dành cho người đi bộ. Hỏi những phương tiện tham gia giao thông phải có chiều cao như thế nào để di chuyển an toàn bên dưới cầu vượt. Biết rằng đường dẫn lên cầu dài 12 mét và hợp với mặt đường một góc 30° ?



Lời giải

Trả lời: 6

Khoảng cách từ mặt đường đến cầu vượt là $BH = AB \cdot \sin 30^\circ = 6$ (mét)

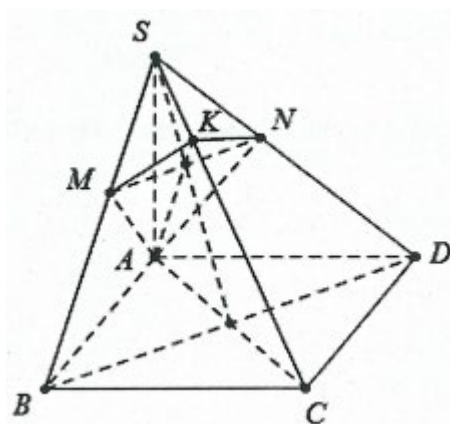
Vậy những phương tiện tham gia giao thông chiều cao phải nhỏ hơn 6 mét.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của điểm A trên các đường thẳng SB và SD .

- Chứng minh rằng $BC \perp (SAB), CD \perp (SAD)$.
- Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD)$.
- Chứng minh rằng $SC \perp (AMN)$ và $MN \parallel BD$.
- Gọi K là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN) . Chứng minh rằng tứ giác $AMKN$ có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải



a) Do $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mặt khác $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$. Khi đó $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Tương tự chứng minh trên ta có: $CD \perp (SAD)$.

b) Do $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$. Mặt khác $AM \perp SB \Rightarrow AM \perp (SBC)$

Tương tự ta có: $AN \perp (SCD)$.

c) Do $\begin{cases} AM \perp (SBC) \\ AN \perp (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM \perp SC \\ AN \perp SC \end{cases} \Rightarrow SC \perp (AMN)$.

Hai tam giác vuông SAB và SAD bằng nhau có các đường cao tương ứng là AM và AN nên $CM = DN$. Mặt khác tam giác SBD cân tại đỉnh S nên $MN \parallel BD$.

d) Do $ABCD$ là hình vuông nên $AC \perp BD$, mặt khác $SA \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Do $MN \parallel BD \Rightarrow MN \perp (SAC) \Rightarrow MN \perp AK$.

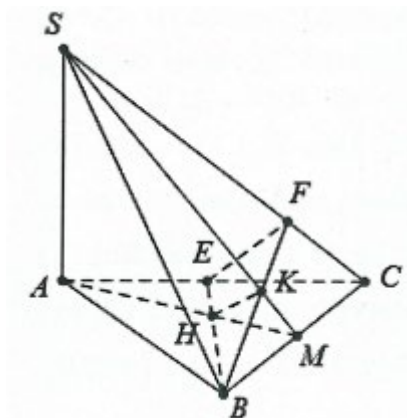
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, các tam giác ABC và SBC là các tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng:

a) AH, SK, BC đồng quy.

b) $SC \perp (BHK)$.

c) $HK \perp (SBC)$.

Lời giải



a) Giả sử $AH \perp BC$ tại M . Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Mặt khác $SK \perp BC \Rightarrow S, K, M$ thẳng hàng do đó AH, SK, BC đồng quy tại điểm M .

b) Do H là trực tâm tam giác ABC nên $BH \perp AC$

Mặt khác $BH \perp SA \Rightarrow BH \perp (SAC) \Rightarrow BH \perp SC$.

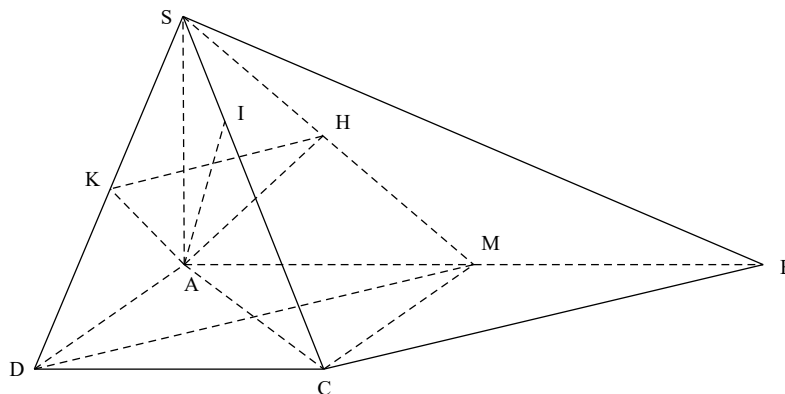
Lại có: $BK \perp SC \Rightarrow SC \perp (BHK)$.

c) Do $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp HK$. Mặt khác $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp HK$.

Do đó $HK \perp (SBC)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2CD$ và SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AB và H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SM, SC, SD . Chứng minh rằng $HK \perp AI$.

Lời giải



Ta có hình chóp $S.AMCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (AMCD)$ nên $\Delta SAM = \Delta SAD$.

Do AH và AK lần lượt là hai đường cao hạ từ đỉnh A xuống cạnh huyền của hai tam giác vuông nói trên nên $AH = AK$, từ đó suy ra $SH = SK \Rightarrow HK \parallel MD$ (1).

$$\text{Ta lại có: } \begin{cases} MD \perp AC \\ MD \perp SA \\ SA \cap AC = A \end{cases} \Rightarrow DM \perp (SAC) \quad (2)$$

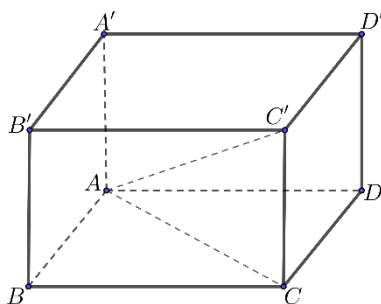
$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \begin{cases} HK \perp (SAC) \\ AI \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \perp AI.$$

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG
KHÔNG GIAN

BÀI: PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG
ĐỀ TEST SỐ 01

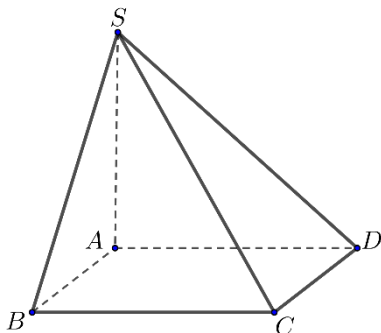
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của điểm C' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm



- A. C. B. A. C. D. D. B.

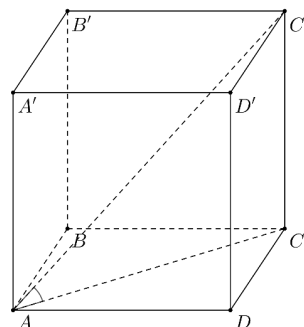
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của tam giác $\triangle SCD$ mặt phẳng $(ABCD)$ là



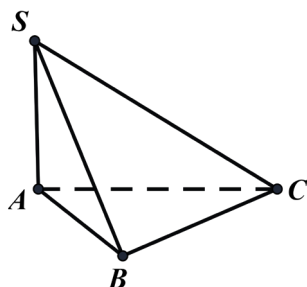
- A. $\triangle ABC$ B. $\triangle ACD$. C. $\triangle BCD$. D. $\triangle ABD$.

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = \sqrt{2}a$. (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

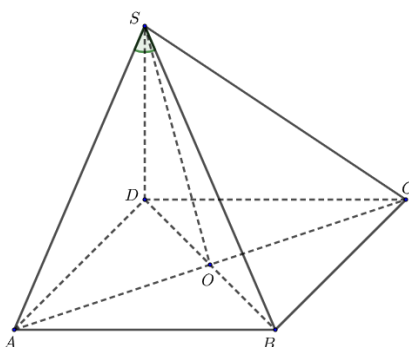
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

- A. 30° . B. 90° . C. 60° . D. 45° .

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính tan của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\sqrt{3}$. B. $\sqrt{7}$. C. $\sqrt{5}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .

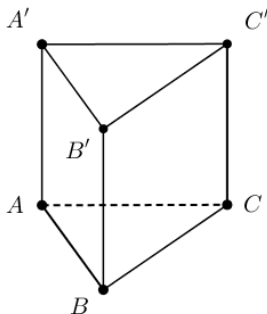


- A. 60° . B. 14° . C. 45° . D. 30° .

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi α là góc giữa $A'C$ và $(ADD'A')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

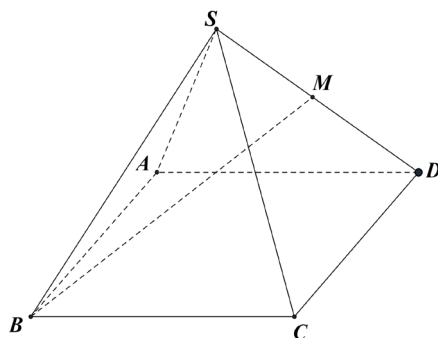
- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có cạnh $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$ và cạnh $AA' = \sqrt{15}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng



- A. 30° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD . Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{1}{3}$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hình chiếu vuông góc của điểm S lên $(ABCD)$ là điểm O .		
b)	Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên $(ABCD)$ là điểm O .		
c)	Hình chiếu vuông góc của ΔSAB lên $(ABCD)$ là ΔOAB .		
d)	Hình chiếu vuông góc của ΔBCD lên (SBD) là ΔSBD .		

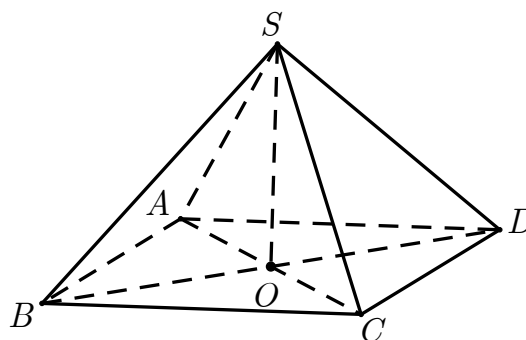
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$		
b)	$(SB, (ABCD)) \approx 54,75^\circ$		
c)	$(SC, (ABCD)) = 45^\circ$		
d)	$(SC, (SAB)) = 60^\circ$.		

Câu 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$SO \perp (ABC)$		
b)	$(SA, (ABC)) = (SA, OA)$		
c)	$(SA, (ABC)) = 60^\circ$		
d)	$(SM, (ABC)) \approx 70,9^\circ$		

Câu 4: Đại Kim tự tháp Giza có dạng là một hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh dài 230 mét, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của hình vuông đáy và có chiều cao 146 mét. Gọi O là chân đường cao của Kim tự tháp.



- a) Cạnh của Kim tự tháp tạo với đáy một góc gần bằng 42° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)
- b) Gọi I là trung điểm cạnh CD , góc giữa SI và mặt đáy của Kim tự tháp gần bằng 52° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)
- c) Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SCD) gần bằng 48° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)
- d) Tia nắng mặt trời in bóng của đỉnh Kim tự tháp trên mặt đất, cách chân kim tự tháp 93 mét. Khi đó, góc giữa tia nắng và mặt đất gần bằng 35° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

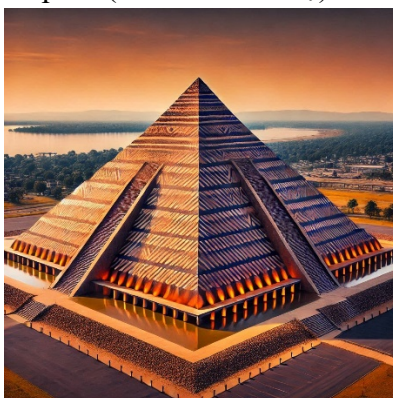
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa $A'C$ với mặt phẳng $(ABCD)$. (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a . Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là α° , tìm α .

Câu 4: Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 45° . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài $10m$. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimét (kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)?

Câu 5: Một kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác với đáy là hình vuông cạnh $180m$, hình chiếu của đỉnh trên mặt đất trùng với tâm của hình vuông đáy và chiều cao là $100m$. Tính số đo góc giữa cạnh bên và mặt đáy của kim tự tháp đó (làm tròn đến độ).



Câu 6: Một chiếc lều du lịch hình chóp có đáy là lục giác đều và hình chiếu của đỉnh lều trên mặt đất trùng với tâm của lục giác đáy, khung lều làm bằng tre (như hình). Người ta muốn treo 1 dây đèn trang trí dọc theo cột ở giữa của lều từ đỉnh xuống sàn. Độ dài của dây đèn cần chuẩn bị là bao nhiêu mét nếu biết góc giữa các thanh tre với mặt sàn là 30° ; tấm lót sàn hình lục giác đều có diện tích 18 mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a, CD = a$ và tam giác ACD vuông tại C , cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt trên các cạnh $AB, A'D'$ sao cho $MN = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$

Câu 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) .

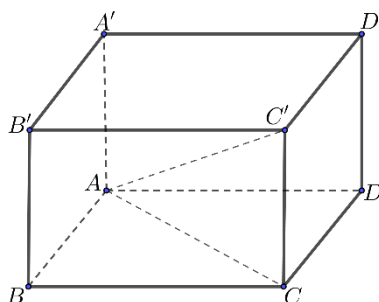
Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh $2a, \widehat{ABC} = 60^\circ, SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của điểm C' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là điểm

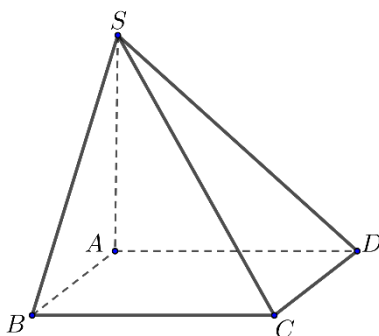


- A.** C. **B.** A. **C.** D. **D.** B.

Lời giải

Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $C'C \perp (ABCD) \Rightarrow C'$ là hình chiếu vuông góc của C trên $(ABCD)$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, SA vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của tam giác ΔSCD mặt phẳng $(ABCD)$ là



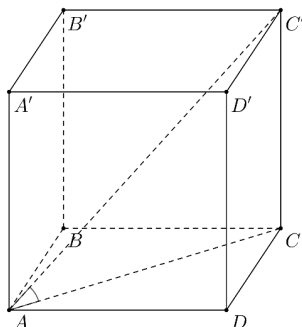
- A.** ΔABC **B.** ΔACD . **C.** ΔBCD . **D.** ΔABD .

Lời giải

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AC, AD lần lượt là hình chiếu vuông góc của SC, SD trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó ΔACD là hình chiếu của ΔSCD trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình bên). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

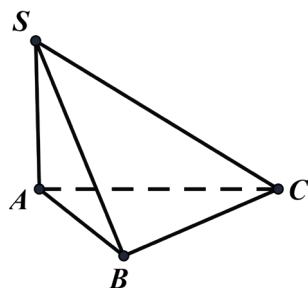
Lời giải

Ta có $(\widehat{AC', (ABCD)}) = (\widehat{AC', AC}) = \widehat{C'AC} = \alpha$.

Giả sử hình lập phương có cạnh là a

Trong tam giác $A'AC$ ta có $\sin \alpha = \frac{CC'}{AC'} = \frac{a}{\sqrt{2a^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = \sqrt{2}a$. (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

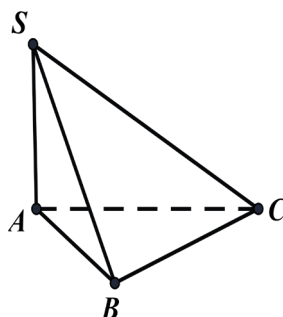
A. 60° .

B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} SC \cap (ABC) = \{C\} \\ SA \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow (\widehat{SC, (ABC)}) = (\widehat{SC, AC}) = \widehat{SCA}$.

Mà: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{2a^2 + 2a^2} = 2a = SA$.

Vì ΔSAC vuông cân tại A nên ta có $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

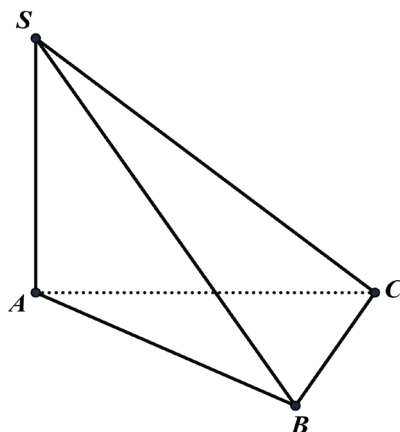
A. 90° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 45° .

Lời giải



Ta có: SA vuông góc với mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow A$ là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC)

$\Rightarrow \widehat{[SC, (ABC)]} = \widehat{(SC, AC)} = \widehat{SCA}$

ΔABC vuông tại $B \Rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2 \Rightarrow AC = 2a$

$\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{2a} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{[SC, (ABC)]} = 45^\circ$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B có $AB = a$, $AA' = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$ bằng

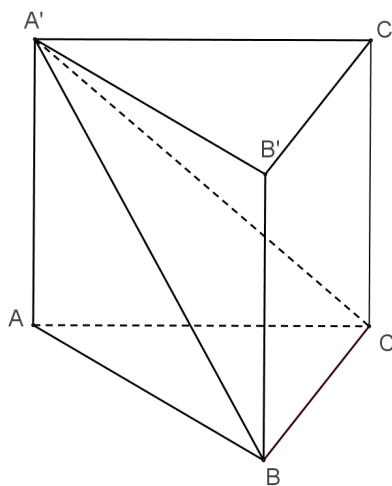
A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AA'B'B)$.

\Rightarrow Góc giữa $A'C$ và mặt phẳng $(AA'B'B)$ là $\widehat{CA'B}$.

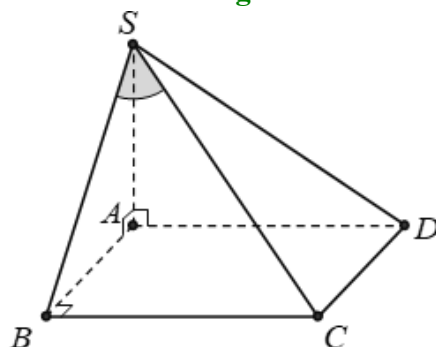
Ta có: $A'B = \sqrt{AA'^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$, $BC = AB = a$

$\Rightarrow \tan \widehat{CA'B} = \frac{BC}{A'B} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CA'B} = 30^\circ$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

- A.** 30° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 45° .

Lời giải



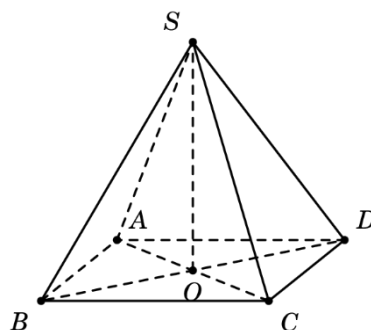
Có $CB \perp (SAB)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng góc giữa đường thẳng SC và SB .

$$\text{Có } SB = a\sqrt{3}; \tan \widehat{CSB} = \frac{CB}{SB} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^\circ.$$

Câu 8: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính \tan của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A.** $\sqrt{3}$. **B.** $\sqrt{7}$. **C.** $\sqrt{5}$. **D.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Lời giải



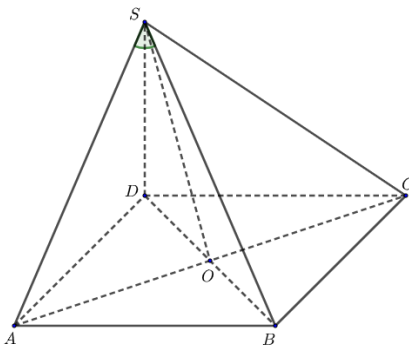
Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc SAO .

$$\text{Vì } ABCD \text{ là hình vuông nên } AO = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SAO \text{ vuông tại } O \text{ nên } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \frac{a\sqrt{14}}{2}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} = \sqrt{7}.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .



- A. 60° . B. 14° . C. 45° . D. 30° .

Lời giải

Ta có: $SA \cap (SBD) = \{S\}$

Lại có $AO \perp BD; AO \perp SD \Rightarrow AO \perp (SBD)$ nên $(SA, (SBD)) = \widehat{OSA}$.

$$\Delta SDA \text{ có: } SA = \sqrt{SD^2 + AD^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

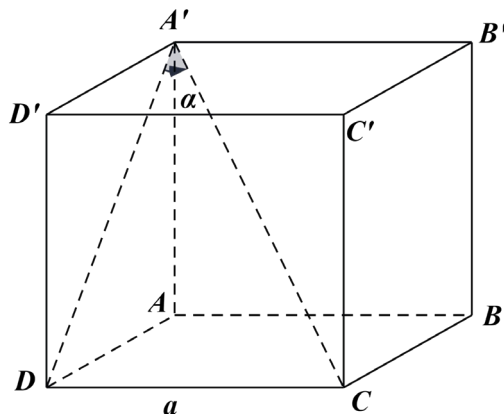
$$\text{Hình vuông } ABCD \text{ có: } AO = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\Delta SAO \text{ có: } \sin \widehat{OSA} = \frac{AO}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{OSA} = 30^\circ.$$

Câu 10: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi α là góc giữa $A'C$ và $(ADD'A')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\alpha = 30^\circ$. B. $\alpha = 45^\circ$. C. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. D. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

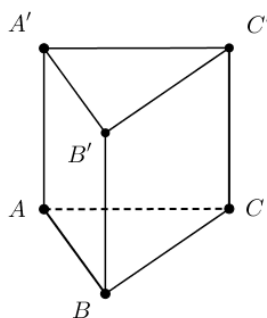
Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow CD \perp (ADD'A').$$

$$\text{Suy ra } A'D \text{ là hình chiếu vuông góc của } A'C \text{ lên } (A'D'DA) \Rightarrow \tan \alpha = \frac{CD}{A'D} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B có cạnh $AB = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{3}$ và cạnh $AA' = \sqrt{15}$. Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng



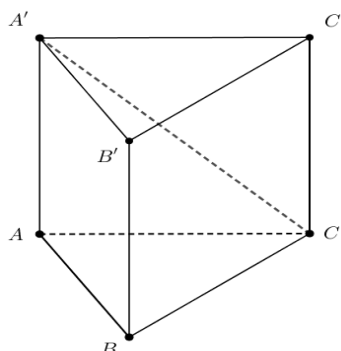
A. 30° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải



Ta có: AC là hình chiếu của $A'C$ lên mặt phẳng (ABC) .

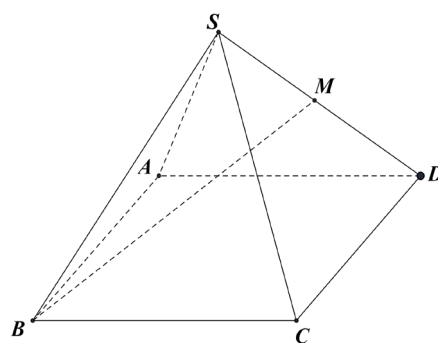
Góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\widehat{A'CA}$.

$$\text{Lại có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{5}.$$

$$\text{Trong tam giác vuông } A'AC \text{ có } \tan \widehat{A'CA} = \frac{AA'}{AC} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}} = \sqrt{3}.$$

Suy ra $\widehat{A'CA} = 60^\circ$.

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của SD . Tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



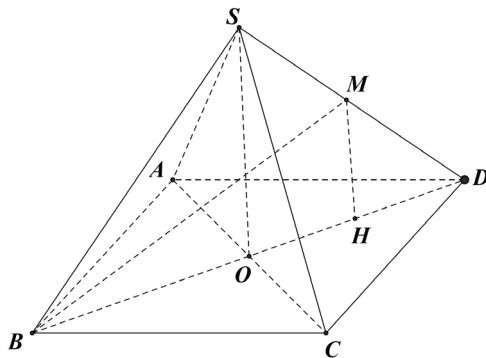
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{1}{3}$

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông. Ta có $SO \perp (ABCD)$ và $SO = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Gọi M là trung điểm của OD ta có $MH \parallel SO$ nên H là hình chiếu của M lên mặt phẳng $(ABCD)$ và $MH = \frac{1}{2}SO = \frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ là \widehat{MBH} .

$$\text{Khi đó ta có } \tan \widehat{MBH} = \frac{MH}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{3a\sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Vậy tang của góc giữa đường thẳng BM và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng $\frac{1}{3}$

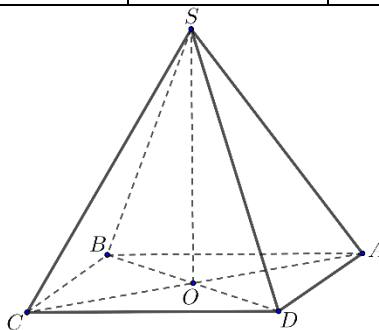
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Hình chiếu vuông góc của điểm S lên $(ABCD)$ là điểm O .		
b)	Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên $(ABCD)$ là điểm O .		
c)	Hình chiếu vuông góc của ΔSAB lên $(ABCD)$ là ΔOAB .		
d)	Hình chiếu vuông góc của ΔBCD lên (SBD) là ΔSBD .		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------



a) Đúng

Hình chiếu vuông góc của điểm S lên $(ABCD)$ là điểm O .

Xét ΔSAC có $SA = SC$ nên $SO \perp AC$.

Xét ΔSBD có $SB = SD$ nên $SO \perp BD$.

Vì $\begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \\ AC \cap BD \end{cases}$ nên hình chiếu của điểm S trên $(ABCD)$ là điểm O .

b) Đúng

Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên $(ABCD)$ là điểm O .

Do $SO \perp (ABCD)$ tại O , $O \in (ABCD)$ nên hình chiếu của đường thẳng SO trên $(ABCD)$ là điểm O .

c) Đúng

Hình chiếu vuông góc của ΔSAB lên $(ABCD)$ là ΔOAB .

Do $SO \perp (ABCD)$ tại O ; A, B thuộc $(ABCD)$

Nên hình chiếu của ΔSAB lên $(ABCD)$ là ΔOAB

d) Sai

Hình chiếu vuông góc của ΔBCD lên (SBD) là ΔSBD .

$\begin{cases} CO \perp SO \\ CO \perp BD \end{cases} \Rightarrow CO \perp (SBD)$ tại O .

Mà $O \in BD$; B, D thuộc $(ABCD)$

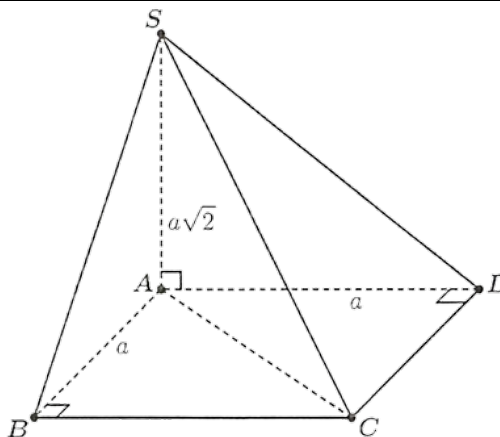
\Rightarrow Hình chiếu vuông góc của ΔBCD lên (SBD) là đoạn thẳng BD .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$		
b)	$(SB, (ABCD)) \approx 54,75^\circ$		
c)	$(SC, (ABCD)) = 45^\circ$		
d)	$(SC, (SAB)) = 60^\circ$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------



a) Đúng

AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Đúng

$$(SB, (ABCD)) \approx 54,75^\circ$$

Vì vậy $(SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SBA} \approx 54,74^\circ$.

Vậy $(SB, (ABCD)) = \widehat{SBA} \approx 54,75^\circ$.

c) Đúng

$$(SC, (ABCD)) = 45^\circ$$

Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$

Nên $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 45^\circ$ (do ΔSAC vuông cân có $SA = AC = a\sqrt{2}$).

d) Sai

$$(SC, (SAB)) = 60^\circ$$

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} (SA \perp (SAB)) \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra SB là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAB) .

Do vậy $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{CSB}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại B có: $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^\circ$.

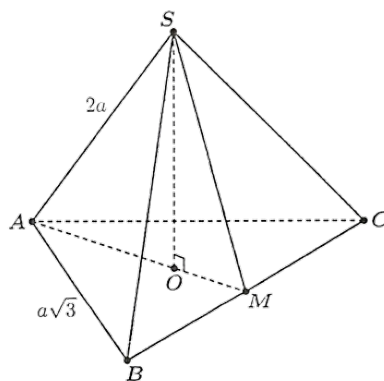
Vậy $(SC, (SAB)) = \widehat{CSB} = 30^\circ$.

Câu 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$SO \perp (ABC)$		
b)	$(SA, (ABC)) = (SA, OA)$		
c)	$(SA, (ABC)) = 60^\circ$		
d)	$(SM, (ABC)) \approx 70,9^\circ$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



a) **Đúng**

$$SO \perp (ABC)$$

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC (O thuộc AM).

Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

b) **Đúng**

$$(SA, (ABC)) = (SA, OA)$$

Ta có OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) .

$$\text{Suy ra } (SA, (ABC)) = (SA, OA) = \widehat{SAO}.$$

c) **Sai**

$$(SA, (ABC)) = 60^\circ$$

$$\text{Ta có: } OA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = a.$$

$$\text{Xét tam giác } SOA \text{ vuông tại } O: SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Trong tam giác } SOA \text{ vuông tại } O \text{ có: } \cos \widehat{SAO} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SAO} = 60^\circ.$$

$$\text{Vậy } (SA, (ABC)) = \widehat{SAO} = 60^\circ.$$

d) **Sai**

$$(SM, (ABC)) \approx 70,9^\circ.$$

Ta có: OM là hình chiếu của SM trên (ABC)

$$\text{Nên } (SM, (ABC)) = (SM, OM) = \widehat{SMO}.$$

Ta có:

$$OM = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$$

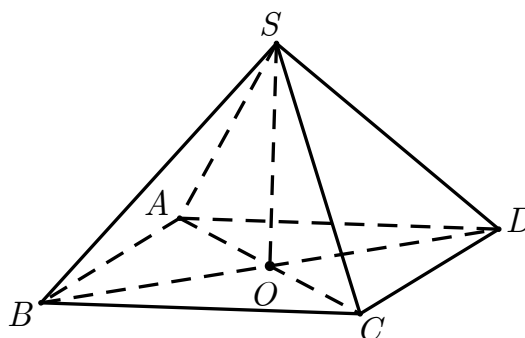
$$SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Tam giác SMO vuông tại O có:

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SMO} \approx 73,9^\circ.$$

Vậy $(SM, (ABC)) = \widehat{SMO} \approx 73,9^\circ$.

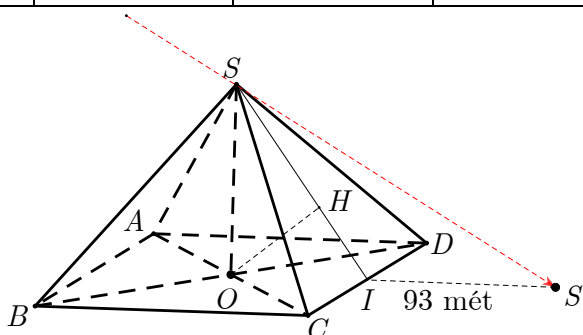
Câu 4: Đại Kim tự tháp Giza có dạng là một hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh dài 230 mét, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của hình vuông đáy và có chiều cao 146 mét. Gọi O là chân đường cao của Kim tự tháp.



- Cạnh của Kim tự tháp tạo với đáy một góc gần bằng 42° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)
- Gọi I là trung điểm cạnh CD , góc giữa SI và mặt đáy của Kim tự tháp gần bằng 52° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)
- Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SCD) gần bằng 48° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)
- Tia nắng mặt trời in bóng của đỉnh Kim tự tháp trên mặt đất, cách chân kim tự tháp 93 mét. Khi đó, góc giữa tia nắng và mặt đất gần bằng 35° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------



a) Đúng

Ta có $SO \perp (ABCD)$ nên góc giữa SA và $(ABCD)$ là \widehat{SAO} .

$$AO = \frac{AC}{2} = 115\sqrt{2}. \text{ Suy ra } \tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{AO} = \frac{146}{115\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SAO} \approx 42^\circ.$$

b) Đúng

Ta có $SO \perp (ABCD)$ nên góc giữa SI và $(ABCD)$ là \widehat{SIO} .

$$\text{Ta có } \tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{IO} = \frac{146}{115} \Rightarrow \widehat{SIO} \approx 52^\circ.$$

c) Đúng

Gọi I là trung điểm CD . Kẻ $OH \perp SI, H \in SI$ thì $OH \perp (SCD)$.

Suy ra góc giữa SO và (SCD) là \widehat{OSI} .

Ta có: $\tan \widehat{OSI} = \frac{OI}{SO} = \frac{115}{146} \Rightarrow \widehat{OSI} \approx 38^\circ$.

d) Sai

Gọi S' là vị trí bóng của đỉnh S trên mặt đất, I là trung điểm CD .

Ta có $SO \perp (ABCD)$ nên góc giữa $S'S$ và $(ABCD)$ là $\widehat{SS'O}$.

Ta có $S'O = S'I + IO = 93 + 115 = 208$ mét

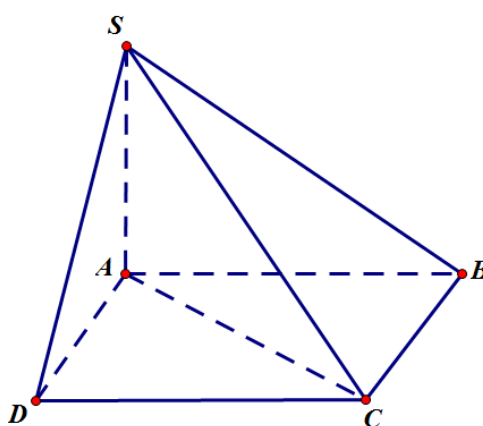
Ta có $\tan \widehat{SS'O} = \frac{SO}{S'O} = \frac{146}{208} \Rightarrow \widehat{SS'O} \approx 35^\circ$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $BC = 2a$ và $SA \perp (ABCD)$, cạnh $SA = a\sqrt{15}$. Góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

Lời giải

Trả lời: 60



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó góc tạo bởi đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SCA} .

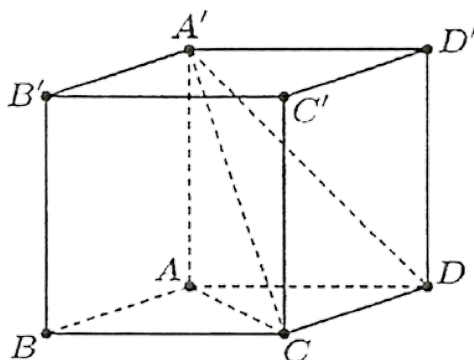
Tam giác ABC , có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{5}$.

Tam giác SAC , có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{AC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tính góc giữa $A'C$ với mặt phẳng $(ABCD)$. (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 35,3



Ta có: $AA' \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên $(ABCD)$.

Suy ra $(A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = \widehat{A'CA}$.

Giả sử cạnh hình lập phương là a thì $AA' = a, AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác $AA'C$ vuông tại A có:

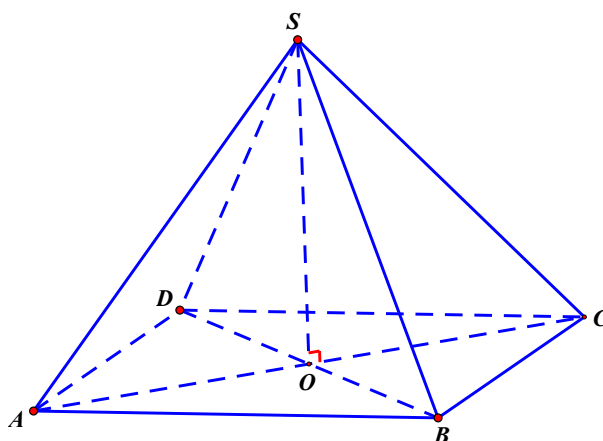
$$\tan \widehat{A'CA} = \frac{AA'}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{A'CA} \approx 35,26^\circ.$$

Vậy $(A'C, (ABCD)) = \widehat{A'CA} \approx 35,3^\circ$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và các cạnh đều bằng a . Biết góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) là α° , tìm α .

Lời giải

Trả lời: 45

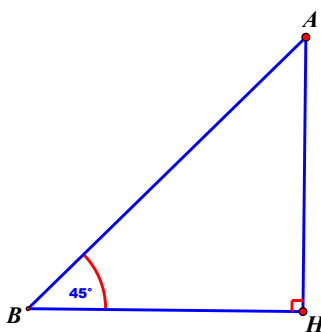


Ta có: $SO \perp AC$; $SO \perp BD$ nên $SO \perp (ABCD)$. Vì $AO \perp (SBD)$ nên SO là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SBD) , do đó góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc giữa hai đường thẳng SA và SO . Mà $(SA, SO) = \widehat{ASO}$ nên góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng góc ASO . Xét tam giác SAC có $SA^2 + SC^2 = AC^2$ và $SA = SC$ nên tam giác SAC vuông cân tại S , suy ra $\widehat{ASO} = 45^\circ$. Vậy góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) bằng 45° .

Câu 4: Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 45° . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài $10m$. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimet (kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)?

Lời giải

Trả lời: 707



Gọi A là vị trí con diều, B là vị trí đầu dây diều trên mặt đất, H là hình chiếu vuông góc của A trên mặt đất. Tam giác ABH vuông tại H , góc ABH bằng 60° và $AB = 10m = 1000cm$.

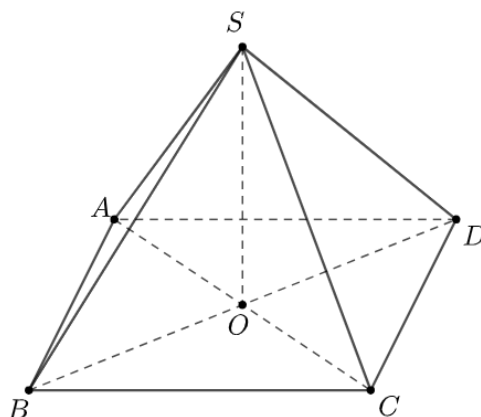
Ta có: $AH = AB \cdot \sin 45^\circ \approx 707(cm)$.

Câu 5: Một kim tự tháp có dạng hình chóp tứ giác với đáy là hình vuông cạnh $180m$, hình chiếu của đỉnh trên mặt đất trùng với tâm của hình vuông đáy và chiều cao là $100m$. Tính số đo góc giữa cạnh bên và mặt đáy của kim tự tháp đó (làm tròn đến độ).



Lời giải

Trả lời: 38



Xét hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có chiều cao $100m$ và cạnh hình vuông đáy $180m$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$.

Có AO là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng $(ABCD)$

Suy ra $\widehat{(SA, (ABCD))} = \widehat{SAO}$.

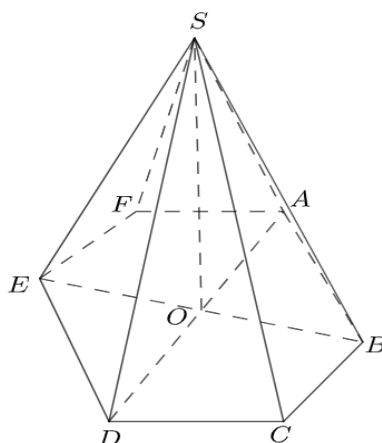
$$\tan \widehat{SAO} = \frac{SO}{OA} = \frac{100}{180 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{9} \Rightarrow \widehat{(SA, (ABCD))} = \widehat{SAO} = 38^\circ$$

Vậy góc giữa cạnh bên và mặt đáy của kim tự tháp là 38° .

Câu 6: Một chiếc lều du lịch hình chóp có đáy là lục giác đều và hình chiếu của đỉnh lều trên mặt đất trùng với tâm của lục giác đáy, khung lều làm bằng tre (như hình). Người ta muốn treo 1 dây đèn trang trí dọc theo cột ở giữa của lều từ đỉnh xuống sàn. Độ dài của dây đèn cần chuẩn bị là bao nhiêu mét nếu biết góc giữa các thanh tre với mặt sàn là 30° ; tám lót sàn hình lục giác đều có diện tích 18 mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Trả lời: 1,5



Gọi O là tâm hình lục giác $ABCDEF$ thì $SO \perp (ABCDEF) \Rightarrow SO \perp OB$.

Có OB là hình chiếu vuông góc của SB trên mặt phẳng $(ABCDEF)$

Suy ra $\widehat{(SB, (ABCDEF))} = \widehat{SBO} = 30^\circ$.

Từ giả thiết, ta có $S_{ABCDEF} = 18 \Rightarrow S_{OAB} = 3$; $S_{OAB} = OB^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = 3 \Rightarrow OB = 2\sqrt[4]{3}$

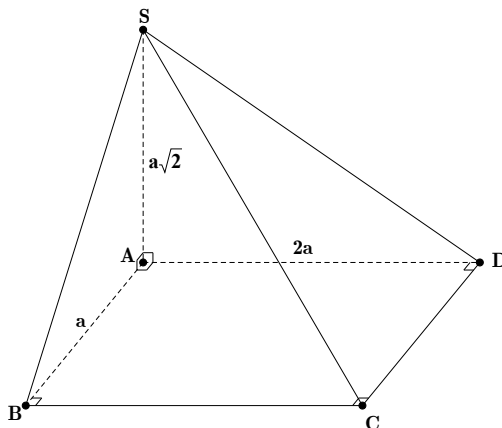
Tam giác SOB vuông tại O , có:

$$\tan \widehat{SBO} = \frac{SO}{OB} \Rightarrow SO = OB \tan \widehat{SBO} = 2\sqrt[4]{3} \cdot \tan 30^\circ \approx 1,5m$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $AB = a$, $AD = 2a$, $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ suy ra $SA \perp BC$.

Mà $ABCD$ là hình vuông nên $BC \perp AB$.

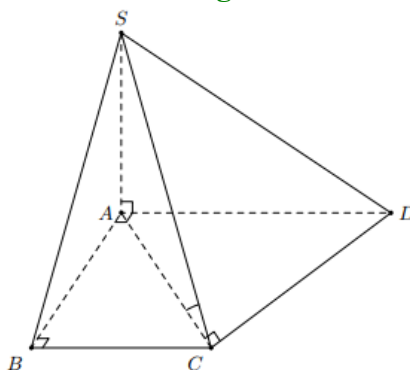
Do đó $BC \perp (SAB)$ nên $(SC, (SAB)) = \widehat{CSB}$.

Tam giác SAB vuông tại A nên $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại B nên $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{2a}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{CSB} = \arctan \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a, CD = a$ và tam giác ACD vuông tại C , cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng $(ABCD)$.

Do đó góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SCA} .

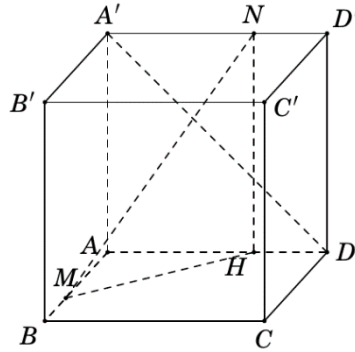
Tam giác ACD vuông tại C nên ta có $AC = \sqrt{AD^2 - CD^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SAC vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt trên các cạnh $AB, A'D'$ sao cho $MN = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của N lên cạnh AD .

Khi đó ta có $NH \perp (ABCD) \Rightarrow (MN, (ABCD)) = \widehat{NMH}$.

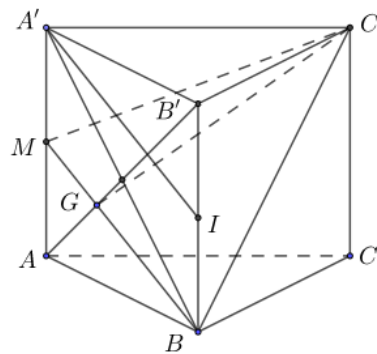
$NH = DD' = a$.

$$\Delta NMH \text{ vuông tại } H : \sin \widehat{NMH} = \frac{NH}{NM} = \frac{a}{\frac{2\sqrt{3}a}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Vậy $(MN, (ABCD)) = \widehat{NMH} = 60^\circ$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) .

Lời giải



Tính góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng (ABC) .

Ta có $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ tam giác đều $\Rightarrow BB' \perp (ABC)$, $AB' \cap (ABC) = A$

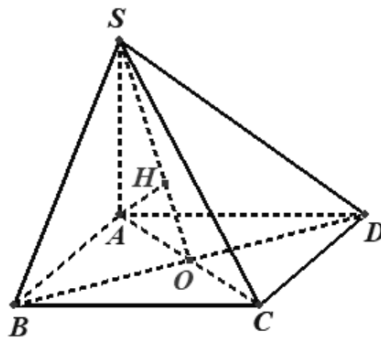
$\Rightarrow (AB', (ABC)) = \widehat{B'AB}$.

Tam giác $B'AB$ vuông cân tại B nên $\widehat{B'AB} = 45^\circ$.

Vậy $(AB', (ABC)) = 45^\circ$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, H là hình chiếu của A trên SO .

$$\Delta ABC \text{ đều} \Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = a.$$

Ta có $BD \perp AO, BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAO) \Rightarrow BD \perp AH$. Mà $SO \perp AH \Rightarrow AH \perp (SBD)$

$$\Rightarrow (SA, (SBD)) = (SA, SH) = \widehat{ASH} = \widehat{ASO}.$$

$$\text{Khi đó: } \tan \widehat{ASO} = \frac{SA}{AO} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ASO} = 60^\circ.$$

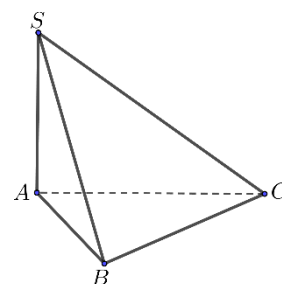
QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

BÀI: PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC – GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẶNG

ĐỀ TEST SỐ 02

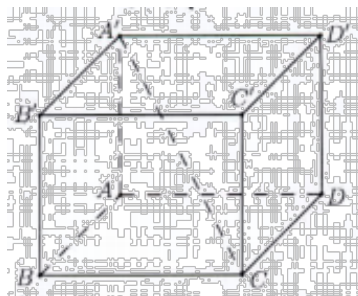
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SB trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng



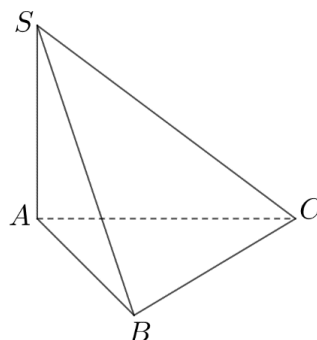
- A. BC
- B. AB .
- C. AC .
- D. SA .

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



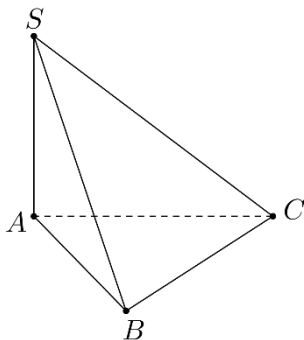
- A. 30° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 90° .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



- A. 30° .
- B. 45° .
- C. 60° .
- D. 90° .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ và có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = 3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{30}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O ; tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$; $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy là trung điểm M của cạnh AD , $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi N là trung điểm của cạnh BC . Tính sin của góc giữa SN và mặt phẳng (SBM) .

- A. $\frac{2}{\sqrt{35}}$. B. $\frac{3}{\sqrt{35}}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

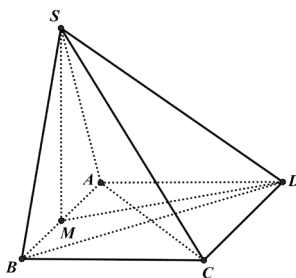
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng

- A. 45° . B. 60° . C. 30° . D. 75° .

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ gọi M là trung điểm cạnh AB . Biết đáy là hình vuông cạnh bằng a , $SM \perp (ABCD)$, tam giác SAB đều (minh họa như hình vẽ).



Kí hiệu φ góc giữa SD và $(ABCD)$, khi đó $\tan \varphi$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Câu 10: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'B = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{3}$. Góc giữa $C'A$ và mp (ABC) bằng

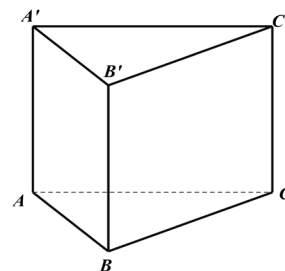
- A. 60° . B. 90° . C. 45° . D. 30° .

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết tam giác ABC vuông tại B ,

$$AB = a, BC = a\sqrt{2}, AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \text{ Gọi } I \text{ là trung điểm của } A'B'. \text{ Tính}$$

góc giữa đường thẳng CI và mặt phẳng (ABC) .

- A. 30° . B. 45° .
C. 60° . D. 90° .



Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S , $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là

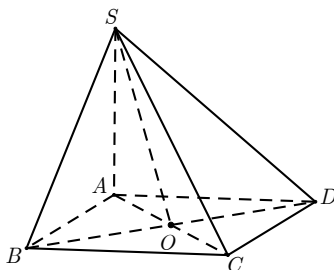
- A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$. C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$. D. $\sqrt{3}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$.

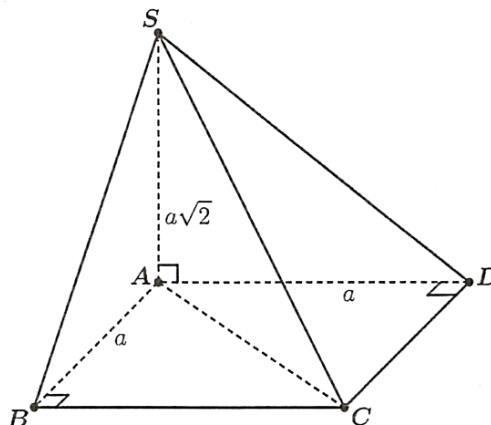
- a) Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) là C .
b) Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (SBC) là B .
c) Hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mặt phẳng (ABC) là ΔABC .
d) Hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mặt phẳng (ABC) có diện tích bằng $\frac{a^2}{2}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = a\sqrt{3}$. SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ (tham khảo hình vẽ).



- a) Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SOA} .
b) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .
c) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) bằng 60° .
d) Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) . Ta có $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ như hình vẽ.



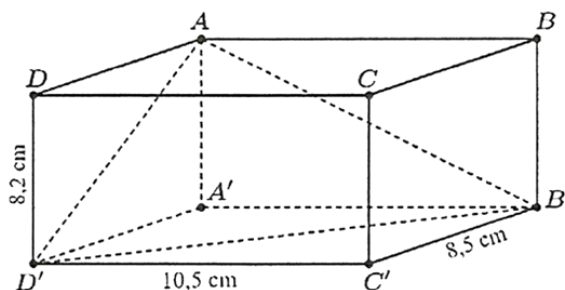
- a) Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 90° .
- b) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .
- c) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .
- d) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30° .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng (SBC) bằng 90° .		
b)	Góc giữa đường thẳng AF và mặt phẳng (SCD) bằng 60° .		
c)	Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° .		
d)	Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AEF) bằng 30° .		

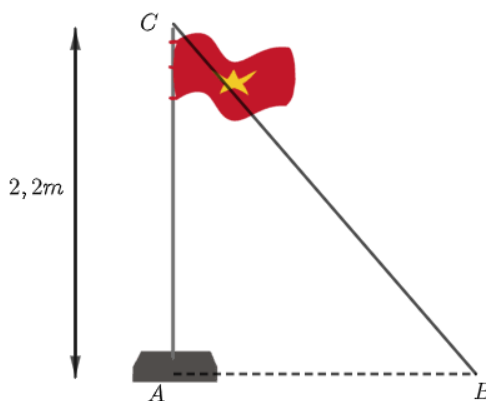
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một hộp phấn không bụi có dạng hình hộp chữ nhật, chiều cao hộp phấn bằng $8,2\text{ cm}$ và đáy của nó có hai kích thước là $8,5\text{ cm}; 10,5\text{ cm}$ (xem hình vẽ sau). Tìm góc phẳng nhị diện $[A, B'D', A']$ (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng đáy? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $SA = 3$, $AB = 2$, $AD = 3$. Gọi α là góc giữa SA và (SBD) , tính $\sin \alpha$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$, $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $AB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu độ?
- Câu 5:** Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. Góc cất cánh của nó là góc giữa đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Máy bay cất cánh và bay thẳng với vận tốc 210km/h với góc cất cánh 12° . Sau 2 phút kể từ khi cất cánh, độ cao của máy bay so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- Câu 6:** Một cây cột cờ cao $2,2\text{m}$ ở sân trường được xây theo phương thẳng đứng so với mặt sân, người ta dùng một sợi dây cột từ đỉnh của cột cờ đến một điểm dưới sân và chiều dài của dây là 3m . Giả sử dây được kéo thẳng và không co giãn, khi đó số đo góc (tính theo đơn vị độ) tạo bởi sợi dây và mặt sân là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



PHẦN IV. Tự luận

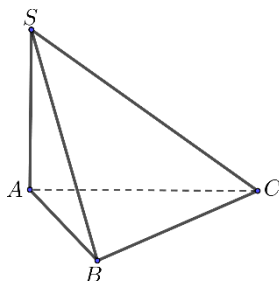
- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , gọi M là trung điểm AB . Biết $SM \perp (ABC)$ và tam giác SAB đều. Tính góc giữa SC và (ABC)
- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC)
- Câu 3:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $AA' = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'B'C')$
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .
- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M ; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN)

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SB trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng



- A. BC B. AB . C. AC . D. SA .

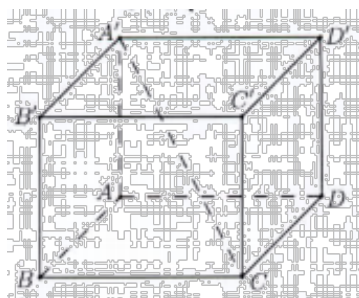
Lời giải

Ta có $SB \cap (ABC) = B$

Và $SA \perp (ABC) \Rightarrow A$ là hình chiếu vuông góc của S trên (ABC)

Do đó AB là hình chiếu vuông góc của SB lên mp (ABC) .

Câu 2: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng



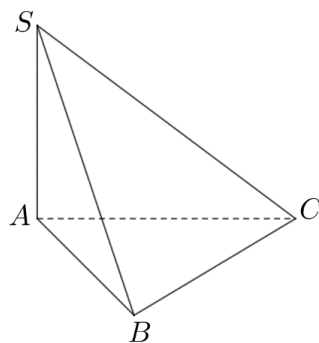
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Lời giải

Góc cần tìm là $\angle A'CA = \alpha$. Vì đây là hình vuông nên $AC = AB\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ và

$$\tan \alpha = \frac{AA'}{AC} = 1 \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = \sqrt{2}a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ (minh họa như hình bên). Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng



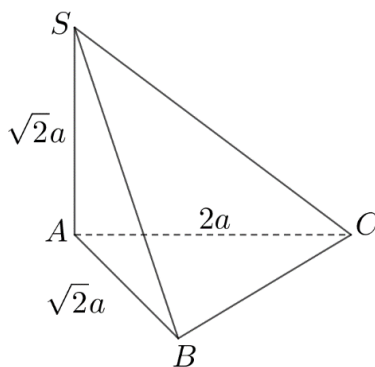
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải



Ta có: $SB \cap (ABC) = B$; $SA \perp (ABC)$ tại A .

\Rightarrow Hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng (ABC) là AB .

\Rightarrow Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là $\alpha = \widehat{SBA}$.

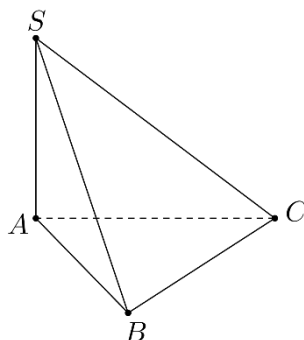
Do tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = 2a$ nên $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}a = SA$.

Suy ra tam giác SAB vuông cân tại A .

Do đó: $\alpha = \widehat{SBA} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ và có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a, BC = 3a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{30}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt đáy bằng



A. 45° .

B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

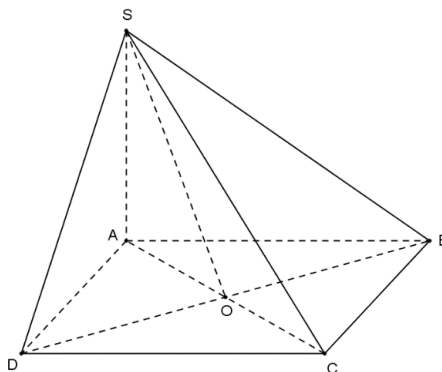
Do AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên $\widehat{(SC, (ABC))} = \widehat{SCA}$

Ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{10}$

Khi đó $\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{30}}{a\sqrt{10}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCA} = 60^\circ$.

- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O ; tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$; $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ và vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:
- A.** 60° . **B.** 45° . **C.** 30° . **D.** 90° .

Lời giải



Do tam giác ABD đều cạnh $a\sqrt{2}$ nên $AO = a\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Do $SA \perp (ABCD)$ nên AO là hình chiếu của SO lên mặt phẳng $(ABCD)$

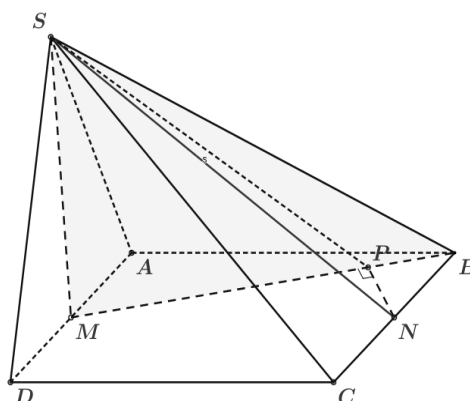
$\Rightarrow \widehat{(SO; (ABCD))} = \widehat{(SO; AO)} = \widehat{SOA}$ (do tam giác SAO vuông tại A)

Mà $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{AO} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{(SO; (ABCD))} = \widehat{SOA} = 60^\circ$.

- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , hình chiếu vuông góc của S lên mặt đáy là trung điểm M của cạnh AD , $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi N là trung điểm của cạnh BC . Tính sin của góc giữa SN và mặt phẳng (SBM) .

- A.** $\frac{2}{\sqrt{35}}$. **B.** $\frac{3}{\sqrt{35}}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải



Kẻ $NP \perp MB$. Ta có: $\begin{cases} NP \perp MB \\ NP \perp SM \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SBM) \Rightarrow (\widehat{SN, (SBM)}) = \widehat{NSP}$

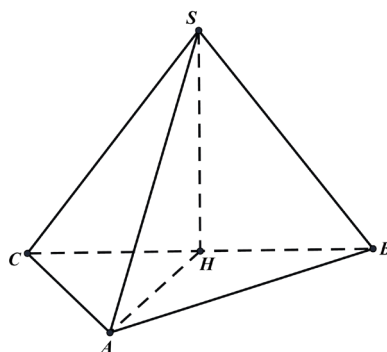
Xét tam giác vuông SNM , ta có: $SN^2 = SM^2 + MN^2 \Rightarrow SN = \frac{\sqrt{7}}{2}a$

Xét tam giác vuông NBM , ta có: $\frac{1}{NP^2} = \frac{1}{MN^2} + \frac{1}{NB^2} \Rightarrow NP = \frac{1}{\sqrt{5}}a$

Xét tam giác vuông SNP , ta có: $\sin \widehat{NSP} = \frac{NP}{NS} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{7}} = \frac{2}{\sqrt{35}}$

- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo của góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng
- A. 45^0 . B. 60^0 . C. 30^0 . D. 75^0 .

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC , (SBC) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy nên ta có $SH \perp (ABC)$.

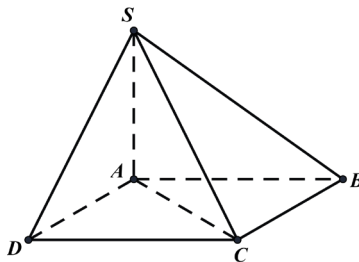
Khi đó ta có hình chiếu vuông góc của SA lên (ABC) là AH . Suy ra góc giữa SA và (ABC) bằng góc giữa SA và AH bằng góc \widehat{SAH} .

Ta có: $AH = \frac{1}{2}BC$, $SH = BC \frac{\sqrt{3}}{2}$. Do đó trong tam giác SAH ta có $\tan \widehat{SHA} = \frac{SH}{AH} = \sqrt{3}$.

Vậy góc $\widehat{SAH} = 60^0$.

- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng
- A. 45^0 . B. 30^0 . C. 60^0 . D. 90^0 .

Lời giải



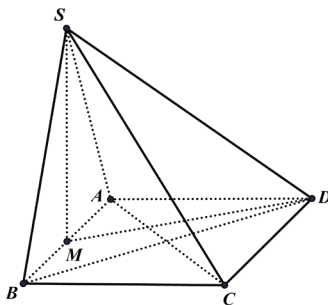
$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC; (ABCD)}) = \widehat{SCA}$$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{3a^2 + 3a^2} = a\sqrt{6}$$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$$

$$\Delta SAC \text{ vuông tại } A \Rightarrow \tan \widehat{SCA} = \frac{AS}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{SCA} = 30^\circ.$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ gọi M là trung điểm cạnh AB . Biết đáy là hình vuông cạnh bằng a , $SM \perp (ABCD)$, tam giác SAB đều (minh họa như hình vẽ).



Kí hiệu φ góc giữa SD và $(ABCD)$, khi đó $\tan \varphi$ bằng

A. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

B. $\frac{\sqrt{15}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{15}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

Vì tam giác SAB đều nên M là trung điểm của AB và $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $\varphi = (\widehat{SD; (ABCD)}) = (\widehat{SD; DM}) = \widehat{SDM}$, $MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = a\frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\text{Mặt khác, } \tan \widehat{SDM} = \frac{SM}{MD} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 10: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $B'B = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{3}$. Góc giữa $C'A$ và mp (ABC) bằng

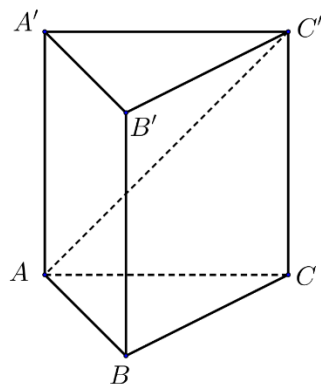
A. 60° .

B. 90° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải

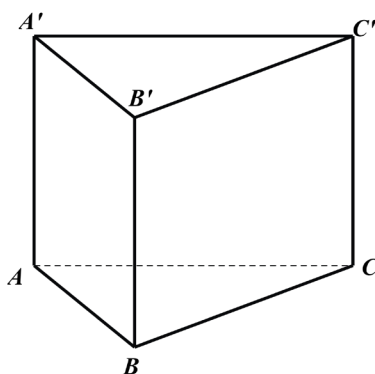


Ta có $B'B = a \Rightarrow CC' = a$ và $AC = a\sqrt{3}$

Góc giữa $C'A$ và mp (ABC) bằng góc đường thẳng $C'A$ và CA bằng góc $C'AC$

$$\tan \widehat{C'AC} = \frac{C'C}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{C'AC} = 30^\circ.$$

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ biết tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I là trung điểm của $A'B'$. Tính góc giữa đường thẳng CI và mặt phẳng (ABC) .



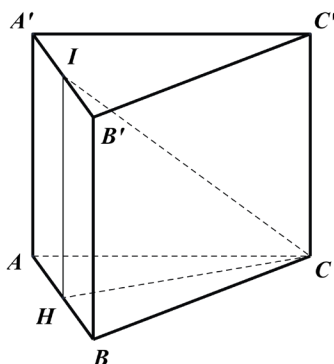
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải



Gọi α là góc giữa đường thẳng CI và mặt phẳng (ABC)

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (ABC) , suy ra H là trung điểm của AB .

Khi đó $\alpha = (CH, CI) = \widehat{ICH}$.

Xét tam giác IHC vuông tại H , có:

$$IH = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}, CH = \sqrt{BH^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a\sqrt{2})^2} = \frac{3a}{2}$$

$$\tan ICH = \frac{IH}{CH} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}. \text{ Vậy } \alpha = (CH, CI) = \widehat{ICH} = 30^\circ.$$

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, có đáy $ABCD$ là hình vuông, tam giác SAB vuông tại S , $SA = a, SB = a\sqrt{3}$. Giá trị tan của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là

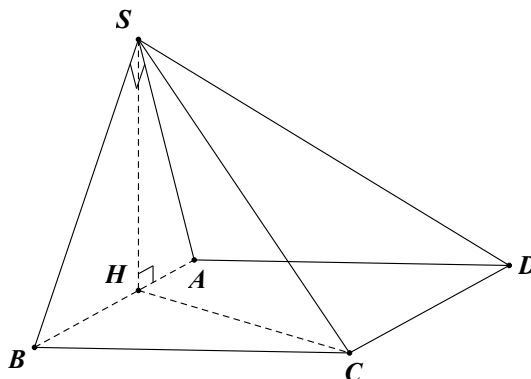
A. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

C. $\frac{\sqrt{51}}{17}$.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải



Kẻ $SH \perp AB$ tại H , suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Khi đó $(SC, (ABCD)) = (\widehat{SC, HC}) = \widehat{SCH}$.

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{SA^2 + SB^2} = 2a; HB = \frac{SB^2}{BA} = \frac{3a^2}{2a} = \frac{3}{2}a;$$

$$HC = \sqrt{HB^2 + BC^2} = \frac{5}{2}a; SH = \frac{SA \cdot SB}{AB} = \frac{a \cdot a\sqrt{3}}{2a} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Vậy } \tan \widehat{SCH} = \frac{SH}{HC} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{5a}{2} = \frac{\sqrt{3}}{5}.$$

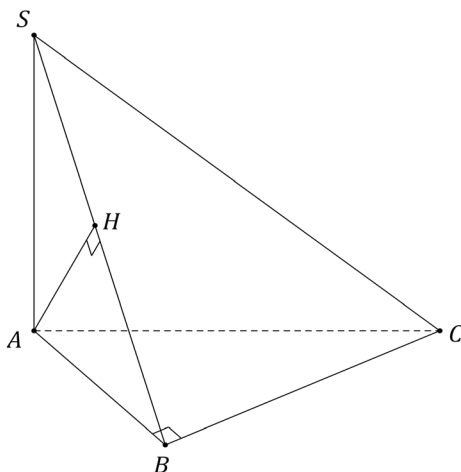
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$.

- a) Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) là C .
- b) Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (SBC) là B .
- c) Hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mặt phẳng (ABC) là ΔABC .
- d) Hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mặt phẳng (ABC) có diện tích bằng $\frac{a^2}{2}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
--------	--------	---------	--------



a) Sai

Do SA vuông góc với mặt đáy nên hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) là A suy ra mệnh đề sai.

b) Sai

$$\text{Vì } \begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$).

$$\text{Vì } BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH.$$

Nên $AH \perp (SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra mệnh đề sai.

c) Đúng

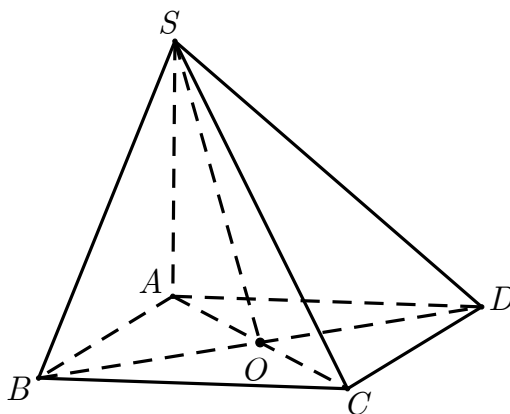
Do SA vuông góc với mặt đáy nên hình chiếu vuông góc của ΔSBC lên mặt phẳng (ABC) là ΔABC suy ra mệnh đề đúng.

d) Sai

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông ở } B \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{1}{2} a\sqrt{3} \cdot a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \text{ suy ra mệnh đề sai.}$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. SA vuông góc với $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$ (tham khảo hình vẽ).



- a) Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SOA} .
 b) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .
 c) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) bằng 60° .
 d) Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) . Ta có $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SO và $(ABCD)$ là \widehat{SOA} .

b) Đúng

Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa SD và $(ABCD)$ là \widehat{SDA} .

Tam giác SAD vuông cân tại A nên $\widehat{SDA} = 45^\circ$.

Vậy góc giữa SD và $(ABCD)$ bằng 45° .

c) Sai

Ta có $AB \perp (SAD)$ nên góc giữa SB và (SAD) là \widehat{BSA} .

Tam giác SAB vuông tại A có: $\tan \widehat{BSA} = \frac{AB}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{BSA} = 30^\circ$.

Vậy góc giữa SB và (SAD) bằng 30° .

d) Đúng

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

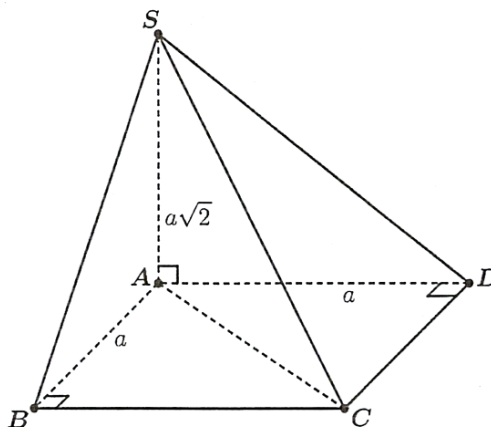
Suy ra góc giữa SC và (SAB) là góc $\widehat{CSB} = \alpha$.

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$

Tam giác SBC vuông tại B có: $\tan \alpha = \frac{BC}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

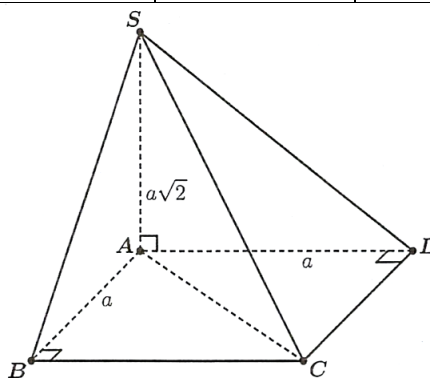
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$ như hình vẽ.



- a) Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 90° .
- b) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .
- c) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .
- d) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30° .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------



a) Đúng

Ta có: $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 90° .

b) Sai

Hình chiếu vuông góc của SB lên mặt phẳng $(ABCD)$ là AB . Vì vậy

$$(SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}.$$

Tam giác SAB vuông tại A có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SBA} \approx 54,74^\circ$

Vậy $(SB, (ABCD)) = \widehat{SBA} \approx 54,75^\circ$.

c) Đúng

Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên

$(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \widehat{SCA} = 45^\circ$ (do tam giác SAC vuông cân có $SA = AC = a\sqrt{2}$).

d) Đúng

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (SAB)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra SB là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAB) .

Do vậy $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{CSB}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại B có:

$\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{CSB} = 30^\circ$.

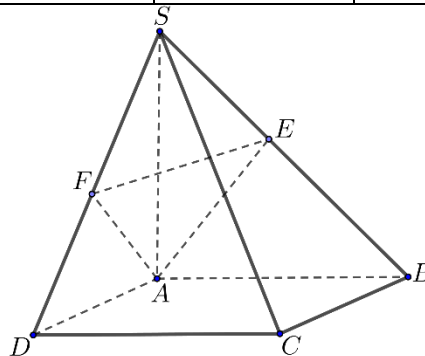
Vậy $(SC, (SAB)) = \widehat{CSB} = 30^\circ$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Khi đó:

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng (SBC) bằng 90° .		
b)	Góc giữa đường thẳng AF và mặt phẳng (SCD) bằng 60° .		
c)	Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° .		
d)	Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AEF) bằng 30° .		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



a) Đúng

Góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng (SBC) bằng 90° .

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \quad (1)$

Lại có $AE \perp SB \quad (2)$

Từ (1) & (2) ta có $\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp SB \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow [\widehat{AE; (SBC)}] = 90^\circ$

b) Sai

Góc giữa đường thẳng AF và mặt phẳng (SCD) bằng 60° .

Chứng minh tương tự câu (a) ta có $AF \perp (SCD) \Rightarrow [\widehat{AF; (SCD)}] = 90^\circ$

c) Đúng

Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° .

Ta có $AE \perp (SBC)$ tại E . Nên $(SA; (SBC)) = (SA; SE)$.

Mà $\triangle ASE$ vuông tại $E \Rightarrow \widehat{ASE} < 90^\circ \Rightarrow (SA; (SBC)) = (SA; SE) = \widehat{ASE}$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A : $SA = SB = a \Rightarrow \triangle SAB$ vuông cân $\Rightarrow \widehat{ASB} = 45^\circ$ hay $\widehat{ASE} = 45^\circ$.

d) Sai

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AEF) bằng 30° .

Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AE \quad (1).$

Lại có $AE \perp SB \quad (2)$ (theo giả thiết).

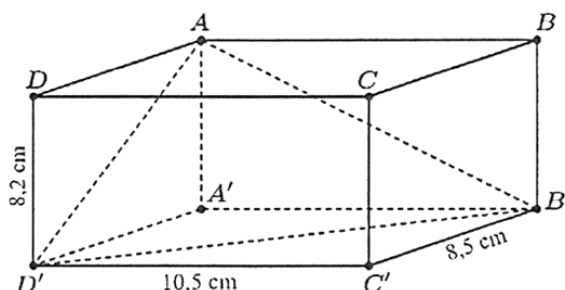
Từ (1) & (2) ta có $\begin{cases} AE \perp BC \\ AE \perp SB \end{cases} \Rightarrow AE \perp (SBC) \Rightarrow AE \perp SC \quad (3)$

Tương tự ta chứng minh được $SC \perp AF \quad (4)$

Từ (3) & (4) suy ra $SC \perp (AEF) \Rightarrow [\widehat{SC; (AEF)}] = 90^\circ$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một hộp phấn không bụi có dạng hình hộp chữ nhật, chiều cao hộp phấn bằng $8,2\text{ cm}$ và đáy của nó có hai kích thước là $8,5\text{ cm}; 10,5\text{ cm}$ (xem hình vẽ sau). Tìm góc phẳng nhị diện $[A, B'D', A']$ (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



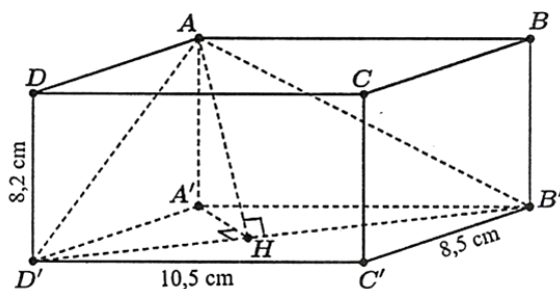
Lời giải

Trả lời: 51,1

Trong $(A'B'C'D')$, kẻ $A'H \perp B'D'$ tại H .

Ta có: $\begin{cases} B'D' \perp A'H \\ B'D' \perp AA' \text{ (do } AA' \perp (A'B'C'D')) \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (AA'H) \Rightarrow B'D' \perp AH.$

Do đó $\widehat{AHA'}$ là góc phẳng nhị diện $[A, B'D', A']$.



Tam giác $A'B'D'$ vuông tại A' có đường cao $A'H$ nên

$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'D'^2} \Rightarrow A'H = \frac{A'B' \cdot A'D'}{\sqrt{A'B'^2 + A'D'^2}} = \frac{357}{2\sqrt{730}}.$$

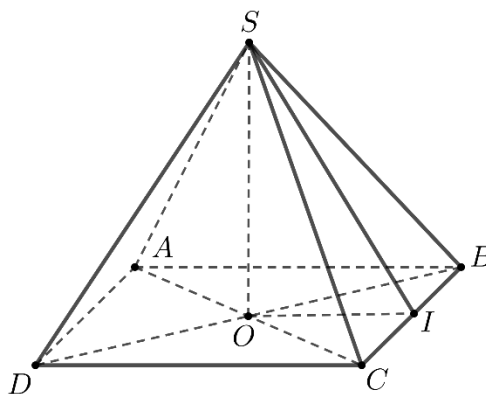
Tam giác AHA' vuông tại A' có:

$$\tan \widehat{AHA'} = \frac{AA'}{A'H} = \frac{8,2}{\frac{357}{2\sqrt{730}}} \Rightarrow \widehat{AHA'} \approx 51,14^\circ$$

Câu 2: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng đáy? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 74,5



Ta có: $SO \perp (ABCD)$ tại O và SB cắt $(ABCD)$ tại B

$\Rightarrow OB$ là hình chiếu của SB trên $(ABCD)$

$\Rightarrow (SB, (ABCD)) = (SB, OB) = \widehat{SBO}$

Ta có: $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$

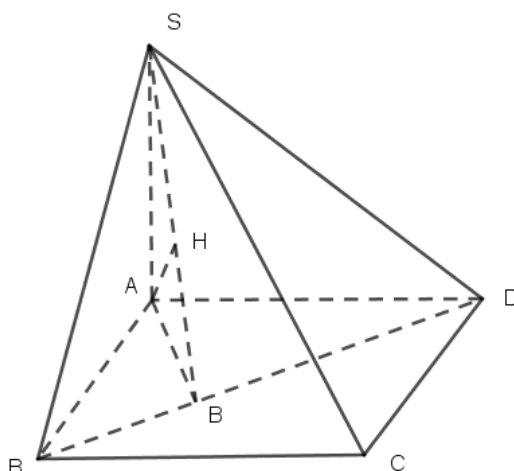
Xét $\triangle SOB$ vuông tại O : $\cos \widehat{SBO} = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\sqrt{7}a} = \frac{\sqrt{14}}{14} \Rightarrow \widehat{SBO} \approx 74,5^\circ$

Vậy $(SB, (ABCD)) \approx 74,5^\circ.$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Cho biết $SA = 3$, $AB = 2$, $AD = 3$. Gọi α là góc giữa SA và (SBD) , tính $\sin \alpha$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,49



Gọi I là hình chiếu của A trên $BD \Rightarrow AI \perp BD$

Mà $SA \perp BD$ (do SA vuông góc với mặt phẳng đáy) nên: $BD \perp (SAI)$

Gọi H là hình chiếu của A trên $SI \Rightarrow AH \perp SI$

Mặt khác $BD \perp (SAI) \Rightarrow BD \perp AH$

Từ đó suy ra $AH \perp (SBD) \Rightarrow H$ là hình chiếu vuông góc của A trên (SBD)

Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc giữa SA và SH

Khi đó: $\alpha = \widehat{ASH} = \widehat{ASI}$

Xét tam giác ABD vuông tại A : $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow$

$$AI = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{2 \cdot 3}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{6\sqrt{13}}{13}$$

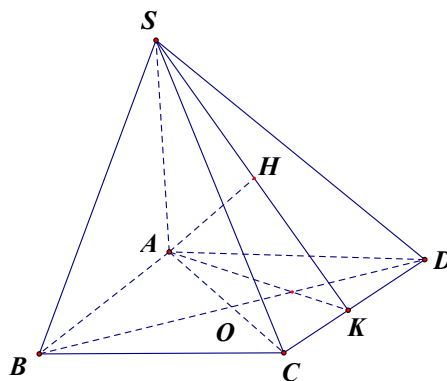
Xét tam giác SAI vuông tại A : $SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{3^2 + \left(\frac{6\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{3\sqrt{221}}{13}$

$$\text{Khi đó: } \sin \alpha = \frac{AI}{SI} = \frac{\frac{6\sqrt{13}}{13}}{\frac{3\sqrt{221}}{13}} = \frac{2\sqrt{17}}{17} \approx 0,49.$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$, $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $AB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD) bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 60



+ Có $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên $\triangle ABC; \triangle ACD$ là các tam giác đều cạnh $2a$. Gọi K là trung điểm CD vì tam giác $\triangle ACD$ đều cạnh $CD = 2a \Rightarrow AK = a\sqrt{3}$

+ Từ giả thiết ta có $\begin{cases} AK \perp CD \\ SA \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAK)$. Trong tam giác vuông $\triangle SAK$ kẻ đường cao AH

+ Ta có $\begin{cases} AH \perp CD \\ AH \perp SK \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SCD) \Rightarrow SH$ là hình chiếu vuông góc của SA trên mặt phẳng (SCD)

\Rightarrow Góc $\widehat{ASH} = \widehat{ASK}$ là góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SCD)

+ Trong tam giác $\triangle SAK$ có $\tan \widehat{ASK} = \frac{AK}{SA} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{ASK} = \widehat{ASH} = 60^\circ$.

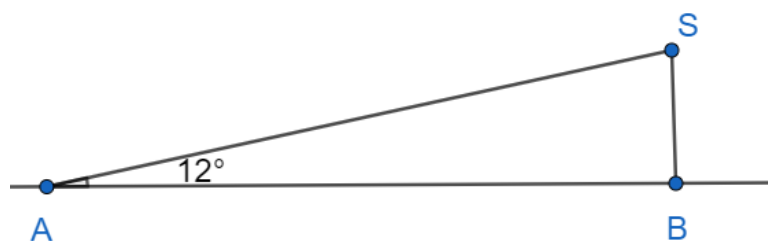
Câu 5: Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. Góc cất cánh của nó là góc giữa đường thẳng đó và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Máy bay cất cánh và bay thẳng với vận tốc 210km/h với góc cất cánh 12° . Sau 2 phút kể từ khi cất cánh, độ cao của máy bay so với mặt đất (phẳng, nằm ngang) là bao nhiêu mét? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 1455

+) Giả sử máy bay xuất phát tại điểm A , sau 2 phút bay vị trí của máy bay là điểm S . Hình chiếu vuông góc của điểm S trên mặt đất là điểm B .

Khi đó, góc cất cánh của máy bay là $\widehat{SAB} = 12^\circ$.

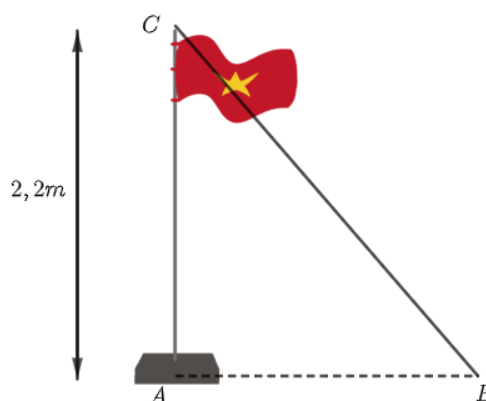


+) Sau 2 phút máy bay bay được quãng đường: $SA = 210 \cdot \frac{2}{60} = 7(km) = 7000(m)$

+) Vì tam giác SAB vuông tại B nên độ cao của máy bay so với mặt đất là:

$$SB = SA \cdot \sin A = 7000 \cdot \sin 12^\circ \approx 1455(m).$$

Câu 6: Một cây cột cờ cao 2,2 m ở sân trường được xây theo phương thẳng đứng so với mặt sân, người ta dùng một sợi dây cột từ đỉnh của cột cờ đến một điểm dưới sân và chiều dài của dây là 3 m. Giả sử dây được kéo thẳng và không co giãn, khi đó số đo góc (tính theo đơn vị độ) tạo bởi sợi dây và mặt sân là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 47

A là hình chiếu vuông góc của C lên mặt phẳng sân nên AB là hình chiếu vuông góc của CB lên mặt phẳng sân.

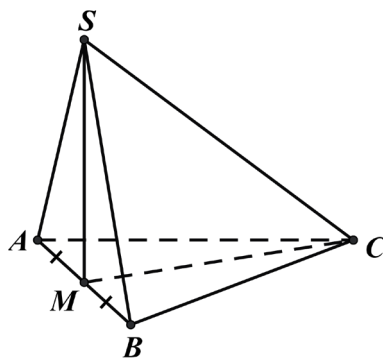
Khi đó góc giữa dây CB với mặt sân là góc \widehat{CBA} .

$$\sin \widehat{CBA} = \frac{CA}{CB} = \frac{2,2}{3} \text{ nên } \widehat{CBA} \approx 47^\circ.$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , gọi M là trung điểm AB . Biết $SM \perp (ABC)$ và tam giác SAB đều. Tính góc giữa SC và (ABC)

Lời giải



Vì $SM \perp (ABC)$ nên $(SC; (ABC)) = (SC; MC) = \widehat{SCM}$.

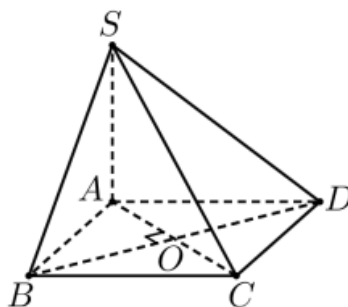
Đáy là tam giác vuông tại C nên $CM = \frac{1}{2}AB$.

Tam giác SAB đều nên $SM = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Xét $\triangle SMC$ vuông tại M : $\tan \widehat{SCM} = \frac{SM}{MC} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SCM} = 60^\circ$. Vậy $(SC; (ABC)) = 60^\circ$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC)

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC)$.

Do đó: SO là hình chiếu vuông góc của SD trên (SAC) .

Khi đó: Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng (SAC) bằng góc \widehat{DSO} .

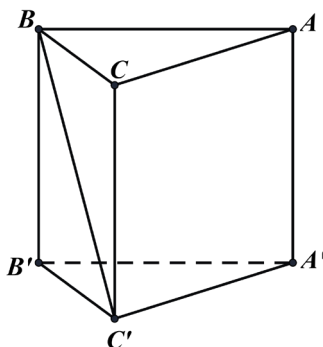
Đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $2a$ nên $BD = 2\sqrt{2}a \Rightarrow DO = \frac{1}{2}DB = \sqrt{2}a$.

Tam giác SAD vuông cân tại A nên $SD = 2a\sqrt{2}$.

Tam giác SOD vuông tại O nên $\sin \widehat{DSO} = \frac{DO}{SD} = \frac{\sqrt{2}a}{2\sqrt{2}a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{DSO} = 30^\circ$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $AA' = 2a$. Tính góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(A'B'C')$

Lời giải



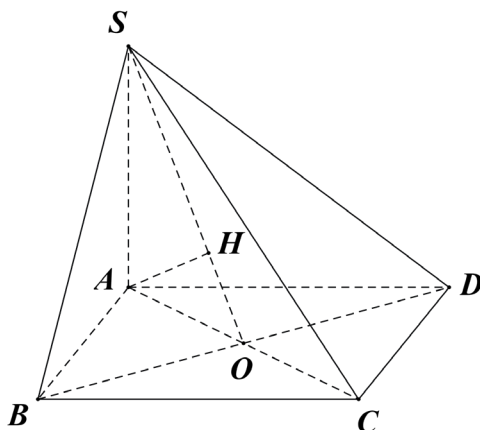
Ta có: $(BC';(A'B'C')) = (BC';B'C') = \widehat{BC'B'}$.

$B'C' = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a \Rightarrow B'C' = BB' = 2a$. Suy ra $\Delta BB'C'$ vuông cân tại B' .

Do đó $\widehat{BC'B'} = 45^\circ$. Vậy $(BC';(A'B'C')) = 45^\circ$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



Do $SA \perp BD, AC \perp BD \Rightarrow BD \perp (SAC)$.

Gọi H là hình chiếu của A trên SO . Khi đó $AH \perp SO, AH \perp BD \Rightarrow AH \perp (SBD)$.

Do đó hình chiếu của SA xuống (SBD) là SH .

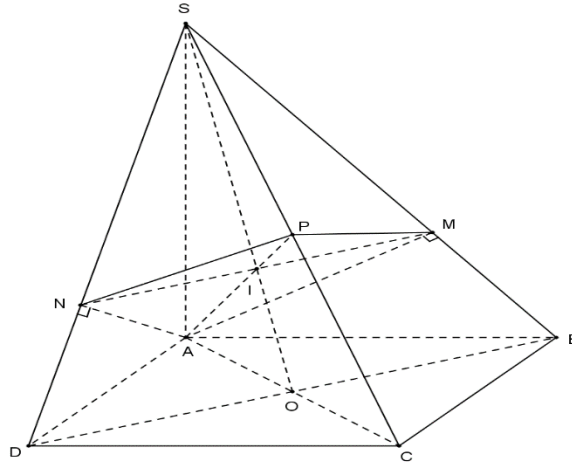
Vậy góc giữa SA và (SBD) là $\widehat{ASH} = \widehat{ASO}$.

Ta có ΔABC đều cạnh $2a \Rightarrow AO = a$

Xét ΔSAO có $\tan \widehat{ASO} = \frac{OA}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{ASO} = 30^\circ$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a ; $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M ; N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN)

Lời giải



Gọi $P = SC \cap (AMN)$; $O = AC \cap BD \Rightarrow MN$; AP ; SO đồng quy tại I

Ta có: $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$

Mà $AM \perp SB$ nên $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

$\begin{cases} SA \perp CD \\ AD \perp CD \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp AN$

Mà $AN \perp SD$ nên $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$

Do đó $SC \perp (AMN) \Rightarrow AP \perp SC$ và PM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (AMN) hay PM là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (AMN)

$\Rightarrow \widehat{(SB; (AMN))} = \widehat{(SB; PM)} = \widehat{SMP}$ (do tam giác SMP vuông tại P)

Từ gt \Rightarrow Tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow P$ là trung điểm SC

$\Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác SAC

Lại có: $\Delta SAB = \Delta SAD \Rightarrow SA = SB$ và $AM = AN \Rightarrow \Delta SAM = \Delta SAN$

$\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD} \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow SM = \frac{2}{3}SB = \frac{2}{3}\sqrt{SA^2 + AB^2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

Mặt khác $SP = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}\sqrt{SA^2 + AC^2} = a$

Do đó $\sin \widehat{SMP} = \frac{SP}{SM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{(SB; (AMN))} = \widehat{SMP} = 60^\circ$.

BÀI: HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC
ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây sai?

- A. $(SBC) \perp (SAB)$. B. $(SAB) \perp (ABCD)$. C. $(SAC) \perp (ABCD)$. D. $(SAC) \perp (SAD)$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề dưới đây

- A. $(ABCD) \perp (SBD)$. B. $(SAB) \perp (ABCD)$. C. $(SAC) \perp (SBD)$. D. $(SAC) \perp (ABCD)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC , H là hình chiếu của I lên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(BIH) \perp (SBC)$. B. $(SAC) \perp (SAB)$. C. $(SBC) \perp (ABC)$. D. $(SAC) \perp (SBC)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD) ?

- A. (SBC) . B. (SAD) . C. (SCD) . D. (SAC) .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SC = a$, $SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Góc phẳng nhị diện $[S, AB, C]$ là \widehat{SBC} . B. Góc phẳng nhị diện $[D, SA, C]$ là \widehat{DAC} .
C. Góc phẳng nhị diện $[S, AC, B]$ là \widehat{SOB} . D. Góc phẳng nhị diện $[D, SA, B]$ là \widehat{BSD} .

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ như hình vẽ. Biết $SA \perp (ABC)$, H là điểm thuộc đoạn thẳng BC . Xác định góc nhị diện $[H, SA, B]$.

- A. \widehat{HAB} . B. \widehat{HBA} . C. \widehat{CHA} . D. \widehat{CAH} .

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại O , $SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Xác định góc nhị diện $[M, SO, D]$.

- A. \widehat{MOD} . B. \widehat{SOM} . C. \widehat{SOD} . D. \widehat{MOA} .

- Câu 9:** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc nhị diện $[A, BC, O]$
- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .
- Câu 10:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có \tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng
- A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 11:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC = a, AC = 2a, A'A = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$.
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .
- Câu 12:** Cho hình lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng ABC là trọng tâm G , hình lăng trụ có cạnh bằng $6a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{21}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng
- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = 2a, AD = a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD .
- a) $SH \perp (ABCD)$.
- b) Góc giữa SC và $(ABCD)$ là \widehat{SCA} .
- c) Góc giữa SB và CD là 90° .
- d) Góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$ bằng 60°

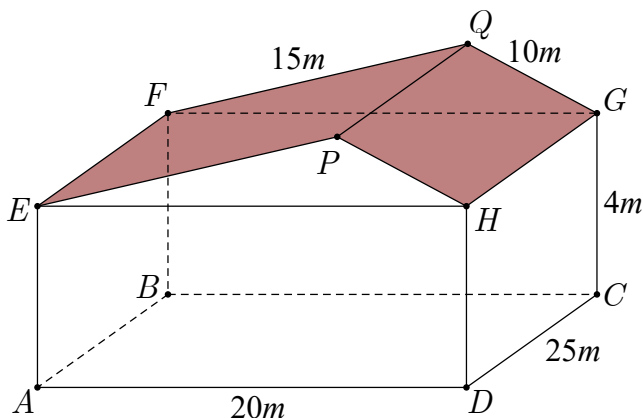
- Câu 2:** Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB = AC = a, AD = a\sqrt{3}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$AC \perp (ABD)$		
b)	$(CD, (ABD)) = 30^\circ$		
c)	Góc phẳng nhị diện $[A, BC, D] \approx 87,79^\circ$		
d)	Góc phẳng nhị diện $[C, AB, D] = 90^\circ$		

- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $a, SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Số đo của góc nhị diện $[S, AB, D]$ bằng số đo góc SDA .		
b)	Số đo của góc nhị diện $[S, AD, B]$ bằng 90° .		
c)	Số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng số đo của góc SCO .		
d)	Số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135° .		

Câu 4: Hình vẽ bên dưới mô tả một nhà xưởng có bốn bức tường và hai mái nhà đều là các hình chữ nhật với các kích thước ghi trên hình.



- a) Bức tường $(ABFE)$ vuông góc với mặt đất $(ABCD)$.
- b) Góc tạo bởi hai bức tường $(ADHE)$ và $(BCGF)$ bằng 90° .
- c) Góc dốc giữa mái nhà $(EFQP)$ so với mặt đất $(ABCD)$ có số đo xấp xỉ bằng 29° (làm tròn đến hàng đơn vị).
- d) Góc nhị diện tạo bởi hai mái nhà có số đo xấp xỉ bằng $104,5^\circ$ (làm tròn đến một chữ số thập phân).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$, $SA = AB = 1$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy một góc bằng bao nhiêu độ?

Câu 2: Cho OA, OB, OC đôi một vuông góc và không đồng phẳng. Biết $OA = OB = a\sqrt{3}$, $OC = a$. Tìm số đo độ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (OAB) . (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 3: Trong cửa sổ ở hình bên, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính $D = 100$ cm, bản lề được gắn ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d (cm); khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tìm khoảng cách d lớn nhất để góc nhị diện tạo bởi cánh và khung cửa không vượt quá 60° .



Câu 4: Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời có các kích thước như hình dưới đây. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC .

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại $A, \widehat{ABC} = 30^\circ, AC = a, SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tính tan góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$.

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB)

----- HẾT -----

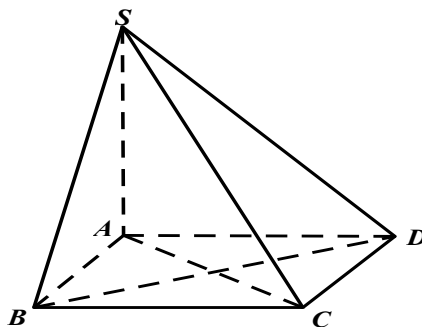
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** $(SBC) \perp (SAB)$. **B.** $(SAB) \perp (ABCD)$. **C.** $(SAC) \perp (ABCD)$. **D.** $(SAC) \perp (SAD)$.

Lời giải



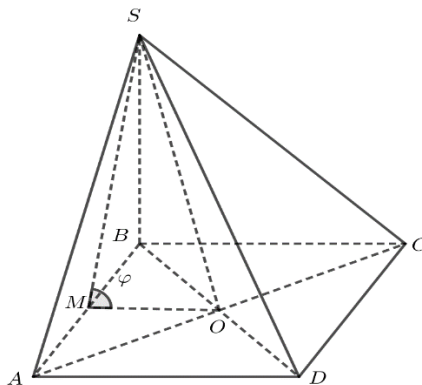
Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$.

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$ và $(SAC) \perp (ABCD)$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây

- A.** $(ABCD) \perp (SBD)$. **B.** $(SAB) \perp (ABCD)$. **C.** $(SAC) \perp (SBD)$. **D.** $(SAC) \perp (ABCD)$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB . Suy ra $\begin{cases} MO \perp AB \\ SM \perp AB \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SAB), (ABCD))} = \widehat{SMO} = \varphi$.

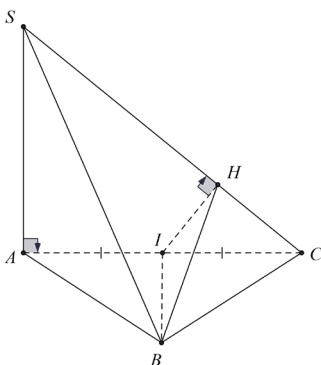
Tam giác SMO vuông tại O nên $\varphi \neq 90^\circ$.

Do đó $(ABCD)$ không vuông góc với mặt phẳng (SAB) .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC , H là hình chiếu của I lên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $(BIH) \perp (SBC)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(SBC) \perp (ABC)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

Lời giải



Ta có:
$$\begin{cases} BI \perp AC \text{ (gt)} \\ BI \perp SA \text{ (} SA \perp (ABC) \text{)} \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC) \Rightarrow SC \Rightarrow SC \perp BI \text{ (1)}.$$

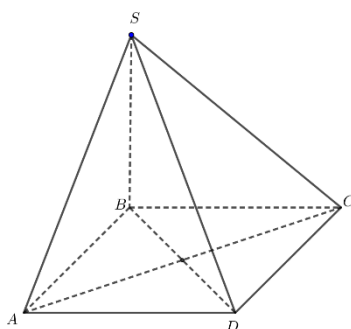
Theo giả thiết: $SC \perp IH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BIH)$. Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BIH) \perp (SBC)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD) ?

- A. (SBC) . B. (SAD) . C. (SCD) . **D. (SAC) .**

Lời giải

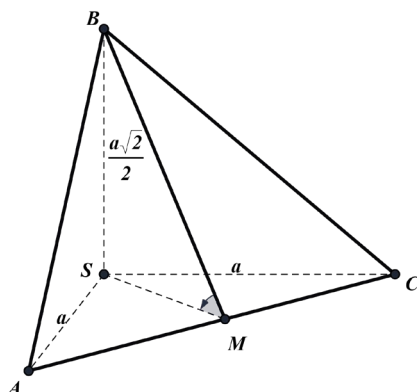


Ta có
$$\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD).$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SC = a$, $SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

- A. 30° . **B. 45° .** C. 60° . D. 90° .

Lời giải



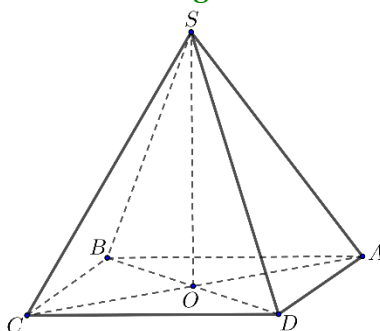
Gọi M là trung điểm AC nên $SM \perp AC; BM \perp AC$ suy ra góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng $(\widehat{SM; BM})$ bằng \widehat{SMB}

Tính được $AC = a\sqrt{2}; SM = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ suy ra tam giác SBM vuông cân tại S nên góc $\widehat{SMB} = 45^\circ$.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- A.** Góc phẳng nhị diện $[S, AB, C]$ là \widehat{SBC} . **B.** Góc phẳng nhị diện $[D, SA, C]$ là \widehat{DAC} .
C. Góc phẳng nhị diện $[S, AC, B]$ là \widehat{SOB} . **D.** Góc phẳng nhị diện $[D, SA, B]$ là \widehat{BSD} .

Lời giải



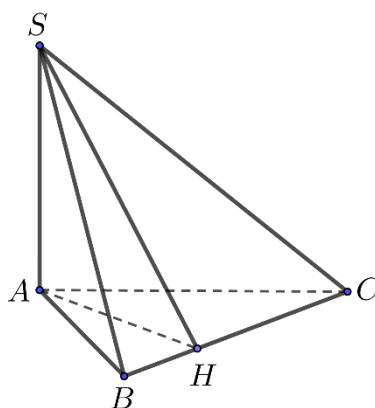
Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AC, SO \perp BD$.

Ta có $SO \perp AC$ và $BO \perp AC$, suy ra \widehat{SOB} là góc phẳng nhị diện $[S, AC, B]$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ như hình vẽ. Biết $SA \perp (ABC)$, H là điểm thuộc đoạn thẳng BC . Xác định góc nhị diện $[H, SA, B]$.

- A.** \widehat{HAB} . **B.** \widehat{HBA} . **C.** \widehat{CHA} . **D.** \widehat{CAH} .

Lời giải

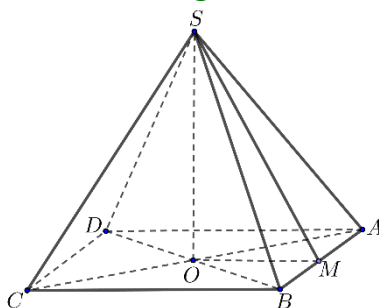


$$\text{Vì } SA \perp (ABC) \Rightarrow \begin{cases} AB \perp SA \\ AH \perp SA \end{cases} \Rightarrow (H, SA, B) = \widehat{HAB}$$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại O , $SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Xác định góc nhị diện $[M, SO, D]$.

- A.** \widehat{MOD} . **B.** \widehat{SOM} . **C.** \widehat{SOD} . **D.** \widehat{MOA} .

Lời giải



Vì $SO \perp (ABCD)$

Nên OM, OD cùng vuông góc với SO

Do đó \widehat{MOD} là một góc phẳng của nhị diện $[M, SO, D]$.

Câu 9: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc nhị diện $[A, BC, O]$

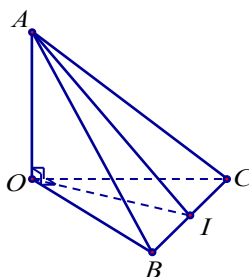
A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Mà $OA \perp BC$ nên $AI \perp BC$.

Ta có:
$$\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow [A, BC, O] = \widehat{OIA}.$$

Ta có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan \widehat{OIA} = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \widehat{OIA} = 30^\circ$.

Vậy $[A, BC, O] = 30^\circ$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có \tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng

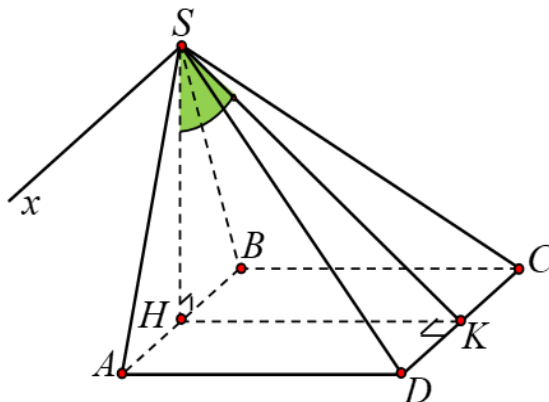
A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB

Ta có: H là trung điểm AB thì $SH \perp AB$ (vì tam giác SAB đều)

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (ABCD) = AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD)$$

$$\text{Mặt khác } \begin{cases} AB \parallel CD \\ S \in (SAB) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx \parallel AB \parallel CD$$

$$\text{Mà } \begin{cases} (SAB) \cap (SCD) = Sx \\ (SAB) \supset SH \perp Sx \\ (SCD) \supset SK \perp Sx \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SAB), (SCD))} = \widehat{HSK}, \text{ với } K \text{ là trung điểm } CD.$$

$$\text{Xét tam giác } HSK \text{ vuông tại } H \text{ có: } \tan \widehat{HSK} = \frac{HK}{SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan \widehat{((SAB), (SCD))} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Câu 11: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC = a$, $AC = 2a$, $A'A = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$.

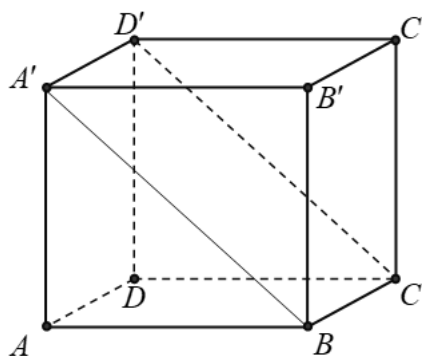
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải



$$\text{Ta có: } ABCD.A'B'C'D' \text{ là hình hộp chữ nhật } \Rightarrow \begin{cases} AB \perp BC \\ BA' \perp BC \\ (ABCD) \cap (A'D'CB) = BC \end{cases}$$

Góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABA'}$.

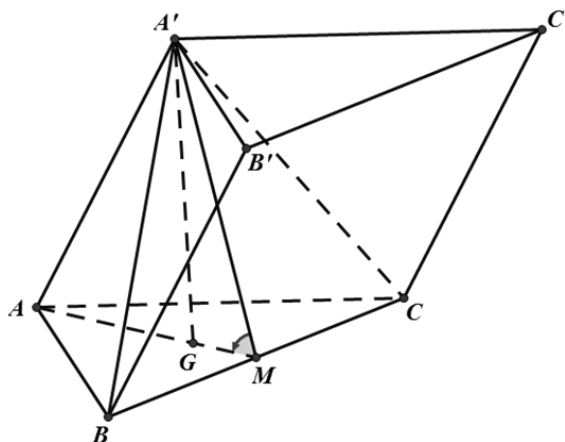
$$\tan \widehat{A'BA} = \frac{A'A}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{AC^2 - BC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{A'BA} = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Câu 12: Cho hình lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng ABC là trọng tâm G , hình lăng trụ có cạnh bằng $6a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{21}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng

- A.** 60° . **B.** 30° . **C.** 90° . **D.** 45° .

Lời giải



Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

Tam giác ABC đều nên ta có: $AM \perp BC$ (1).

Hình chiếu của A' là trọng tâm G nên $A'G \perp (ABC) \Rightarrow A'G \perp BC$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $BC \perp (A'GM) \Rightarrow BC \perp A'M$.

Ta lại có $(ABC) \cap (A'BC) = BC \Rightarrow \widehat{((A'BC); (ABC))} = \widehat{(GM; A'M)} = \widehat{A'MG} = \varphi$

Ta có: $GM = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} 6a \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$; $AG = \frac{2}{3} GM = 2a\sqrt{3}$

Tam giác $A'AG$ vuông tại G nên: $A'G = \sqrt{AA'^2 - AG^2} = \sqrt{(a\sqrt{21})^2 - (2a\sqrt{3})^2} = 3a$

Ta có: $\tan \varphi = \frac{A'G}{GM} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Suy ra $\varphi = 60^\circ$.

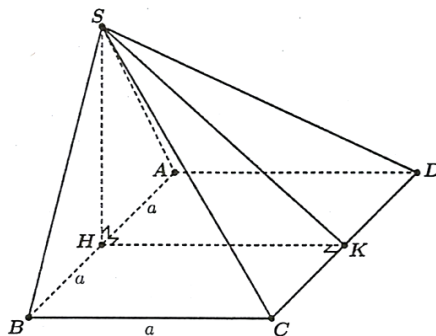
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = 2a, AD = a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD .

- a)** $SH \perp (ABCD)$.
b) Góc giữa SC và $(ABCD)$ là \widehat{SCA} .
c) Góc giữa SB và CD là 90° .
d) Góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$ bằng 60°

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
----------------	---------------	---------------	----------------



a) Đúng

Gọi H lần lượt là trung điểm AB . Ta lại có tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$. Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD)$, suy ra $SH \perp (ABCD)$. Suy ra mệnh đề trên **đúng**.

b) Sai

Ta có $SC \cap (ABCD) = \{C\}$ và $SH \perp (ABCD)$ suy ra góc giữa SC và $(ABCD)$ là \widehat{SCH} . Suy ra mệnh đề trên **sai**.

c) Sai

Ta có $AB \parallel CD$ nên $(SB; CD) = (SB; AB) = \widehat{SBA}$. Mà tam giác SAB đều nên $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Suy ra mệnh đề trên **sai**.

d) Đúng

Vì H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Suy ra $SH \perp (ABCD)$ và $HK \perp CD$.

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp SH \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SCD) \cap (ACD) = CD \\ HK \perp CD \\ SK \perp CD \end{cases} \Rightarrow [S, CD, A] = \widehat{SKH} = \varphi.$$

$$\text{Tam giác } SAB \text{ đều cạnh } 2a \text{ nên đường cao } SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Ta có $HK = BC = a$ (tính chất đường trung bình của hình chữ nhật).

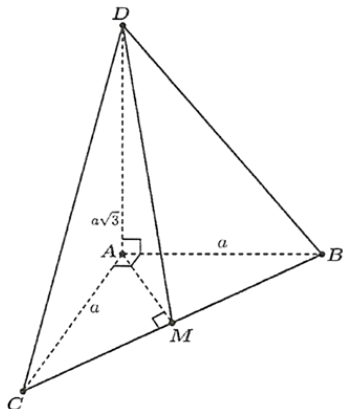
$$\text{Do đó } \tan \widehat{SKH} = \frac{SH}{HK} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^\circ. \text{ Suy ra mệnh đề trên } \mathbf{đúng}.$$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB = AC = a, AD = a\sqrt{3}$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	$AC \perp (ABD)$		
b)	$(CD, (ABD)) = 30^\circ$		
c)	Góc phẳng nhị diện $[A, BC, D] \approx 87,79^\circ$		
d)	Góc phẳng nhị diện $[C, AB, D] = 90^\circ$		

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Đúng

$$AC \perp (ABD)$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp AD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABD).$$

b) Đúng

$$(CD, (ABD)) = 30^\circ$$

Khi đó AD là hình chiếu của CD trên (ABD) .

$$\text{Ta có: } (CD, (ABD)) = (CD, AD) = \widehat{CDA}.$$

$$\text{Tam giác } ACD \text{ vuông tại } A \text{ có: } \tan \widehat{CDA} = \frac{AC}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{CDA} = 30^\circ.$$

$$\text{Vậy } (CD, (ABD)) = \widehat{CDA} = 30^\circ.$$

c) Sai

$$\text{Góc phẳng nhị diện } [A, BC, D] \approx 87,79^\circ$$

Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$ (do $AB = AC$).

$$\text{Vì } \begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases} \Rightarrow AD \perp (ABC) \Rightarrow AD \perp BC.$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AD \end{cases} \Rightarrow BC \perp (ADM) \Rightarrow BC \perp DM.$$

Khi đó: $(AM, DM) = \widehat{AMD}$ là góc phẳng nhị diện $[A, BC, D]$.

$$\text{Tam giác } ABC \text{ vuông cân tại } A \text{ nên đường cao } AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } ADM \text{ vuông tại } A \text{ có: } \tan \widehat{AMD} = \frac{AD}{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6} \Rightarrow \widehat{AMD} \approx 67,79^\circ$$

d) Đúng

$$\text{Góc phẳng nhị diện } [C, AB, D] = 90^\circ$$

Vì $AB \perp AC, AB \perp AD$

Nên $(AC, AD) = \widehat{CAD}$ là góc phẳng nhị diện $[C, AB, D]$ và $\widehat{CAD} = 90^\circ$.

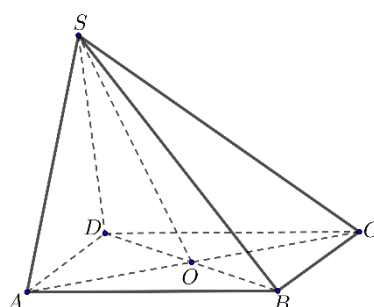
Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$ và

$$SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Số đo của góc nhị diện $[S, AB, D]$ bằng số đo góc SDA .		
b)	Số đo của góc nhị diện $[S, AD, B]$ bằng 90° .		
c)	Số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng số đo của góc SCO .		
d)	Số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135° .		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
--------	---------	--------	---------



a) Sai

Số đo của góc nhị diện $[S, AB, D]$ bằng số đo góc SDA .

Ta có: $SA \perp AB, AD \perp AB$.

Do đó: góc phẳng nhị diện $[S, AB, D]$ bằng góc SAD .

b) Đúng

Số đo của góc nhị diện $[S, AD, B]$ bằng 90° .

Ta có: $SA \perp AD, AB \perp AD$.

Do đó, số đo của góc nhị diện $[S, AD, B]$ bằng số đo góc $\widehat{SAB} = 90^\circ$.

c) Sai

Số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng số đo của góc SCO .

Gọi O là giao điểm của AC và BD , khi đó $CO \perp BD, SO \perp BD$.

Do đó, góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$ bằng góc SOC .

d) Đúng

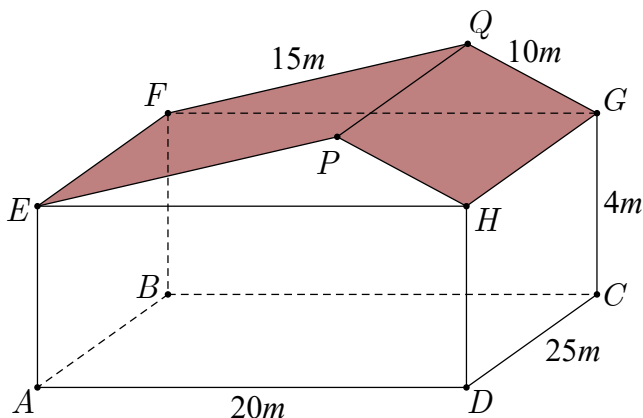
Số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135° .

Xét $\triangle SAO$, có $AO = \frac{a\sqrt{2}}{2} = SA$ và góc SAO là góc vuông

Nên $\triangle SAO$ là tam giác vuông cân tại A , suy ra $\widehat{SOA} = 45^\circ; \widehat{SOC} = 135^\circ$.

Vậy số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135° .

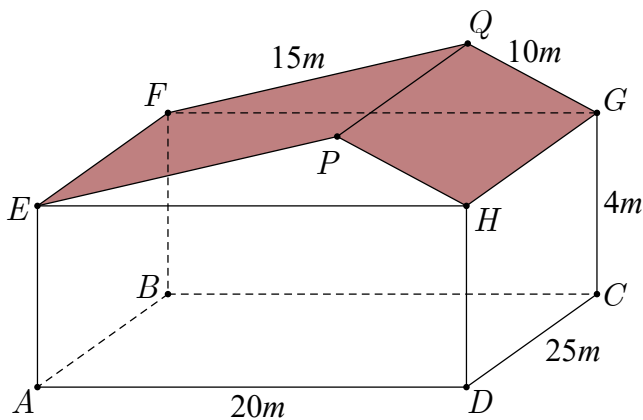
Câu 4: Hình vẽ bên dưới mô tả một nhà xưởng có bốn bức tường và hai mái nhà đều là các hình chữ nhật với các kích thước ghi trên hình.



- a) Bức tường $(ABFE)$ vuông góc với mặt đất $(ABCD)$.
 b) Góc tạo bởi hai bức tường $(ADHE)$ và $(BCGF)$ bằng 90° .
 c) Góc dốc giữa mái nhà $(EFQP)$ so với mặt đất $(ABCD)$ có số đo xấp xỉ bằng 29° (làm tròn đến hàng đơn vị).
 d) Góc nhị diện tạo bởi hai mái nhà có số đo xấp xỉ bằng $104,5^\circ$ (làm tròn đến một chữ số thập phân).

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------



a) Đúng.

Các bức tường và mặt đất vuông góc với nhau.

b) Sai.

Hai bức tường $(ADHE)$ và $(BCGF)$ đối diện nhau nên song song với nhau. Do đó góc giữa hai bức tường này bằng 0° . Vậy b) sai.

c) Đúng.

Góc dốc giữa mái nhà $(EFQP)$ so với mặt đất $(ABCD)$ là góc giữa hai mặt phẳng $(EFQP)$ và $(EFGH)$. Đó là góc \widehat{PEH} .

$$\text{Trong tam giác } PEH, \text{ ta có: } \cos \widehat{PEH} = \frac{EP^2 + EH^2 - PH^2}{2 \cdot EP \cdot EH} = \frac{15^2 + 20^2 - 10^2}{2 \cdot 15 \cdot 20} = \frac{7}{8}.$$

Suy ra $\widehat{PEH} \approx 29^\circ$. Do đó, góc dốc giữa mái nhà $(EFQP)$ so với mặt đất $(ABCD)$ có số đo xấp xỉ bằng 29° . Vậy c) đúng.

d) Đúng.

Góc nhị diện tạo bởi hai mái nhà là góc nhị diện có cạnh là đường thẳng PQ , hai mặt lần lượt là hai nửa mặt phẳng $(PQFE)$ và $(PQGH)$.

Do PQ vuông góc với hai đường thẳng PE và PH nên góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mái nhà là góc \widehat{EPH} .

$$\text{Trong tam giác } PEH, \text{ ta có: } \cos \widehat{EPH} = \frac{PE^2 + PH^2 - EH^2}{2 \cdot PE \cdot PH} = \frac{15^2 + 10^2 - 20^2}{2 \cdot 15 \cdot 10} = -\frac{1}{4}.$$

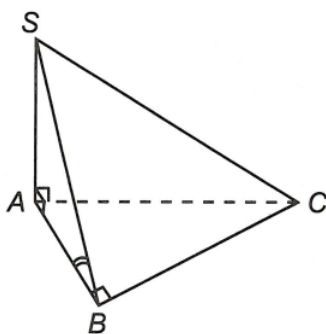
Suy ra $\widehat{EPH} \approx 104,5^\circ$. Do đó, góc phẳng nhị diện tạo bởi hai mái nhà có số đo xấp xỉ bằng $104,5^\circ$. Vậy d) đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$, $SA = AB = 1$. Mặt bên (SBC) hợp với mặt đáy một góc bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Trả lời: 45



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$ mà $AB \perp BC$.

Suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow SB \perp BC$.

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ AB \perp BC \\ SB \perp BC \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBC), (ABC))} = \widehat{SBA}.$$

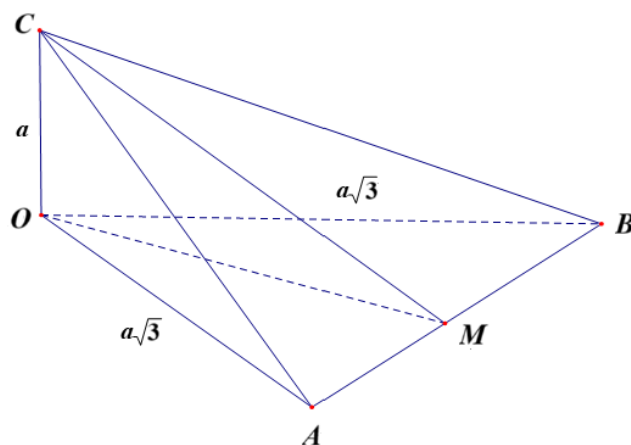
$$\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \widehat{SBA} = 45^\circ.$$

Vậy góc giữa (SBC) và mặt đáy (ABC) bằng 45° .

Câu 2: Cho OA, OB, OC đôi một vuông góc và không đồng phẳng. Biết $OA = OB = a\sqrt{3}$, $OC = a$. Tìm số đo độ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (OAB) . (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 39,2



Gọi M là trung điểm của AB .

Xét $\triangle OAB$ có: $OA = OB = a\sqrt{3} \Rightarrow \triangle OAB$ cân tại O .

Mà OM là trung tuyến nên OM cũng là đường cao $\Rightarrow OM \perp AB$.

Lại có: $OC \perp OA, OC \perp OB \Rightarrow OC \perp (OAB) \Rightarrow OC \perp AB$.

Mà $OM \perp AB$ nên $AB \perp (OCM) \Rightarrow AB \perp CM$

$\Rightarrow ((OAB), (ABC)) = (\widehat{CM, OM}) = \widehat{OMC}$.

Xét $\triangle OAB$ vuông cân tại O nên $OM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\sqrt{OA^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Xét tam giác OCM vuông tại O có $\tan \widehat{OMC} = \frac{OC}{OM} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow \widehat{OMC} \approx 39,2^\circ$.

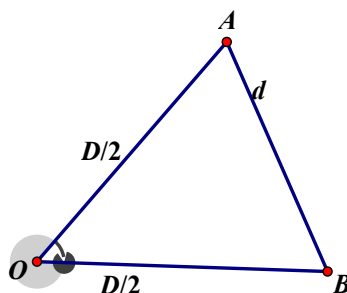
Vậy góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OAB) bằng $39,2^\circ$.

Câu 3: Trong cửa sổ ở hình bên, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính $D = 100$ cm, bản lề được gắn ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d (cm); khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tìm khoảng cách d lớn nhất để góc nhị diện tạo bởi cánh và khung cửa không vượt quá 60° .



Lời giải

Trả lời: 50



Gọi A, B lần lượt là tâm nửa đường tròn khung cửa và nửa hình tròn cánh cửa khi cửa mở.

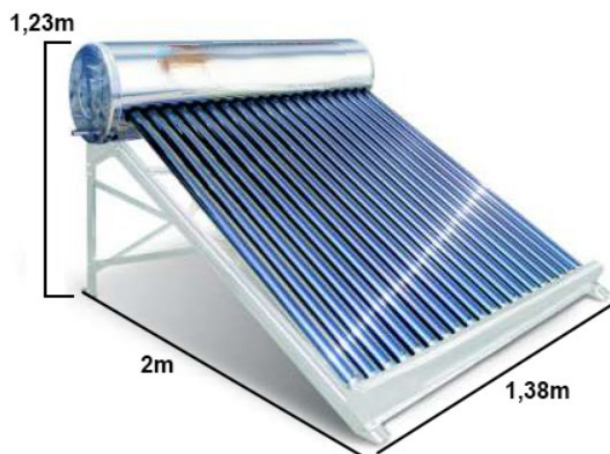
Góc nhị diện giữa hai nửa mặt phẳng tương ứng là $\widehat{AOB} = \alpha$, áp dụng định lý côsin cho tam giác OAB ta được:

$$\cos \alpha = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{2.OA.OB} = \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - d^2}{2.\left(\frac{D}{2}\right)^2} \geq \frac{\left(\frac{D}{2}\right)^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2 - d_{\max}^2}{2.\left(\frac{D}{2}\right)^2} = \cos 60^\circ$$

$$\Rightarrow d_{\max}^2 = \frac{D^2(1 - \cos 60^\circ)}{2} = 50^2 \Rightarrow d_{\max} = 50 \text{ (cm)}$$

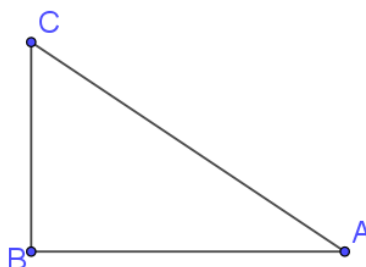
Khoảng cách lớn nhất d để góc nhị diện giữa hai nửa mặt phẳng không vượt quá 60° là 50 cm.

Câu 4: Một máy nước nóng sử dụng năng lượng mặt trời có các kích thước như hình dưới đây. Các ống hấp nhiệt chân không đó tạo với mặt sân thượng một góc bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Trả lời: 32



Vẽ AC biểu diễn cho ống hấp nhiệt chân không, như vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân bằng \widehat{BAC} . Ta có:

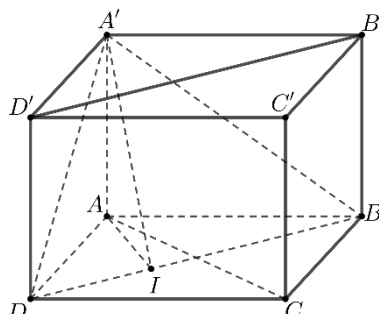
$$\tan \widehat{BAC} = \frac{BC}{BA} = \frac{1,23}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 32^\circ.$$

Vậy góc giữa ống hấp nhiệt chân không với mặt sân thượng bằng khoảng 32° .

Câu 5: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 73,4



Kẻ $AI \perp BD$

Mà $BD \perp A'A \Rightarrow BD \perp (AA'I)$

Ta có: $\begin{cases} (A'BD) \cap (ABD) = BD \\ \text{Trong } (ABD), AI \perp BD \Rightarrow [A', BD, A] = \widehat{A'IA} \\ \text{Trong } (A'BD), A'I \perp BD \end{cases}$

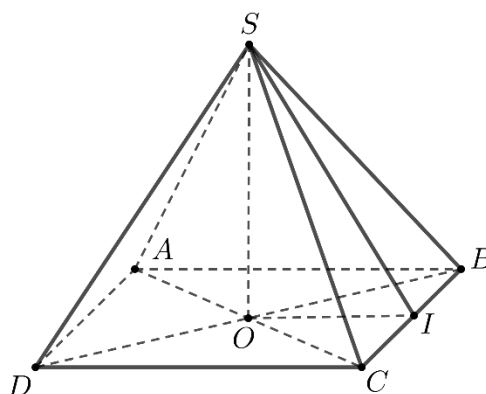
$$\text{Ta có: } AI = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

$$\text{Xét } \triangle AA'I \text{ vuông tại } A: \tan \widehat{A'IA} = \frac{A'A}{AI} = \frac{3a}{\frac{2\sqrt{5}}{5}a} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \widehat{A'IA} \approx 73,4^\circ.$$

Câu 6: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$. Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 79



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ \text{Trong } (ABCD), OI \perp BC \Rightarrow [S, BC, O] = \widehat{SIO} \\ \text{Trong } (SBC), SI \perp BC \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } OI = \frac{a}{2}, SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}a$$

$$\text{Xét } \triangle SOI \text{ vuông tại } O: \tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{26}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{26} \Rightarrow \widehat{SIO} \approx 79^\circ$$

$$\Rightarrow [S, BC, O] \approx 79^\circ$$

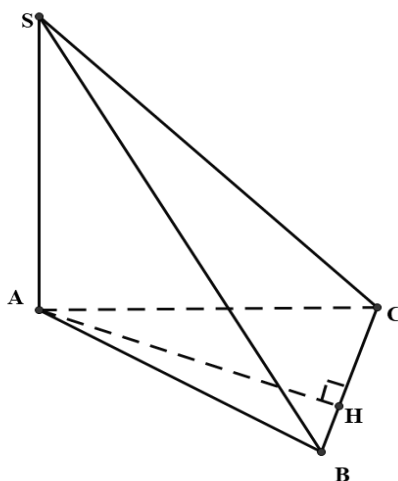
PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H là hình chiếu của A trên BC .

a) Chứng minh rằng $(SAB) \perp (ABC)$ và $(SAH) \perp (SBC)$.

b) Giả sử tam giác ABC vuông tại A , $\widehat{ABC} = 30^\circ$, $AC = a$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$.

Lời giải



a) $SA \perp (ABC); SA \subset (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

$$\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \\ SA \perp BC \text{ (} SA \perp (ABC) \text{)} \\ AH \cap SA = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAH); BC \subset (SBC) \Rightarrow (SAH) \perp (SBC)$$

b) Ta có $AH \perp BC, BC \perp SH$ ($BC \perp (SAH)$) $\Rightarrow [S, BC, A] = (SH, AH) = \widehat{SHA}$

Xét tam giác ABC vuông tại A có $\widehat{ABC} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{ACH} = 60^\circ$

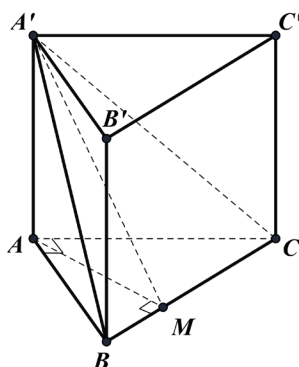
$$\text{Xét tam giác } ACH \text{ vuông tại } H \text{ có } \sin \widehat{ACH} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow AH = a \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Xét tam giác } SHA \text{ vuông tại } A \text{ có } \tan \widehat{SHA} = \frac{SA}{AH} = \frac{a\sqrt{3}}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = 1 \Rightarrow \widehat{SHA} = 45^\circ$$

Vậy $[S, BC, A] = 45^\circ$

Câu 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$. Tính tan góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$.

Lời giải



Kẻ $AM \perp BC$ tại M . Lại có $AA' \perp BC$. Suy ra $BC \perp (AMA') \Rightarrow BC \perp A'M$.

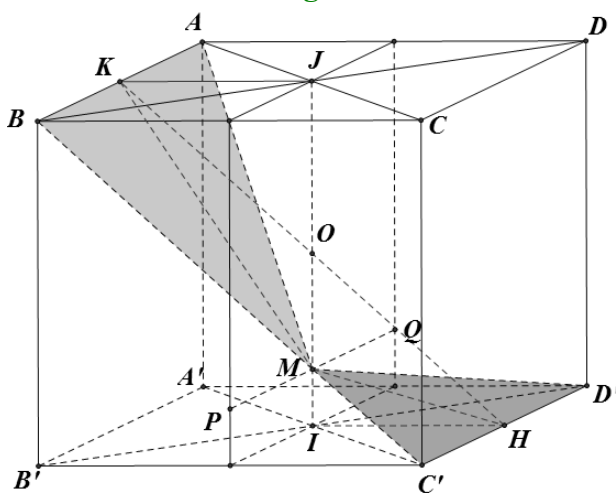
Suy ra $((A'BC), (BCC'B')) = (A'M, AM) = \widehat{A'MA} = \varphi$.

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A có AM là đường cao $\Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$$\tan \varphi = \frac{A'A}{AM} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$. Tính cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB)

Lời giải



Giao tuyến của (MAB) và $(MC'D')$ là đường thẳng $PQ \parallel AB \parallel C'D'$ như hình vẽ.

Gọi H, K lần lượt là trung điểm của $C'D'$ và AB . Ta có: $MH \perp PQ$; $MK \perp PQ$.

Suy ra $((MC'D'), (MAB)) = (MH; MK)$.

Chuẩn hóa cạnh hình lập phương bằng 1 ta tính được: $MH = \frac{\sqrt{10}}{6}$, $MK = \frac{\sqrt{34}}{6}$, $HK = \sqrt{2}$.

Xét tam giác HMK ta có: $\cos \widehat{HMK} = \frac{MH^2 + MK^2 - HK^2}{2MH.MK} = \frac{-7\sqrt{85}}{85}$.

Suy ra cosin của góc giữa hai mặt phẳng (MAB) và $(MC'D')$ bằng $\frac{7\sqrt{85}}{85}$.

BÀI: HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

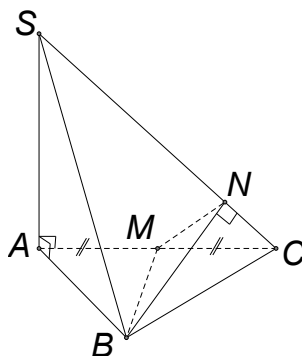
ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $BM \perp AC$. B. $(SBM) \perp (SAC)$. C. $(SAB) \perp (SBC)$. D. $(SAB) \perp (SAC)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $\triangle ABC$ là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm AC , N là hình chiếu của B lên SC (như hình minh họa bên dưới). Khẳng định nào sau đây đúng?



- A. $(BMN) \perp (SBC)$. B. $(SAC) \perp (SAB)$. C. $(BMN) \perp (ABC)$. D. $(SAC) \perp (SBC)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B ; $SA \perp (ABC)$. Góc giữa (SBC) và (ABC) là góc nào?

- A. \widehat{SBC} . B. \widehat{SBA} . C. \widehat{SCB} . D. \widehat{SCA} .

Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\tan \alpha = \sqrt{6}$. B. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

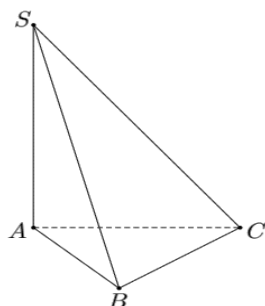
Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$. Giá trị của $\sin \alpha$ bằng:

- A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$ B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ D. $\sqrt{2}$

Câu 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Giá trị góc α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

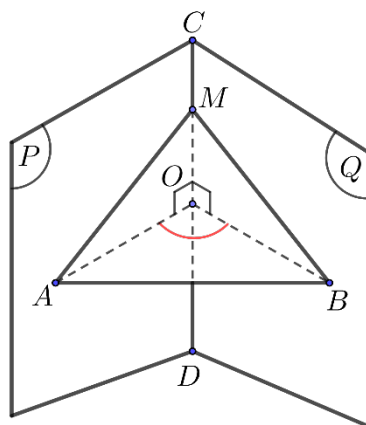
- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác cân tại A , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .



- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Câu 9: Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có giao tuyến là đường thẳng CD . Điểm $A \in (P); B \in (Q)$ và AO, BO cùng vuông góc với CD . M là một điểm bất kì thuộc CD ($M \neq O$). Xác định góc nhị diện $[A, CD, B]$



- A. \widehat{AOB} . B. \widehat{AMO} . C. \widehat{AMB} . D. \widehat{OAB} .

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Số đo của góc nhị diện $[S, BD, A]$?

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S, BC, O]$

- A. $\alpha \approx 75^\circ 46'$. B. $\alpha \approx 71^\circ 21'$. C. $\alpha \approx 68^\circ 31'$. D. $\alpha \approx 65^\circ 21'$.

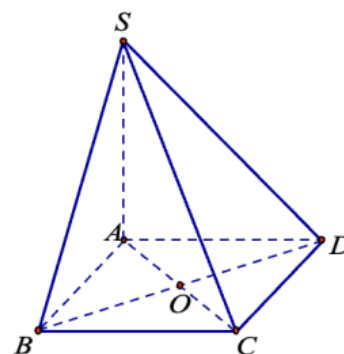
Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a\sqrt{2}$, $SO = a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. B. 1. C. $\sqrt{3}$. D. $2\sqrt{2}$.

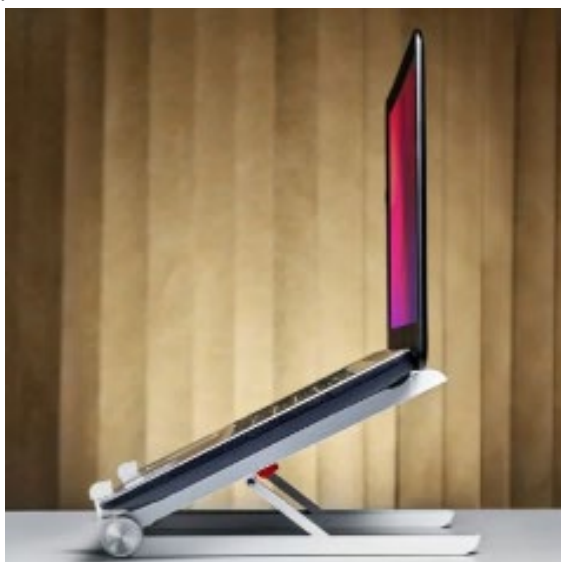
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy như hình vẽ sau đây.

- a) $(SAB) \perp (ABCD)$.
 b) Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là \widehat{SCD}
 c) Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là \widehat{SDA} .
 d) Số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng 90° .



Câu 2: Hình ảnh máy tính xách tay đặt trên giá đỡ nghiêng một góc 30° so với mặt bàn. Màn hình máy tính mở vuông góc với mặt bàn như hình vẽ sau

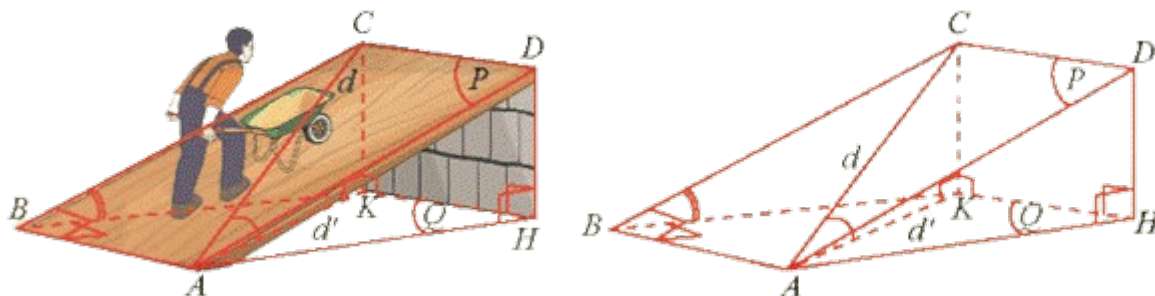


- a) Góc giữa hai mặt phẳng chứa bàn phím máy tính và mặt bàn bằng 30° .
 b) Góc giữa hai mặt phẳng chứa màn hình và mặt phẳng chứa bàn phím bằng 30° .
 c) Góc nhị diện giữa màn hình và bàn phím bằng 120° .
 d) Góc nhị diện giữa màn hình và mặt bàn bằng 90° .

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Gọi M là trung điểm $A'B'$, ta có $C'M = a\sqrt{2}$		
b)	Góc phẳng nhị diện $[C, A'B', C']$ bằng 60°		
c)	Gọi K là trung điểm AB , M là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$		
d)	Góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ bằng 30°		

Câu 4: Trong lao động, mặt phẳng nghiêng thường được sử dụng vì tính tiện dụng của nó. Hình vẽ sau minh họa một mặt phẳng nghiêng dùng để vận chuyển đồ, có độ nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang là 30° , vận chuyển lên mặt phẳng có độ cao 1 m. Quan sát hình vẽ và xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	\widehat{CAK} được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q)		
b)	\widehat{CAK} là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[C, AB, K]$		
c)	Mặt phẳng nghiêng có độ dài khoảng 1,73 m		
d)	Biết chiều rộng của mặt phẳng nghiêng đang sử dụng là 1 m, khi đó sin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (Q) là $\frac{\sqrt{5}}{5}$.		

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Số đo của góc nhị diện $[S, AC, B]$ bằng

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$. Số đo góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng

Câu 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy tâm O , cạnh a và cạnh bên là $2a$. Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Câu 4: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') .

Câu 5: Kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao 98m và cạnh đáy 180m. Biết tang của số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp đó bằng $\frac{m}{n}$, biết $\frac{m}{n}$ tối giản và $m, n \in \mathbb{N}$, tính giá trị biểu thức $m - n$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính số đo (theo đơn vị độ) của góc nhị diện $[B, A'C, D]$.

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SB \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $SB = 2a, AB = 3a, BC = 4a$ và góc α là góc giữa mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng đáy. Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.
- Câu 2:** Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.
- Câu 3:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ số đo của góc phẳng nhị diện $[A', B'C', A]$. Tính φ ?
- Câu 4:** Cho mặt phẳng (P) và điểm M nằm ngoài (P) . Kẻ MA vuông góc với mặt phẳng (P) và MB, MC là hai đường xiên đối với mặt phẳng (P) . Cho biết $MA = a$; MB, MC tạo với mặt phẳng (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.
- Tính độ dài BC
 - Tính số đo nhị diện $[M, BC, A]$.

----- HẾT -----

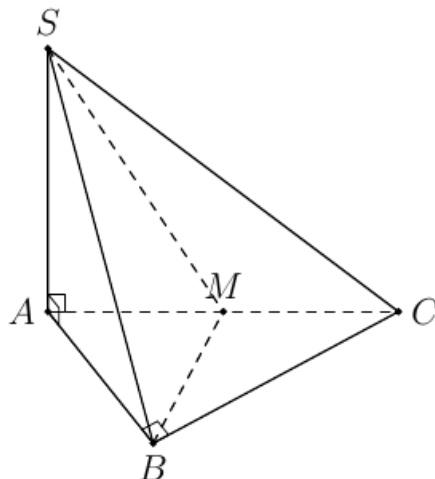
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A.** $BM \perp AC$. **B.** $(SBM) \perp (SAC)$. **C.** $(SAB) \perp (SBC)$. **D.** $(SAB) \perp (SAC)$.

Lời giải



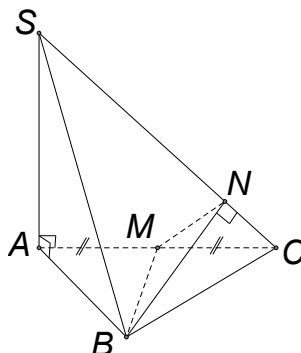
Xét phương án **A**: ΔABC cân tại B , M là trung điểm $AC \Rightarrow BM \perp AC$ nên phương án **A** đúng.

Xét phương án **B**: $\begin{cases} BM \perp SA \\ BM \perp AC \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAC) \Rightarrow (SBM) \perp (SAC)$ nên phương án **B** đúng.

Xét phương án **C**: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow (SBC) \perp (SAB)$ nên phương án **C** đúng.

Ta có: $\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ AC \perp SA (SA \perp (ABC)) \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = \widehat{BAC} = 45^\circ \\ AB \perp SA (SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow ((SAB), (SAC)) = \widehat{BAC} = 45^\circ$ nên phương án **D** sai.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ΔABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm AC , N là hình chiếu của B lên SC (như hình minh họa bên dưới). Khẳng định nào sau đây đúng?



A. $(BMN) \perp (SBC)$. **B.** $(SAC) \perp (SAB)$. **C.** $(BMN) \perp (ABC)$. **D.** $(SAC) \perp (SBC)$.

Lời giải

Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow BM \perp SA$

Mà $BM \perp AC$ (Tính chất đường trung tuyến trong tam giác đều)

$\Rightarrow BM \perp (SAC) \supset SC \Rightarrow SC \perp BM$ (1).

Theo giả thiết: $SC \perp BN$ (2).

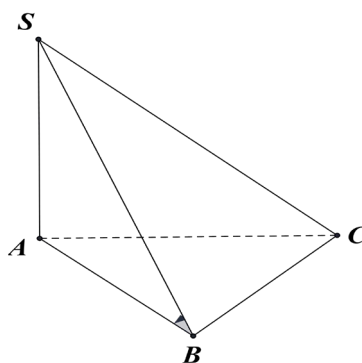
Từ (1) và (2) suy ra: $SC \perp (BMN)$.

Mà $SC \subset (SBC)$ nên $(BMN) \perp (SBC)$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B ; $SA \perp (ABC)$. Góc giữa (SBC) và (ABC) là góc nào?

A. \widehat{SBC} . **B.** \widehat{SBA} . **C.** \widehat{SCB} . **D.** \widehat{SCA} .

Lời giải



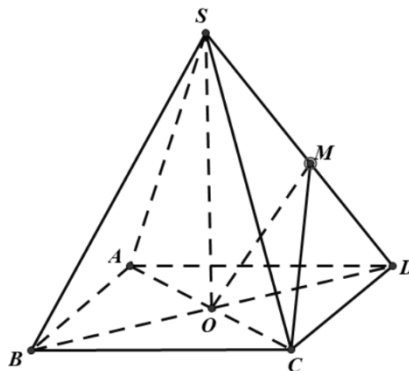
Ta có: $\left. \begin{array}{l} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Suy ra $((SBC);(ABC)) = \widehat{SBA}$

Câu 4: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha = \sqrt{6}$. **B.** $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. **C.** $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$. Do hình chóp $S.ABCD$ đều nên $SO \perp (ABCD)$

Gọi M là trung điểm của SD . Tam giác SCD đều nên $CM \perp SD$.

Tam giác SBD có $SB = SD = a, BD = a\sqrt{2}$ nên tam giác SBD vuông tại S (định lí Pytago đảo)

Suy ra $SB \perp SD$ mà $OM \parallel SB$ nên $OM \perp SD$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBD) \cap (SCD) = SD \\ (SBD) \supset OM \perp SD \\ (SCD) \supset CM \perp SD \end{cases} \Rightarrow \widehat{((SBD)(SCD))} = \widehat{OMC}.$$

$$\text{Lại có: } \begin{cases} OC \perp BD \\ OC \perp SO \end{cases} \Rightarrow OC \perp (SBD) \Rightarrow OC \perp OM.$$

$$\text{Xét tam giác vuông } MOC, \text{ có } \tan \widehat{CMO} = \frac{OC}{OM} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{a} = \sqrt{2}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

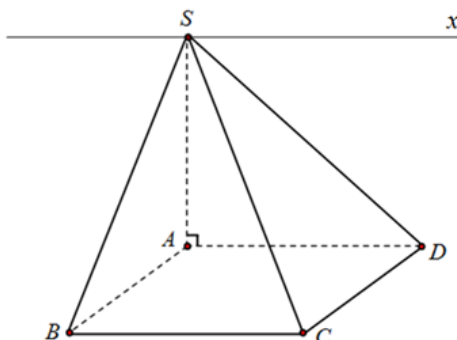
A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90°

Lời giải



Ta có: $(SBC) \cap (SAD) = Sx \parallel BC \parallel AD$

Ta dễ dàng chứng minh được $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow Sx \perp SB$

Lại có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AD \Rightarrow SA \perp Sx$

Vậy góc giữa mặt phẳng (SBC) và (SAD) là góc $\widehat{BSA} = 45^\circ$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$. Giá trị của $\sin \alpha$ bằng:

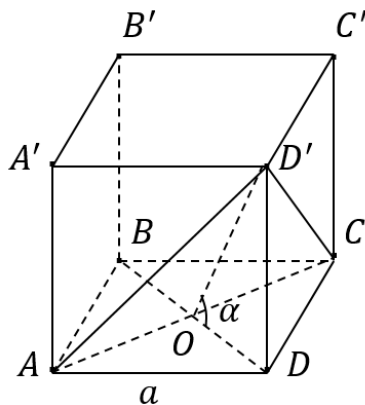
A. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\sqrt{2}$

Lời giải



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (ACD') \cap (ABCD) = AC \\ OD' \subset (ACD') \\ OD \subset (ABCD) \\ OD' \perp AC, OD \perp AC \end{cases} \Rightarrow \left(\widehat{(ACD'), (ABCD)} \right) = \left(\widehat{OD', OD} \right) = \alpha.$$

Suy ra góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$ bằng $\left(\widehat{OD', OD} \right)$.

$$\text{Xét tam giác } ODD' \text{ vuông tại } D, \sin \alpha = \frac{DD'}{OD'} = \frac{DD'}{\sqrt{DD'^2 + OD^2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

Câu 7: Cho hình chóp đều $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Giá trị góc α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Gọi G là trọng tâm của ΔABC . Vì hình chóp $S.ABC$ đều nên $SG \perp (ABC)$.

Trong mặt phẳng (ABC) , kẻ $AM \perp BC$.

Ta có: GM là hình chiếu của SM trên mặt phẳng (ABC) nên $SM \perp BC$.

Lại có:

$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SBC) \supset SM \perp BC \Rightarrow \widehat{((SBC)(ABC))} = \widehat{SMA} = \widehat{SMG}. \\ (ABC) \supset AM \perp BC \end{cases}$$

Xét ΔABC đều có AM là đường trung tuyến, G là trọng tâm nên $GM = \frac{1}{3}AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

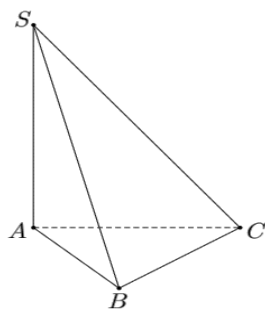
Tam giác SMB vuông tại M nên:

$$SM^2 = SB^2 - BM^2 = \left(\frac{a\sqrt{21}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{3} \Rightarrow SM = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Tam giác SGM vuông tại G nên:

$$\cos \widehat{SMG} = \frac{GM}{SM} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{SMG} = 60^\circ.$$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác cân tại A , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .



A. 30°

B. 45°

C. 60°

D. 90°

Lời giải

Ta có $(SAC) \cap (SAB) = SA$

$AB \subset (SAB), AB \perp SA$ do $SA \perp (ABC)$.

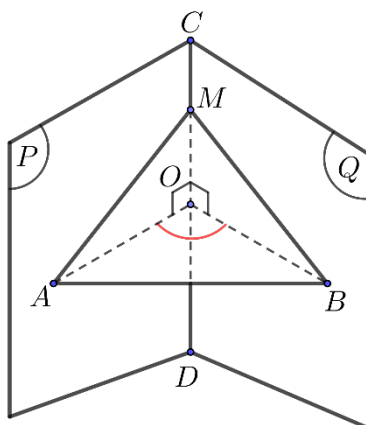
$AC \subset (SAC), AC \perp SA$ do $SA \perp (ABC)$.

Do đó $\widehat{((SAC), (SAB))} = \widehat{(AB, AC)}$.

$$\text{Khi đó: } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - 3a^2}{2a^2} = -\frac{1}{2}$$

Do đó $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Do đó $\widehat{((SAC), (SAB))} = \widehat{(AB, AC)} = 60^\circ$

Câu 9: Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có giao tuyến là đường thẳng CD . Điểm $A \in (P); B \in (Q)$ và AO, BO cùng vuông góc với CD . M là một điểm bất kì thuộc CD ($M \neq O$). Xác định góc nhị diện $[A, CD, B]$



- A. \widehat{AOB} . B. \widehat{AMO} . C. \widehat{AMB} . D. \widehat{OAB} .

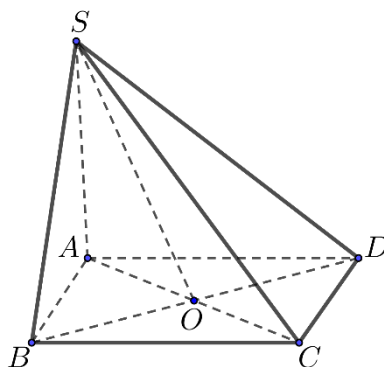
Lời giải

Theo định nghĩa, góc nhị diện $[A, CD, B]$ là góc \widehat{AOB} .

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Số đo của góc nhị diện $[S, BD, A]$?

- A. 90° . B. 30° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải



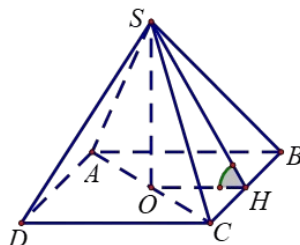
Từ A ta kẻ đường vuông góc tới BD , thì chân đường vuông góc là tâm O của hình vuông, từ đây dễ thấy $SO \perp BD$, nên góc giữa hai mặt phẳng là góc \widehat{SOA} .

Xét $\triangle SOA$ có $\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$. Vậy góc cần tìm bằng 60° .

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S, BC, O]$

- A. $\alpha \approx 75^\circ 46'$. B. $\alpha \approx 71^\circ 21'$. C. $\alpha \approx 68^\circ 31'$. D. $\alpha \approx 65^\circ 21'$.

Lời giải



Gọi O, H lần lượt là trung điểm của AC và BC .

Xét tam giác SHC vuông tại H ta có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{(5a)^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{91}a}{2}$.

Vì $SA = SB = SC = SD = 5a$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $(SBC) \cap (ABCD) = BC, SH \perp BC, OH \perp BC$, suy ra góc $[S, BC, O]$ bằng $\widehat{SHO} = \alpha$.

Xét tam giác SOH vuông tại O , ta có: $\cos \alpha = \frac{OH}{SH} = \frac{2a}{\frac{\sqrt{91}a}{2}} = \frac{4\sqrt{91}}{91} \Rightarrow \alpha \approx 65^\circ 21'$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a\sqrt{2}, SO = a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

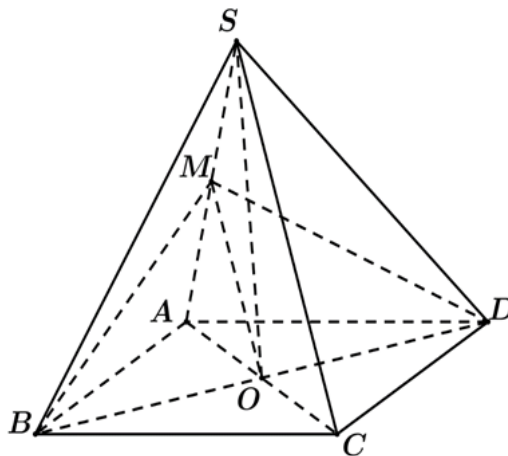
A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. 1.

C. $\sqrt{3}$.

D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi M trung điểm SA . Ta có ΔSAB cân tại $B \Rightarrow BM \perp SA$ (1)

Vì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$, lại có O trung điểm $BD \Rightarrow \Delta SBD$ cân tại S

nên $SD = SB = a\sqrt{2} \Rightarrow \Delta SAD$ cân tại D nên $DM \perp SA$ (2)

Lại có $(SAB) \cap (SAD) = SA$ (3)

Từ (1);(2);(3) $\Rightarrow \widehat{((SAB), (SAD))} = \widehat{BMD}$ hoặc $\widehat{((SAB), (SAD))} = 180^\circ - \widehat{BMD}$.

Xét $\triangle SOB$ vuông tại $O \Rightarrow OB = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{(a\sqrt{2})^2 - a^2} = a \Rightarrow BD = 2a$.

Xét $\triangle AOB$ vuông tại O có $OA = \sqrt{AB^2 - OB^2} = a \Rightarrow OA = OC = a$.

Xét $\triangle SOC \Rightarrow SC = a\sqrt{2} \Rightarrow OM = \frac{1}{2}SC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vì $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ nên $BD \perp MO$. Mặt khác $OD = OB$ nên $\triangle BDM$ cân tại M .

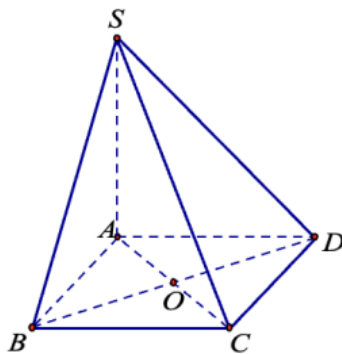
Xét $\triangle BOM$ vuông tại $O \Rightarrow BM = \sqrt{OM^2 + OB^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow DM = BM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Xét $\triangle BDM \Rightarrow \cos(\widehat{BMD}) = \frac{BM^2 + DM^2 - BD^2}{2BM \cdot DM} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \cos((SAB); (SAD)) = \frac{1}{3}$.

Vậy $\tan((SAB); (SAD)) = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = 2\sqrt{2}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy như hình vẽ sau đây.



- $(SAB) \perp (ABCD)$.
- Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là \widehat{SCD}
- Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là \widehat{SDA} .
- Số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng 90° .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng

Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (SAB) \perp (ABCD)$

b) Sai

Giao tuyến (SBC) và $(ABCD)$ là BC và $AB \perp BC, SB \perp BC$

Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là \widehat{SBA}

c) Đúng

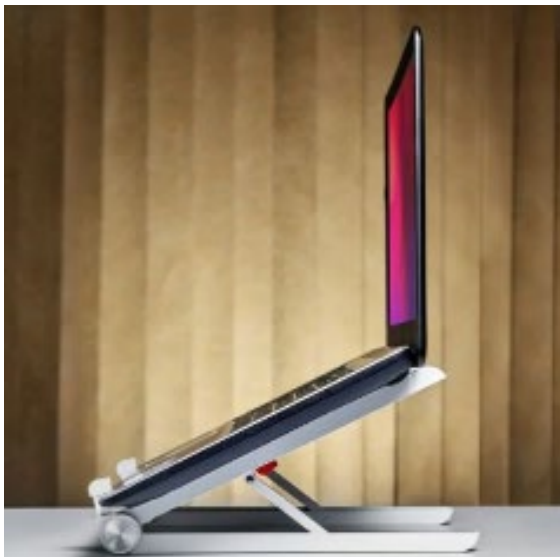
Giao tuyến (SCD) và $(ABCD)$ là CD và $AD \perp CD, SD \perp CD$

Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là \widehat{SDA}

d) Đúng

Ta có $BA \perp SA$ và $DA \perp SA$ nên $[B, SA, D] = \widehat{BAD} = 90^\circ$.

Câu 2: Hình ảnh máy tính xách tay đặt trên giá đỡ nghiêng một góc 30° so với mặt bàn. Màn hình máy tính mở vuông góc với mặt bàn như hình vẽ sau



- a) Góc giữa hai mặt phẳng chứa bàn phím máy tính và mặt bàn bằng 30° .
- b) Góc giữa hai mặt phẳng chứa màn hình và mặt phẳng chứa bàn phím bằng 30° .
- c) Góc nhị diện giữa màn hình và bàn phím bằng 120° .
- d) Góc nhị diện giữa màn hình và mặt bàn bằng 90° .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
---------	--------	---------	---------

a) Đúng

Góc giữa bàn phím máy tính và mặt bàn bằng góc mở của giá đỡ và bằng 30° .

b) Sai

Góc giữa hai mặt phẳng chứa màn hình và mặt phẳng chứa bàn phím bằng $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

c) Đúng

Góc nhị diện giữa màn hình và bàn phím bằng $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

d) Đúng

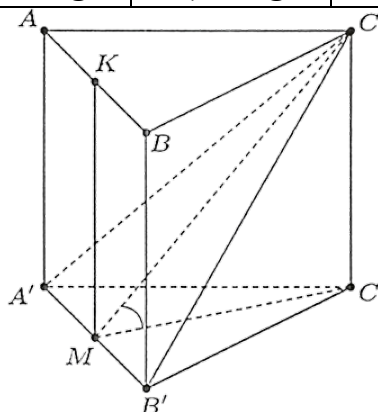
Góc nhị diện giữa màn hình và mặt bàn bằng 90° .

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$.

	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	Gọi M là trung điểm $A'B'$, ta có $C'M = a\sqrt{2}$		
b)	Góc phẳng nhị diện $[C, A'B', C']$ bằng 60°		
c)	Gọi K là trung điểm AB , M là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$		
d)	Góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ bằng 30°		

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



a) Sai

Gọi M là trung điểm $A'B'$, ta có $C'M = a\sqrt{2}$

Ta có: $C'M = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

b) Đúng

Góc phẳng nhị diện $[C, A'B', C']$ bằng 60°

Gọi M là trung điểm $A'B'$, suy ra $C'M \perp A'B'$ (do tam giác $A'B'C'$ đều).

Mặt khác $CC' \perp A'B'$ (do $ABC \cdot A'B'C'$ là lăng trụ đứng).

Suy ra $A'B' \perp (CMC')$ hay $A'B' \perp CM$.

Vậy $(CM, C'M) = \widehat{CMC'}$ là góc phẳng nhị diện $[C, A'B', C']$.

Suy ra $\tan \widehat{CMC'} = \frac{CC'}{C'M} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{CMC'} = 60^\circ$.

c) Đúng

Gọi K là trung điểm AB , M là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$

Gọi K là trung điểm AB thì MK là đường trung bình của hình chữ nhật $ABB'A'$

$\Rightarrow MK \parallel AA' \Rightarrow A'B' \perp MK$;

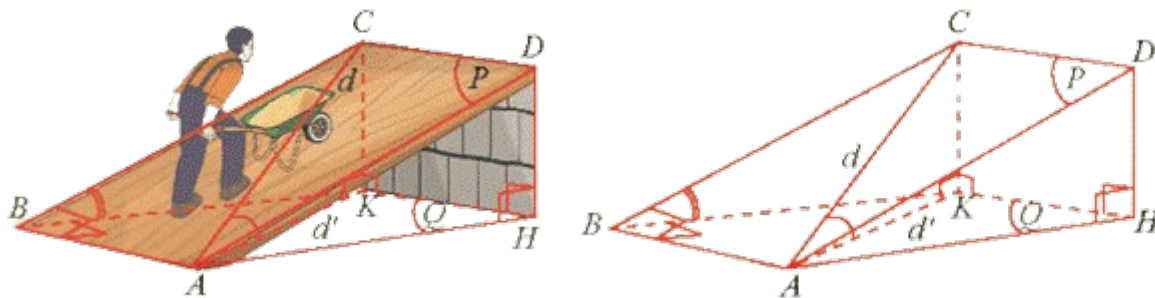
d) Đúng

Góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ bằng 30°

Ta lại có $A'B' \perp CM$ (câu a).

Vậy $(MK, CM) = \widehat{CMK}$ là góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ với $\widehat{CMK} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Câu 4: Trong lao động, mặt phẳng nghiêng thường được sử dụng vì tính tiện dụng của nó. Hình vẽ sau minh họa một mặt phẳng nghiêng dùng để vận chuyển đồ, có độ nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang là 30° , vận chuyển lên mặt phẳng có độ cao 1 m. Quan sát hình vẽ và xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:



	Mệnh đề	Đúng	Sai
a)	\widehat{CAK} được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q)		
b)	\widehat{CAK} là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[C, AB, K]$		
c)	Mặt phẳng nghiêng có độ dài khoảng 1,73 m		
d)	Biết chiều rộng của mặt phẳng nghiêng đang sử dụng là 1 m, khi đó \sin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (Q) là $\frac{\sqrt{5}}{5}$.		

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng

\widehat{CAK} được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q)

Do $CK \perp (Q)$ nên \widehat{CAK} được gọi là góc giữa đường thẳng CA và mặt phẳng (Q)

b) Sai

\widehat{CAK} là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[C, AB, K]$

Do CA, AK không vuông góc với AB nên \widehat{CAK} không là góc phẳng nhị diện của $[C, AB, K]$

c) Sai

Mặt phẳng nghiêng có độ dài khoảng 1,73 m

Ta có $\sin \widehat{CBK} = \frac{CK}{BC}, CK = 1(\text{m}), \widehat{CBK} = 30^\circ \Rightarrow BC = \frac{1}{\sin 30^\circ} = 2(\text{m})$.

d) Đúng

Biết chiều rộng của mặt phẳng nghiêng đang sử dụng là 1 m, khi đó \sin của góc giữa đường

thẳng BC và mặt phẳng (Q) là $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

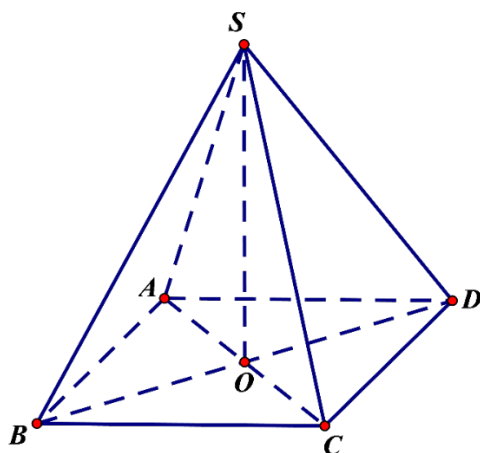
$$AB = 1, BC = 2 \Rightarrow AC = \sqrt{5} \Rightarrow \sin \widehat{CAK} = \frac{CK}{AC} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Số đo của góc nhị diện $[S, AC, B]$ bằng

Lời giải

Trả lời: 90



$$\text{Gọi } O = AC \cap BD \Rightarrow SO \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SO \perp AC \\ SO \perp OB \end{cases}$$

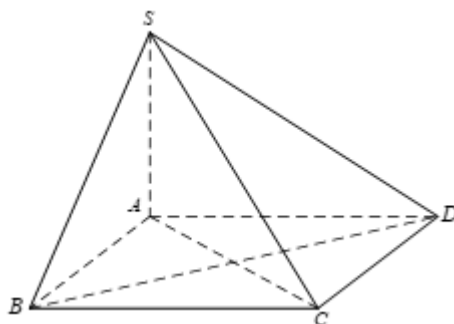
Ta có $\begin{cases} SO \perp AC \\ BO \perp AC \end{cases} \Rightarrow \widehat{BOS}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[S, AC, B]$.

Mà $SO \perp OB \Rightarrow \widehat{BOS} = 90^\circ$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $AC = a$. Số đo góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng

Lời giải

Trả lời: 120



Vì $SA \perp (ABCD)$ nên AB và AD vuông góc với SA .

Vậy \widehat{BAD} là một góc phẳng của góc nhị diện $[B, SA, D]$.

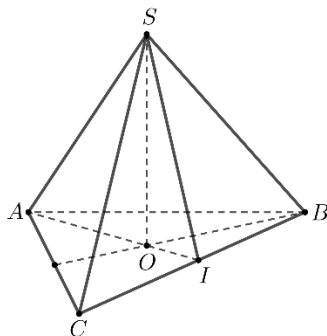
Hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $AC = a$ nên các tam giác ABC , ACD đều. Do đó $\widehat{BAD} = 120^\circ$.

Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng 120° .

Câu 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy tâm O , cạnh a và cạnh bên là $2a$. Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Lời giải

Trả lời: 81,4



$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ \text{Trong } (ABC), OI \perp BC \Rightarrow [S, BC, O] = \widehat{SIO} \\ \text{Trong } (SBC), SI \perp BC \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Và } OI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$$

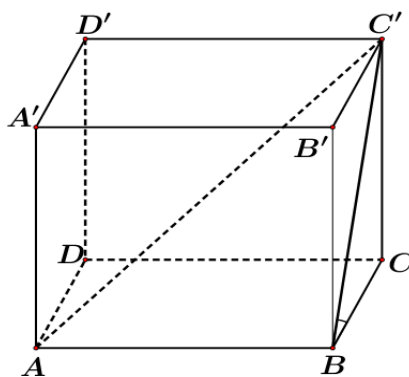
$$\text{Xét } \triangle SOI \text{ vuông tại } O: \tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{33}a}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{11} \Rightarrow \widehat{SIO} \approx 81,4^\circ$$

$$\Rightarrow [S, BC, O] \approx 81,4^\circ$$

Câu 4: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $a\sqrt{3}$. Tính cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') .

Lời giải

Trả lời: 60



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lăng trụ tứ giác đều nên nó là hình hộp chữ nhật có hai đáy là hình vuông $\Rightarrow AB \perp (BCC'B') \Rightarrow AB \perp BC'$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC' \perp AB \\ CB \perp AB \Rightarrow ((ABCD); (ABC')) = (\widehat{BC'; BC}) = \widehat{C'BC}. \\ C'C \perp BC \end{cases}$$

Xét tam giác $C'BC$ vuông tại C có $BC' = \sqrt{CC'^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + 3a^2} = 2a$

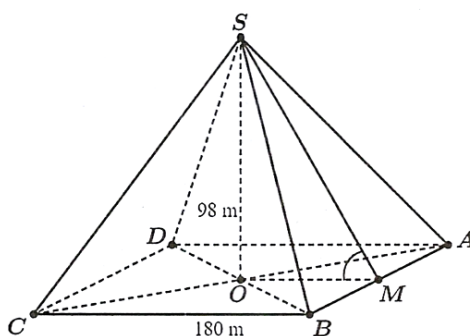
$$\Rightarrow \cos \widehat{C'BC} = \frac{BC}{BC'} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

Vậy cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 5: Kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Biết tang của số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp đó bằng $\frac{m}{n}$, biết $\frac{m}{n}$ tối giản và $m, n \in \mathbb{N}$, tính giá trị biểu thức $m - n$.

Lời giải

Trả lời: 4



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$. (1)

Gọi M là trung điểm AB thì OM là đường trung bình của tam giác ABC , suy ra

$$OM = \frac{BC}{2} = 90(m) \text{ và } OM \perp AB. (2)$$

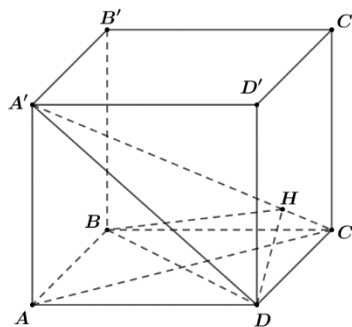
Từ (1) và (2) suy ra \widehat{SMO} là góc phẳng nhị diện $[(SAB), AB, (ABCD)]$ với

$$\tan \widehat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{98}{90} = \frac{49}{45} \Rightarrow m = 49; n = 45 \Rightarrow m - n = 4.$$

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính số đo (theo đơn vị độ) của góc nhị diện $[B, A'C, D]$.

Lời giải

Trả lời: 120



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $\Delta A'BC = \Delta A'DC$ (c.c.c) và

$$BD \perp (AA'C'C) \Rightarrow BD \perp A'C.$$

Trong mặt phẳng $(A'DC)$ kẻ $DH \perp A'C$

Suy ra $A'C \perp (BDH) \Rightarrow A'C \perp BH$.

Vì $(A'BC) \cap (A'DC) = A'C$ nên \widehat{BHD} là một góc phẳng nhị diện $[B, A'C, D]$.

$$\text{Xét } \Delta A'DC \text{ có } A'D \perp DC, A'D = a\sqrt{2}, DC = a, A'C = a\sqrt{3} \Rightarrow DH \cdot A'C = A'D \cdot DC \Rightarrow DH = a\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Vì $\Delta A'BC = \Delta A'DC \Rightarrow BH = DH$.

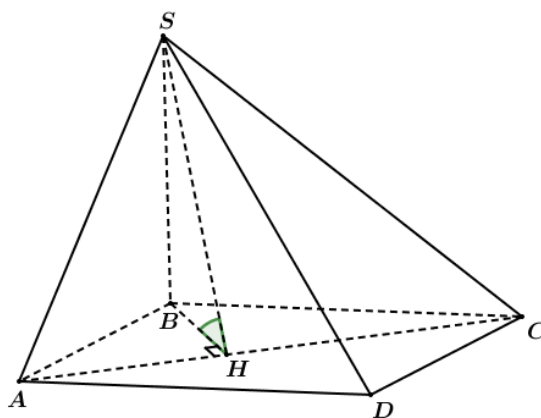
$$\text{Xét } \Delta BDH : BD^2 = BH^2 + DH^2 - 2BH \cdot DH \cdot \cos \widehat{BHD}$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 = \frac{2a^2}{3} + \frac{2a^2}{3} - 2 \frac{2a^2}{3} \cos \widehat{BHD} \Rightarrow \cos \widehat{BHD} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BHD} = 120^\circ.$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có cạnh bên $SB \perp (ABCD)$ và $ABCD$ là hình chữ nhật. Biết $SB = 2a, AB = 3a, BC = 4a$ và góc α là góc giữa mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng đáy. Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.

Lời giải

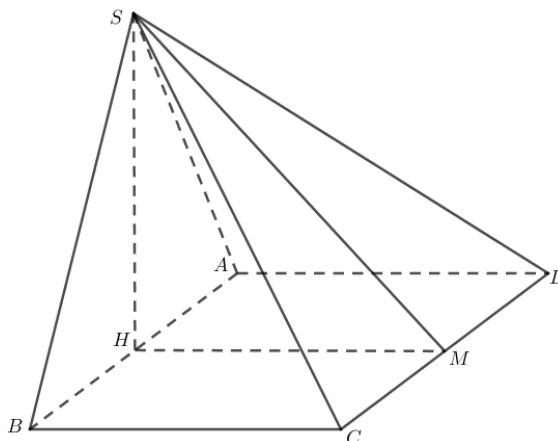


$$\text{Kẻ } BH \perp AC \Rightarrow \alpha = \widehat{SHB}.$$

$$\text{Ta có } HB = \frac{BA \cdot BC}{\sqrt{BA^2 + BC^2}} = \frac{3a \cdot 4a}{5a} = \frac{12a}{5} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SB}{BH} = \frac{2a}{\frac{12a}{5}} = \frac{5}{6}.$$

Câu 2: Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.

Lời giải



Gọi H, M lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Ta có: $SH \perp AB$, $(SAB) \perp (ABCD)$, $(SAB) \cap (ABCD) = AB$. Suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó: $AB \perp SH, MN$. Suy ra $AB \perp (SHM)$, mà $AB \parallel CD$ nên $(SHM) \perp (SAB), (SCD)$.

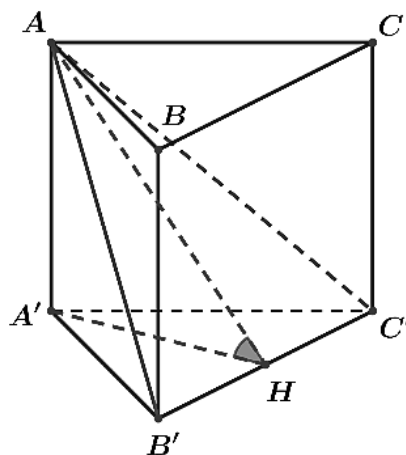
Vậy $\alpha = \widehat{MSH}$.

Xét tam giác SMH vuông tại H có: $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $HM = a$. Suy ra $\tan \alpha = \frac{HM}{SH} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi φ số đo của góc phẳng nhị diện $[A', B'C', A]$. Tính φ ?

Lời giải

Gọi H là trung điểm của cạnh $B'C'$. Suy ra $A'H \perp B'C'$.



Ta có: $\begin{cases} B'C' \perp A'H \\ B'C' \perp A'A \end{cases} \Rightarrow B'C' \perp (A'AH) \Rightarrow B'C' \perp AH.$

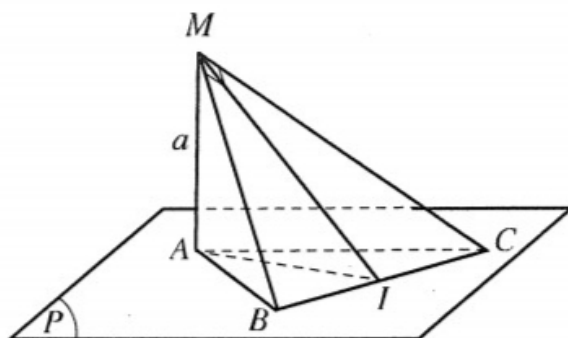
$$\begin{cases} (AB'C') \cap (A'B'C') = B'C' \\ A'H \perp B'C' \\ AH \perp B'C' \end{cases} \Rightarrow ((AB'C'), (A'B'C')) = (A'H, AH) = \widehat{A'HA}.$$

Xét $\Delta A'AH$ vuông tại A , ta có: $\tan \widehat{A'HA} = \frac{AA'}{AH} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$

Câu 4: Cho mặt phẳng (P) và điểm M nằm ngoài (P) . Kẻ MA vuông góc với mặt phẳng (P) và MB, MC là hai đường xiên đối với mặt phẳng (P) . Cho biết $MA = a$; MB, MC tạo với mặt phẳng (P) các góc 30° và $MB \perp MC$.

- Tính độ dài BC
- Tính số đo nhị diện $[M, BC, A]$.

Lời giải



a) Vì $MA \perp (P)$ nên \widehat{MBA} và \widehat{MCA} là góc giữa MB và MC với (P) .

Theo giả thiết. $\widehat{MBA} = \widehat{MCA} = 30^\circ.$

Từ đó: $MB = MC = 2a$ và $AB = AC = a\sqrt{3}.$

Do $MB \perp MC$ nên $BC = MB\sqrt{2}$ tức là $BC = 2a\sqrt{2}.$

b. Gọi I là trung điểm của BC thì $BC \perp (MIA)$

Từ đó \widehat{MIA} là góc phẳng nhị diện $[M, BC, A]$.

Đặt $\widehat{MIA} = \varphi$. Ta có $MI = \frac{1}{2}BC = a\sqrt{2}$; $\sin \varphi = \frac{MA}{MI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$

Vậy góc nhị diện $[M, BC, A]$ bằng 45°

BÀI: KHOẢNG CÁCH

ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{3a}{4}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CB và SA .

- A. $\frac{a}{2}$. B. $2a$. C. $a\sqrt{2}$. D. a .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (SAC) .

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Câu 4: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB = AA' = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 1$; $SA \perp (ABC)$, $SA = 1$. Khoảng cách từ điểm A đến mp (SBC) bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. 1 . D. $\frac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. B. a . C. $2a$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) .

- A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. B. $d = a$. C. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, cạnh bên $SD = \sqrt{6}a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng
A. $\sqrt{3}a$. **B.** $\sqrt{2}a$. **C.** $2a$. **D.** a .
- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, BC = a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. **D.** $a\sqrt{3}$.
- Câu 10:** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD .
A. $a\sqrt{3}$. **B.** $a\sqrt{2}$. **C.** $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **D.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO .
A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. **C.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.
- Câu 12:** Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng
A. $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{2a}{3}$. **C.** $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. **D.** $a\sqrt{3}$.

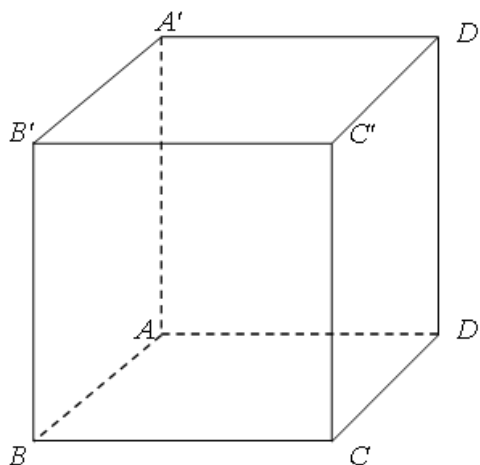
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SD và O lên cạnh SC .
a) OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .
b) Đoạn vuông góc chung của SD và AB là AD .
c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}, AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Khi đó:
a) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
b) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
c) Kẻ $AK \perp SD, K \in SD$, khi đó AK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng SD, AB .
d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AB bằng: $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

- a) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng CB
- b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.
- c) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.
- d) Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách d giữa SM và BC là $\frac{\sqrt{17}a}{17}$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a .



- a) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $A'B$ bằng $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.
- b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.
- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng $\frac{a}{2}$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$ bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC , $AA' = 2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'B'C')$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa AD đến mặt phẳng (SBC) (làm tròn số thập phân đến hàng phần mười)

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Câu 4: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng $\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC , gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ A và O đến mặt phẳng (SBC) . Tổng $d = d_1 + d_2$ là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Câu 5: Người ta dựng một cái lều cắm trại có dạng hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng $3m$ trên mặt đất bằng phẳng. Sau đó từ đỉnh của lều, người ta gắn một bóng đèn sao cho khoảng cách từ đỉnh lều đến bóng đèn bằng $30cm$. Khoảng cách từ bóng đèn đến mặt đất xấp xỉ bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần mười)

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3 . Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

b) Gọi M là trung điểm của AC . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM)

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$.

a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) và (SBC) .

b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

----- HẾT -----

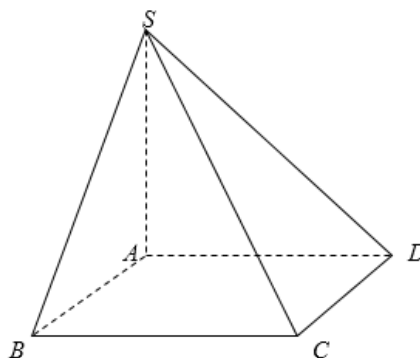
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là

- A. $a\sqrt{2}$. B. a . C. $\frac{a}{2}$. D. $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

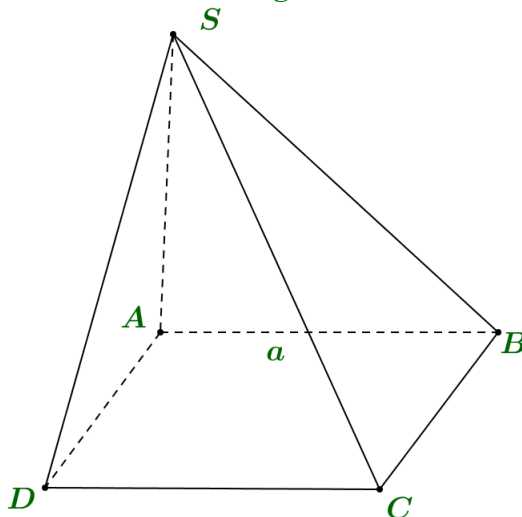


Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $d(S, (ABCD)) = SA = a$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CB và SA .

- A. $\frac{a}{2}$. B. $2a$. C. $a\sqrt{2}$. D. a .

Lời giải



Ta có do $ABCD$ là hình vuông nên $AB \perp BC$. Mặt khác $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$

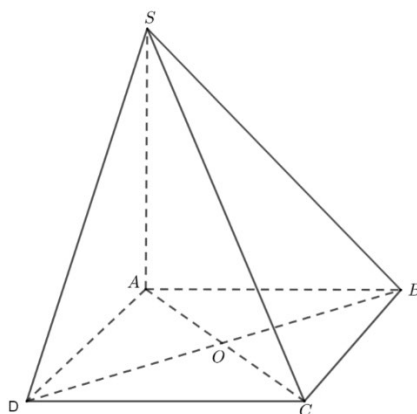
Từ đó ta có AB là đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng CB và SA .

Vậy $d(BC, SA) = a$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mp (SAC) .

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải



Gọi $AC \cap BD = \{O\}$

Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BO$

Ta có:

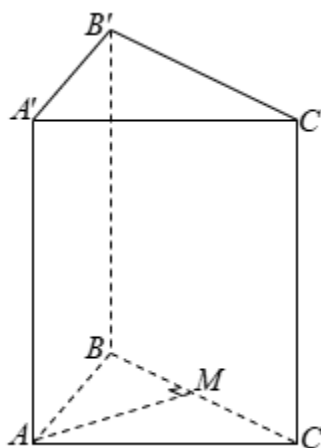
$$\left. \begin{array}{l} BO \perp SA, BO \perp AC \\ SA \subset (SAC), AC \subset (SAC) \\ SA \cap AC = \{A\} \end{array} \right\} \Rightarrow BO \perp (SAC)$$

$$\Rightarrow d(B, (SAC)) = BO = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + AD^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + a^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 4: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB = AA' = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. a .

Lời giải



Gọi M là trung điểm $BC \Rightarrow AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (đường cao trong tam giác đều cạnh a)

Ta có: $AM \perp BC$ (do ΔABC đều)

Mặt khác: $AM \perp BB'$ (do lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đều)

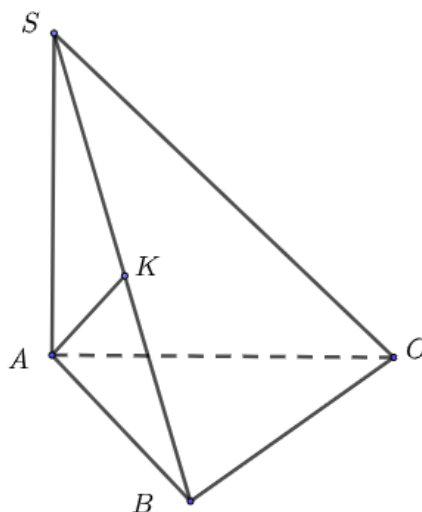
$$\text{Suy ra } AM \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A, (BCC'B')) = AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 1$; $SA \perp (ABC)$, $SA = 1$. Khoảng

cách từ điểm A đến mp (SBC) bằng

- A. $\sqrt{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải



ΔSAB dựng $AK \perp SB$

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Có $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AK$

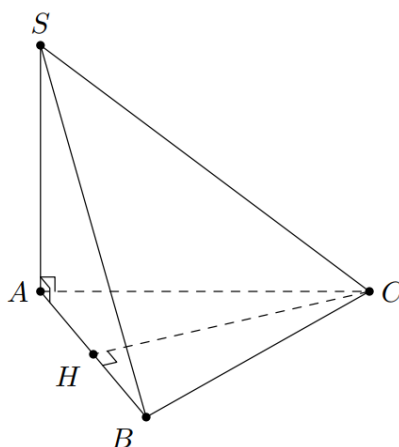
Vậy $AK \perp (SBC), d(A, (SBC)) = AK$.

Có $SA \cdot AB = AK \cdot SB \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , ΔABC là tam giác đều cạnh bằng a . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. B. a . C. $2a$. D. $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB . Ta có $CH \perp (SAB)$ nên $d(C, (SAB)) = CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC) .

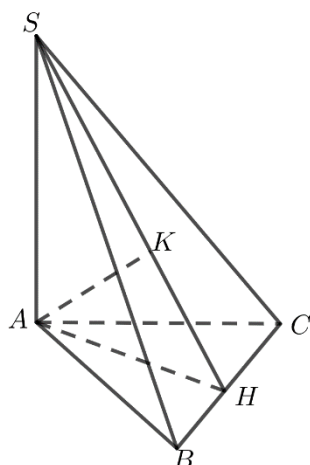
A. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

B. $d = a$.

C. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

D. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải



Vẽ $AH \perp BC$ tại $H \Rightarrow BC \perp (SAH)$.

Vẽ $AK \perp SH$ tại K mà $AK \perp BC \Rightarrow AK \perp (SBC)$ tại K .

Do đó $AK = d(A, (SBC))$. Do H là trung điểm của BC nên $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\text{Vậy } AK = \frac{SA \cdot AH}{\sqrt{SA^2 + AH^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{15}}{5}.$$

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, cạnh bên $SD = \sqrt{6}a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

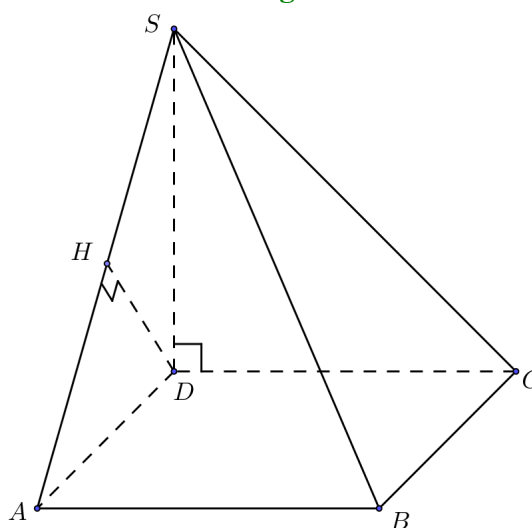
A. $\sqrt{3}a$.

B. $\sqrt{2}a$.

C. $2a$.

D. a .

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} AB \perp SD \\ AB \perp AD \\ SD \cap AD = D \text{ trong } (SAD) \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD)$$

Vẽ $DH \perp SA$ tại H trong mặt phẳng (SAD)

$$\text{Ta có } \begin{cases} DH \perp AB \\ DH \perp SA \\ AB \cap SA = A \text{ trong } (SAB) \end{cases} \Rightarrow DH \perp (SAB)$$

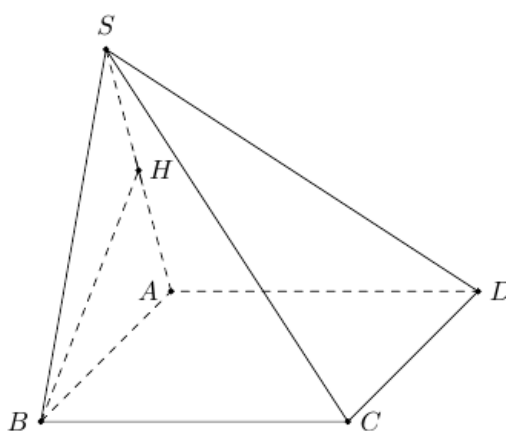
Vì $CD \parallel (SAB)$ nên $d(SB; CD) = d((SAB); CD) = d((SAB); D) = DH$.

$$\Delta SAD \text{ vuông tại } D \text{ với đường cao } DH \text{ có } DH = \frac{SD \cdot DA}{\sqrt{SD^2 + DA^2}} = \frac{3\sqrt{2}a^2}{3a} = a\sqrt{2}$$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a, BC = a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là

- A. $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. B. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \parallel AD \\ AD \subset (SAD) \Rightarrow BC \parallel (SAD), \text{ do đó } d(BC, SD) = d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)). \\ BC \not\subset (SAD) \end{cases}$$

Tam giác SAB đều, gọi H là trung điểm SA thì $BH \perp SA$ (1).

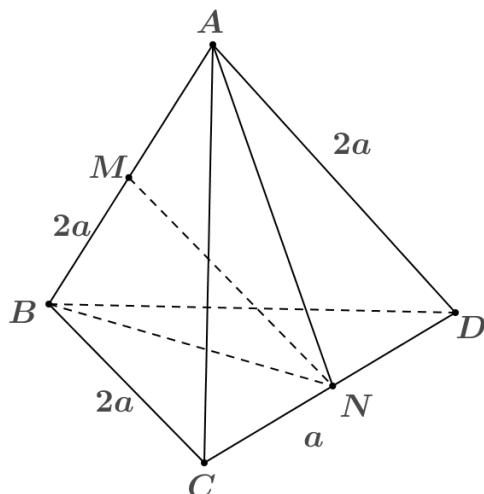
$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ AD \perp AB \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SAB) \Rightarrow (SAB) \perp (SAD) \text{ (2)}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAD)$, do đó $d(B, (SAD)) = BH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Câu 10: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa 2 đường thẳng AB và CD .

- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD .

Khi đó $NA = NB = a\sqrt{3}$ nên tam giác ANB cân, suy ra $NM \perp AB$. Chứng minh tương tự ta có $NM \perp DC$, nên $d(AB; CD) = MN$.

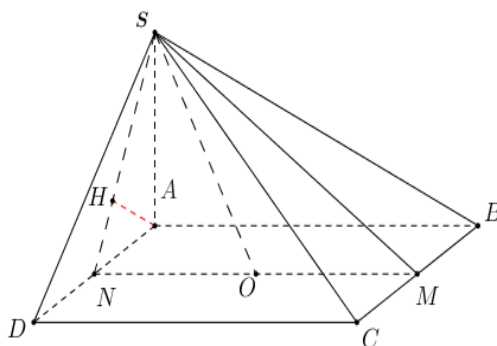
Xét tam giác vuông ANM ta có $MN = \sqrt{AN^2 - AM^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Vậy $d(AB, CD) = MN = a\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO .

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, AD . Dựng $AH \perp SN$

Khi đó $d(AB; SO) = d(AB, (SMN)) = d(A, (SMN)) = AH$

Do tam giác SBD có $\widehat{SBD} = 60^\circ$ và $SB = SD$ nên SBD là tam giác đều

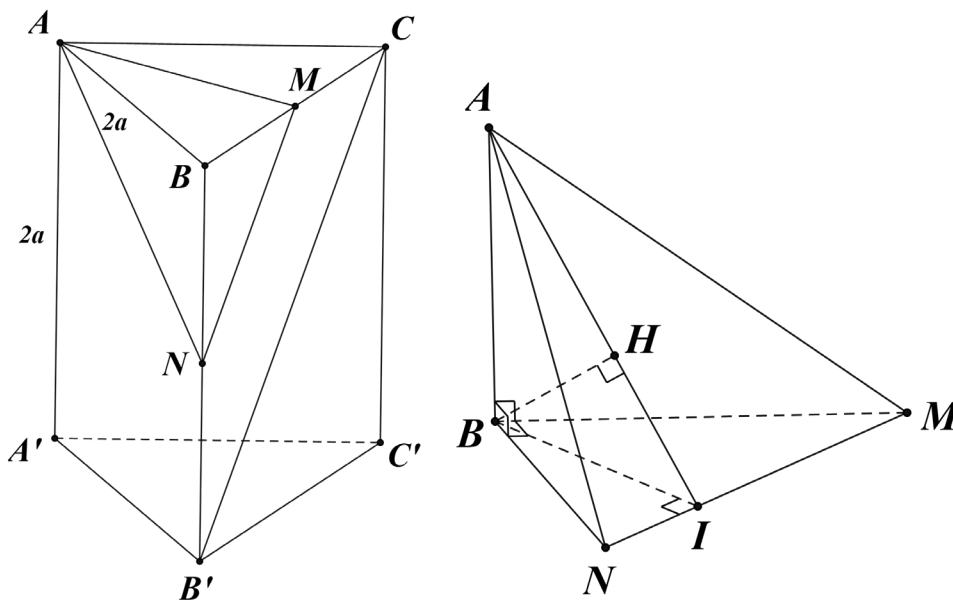
Suy ra $SD = BD = a\sqrt{2}$, do đó $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} = a$.

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AN^2} \Leftrightarrow AH = \frac{a\sqrt{5}}{5} = d(AB, SO)$.

Câu 12: Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng

- A. $\frac{a}{2}$. B. $\frac{2a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. D. $a\sqrt{3}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm $BB' \Rightarrow MN // B'C \Rightarrow B'C // (AMN)$.

Khi đó $d(AM, B'C) = d(B'C, (AMN)) = d(C, (AMN))$.

Ta có $BC \cap (AMN) = M$ và $MB = MC$ nên $d(C, (AMN)) = d(B, (AMN))$.

Gọi h là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (AMN) . Tứ diện $BAMN$ có BA, BM, BN đôi một

vuông góc nên: $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BM^2} + \frac{1}{BN^2}$

$AB = 2a = BC$.

$BN = \frac{1}{2}BB' = \frac{1}{2}AA' = \frac{2a}{2} = a$.

$BM = \frac{1}{2}BC = a$.

Suy ra $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow h^2 = \frac{4a^2}{9} \Rightarrow h = \frac{2a}{3}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SD và O lên cạnh SC .

a) OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

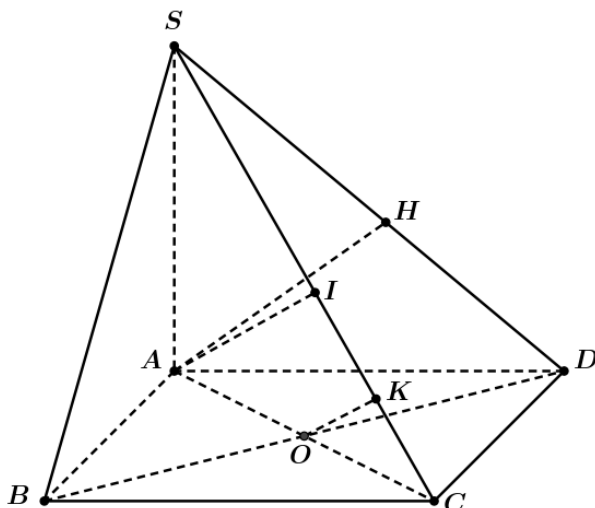
b) Đoạn vuông góc chung của SD và AB là AD .

c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Đúng	d) Sai
---------	--------	---------	--------



a) Đúng: Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OK$. Gọi O là tâm của hình vuông

$ABCD$ và $OK \perp SC$ thì OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

b) Sai: Ta có $\begin{cases} AD \perp AB \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AH$. Mặt khác, $AH \perp SD$. Vậy AH là

đoạn vuông góc chung của SD và AB

c) Đúng: AH là đoạn vuông góc chung của SD và AB . Tam giác SAD vuông cân tại A có

đường cao AH nên $AH = \frac{1}{2}SD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy $d(AB, SD) = AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

d) Sai: Ta có OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .

Khi đó $d(BD, SC) = OK = \frac{1}{2}AI$ (I là trung điểm của SC).

Ta có $\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{AS^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{3}{2a^2} \Rightarrow AK = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Vậy $d(BD, SC) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Khi đó:

a) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

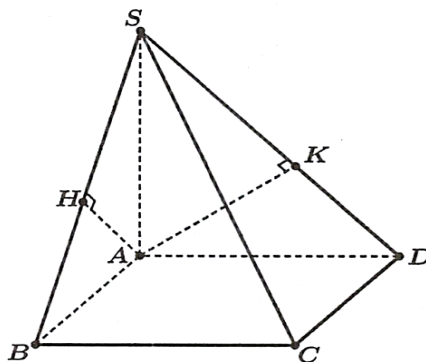
b) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

c) Kẻ $AK \perp SD$, $K \in SD$, khi đó AK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng SD, AB .

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AB bằng: $\frac{a\sqrt{5}}{5}$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------



a) Trong mặt phẳng (SAB) , kẻ $AH \perp SB$ tại H . (1)

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow AH \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC)$ hay $d(A, (SBC)) = AH$.

Tam giác SAB vuông tại A có đường cao AH nên:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a \cdot a\sqrt{2}}{\sqrt{4a^2 + 2a^2}} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy $d(A, (SBC)) = AH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

b) Ta có: $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

c) Trong mặt phẳng (SAD) , kẻ $AK \perp SD$ tại K . (3)

Ta có: $\begin{cases} AB \perp SA \\ AB \perp AD \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra AK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB, SD .

d) Vì AK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau AB, SD

Nên suy ra $d(AB, SD) = AK$.

Tam giác ACD vuông tại D nên $AD = \sqrt{AC^2 - CD^2} = \sqrt{3a^2 - 2a^2} = a$.

Tam giác SAD vuông tại A có đường cao AK nên

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} \Rightarrow AK = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a \cdot a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

Vậy $d(AB, SD) = AK = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Các khẳng định sau là đúng hay sai?

a) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng CB

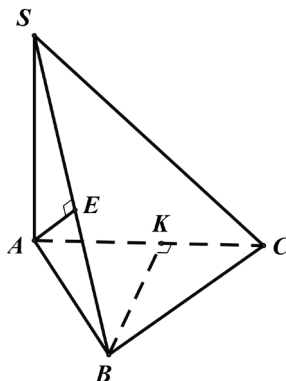
b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

c) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

d) Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách d giữa SM và BC là $\frac{\sqrt{17}a}{17}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



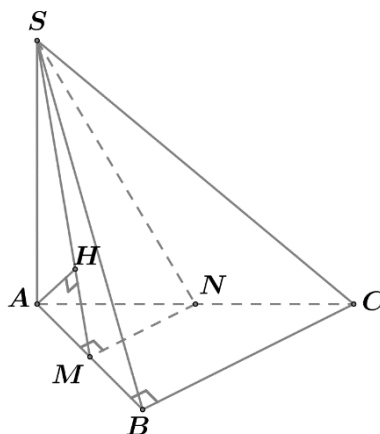
a) Đúng : Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow d(C; (SAB)) = CB$. Vậy a) đúng.

b) Đúng : Kẻ $AE \perp SB$. Khi đó $AE \perp BC \Rightarrow AE \perp (SBC)$
 $\Rightarrow AE$ là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

Ta có $\frac{1}{AE^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{5}{4a^2} \Rightarrow AE^2 = \frac{4a^2}{5} \Rightarrow AE = \frac{2\sqrt{5}a}{5}$.

c) Sai: Kẻ $BK \perp AC$. Khi đó $BK \perp SA \Rightarrow BK \perp (SAC)$, và K là trung điểm của AC
 $\Rightarrow BK$ là khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Ta có $BK = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.



d) Sai: Gọi N là trung điểm của AC .

Ta có $BC \parallel (SMN) \Rightarrow d(BC, SM) = d(BC, (SMN)) = d(B, (SMN)) = d(A, (SMN))$.

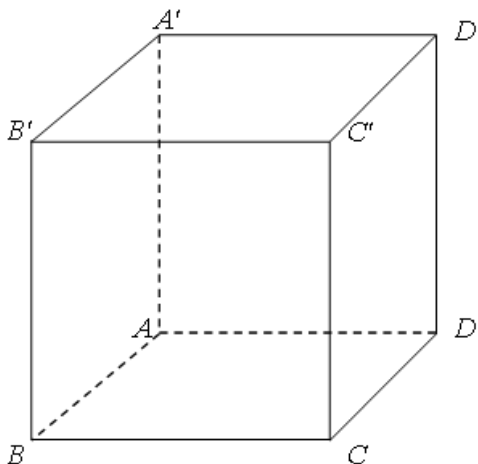
Kẻ $AH \perp SM$, $H \in SM$, ta có $AH \perp (SMN) \Rightarrow d(A, (SMN)) = AH$.

Ta có $AM = \frac{a}{2}$.

Xét tam giác SAM vuông tại A có AH là đường cao, suy ra $AH = \frac{SA \cdot AM}{\sqrt{SA^2 + AM^2}} = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

Vậy $d(BC, SM) = \frac{2a\sqrt{17}}{17}$.

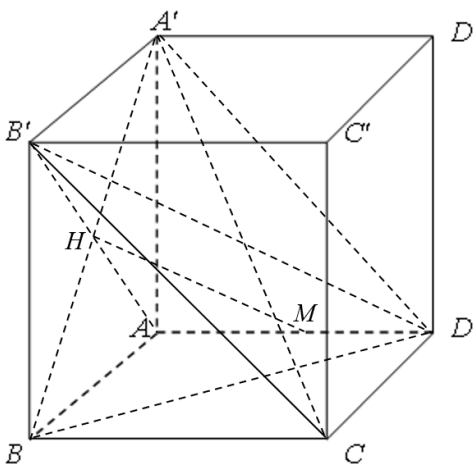
Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a .



- a) Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $A'B$ bằng $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.
- b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.
- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng $\frac{a}{2}$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$ bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



$ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương có các cạnh bằng a nên có tất cả các mặt là hình vuông cạnh a . Gọi H là tâm của hình vuông $ABB'A'$ và M là trung điểm của cạnh AD .

a) Đúng: $d(A, A'B) = AH = \frac{1}{2} AB' = \frac{\sqrt{2}}{2} a$.

b) Đúng: $d(A, (A'BD)) = h$ thì $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{3}{a^2}$. Do đó $h = \frac{\sqrt{3}}{3} a$.

c) Sai: $A'B \subset (A'BD)$.

$B'C \parallel A'D$, $A'D \subset (A'BD)$ nên $B'C \parallel (A'BD)$.

Do đó $d(A'B, B'C) = d(B'C, (A'BD)) = d(C, (A'BD))$.

Mặt khác $AC \cap (A'BD) = N$ là trung điểm của AC nên $d(C, (A'BD)) = d(A, (A'BD)) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$

Do đó $d(A'B, B'C) = \frac{\sqrt{3}}{3}a$.

d) Sai: $A'B \subset (A'BM)$.

$B'D \parallel HM$, $HM \subset (A'BM)$ nên $B'D \parallel (A'BM)$.

Do đó $d(A'B, B'D) = d(B'D, (A'BM)) = d(D, (A'BM))$.

Mặt khác $AD \cap (A'BM) = M$ là trung điểm của AD nên $d(D, (A'BM)) = d(A, (A'BM)) = k$

Khi đó $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{6}{a^2}$.

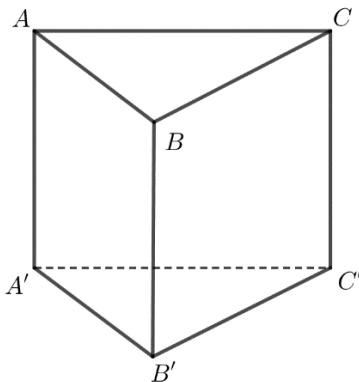
Do đó $d(A'B, B'D) = \frac{\sqrt{6}}{6}a$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC , $AA' = 2$. Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'B'C')$

Lời giải

Trả lời: 2



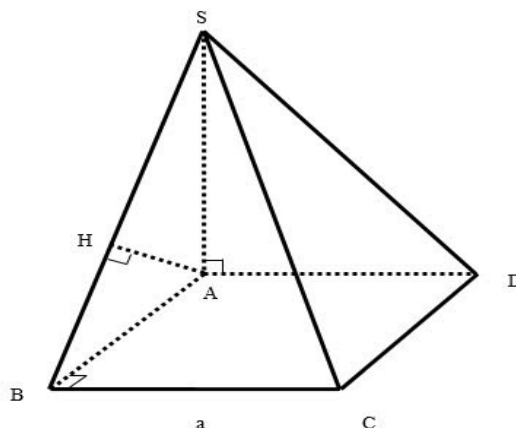
Ta có: $AA' \perp (A'B'C')$ (hình lăng trụ đứng)

$\Rightarrow d(A; (A'B'C')) = AA' = 2$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh 1, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \sqrt{2}$. Tính khoảng cách giữa AD đến mặt phẳng (SBC) (làm tròn số thập phân đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 0,8



- Vì $ABCD$ là hình vuông nên $AD \parallel BC \Rightarrow AD \parallel (SBC)$

Khi đó, $d(AD; (SBC)) = d(A; (SBC))$

- Kẻ $AH \perp SB$ tại H

- Ta có: $\left. \begin{array}{l} BC \perp SA \\ BC \perp BA \end{array} \right\}$

$\Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AH$

- Vì $AH \perp SB$ và $AH \perp BC$ nên $AH \perp (SBC)$

$\Rightarrow d(AD; (SBC)) = d(A; (SBC)) = AH$

- Xét tam giác vuông SAB , có

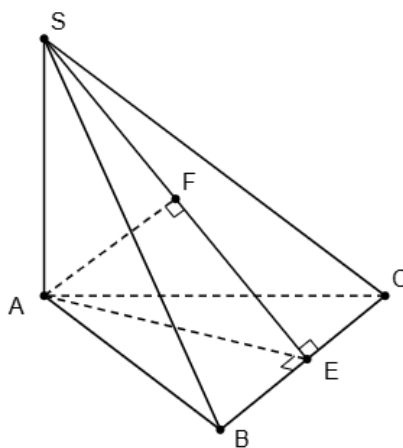
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} + \frac{1}{1^2}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{6}}{3} \approx 0,8$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SA = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

Trả lời: 0,71



Gọi E là trung điểm BC thì $BC \perp AE$ vì ΔABC đều.

Dựng $AF \perp SE$ (1) tại F .

Ta có: $BC \perp SA, BC \perp AE \Rightarrow BC \perp (SAE) \Rightarrow BC \perp AF$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra: $AF \perp (SBC)$.

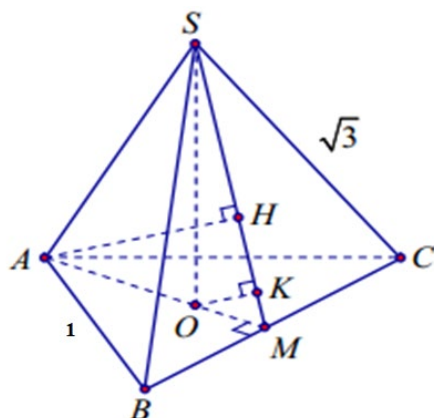
Vậy $d(A, (SBC)) = AF$.

Xét tam giác SAE vuông tại A , ta có: $\frac{1}{AF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = 2 \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$.

Câu 4: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có độ dài cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng $\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của đáy ABC , gọi d_1, d_2 lần lượt là khoảng cách từ A và O đến mặt phẳng (SBC) . Tổng $d = d_1 + d_2$ là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

Trả lời: 1,14



Ta có: $AM = \frac{\sqrt{3}}{2}, AO = \frac{\sqrt{3}}{3}, OM = \frac{\sqrt{3}}{6}, SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.

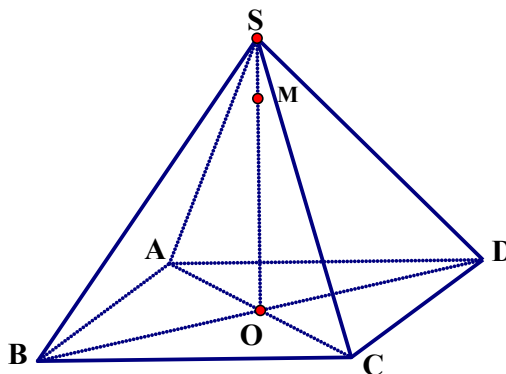
Lại có: $d_1 = d(A, (SBC)) = AH = 3OK, d_2 = d(O, (SBC)) = OK$.

Suy ra: $d = d_1 + d_2 = 3d_2 + d_2 = 4d_2 = 4OK = 4 \cdot \frac{SO \cdot OM}{\sqrt{SO^2 + OM^2}} = \frac{8\sqrt{22}}{33} \approx 1,14$.

Câu 5: Người ta dựng một cái lều cắm trại có dạng hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng $3m$ trên mặt đất bằng phẳng. Sau đó từ đỉnh của lều, người ta gắn một bóng đèn sao cho khoảng cách từ đỉnh lều đến bóng đèn bằng $30cm$. Khoảng cách từ bóng đèn đến mặt đất xấp xỉ bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 1,8



Cái lều được minh hoạ bởi hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.

Gọi O là tâm của đáy, M là vị trí bóng đèn. Khi đó khoảng cách từ bóng đèn đến mặt đất bằng độ dài đoạn thẳng MO .

$$\text{Ta có : } SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

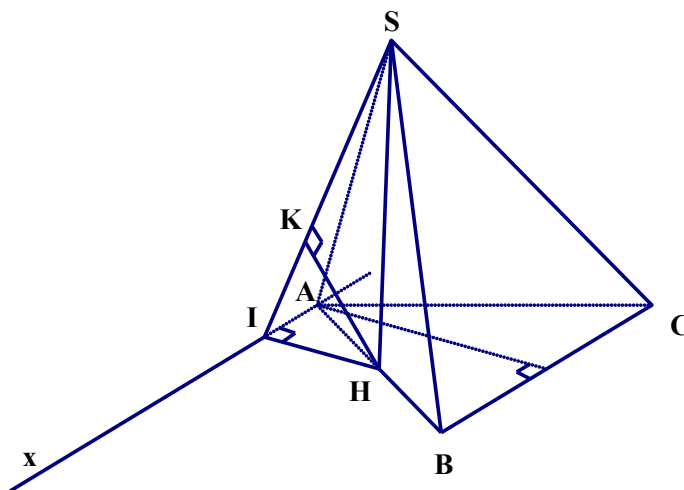
$$MO = SO - SM = \frac{3\sqrt{2}}{2} - 0,3 \approx 1,8$$

Vậy khoảng cách từ bóng đèn đến mặt đất xấp xỉ 1,8 m.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 2,32



Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB . Tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

Ta có :

$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \\ SH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABC)$$

Kẻ $Ax \parallel BC$, suy ra $BC \parallel (SA, Ax)$.

$$d(BC, SA) = d(BC, (SA, Ax)) = d(B, (SA, Ax)) = 2d(H, (SA, Ax))$$

Kẻ $HI \perp Ax, I \in Ax$, kẻ $HK \perp SI, K \in SI$. Ta có $d(H, (SA, Ax)) = HK$.

$$\text{Ta có: } IH = AH \cdot \sin 60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{4}, \quad SH = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Tam giác } SHI \text{ có: } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{HI^2} + \frac{1}{HS^2} \Rightarrow HK = \frac{3\sqrt{15}}{10}.$$

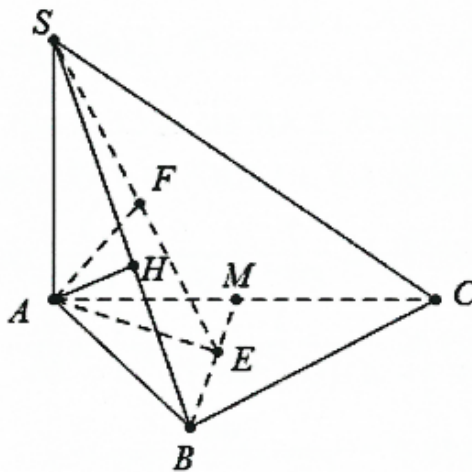
$$\text{Vậy } d(BC, SA) = 2HK = \frac{3\sqrt{15}}{5} \approx 2,32.$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B có $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Biết $SA = 2a$ và $SA \perp (ABC)$.

- a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .
 b) Gọi M là trung điểm của AC . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBM)

Lời giải



a) Ta có: $AB \perp BC$, mặt khác $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

$$\text{Dựng } AH \perp SB \Rightarrow \begin{cases} AH \perp SB \\ AH \perp BC \end{cases} \Rightarrow AH \perp (SBC).$$

$$\text{Khi đó } d(A; (SBC)) = AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$$

b) Dựng $AE \perp BM, AF \perp SE$ ta có: $\begin{cases} AE \perp BM \\ SA \perp BM \end{cases} \Rightarrow BM \perp (SAE) \Rightarrow BM \perp AF$

$$\text{Khi đó: } \begin{cases} AF \perp SE \\ AF \perp BM \end{cases} \Rightarrow AF \perp (SBM)$$

Ta có: $AB = a, AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$. Do BM là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền nên

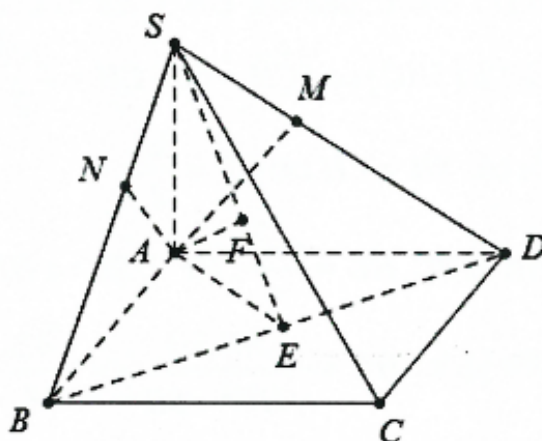
$$BM = \frac{1}{2} AC = AM = AB = a \Rightarrow \Delta ABM \text{ đều cạnh } a \Rightarrow AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Khi đó } d(A; (SBM)) = \frac{AE \cdot SA}{\sqrt{AE^2 + SA^2}} = \frac{2a\sqrt{57}}{19}$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a$.

- a) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) và (SBC) .
 b) Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .

Lời giải



a) Dựng $AN \perp SB$. Do $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp AN$.

$\Rightarrow AN \perp (SBC) \Rightarrow d(A; (SBC)) = AN = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}}$. Vậy $d(A; (SBC)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự $d(A; (SCD)) = AM = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{2a}{\sqrt{5}}$.

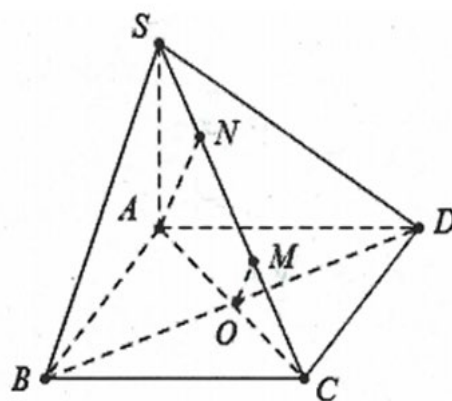
b) Dựng $AE \perp BD, AF \perp SE$.

Ta chứng minh được $d(A; (SBD)) = d = AF$

Vì $AS \perp AB \perp AD \Rightarrow \frac{1}{d^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow d = \frac{2a}{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

Lời giải



Do $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$. Do đó $\widehat{((SBC); (ABCD))} = \widehat{SBA} = 60^\circ$

Suy ra $SA = AB \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Dựng $OM \perp SC$ khi đó OM là đường vuông góc chung của BD và SC .

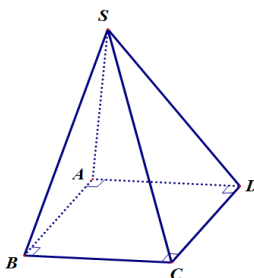
$$\text{Ta có: } \triangle CAS \sim \triangle CMO \text{ (g - g)} \Rightarrow \frac{SC}{CO} = \frac{SA}{MO} \Rightarrow OM = \frac{SA \cdot OC}{SC} = \frac{a\sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{2\sqrt{5}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}.$$

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG
KHÔNG GIAN

BÀI: KHOẢNG CÁCH
ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD là



- A. CB . B. CA . C. CD . D. CS .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $2a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

- A. $2a$. B. $a\sqrt{3}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\sqrt{2}a$. B. $2a$. C. a . D. $2\sqrt{2}a$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

- A. $a\sqrt{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $2a$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

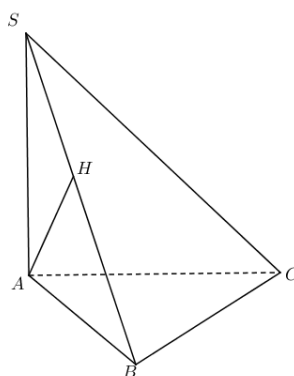
- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. a .

Câu 9: Bạn Khang muốn dựng một chiếc Lều nhỏ có dạng hình chóp (tham khảo hình vẽ) trang trí cho sinh nhật em trai. Mặt đáy của chiếc Lều có kích thước là 120×160 cm. Để dựng được Lều có chiều cao 150cm thì bạn Khang cần chuẩn bị bốn thanh gỗ dựng khung có chiều dài tối thiểu bao nhiêu? Biết rằng các thanh gỗ có khoảng cách từ chân đến đỉnh Lều bằng nhau.



- A. $30\sqrt{11}$ cm. B. $50\sqrt{11}$ cm. C. $50\sqrt{13}$ cm. D. $30\sqrt{13}$ cm.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy, $AB = a$. Khoảng cách từ điểm A đến SB bằng:



- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a}{2}$. D. $a\sqrt{2}$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC . Khoảng cách giữa MN và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 12: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $C'D$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a}{2}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh a .

- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 b) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$
 c) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{3}$
 d) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $SA \perp (ABCD)$; $SA = a$; $AB = BC = a$; $AD = 2a$

- a) Khoảng cách từ điểm D đến cạnh BC là $a\sqrt{2}$.
 b) Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) là a .
 c) Khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
 d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA' = 2a$.

- a) Độ dài $A'C$ bằng $a\sqrt{3}$.
 b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a .
 c) Khoảng cách giữa $B'D'$ và AC bằng $2a$.
 d) Khoảng cách giữa BD và CD' bằng $\frac{a}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$.

- a) Khoảng cách từ S đến đường thẳng AC bằng $2\sqrt{2}a$.
 b) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAD) bằng a .
 c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng a .
 d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

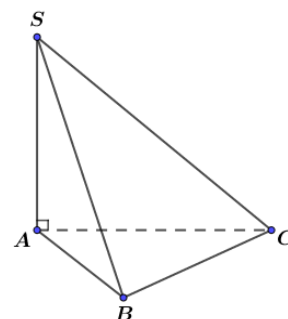
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh 1. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30° . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) . (làm tròn đến chữ số hàng phần trăm)

Câu 2: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng 2. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AD, DC, A'D'$. Tính $d((MNP), (ACC'))$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 3: Trong một chuyến du lịch anh An dùng giá đỡ ba chân để kẹp điện thoại chụp hình (một chiếc giá đỡ cấu tạo gồm hai phần: Phần thứ nhất là chân; phần thứ hai là đầu kẹp điện thoại như hình vẽ). Biết rằng giá đỡ được mở ra sao cho ba góc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 120 cm. Tính chiều cao của giá đỡ, biết chân của giá đỡ dài 130 cm và đầu kẹp điện thoại dài 15 cm (kết quả tính Centimet).



Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , biết $SA = AC = 4\sqrt{2}; AB = 4$ và SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng



Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 1, G là trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) .

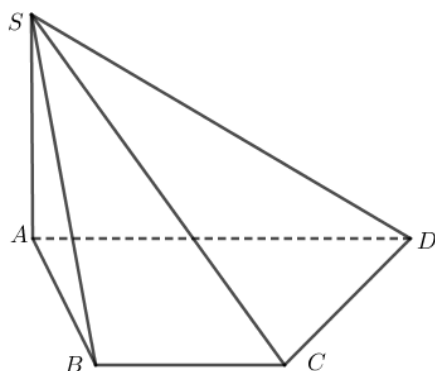
Câu 6: Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 262 mét, cạnh bên dài 230 mét. Khi xây dựng kim tự tháp người Ai Cập cổ đại đã tính toán xây dựng một đường hầm lấy sáng tự nhiên từ một mặt bên đến tâm đáy ngắn nhất. Khoảng cách xây đường hầm đó là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2024, $SA \perp (ABCD)$ và mặt bên (SCD) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) ?

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ).



Tính khoảng cách từ A đến (SBC)

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(A'BD)$

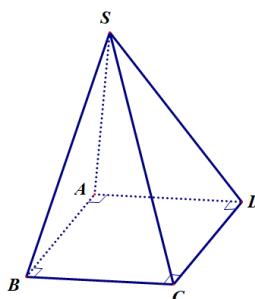
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

----- **HẾT** -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

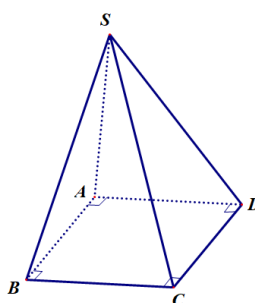
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD là



- A. CB . B. CA . **C. CD .** D. CS .

Lời giải

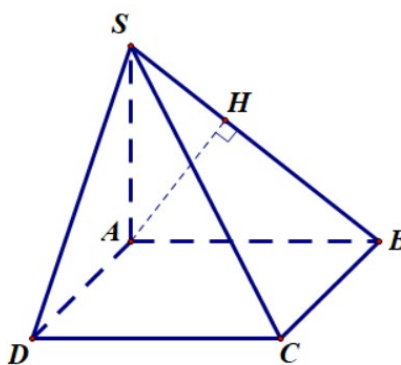


Vì $CD \perp AD$ nên khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD là CD .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $a\sqrt{3}$. **B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.** C. $2a\sqrt{3}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải



Kẻ $AH \perp SB$. Mà $AH \perp BC$ (do

Do

đó

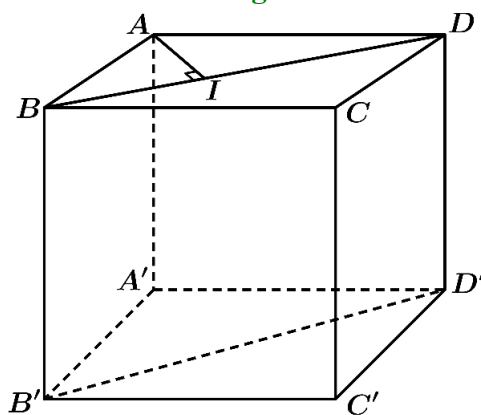
$BC \perp (SAB)$), suy

$$d(A; (SBC)) = AH = \frac{AB \cdot SA}{\sqrt{AB^2 + AS^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

- A. $2a$. B. $a\sqrt{3}$. C. a . **D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.**

Lời giải



Kẻ $AI \perp BD$ tại I (1).

Do $BB' \perp (ABCD)$ nên $BB' \perp AI$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AI \perp (BDD'B')$ hay $d(A, (BDD'B')) = AI$.

Xét tam giác vuông ABD , ta có $AI = \frac{AB \cdot AD}{\sqrt{AB^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{3} \cdot a}{\sqrt{3a^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(A, (BDD'B')) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- A. $\sqrt{2}a$. B. $2a$. C. a . D. $2\sqrt{2}a$.

Lời giải

$SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CB$

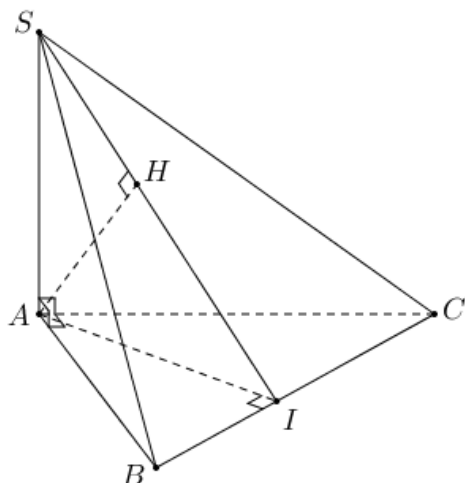
Ta có $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$.

Do đó $d(C, (SAB)) = CB = \sqrt{AC^2 - AB^2} = 2\sqrt{2}a$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. D. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Lời giải



Gọi I là hình chiếu của A trên BC , H là hình chiếu của A trên SI .

Ta có:

$$\left. \begin{array}{l} SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC \\ AI \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH \left. \begin{array}{l} SI \perp AH \end{array} \right\} \Rightarrow AH \perp (SBC)$$

Do đó: $d(A, (SBC)) = AH$

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{2a^2} = \frac{5}{2a^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{10}}{5}$$

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{10}}{5}$.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

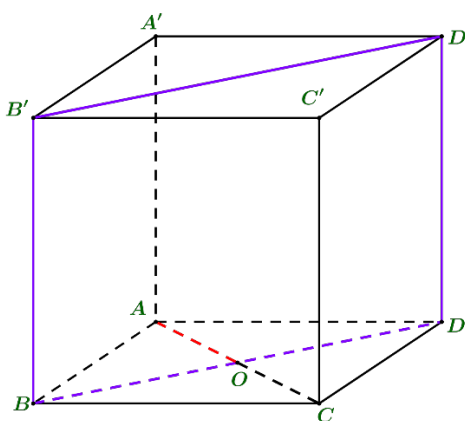
A. $a\sqrt{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $2a$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Kẻ $AO \perp BD$, $O \in BD$.

Ta có $\begin{cases} AO \perp BD \\ AO \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AO \perp (BDD'B') \Rightarrow d(A, ((BDD'B'))) = AO$.

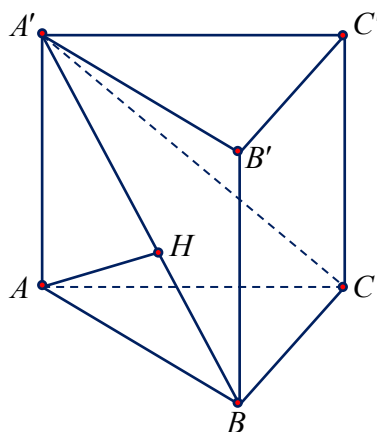
Xét tam giác vuông ABD ta có $\frac{1}{AO^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow AO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $d(A, (BDD'B')) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 7: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Ta có $\left. \begin{matrix} BC \perp AB \\ BC \perp AA' \end{matrix} \right\} \Rightarrow BC \perp (A'AB) \Rightarrow (A'AB) \perp (A'BC)$

Kẻ $AH \perp A'B \Rightarrow AH \perp (A'BC)$. Do đó $d(A, (A'BC)) = AH$.

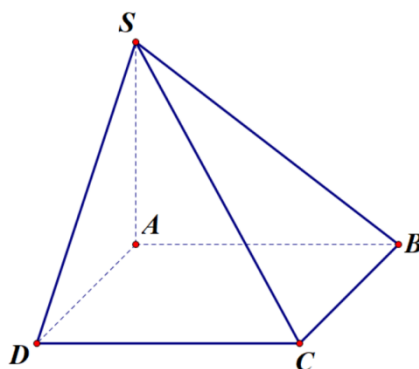
Xét tam giác vuông $A'AB$ có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$.

$\Rightarrow AH^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy $d(A, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

- A. $a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $2a$. D. a .

Lời giải



Vì $CD \parallel AB$ nên $d(SB, CD) = d(CD, (SAB)) = d(D, (SAB)) = AD = a$.

Câu 9: Bạn Khang muốn dựng một chiếc Lều nhỏ có dạng hình chóp (tham khảo hình vẽ) trang trí cho sinh nhật em trai. Mặt đáy của chiếc Lều có kích thước là 120×160 cm. Để dựng được Lều có chiều cao 150cm thì bạn Khang cần chuẩn bị bốn thanh gỗ dựng khung có chiều dài tối thiểu bao nhiêu? Biết rằng các thanh gỗ có khoảng cách từ chân đến đỉnh Lều bằng nhau.



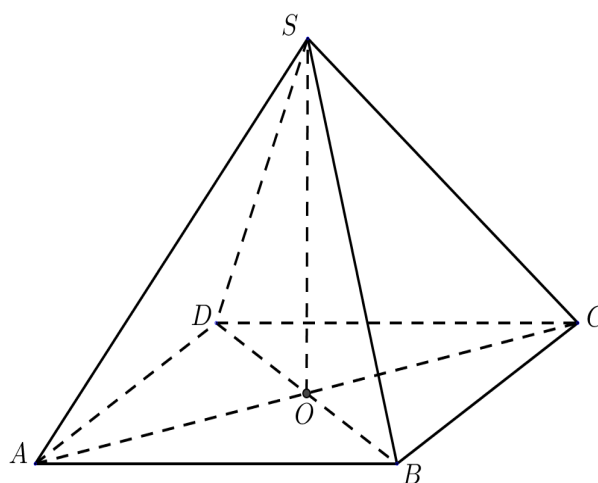
A. $30\sqrt{11}$ cm.

B. $50\sqrt{11}$ cm.

C. $50\sqrt{13}$ cm.

D. $30\sqrt{13}$ cm.

Lời giải



Do hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp có các cạnh bên bằng nhau nên $SO \perp (ABCD)$ do đó đường cao của hình chóp bằng $SO = 150$ (cm).

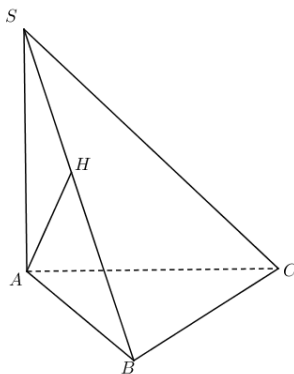
Ta có: $\triangle ADC$ vuông tại D có $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{120^2 + 160^2} = 200$ (cm)

$\Rightarrow AO = 100$ (cm).

Tam giác $\triangle SAO$ vuông tại O có $SA = \sqrt{SO^2 + AO^2} = \sqrt{150^2 + 100^2} = 50\sqrt{13}$ (cm).

Vậy mỗi thanh gỗ có chiều dài tối thiểu $50\sqrt{13}$ cm.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy, $AB = a$. Khoảng cách từ điểm A đến SB bằng:



A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a}{2}$.

D. $a\sqrt{2}$.

Lời giải

Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB$ tại H . Suy ra khoảng cách từ điểm A đến SB bằng độ dài AH .

Do $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$.

Tam giác SAB vuông tại A và AH là đường cao.

$$\text{Suy ra: } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{2}{a^2}.$$

$$\Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 11: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC . Khoảng cách giữa MN và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

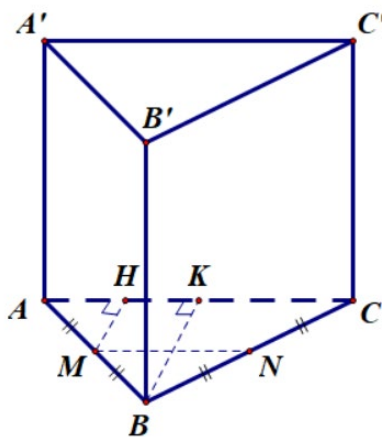
A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải



Kẻ $BK \perp AC$. Mà tam giác ABC đều cạnh a nên $BK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Kẻ $MH \perp AC$, mà $MH \perp AA'$ (do $AA' \perp (ABC)$), suy ra $MH \perp (ACC'A')$.

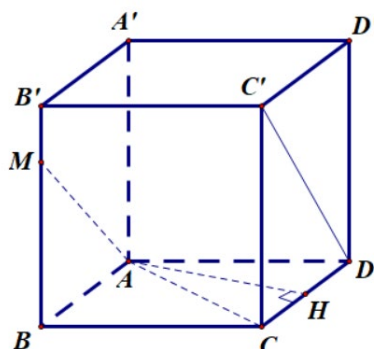
Ta có M, N là trung điểm của AB, AC nên $MN \parallel AC \Rightarrow MN \parallel (ACC'A')$.

$$\text{Do đó } d(MN, (ACC'A')) = d(M; (ACC'A')) = MH = \frac{1}{2}BK = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

Câu 12: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $C'D$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{3a}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3a}{2}$.

Lời giải



Dễ thấy $(ABB'A') \parallel (CDD'C') \Rightarrow AM \parallel (CDD'C')$.

Ta có $d(AM, C'D) = d(AM, (CDD'C')) = d(A, (CDD'C'))$.

Kẻ $AH \perp CD$, mà $AH \perp CC'$ (do $CC' \perp (ABCD)$),

suy ra $AH \perp (CDD'C') \Rightarrow d(A, (CDD'C')) = AH$.

Lại có $ABCD$ là hình thoi và $\widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ACD$ đều cạnh $a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh a .

a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

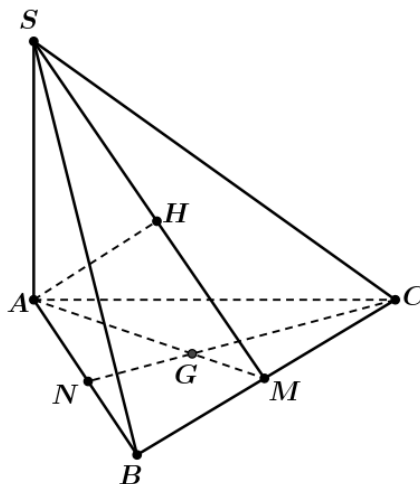
b) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{3}$

d) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{21}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------



a) Sai: M là trung điểm BC .

Tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ mà $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp AM$

Vậy khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

b) Sai: N là trung điểm AB . Tam giác ABC đều nên $CN \perp AB$ và $CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp CN$. Vậy $CN \perp (SAB)$.

Suy ra $d(C, (SAB)) = CN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Sai: Kẻ $AH \perp AM$ tại H

Ta có $BC \perp AM$; $SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$

Vậy $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp AH$

Vậy $AH \perp (SBC)$

Suy ra $d(A, (SBC)) = AH$

Tam giác SAM vuông tại A có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{7}{3a^2}$

Suy ra $AH^2 = \frac{3a^2}{7} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{21}}{7}$

d) Đúng: Ta có $\frac{GM}{AM} = \frac{d(G, (SBC))}{d(A, (SBC))} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow d(G, (SBC)) = \frac{1}{3} d(A, (SBC)) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{21}}{7} = \frac{a\sqrt{21}}{21}$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B ,
 $SA \perp (ABCD)$; $SA = a$; $AB = BC = a$; $AD = 2a$

a) Khoảng cách từ điểm D đến cạnh BC là $a\sqrt{2}$.

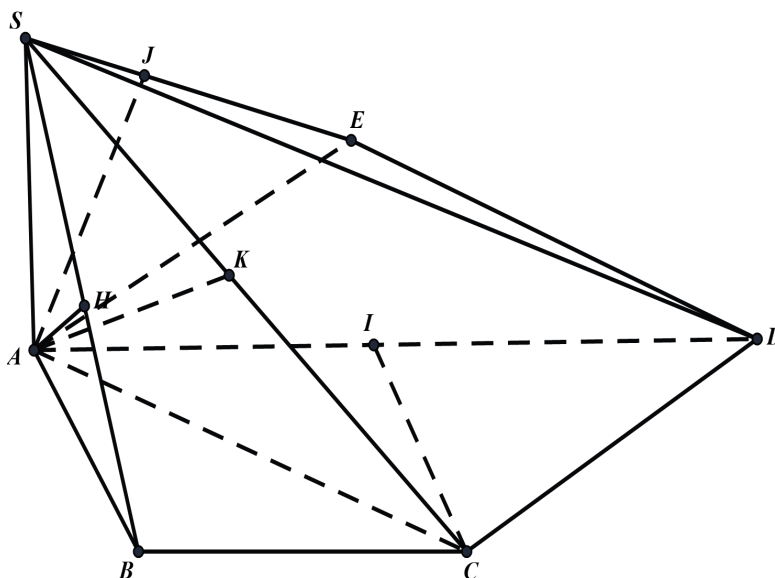
b) Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) là a .

c) Khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
--------	--------	--------	---------



a) Sai: Khoảng cách từ điểm D đến cạnh BC là $a\sqrt{2}$.

Để thấy $AD // BC$ nên khoảng cách $d(D; BC) = d(A; BC) = AB = a$

b) Sai: Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) là a .

dựng đường cao AH của tam giác SAB , suy ra được $AH \perp (SBC)$ nên

$$d(A, (SBC)) = AH = \frac{\sqrt{AS^2 \cdot AB^2}}{\sqrt{AS^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c) Sai: Khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

Gọi I là trung điểm AD , nhận thấy tứ giác $ABCI$ là hình vuông cạnh a ,

Xét trong tam giác ACD có CI là đường trung tuyến và $CI = a = IA = ID$, từ đó suy ra tam giác ACD vuông tại C .

Dựng đường cao AK của tam giác SAC , dễ dàng chứng minh được $AK \perp (SCD)$

$$\text{Suy ra } d(A, (SCD)) = AK = \frac{\sqrt{AC^2 \cdot AS^2}}{\sqrt{AC^2 + AS^2}} = \frac{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 \cdot a^2}}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

d) Đúng: Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Dựng hình chữ nhật $ACDE$, ta có $AC // DE$ nên $AC // (SDE)$.

$$AE = CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$$

$$\text{Do đó } d(AC, DE) = d(AC, (SDE)) = d(A, (SDE)).$$

Dựng đường cao AJ trong tam giác SAE , ta chứng minh được $AJ \perp (SDE)$.

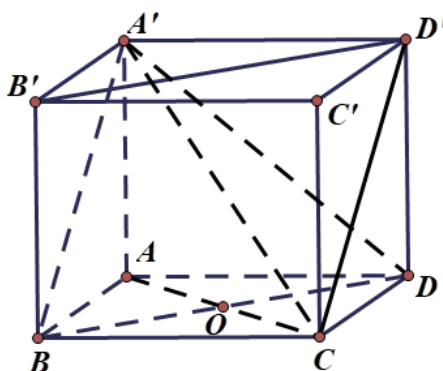
$$\text{Từ đó suy ra } d(A, (SDE)) = AJ = \frac{\sqrt{AE^2 \cdot AS^2}}{\sqrt{AE^2 + AS^2}} = \frac{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 \cdot a^2}}{\sqrt{(a\sqrt{2})^2 + a^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA' = 2a$.

- Độ dài $A'C$ bằng $a\sqrt{3}$.
- Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a .
- Khoảng cách giữa $B'D'$ và AC bằng $2a$.
- Khoảng cách giữa BD và CD' bằng $\frac{a}{3}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------



a) Sai: Ta có: $A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{AA'^2 + AB^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$

b) Đúng: Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC'B') \Rightarrow d(A; (BCC'B')) = AB = a$

c) Đúng: Có $B'D' \subset (A'B'C'D') \parallel (ABCD) \supset AC \Rightarrow d(B'D'; AC) = d((A'B'C'D'); (ABCD)) = 2a$.

d) Sai: Ta có: $CD' \parallel A'B \Rightarrow CD' \parallel (A'BD) \supset BD$

$$\Rightarrow d(BD; CD') = d(CD'; (A'BD)) = d(C; (A'BD)) = d(A; (A'BD))$$

Ta thấy $AA'BD$ là tứ diện có AB, AD, AA' đôi một vuông góc

$$\Rightarrow \frac{1}{d^2[A; (A'BD)]} = \frac{1}{AA'^2} + \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{4a^2} \Rightarrow d(A; (A'BD)) = \frac{2a}{3}$$

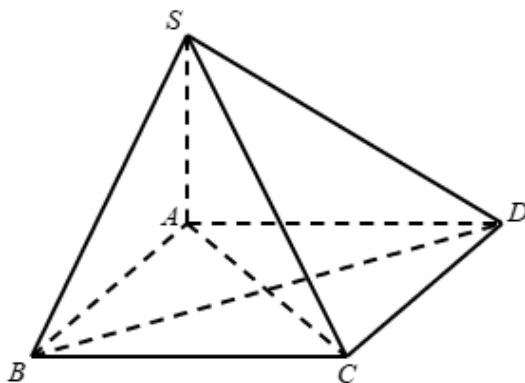
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và

$$SA = a\sqrt{6}.$$

- Khoảng cách từ S đến đường thẳng AC bằng $2\sqrt{2}a$.
- Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAD) bằng a .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng a .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------



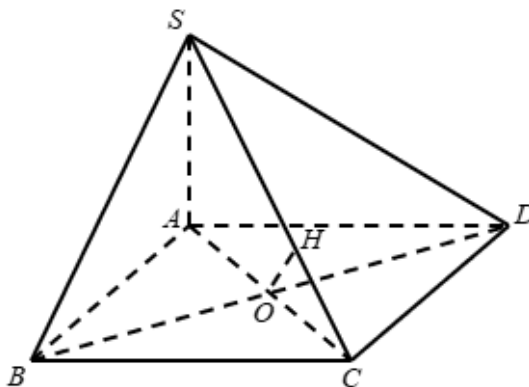
a) Sai: Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AC$. Vậy $d(S, AC) = SA = a\sqrt{6}$.

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$. Vậy $d(C, (SAD)) = CD = a$.

c) Đúng: Ta có $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$. Mặt khác $BC \perp CD$.

$\Rightarrow BC$ là đoạn vuông góc chung của SB và CD . Vậy $d(SB, CD) = BC = a$.

d) Sai:



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$ tại O .

Trong mặt phẳng (SAC) : từ O kẻ $OH \perp SC$ tại H .

Ta có $OH \perp SC$ và $OH \perp BD$ (do $BD \perp (SAC), OH \subset (SAC)$). Vậy OH là đoạn vuông góc chung của SC và BD .

$$\text{Ta có } \sin \widehat{ACS} = \frac{SA}{SC} = \frac{OH}{OC} \Rightarrow OH = \frac{OC \cdot SA}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{6}}{2\sqrt{2}a} = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

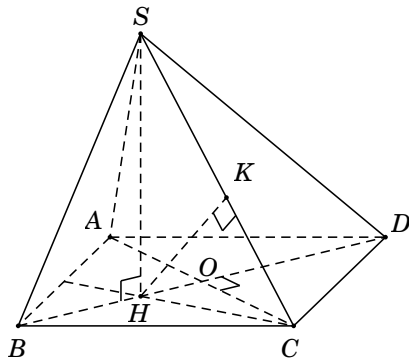
$$\text{Vậy } d(SC, BD) = OH = \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh 1. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ góc 30° . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) . (làm tròn đến chữ số hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 0,65



Xác định $30^\circ = \widehat{SD, (ABCD)} = \widehat{SD, HD} = \widehat{SDH}$ và $SH = HD \cdot \tan \widehat{SDH} = \frac{2}{3}$.

Do $BH \cap (SCD) = D \Rightarrow d[B, (SCD)] = \frac{BD}{HD} \cdot d[H, (SCD)] = \frac{3}{2} \cdot d[H, (SCD)]$.

Ta có $HC \perp AB \Rightarrow HC \perp CD$.

Kẻ $HK \perp SC$. Khi đó $d[H, (SCD)] = HK$.

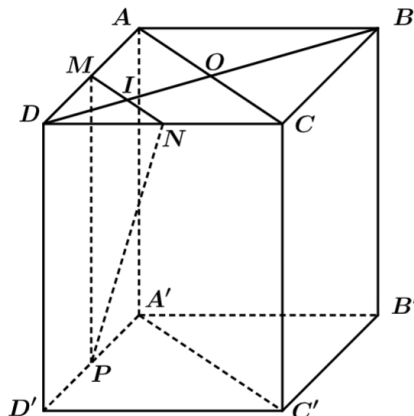
Tam giác vuông $\$SHC\$, có $HK = \frac{SH \cdot HC}{\sqrt{SH^2 + HC^2}} = \frac{2\sqrt{21}}{21}$.$

Vậy $d[B, (SCD)] = \frac{3}{2} HK = \frac{\sqrt{21}}{7} \approx 0,65$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng 2. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của $AD, DC, A'D'$. Tính $d((MNP), (ACC'))$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 0,71



Vì MN là đường trung bình của tam giác DAC nên $MN \parallel AC$ (1)

MP là đường trung bình của $DAA'D'$ nên $MP // CC'$ (2)

Từ (1), (2) suy ra $(MNP) // (ACC')$.

Gọi $O = AC \cap BD$, $I = MN \cap BD$,

Khi đó $\begin{cases} OI \perp AC \\ OI \perp CC' \end{cases} \Rightarrow OI \perp (ACC')$.

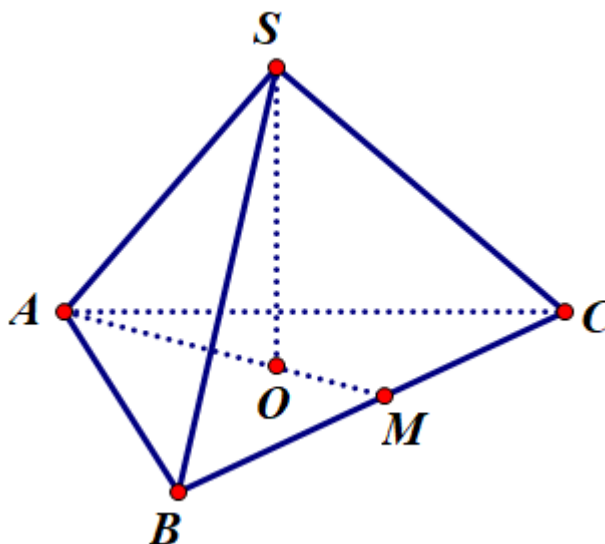
Vậy $d((MNP), (ACC')) = d(I, (ACC')) = OI = \frac{1}{2}DO = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,71$.

Câu 3: Trong một chuyến du lịch anh An dùng giá đỡ ba chân để kẹp điện thoại chụp hình (một chiếc giá đỡ cấu tạo gồm hai phần: Phần thứ nhất là chân; phần thứ hai là đầu kẹp điện thoại như hình vẽ). Biết rằng giá đỡ được mở ra sao cho ba góc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 120 cm. Tính chiều cao của giá đỡ, biết chân của giá đỡ dài 130 cm và đầu kẹp điện thoại dài 15 cm (kết quả tính Centimet).



Lời giải

Trả lời: 125



Phần chân giá đỡ có dạng hình chóp đều $S.ABC$

Gọi O là trọng tâm tam giác ABC khi đó $SO \perp (ABC)$

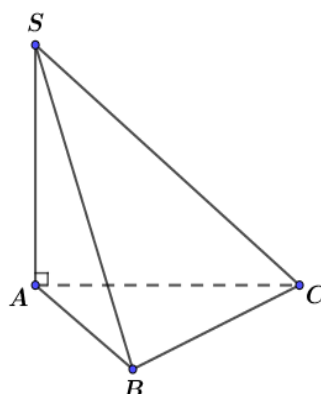
Theo bài $AB = BC = AC = 120 \text{ cm}$; $SA = SB = SC = 130 \text{ cm}$

Gọi M là trung điểm của BC ta có: $AM = \frac{120\sqrt{3}}{2} = 60\sqrt{3}$ suy ra $AO = \frac{2}{3}AM = 40\sqrt{3}$

Xét tam giác vuông SAO ta có: $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = 110$

Vậy chiều cao của giá đỡ là $110 + 15 = 125$ (cm)

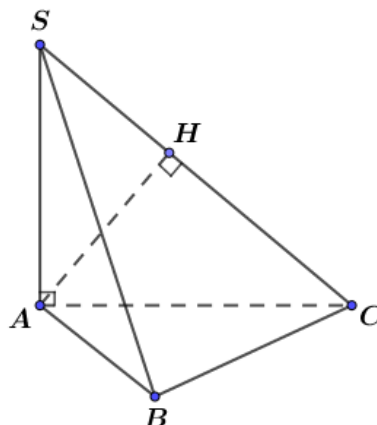
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , biết $SA = AC = 4\sqrt{2}$; $AB = 4$ và SA vuông góc với mặt đáy (tham khảo hình vẽ).



Khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC bằng

Lời giải

Trả lời: 4



Kẻ AH vuông góc với SC .

Theo giả thiết ta có $SA \perp AB$; $AC \perp AB$ nên suy ra $AB \perp (SAC)$.

Do đó $AB \perp AH \Rightarrow AH$ là đoạn vuông góc chung của AB và SC .

$\Rightarrow d(AB, SC) = AH$.

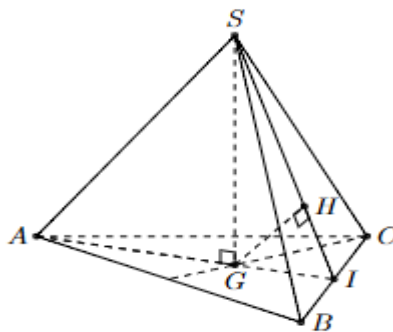
Xét tam giác vuông cân SAC có: $SC = 2.4 = 8 \Rightarrow AH = \frac{1}{2}SC = 4$.

Vậy $d(AB, SC) = 4$.

Câu 5: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng 1, G là trọng tâm tam giác ABC . Góc giữa mặt bên và đáy bằng 60° . Tính khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải

Trả lời: 0,25



Gọi I là trung điểm của BC .

Trong mặt phẳng (SAI) kẻ $GH \perp SI$. (1)

$$\text{Ta có } \begin{cases} BC \perp AI \\ BC \perp SI \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp GH. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\Rightarrow GH \perp (SBC) \Rightarrow d(G; (SBC)) = GH$.

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SI \perp BC \\ AI \perp BC \end{cases} \Rightarrow ((SBC); (ABC)) = (SI; AI) = \widehat{SIA} = \widehat{SIG} = 60^\circ.$$

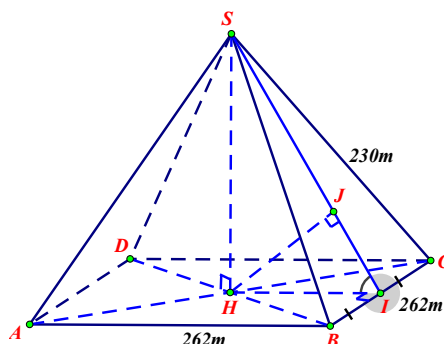
$$\text{Ta có } GI = \frac{1}{3} AI = \frac{a\sqrt{3}}{6} \Rightarrow GH = GI \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Câu 6: Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 262 mét, cạnh bên dài 230 mét. Khi xây dựng kim tự tháp người Ai Cập cổ đại đã tính toán xây dựng một đường hầm lấy sáng tự nhiên từ một mặt bên đến tâm đáy ngắn nhất. Khoảng cách xây đường hầm đó là bao nhiêu? (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất).



Lời giải

Trả lời: 94,5



Ta giả sử các cạnh và đỉnh của kim tự tháp như hình vẽ. Vì $S.ABCD$ hình chóp tứ giác đều nên $SH \perp (ABCD)$ ($H = AC \cap BD$).

Xét ABC vuông tại A , ta có: $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{262^2 + 262^2} = 262\sqrt{2}$ (m)

$$\Rightarrow HC = \frac{AC}{2} = 131\sqrt{2} \text{ (m)}$$

Xét SHC vuông tại H , ta có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{230^2 - (131\sqrt{2})^2} = \sqrt{18578}$ (m).

Kẻ HJ vuông góc với SI , suy ra HI là đoạn đường ngắn nhất.

Có: $SI^2 = SC^2 - IC^2 = 230^2 - 131^2 = 35739$

$$HI^2 = SI^2 - SH^2 = 35739 - 18578 = 17161$$

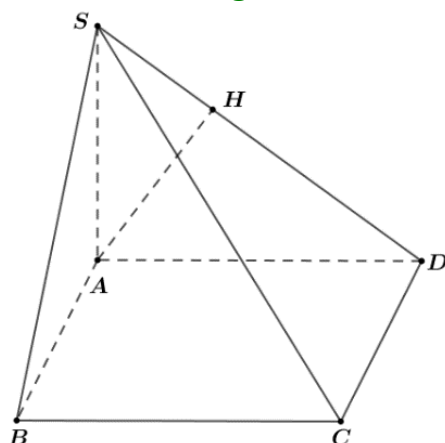
Trong tam giác SHI vuông tại H , ta có: $\frac{1}{HJ^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HI^2} = \frac{1}{18578} + \frac{1}{17161} = \frac{35739}{18578.17161}$

$$\Rightarrow HJ^2 = \frac{18578.17161}{35739} \Rightarrow HJ \approx 94,5(m).$$

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 2024, $SA \perp (ABCD)$ và mặt bên (SCD) hợp với mặt đáy $(ABCD)$ một góc 60° . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) ?

Lời giải



Ta có:
$$\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ AD \perp CD \\ SD \perp CD \end{cases} \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = (\widehat{AD, SD}) = \widehat{SDA} = 60^\circ$$

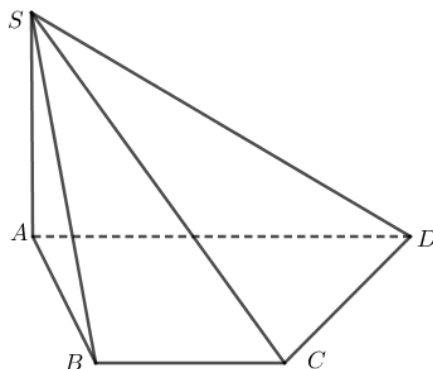
Vì $BA \parallel (SCD)$ nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$.

Từ A kẻ $AH \perp SD$ thì $AH \perp CD$ (do $CD \perp SA, CD \perp AD$).

Do đó $d(A, (SCD)) = AH = AD \cdot \sin \widehat{SDA} = 2024 \cdot \sin 60^\circ = \frac{2024\sqrt{3}}{2}$.

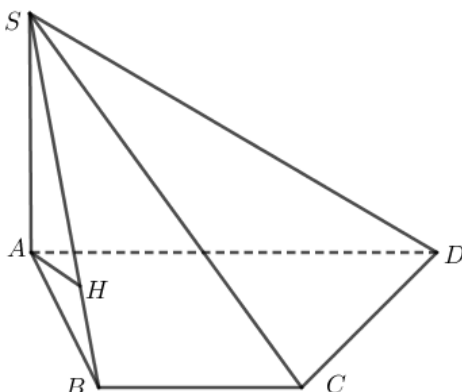
$$\Rightarrow d(B, (SCD)) = d(A, (SCD)) = 1012\sqrt{3}.$$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2AB = 2BC = 2a$, cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$ (tham khảo hình vẽ).



Tính khoảng cách từ A đến (SBC)

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của A trên SB (1).

Ta có: $BC \perp AB, SA \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

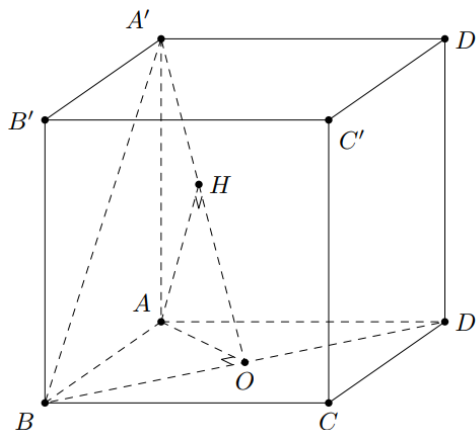
Từ (1),(2) ta có $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Xét tam giác vuông SAB , ta có: $AH = \frac{SA \cdot AB}{\sqrt{SA^2 + AB^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính khoảng cách từ điểm A tới mặt phẳng $(A'BD)$

Lời giải

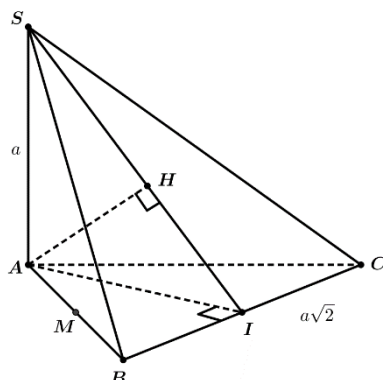


Có $OA = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Khi đó $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{A'A^2} + \frac{1}{OA^2} \Rightarrow AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $d(A; (A'BD)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Tam giác ABC vuông cân tại A , $BC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



Gọi I là trung điểm của BC . Vì tam giác ABC vuông cân tại A nên $AI \perp BC$. Theo giả thiết $SA \perp (ABC) \Rightarrow BC \perp SA$. Do đó $BC \perp (SAI)$.

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AH \perp SI$ (1). Mà $BC \perp (SAI) \Rightarrow BC \perp AH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$.

Ta có $AI = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $AH = \frac{AI \cdot AS}{\sqrt{AI^2 + AS^2}} = \frac{a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Vì M là trung điểm của BC nên $d(M, (SBC)) = \frac{1}{2}d(A, (SBC)) = \frac{1}{2}AH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG
KHÔNG GIAN

BÀI: THỂ TÍCH
ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng

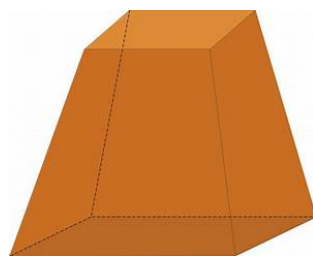
- A. $V = \frac{1}{2}abc$. B. $V = \frac{1}{6}abc$. C. $V = 3abc$. D. $V = abc$.

Câu 2: Cho khối chóp có diện tích đáy bằng $3a^2$ và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đó bằng

- A. $6a^3$. B. $3a^3$. C. $2a^3$. D. $\frac{a^3}{3}$.

Câu 3: Một đồ chơi có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (hình vẽ bên dưới) với độ dài hai cạnh đáy lần lượt là 3 cm và 5 cm, chiều cao là 9 cm. Thể tích của khối chóp cụt tứ giác đều đó bằng

- A. 151 cm^3 . B. 441 cm^3 .
C. 195 cm^3 . D. 147 cm^3 .



Câu 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng đáy $ABCD$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

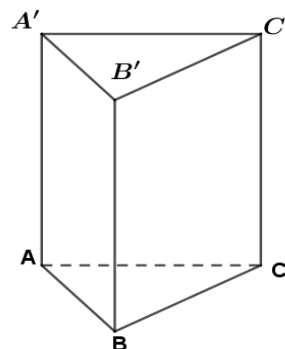
- A. $3\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{1}{3\sqrt{3}}a^3$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. D. a^3 .

Câu 5: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có AB, AC, AA' đôi một vuông góc với nhau. Biết $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 3a$, tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- A. $V = a^3$. B. $V = 3a^3$. C. $V = 6a^3$. D. $V = 2a^3$.

Câu 6: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho

- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$.
C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{6}$.



- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.
- A. $V = \frac{3}{4}a^3$. B. $V = a^3$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{1}{2}a^3$.
- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng
- A. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. B. $4\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $2\sqrt{3}a^3$.
- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}; AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là
- A. $4\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. C. $4a^3$. D. $2\sqrt{3}a^3$.
- Câu 10:** Cho hình chóp $SABC$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , có $AB = a\sqrt{3}; BC = a$. Tam giác SAC cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy, $mp(SBC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $SABC$ là
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $2a^3$.
- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là
- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $4a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.
- Câu 12:** Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ biết $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính chiều cao của khối chóp $S.ABC$.
- A. $V = \frac{a\sqrt{33}}{9}$. B. $V = \frac{a\sqrt{33}}{3}$. C. $V = \frac{a\sqrt{141}}{6}$. D. $V = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 120^\circ, AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của BC , biết $\widehat{AMS} = 60^\circ$.
- a) $SA \perp (ABCD)$.
- b) $SA = 3a$.
- c) $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
- d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{4}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$.

- a) Công thức tính thể tích hình lăng trụ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$.
- b) Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $a^2\sqrt{2}$.
- c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .
- d) Thể tích của khối lăng trụ bằng $2a^3\sqrt{2}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng 30° .

- a) Góc nhị diện bằng góc $\widehat{A'MA}$, với M là trung điểm của BC .
- b) Diện tích đáy của hình lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .
- d) Thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2, AD = CD = 1$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB .

- a) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SCD} .
- b) Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{6}$.
- c) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
- d) Thể tích của khối chóp $M.BCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

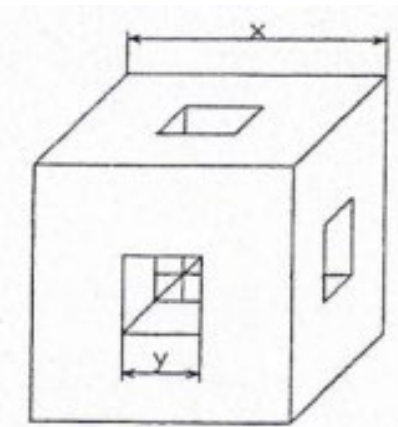
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một chiếc lồng đèn kéo quân có hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy 8 cm. Biết tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn này bằng 1536 cm^2 .



Tính thể tích của chiếc lồng đèn đó, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị (đơn vị cm^3)

Câu 2: Một khối gỗ hình lập phương có độ dài cạnh bằng x (cm). Ở chính giữa một mặt của hình lập phương người ta đục một lỗ hình vuông thông sang mặt đối diện, tâm của lỗ hình vuông là tâm của mặt hình lập phương, các cạnh lỗ hình vuông song song với các cạnh của hình lập phương và có độ dài y (cm) như hình vẽ bên. Biết rằng $x = 80 \text{ cm}$, $y = 20 \text{ cm}$ và thể tích V của khối gỗ sau khi đục có dạng $a \cdot 10^3 \text{ (cm}^3\text{)}$. Tìm giá trị của a .



- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh 2, tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $AB = 2AC = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$. Tam giác SAD vuông cân tại S , hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc nhau. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là bao nhiêu?
- Câu 5:** Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng thể tích khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ bằng $2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
- Câu 6:** Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $\sqrt{3}$ và độ dài cạnh bên 3 (làm tròn đến hàng phần trăm).

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Biết $SA = a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.
- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là
- Câu 3:** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, mặt bên SBC là tam giác vuông cân tại S và (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích của khối chóp đã cho bằng
- Câu 4:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng
- Câu 5:** Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp đó bằng
- Câu 6:** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $C'A = a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C} = 45^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng

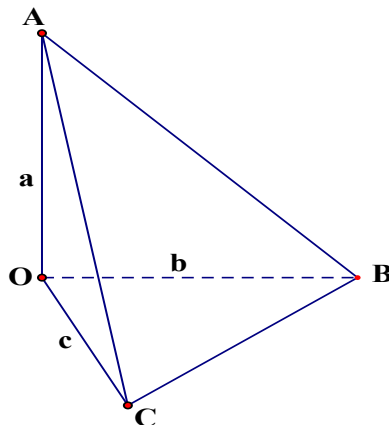
A. $V = \frac{1}{2}abc$.

B. $V = \frac{1}{6}abc$.

C. $V = 3abc$.

D. $V = abc$.

Lời giải



Ta có $OA \perp OB$, $OA \perp OC$ nên $OA \perp (OBC)$, khi đó $OA = a$ là chiều cao của khối tứ diện.

Diện tích đáy $S = \frac{1}{2}OB \cdot OC = \frac{1}{2}bc$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là $V = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}bc \cdot a = \frac{1}{6}abc$.

Câu 2: Cho khối chóp có diện tích đáy bằng $3a^2$ và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đó bằng

A. $6a^3$.

B. $3a^3$.

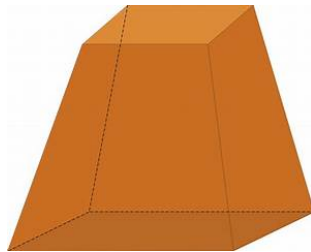
C. $2a^3$.

D. $\frac{a^3}{3}$.

Lời giải

Thể tích của khối chóp đó là: $V = \frac{1}{3} \cdot 3a^2 \cdot 2a = 2a^3$.

Câu 3: Một đồ chơi có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (hình vẽ bên dưới) với độ dài hai cạnh đáy lần lượt là 3 cm và 5 cm, chiều cao là 9 cm. Thể tích của khối chóp cụt tứ giác đều đó bằng



A. 151 cm^3 .

B. 441 cm^3 .

C. 195 cm^3 .

D. 147 cm^3 .

Lời giải

Diện tích hai đáy của khối chóp cụt tứ giác đều là: 9 cm^2 và 25 cm^2 .

Thể tích của khối chóp cụt tứ giác đều đó là: $V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot (9 + \sqrt{9 \cdot 25} + 25) = 147 \text{ cm}^3$.

Câu 4: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng đáy $ABCD$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

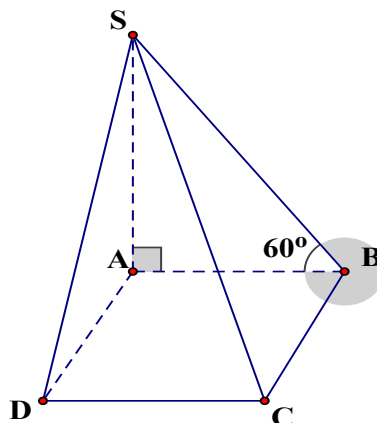
A. $3\sqrt{3}a^3$.

B. $\frac{1}{3\sqrt{3}}a^3$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

D. a^3 .

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $ABCD$ là góc SBA .

Khi đó ta có: $SA = AB \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3}a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}a^3$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có AB , AC , AA' đôi một vuông góc với nhau. Biết $AB = a$, $AC = 2a$, $AA' = 3a$, tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

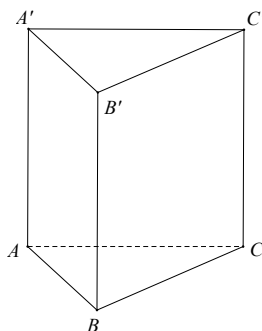
A. $V = a^3$.

B. $V = 3a^3$.

C. $V = 6a^3$.

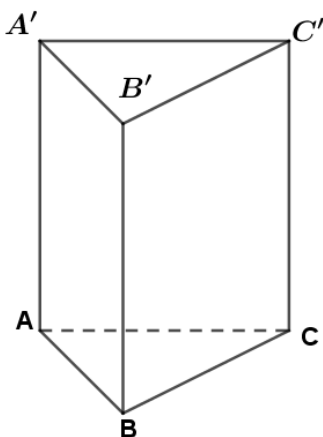
D. $V = 2a^3$.

Lời giải



$$V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot AA' = 3a^3.$$

Câu 6: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a$, $AA' = a\sqrt{2}$, $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho



- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. C. $\frac{a^3}{2}$. D. $\frac{a^3}{6}$.

Lời giải

Thể tích khối lăng trụ $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} \cdot AA' = \frac{a^3}{2}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{3}{4}a^3$. B. $V = a^3$. C. $V = 2a^3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{1}{2}a^3$.

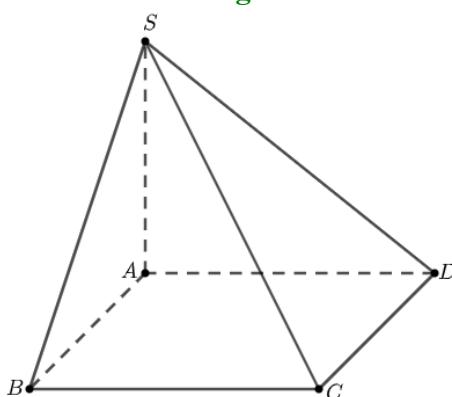
Lời giải

$V = \frac{1}{3}hS = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot (2a)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} = a^3$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- A. $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. B. $4\sqrt{3}a^3$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải

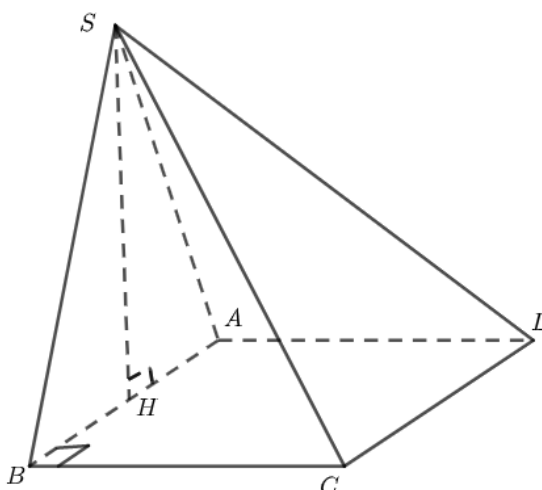


Thể tích khối chóp: $V = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a \cdot 2a = \frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}; AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là

- A. $4\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. C. $4a^3$. D. $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB suy ra SH là đường cao của tam giác SAB
 $\Rightarrow SH \perp AB$.

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

Vì tam giác ABC đều cạnh $2a\sqrt{3}$ nên $SH = AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3a$.

Diện tích tam giác ABD : $S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} AB \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 2a\sqrt{3} \cdot 2a = 2a^2\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABD$: $V_{S.ABD} = \frac{1}{3} S_{\triangle ABD} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot 2a^2\sqrt{3} \cdot 3a = 2\sqrt{3}a^3$.

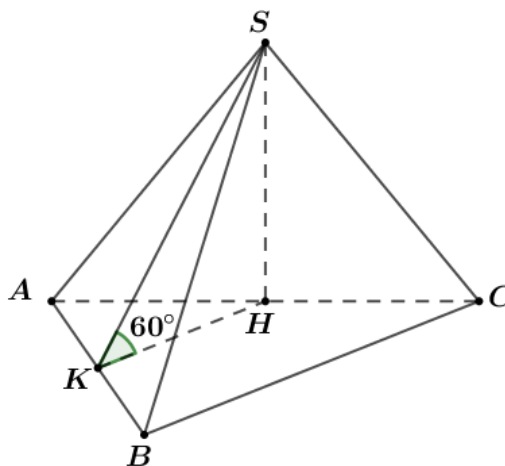
Câu 10: Cho hình chóp $SABC$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , có $AB = a\sqrt{3}$; $BC = a$. Tam giác SAC cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy, $mp(SBC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $SABC$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $2a^3$.

Lời giải

Theo giả thiết, trong tam giác SAC kẻ đường cao $SH \perp AC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Khi đó $V_{SABC} = \frac{1}{3} SH \cdot S_{\triangle ABC}$.



Ta có $S_{ABC} = \frac{1}{2} a\sqrt{3}.a = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác ABC kẻ $HK \perp AB \Rightarrow \widehat{SKH} = 60^\circ; HK = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$.

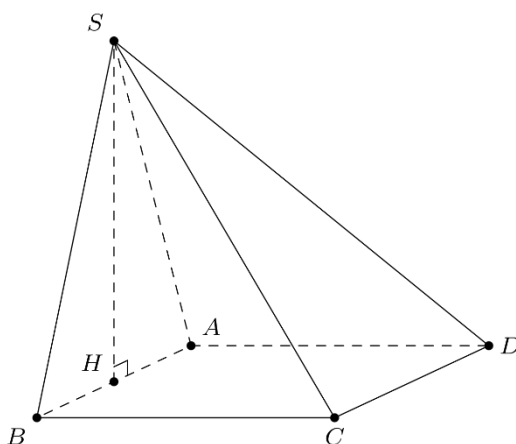
Xét tam giác SKH , ta có $SH = \tan 60^\circ.HK = \sqrt{3}.\frac{a}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $V_{SABC} = \frac{1}{3}SH.S_{ABC} = \frac{1}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2}.\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- A. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $4a^3\sqrt{3}$. D. $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB suy ra $SH \perp AB$

Theo đề ta có $SH \perp (ABCD)$

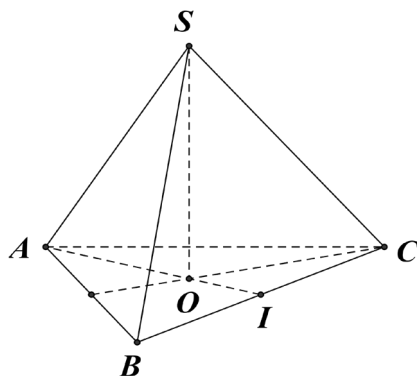
Xét ΔSAB đều có đường cao SH suy ra $SH = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối chóp là $V = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}a\sqrt{3}.(2a)^2 = \frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ biết $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

- A. $V = \frac{a\sqrt{33}}{9}$. B. $V = \frac{a\sqrt{33}}{3}$. C. $V = \frac{a\sqrt{141}}{6}$. D. $V = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

Lời giải



Do đáy là tam giác đều nên gọi I là trung điểm cạnh BC , khi đó AI là đường cao của tam giác đáy. Chiều cao của chóp là SO

Theo định lý Pitago ta có $AI = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, và $AO = \frac{2}{3}AI = \frac{2a\sqrt{3}}{3 \cdot 2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Trong tam giác SOA vuông tại O ta có $SO = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{33}}{3}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của BC , biết $\widehat{AMS} = 60^\circ$.

a) $SA \perp (ABCD)$.

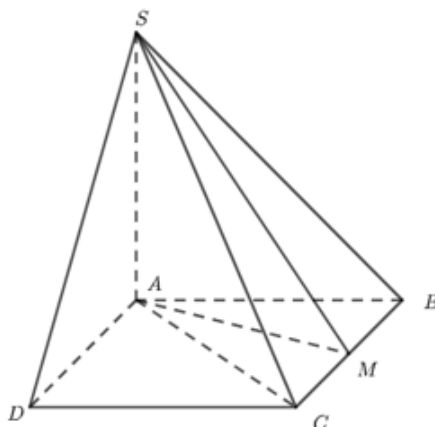
b) $SA = 3a$.

c) $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

d) Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------



a) Đúng: Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \perp (ABCD) \\ (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAB) \cap (SAD) = SA \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABCD)$$

b) Sai: Lại có $\widehat{BAD} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{ABC} = 60^\circ \Rightarrow \Delta ABC$ đều cạnh $a \Rightarrow AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét ΔSAM : $\tan 60^\circ = \frac{SA}{AM} \Rightarrow SA = \frac{3}{2}a$

c) Sai: Ta có $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2}a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$

d) Đúng: Kẻ $AH \perp SM \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$

Ta có $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{16}{9a^2} \Rightarrow AH = \frac{3a}{4}$

Do $AD // (SBC) \Rightarrow d(D, (SBC)) = d(A, (SBC)) = AH = \frac{3a}{4}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$.

a) Công thức tính thể tích hình lăng trụ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$.

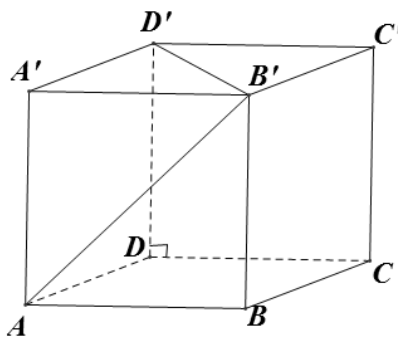
b) Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $a^2\sqrt{2}$.

c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .

d) Thể tích của khối lăng trụ bằng $2a^3\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Đúng: Công thức tính thể tích của khối chóp là: $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$.

b) Đúng: Diện tích đáy là: $S_{ABCD} = AB \cdot AD = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

c) Sai: Xét tam giác vuông ABB' có $AB'^2 = AB^2 + BB'^2 \Leftrightarrow (a\sqrt{5})^2 = a^2 + BB'^2 \Leftrightarrow BB' = 2a$.

d) Đúng: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABCD} \cdot AA' = a^2\sqrt{2} \cdot 2a = 2a^3\sqrt{2}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng 30° .

a) Góc nhị diện bằng góc $\widehat{A'MA}$, với M là trung điểm của BC .

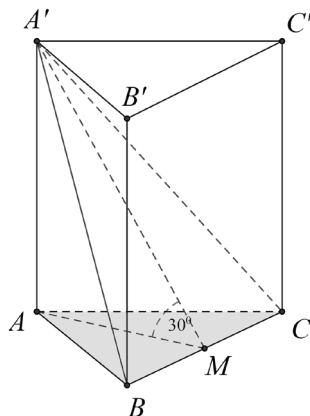
b) Diện tích đáy của hình lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

c) Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .

d) Thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



a) Đúng: Góc nhị diện $[A', BC, A]$ là góc giữa hai nửa mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) cạnh BC .

Gọi M là trung điểm của BC .

Vì tam giác ABC đều nên $AM \perp BC$.

Lại có $AA' \perp BC$ nên $BC \perp A'M$.

Suy ra góc nhị diện $[A', BC, A]$ là góc $\widehat{A'MA} = 30^\circ$.

b) Đúng: Diện tích tam giác đều ABC là: $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

c) Sai: Vì tam giác ABC đều cạnh a nên $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét tam giác vuông $A'AM$ có $\tan \widehat{A'MA} = \frac{AA'}{AM} \Leftrightarrow AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a}{2}$.

d) Sai: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2, AD = CD = 1$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB .

a) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SCD} .

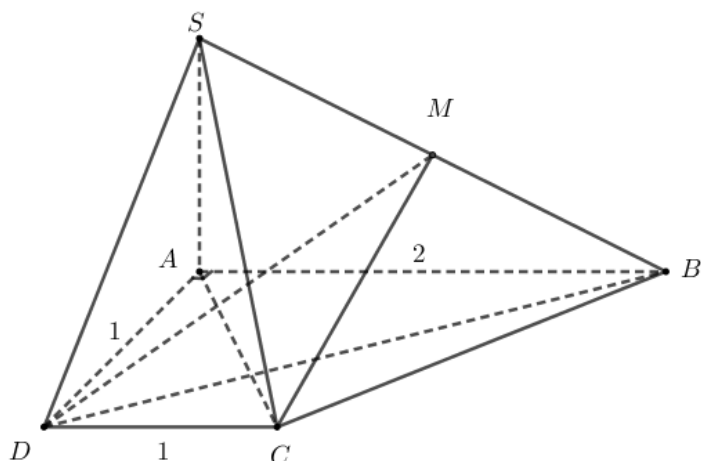
b) Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{6}$.

c) Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Thể tích của khối chóp $M.BCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



a) Sai: Vì A là hình chiếu vuông góc của S xuống mặt phẳng $(ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SCA} .

b) Đúng: Ta có: $h = SA = AC \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

c) Đúng: Ta có: $B = S_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot AD = \frac{2+1}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} Bh = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \sqrt{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

d) Đúng: Ta có: $S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Mặt khác, M là trung điểm của đoạn thẳng SB

nên suy ra: $d(M, (ABCD)) = \frac{1}{2} d(S, (ABCD)) = \frac{\sqrt{6}}{2}$. Do đó $V_{M.BCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một chiếc lồng đèn kéo quân có hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy 8 cm. Biết tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn này bằng 1536 cm^2 .



Tính thể tích của chiếc lồng đèn đó, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị (đơn vị cm^3)

Lời giải

Trả lời: 5321

Gọi h là chiều cao của chiếc lồng đèn.

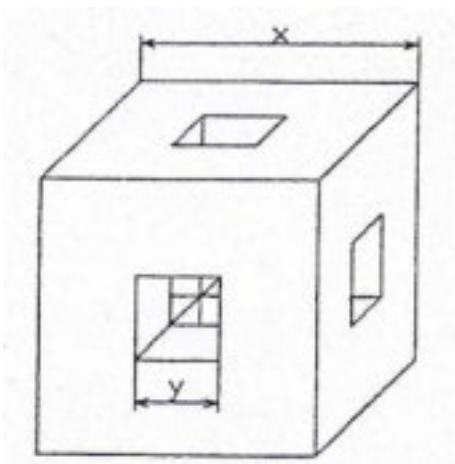
Theo đề, ta có: $6 \cdot 8 \cdot h = 1536 \Rightarrow h = 32 \text{ cm}$.

Diện tích mặt đáy của chiếc lồng đèn là $S = 6 \cdot \frac{8^2 \sqrt{3}}{4} = 96\sqrt{3} \text{ cm}^2$.

Thể tích của chiếc lồng đèn đó là $V = 96\sqrt{3} \cdot 32 \approx 5321 \text{ cm}^3$.

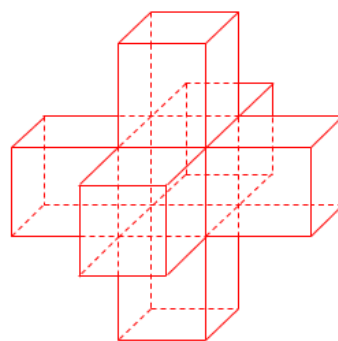
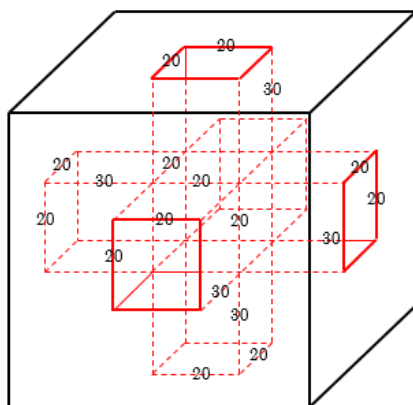
Câu 2: Một khối gỗ hình lập phương có độ dài cạnh bằng $x \text{ (cm)}$. Ở chính giữa một mặt của hình lập phương người ta đục một lỗ hình vuông thông sang mặt đối diện, tâm của lỗ hình vuông là tâm của mặt hình lập phương, các cạnh lỗ hình vuông song song với các cạnh của hình lập phương

và có độ dài y (cm) như hình vẽ bên. Biết rằng $x = 80$ cm, $y = 20$ cm và thể tích V của khối gỗ sau khi đục có dạng $a.10^3$ (cm³). Tìm giá trị của a .



Lời giải

Trả lời: 432



Phần bị đục lỗ gồm 7 khối gỗ có dạng hình hộp chữ nhật, trong đó có 6 khối gỗ kích thước $20 \times 20 \times 30$ (cm) (tương ứng với 6 mặt của khối gỗ hình lập phương ban đầu) và một khối gỗ nằm ở trung tâm khối gỗ hình lập phương ban đầu có kích thước $20 \times 20 \times 20$ (cm).

Thể tích của mỗi khối gỗ kích thước $20 \times 20 \times 30$ (cm) là $V_1 = 20.20.30 = 12000$ (cm³).

Thể tích của khối gỗ kích thước $20 \times 20 \times 20$ (cm) là $V_2 = 20.20.20 = 8000$ (cm³).

Vậy thể tích của khối gỗ sau khi đục là

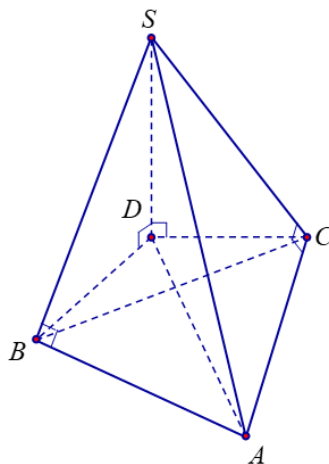
$$V = 80^3 - 6V_1 - V_2 = 80^3 - 6.12000 - 8000 = 432000$$
 (cm³) = 432.10³ (cm³).

Vậy $a = 432$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh 2, tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 1,15



Gọi D là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) , suy ra $SD \perp (ABC)$.

Ta có $SD \perp AB$ và $SB \perp AB(gt)$, suy ra $AB \perp (SBD) \Rightarrow BA \perp BD$.

Tương tự có $AC \perp DC$ hay tam giác ACD vuông ở C .

Để thấy $\Delta SBA = \Delta SCA$ (cạnh huyền và cạnh góc vuông), suy ra $SB = SC$. Từ đó ta chứng minh được $\Delta SBD = \Delta SCD$ nên cũng có $DB = DC$.

Vậy DA là đường trung trực của BC , nên cũng là đường phân giác của góc \widehat{BAC} .

Ta có $\widehat{DAC} = 30^\circ$, suy ra $DC = \frac{2}{\sqrt{3}}$. Ngoài ra góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) là

$$\widehat{SBD} = 60^\circ, \text{ suy ra } \tan \widehat{SBD} = \frac{SD}{BD} \Rightarrow SD = BD \tan \widehat{SBD} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} = 2.$$

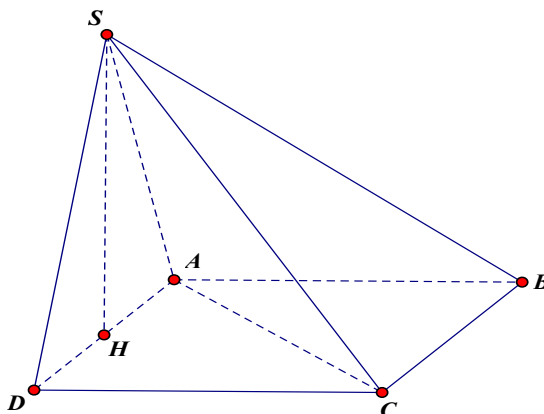
$$\text{Vậy } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\Delta ABC} \cdot SD = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \cdot 2 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Kết quả làm tròn là: 1,15.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $AB = 2AC = 4, BC = 2\sqrt{3}$. Tam giác SAD vuông cân tại S , hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc nhau. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 4



Theo giả thiết $AB = 2AC = 4, BC = 2\sqrt{3}$ nên tam giác ABC có $AB = 4, AC = 2, BC = 2\sqrt{3} \Rightarrow AB^2 = AC^2 + BC^2$, do đó ABC là tam giác vuông tại C .

Suy ra $S_{ABCD} = 2S_{ABC} = CA.CB = 4\sqrt{3}$.

Gọi H là trung điểm của AD , tam giác SAD vuông cân tại S nên $SH \perp AD$.

Mặt khác $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$.

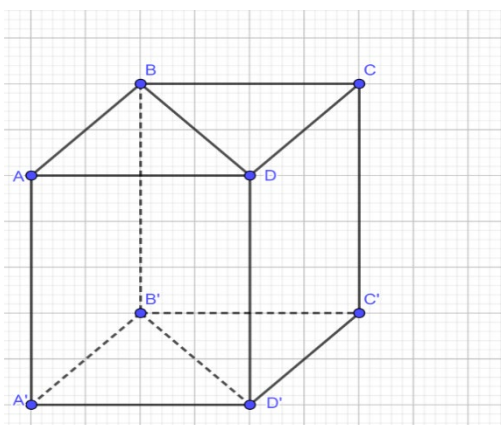
Lại có tam giác SAD vuông cân tại $S \Rightarrow SH = \frac{1}{2}AD = \sqrt{3}$.

Vậy thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.\sqrt{3}.4\sqrt{3} = 4$.

Câu 5: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng thể tích khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ bằng $2\sqrt{3}$. Tính thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 6,93

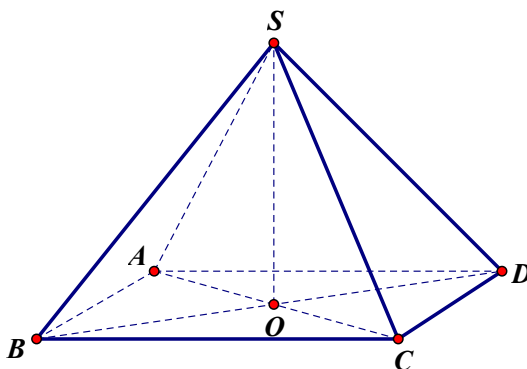


Vì thể tích của hai khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ và $CBD.C'B'D'$ bằng nhau nên thể tích khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là $4\sqrt{3} \approx 6,93$.

Câu 6: Tính thể tích của khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $\sqrt{3}$ và độ dài cạnh bên 3 (làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 6.93



Theo đề: $SO = \sqrt{3}$ và $SA = SB = SC = SD = 3$.

Tam giác SAO vuông tại O có: $AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{3^2 - (\sqrt{3})^2} = \sqrt{6}$,

Do đó: $AC = 2AO = 2\sqrt{6}$.

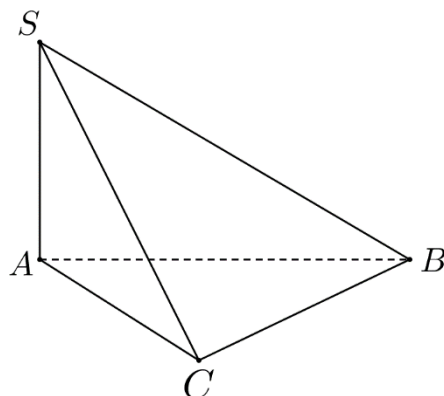
Tam giác ADC vuông tại D có: $\sin \widehat{DAC} = \frac{DC}{AC} \Leftrightarrow DC = AC.\sin \widehat{DAC} = 2\sqrt{6}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của hình chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot (2\sqrt{3})^2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} \approx 6,93$.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) . Biết $SA = a$, tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2a$. Tính theo a thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

Lời giải

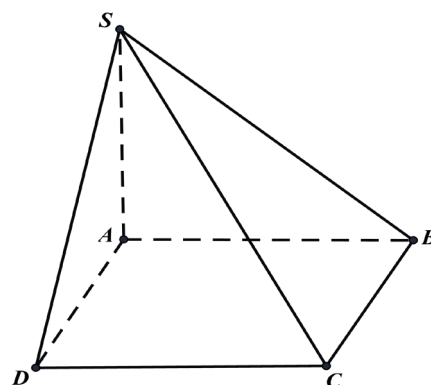


Diện tích tam giác ABC vuông cân tại A là $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} 2a \cdot 2a = 2a^2$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot 2a^2 = \frac{2a^3}{3}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và đường thẳng SC tạo với mặt phẳng (SAB) một góc 30° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

Lời giải



Vì $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp BC$ (1)

Vì $ABCD$ là hình vuông $\Rightarrow AB \perp BC$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC trên (SAB) .

$$\Rightarrow (\widehat{SC, (SAB)}) = (\widehat{SC, SB})$$

Vì $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \triangle SBC$ vuông tại $B \Rightarrow (\widehat{SC, SB}) = \widehat{BSC} = 30^\circ$.

$$\text{Ta có } \tan \widehat{BSC} = \frac{BC}{SB} \Rightarrow SB = \frac{BC}{\tan 30^\circ} = 3a.$$

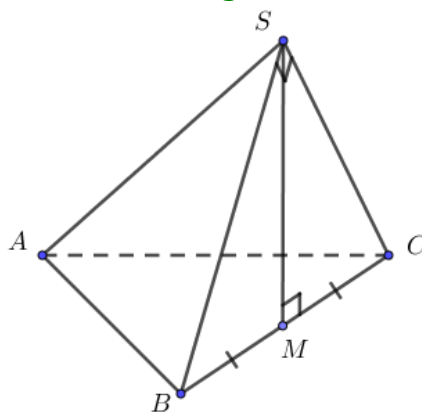
Xét tam giác vuông SAB có $SA^2 = SB^2 - AB^2 = 9a^2 - a^2 = 8a^2 \Rightarrow SA = 2a\sqrt{2}$.

Ta có $S_{ABCD} = AB \cdot BC = \sqrt{3}a^2$.

Suy ra $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 2a\sqrt{2} \cdot a^2 \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{6}a^3}{3}$.

Câu 3: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, mặt bên SBC là tam giác vuông cân tại S và (SBC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

Lời giải



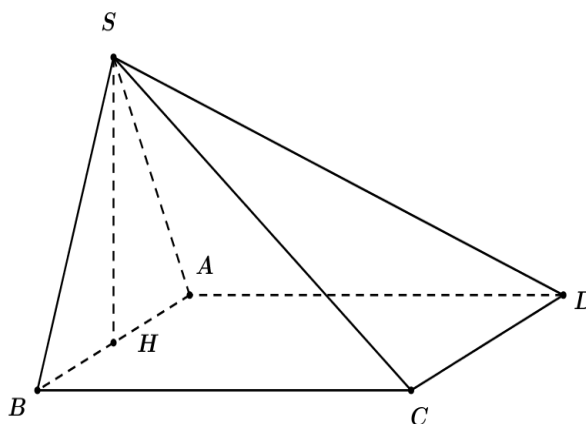
Dựng $SM \perp BC$, ta có $\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC \\ SM \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow SM \perp (ABC)$.

Do ΔSBC vuông cân ở S , suy ra $SM = \frac{1}{2} \cdot BC = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SM \cdot S_{SBC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{(2a)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = 2a$. Tam giác SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

Lời giải



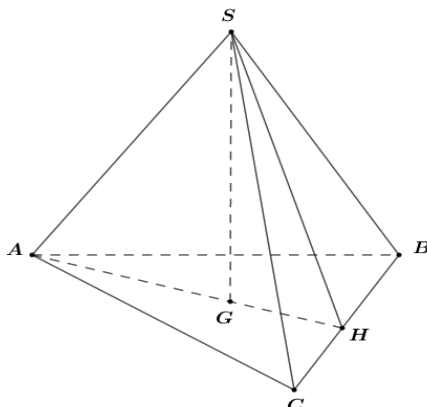
Lấy $H \in AB$ sao cho $SH \perp AB$ (do tam giác SAB đều nên H cũng là trung điểm của AB)

$$\begin{cases} SH \perp AB \\ AB = (SAB) \cap (ABCD) \\ SH \subset (SAB) \\ (SAB) \perp (ABCD) \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Ta có $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; $S_{ABCD} = AB \cdot AD = 2a^2$. Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 5: Cho khối chóp tam giác đều có cạnh đáy bằng a và cạnh bên tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp đó bằng

Lời giải



Gọi H là trung điểm BC và G là trọng tâm tam giác ABC . Ta có $SG \perp (ABC)$.

Tam giác ABC đều cạnh a nên $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ và $AG = \frac{2}{3}AH = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

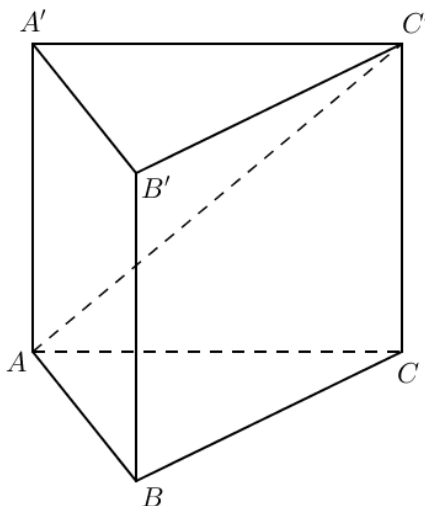
$(\widehat{SA, (ABC)}) = \widehat{SAG} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông SGA , ta có $SG = AG \cdot \tan \widehat{SAG} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = a$.

Vậy $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SG \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

Câu 6: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $C'A = a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C} = 45^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

Lời giải



Trong $\Delta ACC'$ có $AC = AC' \cdot \sin \widehat{AC'C} = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$; $CC' = AC' \cdot \cos \widehat{AC'C} = a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a$.

Trong ΔBAC có $AC^2 = BA^2 + BC^2 \Leftrightarrow AC^2 = 2BA^2 \Rightarrow BA = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích của khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = CC' \cdot S_{\Delta ABC} = CC' \cdot \frac{1}{2} \cdot BA^2 = a \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{4}$.

BÀI: THỂ TÍCH
ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 12$ và chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng
A. 60. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 80.

Câu 2: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 15 và chiều cao bằng 10. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = 50$. **B.** $V = 75$. **C.** $V = \frac{25}{3}$. **D.** $V = 150$.

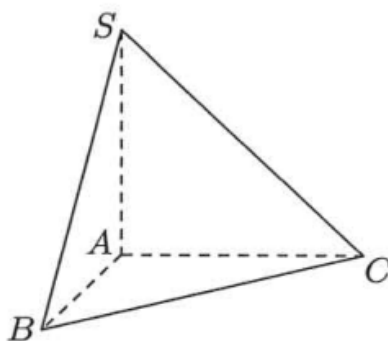
Câu 3: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. $AA' = a\sqrt{2}$, góc giữa AA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính thể tích khối hộp.

A. a^3 . **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $4\sqrt{3}a^3$. **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Câu 4: Cho khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao $h = 3\text{cm}$, hai mặt đáy $ABC, A'B'C'$ có cạnh tương ứng $4\text{cm}, 2\text{cm}$. Tính thể tích khối chóp cụt.

A. 4cm^3 . **B.** $4\sqrt{3}\text{cm}^3$. **C.** $7\sqrt{3}\text{cm}^3$. **D.** $6\sqrt{3}\text{cm}^3$

Câu 5: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2$; SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (tham khảo hình vẽ).



Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 12. **B.** 2. **C.** 6. **D.** 4.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . Biết SA vuông góc với đáy, $AB = BC = 2a$; $AD = 4a$; góc giữa (SCD) và đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

A. $\frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. **B.** $\frac{4\sqrt{6}a^3}{3}$. **C.** $\frac{8\sqrt{6}a^3}{15}$. **D.** $4\sqrt{6}a^3$.

Câu 7: Tính thể tích của khối tứ diện đều biết chiều cao tứ diện bằng a .

- A. $\frac{\sqrt{3}}{8}a^3$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$. D. $\frac{\sqrt{6}}{3}a^3$.

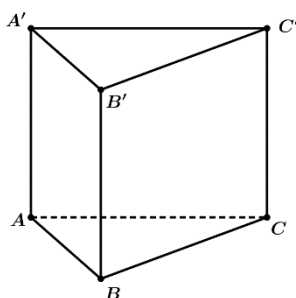
Câu 8: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB=2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

- A. $\sqrt{2}a^3$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

- A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Câu 10: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AC = AA' = 2$ (tham khảo hình vẽ)



Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. 2. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 4.

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối lăng trụ bằng

- A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

Câu 12: Cho khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có độ dài cạnh lần lượt là $6a$ và $3a$, độ dài cạnh bên bằng $4a$. Tính thể tích của khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$.

- A. $\frac{3a^3\sqrt{41}}{2}$. B. $\frac{a^3\sqrt{46}}{2}$. C. $\frac{21a^3\sqrt{46}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{41}}{2}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết góc giữa cạnh SC và mặt đáy bằng 60° .

- a) Chiều cao của hình chóp $S.ABC$ là SA .
 b) Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc \widehat{SCA} .
 c) Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
 d) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{4}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB = AC = a$.

Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

a) Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = a^2$.

b) Độ dài đường cao của lăng trụ bằng $\frac{a}{2}$.

c) Thể tích khối lăng trụ là $V = \frac{a^3}{2}$.

d) Thể tích khối chóp $A.A'B'C'$ là $V' = \frac{a^3}{6}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 6. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° .

a) Diện tích đáy của hình lăng trụ đã cho là $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$.

b) Hình lăng trụ đã cho có chiều cao $h = 3\sqrt{3}$.

c) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = 27\sqrt{3}$.

d) Thể tích của tứ diện $A'AMN$ bằng $3\sqrt{3}$ với M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB', CC' .

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy, với $SA = \frac{a}{2}$.

a) Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

b) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

c) Góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm SB, SC . Thể tích khối chóp $A.BCQP$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

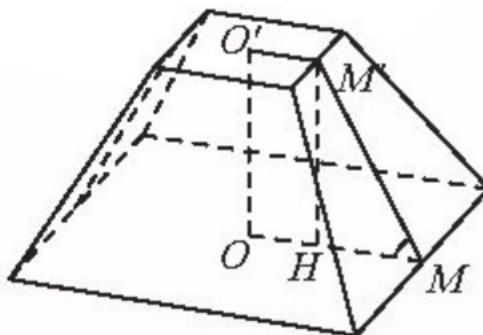
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{2}$; $\widehat{ABC} = 60^\circ$; cạnh SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh SA vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy bằng 60° . Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB, SC, SD , khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

- Câu 3:** Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (tham khảo hình bên dưới). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có diện tích lần lượt là $400 (cm^2)$ và $900 (cm^2)$, cạnh bên của sọt dài $15 cm$.
 Tính thể tích của sọt làm tròn đến hàng đơn vị. (đơn vị cm^3)



- Câu 4:** Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cụt tứ giác đều (tham khảo hình bên dưới) có hai cạnh đáy là $14 m$ và $10 m$. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



- Câu 5:** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $\frac{k\sqrt{k}}{m}a^3$, trong đó k, m là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Tính giá trị biểu thức $m - k$.
- Câu 6:** Người ta phải cưa một thân cây hình trụ có đường kính $1m$, chiều dài $4m$ để được một cây xà hình khối chữ nhật. Hỏi thể tích lớn nhất của khối gỗ sau khi cưa xong là bao nhiêu m^3 ?

PHẦN IV. Tự luận

- Câu 1:** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp bằng
- Câu 2:** Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O ; $AC = 2AB = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SD = a\sqrt{5}$.
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; ΔSAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết SC tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.
- Câu 4:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{5}a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng
- Câu 5:** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là ΔABC vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng
- Câu 6:** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 12$ và chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng
A. 60. **B.** 20. **C.** 30. **D.** 80.

Lời giải

Thể tích của khối chóp đã cho là $V = \frac{1}{3}.h.S = \frac{1}{3}.5.12 = 20$.

Câu 2: Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 15 và chiều cao bằng 10. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

A. $V = 50$. **B.** $V = 75$. **C.** $V = \frac{25}{3}$. **D.** $V = 150$.

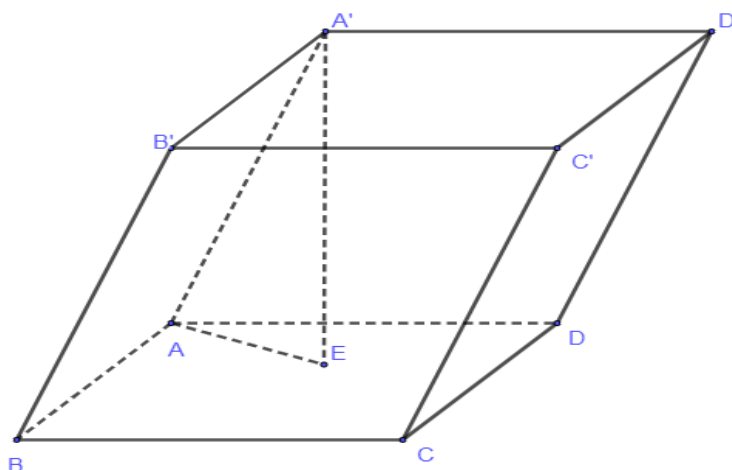
Lời giải

Ta có: $V = 15.10 = 150$.

Câu 3: Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$. $AA' = a\sqrt{2}$, góc giữa AA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Tính thể tích khối hộp.

A. a^3 . **B.** $\sqrt{3}a^3$. **C.** $4\sqrt{3}a^3$. **D.** $2\sqrt{3}a^3$.

Lời giải



Gọi E là hình chiếu vuông góc của A' trên mp $(ABCD)$.

Ta có chiều cao của hình hộp là $h = A'E = AA'.\sin 45^\circ = a$.

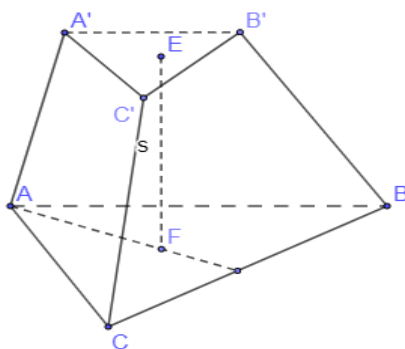
Diện tích đáy $S_{ABCD} = 2.S_{\Delta ABC} = 2.\frac{1}{2}.2a.2a.\sin 120^\circ = 2\sqrt{3}a^2$

Thể tích khối hộp là $V = h.S_{ABCD} = 2\sqrt{3}a^3$.

Câu 4: Cho khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao $h = 3cm$, hai mặt đáy $ABC, A'B'C'$ có cạnh tương ứng $4cm, 2cm$. Tính thể tích khối chóp cụt.

A. $4cm^3$. **B.** $4\sqrt{3}cm^3$. **C.** $7\sqrt{3}cm^3$. **D.** $6\sqrt{3}cm^3$

Lời giải



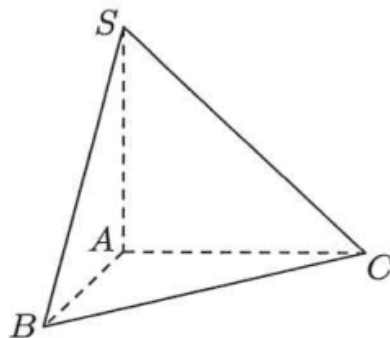
Diện tích đáy $S_{\Delta ABC} = \frac{4^2 \sqrt{3}}{4} = 4\sqrt{3}(cm^2)$; $S_{\Delta A'B'C'} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}(cm^2)$

Chiều cao hình chóp cụt là $h = EF = 3(cm)$

Thể tích chóp cụt là

$$V = \frac{1}{3}h.(S_{\Delta ABC} + S_{\Delta A'B'C'} + \sqrt{S_{\Delta ABC} \cdot S_{\Delta A'B'C'}}) = \frac{1}{3}.3.(4\sqrt{3} + \sqrt{3} + 2\sqrt{3}) = 7\sqrt{3}(cm^3)$$

Câu 5: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2$; SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (tham khảo hình vẽ).



Thể tích khối chóp đã cho bằng

A. 12.

B. 2.

C. 6.

D. 4.

Lời giải

Thể tích khối chóp đã cho $V = \frac{1}{3}B.h = \frac{1}{3}S_{\Delta ABC}.SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB.AC.SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} .2.2.3 = 2$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . Biết SA vuông góc với đáy, $AB = BC = 2a$; $AD = 4a$; góc giữa (SCD) và đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

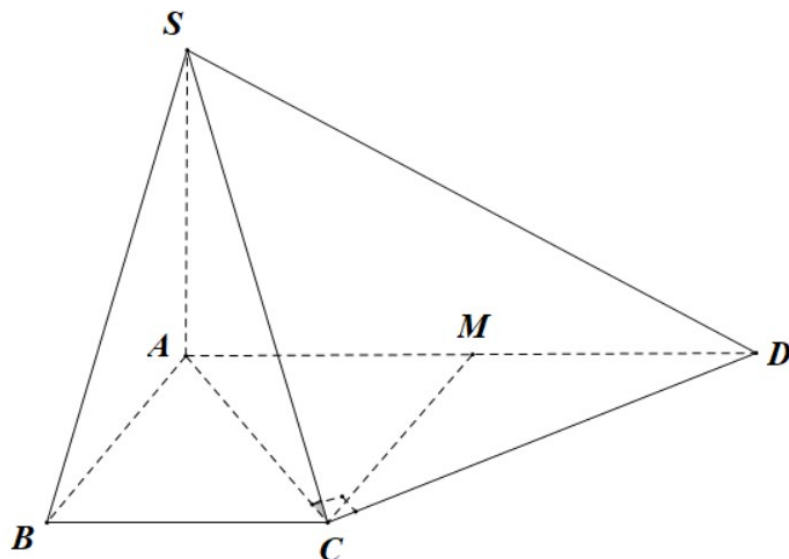
A. $\frac{8\sqrt{6} a^3}{3}$.

B. $\frac{4\sqrt{6} a^3}{3}$.

C. $\frac{8\sqrt{6} a^3}{15}$.

D. $4\sqrt{6} a^3$.

Lời giải



Tam giác ACD vuông tại $C \Rightarrow DC \perp AC, DC \perp SA \Rightarrow DC \perp (SAC) \Rightarrow DC \perp SC$
 $\Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2\sqrt{2}a \Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = 2\sqrt{6}a$$

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} 2\sqrt{6}a \cdot \frac{(4a+2a) \cdot 2a}{2} = 4\sqrt{6}a^3..$$

Câu 7: Tính thể tích của khối tứ diện đều biết chiều cao tứ diện bằng a .

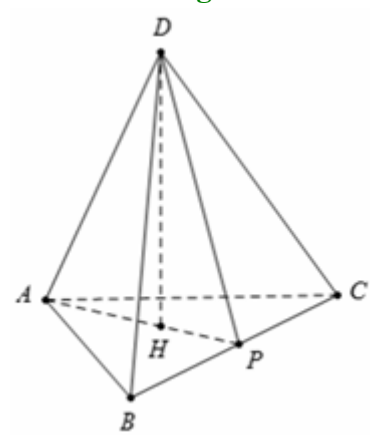
A. $\frac{\sqrt{3}}{8} a^3$.

B. $\frac{\sqrt{3}}{3} a^3$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2} a^3$.

D. $\frac{\sqrt{6}}{3} a^3$.

Lời giải



Xét tứ diện đều $ABCD$ cạnh $AB = x$, P là trung điểm BC , đường cao $DH = a$

$AP = \frac{x\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH = \frac{x\sqrt{3}}{3}$. Áp dụng định lí Pi-ta-go trong tam giác ADH ta có:

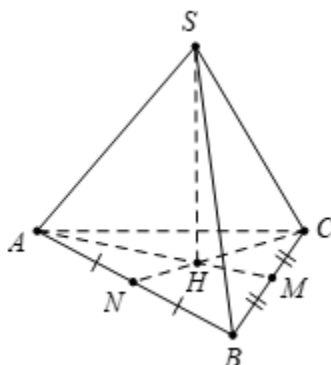
$$DH^2 + HA^2 = DA^2 \Rightarrow a^2 + \frac{x^2}{3} = x^2 \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Do đó: $S_{\Delta ABC} = \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$. Vậy $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot DH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.

Câu 8: Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB=2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng:

- A. $\sqrt{2}a^3$. B. $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. C. $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. D. $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

Lời giải



Gọi H là trọng tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của BC

Ta có $AM = a\sqrt{3} \Rightarrow AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$

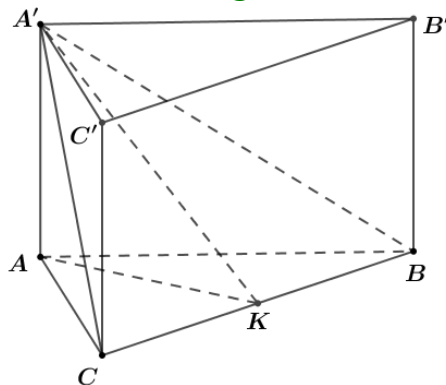
Mặt khác $SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \sqrt{(\sqrt{2}a)^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}a}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$

Vậy thể tích của khối chóp đã cho là: $V = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot SH = \frac{1}{3} \cdot (2a)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{6}a}{3} = \frac{\sqrt{2}a^3}{3}$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

- A. $\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. C. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. D. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

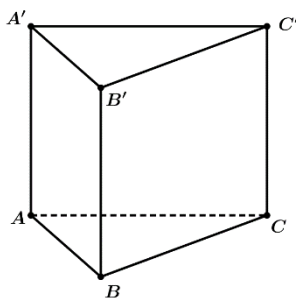


Do đáy ABC đều nên các cạnh $A'B = A'C$. Kẻ $A'K \perp BC \Rightarrow \widehat{AKA'} = 60^\circ$ và $AK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$;

$S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Xét $\Delta A'AK$: $AA' = \tan 60^\circ \cdot AK = \sqrt{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.

Khi đó $V_{ABC.A'B'C'} = AA' \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{3a}{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$.

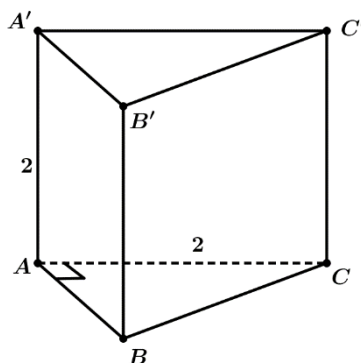
Câu 10: Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AC = AA' = 2$ (tham khảo hình vẽ)



Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. 2. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{4}{3}$. D. 4.

Lời giải



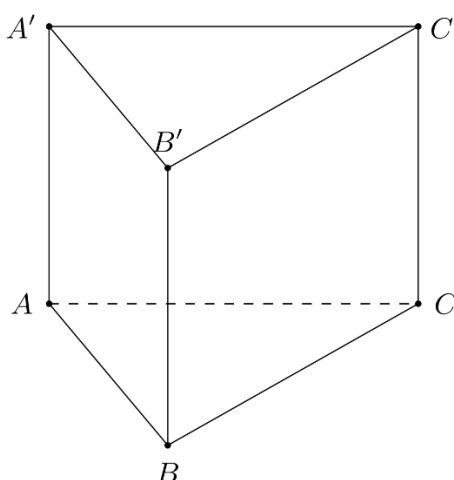
Ta có $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$.

Thể tích khối lăng trụ là $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = 2 \cdot 2 = 4$.

Câu 11: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối lăng trụ bằng

- A. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. B. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. C. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. D. $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{12}$

Lời giải



Diện tích tam giác ABC là $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Vậy thể tích khối lăng trụ là $V = AA' \cdot S = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{4}$.

Câu 12: Cho khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có độ dài cạnh lần lượt là $6a$ và $3a$, độ dài cạnh bên bằng $4a$. Tính thể tích của khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$.

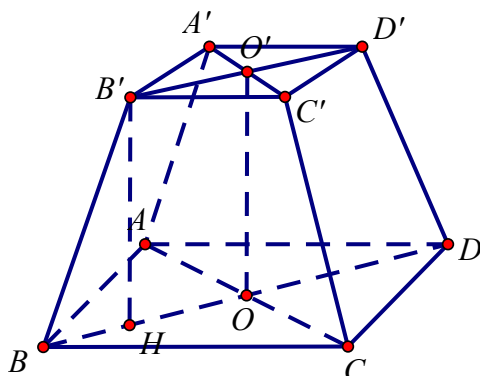
A. $\frac{3a^3\sqrt{41}}{2}$.

B. $\frac{a^3\sqrt{46}}{2}$.

C. $\frac{21a^3\sqrt{46}}{2}$.

D. $\frac{a^3\sqrt{41}}{2}$.

Lời giải



*) Diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_1 = (6a)^2 = 36a^2$

*) Diện tích hình vuông $A'B'C'D'$ là $S_2 = (3a)^2 = 9a^2$

*) Chiều cao của khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$ là $OO' = B'H$

Ta có: $BB' = 4a$, $BH = \frac{1}{4}BD = \frac{1}{4} \cdot 6a\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$

Trong tam giác vuông $B'BH$ vuông tại H : $B'H = \sqrt{BB'^2 - BH^2} = \sqrt{(4a)^2 - \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{46}}{2}$

Suy ra: $OO' = B'H = \frac{a\sqrt{46}}{2}$

*) Thể tích của khối chóp cụt đều $ABCD.A'B'C'D'$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot OO' \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{46}}{2} \cdot (36a^2 + 9a^2 + \sqrt{36a^2 \cdot 9a^2}) = \frac{21a^3\sqrt{46}}{2}$$

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết góc giữa cạnh SC và mặt đáy bằng 60° .

a) Chiều cao của hình chóp $S.ABC$ là SA .

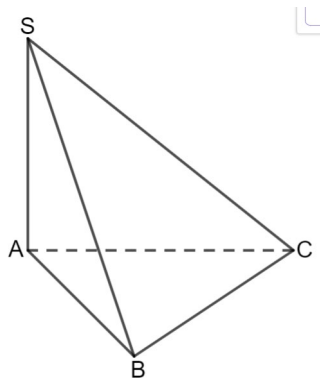
b) Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng góc \widehat{SCA} .

c) Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

d) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{4}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Đúng: $SA \perp (ABC)$ suy ra chiều cao của hình chóp $S.ABC$ là SA .

b) Đúng: Ta có $SC \cap (ABC) = C$, $SA \perp (ABC)$ suy ra AC là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC)

Vậy góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng góc giữa hai đường thẳng AC , SC và bằng góc \widehat{SCA} .

c) Sai: Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

d) Đúng: Chiều cao hình chóp $S.ABC$ là $SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3}{4}$.

Câu 2: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB = AC = a$.

Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

a) Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = a^2$.

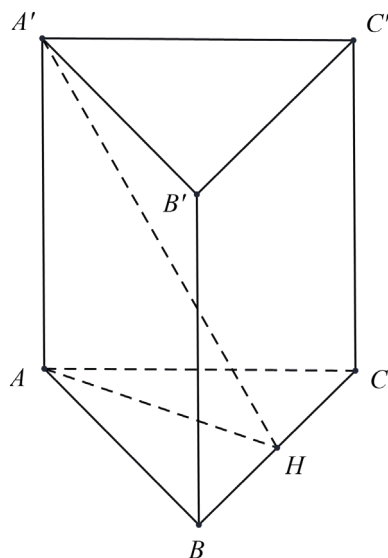
b) Độ dài đường cao của lăng trụ bằng $\frac{a}{2}$.

c) Thể tích khối lăng trụ là $V = \frac{a^3}{2}$.

d) Thể tích khối chóp $A.A'B'C'$ là $V' = \frac{a^3}{6}$.

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------



a) Sai: Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2}{2}$.

b) Sai: Dựng $AH \perp BC$, có $BC \perp AA' \Rightarrow BC \perp (A'HA) \Rightarrow BC \perp A'H$.

Mặt khác $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = a\sqrt{2} \Rightarrow A'H = \frac{2S_{ABC}}{BC} = \sqrt{\frac{3}{2}}a$.

Do $AH = \frac{BC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AA' = \sqrt{A'H^2 - AH^2} = a$.

c) Đúng: Thể tích khối lăng trụ là: $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{2}$.

d) Đúng: $V' = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot AA' = \frac{a^3}{6}$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 6. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° .

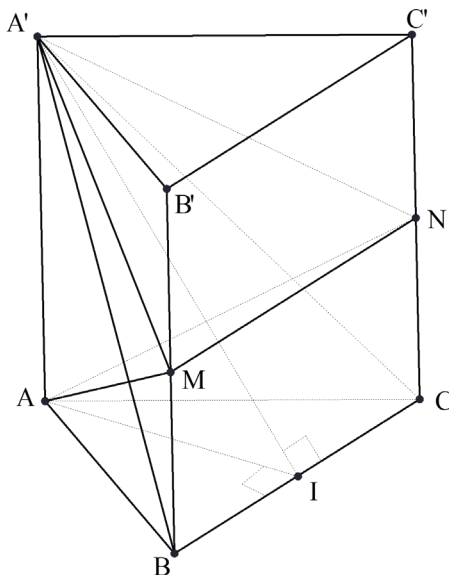
a) Diện tích đáy của hình lăng trụ đã cho là $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$.

b) Hình lăng trụ đã cho có chiều cao $h = 3\sqrt{3}$.

c) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = 27\sqrt{3}$.

d) Thể tích của tứ diện $A'AMN$ bằng $3\sqrt{3}$ với M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB', CC' .

Lời giải



a) Đúng: Ta có $S_{ABC} = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$.

b) Sai: Gọi I là trung điểm đoạn thẳng AB . Ta có

$$\begin{cases} (A'BC) \cap (ABC) = BC \\ (A'AI) \perp BC (A'A \perp BC, AI \perp BC) \\ (A'AI) \cap (A'BC) = A'I \\ (A'AI) \cap (ABC) = AI \end{cases}$$

Nên $((A'BC), (ABC)) = (A'I, AI) = \widehat{A'IA} = 30^\circ$.

$\tan 30^\circ = \frac{A'A}{AI} \Rightarrow A'A = AI \cdot \tan 30^\circ = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 3$ hay $h = 3$.

c) Đúng: Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot A'A = 9\sqrt{3} \cdot 3 = 27\sqrt{3}$.

d) Sai: Ta có $V_{A'B'C'NM} = \frac{1}{2} V_{A'B'C'CB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{A'B'C'ABC} = \frac{1}{3} V_{A'B'C'ABC}$.

Và $V_{ABCNM} = \frac{1}{2} V_{AB'C'CB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} V_{A'B'C'ABC} = \frac{1}{3} V_{A'B'C'ABC}$.

Do đó $V_{A'AMN} = \frac{1}{3} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với đáy, với $SA = \frac{a}{2}$.

a) Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là $\frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

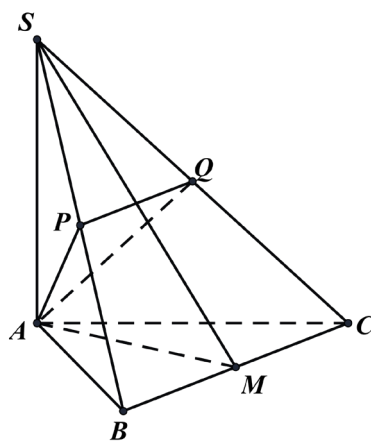
b) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3 \sqrt{3}}{8}$.

c) Góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .

d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm SB, SC . Thể tích khối chóp $A.BCQP$ bằng $\frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Sai
---------	--------	--------	--------



a) Đúng : Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là $S_{\Delta ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$.

b) Sai : Thể tích của khối chóp $S.ABC$ là $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} SA \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12}$.

c) Sai : Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

Ta có : $BC \perp AM$ (AM là đường trung tuyến của ΔABC đều)

$BC \perp SA$ ($SA \perp (ABC)$)

Do đó: $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SM$

Ta có: $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ SM \perp BC, SM \subset (SBC) \\ AM \perp BC, AM \subset (ABC) \end{cases}$

Do đó: góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) là góc \widehat{SMA}

Xét tam giác đều ABC : $AM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Xét tam giác vuông SMA có: $\tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Suy ra: $\widehat{SMA} = 30^\circ$

Vậy góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 30° .

d) Sai: Ta có: $\frac{V_{S.APQ}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA}{SA} \cdot \frac{SP}{SB} \cdot \frac{SQ}{SC} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Suy ra $V_{S.APQ} = \frac{1}{4} V_{S.ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{a^3 \sqrt{3}}{12} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{48}$

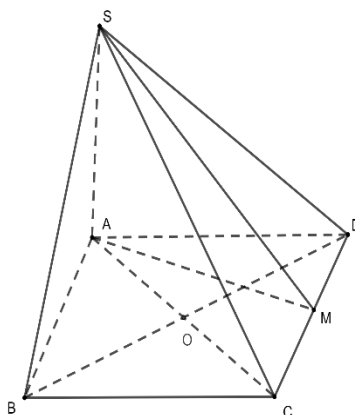
Do đó: $V_{A.BCQP} = V_{S.ABC} - V_{S.APQ} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12} - \frac{a^3 \sqrt{3}}{48} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{16}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{2}$; $\widehat{ABC} = 60^\circ$; cạnh SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Trả lời: 1,22



* Do $\widehat{ABC} = 60^\circ$ nên hai tam giác ABC và ADC là hai tam giác đều cạnh bằng $\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm CD ta có $AM = \sqrt{AD^2 - MD^2} = \sqrt{(\sqrt{2})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$.

* Vì $AM \perp CD$ và $SA \perp CD$ (do $SA \perp (ABCD)$) nên ta có $SM \perp CD$ suy ra góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy là góc \widehat{SMA} . Vậy $\widehat{SMA} = 60^\circ$.

* Tam giác SAM vuông tại A nên $\tan \widehat{SMA} = \tan 60^\circ = \frac{SA}{AM}$

$$\Rightarrow SA = AM \cdot \tan 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

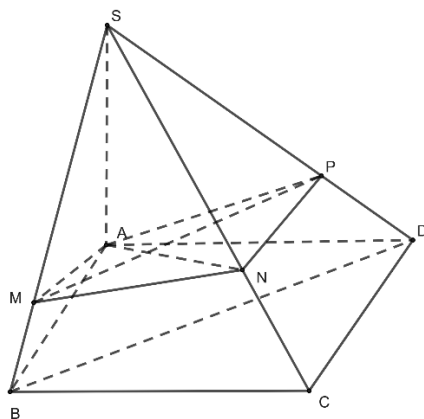
* $S_{ABCD} = 2S_{ADC} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AM \cdot CD = \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{3}$.

* Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,22$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh SA vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy bằng 60° . Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB, SC, SD , khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Trả lời: 493



* Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy là góc $\widehat{SBA} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

* Ta có: $\left. \begin{array}{l} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AM$.

Lại có $AM \perp SB$ nên có $AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $AP \perp SC$. Từ đó suy ra các đường thẳng AM, AN, AP cùng vuông góc với SC nên chúng đồng phẳng hay $SC \perp (AMNP)$.

* Do $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AD$, xét hai tam giác vuông SAB và SAD có $AB = AD$ và SA chung nên chúng bằng nhau. Gọi cạnh hình vuông là x thì

$$SA = AB \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow SB = SD = \sqrt{x^2 + (x\sqrt{3})^2} = 2x. \text{ Lại có } SA^2 = SP \cdot SD \Rightarrow SP = \frac{3x^2}{2x} = \frac{3x}{2} \Rightarrow \frac{SP}{SD} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Tương tự ta có } \frac{SM}{SB} = \frac{SP}{SD} = \frac{3}{4} \Rightarrow MP \parallel BD \Rightarrow d(MN, BD) =$$

$$d(BD, (AMNP)) = d(D, (AMNP))$$

$$= \frac{1}{3} d(S; (AMNP)) = 3\sqrt{2} \Rightarrow d(S; (AMNP)) = 9\sqrt{2}.$$

* Ở trên ta đã có $SC \perp (AMNP) \Rightarrow d(S; (AMNP)) = SN \Rightarrow SN = 9\sqrt{2}$

Mặt khác tam giác SAC vuông tại A có $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{3x^2 + 2x^2} = x\sqrt{5}$ mà

$$SA^2 = SN \cdot SC \Rightarrow (x\sqrt{3})^2 = 9\sqrt{2} \cdot x\sqrt{5} \Rightarrow x = 3\sqrt{10}$$

* Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{10} \cdot \sqrt{3} \cdot (3\sqrt{10})^2 \approx 493$.

Câu 3: Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (tham khảo hình bên dưới). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có diện tích lần lượt là $400 \text{ (cm}^2\text{)}$ và $900 \text{ (cm}^2\text{)}$, cạnh bên của sọt dài 15 cm . Tính thể tích của sọt làm tròn đến hàng đơn vị. (đơn vị cm^3)



Lời giải

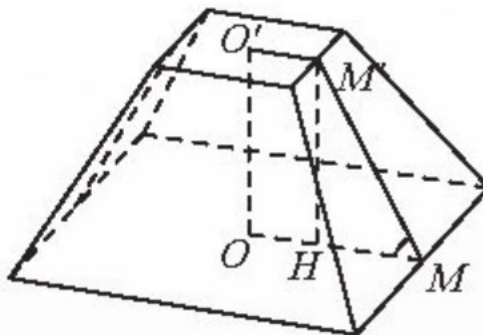
Trả lời: 8378

Diện tích mặt đáy lớn là $S_1 = 900 = 30^2 (cm^2)$, diện tích mặt đáy nhỏ là $S_2 = 400 = 20^2 (cm^2)$.

Độ dài các cạnh của đáy lớn và đáy bé lần lượt là $30(cm), 20(cm)$

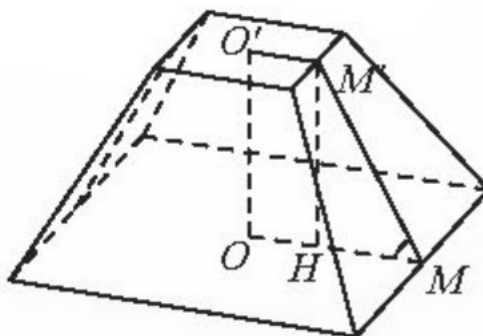
Chiều cao là $h = \sqrt{15^2 - 2.5^2} = 5\sqrt{7}(cm)$. Do đó $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}) \approx 8378 (cm^3)$.

Câu 4: Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cụt tứ giác đều (tham khảo hình bên dưới) có hai cạnh đáy là $14m$ và $10m$. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 291



Gọi O, O', M, M' lần lượt là tâm hai đáy và trung điểm hai cạnh đáy lớn và đáy nhỏ tương ứng. Vẽ đường cao MH của hình thang vuông $OMM'O'$.

Ta có: $\widehat{MM'O'} = 135^\circ, \widehat{M'MO} = 45^\circ$

$$OO' = HM' = (OM - O'M') \cdot \tan \widehat{M'MO} = (7 - 5) \cdot \tan 45^\circ = 2$$

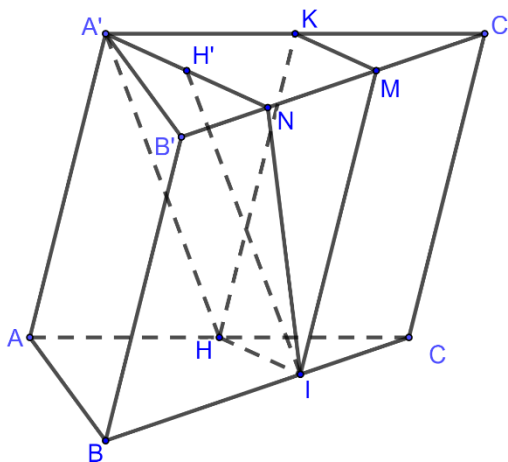
$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + \sqrt{SS'} + S') = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot (14^2 + 14 \cdot 10 + 10^2) \approx 291 (m^3).$$

Vậy cần phải di chuyển ra khỏi hầm khoảng $291(m^3)$.

Câu 5: Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $A, AB = a, BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $\frac{k\sqrt{k}}{m}a^3$, trong đó k, m là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Tính giá trị biểu thức $m - k$.

Lời giải

Trả lời: 5



Ta có $BC = a\sqrt{3}$. Từ H kẻ HI vuông góc với BC .

Ta có $\Delta HIC \sim \Delta BAC$ nên $\frac{HI}{AB} = \frac{HC}{BC} \Rightarrow HI = \frac{AB \cdot HC}{BC} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi K là trung điểm của $A'C'$. Từ K kẻ KM vuông góc với $B'C'$.

Ta có $\Delta KMC' = \Delta HIC$ nên $KM = IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Gọi N là điểm trên $B'C'$ sao cho $MN = MC' \Rightarrow A'N = 2KM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Do $A'H \perp (ABC)$ nên $(A'NIH) \perp (ABC) \Rightarrow NI \perp BC$.

Hình thang vuông $A'NIH$ có $A'N > HI$ nên \widehat{HIN} là góc tù.

Suy ra $\widehat{HIN} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{A'NI} = 60^\circ$.

Gọi H' là hình chiếu của I lên $A'N$ suy ra H' là trung điểm của $A'N$.

$\Rightarrow A'H = IH' = NH' \cdot \tan 60^\circ = \frac{3a}{4}$.

Do đó thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = A'H \cdot S_{ABC} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^3}{8}$.

Suy ra $k = 3, m = 8$. Do đó $m - k = 5$.

Câu 6: Người ta phải cưa một thân cây hình trụ có đường kính $1m$, chiều dài $4m$ để được một cây xà hình khối chữ nhật. Hỏi thể tích lớn nhất của khối gỗ sau khi cưa xong là bao nhiêu m^3 ?

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $x, y(m)$ lần lượt là chiều dài và chiều rộng của đáy khối gỗ.

Theo định lí Pitago ta có: $x^2 + y^2 = (2r)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ (vì đường kính của thân cây là $1m$).

Thể tích của cây xà lớn nhất khi diện tích đáy lớn nhất.

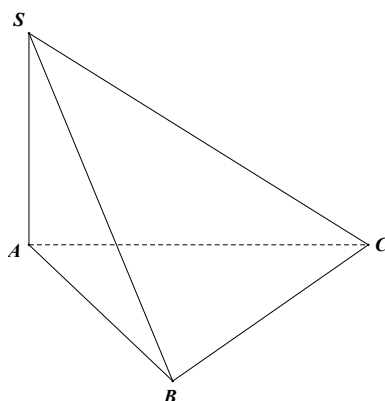
Ta có: $x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow xy \leq \frac{1}{2}$. Dấu "=" xảy ra khi $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Thể tích khối gỗ sau khi cưa xong: $V = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 4 = 2m^3$.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với đáy và $SC = a\sqrt{3}$. Thể tích khối chóp bằng

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \end{cases} \Rightarrow SA \perp (ABC).$$

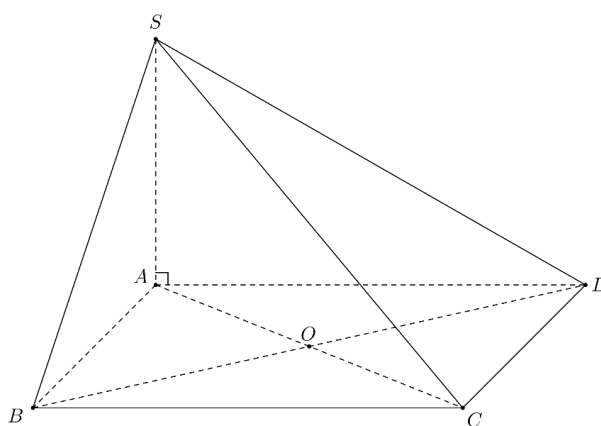
Trong tam giác SAC vuông tại A có $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = a\sqrt{2}$.

Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a\sqrt{2}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{6}}{12}$.

Câu 2: Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O ; $AC = 2AB = 2a$; SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết rằng $SD = a\sqrt{5}$.

Lời giải



Ta có: $AC = 2AB = 2a \Rightarrow AB = a$.

Do $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow AB \perp BC$.

Xét ΔABC vuông tại B có: $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} \Leftrightarrow BC = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}$.

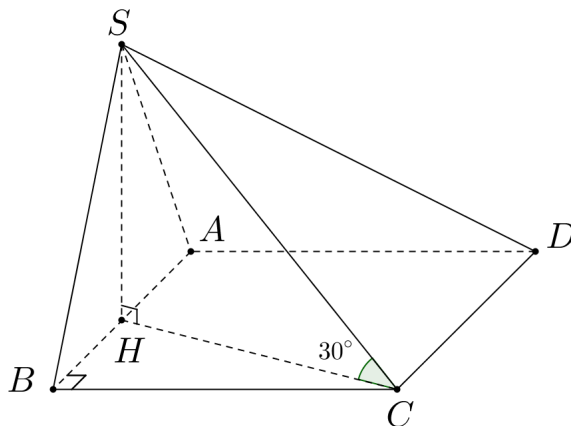
Xét ΔSAD vuông tại A có: $SA = \sqrt{SD^2 - AD^2} \Leftrightarrow SA = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - (a\sqrt{3})^2} = a\sqrt{2}$.

Do $SA \perp (ABCD)$ suy ra SA là đường cao của khối chóp.

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} SA.S_{ABCD} = \frac{1}{3} SA.AB.BC = \frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; ΔSAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết SC tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi H là trung điểm của AB . Vì tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$.

$$\begin{cases} (SAB) \cap (ABCD) = AB \\ (SAB) \perp (ABCD) \\ SH \perp AB \end{cases} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

Suy ra $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH} = 30^\circ$.

Vì SH là đường cao của tam giác đều cạnh a nên $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

$$\Rightarrow CH = SH \cdot \cot 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} = \frac{3a}{2}.$$

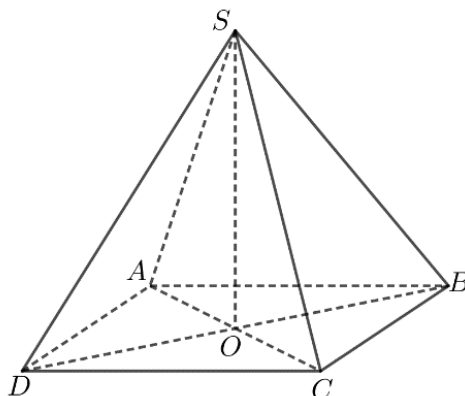
Trong tam giác vuông BHC , ta có: $BC^2 = HC^2 - HB^2 = \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow BC = a\sqrt{2}$.

Diện tích của hình chữ nhật $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB.BC = a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$.

Vậy thể tích hình chóp $S.ABCD$ là $V = \frac{1}{3} SH.S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao bằng $\sqrt{3}a$ và độ dài cạnh bên bằng $\sqrt{5}a$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

Lời giải



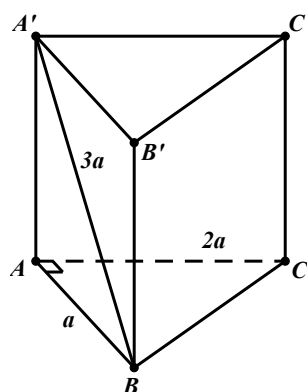
Ta có: $BO = \sqrt{SB^2 - SO^2} = \sqrt{2}a$.

$$BD = 2BO = 2\sqrt{2}a \Rightarrow AB = \frac{BD}{\sqrt{2}} = 2a.$$

Thể tích khối chóp $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{3} (2a)^2 \cdot \sqrt{3}a = \frac{4\sqrt{3}}{3} a^3$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là $\triangle ABC$ vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



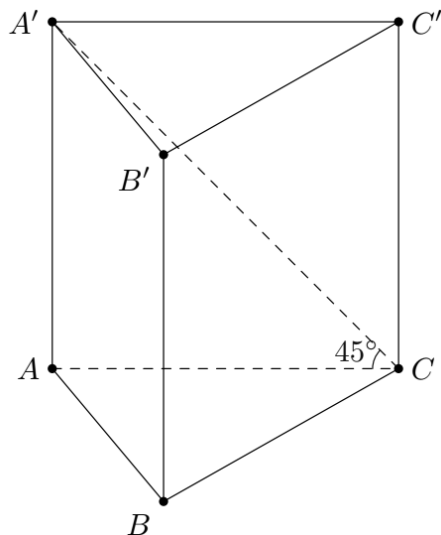
Diện tích đáy là $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 2a = a^2$.

Tam giác ABA' vuông tại A nên có $AA' = \sqrt{A'B^2 - AB^2} = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2a\sqrt{2}$.

Thể tích cần tính là $V = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = a^2 \cdot 2a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}a^3$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa đường thẳng $A'C$ và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

Lời giải



Ta có $\widehat{(A'C, (ABC))} = \widehat{A'CA} = 45^\circ$ nên $\triangle AA'C$ vuông cân tại A suy ra $AA' = AC = a$.

Vậy thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = Sh = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG
KHÔNG GIAN

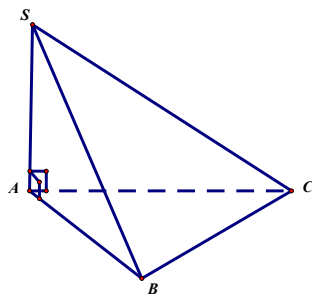
ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG
ĐỀ TEST SỐ 01

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC' ?

- A. $A'D$. B. AC . C. BB' . D. AD' .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ dưới)



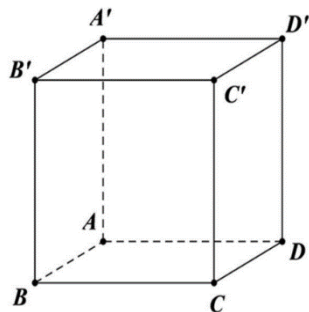
Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) là

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD và K là hình chiếu của A lên SD . Góc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ là

- A. \widehat{SKA} . B. \widehat{SBA} . C. \widehat{SHA} . D. \widehat{SDA} .

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ).



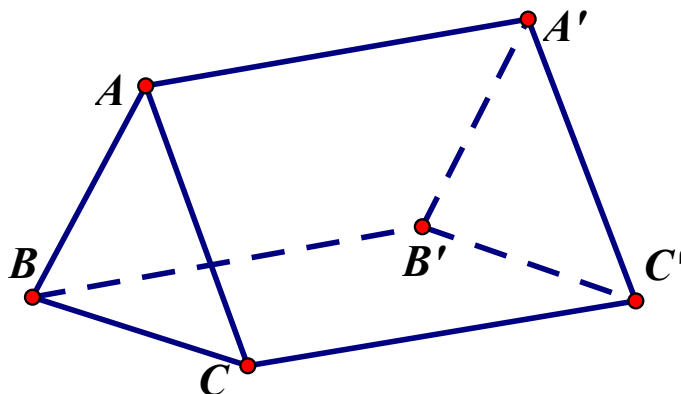
Góc giữa hai đường thẳng AC và $C'D'$ bằng góc

- A. $\widehat{AD'C}$. B. \widehat{BCD} . C. $\widehat{AC'D}$. D. \widehat{ACD} .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $SA \perp (SBC)$. B. $SA \perp (ABC)$. C. $SA \perp (SAB)$. D. $SA \perp (SAC)$.

- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SD \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?
A. $AD \perp (SCD)$. **B.** $BC \perp (SAB)$. **C.** $AC \perp (SBD)$. **D.** $AB \perp (SBC)$.
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi J là trung điểm của SA , G là trọng tâm tam giác ABC . Hình chiếu của đường thẳng JG trên mặt phẳng (ABC) là
A. đường thẳng AB . **B.** đường thẳng BC . **C.** đường thẳng AC . **D.** đường thẳng AG .
- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng vuông góc với (SAC) là
A. (SAB) . **B.** (SBD) . **C.** (SBC) . **D.** (SAD) .
- Câu 9:** Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy $S = 12$ và chiều cao $h = 4$ là
A. $V = 24$. **B.** $V = 3$. **C.** $V = 16$. **D.** $V = 48$.
- Câu 10:** Chiều cao của khối chóp có thể tích V và diện tích S là
A. $h = \frac{S}{V}$. **B.** $h = \frac{3S}{V}$. **C.** $h = \frac{V}{S}$. **D.** $h = \frac{3V}{S}$.
- Câu 11:** Một tháp chuông có hình dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài $6m$, cạnh bên dài $15m$. Chiều cao của tháp chuông bằng
A. $3\sqrt{21}m$. **B.** $3\sqrt{17}m$. **C.** $6\sqrt{6}m$. **D.** $3\sqrt{23}m$.
- Câu 12:** Một cái lều ở trại hè có dạng hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Cho biết $AB = AC = 2m$; $BC = 3,2m$; $AA' = 5m$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$.



- A.** $1,2m$. **B.** $2m$. **C.** $3,2m$. **D.** $5m$.

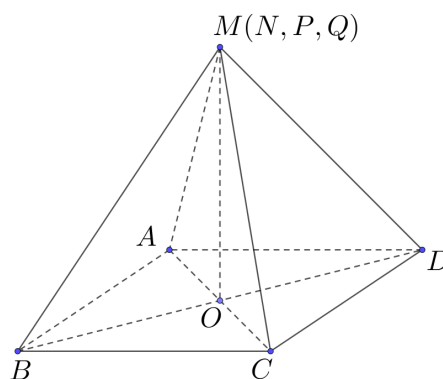
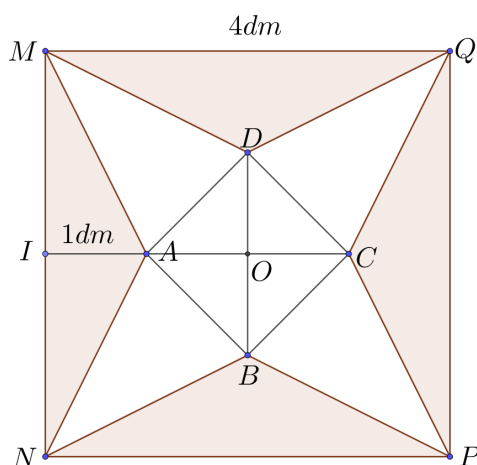
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

- Câu 1:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi AH , AK lần lượt là đường cao của ΔSAB , ΔSAC .
- a) $(SC, (ABC)) = 45^\circ$.
 b) $(SBC) \perp (SAB)$.
 c) $(AHK) \perp (SBC)$.
 d) $(AK, (SBC)) = 60^\circ$.

- Câu 2:** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC .
- $(SMN) \perp (ABCD)$.
 - $(SMN) \perp (SAD)$.
 - $((SBC); (ABCD)) = 30^\circ$.
 - $((SBC); (SCD)) \approx 81^\circ$.

- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy.
- Chiều cao hình chóp bằng a .
 - Thể tích khối chóp bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.
 - Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) bằng a .
 - Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $\sqrt{2}a$.

- Câu 4:** Từ một tâm tròn hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4 dm, người ta cắt tâm tròn theo các tam giác cân MAN, NBP, PCQ, QDM bằng nhau sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh M, N, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đều có đáy là tứ giác $ABCD$. Biết đường cao kẻ từ A của tam giác MAN bằng 1 dm.



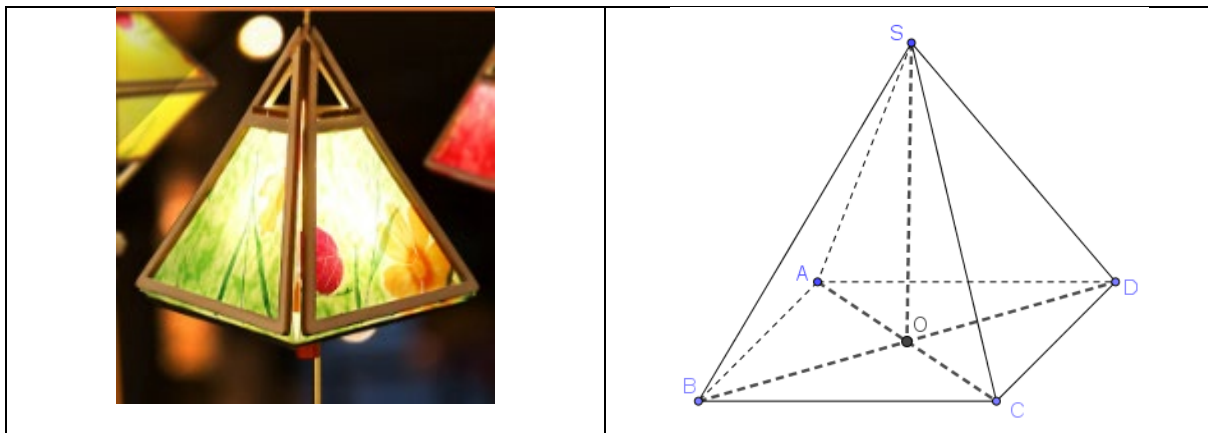
- Cạnh đáy của hình chóp đều được tạo ra bằng 2 dm.
- Cạnh bên của hình chóp đều được tạo ra bằng $\sqrt{5}$ dm.
- Chiều cao của hình chóp đều được tạo ra bằng 2 dm.
- Thể tích khối chóp đều được tạo ra bằng $\frac{4}{3} \text{ dm}^3$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính giá trị của $\cos(AB', CD')$.

- Câu 2:** Độ dốc của con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mặt phẳng chứa mặt con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 3: Bạn An muốn làm một chiếc đèn lồng bằng gỗ hình chóp tứ giác đều, có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng 20 cm như hình vẽ, được mô hình hóa bởi hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Để tạo nét độc đáo cho chiếc đèn, bạn An muốn trang trí một đoạn ruy băng nối từ một điểm trên cạnh BD đến một điểm trên cạnh bên SC . Chiều dài ngắn nhất của đoạn ruy băng là a (cm). Tìm a .

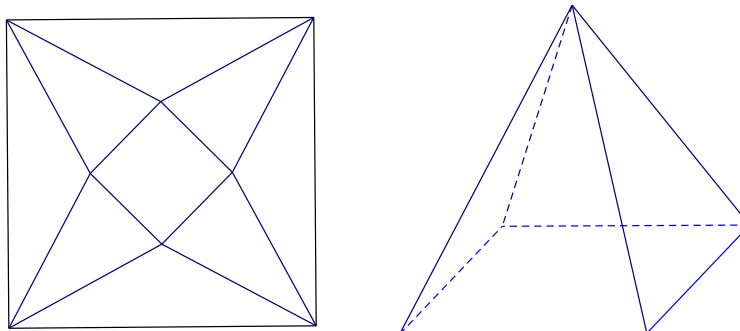


Câu 4: Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21 m và cạnh đáy dài 34 m. Góc nhị diện tạo bởi hai mặt bên có chung một cạnh của kim tự tháp có số đo bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = 1$, $SA = 2$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB (làm tròn đến hai chữ số phần thập phân).

Câu 6: Cho miếng bìa hình vuông cạnh bằng 5 (m). Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành hình chóp tứ giác đều (tham khảo hình vẽ bên dưới). Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)



PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60° . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10 m. Hỏi khoảng cách của con diều cách mặt đất bao nhiêu centimet (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

- Câu 2:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2AD = 2CD = 2$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3$. Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAB) .
- Câu 3:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?
- Câu 4:** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = 3$, $AD = 4$, $AA' = 5$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BDA') bằng bao nhiêu (kết quả lấy gần đúng đến hàng phần trăm).
- Câu 5:** Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD)$, $AC = AD = BC = BD = 4$, $CD = x$ ($0 < x < 8$). Gọi I , J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Với giá trị nào của x thì $(ABC) \perp (ABD)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?
- Câu 6:** Một vật trang trí có dạng hình chóp $S.ABCD$ được ngăn làm hai phần chứa kẹo và bánh. Biết rằng hình chóp có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $1m$, $SA = \sqrt{3}(m)$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) là mặt phẳng ngăn cách hai phần này, trên đó ta đặt một miếng ván gỗ sao cho các cạnh của miếng ván nằm trên các cạnh của khối chóp. Tính diện tích của miếng ván gỗ đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

----- HẾT -----

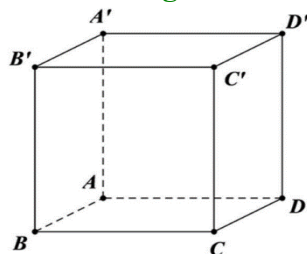
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC' ?

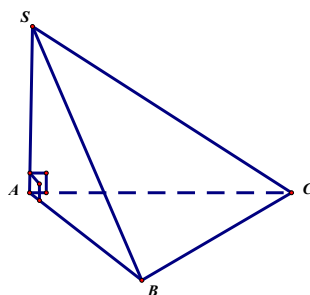
- A. $A'D$. B. AC . C. BB' . D. AD' .

Lời giải



Ta có: $A'D // B'C$, $B'C \perp BC' \Rightarrow A'D \perp BC'$.

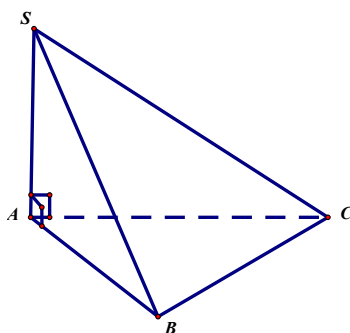
Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ dưới)



Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) là

- A. 45° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .

Lời giải



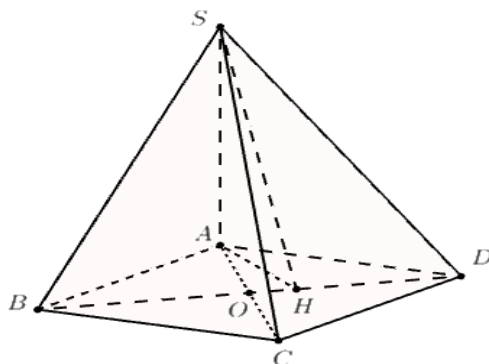
Do $SA \perp (ABC)$ mà $SA \subset (SAC) \Rightarrow (SAC) \perp (ABC)$.

Vậy số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) là 90° .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD và K là hình chiếu của A lên SD . Góc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ là

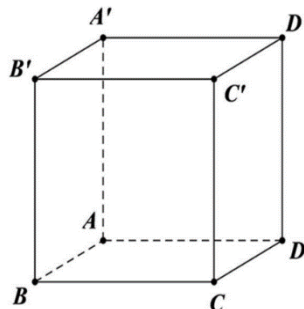
- A. \widehat{SKA} . B. \widehat{SBA} . C. \widehat{SHA} . D. \widehat{SDA} .

Lời giải



Ta có $SH \perp BD$ và $AH \perp BD$ suy ra \widehat{SHA} là góc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$.

Câu 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ).



Góc giữa hai đường thẳng AC và $C'D'$ bằng góc

- A. $\widehat{AD'C}$. B. \widehat{BCD} . C. $\widehat{AC'D}$. D. \widehat{ACD} .

Lời giải

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên $C'D' \parallel CD$. Suy ra $(AC, C'D') = (AC, CD) = \widehat{ACD}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $SA \perp (SBC)$. B. $SA \perp (ABC)$. C. $SA \perp (SAB)$. D. $SA \perp (SAC)$.

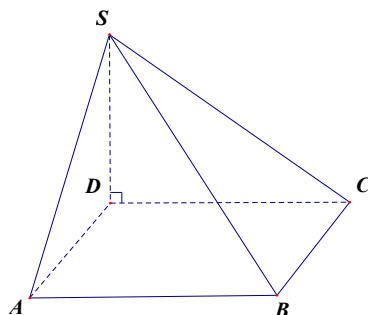
Lời giải

Ta có: $SA \perp AB, SA \perp AC$ và AB, AC là hai đường thẳng cắt nhau nằm trong (ABC) nên $SA \perp (ABC)$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SD \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. $AD \perp (SCD)$ B. $BC \perp (SAB)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $AB \perp (SBC)$.

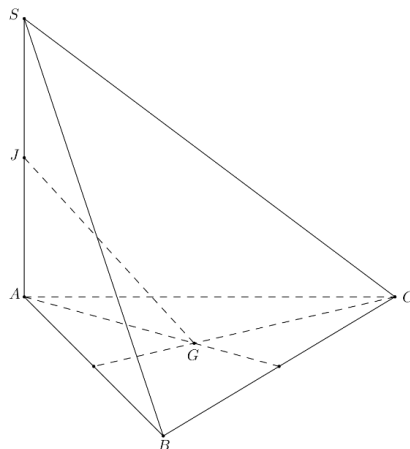
Lời giải



Ta có: $\begin{cases} AD \perp CD \\ AD \perp SD \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SCD)$

- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi J là trung điểm của SA , G là trọng tâm tam giác ABC . Hình chiếu của đường thẳng JG trên mặt phẳng (ABC) là
A. đường thẳng AB . **B.** đường thẳng BC . **C.** đường thẳng AC . **D.** đường thẳng AG .

Lời giải

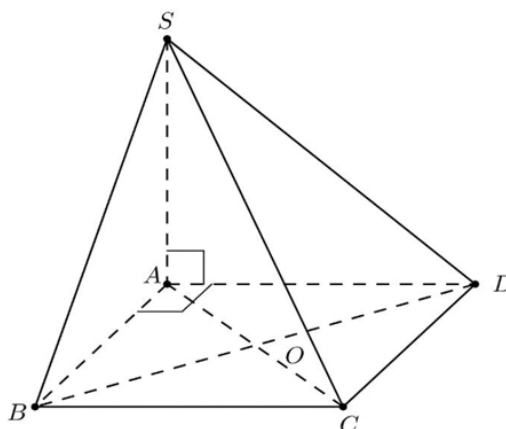


Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A mà J là trung điểm của SA nên hình chiếu của J lên mặt phẳng (ABC) là A . Hình chiếu của G lên mặt phẳng (ABC) là G .

Vậy hình chiếu của đường thẳng JG trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AG .

- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng vuông góc với (SAC) là
A. (SAB) . **B.** (SBD) . **C.** (SBC) . **D.** (SAD) .

Lời giải



$$\text{Ta có } \begin{cases} AC \perp BD \\ SA \perp BD \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$$

Mà $BD \subset (SBD)$ nên $(SBD) \perp (SAC)$.

- Câu 9:** Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy $S=12$ và chiều cao $h=4$ là
A. $V=24$. **B.** $V=3$. **C.** $V=16$. **D.** $V=48$.

Lời giải

$$V = S.h = 12.4 = 48.$$

- Câu 10:** Chiều cao của khối chóp có thể tích V và diện tích S là

A. $h = \frac{S}{V}$.

B. $h = \frac{3S}{V}$.

C. $h = \frac{V}{S}$.

D. $h = \frac{3V}{S}$.

Lời giải

$$V = \frac{1}{3}S.h \Rightarrow h = \frac{3V}{S}.$$

Câu 11: Một tháp chuông có hình dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 6 m , cạnh bên dài 15 m . Chiều cao của tháp chuông bằng

A. $3\sqrt{21} m$.

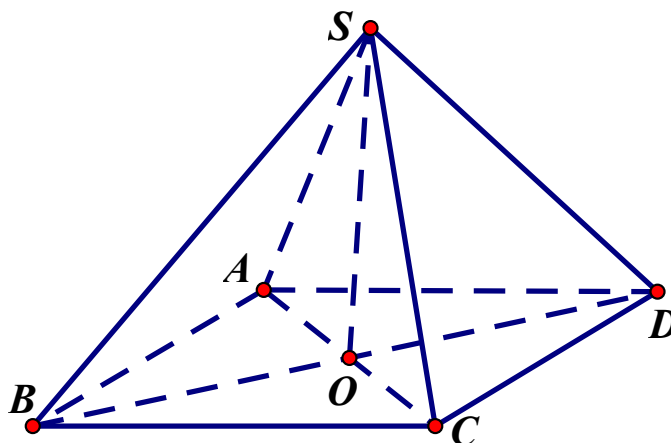
B. $3\sqrt{17} m$.

C. $6\sqrt{6} m$.

D. $3\sqrt{23} m$.

Lời giải

Chiều cao của tháp chuông là chiều cao SO của hình chóp $S.ABCD$.

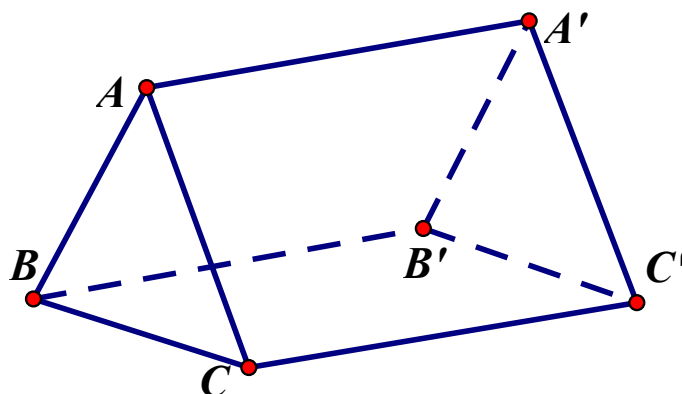


Có $AC = AB\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$ (m) $\Rightarrow AO = \frac{1}{2}AC = 3\sqrt{2} m$.

Tam giác SOA vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - AO^2} = \sqrt{15^2 - (3\sqrt{2})^2} = 3\sqrt{23} m$.

Vậy chiều cao của tháp chuông là $3\sqrt{23} m$.

Câu 12: Một cái lều ở trại hè có dạng hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Cho biết $AB = AC = 2m$; $BC = 3,2m$; $AA' = 5m$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$.



A. 1,2m .

B. 2m .

C. 3,2m .

D. 5m .

Lời giải

Ta có: $(ABC) \parallel (A'B'C') \Rightarrow d(AB, B'C') = d((ABC), (A'B'C')) = AA' = 5m$.

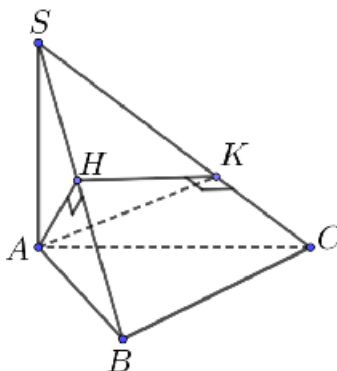
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi AH , AK lần lượt là đường cao của ΔSAB , ΔSAC .

- a) $(SC, (ABC)) = 45^\circ$.
 b) $(SBC) \perp (SAB)$.
 c) $(AHK) \perp (SBC)$.
 d) $(AK, (SBC)) = 60^\circ$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
---------	---------	---------	--------



a) Đúng.

Xét ΔABC vuông tại B , ta có $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

Ta có $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SC, (ABC)) = (SC, AC) = \widehat{SCA}$.

Xét ΔSAC vuông tại A , ta có:

$$\tan SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3}} = 1 \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ.$$

b) Đúng.

Ta có $SA \perp (ABC)$ mà $BC \subset (ABC)$ nên $SA \perp BC$.

Lại có $AB \perp BC$ (vì ΔABC vuông tại B).

Do đó $BC \perp (SAB)$ mà $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$.

c) Đúng.

Ta có $BC \perp (SAB)$ mà $AH \subset (SAB)$ nên $BC \perp AH$.

Lại có $SB \perp AH$ nên $AH \perp (SBC)$.

Mặt khác $AH \subset (AHK)$ nên $(AHK) \perp (SBC)$.

d) Sai.

Xét ΔSAB vuông tại A , AH là đường cao, ta có :

$SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$.

$SA \cdot AB = AH \cdot SB \Rightarrow AH = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Xét ΔSAC vuông tại A , AK là đường cao, ta có :

$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{6}$.

$$\square \quad SA.AC = AK.SC \Rightarrow AH = \frac{SA.AC}{SC} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Ta có $AH \perp (SBC)$ nên $(AK, (SBC)) = (AK, HK) = \widehat{AKH}$.

Xét ΔAHK vuông tại H , ta có:

$$\sin AKH = \frac{AH}{AK} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{AKH} = 45^\circ.$$

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC .

a) $(SMN) \perp (ABCD)$.

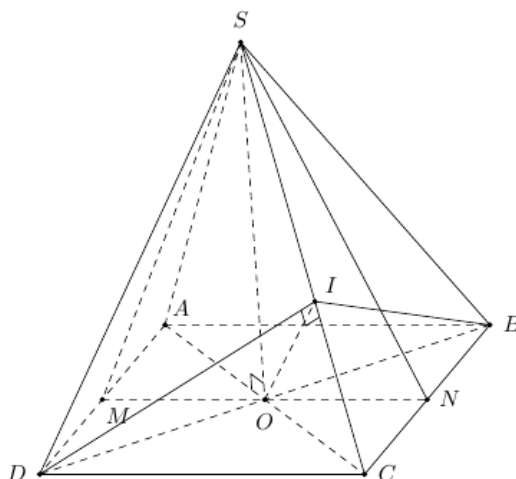
b) $(SMN) \perp (SAD)$.

c) $((SBC); (ABCD)) = 30^\circ$.

d) $((SBC); (SCD)) \approx 81^\circ$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------	---------	--------	--------



a) Đúng.

$$\text{Do } \begin{cases} SO \perp (ABCD) \\ SO \subset (SMN) \end{cases} \Rightarrow (SMN) \perp (ABCD).$$

b) Đúng.

$$\text{Do } \begin{cases} AD \perp MN \\ AD \perp SO \end{cases} \Rightarrow AD \perp (SMN).$$

$$\begin{cases} AD \perp (SMN) \\ AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SMN) \perp (SAD).$$

c) Sai.

$$\text{Ta có } ((SBC); (ABCD)) = (SN, NO) = \widehat{SNO}.$$

$$\tan \widehat{SNO} = \frac{SO}{ON} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SNO} = 60^\circ.$$

Vậy $((SBC);(ABCD)) = 60^\circ$.

d) Sai.

Vẽ $OI \perp SC$ ta có $((SBC);(SCD)) = (DI, BI)$

$$\text{Ta có } OD = \frac{BD}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Tam giác SOC vuông tại O , có đường cao $OI = \frac{SO \cdot OC}{\sqrt{SO^2 + OC^2}} = \frac{a\sqrt{30}}{10}$.

Tam giác DOI vuông tại O , có $\tan \widehat{DIO} = \frac{OD}{OI} = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow 2\widehat{DIO} \approx 104^\circ 29'$.

Suy ra $((SBC);(SCD)) = (DI, BI) = 180^\circ - 2\widehat{DIO} \approx 75^\circ 31'$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy.

a) Chiều cao hình chóp bằng a .

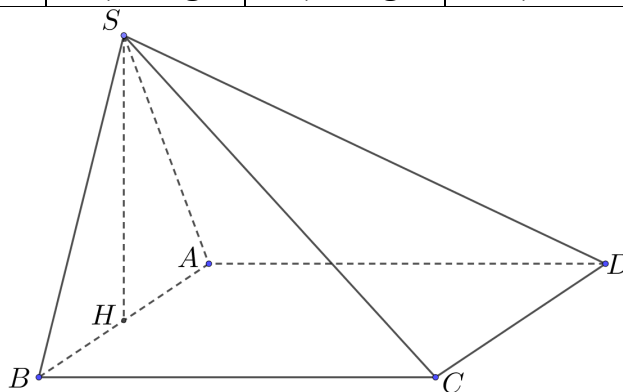
b) Thể tích khối chóp bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

c) Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) bằng a .

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $\sqrt{2}a$.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
--------	---------	---------	--------



a) Sai

Gọi H là trung điểm của AB . Khi đó $SH \perp AB$ và $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Lại có $(SAB) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$. Vậy chiều cao hình chóp là $SH = \frac{\sqrt{3}}{2}a$

b) Đúng

Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH \cdot S_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a \cdot a^2 = \frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.

c) Đúng

Ta có $CD \parallel AB \Rightarrow CD \parallel (SAB) \Rightarrow d(CD, (SAB)) = d(C, (SAB))$.

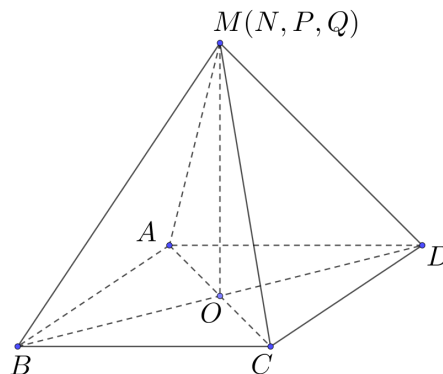
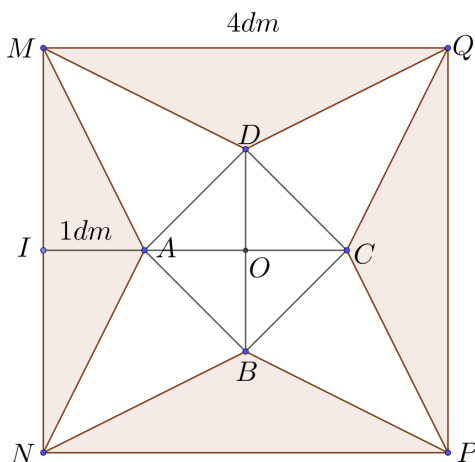
$(SAB) \perp (ABCD), CB \perp AB \Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow d(C, (SAB)) = CB = a$.

Vậy $d(CD, (SAB)) = a$

d) Sai

Mặt phẳng (SAB) chứa SA và song song với CD nên $d(CD, SA) = d(CD, (SAB)) = a$.

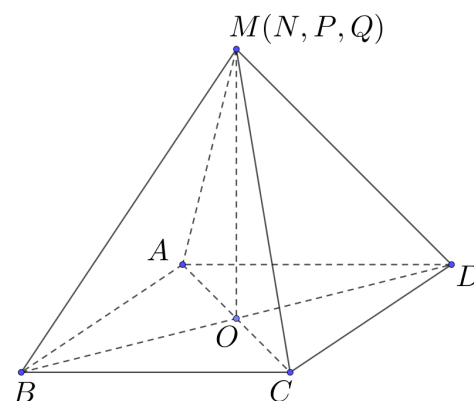
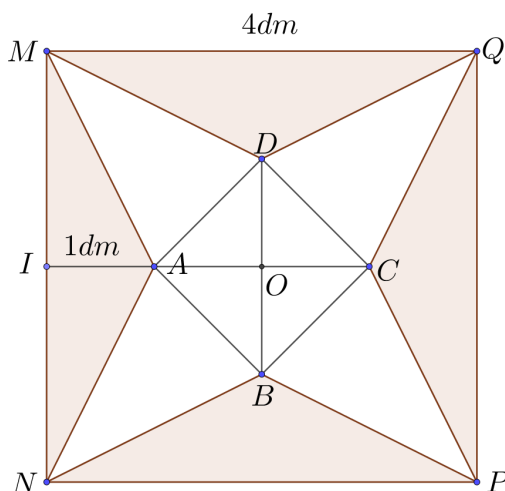
Câu 4: Từ một tấm tôn hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4 dm, người ta cắt tấm tôn theo các tam giác cân MAN, NBP, PCQ, QDM bằng nhau sau đó gò các tam giác cân ABN, BCP, CDQ, DAM sao cho các đỉnh M, N, P, Q trùng nhau để được khối chóp tứ giác đều có đáy là tứ giác $ABCD$. Biết đường cao kẻ từ A của tam giác MAN bằng 1 dm.



- a) Cạnh đáy của hình chóp đều được tạo ra bằng 2 dm.
- b) Cạnh bên của hình chóp đều được tạo ra bằng $\sqrt{5}$ dm.
- c) Chiều cao của hình chóp đều được tạo ra bằng 2 dm.
- d) Thể tích khối chóp đều được tạo ra bằng $\frac{4}{3}$ dm³.

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------



a) Sai

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Khi đó $OA = OI - AI = 2 - 1 = 1$. Cạnh đáy hình chóp là $AB = \sqrt{2}OA = \sqrt{2}$ dm.

b) Đúng

Cạnh bên của hình chóp $MA = \sqrt{MI^2 + IA^2} = \sqrt{5}$ dm.

c) Đúng

Chiều cao hình chóp $MO = \sqrt{MA^2 - OA^2} = \sqrt{5-1} = 2$ dm.

d) Sai

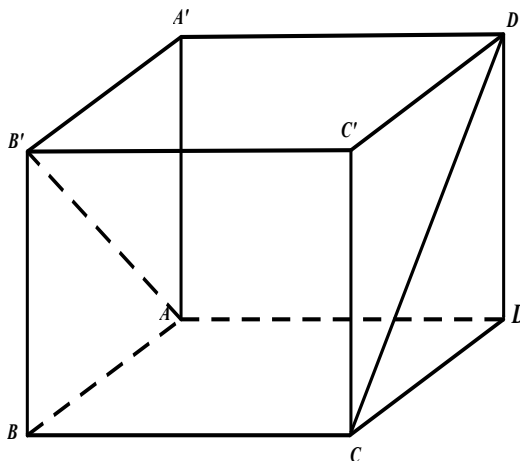
Thể tích hình chóp $V = \frac{1}{3}MO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}.2.(\sqrt{2})^2 = \frac{4}{3}$ dm³.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Tính giá trị của $\cos(AB', CD')$.

Lời giải

Trả lời: 0



Ta có: $CD' // BA' \Rightarrow (AB', CD') = (AB', BA')$.

Vì $ABB'A'$ là hình vuông nên $AB' \perp BA'$

Suy ra $(AB', CD') = (AB', BA') = 90^\circ$. Do đó: $\cos(AB', CD') = 0$.

Câu 2: Độ dốc của con đường thẳng là tang của góc tạo bởi mặt phẳng chứa mặt con đường thẳng đó với mặt phẳng nằm ngang. Độ dốc của đường thẳng dành cho người khuyết tật được quy định là không quá $\frac{1}{12}$. Hỏi theo đó, góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá bao nhiêu độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

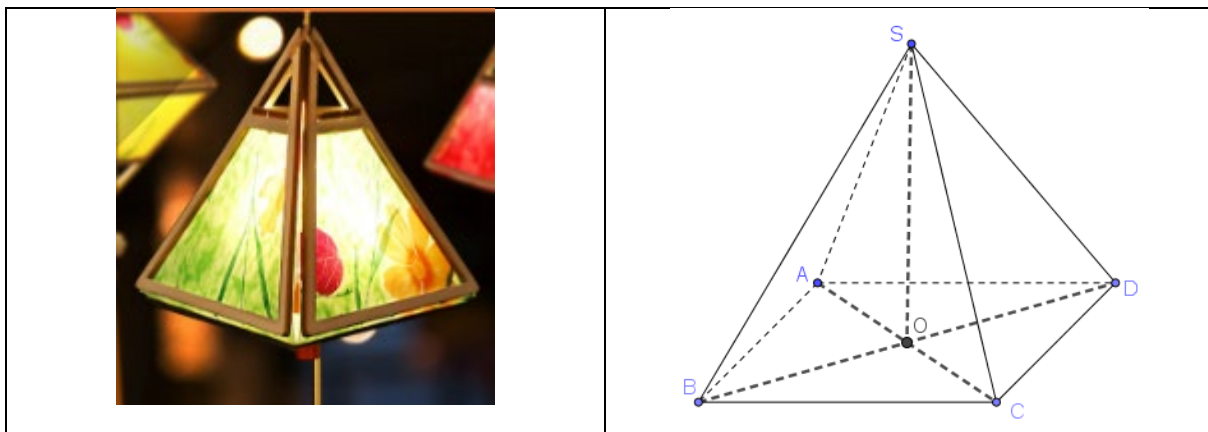
Trả lời: 4,76

Gọi α là góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$).

Theo đề ta có $\tan \alpha \leq \frac{1}{12} \Rightarrow \alpha \leq 4,76^\circ$.

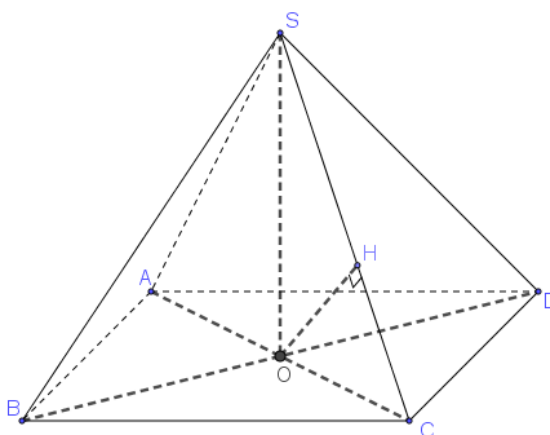
Vậy góc tạo bởi đường dành cho người khuyết tật và mặt phẳng nằm ngang không vượt quá $4,76^\circ$.

Câu 3: Bạn An muốn làm một chiếc đèn lồng bằng gỗ hình chóp tứ giác đều, có tất cả các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng 20 cm như hình vẽ, được mô hình hóa bởi hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Để tạo nét độc đáo cho chiếc đèn, bạn An muốn trang trí một đoạn ruy băng nối từ một điểm trên cạnh BD đến một điểm trên cạnh bên SC . Chiều dài ngắn nhất của đoạn ruy băng là a (cm). Tìm a .



Lời giải

Trả lời: 10



+ Do đèn lồng có dạng hình chóp tứ giác đều được mô hình hóa bởi hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ nên $ABCD$ là hình vuông và $SO \perp (ABCD)$.

+ Vì BD và SC chéo nhau nên đoạn ruy băng nối từ một điểm trên cạnh BD đến một điểm trên cạnh bên SC ngắn nhất chính là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BD và SC .

+ $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp BD$. Lại có $BD \perp AC$. Do đó $BD \perp (SAC)$ tại O .

Kẻ $OH \perp SC$ tại H . Vì $\begin{cases} BD \perp (SAC) \\ OH \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow BD \perp OH$ tại O .

Do đó $d(BD; SC) = OH$.

+ Vì $ABCD$ là hình vuông cạnh 20 cm nên $OC = 10\sqrt{2}$ cm;

$$SO = \sqrt{SC^2 - OC^2} = \sqrt{20^2 - (10\sqrt{2})^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$$

Tam giác HCO đồng dạng với tam giác OCS nên ta có

$$OH = \frac{SO \cdot CO}{SC} = \frac{10\sqrt{2} \cdot 10\sqrt{2}}{20} = 10 \text{ cm.}$$

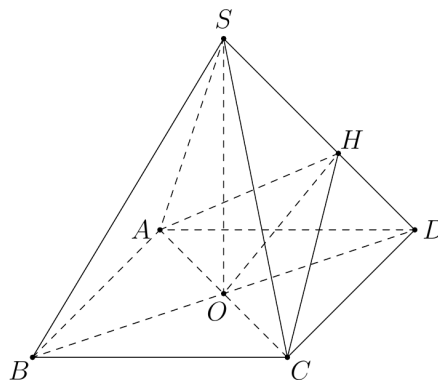
Vậy chiều dài ngắn nhất của đoạn ruy băng là 10 cm.

Câu 4: Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21 m và cạnh đáy dài 34 m. Góc nhị diện tạo bởi hai mặt bên có chung một cạnh của kim tự tháp có số đo bằng bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Trả lời: 113



Ta mô hình hóa kim tự tháp bằng một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ như hình vẽ, khi đó $SO = 21$ và $AB = 34$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, H là hình chiếu vuông góc của O trên SD .

Khi đó $SD \perp (AHC)$ nên $\widehat{AHC} = [A, SD, C]$.

$$\text{Ta có } OD = \frac{CD\sqrt{2}}{2} = 17\sqrt{2} \text{ nên } OH = \frac{SO \cdot OD}{\sqrt{SO^2 + OD^2}} = \frac{21 \cdot 17\sqrt{2}}{\sqrt{21^2 + (17\sqrt{2})^2}} = \frac{357\sqrt{2}}{\sqrt{1019}}.$$

$$\text{Suy ra: } AH = CH = \sqrt{OH^2 + OC^2} = \sqrt{\frac{843880}{1019}}.$$

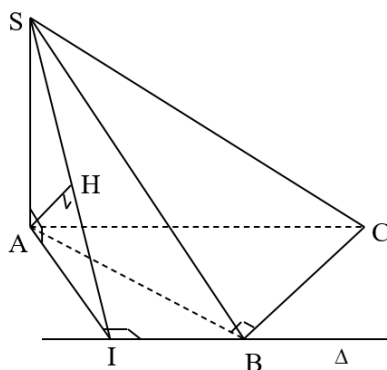
$$\text{Vậy } \cos \widehat{AHC} = \frac{AH^2 + CH^2 - AC^2}{2AH \cdot CH} = -\frac{289}{730}$$

$$\text{hay } [A, SD, C] \approx 113^\circ.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, tam giác ABC vuông cân tại B , $AB = 1$, $SA = 2$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB (làm tròn đến hai chữ số phần thập phân).

Bài giải

Trả lời: 0,67



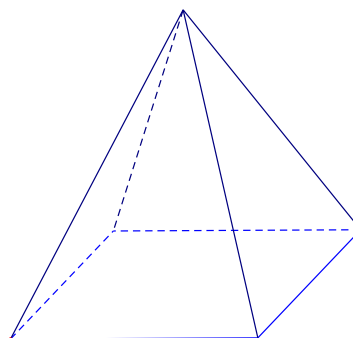
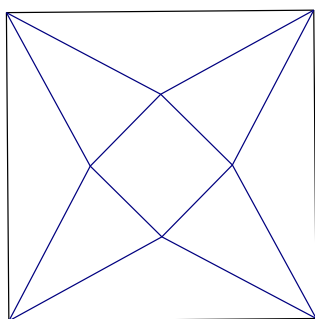
Kẻ đường thẳng Δ qua B và song song AC , Kẻ AI vuông góc Δ thì $\Delta \perp (SAI)$. Kẻ $AH \perp SI$ tại H thì $AH \perp (SBI)$.

Do đó: $d(AC; SB) = d(AC; (SBI)) = AH$.

Ta có: $AI = \frac{1}{2} AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

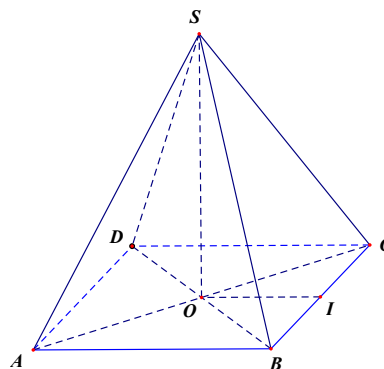
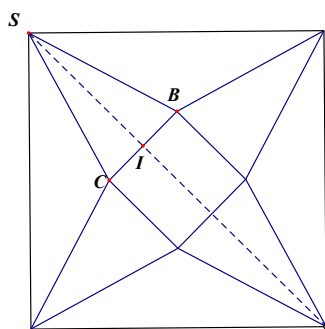
$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{9}{4} \Rightarrow AH = \frac{2}{3} \approx 0,67.$$

Câu 6: Cho miếng bìa hình vuông cạnh bằng 5(m). Để làm một mô hình kim tự tháp Ai Cập, người ta cắt bỏ 4 tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy chính là cạnh của hình vuông rồi gấp lên, ghép lại thành hình chóp tứ giác đều (tham khảo hình vẽ bên dưới). Để mô hình có thể tích lớn nhất thì cạnh đáy của mô hình bằng bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Trả lời: 2,83



Gọi x là độ dài cạnh của hình vuông $ABCD$, điều kiện $0 < x < \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD)$.

$$\text{Có } SI = \frac{5\sqrt{2}-x}{2}, SO = \sqrt{SI^2 - OI^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}-x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5\sqrt{2}-2x}{2}\right)}.$$

$$\text{Có } V = \frac{1}{3}SO.S_{ABCD} = \frac{1}{3}x^2 \cdot \sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{2} \left(\frac{5\sqrt{2}-2x}{2}\right)} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{5\sqrt{2}}{5}} x^4 \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - x\right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô - si cho 5 số dương:

$$\text{Có } \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \frac{x}{4} + \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{x}{4}\right) \geq 5 \sqrt[5]{\frac{x \cdot x \cdot x \cdot x}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{x}{4}\right)}.$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \sqrt[5]{\frac{x^4}{4^4} \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - x\right)} \Rightarrow x^4 \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - x\right) \leq \frac{4^4 \sqrt{2}^5}{2^5}.$$

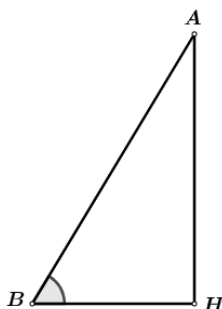
$$\Rightarrow \frac{5\sqrt{2}}{2} x^4 \left(\frac{5\sqrt{2}}{2} - x\right) \leq \frac{4^4 5 \sqrt{2}^6}{2^6} = 2^5 \cdot 5 \Rightarrow V \leq \frac{4\sqrt{10}}{3}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $x = 2\sqrt{2} = 2,83$ (m).

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 60° . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10 m. Hỏi khoảng cách của con diều cách mặt đất bao nhiêu centimet (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải



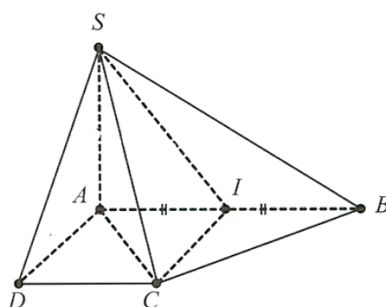
Gọi A là vị trí con diều, B là vị trí dây diều trên mặt đất; H là hình chiếu của A trên mặt đất.

Tam giác ABH vuông tại H có $\widehat{ABH} = 60^\circ$; $AB = 10 \text{ m} = 1000 \text{ cm}$.

Do đó $AH = AB \cdot \sin 60^\circ \approx 866 \text{ cm}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và D , $AB = 2AD = 2CD = 2$. Biết $SA \perp (ABCD)$, $SA = 3$. Tính diện tích hình chiếu vuông góc của tam giác SBC lên mặt phẳng (SAB) .

Lời giải



Gọi I là trung điểm AB .

$AICD$ là hình vuông $\Rightarrow CI = \frac{1}{2}AB \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại C

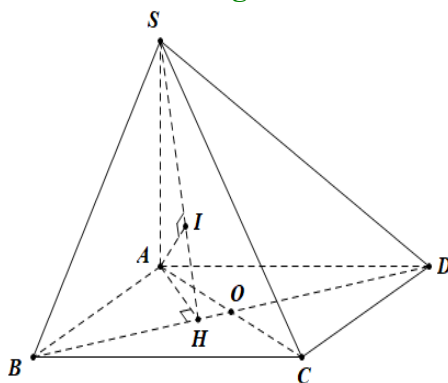
Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SA \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$

Hình chiếu của ΔSBC trên $mp(SAB)$ là ΔSIB , có I là trung điểm của AB .

$$S_{\Delta SIB} = \frac{1}{2}S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot SA \cdot AB = \frac{1}{4} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{3}{2} = 1,5.$$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2$, $BC = 2\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = 2\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?

Lời giải



Gọi O là tâm hình chữ nhật $ABCD$, suy ra O là trung điểm AC .

Do đó $d(C, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Gọi H, I lần lượt là hình chiếu của A lên BD, SH .

Ta có: $BD \perp (SAH)$ nên $BD \perp AI$.

Mặt khác $AI \perp SH$ nên $AI \perp (SBD)$

Vậy $d(A, (SBD)) = AI$.

Xét tam giác ABD vuông tại A : $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}$

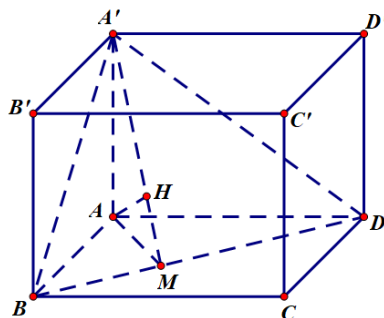
Xét tam giác SAH vuông tại A : $\frac{1}{AI^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{12} + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}$

Do đó $AI = \frac{2\sqrt{15}}{5} \approx 1.55$.

Vậy $d(C, (SBD)) = 1.55$.

Câu 4: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước $AB = 3$, $AD = 4$, $AA' = 5$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (BDA') bằng bao nhiêu (kết quả lấy gần đúng đến hàng phần trăm).

Lời giải



Trong tam giác ABD , dựng $AM \perp BD \Rightarrow \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} = \frac{25}{144}$.

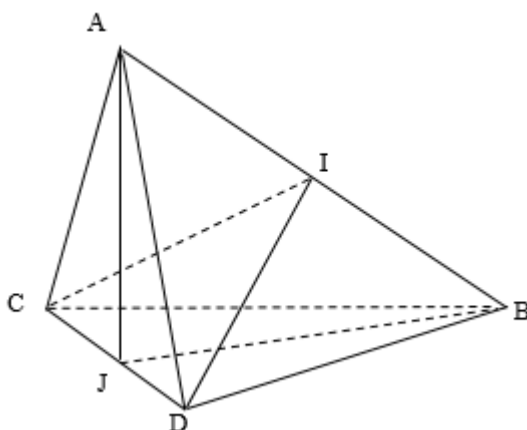
Trong tam giác AMA' , dựng $AH \perp A'M \Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AA'^2} = \frac{25}{144} + \frac{1}{5^2} = \frac{769}{3600}$.

$$\Rightarrow AH = \sqrt{\frac{3600}{769}} \approx 2,16.$$

Vậy $d(A, (BDA')) \approx 2,16$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có $(ACD) \perp (BCD)$, $AC = AD = BC = BD = 4$, $CD = x (0 < x < 8)$. Gọi I , J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Với giá trị nào của x thì $(ABC) \perp (ABD)$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải



Ta có tam giác ACD cân tại A nên $AJ \perp CD$; tam giác BCD cân tại B nên $BJ \perp CD$. Kết hợp với giả thiết $(ACD) \perp (BCD)$ ta được $AJ \perp BJ$.

Nhận thấy:

$$\Delta ACD = \Delta BCD (c.c.c) \Rightarrow AJ = BJ \Rightarrow AB = AJ\sqrt{2} = \sqrt{2(AC^2 - CJ^2)} = \sqrt{2\left(16 - \frac{x^2}{4}\right)}$$

Tương tự ta cũng có $CI = DI$.

Ta có ΔCAB cân tại C nên $CI \perp AB$; ΔDAB cân tại D nên $DI \perp AB$.

Nếu $(ABC) \perp (ABD)$ thì $DI \perp (ABC) \Rightarrow DI \perp CI \Leftrightarrow \Delta ICD$ vuông cân tại I

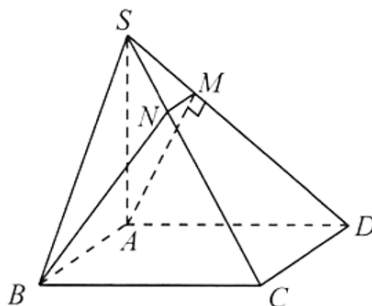
$$\Rightarrow CD = \sqrt{2}CI \Leftrightarrow CD = \sqrt{2(AC^2 - AI^2)} \Leftrightarrow CD = \sqrt{2\left(AC^2 - \frac{AB^2}{4}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2\left(16 - \frac{64 - x^2}{8}\right)} \Leftrightarrow x^2 = 16 + \frac{x^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{8\sqrt{3}}{3} \approx 4.6$$

Câu 6: Một vật trang trí có dạng hình chóp $S.ABCD$ được ngăn làm hai phần chứa kẹo và bánh. Biết rằng hình chóp có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $1m$, $SA = \sqrt{3}(m)$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt đáy. Gọi (α) là mặt phẳng qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) là mặt phẳng ngăn cách hai phần này, trên đó ta đặt một miếng ván gỗ sao cho các cạnh của miếng ván nằm trên các cạnh của khối chóp. Tính diện tích của miếng ván gỗ đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải



Ta có: $(SAB) \perp (ABCD)$; $(SAD) \perp (ABCD)$; $(SAB) \cap (SAD) = SA$
 $\Rightarrow SA \perp (ABCD)$.

Ta có: $CD \perp AD, CD \perp SA \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Mà $CD \subset (SCD) \Rightarrow (SCD) \perp (SAD)$

Vẽ $AM \perp SD (M \in SD) \Rightarrow AM \perp (SCD)$

$\Rightarrow (ABM) \perp (SCD)$ hay (ABM) là mặt phẳng (α) qua AB và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

Trong mặt phẳng (SCD) kẻ $MN \parallel CD (N \in SC)$.

Suy ra: $MN \parallel AB \Rightarrow MN \subset (\alpha)$.

Vậy các giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp là AB, BN, NM, MA .

Ta có: $MN \parallel AB$ và $AB \perp AM$ (vì $AB \perp (SAD)$) nên $ABNM$ là hình thang vuông tại A và M .

Tam giác SAD vuông tại A có AM là đường cao nên

$$\frac{1}{AM^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{(\sqrt{3})^2} + \frac{1}{1^2} = \frac{4}{3} \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$MN \parallel CD \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{SM}{SD} \Rightarrow \frac{MN}{CD} = \frac{SA^2}{SD^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AD^2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{3}{4}CD = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Vậy } S_{ABNM} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot (MN + AB) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3}{4} + 1\right) = \frac{7\sqrt{3}}{16} \approx 0,76 (m^2).$$

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG
ĐỀ TEST SỐ 02

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

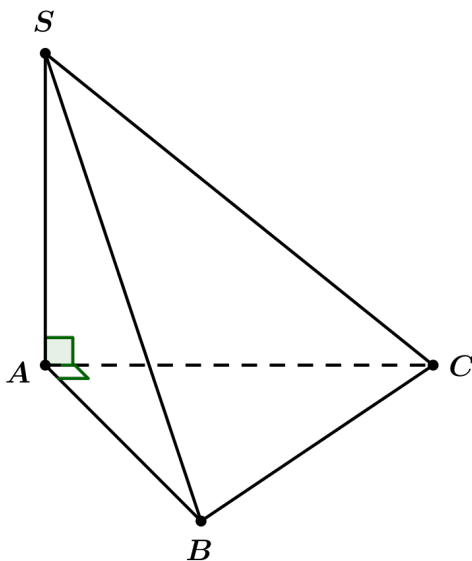
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $BD \perp (SAC)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $CD \perp (SAD)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác không vuông, $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Hãy chọn khẳng định **đúng**.

- A. $BC \perp AB$. B. $BC \perp SC$. C. $BC \perp AH$. D. $BC \perp AC$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$ và SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ B đến (SAC)



- A. $a\sqrt{3}$. B. a . C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

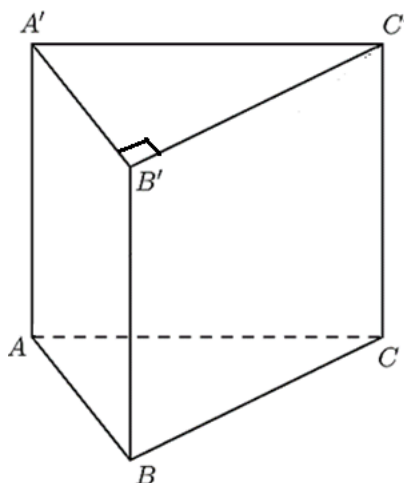
Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC) . H là hình chiếu vuông góc của A lên BC . Góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là:

- A. \widehat{SAH} . B. \widehat{SBA} . C. \widehat{SHA} . D. \widehat{ASH} .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$. Tìm góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) ?

- A. 135° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

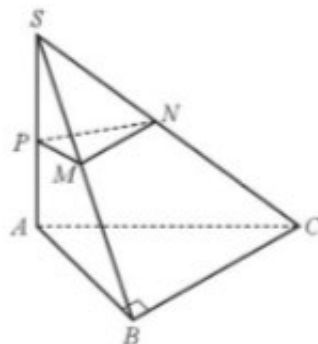
- Câu 6:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?
- A. $(SBD) \perp (ABCD)$. B. $SC \perp (SBD)$. C. $SO \perp (ABCD)$ D. $(SAC) \perp (ABCD)$.
- Câu 7:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD) ?
- A. (SCD) . B. (SBC) . C. (SAC) . D. (SAD) .
- Câu 8:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là
- A. \widehat{BSD} . B. \widehat{SBA} . C. \widehat{BAD} . D. \widehat{SDB} .
- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABC$ có diện tích đáy ABC bằng $a^2\sqrt{3}$ và thể tích khối chóp bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.
- A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. $h = a\sqrt{3}$.
- Câu 10:** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.



- A. $V = 4a^3\sqrt{5}$. B. $V = a^3\sqrt{15}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. D. $V = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.
- Câu 11:** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SAD) bằng
- A. AB . B. BD . C. SB . D. CA .
- Câu 12:** Tính khoảng cách d giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a .
- A. $d = \frac{3a}{2}$. B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $d = a\sqrt{2}$.

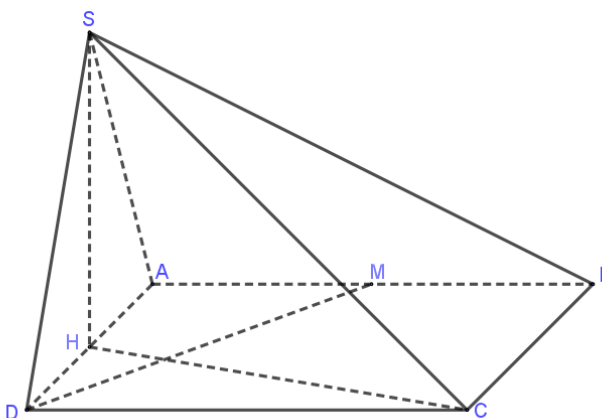
PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $BC \perp AB$, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$. Lấy hai điểm M , N lần lượt là trung điểm của SB , SC và điểm P nằm trên cạnh SA .



- a) $SA \perp AB$.
- b) $BC \perp (SAB)$.
- c) $(MN, AC) = 60^\circ$.
- d) Tam giác MNP vuông tại M .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H , M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB .



- a) $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH}$.
- b) Số đo của góc nhị diện $[(ABCD), CD, (SCD)]$ bằng 90° .
- c) cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- d) $(SMD) \perp (SHC)$.

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A , góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $AB = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC , biết $AA' = a\sqrt{2}$.

- a) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng AA' lên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AH .
- b) Góc $\widehat{A'AH}$ là góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) .
- c) Góc giữa hai đường thẳng AA' và AH bằng 60° .
- d) $(A'AH) \perp (BCC'B')$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , biết $SA = AB = BC = a$. Các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{3}$.

b) Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

c) Khoảng cách từ B đến đường thẳng SC bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

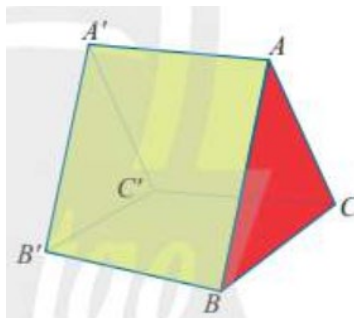
d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

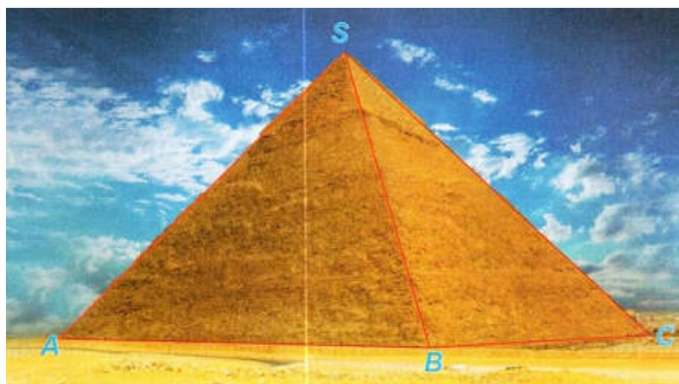
Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

(I). $CD \perp AB$. (II). $AC \perp BD$. (III). $BC \perp AD$. (IV). $BC \perp CD$.

Câu 2: Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy (Hình minh họa). Cho biết $AB = AC = 2,4m$; $BC = 2m$; $AA' = 3m$. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'B'$ và AC . (làm tròn kết quả đến hàng phần chục, theo đơn vị độ).



Câu 3: Kim tự tháp Kê - ôp là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại (hình 7.4). Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219m (kích thước hiện nay). Tính số đo góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Hình 7.4

Câu 4: Trong một buổi dã ngoại, bạn Nam muốn dựng một cái lều hình kim tự tháp. Biết khoảng cách từ đỉnh lều tới một chân lều là 270 (cm), góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái lều đối diện là 55° . Hỏi khoảng cách giữa hai chân lều liên tiếp Nam cần dựng bằng bao nhiêu milimet? (Làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy $ABCD$, biết rằng $SA = a$, $AB = 2a$, $AD = a\sqrt{2}$. Gọi H , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD . Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AHK) bằng $\frac{m\sqrt{n}a}{n}$ (với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản), khi đó giá trị của $m - n$ là

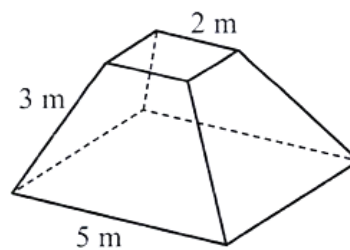
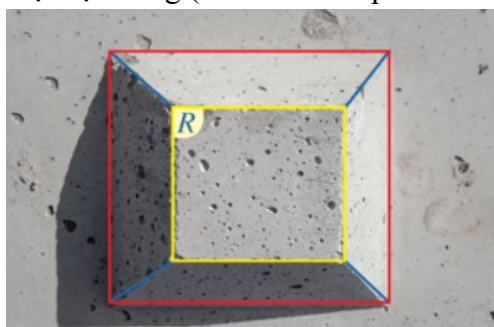
Câu 6: Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AD = 12$, $SA = SB = SC = SD = 3\sqrt{6}$. Tính thể tích lớn nhất V của khối chóp $S.ABCD$.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a . Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên cạnh SB sao cho AM vuông góc với MD . Khi đó, kết quả của tỉ số $\frac{SM}{SB}$ bằng bao nhiêu?

Câu 2: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Một mặt phẳng tạo với mặt đáy một góc 60° và cắt tất cả các cạnh bên của hình hộp. Diện tích thiết diện tạo thành bằng $a^2\sqrt{n}$. Tìm n .

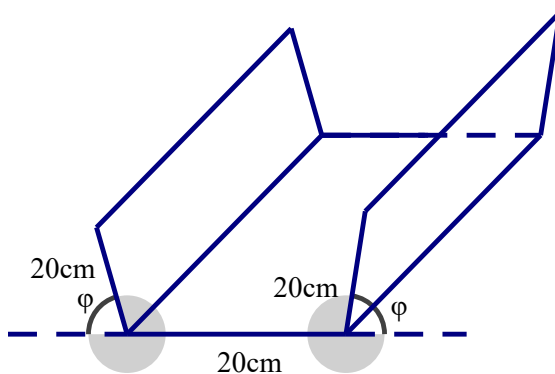
Câu 3: Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài 5 m, cạnh đáy trên dài 2 m, cạnh bên dài 3 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là $1.500.000$ đồng/ m^3 . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 46

Câu 4: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDMN)$ là $\frac{a\sqrt{m}}{5}$. Tìm m .

Câu 5: Bạn Nam làm một cái máng thoát nước mưa, mặt cắt là hình thang cân có độ dài hai cạnh bên và cạnh đáy đều bằng 20 cm, thành máng nghiêng với mặt đáy một góc φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$) (tham khảo hình vẽ). Bạn Nam phải nghiêng thành máng một góc bao nhiêu để lượng nước mưa thoát được là nhiều nhất?



Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính khoảng cách d giữa BD và MN (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

----- HẾT -----

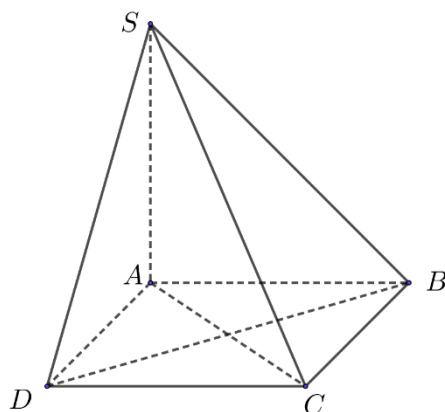
HƯỚNG DẪN GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A. $BD \perp (SAC)$. B. $BC \perp (SAB)$. C. $AC \perp (SBD)$. D. $CD \perp (SAD)$.

Lời giải



Ta có:

$$+ \begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB).$$

$$+ \begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD).$$

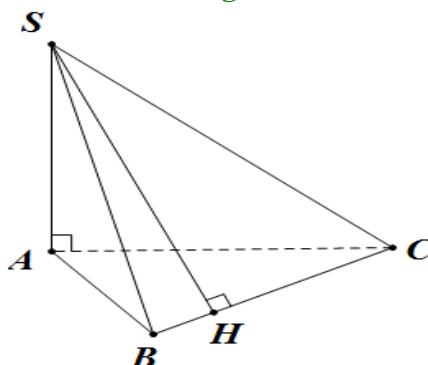
$$+ \begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC).$$

Suy ra: đáp án C sai.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác không vuông, $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Hãy chọn khẳng định **đúng**.

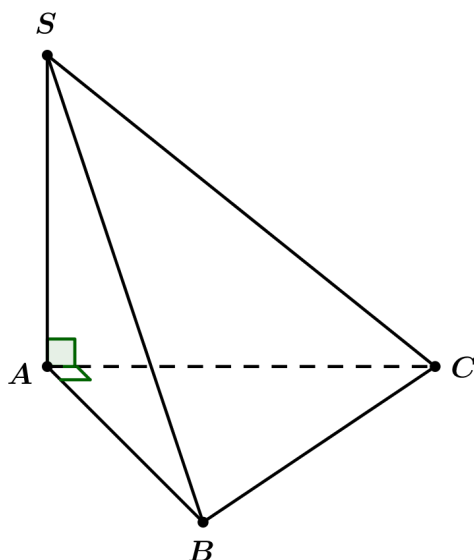
- A. $BC \perp AB$. B. $BC \perp SC$. C. $BC \perp AH$. D. $BC \perp AC$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BC \perp SH \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp AH.$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$ và SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ B đến (SAC)



- A. $a\sqrt{3}$. B. a . C. $a\sqrt{2}$. D. $2a$.

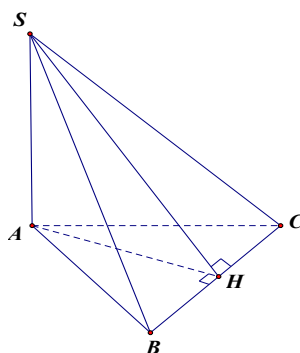
Lời giải

Ta có: $\begin{cases} AB \perp AC \\ AB \perp SA \end{cases} \Rightarrow AB \perp (SAC)$ nên $d(B, (SAC)) = AB = a$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC) . H là hình chiếu vuông góc của A lên BC . Góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là:

- A. \widehat{SAH} . B. \widehat{SBA} . C. \widehat{SHA} . D. \widehat{ASH} .

Lời giải



Ta có BC là giao tuyến của (SBC) và (ABC) .

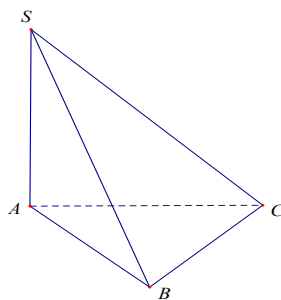
Vì $\begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AH \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$.

Vậy góc $[S, BC, A]$ là góc \widehat{SHA} .

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$. Tìm góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) ?

- A. 135° . B. 60° . C. 45° . D. 90° .

Lời giải



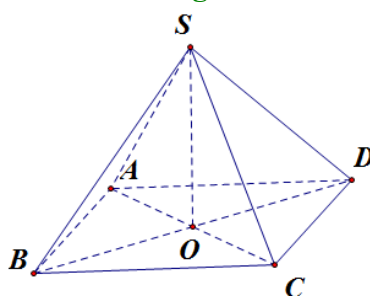
Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là góc \widehat{SCA} .

Tam giác SAC vuông cân tại A nên góc $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. $(SBD) \perp (ABCD)$. **B. $SC \perp (SBD)$.** C. $SO \perp (ABCD)$ D. $(SAC) \perp (ABCD)$.

Lời giải

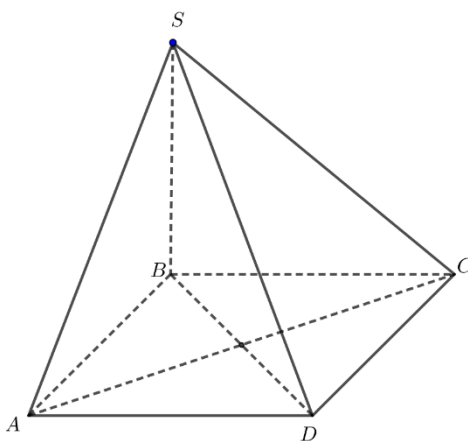


Từ giả thiết suy ra $SO \perp AC$; $SO \perp BD \Rightarrow SO \perp (ABCD)$ mà $SO \subset (SBD)$, $SO \subset (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (ABCD)$; $(SAC) \perp (ABCD)$. Vậy $SC \perp (SBD)$ là mệnh đề **sai**.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD) ?

- A. (SCD) . B. (SBC) . **C. (SAC) .** D. (SAD) .

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AC \perp BD \\ AC \perp SB \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

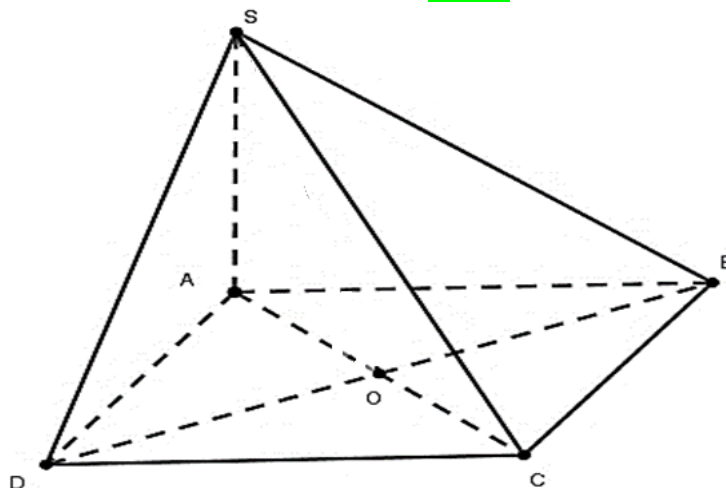
Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là

A. \widehat{BSD} .

B. \widehat{SBA} .

C. \widehat{BAD} .

D. \widehat{SDB} .



Lời giải

Ta có $(SAD) \cap (SAB) = SA$.

Mặt khác $SA \perp (ABCD) \Rightarrow \begin{cases} SA \perp AB \\ SA \perp AD \end{cases}$

Do đó $\widehat{((SAB), (SAD))} = \widehat{(AB, AD)} = \widehat{BAD} = 90^\circ$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$ có diện tích đáy ABC bằng $a^2\sqrt{3}$ và thể tích khối chóp bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

A. $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

B. $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

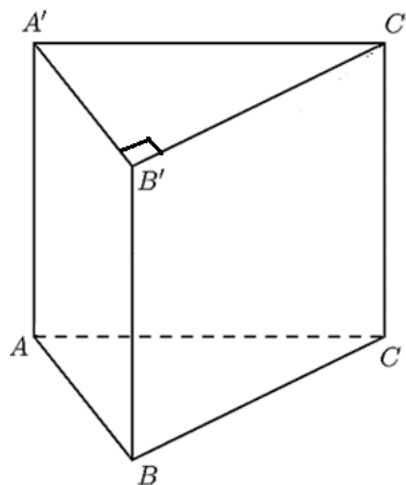
D. $h = a\sqrt{3}$.

Lời giải

Thể tích khối chóp: $V_{S.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot h$

Suy ra $h = \frac{3 \cdot V_{S.ABC}}{S_{ABC}} = \frac{3a^3}{a^2\sqrt{3}} = a\sqrt{3}$.

Câu 10: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.



- A. $V = 4a^3\sqrt{5}$. B. $V = a^3\sqrt{15}$. C. $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. D. $V = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.

Lời giải

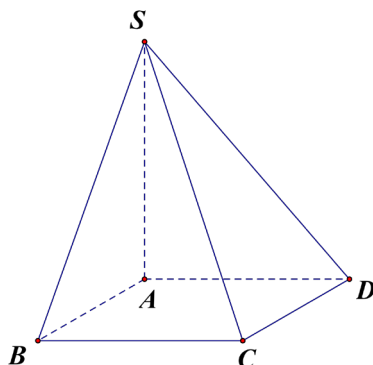
Diện tích tam giác ABC là $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ: $V_{ABC.A'B'C'} = S_{ABC} \cdot AA' = a^3\sqrt{15}$.

Câu 11: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SAD) bằng

- A. AB . B. BD . C. SB . D. CA .

Lời giải



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp AB$, mà $AD \perp AB$ nên $AB \perp (SAD)$.

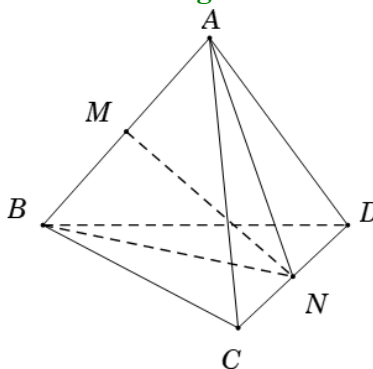
Lại có $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD)$

Do đó $d(BC, (SAD)) = d(B, (SAD)) = AB$.

Câu 12: Tính khoảng cách d giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a .

- A. $d = \frac{3a}{2}$. B. $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $d = a\sqrt{2}$.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD .

Vì hai tam giác BCD, ACD là các tam giác đều nên $\begin{cases} CD \perp BN \\ CD \perp AN \end{cases}$

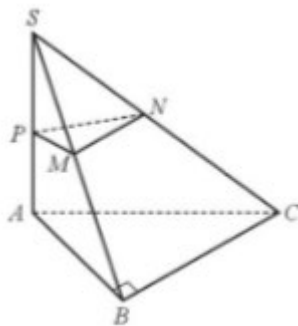
$\Rightarrow CD \perp (ABN) \Rightarrow CD \perp MN$ (1).

Ta có $AN = BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \Delta ABN$ cân tại $N \Rightarrow MN \perp AB$ (2).

Từ (1) và (2), suy ra $d(AB, CD) = MN = \sqrt{BN^2 - BM^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời câu hỏi. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $BC \perp AB$, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$. Lấy hai điểm M , N lần lượt là trung điểm của SB , SC và điểm P nằm trên cạnh SA .



- a) $SA \perp AB$.
- b) $BC \perp (SAB)$.
- c) $(MN, AC) = 60^\circ$.
- d) Tam giác MNP vuông tại M .

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng

$SA \perp (ABC), AB \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp AB$.

b) Đúng

$SA \perp (ABC), BC \subset (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$.

$BC \perp AB$ (giả thiết)

$SA, AB \subset (SAB)$

$SA \cap AB = A$

Vậy $BC \perp (SAB)$.

c) Sai

Ta có $MN \parallel BC \Rightarrow (MN, AC) = (BC, AC) = \widehat{BCA}$.

Xét tam giác ABC vuông tại B , ta có $\tan \widehat{BCA} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{BCA} = 30^\circ$.

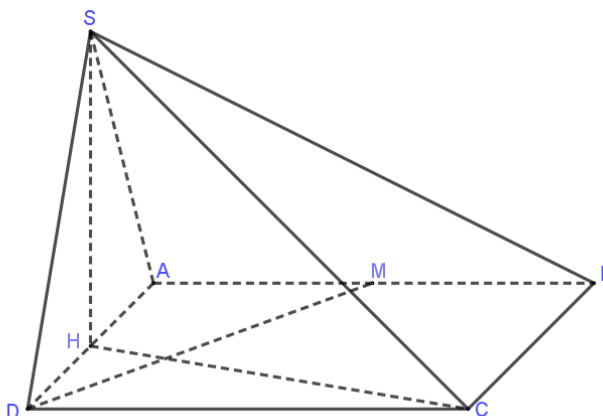
Vậy $(MN, AC) = 30^\circ$

d) Đúng

Ta có $MN \parallel BC, BC \perp (SAB) \Rightarrow MN \perp (SAB)$.

mà $MP \subset (SAB) \Rightarrow MN \perp MP \Rightarrow \Delta MNP$ vuông tại M .

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H , M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB .



a) $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH}$.

b) Số đo của góc nhị diện $[(ABCD), CD, (SCD)]$ bằng 90° .

c) cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

d) $(SMD) \perp (SHC)$.

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

a) Đúng

$$\left. \begin{array}{l} (SAD) \perp (ABCD) \\ (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ SH \perp AD \\ SH \subset (SAD) \end{array} \right\} \Rightarrow SH \perp (ABCD).$$

$\Rightarrow CH$ là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$.

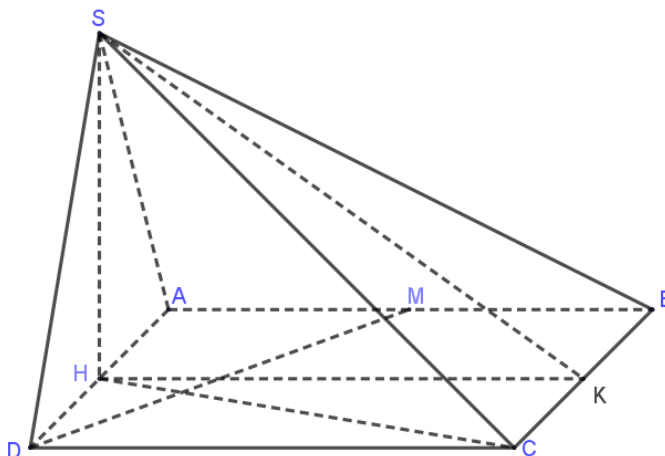
$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, CH) = \widehat{SCH}.$$

b) Sai

$$\left. \begin{array}{l} CD \perp AD \\ CD \perp SH (SH \perp (ABCD)) \end{array} \right\} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD.$$

$\Rightarrow (AD, SD) = \widehat{SDA} = 60^\circ$ là số đo của góc nhị diện $[(ABCD), CD, (SCD)]$.

c) Sai



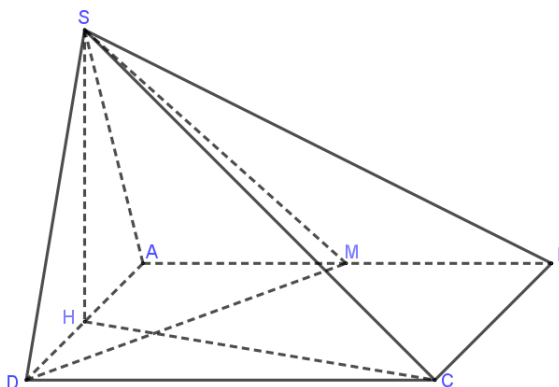
Gọi K là trung điểm của BC .

$$\left. \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ HK \perp BC \\ SK \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow ((SBC), (ABCD)) = (SK, HK) = \widehat{SKH}.$$

$$SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, HK = a \Rightarrow SK = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + a^2} = \frac{\sqrt{7}a}{2}.$$

$$\cos \widehat{SKH} = \frac{HK}{SK} = \frac{a}{\frac{\sqrt{7}a}{2}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}.$$

d) Đúng



$$\Delta ADM = \Delta CHD \Rightarrow \widehat{HDM} = \widehat{HCD} \Rightarrow \widehat{HDM} + \widehat{DHC} = \widehat{HCD} + \widehat{DHC} = 90^\circ.$$

$$\Rightarrow CH \perp DM.$$

$$\left. \begin{array}{l} DM \perp CH \\ DM \perp SH \end{array} \right\} \Rightarrow DM \perp (SCH), DM \subset (SMD) \Rightarrow (SMD) \perp (SCH).$$

Câu 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A , góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $AB = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC , biết $AA' = a\sqrt{2}$.

a) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng AA' lên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AH .

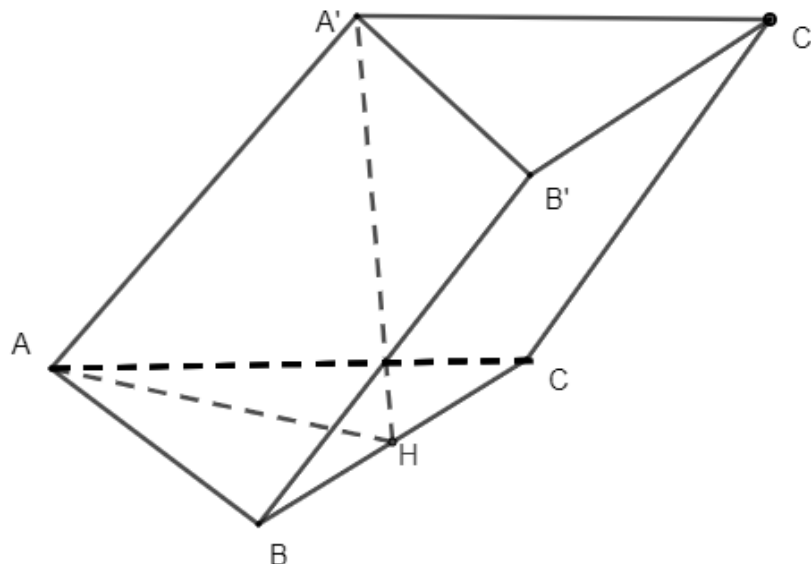
b) Góc $\widehat{A'AH}$ là góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) .

c) Góc giữa hai đường thẳng AA' và AH bằng 60° .

d) $(A'AH) \perp (BCC'B')$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------



a) Đúng

Ta có $A'H \perp (ABC)$ nên hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AH .

b) Đúng

Do hình chiếu của AA' lên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AH nên góc $\widehat{A'AH}$ là góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) .

c) Sai

Góc giữa hai đường thẳng AA' và AH là góc $\widehat{A'AH}$.

ΔABC cân tại A, H là trung điểm của BC nên ta có $\widehat{HAB} = 60^\circ$.

$$\Rightarrow AH = \frac{1}{2} AB = a.$$

$\Delta A'AH$ vuông tại H.

$$\cos \widehat{A'AH} = \frac{AH}{AA'} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{A'AH} = 45^\circ.$$

d) Đúng

ΔABC cân tại A nên ta có $AH \perp BC$. (1)

Mặt khác H là hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng $(ABC) \Rightarrow A'H \perp (ABC)$.

$$\Rightarrow A'H \perp BC \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $BC \perp (A'AH)$.

Mà $BC \subset (BCC'B')$.

$$\Rightarrow (BCC'B') \perp (A'AH).$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông tại B, biết $SA = AB = BC = a$. Các phát biểu sau đúng hay sai?

a) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{3}$.

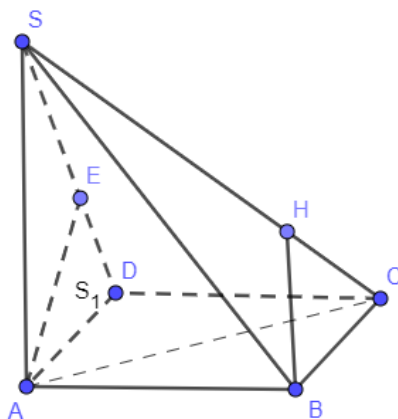
b) Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

c) Khoảng cách từ B đến đường thẳng SC bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

a) Sai	b) Sai	c) Đúng	d) Đúng
--------	--------	---------	---------



a) Sai

Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $V = \frac{1}{3}.SA.S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3}.a.\frac{a^2}{2} = \frac{a^3}{6}$.

b) Sai

Gọi d là khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}d.S_{\Delta SBC}.$$

Lại có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB \Rightarrow \Delta SBC$ vuông tại **B**.

$$S_{\Delta SBC} = \frac{1}{2}.SB.BC = \frac{1}{2}a\sqrt{2}.a = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Vậy } d = \frac{3V}{S_{\Delta SBC}} = \frac{\frac{a^3}{2}}{\frac{a^2\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

c) Đúng

Trong mặt phẳng (SBC) , kẻ $BH \perp SC$ tại H , khi đó $d(B, SC) = BH$.

Xét tam giác vuông SBC ta có: $\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{SB^2} + \frac{1}{BC^2} = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{3}{2a^2}$

$$\Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

d) Đúng

Dựng hình bình hành $ABCD$, vì tam giác ABC vuông cân tại B nên $ABCD$ là hình vuông.

Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD)$.

Lại có $CD \subset (SDC) \Rightarrow (SAD) \perp (SDC)$.

Trong mặt phẳng (SAD) , dựng $AE \perp SD$ tại E . Suy ra $AE \perp (SDC)$. (1)

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SDC)$.

$$d(AB, SC) = d(AB, (SDC)) = d(A, (SDC)). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $d(AB, SC) = AE$.

$$\Delta SAD \text{ vuông cân tại } A \text{ nên } AE = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

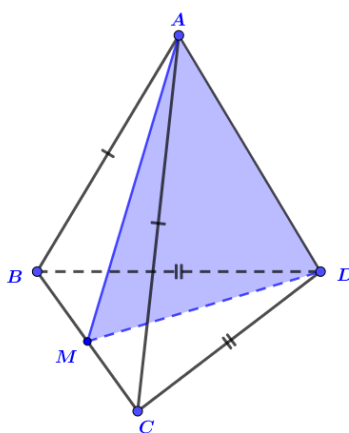
PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = AC$ và $DB = DC$. Có bao nhiêu khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

(I). $CD \perp AB$. (II). $AC \perp BD$. (III). $BC \perp AD$. (IV). $BC \perp CD$.

Lời giải

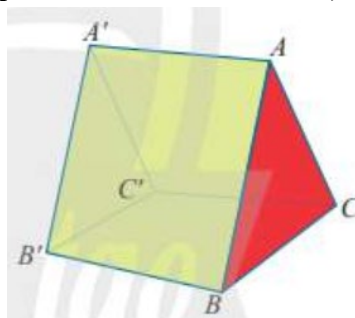
Trả lời: 1



Gọi M là trung điểm BC . Do tam giác 1 cân tại A và tam giác DBC cân tại D nên, có:

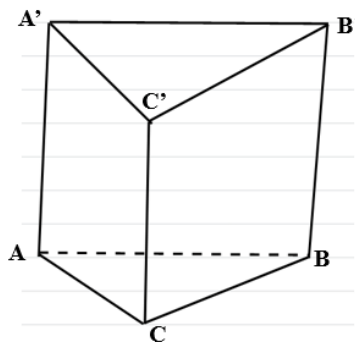
$$\begin{cases} BC \perp DM \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp AD.$$

Câu 2: Một cái lều có dạng hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên AA' vuông góc với đáy (Hình minh họa). Cho biết $AB = AC = 2,4m$; $BC = 2m$; $AA' = 3m$. Tính góc giữa hai đường thẳng $A'B'$ và AC . (làm tròn kết quả đến hàng phần chục, theo đơn vị độ).



Lời giải

Trả lời: 49,2



Ta có:

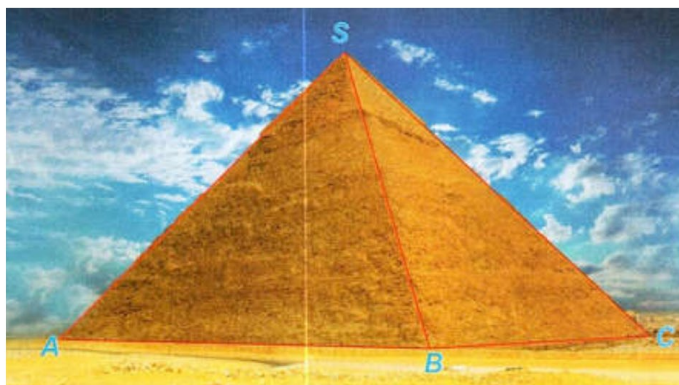
$$A'B' \parallel AB \Rightarrow (A'B', AC) = (AB, AC) = \widehat{BAC}$$

Xét tam giác ABC có:

$$\cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{47}{72} \Rightarrow \widehat{BAC} \approx 49,2^\circ$$

Vậy $(A'B', AC) \approx 49,2^\circ$.

Câu 3: Kim tự tháp Kê - ôp là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại (hình 7.4). Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219m (kích thước hiện nay). Tính số đo góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

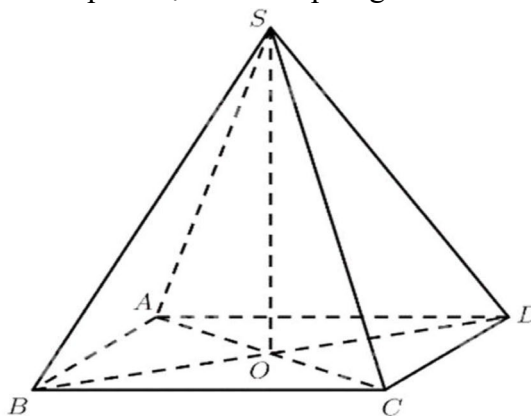


Hình 7.4

Lời giải

Trả lời: 42

Theo giả thiết, kim tự tháp Kê - ôp là một hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$.



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Khi đó $SO \perp (ABCD) \Rightarrow (SA, (ABCD)) = \widehat{SAO}$.

Ta có: $AC = AB\sqrt{2} = 230\sqrt{2} \Rightarrow AO = \frac{AC}{2} = 115\sqrt{2}$.

Xét tam giác vuông SOA có: $\cos \widehat{SAO} = \frac{AO}{SA} = \frac{115\sqrt{2}}{219} \Rightarrow \widehat{SAO} \approx 42^\circ$.

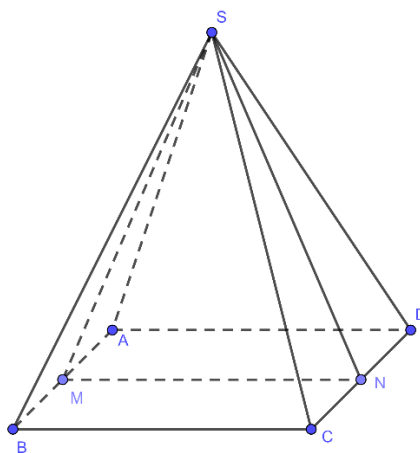
Câu 4: Trong một buổi dã ngoại, bạn Nam muốn dựng một cái lều hình kim tự tháp. Biết khoảng cách từ đỉnh lều tới một chân lều là 270 (cm), góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái lều đối diện là 55° . Hỏi khoảng cách giữa hai chân lều liên tiếp Nam cần dựng bằng bao nhiêu milimet? (Làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 2264

Cái lều cần dựng có hình dạng là hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với $SA = 270$ (cm), góc nhị diện giữa hai nửa mặt phẳng (SAB) và (SCD) tương ứng chứa hai mái lều đối diện bằng 55° .



Khoảng cách giữa hai chân lều liên tiếp cần tìm là độ dài cạnh đáy hình chóp $S.ABCD$.

Đặt $AB = x$ (cm).

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD .

Suy ra $\widehat{MSN} = 55^\circ, MN = x$ (cm), $AM = \frac{x}{2}$ (cm).

Ta có ΔSAB cân tại S , M là trung điểm cạnh AB nên ΔSAM vuông tại M .

Suy ra: $SM = SN = \sqrt{SA^2 - AM^2} = \sqrt{270^2 - \frac{x^2}{4}}$.

ΔSMN có: $MN^2 = SM^2 + SN^2 - 2.SM.SN.\cos \widehat{MSN}$

$$\Rightarrow x^2 = 2 \cdot \left(270^2 - \frac{x^2}{4} \right) - 2 \cdot \left(270^2 - \frac{x^2}{4} \right) \cdot \cos 55^\circ$$

$$\Leftrightarrow x^2 \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{\cos 55^\circ}{2} \right) = 2 \cdot 270^2 (1 - \cos 55^\circ)$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{2 \cdot 270^2 (1 - \cos 55^\circ)}{1 + \frac{1}{2} - \frac{\cos 55^\circ}{2}}$$

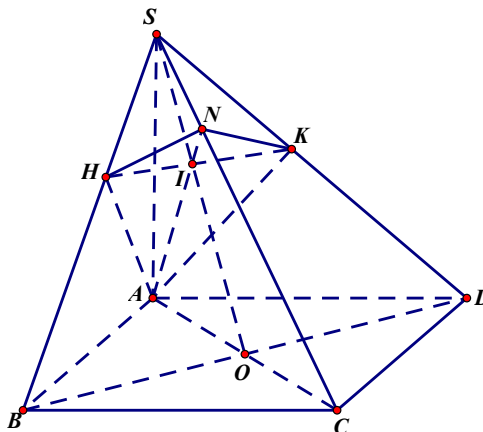
$$\Rightarrow x \approx 226,4 (cm) \Rightarrow x \approx 2264 (mm).$$

Đáp số: 2264.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, SA vuông góc với đáy $ABCD$, biết rằng $SA = a$, $AB = 2a$, $AD = a\sqrt{2}$. Gọi H , K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB và SD . Khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AHK) bằng $\frac{m\sqrt{n}a}{n}$ (với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản), khi đó giá trị của $m - n$ là

Lời giải

Trả lời: -3



Gọi O là tâm đáy $ABCD$; $I = SO \cap HK$; $N = AI \cap SC$.

Từ $BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$, suy ra được $AH \perp (SBC) \Rightarrow AH \perp SC$

Tương tự, ta suy ra được $\Rightarrow AK \perp SC$.

Do đó $SC \perp (AHK)$.

Dựa vào các tam giác vuông, ta tính được $SB = a\sqrt{5}$, $AC = a\sqrt{6}$, $SC = a\sqrt{7}$.

$$\text{Ta có } SB \cap (AHK) = H \Rightarrow \frac{d(B, (AHK))}{d(S, (AHK))} = \frac{HB}{HS}.$$

Xét trong tam giác vuông SAB vuông tại A , AH là đường cao.

$$\text{Áp dụng hệ thức lượng, suy ra } SH \cdot SB = SA^2 \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{HB}{HS} = 4$$

$$\Rightarrow d(B, (AHK)) = 4 \cdot d(S, (AHK)) \quad (1).$$

Do $SC \perp (AHK)$ hay $SN \perp (AHK)$, nên $d(S, (AHK)) = SN$ (2).

Xét trong tam giác vuông SAC vuông tại A , do $SC \perp (AHK)$ suy ra $AN \perp SC$ hay AN là đường cao.

Áp dụng hệ thức lượng, suy ra $SN \cdot SC = SA^2 \Rightarrow \frac{SN}{SC} = \frac{SA^2}{SC^2} = \frac{1}{7}$.

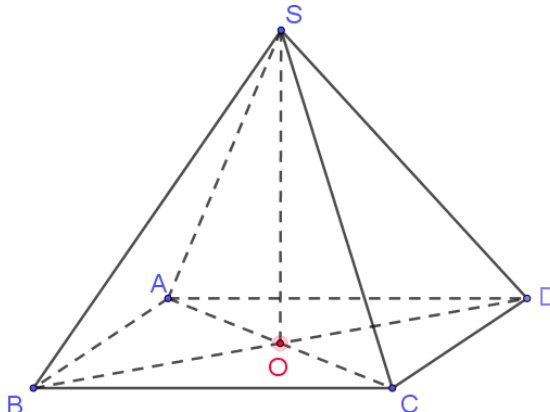
$$\Rightarrow SN = \frac{1}{7}SC = \frac{a\sqrt{7}}{7} \quad (3).$$

Từ (1), (2), (3) ta suy ra $d(B, (AHK)) = \frac{4\sqrt{7}a}{7}$.

Khi đó $m = 4; n = 7 \Rightarrow m - n = -3$.

Câu 6: Cho khối chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $AD = 12$, $SA = SB = SC = SD = 3\sqrt{6}$. Tính thể tích lớn nhất V của khối chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Trả lời: 72

Đặt $SO = h$.

Ta có: $OC = \sqrt{54 - h^2} \Rightarrow AC = 2\sqrt{54 - h^2} \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{72 - 4h^2}$

$$V = \frac{1}{3} \cdot SO \cdot AB \cdot AD = \frac{1}{3} h \cdot \sqrt{72 - 4h^2} \cdot 12 = 4h \cdot \sqrt{72 - 4h^2}$$

$$= 2\sqrt{4h^2(72 - 4h^2)} \leq 2\sqrt{\left(\frac{4h^2 + (72 - 4h^2)}{2}\right)^2} = 72$$

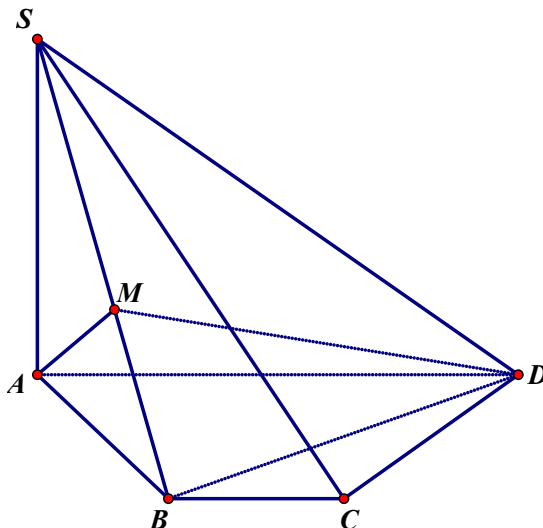
$\Rightarrow V \leq 72$.

Vậy $V_{Max} = 72$ khi $4h^2 = 72 - 4h^2 \Leftrightarrow h = 3$.

PHẦN IV. Tự luận

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là nửa lục giác đều với cạnh a . Cạnh SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. M là một điểm khác B và ở trên cạnh SB sao cho AM vuông góc với MD . Khi đó, kết quả của tỉ số $\frac{SM}{SB}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có $BD \perp AB$ (Vì $ABCD$ là nửa lục giác đều).

Mặt khác, $BD \perp SA$. Suy ra $BD \perp (SAB)$, ta được $BD \perp AM$.

Kết hợp $AM \perp MD$, ta được $AM \perp (SBD)$. Suy ra $AM \perp SB$.

Ta có: ΔSMA đồng dạng với $\Delta SAB \Rightarrow \frac{SM}{SA} = \frac{SA}{SB} \Rightarrow SM \cdot SB = SA^2$

Ta có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$.

Khi đó $\frac{SM}{SB} = \frac{SM \cdot SB}{SB^2} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4} = 0,75$.

Câu 8: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Một mặt phẳng tạo với mặt đáy một góc 60° và cắt tất cả các cạnh bên của hình hộp. Diện tích thiết diện tạo thành bằng $a^2\sqrt{n}$. Tìm n .

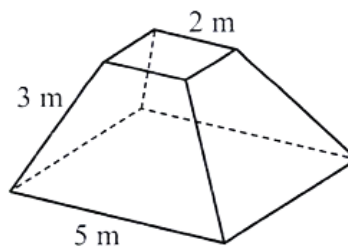
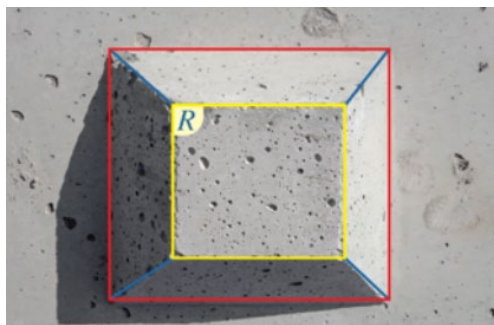
Lời giải

Diện tích hình thoi $ABCD$ là $S_{ABCD} = AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD} = AB \cdot AD \cdot \sin 60^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

Hình chiếu vuông góc của thiết diện lên mặt phẳng đáy $ABCD$ là hình thoi $ABCD$. Gọi S là diện tích thiết diện. Theo công thức diện tích hình chiếu ta có

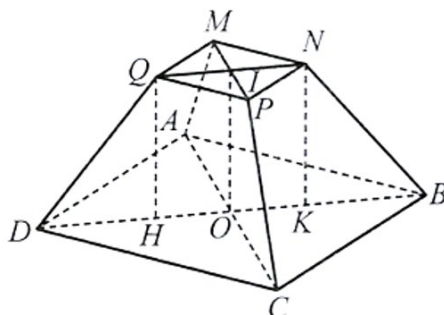
$$S_{ABCD} = S \cdot \cos 60^\circ \Rightarrow S = \frac{S_{ABCD}}{\cos 60^\circ} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = a^2\sqrt{3}.$$

Câu 9: Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình 46). Cạnh đáy dưới dài $5m$, cạnh đáy trên dài $2m$, cạnh bên dài $3m$. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là $1.500.000$ đồng/ m^3 . Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Hình 46

Lời giải



Giả sử chân tháp là khối chóp cụt tứ giác đều $ABCD.MNPQ$ với $ABCD$ là hình vuông cạnh $5m$, $MNPQ$ là hình vuông cạnh $2m$, $AM = BN = CP = DQ = 3m$.

Vì DQ, NB cắt nhau nên D, Q, N, B đồng phẳng. Mà $(ABCD) // (MNPQ)$ nên $NQ // BD$

Gọi I là giao điểm của MP và NQ , O là giao điểm của AC và BD . Khi đó $IO \perp (MNPQ), IO \perp (ABCD)$.

Xét hình thang $QNBD$, gọi H là hình chiếu của Q trên BD , K là hình chiếu của N trên BD .

Vì $IO \perp BD, QH \perp BD, NK \perp BD$ trong $(QNBD)$ nên $IO // QH // NK$.

Suy ra $QH \perp (MNPQ), QH \perp (ABCD)$ nên QH bằng chiều cao của khối chóp cụt đều.

Ngoài ra, ta có $QH = NK = IO$ và $QD = NB$. Suy ra $\triangle QHD = \triangle NKB$ nên ta có $HD = BK$

Bên cạnh đó, $QNKH$ là hình chữ nhật nên $QN = HK$. Từ đó ta có:

$$HD = \frac{BD - HK}{2} = \frac{\sqrt{AD^2 + AB^2} - \sqrt{MN^2 + MQ^2}}{2} = \frac{\sqrt{5^2 + 5^2} - \sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (m)$$

Xét tam giác QHD vuông tại H có: $QH = \sqrt{QD^2 - HD^2} = \sqrt{3^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (m)$.

Diện tích của hai đáy là: $S_{ABCD} = AB^2 = 5^2 = 25 (m^2), S_{MNPQ} = MN^2 = 2^2 = 4 (m^2)$.

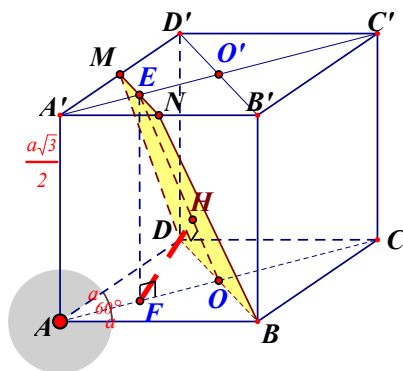
Suy ra thể tích của khối chóp cụt đều là:

$$V = \frac{1}{3}QH \left(S_{ABCD} + \sqrt{S_{ABCD} \cdot S_{MNPQ}} + S_{MNPQ} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} (25 + \sqrt{25 \cdot 4} + 4) = \frac{39\sqrt{2}}{2} (m^3).$$

Số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp là: $1500000 \cdot \frac{39\sqrt{2}}{2} \approx 41,365747$ (triệu đồng).

Câu 10: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a và góc $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh $A'D'$ và $A'B'$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDMN)$ là $\frac{a\sqrt{m}}{5}$. Tìm m .

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, $O' = A'C' \cap B'D'$ và $E = MN \cap A'C'$.

Vì MN là đường trung bình trong $\Delta A'B'D'$ nên E là trung điểm $O'A'$.

Vẽ $EF \perp AC$ ($F \in AC$), suy ra $EF \perp (ABCD)$, vì $EF \parallel AA' \parallel OO'$ nên F là trung điểm OA

và $EF = AA' = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tỉ số $\frac{d(A, (BDMN))}{d(F, (BDMN))} = \frac{AO}{FO} = 2 \Rightarrow d(A, (BDMN)) = 2 \cdot d(F, (BDMN))$.

Vẽ $FH \perp EO$, nên $FH \perp BD$, suy ra $FH \perp (BDMN)$, do đó $d(F, (BDMN)) = FH$.

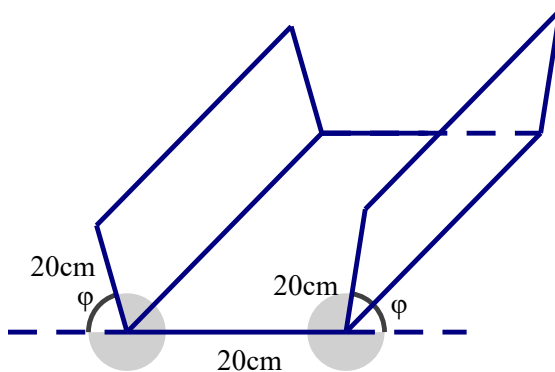
Để thấy ΔABD đều cạnh $a \Rightarrow FO = \frac{1}{2} AO = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

ΔEFO vuông tại F có FH là đường cao ứng với cạnh huyền nên

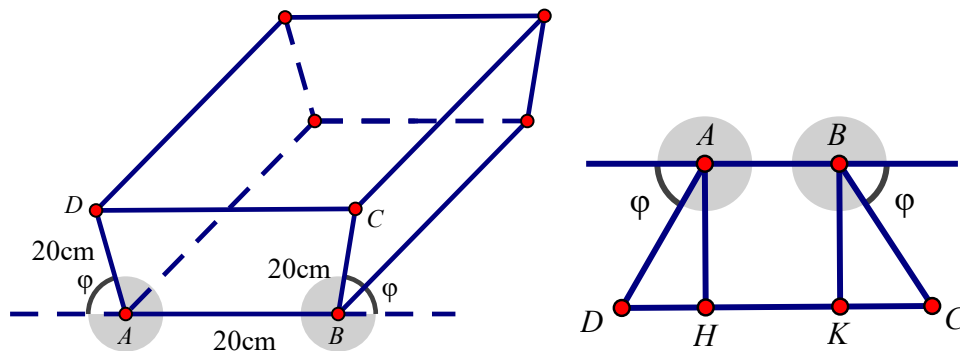
$$\frac{1}{FH^2} = \frac{1}{EF^2} + \frac{1}{OF^2} = \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{20}{3a^2} \Rightarrow FH^2 = \frac{3a^2}{20} \Rightarrow FH = \frac{a\sqrt{15}}{10}$$

Vậy $d(F, (BDMN)) = FH = \frac{a\sqrt{15}}{10}$ nên $d(A, (BDMN)) = 2 \cdot \frac{a\sqrt{15}}{10} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 11: Bạn Nam làm một cái máng thoát nước mưa, mặt cắt là hình thang cân có độ dài hai cạnh bên và cạnh đáy đều bằng 20 cm, thành máng nghiêng với mặt đáy một góc φ ($0^\circ < \varphi < 90^\circ$) (tham khảo hình vẽ). Bạn Nam phải nghiêng thành máng một góc bao nhiêu để lượng nước mưa thoát được là nhiều nhất?



Lời giải



Lượng nước mưa thoát được nhiều nhất khi diện tích hình thang cân $ABCD$ lớn nhất. Khi đó ta có: $HK = AB = 20\text{cm}$, $DH = CK = \cos \varphi \cdot 20$, $AH = BK = \sin \varphi \cdot 20$.

$$\text{Do đó: } S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot AH = \frac{1}{2}(20 + 20 + 2 \cdot 20 \cdot \cos \varphi) \cdot 20 \cdot \sin \varphi = 400 \cdot (1 + \cos \varphi) \cdot \sin \varphi$$

Đặt $t = \cos \varphi$, vì $0^\circ < \varphi < 90^\circ \Rightarrow \cos \varphi > 0$, $\sin \varphi > 0$.

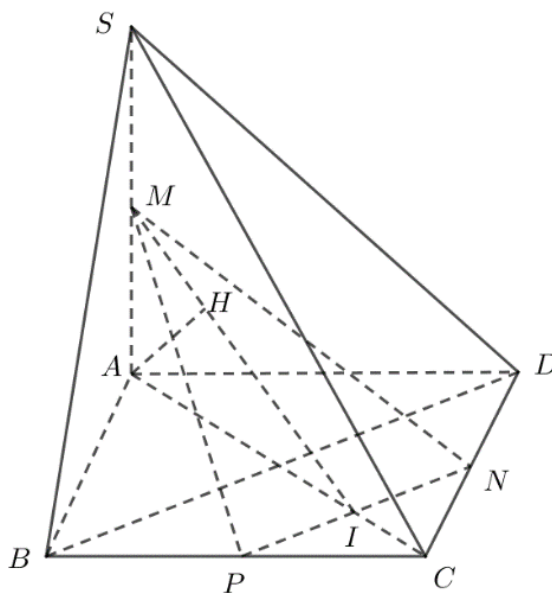
$$\Rightarrow S = 400(1+t)\sqrt{1-t^2}.$$

$$\Rightarrow S = 400\sqrt{\frac{1}{3} \cdot (1+t)^3 (3-3t)} \leq 400 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1+t+1+t+1+t+3-3t}{4}\right)^4} = 300\sqrt{3}.$$

Dấu bằng xảy ra khi $1+t = 3-3t \Leftrightarrow t = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \varphi = 60^\circ$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính khoảng cách d giữa BD và MN (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải



Gọi P là trung điểm của $BC \Rightarrow BD \parallel NP \Rightarrow BD \parallel (MNP)$

$$\Rightarrow d(BD, MN) = d(BD, (MNP)) = d(D, (MNP)) = d(C, (MNP)) = \frac{1}{3}d(A, (MNP)).$$

Gọi $I = AC \cap NP$. Kẻ $AH \perp MI$ tại H .

$$\text{Ta có } \begin{cases} NP \perp SA \\ NP \perp AC \end{cases} \Rightarrow NP \perp (SAC) \Rightarrow NP \perp AH.$$

$$\begin{cases} AH \perp MI \\ AH \perp NP \end{cases} \Rightarrow AH \perp (MNP) \Rightarrow d(A, (MNP)) = AH.$$

$$\text{Ta có } SA^2 = SC^2 - AC^2 = (10\sqrt{5})^2 - (10\sqrt{2})^2 = 300.$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{\left(\frac{SA}{2}\right)^2} + \frac{1}{\left(\frac{3AC}{4}\right)^2} = \frac{4}{300} + \frac{16}{1800} = \frac{20}{900}.$$

$$\Rightarrow AH = 3\sqrt{5}.$$

$$\text{Vậy } d(BD, MN) = \frac{1}{3}AH = \sqrt{5} \approx 2,24.$$