



PHAN NHẬT LINH

TÀI LIỆU TOÁN 11

CHƯƠNG TRÌNH MỚI

BIÊN SOẠN THEO CẤU TRÚC ĐỊNH HƯỚNG CỦA BGD 2025

CHƯƠNG TRÌNH GDPT 2018



Liên hệ zalo: 0817.098.716

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 01 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Góc lượng giác

- **Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác:**

Trong mặt phẳng cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay điểm O theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .

- **Hệ thức Chasles:** Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì thì ta có:

$$sd(Ou, Ov) + sd(Ov, Ow) = sd(Ou, Ow) + k.360^0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Từ đó ta có thể suy ra: $sd(Ou, Ov) = sd(Ou, Ow) - sd(Ov, Ow) + k.360^0 \quad (k \in \mathbb{Z})$

2 Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn

- **Đơn vị đo góc và cung tròn:**

Đơn vị độ:

Đơn vị radian: Cho đường tròn tâm (O) bán kính R và một cung AB trên (O) . Ta nói cung AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R . Khi đó ta cũng nói rằng góc AOB có số đo bằng 1 radian và viết $AOB = 1$ radian.

- **Quan hệ giữa độ và radian:**

$$1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

- **Độ dài của một cung tròn:**

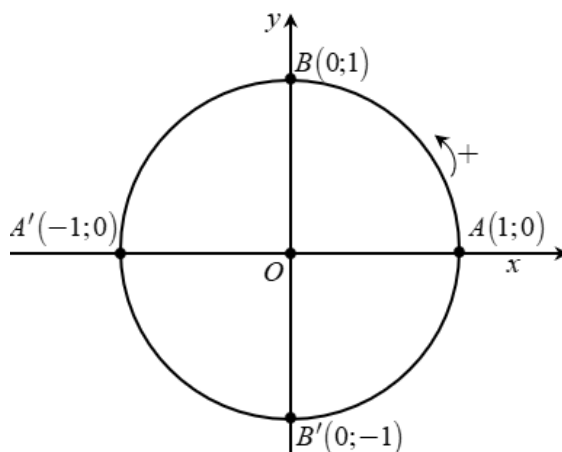
Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì có độ dài là $l = R\alpha$.

3 Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

- **Đường tròn lượng giác:**

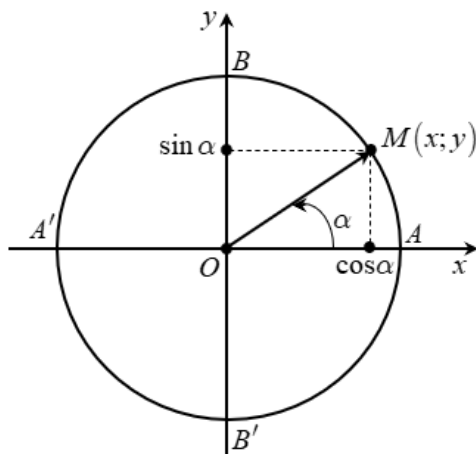
Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1 được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm gốc của đường tròn.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.



Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sd(OA; OM) = \alpha$.

• **Giá trị lượng giác của góc lượng giác:**



Giả sử $M(x; y)$ là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo α

- Hoành độ của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$ và khi đó $\cos \alpha = x$.
- Tung độ của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$ và khi đó $\sin \alpha = y$.
- Nếu $\cos \alpha \neq 0$ thì tỷ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan \alpha$ và $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- Nếu $\sin \alpha \neq 0$ thì tỷ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là côtang của α và kí hiệu là $\cot \alpha$ và $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ được gọi là **giá trị lượng giác của cung α** .

Chú ý:

- Ta có thể gọi trục tung là **trục sin** và trục hoành là **trục cosin**.
- Từ định nghĩa ta suy ra:

1) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (-1 \leq \sin \alpha \leq 1)$$

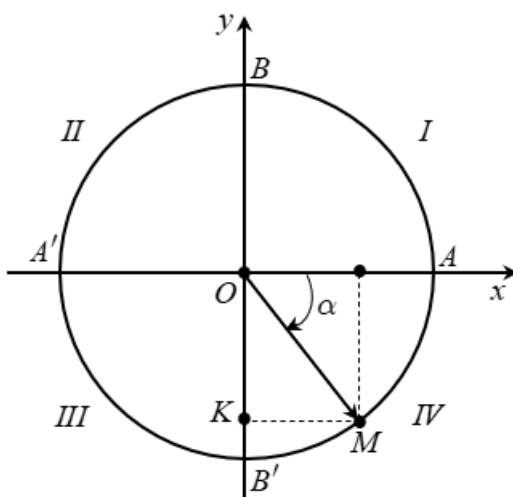
$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (-1 \leq \cos \alpha \leq 1)$$

2) $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

3) $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.



- 4) Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào vị trí điểm M biểu diễn trên đường tròn lượng giác.



Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

	Góc I	Góc II	Góc III	Góc IV
$\sin x$	(+)	(+)	(-)	(-)
$\cos x$	(+)	(-)	(-)	(+)
$\tan x$	(+)	(-)	(+)	(-)
$\cot x$	(+)	(-)	(+)	(-)

- Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

4 Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

- Công thức lượng giác cơ bản: Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

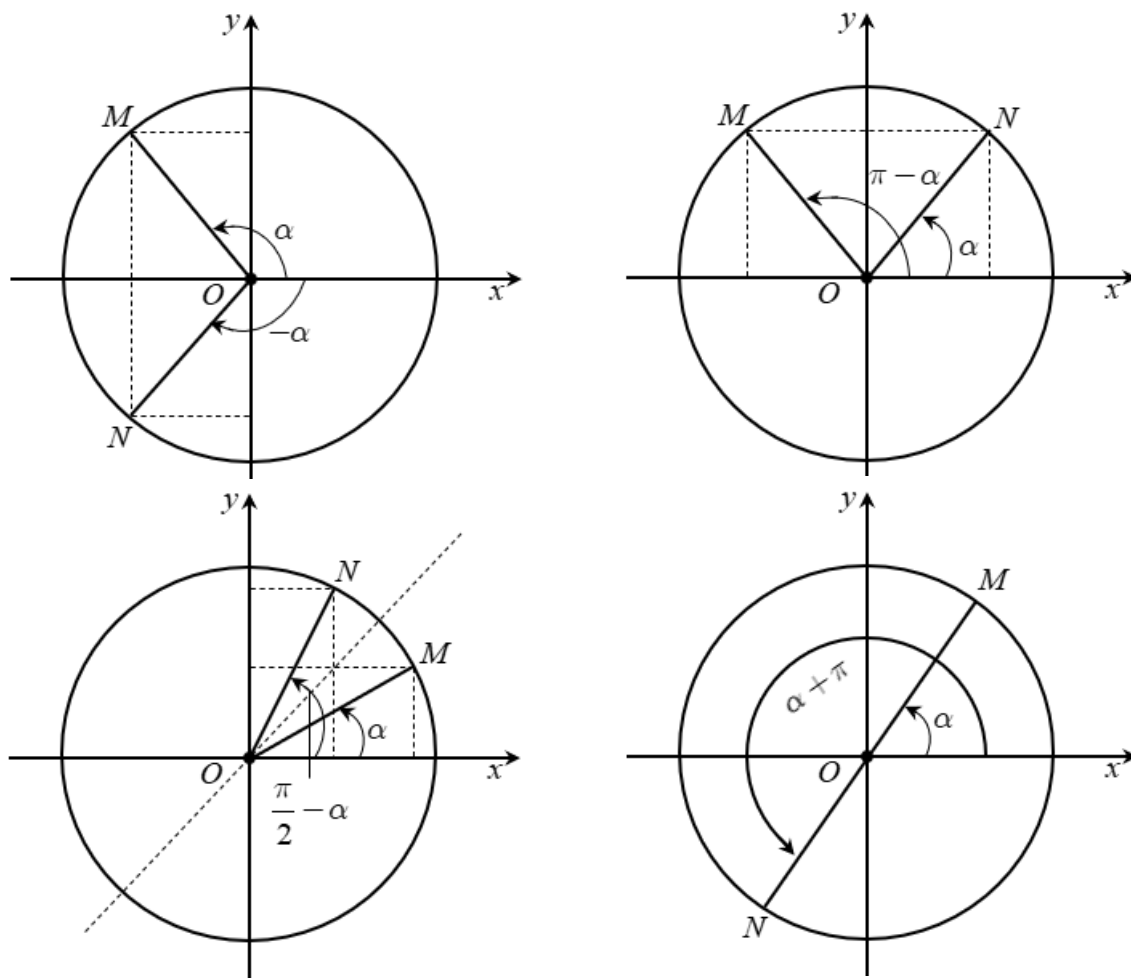
$$\bullet \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases} \quad \bullet \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

$$\bullet \frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1 \quad \bullet \tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\bullet \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x; \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

• $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x)$; $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x)$

- Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:



- **Cung đối nhau:** α và $-\alpha$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

- **Cung bù nhau:** α và $\pi - \alpha$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$



- **Cung hơn kém π :** α và $(\alpha + \pi)$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$$

- **Cung phụ nhau:** α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn

- Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian:

$$\bullet 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

$$\bullet 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

- Xét đường tròn có bán kính R

- Cung tròn có số đo $\alpha (0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ thì có độ dài là $l = R.\alpha$

- Cung tròn có số đo $a^\circ (0 \leq a \leq 360^\circ)$ thì có độ dài là $l = \frac{\pi.a}{180}.R$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Đổi số đo của các góc sau ra radian:

a) 72°

b) 600°

c) $-37^\circ 45' 30''$

Bài tập 2: Đổi số đo của các góc sau ra độ:

a) $\frac{5\pi}{18}$

b) $\frac{3\pi}{5}$

c) -4

Bài tập 3: Trả lời các câu hỏi được nêu ra trong các trường hợp sau:

a) Trên đường tròn bán kính $r = 5$. Tìm độ dài của cung đo $\frac{\pi}{8}$

b) Trên đường tròn bán kính $r = 15$. Tìm độ dài của cung có số đo 50°

c) Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Tìm số đo radian của cung tròn đó

d) Một đường tròn có $r = 30$. Tìm độ dài của một cung trên đường tròn có số đo $1,5 \text{ rad}$

e) Một đường tròn có bán kính $R = \frac{10}{\pi} \text{ cm}$. Tìm độ dài của cung $\frac{\pi}{2}$ trên đường tròn.

f) Một đường tròn có bán kính $R = 10 \text{ cm}$. Tìm độ dài cung 40° trên đường tròn đó

Bài tập 4: Một bánh xe máy có đường kính 60. Nếu xe chạy với vận tốc 50 (km/h) thì trong 5 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng.

Bài tập 5: Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270° ?

Bài tập 6: Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài 10,25 cm, kim phút dài 13,25 cm. Trong 30 phút kim giờ vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trên đường tròn bán kính 7 cm, lấy cung có số đo 54° . Độ dài l của cung tròn bằng
 A. $\frac{21}{10}\pi$ (cm). B. $\frac{11}{20}\pi$ (cm). C. $\frac{63}{20}\pi$ (cm). D. $\frac{20}{11}\pi$ (cm).
- Câu 2:** Trên đường tròn đường kính 8cm, tính độ dài cung tròn có số đo bằng 1,5 rad.
 A. 12cm. B. 4cm. C. 6cm. D. 15cm.
- Câu 3:** Một đường tròn có bán kính 15(cm). Tìm độ dài cung tròn có góc ở tâm bằng 30° là:
 A. $\frac{5\pi}{2}$. B. $\frac{5\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{5}$. D. $\frac{\pi}{3}$.
- Câu 4:** Một đường tròn có bán kính 10, độ dài cung tròn 40° trên đường tròn gần bằng
 A. 7. B. 9. C. 11. D. 13.
- Câu 5:** Một đường tròn có bán kính $R = \frac{10}{\pi}$, độ dài cung tròn $\frac{\pi}{2}$ là
 A. 5. B. 5π . C. $\frac{5}{\pi}$. D. $\frac{\pi}{5}$.
- Câu 6:** Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:
 A. Cung tròn có bán kính $R = 5$ cm và có số đo 1,5 rad thì có độ dài là 7,5 cm.
 B. Cung tròn có bán kính $R = 8$ cm và có độ dài 8 cm thì có số đo độ là $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.
 C. Độ dài cung tròn phụ thuộc vào bán kính của nó.
 D. Góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương thì mọi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo âm.
- Câu 7:** Cho đường tròn có bán kính 6 cm. Tìm số đo của cung có độ dài là 3cm :
 A. 0,5. B. $\frac{0,5}{\pi}$. C. $0,5\pi$. D. 1.
- Câu 8:** Cung tròn bán kính bằng 8,43 cm có số đo 3,85 rad có độ dài là
 A. 32,46 cm. B. 32,45 cm. C. 32,47 cm. D. 32,5 cm.
- Câu 9:** Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài 10,57cm. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là
 A. 2,77cm. B. 2,78cm. C. 2,76cm. D. 2,8cm.
- Câu 10:** Bánh xe đạp có bán kính 50cm. Một người quay bánh xe 5 vòng quanh trục thì quãng đường đi được là
 A. 250π (cm). B. 1000π (cm). C. 500π (cm). D. 200π (cm).
- Câu 11:** Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270° ?

- A. $\frac{1}{3}$ phút. B. $\frac{1}{6}$ phút. C. $\frac{1}{4}$ phút. D. 1,5 phút.

Câu 12: Một đường tròn có bán kính 15 cm. Tìm độ dài cung tròn có góc ở tâm bằng 30° là

- A. $\frac{5\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{5}$. D. $\frac{5\pi}{3}$.

Câu 13: Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài 10,57cm. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1057}{1200}\pi(cm)$. B. $\frac{1057}{2400}\pi(cm)$. C. $\frac{1057}{600}\pi(cm)$. D. $\frac{1057}{4800}\pi(cm)$.

Câu 14: Bánh xe đạp có đường kính 55cm (kể cả lốp). Nếu chạy với vận tốc 40km/h thì trong 25s bánh xe quay được số vòng gần bằng với kết quả nào dưới đây?

- A. 52. B. 161. C. 322. D. 200.

Câu 15: Kim giờ của đồng hồ dài 8 cm, kim phút dài 10 cm. Tổng quãng đường mũi kim phút, kim giờ đi được trong 30 phút bằng

- A. $\frac{25}{3}\pi$. B. $\frac{37}{3}\pi$. C. $\frac{20}{3}\pi$. D. $\frac{32}{3}\pi$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Đổi số đo của các góc sang độ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $\frac{\pi}{9}$ rad = 20°
 b) $\frac{5\pi}{4}$ rad = 225°
 c) $\frac{3\pi}{5}$ rad = 120°
 d) $\frac{7\pi}{12}$ rad = 155°

Câu 2: Đổi số đo của các góc sang radian. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $120^\circ = \frac{2\pi}{9}$ rad
 b) $250^\circ = \frac{25\pi}{18}$ rad
 c) $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ rad
 d) $300^\circ = \frac{5\pi}{3}$ rad

Câu 3: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Đường tròn có bán kính bằng 9 cm thì số đo (theo radian) của cung có độ dài 3π cm bằng $\frac{\pi}{3}$ rad
 b) Đường tròn có bán kính 30cm thì độ dài của cung tròn trên đường tròn đó có số đo 2,5 rad bằng 7,5 cm.

c) Bán kính của đường tròn bằng 10 cm thì cung có số đo $\frac{5}{3}$ rad dài 24 cm.

d) Đường tròn có bán kính 6 cm thì số đo (rad) của cung có độ dài 3 cm bằng $\frac{1}{2}$ rad

Câu 4: Một vận động viên đi xe đạp trên đường, bánh xe đạp của vận động viên này quay được 11 vòng trong 5 giây. Biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm .



a) Góc (theo độ radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây là 792°

b) Góc (theo radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây là $\frac{2\pi}{5}$ (rad)

c) Trong một phút bánh xe quay được 130 vòng

d) Quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút khoảng 282 m

Câu 5: Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

a) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là $\approx 28902,65$ km

b) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là $\approx 43353,98$ km

c) Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240000 km

d) Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\frac{9\pi}{2}$ rad?

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Đổi số đo của góc $40^\circ 25'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần trăm.

Câu 2: Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu (tính theo độ)?

Câu 3: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:

Câu 4: Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng 6,5 cm

Câu 5: Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài 10,57cm và kim phút dài 13,34cm. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là



- Câu 6:** Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2h$ theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được $3h$, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).
- Câu 7:** Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương. Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?
- Câu 8:** Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương. Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?
- Câu 9:** Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

- Câu 10:** Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe. Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm . Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?



-----HẾT-----



Dạng 2: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Hệ thức Chasles

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo trên đường tròn lượng giác ta thực hiện như sau:

- Chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung.
- Xác định điểm cuối M của cung sao cho $AM = \alpha$

Lưu ý:

- Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π là:

$$sđAM = \alpha + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

- Ngoài ra, ta cũng có thể viết số đo bằng độ:

$$sđAM = x^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

- Nếu ta có $AM = \alpha + k\frac{2\pi}{n}; k, n \in \mathbb{Z}$ thì sẽ có n điểm ngọn.

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì thì ta có:

$$sd(Ou, Ov) + sd(Ov, Ow) = sd(Ou, Ow) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Từ đó ta có thể suy ra: $sd(Ou, Ov) = sd(Ou, Ow) - sd(Ov, Ow) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là $\frac{25\pi}{4}$

Bài tập 2: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là -1485°

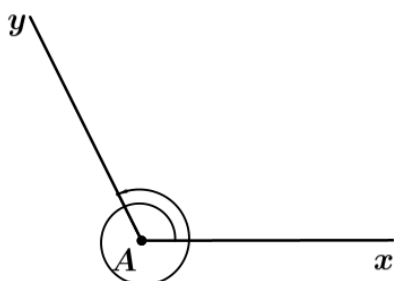
Bài tập 3: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là:

$$\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

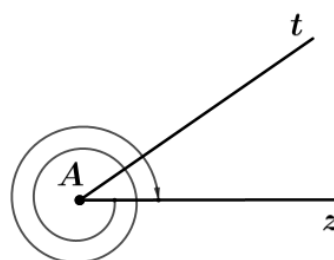
Bài tập 4: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là

$$k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$$

Bài tập 5: Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong mỗi hình dưới đây.



a) $xAy = 102^\circ$



b) $zBt = \frac{\pi}{5}$

Bài tập 6: Thực hiện các yêu cầu sau:

- a) Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Oa, Ob) , với $0 \leq \alpha < 2\pi$. Biết một góc lượng giác cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob có số đo là $\frac{25\pi}{6}$.

b) Hãy tìm số đo a° của góc lượng giác (Om, On) , với $0 \leq a < 360$. Biết một góc lượng giác cùng tia đầu Om và tia cuối On có số đo là -875° .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn định hướng"?
- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
 - B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
 - C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
 - D. Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.
- Câu 2:** Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:
- A. Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.
 - B. Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.
 - C. Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.
 - D. Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.
- Câu 3:** Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác AB xác định:
- A. Một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - B. Hai góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - C. Bốn góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - D. Vô số góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
- Câu 4:** Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "góc lượng giác"?
- A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.
 - B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.
 - C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.
 - D. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.
- Câu 5:** Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn lượng giác"?
- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.
 - B. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$ là một đường tròn lượng giác.
 - C. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
 - D. Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
- Câu 6:** Cho góc lượng giác $(Ox, Oy) = 22^\circ 30' + k360^\circ$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì góc

$$(Ox, Oy) = 1822^{\circ}30' ?$$

- A. $k \in \emptyset$. B. $k = 3$. C. $k = -5$. D. $k = 5$.

Câu 7: Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo của góc lượng giác (OG, OP) là

- A. $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $-270^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $270^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$. D. $\frac{9\pi}{10} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng

- A. -45° . B. 315° .
 C. 45° hoặc 315° . D. $-45^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 9: Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là:

- A. 120° . B. -240° .
 C. -120° hoặc 240° . D. $120^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 10: Trên đường tròn lượng giác với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo cung lượng giác AN bằng:

- A. 255° . B. -105° .
 C. -105° hoặc 255° . D. $-105^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 11: Cho bốn cung (trên một đường tròn định hướng): $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{25\pi}{3}$, $\delta = \frac{19\pi}{6}$. Các cung nào có điểm cuối trùng nhau?

- A. α và β ; γ và δ . B. β và γ ; α và δ . C. α, β, γ . D. β, γ, δ .

Câu 12: Các cặp góc lượng giác sau ở trên cùng một đường tròn đơn vị, cùng tia đầu và tia cuối. Hãy nêu kết quả **sai** trong các kết quả sau đây:

- A. $\frac{\pi}{3}$ và $-\frac{35\pi}{3}$. B. $\frac{\pi}{10}$ và $\frac{152\pi}{5}$. C. $-\frac{\pi}{3}$ và $\frac{155\pi}{3}$. D. $\frac{\pi}{7}$ và $\frac{281\pi}{7}$.

Câu 13: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành tam giác đều?

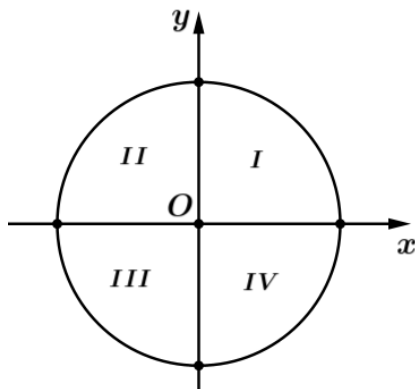
- A. $\frac{k2\pi}{3}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k\pi}{2}$. D. $\frac{k\pi}{3}$.

Câu 14: Trên đường tròn lượng giác gốc A , cung lượng giác nào có các điểm biểu diễn tạo thành hình vuông?

- A. $\frac{k\pi}{2}$. B. $k\pi$. C. $\frac{k2\pi}{3}$. D. $\frac{k\pi}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó:

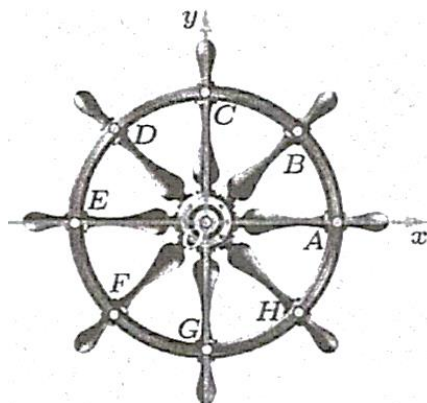


- a) 125° là điểm M thuộc góc phần tư thứ II
- b) 405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ III
- c) $\frac{19\pi}{3}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ II
- d) $-\frac{13\pi}{6}$ là điểm Q thuộc góc phần tư thứ IV

Câu 2: Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $36^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là điểm M thuộc góc phần tư thứ II
- b) $-60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là các điểm M_1, M_2 thuộc góc phần tư thứ II và IV
- c) $-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là M thuộc góc phần tư thứ III
- d) $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ là bốn điểm M, N, P, Q thuộc góc phần tư thứ I, II, III, IV

Câu 3: Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thủy tương ứng với một đường tròn lượng giác.



a) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác (OA, OB) theo đơn vị radian:

$$(OA, OB) = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$$



b) Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là A, C, E, G theo đơn vị radian là $k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

c) Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là A, E theo đơn vị độ là $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$

d) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA, OC) + (OC, OH)$ theo đơn vị radian:

$$\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 4: Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau đây trên đường tròn lượng giác. Khi đó:

a) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo 218° là điểm M thuộc góc phần tư thứ III của đường tròn lượng giác thoả mãn $AOM = 218^\circ$

b) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo -405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác thoả mãn $AON = -45^\circ$

c) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{25\pi}{4}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác thoả mãn $AOP = \frac{\pi}{4}$

d) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{15\pi}{2}$ là điểm $Q(0; -1)$ thuộc đường tròn lượng giác thoả mãn $AOQ = -\frac{\pi}{2}$

Câu 5: Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo 250° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo -270° .

a) Số đo góc lượng giác (Ou, Ox) bằng $-250^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

b) Số đo góc lượng giác (Ov, Ox) bằng $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

c) Số đo một góc lượng giác (Ou, Ov) bằng -20° .

d) Số đo một góc lượng giác (Ou, Ov) theo đơn vị radian bằng $\frac{\pi}{9}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trên đường tròn lượng giác vớ điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo cung lượng giác AN bằng bao nhiêu?

Câu 2: Biết một số đo của góc $(Ox, Oy) = \frac{3\pi}{2} + 2001\pi$. Giá trị tổng quát của góc (Ox, Oy) là bao nhiêu



Câu 3: Biết OMB' và ONB' là các tam giác đều. Cung α có mút đầu là A và mút cuối trùng với B hoặc M hoặc N . Tính số đo của α ?

Câu 4: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng bao nhiêu?

Câu 5: Nếu góc lượng giác có số $(Ox, Oz) = -\frac{63\pi}{2}$ thì Ox và Oz tạo với nhau một góc bằng bao nhiêu độ?

Câu 6: Cho hai góc lượng giác có số $(Ox, Ou) = 45^\circ + m360^\circ, m \in \mathbb{Z}$ và số

$$(Ox, Ov) = -135^\circ + n360^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

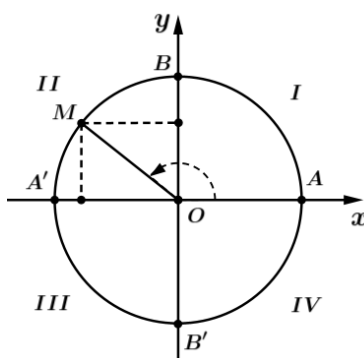
Hai tia Ou và Ov hợp với nhau một góc bằng bao nhiêu độ?

-----HẾT-----

Dạng 3: Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán

Chú ý: Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α thì ta cần xem trên miền đó các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào, cụ thể như sau:



Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

- a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
- b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$
- c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
- c) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Bài tập 2: Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

- a) $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$
- b) $\cos \alpha = -0,7$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
- c) $\tan \alpha = 2$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
- c) $\cot \alpha = \frac{7}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Bài tập 3: Hãy thực hiện các yêu cầu trong mỗi trường hợp sau:

- a) Biểu diễn $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right)$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$;
- b) Biểu diễn $\tan 973^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45° .

Bài tập 4: Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau:

- a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- b) $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Bài tập 5: Bằng cách sử dụng giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt, hãy tính:

a) $\cos \frac{-15\pi}{4}$

b) $\cot(-675^\circ)$

c) $\sin \frac{11\pi}{3}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các hệ thức sau đây, hệ thức nào đúng?

A. $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$

B. $\sin x + \cos x = 1$

C. $\sin 2x + \cos 2x = 1$

D. $\sin^2 x + \cos x^2 = 1$

Câu 2: Tìm khẳng định sai? (với điều kiện các hệ thức đã xác định)

A. $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$

B. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$

C. $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

D. $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$

Câu 3: Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\tan \alpha < 0$

B. $\cot \alpha > 0$

C. $\sin \alpha > 0$

D. $\cos \alpha > 0$

Câu 4: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Kết quả đúng là

A. $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$

B. $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$

C. $\sin \alpha > 0, \cos \alpha < 0$

D. $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$

Câu 5: Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha > 0; \cot \alpha > 0$

B. $\tan \alpha < 0; \cot \alpha < 0$

C. $\tan \alpha > 0; \cot \alpha < 0$

D. $\tan \alpha < 0; \cot \alpha > 0$

Câu 6: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\sin(\alpha - \pi) \geq 0$

B. $\sin(\alpha - \pi) \leq 0$

C. $\sin(\alpha - \pi) < 0$

D. $\sin(\alpha - \pi) < 0$

Câu 7: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) > 0$

B. $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$

C. $\tan(\alpha + \pi) < 0$

D. $\tan(\alpha + \pi) > 0$

Câu 8: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị lượng giác nào sau đây luôn dương?

A. $\sin(\pi + \alpha)$

B. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

C. $\cos(-\alpha)$

D. $\tan(\pi + \alpha)$

Câu 9: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0.$

B. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0.$

C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0.$

D. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0.$

Câu 10: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $\sin(\alpha + \pi) < 0.$

B. $\cos(\alpha + \pi) > 0.$

C. $\tan(\pi - \alpha) > 0.$

D. $\cot(\pi - \alpha) < 0.$

Câu 11: Cho $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$. Xét câu nào sau đây đúng?

A. $\cos \alpha > 0.$

B. $\sin \alpha > 0.$

C. $\tan \alpha > 0.$

D. $\cot \alpha > 0.$

Câu 12: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\tan \alpha > 0, \cot \alpha > 0.$

B. $\tan \alpha > 0, \cot \alpha < 0.$

C. $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0.$

D. $\tan \alpha < 0, \cot \alpha > 0.$

Câu 13: Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$

A. $\cot \alpha = 2.$

B. $\cot \alpha = \frac{1}{4}.$

C. $\cot \alpha = \frac{1}{2}.$

D. $\cot \alpha = \sqrt{2}.$

Câu 14: Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây?

A. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ.$

B. $\cos 45^\circ \leq \sin 45^\circ.$

C. $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ.$

D. $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ.$

Câu 15: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

B. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}.$

C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$

D. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Câu 16: Giá trị của $\tan \frac{\pi}{6}$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}.$

B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}.$

C. $\sqrt{3}.$

D. $-\sqrt{3}.$

Câu 17: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$). giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}.$

B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}.$

C. $\cos \alpha = \frac{2}{5}.$

D. $\cos \alpha = -\frac{2}{5}.$

Câu 18: Hãy chọn kết quả sai trong các kết quả sau đây:

A. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha.$

B. $\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha.$

C. $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha.$

D. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha.$

Câu 19: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, ta được:

A. $\cos \alpha.$

B. $\sin \alpha.$

C. $-\cos \alpha.$

D. $-\sin \alpha.$

Câu 20: Giá trị của biểu thức $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 1. D. 3

Câu 21: Cho a là số thực bất kỳ. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- A. $\sin a + \cos a = 1$. B. $\sin^3 a + \cos^3 a = 1$.
 C. $\sin^4 a + \cos^4 a = 1$. D. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Câu 22: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $\sin(\pi + \alpha) < 0$. B. $\sin(\pi - \alpha) < 0$.
 C. $\cos(\pi - \alpha) < 0$. D. $\cos(\pi + \alpha) < 0$.

Câu 23: Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$. C. $\cos \alpha = \frac{5}{3}$. D. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Câu 24: Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$?

- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{3}{5}$. C. $-\frac{3}{5}$. D. $\frac{4}{5}$.

Câu 25: Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$; $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
 C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$; $\cos \alpha = \frac{-3}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$; $\cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Câu 26: Cho góc α thỏa $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- A. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Tính được các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
 b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$
 c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$
 d) $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 2: Tính được các giá trị lượng giác của góc $\alpha = -\frac{\pi}{4} + (2k + 1)\pi$ (biết $k \in \mathbb{Z}$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan \alpha = -1$

d) $\cot \alpha = -1$

Câu 3: Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) $A = \sin(\alpha + 90^\circ) > 0$

b) $B = \cos(\alpha - 45^\circ) > 0$

c) $C = \tan(270^\circ - \alpha) < 0$

d) $D = \cos(2\alpha + 90^\circ) > 0$

Câu 4: Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x , biết: $\sin x = -\frac{3}{5}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos x > 0$

b) $\cos x = -\frac{4}{5}$

c) $\tan x = \frac{3}{4}$

d) $\cot x = \frac{4}{3}$

Câu 5: Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x , biết: $\cos x = \frac{1}{4}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin x < 0$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

c) $\tan x = \sqrt{15}$

d) $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{15}}$

Câu 6: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu của các biểu thức sau. Khi đó:

a) $A = \cos(\alpha + \pi) < 0$

b) $B = \tan(\alpha - \pi) > 0$

c) $C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) < 0$

d) $D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$

Câu 7: Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x biết: $\cos x = -\frac{5}{13}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\sin x < 0$
- b) $\tan x = \frac{12}{5}$
- c) $\cot x = \frac{5}{12}$
- d) $\sin x - \cos x = -\frac{12}{13}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < \alpha < 11\pi$.

Câu 2: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

Câu 3: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

Câu 4: Biết rằng $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

Câu 6: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

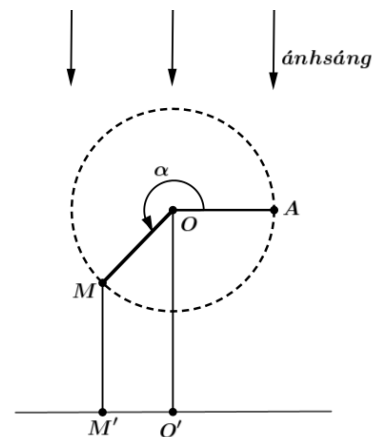
Câu 7: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

Câu 8: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

Câu 9: Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức $d(t) = 4\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] + 12$ ($t \in \mathbb{Z}$ và $1 \leq t \leq 365$).

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 10: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh gốc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



-----HẾT-----

Dạng 4: Áp dụng tính chất của các giá trị lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$

b) Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Bài tập 2: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$

b) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} = 0$

Bài tập 3: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right)$

b) $\left[1 + \tan^2(-\alpha + 11\pi)\right] \cdot \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$

Bài tập 4: Tính giá trị của các biểu thức sau đây:

a) $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ$ (17 số hạng).

b) $B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \dots + \cos 175^\circ$ (35 số hạng).

Bài tập 5: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x$

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$

c) $\frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$

d) $\sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$

Bài tập 6: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2\cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, ta được:

- A. $\cos \alpha$. B. $\sin \alpha$. C. $-\cos \alpha$. D. $-\sin \alpha$.

Câu 2: Giá trị của biểu thức $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 1. D. 3

Câu 3: Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
 C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{-3}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}; \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Câu 4: Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \alpha}{2\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha}$ là

- A. $\frac{5}{26}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $-\frac{5}{26}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Câu 5: Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$.

- A. $M = 1 + 3\sin^2 x \cos^2 x$. B. $M = 1 - 3\sin^2 x$.
 C. $M = 1 - \frac{3}{2}\sin^2 2x$. D. $M = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$.

Câu 6: Rút gọn biểu thức $M = \tan^2 x - \sin^2 x$.

- A. $M = \tan^2 x$. B. $M = \sin^2 x$. C. $M = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$. D. $M = 1$.

Câu 7: Rút gọn biểu thức $M = \cot^2 x - \cos^2 x$.

- A. $M = \cot^2 x$. B. $M = \cos^2 x$. C. $M = 1$. D. $M = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$.

Câu 8: Rút gọn biểu thức $M = (1\sin^2 x)\cot^2 x + (1\cot^2 x)$.

- A. $M = \sin^2 x$. B. $M = \cos^2 x$. C. $M = \sin^2 x$. D. $M = \cos^2 x$.

Câu 9: Rút gọn biểu thức $M = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$.

- A. $M = 1 + \sin^2 \alpha$. B. $M = \sin \alpha$. C. $M = 2\sin \alpha$. D. $M = 3$.

Câu 10: Rút gọn biểu thức $M = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.

- A. $M = -4$. B. $M = -2$. C. $M = 2$. D. $M = 4$.

Câu 11: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

- A. $P = 1 + 2\tan^2 \alpha$. B. $P = 1 - 2\tan^2 \alpha$.
 C. $P = -1 + 2\tan^2 \alpha$. D. $P = -1 - 2\tan^2 \alpha$.

Câu 12: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$. B. $P = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$. C. $P = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$. D. $P = 0$.

Câu 13: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$.

- A. $P = \tan^2 \alpha$. B. $P = 1$. C. $P = -\cos^2 \alpha$. D. $P = \cot^2 \alpha$.

Câu 14: Đơn giản biểu thức $P = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

- A. $P = \cos x + \sin x$. B. $P = \cos x - \sin x$.
C. $P = \cos 2x - \sin 2x$. D. $P = \cos 2x + \sin 2x$.

Câu 15: Đơn giản biểu thức $P = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$.

- A. $P = 2 \tan^2 \alpha$. B. $P = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$. C. $P = 2 \cot^2 \alpha$. D. $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$.

Câu 16: Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1$.

- A. $P = 2$. B. $P = 1 + \tan \alpha$. C. $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. D. $P = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Câu 17: Đơn giản biểu thức $P = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$.

- A. $P = 2$. B. $P = 2 \cos \alpha$. C. $P = 2 \tan \alpha$. D. $P = 2 \sin \alpha$.

Câu 18: Đơn giản biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$.

- A. $P = 1$. B. $P = -1$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{1}{2}$.

Câu 19: Tính $S = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 85^\circ$

- A. $\frac{19}{2}$. B. 8. C. $\frac{17}{2}$. D. 9.

Câu 20: Với mọi góc α , biểu thức $\cos \alpha + \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{5} \right) + \cos \left(\alpha + \frac{2\pi}{5} \right) + \dots + \cos \left(\alpha + \frac{9\pi}{5} \right)$ nhận giá trị bằng

- A. 10 B. -10 C. 1 D. 0

Câu 21: Biết $\tan x = 2$, giá trị của biểu thức $M = \frac{3 \sin x - 2 \cos x}{5 \cos x + 7 \sin x}$ bằng:

- A. $\frac{4}{9}$. B. $-\frac{4}{9}$. C. $\frac{4}{19}$. D. $-\frac{4}{19}$.

Câu 22: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sqrt{\frac{1 + \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}}$

A. $-\frac{2}{\cos \alpha}$. B. $\frac{2}{\cos \alpha}$. C. $\frac{2}{\sin \alpha}$. D. $-\frac{2}{\sin \alpha}$.

Câu 23: Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi$, $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\cos \beta = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

A. $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2 + 2\sqrt{10}}{9}$. B. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{10} - 2}{9}$.
 C. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5} - 4\sqrt{2}}{9}$. D. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5} + 4\sqrt{2}}{9}$.

Câu 24: Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

A. $-\tan \alpha$. B. $\cot \alpha$. C. $\tan \alpha$. D. $-\cot \alpha$.

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

A. $M = 1$. B. $M = 2$. C. $M = 4$. D. $M = 4 \sin x \cos x$.

Câu 26: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

A. $A = \cos \alpha + \sin \alpha$. B. $A = 2 \sin \alpha$. C. $A = \sin \alpha \cos \alpha$. D. $A = 0$.

Câu 27: Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(\pi - x)$ ta được

A. $S = 0$. B. $S = \sin^2 x - \cos^2 x$. C. $S = 2 \sin x \cos x$. D. $S = 1$.

Câu 28: Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

A. $P + Q = 0$. B. $P + Q = -1$. C. $P + Q = 1$. D. $P + Q = 2$.

Câu 29: Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right)\right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x)\right]^2$ bằng

A. $\frac{1}{\sin^2 x}$. B. $\frac{1}{\cos^2 x}$. C. $\frac{2}{\sin^2 x}$. D. $\frac{2}{\cos^2 x}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\tan x = -2$. Tính được các biểu thức $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$, $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$, khi đó:

a) $\cot x = -\frac{1}{2}$

b) Vì $\tan x = -2$ nên $\cos x = 0$

c) $A_1 = -\frac{21}{11}$

d) $A_2 = \frac{3}{7}$

Câu 2: Cho $\cot x = 2$. Tính được các biểu thức $B_1 = \frac{2\sin x + 3\cos x}{3\sin x - 2\cos x}$, $B_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$, khi đó:

a) Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$.

b) $B_1 = -8$

c) $B_2 = -5$

d) $B_1 + B_2 = -13$

Câu 3: Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Giá trị sin của góc lượng giác α âm.

b) Giá trị tan của góc lượng giác α dương.

c) Giá trị của biểu thức $P = \sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha = \frac{2}{25}$.

d) Giá trị của biểu thức $Q = \tan \alpha + \cot \alpha > 2$.

Câu 4: Cho $\tan \alpha = 2$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

b) Khi $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ thì $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.

c) Giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha + 2\sin \alpha} = \frac{5}{31}$

d) Cho $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$. Giá trị của biểu thức: $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{1}{a^3 + b^3}$.

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cot \alpha = -3$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin \alpha > 0$

b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

c) $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha + 3\sin^3 \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{10}{21}$

d) $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2 = 20$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3\sin^2 x$.

Câu 2: Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2\cos \alpha = 1$. Tính $P = 2\tan \alpha - \cot \alpha$.

Câu 3: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.



Câu 4: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

A. $P = \frac{91}{125}$.

B. $P = \frac{49}{25}$.

C. $P = \frac{7}{5}$.

D. $P = \frac{1}{9}$.

Câu 6: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4\cos^2 \alpha}{5\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha}$.

Câu 7: Huyện lỵ Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lỵ Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quản Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài của cung kinh tuyến nối hai huyện lỵ đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính 6278km .

-----HẾT-----

BÀI

02

CÁC PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

A

LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức cộng

$$\oplus \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\oplus \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\oplus \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\oplus \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\oplus \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\oplus \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2 Công thức nhân đôi

$$\oplus \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\oplus \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\oplus \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\oplus \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3 Công thức hạ bậc

$$\oplus \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

4 Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\oplus \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\oplus \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\oplus \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

$$\oplus \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

5 Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\oplus \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa các giá trị lượng giác

Phương pháp: Sử dụng các công thức lượng giác đã nêu ở phần lý thuyết để giải quyết bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính:

a) $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$ biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

b) $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ biết $\cos a = -\frac{1}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

Bài tập 2: Tính $\sin a$; $\sin 2a$; $\cos 2a$; $\tan 2a$, biết:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$

Bài tập 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin(x + 14^\circ)\sin(x + 74^\circ) + \sin(x - 76^\circ)\sin(x - 16^\circ)$

b) $B = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a}$

Bài tập 5: Không dùng máy tính cầm tay. Hãy tính các giá trị lượng giác sau:

a) $\cos 795^\circ$

b) $\tan \frac{7\pi}{12}$

Bài tập 6: Tính $A = \cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$

Bài tập 7: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right), \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Bài tập 8: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$

b) $B = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$

Bài tập 9: Đơn giản biểu thức sau:

a) $A = \frac{\cos a + 2\cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}$

$$b) B = \frac{\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}$$

$$c) C = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \dots + \cos(a + nb) \quad (n \in \mathbb{N})$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\sin 105^\circ$ ta được:

A. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. B. $-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. D. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

Câu 2: Tính $\tan 105^\circ$ ta được:

A. $-(2 + \sqrt{3})$. B. $2 + \sqrt{3}$. C. $2 - \sqrt{3}$. D. $-(2 - \sqrt{3})$.

Câu 3: Rút gọn biểu thức: $\cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ$, ta được:

A. $\cos 50^\circ$. B. $\cos 58^\circ$. C. $\sin 50^\circ$. D. $\sin 58^\circ$.

Câu 4: Rút gọn biểu thức $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ta được

A. $\sqrt{2} \sin x$. B. $-\sqrt{2} \sin x$. C. $\sqrt{2} \cos x$. D. $-\sqrt{2} \cos x$.

Câu 5: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{37\pi}{12}$ bằng

A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Câu 6: Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Câu 7: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ$.

A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^\circ$. B. $M = \frac{1}{2} \cos 10^\circ$. C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^\circ$. D. $M = \frac{1}{8} \cos 10^\circ$.

Câu 8: Công thức nào sau đây sai?

A. $\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b$. B. $\cos(a + b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b$.
 C. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$. D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Câu 9: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a$. B. $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a$.
 C. $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a$. D. $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1$.

Câu 10: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$.

B. $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$.

C. $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$.

D. $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x$.

Câu 11: Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

B. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$.

D. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 12: Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 13: Nếu $\cos(a + b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\sin(a + 2b)| = |\sin a|$.

B. $|\sin(a + 2b)| = |\sin b|$.

C. $|\sin(a + 2b)| = |\cos a|$.

D. $|\sin(a + 2b)| = |\cos b|$.

Câu 14: Nếu $\sin(a + b) = 0$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

A. $|\cos(a + 2b)| = |\sin a|$.

B. $|\cos(a + 2b)| = |\sin b|$.

C. $|\cos(a + 2b)| = |\cos a|$.

D. $|\cos(a + 2b)| = |\cos b|$.

Câu 15: Rút gọn $M = \sin(x - y)\cos y + \cos(x - y)\sin y$.

A. $M = \cos x$.

B. $M = \sin x$.

C. $M = \sin x \cos 2y$.

D. $M = \cos x \cos 2y$.

Câu 16: Rút gọn $M = \cos(a + b)\cos(a - b) - \sin(a + b)\sin(a - b)$.

A. $M = 1 - 2\cos^2 a$.

B. $M = 1 - 2\sin^2 a$.

C. $M = \cos 4a$.

D. $M = \sin 4a$.

Câu 17: Rút gọn $M = \cos(a + b)\cos(a - b) + \sin(a + b)\sin(a - b)$.

A. $M = 1 - 2\sin^2 b$.

B. $M = 1 + 2\sin^2 b$.

C. $M = \cos 4b$.

D. $M = \sin 4b$.

Câu 18: Giá trị nào sau đây của x thỏa mãn $\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x$?

A. 18° .

B. 30° .

C. 36° .

D. 45° .

Câu 19: Rút gọn $M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

A. $M = \sqrt{2} \sin x$.

B. $M = -\sqrt{2} \sin x$.

C. $M = \sqrt{2} \cos x$.

D. $M = -\sqrt{2} \cos x$.

Câu 20: Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

A. $M = \tan(x - y)$.

B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Câu 21: Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

A. $M = \sin 2\alpha$.

B. $M = \cos 2\alpha$.

C. $M = -\cos 2\alpha$.

D. $M = -\sin 2\alpha$.

Câu 22: Chọn đẳng thức đúng.

A. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}$.

B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}$.

C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$.

D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}$.

Câu 23: Gọi $M = \frac{\sin(y - x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

A. $M = \tan x - \tan y$.

B. $M = \cot x - \cot y$

C. $M = \cot y - \cot x$.

D. $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}$.

Câu 24: Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

A. $M = 2\cos 2x(\cos x + 1)$.

B. $M = 4\cos 2x\left(\frac{1}{2} + \cos x\right)$.

C. $M = \cos 2x(2\cos x - 1)$.

D. $M = \cos 2x(2\cos x + 1)$.

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2\cos^2 x - 1}$.

A. $\tan 2x$

B. $\sin x$.

C. $2\tan x$.

D. $2\sin x$.

Câu 26: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2\cos^2 x + \cos x - 1}$.

A. $\cos x$.

B. $2\cos x - 1$.

C. $2\cos x$.

D. $\cos x - 1$.

Câu 27: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha$.

A. 0.

B. $2\cos^2 x$.

C. 2.

D. $\cos 2x$.

Câu 28: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

A. $\sin 2\alpha$.

B. $\cos 2\alpha$.

C. $\tan 2\alpha$.

D. $\cot 2\alpha$.

Câu 29: Biểu thức $A = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

A. $-\tan^4 \alpha$.

B. $\tan^4 \alpha$.

C. $-\cot^4 \alpha$.

D. $\cot^4 \alpha$.

Câu 30: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

A. $\tan \alpha$.

B. $2\tan \alpha$.

C. $\tan 2\alpha + \tan \alpha$.

D. $\tan 2\alpha$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c) $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$

d) $\cot 2\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8}$

Câu 2: Cho biết $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$

c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$

d) $\cot \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Câu 3: Cho biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos \alpha < 0$

b) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

c) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

d) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{48 - \sqrt{3}}{11}$

Câu 4: Cho biết $\sin \alpha = -\frac{12}{13}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos \alpha > 0$

b) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

c) $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{5 - \sqrt{3}}{26}$

Câu 5: Cho biết $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos x > 0$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6} - 3}{8}$.

Câu 6: Cho biết $\cos x = -\frac{12}{13}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\sin x > 0$

b) $\sin x = -\frac{5}{13}$

c) $\cot x = \frac{5}{12}$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$

Câu 7: Cho biết $\tan x = \sqrt{2}$ và $0 < x < 90^\circ$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos x > 0$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\cos(x - 30^\circ) = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$

Câu 8: Biết $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b là các góc nhọn. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\tan a = \frac{8}{15}$

b) $\sin(a - b) = \frac{21}{221}$

c) $\cos(a + b) = \frac{14}{22}$

d) $\tan(a + b) = \frac{17}{14}$.

Câu 9: Biết $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$, $a + b = \frac{\pi}{4}$ và $\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\tan a + \tan b = -2 + 2\sqrt{2}$.

b) $\tan a = -1 + \sqrt{2}$

c) $\tan b = -1 - \sqrt{2}$

d) $\tan a - \tan b = -2 - 2\sqrt{2}$.

Câu 10: Cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

b) $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{6}$

Câu 11: Cho góc α thỏa mãn $\frac{-\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cot \alpha = -3$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin \alpha > 0$

b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

c) $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha + 3\sin^3 \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{10}{21}$

d) $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - \alpha) \right]^2 = 20$

Câu 12: Cho $\cos a = \frac{3}{4}$; $\sin a > 0$; $\sin b = \frac{3}{5}$; $\cos b < 0$. Xét tính đúng – sai của các phát biểu sau:

a) Giá trị của $\tan a = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

b) Giá trị của $\cot b = -\frac{2}{3}$.

c) Giá trị của $\cos 2a + \cos 2b$ thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

d) Giá trị của $\cos(a + b)$ thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$.

Câu 13: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\sin^2 x = \frac{1 + \sin 2x}{2}$

b) Nếu $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ thì $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$

c) Nếu $\sin x = \frac{3}{4}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\sin 2x = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

d) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ biết $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = a + b\sqrt{c}$. ($a, b, c \in \mathbb{Z}$, $c \geq 0$) Khi đó $a + b + c = 0$.

Câu 14: Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

b) $\sin 31^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 31^\circ = \sin 19^\circ$.

c) Cho $\cos x = \frac{4}{5}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Giá trị của $\sin 2x$ là $-\frac{24}{25}$.

d) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Biết giá trị của $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1-a\sqrt{6}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ thì $a+b=4$.

Câu 15: Xét tính đúng sai của các đẳng thức sau:

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$.

b) $4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 4x + \sin 2x - \sin 6x$.

c) $1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

d) $\sin^2 x + 2 \sin(a-x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a-x) = \cos^2 a$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

Câu 3: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

Câu 4: Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

Câu 5: Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

Câu 6: Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

Câu 7: Giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ là

Câu 8: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

Câu 9: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

Câu 10: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

Câu 11: Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.



Câu 12: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

Câu 13: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

Câu 14: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

-----HẾT-----



Dạng 2: Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng các công thức lượng giác đã nêu ở phần lý thuyết để giải quyết bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho $\cos(a + 2b) = 2\cos a$. Chứng minh rằng: $\tan(a + b) \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$.

Bài tập 2: Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ (với điều kiện tam giác ABC không vuông);

b) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$

Bài tập 3: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$

c) $\sin \alpha (2\cos 4\alpha + 2\cos 2\alpha + 1) = \sin 5\alpha$

d) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

Bài tập 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$

b) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$

c) $\frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4\sin^2 \frac{\alpha}{2}}$

Bài tập 5: Chứng minh đẳng thức sau:

a) $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a$.

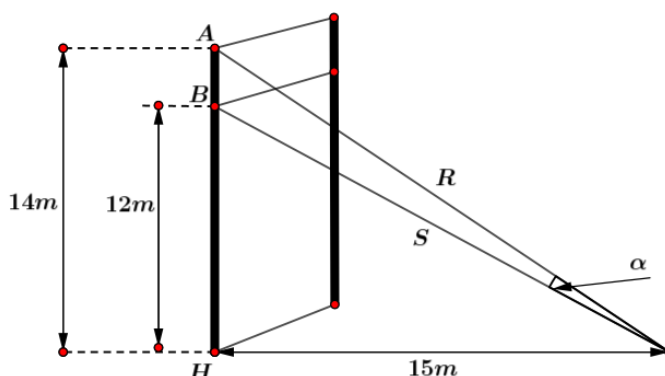
b) $\cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\sin a + \sqrt{3} \cos a = 2 \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right)$.

Bài tập 6: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Bài tập 7: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m.



- a) Tính $\tan \alpha$ ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
 b) Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Bài tập 8: Trong vật lí thì phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}); x_2(t) = 2\cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm})$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.
- A. 1. B. $\tan \alpha$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2 \tan \alpha$.
- Câu 2:** Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:
- A. $\tan \frac{x}{2}$. B. $\cot x$. C. $\tan^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$. D. $\sin x$.
- Câu 3:** Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.
- A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$. C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$. D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.
- Câu 4:** Biểu thức $M = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin(307^\circ) \cdot \sin(113^\circ)$ có giá trị bằng:
- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- Câu 5:** Rút gọn biểu thức: $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ)$, ta được
- A. $\sin 2a$. B. $\cos 2a$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.
- Câu 6:** Giá trị của biểu thức $\cos \frac{37\pi}{12}$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

- Câu 7:** Rút gọn biểu thức: $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là
 A. 0. B. $-\cos x$. C. $-2\cos x$. D. $\sin x - \cos x$.
- Câu 8:** Khẳng định nào dưới đây sai?
 A. $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$. B. $\cos 2a = 2\cos a - 1$.
 C. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$. D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$.
- Câu 9:** Gọi $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$ thì:
 A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.
- Câu 10:** Giá trị đúng của $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ bằng
 A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.
- Câu 11:** Cho hai góc nhọn a và b . Biết $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$.
 Giá trị $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b)$ bằng
 A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.
- Câu 12:** Nếu biết $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b đều là các góc nhọn và dương thì $\sin(a - b)$ là:
 A. $\frac{20}{220}$. B. $-\frac{20}{220}$. C. $\frac{21}{221}$. D. $\frac{22}{221}$.
- Câu 13:** Nếu $\tan x = 0.5$; $\sin y = \frac{3}{5}$ ($0 < y < 90^\circ$) thì $\tan(x + y)$ bằng:
 A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.
- Câu 14:** Gọi $M = \tan x - \tan y$ thì:
 A. $M = \tan(x - y)$. B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.
 C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$. D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.
- Câu 15:** Gọi $M = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) - \sin(a + b) \cdot \sin(a - b)$ thì:
 A. $M = 1 - 2\cos^2 a$. B. $M = 1 - 2\sin^2 a$.
 C. $M = \cos 4a$. D. $M = \sin 4a$.
- Câu 16:** Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng
 A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{-3}{4}$

Câu 17: Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $P = 0$. B. $P = -1$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 18: Biểu thức $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\cos 2\alpha$. C. $\tan 2\alpha$. D. $\cot 2\alpha$.

Câu 19: Biểu thức $\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $-\tan^4 \alpha$. B. $\tan^4 \alpha$. C. $-\cot^4 \alpha$. D. $\cot^4 \alpha$.

Câu 20: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{12}$.

Câu 21: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ thì biểu thức $a \sin x + b \cos x$ bằng:

- A. a . B. b . C. $\frac{a+b}{a}$. D. $\frac{a+b}{b}$.

Câu 22: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{2 - 3\cos x}$ bằng.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 23: Biết $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$ thì biểu thức $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$ có giá trị bằng:

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. C. $-2\sqrt{2}$. D. $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Câu 24: Rút gọn biểu thức $P = \cos(120^\circ + x) + \cos(120^\circ - x) - \cos x$ ta được kết quả là:

- A. 0. B. $-\cos x$. C. $-2\cos x$. D. $\sin x - \cos x$.

Câu 25: Tích số $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$ bằng

- A. $\frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{3}{16}$. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 26: Cho biểu thức $A = \sin^2(a + b) - \sin^2 a - \sin^2 b$. Hãy chọn kết quả đúng

- A. $A = 2\cos a \cdot \sin b \cdot \sin(a + b)$. B. $A = 2\sin a \cdot \cos b \cdot \cos(a + b)$.
C. $A = 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a + b)$. D. $A = 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos(a + b)$.

Câu 27: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó.

- A. $\sin C = -\sin(A + B)$. B. $\cos C = \cos(A + B)$.
C. $\tan C = \tan(A + B)$. D. $\cot C = -\cot(A + B)$.

Câu 28: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó.

- A. $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$. B. $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos\frac{C}{2}$.
- C. $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$. D. $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Không dùng máy tính cầm tay. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\sin\frac{19\pi}{24}\cos\frac{37\pi}{24} = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$
- b) $\cos\frac{41\pi}{12} - \cos\frac{13\pi}{12} = \sqrt{2}$
- c) $\frac{\tan\frac{\pi}{7} + \tan\frac{3\pi}{28}}{1 + \tan\frac{6\pi}{7}\tan\frac{3\pi}{28}} = 2$.
- d) $\sin\frac{\pi}{9} - \sin\frac{5\pi}{9} + \sin\frac{7\pi}{9} = 0$

Câu 2: Cho $\cos\alpha = \frac{11}{61}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{60}{61}$
- b) $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{71}{49}$
- c) $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- d) $\tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = -\frac{4799}{2159}$

Câu 3: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin 4x$
- b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \cos 3x$;
- c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \cot 2x$
- d) $\frac{2\sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y = 1$.

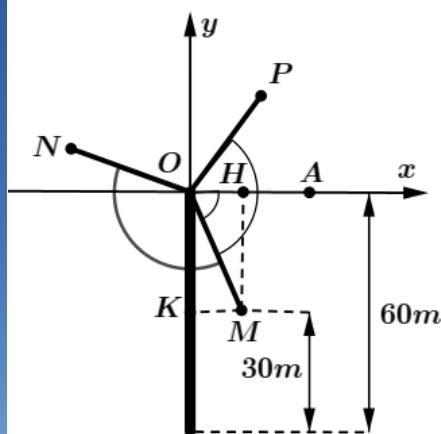
Câu 4: Trong hình vẽ dưới đây, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tuabin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số góc (OA, OM) là α . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

b) Giá trị sin của góc lượng giác (OA, ON) là một số âm

c) Chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.

d) Chiều cao của các điểm P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

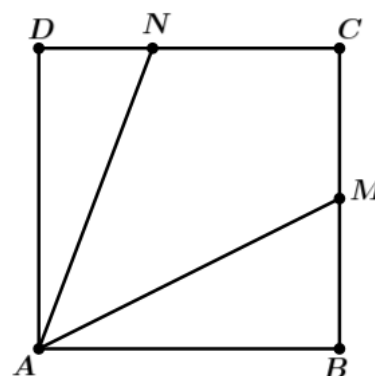
Câu 2: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \cos \beta = \frac{12}{13}$ và $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$. Biết $P = \sin(\alpha + \beta)$ và $Q = \cos(\alpha - \beta)$. Khi đó hãy tính giá trị của $P + Q$.

Câu 3: Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ cm là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

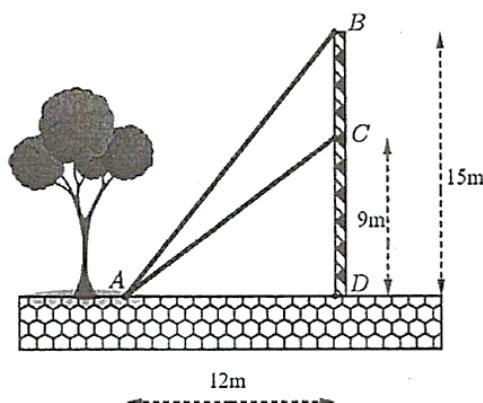
$$x_1(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) \text{ (cm)} \text{ và } x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) \text{ (cm)}$$

Tìm biên độ dao động tổng hợp trên.

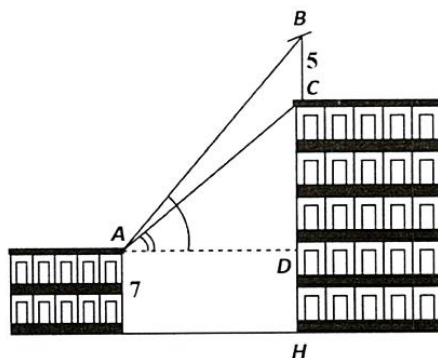
Câu 4: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$ bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN mà ở đó các điểm $M \in BC; N \in DC$ sao cho $BM = \frac{1}{2}BC, DN = \frac{1}{3}DC$. Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?



Câu 5: Từ một vị trí A , người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao $15m$, được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D . Biết $CD = 9m$ và $AD = 12m$. Tìm góc nhọn $\alpha = \angle BAC$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).



Câu 6: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăngten cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăngten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của tòa nhà là $18,9m$, hai tòa nhà cách nhau $10m$. Tính góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Câu 7: Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình: $x_1(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm); $x_2(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm). Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Câu 8: Hai sóng âm có phương trình lần lượt là $f_1(t) = C \sin \omega t$ và $f_2(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$. Hai sóng này giao thoa với nhau tạo nên một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha).$$

Khi $C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$. Hãy tìm biên độ của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho

$$f(t) = k \sin(\omega t + \varphi).$$

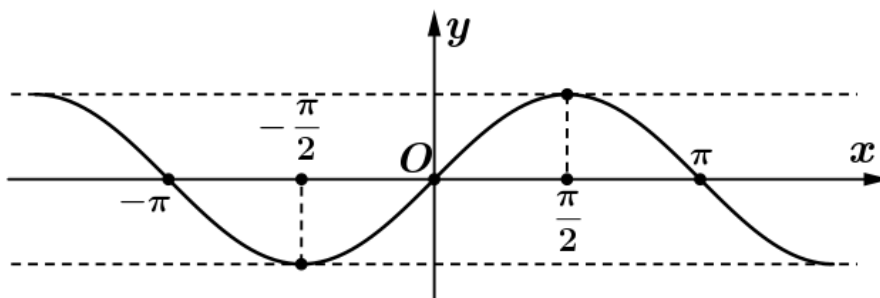
-----HẾT-----

BÀI 03

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ ĐỒ THỊ

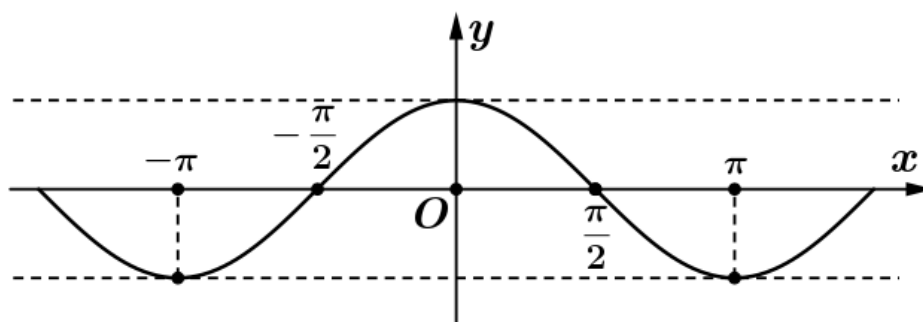
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hàm số $y = \sin x$



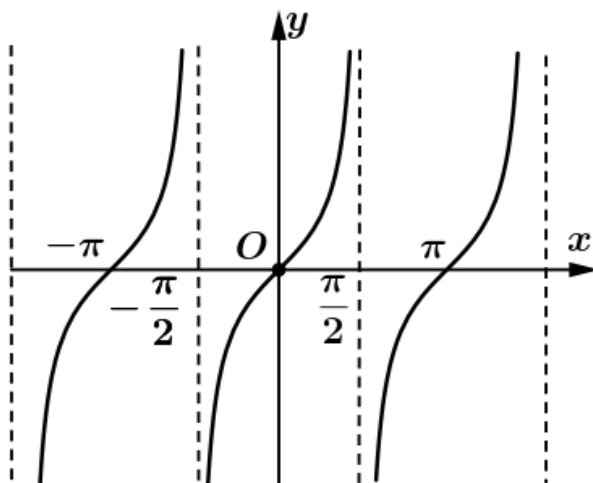
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị $[-1;1]$ tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

2 Hàm số $y = \cos x$



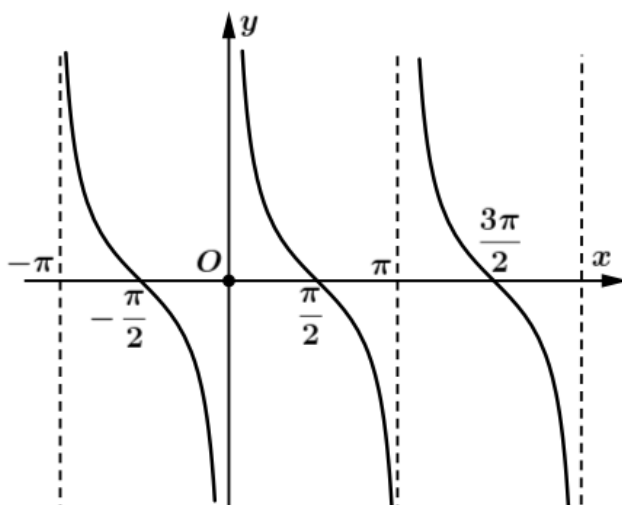
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị $[-1;1]$ tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

3 Hàm số $y = \tan x$



- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Tập giá trị: \mathbb{R} và đây là hàm số lẻ
- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

4 Hàm số $y = \cot x$



- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Tập giá trị: \mathbb{R} và đây là hàm số lẻ
- Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số lượng giác

Phương pháp: Cần chú ý một số điều kiện sau:

- $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định khi và chỉ khi $g(x) \neq 0$
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định khi và chỉ khi $f(x) \geq 0$ với $n \in \mathbb{N}^*$
- $\tan[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cot[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

- | | | |
|--|---|------------------------------------|
| a) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ | b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$ | c) $y = \tan x$ |
| d) $y = \cot x + \sin 5x + \cos x$ | e) $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ | f) $y = \cot x$ |
| g) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x - 1}$ | h) $y = \tan x + \cot x$ | i) $y = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$ |
| k) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ | l) $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$ | m) $y = \sqrt{2 - \sin x}$ |

Bài tập 2: Tìm tập giá trị của các hàm số sau đây:

- | | |
|--|--------------------------------|
| a) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ | b) $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$ |
|--|--------------------------------|

Bài tập 3: Tìm giá trị của tham số m để các hàm số sau đây xác định trên \mathbb{R}

- | | |
|------------------------------|---|
| a) $y = \sqrt{2m - 3\cos x}$ | b) $y = \sqrt{5 - m\sin x - (m + 1)\cos x}$ |
|------------------------------|---|

Bài tập 4: Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

- a) Tìm chu kì của sóng.
- b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x - 1}$.

- | | |
|--|---|
| A. $D = \mathbb{R}$. | B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. |
| C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. | D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. |

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2025}{\sin x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 3: Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là \mathbb{R} .

B. Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.

C. Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1;1]$.

D. Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $[0;\pi]$.

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

B. Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

C. Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

D. Các hàm số lượng giác có tập xác định là \mathbb{R} .

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

B. $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

C. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

D. $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 9: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$ là

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + h2\pi, k, h \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{2} + h\pi, k, h \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 11: Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin^2 x + 1}{1 + \cos x}$ là:

- A. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq \pi - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12: Hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1} + 1 - 3\cos^2 x$ xác định khi và chỉ khi:

- A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{3}{\sin 2x} + \frac{5}{\cos 2x}$. Điều kiện xác định hàm số là

- A. $x \neq k\pi$. B. $x \neq \frac{k\pi}{2}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{4}$. D. $x \neq k2\pi$.

Câu 15: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3\sin x}{\cos 2x - 1}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 16: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{2\cos x - 1} + \frac{2\cos x + 1}{2\sin x - 1}$

Câu 17: Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

- A. $x \neq k\pi$. B. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq k2\pi$.

Câu 18: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x - 1}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. D. $D = \mathbb{R}$.

Câu 19: Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là:

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x \neq k2\pi$. C. $x \neq k\pi$. D. $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3 + \sin x} - \frac{1}{\tan^2 x - 1}$ là:

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 21: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.

- A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. B. $x \neq k2\pi$. C. $x \neq k\pi$. D. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{\sin 2x - 2}{\cos 2x + 4}}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = [-1; 1]$. C. $D = \mathbb{R}$. D. $D = \emptyset$.

Câu 23: Tìm m để hàm số $y = \sqrt{3\sin x + 4\cos x + 2m - 1}$ xác định với mọi x

- A. $m > 0$. B. $m > 1$. C. $m \geq \frac{-1}{2}$. D. $m \geq 3$.

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{\sin^2 x - 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 25: Hàm số $y = \frac{\cot 2x}{1 - 2\cos 2x}$ xác định trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$. B. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$. C. $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. D. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 27: Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 28: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$ là:

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{ \pi + k2\pi \}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\tan x + 2025}{\sin^2 x + 1}$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. \mathbb{R} .

C. $\mathbb{R} \setminus \{ k\pi, k \in \mathbb{Z} \}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 30: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)}{1 + \tan x}$

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}; -\frac{\pi}{4} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = \tan 2x - 1$. Khi đó:

a) Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{8}$ bằng 0

b) Giá trị của hàm số tại $x = \frac{\pi}{3}$ bằng $-\sqrt{3} - 1$

c) Có ba giá trị x thuộc $[0; \pi]$ khi hàm số đạt giá trị bằng -2 .

d) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid (k \in \mathbb{Z}) \right\}$

Câu 2: Tìm được tập giá trị các hàm số sau trên tập xác định của chúng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = 3\sin x$ có tập giá trị là $T = [-3; 3]$.

b) Hàm số $y = 2\cos x - 1$ có tập giá trị là $T = [-3; 1]$.

c) Hàm số $y = 2030 - 4\cos x$ có tập giá trị là $T = [2026; 2034]$.

d) Hàm số $y = \sin^2 x + 4\sin x - 1$ có tập giá trị là $T = [-3; 3]$.

Câu 3: Tìm được tập xác định của các hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \tan x + \cot 2x$ xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

b) Hàm số $y = \sqrt{\pi - \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

c) Hàm số $y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

d) Hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

Câu 4: Tìm được tập xác định của các hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

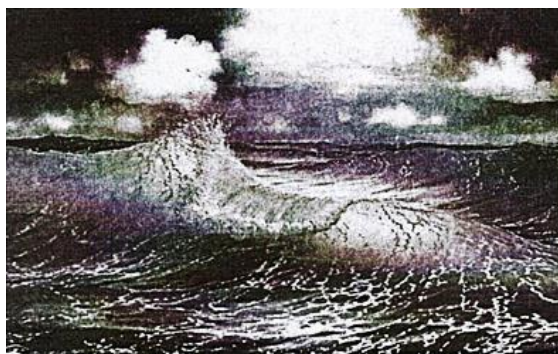
a) Hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định khi: $x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

b) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi: $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

d) Hàm số $y = \frac{\tan 3x}{\cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 5: Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi cơn sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.



a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 cm.

b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm

c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây

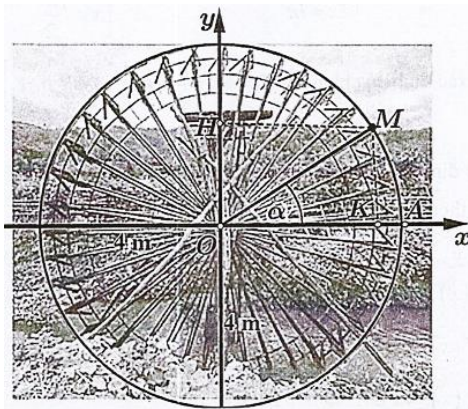
d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Hàm số $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Câu 2: Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

- Câu 3:** Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?
- Câu 4:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2\cos 4x$ xác định trên \mathbb{R} .
- Câu 5:** Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = a + 2b$?
- Câu 6:** Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 4a + b$
- Câu 7:** Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 3$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 2b$?
- Câu 8:** Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 10a - 2b$?
- Câu 9:** Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x + 4}$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 11(a + b)$?
- Câu 10:** Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (\overline{OA}, \overline{OM})$. Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ). Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



-----HẾT-----

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ và tuần hoàn của hàm số lượng giác

Phương pháp: Ta cần thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số - Tập D phải đối xứng
- **Bước 2:** Tính $f(-x)$ (chỗ nào có biến x , ta thay bởi $-x$) và thu gọn kết quả đó. Khi đó:
 - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì hàm số đã cho là hàm số chẵn
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì hàm số đã cho là hàm số lẻ
 - Nếu không rơi vào hai trường hợp trên thì ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ
- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:
 - $x + T \in D$ và $x - T \in D$
 - $f(x + T) = f(x)$

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

- | | | |
|--------------------------|--|--|
| a) $y = \sin 2x$ | b) $y = \tan x $ | c) $y = \sin^4 x$ |
| d) $y = \tan x + \cot x$ | e) $y = \sin x \cdot \cos x$ | f) $y = 2 \sin x + 3$ |
| g) $y = \sin x + \cos x$ | h) $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$ | i) $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$ |

Bài tập 2: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| a) $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ | b) $y = \frac{\sin 2x}{2 \cos x - 3}$ |
|---|---------------------------------------|

Bài tập 3: Xác định tham số m để hàm số $y = f(x) = 3m \cdot \sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Bài tập 4: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau:

- | | |
|-----------------------|------------------------|
| a) $f(x) = \sin(x^2)$ | b) $y = \tan \sqrt{x}$ |
|-----------------------|------------------------|

Bài tập 5: Tìm chu kỳ T của hàm số sau:

- | | |
|--|--|
| a) $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2}$ | b) $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ |
| c) $y = -\frac{1}{2} \sin(100\pi x + 50\pi)$ | d) $y = \cos 3x + \cos 5x$ |

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị của hàm số nào sau đây không đối xứng qua trục tung:

- | | |
|---------------------------|--|
| A. $y = 1 - \sin x$. | B. $y = 2 + \sin^2 x$. |
| C. $y = \sin(3 x - 1)$. | D. $y = \sin(1 + 2x) + \sin(1 - 2x)$. |

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \sin x$. B. $y = \sin x + \cos x$. C. $y = -\cos x$. D. $y = \cos x$.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \cos 3x$. B. $y = -\sin x$. C. $y = \sin 3x$. D. $y = \sin 2x + \cos 2x$.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = -\sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \cos x \sin x$. D. $y = \sin x$.

Câu 5: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

A. $y = \tan x - \sin 2x$. B. $y = \sin 2x$.
C. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. D. $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \frac{\tan x}{\sin x}$. B. $y = \frac{\cot x}{\cos x}$. C. $y = \cos x$. D. $y = \sin^2 x$.

Câu 7: Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin^2 x + x$ là hàm số lẻ.
- B. Hàm số $y = \sin x \cdot \cos x$ là hàm số lẻ.
- C. Hàm số $y = \cos x + \sin x$ là hàm số chẵn.
- D. Hàm số $y = \sin x + 1$ là hàm số lẻ.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

A. $y = \sin x$. B. $y = \cos x$. C. $y = \cot x$. D. $y = \tan x$.

Câu 9: Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

A. $y = \tan x$. B. $y = \cos(-x)$.
C. $y = \sin^2 x$. D. $y = \cot^2 x$.

Câu 10: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

A. $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x$. B. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
C. $y = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \sin(\pi + 2x)$. D. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 2x}$.

Câu 11: Cho các hàm số $y = \cos x$, $y = \sin x$, $y = \tan x$, $y = \cot x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số chẵn?

A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 12: Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

A. $y = x^2 \cdot \tan x$. B. $y = \cos 2x - x$. C. $y = \sqrt{x} \cos x$. D. $y = x \cdot \sin 2x$.

Câu 13: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

A. $T = \pi$. B. $T = 4\pi$. C. $T = 2\pi$. D. $T = 6\pi$

Câu 14: Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x$ là

A. π . B. 2π . C. $\frac{\pi}{2}$. D. 4π .

Câu 15: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
- B. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- C. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
- D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Câu 16: Trong các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ có bao nhiêu hàm số có chu kỳ là 2π ?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.

Câu 17: Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

- A. $T = \pi$.
- B. $T = \frac{\pi}{2}$.
- C. $T = 4\pi$.
- D. $T = 2\pi$.

Câu 18: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2025\right)$.

- A. $T = \pi$.
- B. $T = -2\pi$.
- C. $T = 4\pi$.
- D. $T = 2\pi$.

Câu 19: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- B. $\frac{\pi}{2}$.
- C. π .
- D. 2π .

Câu 20: Hàm số $y = \sin 2x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ có chu kỳ là:

- A. 3π .
- B. 2π .
- C. $\frac{\pi}{6}$.
- D. 6π .

Câu 21: Hàm số $y = \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ bằng

- A. 4π .
- B. 3π .
- C. 2π .
- D. 6π .

Câu 22: Chu kỳ của hàm số $y = 3\tan(mx + n)$ với m, n là những số nguyên dương là

- A. $\frac{\pi}{m}$.
- B. $\frac{\pi}{c}$, c là bội chung nhỏ nhất của m, n .
- C. $\frac{\pi}{m.n}$.
- D. $\frac{\pi}{d}$, d là ước chung lớn nhất của m, n .

Câu 23: Chu kỳ của hàm số $y = 3 + 2\sin^2 2x$ là:

- A. $\frac{\pi}{2}$.
- B. $\frac{\pi}{4}$.
- C. π .
- D. 2π .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = \cos x$ xác định với mọi số thực
- b) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
- c) Hàm số $y = \sin(x^2)$ là hàm số lẻ.

d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\sin x + 2$ bằng 2

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$

b) $f(-\pi) = -f(\pi)$

c) $f(-x) = f(x)$

d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \tan x - x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

c) $f(-x) = -f(x)$

d) Hàm số đối xứng với nhau qua trục Oy

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = |x|\sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

b) $f(-\pi) = -f(\pi)$

c) $f(-x) = -f(x)$

d) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = |\tan x| + |x^3 - 3x|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) $f(-\pi) = -f(\pi)$

c) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = 2\cos x + 1$ và $g(x) = \sin x + \tan x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) Hàm số $g(x)$ là hàm không tuần hoàn.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x) = \cot^2 x - \frac{\sin 2x}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Hàm số $f(x)$ là hàm không tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g(x): D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Hàm số $g(x)$ là hàm tuần hoàn.

Câu 8: Cho các hàm số $f(x) = \sqrt{3 - 2\sin x}$; và $g(x) = \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Hàm số $g(x)$ xác định khi $x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm không tuần hoàn.

Câu 9: Cho các hàm số sau: $f(x) = \sqrt{5 - 3\sin^2 x}$; $g(x) = \tan x - x \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Câu 10: Cho các hàm số sau: $f(x) = 2\cos 3x - 1$; $g(x) = |2\sin x + 2| + |2\sin x - 2|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Câu 11: Cho các hàm số sau: $f(x) = 3\sin^3 x$; $g(x) = -5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm chu kì T của hàm số $y = -\frac{1}{2} \sin(100\pi x + 50\pi)$.

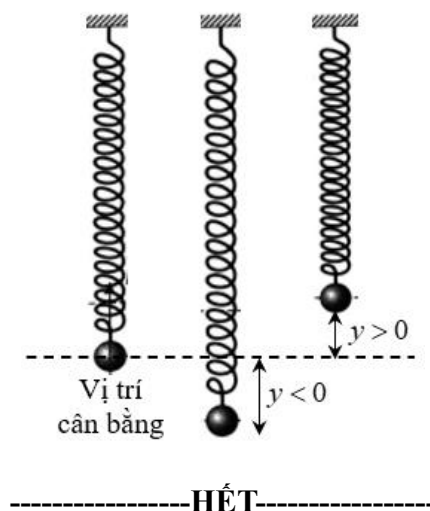
Câu 2: Tìm chu kì T của hàm số $y = 3\cos(2x + 1) - 2\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$.

Câu 3: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Câu 4: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\sin^2 x + 3\cos^2 3x$.

Câu 5: Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây. Tìm chiều cao (đơn vị:cm) của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Câu 6: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây. Gọi a là chu kì dao động của con lắc lò xo; b (Hz) là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và c (cm) là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính $a + b + c$



Dạng 3: Max – min của hàm số lượng giác

Phương pháp: Ta thường sử dụng ba cách làm sau đây

- Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản:
 - $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 - $0 \leq \sin^2 x \cdot \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 - $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 - $0 \leq |\sin x| \cdot |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Sử dụng điều kiện có nghiệm
 - $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$
 - $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$
 - $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$
- Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số từ đó đưa ra kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau đây:

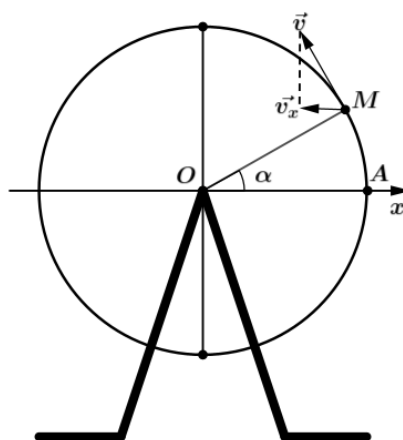
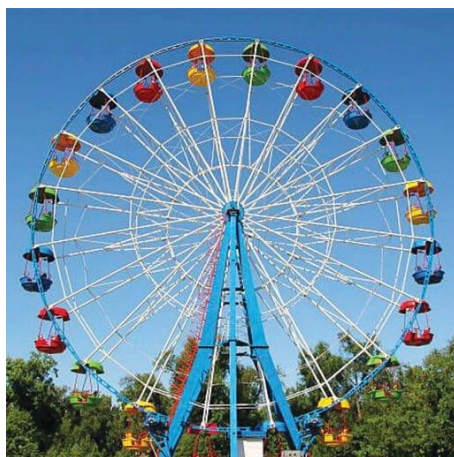
- | | |
|--|-------------------------------------|
| a) $y = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$ | b) $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$ |
| c) $y = \sin x + \cos x$ | d) $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$ |
| e) $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$ | f) $y = \sin^4 x - 2\cos^2 x + 1$ |

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

- | | |
|---|---|
| a) $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$ | b) $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$ |
|---|---|

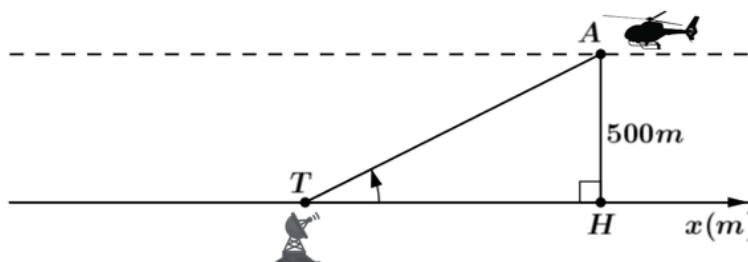
Bài tập 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{m \sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn 2.

Bài tập 4: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (\text{Ox}, \text{OM})$ theo hàm số $v_x = 0,3\sin\alpha$ (m/s).



- a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .
- b) Dựa vào đồ thị của hàm số \sin , hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

Bài tập 5: Trong hình dưới đây, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H và α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số lần lượt là
 A. 7;1. B. 1;-4. C. $y = 3\sin 3x - 4$ 3;-4. D. -1;-7.
- Câu 2:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3\sin 2x - 5$ lần lượt là:
 A. -8 và -2 B. 2 và 8. C. -5 và 2. D. -5 và 3.
- Câu 3:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4\sin x - 3$ là
 A. -7. B. -3. C. 1. D. 3.
- Câu 4:** Giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là
 A. 5. B. 2. C. 1. D. -1.
- Câu 5:** Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Tính $P = M - m$.
 A. $P = 2\sqrt{2}$. B. $P = 4$. C. $P = \sqrt{2}$. D. $P = 2$.
- Câu 6:** Biết hàm số $y = 4\sin x - 3\cos x + 2$ đạt giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Tổng $M + m$ là
 A. 4. B. 1. C. 2. D. 0.
- Câu 7:** Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 3$ là
 A. $M = 1$ và $m = -5$. B. $M = 1$ và $m = -7$.
 C. $M = -1$ và $m = -6$. D. $M = -1$ và $m = -5$.
- Câu 8:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x + 2020$ là:
 A. 2024. B. 2018. C. 2022. D. 2016.
- Câu 9:** Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ trên $\left[\frac{-2\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ là
 A. 1 và -1. B. 1 và $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$ và 1. D. $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$.

- Câu 10:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là
 A. -2 và 2 . B. 5 và 9 . C. -2 và 7 . D. 4 và 7 .
- Câu 11:** Hàm số $y = -2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 5$ đạt giá trị lớn nhất tại
 A. $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- Câu 12:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sqrt{3}\cos x + 1$ là
 A. 3 . B. 4 . C. -1 . D. -2 .
- Câu 13:** Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^2 x + 2\cos x + 4$.
 A. 5 . B. 6 . C. $\frac{\pi}{8}$. D. $-\frac{\pi}{4}$.
- Câu 14:** Hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ khi x bằng:
 A. $\frac{\pi}{4}$. B. 0 . C. $\frac{\pi}{8}$. D. $-\frac{\pi}{4}$.
- Câu 15:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 2$
 A. -20 . B. 0 . C. 9 . D. -1 .
- Câu 16:** Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là
 A. -2 và 7 . B. 5 và 9 . C. 4 và 7 . D. -2 và 2 .
- Câu 17:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x + 2\cos x - 3$ là:
 A. $\sqrt{5} + 3$. B. $\sqrt{5}$. C. 0 D. $\sqrt{5} - 3$.
- Câu 18:** Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\cos x}{\cos x + 3}$ bằng
 A. -6 . B. -1 . C. -3 . D. $-\frac{1}{2}$.
- Câu 19:** Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin 3x$ bằng
 A. -6 . B. -1 . C. -3 . D. -2 .
- Câu 20:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là:
 A. -5 . B. 1 . C. 5 . D. -1 .
- Câu 21:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$ là
 A. $\sqrt{2}$. B. 2 . C. 0 . D. 1 .
- Câu 22:** Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2018$ bằng
 A. 2019 . B. 2021 . C. 2020 . D. 2022 .

Câu 23: Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin x + 3\cos x - 2$.

- A. -2 . B. 2 . C. 3 D. -4 .

Câu 24: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x$ là

- A. $0,2$. B. $0,25$. C. $0,16$. D. $0,125$.

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2}\cos^2 x} + \frac{1}{2}\sqrt{5 + 2\sin^2 x}$

- A. $M = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{2}$. B. $M = \frac{\sqrt{22}}{2}$. C. $M = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $M = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2 + 3\cos x$ và $g(x) = \sin x + \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5
 b) Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
 c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $-\sqrt{2}$
 d) Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$ và $g(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\sqrt{3}$
 b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1
 c) Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng 4
 d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ bằng 0

Câu 3: Cho hàm số $y = 3 - \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
 b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2
 c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4
 d) Tập giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = \cos 2x + \cos x$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- a) Tập xác định của hàm số trên là \mathbb{R} .
 b) Hàm số trên là hàm số chẵn.
 c) Đặt $t = \cos x$ thì hàm số trở thành $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$.
 d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0.

Câu 5: Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- a) Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.

b) Tập xác định của hàm số $y = \frac{2 \cos x}{\sin^2 x - 1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2 \sin x + 3}$ là $\sqrt{5}$.

d) Cho hàm số $h(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m \sin x \cos x}$. Để hàm số đã cho xác định với giá trị $x \in \mathbb{R}$ thì $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \cos x - \sin x$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.
- c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $\min_{\mathbb{R}} y = -2$.
- d) Phương trình $y + 1 = 0$ có tất cả 4 nghiệm trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$.

Câu 7: Cho hàm số $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- a) Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 12\pi$.
- c) Hàm số là hàm số lẻ.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số là 13.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \sin 3x - \cos 3x + m$ có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$.

Câu 2: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x + m$ bằng 10

Câu 3: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x$ đạt được bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a + b$ bằng bao nhiêu?

Câu 4: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$, $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Câu 5: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin\left[\frac{\pi}{182}(t - 80)\right] + 12$, $t \in \mathbb{Z}$, $0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi t bằng bao nhiêu?

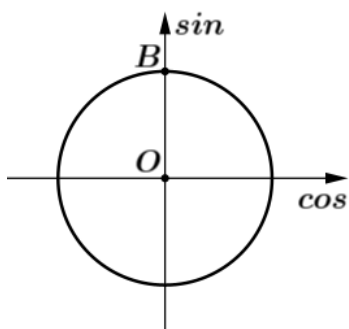
-----HẾT-----

BÀI 04 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

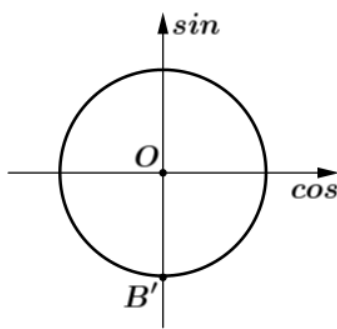
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phương trình $\sin x = a$

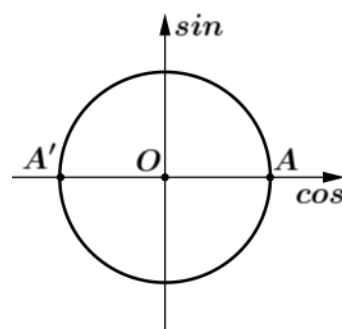
- Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

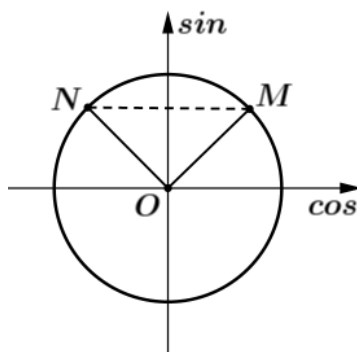


$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

- Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy `SHIFT` `sin` `[a]` để đổi số a về góc α hoặc β°



- Công thức theo đơn vị rad: $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

- Công thức theo đơn vị độ: $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

- Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên:

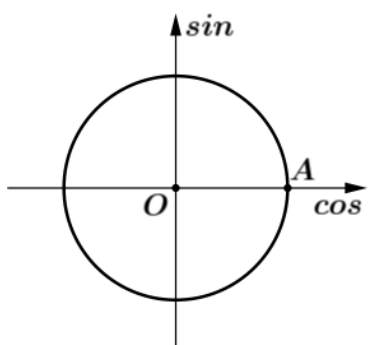
$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

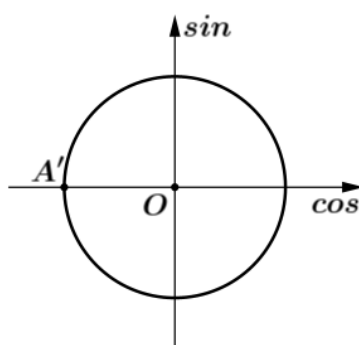
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2 Phương trình $\cos x = a$

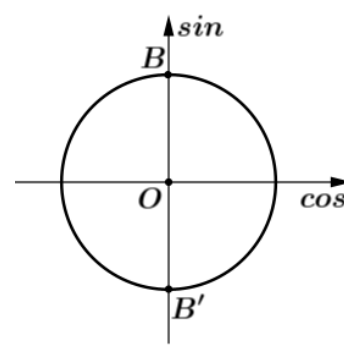
- Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$

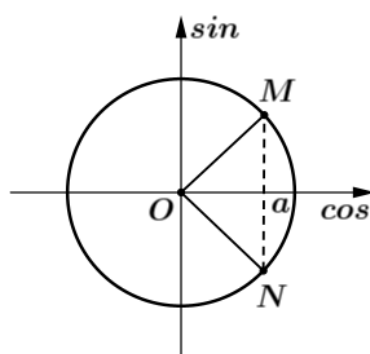


$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

- Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy $\boxed{SHIFT} \boxed{\cos} \boxed{a}$ để đổi số a về góc α hoặc β°



- Công thức theo đơn vị rad: $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

- Công thức theo đơn vị độ: $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

- Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên:

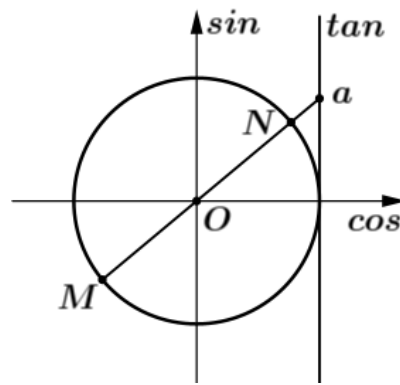
$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3 Phương trình $\tan x = a$

- Trường hợp $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy $\boxed{SHIFT} \boxed{\tan} \boxed{a}$ để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng:



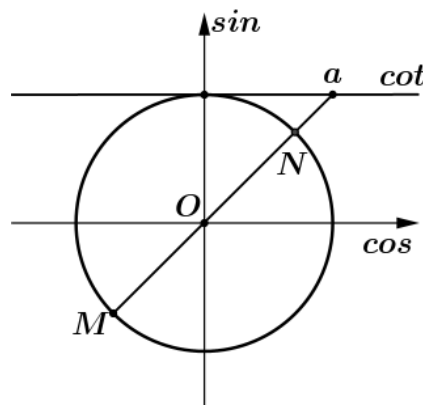
- Công thức theo đơn vị rad : $\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Công thức theo đơn vị độ: $\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

- Trường hợp a khác các số ở trên:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

4 Phương trình $\cot x = a$

- Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy `SHIFT` `tan` `1/a` để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng:



- Công thức theo đơn vị rad : $\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Công thức theo đơn vị độ: $\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

- Trường hợp a khác các số ở trên:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Giải các phương trình lượng giác cơ bản

Phương pháp: Cần chú ý một số điều kiện sau:

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số "a" quy về góc đẹp hay xấu.
- Chọn và lắp vào công thức nghiệm

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2\cos x = -\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1$

d) $\cot(2x - 1) = \cot\frac{\pi}{5}$

e) $\sin 2x + \cos 4x = 0$

f) $\cos 3x = -\cos 7x$

Bài tập 2: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

e) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1$

Bài tập 3: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cot 4x = \cot\frac{2\pi}{7}$

b) $\cot 3x = -2;$

c) $\cot(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Bài tập 4: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = 0$ với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

b) $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập 5: Tìm m để phương trình $\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài tập 6: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Ở đây thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Bài tập 7: Một quả đạn pháo được bắn khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ (m/s) hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được

bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó

$g = 9,8$ (m/s²) là gia tốc trọng trường.

Câu 9: Giải phương trình $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$.

A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 10: Nghiệm của phương trình $\tan x - 1 = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

B. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.

C. $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi$.

D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 11: Chọn khẳng định sai.

A. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 12: Tập nghiệm của phương trình $\sin x = 2 \cos x$ là

A. $\{\arctan 2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

B. \emptyset .

C. $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $\{\tan 2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 13: Nghiệm của phương trình $\cot 2x = -\sqrt{3}$ là

A. $x = \operatorname{arccot}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 14: Tìm nghiệm của phương trình $\cot x = \sqrt{3}$.

A. $x = 60^\circ + k.180^\circ$.

B. $x = 60^\circ + k.360^\circ$.

C. $x = 30^\circ + k.180^\circ$.

D. $x = -60^\circ + k.180^\circ$.

Câu 15: Phương trình $3 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có họ nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. vô nghiệm.

Câu 16: Nghiệm của phương trình $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 17: Hỏi trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Câu 18: Số nghiệm của phương trình $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ là:

- A. 5. B. 3. C. 4. D. 2.

Câu 19: Tập nghiệm của phương trình $2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$ là:

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k4\pi; \frac{5\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k4\pi; \frac{\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 20: Phương trình $\sin 2x = \frac{-1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thoả mãn $0 < x < \pi$.

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 21: Số nghiệm của phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trong khoảng $(0; 3\pi)$ là

- A. 4. B. 1. C. 6. D. 2.

Câu 22: Tập nghiệm của phương trình $2\sin 2x = \sqrt{2}$ là:

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k2\pi; \frac{3\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 23: Nghiệm của phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 24: Số nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{2}{5}$ trên khoảng $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ là:

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 25: Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $5\cos x - 2 = 0$ là

- A. $S = 3\pi$. B. $S = 2\pi$. C. $S = 0$. D. $S = 4\pi$.

Câu 26: Tính tổng S tất cả các nghiệm trên khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình $2\cos 3x = 1$

- A. $S = \frac{121\pi}{9}$. B. $S = \frac{120\pi}{9}$. C. $S = \frac{122\pi}{9}$. D. $S = \frac{20\pi}{3}$.

Câu 27: Phương trình $\cos 3x = \cos \frac{\pi}{15}$ có nghiệm là:

A. $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$. C. $x = \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$. D. $x = \frac{-\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$.

Câu 28: Tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A. $\frac{\pi}{12}$. B. $\frac{-2\pi}{3}$. C. $\frac{\pi}{4}$. D. $\frac{-3\pi}{4}$

Câu 29: Cho phương trình $\sqrt{3} \tan 2x = 3$ có nghiệm x_0 khi đó $\cos x_0$ nhận giá trị là

A. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$. B. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2}$. C. $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\pm \frac{1}{2}$.

Câu 30: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 2x = \tan x$ trên $[-\pi; 2\pi]$ là

A. π . B. $\frac{\pi}{2}$. C. 4π . D. 2π .

Câu 31: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; \pi)$ bằng

A. π . B. $\frac{5\pi}{2}$. C. $\frac{3\pi}{2}$. D. 2π .

Câu 32: Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là :

A. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 33: Nghiệm của phương trình $\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 34: Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ là:

A. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 35: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ thuộc khoảng

A. $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$. B. $(0; \pi)$. C. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. D. $(\pi; 3\pi)$

Câu 36: Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ là:

A. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho phương trình lượng giác $\sin 2x = -\frac{1}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình đã cho tương đương $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$
- b) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 3 nghiệm
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{3\pi}{2}$
- d) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$

Câu 2: Cho phương trình lượng giác $\tan(2x - 15^\circ) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình đã cho có nghiệm $x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$
- b) Trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ thì phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng -30°
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ bằng 180°
- d) Trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng 60°

Câu 3: Cho phương trình lượng giác $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình đã cho tương đương $\cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{6}\right)$
- b) Phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ bằng $\frac{-5\pi}{9}$
- d) Trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{9}$

Câu 4: Cho phương trình lượng giác $2\cos x = \sqrt{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình có nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- b) Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\frac{25\pi}{6}$
- d) Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$

Câu 5: Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

b) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{7\pi}{6}$

d) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{5\pi}{6}$

Câu 6: Cho phương trình lượng giác $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{2\pi}{9}$

c) Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có 3 nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng $\frac{7\pi}{9}$

Câu 7: Cho phương trình lượng giác $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$

c) Khi $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(\frac{-\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng $\frac{\pi}{6}$

Câu 8: Cho phương trình lượng giác $\sin x = -\frac{1}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho tương đương $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) Phương trình đã cho có nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình đã cho có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là ba nghiệm

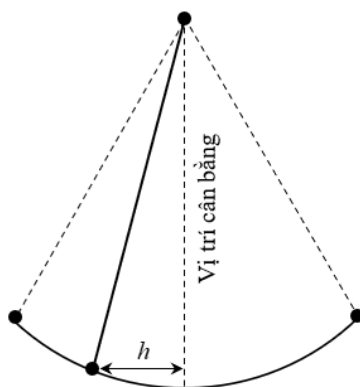
Câu 9: Cho phương trình lượng giác $2\sin x = \sqrt{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho tương đương $\sin x = \sin\frac{\pi}{4}$

b) Phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

- c) Phương trình đã cho có nghiệm dương nhỏ nhất bằng $\frac{\pi}{4}$
- d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm

Câu 10: Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

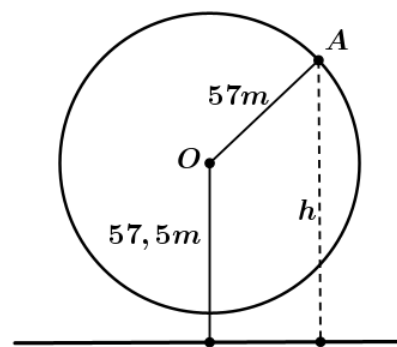


- a) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là $h = 1,5 m$.
- b) Trong 10 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất
- c) Khi vật ở vị trí cân bằng thì $\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$
- d) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng 4 lần?

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

- Câu 1:** Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\sin(2x) + 2 = m$ có nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?
- Câu 2:** Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $3\sin^2 x = 2m - 1$ có nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $2a + b$ bằng bao nhiêu?
- Câu 3:** Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $[1; 2021]$.
- Câu 4:** Phương trình $\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 2021\pi]$?
- Câu 5:** Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h (m) từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức:

$$h(t) = 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$$
 với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$). Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất?





Câu 6: Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

-----HẾT-----



Dạng 2: Giải các phương trình lượng giác mở rộng

Phương pháp: Cần chú ý một số điều đặc biệt sau đây

- Biến đổi về một trong các công thức sau:
 - $\sin u = \sin v$
 - $\cos u = \cos v$
 - $\tan u = \tan v$
 - $\cot u = \cot v$
- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:
 - $-\sin x = \sin(-x)$
 - $-\cos x = \cos(\pi - x)$
 - $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
 - $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $2\cos 3x + 1 = 0$ | b) $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$ |
| c) $\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0$ | d) $4\sin^2 x + \cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$ |
| e) $\cos 2x - \sin 2x = 1$ | f) $\sin 4x + \cos 5x = 0$ |

Bài tập 2: Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|--|---|
| a) $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ | b) $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$ |
| c) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$ | d) $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$ |

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Họ nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$ là

- | | |
|---|---|
| <p>A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$</p> <p>C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$</p> | <p>B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$</p> <p>D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$</p> |
|---|---|

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{5\pi}{3}$ là

- | | |
|--|--|
| <p>A. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$</p> <p>C. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-5\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$</p> | <p>B. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{7\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$</p> <p>D. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k\pi; \frac{-2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$</p> |
|--|--|

Câu 3: Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 4: Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$ là

- A. 20° . B. 100° . C. 80° . D. 120° .

Câu 5: Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.

- A. $\frac{47\pi}{18}$. B. $\frac{4\pi}{18}$. C. $\frac{45\pi}{18}$. D. $\frac{7\pi}{18}$.

Câu 6: Số nghiệm phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là

- A. 7. B. 6. C. 4. D. 5.

Câu 7: Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 8: Tập nghiệm của phương trình $\sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right)$ là:

- A. $\left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ \frac{1}{12} + k, k \in \mathbb{Z} \right\}$. C. $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 9: Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình trên.

- A. $\frac{7\pi}{2}$. B. π . C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 10: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos 2x) = 0$ trên $[0; 2\pi]$.

- A. 2. B. 1. C. 4. D. 3.

Câu 11: Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ có tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ bằng

- A. $\frac{7\pi}{2}$. B. π . C. $\frac{3\pi}{2}$. D. $\frac{\pi}{4}$.

Câu 12: Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

- A. 20179. B. 20181. C. 16144. D. 16145.

Câu 13: Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.

- A. $\frac{47\pi}{18}$. B. $\frac{4\pi}{18}$. C. $\frac{45\pi}{18}$. D. $\frac{7\pi}{18}$.

Câu 14: Phương trình $8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos 2x = 0$. C. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 15: Tập nghiệm của phương trình $(1 - \sqrt{2}\cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0$ là

- A. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 16: Giải phương trình $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

- A. $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $S = \left\{k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $S = \left\{k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 17: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

- A. $-\frac{35}{36}\pi$. B. $-\frac{11}{36}\pi$. C. $-\frac{11\pi}{12}$. D. $-\frac{\pi}{12}$.

Câu 18: Số nghiệm của phương trình $\tan 3x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; 2\pi)$ bằng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 19: Giải phương trình $\left(2\cos\frac{x}{2} - 1\right)\left(\sin\frac{x}{2} + 2\right) = 0$

- A. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$
 C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Câu 20: Phương trình $8.\cos 2x.\sin 2x.\cos 4x = -\sqrt{2}$ có nghiệm là

- A. $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$. D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 21: Phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Câu 22: Giải phương trình $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

- A. $S = \{k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. B. $S = \left\{k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $S = \left\{k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

Câu 23: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

- A. $-\frac{35}{36}\pi$. B. $-\frac{11}{36}\pi$. C. $-\frac{11\pi}{12}$. D. $-\frac{\pi}{12}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$
 b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$
 c) Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm
 d) Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$.

Câu 2: Cho phương trình lượng giác $2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình tương đương $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$
 b) Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{4}$
 d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm

Câu 3: Cho phương trình lượng giác $\sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x) = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình tương đương với $\sin(45^\circ - 2x) = \sin 45^\circ$
 b) Đồ thị hàm số $y = \sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x)$ cắt trục hoành tại điểm gốc tọa độ
 c) Phương trình có nghiệm là: $x = -k180^\circ; x = -45^\circ - k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.
 d) Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có một nghiệm

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn**

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S .

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - m + 5 = 0$ có nghiệm?

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $\cos 2x + 3\cos x + 1 = 0$ trong khoảng $(0; 2021)$ là bao nhiêu?

Câu 4: Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\cos 2x - 4\sin x + m = 0$ có nghiệm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Câu 5: Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

Câu 6: Cho phương trình $\cos 2x - \sin x + m - 1 = 0$ với m là tham số. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

-----**HẾT**-----

Dạng 3: Các dạng toán thực tế

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$$p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$$

Trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

a) Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Câu 2: Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

Câu 3: Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

a) Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.

b) Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

c) Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

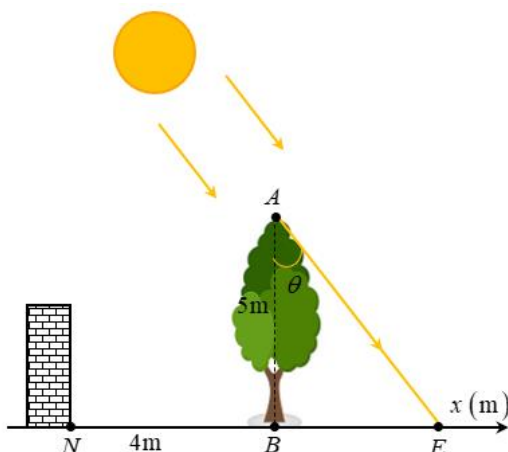
Câu 4: Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8\cos 0,5t + 4$.

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể đi chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Câu 5: Trong hình minh hoạ dưới đây, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_x = (AB, AE)$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt

Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức: $\theta_s(t) = \frac{\pi}{12}(t-12)$ rad, với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).



- a) Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t .
- b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với tọa độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Câu 6: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365$$

- a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
- b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
- c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

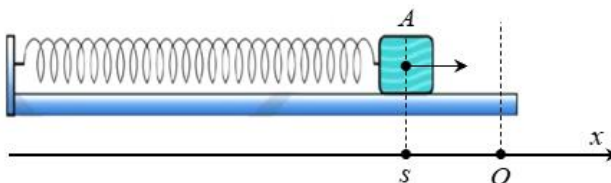
Câu 7: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được

biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m?

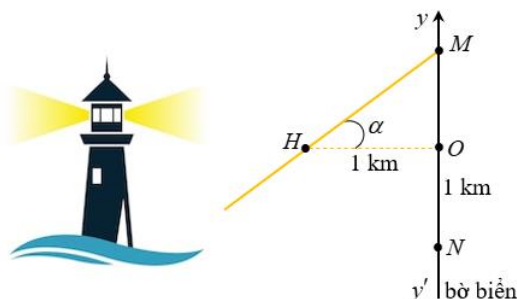


Hình 39

Câu 8: Trong hình minh hoạ dưới đây, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm?



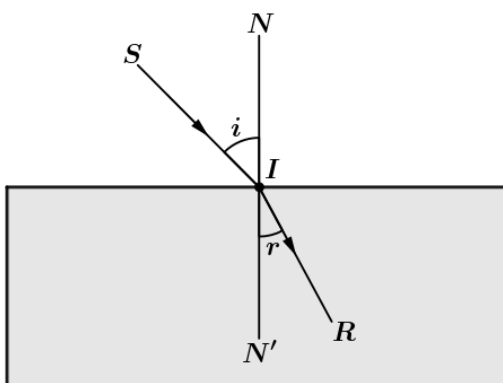
Câu 9: Trong hình minh hoạ dưới đây, một ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.



a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị toạ độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .

b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với toạ độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Câu 10: Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30° . Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Câu 11: Một quả bóng được ném xiên một góc $\alpha (0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ)$ từ mặt đất với tốc độ v_0 (m/s). Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

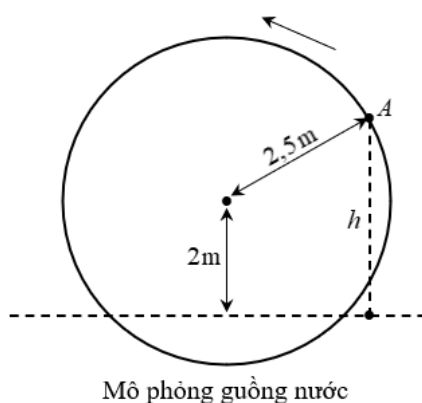
- a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu 10 m/s và góc ném là 30° so với phương ngang.
- b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là 10 m/s thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là 5 m?

Câu 12: Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20\sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

- a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?
- b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

Câu 13: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gàu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$ với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gàu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gàu ở dưới mặt nước.

- a) Khi nào chiếc gàu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?
- b) Chiếc gàu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?



Câu 14: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số

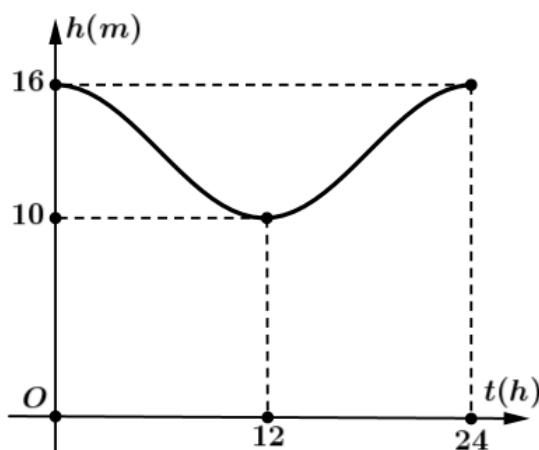
$$L(t) = 12 + 2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right), (t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365).$$

- a) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Câu 15: Mực nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở hình dưới đây mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước h (m) theo thời gian t (h) ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức $h = m + a \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a .

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là 11,5 m.



Câu 16: Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12.$$

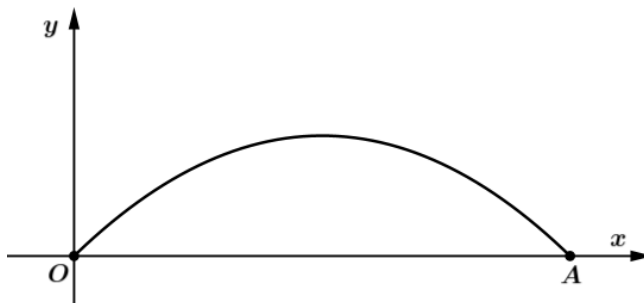
Tìm t để độ sâu của mực nước là

a) 15 m

b) 9 m

c) 10,5 m

Câu 17: Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình dưới đây:



a) Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA . Tìm chiều rộng đó (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

b) Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 13,1m.



c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là 9m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 4,3m

Câu 18: Vận tốc v_1 (cm / s) của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc v_2 (cm / s) của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

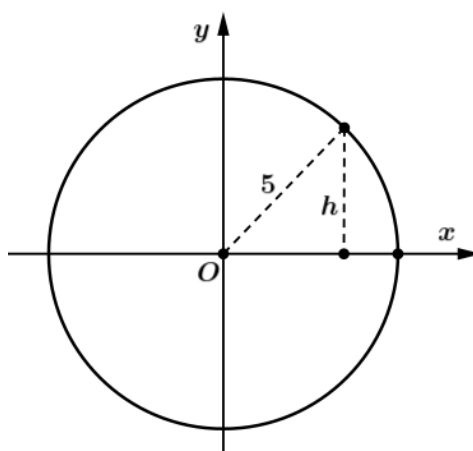
$$v_1(t) = -4\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ và } v_2(t) = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- a) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 cm / s ;
- b) Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

Câu 19: Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính 5 cm . Khoảng cách h (cm) từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây ($t \geq 0$) và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16) .

- a) Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?
- b) Tìm giá trị của a .
- c) Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h = 2,5$ cm và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.



Câu 20: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng



ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120 / 80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số

$$P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$$

ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thủy ngân) và

thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 $mmHg$.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 $mmHg$.

Câu 21: Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , chọn điểm có tọa độ $(O; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y = \frac{-g.x^2}{2.v_0^2.\cos^2 \alpha} + \tan \alpha.x + y_0; \text{ trong đó:}$$

g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8m/s^2$)

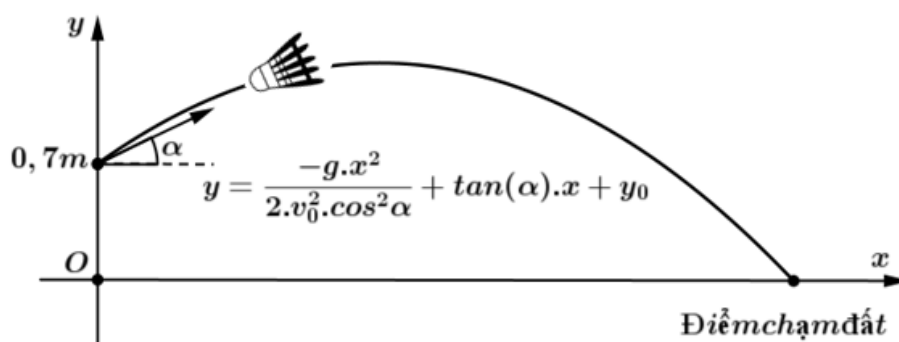
α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất)

v_0 là vận tốc ban đầu của cầu

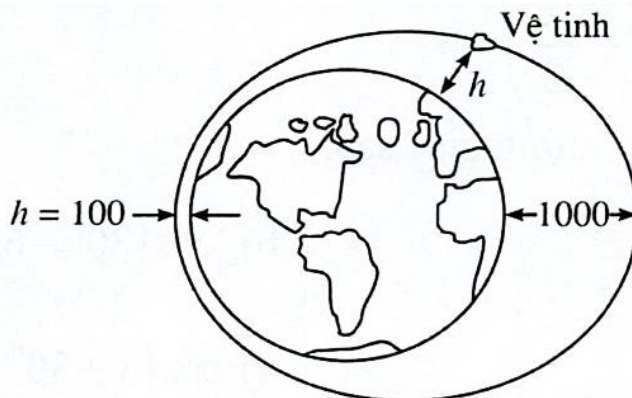
y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.

Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là 6,68 m. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? (biết cầu rời mặt vợt ở độ cao 0,7 m so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là 8 m/s, bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



Câu 22: Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):





Độ cao h (tính bằng kilômet) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo.

Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó?

-----HẾT-----

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

BÀI 01 GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC LƯỢNG GIÁC

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Góc lượng giác

- **Khái niệm góc lượng giác và số đo của góc lượng giác:**

Trong mặt phẳng cho hai tia Ou, Ov . Xét tia Om cùng nằm trong mặt phẳng này. Nếu tia Om quay điểm O theo một chiều nhất định từ Ou đến Ov thì ta nói nó quét một góc lượng giác với tia đầu Ou tia cuối Ov và kí hiệu là (Ou, Ov) .

- **Hệ thức Chasles:** Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì thì ta có:

$$sd(Ou, Ov) + sd(Ov, Ow) = sd(Ou, Ow) + k.360^0 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Từ đó ta có thể suy ra: $sd(Ou, Ov) = sd(Ou, Ow) - sd(Ov, Ow) + k.360^0 \quad (k \in \mathbb{Z})$

2 Đơn vị đo góc và độ dài cung tròn

- **Đơn vị đo góc và cung tròn:**

Đơn vị độ:

Đơn vị radian: Cho đường tròn tâm (O) bán kính R và một cung AB trên (O) . Ta nói cung AB có số đo bằng 1 radian nếu độ dài của nó đúng bằng bán kính R . Khi đó ta cũng nói rằng góc \widehat{AOB} có số đo bằng 1 radian và viết $\widehat{AOB} = 1$ radian.

- **Quan hệ giữa độ và radian:**

$$1^0 = \frac{\pi}{180} \text{ rad và } 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

- **Độ dài của một cung tròn:**

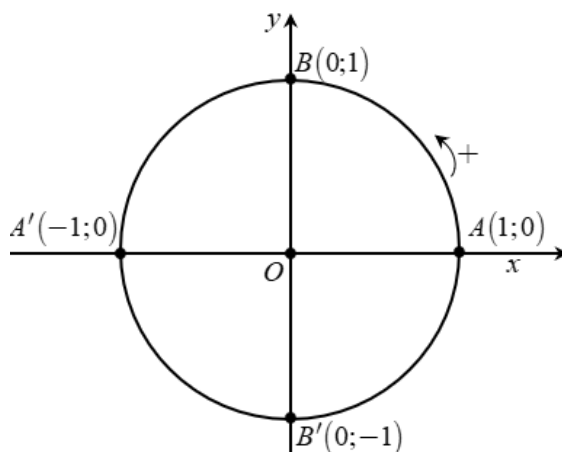
Một cung của đường tròn bán kính R có số đo α rad thì có độ dài là $l = R\alpha$.

3 Giá trị lượng giác của một góc lượng giác

- **Đường tròn lượng giác:**

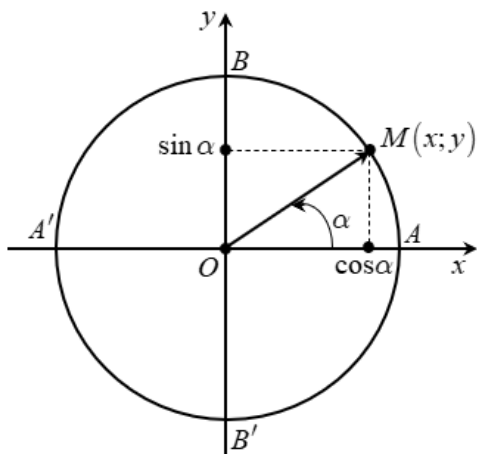
Đường tròn lượng giác là đường tròn có tâm tại gốc tọa độ, bán kính bằng 1 được định hướng và lấy điểm $A(1;0)$ làm gốc của đường tròn.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm $A(1;0)$, $A'(-1;0)$, $B(0;1)$, $B'(0;-1)$.



Điểm trên đường tròn lượng giác biểu diễn góc lượng giác có số đo α là điểm M trên đường tròn lượng giác sao cho $sd(OA; OM) = \alpha$.

• **Giá trị lượng giác của góc lượng giác:**



Giả sử $M(x; y)$ là điểm trên đường tròn lượng giác, biểu diễn góc lượng giác có số đo α

- Hoành độ của điểm M gọi là cosin của α và kí hiệu là $\cos \alpha$ và khi đó $\cos \alpha = x$.
- Tung độ của điểm M gọi là sin của α và kí hiệu là $\sin \alpha$ và khi đó $\sin \alpha = y$.
- Nếu $\cos \alpha \neq 0$ thì tỷ số $\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ gọi là tang của α và kí hiệu là $\tan \alpha$ và $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$.
- Nếu $\sin \alpha \neq 0$ thì tỷ số $\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$ gọi là côtang của α và kí hiệu là $\cot \alpha$ và $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$.

Các giá trị $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\tan \alpha$ và $\cot \alpha$ được gọi là **giá trị lượng giác của cung α** .

Chú ý:

- Ta có thể gọi trục tung là **trục sin** và trục hoành là **trục cosin**.
- Từ định nghĩa ta suy ra:

1) $\sin \alpha$ và $\cos \alpha$ xác định với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$.

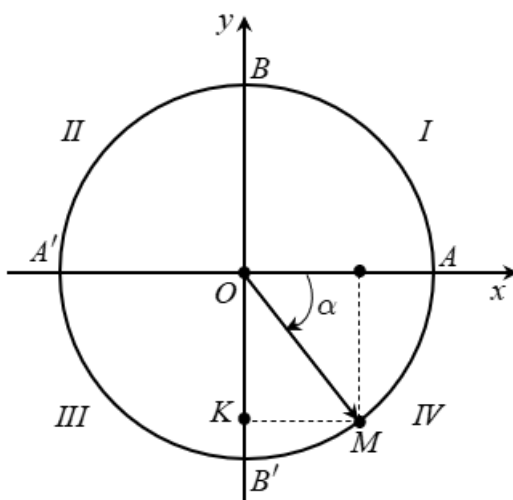
$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin \alpha, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (-1 \leq \sin \alpha \leq 1)$$

$$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos \alpha, \forall k \in \mathbb{Z} \quad (-1 \leq \cos \alpha \leq 1)$$

2) $\tan \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

3) $\cot \alpha$ xác định với mọi $\alpha \neq k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$.

- 4) Dấu của các giá trị lượng giác của góc α phụ thuộc vào vị trí điểm M biểu diễn trên đường tròn lượng giác.



Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác

	Góc I	Góc II	Góc III	Góc IV
$\sin x$	(+)	(+)	(-)	(-)
$\cos x$	(+)	(-)	(-)	(+)
$\tan x$	(+)	(-)	(+)	(-)
$\cot x$	(+)	(-)	(+)	(-)

- Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Không xác định
$\cot \alpha$	Không xác định	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

4 Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

- Công thức lượng giác cơ bản: Đối với các giá trị lượng giác, ta có các hằng đẳng thức sau

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \\ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \end{cases}$$

$$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

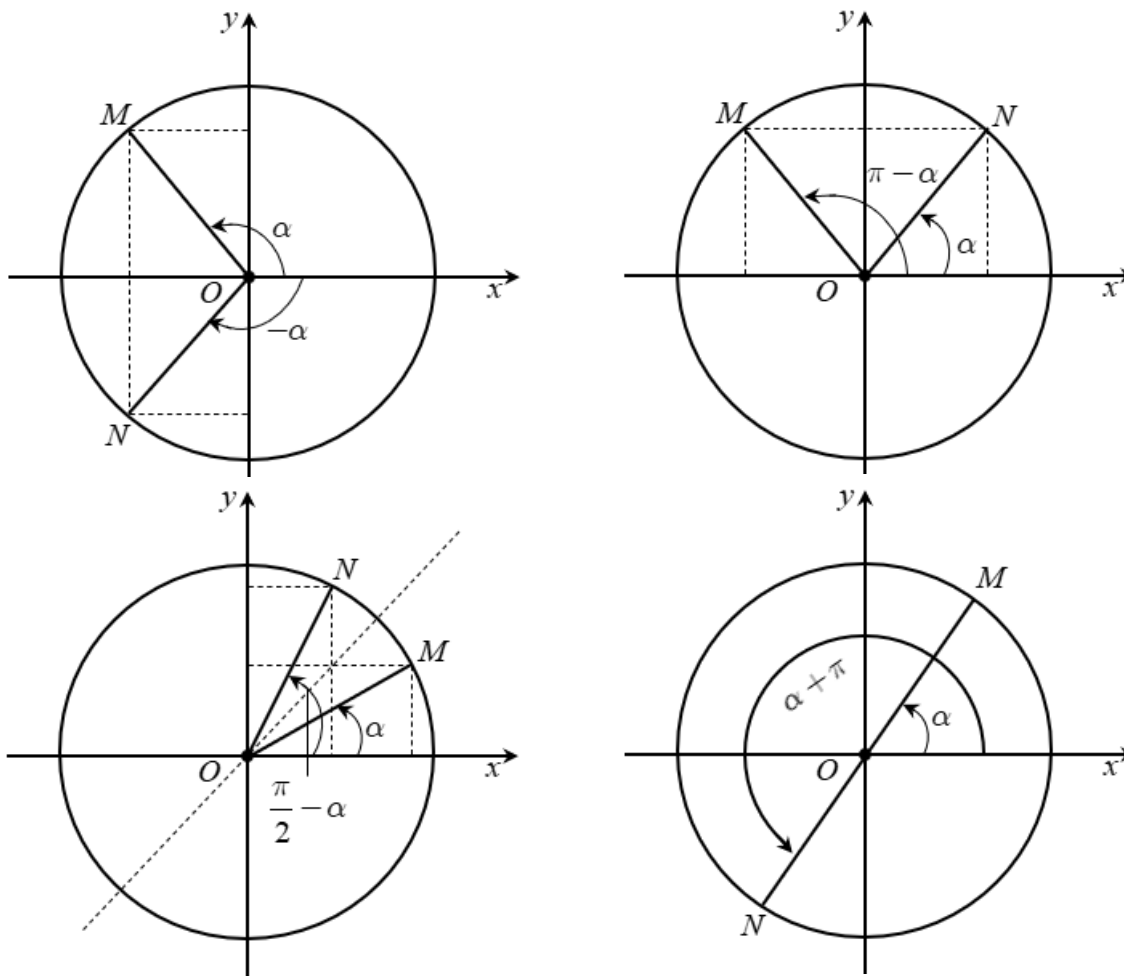
$$\frac{1}{\sin^2 x} = 1 + \cot^2 x \Rightarrow \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$$

$$\tan x \cdot \cot x = 1 \Rightarrow \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x; \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$$

• $\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cdot \cos x)$; $\sin^3 x - \cos^3 x = (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cdot \cos x)$

- Giá trị lượng giác của các góc có liên quan đặc biệt:



- **Cung đối nhau:** α và $-\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$ $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$ $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$
--

- **Cung bù nhau:** α và $\pi - \alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$ $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$ $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$ $\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$
--

- **Cung hơn kém π :** α và $(\alpha + \pi)$

$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin \alpha$$

$$\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$$

$$\cot(\alpha + \pi) = \cot \alpha$$

- **Cung phụ nhau:** α và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot \alpha$$

$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Đổi đơn vị giữa độ và radian. Độ dài cung tròn

- Sử dụng công thức chuyển đổi giữa số đo độ và số đo radian:

$$\bullet 1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{rad} \qquad \bullet 1 \text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$$

- Xét đường tròn có bán kính R

- Cung tròn có số đo $\alpha (0 \leq \alpha \leq 2\pi)$ thì có độ dài là $l = R \cdot \alpha$

- Cung tròn có số đo $a^\circ (0 \leq a \leq 360^\circ)$ thì có độ dài là $l = \frac{\pi \cdot a}{180} \cdot R$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Đổi số đo của các góc sau ra radian:

a) 72°

b) 600°

c) $-37^\circ 45' 30''$

Lời giải

a) Vì $1^\circ = \frac{\pi}{180} \text{rad}$ nên $72^\circ = 72 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{2\pi}{5}$; $600^\circ = 600 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{10\pi}{3}$

$$-37^\circ 45' 30'' = -37^\circ - \left(\frac{45}{60}\right)^\circ - \left(\frac{30}{60 \cdot 60}\right)^\circ = \left(\frac{4531}{120}\right)^\circ = \frac{4531}{120} \cdot \frac{\pi}{180} \approx 0,6587.$$

Bài tập 2: Đổi số đo của các góc sau ra độ:

a) $\frac{5\pi}{18}$

b) $\frac{3\pi}{5}$

c) -4

Lời giải

Vì $1 \text{rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$ nên $\frac{5\pi}{18} = \left(\frac{5\pi}{18} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 50^\circ$; $\frac{3\pi}{5} = \left(\frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = 108^\circ$

$$-4 = -\left(4 \cdot \frac{180}{\pi}\right)^\circ = -\left(\frac{720}{\pi}\right)^\circ \approx -2260^\circ 48'.$$

Bài tập 3: Trả lời các câu hỏi được nêu ra trong các trường hợp sau:

a) Trên đường tròn bán kính $r = 5$. Tìm độ dài của cung đo $\frac{\pi}{8}$

b) Trên đường tròn bán kính $r = 15$. Tìm độ dài của cung có số đo 50°

c) Một cung tròn có độ dài bằng 2 lần bán kính. Tìm số đo radian của cung tròn đó

d) Một đường tròn có $r = 30$. Tìm độ dài của một cung trên đường tròn có số đo $1,5 \text{ rad}$

e) Một đường tròn có bán kính $R = \frac{10}{\pi} \text{ cm}$. Tìm độ dài của cung $\frac{\pi}{2}$ trên đường tròn.

f) Một đường tròn có bán kính $R = 10 \text{ cm}$. Tìm độ dài cung 40° trên đường tròn đó

Lời giải

a) Độ dài cung AB có số đo cung AB bằng n độ: $l = r.n = 5 \cdot \frac{\pi}{8}$.

b) $l = \frac{\pi.r.n^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi.15.50}{180} = \frac{25\pi}{6}$.

c) Ta có, cung tròn có độ dài bằng bán kính thì có số đo 1 radian. Vậy cung tròn đó có số đo là 2 radian.

d) Áp dụng công thức $l = \alpha R$ nên ta được độ dài cung tròn là 45 cm.

e) Độ dài cung có số đo α là $l = \alpha.R \Rightarrow l = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{10}{\pi} = 5$ (cm).

f) Đổi đơn vị $40^\circ \Rightarrow \frac{40.\pi}{180} = \frac{2\pi}{9} \Rightarrow$ độ dài cung $l = \frac{2\pi}{9} \cdot 10 = \frac{20\pi}{9} = 6,9813$ (cm).

Bài tập 4: Một bánh xe máy có đường kính 60. Nếu xe chạy với vận tốc 50 (km/h) thì trong 5 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng.

Lời giải

Trong một phút bánh xe quay được: $\left[\frac{50.1000}{3600} : (0,6.\pi) \right] \cdot 5 \approx 36,9$.

Bài tập 5: Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270° ?

Lời giải

Tính được: $270^\circ = \frac{270}{180} \pi = \frac{3}{2} \pi = \frac{3}{4} \cdot 2\pi$. Vậy đu quay quay được góc 270° khi nó quay được

$\frac{3}{4}$ vòng. Đu quay quay được 1 vòng trong $\frac{1}{3}$ phút. Đu quay quay được $\frac{3}{4}$ vòng trong $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ phút.

Bài tập 6: Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài 10,25 cm, kim phút dài 13,25 cm. Trong 30 phút kim giờ vạch nên cung tròn có độ dài bao nhiêu?



Lời giải

Trong 6 giờ kim giờ vạch nên một cung có số đo là π (rad), vậy trong 30 phút kim giờ vạch nên cung có số đo là $\frac{\pi}{12}$ (rad). Khi đó độ dài cung tròn mà kim giờ vạch ra trong 30 phút là:

$$l = R.\alpha \Rightarrow l = 10,25 \cdot \frac{\pi}{12} = 2,68$$
 (cm).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Trên đường tròn bán kính 7 cm, lấy cung có số đo 54° . Độ dài l của cung tròn bằng
A. $\frac{21}{10}\pi$ (cm). **B.** $\frac{11}{20}\pi$ (cm). **C.** $\frac{63}{20}\pi$ (cm). **D.** $\frac{20}{11}\pi$ (cm).

Lời giải

$$\text{Ta có } l = 7 \cdot \left(\frac{54^\circ}{180^\circ} \cdot \pi \right) = \frac{21}{10}\pi \text{ (cm)}.$$

- Câu 2:** Trên đường tròn đường kính 8cm, tính độ dài cung tròn có số đo bằng 1,5 rad.
A. 12cm. **B.** 4cm. **C.** 6cm. **D.** 15cm.

Lời giải

$$\text{Tính được: } l = \alpha \cdot R = 1,5 \cdot \frac{8}{2} = 6 \text{ (cm)}.$$

- Câu 3:** Một đường tròn có bán kính 15(cm). Tìm độ dài cung tròn có góc ở tâm bằng 30° là:
A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{5\pi}{3}$. **C.** $\frac{2\pi}{5}$. **D.** $\frac{\pi}{3}$.

Lời giải

$$l = \frac{\pi a \cdot R}{180} = \frac{\pi \cdot 30 \cdot 15}{180} = \frac{5\pi}{2}$$

- Câu 4:** Một đường tròn có bán kính 10, độ dài cung tròn 40° trên đường tròn gần bằng
A. 7. **B.** 9. **C.** 11. **D.** 13.

Lời giải

$$l = \frac{\pi a \cdot R}{180} = \frac{\pi \cdot 40 \cdot 10}{180} = \frac{20\pi}{9} \approx 7$$

- Câu 5:** Một đường tròn có bán kính $R = \frac{10}{\pi}$, độ dài cung tròn $\frac{\pi}{2}$ là

- A.** 5. **B.** 5π . **C.** $\frac{5}{\pi}$. **D.** $\frac{\pi}{5}$.

Lời giải

$$l = \alpha \cdot R = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2} = 5$$

- Câu 6:** Chọn khẳng định **sai** trong các khẳng định sau:

A. Cung tròn có bán kính $R = 5$ cm và có số đo 1,5 rad thì có độ dài là 7,5 cm.

B. Cung tròn có bán kính $R = 8$ cm và có độ dài 8 cm thì có số đo độ là $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ$.

C. Độ dài cung tròn phụ thuộc vào bán kính của nó.

D. Góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo dương thì mọi góc lượng giác (Ou, Ov) có số đo âm.

Lời giải

Câu góc lượng giác $(Ou, Ov) = 330^\circ; (Ov, Ou) = 30^\circ$

Câu 7: Cho đường tròn có bán kính 6 cm. Tìm số đo của cung có độ dài là 3cm :

- A.** 0,5. **B.** $\frac{0,5}{\pi}$. **C.** $0,5\pi$. **D.** 1.

Lời giải

$$l = \alpha.R \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{3}{6} = 0,5$$

Câu 8: Cung tròn bán kính bằng 8,43 cm có số đo 3,85 rad có độ dài là

- A.** 32,46 cm. **B.** 32,45 cm. **C.** 32,47 cm. **D.** 32,5 cm.

Lời giải

$$l = \alpha.R = 3,85.8,43 \approx 32,46$$

Câu 9: Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài 10,57cm . Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là

- A.** 2,77cm . **B.** 2,78cm . **C.** 2,76cm . **D.** 2,8cm .

Lời giải

$$\text{Trong 30 phút mũi kim giờ quét được một góc là } \frac{2\pi.0,5}{12} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow l = \alpha.R = \frac{\pi}{12}.10,57 \approx 2,77$$

Câu 10: Bánh xe đạp có bán kính 50 cm . Một người quay bánh xe 5 vòng quanh trục thì quãng đường đi được là

- A.** 250π (cm). **B.** 1000π (cm). **C.** 500π (cm). **D.** 200π (cm).

Lời giải

$$\text{Ta có } r = 50 \text{ cm suy ra } l = 50.2\pi.5 = 500\pi \text{ (cm)}.$$

Câu 11: Một đu quay ở công viên có bán kính bằng 10m. Tốc độ của đu quay là 3 vòng/phút. Hỏi mất bao lâu để đu quay quay được góc 270° ?

- A.** $\frac{1}{3}$ phút. **B.** $\frac{1}{6}$ phút. **C.** $\frac{1}{4}$ phút. **D.** 1,5 phút.

Lời giải

$$\text{Tính được: } 270^\circ = \frac{270}{180}\pi = \frac{3}{2}\pi = \frac{3}{4}.2\pi$$

Vậy đu quay quay được góc 270° khi nó quay được $\frac{3}{4}$ vòng

Ta có: Đu quay quay được 1 vòng trong $\frac{1}{3}$ phút

Đu quay quay được $\frac{3}{4}$ vòng trong $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 12: Một đường tròn có bán kính 15 cm. Tìm độ dài cung tròn có góc ở tâm bằng 30° là

- A. $\frac{5\pi}{2}$. B. $\frac{\pi}{3}$. C. $\frac{2\pi}{5}$. D. $\frac{5\pi}{3}$.

Lời giải

Cung tròn có góc ở tâm bằng 30° nên số đo của cung tròn bằng $n^\circ = 30^\circ$. Khi đó độ dài của cung tròn là: $l = \frac{\pi \cdot R \cdot n^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi \cdot 15 \cdot 30^\circ}{180^\circ} = \frac{5\pi}{2}$.

Câu 13: Một đồng hồ treo tường có kim giờ dài 10,57cm. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1057}{1200}\pi$ (cm). B. $\frac{1057}{2400}\pi$ (cm). C. $\frac{1057}{600}\pi$ (cm). D. $\frac{1057}{4800}\pi$ (cm).

Lời giải

Trong 1 giờ mũi kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ nên trong 30 phút kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là $\frac{1}{12}\pi$.

Vậy độ dài cung tròn mà mũi kim giờ vạch là $l = R\alpha = 10,57 \times \frac{\pi}{12} = \frac{1057}{1200}\pi$

Câu 14: Bánh xe đạp có đường kính 55cm (kể cả lốp). Nếu chạy với vận tốc 40km/h thì trong 25s bánh xe quay được số vòng gần bằng với kết quả nào dưới đây?

- A. 52. B. 161. C. 322. D. 200.

Lời giải

Ta có $r = \frac{55}{2}$ cm = $\frac{0,55}{2}$ m ; $40\text{km/h} = \frac{40000}{3600}$ m/s.

Gọi l là quãng đường đi được trong 25 giây.

Gọi x là số vòng bánh xe quay được trong 25 giây.

Khi đó $l = 2\pi \cdot r \cdot x$.

Mà $l = \frac{25 \cdot 40000}{3600} = \frac{2500}{9}$ suy ra $x = \frac{l}{2\pi \cdot r} = 160,7 \approx 161$ vòng.

Câu 15: Kim giờ của đồng hồ dài 8 cm, kim phút dài 10 cm. Tổng quãng đường mũi kim phút, kim giờ đi được trong 30 phút bằng

- A. $\frac{25}{3}\pi$. B. $\frac{37}{3}\pi$. C. $\frac{20}{3}\pi$. D. $\frac{32}{3}\pi$.

Lời giải

Trong 30 phút, kim phút quay được một góc là π rad.

Quãng đường kim phút đi được là $S_1 = \pi \cdot 10 = 10\pi$ (cm)

Trong 30 phút kim giờ quay được một góc là $\frac{\pi}{12}$ rad.

Quãng đường kim giờ đi được là $S_2 = \frac{\pi}{12} \cdot 8 = \frac{2\pi}{3}$ (cm)

Vậy tổng quãng đường cần tìm là $S = S_1 + S_2 = 10\pi + \frac{2\pi}{3} = \frac{32}{3}\pi$ (cm)

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Đổi số đo của các góc sang độ. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\frac{\pi}{9}$ rad = 20°

b) $\frac{5\pi}{4}$ rad = 225°

c) $\frac{3\pi}{5}$ rad = 120°

d) $\frac{7\pi}{12}$ rad = 155°

Lời giải

Áp dụng công thức đổi rad sang độ $n = \frac{\alpha \cdot 180}{\pi}$.

a) Đúng: $n = \frac{\pi}{9} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 20^\circ$.

b) Đúng: $n = \frac{5\pi}{4} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 225^\circ$

c) Sai: $n = \frac{3\pi}{5} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 108^\circ$

d) Sai: $n = \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ$

Câu 2: Đổi số đo của các góc sang radian. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $120^\circ = \frac{2\pi}{9}$ rad

b) $250^\circ = \frac{25\pi}{18}$ rad

c) $135^\circ = \frac{3\pi}{4}$ rad

d) $300^\circ = \frac{5\pi}{3}$ rad

Lời giải

a) Sai: Ta có: $120^\circ = \frac{120^\circ \cdot \pi}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3}$.

b) Đúng: Ta có $250^\circ = \frac{250 \cdot \pi}{180} = \frac{25\pi}{18}$.

c) Đúng: Ta có: $135^\circ = \frac{135 \cdot \pi}{180} = \frac{3\pi}{4}$.

d) Đúng: Ta có: $300^\circ = \frac{300 \cdot \pi}{180} = \frac{5\pi}{3}$.

Câu 3: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Đường tròn có bán kính bằng 9 cm thì số đo (theo radian) của cung có độ dài 3π cm bằng $\frac{\pi}{3}$ rad

b) Đường tròn có bán kính 30cm thì độ dài của cung tròn trên đường tròn đó có số đo 2,5 rad bằng 7,5 cm.

c) Bán kính của đường tròn bằng 10 cm thì cung có số đo $\frac{5}{3}$ rad dài 24 cm.

d) Đường tròn có bán kính 6 cm thì số đo (rad) của cung có độ dài 3 cm bằng $\frac{1}{2}$ rad

Lời giải

a) Đúng: $l = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{3\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$.

b) Sai: $R = 30; \alpha = 2,5 \text{ rad} \Rightarrow$ Độ dài l của cung tròn là $l = R\alpha = 30 \cdot 2,5 = 75$ cm.

c) Sai: Áp dụng công thức $l = \alpha \cdot R$ ta có $R = \frac{l}{\alpha} = \frac{24}{\left(\frac{5}{3}\right)} = 14,4$ cm.

d) Đúng: Đường tròn có bán kính $R = 6$ cm và cung có độ dài $l = 3$ cm.

Số đo của cung là $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{1}{2}$ (rad).

Câu 4: Một vận động viên đi xe đạp trên đường, bánh xe đạp của vận động viên này quay được 11 vòng trong 5 giây. Biết rằng đường kính của bánh xe đạp là 680 mm .



a) Góc (theo độ radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây là 792°

b) Góc (theo radian) mà bánh xe quay được trong 1 giây là $\frac{2\pi}{5}$ (rad)

- c) Trong một phút bánh xe quay được 130 vòng
 d) Quãng đường mà người đi xe đã đi được trong 1 phút khoảng 282 m

Lời giải

- a) Đúng: Trong 1 giây, bánh xe đạp quay được $\frac{11}{5}$ vòng.

Vì một vòng ứng với góc bằng 360° nên góc mà bánh quay xe quay được trong 1 giây là

$$\frac{11}{5} \cdot 360 = 792^\circ.$$

- b) Sai: Vì một vòng ứng với góc bằng 2π nên góc mà bánh quay xe quay được trong 1 giây là

$$\frac{11}{5} \cdot 2\pi = \frac{22\pi}{5} (\text{rad}).$$

- c) Sai: Ta có: 1 phút = 60 giây.

Trong 1 phút bánh xe quay được $60 \cdot \frac{11}{5} = 132$ vòng.

- d) Đúng: Chu vi của bánh xe đạp là: $C = 680\pi$ (mm).

Quãng đường mà người đi xe đạp đã đi được trong một phút là $S = 132 \cdot 680\pi \approx 282$ m

Câu 5: Từ một vị trí ban đầu trong không gian, vệ tinh X chuyển động theo quỹ đạo là một đường tròn quanh Trái Đất và luôn cách tâm Trái Đất một khoảng bằng 9200 km. Sau 2 giờ thì vệ tinh X hoàn thành hết một vòng di chuyển.

- a) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1 giờ là $\approx 28902,65$ km
 b) Quãng đường vệ tinh X chuyển động được sau 1,5 giờ là $\approx 43353,98$ km
 c) Sau khoảng 5,3 giờ thì X di chuyển được quãng đường 240000 km
 d) Giả sử vệ tinh di chuyển theo chiều dương của đường tròn, sau 4,5 giờ thì vệ tinh vẽ nên một góc $\frac{9\pi}{2}$ rad?

Lời giải

- a) Đúng: Một vòng di chuyển của X chính là chu vi đường tròn:

$$C = 2\pi R = 2\pi \cdot 9200 = 18400\pi \text{ (km)}$$

Sau 1 giờ, vệ tinh di chuyển nửa đường tròn với quãng đường là:

$$\frac{1}{2}C = 9200\pi \approx 28902,65 \text{ (km)}$$

- b) Đúng: Sau 1,5 giờ, vệ tinh di chuyển được $\frac{1,5 \cdot 1}{2}$ đường tròn (hay $\frac{3}{4}$ đường tròn), quãng

đường là: $\frac{3}{4}C = \frac{3}{4} \cdot 18400\pi = 13800\pi \approx 43353,98$ (km).

c) Sai: Số giờ để vệ tinh X thực hiện quãng đường 240000 km là: $\frac{240000}{9200\pi} \approx 8,3$ (giờ).

d) Đúng: Sau 4,5 giờ thì số vòng tròn mà vệ tinh X di chuyển được là: $\frac{4,5}{2} = \frac{9}{4}$ (vòng).

Số đo góc lượng giác thu được là: $\frac{9}{4} \cdot 2\pi = \frac{9\pi}{2} \text{ rad}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Đổi số đo của góc $40^\circ 25'$ sang đơn vị radian với độ chính xác đến hàng phần trăm.

Lời giải

Áp dụng công thức $\alpha = \frac{a \cdot \pi}{180}$ với α tính bằng radian, a tính bằng độ.

Trước tiên ta đổi $40^\circ 25' = \left(40 + \frac{25}{60}\right)^\circ$.

Áp dụng công thức, ta được $\alpha = \frac{\left(40 + \frac{25}{60}\right) \cdot \pi}{180} = \frac{97\pi}{432} = 0,705403906$.

Câu 2: Bánh xe đạp của người đi xe đạp quay được 2 vòng trong 5 giây. Hỏi trong 2 giây, bánh xe quay được 1 góc bao nhiêu (tính theo độ)?

Lời giải

Trong 2 giây bánh xe đạp quay được $\frac{2 \cdot 2}{5} = \frac{4}{5}$ vòng tức là quay được cung có độ dài là

$l = \frac{4}{5} \cdot 2\pi R = \frac{8}{5} \pi R$. Ta có $l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{8}{5} \pi R}{R} = \frac{8}{5} \pi = 288^\circ$

Câu 3: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là:

Lời giải

Ta có: 72 răng có chiều dài là $2\pi R$ nên 10 răng có chiều dài $l = \frac{10 \cdot 2\pi R}{72} = \frac{5\pi}{18} R$.

Theo công thức $l = R\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{l}{R} = \frac{\frac{5}{18} \pi R}{R} = \frac{5}{18} \pi$ mà $a = \frac{180\alpha}{\pi} = \frac{180 \cdot \frac{5}{18} \pi}{\pi} = 50^\circ$.

Cách khác: 72 răng tương ứng với 360° nên 10 răng tương ứng với $\frac{10 \cdot 360}{72} = 50^\circ$.

Câu 4: Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng 6,5 cm

Lời giải

Trong 3 phút xe đi được $\frac{3 \cdot 60}{20} \cdot 60 = 540$ vòng.

Độ dài 1 vòng bằng chu vi bánh xe là $2\pi R = 2 \cdot 3,1416 \cdot 6,5 = 40,8408$.

Vậy quãng đường xe đi được là $540 \times 40,8408 = 22054,032 \text{ cm}$

Câu 5: Một đồng hồ treo tường, kim giờ dài $10,57\text{cm}$ và kim phút dài $13,34\text{cm}$. Trong 30 phút mũi kim giờ vạch lên cung tròn có độ dài là

Lời giải

Trong 6 giờ thì kim giờ vạch lên 1 cung có số đo π nên 30 phút kim giờ vạch lên 1 cung có số đo là $\frac{1}{12}\pi$ suy ra độ dài cung tròn mà nó vạch lên là $l = R\alpha = 10,57 \times \frac{3,14}{12} \approx 2,77$

Câu 6: Một vệ tinh được định vị tại vị trí A trong không gian. Từ vị trí A , vệ tinh bắt đầu chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là đường tròn với tâm là tâm O của Trái Đất. Giả sử vệ tinh chuyển động hết một vòng của quỹ đạo trong $2h$ theo chiều kim đồng hồ. Khi vệ tinh chuyển động được $3h$, bán kính của vòng quay quét một góc lượng giác có số đo bằng bao nhiêu? (Tính theo đơn vị radian).

Lời giải

Theo giả thiết, vệ tinh chuyển động theo chiều kim đồng hồ nên sau $2h$, bán kính của vòng quay khi vệ tinh chuyển động quét được một góc lượng giác bằng $-2\pi(\text{rad})$.

Vậy khi vệ tinh chuyển động được $3h$ thì bán kính của vòng quay quét được một góc lượng giác bằng -3π (rad).

Câu 7: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương. Sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

Sau 1 giây, cánh quạt quay được $\frac{175}{60} = \frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12} \cdot 2\pi = \frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 5 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6} \cdot 5 = \frac{175\pi}{6}$.

Câu 8: Một chiếc quạt trần năm cánh quay với tốc độ 175 vòng trong một phút. Chọn chiều quay của quạt là chiều dương. Sau thời gian bao lâu cánh quạt quay được một góc có số đo 42π ?

Lời giải

Sau 1 giây, cánh quạt quay được $\frac{175}{60} = \frac{35}{12}$ (vòng) theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35}{12} \cdot 2\pi = \frac{35\pi}{6}$.

Thời gian để cánh quạt quay được một góc có số đo 42π là $42\pi : \frac{35\pi}{6} = 7,2$ giây.

Câu 9: Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe.



Sau 1 phút, van V đó quay được một góc có số đo bao nhiêu radian?

Lời giải

Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8} = 3,75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75 \cdot 60 = 225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225 \cdot 2\pi = 450\pi$.

Câu 10: Trong chặng đua nước rút, bánh xe của một vận động viên đua xe đạp quay được 30 vòng trong 8 giây. Chọn chiều quay của bánh xe là chiều dương. Xét van V của bánh xe. Biết rằng bán kính của bánh xe là 35 cm . Độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là bao nhiêu mét?



Lời giải

Sau 1 giây, van V của bánh xe quay được $\frac{30}{8} = 3,75$ (vòng).

Sau 1 phút, van V của bánh xe quay được $3,75 \cdot 60 = 225$ (vòng).

Suy ra sau 1 phút, van V của bánh xe quay được một góc có số đo là $225 \cdot 2\pi = 450\pi$.

Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r = 0,35\text{ m}$.

Do đó độ dài quãng đường mà vận động viên đua xe đạp đã đi được trong 1 phút là

$$450\pi \cdot 0,35 \approx 494,8\text{ m}.$$

-----HẾT-----

Dạng 2: Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác. Hệ thức Chasles

Để biểu diễn cung lượng giác có số đo trên đường tròn lượng giác ta thực hiện như sau:

- Chọn điểm $A(1;0)$ làm điểm đầu của cung.
- Xác định điểm cuối M của cung sao cho $\widehat{AM} = \alpha$

Lưu ý:

- Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của 2π là:

$$\text{sđ}\widehat{AM} = \alpha + k2\pi; k \in \mathbb{Z}$$

- Ngoài ra, ta cũng có thể viết số đo bằng độ:

$$\text{sđ}\widehat{AM} = x^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

- Nếu ta có $\widehat{AM} = \alpha + k\frac{2\pi}{n}; k, n \in \mathbb{Z}$ thì sẽ có n điểm ngọn.

Hệ thức Chasles: Với ba tia Ou, Ov, Ow bất kì thì ta có:

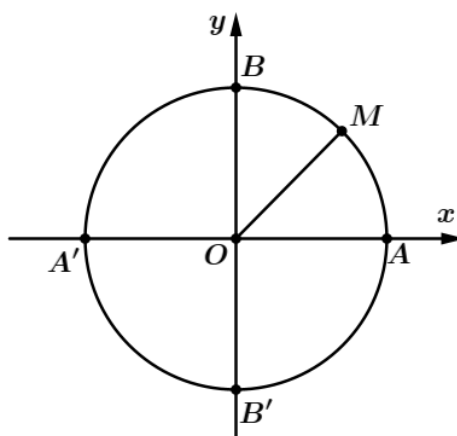
$$\text{sd}(Ou, Ov) + \text{sd}(Ov, Ow) = \text{sd}(Ou, Ow) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$$

- Từ đó ta có thể suy ra: $\text{sd}(Ou, Ov) = \text{sd}(Ou, Ow) - \text{sd}(Ov, Ow) + k.360^\circ \quad (k \in \mathbb{Z})$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là $\frac{25\pi}{4}$

Lời giải



Ta có: $\text{sđ}\widehat{AM} = \frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi = \frac{\pi}{4} + 2.3.\pi$

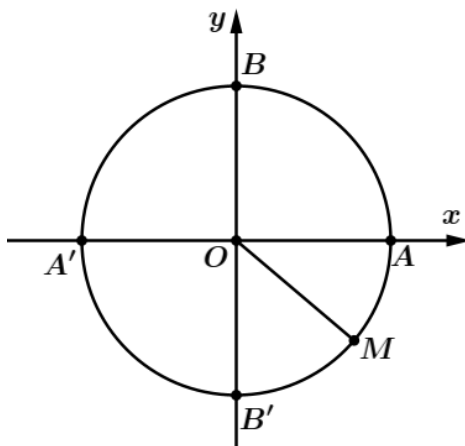
Vậy điểm cuối M của cung \widehat{AM} sẽ trùng với điểm ngọn của cung $\frac{\pi}{4}$. Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ \widehat{AB} .

Bài tập 2: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là -1485°

Lời giải

Ta có $\text{sđ}\widehat{AB} = -1485^\circ = -45^\circ + (-4).360^\circ$

Vậy điểm cuối M của cung \widehat{AB} sẽ trùng với điểm ngọn của cung -45° .



Suy ra M là điểm chính giữa của cung nhỏ $\widehat{AB'}$.

Bài tập 3: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là:

$$\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

Lời giải

Ta có $sđ\widehat{AM} = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{4}$ nên có 4 điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.

Với $k = 0 \Rightarrow sđ\widehat{AM} = \frac{\pi}{6}$ có điểm ngọn là M

Với $k = 1 \Rightarrow sđ\widehat{AN} = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}$ có điểm ngọn là N

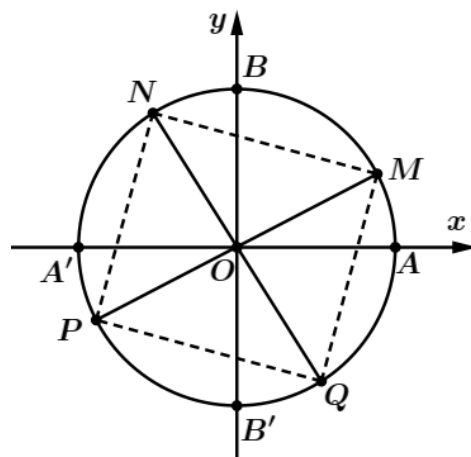
Với $k = 2 \Rightarrow sđ\widehat{AP} = \frac{\pi}{6} + \pi$ có điểm ngọn là P

Với $k = 3 \Rightarrow sđ\widehat{AQ} = \frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2}$ có điểm ngọn là Q

Với $k = 4 \Rightarrow sđ\widehat{AR} = \frac{\pi}{6} + 2\pi$ có điểm ngọn là R .

Lúc này điểm ngọn R trùng với M

Vậy bốn điểm M, N, P, Q tạo thành một hình vuông nội tiếp đường tròn lượng giác



Bài tập 4: Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các điểm ngọn của cung lượng giác có số đo là

$$k\frac{\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$$

Lời giải

Ta có $sđ\widehat{AM} = k\frac{2\pi}{6}$ nên có 6 điểm ngọn trên đường tròn lượng giác.

Với $k = 0 \Rightarrow sđ\widehat{AM} = 0$ có điểm ngọn là M

Với $k = 1 \Rightarrow \widehat{sđAN} = \frac{\pi}{3}$ có điểm ngọn là N

Với $k = 2 \Rightarrow \widehat{sđAP} = \frac{2\pi}{3}$ có điểm ngọn là P

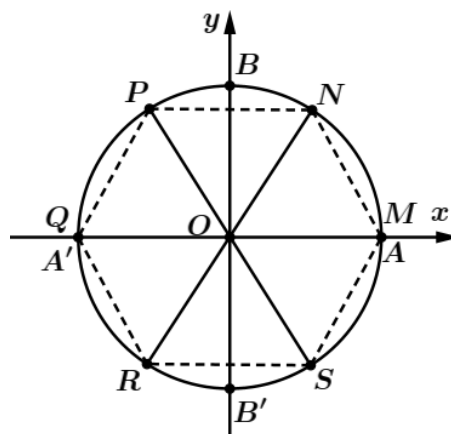
Với $k = 3 \Rightarrow \widehat{sđAQ} = \pi$ có điểm ngọn là Q

Với $k = 4 \Rightarrow \widehat{sđAR} = \frac{4\pi}{3}$ có điểm ngọn là R

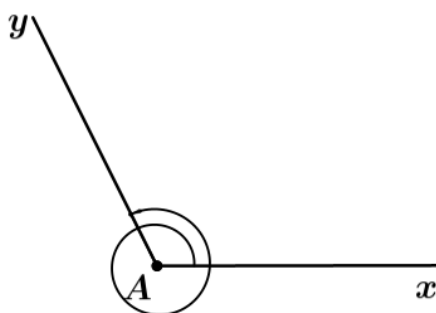
Với $k = 5 \Rightarrow \widehat{sđAS} = \frac{5\pi}{3}$ có điểm ngọn là S

Với $k = 6 \Rightarrow \widehat{sđAT} = 2\pi$ có điểm ngọn là T

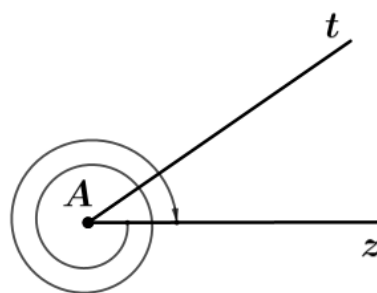
Lúc này điểm ngọn T trùng với M . Vậy sáu điểm $M; N; P; Q; R; S$ tạo thành một lục giác đều nội tiếp đường tròn lượng giác.



Bài tập 5: Xác định số đo của các góc lượng giác được biểu diễn trong mỗi hình dưới đây.



a) $\widehat{xAy} = 102^\circ$



b) $\widehat{zAt} = \frac{\pi}{5}$

Lời giải

Số đo của góc lượng giác (Ax, Ay) trong hình a) bằng: $102^\circ + 360^\circ = 462^\circ$.

Số đo của góc lượng giác (Bt, Bz) trong hình b) bằng $-\frac{\pi}{5} - 2.2\pi = -\frac{21\pi}{5}$.

Bài tập 6: Thực hiện các yêu cầu sau:

a) Hãy tìm số đo α của góc lượng giác (Oa, Ob) , với $0 \leq \alpha < 2\pi$. Biết một góc lượng giác cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob có số đo là $\frac{25\pi}{6}$.

b) Hãy tìm số đo a° của góc lượng giác (Om, On) , với $0 \leq a < 360$. Biết một góc lượng giác cùng tia đầu Om và tia cuối On có số đo là -875° .

Lời giải

a) Số đo α của các góc lượng giác bất kì có cùng tia đầu Oa và tia cuối Ob sai khác nhau một bội nguyên của 2π nên có dạng là $\alpha = \frac{25\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $0 \leq \alpha < 2\pi$ suy ra $-\frac{25\pi}{6} \leq k2\pi < 2\pi - \frac{25\pi}{6}$ suy ra $-\frac{25}{12} \leq k < -\frac{13}{12}$.

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = -2$. Vậy $\alpha = \frac{25\pi}{6} + (-2) \cdot 2\pi = \frac{\pi}{6}$.

b) Số đo a° của các góc lượng giác có cùng tia đầu Om và tia cuối On sai khác nhau một bội nguyên của 360° nên có dạng là $a^\circ = -875^\circ + k360^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

Ta có $0 \leq a < 360$ suy ra $875 \leq k360 < 360 + 875$ suy ra $\frac{175}{72} \leq k < \frac{247}{72}$ vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 3$.

Vậy $a^\circ = -875^\circ + 3 \cdot 360^\circ = 205^\circ$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn định hướng"?
- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn định hướng.
 - B. Mỗi đường tròn đã chọn một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
 - C. Mỗi đường tròn đã chọn một chiều chuyển động và một điểm là gốc đều là một đường tròn định hướng.
 - D.** Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

Lời giải

Mỗi đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là chiều dương và chiều ngược lại được gọi là chiều âm là một đường tròn định hướng.

- Câu 2:** Quy ước chọn chiều dương của một đường tròn định hướng là:
- A. Luôn cùng chiều quay kim đồng hồ.
 - B.** Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.
 - C. Có thể cùng chiều quay kim đồng hồ mà cũng có thể là ngược chiều quay kim đồng hồ.
 - D. Không cùng chiều quay kim đồng hồ và cũng không ngược chiều quay kim đồng hồ.

Lời giải

Luôn ngược chiều quay kim đồng hồ.

- Câu 3:** Trên đường tròn định hướng, mỗi cung lượng giác \widehat{AB} xác định:
- A. Một góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - B. Hai góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - C. Bốn góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .
 - D.** Vô số góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

Lời giải

Vô số góc lượng giác tia đầu OA , tia cuối OB .

- Câu 4:** Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "góc lượng giác"?
- A. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB là góc lượng giác.
 - B. Trên đường tròn tâm O bán kính $R = 1$, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.
 - C. Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB là góc lượng giác.
 - D.** Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B

là góc lượng giác.

Lời giải

Trên đường tròn định hướng, góc hình học AOB có phân biệt điểm đầu A và điểm cuối B là góc lượng giác.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là **đúng** khi nói về "đường tròn lượng giác"?

- A. Mỗi đường tròn là một đường tròn lượng giác.
- B. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$ là một đường tròn lượng giác.
- C. Mỗi đường tròn có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.
- D.** Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Lời giải

Mỗi đường tròn định hướng có bán kính $R = 1$, tâm trùng với gốc tọa độ là một đường tròn lượng giác.

Câu 6: Cho góc lượng giác $(Ox, Oy) = 22^{\circ}30' + k360^{\circ}$. Với giá trị k bằng bao nhiêu thì góc $(Ox, Oy) = 1822^{\circ}30'$?

- A. $k \in \emptyset$.
- B. $k = 3$.
- C. $k = -5$.
- D.** $k = 5$.

Lời giải

Theo đề $(Ox, Oy) = 1822^{\circ}30' \Rightarrow 22^{\circ}30' + k.360^{\circ} = 1822^{\circ}30' \Rightarrow k = 5$.

Câu 7: Một chiếc đồng hồ, có kim chỉ giờ OG chỉ số 9 và kim phút OP chỉ số 12. Số đo của góc lượng giác (OG, OP) là

- A.** $\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
- B. $-270^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.
- C. $270^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.
- D.** $\frac{9\pi}{10} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Góc lượng giác (OG, OP) chiếm $\frac{1}{4}$ đường tròn. Số đo là $\frac{1}{4}.2\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng

- A. -45° .
- B. 315° .
- C. 45° hoặc 315° .
- D.** $-45^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Vì số đo cung AM bằng 45° nên $\widehat{AOM} = 45^{\circ}$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON} = 45^{\circ}$.

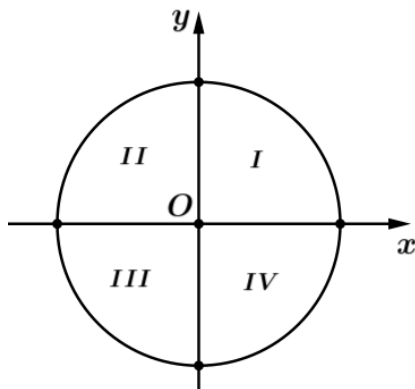
Do đó số đo cung AN bằng 45° nên số đo cung lượng giác AN có số đo là $-45^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 9: Trên đường tròn với điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 60° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua trục Oy , số đo cung AN là:

- A.** 120° .
- B. -240° .
- C. -120° hoặc 240° .
- D.** $120^{\circ} + k360^{\circ}, k \in \mathbb{Z}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

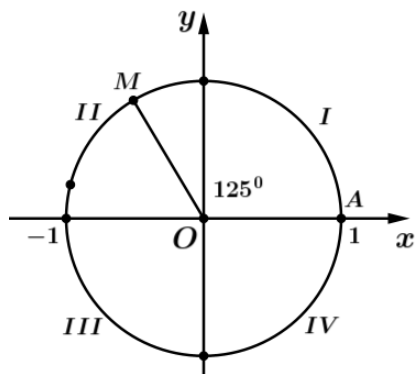
Câu 1: Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Khi đó:



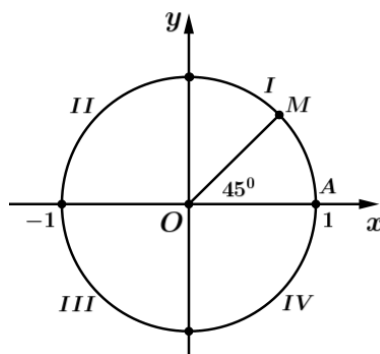
- a) 125° là điểm M thuộc góc phần tư thứ II
- b) 405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ III
- c) $\frac{19\pi}{3}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ II
- d) $-\frac{13\pi}{6}$ là điểm Q thuộc góc phần tư thứ IV

Lời giải

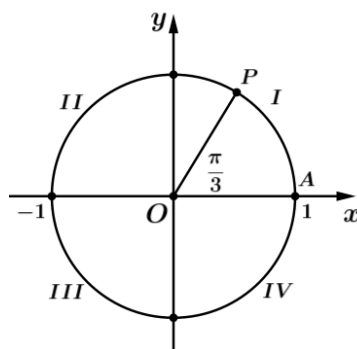
a) Đúng: Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo 125° là điểm M thuộc góc phần tư thứ II của đường tròn lượng giác thỏa mãn $\widehat{AOM} = 125^\circ$



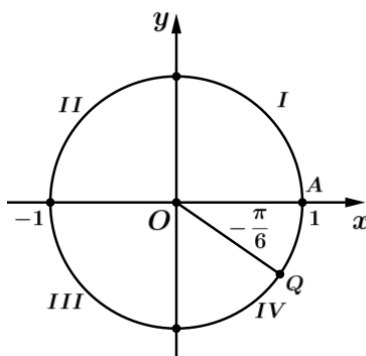
b) Sai: Ta có: $405^\circ = 45^\circ + 360^\circ$. Vì vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác 405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác và thỏa mãn $\widehat{AON} = 45^\circ$



c) Sai: Ta có: $\frac{19\pi}{3} = \frac{18\pi + \pi}{3} = \frac{\pi}{3} + 3.2\pi$. Vì vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác $\frac{19\pi}{3}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác và thỏa mãn $\widehat{AOP} = \frac{\pi}{3}$



d) Đúng: Ta có: $-\frac{13\pi}{6} = \frac{-12\pi - \pi}{6} = -\frac{\pi}{6} - 2\pi$. Vì vậy điểm biểu diễn của góc lượng giác $-\frac{13\pi}{6}$ là điểm Q thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác và thỏa mãn $\widehat{AOQ} = \frac{\pi}{6}$



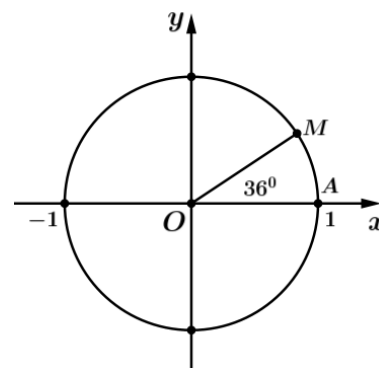
Câu 2: Biểu diễn góc lượng giác trên đường tròn lượng giác. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- $36^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là điểm M thuộc góc phần tư thứ II
- $-60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ là các điểm M_1, M_2 thuộc góc phần tư thứ II và IV
- $-\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ là M thuộc góc phần tư thứ III
- $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ là bốn điểm M, N, P, Q thuộc góc phần tư thứ I, II, III, IV

Lời giải

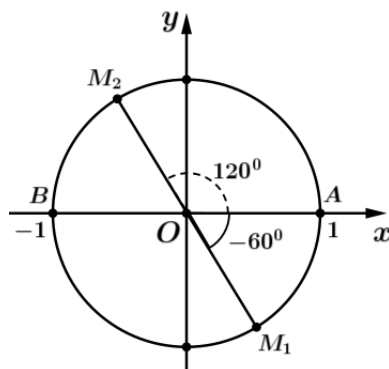
a) Sai: Xét góc lượng giác $k360^\circ$, dù k là số chẵn hay số lẻ thì góc này cũng có điểm biểu diễn là điểm A (điểm góc trên đường tròn lượng giác).

Vì vậy, góc lượng giác $36^\circ + k360^\circ$ có điểm biểu diễn là điểm M thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác và $\widehat{AOM} = 36^\circ$.

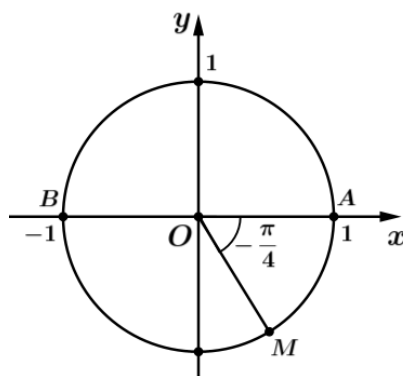


b) Đúng: Xét góc lượng giác $k180^\circ$. Nếu k chẵn thì góc này có điểm biểu diễn là $A(1;0)$, nếu k lẻ thì góc này có điểm biểu diễn là điểm $B(-1;0)$.

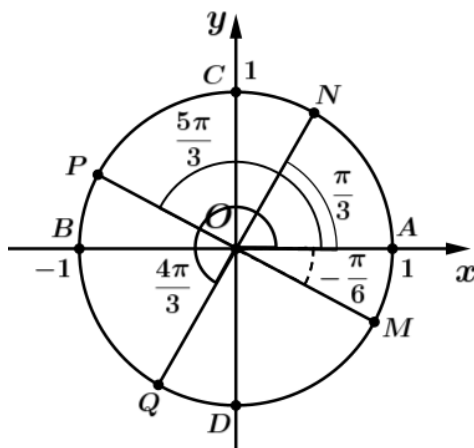
Vì vậy $-60^\circ + k180^\circ$ có các điểm biểu diễn là M_1 và M_2 như hình vẽ bên.



c) Sai: Ta biết góc lượng giác $k2\pi$ luôn có điểm biểu diễn là $A(1;0)$, vì vậy góc lượng giác $-\frac{\pi}{4} + k2\pi$ có điểm biểu diễn là M thuộc góc phần tư thứ IV và thỏa mãn $\widehat{AOM} = \frac{\pi}{4}$.



d) Đúng: Xét góc lượng giác $k\frac{\pi}{2}$.



Khi $k = 0$ thì $k\frac{\pi}{2} = 0$, góc này có điểm biểu diễn là điểm $A(1;0)$.

Khi $k = 1$ thì $k\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$ góc này có điểm biểu diễn là điểm $C(0;1)$.

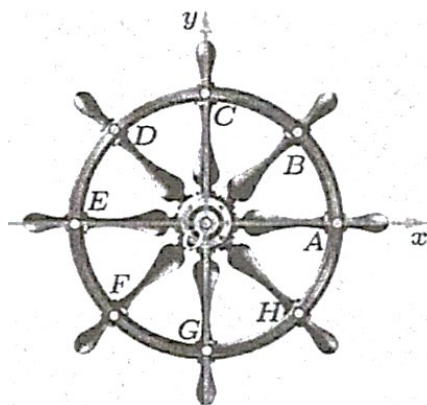
Khi $k = 2$ thì $k\frac{\pi}{2} = \pi$ góc này có điểm biểu diễn là điểm $B(-1;0)$.

Khi $k = 3$ thì $k\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$ góc này có điểm biểu diễn là điểm $D(0;-1)$.

Nếu $k = 4, 5, 6, \dots$ thì ta thấy rằng các điểm biểu diễn có được vẫn là sự lặp lại của A, B, C, D .

Vì vậy điểm biểu diễn của $-\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$ là bốn điểm M, N, P, Q trên đường tròn lượng giác (xem hình vẽ trên).

Câu 3: Trong hình vẽ bên, ta xem hình ảnh đường tròn trên một bánh lái tàu thủy tương ứng với một đường tròn lượng giác.



a) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác (OA, OB) theo đơn vị radian:

$$(OA, OB) = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$$

b) Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với bốn điểm biểu diễn là A, C, E, G theo đơn vị radian là $k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

c) Công thức tổng quát chỉ ra góc lượng giác tương ứng với hai điểm biểu diễn là A, E theo đơn vị độ là $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$

d) Công thức tổng quát biểu diễn góc lượng giác $(OA, OC) + (OC, OH)$ theo đơn vị radian:

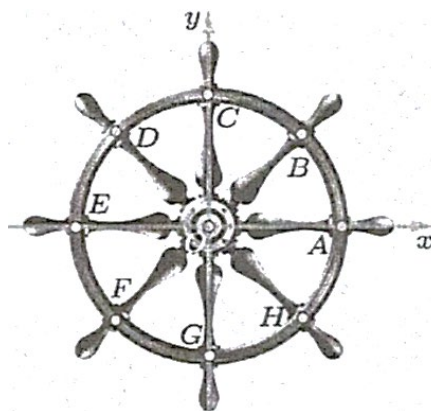
$$\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $(OA, OB) = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z});$

b) Sai: Ta thấy A, C, E, G lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác: $0 \text{ rad}; \frac{\pi}{2} \text{ rad}; \pi \text{ rad}; \frac{3\pi}{2} \text{ rad}; 2\pi \text{ rad}, \frac{5\pi}{2} \text{ rad}, \dots$

Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau $\frac{\pi}{2}$ rad. Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho các góc lượng giác ấy là $k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.



c) Đúng: Ta thấy hai điểm A, E lần lượt biểu diễn cho các góc lượng giác $0^\circ, 180^\circ, 360^\circ, 540^\circ, \dots$

Tất cả các góc này theo thứ tự chênh lệch nhau 180° . Vì vậy công thức duy nhất biểu diễn cho các góc lượng giác ấy là $k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

d) Sai: Theo hệ thức Salơ, ta có:

$$(OA, OB) + (OB, OC) = (OA, OC) = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$(OA, OC) + (OC, OH) = (OA, OH) = -\frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 4: Biểu diễn các góc lượng giác có số đo sau đây trên đường tròn lượng giác. Khi đó:

a) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo 218° là điểm M thuộc góc phần tư thứ III của đường tròn lượng giác thỏa mãn $\widehat{AOM} = 218^\circ$

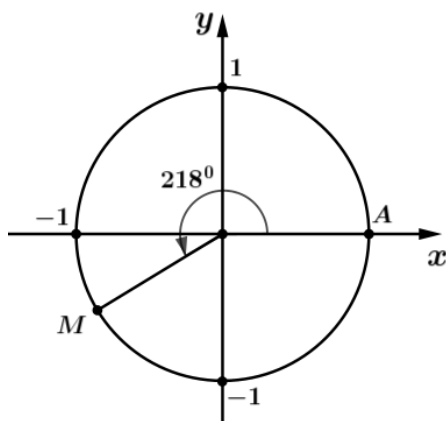
b) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo -405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác thỏa mãn $\widehat{AON} = -45^\circ$

c) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{25\pi}{4}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác thỏa mãn $\widehat{AOP} = \frac{\pi}{4}$

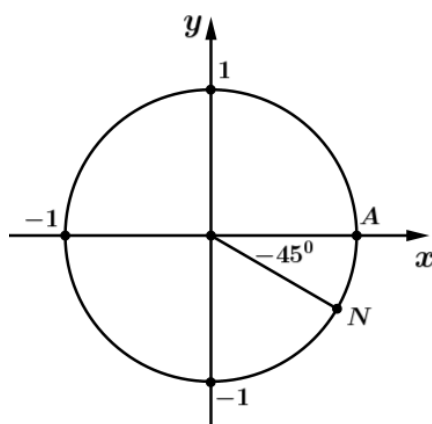
d) Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{15\pi}{2}$ là điểm $Q(0; -1)$ thuộc đường tròn lượng giác thỏa mãn $\widehat{AOQ} = -\frac{\pi}{2}$

Lời giải

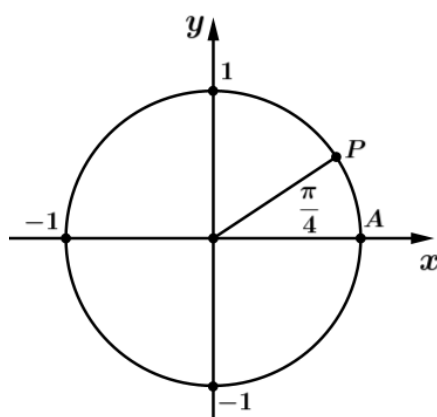
a) Đúng: Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo 218° là điểm M thuộc góc phần tư thứ III của đường tròn lượng giác thỏa mãn $\widehat{AOM} = 218^\circ$



b) Sai: Ta có: $-405^\circ = -45^\circ - 360^\circ$. Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo -405° là điểm N thuộc góc phần tư thứ IV của đường tròn lượng giác thỏa mãn $\widehat{AON} = 45^\circ$



c) Đúng: Ta có: $\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi + 24\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 6\pi$. Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{25\pi}{4}$ là điểm P thuộc góc phần tư thứ I của đường tròn lượng giác thỏa mãn $\widehat{AOP} = \frac{\pi}{4}$



d) Sai: Ta có: $\frac{15\pi}{2} = \frac{16\pi - \pi}{2} = -\frac{\pi}{2} + 8\pi$. Điểm biểu diễn của góc lượng giác có số đo $\frac{15\pi}{2}$ là điểm $Q(0; -1)$ thuộc đường tròn lượng giác thỏa mãn $\widehat{AOQ} = \frac{\pi}{2}$.

Câu 5: Cho một góc lượng giác (Ox, Ou) có số đo 250° và một góc lượng giác (Ox, Ov) có số đo -270° .

- a) Số đo góc lượng giác (Ou, Ox) bằng $-250^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- b) Số đo góc lượng giác (Ov, Ox) bằng $270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- c) Số đo một góc lượng giác (Ou, Ov) bằng -20° .
- d) Số đo một góc lượng giác (Ou, Ov) theo đơn vị radian bằng $\frac{\pi}{9}$.

Lời giải

- a) Đúng: $sđ(Ou, Ox) = -sđ(Ox, Ou) = -250^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- b) Đúng: $sđ(Ov, Ox) = -sđ(Ox, Ov) = 270^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
- c) Sai: $sđ(Ou, Ov) = sđ(Ou, Ox) + sđ(Ox, Ov) + k360^\circ = -250^\circ - 270^\circ + k360^\circ$
 $= -520^\circ + k360^\circ = -160^\circ + m360^\circ (k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}, m = k - 1)$.

Số đo một góc lượng giác (Ou, Ov) bằng -160° .

- d) Sai: Số đo một góc lượng giác (Ou, Ov) theo đơn vị radian bằng $-160 \frac{\pi}{180} = \frac{-8\pi}{9}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trên đường tròn lượng giác vớ điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 75° . Gọi N là điểm đối xứng với điểm M qua gốc tọa độ O , số đo cung lượng giác AN bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Ta có $\widehat{AOM} = 75^\circ, \widehat{MON} = 180^\circ$ nên cung lượng giác AN có số đo bằng

$$\widehat{AN} = -105^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 2: Biết một số đo của góc $(Ox, Oy) = \frac{3\pi}{2} + 2001\pi$. Giá trị tổng quát của góc (Ox, Oy) là bao nhiêu

Lời giải

Ta có : $(Ox, Oy) = \frac{3\pi}{2} + 2001\pi = \frac{\pi}{2} + 2002\pi = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Câu 3: Biết OMB' và ONB' là các tam giác đều. Cung α có mút đầu là A và mút cuối trùng với B hoặc M hoặc N . Tính số đo của α ?

Lời giải

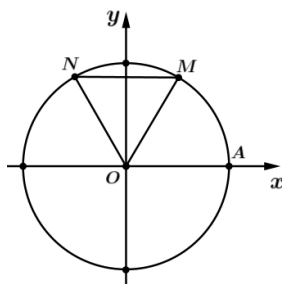


Cung α có mút đầu là A và mút cuối trùng với B nên $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Cung $\widehat{AM} = \widehat{AB} + \frac{2\pi}{3}$, $\widehat{AN} = \widehat{AM} + \frac{2\pi}{3}$ nên chu kì của cung α là $\frac{2\pi}{3}$.

Câu 4: Trên đường tròn lượng giác có điểm gốc là A . Điểm M thuộc đường tròn sao cho cung lượng giác AM có số đo 45° . Gọi N là điểm đối xứng với M qua trục Ox , số đo cung lượng giác AN bằng bao nhiêu?

Lời giải



Vì số đo cung \widehat{AM} bằng 45° nên $\widehat{AOM} = 45^\circ$, N là điểm đối xứng với M qua trục Ox nên $\widehat{AON} = 45^\circ$.

Do đó số đo cung AN bằng 45° nên số đo cung lượng giác AN có số đo là $-45^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Câu 5: Nếu góc lượng giác có số $(Ox, Oz) = -\frac{63\pi}{2}$ thì Ox và Oz tạo với nhau một góc bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

Ta có $-\frac{63\pi}{2} = -32\pi + \frac{\pi}{2}$ vì vậy Ox và Oz vuông góc nên tạo với nhau một góc 90°

Câu 6: Cho hai góc lượng giác có số $(Ox, Ou) = 45^\circ + m360^\circ, m \in \mathbb{Z}$ và số

$$(Ox, Ov) = -135^\circ + n360^\circ, n \in \mathbb{Z}.$$

Hai tia Ou và Ov hợp với nhau một góc bằng bao nhiêu độ?

Lời giải

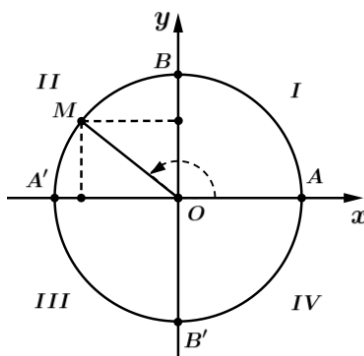
Số $(Ou, Ov) = 45^\circ + 135^\circ + (m - n)360^\circ = 180^\circ + l360^\circ, l \in \mathbb{Z}$ suy ra 2 tia Ou và Ov đối nhau nên tạo với nhau một góc bằng 180° .

-----HẾT-----

Dạng 3: Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán

Chú ý: Nếu đề bài có giới hạn miền của góc α thì ta cần xem trên miền đó các tỉ số lượng giác tương ứng sẽ mang dấu như thế nào, cụ thể như sau:



Giá trị lượng giác	Góc phần tư			
	I	II	III	IV
$\sin \alpha$	+	+	-	-
$\cos \alpha$	+	-	-	+
$\tan \alpha$	+	-	+	-
$\cot \alpha$	+	-	+	-

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

a) $\cos \alpha = \frac{1}{5}$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

b) $\sin \alpha = \frac{2}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

c) $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ và $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

Lời giải

a) Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$.

Mặt khác, từ $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ suy ra $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$.

Do đó $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{6}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2$ và $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{12}$.

b) Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$.

Mặt khác từ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ suy ra $\cos\alpha = -\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do đó $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{-\frac{\sqrt{5}}{3}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$. và $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{-\frac{2\sqrt{5}}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

c) Ta có: $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos\alpha < 0$.

Mặt khác từ $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ suy ra $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2\alpha}} = -\sqrt{\frac{1}{1 + (\sqrt{5})^2}} = -\frac{\sqrt{6}}{6}$

Mà ta có $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = \sqrt{5} \cdot \left(-\frac{\sqrt{6}}{6}\right) = -\frac{\sqrt{30}}{6}$.

d) Ta có: $\tan\alpha = \frac{1}{\cot\alpha} = \frac{1}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -\sqrt{2}$.

Vì $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\cos\alpha > 0$.

Mặt khác từ $1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$ suy ra $\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2\alpha}} = \sqrt{\frac{1}{1 + (-\sqrt{2})^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Mà ta có $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = -\sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Bài tập 2: Tính các giá trị lượng giác của góc α , biết:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$

b) $\cos\alpha = -0,7$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

c) $\tan\alpha = 2$ và $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

c) $\cot\alpha = \frac{7}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Lời giải

a) Ta có $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}$. Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\cos\alpha > 0$.

Do đó $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ suy ra $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ và $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = 2\sqrt{2}$.

b) Ta có $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - (-0,7)^2 = \frac{51}{100}$. Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin\alpha < 0$.

Do đó $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{51}}{10}$ suy ra $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\frac{\sqrt{51}}{10}}{-0,7} = \frac{\sqrt{51}}{7}$ và $\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{7\sqrt{51}}{51}$.

c) Ta có $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha = 1 + 2^2 = 5$.

Suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{1}{5}$. Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha > 0$. Do đó $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\sin \alpha = \tan \alpha \cos \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

d) Ta có $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = \frac{3}{7}$; $\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \left(\frac{7}{3}\right)^2 = \frac{58}{9}$.

Suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{9}{58}$. Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0$. Do đó $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{58}}{58}$.

Suy ra $\cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = \frac{7}{3} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{58}}{58}\right) = -\frac{7\sqrt{58}}{58}$.

Bài tập 3: Hãy thực hiện các yêu cầu trong mỗi trường hợp sau:

a) Biểu diễn $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right)$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0 đến $\frac{\pi}{4}$;

b) Biểu diễn $\tan 973^\circ$ qua giá trị lượng giác của góc có số đo từ 0° đến 45° .

Lời giải

a) $\sin\left(-\frac{29\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{29\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{5\pi}{3} + 8\pi\right) = -\sin\left(\frac{2\pi}{3} + \pi\right) = \sin\frac{2\pi}{3}$
 $= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\frac{\pi}{6}$.

b) $\tan 973^\circ = \tan(73^\circ + 5.180^\circ) = \tan 73^\circ = \tan(90^\circ - 17^\circ) = \cot 17^\circ$.

Bài tập 4: Tính các giá trị lượng giác của mỗi góc sau:

a) $\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) $\frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

a) $\sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$\tan\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$; $\cot\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ không xác định; $\cot\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cot\frac{\pi}{2} = 0$.

Với $k = 2l (l \in \mathbb{Z})$:

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + l2\pi\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + l2\pi\right) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$;

Với $k = 2l + 1 (l \in \mathbb{Z})$:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi + l2\pi\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1; \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi + l2\pi\right) = \cos\frac{3\pi}{2} = 0$$

Bài tập 5: Bằng cách sử dụng giá trị lượng giác của các góc liên quan đặc biệt, hãy tính:

a) $\cos\frac{-15\pi}{4}$

b) $\cot(-675^\circ)$

c) $\sin\frac{11\pi}{3}$

Lời giải

a) $\cos\frac{-15\pi}{4} = \cos\frac{15\pi}{4} = \cos\left(3\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = -\cos\frac{3\pi}{4} = \cos\left(\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

b) $\cot(-675^\circ) = \cot(45^\circ - 720^\circ) = \cot 45^\circ = 1$.

c) $\sin\frac{11\pi}{3} = \sin\left(3\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{2\pi}{3} = -\sin\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các hệ thức sau đây, hệ thức nào đúng?

A. $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$

B. $\sin x + \cos x = 1$

C. $\sin 2x + \cos 2x = 1$.

D. $\sin^2 x + \cos x^2 = 1$.

Lời giải

Theo công thức: $\sin x^2 + \cos x^2 = 1$.

Câu 2: Tìm khẳng định sai? (với điều kiện các hệ thức đã xác định)

A. $\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$.

B. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$.

C. $\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$.

D. $\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Lời giải

Khẳng định $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \sin \alpha$ là sai.

Câu 3: Cho góc α thỏa mãn $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $\tan \alpha < 0$.

B. $\cot \alpha > 0$.

C. $\sin \alpha > 0$.

D. $\cos \alpha > 0$.

Lời giải

Với $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$ ta có $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$, $\tan \alpha > 0$, $\cot \alpha > 0$.

Câu 4: Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Kết quả đúng là

A. $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha > 0$.

B. $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha < 0$.

C. $\sin \alpha > 0$, $\cos \alpha < 0$.

D. $\sin \alpha < 0$, $\cos \alpha > 0$.

A. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) < 0.$

B. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0.$

C. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \leq 0.$

D. $\tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) \geq 0.$

Lời giải

$$\text{Ta có } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \rightarrow 0 < \frac{3\pi}{2} - \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \begin{cases} \sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \\ \cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0 \end{cases} \Rightarrow \tan\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) > 0.$$

Câu 10: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $\sin(\alpha + \pi) < 0.$

B. $\cos(\alpha + \pi) > 0.$

C. $\tan(\pi - \alpha) > 0.$

D. $\cot(\pi - \alpha) < 0.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha < 0 \forall \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Câu 11: Cho $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$. Xét câu nào sau đây **đúng**?

A. $\cos \alpha > 0.$

B. $\sin \alpha > 0.$

C. $\tan \alpha > 0.$

D. $\cot \alpha > 0.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi \Leftrightarrow \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{4} < \alpha < 2\pi \text{ nên } \alpha \text{ thuộc cung phần tư thứ IV.}$$

Câu 12: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\tan \alpha > 0, \cot \alpha > 0.$

B. $\tan \alpha > 0, \cot \alpha < 0.$

C. $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0.$

D. $\tan \alpha < 0, \cot \alpha > 0.$

Lời giải

Điểm biểu diễn cung lượng giác α nằm góc phần tư thứ nhất nên $\tan \alpha > 0, \cot \alpha > 0.$

Câu 13: Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$

A. $\cot \alpha = 2.$

B. $\cot \alpha = \frac{1}{4}.$

C. $\cot \alpha = \frac{1}{2}.$

D. $\cot \alpha = \sqrt{2}.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

Câu 14: Tìm khẳng định sai trong các khẳng định sau đây?

A. $\tan 45^\circ < \tan 60^\circ.$

B. $\cos 45^\circ \leq \sin 45^\circ.$

C. $\sin 60^\circ < \sin 80^\circ.$

D. $\cos 35^\circ > \cos 10^\circ.$

Lời giải

Khi $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$ hàm $\cos \alpha$ là hàm giảm nên $\cos 35^\circ < \cos 10^\circ$ suy ra D sai.

Câu 15: Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\cos 150^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\cot 150^\circ = \sqrt{3}$. C. $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\sin 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Khẳng định đúng là: $\tan 150^\circ = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 16: Giá trị của $\tan \frac{\pi}{6}$ là

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\sqrt{3}$. D. $-\sqrt{3}$.

Lời giải

Trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM} = \frac{\pi}{6}$ khi đó $M\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$ nên $\tan \frac{\pi}{6} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 17: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ ($\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$), giá trị của $\cos \alpha$ bằng

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$. B. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\cos \alpha = \frac{2}{5}$. D. $\cos \alpha = -\frac{2}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Mà $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Câu 18: Hãy chọn kết quả sai trong các kết quả sau đây:

A. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. B. $\sin(\pi + \alpha) = \sin \alpha$.
C. $\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$. D. $\cot\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \tan \alpha$.

Lời giải

Ta có $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$.

Câu 19: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, ta được:

A. $\cos \alpha$. B. $\sin \alpha$. C. $-\cos \alpha$. D. $-\sin \alpha$.

Lời giải

Ta có: $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha$.

Câu 20: Giá trị của biểu thức $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. 1. D. 3

Lời giải

Ta có $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ = 3 - 1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}$.

Câu 21: Cho a là số thực bất kỳ. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

A. $\sin a + \cos a = 1$.

B. $\sin^3 a + \cos^3 a = 1$.

C. $\sin^4 a + \cos^4 a = 1$.

D. $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.

Lời giải

Ta có: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$; $\forall a \in \mathbb{R}$ nên D đúng.

Câu 22: Cho $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $\sin(\pi + \alpha) < 0$.

B. $\sin(\pi - \alpha) < 0$.

C. $\cos(\pi - \alpha) < 0$.

D. $\cos(\pi + \alpha) < 0$.

Lời giải

Ta có $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 2\pi < \alpha + \pi < \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \sin(\pi + \alpha) > 0; \cos(\pi + \alpha) > 0$

$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \pi - \alpha < 0 \Rightarrow \sin(\pi - \alpha) < 0; \cos(\pi - \alpha) > 0$.

Câu 23: Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$, ($90^\circ < \alpha < 180^\circ$). Tính $\cos \alpha$.

A. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

B. $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

C. $\cos \alpha = \frac{5}{3}$.

D. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{9}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{3}{5}$.

Vì $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Câu 24: Cho $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ với $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$?

A. $\frac{1}{5}$.

B. $\frac{3}{5}$.

C. $-\frac{3}{5}$.

D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$

Câu 25: Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}; \cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}; \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Lời giải:

Áp dụng công thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.

Câu 26: Cho góc α thỏa $\cot \alpha = \frac{3}{4}$ và $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Khẳng định nào sau đây **đúng**?

A. $\cos \alpha = \frac{4}{5}$. B. $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. C. $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$. D. $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Lời giải

Áp dụng công thức: $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow 1 + \frac{9}{16} = \frac{1}{\sin^2 \alpha} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{16}{25}$

Do $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \sin \alpha > 0 \Rightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Tính được các giá trị lượng giác của góc $\alpha = \frac{\pi}{3} + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$

c) $\tan \alpha = \sqrt{3}$

d) $\cot \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

a) Sai: $\sin\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) Sai: $\cos\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

c) Đúng: $\tan\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \tan \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$

d) Sai: $\cot\left(\frac{\pi}{3} + k2\pi\right) = \cot \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Câu 2: Tính được các giá trị lượng giác của góc $\alpha = -\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi$ (biết $k \in \mathbb{Z}$). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\tan \alpha = -1$

d) $\cot \alpha = -1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) Đúng: } \sin\left[-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] &= \sin\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi\right) \\ &= \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

b) Đúng:

$$\cos\left[-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + 2k\pi + \pi\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{4} + \pi\right) = -\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{c) Sai: } \tan\left[-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$$

$$\text{d) Sai: } \cot\left[-\frac{\pi}{4} + (2k+1)\pi\right] = \cot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\cot\frac{\pi}{4} = -1$$

Câu 3: Cho $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Xét dấu của các biểu thức sau. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) $A = \sin(\alpha + 90^\circ) > 0$

b) $B = \cos(\alpha - 45^\circ) > 0$

c) $C = \tan(270^\circ - \alpha) < 0$

d) $D = \cos(2\alpha + 90^\circ) > 0$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 90^\circ < \alpha + 90^\circ < 180^\circ \Rightarrow \sin(\alpha + 90^\circ) > 0$

b) Đúng: Ta có: $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow -45^\circ < \alpha - 45^\circ < 45^\circ \Rightarrow \cos(\alpha - 45^\circ) > 0$

c) Sai: Ta có: $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow -90^\circ < -\alpha < 0^\circ \Rightarrow 270^\circ + (-90^\circ) < 270^\circ + (-\alpha) < 270^\circ + 0^\circ$
 $\Rightarrow 180^\circ < 270^\circ - \alpha < 270^\circ \Rightarrow \tan(270^\circ - \alpha) > 0$

d) Sai: Ta có: $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow 90^\circ < 2\alpha + 90^\circ < 270^\circ \Rightarrow \cos(2\alpha + 270^\circ) < 0$

Câu 4: Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x , biết: $\sin x = -\frac{3}{5}$ với $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Xét tính

đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\cos x > 0$

b) $\cos x = -\frac{4}{5}$

c) $\tan x = \frac{3}{4}$

d) $\cot x = \frac{4}{3}$

Lời giải

a) Sai: Do $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos x < 0$

b) Đúng: Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos x = -\frac{4}{5}$

c) Đúng: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{3}{4}$

d) Đúng: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4}{3}$

Câu 5: Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x , biết: $\cos x = \frac{1}{4}$ với $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin x < 0$

b) $\sin x = -\frac{\sqrt{15}}{4}$

c) $\tan x = \sqrt{15}$

d) $\cot x = -\frac{1}{\sqrt{15}}$

Lời giải

a) Sai: Do $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0$

b) Sai: Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \Rightarrow \sin x = \frac{\sqrt{15}}{4}$

c) Đúng: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \sqrt{15}$

d) Sai: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\sqrt{15}}$

Câu 6: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét được dấu của các biểu thức sau. Khi đó:

a) $A = \cos(\alpha + \pi) < 0$

b) $B = \tan(\alpha - \pi) > 0$

c) $C = \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) < 0$

d) $D = \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) < 0$

Lời giải

a) Đúng: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \pi < \alpha + \pi < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(\alpha + \pi) < 0$

b) Đúng: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\pi < \alpha - \pi < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan(\alpha - \pi) > 0$

c) Sai: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{5} < \alpha + \frac{2\pi}{5} < \frac{9\pi}{10} \Rightarrow \sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) > 0$

d) Sai: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{8} < \alpha - \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{8} \Rightarrow \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) > 0$

Câu 7: Tính được các giá trị lượng giác còn lại của góc x biết: $\cos x = -\frac{5}{13}$ với $180^\circ < x < 270^\circ$. Xét

tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin x < 0$

b) $\tan x = \frac{12}{5}$

c) $\cot x = \frac{5}{12}$

d) $\sin x - \cos x = -\frac{12}{13}$

Lời giải

a) Đúng: Do $180^\circ < x < 270^\circ \Rightarrow \sin x < 0$

b) Đúng: Ta có: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$

$\Rightarrow \sin x = -\frac{12}{13}; \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{12}{5}$

c) Đúng: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{5}{12}$

d) Sai: $\sin x - \cos x = -\frac{7}{13}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho góc lượng giác $\alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Tìm k để $10\pi < \alpha < 11\pi$.

Lời giải

Ta có $10\pi < \alpha < 11\pi \longrightarrow \frac{19\pi}{2} < k2\pi < \frac{21\pi}{2} \longrightarrow k = 5$.

Câu 2: Tính giá trị của $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right]$.

Lời giải

Ta có $\cos\left[\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi\right] = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi + k2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Câu 3: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Khi đó $\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ bằng

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha = \frac{1}{3}.$$

Câu 4: Biết rằng $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ thì giá trị đúng của $\cos x$ là

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x \text{ và } \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x.$$

$$\text{Kết hợp với giá trị } \sin \frac{13\pi}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 6\pi\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

$$\text{Suy ra } \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin \frac{13\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\cos x + 1 = \cos x \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}.$$

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \end{cases} \longrightarrow \cos \alpha = -\frac{5}{13} \approx -0,38$$

Câu 6: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $\tan \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{2}{3} \\ \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = -\frac{2}{3} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89$$

Câu 7: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = -\frac{4}{3}$ và $\frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2}$. Tính $\sin \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{2017\pi}{2} < \alpha < \frac{2019\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \\ \frac{\pi}{2} + 504,2\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} + 504,2\pi \end{cases}$$

$$\longrightarrow \cos \alpha = -\frac{3}{5}. \text{ Mà } \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \Leftrightarrow -\frac{4}{3} = \frac{\sin \alpha}{-\frac{3}{5}} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5}.$$

Câu 8: Cho góc α thỏa mãn $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\tan \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} \sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \pm \frac{5}{13} \\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi. \end{cases} \longrightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13} \longrightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{12} \approx -0,42.$$

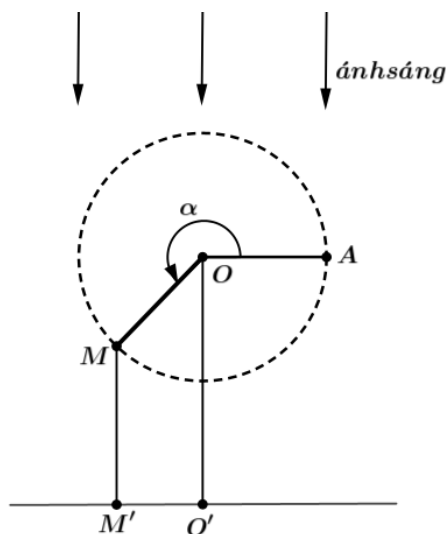
Câu 9: Độ dài của ngày từ lúc Mặt Trời mọc đến lúc Mặt Trời lặn ở một thành phố X trong ngày thứ t của năm được tính xấp xỉ bởi công thức $d(t) = 4\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t-80)\right] + 12$ ($t \in \mathbb{Z}$ và $1 \leq t \leq 365$).

Thành phố X vào ngày 31 tháng 1 có bao nhiêu giờ có Mặt Trời chiếu sáng? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

Ta có: $d(31) = 9,01$ giờ.

Câu 10: Thanh OM quay ngược chiều kim đồng hồ quanh góc O của nó trên một mặt phẳng thẳng đứng và in bóng vuông góc xuống mặt đất như hình bên. Vị trí ban đầu của thanh là OA . Hỏi độ dài bóng $O'M$ của OM khi thanh quay được $\frac{60}{13}$ vòng là bao nhiêu, biết độ dài thanh OM là 10 cm? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Lời giải

$$\text{Ta có } \alpha = \frac{60}{13} \cdot 2\pi = \frac{120\pi}{13}. \text{ Suy ra } O'M' = |OM \cos \alpha| = \left| 10 \cos \frac{120\pi}{13} \right| \approx 7,5 \text{ cm.}$$

-----HẾT-----

Dạng 4: Áp dụng tính chất của các giá trị lượng giác

Phương pháp: Sử dụng nhóm công thức liên hệ giữa các giá trị lượng giác để tính toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Tính giá trị lượng giác còn lại của góc α biết $\sin \alpha = \frac{1}{5}$ và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$

b) Cho $3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $A = 2 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$.

Lời giải

a) Ta có $\cot^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^2} = 25 \Rightarrow \cot^2 \alpha = 24$ hay $\cot \alpha = \pm 2\sqrt{6}$

Vì $\tan \alpha, \cot \alpha$ cùng dấu và $\tan \alpha + \cot \alpha < 0$ nên $\tan \alpha < 0, \cot \alpha < 0$

Do đó $\cot \alpha = -2\sqrt{6}$. Ta lại có $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} = -\frac{1}{2\sqrt{6}}$.

$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \Rightarrow \cos \alpha = \cot \alpha \sin \alpha = -2\sqrt{6} \cdot \frac{1}{5} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$

b) Ta có $3 \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3 \sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 6 \sin^4 \alpha - 2(1 - 2 \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1 \Leftrightarrow 4 \sin^4 \alpha + 4 \sin^2 \alpha - 3 = 0$

$\Leftrightarrow (2 \sin^2 \alpha - 1)(2 \sin^2 \alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin^2 \alpha - 1 = 0$ (Do $2 \sin^2 \alpha + 3 > 0$) suy ra $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}$.

Ta lại có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ suy ra $A = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Bài tập 2: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$

b) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} = 0$

Lời giải

a) $\frac{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha}$

$= \sin^2 \alpha - \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 - \sin \alpha \cos \alpha$.

b) $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} = \frac{\tan \alpha \cot \alpha + \tan \alpha}{\tan \alpha \cot \alpha - \tan \alpha} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha}$

$= \frac{\tan \alpha (\cot \alpha + 1)}{\tan \alpha (\cot \alpha - 1)} + \frac{1 + \cot \alpha}{1 - \cot \alpha} = \frac{\cot \alpha + 1}{\cot \alpha - 1} - \frac{1 + \cot \alpha}{\cot \alpha - 1} = 0$.

Bài tập 3: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } \sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) \qquad \text{b) } \left[1 + \tan^2(-\alpha + 11\pi)\right] \cdot \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

Lời giải

a) Ta có: $\sin(3\pi - \alpha) = \sin(\pi - \alpha + 2\pi) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$;

$$\sin\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} + 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Suy ra $\sin^2(3\pi - \alpha) + \sin^2\left(\alpha + \frac{5\pi}{2}\right) = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$

b) Ta có: $\tan(-\alpha + 11\pi) = \tan(-\alpha) = -\tan \alpha$;

$$\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2} - 2\pi\right) = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

Suy ra $\left[1 + \tan^2(-\alpha + 11\pi)\right] \cdot \sin^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = (1 + \tan^2 \alpha) \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \cdot \cos^2 \alpha = 1.$

Bài tập 4: Tính giá trị của các biểu thức sau đây:

a) $A = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 85^\circ$ (17 số hạng).

b) $B = \cos 5^\circ + \cos 10^\circ + \cos 15^\circ + \dots + \cos 175^\circ$ (35 số hạng).

Lời giải

a) Vận dụng: $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$, ta có: $\sin 85^\circ = \cos 5^\circ, \sin 80^\circ = \cos 10^\circ$
 $\sin 75^\circ = \cos 15^\circ, \dots, \sin 50^\circ = \cos 40^\circ.$

Vậy $A = (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + (\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ) + \dots + (\sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + \sin^2 45^\circ$

$$= \underbrace{1+1+\dots+1}_{8 \text{ số } 1} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{17}{2}$$

b) Vận dụng: $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha$ ta có: $\cos 175^\circ = -\cos 5^\circ, \cos 170^\circ = -\cos 10^\circ$

$\cos 165^\circ = -\cos 15^\circ, \dots, \cos 95^\circ = -\cos 85^\circ$

Vậy $B = (\cos 5^\circ + \cos 175^\circ) + (\cos 10^\circ + \cos 170^\circ) + \dots + (\cos 85^\circ + \cos 95^\circ) + \cos 90^\circ$

$$= \underbrace{0+0+\dots+0}_{17 \text{ số } 1} + \cos 90^\circ = 0.$$

Bài tập 5: Chứng minh các đẳng thức sau (giả sử các biểu thức sau đều có nghĩa)

a) $\cos^4 x + 2\sin^2 x = 1 + \sin^4 x$

b) $\frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1$

$$c) \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y}$$

$$d) \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$$

Lời giải

a) Đẳng thức tương đương với $\cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x + (\sin^2 x)^2 \Leftrightarrow \cos^4 x = (1 - \sin^2 x)^2$ (*)

Mà $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Do đó (*) $\Leftrightarrow \cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ (đúng).

b) Ta có $VT = \frac{\sin x + \cos x}{\sin^3 x} = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{\cos x}{\sin^3 x}$ mà $\cot^2 x + 1 = \frac{1}{\sin^2 x}$ và $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ nên

$$VT = \cot^2 x + 1 + \cot x(\cot^2 x + 1) = \cot^3 x + \cot^2 x + \cot x + 1 = VP.$$

c) Ta có $VT = \frac{\cot^2 x - \cot^2 y}{\cot^2 x \cdot \cot^2 y} = \frac{1}{\cot^2 y} - \frac{1}{\cot^2 x} = \tan^2 y - \tan^2 x$

$$= \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 1\right) - \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) = \frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x - \cos^2 y}{\cos^2 x \cdot \cos^2 y} = VP.$$

d) $VT = \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)}$

$$= \sqrt{(\sin^2 x)^2 - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{(\cos^2 x)^2 - 4\cos^2 x + 4} = \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2}$$

$$= (2 - \sin^2 x) + (2 - \cos^2 x) = 4 - (\sin^2 x + \cos^2 x) = 3$$

Mặt khác vì $\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ nên

$$VP = 3 \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 3 \Rightarrow VT = VP.$$

Bài tập 6: Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào x .

a) $A = \frac{\sin^6 x + \cos^6 x + 2}{\sin^4 x + \cos^4 x + 1}$

b) $B = \frac{1 + \cot x}{1 - \cot x} - \frac{2 + 2\cot^2 x}{(\tan x - 1)(\tan^2 x + 1)}$

c) $C = \sqrt{\sin^4 x + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{\cos^4 x + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x}$

Lời giải

a) Ta có $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$\sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)(\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)$$

$$= \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\text{Do đó } A = \frac{1 - 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2}{1 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 1} = \frac{3(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)}{2(1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha)} = \frac{3}{2}$$

Vậy A không phụ thuộc vào x .

$$\text{b) Ta có } B = \frac{1 + \frac{1}{\tan x}}{1 - \frac{1}{\tan x}} - \frac{2 + \frac{2\cos^2 x}{\sin^2 x}}{(\tan x - 1) \frac{1}{\sin^2 x}} = \frac{\tan x + 1}{\tan x - 1} - \frac{2(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\tan x - 1} = \frac{\tan x + 1 - 2}{\tan x - 1} = 1$$

Vậy B không phụ thuộc vào x .

$$\begin{aligned} \text{c) } C &= \sqrt{(1 - \cos^2 x)^2 + 6\cos^2 x + 3\cos^4 x} + \sqrt{(1 - \sin^2 x)^2 + 6\sin^2 x + 3\sin^4 x} \\ &= \sqrt{4\cos^4 x + 4\cos^2 x + 1} + \sqrt{4\sin^4 x + 4\sin^2 x + 1} = \sqrt{(2\cos^2 x + 1)^2} + \sqrt{(2\sin^2 x + 1)^2} \\ &= 2\cos^2 x + 1 + 2\sin^2 x + 1 = 3 \end{aligned}$$

Vậy C không phụ thuộc vào x .

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$, ta được:

- A. $\cos \alpha$. **B.** $\sin \alpha$. C. $-\cos \alpha$. D. $-\sin \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha.$$

Câu 2: Giá trị của biểu thức $S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. **B.** $-\frac{1}{2}$. C. 1. D. 3

Lời giải

$$\text{Ta có } S = 3 - \sin^2 90^\circ + 2\cos^2 60^\circ - 3\tan^2 45^\circ = 3 - 1^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot 1^2 = -\frac{1}{2}.$$

Câu 3: Các đẳng thức nào sau đây đồng thời xảy ra?

- A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}; \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.
C. $\sin \alpha = \frac{4}{5}; \cos \alpha = \frac{-3}{5}$. D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}; \cos \alpha = \frac{1}{4}$.

Lời giải:

$$\text{Áp dụng công thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

Câu 4: Cho $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \alpha}{2\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha}$ là

- A.** $\frac{5}{26}$. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $-\frac{5}{26}$. **D.** $-\frac{1}{3}$.

Lời giải:

$$P = \frac{\sin \alpha}{2\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha} = \frac{\sin \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{2\sin^3 \alpha + 3\cos^3 \alpha} = \frac{\tan^3 \alpha + \tan \alpha}{2\tan^3 \alpha + 8} = \frac{5}{26}$$

Câu 5: Rút gọn biểu thức $M = \sin^6 x + \cos^6 x$.

- A.** $M = 1 + 3\sin^2 x \cos^2 x$. **B.** $M = 1 - 3\sin^2 x$.
C. $M = 1 - \frac{3}{2}\sin^2 2x$. **D.** $M = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x)^3 + (\cos^2 x)^3 \\ &= (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x. \end{aligned}$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $M = \tan^2 x - \sin^2 x$.

- A.** $M = \tan^2 x$. **B.** $M = \sin^2 x$. **C.** $M = \tan^2 x \cdot \sin^2 x$. **D.** $M = 1$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \cdot \tan^2 x.$$

Câu 7: Rút gọn biểu thức $M = \cot^2 x - \cos^2 x$.

- A.** $M = \cot^2 x$. **B.** $M = \cos^2 x$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = \cot^2 x \cdot \cos^2 x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \cot^2 x - \cos^2 x = \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x = \cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) = \cos^2 x \cdot \cot^2 x.$$

Câu 8: Rút gọn biểu thức $M = (1\sin^2 x)\cot^2 x + (1\cot^2 x)$.

- A.** $M = \sin^2 x$. **B.** $M = \cos^2 x$. **C.** $M = \sin^2 x$. **D.** $M = \cos^2 x$.

Lời giải

$$\text{Ta biến đổi: } M = (\cot^2 x - \cos^2 x) + (1 - \cot^2 x) = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x.$$

Câu 9: Rút gọn biểu thức $M = \sin^2 \alpha \tan^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha - \tan^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha$.

- A.** $M = 1 + \sin^2 \alpha$. **B.** $M = \sin \alpha$. **C.** $M = 2\sin \alpha$. **D.** $M = 3$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \tan^2 \alpha (\sin^2 \alpha - 1) + 4\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha \\ &= \tan^2 \alpha (-\cos^2 \alpha) + 4\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha \\ &= -\sin^2 \alpha + 4\sin^2 \alpha + 3\cos^2 \alpha = 3(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 3. \end{aligned}$$

Câu 10: Rút gọn biểu thức $M = (\sin^4 x + \cos^4 x - 1)(\tan^2 x + \cot^2 x + 2)$.

- A. $M = -4$. B. $M = -2$. C. $M = 2$. **D. $M = 4$.**

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x - 1) \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} + 2 \right) \\ &= (-2\sin^2 x \cdot \cos^2 x) \left(\frac{\sin^4 x + \cos^4 x + 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} \right) = (-2) \cdot (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 = -2. \end{aligned}$$

Câu 11: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha}$.

- A. $P = 1 + 2 \tan^2 \alpha$.** B. $P = 1 - 2 \tan^2 \alpha$.
C. $P = -1 + 2 \tan^2 \alpha$. D. $P = -1 - 2 \tan^2 \alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1 + \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha = 1 + 2 \tan^2 \alpha.$$

Câu 12: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha}$.

- A. $P = -\frac{2 \cos \alpha}{\sin^2 \alpha}$. B. $P = \frac{2}{\sin^2 \alpha}$. C. $P = \frac{2}{1 + \cos \alpha}$. **D. $P = 0$.**

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{1 - \cos \alpha}{\sin^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} \\ &= \frac{1 - \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha)} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = \frac{1}{1 + \cos \alpha} - \frac{1}{1 + \cos \alpha} = 0. \end{aligned}$$

Câu 13: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} - \cos^2 \alpha$.

- A. $P = \tan^2 \alpha$.** B. $P = 1$. C. $P = -\cos^2 \alpha$. D. $P = \cot^2 \alpha$.

Lời giải

$$P = \frac{1 - \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)}{\cos^2 \alpha} = \frac{1 - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \tan^2 \alpha.$$

Câu 14: Đơn giản biểu thức $P = \frac{2 \cos^2 x - 1}{\sin x + \cos x}$.

- A. $P = \cos x + \sin x$. **B. $P = \cos x - \sin x$.**
C. $P = \cos 2x - \sin 2x$. D. $P = \cos 2x + \sin 2x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \frac{2 \cos^2 x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{\sin x + \cos x} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x + \cos x} = \cos x - \sin x.$$

Câu 15: Đơn giản biểu thức $P = \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha}$.

- A.** $P = 2 \tan^2 \alpha$. **B.** $P = \frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha}$. **C.** $P = 2 \cot^2 \alpha$. **D.** $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1}{\cot \alpha - \sin \alpha \cos \alpha} = \frac{\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha + \cos^2 \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \left(\frac{1}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)} \\ &= \frac{1 + 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha - 1}{\cos \alpha \cdot \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2 \tan^2 \alpha. \end{aligned}$$

Câu 16: Đơn giản biểu thức $P = \left(\frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} \right)^2 + 1$.

- A.** $P = 2$. **B.** $P = 1 + \tan \alpha$. **C.** $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$. **D.** $P = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{\sin \alpha + \tan \alpha}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(1 + \frac{1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha \left(\frac{\cos \alpha + 1}{\cos \alpha} \right)}{\cos \alpha + 1} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha..$$

$$\text{Suy ra } P = \tan^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}.$$

Câu 17: Đơn giản biểu thức $P = \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right)$.

- A.** $P = 2$. **B.** $P = 2 \cos \alpha$. **C.** $P = 2 \tan \alpha$. **D.** $P = 2 \sin \alpha$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } P &= \tan \alpha \left(\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \left(\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} - \sin \alpha \right) \\ &= \frac{1}{\cos \alpha} + \cos \alpha - \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{1 + \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2 \cos^2 \alpha}{\cos \alpha} = 2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Câu 18: Đơn giản biểu thức $P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$.

- A.** $P = 1$. **B.** $P = -1$. **C.** $P = \frac{1}{2}$. **D.** $P = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} = 1 - \cos^2 x \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 - \sin^2 x.$$

$$\text{Và } \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = \sin x \cdot \cos x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sin^2 x. \text{ Suy ra } P = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Câu 19: Tính $S = \sin^2 5^\circ + \sin^2 10^\circ + \sin^2 15^\circ + \dots + \sin^2 80^\circ + \sin^2 85^\circ$

- A. $\frac{19}{2}$. B. 8. C. $\frac{17}{2}$. D. 9.

Lời giải

$$S = \sin^2 5^0 + \sin^2 10^0 + \sin^2 15^0 + \dots \sin^2 80^0 + \sin^2 85^0$$

$$= (\sin^2 5^0 + \sin^2 85^0) + (\sin^2 10^0 + \sin^2 80^0) + \dots (\sin^2 15^0 + \sin^2 75^0) + \sin^2 45^0 = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$$

Câu 20: Với mọi góc α , biểu thức $\cos \alpha + \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right) + \cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) + \dots + \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right)$ nhận giá trị bằng

- A. 10 B. -10 C. 1 D. 0

Lời giải

Có 10 số hạng, chia thành 5 cặp.

$$\text{Có } \alpha + \frac{9\pi}{5} = \pi + \left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right) \Rightarrow \cos\left(\alpha + \frac{9\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{4\pi}{5}\right)$$

$$\text{Tương tự } \cos\left(\alpha + \frac{8\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{3\pi}{5}\right); \cos\left(\alpha + \frac{7\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right);$$

$$\cos\left(\alpha + \frac{6\pi}{5}\right) = -\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{5}\right); \cos\left(\alpha + \frac{5\pi}{5}\right) = -\cos \alpha. \text{ Do đó } P = 0$$

Câu 21: Biết $\tan x = 2$, giá trị của biểu thức $M = \frac{3\sin x - 2\cos x}{5\cos x + 7\sin x}$ bằng:

- A. $\frac{4}{9}$. B. $-\frac{4}{9}$. C. $\frac{4}{19}$. D. $-\frac{4}{19}$.

Lời giải

Cách 1: Chia cả tử và mẫu của M cho $\cos x$ ta có: $M = \frac{3\frac{\sin x}{\cos x} - 2}{5 + 7\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{3.2 - 2}{5 + 7.2} = \frac{4}{19}$.

Cách 2: Ta có: $\tan x = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \Leftrightarrow \sin x = 2\cos x$ thay $\sin x = 2\cos x$ vào M :

$$M = \frac{3.2\cos x - 2\cos x}{5\cos x + 7.2\cos x} = \frac{4\cos x}{19\cos x} = \frac{4}{19}.$$

Câu 22: Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$

- A. $-\frac{2}{\cos \alpha}$. B. $\frac{2}{\cos \alpha}$. C. $\frac{2}{\sin \alpha}$. D. $-\frac{2}{\sin \alpha}$.

Lời giải

$$\text{Đặt } A = \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin \alpha}{1+\sin \alpha}}$$

$$\text{Khi đó } A^2 = \left(\sqrt{\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}} + \sqrt{\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}} \right)^2 = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha} + \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} + 2 = \frac{4}{1-\sin^2\alpha} = \frac{4}{\cos^2\alpha}$$

$$\text{Vì } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \text{ nên } \cos\alpha > 0 \text{ do đó } A = \frac{2}{\cos\alpha}.$$

Câu 23: Cho các góc α, β thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi, \sin\alpha = \frac{1}{3}, \cos\beta = -\frac{2}{3}$. Tính $\sin(\alpha + \beta)$.

A. $\sin(\alpha + \beta) = -\frac{2+2\sqrt{10}}{9}$.

B. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{2\sqrt{10}-2}{9}$.

C. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}-4\sqrt{2}}{9}$.

D. $\sin(\alpha + \beta) = \frac{\sqrt{5}+4\sqrt{2}}{9}$.

Lời giải

$$\text{Do } \frac{\pi}{2} < \alpha, \beta < \pi \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha < 0 \\ \sin\beta > 0 \end{cases}.$$

$$\text{Ta có } \cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\frac{1}{9}} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}. \sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

$$\text{Suy ra } \sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = -\frac{2+2\sqrt{10}}{9}.$$

$$\text{Vậy } \sin(\alpha + \beta) = -\frac{2+2\sqrt{10}}{9}.$$

Câu 24: Với mọi $\alpha \in \mathbb{R}$ thì $\tan(2017\pi + \alpha)$ bằng

A. $-\tan\alpha$.

B. $\cot\alpha$.

C. $\tan\alpha$.

D. $-\cot\alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \tan(2017\pi + \alpha) = \tan\alpha.$$

$$5\cos\alpha + 12\sin\alpha = 0, \text{ ta có hệ phương trình } \begin{cases} 5\cos\alpha + 12\sin\alpha = 0 \\ 3\cos\alpha + 2\sin\alpha = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = -\frac{5}{13} \\ \cos\alpha = \frac{12}{13} \end{cases}.$$

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M = (\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2$.

A. $M = 1$.

B. $M = 2$.

C. $M = 4$.

D. $M = 4\sin x \cdot \cos x$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cdot \cos x = 1 + 2\sin x \cdot \cos x \\ (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 1 - 2\sin x \cdot \cos x \end{cases}$$

$$\text{Suy ra } M = 2.$$

Câu 26: Đơn giản biểu thức $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi)$, ta được

- A. $A = \cos \alpha + \sin \alpha$. B. $A = 2 \sin \alpha$. C. $A = \sin \alpha \cos \alpha$. **D. $A = 0$.**

Lời giải

Ta có $A = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \sin(\alpha - \pi) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha - \sin \alpha = 0$.

Câu 27: Rút gọn biểu thức $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(\pi - x)$ ta được

- A. $S = 0$. B. $S = \sin^2 x - \cos^2 x$. C. $S = 2 \sin x \cos x$. **D. $S = 1$.**

Lời giải

Ta có $S = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sin(\pi - x) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \cos(\pi - x)$
 $= \sin x \cdot \sin x - \cos x \cdot (-\cos x) = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Câu 28: Cho $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha)$ và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$. Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- A. $P + Q = 0$.** B. $P + Q = -1$. C. $P + Q = 1$. D. $P + Q = 2$.

Lời giải

Ta có $P = \sin(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) = -\sin \alpha \cdot (-\cos \alpha) = \sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Và $Q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha \cdot (-\sin \alpha) = -\sin \alpha \cdot \cos \alpha$.

Khi đó $P + Q = \sin \alpha \cdot \cos \alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 0$.

Câu 29: Giá trị biểu thức $P = \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - x) \right]^2$ bằng

- A. $\frac{1}{\sin^2 x}$. B. $\frac{1}{\cos^2 x}$. **C. $\frac{2}{\sin^2 x}$.** D. $\frac{2}{\cos^2 x}$.

Lời giải

Ta có $\tan \frac{17\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ và $\tan\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \cot x$.

Và $\cot \frac{13\pi}{4} = \cot\left(\frac{\pi}{4} + 3\pi\right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$; $\cot(7\pi - x) = -\cot x$.

Suy ra $P = (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2 \cot^2 x = \frac{2}{\sin^2 x}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $\tan x = -2$. Tính được các biểu thức $A_1 = \frac{5 \cot x + 4 \tan x}{5 \cot x - 4 \tan x}$, $A_2 = \frac{2 \sin x + \cos x}{\cos x - 3 \sin x}$, khi đó:

a) $\cot x = -\frac{1}{2}$

b) Vì $\tan x = -2$ nên $\cos x = 0$

c) $A_1 = -\frac{21}{11}$

d) $A_2 = \frac{3}{7}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\tan x = -2 \Rightarrow \cot x = -\frac{1}{2}$

b) Sai: Ta có $\tan x = -2$ nên $\cos x \neq 0$

c) Đúng: $A_1 = \frac{-\frac{5}{2} + 4 \cdot (-2)}{-\frac{5}{2} - 4 \cdot (-2)} = -\frac{21}{11}$

d) Sai: Chia tử và mẫu của biểu thức A_2 cho $\cos x$, ta được:

$$A_2 = \frac{\frac{2 \sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\cos x} - \frac{3 \sin x}{\cos x}} = \frac{2 \tan x + 1}{1 - 3 \tan x} = \frac{2 \cdot (-2) + 1}{1 - 3 \cdot (-2)} = -\frac{3}{7}$$

Câu 2: Cho $\cot x = 2$. Tính được các biểu thức $B_1 = \frac{2 \sin x + 3 \cos x}{3 \sin x - 2 \cos x}$, $B_2 = \frac{2}{\cos^2 x - \sin x \cos x}$, khi đó:

a) Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$.

b) $B_1 = -8$

c) $B_2 = -5$

d) $B_1 + B_2 = -13$

Lời giải

a) Đúng: Vì $\cot x = 2$ nên $\sin x \neq 0$

b) Đúng: Chia cả tử và mẫu của biểu thức B_1 cho $\sin x$, ta được:

$$B_1 = \frac{2 \frac{\sin x}{\sin x} + 3 \frac{\cos x}{\sin x}}{3 \frac{\sin x}{\sin x} - 2 \frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{2 + 3 \cot x}{3 - 2 \cot x} = \frac{2 + 3 \cdot 2}{3 - 2 \cdot 2} = -8$$

c) Sai: Chia cả tử và mẫu của biểu thức B_2 cho $\sin^2 x$, ta được:

$$B_2 = \frac{\frac{2}{\sin^2 x}}{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\sin^2 x}} = \frac{2(1 + \cot^2 x)}{\cot^2 x - \cot x} = \frac{2(1 + 2^2)}{2^2 - 2} = 5$$

d) Sai: $B_1 + B_2 = -8 + 5 = -3$

Câu 3: Cho góc lượng giác α thỏa mãn $\cos \alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- a) Giá trị sin của góc lượng giác α âm.
 b) Giá trị tan của góc lượng giác α dương.
 c) Giá trị của biểu thức $P = \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = \frac{2}{25}$.
 d) Giá trị của biểu thức $Q = \tan \alpha + \cot \alpha > 2$.

Lời giải

- a) Sai: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0$
 b) Đúng: Vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0 \Rightarrow \tan \alpha > 0$
 c) Vì $\cos \alpha = \frac{3}{5}, 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{5} \Rightarrow P = \sin^2 \alpha - 2 \cos^2 \alpha = \frac{16}{25} - \frac{18}{25} = -\frac{2}{25}$.
 d) Đúng: $Q = \tan \alpha + \cot \alpha = \frac{4}{3} + \frac{3}{4} = \frac{25}{12} > 2$

Câu 4: Cho $\tan \alpha = 2$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- a) $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.
 b) Khi $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ thì $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{5}$.
 c) Giá trị của biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha} = \frac{5}{31}$
 d) Cho $\frac{\sin^4 \alpha}{a} + \frac{\cos^4 \alpha}{b} = \frac{1}{a+b}$. Giá trị của biểu thức: $A = \frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{1}{a^3 + b^3}$.

Lời giải

- a) Đúng: Ta có: $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{1}{2}$.
 b) Sai: Ta có: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{5} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$;

Mà $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ nên $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

- c) Đúng: $B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$

Suy ra $B = \frac{2(4+1) - (4+1)}{8+3+2 \cdot 2(4+1)} = \frac{5}{31}$.

d) Sai: Đặt $\cos^2 \alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{a} + \frac{t^2}{b} = \frac{1}{a+b}$

$$\Leftrightarrow b(1-t)^2 + at^2 = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow at^2 + bt^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b} \Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2bt + b = \frac{ab}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)t^2 - 2b(a+b)t + b^2 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{b}{a+b}.$$

Suy ra $\cos^2 \alpha = \frac{b}{a+b}; \sin^2 \alpha = \frac{a}{a+b}.$

Vậy: $\frac{\sin^8 \alpha}{a^3} + \frac{\cos^8 \alpha}{b^3} = \frac{a}{(a+b)^4} + \frac{b}{(a+b)^4} = \frac{1}{(a+b)^3}.$

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cot \alpha = -3$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin \alpha > 0$

b) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

c) $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha + 3\sin^3 \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{10}{21}$

d) $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2 = 20$

Lời giải

a) Sai: Do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0$.

b) Đúng: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$ do $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0$

Từ hệ thức $1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$, suy ra $\sin \alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2 \alpha}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}.$

c) Đúng: $\frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha + 3\sin^3 \alpha + 2\cos \alpha} = \frac{10}{21}$. Xét biểu thức $P = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{\cos^3 \alpha + 3\sin^3 \alpha + 2\cos \alpha}$

Chia cả tử và mẫu cho $\sin^3 \alpha$ ta được:

$$P = \frac{\frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha} - \frac{1}{\sin^2 \alpha}}{\frac{\cos^3 \alpha}{\sin^3 \alpha} + 3 + 2 \frac{\cos \alpha}{\sin^3 \alpha}} = \frac{\cot \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha) - (1 + \cot^2 \alpha)}{\cot^3 \alpha + 3 + 2 \cdot \cot \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha)}$$

Thay $\cot \alpha = -3$ vào P ta được $P = \frac{10}{21}.$

d) Đúng: $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2 = 20$

Ta có $\tan \frac{17\pi}{4} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + 4\pi \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$ và $\tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) = \cot \alpha$.

Và $\cot \frac{13\pi}{4} = \cot \left(\frac{\pi}{4} + 3\pi \right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1$; $\cot (7\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

Suy ra $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2$

$= (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2 \cot^2 x = 2 + 2 \cdot (-3)^2 = 20$.

Do đó, mệnh đề $\left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot (7\pi - \alpha) \right]^2 = 20$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A = 2 \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= 2 \cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x \\ &= \cos^4 x - \sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + 3 \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x + \cos^2 x + 3 \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x + 2 \sin^2 x = 2 \end{aligned}$$

Câu 2: Cho góc α thỏa mãn $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ và $\sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1$. Tính $P = 2 \tan \alpha - \cot \alpha$.

Lời giải

Với $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ suy ra $\begin{cases} \sin \alpha < 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases}$.

Ta có $\begin{cases} \sin \alpha - 2 \cos \alpha = 1 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow (1 + 2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1$

$\Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha + 4 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = 0 \text{ (loại)} \\ \cos \alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\sin \alpha = -\frac{3}{5}$ (do $\sin \alpha < 0$) $\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{3}{4}$

và $\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{4}{3}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{3}{4}$ và $\cot \alpha = \frac{4}{3}$ vào P , ta được $P = \frac{1}{6} \approx 0,17$

Câu 3: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Tính $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$.

Lời giải

Ta có $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{1}{4}$.

Khi đó $P = \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha} = \frac{\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$
 $= \frac{(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha} = \frac{1 - 2(\sin \alpha \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \alpha)^2} = 14$.

Câu 4: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\tan \alpha - \cot \alpha = 1$. Tính $P = \tan \alpha + \cot \alpha$.

Lời giải

Ta có: $\tan \alpha - \cot \alpha = 1 \Leftrightarrow \tan \alpha - \frac{1}{\tan \alpha} = 1 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha - \tan \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ suy ra $\tan \alpha < 0$ nên $\tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$.

Thay $\tan \alpha = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ và $\cot \alpha = \frac{2}{1 - \sqrt{5}}$ vào P ta được $P = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1 - \sqrt{5}} = -\sqrt{5} \approx -2,24$

Câu 5: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25}$ và $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$. Tính $P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha$.

A. $P = \frac{91}{125}$. B. $P = \frac{49}{25}$. C. $P = \frac{7}{5}$. D. $P = \frac{1}{9}$.

Lời giải

Áp dụng $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b)$, ta có

$P = \sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^3 - 3\sin \alpha \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)$.

Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2\sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25}$.

Vì $\sin \alpha + \cos \alpha > 0$ nên ta chọn $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5}$.

Thay $\begin{cases} \sin \alpha + \cos \alpha = \frac{7}{5} \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{12}{25} \end{cases}$ vào P , ta được $P = \left(\frac{7}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{7}{5} = \frac{91}{125} \approx 0,73$

Câu 6: Cho góc α thỏa mãn $\tan \alpha = 2$. Tính $P = \frac{2\sin^2 \alpha + 3\sin \alpha \cdot \cos \alpha + 4\cos^2 \alpha}{5\sin^2 \alpha + 6\cos^2 \alpha}$.

Lời giải

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos^2 \alpha$ ta được

$P = \frac{2\tan^2 \alpha + 3\tan \alpha + 4}{5\tan^2 \alpha + 6} = \frac{2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4}{5 \cdot 2^2 + 6} = \frac{9}{13} \approx 0,69$

Câu 7: Huyện lỵ Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện lỵ Cái Nước tỉnh Cà Mau cùng nằm ở 105° kinh đông, nhưng Quản Bạ ở 23° vĩ bắc, Cái Nước ở vĩ độ 9° bắc. Hãy tính độ dài của cung kinh tuyến nối hai huyện lỵ đó (khoảng cách theo đường chim bay), coi Trái Đất có bán kính $6278km$.

Lời giải

Góc ở tâm chắn cung kinh tuyến nối huyện Quản Bạ tỉnh Hà Giang và huyện Cái Nước tỉnh Cà Mau có số đo bằng $23^\circ - 9^\circ = 14^\circ$.

Vậy độ dài cung kinh tuyến đó bằng $\frac{6378.14.\pi}{180} \approx 1558(km)$

-----HẾT-----

1 Công thức cộng

$$\oplus \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\oplus \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\oplus \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\oplus \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\oplus \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\oplus \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2 Công thức nhân đôi

$$\oplus \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\oplus \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\oplus \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\oplus \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3 Công thức hạ bậc

$$\oplus \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

4 Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\oplus \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\oplus \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\oplus \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

$$\oplus \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

5 Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\oplus \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}$$

$$\oplus \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa các giá trị lượng giác

Phương pháp: Sử dụng các công thức lượng giác đã nêu ở phần lý thuyết để giải quyết bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính:

a) $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right)$ biết $\sin a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

b) $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right)$ biết $\cos a = -\frac{1}{3}$ và $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$.

Mặt khác, từ $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = -\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Ta có: $\cos\left(a + \frac{\pi}{6}\right) = \cos a \cos \frac{\pi}{6} - \sin a \sin \frac{\pi}{6} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{6} - 1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6}$.

b) Vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin a < 0$, do đó $\tan a = \frac{\sin a}{\cos a} > 0$.

Mặt khác: $1 + \tan^2 a = \frac{1}{\cos^2 a}$ suy ra $\tan a = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^2} - 1} = 2\sqrt{2}$.

Ta có: $\tan\left(a - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan a - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan a \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{2\sqrt{2} - 1}{1 + 2\sqrt{2} \cdot 1} = \frac{9 - 4\sqrt{2}}{7}$.

Bài tập 2: Tính $\sin 2a$; $\cos 2a$; $\tan 2a$, biết:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$

Lời giải

a) Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$.

Mặt khác: $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$ suy ra $\cos a = -\sqrt{1 - \sin^2 a} = -\sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\sin 2a = 2\sin a \cos a = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}; \quad \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a = 1 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}.$$

$$\text{Suy ra } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-\frac{4\sqrt{2}}{9}}{\frac{7}{9}} = -\frac{4\sqrt{2}}{7}.$$

$$\text{b) Ta có: } (\sin a + \cos a)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \sin^2 a + \cos^2 a + 2\sin a \cos a = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \sin 2a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2a = -\frac{3}{4}.$$

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$ nên $\pi < 2a < \frac{3\pi}{2}$. Do đó $\cos 2a < 0$.

$$\text{Mặt khác: } \sin^2(2a) + \cos^2(2a) = 1 \text{ suy ra } \cos 2a = -\sqrt{1 - \sin^2(2a)} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)^2} = -\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

$$\text{Do đó: } \tan 2a = \frac{\sin 2a}{\cos 2a} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}.$$

Bài tập 3: Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $\sin a = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \pi$

b) $\sin a + \cos a = \frac{1}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < a < \frac{3\pi}{4}$

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } A = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \sin \frac{\pi}{10} \cos \frac{\pi}{15}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}} = \frac{\sin \frac{\pi}{15} \cos \frac{\pi}{10} + \cos \frac{\pi}{15} \sin \frac{\pi}{10}}{\cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15} \sin \frac{\pi}{5}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{10}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{15} + \frac{\pi}{5}\right)} = \frac{\sin \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$\text{b) Ta có: } B = \sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \left(\frac{1}{2} \cdot 2\sin \frac{\pi}{32} \cos \frac{\pi}{32}\right) \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{2} \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{32}\right) \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2\sin \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{16} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \cdot 2\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{8} = \frac{1}{8} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{16}$$

Bài tập 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \sin(x + 14^\circ)\sin(x + 74^\circ) + \sin(x - 76^\circ)\sin(x - 16^\circ)$

b) $B = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a}$

Lời giải

a) Ta có $A = \sin(14^\circ + x)\cos(16^\circ - x) + \sin(76^\circ - x)\sin(16^\circ - x)$

$$= \sin(14^\circ + x)\cos(16^\circ - x) + \cos(14^\circ + x)\sin(16^\circ - x) = \sin(14^\circ + 16^\circ + x - x) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

b) $A = \frac{\sin(a-b)}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c \cdot \cos a}$

Ta có: $A = \frac{\sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos c - \sin c \cdot \cos b}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cos a - \sin a \cdot \cos c}{\cos c \cdot \cos a}$

$$= \frac{\sin a \cdot \cos b}{\cos a \cdot \cos b} - \frac{\sin b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b} + \frac{\sin b \cdot \cos c}{\cos b \cdot \cos c} - \frac{\sin c \cdot \cos b}{\cos b \cdot \cos c} + \frac{\sin c \cdot \cos a}{\cos c \cdot \cos a} - \frac{\sin a \cdot \cos c}{\cos c \cdot \cos a}$$

$$= \tan a - \tan b + \tan b - \tan c + \tan c - \tan a = 0.$$

Bài tập 5: Không dùng máy tính cầm tay. Hãy tính các giá trị lượng giác sau:

a) $\cos 795^\circ$

b) $\tan \frac{7\pi}{12}$

Lời giải

a) Tính $\cos 795^\circ$

Vì $795^\circ = 75^\circ + 2 \cdot 360^\circ = 30^\circ + 45^\circ + 2 \cdot 360^\circ$ nên

$$\cos 795^\circ = \cos 75^\circ = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b) Tính $\tan \frac{7\pi}{12}$

$$\tan \frac{7\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

Bài tập 6: Tính $A = \cos^4 \frac{\pi}{12} - \sin^4 \frac{\pi}{12}$

Lời giải

Ta có: $A = \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) \left(\cos^2 \frac{\pi}{12} + \sin^2 \frac{\pi}{12} \right) = \cos^2 \frac{\pi}{12} - \sin^2 \frac{\pi}{12} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

Bài tập 7: Cho $\cos 2x = -\frac{4}{5}$, với $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$. Tính $\sin x, \cos x, \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right), \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right).$

Lời giải

Vì $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\sin x > 0$, $\cos x > 0$.

Áp dụng công thức hạ bậc, ta có :

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{9}{10} \Rightarrow \sin x = \frac{3}{\sqrt{10}} ; \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1}{10} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Theo công thức cộng, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin x \cos \frac{\pi}{3} + \cos x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30} + 3\sqrt{10}}{20}$$

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 2x \sin \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \sin 2x = -\frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 2 \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Bài tập 8: Rút gọn các biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}}$$

$$\text{b) } B = \sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9}$$

Lời giải

$$\text{a) } C = \frac{\sin \frac{\pi}{5} - \sin \frac{2\pi}{15}}{\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{2\pi}{15}} = \frac{2 \cos \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)}{-2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} + \frac{2\pi}{15} \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{5} - \frac{2\pi}{15} \right)} = -\frac{\cos \frac{\pi}{6}}{\sin \frac{\pi}{6}} = -\cot \frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$$

$$\text{b) } D = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9} = 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0.$$

Bài tập 9: Đơn giản biểu thức sau:

$$\text{a) } A = \frac{\cos a + 2 \cos 2a + \cos 3a}{\sin a + \sin 2a + \sin 3a}$$

$$\text{b) } B = \frac{\cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right)}{\cot a - \cot \frac{a}{2}}$$

$$\text{c) } C = \cos a + \cos(a + b) + \cos(a + 2b) + \dots + \cos(a + nb) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Lời giải

$$\text{a) } A = \frac{(\cos a + \cos 3a) + 2 \cos 2a}{(\sin a + \sin 3a) + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a \cos a + 2 \cos 2a}{2 \sin 2a \cos a + 2 \sin 2a} = \frac{2 \cos 2a (\cos a + 1)}{2 \sin 2a (\cos a + 1)} = \cot 2a$$

$$\text{b) } \text{Ta có } \cos\left(a + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(a - \frac{\pi}{3}\right) = 2 \cos a \cos \frac{\pi}{3} = \cos a \text{ và}$$

$$\cot a - \cot \frac{a}{2} = \frac{\cos a}{\sin a} - \frac{\cos \frac{a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin \frac{a}{2} \cos a - \cos \frac{a}{2} \sin a}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{\sin\left(\frac{a}{2} - a\right)}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = \frac{-\sin \frac{a}{2}}{\sin a \sin \frac{a}{2}} = -\frac{1}{\sin a}$$

$$\text{Suy ra } B = \frac{\cos a}{-\frac{1}{\sin a}} = -\sin a \cos a = -\frac{\sin 2a}{2}.$$

c) Ta có

$$C. 2 \sin \frac{b}{2} = 2 \sin \frac{b}{2} \cos a + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+b) + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+2b) + \dots + 2 \sin \frac{b}{2} \cos(a+nb)$$

$$= \sin\left(\frac{b}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{3b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{5b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{3b}{2} - a\right) \\ + \dots + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) + \sin\left(-\frac{(2n-1)b}{2} - a\right)$$

$$\sin\left(\frac{b}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{(2n+1)b}{2} + a\right) = 2 \sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)$$

$$\text{Suy ra } C = \frac{\sin(n+1)b \cos\left(\frac{nb}{2} - a\right)}{\sin \frac{b}{2}}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính $\sin 105^\circ$ ta được:

A. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. B. $-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. D. $-\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

$$\text{Có: } \sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cdot \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \cdot \sin 45^\circ.$$

$$\Rightarrow \sin 105^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Câu 2: Tính $\tan 105^\circ$ ta được:

A. $-(2+\sqrt{3})$. B. $2+\sqrt{3}$. C. $2-\sqrt{3}$. D. $-(2-\sqrt{3})$.

Lời giải

$$\tan 105^\circ = \frac{\sin 105^\circ}{\cos 105^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{-\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}} = -(2 + \sqrt{3}).$$

Câu 3: Rút gọn biểu thức: $\cos 54^\circ \cos 4^\circ - \cos 36^\circ \cos 86^\circ$, ta được:

A. $\cos 50^\circ$. B. $\cos 58^\circ$. C. $\sin 50^\circ$. D. $\sin 58^\circ$.

Lời giải

Ta có: $\cos 54^0 \cos 4^0 - \cos 36^0 \cos 86^0 = \cos 54^0 \cos 4^0 - \sin 54^0 \sin 4^0 = \cos(54^0 + 4^0) = \cos 58^0$

Câu 4: Rút gọn biểu thức $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ta được

- A. $\sqrt{2} \sin x$. **B.** $-\sqrt{2} \sin x$. C. $\sqrt{2} \cos x$. D. $-\sqrt{2} \cos x$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right)$$

$$= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x$$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{37\pi}{12}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. **B.** $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. **C.** $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos \frac{37\pi}{12} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12} + 2\pi\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{7\pi}{12}\right)$$

$$= \cos \frac{\pi}{2} \cos \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{2} \sin \frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$.

- A. $M = 1$. **B.** $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) = \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 7: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0$.

- A. $M = \frac{1}{16} \cos 10^0$. **B.** $M = \frac{1}{2} \cos 10^0$. C. $M = \frac{1}{4} \cos 10^0$. **D.** $M = \frac{1}{8} \cos 10^0$.

Lời giải

Vì $\sin 10^0 \neq 0$ nên suy ra

$$M = \frac{16 \sin 10^0 \cos 10^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0}{16 \sin 10^0} = \frac{8 \sin 20^0 \cos 20^0 \cos 40^0 \cos 80^0}{16 \sin 10^0}$$

$$\Rightarrow M = \frac{4 \sin 40^0 \cos 40^0 \cos 80^0}{16 \sin 10^0} = \frac{2 \sin 80^0 \cos 80^0}{16 \sin 10^0} = \frac{\sin 160^0}{16 \sin 10^0}$$

$$\Rightarrow M = \frac{\sin 20^\circ}{16\sin 10^\circ} = \frac{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ}{16\sin 10^\circ} = \frac{1}{8}\cos 10^\circ.$$

Câu 8: Công thức nào sau đây sai?

- A. $\cos(a - b) = \sin a \sin b + \cos a \cos b.$ **B.** $\cos(a + b) = \sin a \sin b - \cos a \cos b.$
 C. $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$ **D.** $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b.$

Lời giải

Ta có $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$

Câu 9: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a.$ **B.** $\cos 6a = 1 - 2\sin^2 3a.$
C. $\cos 6a = 1 - 6\sin^2 a.$ **D.** $\cos 6a = 2\cos^2 3a - 1.$

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha$, ta được $\cos 6a = \cos^2 3a - \sin^2 3a = 2\cos^2 3a - 1 = 1 - 2\sin^2 3a.$

Câu 10: Khẳng định nào sai trong các khẳng định sau?

- A. $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$ **B.** $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$
 C. $\sin x = 2\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}.$ **D.** $\cos 3x = \cos^3 x - \sin^3 x.$

Lời giải

Ta có $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x.$

Câu 11: Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

- A. $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$ **B.** $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$
 C. $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a - \frac{\pi}{4}\right).$ **D.** $\sin a + \cos a = -\sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

Lời giải

Ta có: $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \sin\left(a + \frac{\pi}{4}\right).$

Câu 12: Có bao nhiêu đẳng thức dưới đây là đồng nhất thức?

- 1) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$ 2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$
 3) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$ 4) $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $\cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right] = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right).$

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b)$, ta được

$$\sin 2x \cdot \sin 3x = \cos 2x \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos 2x \cdot \cos 3x - \sin 2x \cdot \sin 3x = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 5x = 0 \Leftrightarrow 5x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}.$$

Câu 19: Rút gọn $M = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

- A. $M = \sqrt{2} \sin x$. **B.** $M = -\sqrt{2} \sin x$. C. $M = \sqrt{2} \cos x$. D. $M = -\sqrt{2} \cos x$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$, ta được

$$\begin{aligned} M &= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2 \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} + x - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x + \frac{\pi}{4} - x + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \\ &= -2 \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = -\sqrt{2} \sin x. \end{aligned}$$

Câu 20: Rút gọn biểu thức $M = \tan x - \tan y$.

- A. $M = \tan(x - y)$. B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.
C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$. D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 21: Rút gọn biểu thức $M = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$.

- A. $M = \sin 2\alpha$. B. $M = \cos 2\alpha$. C. $M = -\cos 2\alpha$. **D.** $M = -\sin 2\alpha$.

Lời giải

Vì hai góc $\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)$ và $\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$ phụ nhau nên $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)$.

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } M &= \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right) = -\sin 2\alpha. \end{aligned}$$

Câu 22: Chọn đẳng thức đúng.

- A.** $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \sin a}{2}$. B. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \sin a}{2}$.

C. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 - \cos a}{2}$.

D. $\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos a}{2}$.

Lời giải

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a}{2}\right) = \frac{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right)}{2} = \frac{1 + \sin(-a)}{2} = \frac{1 - \sin a}{2}.$$

Câu 23: Gọi $M = \frac{\sin(y-x)}{\sin x \cdot \sin y}$ thì

A. $M = \tan x - \tan y$. **B.** $M = \cot x - \cot y$ C. $M = \cot y - \cot x$. D. $M = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin y}$.

Lời giải

Ta có : $M = \frac{\sin y \cdot \cos x - \cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin y \cdot \cos x}{\sin x \cdot \sin y} - \frac{\cos y \cdot \sin x}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos y}{\sin y} = \cot x - \cot y$.

Câu 24: Gọi $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x$ thì

A. $M = 2 \cos 2x (\cos x + 1)$.

B. $M = 4 \cos 2x \cdot \left(\frac{1}{2} + \cos x\right)$.

C. $M = \cos 2x (2 \cos x - 1)$.

D. $M = \cos 2x (2 \cos x + 1)$.

Lời giải

Ta có: $M = \cos x + \cos 2x + \cos 3x = (\cos x + \cos 3x) + \cos 2x$
 $= 2 \cos 2x \cdot \cos x + \cos 2x = \cos 2x (2 \cos x + 1)$.

Câu 25: Rút gọn biểu thức $M = \frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1}$.

A. $\tan 2x$

B. $\sin x$.

C. $2 \tan x$.

D. $2 \sin x$.

Lời giải

Ta có: $\frac{\sin 3x - \sin x}{2 \cos^2 x - 1} = \frac{2 \cos 2x \sin x}{\cos 2x} = 2 \sin x$.

Câu 26: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x}{2 \cos^2 x + \cos x - 1}$.

A. $\cos x$.

B. $2 \cos x - 1$.

C. $2 \cos x$.

D. $\cos x - 1$.

Lời giải

Ta có: $A = \frac{(1 + \cos 2x) + (\cos x + \cos 3x)}{(2 \cos^2 x - 1) + \cos x} = \frac{2 \cos^2 x + 2 \cos 2x \cos x}{\cos x + \cos 2x}$
 $= \frac{2 \cos x (\cos x + \cos 2x)}{\cos x + \cos 2x} = 2 \cos x$.

Câu 27: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\tan \alpha - \cot \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha} + \cos 2\alpha$.

A. 0.

B. $2 \cos^2 x$.

C. 2.

D. $\cos 2x$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}}{\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}} = \frac{\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}}{\frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin \alpha \cdot \cos \alpha}} = \frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = -\cos 2\alpha.$$

Do đó $A = -\cos 2\alpha + \cos 2\alpha = 0$.

Câu 28: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$.

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\cos 2\alpha$. C. $\tan 2\alpha$. D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải

Ta có:

$$A = \frac{(1 - \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha}{(1 + \cos 4\alpha) + \sin 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha.$$

Câu 29: Biểu thức $A = \frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $-\tan^4 \alpha$. B. $\tan^4 \alpha$. C. $-\cot^4 \alpha$. D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$; $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1$.

$$\text{Do đó: } A = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1} = \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^2 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^2 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha.$$

Câu 30: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha}$.

- A. $\tan \alpha$. B. $2\tan \alpha$. C. $\tan 2\alpha + \tan \alpha$. D. $\tan 2\alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{\sin 2\alpha + \sin \alpha}{1 + \cos 2\alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha(2\cos \alpha + 1)}{2\cos^2 \alpha + \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha(2\cos \alpha + 1)}{\cos \alpha(2\cos \alpha + 1)} = \tan \alpha.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biết $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$
 b) $\sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$
 c) $\cos 2\alpha = \frac{7}{9}$
 d) $\cot 2\alpha = \frac{7\sqrt{2}}{8}$

Lời giải

a) Đúng: $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha < 0$.

Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) Sai: $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

c) Đúng: $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{9}$

d) Sai: $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = -\frac{4\sqrt{2}}{7} \Rightarrow \cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha} = -\frac{7\sqrt{2}}{8}$

Câu 2: Cho biết $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4}$

c) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4}$

d) $\cot \alpha = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Lời giải

a) Đúng: Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin \alpha < 0, \cos \alpha < 0$.

b) Sai: Ta có: $\cos 2\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow 1 - 2 \sin^2 \alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{5}{8} \Rightarrow \sin \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{4}$;

c) Sai: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \frac{10}{16}} = -\frac{\sqrt{6}}{4}$;

d) Đúng: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{3} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

Câu 3: Cho biết $\sin \alpha = \frac{3}{5}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos \alpha < 0$

b) $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$

c) $\tan \alpha = \frac{3}{4}$

d) $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{48 - \sqrt{3}}{11}$

Lời giải

a) Đúng: Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$.

b) Đúng: Ta có: $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{4}{5}$

c) Sai: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{3}{4}$.

d) Sai: Ta có: $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{3}}{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{3}} = \frac{\tan \alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \tan \alpha}$.

Suy ra: $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\frac{3}{4} + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}\left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{-3 + 4\sqrt{3}}{4 + 3\sqrt{3}} = \frac{48 - 25\sqrt{3}}{11}$.

Câu 4: Cho biết $\sin \alpha = -\frac{12}{13}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos \alpha > 0$

b) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$

c) $\tan \alpha = -\frac{12}{5}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{5 - \sqrt{3}}{26}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \alpha + \sin \frac{\pi}{3} \sin \alpha$
 $= \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{6\sqrt{3}}{13}$. Do $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \cos \alpha > 0$.

b) Đúng: Ta có $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{5}{13}$.

c) Đúng: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{12}{5}$

d) Sai: $\cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{13} - \frac{6\sqrt{3}}{13} = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$.

Câu 5: Cho biết $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ và $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos x > 0$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

c) $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}-3}{8}$.

Lời giải

a) Đúng: Vì $0 < x < \frac{\pi}{2}$ nên $\cos x > 0$.

b) Đúng: Ta có: $\sin x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

c) Sai: $\tan x = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) Sai: $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}-3}{6}$.

Câu 6: Cho biết $\cos x = -\frac{12}{13}$ và $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\sin x > 0$

b) $\sin x = -\frac{5}{13}$

c) $\cot x = \frac{5}{12}$

d) $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$

Lời giải

a) Sai: Vì $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin x < 0$.

b) Đúng: Ta có: $\cos x = -\frac{12}{13} \Rightarrow \sin x = -\sqrt{1 - \cos^2 x} = -\sqrt{1 - \left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}$.

c) Sai: $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{12}{5}$

d) Đúng: $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin \frac{\pi}{3} \cos x - \cos \frac{\pi}{3} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{12}{13}\right) - \frac{1}{2} \left(-\frac{5}{13}\right) = \frac{5 - 12\sqrt{3}}{26}$

Câu 7: Cho biết $\tan x = \sqrt{2}$ và $0 < x < 90^\circ$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos x > 0$

b) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

c) $\sin x = \frac{\sqrt{6}}{3}$

d) $\cos(x - 30^\circ) = \frac{3 - \sqrt{6}}{6}$

Lời giải

a) Đúng: Vì $0 < x < 90^\circ$ nên $\cos x > 0$.

b) Đúng: Ta có: $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{3} \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

c) Đúng: Mặt khác: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \Rightarrow \sin x = \tan x \cos x = \frac{\sqrt{6}}{3}$.

d) Sai: $\cos(x - 30^\circ) = \cos x \cos 30^\circ + \sin x \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3 + \sqrt{6}}{6}$

Câu 8: Biết $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b là các góc nhọn. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\tan a = \frac{8}{15}$

b) $\sin(a - b) = \frac{21}{221}$

c) $\cos(a + b) = \frac{14}{22}$

d) $\tan(a + b) = \frac{17}{14}$.

Lời giải

a) Đúng: Vì a, b là các góc nhọn nên $\cos a > 0, \cos b > 0$.

Ta có: $\cos a = \sqrt{1 - \sin^2 a} = \frac{15}{17} \Rightarrow \tan a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{8}{15}$;

b) Đúng: $\cos b = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 b}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \cos b \tan b = \frac{5}{13}$.

Khi đó: $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}$.

c) Sai: $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{15}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{8}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{140}{221}$

d) Sai: $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} = \frac{\frac{8}{15} + \frac{5}{12}}{1 - \frac{8}{15} \cdot \frac{5}{12}} = \frac{171}{140}$.

Câu 9: Biết $0 < a, b < \frac{\pi}{2}, a + b = \frac{\pi}{4}$ và $\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) $\tan a + \tan b = -2 + 2\sqrt{2}$.
- b) $\tan a = -1 + \sqrt{2}$
- c) $\tan b = -1 - \sqrt{2}$
- d) $\tan a - \tan b = -2 - 2\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Đúng: $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \Rightarrow \tan a + \tan b = \tan(a + b)(1 - \tan a \tan b)$ mà $a + b = \frac{\pi}{4}$

và $\tan a \tan b = 3 - 2\sqrt{2} \Rightarrow \tan a + \tan b = \tan \frac{\pi}{4} [1 - (3 - 2\sqrt{2})] = -2 + 2\sqrt{2}$.

b) Đúng: Đặt $S = \tan a + \tan b; P = \tan a \tan b$.

Khi đó $\tan a, \tan b$ là nghiệm của phương trình

$$X^2 - SX + P = 0 \Leftrightarrow X^2 - (2\sqrt{2} - 2)X + 3 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow X = -1 + \sqrt{2}.$$

Suy ra $\tan a = \tan b = -1 + \sqrt{2}$.

c) Sai: $\tan b = -1 + \sqrt{2}$

d) Sai: $\tan a - \tan b = 0$

Câu 10: Cho $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

b) $\tan \alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \frac{\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$

d) $\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{\sqrt{10} - 2\sqrt{2}}{6}$

Lời giải

a) Đúng: $\sin \alpha = \frac{2}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{5}{9} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$

b) Đúng: $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$$\text{c) Sai: } \cos\left(\frac{\pi}{3} + \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha - \sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-\sqrt{5} - 2\sqrt{3}}{6}$$

$$\text{d) Sai: } \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \cos\frac{\pi}{4}\cos\alpha + \sin\frac{\pi}{4}\sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{-\sqrt{5}}{3}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{-\sqrt{10} + 2\sqrt{2}}{6}.$$

Câu 11: Cho góc α thỏa mãn $\frac{-\pi}{2} < \alpha < 0$ và $\cot\alpha = -3$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin\alpha > 0$

b) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$

c) $\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos^3\alpha + 3\sin^3\alpha + 2\cos\alpha} = \frac{10}{21}$

d) $\left[\tan\frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)\right]^2 + \left[\cot\frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - \alpha)\right]^2 = 20$

Lời giải

a) Sai: Do $\frac{-\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin\alpha < 0$.

b) Đúng: $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$. Do $\frac{-\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin\alpha < 0$

Từ hệ thức $1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$, suy ra $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1 + \cot^2\alpha}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$.

c) Đúng: $\frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos^3\alpha + 3\sin^3\alpha + 2\cos\alpha} = \frac{10}{21}$

Xét biểu thức $P = \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{\cos^3\alpha + 3\sin^3\alpha + 2\cos\alpha}$

Chia cả tử và mẫu cho $\sin^3\alpha$ ta được $P = \frac{\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha} - \frac{1}{\sin^2\alpha}}{\frac{\cos^3\alpha}{\sin^3\alpha} + 3 + 2\frac{\cos\alpha}{\sin^3\alpha}} = \frac{\cot\alpha(1 + \cot^2\alpha) - (1 + \cot^2\alpha)}{\cot^3\alpha + 3 + 2\cot\alpha(1 + \cot^2\alpha)}$

Thay $\cot\alpha = -3$ vào P ta được $P = \frac{10}{21}$.

d) Đúng: $\left[\tan\frac{17\pi}{4} + \tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right)\right]^2 + \left[\cot\frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - \alpha)\right]^2 = 20$

Ta có $\tan\frac{17\pi}{4} = \tan\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right) = \tan\frac{\pi}{4} = 1$ và $\tan\left(\frac{7\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$.

$$\text{Và } \cot \frac{13\pi}{4} = \cot \left(\frac{\pi}{4} + 3\pi \right) = \cot \frac{\pi}{4} = 1; \cot(7\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

$$\begin{aligned} \text{Suy ra } & \left[\tan \frac{17\pi}{4} + \tan \left(\frac{7\pi}{2} - \alpha \right) \right]^2 + \left[\cot \frac{13\pi}{4} + \cot(7\pi - \alpha) \right]^2 \\ & = (1 + \cot x)^2 + (1 - \cot x)^2 = 2 + 2\cot^2 x = 2 + 2 \cdot (-3)^2 = 20. \end{aligned}$$

Câu 12: Cho $\cos a = \frac{3}{4}$; $\sin a > 0$; $\sin b = \frac{3}{5}$; $\cos b < 0$. Xét tính đúng – sai của các phát biểu sau:

a) Giá trị của $\tan a = \frac{\sqrt{7}}{3}$.

b) Giá trị của $\cot b = -\frac{2}{3}$.

c) Giá trị của $\cos 2a + \cos 2b$ thuộc khoảng $\left(\frac{1}{2}; 1 \right)$.

d) Giá trị của $\cos(a+b)$ thuộc khoảng $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right)$.

Lời giải

a) Đúng : Ta có $\tan^2 a + 1 = \frac{1}{\cos^2 a} \Rightarrow \tan a = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a} - 1} = \sqrt{\frac{16}{9} - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

b) Sai: Ta có $\cot^2 b + 1 = \frac{1}{\sin^2 b} \Rightarrow \cot b = -\sqrt{\frac{1}{\sin^2 b} - 1} = -\sqrt{\frac{25}{9} - 1} = -\frac{4}{3}$

c) Sai : Ta có $\cos 2a + \cos 2b = 2\cos^2 a - 1 + 1 - 2\sin^2 b = 2 \cdot \frac{9}{16} - 2 \cdot \frac{9}{25} = \frac{81}{200} = 0,405 \notin \left(\frac{1}{2}; 1 \right)$

d) Sai : $\begin{cases} \cos a = \frac{3}{4} \\ \sin a > 0 \end{cases} \Rightarrow \sin a = \sqrt{1 - \cos^2 a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$ và $\begin{cases} \sin b = \frac{3}{5} \\ \cos b < 0 \end{cases} \Rightarrow \cos b = -\sqrt{1 - \sin^2 b} = -\frac{4}{5}$.

$$\text{Suy ra } \cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b = \frac{3}{4} \cdot \left(-\frac{4}{5} \right) - \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{3}{5} \left(1 + \frac{\sqrt{7}}{4} \right) \notin \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{3} \right)$$

Câu 13: Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) $\sin^2 x = \frac{1 + \sin 2x}{2}$

b) Nếu $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ thì $\cos 2\alpha = -\frac{7}{9}$

c) Nếu $\sin x = \frac{3}{4}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$ thì $\sin 2x = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

d) Cho $\cos \alpha = \frac{2}{3}$ với $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0 \right)$ biết $\tan \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = a + b\sqrt{c}$. ($a, b, c \in \mathbb{Z}, c \geq 0$) Khi đó $a + b + c = 0$.

Lời giải

a) Sai: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$

b) Đúng: $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{9}$

c) Đúng : Ta có $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{7}{16}$.

Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $\cos x > 0 \Rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ suy ra $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$

d) Đúng: Ta có $\tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1 = \frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^2} - 1 = \frac{5}{4}$

Vì $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ nên $\tan \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha = \frac{-\sqrt{5}}{2}$

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{-\sqrt{5}}{2} + 1}{1 - \left(\frac{-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot 1} = -9 + 4\sqrt{5}$$

Vậy $a = -9, b = 4, c = 5$ nên mệnh đề đúng.

Câu 14: Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

b) $\sin 31^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 31^\circ = \sin 19^\circ$.

c) Cho $\cos x = \frac{4}{5}, x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. Giá trị của $\sin 2x$ là $-\frac{24}{25}$.

d) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Biết giá trị của $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1 - a\sqrt{6}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ thì $a + b = 4$.

Lời giải

a) Đúng: Theo công thức cộng $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

b) Sai: Áp dụng công thức cộng: $\sin 31^\circ \cdot \cos 12^\circ + \cos 12^\circ \cdot \sin 31^\circ = \sin(31^\circ + 12^\circ) = \sin 43^\circ$

c) Đúng : Ta có $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25} \Rightarrow \sin x = -\frac{3}{5}$.

Mặt khác, vì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \Rightarrow \sin x < 0$.

$$\text{Vậy } \sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$$

d) Vì $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\text{Do đó } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + \sin \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6}.$$

với $a = 2$, $b = 6$. Tính $a + b = 8$. Nên $a + b = 4$ là sai.

Câu 15: Xét tính đúng sai của các đẳng thức sau:

a) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x$.

b) $4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 4x + \sin 2x - \sin 6x$.

c) $1 + \sin 2x + \cos 2x = 2\sqrt{2} \sin x \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

d) $\sin^2 x + 2 \sin(a - x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a - x) = \cos^2 a$.

Lời giải

a) Sai: Theo công thức cộng ta có $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x$.

b) Đúng: Áp dụng quy tắc từ tích sang tổng, ta được:

$$4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = 2(\cos x - \cos 3x) \sin 3x = \sin 4x + \sin 2x - \sin 6x.$$

Do đó $4 \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x = \sin 4x + \sin 2x - \sin 6x$

c) Sai: Ta có $1 + \sin 2x + \cos 2x = 2 \sin x \cos x + 2 \cos^2 x = 2 \cos x(\sin x + \cos x)$.

$$\text{Mà } \sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\cos x \frac{1}{\sqrt{2}} + \sin x \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

d) Ta có: $\sin^2 x + 2 \sin(a - x) \cdot \sin x \cdot \cos a + \sin^2(a - x)$

$$= \sin^2 x + \sin(a - x) \cdot [\sin(x + a) + \sin(x - a)] + \sin^2(a - x)$$

$$= \sin^2 x + \sin(a - x) \cdot [\sin(x + a) + \sin(x - a) + \sin(a - x)]$$

$$= \sin^2 x + \sin(a - x) \cdot [\sin(x + a) + \sin(x - a) - \sin(x - a)]$$

$$= \sin^2 x + \sin(a - x) \cdot \sin(x + a) = \frac{1 - \cos 2x}{2} - \frac{\cos 2a - \cos 2x}{2} = \frac{1 - \cos 2a}{2} = \sin^2 a.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ + \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$.

Lời giải

Áp dụng công thức nhân đôi $\cos^2 a - \sin^2 a = \cos 2a$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } M &= (\cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) \\ &= (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) + (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ) = \cos 30^\circ + \cos 30^\circ = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos^6 15^\circ - \sin^6 15^\circ$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có : } \cos^6 \alpha - \sin^6 \alpha &= (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)(\cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) \\ &= \cos 2\alpha \cdot \left[(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2 - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha \right] = \cos 2\alpha \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha \right). \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } M = \cos 30^\circ \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \sin^2 30^\circ \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{15\sqrt{3}}{32} \approx 0,81$$

Câu 3: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5}$ là

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{\pi}{5} + \sin \frac{\pi}{30} \sin \frac{\pi}{5} = \cos \left(\frac{\pi}{30} - \frac{\pi}{5} \right) = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$$

Câu 4: Giá trị của biểu thức $P = \frac{\sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18}}{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12}}$ là

Lời giải

$$\text{Áp dụng công thức } \begin{cases} \sin a \cdot \cos b - \cos a \cdot \sin b = \sin(a - b) \\ \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b = \cos(a + b) \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } \sin \frac{5\pi}{18} \cos \frac{\pi}{9} - \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{5\pi}{18} = \sin \left(\frac{5\pi}{18} - \frac{\pi}{9} \right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Và } \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{12} = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy } P = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.$$

Câu 5: Giá trị đúng của biểu thức $\frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ}$ bằng

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \frac{\tan 225^\circ - \cot 81^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot 261^\circ + \tan 201^\circ} &= \frac{\tan(180^\circ + 45^\circ) - \tan 9^\circ \cdot \cot 69^\circ}{\cot(180^\circ + 81^\circ) + \tan(180^\circ + 21^\circ)} \\ &= \frac{1 - \tan 9^\circ \cdot \tan 21^\circ}{\tan 9^\circ + \tan 21^\circ} = \frac{1}{\tan(9^\circ + 21^\circ)} = \frac{1}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Câu 6: Giá trị của biểu thức $M = \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \sin \frac{7\pi}{24} \sin \frac{11\pi}{24}$ bằng

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \frac{7\pi}{24} = \cos \frac{5\pi}{24} \text{ và } \sin \frac{11\pi}{24} = \cos \frac{\pi}{24}.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } M &= \sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{5\pi}{24} \cos \frac{5\pi}{24} \cos \frac{\pi}{24} = \frac{1}{4} \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \right) \cdot \left(2 \cdot \sin \frac{5\pi}{24} \cdot \cos \frac{5\pi}{24} \right) \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \sin \frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \left(\cos \frac{6\pi}{12} + \cos \frac{\pi}{3} \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{16} \approx 0,06 \end{aligned}$$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $A = \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6}$ là

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$, ta có

$$\begin{aligned} A &= \sin \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{48} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{24} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{16} \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{32} \approx 0,05 \end{aligned}$$

Câu 8: Tính giá trị của biểu thức $M = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cdot \cos \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } 2 \sin \frac{\pi}{7} \cdot M &= 2 \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} + 2 \cdot \cos \frac{6\pi}{7} \cdot \sin \frac{\pi}{7} \\ &= \sin \frac{3\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} + \sin \frac{5\pi}{7} - \sin \frac{3\pi}{7} + \sin \frac{7\pi}{7} - \sin \frac{5\pi}{7} = -\sin \frac{\pi}{7} + \sin \pi = -\sin \frac{\pi}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Vậy giá trị biểu thức } M = -\frac{1}{2}.$$

Câu 9: Cho góc α thỏa mãn $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ và $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \sin 2(\alpha + \pi)$.

Lời giải

$$\text{Ta có } P = \sin 2(\alpha + \pi) = \sin(2\alpha + 2\pi) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$\text{Từ hệ thức } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \text{ suy ra } \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5}.$$

Do $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$.

Thay $\sin \alpha = \frac{4}{5}$ và $\cos \alpha = -\frac{3}{5}$ vào P , ta được $P = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25} \approx -0,96$.

Câu 10: Cho góc α thỏa mãn $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ và $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. Tính $P = \frac{1 + \sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha}$.

Lời giải

Ta có $P = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = \frac{2 \cos \alpha (\sin \alpha + \cos \alpha)}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 2 \cos \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Do $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{3} \rightarrow P = \frac{2\sqrt{5}}{3} \approx 1,49$

Câu 11: Biết $\sin(\pi - \alpha) = -\frac{3}{5}$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Ta có $-\frac{3}{5} = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$.

Từ hệ thức $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, suy ra $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{4}{5}$.

Do $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên ta chọn $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

Suy ra $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha + \frac{1}{2} \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{3}{5}\right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{-4 - 3\sqrt{3}}{10} \approx -0,92$

Câu 12: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{3}{5}$. Tính $P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$.

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$, ta được

$$P = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} - \cos 2\alpha\right)$$

Ta có $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{7}{25}$.

Thay vào P , ta được $P = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{25}\right) = \frac{11}{100} \approx 0,11$

Câu 13: Cho góc α thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{4}{5}$. Tính $P = \cos 4\alpha$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 1 - 2 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}.$$

$$\text{Suy ra } P = \cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{49}{625} - 1 = -\frac{527}{625} = -0,8$$

Câu 14: Cho góc α thỏa mãn $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ và $\frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi$. Tính $P = \sin \alpha - \cos \alpha$.

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{3\pi}{4} < \alpha < \pi \text{ suy ra } \begin{cases} \sin \alpha > 0 \\ \cos \alpha < 0 \end{cases} \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha > 0.$$

$$\text{Ta có } (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 = 1 - \sin 2\alpha = 1 + \frac{4}{5} = \frac{9}{5}. \text{ Suy ra } \sin \alpha - \cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{Do } \sin \alpha - \cos \alpha > 0 \text{ nên } \sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{5}}. \text{ Vậy } P = \frac{3}{\sqrt{5}} \approx 1,34$$

-----HẾT-----

1 Công thức cộng

$$\oplus \sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\oplus \sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$$

$$\oplus \cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\oplus \cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\oplus \tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$$

$$\oplus \tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$$

2 Công thức nhân đôi

$$\oplus \sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\oplus \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$$

$$\oplus \cos 2a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\oplus \tan 2a = \frac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$$

3 Công thức hạ bậc

$$\oplus \sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\oplus \tan^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{1 + \cos 2a}$$

4 Công thức biến đổi tích thành tổng

$$\oplus \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) + \cos(a + b)]$$

$$\oplus \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

$$\oplus \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a - b) + \sin(a + b)]$$

$$\oplus \cos a \sin b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) - \sin(a - b)]$$

5 Công thức biến đổi tổng thành tích

$$\oplus \sin a + \sin b = 2 \sin \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\oplus \sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2}$$

$$\oplus \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{a + b}{2} \cos \frac{a - b}{2}$$

$$\oplus \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{a + b}{2} \sin \frac{a - b}{2}$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 2: Giá trị lượng giác của góc lượng giác

Phương pháp: Sử dụng các công thức lượng giác đã nêu ở phần lý thuyết để giải quyết bài toán

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho $\cos(a + 2b) = 2\cos a$. Chứng minh rằng: $\tan(a + b) \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos(a + 2b) = 2\cos a \Leftrightarrow \cos[(a + b) + b] = 2\cos[(a + b) - b]$$

$$\Leftrightarrow 3\sin(a + b) \cdot \sin b = -\cos(a + b) \cdot \cos b \Leftrightarrow \tan(a + b) \cdot \tan b = -\frac{1}{3}$$

Bài tập 2: Cho tam giác ABC , chứng minh rằng:

a) $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C$ (với điều kiện tam giác ABC không vuông);

b) $\tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1$

Lời giải

a) Do $A + B = \pi - C$ nên $\tan(A + B) = -\tan C \Leftrightarrow \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C$

$$\Leftrightarrow \tan A + \tan B + \tan C = \tan A \cdot \tan B \cdot \tan C.$$

b) Do $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}$ nên $\tan\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right) = \cot \frac{C}{2} \Leftrightarrow \frac{\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2}}{1 - \tan \frac{A}{2} \tan \frac{B}{2}} = \frac{1}{\tan \frac{C}{2}}$

$$\Leftrightarrow \tan \frac{A}{2} \cdot \tan \frac{B}{2} + \tan \frac{B}{2} \cdot \tan \frac{C}{2} + \tan \frac{C}{2} \cdot \tan \frac{A}{2} = 1.$$

Bài tập 3: Chứng minh các đẳng thức lượng giác sau:

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = \sin \alpha$

b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$

c) $\sin \alpha (2\cos 4\alpha + 2\cos 2\alpha + 1) = \sin 5\alpha$

d) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

Lời giải

a) $\sin(60^\circ + \alpha) - \sin(60^\circ - \alpha) = (\sin 60^\circ \cos \alpha + \cos 60^\circ \sin \alpha) - (\sin 60^\circ \cos \alpha - \cos 60^\circ \sin \alpha)$

$$= 2\cos 60^\circ \sin \alpha = 2 \cdot \frac{1}{2} \sin \alpha = \sin \alpha$$

b) $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^2 - 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$

$$= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\alpha = 1 - \frac{1}{4} (1 - \cos 4\alpha) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4\alpha$$

c) $\sin \alpha (2 \cos 4\alpha + 2 \cos 2\alpha + 1) = 2 \sin \alpha \cos 4\alpha + 2 \sin \alpha \cos 2\alpha + \sin \alpha$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-3\alpha) + \sin 5\alpha] + 2 \cdot \frac{1}{2} [\sin(-\alpha) + \sin 3\alpha] + \sin \alpha$$

$$= (-\sin 3\alpha + \sin 5\alpha) + (-\sin \alpha + \sin 3\alpha) + \sin \alpha = \sin 5\alpha$$

d) $\frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} = \frac{\cos \alpha \cos \beta (1 + \tan \alpha \tan \beta)}{\cos \alpha \cos \beta (1 - \tan \alpha \tan \beta)} = \frac{1 + \tan \alpha \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$.

Bài tập 4: Rút gọn các biểu thức sau:

a) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha}$ b) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}$ c) $\frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}$

Lời giải

a) $\frac{\sin \alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos \alpha + \cos 2\alpha} = \frac{\sin \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha}{1 + \cos \alpha + 2 \cos^2 \alpha - 1} = \frac{\sin \alpha (1 + 2 \cos \alpha)}{\cos \alpha (1 + 2 \cos \alpha)} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan \alpha$;

b) $\frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)} = \frac{-2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\alpha}{2}}{2 \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{2\alpha}{2}} = -\frac{\sin \frac{\pi}{4} \sin \alpha}{\cos \frac{\pi}{4} \sin \alpha} = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$

c) $\frac{\sin^2 \alpha}{4 - 4 \sin^2 \frac{\alpha}{2}} = \frac{\left(2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2}{4 \left(1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

Bài tập 5: Chứng minh đẳng thức sau:

a) $\sin^4 a + \cos^4 a = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a$. b) $\cos a - \sin a = \sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right)$

c) $\sin a + \sqrt{3} \cos a = 2 \sin\left(a + \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải

a) $\sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 a + \cos^2 a)^2 - 2 \sin^2 a \cos^2 a = 1 - 2(\sin a \cdot \cos a)^2$
 $= 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2a = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \cos 4a}{2}\right) = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos 4a$

b) Ta có: $\sqrt{2} \cos\left(a + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \left(\cos a \cos \frac{\pi}{4} - \sin a \sin \frac{\pi}{4}\right)$

$$= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos a - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin a \right) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos a - \sin a) = \cos a - \sin a$$

c) Ta có: $2 \sin \left(a + \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\sin a \cos \frac{\pi}{3} + \cos a \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} \sin a + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos a \right) = \sin a + \sqrt{3} \cos a.$

Bài tập 6: Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC ta đều có

$$\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}.$$

Lời giải

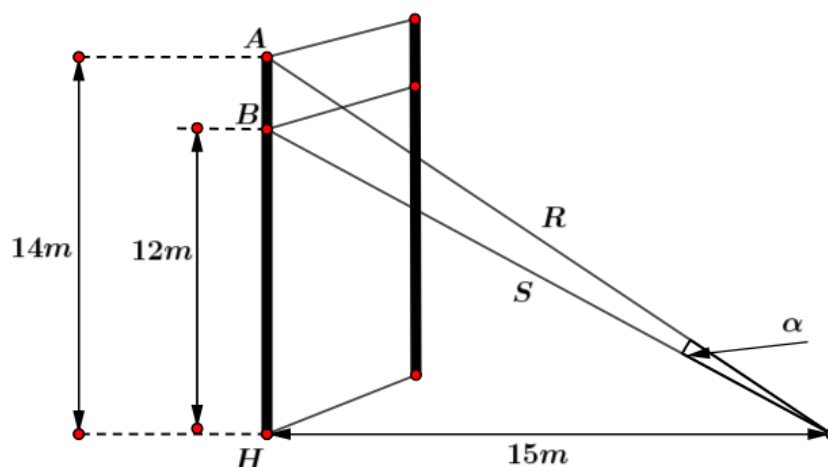
Ta có: $VT = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \sin \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}.$

Mặt khác, trong tam giác ABC ta có: $A+B+C = \pi$ nên $\frac{A+B}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}.$

Từ đó suy ra: $\sin \frac{A+B}{2} = \cos \frac{C}{2}, \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}.$

Vậy $VT = 2 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A-B}{2} + 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{C}{2}$
 $= 2 \cos \frac{C}{2} \left(\cos \frac{A-B}{2} + \cos \frac{A+B}{2} \right) = 4 \cos \frac{C}{2} \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} = VP$

Bài tập 7: Một sợi cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 14 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 12 m. Biết rằng hai sợi cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 15 m.



- Tính $\tan \alpha$ ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên.
- Tính số đo góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).

Lời giải

a) Ta có: $\alpha = \widehat{AOH} - \widehat{BOH}.$

Trong tam giác vuông AOH ta có: $\tan \widehat{AOH} = \frac{AH}{OH} = \frac{14}{15}.$

Trong tam giác vuông BOH ta có: $\tan \widehat{BOH} = \frac{BH}{OH} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

$$\text{Vậy } \tan \alpha = \tan(\widehat{AOH} - \widehat{BOH}) = \frac{\tan \widehat{AOH} - \tan \widehat{BOH}}{1 + \tan \widehat{AOH} \cdot \tan \widehat{BOH}} = \frac{\frac{14}{15} - \frac{4}{5}}{1 + \frac{14}{15} \cdot \frac{4}{5}} = \frac{10}{131}.$$

b) Từ kết quả câu a ta có: $\alpha \approx 4^\circ$.

Bài tập 8: Trong vật lí thì phương trình tổng quát của một vật dao động điều hòa cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hòa có phương trình:

$$x_1(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) (\text{cm}); x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right) (\text{cm})$$

Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x(t) = x_1(t) + x_2(t) = 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right) \cos \frac{\pi}{4} \right] = 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{3}t - \frac{\pi}{12}\right)$$

$$\text{Biên độ là } A = 2\sqrt{2} \text{ và pha ban đầu là } \varphi = -\frac{\pi}{12}$$

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Rút gọn biểu thức $A = \frac{1 - \sin a - \cos 2a}{\sin 2a - \cos a}$.

- A. 1. B. $\tan a$. C. $\frac{5}{2}$. D. $2 \tan a$.

Lời giải

$$\text{Ta có } A = \frac{1 - \sin a + 2 \sin^2 a - 1}{2 \sin a \cdot \cos a - \cos a} = \frac{\sin a (2 \sin a - 1)}{\cos a (2 \sin a - 1)} = \frac{\sin a}{\cos a} = \tan a.$$

Câu 2: Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sin x + \sin \frac{x}{2}}{1 + \cos x + \cos \frac{x}{2}}$ được:

- A. $\tan \frac{x}{2}$. B. $\cot x$. C. $\tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$. D. $\sin x$.

Lời giải

Ta có $\sin x = \sin \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$; $1 + \cos x = 1 + \cos \left(2 \cdot \frac{x}{2} \right) = 2 \cos^2 \frac{x}{2}$

Do đó $A = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)}{\cos \frac{x}{2} (2 \cos \frac{x}{2} + 1)} = \tan \frac{x}{2}$.

Câu 3: Rút gọn biểu thức $A = \sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha$.

- A. $\frac{1}{2} \sin 2\alpha$. B. $-\frac{1}{2} \sin 4\alpha$. C. $\frac{3}{4} \sin 4\alpha$. D. $\frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Lời giải

Ta có $\sin \alpha \cdot \cos^5 \alpha - \sin^5 \alpha \cdot \cos \alpha = \sin \alpha \cdot \cos \alpha (\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha)$
 $= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)$
 $= \frac{1}{2} \sin 2\alpha (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \cos 2\alpha = \frac{1}{4} \sin 4\alpha$.

Câu 4: Biểu thức $M = \cos(-53^\circ) \cdot \sin(-337^\circ) + \sin(307^\circ) \cdot \sin(113^\circ)$ có giá trị bằng:

- A. $-\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ấn máy tính được đáp án A.

Câu 5: Rút gọn biểu thức: $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ)$, ta được

- A. $\sin 2a$. B. $\cos 2a$. C. $-\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $\sin(a - 17^\circ) \cdot \cos(a + 13^\circ) - \sin(a + 13^\circ) \cdot \cos(a - 17^\circ) = \sin[(a - 17^\circ) - (a + 13^\circ)]$
 $= \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2}$.

Câu 6: Giá trị của biểu thức $\cos \frac{37\pi}{12}$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$. C. $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

Lời giải

$\cos \frac{37\pi}{12} = \cos \left(2\pi + \pi + \frac{\pi}{12} \right) = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{12} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = -\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right)$

$$= -\left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Câu 7: Rút gọn biểu thức: $\cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x$ ta được kết quả là

- A. 0. B. $-\cos x$. C. $-2\cos x$. D. $\sin x - \cos x$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \cos(120^\circ - x) + \cos(120^\circ + x) - \cos x &= -\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \cos x \\ &= -2\cos x. \end{aligned}$$

Câu 8: Khẳng định nào dưới đây sai?

- A. $2\sin^2 a = 1 - \cos 2a$. B. $\cos 2a = 2\cos a - 1$.
C. $\sin 2a = 2\sin a \cos a$. D. $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cdot \cos a$.

Lời giải

Có $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

Câu 9: Gọi $M = \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ$ thì:

- A. $M = 1$. B. $M = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $M = \frac{1}{4}$. D. $M = 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} M &= \cos^4 15^\circ - \sin^4 15^\circ = (\cos^2 15^\circ)^2 - (\sin^2 15^\circ)^2 = (\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ)(\cos^2 15^\circ + \sin^2 15^\circ) \\ &= \cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ = \cos(2 \cdot 15^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Câu 10: Giá trị đúng của $\cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$. B. $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{4}$. D. $-\frac{1}{4}$.

Lời giải

Sử dụng máy tính để dàng có được đáp án B.

Câu 11: Cho hai góc nhọn a và b . Biết $\cos a = \frac{1}{3}$, $\cos b = \frac{1}{4}$.

Giá trị $\cos(a + b) \cdot \cos(a - b)$ bằng

- A. $-\frac{113}{144}$. B. $-\frac{115}{144}$. C. $-\frac{117}{144}$. D. $-\frac{119}{144}$.

Lời giải

$$\cos(a + b) \cdot \cos(a - b) = \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = \cos^2 a + \cos^2 b - 1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 1 = -\frac{119}{144}$$

Câu 12: Nếu biết $\sin a = \frac{8}{17}$, $\tan b = \frac{5}{12}$ và a, b đều là các góc nhọn và dương thì $\sin(a - b)$ là:

A. $\frac{20}{220}$.

B. $-\frac{20}{220}$.

C. $\frac{21}{221}$.

D. $\frac{22}{221}$.

Lời giải

Ta có a, b đều là các góc nhọn và dương.

$$\sin a = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos a = \sqrt{1 - \frac{64}{289}} = \frac{15}{17}.$$

$$\tan b = \frac{5}{12} \Rightarrow \cos b = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{25}{144}}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin b = \tan b \cdot \cos b = \frac{5}{13}.$$

$$\Rightarrow \sin(a - b) = \frac{8}{17} \cdot \frac{12}{13} - \frac{15}{17} \cdot \frac{5}{13} = \frac{21}{221}.$$

Câu 13: Nếu $\tan x = 0.5$; $\sin y = \frac{3}{5}$ ($0 < y < 90^\circ$) thì $\tan(x + y)$ bằng:

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

$$\tan x = 0.5 = \frac{1}{2}, \sin y = \frac{3}{5} \left(0 < y < 90^\circ\right) \Rightarrow \cos y = \frac{4}{5} \Rightarrow \tan y = \frac{3}{4}.$$

$$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3}{4}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}} = 2.$$

Câu 14: Gọi $M = \tan x - \tan y$ thì:

A. $M = \tan(x - y)$.

B. $M = \frac{\sin(x + y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

C. $M = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cdot \cos y}$.

D. $M = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } M = \tan x - \tan y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x \cos y - \cos x \sin y}{\cos x \cos y} = \frac{\sin(x - y)}{\cos x \cos y}.$$

Câu 15: Gọi $M = \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) - \sin(a + b) \cdot \sin(a - b)$ thì:

A. $M = 1 - 2\cos^2 a$.

B. $M = 1 - 2\sin^2 a$.

C. $M = \cos 4a$.

D. $M = \sin 4a$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } M &= \cos(a + b) \cdot \cos(a - b) - \sin(a + b) \cdot \sin(a - b) \\ &= \cos(a + b + a - b) = \cos 2a = 1 - 2\sin^2 a. \end{aligned}$$

Câu 16: Nếu $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$ thì $\sin 2x$ bằng

- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $-\frac{3}{4}$

Lời giải

Ta có $\sin x + \cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{-3}{4}$

Câu 17: Biết $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Giá trị của $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $P = 0$. B. $P = -1$. C. $P = \frac{1}{2}$. D. $P = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Ta có $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \cos \alpha = \pm \frac{1}{2}$.

Từ $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \Rightarrow \cos \alpha < 0$ nên $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$.

Do đó $P = \cos\left(2\alpha - \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3}$
 $= (2\cos^2 \alpha - 1) \cdot \frac{1}{2} + 2\sin \alpha \cos \alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos^2 \alpha - \frac{1}{2} + \sqrt{3} \sin \alpha \cos \alpha = -1$.

Câu 18: Biểu thức $\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $\sin 2\alpha$. B. $\cos 2\alpha$. C. $\tan 2\alpha$. D. $\cot 2\alpha$.

Lời giải

$\frac{1 + \sin 4\alpha - \cos 4\alpha}{1 + \sin 4\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{2\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cos 2\alpha} = \frac{2\sin 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\cos 2\alpha(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)} = \tan 2\alpha$.

Câu 19: Biểu thức $\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$ có kết quả rút gọn bằng:

- A. $-\tan^4 \alpha$. B. $\tan^4 \alpha$. C. $-\cot^4 \alpha$. D. $\cot^4 \alpha$.

Lời giải

$\frac{3 - 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}{3 + 4\cos 2\alpha + \cos 4\alpha} = \frac{3 - 4(1 - 2\sin^2 \alpha) + 2(1 - 2\sin^2 \alpha)^2 - 1}{3 + 4(2\cos^2 \alpha - 1) + 2(2\cos^2 \alpha - 1)^2 - 1}$
 $= \frac{8\sin^2 \alpha - 8\sin^4 \alpha + 8\sin^4 \alpha}{8\cos^2 \alpha - 8\cos^4 \alpha + 8\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha$.

Câu 20: Khi $\alpha = \frac{\pi}{6}$ thì biểu thức $\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha}$ có giá trị bằng.

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{9}$. D. $\frac{1}{12}$.

Lời giải

$$\frac{\sin^2 2\alpha + 4\sin^4 \alpha - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}{4 - \sin^2 2\alpha - 4\sin^2 \alpha} = \frac{4\sin^4 \alpha}{4(1 - \sin^2 \alpha) - 4\sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha}$$

$$= \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)} = \frac{\sin^4 \alpha}{\cos^4 \alpha} = \tan^4 \alpha \Rightarrow \text{BT} = \tan^4 \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{9}.$$

Câu 21: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ thì biểu thức $a \sin x + b \cos x$ bằng:

- A. a . B. b . C. $\frac{a+b}{a}$. D. $\frac{a+b}{b}$.

Lời giải

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} = \frac{a}{b}$ nên $\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a^2}{b^2}} = \frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$.

Vậy $a \sin x + b \cos x = \frac{2a^2b}{a^2+b^2} + \frac{b^3-a^2b}{a^2+b^2} = b$.

Câu 22: Nếu $\tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ thì giá trị của biểu thức $\frac{\sin x}{2-3\cos x}$ bằng.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Đặt $t = \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ nên $\sin x = \frac{2t}{1+t^2} = \frac{2\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} = \frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{4}} = \frac{3}{5}$.

Vậy $\frac{\sin x}{2-3\cos x} = \frac{\frac{4}{5}}{2-\frac{9}{5}} = 4$.

Câu 23: Biết $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$ thì biểu thức $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x}$ có giá trị bằng:

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$. C. $-2\sqrt{2}$. D. $\frac{-1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Ta có: $\sin x = \frac{1}{3}$ và $90^\circ < x < 180^\circ$.

$\Rightarrow \cos x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$, $\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \frac{-4\sqrt{2}}{9}$, $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = \frac{7}{9}$

Thay vào biểu thức ta được: $\frac{1 + \sin 2x + \cos 2x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} = \frac{1 - \frac{4\sqrt{2}}{9} + \frac{7}{9}}{1 - \frac{4\sqrt{2}}{9} - \frac{7}{9}} = -2\sqrt{2}$.

Câu 24: Rút gọn biểu thức $P = \cos(120^\circ + x) + \cos(120^\circ - x) - \cos x$ ta được kết quả là:

- A. 0. B. $-\cos x$. C. $-2\cos x$. D. $\sin x - \cos x$.

Lời giải

Ta có: $P = 2\cos 120^\circ \cos x - \cos x = -\cos x - \cos x = -2\cos x$.

Câu 25: Tích số $\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ$ bằng

- A. $\frac{1}{16}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{3}{16}$. D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải

$$\cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \cos 50^\circ \cdot \cos 70^\circ = \cos 10^\circ \cdot \cos 30^\circ \cdot \frac{1}{2} (\cos 120^\circ + \cos 20^\circ)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(-\frac{\cos 10^\circ}{2} + \frac{\cos 30^\circ + \cos 10^\circ}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{16}.$$

Câu 26: Cho biểu thức $A = \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b$. Hãy chọn kết quả đúng

- A. $A = 2\cos a \cdot \sin b \cdot \sin(a+b)$. B. $A = 2\sin a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$.
C. $A = 2\cos a \cdot \cos b \cdot \cos(a+b)$. D. $A = 2\sin a \cdot \sin b \cdot \cos(a+b)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } A = \sin^2(a+b) - \sin^2 a - \sin^2 b = \sin^2(a+b) - \frac{1 - \cos 2a}{2} - \frac{1 - \cos 2b}{2}$$

$$= \sin^2(a+b) - 1 + \frac{1}{2}(\cos 2a + \cos 2b) = -\cos^2(a+b) + \cos(a+b)\cos(a-b)$$

$$= \cos(a+b)[\cos(a-b) - \cos(a+b)] = 2\sin a \sin b \cos(a+b).$$

Câu 27: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó.

- A. $\sin C = -\sin(A+B)$. B. $\cos C = \cos(A+B)$.
C. $\tan C = \tan(A+B)$. D. $\cot C = -\cot(A+B)$.

Lời giải

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $A+B+C=180^\circ \Rightarrow C=180^\circ - (A+B)$.

Do đó C và $(A+B)$ là 2 góc bù nhau.

$$\Rightarrow \sin C = \sin(A+B); \cos C = -\cos(a+b); \tan C = -\tan(A+B); \cot C = \cot(A+B).$$

Câu 28: Biết A, B, C là các góc của tam giác ABC , khi đó.

- A. $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$. B. $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right) = -\cos\frac{C}{2}$.
C. $\tan\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$. D. $\cot\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cot\frac{C}{2}$.

Lời giải

Vì A, B, C là các góc của tam giác ABC nên $A+B+C=180^\circ \Rightarrow C=180^\circ - (A+B)$.

$$\Rightarrow \frac{C}{2} = 90^\circ - \frac{A+B}{2}. \text{ Do đó } \frac{C}{2} \text{ và } \frac{A+B}{2} \text{ là 2 góc phụ nhau.}$$

$$\Rightarrow \sin \frac{C}{2} = \cos \frac{A+B}{2}; \cos \frac{C}{2} = \sin \frac{A+B}{2}; \tan \frac{C}{2} = \cot \frac{A+B}{2}; \cot \frac{C}{2} = \tan \frac{A+B}{2}.$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Không dùng máy tính cầm tay. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24} = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} = \sqrt{2}$

c) $\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} = 2.$

d) $\sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} = 0$

Lời giải

a) Đúng: $\sin \frac{19\pi}{24} \cos \frac{37\pi}{24} = \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{19\pi}{24} - \frac{37\pi}{24} \right) + \sin \left(\frac{19\pi}{24} + \frac{37\pi}{24} \right) \right]$

$$= \frac{1}{2} \left[\sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + \sin \frac{7\pi}{3} \right] = \frac{1}{2} \left(-\sin \frac{3\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$$

b) Sai: $\cos \frac{41\pi}{12} - \cos \frac{13\pi}{12} = -2 \sin \frac{\frac{41\pi}{12} + \frac{13\pi}{12}}{2} \sin \frac{\frac{41\pi}{12} - \frac{13\pi}{12}}{2} = -2 \sin \frac{9\pi}{4} \sin \frac{7\pi}{6}$

$$= 2 \sin \frac{\pi}{4} \sin \frac{\pi}{6} = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Sai: $\frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \frac{6\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 + \tan \left(\pi - \frac{\pi}{7} \right) \tan \frac{3\pi}{28}} = \frac{\tan \frac{\pi}{7} + \tan \frac{3\pi}{28}}{1 - \tan \frac{\pi}{7} \tan \frac{3\pi}{28}} = \tan \left(\frac{\pi}{7} + \frac{3\pi}{28} \right) = \tan \frac{\pi}{4} = 1$

d) Đúng: $\sin \frac{\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} = \left(\sin \frac{\pi}{9} + \sin \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{5\pi}{9}$

$$= 2 \sin \frac{4\pi}{9} \cdot \cos \frac{\pi}{3} - \sin \frac{5\pi}{9} = \sin \frac{4\pi}{9} - \sin \frac{5\pi}{9} = 0.$$

Câu 2: Cho $\cos \alpha = \frac{11}{61}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = -\frac{60}{61}$

b) $\cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{71}{49}$

c) $\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = -\frac{4799}{2159}$

Lời giải

a) Sai: Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên $\sin \alpha < 0$.

$$\text{Do đó, } \sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\sqrt{1 - \left(\frac{11}{61}\right)^2} = -\frac{60}{61}.$$

$$\text{Suy ra } \sin\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right) = \sin \frac{\pi}{6} \cos \alpha - \cos \frac{\pi}{6} \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{11}{61} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) = \frac{11 + 60\sqrt{3}}{122}.$$

b) Đúng: Ta có $\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{-\frac{60}{61}}{\frac{11}{61}} = -\frac{60}{11}$.

$$\text{Do đó } \cot\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \frac{\pi}{4}}{\tan \alpha + \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{1 - \left(-\frac{60}{11}\right) \cdot 1}{\left(-\frac{60}{11}\right) + 1} = -\frac{71}{49}.$$

c) Sai: Ta có $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 2 \cdot \left(\frac{11}{61}\right)^2 - 1 = -\frac{3479}{3721}$;

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha = 2 \cdot \left(-\frac{60}{61}\right) \cdot \frac{11}{61} = -\frac{1320}{3721}.$$

$$\Rightarrow \cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{3}\right) = \cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{3} = -\frac{3479}{3721} \cdot \frac{1}{2} - \left(-\frac{1320}{3721}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-3479 + 1320\sqrt{3}}{7442}.$$

d) Đúng: Ta có $\tan 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{-\frac{1320}{3721}}{-\frac{3479}{3721}} = \frac{1320}{3479}$.

$$\text{Suy ra } \tan\left(\frac{3\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\tan\frac{3\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{3\pi}{4} \tan 2\alpha} = \frac{-1 - \frac{1320}{3479}}{1 + (-1) \cdot \frac{1320}{3479}} = -\frac{4799}{2159}.$$

Câu 3: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin 4x$

b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \cos 3x;$

c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \cot 2x$

d) $\frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y = 1.$

Lời giải

a) $\sin x \cos^5 x - \cos x \sin^5 x = \sin x \cos x (\cos^4 x - \sin^4 x)$
 $= \frac{1}{2} \sin 2x (\cos^2 x - \sin^2 x) (\cos^2 x + \sin^2 x) = \frac{1}{2} \sin 2x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x$

b) $\frac{\sin 3x \cos 2x + \sin x \cos 6x}{\sin 4x} = \frac{\frac{1}{2}(\sin x + \sin 5x) + \frac{1}{2}[\sin(-5x) + \sin 7x]}{\sin 4x}$
 $= \frac{\sin x + \sin 5x - \sin 5x + \sin 7x}{2 \sin 4x} = \frac{\sin x + \sin 7x}{2 \sin 4x} = \frac{2 \sin 4x \cos 3x}{2 \sin 4x} = \cos 3x;$

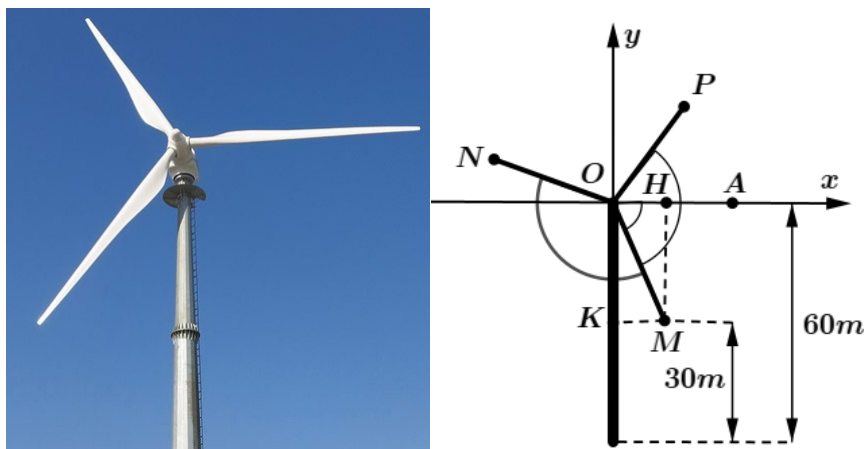
c) $\frac{\cos x - \cos 2x + \cos 3x}{\sin x - \sin 2x + \sin 3x} = \frac{(\cos x + \cos 3x) - \cos 2x}{(\sin x + \sin 3x) - \sin 2x} = \frac{2 \cos 2x \cos x - \cos 2x}{2 \sin 2x \cos x - \sin 2x}$
 $= \frac{\cos 2x(2 \cos x - 1)}{\sin 2x(2 \cos x - 1)} = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \cot 2x;$

d) $\frac{2 \sin(x+y)}{\cos(x+y) + \cos(x-y)} - \tan y = \frac{2(\sin x \cos y + \cos x \sin y)}{2 \cos x \cos y} - \tan y$
 $= \frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\sin y}{\cos y} - \tan y = \tan x + \tan y - \tan y = \tan x.$

Câu 4: Trong hình vẽ dưới đây, ba điểm M, N, P nằm ở đầu các cánh quạt của tuabin gió. Biết các cánh quạt dài 31 m, độ cao của điểm M so với mặt đất là 30 m, góc giữa các cánh quạt là $\frac{2\pi}{3}$ và số góc (OA, OM) là α . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

- b) Giá trị sin của góc lượng giác (OA, ON) là một số âm
 c) Chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.
 d) Chiều cao của các điểm P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.



Lời giải

Từ điểm M kẻ MH vuông góc với Ox , MK vuông góc với Oy .

Ta có: $MH = 60 - 30 = 30$ m khi đó hoành độ điểm M là 30.

Mặt khác hoành độ điểm M là: $x_M = 31 \cdot \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{30}{31} \Rightarrow \sin \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{30}{31}\right)^2} = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

Vì các cánh quạt tạo thành 3 góc bằng nhau nên $\widehat{MOP} = \widehat{NOP} = \widehat{MON} = 120^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AOP} = \widehat{MOP} - \widehat{MOA} \Rightarrow \sin \widehat{AOP} = \sin(\widehat{MOP} - \widehat{MOA})$

$= \sin \widehat{MOP} \cdot \cos \widehat{MOA} - \cos \widehat{MOP} \cdot \sin \widehat{MOA} = \sin \frac{2\pi}{3} \cdot \cos \alpha - \cos \frac{2\pi}{3} \cdot \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{30}{31} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{61}}{31} \approx 0,96.$

Vì vậy chiều cao của điểm P so với mặt đất khoảng: $31 \cdot \sin a + 60 = 89,76$ (m)

Ta có: $\cos \widehat{AOP} \approx \sqrt{1 - 0,96^2} = 0,28$ suy ra $\widehat{AON} = \widehat{AOP} + \widehat{PON}$

$\Rightarrow \sin \widehat{AON} = \sin(\widehat{AOP} + \widehat{PON}) = \sin \widehat{AOP} \cdot \cos \widehat{PON} + \cos \widehat{AOP} \cdot \sin \widehat{PON}$

$= 0,96 \cdot \cos \frac{2\pi}{3} - 0,28 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 0,96 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0,28 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \approx -0,23.$

$\Rightarrow \sin(OA, ON) = \sin \widehat{AON} \approx -0,23.$

Vì vậy chiều cao của điểm N so với mặt đất khoảng: $31 \cdot \sin a + 60 = 52,87$ (m)

a) Đúng: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{61}}{31}$

b) Đúng: Giá trị sin của các góc lượng giác (OA, ON) là một số âm

c) Sai: Chiều cao của các điểm N và P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 52,87 m.

d) Sai: Chiều cao của các điểm P so với mặt đất (theo đơn vị mét) khoảng 89,76 m.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho $\sin \alpha + \cos \alpha = m$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos \alpha \right) = \sqrt{2} \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right).$$

Vì $-1 \leq \sin \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1$ nên $-\sqrt{2} \leq \sin \alpha + \cos \alpha \leq \sqrt{2}$. Suy ra $-\sqrt{2} \leq m \leq \sqrt{2}$.

$$\text{Ta lại có } (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha = 1 + \sin 2\alpha.$$

$$\text{Suy ra } \sin 2\alpha = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1 = m^2 - 1.$$

Khi đó, $\sin 2\alpha = -\frac{3}{4}$ hay $m^2 - 1 = -\frac{3}{4}$ suy ra $m = \frac{1}{2}$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$ (thỏa mãn điều kiện).

Câu 2: Cho $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = \frac{12}{13}$ và $0^\circ < \alpha, \beta < 90^\circ$. Biết $P = \sin(\alpha + \beta)$ và $Q = \cos(\alpha - \beta)$. Khi đó hãy tính giá trị của $P + Q$.

Lời giải

$$\text{Vì } 0^\circ < \alpha < 90^\circ \text{ nên } \cos \alpha > 0 \Rightarrow \cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}.$$

$$\text{Vì } 0^\circ < \beta < 90^\circ \text{ nên } \sin \beta > 0 \Rightarrow \sin \beta = \sqrt{1 - \cos^2 \beta} = \sqrt{1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}.$$

$$\text{Khi đó: } P = \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{56}{65}$$

$$Q = \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} = \frac{63}{65}.$$

$$\text{Suy ra giá trị biểu thức } P + Q = \frac{56}{65} + \frac{63}{65} = \frac{119}{65}$$

Câu 3: Phương trình dao động điều hoà của một vật tại thời điểm t giây được cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó $x(t)$ cm là li độ của vật tại thời điểm t giây, A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động điều hoà có phương trình lần lượt là:

$$x_1(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t + \frac{\pi}{3} \right) \text{ (cm)} \text{ và } x_2(t) = 3 \cos \left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{6} \right) \text{ (cm)}$$

Tìm biên độ dao động tổng hợp trên.

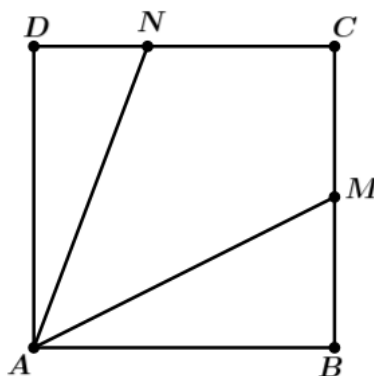
Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } x(t) &= x_1(t) + x_2(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + 3\cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 3 \cdot 2 \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) + \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \cdot \cos \frac{\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right) - \left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{6}\right)}{2} \\ &= 6 \cos \frac{\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{6}}{2} \cos \frac{\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}}{2} = 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right). \end{aligned}$$

Vậy phương trình của dao động tổng hợp là $x(t) = 3\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{12}\right)$.

Dao động tổng hợp trên có biên độ là $A = 3\sqrt{2}$ (cm) và pha ban đầu là $\varphi = \frac{\pi}{12}$.

Câu 4: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$ bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C . Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM và AN mà ở đó các điểm $M \in BC$; $N \in DC$ sao cho $BM = \frac{1}{2}BC$, $DN = \frac{1}{3}DC$. Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ?



Lời giải

Trong tam giác vuông ABM , $\tan \widehat{BAM} = \frac{BM}{BA} = \frac{1}{2}$.

Trong tam giác vuông ADN , $\tan \widehat{DAN} = \frac{DN}{DA} = \frac{1}{3}$.

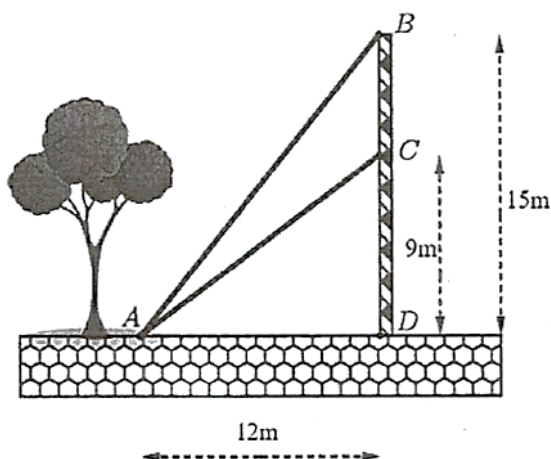
$$\text{Do đó: } \tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = \frac{\tan \widehat{BAM} + \tan \widehat{DAN}}{1 - \tan \widehat{BAM} \tan \widehat{DAN}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

Do $\tan(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 1$ nên $\widehat{BAM} + \widehat{DAN} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 90^\circ - (\widehat{BAM} + \widehat{DAN}) = 45^\circ$.

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin bằng 45° .

Câu 5: Từ một vị trí A , người ta buộc hai sợi cáp AB và AC đến một cái trụ cao $15m$, được dựng vuông góc với mặt đất, chân trụ ở vị trí D . Biết $CD = 9m$ và $AD = 12m$. Tìm góc nhọn

$\alpha = \widehat{BAC}$ tạo bởi hai sợi dây cáp đó, đồng thời tính gần đúng α (làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị độ).

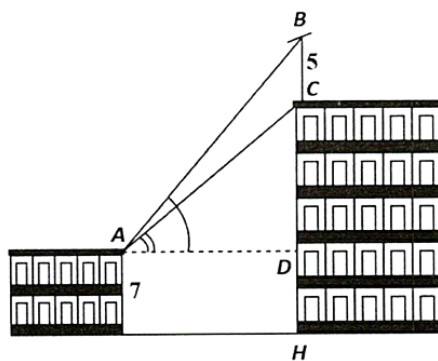


Lời giải

$$\text{Ta có: } \tan \alpha = \tan(\widehat{BAD} - \widehat{CAD}) = \frac{\tan \widehat{BAD} - \tan \widehat{CAD}}{1 + \tan \widehat{BAD} \tan \widehat{CAD}} = \frac{\frac{15}{12} - \frac{9}{12}}{1 + \frac{15}{12} \cdot \frac{9}{12}} = \frac{8}{31} \Rightarrow \alpha \approx 14,47^\circ.$$

$$B = \frac{\sin 2x + 2 \sin 3x + \sin 4x}{\cos 3x + 2 \cos 4x + \cos 5x} = \frac{2 \sin 3x \cos x + 2 \sin 3x}{2 \cos 4x \cos x + 2 \cos 4x} = \frac{2 \sin 3x (\cos x + 1)}{2 \cos 4x (\cos x + 1)} = \frac{\sin 3x}{\cos 4x}$$

Câu 6: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăngten cao 5 m. Từ vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăngten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của toà nhà là 18,9 m, hai toà nhà cách nhau 10 m. Tính góc α (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



Lời giải

Ta có: $AD = 10$ và $CD = 18,9 - 7 = 11,9$ m; $BD = BC + CD = 11,9 + 5 = 16,9$ m

$$\text{Suy ra } \tan \alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{16,9}{10} \Rightarrow \alpha = 59^\circ.$$

Câu 7: Trong Vật lí, phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$) và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Xét hai dao động

điều hoà có phương trình: $x_1(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right)$ (cm); $x_2(t) = 3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right)$ (cm). Tìm dao động tổng hợp $x(t) = x_1(t)x_2(t)$ và sử dụng công thức biến đổi tổng thành tích để tìm biên độ và pha ban đầu của dao động tổng hợp này.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } x(t) &= x_1(t)x_2(t) = 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6}\right) + 3 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 3.2 \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{4}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}t - \frac{\pi}{4}}{2}\right) \right) \\ &= 6 \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{24}\right) = 6 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{24}\right) \end{aligned}$$

Vậy biên độ của dao động là $6 \cos\left(\frac{\pi}{24}\right)$. Pha ban đầu của chuyển động là $\frac{5\pi}{24}$.

Câu 8: Hai sóng âm có phương trình lần lượt là $f_1(t) = C \sin \omega t$ và $f_2(t) = C \sin(\omega t + \alpha)$. Hai sóng này giao thoa với nhau tạo nên một âm kết hợp có phương trình

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha).$$

Khi $C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$. Hãy tìm biên độ của sóng âm kết hợp, tức là tìm hai hằng số k và φ sao cho $f(t) = k \sin(\omega t + \varphi)$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } f(t) = f_1(t) + f_2(t) = C \sin \omega t + C \sin(\omega t + \alpha) = C \sin \omega t + C(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha)$$

$$\text{Vậy } f(t) = C(1 + \cos \alpha) \sin \omega t + C \sin \alpha \cos \omega t = A \sin \omega t + B \cos \omega t \quad \text{với } \begin{cases} A = C(1 + \cos \alpha) \\ B = C \sin \alpha \end{cases}$$

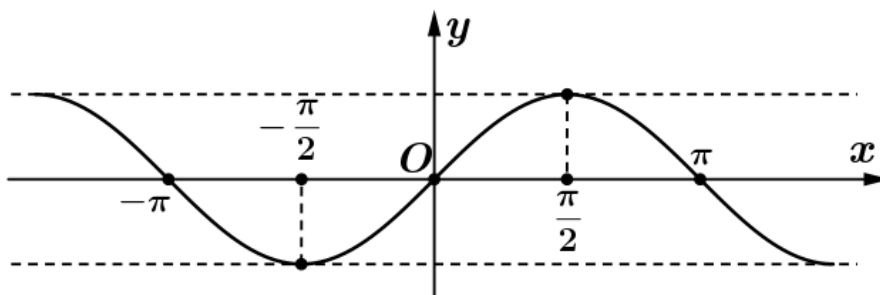
$$\text{Khi } C = 10, \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{Ta có: } f(t) = 10 \sin \omega t + 10 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right) = 10.2 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right) \cos \frac{\pi}{6} = 10\sqrt{3} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Vậy biên độ và pha ban đầu của sóng âm kết hợp lần lượt là $k = 10\sqrt{3}, \varphi = \frac{\pi}{6}$.

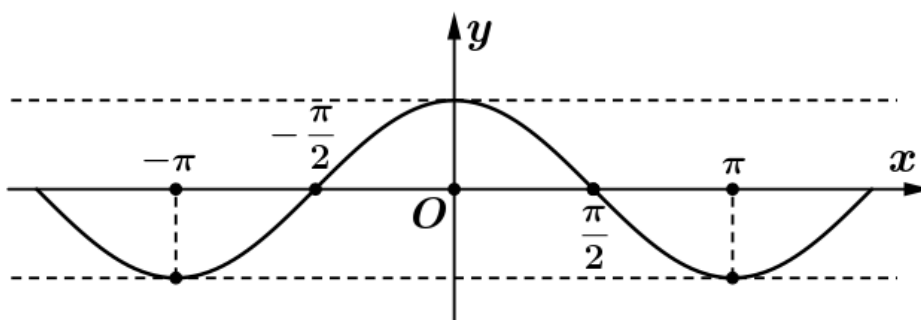
-----HẾT-----

1 Hàm số $y = \sin x$



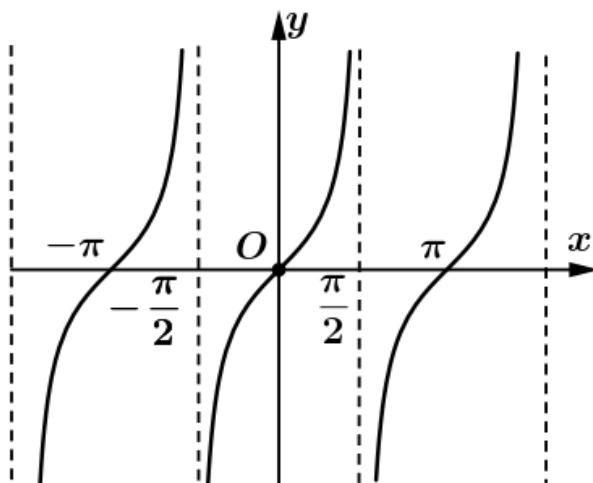
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị $[-1; 1]$ tức là $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ nên đồ thị hàm số nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng
- Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\sin(x + k2\pi) = \sin x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

2 Hàm số $y = \cos x$



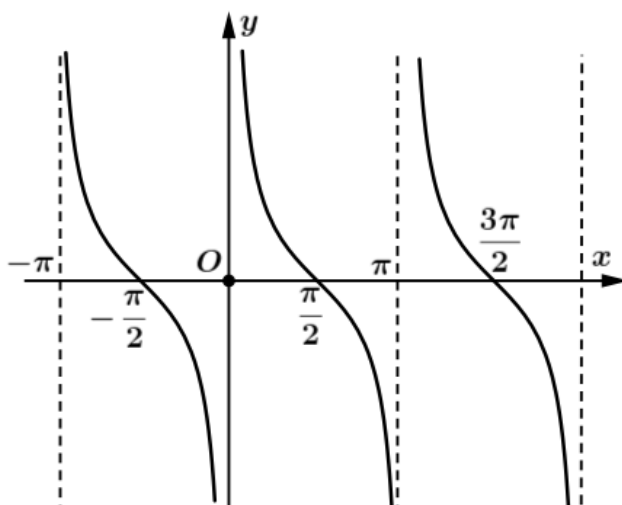
- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$
- Tập giá trị $[-1; 1]$ tức là $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn nên đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng
- Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$, nghĩa là $\cos(x + k2\pi) = \cos x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi)$ và nghịch biến trên mỗi khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

3 Hàm số $y = \tan x$



- Điều kiện $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- Tập giá trị: \mathbb{R} và đây là hàm số lẻ
- Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\tan(x + k\pi) = \tan x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên mỗi khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

4 Hàm số $y = \cot x$



- Điều kiện $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$
- Tập giá trị: \mathbb{R} và đây là hàm số lẻ
- Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$, nghĩa là $\cot(x + k\pi) = \cot x$, với $k \in \mathbb{Z}$
- Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên mỗi khoảng $(k\pi; \pi + k\pi)$ với $k \in \mathbb{Z}$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số lượng giác

Phương pháp: Cần chú ý một số điều kiện sau:

- $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ xác định khi và chỉ khi $g(x) \neq 0$
- $y = \sqrt[n]{f(x)}$ xác định khi và chỉ khi $f(x) \geq 0$ với $n \in \mathbb{N}^*$
- $\tan[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- $\cot[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm tập xác định của các hàm số sau đây:

a) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$

c) $y = \tan x$

d) $y = \cot x + \sin 5x + \cos x$

e) $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$

f) $y = \cot x$

g) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x - 1}$

h) $y = \tan x + \cot x$

i) $y = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$

k) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

l) $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$

m) $y = \sqrt{2 - \sin x}$

Lời giải

a) Biểu thức $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ có nghĩa khi $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

b) Biểu thức $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$ có nghĩa khi $\begin{cases} \frac{1 + \cos x}{2 - \cos x} \geq 0 \\ 2 - \cos x \neq 0 \end{cases}$.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $1 + \cos x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $2 - \cos x \geq 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $2 - \cos x \neq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ và $\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$ là $D = \mathbb{R}$.

c) Điều kiện xác định: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. Vậy tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) Hàm số xác định khi: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

e) Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq l2\pi \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x - 1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

f) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

g) Điều kiện xác định của hàm số là $\sin x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

h) Điều kiện: $\sin x \cdot \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

i) Điều kiện $\sin x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

k) Hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi và chỉ khi

$\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

l) Hàm số $y = \sin\left(\frac{5x}{x^2 - 1}\right)$ xác định $\Leftrightarrow x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pm 1$. Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

m) Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 2 - \sin x > 0$. Do đó, hàm số luôn luôn xác định hay $D = \mathbb{R}$.

Bài tập 2: Tìm tập giá trị của các hàm số sau đây:

a) $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$

b) $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -2 - 1 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 2 - 1 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1 \forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập giá trị của hàm số $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$ là $[-3; 1]$.

b) Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $0 \leq 1 + \cos x \leq 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó $0 \leq \sqrt{1 + \cos x} \leq \sqrt{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ suy ra $-2 \leq \sqrt{1 + \cos x} - 2 \leq \sqrt{2} - 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hay $-2 \leq y \leq \sqrt{2} - 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$ là $[-2; \sqrt{2} - 2]$.

Bài tập 3: Tìm giá trị của tham số m để các hàm số sau đây xác định trên \mathbb{R}

a) $y = \sqrt{2m - 3\cos x}$

b) $y = \sqrt{5 - m\sin x - (m+1)\cos x}$

Lời giải

a) Hàm số đã cho xác định trên \mathbb{R} khi và chỉ khi $2m - 3\cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{2m}{3}$

Bất đẳng thức trên đúng với mọi x khi $1 \leq \frac{2m}{3} \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2}$

b) Hàm số xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow 5 - m\sin x - (m+1)\cos x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow m\sin x + (m+1)\cos x \leq 5 \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \max_{x \in \mathbb{R}} (m\sin x + (m+1)\cos x) \leq 5.$$

$$\Leftrightarrow m^2 + (m+1)^2 \leq 25 \Leftrightarrow m^2 + m - 12 \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 3.$$

Bài tập 4: Giả sử khi một cơn sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimet trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kì của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

a) Chu kì của sóng là $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(20) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 20\right) = 90$ (cm).

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định : $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$. Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{2025}{\sin x}$.

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định của hàm số là: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Câu 3: Khẳng định nào sau đây là sai?

A. Hàm số $y = \tan x$ có tập giá trị là \mathbb{R} .

B. Hàm số $y = \cos x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.

C. Hàm số $y = \sin x$ có tập giá trị là $[-1; 1]$.

D. Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là $[0; \pi]$.

Lời giải

Hàm số $y = \cot x$ có tập giá trị là \mathbb{R} nên D sai.

Câu 4: Tìm tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x}}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{-\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Ta có điều kiện xác định của hàm số là $\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \geq 0$.

Do $1 - \cos x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ và $1 + \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên $\frac{1 - \cos x}{1 + \sin x} \geq 0$ khi và chỉ khi $1 + \sin x \neq 0$

$\Leftrightarrow \sin x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 5: Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

B. Hàm số $y = \tan x$ có tập xác định là \mathbb{R} .

C. Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là \mathbb{R} . D. Các hàm số lượng giác có tập xác định là \mathbb{R} .

Lời giải

Hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là \mathbb{R}

Câu 6: Tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pi + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Do đó, tập xác định của hàm số $y = \cot x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 7: Khẳng định nào sau đây là đúng

A. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

B. $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

C. $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

D. $\cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

Lời giải

Ta có: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 8: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi: $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 9: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$ là

A. $D = \mathbb{R}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\pi; \frac{\pi}{2} + h2\pi, k, h \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k2\pi; \frac{\pi}{2} + h\pi, k, h \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số $y = \frac{\sin x + \cos x}{\sin 2x}$ xác định khi và chỉ khi: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số trên là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 10: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 11: Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{2\sin^2 x + 1}{1 + \cos x}$ là:

A. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x \neq \pi - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $1 + \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 12: Hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1} + 1 - 3\cos^2 x$ xác định khi và chỉ khi:

A. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

B. $x \neq -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

D. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi $\sin x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 13: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{1 - \cos x}$ là

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $1 - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 14: Cho hàm số $y = \frac{3}{\sin 2x} + \frac{5}{\cos 2x}$. Điều kiện xác định hàm số là

- A. $x \neq k\pi$. B. $x \neq \frac{k\pi}{2}$. C. $x \neq \frac{k\pi}{4}$. D. $x \neq k2\pi$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 15: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{3\sin x}{\cos 2x - 1}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos 2x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq k2\pi \Leftrightarrow x \neq k\pi$.

Vậy $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 16: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{2\sin x + 1}{2\cos x - 1} + \frac{2\cos x + 1}{2\sin x - 1}$

Lời giải

$$\text{Hàm số đã cho xác định khi } \begin{cases} 2\cos x - 1 \neq 0 \\ 2\sin x - 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq \frac{1}{2} \\ \sin x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + l2\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + m2\pi \\ x \neq \frac{5\pi}{6} + n2\pi \end{cases} \quad (k, l, m, n \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, -\frac{\pi}{3} + l2\pi; \frac{\pi}{6} + m2\pi; \frac{5\pi}{6} + n2\pi \mid k, l, m, n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 17: Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x - \cos x}$ là

- A. $x \neq k\pi$. B. $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$. C. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$. D. $x \neq k2\pi$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\sin x - \cos x \neq 0 \Leftrightarrow \tan x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Câu 18: Tìm tập xác định D của hàm số $y = \frac{1 - \sin x}{\cos x - 1}$.

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

D. $D = \mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số xác định khi và chỉ khi $\cos x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Vậy tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 19: Điều kiện xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là:

A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

B. $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq k\pi$.

D. $x \neq k\frac{\pi}{2}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq k\pi \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2}$

Câu 20: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{3 + \sin x} - \frac{1}{\tan^2 x - 1}$ là:

A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} 3 + \sin x \geq 0 \text{ (luôn đúng)} \\ \tan^2 x - 1 \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x \neq 1 \\ \tan x \neq -1 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$

Câu 21: Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{\sin x}{\sin^2 x - \cos^2 x}$.

A. $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

B. $x \neq k2\pi$.

C. $x \neq k\pi$.

D. $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$.

Lời giải

Điều kiện: $\sin^2 x - \cos^2 x \neq 0 \Leftrightarrow -\cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 22: Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{\sin 2x - 2}{\cos 2x + 4}}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. B. $D = [-1; 1]$. C. $D = \mathbb{R}$. **D. $D = \emptyset$.**

Lời giải

Vì $\begin{cases} \sin 2x - 2 < 0 \\ \cos 2x + 4 > 0 \end{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{\sin 2x - 2}{\cos 2x + 4} < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là \emptyset .

Câu 23: Tìm m để hàm số $y = \sqrt{3\sin x + 4\cos x + 2m - 1}$ xác định với mọi x

- A. $m > 0$. B. $m > 1$. C. $m \geq \frac{-1}{2}$. **D. $m \geq 3$.**

Lời giải

Ta có y xác định khi $3\sin x + 4\cos x + 2m - 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 3\sin x + 4\cos x \geq 1 - 2m \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x \geq \frac{1 - 2m}{5} (*)$$

Đặt $\frac{3}{5} = \cos \alpha \Rightarrow \frac{4}{5} = \sin \alpha$. Khi đó $(*) \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) \geq \frac{1 - 2m}{5}$. Mà $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1$.

Để hàm số y xác định với mọi x thì $-1 \geq \frac{1 - 2m}{5} \Leftrightarrow -5 \geq 1 - 2m \Leftrightarrow m \geq 3$.

Câu 24: Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos x + 3}{\sin^2 x - 1}$ là

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.** B. $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
C. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x \neq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

Câu 25: Hàm số $y = \frac{\cot 2x}{1 - 2\cos 2x}$ xác định trong khoảng nào sau đây?

- A. $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{4}\right)$. B. $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right)$. C. $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$. **D. $\left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4}\right)$.**

Lời giải

$$\text{Hàm số } y = \frac{\cot 2x}{1 - 2\cos 2x} \text{ xác định khi } \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ 1 - 2\cos 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ \cos 2x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{6} + l\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{6} + m\pi \end{cases}$$

$$(k; l; n \in \mathbb{Z})$$

Do các phương án A, B, C chứa các giá trị làm cho hàm số không xác định. Chỉ có phương án D không chứa các giá trị làm cho hàm số không xác định.

$$\text{Vậy hàm số } y = \frac{\cot 2x}{1 - 2\cos 2x} \text{ xác định trên khoảng là } \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right)$$

Câu 26: Tập xác định của hàm số $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định: } \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \neq 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Câu 27: Hàm số $y = \cot x$ có tập xác định là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\mathbb{R} \setminus \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

$$\text{Điều kiện xác định: } \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Câu 28: Tập xác định của hàm số $y = \frac{\cos x}{\sin x + 1}$ là:

- A. $D = \mathbb{R}$. B. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.
 C. $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi\}$. D. $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + k2\pi \right\}$.

Lời giải

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) - 1 = 1 - 1 = 0$

b) Đúng: Ta có: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \tan\left(2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) - 1 = -\sqrt{3} - 1$

c) Sai: Ta có: $f(x) = -2 \Leftrightarrow \tan 2x - 1 = -2 \Leftrightarrow \tan 2x = -1$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên $x \in \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{7\pi}{8}\right\}$ khi đó $k = 1; k = 2$

d) Sai: Tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Câu 2: Tìm được tập giá trị các hàm số sau trên tập xác định của chúng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = 3 \sin x$ có tập giá trị là $T = [-3; 3]$.

b) Hàm số $y = 2 \cos x - 1$ có tập giá trị là $T = [-3; 1]$.

c) Hàm số $y = 2030 - 4 \cos x$ có tập giá trị là $T = [2026; 2034]$.

d) Hàm số $y = \sin^2 x + 4 \sin x - 1$ có tập giá trị là $T = [-3; 3]$.

Lời giải

a) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin x \leq 3 \Rightarrow -3 \leq y \leq 3$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-3; 3]$.

b) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos x \leq 2$
 $\Rightarrow -2 - 1 \leq 2 \cos x - 1 \leq 2 - 1 \Rightarrow -3 \leq y \leq 1$. Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-3; 1]$.

c) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 4 \geq -4 \cos x \geq -4$
 $\Rightarrow 4 + 2030 \geq -4 \cos x + 2030 \geq -4 + 2030 \Rightarrow 2034 \geq y \geq 2026$.

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [2026; 2034]$.

d) Sai: Ta có: $y = \sin^2 x + 4 \sin x - 1 = \sin^2 x + 4 \sin x + 4 - 5 = (\sin x + 2)^2 - 5$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq \sin x + 2 \leq 3$

$$\Rightarrow 1^2 \leq (\sin x + 2)^2 \leq 3^2 \Rightarrow 1^2 - 5 \leq (\sin x + 2)^2 - 5 \leq 3^2 - 5 \Rightarrow -4 \leq y \leq 4$$

Vậy tập giá trị của hàm số là $T = [-4; 4]$.

Câu 3: Tìm được tập xác định của các hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \tan x + \cot 2x$ xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases}$

b) Hàm số $y = \sqrt{\pi - \cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

c) Hàm số $y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

d) Hàm số $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

Lời giải

a) Đúng: $y = \tan x + \cot 2x$

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x \neq k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq k\frac{\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Đúng: $y = \sqrt{\pi - \cos x}$

Hàm số xác định khi $\pi - \cos x \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \pi \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

c) Đúng: $y = \sqrt{4 - \sin^2 x}$

Hàm số xác định khi $4 - \sin^2 x \geq 0 \Leftrightarrow \sin^2 x < 4 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (vì ta có $0 \leq \sin^2 x \leq 1 < 4, \forall x \in \mathbb{R}$).

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

d) Sai: $y = \sqrt{\sin x - 1} + \sqrt{\cos x - 1}$

$$\text{Hàm số xác định khi } \begin{cases} \sin x - 1 \geq 0 \\ \cos x - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \geq 1 \\ \cos x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} -1 \leq \sin x \leq 1 \\ -1 \leq \cos x \leq 1 \end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta có $\begin{cases} \sin x = 1 \\ \cos x = 1 \end{cases}$ vô lý (vì $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ nên $\sin x, \cos x$ không thể đồng thời bằng 1).

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \emptyset$.

Câu 4: Tìm được tập xác định của các hàm số dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ xác định khi: $x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$

b) Hàm số $y = \cot\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ xác định khi: $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

d) Hàm số $y = \frac{\tan 3x}{\cos x}$ có tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}$

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow 2x \neq \frac{2\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

b) Đúng: Hàm số xác định $\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} \neq k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{3} + k\pi$.

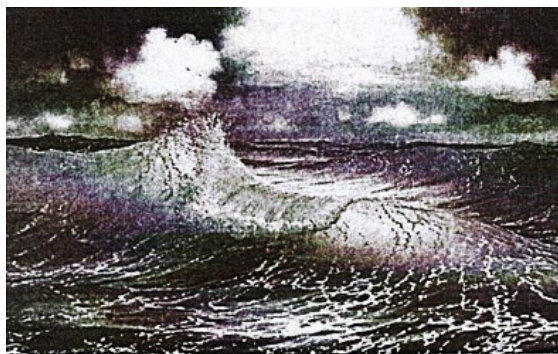
$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

c) Sai: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi \Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Sai: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ 3x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}$

$$\text{Vậy } D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} | k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Câu 5: Chiều cao so với mực nước biển trung bình tại thời điểm t (giây) của mỗi con sóng được cho bởi hàm số $h(t) = 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, trong đó $h(t)$ được tính bằng centimét.



a) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 5 giây bằng 69,3 cm.

b) Chiều cao của sóng tại các thời điểm 20 giây bằng 75 cm

c) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 6 giây

d) Trong 30 giây đầu tiên (kể từ mốc $t = 0$ giây), thời điểm để sóng đạt chiều cao lớn nhất 18 giây (Tất cả kết quả được làm tròn đến hàng phần mười)

Lời giải

a) Đúng: Khi $t = 5$ ta có: $h(5) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 5}{8}\right) \approx 69,3$ cm.

b) Đúng: Khi $t = 20$ ta có: $h(20) = 75 \sin\left(\frac{\pi \cdot 20}{8}\right) = 75$ cm.

c) Sai:

d) Sai: Ta có: $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 1 \Rightarrow 75 \sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) \leq 75$ hay $h(t) \leq 75$.

Giá trị lớn nhất của $h(t)$ là 75 khi đó $\sin\left(\frac{\pi t}{8}\right) = 1 \Rightarrow \frac{\pi t}{8} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow t = 4 + 16k (k \in \mathbb{Z})$. Vì $t \in [0; 30] \Rightarrow t \in \{4; 20\}$ (ứng với k bằng 0 và 1).

Vậy tại các thời điểm 4 giây hoặc 20 giây (trong 30 giây đầu tiên) thì con sóng đạt chiều cao cực đại là 75 cm.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Hàm số $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

Ta có $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x = 5 + 2 \sin 4x$.

Mà $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \rightarrow -2 \leq 2 \sin 4x \leq 2 \rightarrow 3 \leq 5 + 2 \sin 4x \leq 7$
 $\rightarrow 3 \leq y \leq 7 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$ nên y có 5 giá trị nguyên.

Câu 2: Hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

Áp dụng công thức $\sin a - \sin b = 2 \cos \frac{a+b}{2} \sin \frac{a-b}{2}$, ta có

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \sin x = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \sin \frac{\pi}{6} = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

Ta có $-1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 \rightarrow -1 \leq y \leq 1 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{-1; 0; 1\}$.

Câu 3: Hàm số $y = \cos^2 x - \cos x$ có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

Ta có $y = \cos^2 x - \cos x = \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$.

Mà $-1 \leq \cos x \leq 1 \rightarrow -\frac{3}{2} \leq \cos x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \rightarrow 0 \leq \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{4}$

$\rightarrow -\frac{1}{4} \leq \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \leq 2 \rightarrow -\frac{1}{4} \leq y \leq 2 \xrightarrow{y \in \mathbb{Z}} y \in \{0; 1; 2\}$ nên có 3 giá trị thỏa mãn.

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2\cos 4x$ xác định trên \mathbb{R} .

Lời giải

Để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m}} - 2\cos 4x$ xác định trên $\mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{m-1}{m} - 2\cos 4x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq \cos 4x \geq 1 \Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0$.

Câu 5: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = a + 2b$?

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có: $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x = 5 + 2\sin 4x$.

Do $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin 4x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 5 + 2\sin 4x \leq 7 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 7$.

Vậy giá trị của hàm số là $T = [3; 7]$ nên $\begin{cases} a = 3 \\ b = 7 \end{cases} \Rightarrow P = a + 2b = 3 + 2 \cdot 7 = 17$

Câu 6: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 4a + b$

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$.

Do $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{3}{4}\sin^2 2x \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{4}$.

Vậy giá trị của hàm số là $T = \left[\frac{1}{4}; 1\right]$ nên $\begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow P = 4a + b = 4 \cdot \frac{1}{4} + 1 = 2$

Câu 7: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x + 3$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 5a + 2b$?

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3 = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) + 3 = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3.$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$$

$$\text{Vậy giá trị của hàm số là } T = [1; 5] \text{ nên } \begin{cases} a = 1 \\ b = 5 \end{cases} \Rightarrow P = 5a + 2b = 5.1 + 2.5 = 15.$$

Câu 8: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 10a - 2b$?

Lời giải

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4.$$

$$\text{Vậy giá trị của hàm số là } T = [0; 4] \text{ nên } \begin{cases} a = 0 \\ b = 4 \end{cases} \Rightarrow P = 10a - 2b = 10.0 - 2.4 = -8.$$

Câu 9: Biết rằng tập giá trị của hàm số $y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4}$ là $T = [a; b]$. Tính giá trị biểu thức $P = 11(a + b)$?

Lời giải

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4} \Leftrightarrow y(\sin x + 2 \cos x + 4) = 2 \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (y - 2) \sin x + (2y - 1) \cos x = -4y.$$

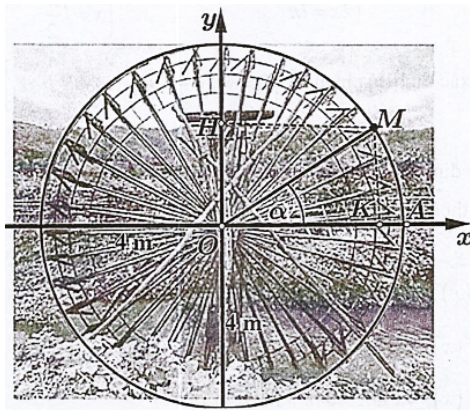
$$\text{Điều kiện để tồn tại cặp } (x; y) \text{ là } (y - 2)^2 + (2y - 1)^2 \geq (-4y)^2$$

$$\Leftrightarrow -11y^2 - 8y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4 - \sqrt{71}}{11} \leq y \leq \frac{-4 + \sqrt{71}}{11}.$$

$$\text{Vậy miền giá trị hàm số là } T = \left[\frac{-4 - \sqrt{71}}{11}; \frac{-4 + \sqrt{71}}{11} \right] \text{ nên } P = 11(a + b) = -8$$

Câu 10: Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (\overline{OA}, \overline{OM})$. Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Lời giải

Ta có: $h(x) = 4 + 4 \sin \alpha$.

Khi M ở vị trí cao nhất so với mặt nước tức là $h(x) = 8$ thì $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ (vì chỉ xét 1

vòng quay đầu tiên). Thời gian thực hiện của guồng nước là: $t = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 40}{2\pi} = 10$ (giây).

-----HẾT-----

Dạng 2: Xét tính chẵn lẻ và tuần hoàn của hàm số lượng giác

Phương pháp: Ta cần thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Tìm tập xác định D của hàm số - Tập D phải đối xứng
- **Bước 2:** Tính $f(-x)$ (chỗ nào có biến x , ta thay bởi $-x$) và thu gọn kết quả đó. Khi đó:
 - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì hàm số đã cho là hàm số chẵn
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì hàm số đã cho là hàm số lẻ
 - Nếu không rơi vào hai trường hợp trên thì ta kết luận hàm số không chẵn, không lẻ
- Hàm số $y = f(x)$ có tập xác định D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu tồn tại số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có:
 - $x + T \in D$ và $x - T \in D$
 - $f(x + T) = f(x)$

Số T dương nhỏ nhất thỏa mãn các điều kiện trên (nếu có) được gọi là chu kì của hàm số tuần hoàn đó.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

- | | | |
|--------------------------|--|--|
| a) $y = \sin 2x$ | b) $y = \tan x $ | c) $y = \sin^4 x$ |
| d) $y = \tan x + \cot x$ | e) $y = \sin x \cdot \cos x$ | f) $y = 2 \sin x + 3$ |
| g) $y = \sin x + \cos x$ | h) $y = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x}$ | i) $y = \frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x}$ |

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin(-2x) = -\sin 2x = -f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \pm \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \tan|-x| = \tan|x| = f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có: $f(-x) = \sin^4(-x) = \sin^4 x = f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -(\tan x + \cot x) = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

e) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cos x = -f(x)$. Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

f) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 1$; $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3 = 5$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$. Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

g) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$f\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$; $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

Nhận thấy $\begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{4}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{cases}$. Do đó hàm số không chẵn không lẻ.

h) Hàm số xác định khi $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cot x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin^2 x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \frac{\sin(-x) - \tan(-x)}{\sin(-x) + \cot(-x)} = \frac{-\sin x + \tan x}{-\sin x - \cot x} = \frac{\sin x - \tan x}{\sin x + \cot x} = f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

i) Tập xác định: $\cot x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = \frac{\cos^3(-x) + 1}{\sin^3(-x)} = \frac{\cos^3 x + 1}{-\sin^3 x} = -\frac{\cos^3 x + 1}{\sin^3 x} = -f(x)$

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Bài tập 2: Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau đây:

a) $y = f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ b) $y = \frac{\sin 2x}{2\cos x - 3}$

Lời giải

a) Ta có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Hàm số không thỏa mãn tính chất của hàm số chẵn, và cũng không thỏa mãn tính chất của hàm số lẻ nên đây là hàm số không chẵn không lẻ.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = \frac{\sin(-2x)}{2\cos(-x)-3} = \frac{-\sin 2x}{2\cos x-3} = -f(x) \text{ nên hàm số đã cho là hàm số lẻ.}$$

Bài tập 3: Xác định tham số m để hàm số $y = f(x) = 3m.\sin 4x + \cos 2x$ là hàm số chẵn.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

Ta có: $f(-x) = 3m.\sin(-4x) + \cos(-2x) = -3m.\sin 4x + \cos 2x$

Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì:

$$f(-x) = f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow 3m.\sin 4x + \cos 2x = -3m.\sin 4x + \cos 2x \Leftrightarrow 6m.\sin 4x = 0 \Leftrightarrow m = 0$$

Bài tập 4: Xét tính tuần hoàn và tìm chu kỳ cơ sở (nếu có) của các hàm số sau:

a) $f(x) = \sin(x^2)$

b) $y = \tan \sqrt{x}$

Lời giải

a) Hàm số $f(x) = \sin(x^2)$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới 0 và $\sqrt{(k+1)\pi} - \sqrt{k\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{(k+1)\pi} + \sqrt{k\pi}} \rightarrow 0$ khi $k \rightarrow \infty$.

b) Hàm số $f(x) = \tan \sqrt{x}$ không tuần hoàn vì khoảng cách giữa các nghiệm (không điểm) liên tiếp của nó dần tới $+\infty$ và $(k+1)^2 \pi^2 - k^2 \pi \rightarrow \infty$ khi $k \rightarrow \infty$.

Bài tập 5: Tìm chu kỳ T của hàm số sau:

a) $f(x) = \sin \frac{x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2}$

b) $y = \sin \left(5x - \frac{\pi}{4} \right)$

c) $y = -\frac{1}{2} \sin(100\pi x + 50\pi)$

d) $y = \cos 3x + \cos 5x$

Lời giải

a) Chu kỳ của $\sin \frac{x}{2}$ là $T_1 = \frac{2\pi}{\left| \frac{1}{2} \right|} = 4\pi$ và Chu kỳ của $\cos \frac{3x}{2}$ là $T_2 = \frac{2\pi}{\left| \frac{3}{2} \right|} = \frac{4\pi}{3}$

Chu kỳ của hàm ban đầu là bội chung nhỏ nhất của hai chu kỳ T_1 và T_2 vừa tìm được ở trên.
Chu kỳ của hàm ban đầu $T = 4\pi$

b) Hàm số $y = \sin(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{5}$.

c) Hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50}$.

d) Hàm số $y = \cos 3x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{3}$.

Hàm số $y = \cos 5x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{5}$.

Suy ra hàm số $y = \cos 3x + \cos 5x$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 2\pi$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đồ thị của hàm số nào sau đây không đối xứng qua trục tung:

A. $y = 1 - \sin x$.

B. $y = 2 + \sin^2 x$.

C. $y = \sin(3|x| - 1)$.

D. $y = \sin(1 + 2x) + \sin(1 - 2x)$.

Lời giải

Đồ thị của hàm số không đối xứng qua trục tung thì hàm số đó là hàm số không chẵn. Mặt khác hàm số $y = 1 - \sin x$ là hàm không chẵn không lẻ nên đồ thị hàm số $y = 1 - \sin x$ không đối xứng qua trục tung.

Câu 2: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

A. $y = \sin x$.

B. $y = \sin x + \cos x$.

C. $y = -\cos x$.

D. $y = \cos x$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \sin x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\sin(-x) = -\sin x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ.

Xét hàm số $y = \sin x + \cos x = f(x)$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$; $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Suy ra $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq \pm f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số $y = \sin x + \cos x$ không là hàm số chẵn và không là hàm số lẻ.

Xét hàm số $y = -\cos x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $-\cos(-x) = -\cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = -\cos x$ là hàm số chẵn.

Xét hàm số $y = \cos x$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 3: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.** $y = \cos 3x$. **B.** $y = -\sin x$. **C.** $y = \sin 3x$. **D.** $y = \sin 2x + \cos 2x$.

Lời giải

Xét các đáp án ta thấy ở phương án A hàm số $y = \cos 3x$ có

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ thỏa mãn $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

$f(-x) = \cos(-3x) = \cos 3x = f(x), \forall x \in D$ do đó $y = \cos 3x$ là hàm số chẵn.

Các hàm số ở các đáp án còn lại không thỏa mãn định nghĩa hàm số chẵn.

Câu 4: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.** $y = -\sin x$. **B.** $y = \cos x$. **C.** $y = \cos x \sin x$. **D.** $y = \sin x$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \cos x$ có tập xác định $\mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$

Đặt $f(x) = \cos x$. Khi đó $\forall x \in \mathbb{R}: f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$.

Do đó $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 5: Hàm số nào sau đây là hàm số chẵn?

- A.** $y = \tan x - \sin 2x$. **B.** $y = \sin 2x$.
C. $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. **D.** $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Xét hàm: $y = \tan x - \sin 2x \Rightarrow y(-x) = \tan(-x) - \sin(-2x) = -y(x) \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$ nên hàm số là hàm lẻ.

Xét hàm: $y = \sin 2x \Rightarrow y(-x) = \sin(-2x) = -y(x) \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số là hàm lẻ.

Xét hàm: $y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \Rightarrow y(-x) = \cos(-x) = \cos x = y(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số là hàm chẵn.

Xét hàm:

$y = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sin(-x) = -\sin x \Rightarrow y(-x) = -\sin(-x) = \sin x = -y(x), \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số là hàm lẻ.

Câu 6: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lẻ?

- A.** $y = \frac{\tan x}{\sin x}$. **B.** $y = \frac{\cot x}{\cos x}$. **C.** $y = \cos x$. **D.** $y = \sin^2 x$.

Lời giải

Ta có tập xác định của hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Suy ra $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ và $f(-x) = \frac{\cot(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\cot x}{\cos x} = -f(x)$.

Vậy hàm số $y = \frac{\cot x}{\cos x}$ là hàm số lẻ.

Câu 7: Phát biểu nào sau đây đúng?

- A. Hàm số $y = \sin^2 x + x$ là hàm số lẻ.
- B.** Hàm số $y = \sin x \cdot \cos x$ là hàm số lẻ.
- C. Hàm số $y = \cos x + \sin x$ là hàm số chẵn.
- D. Hàm số $y = \sin x + 1$ là hàm số lẻ.

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ và $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = -\sin x \cdot \cos x = -f(x)$

Vậy $f(x)$ là hàm số lẻ.

Câu 8: Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

- A. $y = \sin x$.
- B.** $y = \cos x$.
- C. $y = \cot x$.
- D. $y = \tan x$.

Lời giải

Xét hàm số $y = \cos x$.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \Rightarrow \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có $\cos(-x) = \cos x, \forall x \in D$ nên hàm số $y = \cos x$ là hàm chẵn.

Câu 9: Hàm số nào dưới đây là hàm số lẻ?

- A.** $y = \tan x$.
- B. $y = \cos(-x)$.
- C. $y = \sin^2 x$.
- D. $y = \cot^2 x$.

Lời giải

Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ theo tính chất hàm số lượng giác.

Các hàm số $y = \sin^2 x; y = \cot^2 x; y = \cos(-x)$ là hàm số chẵn.

Câu 10: Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số chẵn?

- A.** $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x$.
- B. $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- C. $y = 3 \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 4 \sin(\pi + 2x)$.
- D. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\cos 2x}$.

Lời giải

Ta có $y = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \right) - \sin x = \cos x$

Mà hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn suy ra hàm số chẵn.

Câu 11: Cho các hàm số $y = \cos x, y = \sin x, y = \tan x, y = \cot x$. Trong các hàm số trên có bao nhiêu hàm số chẵn?

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $y = \cos x$ là hàm số chẵn.

Câu 12: Hàm số nào dưới đây là hàm số chẵn?

- A.** $y = x^2 \cdot \tan x$. **B.** $y = \cos 2x - x$. **C.** $y = \sqrt{x} \cos x$. **D.** $y = x \cdot \sin 2x$.

Lời giải

Hàm số $y = f(x) = x^2 \cdot \tan x$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x)^2 \cdot \tan(-x) = -x^2 \cdot \tan x = -f(x)$ nên $y = x^2 \cdot \tan x$ là hàm số lẻ.

Hàm số $y = f(x) = \cos 2x - x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

có $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos 2\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1 + \frac{\pi}{2} \neq \pm f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nên hàm số $y = \cos 2x - x$ không chẵn, không lẻ.

Hàm số $y = f(x) = \sqrt{x} \cos x$ có tập xác định $D = [0; +\infty)$; có $x = 1 \in D$ nhưng $-1 \notin D$ nên hàm số $y = \sqrt{x} \cos x$ không chẵn, không lẻ.

Hàm số $y = f(x) = x \cdot \sin 2x$ có tập xác định $D = \mathbb{R}$; $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = (-x) \cdot \sin 2(-x) = x \cdot \sin 2x = f(x)$ nên chọn.

Câu 13: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

- A.** $T = \pi$. **B.** $T = 4\pi$. **C.** $T = 2\pi$. **D.** $T = 6\pi$

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}; x + 2\pi \in D; x - 2\pi \in D; \forall x \in D$

Ta có: $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3} + 2\pi\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ do đó $T = 2\pi$

Câu 14: Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x$ là

- A.** π . **B.** 2π . **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** 4π .

Lời giải

Ta có: $y = \sin 2(x + \pi) = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2x$. Do π là số dương nhỏ nhất thỏa mãn tính chất trên nên hàm $y = \sin 2x$ tuần hoàn với chu kỳ π

Câu 15: Mệnh đề nào sau đây là sai?

- A. Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π .
 B. Hàm số $y = \sin x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
 C. Hàm số $y = \cos x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .
D. Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ 2π .

Lời giải

Hàm số $y = \cot x$ tuần hoàn với chu kỳ π .

Câu 16: Trong các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ có bao nhiêu hàm số có chu kỳ là 2π ?

- A. 0. B. 1. **C.** 2. D. 3.

Lời giải

Chỉ có $y = \sin x, y = \cos x$ là hai hàm số có chu kỳ bằng 2π .

Câu 17: Hàm số $y = \sin 2x$ có chu kỳ tuần hoàn là

- A.** $T = \pi$. B. $T = \frac{\pi}{2}$. C. $T = 4\pi$. D. $T = 2\pi$.

Lời giải

Chu kỳ tuần hoàn của hàm số $y = \sin 2x$ là $T = \frac{2\pi}{|2|} = \pi$.

Câu 18: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2025\right)$.

- A. $T = \pi$. B. $T = -2\pi$. **C.** $T = 4\pi$. D. $T = 2\pi$.

Lời giải

Lý thuyết : hàm số $y = \cos(ax + b)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$.

Áp dụng: Hàm số $y = \cos\left(\frac{x}{2} + 2025\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 4\pi$.

Câu 19: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

- A. $k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $\frac{\pi}{2}$. C. π . D. 2π .

Lời giải

Áp dụng: Hàm số $y = \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{2}$.

Câu 20: Hàm số $y = \sin 2x + \cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ có chu kỳ là:

- A. 3π . **B.** 2π . C. $\frac{\pi}{6}$. D. 6π .

Lời giải

Ta thấy $\sin 2x$ có chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$, $\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$ có chu kì $T_2 = \frac{2\pi}{3}$

Vì hàm số y là tổng của hai hàm trên nên chu kì của y là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2

Vậy hàm số có chu kì $T = 2\pi$.

Câu 21: Hàm số $y = \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ bằng

- A. 4π . B. 3π . C. 2π . D. 6π .

Lời giải

Cách 1: Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Vì hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kỳ π nên với mọi $x \in D$, ta có

$$f(x) = \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} + \pi\right) = \tan\left(\frac{x+3\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = f(x+3\pi).$$

Ngoài ra, giả sử $f(x) = f(x+\alpha), \forall x \in D$ thì

$$\tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{x+\alpha}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{3}\right), \forall x \in D. \text{ Khi đó } \frac{\alpha}{3} \text{ là bội của } \pi \text{ hay } \alpha \text{ là}$$

bội của 3π . Vậy hàm số $y = \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ bằng 3π .

Cách 2: Hàm số $y = \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right)$ có tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{3\pi}{4} + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Giả sử hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T > 0$. Khi đó

$$f(x+T) = f(x), \forall x \in D \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x+T}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right), \forall x \in D.$$

$$\text{Chọn } x = -\frac{3\pi}{4}, \text{ ta được } \tan\left(\frac{T}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow T = k3\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Thử lại ta được $\forall x \in D, f(x+T) = f(x)$ và $x+3\pi, x-3\pi \in D$.

Với $k=1$, ta được $T=3\pi$ là số dương bé nhất thỏa mãn nên hàm số tuần hoàn chu kì $T=3\pi$

Câu 22: Chu kỳ của hàm số $y = 3 \tan(mx + n)$ với m, n là những số nguyên dương là

- A. $\frac{\pi}{m}$. B. $\frac{\pi}{c}$, c là bội chung nhỏ nhất của m, n .
C. $\frac{\pi}{m.n}$. D. $\frac{\pi}{d}$, d là ước chung lớn nhất của m, n .

Lời giải

Ta có chu kỳ của hàm số $y = 3 \tan(mx + n)$ là $\frac{\pi}{|m|} = \frac{\pi}{m}$.

Câu 23: Chu kì của hàm số $y = 3 + 2\sin^2 2x$ là:

- A.** $\frac{\pi}{2}$. **B.** $\frac{\pi}{4}$. **C.** π . **D.** 2π .

Lời giải

Ta có: $y = 3 + 2\sin^2 2x = 3 + 1 - \cos 4x = 4 - \cos 4x$.

Suy ra chu kì tuần hoàn của hàm số là $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hàm số $y = \cos x$ xác định với mọi số thực
 b) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π .
 c) Hàm số $y = \sin(x^2)$ là hàm số lẻ.
 d) Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 5\sin x + 2$ bằng 2

Lời giải

- a) Đúng: Hàm số $y = \cos x$ xác định với mọi số thực
 b) Hàm số $y = \tan x$ tuần hoàn với chu kì π
 c) Xét hàm số $y = \sin(x^2)$.

Tập xác định \mathbb{R} và $f(-x) = \sin(-x)^2 = \sin x^2 = f(x)$ nên đây là hàm số chẵn.

d) Ta có $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 5\sin x + 2 \leq 7$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -3 .

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x + \cos x - 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số $D = \mathbb{R}$
 b) $f(-\pi) = -f(\pi)$
 c) $f(-x) = f(x)$
 d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.

b) Sai: Ta có $f(-\pi) = -2 \neq -f(\pi) = 2$

c) Đúng: Với mọi $x \in D$ ta có:

$-x \in D$ và $f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-x) - 1 = \sin^2 x + \cos x - 1 = f(x)$.

d) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = \tan x - x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- b) $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
- c) $f(-x) = -f(x)$
- d) Hàm số đối xứng với nhau qua trục Oy

Lời giải

- a) Đúng: Hàm số xác định $\Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- b) Sai: Ta có: $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\pi}{3}$; $f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{3} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$
- c) Đúng: Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \in D$ ta có: $-x \in D$ và $f(-x) = \tan(-x) - (-x) = -\tan x + x = -(\tan x - x) = -f(x)$.

d) Sai: Hàm số đã cho là hàm số lẻ nên đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ O

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = |x|\sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- b) $f(-\pi) = -f(\pi)$
- c) $f(-x) = -f(x)$
- d) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

- a) Sai: Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R}$.
- b) Đúng: Ta có: $f(-\pi) = 0$; $-f(\pi) = 0 \Rightarrow f(-\pi) = -f(\pi)$
- c) Đúng: Với mọi $x \in D$ ta có: $-x \in D$ và $f(-x) = |-x|\sin(-x) = -|x|\sin x = -f(x)$.
- d) Đúng: Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ nên đối xứng qua gốc tọa độ

Câu 5: Cho hàm số $f(x) = |\tan x| + |x^3 - 3x|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- b) $f(-\pi) = -f(\pi)$
- c) Hàm số đã cho là hàm số chẵn.
- d) Hàm số đã cho đối xứng qua gốc tọa độ $O(0;0)$

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Sai: $f(-\pi) \neq -f(\pi)$

c) Đúng: Với mọi $x \in D$ ta có:

$$-x \in D \text{ và } f(-x) = |\tan(-x)| + |(-x)^3 - 3(-x)| = |\tan x| + |x^3 - 3x| = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

d) Sai: Hàm số đã cho đối xứng qua gốc qua trục Oy

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = 2\cos x + 1$ và $g(x) = \sin x + \tan x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ là hàm tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) Hàm số $g(x)$ là hàm không tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$ là $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và $f(x + 2\pi) = 2\cos(x + 2\pi) + 1 = 2\cos x + 1 = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Sai: Tập xác định hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và

$$f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) + \tan(x + 2\pi) = \sin x + \tan x = f(x).$$

d) Sai: Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \tan x$ và $g(x) = \cot^2 x - \frac{\sin 2x}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Hàm số $f(x)$ là hàm không tuần hoàn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Hàm số $g(x)$ là hàm tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

b) Sai: Với mọi $x \in D$ thì $x \pm \pi \in D$ và $f(x + \pi) = \tan(x + \pi) = \tan x = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Đúng: Tập xác định hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Với mọi $x \in D$ thì $x \pm \pi \in D$ và

$$f(x + \pi) = \cot^2(x + \pi) - \frac{\sin 2(x + \pi)}{2} = \cot^2 x - \frac{\sin 2x}{2} = f(x).$$

d) Đúng: Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 8: Cho các hàm số $f(x) = \sqrt{3 - 2\sin x}$; và $g(x) = \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Hàm số $g(x)$ xác định khi $x \neq k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm không tuần hoàn.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số xác định $\Leftrightarrow 3 - 2\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq \frac{3}{2}$ (đúng với mọi $x \in \mathbb{R}$).

Vì vậy tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng: Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và

$$f(x + 2\pi) = \sqrt{3 - 2\sin(x + 2\pi)} = \sqrt{3 - 2\sin x} = f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

c) Sai: Hàm số xác định $\Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} \neq 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Vì vậy tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Sai: Với mọi $x \in D$ thì $x \pm 2\pi \in D$ và

$$f(x + 2\pi) = \tan \frac{x + 2\pi}{2} - \frac{1}{3}\cos(x + 2\pi) = \tan \left(\frac{x}{2} + \pi \right) - \frac{1}{3}\cos x = \tan \frac{x}{2} - \frac{1}{3}\cos x = f(x)$$

Vậy hàm số đã cho là hàm tuần hoàn.

Câu 9: Cho các hàm số sau: $f(x) = \sqrt{5 - 3\sin^2 x}$; $g(x) = \tan x - x\cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R}$.

b) Sai: Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và $f(-x) = \sqrt{5 - 3\sin^2(-x)} = \sqrt{5 - 3\sin^2 x} = f(x)$.

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) Đúng: Tập xác định hàm số là: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

d) Sai: Với mọi $x \in D$ thì $-x \in D$ và

$$f(-x) = \tan(-x) - (-x)\cos(-x) = -\tan x + x\cos x = -f(x).$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 10: Cho các hàm số sau: $f(x) = 2\cos 3x - 1$; $g(x) = |2\sin x + 2| + |2\sin x - 2|$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.

c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Xét $y = f(x) = 2\cos 3x - 1$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có: $f(-x) = 2\cos(-3x) - 1 = 2\cos 3x - 1 = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

c) d) Xét $y = f(x) = |2\sin x + 2| + |2\sin x - 2|$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có: $f(-x) = |2\sin(-x) + 2| + |2\sin(-x) - 2| = |-2\sin x + 2| + |-2\sin x - 2|$
 $= |-2\sin x + 2| + |-2\sin x - 2| = |2\sin x - 2| + |2\sin x + 2| = f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 11: Cho các hàm số sau: $f(x) = 3\sin^3 x$; $g(x) = -5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

- b) Hàm số $f(x)$ đã cho là hàm số chẵn.
 c) Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.
 d) Hàm số $g(x)$ đã cho là hàm số lẻ.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định hàm số $f(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

b) Sai: Xét $y = f(x) = 3\sin^3 x$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có: $f(-x) = 3\sin^3(-x) = -3\sin^3 x = -f(x)$ do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

c) Đúng: Tập xác định hàm số $g(x)$ là: $D = \mathbb{R}$.

d) Sai: Xét $y = f(x) = -5\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ suy ra $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = -5\cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -5\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-5\sqrt{3}}{2} \\ f\left(\frac{\pi}{12}\right) = -5\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) = -5\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f\left(-\frac{\pi}{12}\right) \neq f\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ f\left(-\frac{\pi}{12}\right) \neq -f\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$$

Do đó hàm số đã cho không chẵn, không lẻ.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$.

Lời giải

Hàm số $y = -\frac{1}{2}\sin(100\pi x + 50\pi)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{100\pi} = \frac{1}{50} = 0,02$

Câu 2: Tìm chu kỳ T của hàm số $y = 3\cos(2x + 1) - 2\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$.

Lời giải

Hàm số $y = 3\cos(2x + 1)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Hàm số $y = -2\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$.

Suy ra hàm số $y = 3\cos(2x + 1) - 2\sin\left(\frac{x}{2} - 3\right)$ tuần hoàn với chu kỳ $T = 4\pi \approx 12,56$

Câu 3: Tìm chu kì T của hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

Hàm số $y = \sin \frac{x}{2}$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = 4\pi$.

Hàm số $y = -\tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \frac{\pi}{2}$.

Suy ra hàm số $y = \sin \frac{x}{2} - \tan \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$ tuần hoàn với chu kì $T = 4\pi \approx 12,56$

Câu 4: Tìm chu kì T của hàm số $y = 2\sin^2 x + 3\cos^2 3x$.

Lời giải

Ta có $y = 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} + 3 \cdot \frac{1 + \cos 6x}{2} = \frac{1}{2}(3\cos 6x - 2\cos 2x + 5)$.

Hàm số $y = 3\cos 6x$ tuần hoàn với chu kì $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

Hàm số $y = -2\cos 2x$ tuần hoàn với chu kì $T_2 = \pi$.

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

Câu 5: Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây. Tìm chiều cao (đơn vị:cm) của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

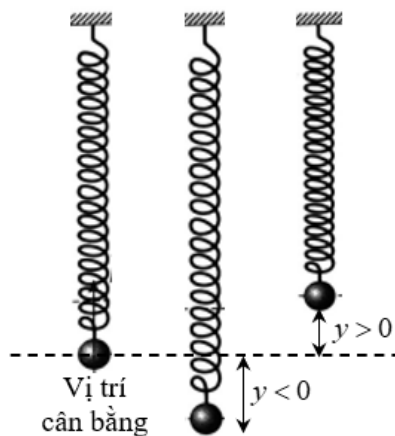
Chu kì của sóng là $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$ (giây).

Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kì dao động.

Ta có: $h(20) = 90\cos\left(\frac{\pi}{10} \cdot 20\right) = 90$ (cm).

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

Câu 6: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây. Gọi a là chu kì dao động của con lắc lò xo; b (Hz) là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và c (cm) là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính $a + b + c$



Lời giải

Hàm số $y = 25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$ suy ra chu kỳ dao động của con lắc lò xo (tức là khoảng thời gian để con lắc thực hiện được một dao động toàn phần) là $T = \frac{1}{2}$ giây nên $a = 0,5$.

Vì chu kỳ dao động của con lắc là $T = \frac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $b = f = \frac{1}{T} = 2$ Hz.

Vì phương trình dao động của con lắc là $y = 25\sin 4\pi t$ nên biên độ dao động của nó là $A = 25$ cm

Từ đó khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $c = 2A = 50$ cm.

Vậy $a + b + c = 0,5 + 2 + 50 = 52,5$.

-----**HẾT**-----

Dạng 3: Max – min của hàm số lượng giác

Phương pháp: Ta thường sử dụng ba cách làm sau đây

- Sử dụng các bất đẳng thức cơ bản:
 - $-1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 - $0 \leq \sin^2 x \cdot \cos^2 x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Sử dụng điều kiện có nghiệm
 - $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
 - $0 \leq |\sin x| \cdot |\cos x| \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$
- Sử dụng điều kiện có nghiệm
 - $\sin x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$
 - $\cos x = f(m)$ có nghiệm khi $-1 \leq f(m) \leq 1$
 - $a \sin x + b \cos x = c$ có nghiệm khi $a^2 + b^2 \geq c^2$
- Sử dụng bảng biến thiên: Lập bảng biến thiên của hàm số từ đó đưa ra kết luận.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số sau đây:

a) $y = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1$

b) $y = 2\sqrt{\cos x + 1} - 3$

c) $y = \sin x + \cos x$

d) $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x$

e) $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$

f) $y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1$

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Rightarrow -1 \leq 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + 1 \leq 3$

Hay $-1 \leq y \leq 3$.

- $\max y = 3$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $\min y = -1$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

b) Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \cos x + 1 \leq 2 \Rightarrow 0 \leq \sqrt{\cos x + 1} \leq \sqrt{2}$

$\Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow -3 \leq 2\sqrt{\cos x + 1} - 3 \leq 2\sqrt{2} - 3$ hay $-3 \leq y \leq 2\sqrt{2} - 3$

- $\max y = 2\sqrt{2} - 3$ khi $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $\min y = -3$ khi $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) Ta có: $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$.

- $\max y = \sqrt{2}$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $\min y = -\sqrt{2}$ khi $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Ta có: $y = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x - \frac{1}{2} \cos 2x \right) = 2 \sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow -2 \leq y \leq 2$.

- $\max y = 2$ khi $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $\min y = -2$ khi $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

e) Ta có:

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$$

$$\text{Vì } -1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Rightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow -4 \leq -(\sin x - 1)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \text{ hay } 0 \leq y \leq 4$$

- $\max y = 4$ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $\min y = 0$ khi $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

f) Ta có

$$y = \sin^4 x - 2 \cos^2 x + 1 = (1 - \cos^2 x)^2 - 2 \cos^2 x + 1 = \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 2 = (\cos^2 x - 2)^2 - 2$$

$$\text{Vì } 0 \leq \cos^2 x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \cos^2 x - 2 \leq -1 \Leftrightarrow 4 \geq (\cos^2 x - 2)^2 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 2 \geq (\cos^2 x - 2)^2 - 2 \geq -1 \Leftrightarrow 2 \geq y \geq -1$$

- $\max y = 2$ khi $\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

- $\min y = -1$ khi $\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Bài tập 2: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số sau:

a) $y = \frac{2 \sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2}$

b) $y = \frac{\sin x + 2 \cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2}$

Lời giải

a) Ta có: $\sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2$. Vì $-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R}$ nên:

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \leq \sqrt{2} - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin x + \cos x - 2 = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - 2 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Tập xác định của hàm số là: $D = \mathbb{R}$

Biến đổi: $y = \frac{2\sin x - \cos x + 1}{\sin x + \cos x - 2} \Leftrightarrow y\sin x + y\cos x - 2y = 2\sin x - \cos x + 1$

$\Leftrightarrow (y - 2)\sin x + (y + 1)\cos x = 2y + 1 \quad (*)$

Điều kiện để phương trình (*) có nghiệm $x \in \mathbb{R}$ là $a^2 + b^2 \geq c^2$

$\Leftrightarrow (y - 2)^2 + (y + 1)^2 \geq (2y + 1)^2 \Leftrightarrow 2y^2 + 6y - 4 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{-3 - \sqrt{17}}{2} \leq y \leq \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}$

Kết luận: $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{-3 + \sqrt{17}}{2}; \min_{\mathbb{R}} y = \frac{-3 - \sqrt{17}}{2}$.

b) Ta có $y = \frac{\sin x + 2\cos x + 1}{\sin x + \cos x + 2} \Leftrightarrow (y - 1)\sin x + (y - 2)\cos x = 1 - 2y \quad (*)$

Phương trình (*) có nghiệm $\Leftrightarrow (y - 1)^2 + (y - 2)^2 \geq (1 - 2y)^2 \Leftrightarrow y^2 + y - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq y \leq 1$.

Vậy $m = -2; M = 1$.

Bài tập 3: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{m\sin x + 1}{\cos x + 2}$ nhỏ hơn 2.

Lời giải

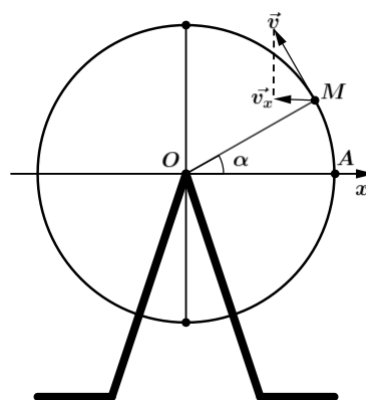
Ta có: $y = \frac{m\sin x + 1}{\cos x + 2} \Leftrightarrow y\cos x + 2y = m\sin x + 1 \Leftrightarrow m\sin x - y\cos x = 2y - 1 \quad (*)$

Phương trình (*) có nghiệm khi $m^2 + y^2 \geq (2y - 1)^2 \Leftrightarrow 3y^2 - 4y + 1 - m^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow \frac{2 - \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \leq y \leq \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3} \Rightarrow y_{\max} = \frac{2 + \sqrt{1 + 3m^2}}{3} < 2 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 3m^2} < 4 \Leftrightarrow m^2 < 5$

Do $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-2; -1; 0; 2; 1\}$. Vậy có 5 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 4: Khi đu quay hoạt động, vận tốc theo phương ngang của một cabin M phụ thuộc vào góc lượng giác $\alpha = (Ox, OM)$ theo hàm số $v_x = 0,3\sin\alpha$ (m/s).



a) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của v_x .

b) Dựa vào đồ thị của hàm số \sin , hãy cho biết trong vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$), góc α ở trong các khoảng nào thì v_x tăng.

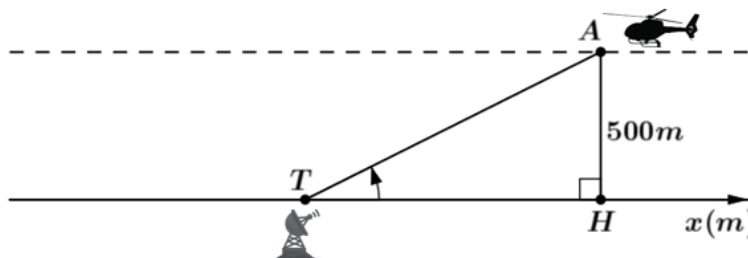
Lời giải

a) Do $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ nên $-0,3 \leq \sin \alpha \leq 0,3$

Vậy giá trị lớn nhất của v_x là $0,3$ (m) và giá trị nhỏ nhất của v_x là $-0,3$ (m).

b) Dựa vào đồ thị hàm số \sin , ta thấy vòng quay đầu tiên ($0 \leq \alpha \leq 2\pi$); v_x tăng khi $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$

Bài tập 5: Trong hình dưới đây, một chiếc máy bay A bay ở độ cao 500 m theo một đường thẳng đi ngang qua phía trên trạm quan sát T ở mặt đất. Hình chiếu vuông góc của A lên mặt đất là H và α là góc lượng giác (Tx, TA) ($0 < \alpha < \pi$).



Hãy cho biết với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì x_H nằm trong khoảng nào. Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) $x_H = 500 \cdot \cot \alpha$

b) Với $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$ thì $\frac{-\sqrt{3}}{3} < \cot \alpha < \sqrt{3}$. Vậy $x_H \in \{-288,7; 866\}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = 3 \sin 3x - 4$ lần lượt là

- A. 7;1. B. 1;-4. C. 3;-4. **D. -1;-7.**

Lời giải

Ta có $-1 \leq \sin 3x \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \sin 3x \leq 3 \Leftrightarrow -7 \leq 3 \sin 3x - 4 \leq -1$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là -1 khi $\sin 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là -7 khi $\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k \frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Câu 2: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 \sin 2x - 5$ lần lượt là:

- A. -8 và -2** B. 2 và 8. C. -5 và 2. D. -5 và 3.

Lời giải

Ta có: $-1 \leq \sin 2x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3 \sin 2x \leq 3 \Rightarrow -8 \leq 3 \sin 2x - 5 \leq -2$.

Câu 3: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 4 \sin x - 3$ là

- A. -7. B. -3. **C. 1.** D. 3.

Lời giải

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -7 \leq 4 \sin x - 3 \leq 1$.

Do đó giá trị lớn nhất của y bằng 1, dấu "=" xảy ra khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 4: Giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là

- A. 5. B. 2. C. 1. **D.** -1.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Ta có } -1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 1 &\Leftrightarrow -3 \leq 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \leq 3 \\ &\Leftrightarrow -1 \leq 3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2 \leq 5. \end{aligned}$$

Vậy giá trị bé nhất của hàm số $y = -3\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2$ là -1.

Câu 5: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$. Tính

$$P = M - m.$$

- A. $P = 2\sqrt{2}$. **B.** $P = 4$. C. $P = \sqrt{2}$. D. $P = 2$.

Lời giải

$$\text{Vì } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall x \text{ nên } -2 \leq y \leq 2.$$

$$\text{Vậy } P = M - m = 2 - (-2) = 4.$$

Câu 6: Biết hàm số $y = 4\sin x - 3\cos x + 2$ đạt giá trị lớn nhất là M , giá trị nhỏ nhất là m . Tổng $M + m$ là

- A.** 4. B. 1. C. 2. D. 0.

Lời giải

Để tồn tại giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số thì phải tồn tại giá trị của x sao cho $y = 4\sin x - 3\cos x + 2$ hay phương trình $4\sin x - 3\cos x = y - 2$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow 4^2 + (-3)^2 \geq (y - 2)^2 \Leftrightarrow 25 \geq (y - 2)^2 \Leftrightarrow -5 \leq y - 2 \leq 5 \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 7.$$

$$\text{Vậy } M = y_{\max} = 7, m = y_{\min} = -3 \Rightarrow M + m = 4.$$

Câu 7: Giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m của hàm số $y = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 3$ là

- A. $M = 1$ và $m = -5$. B. $M = 1$ và $m = -7$.
C. $M = -1$ và $m = -6$. **D.** $M = -1$ và $m = -5$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sqrt{3}\cos x - \sin x - 3 \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos x - \sin x = y + 3$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow (\sqrt{3})^2 + (-1)^2 \geq (y + 3)^2 \Leftrightarrow (y + 3)^2 \leq 4$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq y + 3 \leq 2 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq -1. \text{ Vậy } M = -1, m = -5.$$

Câu 8: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 2020$ là:

- A. 2024. **B.** 2018. C. 2022. D. 2016.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sqrt{3} \sin x + \cos x + 2020 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x \right) + 2020 = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2020.$$

$$\text{Ta có: } -1 \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Rightarrow -2 \leq 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) \leq 2.$$

$$\text{Suy ra } 2018 \leq 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2020 \leq 2022 \Leftrightarrow 2018 \leq y \leq 2022.$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là 2018 khi } \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 9: Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -\cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right)$ trên $\left[\frac{-2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$ là

- A.** 1 và -1. B. 1 và $-\frac{1}{2}$. C. $\frac{1}{2}$ và 1. D. $\frac{1}{2}$ và $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Vì } x \in \left[\frac{-2\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{3} \in [-\pi; \pi] \Rightarrow -1 \leq \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y \leq 1.$$

$$\text{Với } x = \frac{-2\pi}{3} \Rightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = -1 \Rightarrow y = 1 \text{ suy ra giá trị lớn nhất của hàm số là 1.}$$

$$\text{Với } x = \frac{-\pi}{6} \Rightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{3} \right) = 1 \Rightarrow y = -1 \text{ suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số là } -1.$$

Câu 10: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ lần lượt là

- A. -2 và 2. **B.** 5 và 9. C. -2 và 7. D. 4 và 7.

Lời giải

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 2 \Leftrightarrow 5 \leq 7 - 2 \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 9$$

$$\text{Nên } \min_{\mathbb{R}} y = 5 \text{ và } \max_{\mathbb{R}} y = 9.$$

Câu 11: Hàm số $y = -2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 5$ đạt giá trị lớn nhất tại

- A.** $x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.
C. $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ta có: $0 \leq \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1, \forall x \in \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ suy ra: $\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$.

Vậy hàm số $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ bằng $\frac{3}{2}$ khi

$$2x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0.$$

Câu 15: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x - 4\sin x + 2$

- A. -20. B. 0. C. 9. **D.** -1.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \sin^2 x - 4\sin x + 2 = \sin^2 x - 4\sin x + 4 - 4 + 2 = (\sin x - 2)^2 - 2$$

$$\text{Do } \sin x \leq 1 \Rightarrow (\sin x - 2)^2 \leq (-1)^2 \Rightarrow (\sin x - 2)^2 - 2 \leq -1.$$

Câu 16: Giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $y = 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ lần lượt là

- A. -2 và 7. **B.** 5 và 9. C. 4 và 7. D. -2 và 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq -2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 5 \leq 7 - 2\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 9.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số là 5 và 9.

Câu 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin x + 2\cos x - 3$ là:

- A. $\sqrt{5} + 3$. B. $\sqrt{5}$. C. 0 **D.** $\sqrt{5} - 3$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \sqrt{5}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x\right) - 3 = \sqrt{5}\sin(x + \alpha) - 3, \text{ với } \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}; \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\max_{\mathbb{R}} y = \sqrt{5} - 3 \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x + \alpha = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi$$

Câu 18: Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\cos x}{\cos x + 3}$ bằng

- A. -6. B. -1. C. -3. **D.** $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{2\cos x}{\cos x + 3} \Leftrightarrow (y - 2)\cos x = 3y(*)$$

Trường hợp 1: $y = 2$. Khi đó: (*) trở thành: $0 = 6$ (vô lý).

$$\text{Trường hợp 2: } y \neq 2. \text{ Khi đó: (*) trở thành: } \cos x = \frac{3y}{2 - y}.$$

Để hàm số có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì:
$$\begin{cases} -1 \leq \frac{3y}{2-y} \leq 1 \\ 2-y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{2}.$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số là $\frac{1}{2}$ khi $x = k2\pi$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là -1 khi $x = \pi + k2\pi$.

Câu 19: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin 3x$ bằng

- A. -6 . B. -1 . C. -3 . **D. -2 .**

Lời giải

Ta có $-1 \leq \sin 3x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -2 \leq 2\sin 3x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$.

Suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 2\sin 3x$ là -2 , xảy ra khi $\sin 3x = -1$

$$\sin 3x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 20: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ là:

- A. -5 . B. 1 . **C. 5 .** D. -1 .

Lời giải

Ta có: $-1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 3 \geq -3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -3 \Leftrightarrow 5 \geq 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq -1$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2 - 3\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ bằng 5 .

Câu 21: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{1 - \sin 2x}$ là

- A. $\sqrt{2}$.** B. 2 . C. 0 . D. 1 .

Lời giải

Ta có: $\sin 2x \geq -1 \Rightarrow \sqrt{1 - \sin 2x} \leq \sqrt{2}$.

Câu 22: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2018$ bằng

- A. 2019. **B. 2021.** C. 2020. D. 2022.

Lời giải

Ta có: $y = 2\cos^2 x - 2\sqrt{3}\sin x \cos x + 2018 \Leftrightarrow y = 1 + \cos 2x - \sqrt{3}\sin 2x + 2018$

$$\Leftrightarrow y = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\cos 2x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x \right) + 2019 \Leftrightarrow y = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) + 2019 \leq 2 \cdot 1 + 2019 = 2021.$$

Dấu “=” xảy ra khi $\sin\left(\frac{\pi}{6} - 2x\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} - 2x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow -2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 2021 khi $x = \frac{-\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 23: Tính tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 4\sin x + 3\cos x - 2$.

- A. -2. B. 2. C. 3 **D. -4.**

Lời giải

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = 5 \sin(x + \alpha) - 2$, trong đó: $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \alpha = \frac{4}{5}$.

$\forall x \in D$ ta có: $-1 \leq \sin(x + \alpha) \leq 1 \Leftrightarrow -7 \leq 5 \sin(x + \alpha) - 2 \leq 3 \Leftrightarrow -7 \leq y \leq 3$

$y = -7 \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$y = 3 \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Giá trị nhỏ nhất và lớn nhất của hàm số $y = 4 \sin x + 3 \cos x - 2$ trên $D = \mathbb{R}$ lần lượt là -7 và 3

Vậy tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -4 .

Câu 24: Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x$ là

- A. 0,2. **B. 0,25.** C. 0,16. D. 0,125.

Lời giải

Ta có $y = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x \cos^2 x$

$$= (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3(\sin x \cos x)^2 = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

Lại có $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{4} \leq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \leq 1$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $\frac{1}{4} = 0,25$.

Câu 25: Tìm giá trị lớn nhất M của hàm số $y = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2 x} + \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2 \sin^2 x}$

- A. $M = \frac{\sqrt{7} + \sqrt{6}}{2}$. **B. $M = \frac{\sqrt{22}}{2}$.** C. $M = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $M = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{5}}{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } y = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cos^2 x} + \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2 \sin^2 x} = \sqrt{1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2}} + \frac{1}{2} \sqrt{5 + 2 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2}}$$

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{5 + \cos 2x} + \frac{1}{2} \sqrt{6 - \cos 2x} = \frac{1}{2} (1 \cdot \sqrt{5 + \cos 2x} + 1 \cdot \sqrt{6 - \cos 2x}).$$

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có

$$y = \frac{1}{2} (1 \cdot \sqrt{5 + \cos 2x} + 1 \cdot \sqrt{6 - \cos 2x}) \leq \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(1^2 + 1^2) \cdot (5 + \cos 2x + 6 - \cos 2x)} \leq \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } \frac{1}{\sqrt{5+\cos 2x}} = \frac{1}{\sqrt{6-\cos 2x}} \Leftrightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = 2 + 3\cos x$ và $g(x) = \sin x + \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng 5
- Hàm số $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng $-\sqrt{2}$
- Hàm số $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

a) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\cos x \leq 3 \Rightarrow -1 \leq 2 + 3\cos x \leq 5$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5, khi đó $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -1, khi đó $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Sai: Ta có: $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\sqrt{2}$, khi đó $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $-\sqrt{2}$, khi đó $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -1$

$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{2 - \sin x}$ và $g(x) = \sqrt{3} \sin x - \cos x + 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ bằng $\sqrt{3}$
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ bằng 1
- Giá trị lớn nhất của hàm số $g(x)$ bằng 4
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x)$ bằng 0

Lời giải

a) Đúng: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 1 \geq -\sin x \geq -1 \Rightarrow 3 \geq 2 - \sin x \geq 1$
 $\Rightarrow \sqrt{3} \geq \sqrt{2 - \sin x} \geq 1$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\sqrt{3}$, khi đó $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 1, khi đó $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Sai: Ta có: $\sqrt{3} \sin x - \cos x + 2 = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x \right) + 2 = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 2$.

Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta có: $-1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) \leq 2$

$\Leftrightarrow 0 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) + 2 \leq 4$.

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4, khi đó $\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = 1$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

d) Đúng: Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 0, khi đó $\sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) = -1$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 3: Cho hàm số $y = 3 - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2

c) Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4

d) Tập giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

b) Đúng:

$$-1 \leq \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1 \Leftrightarrow 1 \geq -\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq -1 \Leftrightarrow 4 \geq 3 - \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \geq 2 \Leftrightarrow 4 \geq y \geq 2$$

Giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng 2

c) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số bằng 4

d) Đúng: Vậy giá trị của hàm số là $T = [2; 4]$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x) = \cos 2x + \cos x$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- Tập xác định của hàm số trên là \mathbb{R} .
- Hàm số trên là hàm số chẵn.
- Đặt $t = \cos x$ thì hàm số trở thành $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$.
- Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0.

Lời giải

- Đúng: Tập xác định của hàm số trên là \mathbb{R} .
- Đúng: Hàm số trên là hàm số chẵn. Vì
$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow -x \in \mathbb{R} \\ f(-x) = \cos(-2x) + \cos(-x) = f(x) \end{cases}$$
- Đúng: Đặt $t = \cos x$ thì hàm số trở thành $y = f(x) = 2t^2 + t - 1$.

Ta có $y = \cos 2x + \cos x$; $y = \cos 2x + \cos x = 2\cos^2 x + \cos x - 1$.

Đặt: $t = \cos x$, $t \in [-1; 1]$ khi đó $f(t) = 2t^2 + t - 1$.

d) Sai: Giá trị nhỏ nhất của hàm số trên là 0. Với hàm số $f(t) = 2t^2 + t - 1$ ở câu c:

Đồ thị của hàm số f là parabol có đỉnh $I\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$.

Bảng biến thiên:

t	-1	$-\frac{1}{4}$	1
$f(t)$	0	$-\frac{9}{8}$	2

Dựa vào bảng biến thiên ta có: $m = \min_{[-1;1]} f(t) = -\frac{9}{8}$.

Câu 5: Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

- Hàm số $y = \sin x$ là hàm số chẵn.
- Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos x}{\sin^2 x - 1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2\sin x + 3}$ là $\sqrt{5}$.
- Cho hàm số $h(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x \cos x}$. Để hàm số đã cho xác định với giá trị $x \in \mathbb{R}$ thì $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Tập xác định $D = \mathbb{R}$. Ta có $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Hơn nữa $y(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -y(x)$ suy ra hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) Đúng: Tập xác định của hàm số $y = \frac{2\cos x}{\sin^2 x - 1}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Điều kiện xác định $\sin^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Tập xác định là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

c) Đúng: Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sqrt{2\sin x + 3}$ là $\sqrt{5}$

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2\sin x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2\sin x + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq \sqrt{2\sin x + 3} \leq \sqrt{5}$.

Suy ra giá trị lớn nhất của hàm số đã cho là $\sqrt{5}$ khi $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

d) Đúng: Cho hàm số $h(x) = \sqrt{\sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x \cos x}$. Để hàm số đã cho xác định với giá trị $x \in \mathbb{R}$ thì $-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

Xét hàm số: $g(x) = \sin^4 x + \cos^4 x - 2m\sin x \cos x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x - m\sin 2x$.

Đặt $t = \sin 2x, t \in [-1; 1]$.

Hàm số đã cho xác định với mọi giá trị $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}t^2 - mt + 1 \geq 0, \forall t \in [-1; 1] \Leftrightarrow t^2 + 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1; 1]$.

Xét hàm số $f(t) = t^2 + 2mt - 2, \forall t \in [-1; 1]$.

Ta có $\max_{[-1; 1]} f(t) = f(-1)$ hoặc $\max_{[-1; 1]} f(t) = f(1)$.

Suy ra $f(t) = t^2 + 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1; 1] \Leftrightarrow \max_{[-1; 1]} f(t) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(-1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + 2m \leq 0 \\ -1 - 2m \leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \cos x - \sin x$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T = \pi$.

c) Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho là $\min_{\mathbb{R}} y = -2$.

d) Phương trình $y + 1 = 0$ có tất cả 4 nghiệm trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$.

Lời giải

a) Đúng: Tập xác định của hàm số $y = \sin x$, $y = \cos x$ đều là $D = \mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số $y = \cos x - \sin x$ là $D = \mathbb{R}$.

b) Sai: Ta có $y = \cos x - \sin x = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

Suy ra hàm số đã cho tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|1|} = 2\pi$.

c) Sai: Vì tập giá trị của hàm số $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ là đoạn $[-1;1]$, suy ra giá trị nhỏ nhất của hàm

số $y = \sqrt{2} \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ là $\underset{\mathbb{R}}{\text{Min}} y = -\sqrt{2}$.

d) Đúng: $y + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pm \frac{3\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\pi + k2\pi \end{cases}$

Trên đoạn $[-2\pi; 2\pi]$ ta tìm được 4 nghiệm là $\left\{-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}; -\pi; \pi\right\}$.

Câu 7: Cho hàm số $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Hàm số có tập xác định là $D = \mathbb{R}$.

b) Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = 12\pi$.

c) Hàm số là hàm số lẻ.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số là 13.

Lời giải

a) Đúng: Hàm số $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$ có tập xác định là $D = \mathbb{R}$

b) Sai: Hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}} = 12$. Nên mệnh đề b sai.

c) Sai: Ta có $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2 \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$ với $\forall x \in D$ thì $-x \in D$.

Ta có $y(x) = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$ và $y(-x) = 2 \cos\left(\frac{\pi(-x)}{6}\right) + 11 = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$.

Vậy $y(x) = y(-x)$ nên hàm số $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11$ là hàm số chẵn.

d) Đúng: Ta có $y = 2 \sin\left(\frac{5\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2 \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{6}\right) + 11 = 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11$

Nên $-2 \leq 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) \leq 2 \Leftrightarrow 9 \leq 2 \cos\left(\frac{\pi x}{6}\right) + 11 \leq 13 \Leftrightarrow 9 \leq y \leq 13$.

Vậy hàm số có giá trị lớn nhất bằng 13.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Với giá trị nào của m thì hàm số $y = \sin 3x - \cos 3x + m$ có giá trị lớn nhất bằng $\sqrt{2}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \sin 3x - \cos 3x + m = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin 3x - \frac{1}{\sqrt{2}} \cos 3x \right) + m = \sqrt{2} \sin \left(3x - \frac{\pi}{4} \right) + m \leq \sqrt{2} + m$$

Do đó giá trị lớn nhất của y bằng $\sqrt{2}$ khi $\sqrt{2} + m = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 0$.

Câu 2: Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = 3 \sin x + 4 \cos x + m$ bằng 10

Lời giải

Gọi y_0 thuộc tập giá trị Y của hàm số.

Khi đó, phương trình $3 \sin x + 4 \cos x + m = y_0$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow \text{phương trình } 3 \sin x + 4 \cos x = y_0 - m \text{ có nghiệm } \Leftrightarrow 3^2 + 4^2 \geq (y_0 - m)^2$$

$$\Leftrightarrow -5 \leq y_0 - m \leq 5 \Leftrightarrow -5 + m \leq y_0 \leq 5 + m$$

Ta có, tập giá trị của hàm số: $Y = [-5 + m; 5 + m]$ nên $\max y = 5 + m \Leftrightarrow 10 = 5 + m \Leftrightarrow m = 5$.

Câu 3: Biết giá trị lớn nhất của hàm số $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x$ đạt được bằng $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$,

$\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tổng $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$y = \sin^4 x + \cos^4 x + \sin x \cos x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2(\sin x \cos x)^2 + \sin x \cos x$$

$$= 1 - 2 \cdot \frac{1}{4} \sin^2 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \text{ suy ra } y = -\frac{1}{2} \sin^2 2x + \frac{1}{2} \sin 2x + 1 = -\frac{1}{2} t^2 + \frac{1}{2} t + 1, t \in [-1; 1]$$

Ta có hoành độ đỉnh $t_0 = \frac{1}{2}$ mà $y(-1) = 0; y(1) = 1; y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{8}$.

Giá trị lớn nhất của $y = \frac{9}{8}$ đạt được khi $\sin 2x = \frac{1}{2}$ suy ra $\frac{a}{b} = \frac{9}{8} \Rightarrow a + b = 17$.

Câu 4: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 80) \right] + 12, t \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin \alpha \leq 1, \forall \alpha$ nên ta có: $d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 80) \right] + 12 \leq 3 \cdot 1 + 12 = 15$.

Suy ra $d(t)_{\max} = 15$ đạt được khi $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$$\Leftrightarrow t = 171 + 364k, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên ta có: $0 < 171 + 364k \leq 365 \Rightarrow \frac{-171}{364} < k \leq \frac{194}{364}$ do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 0$.

Vậy vào ngày thứ 171 trong năm thì thành phố X có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất.

Câu 5: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố X ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] + 12, t \in \mathbb{Z}, 0 < t \leq 365$. Vào ngày nào trong năm thì thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Ta có: $\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] \geq -1 \quad \forall t \Rightarrow d(t) \geq 3 \cdot (-1) + 12 = 9$. Dấu "=" xảy ra khi:

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t-80 = -91 + 364k \Leftrightarrow t = -11 + 364k$$

$$\text{Mà } 0 < t \leq 365 \Rightarrow 0 < -11 + 364k \leq 365 \Leftrightarrow \frac{11}{364} < k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1 (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 353.$$

Vậy thành phố X có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất vào ngày 353 trong năm.

Câu 6: Hằng ngày mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (mét) của mực nước trong kênh được tính tại thời điểm t (giờ) trong một ngày bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12$. Mực nước của kênh cao nhất khi t bằng bao nhiêu?

Lời giải

Mực nước của kênh cao nhất khi độ sâu của mực nước trong kênh lớn nhất.

$$\text{Ta có } -1 \leq \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \Leftrightarrow 9 \leq 3\cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) + 12 \leq 15.$$

$$\max h = 15 \text{ khi } \cos\left(\frac{\pi t}{8} + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow t = -2 + 16k.$$

$$\text{Trong 1 ngày có 24 giờ nên } 0 \leq -2 + 4k \leq 24 \Leftrightarrow \frac{1}{8} \leq k \leq \frac{26}{16}.$$

Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k = 1 \Rightarrow t = 14$ giờ.

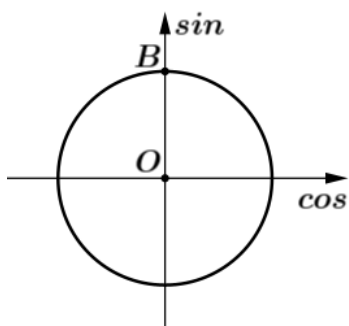
-----HẾT-----

BÀI 04 PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

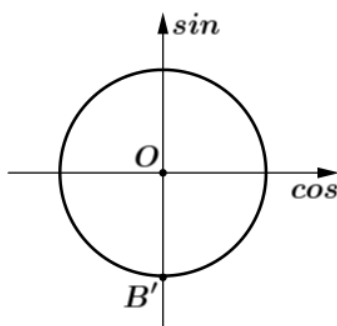
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phương trình $\sin x = a$

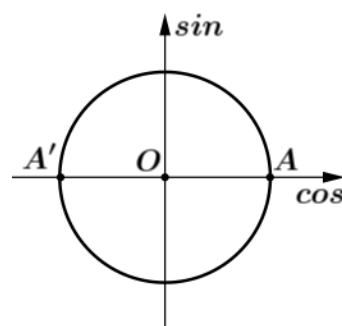
- Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$



$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

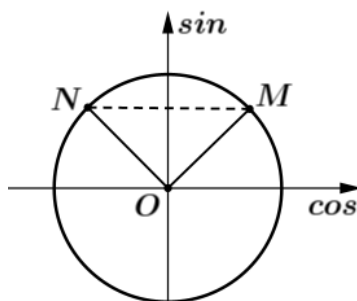


$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi$$



$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$$

- Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy `SHIFT` `sin` `[a]` để đổi số a về góc α hoặc β°



- Công thức theo đơn vị rad: $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
- Công thức theo đơn vị độ: $\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = 180^\circ - \beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

- Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên:

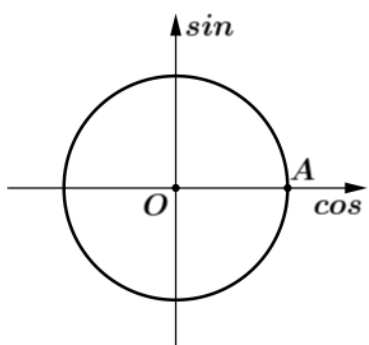
$$\sin x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin a + k2\pi \\ x = \pi - \arcsin a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

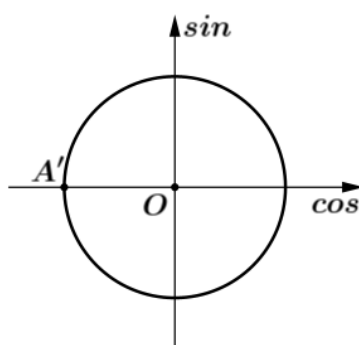
$$\sin[f(x)] = \sin[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = \pi - g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

2 Phương trình $\cos x = a$

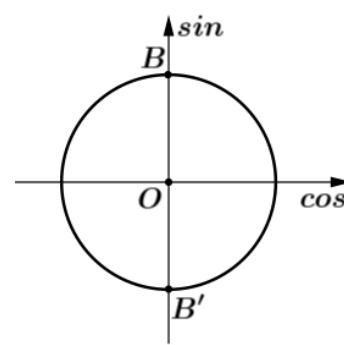
- Trường hợp $a \in \{-1; 0; 1\}$



$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$$

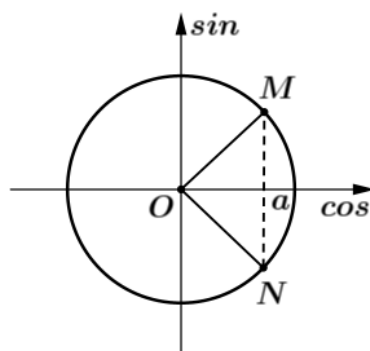


$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$$



$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

- Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{1}{2}; \pm \frac{\sqrt{2}}{2}; \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$. Ta bấm máy $\boxed{SHIFT} \boxed{\cos} \boxed{a}$ để đổi số a về góc α hoặc β°



- Công thức theo đơn vị rad: $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = -\alpha + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

- Công thức theo đơn vị độ: $\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta^\circ + k360^\circ \\ x = -\beta^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

- Trường hợp $a \in [-1; 1]$ nhưng khác các số ở trên:

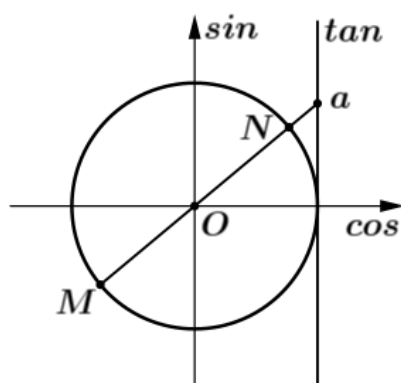
$$\cos x = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos a + k2\pi \\ x = -\arccos a + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

- Công thức mở rộng cho hai hàm $f(x)$ và $g(x)$

$$\cos[f(x)] = \cos[g(x)] \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) + k2\pi \\ f(x) = -g(x) + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

3 Phương trình $\tan x = a$

- Trường hợp $a \in \left\{ 0; \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy $\boxed{SHIFT} \boxed{\tan} \boxed{a}$ để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng:



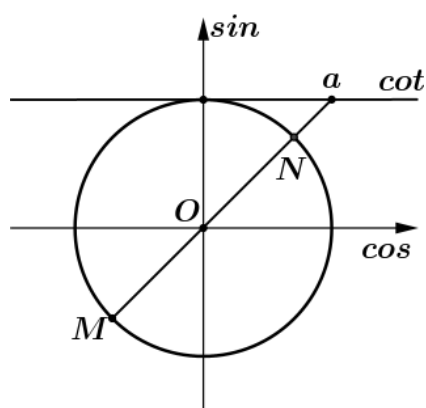
- Công thức theo đơn vị rad: $\tan x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Công thức theo đơn vị độ: $\tan x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

- Trường hợp a khác các số ở trên:

$$\tan x = a \Leftrightarrow x = \arctan a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

4 Phương trình $\cot x = a$

- Trường hợp $a \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm 1; \pm \sqrt{3} \right\}$. Ta bấm máy $\boxed{SHIFT} \boxed{\tan} \boxed{\frac{1}{a}}$ để đổi số a về góc α hoặc β° tương ứng:



- Công thức theo đơn vị rad: $\cot x = a \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- Công thức theo đơn vị độ: $\cot x = a \Leftrightarrow x = \beta^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$
- Trường hợp a khác các số ở trên:

$$\cot x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} a + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Giải các phương trình lượng giác cơ bản

Phương pháp: Cần chú ý một số điều kiện sau:

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số "a" quy về góc đẹp hay xấu.
- Chọn và lắp vào công thức nghiệm

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2\cos x = -\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1$

d) $\cot(2x - 1) = \cot\frac{\pi}{5}$

e) $\sin 2x + \cos 4x = 0$

f) $\cos 3x = -\cos 7x$

Lời giải

$$\text{a) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{b) } 2\cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\text{c) } \sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \tan 30^\circ$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + 15^\circ = 30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{d) } \cot(2x - 1) = \cot\frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là $x = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{e) } \sin 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -\sin 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \sin(-2x) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \\ 4x = -\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{f) } \cos 3x = -\cos 7x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi + 7x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi + 7x + k2\pi \\ 3x = -(\pi + 7x) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 2: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

e) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1$

Lời giải

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{5} - x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-4\pi}{5} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

e) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 3: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7}$

b) $\cot 3x = -2;$

c) $\cot(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải

a) $\cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$

b) $\cot 3x = -2 = \cot \alpha \Leftrightarrow 3x = \alpha + k\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3}\alpha + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

c) Vì $\frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ$ nên $\cot(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot(2x - 10^\circ) = \cot 60^\circ$

$\Leftrightarrow 2x - 10^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow 2x = 70^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}.$

Bài tập 4: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = 0$ với $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$

b) $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -1$ với $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

Lời giải

a) $\sin\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{2\pi}{5} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}.$

Do $x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right)$ nên $\frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{5} < k < \frac{17}{5}$ mà $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{2; 3\}.$

Vậy $x \in \left\{\frac{4\pi}{5}; \frac{13\pi}{10}\right\}.$

b) $\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

Do $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $-\frac{\pi}{2} < -\frac{5\pi}{6} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{2}{3}.$

Mặt khác $k \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị nào của k thoả mãn.

Vậy phương trình không có nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

Bài tập 5: Tìm m để phương trình $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

Ta có: $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

Phương trình đã cho có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{2}.$

Bài tập 6: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Ở đây thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimét. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hòa là vị trí vật đứng yên khi đó $x = 0$ ta có:

$$2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0 \leq t \leq 6$ hay $0 \leq \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5} \leq 6$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{90 - 2\pi}{3\pi} \text{ vì } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}.$$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

Bài tập 7: Một quả đạn pháo được bắn khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $v_0 = 500$ (m/s) hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó

$g = 9,8$ (m/s²) là gia tốc trọng trường.

- a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).
- b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m.
- c) Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Lời giải

Vì $v_0 = 500$ (m/s), $g = 9,8$ (m/s²) nên ta có phương trình quỹ đạo của quả đạn là

$$y = \frac{-9,8}{2 \cdot 500^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \text{ hay } y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

a) Quả đạn chạm đất khi $y = 0$, khi đó $\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2500000 \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2500000 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} \end{cases}$$

Loại $x = 0$ (đạn pháo chưa được bắn).

Vậy tầm xa mà quả đạn đạt tới là $x = \frac{1250000\sin 2\alpha}{49}$ (m).

b) Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m thì $x = 22000$ m .

$$\text{Khi đó } \frac{1250000\sin 2\alpha}{49} = 22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{539}{625}$$

Gọi $\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ là góc thỏa mãn $\sin \beta = \frac{539}{625}$. Khi đó ta có: $\sin 2\alpha = \sin \beta$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \beta + k2\pi \\ 2\alpha = \pi - \beta + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2} + k\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Hàm số $y = \frac{-49}{2500000\cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$ là một hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có tọa độ đỉnh $I(x_1; y_1)$ là

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{b}{2a} = -\frac{\tan \alpha}{2 \cdot \frac{-49}{2500000\cos^2 \alpha}} = \frac{1250000\cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_1 = f(x_1) = \frac{-49}{2500000\cos^2 \alpha} \left(\frac{1250000\cos \alpha \sin \alpha}{49} \right)^2 + \frac{1250000\cos \alpha \sin \alpha}{49} \tan \alpha \end{cases}$$

$$\text{Hay } \begin{cases} x_1 = \frac{1250000\cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_1 = \frac{625000\sin^2 \alpha}{49} \end{cases}$$

Do đó, độ cao lớn nhất của quả đạn là $y_{\max} = \frac{625000\sin^2 \alpha}{49}$.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$.

A. $S = \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.

C. $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{8} + k2\pi.$

D. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi.$

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\sin \frac{x}{2} = 1$ là

A. $x = \pi + k2\pi.$

B. $x = k2\pi.$

C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi.$

D. $x = \pi + k4\pi.$

Lời giải

Ta có $\sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 4: Phương trình $1 - \cos 2x = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

C. $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$

D. $\left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Ta có $1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 5: Giải phương trình $2\cos x = -1$ được nghiệm là

A. $\left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

B. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

C. $\left\{ -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

D. $\left\{ \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Ta có $2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \leq x \leq 5\pi$ là:

A. 0.

B. 3.

C. 1.

D. 2.

Lời giải

Ta có: $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Mà $\pi \leq x \leq 5\pi$ nên $\pi \leq -\frac{\pi}{4} + k2\pi \leq 5\pi \Leftrightarrow \frac{5}{8} \leq k \leq \frac{21}{8}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1; 2\}$ vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm trên $[\pi; 5\pi]$.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\cos x = \cos 60^\circ$ là

- A. $x = 120^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 B. $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = 120^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.
 C. $x = \pm 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.
 D. $x = 60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có $\cos x = \cos 60^\circ \Leftrightarrow x = \pm 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 8: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0$.

- A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{9} + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ -\pi + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 D. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{3} = -\sqrt{3} = \tan \left(-\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\pi + k3\pi$.

Câu 9: Giải phương trình $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$.

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Điều kiện: $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Ta có $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$

Với điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ thì phương trình $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$. Vậy phương trình có nghiệm là $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 10: Nghiệm của phương trình $\tan x - 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.
 B. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$.
 C. $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi$.
 D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Lời giải

Ta có: $\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 11: Chọn khẳng định sai.

- A. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 B. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 C. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
 D. $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

Ta có: $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x = \cot\left(\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Câu 17: Hỏi trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có: $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ chỉ có một nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$ thoả mãn.

Câu 18: Số nghiệm của phương trình $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ là:

A. 5.

B. 3.

C. 4.

D. 2

Lời giải

Ta có $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó $x \in [0; 2\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{5} \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{-5}{12} \leq k \leq \frac{55}{12}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0; 1; 2; 3; 4$

Vậy có 5 nghiệm thuộc khoảng $[0; 2\pi]$.

Câu 19: Tập nghiệm của phương trình $2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$ là:

A. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k4\pi; \frac{5\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k4\pi; \frac{\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Ta có $2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k4\pi \\ x = \frac{5\pi}{3} + k4\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 20: Phương trình $\sin 2x = \frac{-1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thoả mãn $0 < x < \pi$.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin 2x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Trường hợp 1: $x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Do } 0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \frac{-\pi}{12} + k\pi < \pi \Rightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{13}{12} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12}$$

Trường hợp 2: $x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\text{Do } 0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \Rightarrow \frac{-7}{12} < k < \frac{5}{12} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$$

Câu 21: Số nghiệm của phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trong khoảng $(0; 3\pi)$ là

A. 4.

B. 1.

C. 6.

D. 2.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Mà } x \in (0; 3\pi) \text{ nên } \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi < 3\pi \\ 0 < \frac{\pi}{3} + k\pi < 3\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1}{6} < k < \frac{17}{6} \\ \frac{-1}{3} < k < \frac{8}{3} \end{cases} \text{ và do } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } \begin{cases} k \in \{0; 1; 2\} \\ k \in \{0; 1; 2\} \end{cases}.$$

Vậy phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ có 6 nghiệm trong khoảng $(0; 3\pi)$

Câu 22: Tập nghiệm của phương trình $2\sin 2x = \sqrt{2}$ là:

A. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

B. $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k2\pi; \frac{3\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 2\sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 23: Nghiệm của phương trình $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ là

- A.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ **B.** $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$
- C.** $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$ **D.** $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

$$\text{Ta có } 2 \sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 24: Số nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{2}{5}$ trên khoảng $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ là:

- A.** 2. **B.** 1. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Ta có $\cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2}{5} + k2\pi$. Vì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow x = \arccos \frac{2}{5}; x = -\arccos \frac{2}{5} + 2\pi$ là thỏa mãn.

Câu 25: Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $5 \cos x - 2 = 0$ là

- A.** $S = 3\pi$. **B.** $S = 2\pi$. **C.** $S = 0$. **D.** $S = 4\pi$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 5 \cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \left(\frac{2}{5}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Xét trên $(0; 2\pi)$ phương trình có hai nghiệm $x = \arccos \left(\frac{2}{5}\right)$ và $x = -\arccos \left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi$.

Do vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng $\arccos \left(\frac{2}{5}\right) - \arccos \left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi = 2\pi$.

Câu 26: Tính tổng S tất cả các nghiệm trên khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình $2 \cos 3x = 1$

- A.** $S = \frac{121\pi}{9}$. **B.** $S = \frac{120\pi}{9}$. **C.** $S = \frac{122\pi}{9}$. **D.** $S = \frac{20\pi}{3}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } 2 \cos 3x = 1 \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}.$$

$$S = \left(\frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} + \frac{13\pi}{9} + \frac{19\pi}{9} + \frac{25\pi}{9} \right) + \left(\frac{5\pi}{9} + \frac{11\pi}{9} + \frac{17\pi}{9} + \frac{23\pi}{9} \right) = \frac{121\pi}{9}$$

Câu 27: Phương trình $\cos 3x = \cos \frac{\pi}{15}$ có nghiệm là:

A. $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$. **B.** $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$. **C.** $x = \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$. **D.** $x = \frac{-\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$.

Lời giải

Ta có $\cos 3x = \cos 12^\circ \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{15} \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 28: Tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A. $\frac{\pi}{12}$. **B.** $\frac{-2\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\frac{-3\pi}{4}$

Lời giải

Ta có: $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}$

Cho $k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 0 \end{cases}$. Cho $k = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5\pi}{6} \\ x = -\pi \end{cases}$

Câu 29: Cho phương trình $\sqrt{3} \tan 2x = 3$ có nghiệm x_0 khi đó $\cos x_0$ nhận giá trị là

A. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2}$. **C.** $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\pm \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $\sqrt{3} \tan 2x = 3 \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$.

Suy ra $x_0 \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{2\pi}{3} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi; \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. Do vậy $\cos x_0 \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2} \right\}$.

Câu 30: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 2x = \tan x$ trên $[-\pi; 2\pi]$ là

A. π . **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 4π . **D.** 2π .

Lời giải

Điều kiện xác định: $\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Khi đó $\tan 2x = \tan x \Leftrightarrow 2x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $x \in \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trên $[-\pi; 2\pi]$ là 2π

Câu 31: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; \pi)$ bằng

- A.** π . **B.** $\frac{5\pi}{2}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** 2π .

Lời giải

Ta có: $\tan 5x - \tan x = 0$ (1). Điều kiện:
$$\begin{cases} 5x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.. \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}$$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Do $x \in [0; \pi)$ và kết hợp với điều kiện suy ra $x \in \left\{0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}\right\}$.

Tổng các nghiệm: $0 + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$.

Câu 32: Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là :

- A.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Điều kiện:
$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

Ta có: $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

Kết hợp điều kiện, khi đó phương trình có nghiệm là $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Câu 33: Nghiệm của phương trình $\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ là

- A.** $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

Ta có $\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 34: Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ là:

A. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

Câu 35: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ thuộc khoảng

A. $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right).$

B. $(0; \pi).$

C. $\left(0; \frac{\pi}{2}\right).$

D. $(\pi; 3\pi).$

Lời giải

Xét phương trình: $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là $x = \frac{2\pi}{3} \in (0; \pi).$

Câu 36: Nghiệm của phương trình $\sqrt{3} \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$ là:

A. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

B. $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho phương trình lượng giác $\sin 2x = -\frac{1}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho tương đương $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$

b) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 3 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{3\pi}{2}$

d) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$

Lời giải

a) Sai: $\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin -\frac{\pi}{6}$

b) Sai: Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

$0 < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-\pi}{12} + k\pi < \pi \\ 0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} \\ x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$

c) Đúng: Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ $\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$

d) Đúng: Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$

Câu 2: Cho phương trình lượng giác $\tan(2x - 15^\circ) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình đã cho có nghiệm $x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$
- b) Trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ thì phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng -30°
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ bằng 180°
- d) Trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng 60°

Lời giải

a) Đúng: $\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$

b) Sai: $-180^\circ < x < 90^\circ \Rightarrow -180^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = \{-2; -1; 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = -150^\circ \\ x = -60^\circ \\ x = 30^\circ \end{cases}$

c) Sai: $-150 + (-60) + 30 = -180$

d) Sai: Trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng 30°

Câu 3: Cho phương trình lượng giác $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho tương đương $\cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{6}\right)$

b) Phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ bằng $\frac{-5\pi}{9}$

d) Trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{9}$

Lời giải

a) Sai: $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{3}\right)$.

b) Sai: Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3x = \frac{-\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$

c) Đúng: $-\frac{\pi}{2} < \frac{-\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} < 0 (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{1}{3} \Rightarrow k = \{-1; 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{9} \\ x = \frac{-4\pi}{9} \end{cases}$.

d) Đúng: Trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{9}$

Câu 4: Cho phương trình lượng giác $2\cos x = \sqrt{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình có nghiệm $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\frac{25\pi}{6}$

d) Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$

Lời giải

a) Sai: Ta có: $2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Sai: Vì $x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ nên $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$.

Vậy nghiệm x thoả mãn đề bài là: $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$.

c) Đúng: $\frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$

d) Đúng: Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$

Câu 5: Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$

b) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{7\pi}{6}$

d) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{5\pi}{6}$

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Đúng: Vì $x \in (0; \pi)$ nên $x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$.

c) Sai: $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$

d) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{5\pi}{6}$

Câu 6: Cho phương trình lượng giác $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{2\pi}{9}$

c) Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có 3 nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng $\frac{7\pi}{9}$

Lời giải

a) Sai: Phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

b) Đúng: Ta có: $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Sai: Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{9}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

d) Đúng: $\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$.

Câu 7: Cho phương trình lượng giác $3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$

c) Khi $\frac{-\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(\frac{-\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng $\frac{\pi}{6}$

Lời giải

a) Sai: Phương trình tương đương với: $\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

b) Sai: Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{6}$

c) Sai: Vì $\frac{-\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7\pi}{12} < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{2}{3}$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-1; 0\}$. Với $k = -1$ thì $x = \frac{-\pi}{6}$, với $k = 0$ thì $x = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $x = \frac{-\pi}{6}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

d) Đúng: $\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

Câu 8: Cho phương trình lượng giác $\sin x = -\frac{1}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho tương đương $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

b) Phương trình đã cho có nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình đã cho có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là ba nghiệm

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

b) Đúng: Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Sai: Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{6}$

d) Sai: Khi $x \in (-\pi; \pi)$ phương trình có hai nghiệm

Câu 9: Cho phương trình lượng giác $2 \sin x = \sqrt{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho tương đương $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

b) Phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình đã cho có nghiệm dương nhỏ nhất bằng $\frac{\pi}{4}$

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $2 \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4}$

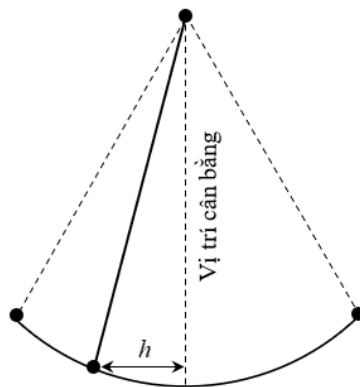
b) Sai: Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

b) Đúng: Phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất bằng $\frac{\pi}{4}$

d) Sai: Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là một nghiệm

Câu 10: Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là $h = 1,5 m$.

b) Trong 10 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất

c) Khi vật ở vị trí cân bằng thì $\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$

d) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng 4 lần?

Lời giải

Ta có $h = |x| = \left|1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)\right| \leq 1,5$.

a) Đúng: Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là $h = 1,5 m$.

Khi đó $\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t\pi}{4} = k2\pi \\ \frac{t\pi}{4} = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8k \\ t = 4 + 8k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

b) Sai: Vậy trong 10 giây đầu tiên thì vật ở xa vị trí cân bằng nhất tại các thời điểm:

$$t = 0, t = 4, t = 8 \text{ (giây)}.$$

c) Đúng: Khi vật ở vị trí cân bằng thì $x = 0 \Leftrightarrow 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{t\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 2 + 4k (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Sai: Vậy trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật ở vị trí cân bằng tại các thời điểm $t = 2$; $t = 6$; $t = 10$; $t = 14$; $t = 18$ (giây); tức là có 5 lần vật qua vị trí cân bằng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\sin(2x) + 2 = m$ có nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $\sin(2x) + 2 = m \Leftrightarrow \sin(2x) = m - 2$ có nghiệm khi và chỉ khi $-1 \leq m - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3 \Leftrightarrow m \in [1; 3]$. Vậy $a + b = 4$

Câu 2: Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $3\sin^2 x = 2m - 1$ có nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $2a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Ta có: $3\sin^2 x = 2m - 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{2m - 1}{3}$

$$\text{Để phương trình có nghiệm thì } \begin{cases} \frac{2m-1}{3} \leq 1 \\ \frac{2m-1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 2$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases} \text{ nên suy ra } 2a + b = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 3$$

Câu 3: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $[1; 2021]$.

Lời giải

Ta có: $\sin(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$.

Mà: $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq k\pi \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\pi} \leq k \leq \frac{1}{\pi} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0$.

$\Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi \ (m \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \in [1; 2021]} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{2021}{\pi} - \frac{1}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 2; \dots; 642\}$

\Rightarrow có 643 nghiệm thỏa mãn bài toán.

Câu 4: Phương trình $\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 2021\pi]$?

Lời giải

Ta có $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

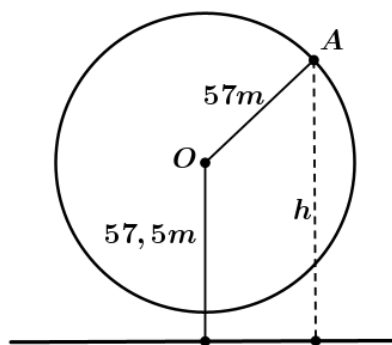
Do đó phương trình có 2 nghiệm trên nửa khoảng $(0; 2\pi]$.

Suy ra phương trình có 2020 nghiệm trên nửa khoảng $(0; 2020\pi]$.

Trên nửa khoảng $(2020\pi; 2021\pi]$ phương trình có thêm 1 nghiệm nữa.

Vậy phương trình $\cos x = 0$ có 2021 nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 2021\pi]$.

Câu 5: Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h (m) từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$ với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$). Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất?



Lời giải

Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi $\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1$ hay $t = 7,5$ (phút)

Câu 6: Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

Lời giải

Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà khi:

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40\left|\cot\frac{\pi}{12}t\right| = 40 \Leftrightarrow \cot\frac{\pi}{12}t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $0 \leq t \leq 12$ nên $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

-----HẾT-----

Dạng 2: Giải các phương trình lượng giác mở rộng

Phương pháp: Cần chú ý một số điều đặc biệt sau đây

- Biến đổi về một trong các công thức sau:
 - $\sin u = \sin v$
 - $\cos u = \cos v$
 - $\tan u = \tan v$
 - $\cot u = \cot v$
- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:
 - $-\sin x = \sin(-x)$
 - $-\cos x = \cos(\pi - x)$
 - $\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$
 - $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

- | | |
|--------------------------------|--|
| a) $2\cos 3x + 1 = 0$ | b) $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0$ |
| c) $\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0$ | d) $4\sin^2 x + \cos 2x - 5\sin x + 1 = 0$ |
| e) $\cos 2x - \sin 2x = 1$ | f) $\sin 4x + \cos 5x = 0$ |

Lời giải

a) Giải phương trình: $2\cos 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

b) Ta có $2\sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Với $\sin x = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

c) $\cos 2x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow -2\sin^2 x + 5\sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 2 \end{cases}$

Với $\sin x = 2$, phương trình vô nghiệm.

Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Ta có $4\sin^2 x + \cos 2x - 5\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4\sin^2 x + 1 - 2\sin^2 x - 5\sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \text{ (TM)} \\ \sin x = 2 \text{ (L)} \end{cases}.$$

Với $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$

e) Ta có $\cos 2x - \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

f) $\sin 4x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = -\sin 4x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 4x + k2\pi \\ 5x = -\frac{\pi}{2} - 4x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \end{cases}$$

Bài tập 2: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

b) $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

c) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

d) $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$

Lời giải

a) Ta có: $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

$$b) \sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$c) \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$d) \text{Điều kiện: } \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Ta có: } \cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(\frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(\frac{\cos\left(x - \frac{x}{2}\right)}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}) \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$\text{Vậy nghiệm của phương trình là } x = \frac{\pi}{12} + k\pi; x = \frac{5\pi}{12} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Họ nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$ là

- A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$
- B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$
- C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$
- D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

Lời giải

Áp dụng công thức nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

Ta có $\sin x = \sin \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}.$

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{5\pi}{3}$ là

- A. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- B. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{7\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- C. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-5\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- D. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k\pi; \frac{-2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

Áp dụng công thức nghiệm: $\sin x = \sin \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 3: Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- B. $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- C. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$
- D. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Lời giải

$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

- Câu 4:** Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$ là
A. 20° . **B.** 100° . **C.** 80° . **D.** 120° .

Lời giải

Ta có: $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 40^\circ = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k360^\circ \\ x = 80^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Theo đề bài:

$$-180^\circ < 20^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{5}{9} < k < \frac{4}{9} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 20^\circ.$$

$$-180^\circ < 80^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{5}{18} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 80^\circ.$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là $20^\circ + 80^\circ = 100^\circ$.

- Câu 5:** Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.
A. $\frac{47\pi}{18}$. **B.** $\frac{4\pi}{18}$. **C.** $\frac{45\pi}{18}$. **D.** $\frac{7\pi}{18}$.

Lời giải

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên ta có :

$$\text{Với } x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \text{ nên } x = \frac{11\pi}{18}.$$

$$\text{Với } x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}, \text{ do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\} \text{ nên}$$

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}.$$

$$\text{Tổng tất cả các nghiệm là: } \frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}.$$

- Câu 6:** Số nghiệm phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là
A. 7. **B.** 6. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Điều kiện: $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$.

Ta có $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$.

So với điều kiện nghiệm của phương trình là $x = \frac{k\pi}{3}$ với $k \in \mathbb{Z}, k \neq 3(2l+1)$

Vì $2\pi \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow 2\pi \leq \frac{k\pi}{3} \leq 4\pi \Leftrightarrow 6 \leq k \leq 12$ nên ta chọn $k \in \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$.

Câu 7: Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0$ là

- A. 1. B. 2. C. 3. **D. 4.**

Lời giải

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = -2x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{3} - k2\pi \end{cases}$$

Các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình là: $-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{9} + 2 \cdot \frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{9} + 2\pi;$
 $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi$ hay $\frac{5\pi}{9}; \frac{11\pi}{9}; \frac{17\pi}{9}; \frac{4\pi}{3}$.

Vậy có 4 nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Tập nghiệm của phương trình $\sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right)$ là:

- A. $\left\{\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. B. $\left\{\frac{1}{12} + k, k \in \mathbb{Z}\right\}$. C. $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. D. $\left\{\frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

Ta có: $\sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right) \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \pi x\right) \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \pi x\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{6} - \pi x + k2\pi \\ \pi x = \pi - \frac{\pi}{6} + \pi x + k2\pi \text{ (VL)} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{12} + k, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 9: Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình trên.

A. $\frac{7\pi}{2}$.

B. π .

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - x - \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Xét $x = \pi + k2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Do $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \pi + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 0$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị k .

Xét $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Do $0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên có hai giá trị k là:

$k = 0; k = 1$ Với $k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$.

Với $k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$.

Do đó trên khoảng $(0; \pi)$ phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho trong khoảng $(0; \pi)$ là: $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$.

Câu 10: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos 2x) = 0$ trên $[0; 2\pi]$.

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có $\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Vì $\cos 2x \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2}$ ($k_1 \in \mathbb{Z}$).

$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow k_1 \in \{0; 1; 2; 3\}$. Vậy phương trình có 4 nghiệm trên $[0; 2\pi]$.

Câu 11: Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ có tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ bằng

A. $\frac{7\pi}{2}$.

B. π .

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z}).$$

Họ nghiệm $x = \pi + k2\pi$ không có nghiệm nào thuộc khoảng $(0; \pi)$.

$$x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow l \in \{0; 1\}.$$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$. Từ đó suy ra tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình này bằng π .

Câu 12: Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?

A. 20179.

B. 20181.

C. 16144.

D. 16145.

Lời giải

$$\text{Ta có: } \sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + m\pi & (m \in \mathbb{Z}). \\ x = \frac{\pi}{6} + n\pi & (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\text{Vì } x \in [-2018\pi; 2018\pi] \text{ nên } \begin{cases} -2018\pi \leq k\frac{\pi}{2} \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{5\pi}{6} + m\pi \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + n\pi \leq 2018\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4036 \leq k \leq 4036 \\ -\frac{12113}{6} \leq m \leq \frac{12103}{6} \\ -\frac{12109}{6} \leq n \leq \frac{12107}{6} \end{cases}.$$

Do đó có 8073 giá trị k , 4036 giá trị m , 4036 giá trị n , suy ra số nghiệm cần tìm là 16145. nghiệm.

Câu 13: Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.

A. $\frac{47\pi}{18}$.

B. $\frac{4\pi}{18}$.

C. $\frac{45\pi}{18}$.

D. $\frac{7\pi}{18}$.

Lời giải

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên ta có :

Với $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}$, do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1$ nên $x = \frac{11\pi}{18}$.

Với $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}$, do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$ nên

$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}$. Tổng tất cả các nghiệm là: $\frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}$.

Câu 14: Phương trình $8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

- A. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. B. $\cos 2x = 0$. C. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$. D. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Ta có: $8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$.

Câu 15: Tập nghiệm của phương trình $(1 - \sqrt{2}\cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0$ là

- A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. B. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Lời giải

Ta có: $(1 - \sqrt{2}\cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2}\cos x = 0 \\ 2022 + \sin^2 x = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Câu 16: Giải phương trình $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

- A. $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. B. $S = \left\{ k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
 C. $S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$. D. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lời giải

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 17: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

- A. $-\frac{35}{36}\pi$. B. $-\frac{11}{36}\pi$. C. $-\frac{11\pi}{12}$. D. $-\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có mỗi họ nghiệm lần lượt có các nghiệm âm lớn nhất là:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; \quad x_2 = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{36}$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{11}{36}\pi$.

Câu 18: Số nghiệm của phương trình $\tan 3x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; 2\pi)$ bằng:

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) (*)$$

$$\text{Ta có: } \tan 3x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } 0 \leq x < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq m < 4. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z} \text{ nên } m = \{0; 1; 2; 3\}.$$

$$\text{Khi đó nghiệm } x \text{ nhận giá trị tương ứng trên nửa khoảng } [0; \pi) \text{ là: } x = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}.$$

Vậy số nghiệm cần tìm là 4.

Câu 19: Giải phương trình $\left(2\cos\frac{x}{2}-1\right)\left(\sin\frac{x}{2}+2\right)=0$

A. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \pm\frac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin\frac{x}{2} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin\frac{x}{2} + 2 > 0$

Vậy phương trình tương đương $2\cos\frac{x}{2}-1=0 \Leftrightarrow \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2}=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm\frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Câu 20: Phương trình $8.\cos 2x.\sin 2x.\cos 4x = -\sqrt{2}$ có nghiệm là

A. $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Lời giải

Ta có: $8.\cos 2x.\sin 2x.\cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 4.\sin 4x.\cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 2.\sin 8x = -\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 8x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Vậy phương trình có nghiệm $\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k\frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

Câu 21: Phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + \frac{\pi}{2} + k2\pi$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8} + k\pi.$

Cung $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$ biểu diễn được hai điểm trên đường tròn lượng giác.

Câu 22: Giải phương trình $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

A. $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

B. $S = \left\{k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

C. $S = \left\{k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

D. $S = \left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Lời giải

Ta có: $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Câu 23: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

A. $-\frac{35}{36}\pi$.

B. $-\frac{11}{36}\pi$.

C. $-\frac{11\pi}{12}$.

D. $-\frac{\pi}{12}$.

Lời giải

Ta có: $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có mỗi họ nghiệm lần lượt có các nghiệm âm lớn nhất là:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; x_2 = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{36}$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là $x = -\frac{11}{36}\pi$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$

b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là $x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

c) Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm

d) Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$.

Lời giải

a) Đúng: Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

b) Đúng: $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$

c) Sai: Vì $x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{\frac{3\pi}{8}; \frac{11\pi}{8}\right\}$.

Với $x = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{3\pi}{8} \approx 0,92$ với $x = \frac{11\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{11\pi}{8} \approx -0,92$.

d) Đúng: Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là: $\left(\frac{3\pi}{8}; \sin \frac{3\pi}{8}\right), \left(\frac{11\pi}{8}; \sin \frac{11\pi}{8}\right)$.

Câu 2: Cho phương trình lượng giác $2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình tương đương $\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

b) Phương trình có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{4}$

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm

Lời giải

a) Sai: Ta có: $2\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = \pi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

b) Sai: Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Đúng: Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{4}$

d) Đúng: Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm

Câu 3: Cho phương trình lượng giác $\sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x) = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình tương đương với $\sin(45^\circ - 2x) = \sin 45^\circ$

b) Đồ thị hàm số $y = \sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x)$ cắt trục hoành tại điểm gốc tọa độ

c) Phương trình có nghiệm là: $x = -k180^\circ; x = -45^\circ - k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

d) Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có một nghiệm

Lời giải

a), b) Đúng: Ta có: $\sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(45^\circ - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(45^\circ - 2x) = \sin 45^\circ$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 45^\circ - 2x = 45^\circ + k360^\circ \\ 45^\circ - 2x = 180^\circ - 45^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k180^\circ \\ x = -45^\circ - k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

c) Đúng: Vậy phương trình có nghiệm là: $x = -k180^\circ; x = -45^\circ - k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$.

d) Sai: Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có hai nghiệm

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$ có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S .

Lời giải

Phương trình $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2$.

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$

$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} S = \{-3; -2; -1\} \longrightarrow T = (-3) + (-2) + (-1) = -6$.

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - m + 5 = 0$ có nghiệm?

Lời giải

Ta có: $3\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{m - 5}{3}$

Điều kiện để phương trình có nghiệm: $-1 \leq \frac{m - 5}{3} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 8$

Do m nguyên nên $m = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Vậy có 7 số nguyên m .

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $\cos 2x + 3\cos x + 1 = 0$ trong khoảng $(0; 2021)$ là bao nhiêu?

Lời giải

Ta có $\cos 2x + 3\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x + 3\cos x = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x \in (0; 2021) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2} + k\pi < 2021 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{2021}{\pi} - \frac{1}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1; 2; \dots; 642\}$$

Vậy có 643 nghiệm trong khoảng $(0; 2021)$.

Câu 4: Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\cos 2x - 4\sin x + m = 0$ có nghiệm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

Đặt $\sin x = t$. Khi đó với $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$.

Yêu cầu đề bài tương đương với tìm số nguyên dương m sao cho $1 - 2t^2 - 4t + m = 0$ có nghiệm $t \in [0; 1]$.

Số nghiệm của phương trình $1 - 2t^2 - 4t + m = 0$ chính là số giao điểm của $y = m, y = 2t^2 + 4t - 1$

Ta có bảng biến thiên của $y(t)$ với $t \in [0; 1]$.

t	0	1
$y'(t)$	+	
$y(t)$	-1	6

Từ đó suy ra $-1 \leq m \leq 6$ thỏa mãn yêu cầu đề bài mà m nguyên dương nên $m = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 5: Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

Lời giải

Xét phương trình: $(2\cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) = 0 \Leftrightarrow (2\cos 2x + 5) \cdot \cos 2x = 0$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Vì } 0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{7}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{0; 1; 2; 3\}$$

Suy ra các nghiệm cần tìm là $x = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\}$ nên tổng $S = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 4\pi$.

Câu 6: Cho phương trình $\cos 2x - \sin x + m - 1 = 0$ với m là tham số. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có $\cos 2x - \sin x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2\sin^2 x + \sin x$ (1).

Đặt $t = \sin x$ thì phương trình (1) trở thành $m = 2t^2 + t$ (2).

Ta có bảng biến thiên hàm số $t = \sin x$

x	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
$t = \sin x$	$-\frac{1}{2}$	1	-1	1

Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}\right)$ khi (2) có 1 nghiệm thuộc $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ và 1 nghiệm thuộc $\left(-1; -\frac{1}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + t$.

Bảng biến thiên

t	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1
$f(t)$	1	0	$-\frac{1}{8}$	3

Từ bảng biến thiên ta có $0 \leq m < 1$.

-----HẾT-----

Dạng 3: Các dạng toán thực tế

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Câu 1: Huyết áp là áp lực máu cần thiết tác động lên thành động mạch nhằm đưa máu đi nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Nhờ lực co bóp của tim và sức cản của động mạch mà huyết áp được tạo ra. Giả sử huyết áp của một người thay đổi theo thời gian được cho bởi công thức:

$$p(t) = 120 + 15\cos 150\pi t$$

Trong đó $p(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo đơn vị phút.

- Chứng minh $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.
- Huyết áp cao nhất và huyết áp thấp nhất lần lượt được gọi là huyết áp tâm thu và huyết áp tâm trương. Tìm chỉ số huyết áp của người đó, biết rằng chỉ số huyết áp được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương.

Lời giải

a) Hàm số $p(t)$ có tập xác định là \mathbb{R} . Với mọi $t \in \mathbb{R}$, ta có $t \pm \frac{1}{75} \in \mathbb{R}$ và

$$p\left(t + \frac{1}{75}\right) = 120 + 15\cos(150\pi t + 2\pi) = 120 + 15\cos 150\pi t = p(t).$$

Do đó $p(t)$ là một hàm số tuần hoàn.

b) Vì $-1 \leq \cos 150\pi t \leq 1$ với mọi $t \in \mathbb{R}$ nên $105 \leq p(t) \leq 135$ với mọi $t \in \mathbb{R}$.

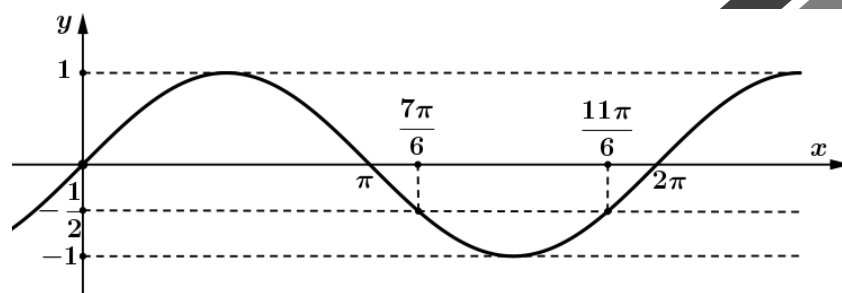
Vậy chỉ số huyết áp của người đó là 135/105.

Câu 2: Một chất điểm dao động điều hoà theo phương trình $s = 3\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ với s tính bằng cm và t tính bằng giây. Dựa vào đồ thị của hàm số sin, hãy xác định ở các thời điểm t nào trong 4 giây đầu thì $s \leq -\frac{3}{2}$.

Lời giải

Trong 4 giây đầu, ta có $0 \leq t \leq 4$, suy ra $0 \leq \frac{\pi}{2}t \leq 2\pi$.

Đặt $x = \frac{\pi}{2}t$, khi đó $x \in [0; 2\pi]$. Đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; 2\pi]$ như sau:



Dựa vào đồ thị trên đoạn $[0; 2\pi]$ ta có: $s \leq -\frac{3}{2}$ khi $3\sin x \leq -\frac{3}{2}$ hay $\sin x \leq -\frac{1}{2}$

Suy ra $\frac{7\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$ nên do đó $\frac{7}{3} \leq t \leq \frac{11}{3}$.

Câu 3: Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài bóng của toà nhà này được tính bằng công thức $S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12} t \right|$, ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng.

- Tìm độ dài bóng của toà nhà tại các thời điểm 8 giờ sáng, 12 giờ trưa, 2 giờ chiều và 5 giờ 45 phút chiều.
- Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?
- Bóng toà nhà sẽ như thế nào khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối?

Lời giải

a) Tại thời điểm 8 giờ sáng ta có $t = 8 - 6 = 2$.

Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 8 giờ sáng là: $S(2) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 2 \right) \right| = 40\sqrt{3}$ (m).

Tại thời điểm 12 giờ trưa ta có $t = 12 - 6 = 6$.

Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 12 giờ trưa là: $S(6) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 6 \right) \right| = 0$ (m).

Tại thời điểm 12 giờ trưa, Mặt Trời chiếu thẳng đứng từ trên đầu xuống nên toàn bộ toà nhà được chiếu xuống móng của toà nhà.

Tại thời điểm 2 giờ chiều ta có $t = 14 - 6 = 8$.

Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 2 giờ chiều là $S(8) = 40 \left| \cot \left(\frac{\pi}{12} \cdot 8 \right) \right| = \frac{40\sqrt{3}}{3}$ (m).

Tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối, ta có $t = \left(17 + \frac{3}{4} \right) - 6 = \frac{39}{4}$.

Vậy độ dài bóng của toà nhà tại thời điểm 5 giờ 45 chiều tối là:

$$S\left(\frac{39}{4}\right) = 40 \left| \cot\left(\frac{\pi}{12} \cdot \frac{39}{4}\right) \right| \approx 59,86 \text{ (m)}$$

b) Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà khi

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40 \left| \cot\frac{\pi}{12}t \right| = 40 \Leftrightarrow \cot\frac{\pi}{12}t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k \text{ (} k \in \mathbb{Z} \text{)}$$

Vì $0 \leq t \leq 12$ nên $t = 3$ hoặc $t = 9$, tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

c) Khi thời gian tiến dần đến 6 giờ tối thì $t \rightarrow 12$, vì vậy $\frac{\pi}{12}t \rightarrow \pi$, do đó $\cot\frac{\pi}{12}t \rightarrow -\infty$. Như vậy, bóng của toà nhà sẽ tiến ra vô cùng.

Câu 4: Độ sâu h (m) của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t (giờ) sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8\cos 0,5t + 4$.

a) Độ sâu của nước vào thời điểm $t = 2$ là bao nhiêu mét?

b) Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu 3,6 m để có thể đi chuyên ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số cosin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, ở những thời điểm t nào tàu có thể hạ thủy. Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.

Lời giải

a) Tại thời điểm $t = 2$ độ sâu của nước là: $h(2) = 0,8\cos 0,5 \cdot 2 + 4 \approx 4,43$ m.

Vậy độ sâu của nước ở thời điểm $t = 2$ là khoảng 4,43 m.

b) Các thời điểm để mực nước sâu là 3,6 m tương ứng với phương trình $0,8\cos 0,5t + 4 = 3,6$

Với $t = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong 12 tiếng ta có các thời điểm

$$0 \leq \frac{4\pi}{3} + k2\pi \leq 12 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq 1,24 \text{ mà } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k \in \{0;1\}.$$

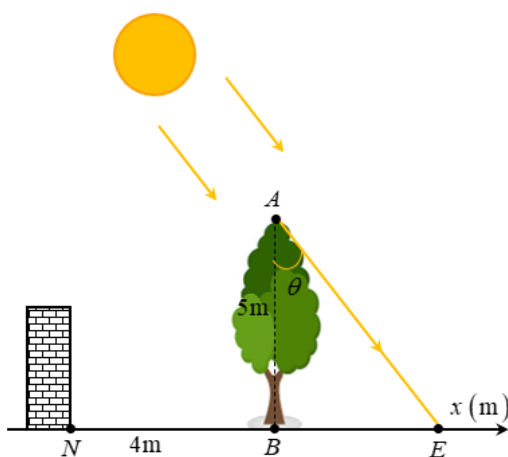
Với $t = -\frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$, trong 12 tiếng ta có các thời điểm

$$0 \leq -\frac{4\pi}{3} + k2\pi \leq 12 \Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq k \leq 1,24 \text{ mà } k \in \mathbb{Z} \text{ nên } k = 1.$$

Vậy tại các thời điểm $t = \frac{4\pi}{3}, t = \frac{10\pi}{3}, t = \frac{2\pi}{3}$ giờ thì tàu có thể hạ thủy.

Câu 5: Trong hình minh họa dưới đây, cây xanh AB nằm trên đường xích đạo được trồng vuông góc với mặt đất và có chiều cao 5 m. Bóng của cây là BE . Vào ngày xuân phân và hạ phân, điểm E di chuyển trên đường thẳng Bx . Góc thiên đỉnh $\theta_x = (\overline{AB}, \overline{AE})$ phụ thuộc vào vị trí của Mặt

Trời và thay đổi theo thời gian trong ngày theo công thức: $\theta_x(t) = \frac{\pi}{12}(t-12)$ rad, với t là thời gian trong ngày (theo đơn vị giờ, $6 < t < 18$).



- a) Viết hàm số biểu diễn tọa độ của điểm E trên trục Bx theo t .
 b) Dựa vào đồ thị hàm số tang, hãy xác định các thời điểm mà tại đó bóng cây phủ qua vị trí tường rào N biết N nằm trên trục Bx với tọa độ là $x_N = -4$ (m). Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Lời giải

a) Xét tam giác ABE vuông tại B ta có: $\tan \theta_s(t) = \frac{BE}{AB} \Leftrightarrow BE = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right)$.

b) Đồ thị của hàm số $\theta_s = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right)$

Dựa vào đồ thị hàm số để $\theta_s = 5 \tan \left(\frac{\pi}{12}(t-12) \right) < -4$ và $6 < t < 18$ suy ra các thời điểm để bóng cây phủ qua hàng rào N là $6 < t < 9,4$.

Câu 6: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$$d(t) = 3 \sin \left[\frac{\pi}{182}(t-80) \right] + 12 \text{ với } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365$$

- a) Thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?
 b) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời?
 c) Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời?

Lời giải

a) Để thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời thì: $3 \sin \left(\frac{\pi}{182}(t-80) \right) + 12 = 12$

$$\Leftrightarrow \sin \left(\frac{\pi}{182}(t-80) \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = k\pi \Leftrightarrow t-80 = 182k \Leftrightarrow t = 80 + 182k (k \in \mathbb{Z}).$$

Do $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$ nên ta có: $\begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < 80 + 182k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -80 < 182k \leq 285 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{40}{91} < k \leq \frac{285}{182} \end{cases} \Leftrightarrow k \in \{0; 1\}$$

Với $k = 0$ thì $t = 80 + 182 \cdot 0 = 80$;

Với $k = 1$ thì $t = 80 + 182 \cdot 1 = 262$.

Vậy thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 80 và ngày thứ 262 trong năm.

b) Để thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời thì:

$$3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12 = 9 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t-80 = -91 + 364k (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = -11 + 364k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365 \text{ nên ta có } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < -11 + 364k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 11 < 364k \leq 376 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ \frac{11}{364} < k \leq \frac{94}{364} \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$$

Với $k = 1$ thì $t = -11 + 364 \cdot 1 = 353$.

Vậy thành phố A có đúng 9 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 353 trong năm.

c) Để thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời thì $3\sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) + 12 = 15$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{182}(t-80)\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Leftrightarrow t-80 = 91 + 364k (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow t = 171 + 364k (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Do } t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365 \text{ nên ta có } \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ 0 < 171 + 364k \leq 365 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -171 < 364k \leq 194 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{171}{364} < k \leq \frac{97}{364} \end{cases} \Leftrightarrow k = 0$$

Với $k = 0$ thì $t = 171 + 364 \cdot 0 = 171$.

Vậy thành phố A có đúng 15 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày thứ 171 trong năm.

Câu 7: Hội Lim (tỉnh Bắc Ninh) được tổ chức vào mùa xuân thường có trò chơi đánh đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động quanh vị trí cân bằng (Hình 39). Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn qua thời gian t (s) (với $t \geq 0$) bởi hệ thức $h = |d|$ với $d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$, trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại. Vào thời gian t nào thì khoảng cách h là 3 m; 0 m ?



Hình 39

Lời giải

Để khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 3 m thì:

$$3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=3 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=3 \\ 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=1 \\ \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{3}(2t-1)=k2\pi \\ \frac{\pi}{3}(2t-1)=\pi+k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t-1=6k \\ 2t-1=3+6k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t=6k+1 \\ 2t=6k+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=3k+\frac{1}{2} \\ t=3k+2 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0;1;2;\dots\}$ khi đó $\begin{cases} t \in \left\{\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; \frac{13}{2}; \dots\right\} \\ t \in \{2;5;8;\dots\} \end{cases} \Leftrightarrow t \in \left\{\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots\right\}$.

Vậy $t \in \left(\frac{1}{2}; 2; \frac{7}{2}; 5; \frac{13}{2}; 8; \dots\right)$ (giây) thì khoảng cách h là 3 m.

Để khoảng cách h (m) từ vị trí người chơi đu đến vị trí cân bằng là 0 m thì:

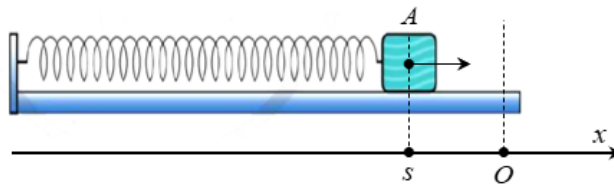
$$\left|3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]\right|=0 \Leftrightarrow 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0 \Leftrightarrow \cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]=0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1)=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}(2t-1)=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow 2t-1=\frac{3}{2}+3k \Leftrightarrow 2t=\frac{5}{2}+3k \Leftrightarrow t=\frac{5}{4}+\frac{3}{2}k$$

Do $t \geq 0, k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{0;1;2;\dots\}$, khi đó $t \in \left\{\frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots\right\}$

Vậy $t \in \left\{\frac{5}{4}; \frac{11}{4}; \frac{17}{4}; \dots\right\}$ (giây) thì khoảng cách h là 0m

Câu 8: Trong hình minh họa dưới đây, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu của lò xo dao động quanh O . Toạ độ s (cm) của A trên trục Ox vào thời điểm t (giây) sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s = 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right)$. Vào các thời điểm nào thì $s = -5\sqrt{3}$ cm ?



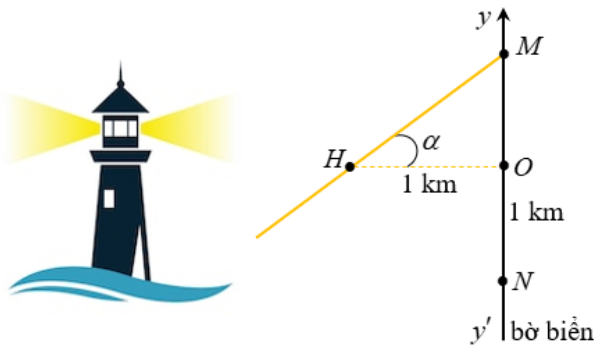
Lời giải

$$\text{Xét phương trình: } 10\sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -5\sqrt{3} \Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(10t + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 10t + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 10t + \frac{\pi}{2} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5} \\ t = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy vào các thời điểm $t = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}$ ($k \geq 1, k \in \mathbb{Z}$) và $t = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{5}$ ($k \geq 0, k \in \mathbb{Z}$) thì ta thấy được $s = -5\sqrt{3}$ cm.

Câu 9: Trong hình minh họa dưới đây, một ngọn đèn trên hải đăng H cách bờ biển yy' một khoảng $HO = 1$ km. Đèn xoay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{\pi}{10}$ rad/s và chiếu hai luồng ánh sáng về hai phía đối diện nhau. Khi đèn xoay, điểm M mà luồng ánh sáng của hải đăng rơi vào bờ biển chuyển động dọc theo bờ.



a) Ban đầu luồng sáng trùng với đường thẳng HO . Viết hàm số biểu thị tọa độ y_M của điểm M trên trục Oy theo thời gian t .

b) Ngôi nhà N nằm trên bờ biển với tọa độ $y_N = -1$ (km). Xác định các thời điểm t mà đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Lời giải

a) Sau t giây điểm M quét được một góc lượng giác có số đo là: $\alpha = \frac{\pi}{10}t$ rad.

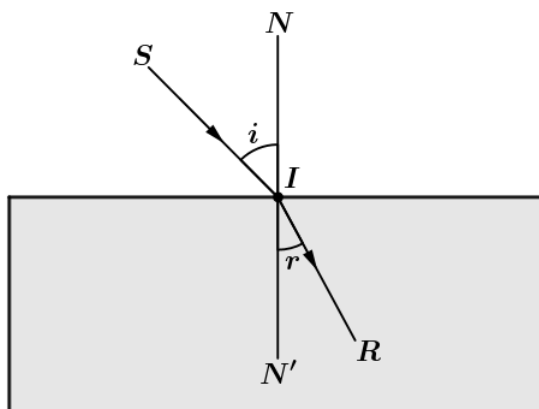
Xét tam giác HOM vuông tại O có: $MO = \tan\alpha \cdot 1 = \tan\left(\frac{\pi}{10}t\right)$. Vậy tọa độ $y_M = \tan\left(\frac{\pi}{10}t\right)$.

b) Xét $\tan\left(\frac{\pi}{10}t\right) = -1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{10}t\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \frac{\pi}{10}t = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = -2,5 + 10k, k \in \mathbb{Z}$

Vì $t \geq 0$ nên tại các thời điểm $t = -2,5 + 10k, k \in \mathbb{Z}, k \geq 1$ thì đèn hải đăng chiếu vào ngôi nhà.

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

Câu 10: Theo Định luật khúc xạ ánh sáng, khi một tia sáng được chiếu tới mặt phân cách giữa hai môi trường trong suốt không đồng chất thì tỉ số $\frac{\sin i}{\sin r}$, với i là góc tới và r là góc khúc xạ, là một hằng số phụ thuộc vào chiết suất của hai môi trường. Biết rằng khi góc tới là 45° thì góc khúc xạ bằng 30° . Khi góc tới là 60° thì góc khúc xạ là bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm.



Lời giải

Vì $\frac{\sin 45^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\sin 60^\circ}{\sin r}$ nên $\sin r = \frac{\sin 60^\circ \sin 30^\circ}{\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{4}$. Suy ra $r = 37,76^\circ$.

Câu 11: Một quả bóng được ném xiên một góc α ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$) từ mặt đất với tốc độ v_0 (m/s). Khoảng cách theo phương ngang từ vị trí ban đầu của quả bóng đến vị trí bóng chạm đất được tính bởi công thức $d = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{10}$.

a) Tính khoảng cách d khi bóng được ném đi với tốc độ ban đầu 10 m/s và góc ném là 30° so với phương ngang.

b) Nếu tốc độ ban đầu của bóng là 10 m/s thì cần ném bóng với góc bao nhiêu độ để khoảng cách d là 5 m?

Lời giải

a) $d = 5\sqrt{3} \approx 8,66$ (m);

b) $d = 5 \Leftrightarrow \frac{10^2 \cdot \sin 2\alpha}{10} = 5 \Leftrightarrow 10\sin 2\alpha = 5 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\alpha = 30^\circ$ hoặc $2\alpha = 150^\circ \Leftrightarrow \alpha = 15^\circ$ hoặc $\alpha = 75^\circ$.

Câu 12: Chiều cao h (m) của một cabin trên vòng quay vào thời điểm t giây sau khi bắt đầu chuyển động được cho bởi công thức $h(t) = 30 + 20\sin\left(\frac{\pi}{25}t + \frac{\pi}{3}\right)$.

a) Cabin đạt độ cao tối đa là bao nhiêu?

b) Sau bao nhiêu giây thì cabin đạt độ cao 40 m lần đầu tiên?

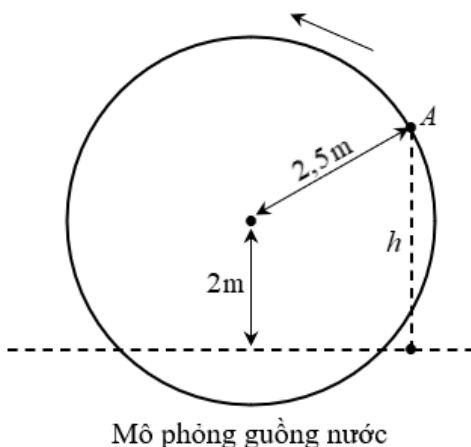
Lời giải

a) 50 m ; b) 12,5 giây.

Câu 13: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó đặt cách mặt nước 2 m (hình bên). Khi guồng quay đều, khoảng cách h (mét) tính từ một chiếc gàu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right)$ với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$), tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gàu ở trên mặt nước và $y < 0$ khi gàu ở dưới mặt nước.

a) Khi nào chiếc gàu ở vị trí cao nhất? Thấp nhất?

b) Chiếc gàu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên khi nào?



Lời giải

a) Vì $-1 \leq \sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 1$ nên $-2,5 \leq 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 2,5$ và do đó ta có

$$-0,5 = 2 - 2,5 \leq 2 + 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) \leq 2 + 2,5 = 4,5 \forall x \in \mathbb{R}.$$

Suy ra, gàu ở vị trí cao nhất: $\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} + k (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy gàu ở vị trí cao nhất tại các thời điểm $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ phút.

Tương tự, gàu ở vị trí thấp: $\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = k (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy gàu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm $0, 1, 2, 3, \dots$ phút.

b) Gàu cách mặt nước 2 m khi

$$2 + 2,5\sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow \sin 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\pi\left(x - \frac{1}{4}\right) = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} + \frac{k}{2} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy chiếc gàu cách mặt nước 2 m lần đầu tiên tại thời điểm $x = \frac{1}{4}$ phút.

Câu 14: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A trong ngày thứ t (ở đây t là số ngày tính từ ngày 1 tháng giêng) của một năm không nhuận được mô hình hoá bởi hàm số

$$L(t) = 12 + 2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right), (t \in \mathbb{Z} \text{ và } 0 < t \leq 365).$$

- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất?
- Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right) \leq 1$ nên $-2,83 \leq 2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right) \leq 2,83$.

Do đó $9,17 = 12 - 2,83 \leq 12 + 2,83\sin\left(\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right) \leq 12 + 2,83 = 14,83 \forall t \in \mathbb{R}$.

a) Ngày thành phố A có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right] = -1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t - 80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{45}{4} + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 1$ suy ra $t = -\frac{45}{4} + 365 = 353,75$.

Như vậy, vào ngày thứ 353 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 12 thì thành phố A sẽ có ít giờ ánh sáng mặt trời nhất.

b) Ngày thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất ứng với

$$\sin\left[\frac{2\pi}{365}(t - 80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{365}(t - 80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 171,25 + 365k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$ suy ra $t = 171,25$.

Như vậy, vào ngày thứ 171 của năm, tức là khoảng ngày 20 tháng 6 thì thành phố A sẽ có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất.

c) Thành phố A có khoảng 10 giờ ánh sáng mặt trời trong ngày nếu

$$12 + 2,83 \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] = 10 \Leftrightarrow \sin \left[\frac{2\pi}{365}(t - 80) \right] = -\frac{200}{283} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2\pi}{365}(t - 80) \approx -0,78 + k2\pi \\ \frac{2\pi}{365}(t - 80) \approx 3,93 + k2\pi \end{cases}$$

Từ đó ta được $\begin{cases} t \approx 34,69 + 365k, \\ t \approx 308,30 + 365k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$

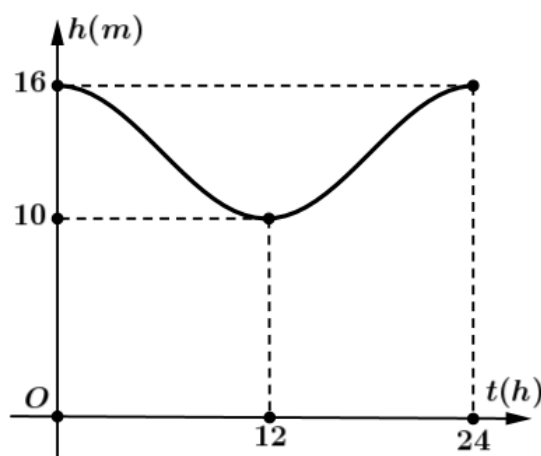
Vì $0 < t \leq 365$ nên $k = 0$ suy ra $t \approx 34,69$ hoặc $t \approx 308,30$.

Như vậy, vào khoảng ngày thứ 34 của năm, tức là ngày 3 tháng 2 và ngày thứ 308 của năm, tức là ngày 4 tháng 11 thành phố A sẽ có 10 giờ ánh sáng mặt trời.

Câu 15: Mức nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mức nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở hình dưới đây mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước h (m) theo thời gian t (h) ($0 \leq t \leq 24$) được cho bởi công thức $h = m + a \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước.

a) Tìm m, a .

b) Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là 11,5 m.



Lời giải

a) Chiều cao của mực nước cao nhất là $m + a$ khi $\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 1$ và thấp nhất bằng $m - a$ khi

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -1. \text{ Theo giả thiết, ta có: } \begin{cases} m + a = 16 \\ m - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ a = 3. \end{cases}$$

b) Từ câu a ta có công thức: $h = 13 + 3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Do chiều cao của mực nước là 11,5 m nên

$$13 + 3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = 11,5 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{12}t = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi}{12}t = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8 + 24k \\ t = -8 + 24k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có $t = 8$ (h) và $t = 16$ (h).

Câu 16: Hằng ngày, mực nước của một con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu h (m) của mực nước trong kênh tính theo thời gian t (giờ) trong một ngày ($0 \leq t < 24$) cho bởi công thức

$$h = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12. \text{ Tìm } t \text{ để độ sâu của mực nước là}$$

- a) 15m
- b) 9m
- c) 10,5 m

Lời giải

Độ sâu của mực nước là 15 m thì $h = 15$.

$$\text{Khi đó: } 15 = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = \cos 0 \Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{6(k2\pi - 1)}{\pi}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq \frac{6(k2\pi - 1)}{\pi} \leq 24 \Leftrightarrow 0 < k \leq 2$$

$$\text{Lại do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{6(2\pi - 1)}{\pi}; \frac{6(4\pi - 1)}{\pi} \right\}$$

Độ sâu của mực nước là 9m thì $h = 9$.

$$\text{Khi đó: } 9 = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = -1 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = \cos \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi t}{6} + 1 = \pi + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{6(k2\pi + \pi - 1)}{\pi} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Vì } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq \frac{6(k2\pi + \pi - 1)}{\pi} \leq 24 \Leftrightarrow 0 < k \leq 1$$

$$\text{Lại do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow t = \frac{6(3\pi - 1)}{\pi}$$

Độ sâu của mực nước là 10,5m thì $h = 10,5$.

$$\text{Khi đó: } 10,5 = 3 \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) + 12 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi t}{6} + 1\right) = \cos\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi t}{6} + 1 = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ \frac{\pi t}{6} + 1 = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{6\left(\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi}; k \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{6\left(-\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi}; k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{Vì } t = \frac{6\left(\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi}; k \in \mathbb{Z} \text{ nên } 0 \leq \frac{6\left(\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi} \leq 24 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 2$$

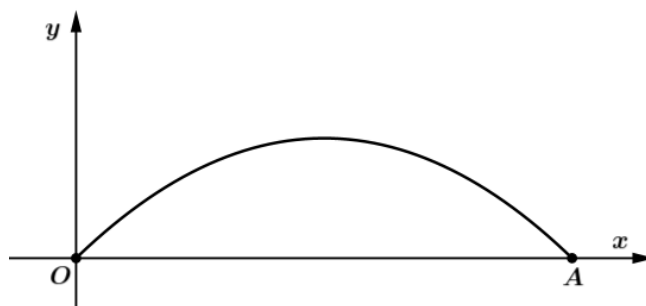
$$\text{Lại do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2\} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{6\left(\frac{2\pi}{3} - 1\right)}{\pi}; \frac{6\left(\frac{8\pi}{3} - 1\right)}{\pi}; \frac{6\left(\frac{14\pi}{3} - 1\right)}{\pi} \right\}$$

$$\text{Với } t = \frac{6\left(-\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Vì } 0 \leq t < 24 \text{ nên } 0 \leq \frac{6\left(-\frac{2\pi}{3} + k2\pi - 1\right)}{\pi} \leq 24 \Leftrightarrow 0 < k \leq 2$$

$$\text{Lại do } k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1; 2\} \Rightarrow t \in \left\{ \frac{6\left(-\frac{2\pi}{3} - 1\right)}{\pi}; \frac{6\left(\frac{4\pi}{3} - 1\right)}{\pi}; \frac{6\left(\frac{10\pi}{3} - 1\right)}{\pi} \right\}$$

Câu 17: Một cây cầu có dạng cung OA của đồ thị hàm số $y = 4,8 \sin \frac{x}{9}$ và được mô tả trong hệ trục tọa độ với đơn vị trục là mét như ở hình dưới đây:



- Giả sử chiều rộng của con sông là độ dài đoạn thẳng OA . Tìm chiều rộng đó (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)
- Một sà lan chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với độ cao 3,6m so với mực nước sông sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều rộng của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 13,1m.



c) Một sà lan khác cũng chở khối hàng hóa được xếp thành hình hộp chữ nhật với chiều rộng của khối hàng hóa đó là 9m sao cho sà lan có thể đi qua được gầm cầu. Chứng minh rằng chiều cao của khối hàng hóa đó phải nhỏ hơn 4,3m

Lời giải

a) Giải phương trình $y = 0 \Leftrightarrow 4,8\sin\frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{9} = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} = k\pi \Leftrightarrow x = k9\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Do đó đồ thị cắt trục Ox tại các điểm có hoành độ $0; 9\pi; 18\pi; \dots$

Vì thế $A(9\pi; 0)$ nên chiều rộng của con sông là $OA = 9\pi \approx 28,3m$

b) Xét đường thẳng $y = 3,6$

Ta có $y = 4,8\sin\frac{x}{9} \leq 4,8$, nên đường thẳng $y = 3,6$ cắt một phần đồ thị của hàm số

$y = 4,8\sin\frac{x}{9}$ tại hai điểm $M(x_1; 3,6), N(x_2; 3,6)$.

Giải phương trình $4,8\sin\frac{x}{9} = 3,6 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{9} = \frac{3}{4}$ (1), x_1, x_2 là hai nghiệm dương nhỏ nhất của (1)

$-1 \leq \frac{3}{4} \leq 1$ nên tồn tại một số $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ sao cho $\sin\alpha = \frac{3}{4}$.

$$\text{Ta có } \sin\frac{x}{9} = \sin\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{9} = \alpha + k2\pi \\ \frac{x}{9} = \pi - \alpha + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9\alpha + k18\pi \\ x = 9\pi - 9\alpha + k18\pi \end{cases}$$

Do $x_1, x_2 \in (0; 9\pi)$ nên $x_1 \approx 9\alpha \approx 7,6325$; $x_2 \approx 9\pi - 9\alpha \approx 20,6418$ nên $x_2 - x_1 < 13,1$.

Vậy chiều rộng của khối hàng hoá bé hơn 13,1m

c) Cho $0 < m < 4,8$ đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm $P(x_3; m), Q(x_4; m), x_3, x_4$ là hai nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình $4,8\sin\frac{x}{9} = m$ (2); $x_4 - x_3 = 9$.

$$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{9} = \frac{m}{4,8}, \text{ vì } 0 < \frac{m}{4,8} < 1 \text{ nên } \exists \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \text{ sao cho } \sin\beta = \frac{m}{4,8} (*)$$

Khi đó (2) trở thành $\Leftrightarrow \sin \frac{x}{9} = \sin \beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9\beta + k18\pi \\ x = 9(\pi - \beta) + k18\pi \end{cases} k \in \mathbb{Z}$

Hai nghiệm dương nhỏ nhất của (2) là $x_3 = 9\beta, x_4 = 9(\pi - \beta)$

Ta có $x_4 - x_3 = 9(\pi - \beta) - 9\beta = 0$.

Do vậy $m = 4,8\sin \beta$ hay $m = 4,8\sin \frac{\pi - 1}{2} \approx 4,2124 < 4,3$.

Vậy chiều cao của mỗi khối hàng hoá bé hơn $4,3m$.

Câu 18: Vận tốc v_1 (cm / s) của con lắc đơn thứ nhất và vận tốc v_2 (cm / s) của con lắc đơn thứ hai theo thời gian t (giây) được cho bởi các công thức:

$$v_1(t) = -4\cos\left(\frac{2t}{3} + \frac{\pi}{4}\right) \text{ và } v_2(t) = 2\sin\left(2t + \frac{\pi}{6}\right).$$

Xác định các thời điểm t mà tại đó:

- Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất bằng 2 cm / s ;
- Vận tốc của con lắc đơn thứ nhất gấp hai lần vận tốc của con lắc đơn thứ hai.

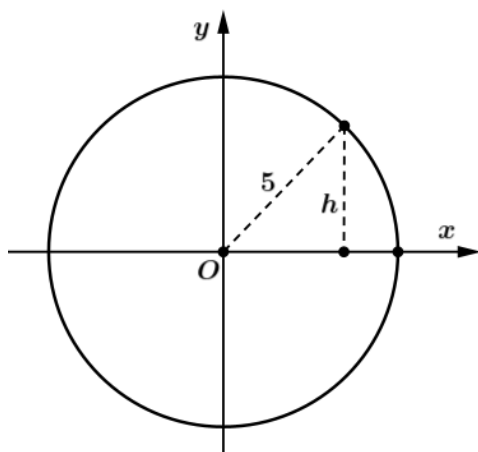
Lời giải

a) $t = \frac{5\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$ và $t = \frac{13\pi}{8} + k3\pi, k \in \mathbb{N}$;

b) $t = \frac{19\pi}{16} + k\frac{3\pi}{2}, k \in \mathbb{N}$ và $t = \frac{13\pi}{32} + k\frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{N}$.

Câu 19: Một chất điểm chuyển động đều theo chiều ngược chiều kim đồng hồ trên đường tròn bán kính 5 cm . Khoảng cách h (cm) từ chất điểm đến trục hoành được tính theo công thức $h = |y|$, trong đó $y = a\sin\left(\frac{\pi}{5}t\right)$ với t là thời gian chuyển động của chất điểm tính bằng giây ($t \geq 0$) và chất điểm bắt đầu chuyển động từ vị trí A (Hình 16) .

- Chất điểm chuyển động một vòng hết bao nhiêu giây?
- Tìm giá trị của a .
- Tìm thời điểm sao cho chất điểm ở vị trí có $h = 2,5$ cm và nằm phía dưới trục hoành trong một vòng quay đầu tiên.



Lời giải

a) Xét $h = 0$ hay $asin\left(\frac{\pi}{5}t\right) = 0 \Leftrightarrow t = 5k$ với $k \in \mathbb{Z}$ và $k \geq 0$.

Ta nhận thấy, từ thời điểm ban đầu, cứ sau 5 giây, khoảng cách từ chất điểm đến trục hoành lại bằng 0. Suy ra sau mỗi 5 giây, chất điểm chuyển động được nửa vòng. Vậy chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây.

b) Do chất điểm chuyển động một vòng hết 10 giây nên khi $t = 2,5$ giây thì chất điểm chuyển động được một phần tư vòng theo chiều dương, suy ra tại $t = 2,5$ ta có

$$y = |y| = h = 5 \Leftrightarrow asin\left(\frac{\pi}{5}, \frac{5}{2}\right) = 5 \Leftrightarrow a = 5.$$

Câu 20: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu gọi là huyết áp tâm thu và tâm trương, tương ứng. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là tâm thu/tâm trương. Chỉ số huyết áp 120 / 80 là bình thường. Giả sử một người nào đó có nhịp tim là 70 lần trên phút và huyết áp của người đó được mô hình hoá bởi hàm số $P(t) = 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)$ ở đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị $mmHg$ (milimét thủy ngân) và thời gian t tính theo giây.

a) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 100 $mmHg$.

b) Trong khoảng từ 0 đến 1 giây, hãy xác định số lần huyết áp là 120 $mmHg$.

Lời giải

a) Huyết áp là 100 $mmHg$ khi

$$P(t) = 100 \Leftrightarrow 100 + 20\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 100 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{3k}{7} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3k}{7} < 1 \Leftrightarrow 0 < k < \frac{7}{3} \Leftrightarrow k \in \{1; 2\} \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 2 lần huyết áp là 100 $mmHg$.

b) Huyết áp là 120 mmHg khi

$$P(t) = 120 \Leftrightarrow 100 + 20 \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 120 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{7\pi}{3}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{Xét } 0 < t < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{3}{14} + \frac{6k}{7} < 1 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{11}{12} \Leftrightarrow k = 0 \text{ vì } k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng từ 0 đến 1 giây, có 1 lần huyết áp là 120 mmHg.

Câu 21: Trong môn cầu lông, khi phát cầu, người chơi cần đánh cầu qua khỏi lưới sang phía sân đối phương và không được để cho cầu rơi ngoài biên. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , chọn điểm có tọa độ $(0; y_0)$ là điểm xuất phát thì phương trình quỹ đạo của cầu lông khi rời khỏi mặt vợt là:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x + y_0; \text{ trong đó:}$$

g là gia tốc trọng trường (thường được chọn là $9,8 \text{ m/s}^2$)

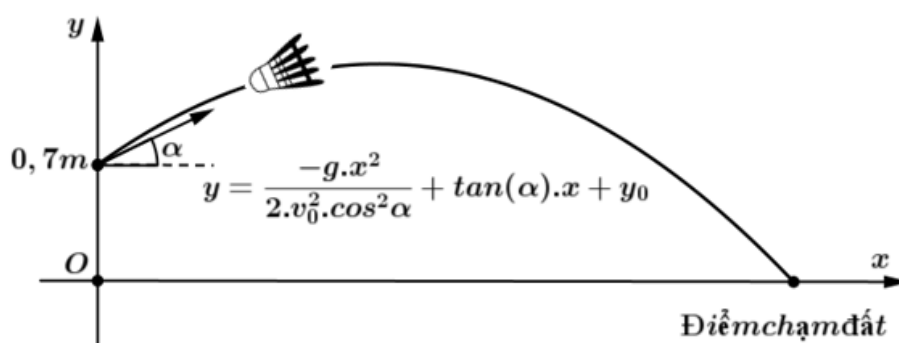
α là góc phát cầu (so với phương ngang của mặt đất)

v_0 là vận tốc ban đầu của cầu

y_0 là khoảng cách từ vị trí phát cầu đến mặt đất.

Đây là một hàm số bậc hai nên quỹ đạo chuyển động của cầu lông là một parabol.

Một người chơi cầu lông đang đứng khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là 6,68 m. Quan sát hình bên dưới, hỏi người chơi đã phát cầu góc khoảng bao nhiêu độ so với mặt đất? (biết cầu rời mặt vợt ở độ cao 0,7 m so với mặt đất và vận tốc xuất phát của cầu là 8 m/s, bỏ qua sức cản của gió và xem quỹ đạo của cầu luôn nằm trong mặt phẳng phẳng đứng).



Lời giải

Với $g = 9,8 \text{ m/s}^2$, vận tốc ban đầu $v_0 = 8 \text{ m/s}$ thì phương trình quỹ đạo của cầu:

$$y = \frac{-g \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan \alpha \cdot x + y_0$$

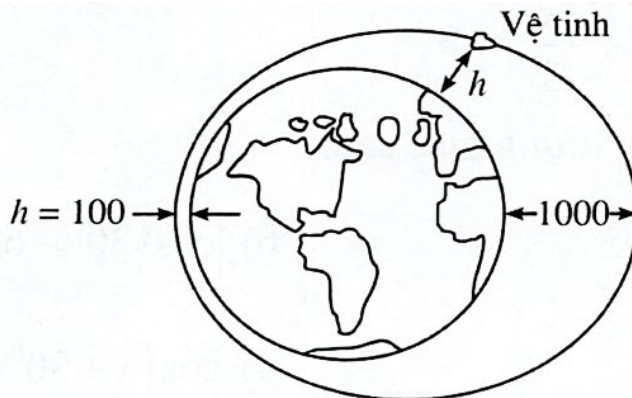
Khoảng cách từ vị trí người này đến vị trí cầu rơi chạm đất (tầm bay xa) là 6,68 m nghĩa là $x = 6,68 \text{ m}$.

$$\text{Ta có: } \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128 \cdot \cos^2 \alpha} + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-9,8 \cdot (6,68)^2}{128} (1 + \tan^2 \alpha) + \tan(\alpha) \cdot (6,68) + 0,7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha \approx 1,378 \\ \tan \alpha \approx 0,576 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha \approx 54,04^\circ \\ \alpha \approx 29,97^\circ \end{cases}$$

Vậy người chơi đã phát cầu một góc gần 54° hoặc gần 30° so với mặt đất.

Câu 22: Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip (như hình vẽ):



Độ cao h (tính bằng kilômét) của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo.

Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất 250 km . Trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó?

Lời giải

Ta có phương trình: $550 + 450 \cdot \cos \frac{\pi}{50} t = 250 \Leftrightarrow \cos \frac{\pi}{50} t = -\frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{50} t \approx 2,3 + k2\pi \\ \frac{\pi}{50} t \approx -2,3 + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 36,61 + k100 \\ t \approx -36,61 + k100 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy trong khoảng 60 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, tại thời điểm $t \approx 36,61$ (phút) thì ta có thể thực hiện thí nghiệm đó.

-----HẾT-----