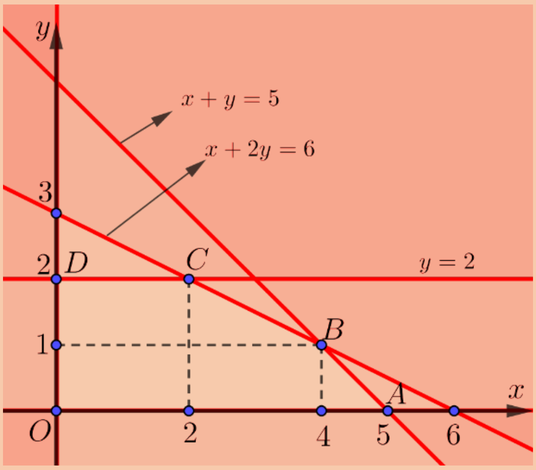
VUI CÙNG TOÁN

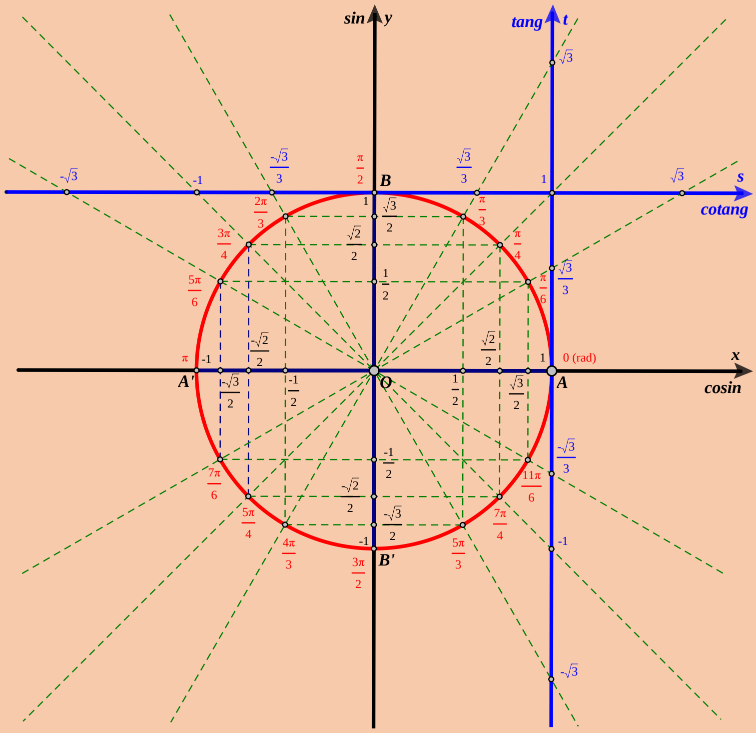
VÕ CÔNG TRƯỜNG
0983 900 570

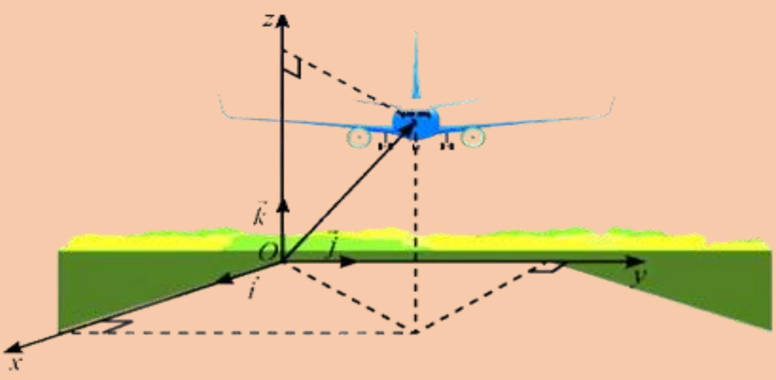


HỆ THỐNG TOÀN BỘ KIẾN THỨC TOÁN LỚP 10, 11, 12

ĐỂ ÔN THI TỐT NGHIỆP THPT

- **Hệ thống kiến thức chương trình Toán lớp 10, 11, 12**
- **Phương pháp giải các dạng toán cơ bản thường gặp**
- **Ví dụ và lời giải các bài toán cơ bản**





2025-2026

MỤC LỤC

☞ CHƯƠNG TRÌNH TOÁN LỚP 12

PHẦN☞ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

CHƯƠNG ☞ ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT HÀM SỐ

Bài 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bảng công thức đạo hàm

Hàm sơ cấp	*Hàm hợp*	*Phép toán*
	Quy tắc đạo hàm của hàm hợp với $u=u(x)$ $\left[f(u)\right]'=f'(u).u'$	(25) $(u\pm v)'=u'\pm v'$
(1) $(C)'=0$		(26) $(u.v)'=u'.v+u.v'$
(2) $(x)'=1$		(27) $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'.v-v'.u}{v^2}$
(3) $(x^\alpha)'=\alpha.x^{\alpha-1}$	(14) $(u^\alpha)'=\alpha.u^{\alpha-1}.u'$	(28) $(k.u)'=k.u'$, (k là hằng số)
(4) $\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2.\sqrt{x}}$	(15) $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2.\sqrt{u}}$	(29) $\left(\dfrac{k}{v}\right)'=\dfrac{-k.v'}{v^2}$
(5) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{-1}{x^2}$	(16) $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=\dfrac{-u'}{u^2}$	***Đặc biệt***
(6) $(\sin x)'=\cos x$	(17) $(\sin u)'=u'.\cos u$	(30) $\left(\dfrac{1}{x^\alpha}\right)'=\dfrac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$
(7) $(\cos x)'=-\sin x$	(18) $(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$	
(8) $(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	(19) $(\cos u)'=-u'.\sin u$	(31) $\left(\dfrac{ax+b}{cx+d}\right)'=\dfrac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix}}{(cx+d)^2}=\dfrac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
(9) $(\cot x)'=\dfrac{-1}{\sin^2 x}$	(20) $(\cot u)'=\dfrac{-u'}{\sin^2 u}$	(32) $\left(\dfrac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)'=\dfrac{adx^2+2aex+(be-cd)}{(dx+e)^2}$
(10) $(a^x)'=a^x.\ln a$	(21) $(a^u)'=a^u.\ln a.u'$	
(11) $(e^x)'=e^x$	(22) $(e^u)'=e^u.u'$	
(12) $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x.\ln a}$	(23) $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u.\ln a}$	
(13) $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	(24) $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$	

1. Tính đơn điệu của hàm số

Định nghĩa

Kí hiệu K là khoảng; đoạn; nửa khoảng. Giả sử hàm số $y=f(x)$ xác định trên K.

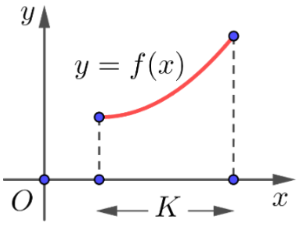
Hàm số $y=f(x)$

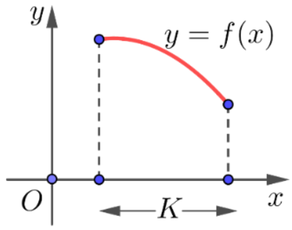
- Gọi là *đồng biến* trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K$ mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)<f(x_2)$.
- Gọi là *nghịch biến* trên K nếu $\forall x_1,x_2\in K$ mà $x_1<x_2$ thì $f(x_1)>f(x_2)$.

Chú ý

Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K thì đồ thị *đi lên* từ trái sang phải (*Hình trái*).

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K thì đồ thị *đi xuống* từ trái sang phải (*Hình phải*).





Định lý

- Nếu $f'(x)>0, \forall x \in K$ thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên K
- Nếu $f'(x)<0, \forall x \in K$ thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên K

Chú ý

Trên K,

- Nếu $f'(x)=0$ thì hàm số $y=f(x)$ không đổi
- Nếu $f'(x)\geq 0$ và $f'(x)=0$ tại hữu hạn điểm thì hàm số $y=f(x)$ đồng biến
- Nếu $f'(x)\leq 0$ và $f'(x)=0$ tại hữu hạn điểm thì hàm số $y=f(x)$ nghịch biến

2. Cực trị của hàm số

Khái niệm

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a;b)$ (a có thể là $-\infty$, b có thể là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a;b)$.

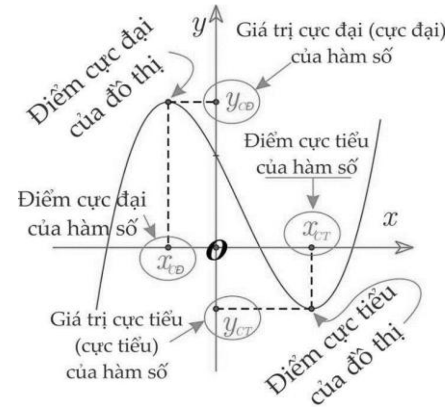
- $\exists h>0$ sao cho $f(x)<f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0-h;x_0+h) \subset (a;b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực đại*** tại x_0.
- $\exists h>0$ sao cho $f(x)>f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0-h;x_0+h) \subset (a;b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $f(x)$ đạt ***cực tiểu*** tại x_0.

Chú ý

(1) x_0: Điểm Cực đại (Cực tiểu) của ***hàm số*** → Gọi chung là điểm Cực trị của ***hàm số***

(2) $y_{CĐ}$: Giá trị Cực đại; y_{CT}: Giá trị Cực tiểu của HS; Gọi chung là Giá trị Cực trị; Gọi gọn là Cực trị.

(3) $(x_0;y_{CD})$: Điểm Cực đại, $(x_0;y_{CT})$: Điểm Cực tiểu của ***đồ thị hàm số***.



Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị tại một điểm

Giả sử hàm số $y=f(x)$ liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x)>0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì x_0 là điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$
- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x \in (a;x_0)$ và $f'(x)<0$ với mọi $x \in (x_0;b)$ thì x_0 là điểm cực đại của hàm số $f(x)$

Nhận xét

(1) Định lí trên được thể hiện bằng bảng biến thiên

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	↗	$y_{CĐ}$	↘

Nếu đạo hàm đổi dấu từ (+) sang (–) khi x qua điểm x_0 xác định thì hàm số đạt cực đại tại x_0

x	a	x_0	b
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	↘	y_{CT}	↗

Nếu đạo hàm đổi dấu từ (–) sang (+) khi x qua điểm x_0 xác định thì hàm số đạt cực tiểu tại x_0

(2) Nếu $f'(x_0)=0$ nhưng $f'(x)$ không đổi dấu khi x qua điểm x_0 thì hàm số không đạt cực trị tại x_0.

(3) Số điểm cực trị của hàm số bằng số lần đổi dấu của đạo hàm tại các điểm xác định của hàm số.

PHƯƠNG PHÁP XÉT DẤU BIỂU THỨC

Xét dấu biểu thức $f(x)$

Bước 1. Tìm tập xác định (Nếu cần)

Bước 2. Tìm nghiệm của $f(x)$.

Bước 3. Lập bảng xét dấu

Cách 1. Xét dấu bằng các quy tắc đã biết:

(1) *Dấu của Nhị thức bậc nhất* $f(x)=ax+b\ (a\neq 0)$

x	$-\infty$		$\frac{-b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		*Trái dấu a*	0	*Cùng dấu a*	

(2) *Dấu của Tam thức bậc hai* $f(x)=ax^2+bx+c,\ (a\neq 0),\ \Delta=b^2-4ac$

$\Delta<0$	x	$-\infty$		$+\infty$
	$f(x)$		*Cùng dấu a*	

$\Delta=0$	x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
	$f(x)$		*Cùng dấu a*	0	*Cùng dấu a*	

$\Delta>0$	x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
	$f(x)$		*Cùng dấu a*	0	*Trái dấu a*	0	*Cùng dấu a*	

Cách 2. Xét dấu bằng cách tính giá trị biểu thức (Dùng máy tính cầm tay)

Các nghiệm chia tập xác định thành nhiều khoảng, mỗi khoảng chọn một điểm đại diện và tính giá trị của $f(x)$ tại các điểm đó, xác định dấu và điền dấu vào bảng xét dấu

Ví dụ 1: Giả sử $f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.\ (x_1<x_2<x_3)$.

x	a	x_1	b	x_2	c	x_3	d
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$
	$f(a)>0$		$f(b)<0$		$f(c)<0$		$f(d)>0$

Cách 3. Xét dấu bằng quy tắc xét dấu khoảng

Quy tắc: Hai khoảng liền kề nghiệm đơn (bội lẻ) khác dấu; Hai khoảng liền kề nghiệm kép (bội chẵn) cùng dấu

1.Xác định loại nghiệm của $f(x)$ (nếu được): nghiệm nào là nghiệm đơn (bội lẻ), nghiệm kép (bội chẵn)

2.Xác định dấu của $f(x)$ trên một khoảng nào đó, từ đó lần lượt suy ra dấu của các khoảng còn lại.

Ví dụ 2: Giả sử $f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=x_1 \\ x=x_2 \\ x=x_3 \end{array}\right.$ $(x_1<x_2<x_3)$. Trong đó: x_1, x_3 là nghiệm đơn; x_2 là nghiệm kép

x		x_1		x_2		x_3	
$f(x)$	+	0	−	0	−	0	+

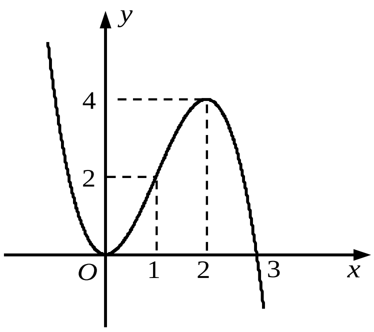
Cách 4. Xét dấu bằng đồ thị

Chú ý

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là nghiệm của phương trình $f(x)=g(x)$

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành là nghiệm của phương trình $f(x)=0$

Ví dụ 3: Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Lời giải

Đồ thị và trục hoành có 2 điểm chung tại hoành độ $x=0,\ x=3$, nên ta có:

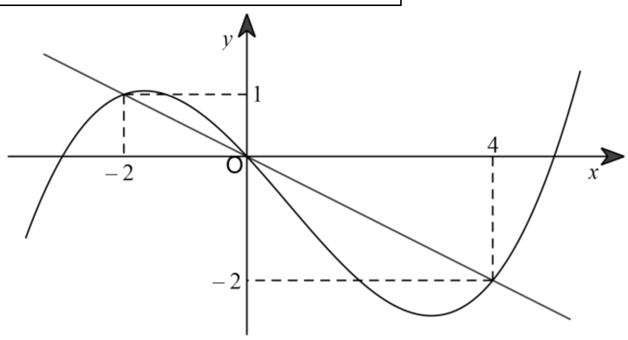
$$f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right.$$

Trên $(-\infty;0)$, $(0;3)$ đồ thị nằm trên trục hoành nên $f(x)$ có giá trị dương; trên $(3;+\infty)$ đồ thị nằm dưới trục hoành nên $f(x)$ có giá trị âm.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	+	0	−	

Ví dụ 4: Cho hàm số $y=f(x)=g(x)-h(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ với $y=g(x)$, $y=h(x)$ lần lượt có đồ thị là đường cong và đường thẳng như hình vẽ.



Lời giải

Đồ thị 2 hàm số $y=g(x)$, $y=h(x)$ có 3 điểm chung tại hoành độ $x=-2,\ x=0,\ x=4$, nên ta có:

$$f(x)=0 \Leftrightarrow g(x)-h(x)=0 \Leftrightarrow g(x)=h(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=0 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Trên $(-\infty;-2)$, $(0;4)$, đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm dưới $y=h(x)$ nên $g(x)<h(x) \Leftrightarrow g(x)-h(x)<0$ hay $f(x)$ có giá trị âm;

Trên $(-2;0)$, $(4;+\infty)$, đồ thị hàm số $y=g(x)$ nằm trên $y=h(x)$ nên $g(x)>h(x)\Leftrightarrow g(x)-h(x)>0$ hay $f(x)$ có giá trị dương.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		-2		0		4		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

📖 CÁC DẠNG TOÁN CÓ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ XÉT SỰ BIẾN THIÊN CỦA HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Tìm đạo hàm. Tìm nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm.

Bước 3. Lập bảng biến thiên:

x	Điền TXĐ; nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm (theo thứ tự tăng dần).
y'	Xét dấu đạo hàm y'
y	Vẽ chiều biến thiên (mũi tên chéo lên khi $y'>0$, chéo xuống khi $y'<0$); Điền Giới hạn hàm số, Giá trị hàm số tại các điểm x tương ứng vào đầu, cuối các mũi tên

Bước 4. Dựa vào bảng biến thiên, kết luận chiều biến thiên trên từng khoảng.

Dạng hàm số cho bởi bảng biến thiên, đồ thị.

Ví dụ 5: Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$-\infty$	↗	3	↘	-1	↗	3	↘	$-\infty$

Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên khoảng nào dưới đây

A. $(-2;0)$. **B.** $(-\infty;-2)$. **C.** $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.

Lời giải

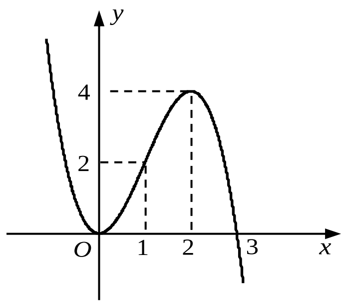
Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $y'<0$ trên các khoảng $(-2;0)$, $(2;+\infty)$.

Vậy hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-2;0)$, $(2;+\infty)$. Chọn đáp án **A**

Ví dụ 6: Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào?

A. $(-\infty;0)$. **B.** $(1;3)$.

C. $(0;2)$. **D.** $(0;+\infty)$.



Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị đi lên trên khoảng $(0;2)$.

Vậy hàm số đồng biến trên các khoảng $(0;2)$. Chọn đáp án **C**

Dạng hàm số cho bởi biểu thức hoặc biểu thức đạo hàm

Ví dụ 7: Hàm số $y=-x^3+3x^2-4$ đồng biến trên khoảng nào?

A. $(2;+\infty)$. **B.** $(0;2)$. **C.** $(-4;0)$. **D.** $(-\infty;0)$.

Lời giải

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x$; $y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-4	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên thì hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;2)$. Chọn đáp án **B**

Ví dụ 8: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (1-x)^2(x+1)^3(3-x)$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. $(-\infty;1)$. **B.** $(-\infty;-1)$. **C.** $(1;3)$. **D.** $(3;+\infty)$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (1-x)^2(x+1)^3(3-x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \\ x = 3 \end{array}\right.$.

Bảng xét dấu: (Trong mỗi khoảng ta chọn một số nào đó thay vào biểu thức $f'(x)$ tính giá trị và suy ra dấu)

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Hàm số đồng biến trên khoảng $(-1;3)$. Chọn đáp án **C**

Dạng toán ☞ TÌM CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Tìm đạo hàm. Tìm nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm.

Bước 3. Lập bảng biến thiên:

x	Điền TXĐ; nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm (theo thứ tự tăng dần).
y'	Xét dấu đạo hàm y’
y	Vẽ chiều biến thiên (mũi tên chéo lên khi $y' > 0$, chéo xuống khi $y' < 0$); Điền Giới hạn hàm số, Giá trị hàm số tại các điểm *x* tương ứng vào đầu, cuối các mũi tên

Bước 4. Dựa vào bảng biến thiên và định lí, kết luận cực trị.

Dạng hàm số cho bởi bảng biến thiên hoặc đồ thị

Ví dụ 9: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đạt cực đại tại điểm

A. $x = 1$. **B.** $x = 0$. **C.** $x = 5$. **D.** $x = 2$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, dễ dàng thấy đáp án **D**

Ví dụ 10: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ và có bảng xét dấu của $f'(x)$ như sau:

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	

Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Lập bảng biến thiên hoàn chỉnh: (tại $x=0$ hàm số không xác định)

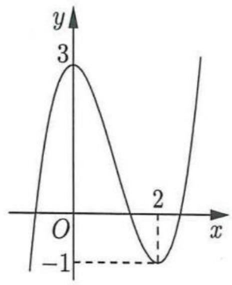
x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	$\|\|$	$-$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$f_{CĐ}$	$\searrow$	$\|\|$	$\nearrow$	$f_{CĐ}$		$\searrow$		

Ta thấy, hàm số có 2 điểm cực đại (gọi chung là 2 điểm cực trị). Chọn đáp án **C**.

Lưu ý: Ta có thể làm nhanh như sau

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy đạo hàm $f'(x)$ đổi dấu 3 lần khi x qua các điểm $x=-1$, $x=0$, $x=1$, nhưng $x=0$ là điểm không xác định của hàm số nên hàm số chỉ có 2 điểm cực trị. Chọn đáp án **C**

Ví dụ 11: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Giá trị cực đại của hàm số đã cho là



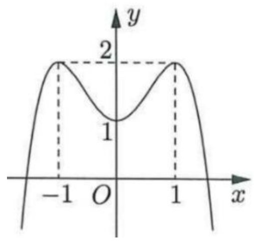
A. -1. **B.** 3.

C. 2. **D.** 0.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số có điểm cực đại là $(0;3)$, điểm cực tiểu là $(2;-1)$. Chọn đáp án **B**

Ví dụ 12: Cho hàm số $y=ax^4+bx^2+c$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho có tọa độ là



A. $(-1;2)$. **B.** $(0;1)$.

C. $(1;2)$. **D.** $(1;0)$.

Lời giải

Dựa và đồ thị, ta thấy đồ thị hàm số có 2 điểm cực đại là $(-1;2)$, $(1;2)$ và 1 điểm cực tiểu là $(0;1)$. Chọn đáp án **B**

Dạng hàm số cho bởi biểu thức hoặc biểu thức đạo hàm

Ví dụ 13: Điểm cực đại của đồ thị hàm số $y=x^3-6x^2+9x$ có tổng hoành độ và tung độ bằng

A. 5. **B.** 1. **C.** 3. **D.** -1.

Lời giải

Ta có: $y'=3x^2-12x+9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	4	↘	0	↗	$+\infty$

Khi đó: $x_{CD} = 1 \Rightarrow y_{CD} = 4 \Rightarrow x_{CD} + y_{CD} = 5$. Chọn đáp án **A**

Ví dụ 14: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số đã cho là

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Lời giải

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=0 \\ (x-2)^2=0 \\ (x-3)^3=0 \\ (x-4)^4=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		1		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗		↘		↘		↗		↗	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên: Số điểm cực trị của hàm số đã cho là 2. Chọn đáp án **C**

Bài 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

1. Định nghĩa:

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên D

- Số M được gọi là *giá trị lớn nhất* (**GTLN**) của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu $f(x)\le M,\ \forall x\in D$ và $\exists x_0\in D: f(x_0)=M$.

  Kí hiệu $M=\max\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $M=\max\limits_{D} f(x)$.

- Số m được gọi là *giá trị nhỏ nhất* (**GTNN**) của hàm số $y=f(x)$ trên D nếu $f(x)\ge m,\ \forall x\in D$ và $\exists x_0\in D: f(x_0)=m$

  Kí hiệu $m=\min\limits_{x\in D} f(x)$ hoặc $m=\min\limits_{D} f(x)$.

Tóm tắt

- $\begin{cases} f(x)\le M,\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D:\ f(x_0)=M \end{cases} \Leftrightarrow \max\limits_{D} f(x)=M$
- $\begin{cases} f(x)\ge m,\ \forall x\in D \\ \exists x_0\in D:\ f(x_0)=m \end{cases} \Leftrightarrow \min\limits_{D} f(x)=m$

Chú ý :

(1) Nếu hàm số chỉ có 1 cực đại trên K thì $\max\limits_{K} y=y_{CD}$. Nếu hàm số chỉ có 1 cực tiểu trên K thì $\min\limits_{K} y=y_{CT}$

(2) Nếu hàm số đồng biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} y=y(a)$, $\max\limits_{[a;b]} y=y(b)$

Nếu hàm số nghịch biến trên đoạn $[a;b]$ thì $\min\limits_{[a;b]} y=y(b)$, $\max\limits_{[a;b]} y=y(a)$

2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên một đoạn

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=f(x)$ trên đoạn $[a;b]$

Bước 1: Tìm đạo hàm $f'(x)$, Tìm các điểm $x_1,x_2,...,x_n$ trên khoảng $(a;b)$, tại đó $f'(x)=0$ hoặc $f'(x)$ không xác định. (Tìm các nghiệm và các điểm không xác định của đạo hàm $f'(x)$ trên khoảng $(a;b)$)

Bước 2: Tính $f(a), f(b), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)$

Bước 3: Kết luận: $\max\limits_{[a,b]} f(x)=\max\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)\}$. (Giá trị lớn nhất ở Bước 2)

$\min\limits_{[a,b]} f(x)=\min\{f(a), f(b), f(x_1), f(x_2),..., f(x_n)\}$. (Giá trị nhỏ nhất ở Bước 2)

3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng (hay nửa khoảng) K

Bước 1. Lập bảng biến thiên → Đặt K vào vị trí thích hợp;

Bước 2. Dựa vào bảng biến thiên, nhận xét và kết luận GTLN-GTNN

Chú ý: Trên một khoảng hàm số có thể không có hay chỉ có GTLN hoặc GTNN.

CÁC DẠNG TOÁN CÓ BẢN THƯỜNG GẶP

Ví dụ 15: Hàm số $y=f(x)$ xác định, liên tục trên khoảng $(2;+\infty)$ và có bảng biến thiên như sau. Chọn mệnh đề đúng.

x	2		5		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	7	↘	-4	↗	12

A. $\min\limits_{(2;+\infty)} f(x)=5$. **B.** $\min\limits_{(2;+\infty)} f(x)=-4$.

C. $\max\limits_{(2;+\infty)} f(x)=12$. **D.** $\max\limits_{(2;+\infty)} f(x)=7$.

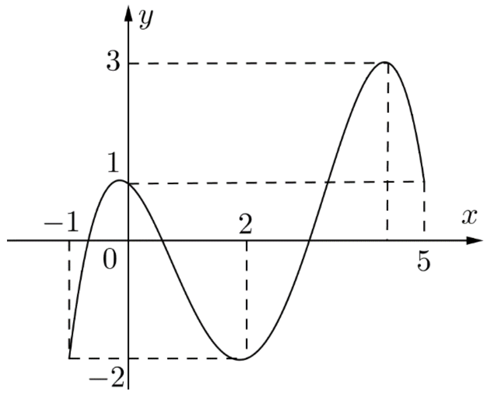
Lời giải

Dựa vào hàng giá trị $f(x)$ ta thấy, giá trị -4 là giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng $(2;+\infty)$.

Chọn **B**

Lưu ý:

Số 12 không phải là GTLN của hàm số mà là giới hạn của hàm số tại $+\infty$ (hay $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=12$)



Ví dụ 16: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[-1;5]$ và có đồ thị trên đoạn $[-1;5]$ như hình vẽ bên dưới. Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-1;5]$ bằng

A. -1 **B.** 4

C. 1 **D.** 2

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta thấy, Điểm cao nhất của đồ thị là điểm có tung độ bằng 3, điểm thấp nhất của đồ thị có tung độ bằng -2

Vậy giá trị lớn nhất là 3 và giá trị nhỏ nhất là -2. Chọn **C**

Ví dụ 17: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)=-x^4+12x^2+1$ trên đoạn $[-1;2]$ bằng

A. 1. **B.** 37. **C.** 33. **D.** 12.

Lời giải

• Đạo hàm: $f'(x)=-4x^3+24x^2$; $f'(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0\in[-1;2] \\ x=\sqrt{6}\notin[-1;2] \\ x=-\sqrt{6}\notin[-1;2] \end{array}\right.$

• $f(-1)=12,\quad f(2)=33,\quad f(0)=1$

Vậy, $\max\limits_{[-1,2]} f(x)=33$

Ví dụ 18: Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3x+\dfrac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

A. $\min\limits_{(0;+\infty)} y=3\sqrt[3]{9}$. **B.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=7$. **C.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=\dfrac{33}{5}$. **D.** $\min\limits_{(0;+\infty)} y=2\sqrt[3]{9}$.

Lời giải

• Đạo hàm: $y'=3-\dfrac{8}{x^3}$;

$y'=0 \Leftrightarrow \dfrac{8}{x^3}=3 \Leftrightarrow x^3=\dfrac{8}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$

• Bảng biến thiên:

x	0		$\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}$		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	$3\sqrt[3]{9}$	$\nearrow$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta có: $\min\limits_{(0;+\infty)} y=y\left(\sqrt[3]{\dfrac{8}{3}}\right)=3\sqrt[3]{9}$

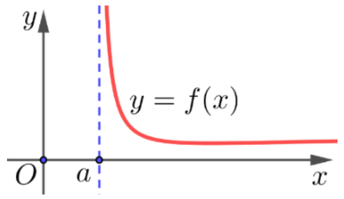
Bài 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

1. Tiệm cận đứng

Định nghĩa

Đường thẳng $x=a$ được gọi là một ***đường tiệm cận đứng*** (hay ***tiệm cận đứng***) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thoả mãn:

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$



Cách tìm tiệm cận đứng

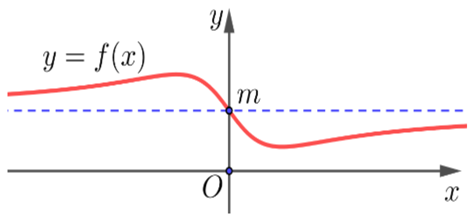
Để tìm tiệm cận đứng của đồ thị hàm số thì ta tính giới hạn của hàm số tại các nghiệm của mẫu. Dựa vào định nghĩa ta kết luận tiệm cận đứng. ***(Xem sơ đồ ở trang sau)***

2. Tiệm cận ngang

Định nghĩa

Đường thẳng $y=m$ được gọi là một ***đường tiệm cận ngang*** (hay ***tiệm cận ngang***) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=m$ hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=m$



Cách tìm tiệm cận ngang

Để tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số thì ta tính giới hạn của hàm số tại 2 đầu vô cực. Dựa vào định nghĩa ta kết luận tiệm cận ngang. ***(Xem sơ đồ ở trang sau)***

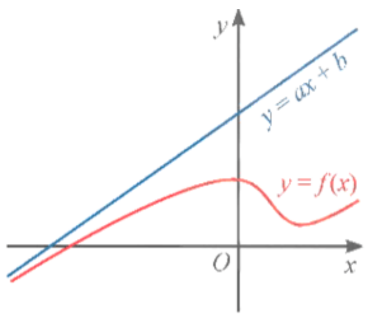
3. Tiệm cận xiên

Định nghĩa

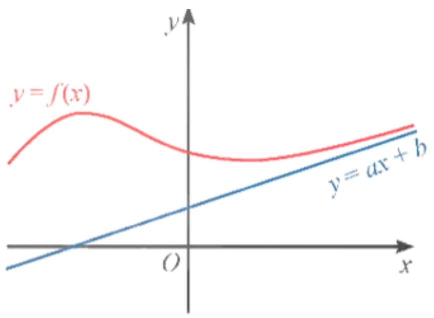
Đường thẳng $y=ax+b, a\neq 0$, được gọi là ***đường tiệm cận xiên*** (hay tiệm cận xiên) của đồ thị hàm số $y=f(x)$ nếu

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$

hoặc $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$



a) $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$



b) $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

Cách tìm tiệm cận xiên

Trường hợp tổng quát:

Nếu $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ và $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ hoặc $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a$ và $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$ thì đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên

Trường hợp hàm số $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, với bậc của $P(x)$ lớn hơn bậc của $Q(x)$ một đơn vị

Cách 1. Tính hệ số a, b của tiệm cận xiên $y=ax+b$ theo công thức:

- $a=\dfrac{a_T}{a_M}$ là thương của 2 hệ số của lũy thừa bậc cao nhất của tử và mẫu;
- $b=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]$ hay $b=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]$

Cách 2. Chia đa thức

Nếu $y=f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}=ax+b+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, $a\neq 0$ thì đường thẳng $y=ax+b$ là tiệm cận xiên

SƠ ĐỒ TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN

ĐƯỜNG TIỆM CẬN *của đồ thị hàm số* $y = f(x)$

- **Tiệm cận ngang**
  - Tính giới hạn tại vô cực
    - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$. → TCN: $y = y_0$
    - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ hoặc không tồn tại $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ → Không có TCN
- **Tiệm cận đứng**
  - Tính giới hạn tại x_0 (nghiệm Mẫu)
    - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$. → TCĐ: $x = x_0$
    - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = y_0$ hoặc không tồn tại $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ → Không có TCĐ $x = x_0$
- **Tiệm cận xiên**
  - $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$. → TCX: $y = mx + n$
- ***Hàm nhất biến*** $y = f(x) = \dfrac{ax + b}{cx + d}$ $(c \neq 0, ad - bc \neq 0)$
  - TCN: $y = \frac{a}{c}$
  - TCĐ: $x = \frac{-d}{c}$ (x bằng nghiệm của mẫu)
- ***Hàm bậc hai trên bậc nhất*** $y = f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ *(Với $a, d \neq 0$ và nghiệm mẫu khác nghiệm tử)*
  - TCĐ: $x = \frac{-e}{d}$ (x bằng nghiệm của mẫu)
  - TCX: $y = mx + n$
    - $m = \frac{a}{d}$
    - $n = \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (mx)]$
- ***Hàm hữu tỷ:*** $y = f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ *(Đa thức chia Đa thức)*
  - Bậc Tử > Bậc Mẫu → Không có TCN
  - Bậc Tử = Bậc Mẫu → TCN: $y = \frac{a_T}{a_M}$ (thương của 2 hệ số của lũy thừa bậc cao nhất ở tử và mẫu)
  - Bậc Tử < Bậc Mẫu → TCN: $y = 0$
  - TH1: Mẫu có nghiệm x_0 và Tử không có nghiệm x_0; TH2: Tử và Mẫu có nghiệm trùng x_0, nhưng Bậc nghiệm bội của Mẫu > Bậc nghiệm bội x_0 của Tử → TCĐ: $x = x_0$
  - Không có TCĐ
    - TH1: Mẫu vô nghiệm;
    - TH2: Mọi nghiệm của Mẫu đều trùng nghiệm Tử và Bậc nghiệm bội của Mẫu $\leq$ Bậc nghiệm bội của Tử

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG, ĐỨNG.

Ví dụ 19: Cho hàm số $f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$+$	
y	0	↗	2	↘	$-\infty$ || 3	↗	5

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số đã cho là

A. 4. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta có :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ và $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=5$ nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là 2 đường thẳng $y=0,\ y=5$.

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=-\infty$ nên tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là đường thẳng $x=1$. Chọn **C**

Ví dụ 20: Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{3x+1}{x-1}$ là

A. $y=\dfrac{1}{3}$. **B.** $y=3$. **C.** $y=-1$. **D.** $y=1$.

Lời giải

Ta có : $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$ và $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x+1}{x-1}=3$ nên $y=3$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Chọn **B**

Hay ta có thể dùng công thức: Phương trình tiệm cận ngang là $y=\dfrac{a}{c}=\dfrac{3}{1}=3$

Ví dụ 21: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+2}{x-1}$ là

A. $x=2$. **B.** $x=-2$. **C.** $x=1$. **D.** $x=-1$.

Lời giải

Tập xác định $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

Ta có $\lim\limits_{x\to1^-} y=-\infty;\lim\limits_{x\to1^+} y=+\infty$, suy ra đồ thị có tiệm cận đứng là $x=1$. Chọn **C**

Hay ta có thể dùng công thức: Phương trình tiệm cận đứng là $x=-\dfrac{d}{c}=-\dfrac{-1}{1}=1$

Ví dụ 22: Tổng số tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tiệm cận ngang:

Ta có: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} y=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=5$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận ngang $y=5$.

Tiệm cận đứng:

Cho $x^2-1=0\Leftrightarrow x=\pm1$

Ta có: $\lim\limits_{x\to 1} y=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=3$ nên $x=1$ không là tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} y=\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{5x^2-4x-1}{x^2-1}=-\infty$ nên đồ thị hàm số có một tiệm cận đứng $x=-1$.

Tổng cộng đồ thị hàm số có 2 tiệm cận. Chọn **C**

Ví dụ 23: Đồ thị hàm số $y=\dfrac{5x+1-\sqrt{x+1}}{x^2-2x}$ có tất cả bao nhiêu đường tiệm cận đứng và ngang?

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D=[-1;0)\cup(2;+\infty)$.

Ta có: $\lim\limits_{x\to 0^-} y=-\dfrac{9}{4}$; $\lim\limits_{x\to 2^+} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} y=0$.

Vậy đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận ngang $y=0$. Chọn **C**

Dạng toán ☞ TÌM ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN.

Ví dụ 24: Tìm tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$.

Lời giải

Cách 1.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

Ta có: $a=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{(x-2).x}=1$; (Hay hệ số $a=\dfrac{a_T}{a_M}=\dfrac{1}{1}=1$)

$$b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-ax]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x+1}{x-2}=-1.$$

Ta cũng có: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]=-1$.

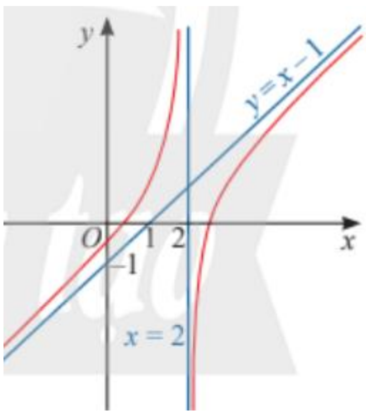
Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-1$.

Cách 2. Chia đa thức

Ta có: $y=f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}=x-1+\dfrac{-1}{x-2}$

Do đó, đồ thị hàm số có tiệm cận xiên là đường thẳng $y=x-1$.

Đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-3x+1}{x-2}$ cùng với tiệm cận đứng $x=2$ và tiệm cận xiên $y=x-1$ của nó được thể hiện trong hình vẽ.



Chú ý

Cách chia đa thức

Nếu lấy P chia cho Q ta được phần nguyên N và phần dư R thì $\dfrac{P}{Q}=N+\dfrac{R}{Q}$

Bài 4. ĐỒ THỊ HÀM SỐ

1. Sơ đồ khảo sát và vẽ đồ thị hàm số:

Bước 1. Tìm tập xác định

Bước 2. Sự biến thiên:

+ Tìm đạo hàm. Tìm nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm.

+ Tính giới hạn của hàm số tại các "đầu ngoặc tròn" của TXĐ. Suy ra các đường tiệm cận (nếu có)

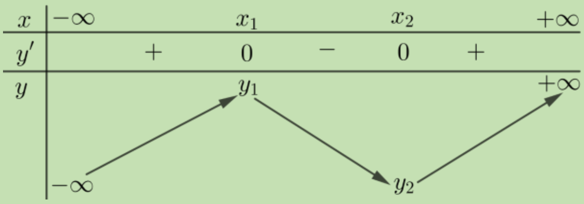
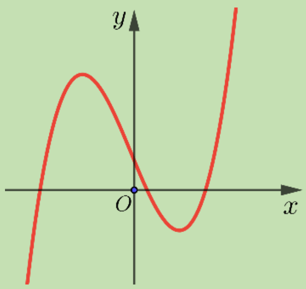
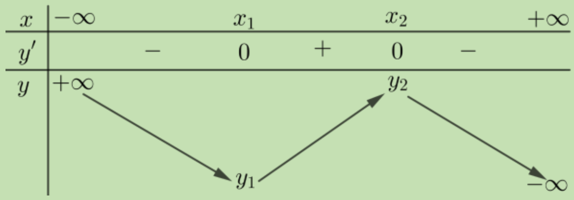
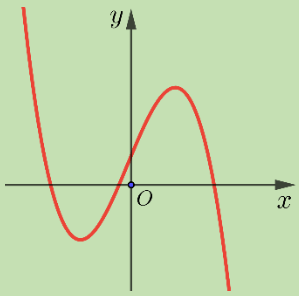
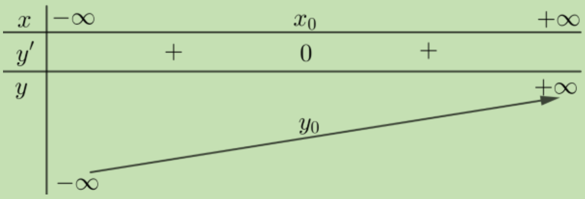
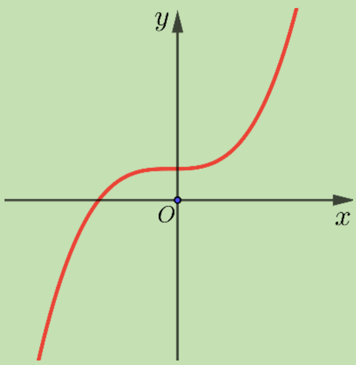
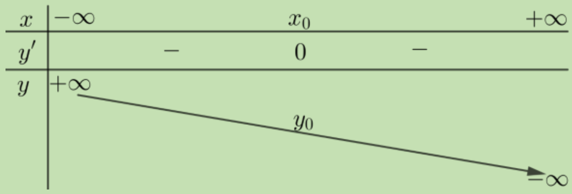
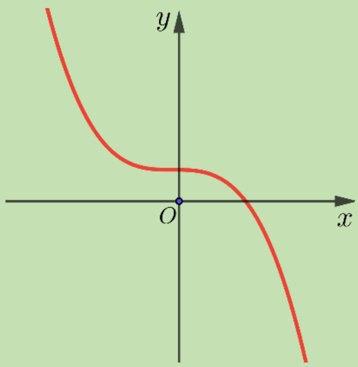
+ Lập bảng biến thiên:

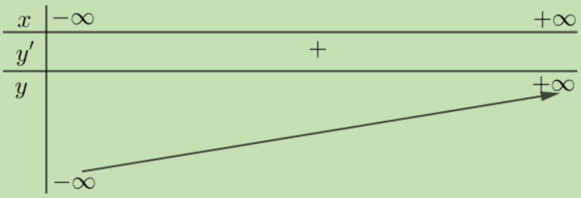
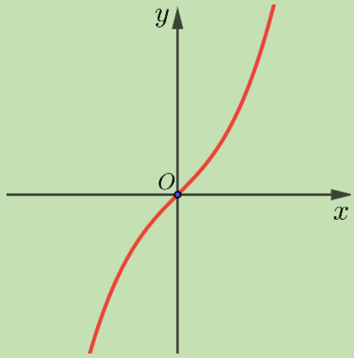
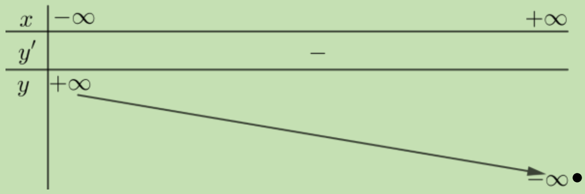
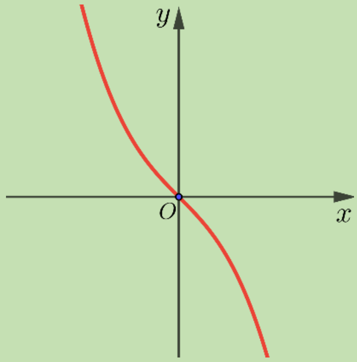
x	Điền TXĐ; nghiệm của đạo hàm và điểm không xác định của đạo hàm (theo thứ tự tăng dần).
y'	Xét dấu đạo hàm
y	Vẽ chiều biến thiên (mũi tên chéo lên khi $y'>0$, chéo xuống khi $y'<0$); Điền Giới hạn hàm số, Giá trị hàm số tại các điểm x tương ứng vào đầu, cuối các mũi tên

Bước 3. Vẽ đồ thị: Lập bảng giá trị (hay điểm đặc biệt), vẽ đồ thị và nhận xét về đồ thị

2. Các dạng đồ thị hàm số thường gặp

a) *Hàm số bậc 3*: $y=ax^3+bx^2+cx+d \quad (a\neq 0)$

	$a>0$	$a<0$
Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 $(x_1<x_2)$	• Bảng biến thiên  • Đồ thị  	• Bảng biến thiên  • Đồ thị 
Phương trình $y'=0$ có nghiệm kép x_0	• Bảng biến thiên  • Đồ thị  	• Bảng biến thiên  • Đồ thị 

Phương trình $y'=0$ vô nghiệm.	• Bảng biến thiên  • Đồ thị  	• Bảng biến thiên  • Đồ thị 

Nhận xét đồ thị:

(1) ***Hai đầu đồ thị:*** ĐTHS bậc 3 (bậc lẻ nói chung) luôn có một đầu đi lên và một đầu đi xuống.

Đầu bên phải: Đi lên khi $a>0$; Đi xuống khi $a<0$.

(2) ***Giao điểm với trục Oy:*** Nằm phía trên trục hoành khi $d>0$; Nằm phía dưới trục hoành khi $d<0$

Qua O $\Leftrightarrow d=0$

(3) ***Điểm cực trị:***

• Hai điểm cực trị nằm

Khác phía so với trục Oy khi $a.c<0$;

Cùng phía bên phải Oy khi $a,\ c$ trái dấu với b; ***Cùng phía bên trái*** Oy khi $a,\ b,\ c$ cùng dấu.

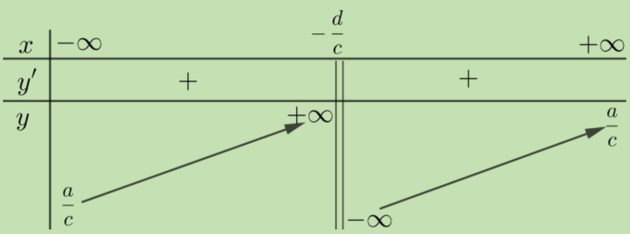
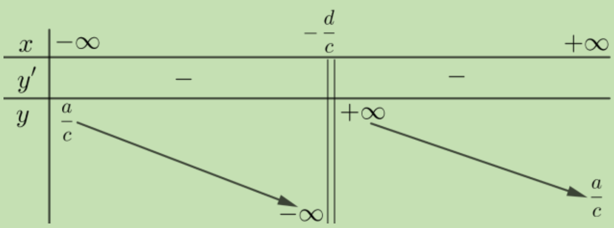
• Có điểm cực trị thuộc Oy khi $c=0$

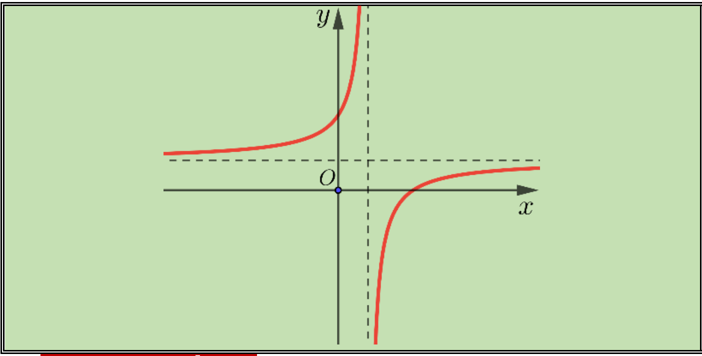
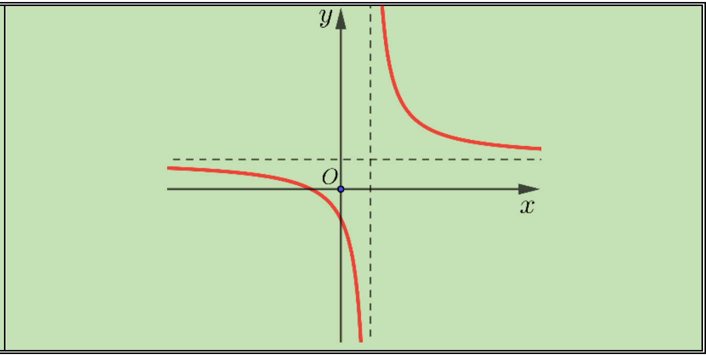
(4) ***Tâm đối xứng:*** điểm $I\left(x_0;y_0\right)$, với $x_0=\dfrac{-b}{3a}$ (là nghiệm PT $y''=0$) và $y_0=f\left(x_0\right)$

Tâm đối xứng cũng là trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm cực trị.

Tâm đối xứng nằm ***bên phải*** trục Oy khi $a,\ b$ trái dấu; ***bên trái*** trục Oy khi $a,\ b$ cùng dấu.

b) ***Hàm số nhất biến:*** $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\left(ad-bc\neq 0\right)$

$y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}>0$	$y'=\dfrac{ad-bc}{\left(cx+d\right)^2}<0$
• Bảng biến thiên  • Đồ thị	• Bảng biến thiên  • Đồ thị

Nhận xét đồ thị:

(1)*Tiệm cận ngang:* $y = \dfrac{a}{c}$;

Tiệm cận đứng: $x = \dfrac{-d}{c}$ (nghiệm của mẫu).

(2)*Giao điểm với Oy:* $x = 0 \Rightarrow y = \dfrac{b}{d}$;

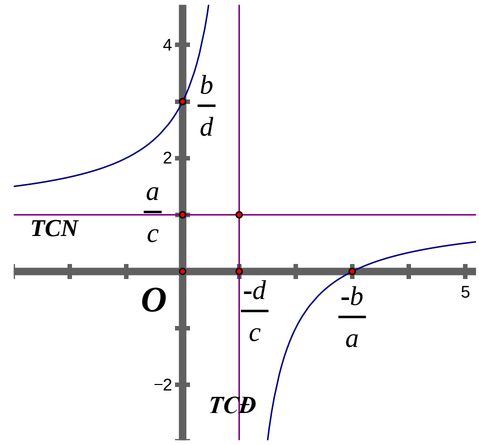
Giao điểm với Ox: $y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a}$ (nghiệm của tử).

Qua O $\Leftrightarrow b = 0$

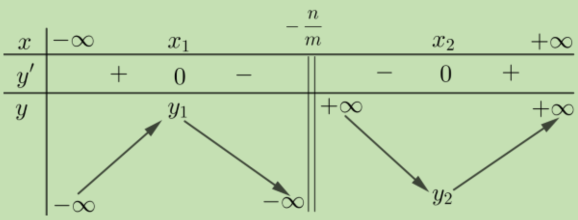
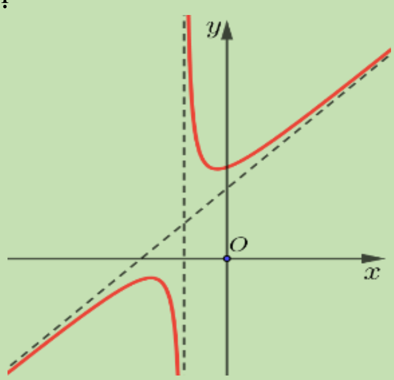
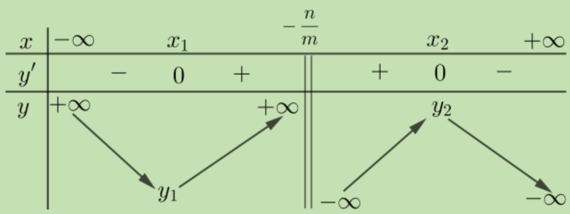
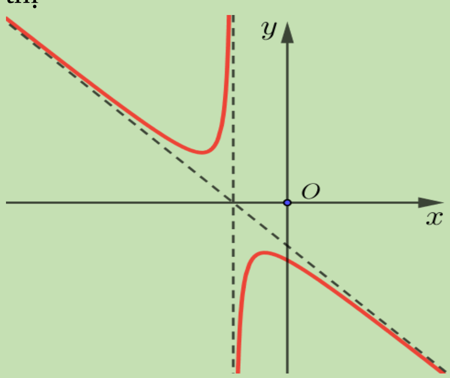
(3)*Hàm số đồng biến* khi $ad - bc > 0$;

Hàm số nghịch biến khi $ad - bc < 0$

(4)*Tâm đối xứng* là điểm $I\left(\dfrac{-d}{c};\dfrac{a}{c}\right)$ (là giao điểm 2 đường tiệm cận).



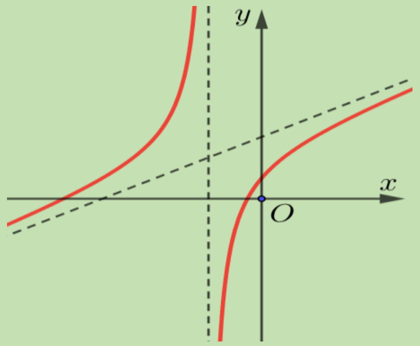
c) *Hàm số hữu tỷ bậc hai chia bậc một:* $y = \dfrac{ax^2 + bx + c}{dx + e}$ $(a \neq 0)$

	a, d **cùng dấu**	*a, d* **trái dấu**
Phương trình $y' = 0$ ***có hai nghiệm phân biệt*** x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$	• Bảng biến thiên  • Đồ thị 	• Bảng biến thiên  • Đồ thị 
Phương trình $y' = 0$	• Bảng biến thiên	• Bảng biến thiên

vô nghiệm.

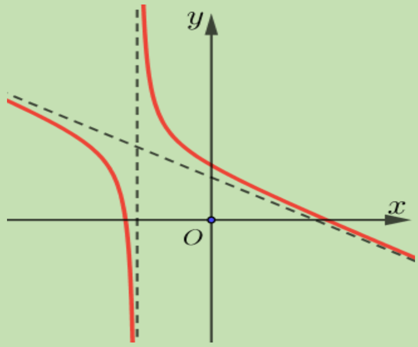
x	$-\infty$		$-\frac{n}{m}$		$+\infty$
y'		+	‖	+	
y	$-\infty$ ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

• Đồ thị



x	$-\infty$		$-\frac{n}{m}$		$+\infty$
y'		−	‖	−	
y	$+\infty$ ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	$-\infty$

• Đồ thị



Nhận xét đồ thị:

(1)*Tiệm cận đứng:* $x=-\dfrac{e}{d}$ (Nghiệm của mẫu)

(2)*Tiệm cận xiên:* Đi lên nếu $a,\ d$ cùng dấu và đi xuống nếu $a,\ d$ trái dấu.

(3) *Tâm đối xứng* là giao điểm của 2 tiệm cận đứng và tiêm cận xiên .

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ.

Ví dụ 25: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=f(x)=-x^3+3x^2-4$.

Lời giải

» Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

» Sự biến thiên:

Ta có $y'=-3x^2+6x$. Suy ra $y'=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Giới hạn: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-x^3+3x^2-4\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-x^3+3x^2-4\right)=+\infty$.

Bảng biến thiên:

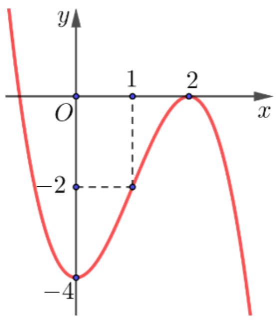
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-4	↗	0	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$; nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$ và $(2;+\infty)$.

Hàm số đạt giá trị cực tiểu $y_{CT}=-4$ tại $x_{CT}=0$

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CĐ}=0$ tại $x_{CĐ}=2$

» Đồ thị:



Bảng giá trị:

x	-1	0	1	2	3

$f(x)$	0	-4	-2	0	-4

Đồ thị có tâm đối xứng là $I(1;-2)$.

Ví dụ 26: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

Lời giải

» Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

» Sự biến thiên:

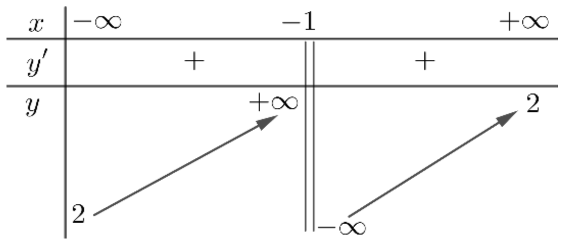
Ta có $y'=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0\,\forall x\in D$.

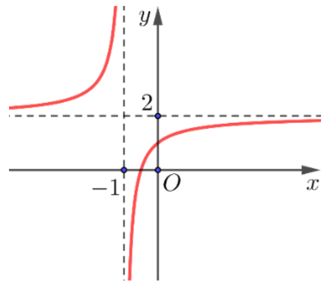
Giới hạn, tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)=2$; $\lim\limits_{x\to-\infty} y=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)=2$ nên tiệm cận ngang là đường thẳng $x=2$

$\lim\limits_{x\to-1^+} y=\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to-1^-} y=\lim\limits_{x\to-1^-}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right)=+\infty$ nên tiệm cận đứng là đường thẳng $y=1$

Bảng biến thiên:





Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1);(-1;+\infty)$ và không có cực trị

» Đồ thị đi qua điểm $(0;1)$ và có tâm đối xứng là $I(-1;2)$.

Ví dụ 27: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}$ (H).

Lời giải

» Tập xác định: $D=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

» Sự biến thiên:

Ta có: $y'=\dfrac{2x^2+8x+6}{(x+2)^2}$.

$y'=0\Leftrightarrow 2x^2+8x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=-3\end{array}\right.$

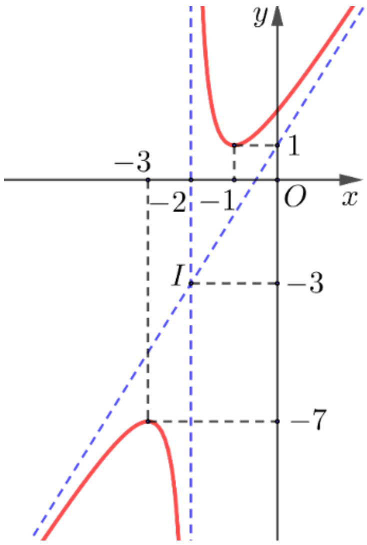
Giới hạn và tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to-2^+} y=+\infty$ và $\lim\limits_{x\to-2^-} y=-\infty$ nên $x=-2$ là đường tiệm cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-\dfrac{a}{d}x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\left(\dfrac{2x^2+5x+4}{x+2}\right)-2x\right]=1$ nên $y=2x+1$ là đường tiệm cận xiên.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-7	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;-3)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;-2)$ và $(-2;-1)$.

Hàm số đạt giá trị cực tiểu $y_{CT}=-1$ tại $x_{CT}=1$

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CĐ}=-3$ tại $x_{CĐ}=-7$

» Đồ thị:

Giao điểm với trục tung $A(0;2)$. Giao điểm với trục hoành: không có.

Tâm đối xứng là điểm $I(-2;-3)$

Nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm các trục đối xứng.

Ví dụ 28: Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$.

Lời giải

» Tập xác định của hàm số: $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

» Sự biến thiên:

Ta có: $y'=1+\dfrac{2}{(x+1)^2}>0$ với mọi $x\neq -1$.

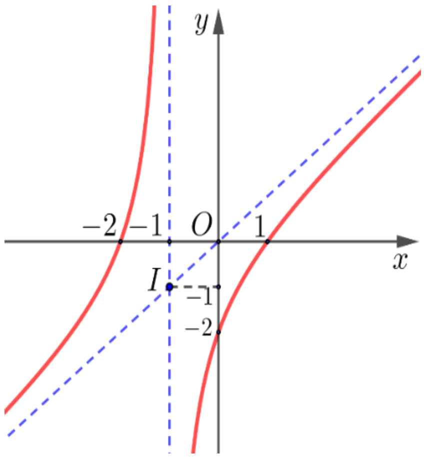
Giới hạn và đường tiệm cận:

$\lim\limits_{x\to -1^-} y=+\infty$; $\lim\limits_{x\to -1^+} y=-\infty$ nên $x=-1$ là đường tiệm đường cận đứng.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[y-\dfrac{a}{d}x\right]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{x^2+x-2}{x+1}-x\right]=0$ nên $y=x$ là đường tiệm cận xiên

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
y'		$+$	||	$+$	
y	$-\infty$	↗	$+\infty$ || $-\infty$	↗	$+\infty$



Hàm số đồng biến trên từng khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

Hàm số không có cực trị.

» Đồ thị:

Giao điểm với trục tung $(0;-2)$.

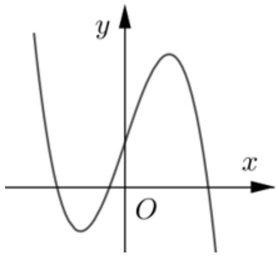
Giao điểm với trục hoành là các điểm $(-2;0)$ và $(1;0)$.

Nhận giao điểm $I(-1;-1)$ của hai đường tiệm cận làm tâm đối xứng

Nhận hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường tiệm cận làm các trục đối xứng.

Dạng toán* ☞ *XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC HÀM SỐ KHI BIẾT ĐỒ THỊ HAY BẢNG BIẾN THIÊN.

Ví dụ 29: Đồ thị của hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình vẽ bên?



A. $y=-x^4+2x^2+1$. **B.** $y=-x^3+3x+1$.

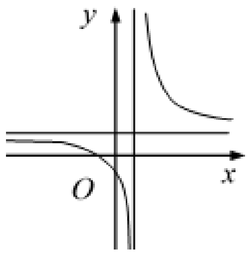
C. $y=x^3-3x+1$. **D.** $y=-x^3-2x^2-1$.

Lời giải

Đồ thị có đầu bên trái đi lên, đầu bên phải đi xuống nên hàm số bậc lẻ và $a<0$, do đó loại câu A, C

Giao điểm của đồ thị và trục tung nằm phái trên trục hoành nên $d>0$. Do đó chọn **B**

Ví dụ 30: Đồ thị sau là đồ thị của hàm số nào sau?



A. $y=\dfrac{2x-3}{2x-2}$. **B.** $y=\dfrac{-x}{x-1}$.

C. $y=\dfrac{x-1}{x+1}$. **D.** $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

Lời giải

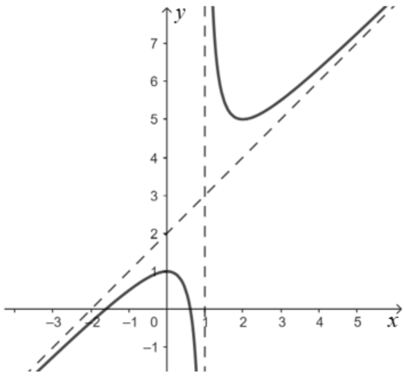
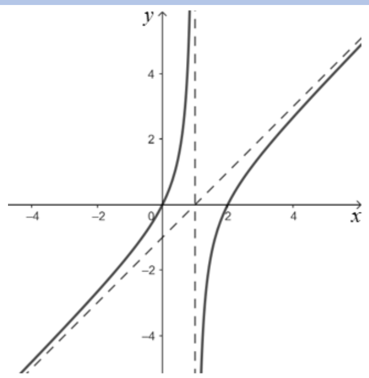
Tiệm cận ngang $y=\dfrac{a}{c}$ nằm phía trên trục hoành nên $\dfrac{a}{c}>0$, do đó loại câu B.

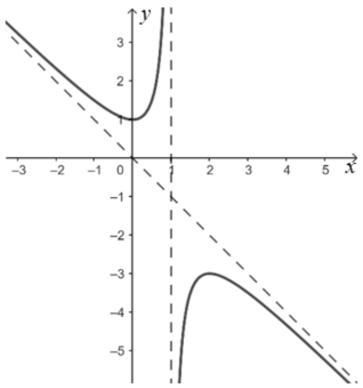
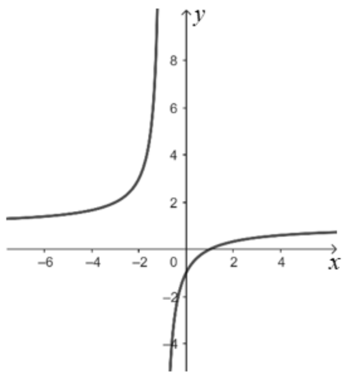
Tiệm cận đứng $x=\dfrac{-d}{c}$ nằm bên phải trục tung nên $\dfrac{-d}{c}>0$ (nghiệm của mẫu là số dương), do đó loại câu C.

Giao điểm của đồ thị và trục tung nằm phía dưới trục hoành nên tung độ giao điểm $y=\dfrac{b}{d}<0$.

Do đó chọn câu **D**.

Ví dụ 31: Đường cong nào dưới đây là đồ thị của hàm số $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

A. . **B.** .

C. . **D.** .

Lời giải

Tập xác đinh: $D=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Sự biến thiên:

Ta có: $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$, $\qquad y' = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Đường tiệm cận:

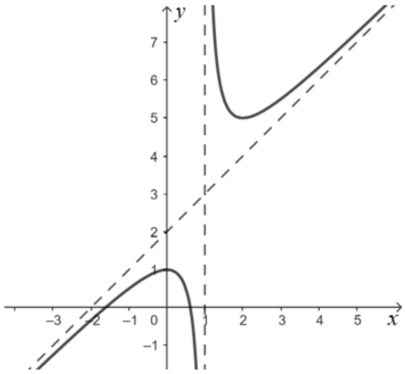
$\lim\limits_{x \to 1^-} y = -\infty,\ \lim\limits_{x \to 1^+} y = +\infty$, suy ra tiệm cận đứng là đường thẳng $x = 1$

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1,\ \lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - x] = 2$, suy ra tiệm cận xiên là đường thẳng $y = x + 2$

Bằng biến thiên:

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$	||	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	5	↗	$+\infty$

Đồ thị:



Vậy chọn **A**

Chú ý. Có thể giải nhanh như sau:

Đồ thị ở Câu D là đồ thị của hàm nhất biến (bậc nhất chia bậc nhất): không đúng dạng đồ thị nên loại.

Do đạo hàm $y' = \dfrac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}$ có 2 nghiệm và hệ số $a,\ d$ cùng dấu nên đồ thị có dạng câu **A**

BỔ SUNG KIẾN THỨC: SỰ TƯƠNG GIAO GIỮA HAI ĐỒ THỊ

(1) Số nghiệm của phương trình $f(x) = g(x)$ là số giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

(2) Hoành độ giao điểm của 2 đồ thị hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$.

BÀI TOÁN 1. CHO 2 HÀM SỐ. XÁC ĐỊNH GIAO ĐIỂM CỦA 2 ĐỒ THỊ HÀM SỐ

(Dấu hiệu nhận biết: Trong đề có từ "Cắt", "tiếp xúc", "giao điểm" hay "điểm chung"…)

Tìm giao điểm: của đường cong $(C): y = f(x)$ ***và đường thẳng*** $(d): y = g(x)$

Bước 1. Lập PT hoành độ giao điểm của (C) và (d) : $f(x) = g(x)$ (*)

Bước 2. Giải PT(*) tìm x (là hoành độ giao điểm)→Thay x vào $y = f(x)$ hay $y = g(x)$ →Tính y (là tung độ giao điểm).

Ví dụ 32: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2$ và đồ thị hàm số $y = 3x^2 + 3x$ là

A. 3. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Chọn A

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị đã cho là:

$$x^3 + 3x^2 = 3x^2 + 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x\left(x^2 - 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \sqrt{3} \\ x = -\sqrt{3} \end{array}\right..$$

Hai đồ thị đã cho cắt nhau tại 3 điểm.

Ví dụ 33: Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành là

A. 0. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị và trục hoành là: $-x^3+7x=0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2-7\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\pm\sqrt{7} \end{array}\right.$.

Số giao điểm của đồ thị hàm số $y=-x^3+7x$ với trục hoành bằng 3.

Bài toán ☞ DÙNG ĐỒ THỊ HOẶC BẢNG BIẾN THIÊN ĐỂ XÁC ĐỊNH NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH

Cho hàm số $y=f(x)$ có bảng biến thiên hoặc đồ thị → Tìm nghiệm (hay số nghiệm) phương trình $F(x)=0$ (có chứa $f(x)$)

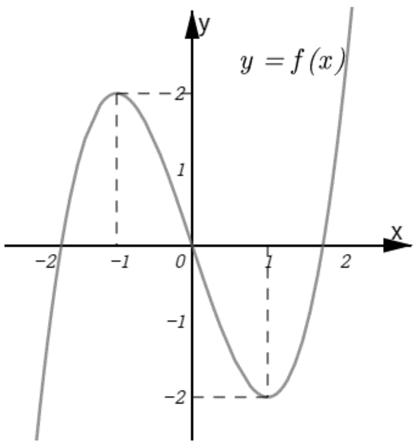
Bước 1. Biến đổi: $F(x)=0(1) \Leftrightarrow f(x)=b$ (2)

(PT(2) là PT hoành độ giao điểm của $(C): y=f(x)$ và $(d): y=b$, với (d) là đường thẳng cùng phương trục Ox và cắt trọc Oy tại điểm có tung độ $y=b$)

Bước 2. Vẽ thêm đường thẳng $(d): y=b$ lên bảng biến thiên hoặc đồ thị.

Bước 3. Dựa vào bảng biến thiên hoặc đồ thị: Kết luận (Số nghiệm PT $F(x)=0$ bằng Số điểm chung của $(C): y=f(x)$ $(d): y=b$

Ví dụ 34: Cho hàm số bậc ba $y=f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên. Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ là

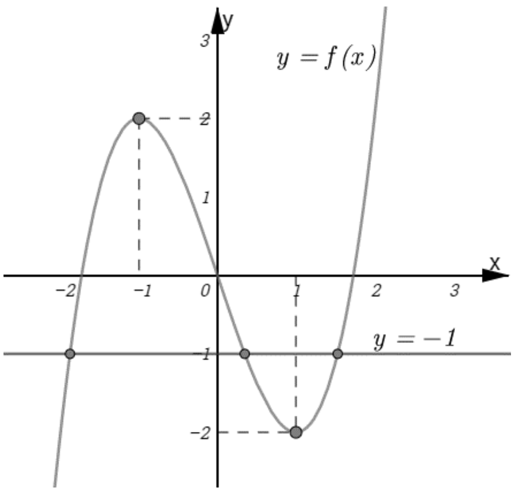


A. 3. **B.** 1.

C. 0 **D.** 2

Lời giải

Số nghiệm thực của phương trình $f(x)=-1$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y=f(x)$ và đường thẳng $y=-1$.



Từ hình vẽ suy ra phương trình $f(x)=-1$ có 3 nghiệm.

Ví dụ 35: Cho hàm số $f\left(x\right)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

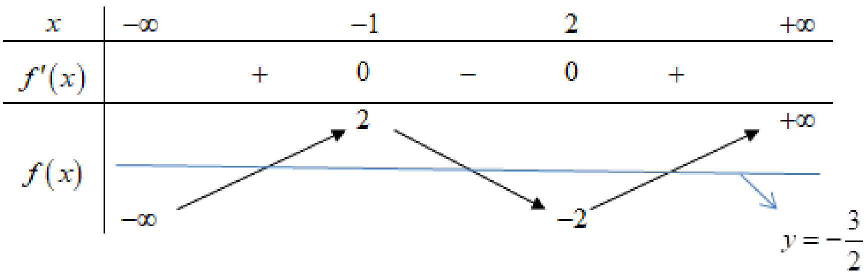
Số nghiệm thực của phương trình $2f\left(x\right)+3=0$ là

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $2f\left(x\right)+3=0 \Leftrightarrow f\left(x\right)=-\dfrac{3}{2}$



Nhìn bảng biến thiên ta thấy phương trình này có 3 nghiệm.

Bài 1. NGUYÊN HÀM

1. Khái niệm nguyên hàm

Định nghĩa

Cho hàm số $f(x)$ xác định trên K. Hàm số $F(x)$ được gọi là nguyên hàm của hàm số $f(x)$ nếu $F'(x)=f(x)$, với mọi $x\in K$.

Định lý

Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K. Khi đó:

- Với mỗi hằng số C, hàm số $F(x)+C$ cũng là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K.
- Nếu $G(x)$ là một nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K thì tồn tại hằng số C sao cho $G(x)=F(x)+C$ với mọi $x\in K$

Như vậy, mọi nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K đều có dạng $F(x)+C$, với C là hằng số. Ta gọi $F(x)+C, C\in\mathbb{R}$ là họ tất cả các nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên K, kí hiệu $\int f(x)\mathrm{d}x$ và viết:

$$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$$

Như vậy

$F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$

$\Leftrightarrow F'(x)=f(x)$

$\Leftrightarrow \int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$ (họ nguyên hàm)

Chú ý

(1) Biểu thức $f(x)dx$ được gọi là vi phân của nguyên hàm $F(x)$ của $f(x)$, kí hiệu là $\mathrm{d}F(x)$

Vậy, $\mathrm{d}F(x)=F'\mathrm{d}x=f(x)\mathrm{d}x$

(2) Mọi hàm số $f(x)$ liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K.

(3) Khi tìm nguyên hàm của một hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là tìm nguyên hàm của hàm số đó trên tập xác định của nó.

(4) $\int f'(x)\mathrm{d}x=f(x)+C$

2. Nguyên hàm của một hàm số sơ cấp

Nguyên hàm của hàm số lũy thừa	**Nguyên hàm của hàm số lượng giác**
(1) $\int 0\mathrm{d}x=C$	(5) $\int \cos x\mathrm{d}x=\sin x+C$
(2) $\int 1\mathrm{d}x=x+C$	(6) $\int \sin x\mathrm{d}x=-\cos x+C$
(3) $\int x^\alpha\mathrm{d}x=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$	(7) $\int \dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\tan x+C$
Nguyên hàm của hàm số $y=\dfrac{1}{x}$	(8) $\int \dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=-\cot x+C$
(4) $\int \dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln\lvert x\rvert+C$	**Nguyên hàm của hàm số mũ**
	(9) $\int e^x\mathrm{d}x=e^x+C$
	(10) $\int a^x\mathrm{d}x=\dfrac{a^x}{\ln a}+C\ (0<a\neq1)$

Công thức nguyên hàm bổ sung

(11) $\int k\mathrm{d}x = kx + C$ (12) $\int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C$	(13) $\int \sqrt{x}\mathrm{d}x = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$ (14) $\int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C$	(15) $\int (ax+b)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{a}.\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + C$ $(a \neq 0,\ n \neq -1)$ (16) $\int f[u(x)].u'(x)\mathrm{d}x = F[u(x)] + C$

3. Các tính chất của nguyên hàm

(1) $\int kf(x)\mathrm{d}x = k\int f(x)\mathrm{d}x$, với k là hằng số khác 0

(2) $\int [f(x)+g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x + \int g(x)\mathrm{d}x$

(3) $\int [f(x)-g(x)]\mathrm{d}x = \int f(x)\mathrm{d}x - \int g(x)\mathrm{d}x$

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng toán ☞ TÌM HỌ NGUYÊN HÀM

Ví dụ 1: Tìm họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = \cos x + 6x$

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (\cos x + 6x)\mathrm{d}x = \int \cos x\mathrm{d}x + 6\int x\mathrm{d}x = \sin x + 3x^2 + C$.

Ví dụ 2: Tìm họ nguyên hoàm của hàm số $f(x) = \frac{x^4 + 2x}{x^2}$.

Lời giải

Ta có: $\int f(x)\mathrm{d}x = \int \frac{x^4 - 2x}{x^2}\mathrm{d}x = \int \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)\mathrm{d}x = \int x^2\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - 2\ln|x| + C$.

Dạng toán ☞ TÌM NGUYÊN HÀM CÓ ĐIỀU KIỆN

Ví dụ 3: Tìm nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x$ thoả mãn $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$.

Lời giải

Ta có $\int f(x)\mathrm{d}x = \int (\sin x + \cos x)\mathrm{d}x = -\cos x + \sin x + C$

Mà $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \Leftrightarrow -\cos\frac{\pi}{2} + \sin\frac{\pi}{2} + C = 2 \Leftrightarrow 1 + C = 2 \Leftrightarrow C = 1$

Vậy $F(x) = -\cos x + \sin x + 1$.

Ví dụ 4: Cho $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x) = e^x + 2x$ thỏa mãn $F(0) = \frac{3}{2}$. Tính $F(1)$

Lời giải

Ta có $F(x) = \int (e^x + 2x)\mathrm{d}x = e^x + x^2 + C$

Mà $F(0) = 1 + C = \frac{3}{2} \Rightarrow C = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = e^x + x^2 + \frac{1}{2}$.

Vậy $F(1) = e^1 + 1^2 + \frac{1}{2} = e + \frac{3}{2}$

Bài 2. TÍCH PHÂN

1. Diện tích hình thang cong

Hình thang cong

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục và *không âm* trên đoạn $[a;b]$.

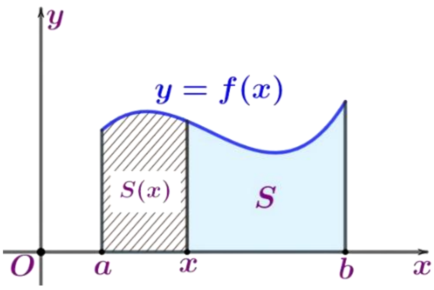
Hình phẳng giới hạn bởi:

» đồ thị hàm số $y=f(x)$,

» trục hoành,

» hai đường thẳng $x=a, x=b \ (a<b)$

được gọi là hình thang cong.



Diện tích hình thang cong

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi:

Đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b \ (a<b)$

được tính bởi công thức: $S=F(b)-F(a)$

✓ Trong đó $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

2. Khái niệm tích phân

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$. Nếu $F(x)$ là một nguyên hàm của $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$ thì hiệu số $F(b)-F(a)$ gọi là tích phân từ a đến b của hàm số $f(x)$, kí hiệu $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

✓ Viết $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$

✓ Gọi $\int_a^b$ là dấu tích phân; a là cận dưới; b là cận trên,

✓ $f(x)\mathrm{d}x$ là biểu thức dưới dấu tích phân,

✓ $f(x)$ là hàm số dưới dấu tích phân

Chú ý

(1) Trường hợp $a=b$: $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$;Trường hợp $a>b$: $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$

(2)Tích phân không phụ thuộc vào biến số x hay t, nghĩa là $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$.

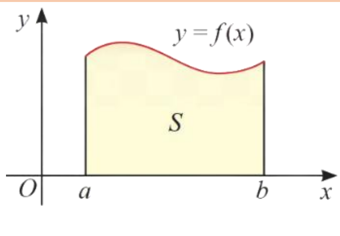
(3)Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ và $f'(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$ thì

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b)-f(a)$$

(4)*Ý nghĩa hình học của tích phân*

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích S của hình thang cong giới hạn bởi: đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoànhvà hai đường thẳng $x=a, x=b$, được tính bởi công thức:

$$S=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$



(5)Tốc độ $v(t)\ge 0$ tại mọi thời điểm $t\in[a;b]$ thì quãng đường di chuyển trong khoảng thời gian từ a đến b được tính theo công thức:

$$s=s(b)-s(a)=\int_a^b v(t)\,\mathrm{d}t.$$

(6) Cho hàm số $f(x)$liên tục trên đoạn $[a;b]$. Khi đó $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ được gọi là giá trị trung bình của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a;b]$.

3. Tính chất của tích phân

Cho hai hàm số $y=f(x), y=g(x)$ liên tục trên đoạn $[a;b]$, k là số thực. Khi đó, ta có các tính chất:

Tính chất 1: $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Tính chất 2: $\int_a^b [f(x)+g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$; $\int_a^b [f(x)-g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$

Tính chất 3: $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $c\in(a;b)$

🕮 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng toán ☞ SỬ DỤNG CÁC KIẾN THỨC CƠ BẢN

☑ Áp dụng định nghĩa, tính chất và bảng công thức nguyên hàm cơ bản.

1	$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x=0$ (Tích phân có hai cận giống nhau thì bằng 0).
2	$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ (Tích phân đảo cận $\to$ thêm dấu trừ).
3	$\int_a^b k.f(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ với $k\in\mathbb{R}$.
4	$\int_a^b [f(x)\pm g(x)]\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\pm\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
5	Trong đoạn $[a;b]$, tồn tại $c\in[a;b]$ thì $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

☑ Ý nghĩa hình học của tích phân

Nếu hàm số $y=f(x)$ liên tục và không âm trên đoạn $[a;b]$ thì diện tích của hình thang cong giới hạn bởi: đồ thị hàm số $y=f(x)$, trục hoành, hai đường thẳng $x=a, x=b$ là $S=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Ví dụ 5: Cho $\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x=5$ và $\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x=2$. Tính $\int_0^3 [2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x$

Lời giải

Ta có $\int_0^3 [2f(x)-3g(x)]\,\mathrm{d}x=2\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x-3\int_0^3 g(x)\,\mathrm{d}x=2.5-3.2=4$.

Ví dụ 6: Cho $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = 1$, $\int_{-2}^{4} f(t)\mathrm{d}t = -4$. Tính $\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y$

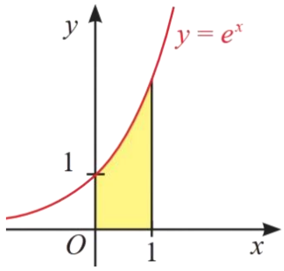
Lời giải

Ta có: $\int_{-2}^{4} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x$, $\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

Khi đó: $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x$.

$\Rightarrow \int_{2}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-2}^{4} f(x)\mathrm{d}x - \int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x = -4 - 1 = -5$. Vậy $\int_{2}^{4} f(y)\mathrm{d}y = -5$.

Ví dụ 7: Tính diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = e^x$, trục hoành, trục tung và đường thẳng $x = 1$.



Lời giải

Hàm số $y = f(x) = e^x$ không âm trên đoạn $[0;1]$ và có một nguyên hàm $F(x) = e^x$.

Diện tích hình thang cong là $S = F(1) - F(0) = e^1 - e^0 = e - 1$ (đvdt).

Dạng toán ☞ TÍCH PHÂN HÀM SỐ CHO BỞI NHIỀU CÔNG THỨC

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{khi } x \le b \\ h(x) & \text{khi } x > b \end{cases}$ liên tục trên D. Tính $J = \int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x$.

Xét $b \in [a;c]$.

Bước 1. Kiểm tra hàm số $f(x)$ có liên tục tại $x = b$?

Tức là kiểm tra $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = \lim\limits_{x \to b^+} f(x) = f(b) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to b^-} g(x) = \lim\limits_{x \to b^+} h(x) = f(b)$

Bước 2. Tách cận: $J = \int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x = \int_{a}^{b} g(x)\mathrm{d}x + \int_{b}^{c} h(x)\mathrm{d}x$.

Bước 3. Tính các tích phân thành phần, suy ra kết quả.

Ví dụ 8: Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{khi } x \ge 2 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Tính tích phân $I = \int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (x^2 - 2x + 3) = 3 \end{cases}$ và $f(2) = 3$.

Do đó hàm số đã cho liên tục tại $x = 2$.

Ta có: $I = \int_{1}^{3} f(x)\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} (x^2 - 2x + 3)\mathrm{d}x + \int_{2}^{3} (x^2 - 1)\mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right)\Big|_1^2 + \left(\frac{x^3}{3} - x\right)\Big|_2^3 = \frac{23}{3}$.

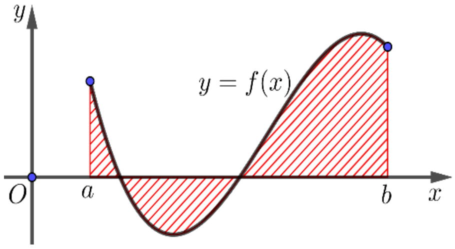
Bài 3. ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

1. Tính diện tích hình phẳng

Định lí 1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường: $y=f\left(x\right)$, trục hoành $Ox:y=0,\ x=a,\ x=b\ \left(a<b\right)$ được tính bởi công thức:

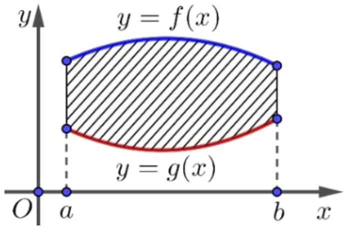
$$\boxed{S=\int_a^b\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x}\ (1)$$



Hệ quả

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường: $y=f\left(x\right),\ y=g\left(x\right)$, $x=a,\ x=b\ \left(a<b\right)$ được tính bởi công thức:

$$\boxed{S=\int_a^b\left|f\left(x\right)-g\left(x\right)\right|\mathrm{d}x}\ (2)$$



Chú ý

(1) Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x=a,\ x=b$) thì ta thực hiện như sau:

Giải phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$, tìm các nghiệm $x_1,\ x_2,...,x_n$ (gọi là các hoành độ giao điểm) → Chọn cận dưới trong công thức (1), (2) là số nhỏ nhất và cận trên là số lớn nhất trong các số a,b (nếu có), $x_1,\ x_2,...,x_n$.

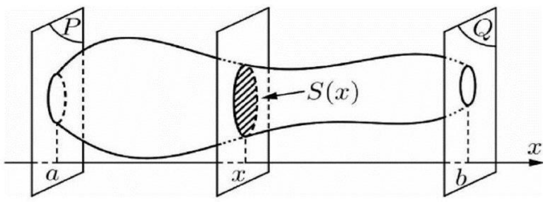
(2) Nếu phương trình $f\left(x\right)-g\left(x\right)=0$ có n nghiệm $x_1,x_2,\ldots,x_n\in\left[a;b\right]$ (giả sử $x_1<x_2<...<x_n$) thì tích phân (*) được tách thành tổng (phân đoạn tích phân) như sau:

$$\boxed{S=\left|\int_a^{x_1}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|+...+\left|\int_{x_n}^{b}\left(f(x)-g(x)\right)dx\right|}$$

2. Thể tích vật thể

Định lí 2

Cắt một vật thể $\left(K\right)$ bởi hai mặt phẳng $\left(P\right)$ và $\left(Q\right)$ vuông góc với trục Ox lần lượt tại $x=a$, $x=b$ $\left(a<b\right)$. Một mặt phẳng tùy ý vuông góc với Ox tại điểm $x\left(a\le x\le b\right)$ cắt $\left(K\right)$ theo thiết diện có diện tích là $S\left(x\right)$. Giả sử $S\left(x\right)$ liên tục trên đoạn $\left[a;b\right]$



Khi đó, thể tích V của phần vật thể $\left(K\right)$ giới hạn bởi hai mặt phẳng $\left(P\right)$ và $\left(Q\right)$ được tính bởi công thức:

$$\boxed{V=\int_a^b S\left(x\right)\mathrm{d}x}\ (3)$$

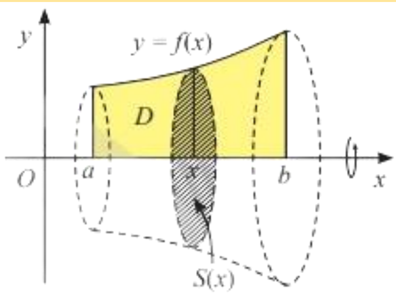
Một số bài toán ta phải xây dựng các hệ trục để áp dụng công thức ứng dụng.

3. Tính thể tích khối tròn xoay

Định lí 3

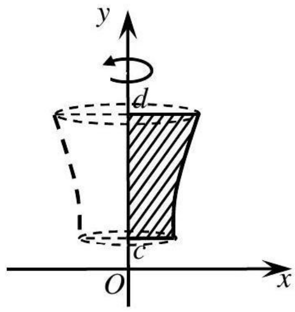
Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn $\left(D\right)$ bởi các đường: $y=f\left(x\right)$, Ox, $x=a$, $x=b$ $\left(a<b\right)$ được tính bởi công thức:

$$\boxed{V=\pi\int_a^b\left[f(x)\right]^2\mathrm{d}x}\ (4)$$



Chú ý

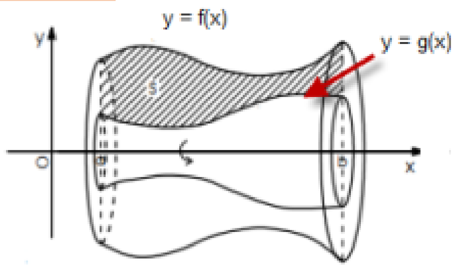
(1) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $x = g(y)$, trục hoành và hai đường thẳng $y = c, y = d$ quanh trục Oy được tính bởi công thức:



$$\boxed{V_y = \pi\int_c^d [g(y)]^2 dy}$$

(2) Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x = a,\ x = b$) thì ta thực hiện như sau:

Giải phương trình $f(x) = 0$, tìm các nghiệm $x_1,\ x_2,...,x_n$ (gọi là các hoành độ giao điểm) → Chọn cận dưới trong công thức (1), (2) là số nhỏ nhất và cận trên là số lớn nhất trong các số a, b (nếu có), $x_1,\ x_2,...,x_n$.



(3) ***(Mở rộng)*** Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y = f(x)$; $y = g(x)$; $x = a$; $x = b$ (Với $f(x).g(x) \geq 0, \forall x \in [a;b]$) được tính bởi công thức:

$$\boxed{V = \pi\int_a^b \left|f^2(x) - g^2(x)\right| \mathrm{d}x} \ (5)$$

📖 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

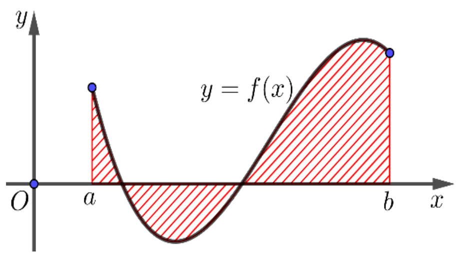
Dạng toán ☞ *XÁC ĐỊNH CÔNG THỨC, TÍNH DIỆN TÍCH CỦA HÌNH PHẲNG CHO BỞI HÌNH VẼ*

Phương pháp

Định lí 1

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường: $y = f(x)$, trục hoành $Ox: y = 0,\ x = a,\ x = b\ (a < b)$ được tính bởi công thức:

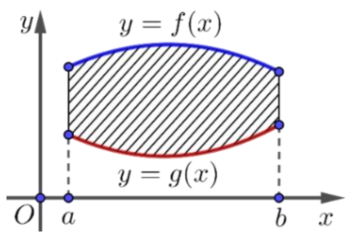
$$\boxed{\mathrm{S} = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x} \ (1)$$



Hệ quả

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 4 đường: $y = f(x), y = g(x)$, $x = a,\ x = b\ (a < b)$ được tính bởi công thức:

$$\boxed{\mathrm{S} = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x} \ (2)$$



Bước 1. Xác định $y = f(x),\ y = g(x),\ x = a,\ x = b$ theo hình vẽ

Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường thì cận a là hoành độ giao điểm cực trái (nhỏ nhất) và cận b là hoành độ giao điểm cực phải (lớn nhất) của 2 đường $y = f(x),\ y = g(x)$

(Giải phương trình hoành độ giao điểm $f(x) = g(x)$ và chọn nghiệm nhỏ nhất là cận a, nghiệm lớn nhất là cận b)

Bước 2. Lập công thức tính diện tích (1) và tính kết quả

Chú ý

(2) Nếu hình phẳng được phân chia ra nhiều phần bởi các giao điểm có hoành độ $x_1, x_2, \ldots, x_n \in [a;b]$ thì dùng công thức phân đoạn tích phân:

$$S=\int_a^b\left|f(x)-g(x)\right|dx=\int_a^{x_1}\left|f(x)-g(x)\right|dx+\int_{x_1}^{x_2}\left|f(x)-g(x)\right|dx+...+\int_{x_n}^{b}\left|f(x)-g(x)\right|dx$$

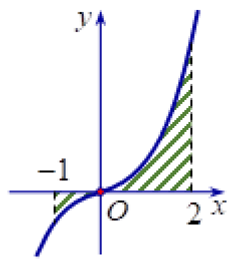
Xét dấu $f(x)-g(x)$ trên từng đoạn tích phân để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Trên đoạn $[m;n]$:

Nếu $f(x)-g(x)\ge 0$ (đường $y=f(x)$ nằm phía trên đường $y=g(x)$) thì $\left|f(x)-g(x)\right|=f(x)-g(x)$

Nếu $f(x)-g(x)<0$ (đường $y=f(x)$ nằm phía dưới đường $y=g(x)$) thì $\left|f(x)-g(x)\right|=g(x)-f(x)$

Ví dụ 9: Gọi S là diện tích hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1$, $x=2$ (như hình vẽ). Đặt $a=\int_{-1}^{0}f(x)dx$, $b=\int_0^2 f(x)dx$, mệnh đề nào sau đây đúng?



A. $S=b-a$. **B.** $S=-b-a$.
C. $S=a-b$. **D.** $S=b+a$.

Lời giải

Ta thấy:

Hình phẳng được giới hạn bởi 4 đường: $y=f(x)$, trục hoành $Ox: y=0$, $x=a$, $x=b$

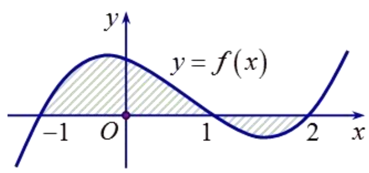
Vậy diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)-0\right|dx$

Do hình phẳng được phân chia ra 2 phần bởi giao điểm O có hoành độ $x=0$ nên

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)-0\right|dx=\int_{-1}^{0}\left|f(x)-0\right|dx+\int_{0}^{2}\left|f(x)-0\right|dx$$

$$=\int_{-1}^{0}\left[0-f(x)\right]dx+\int_0^2\left[f(x)-0\right]dx=-\int_{-1}^{0}f(x)dx+\int_0^2 f(x)dx=-a+b$$ (Chọn **A**)

Ví dụ 10: Gọi S là diện tích miền hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ. Mệnh đề nào đúng?



A. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$ **B.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$

C. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$ **D.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)dx+\int_1^2 f(x)dx$

Lời giải

Ta thấy:

Hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và trục hoành $Ox: y=0$

Giao điểm cực trái có hoành độ $x=-1$, giao điểm cực phải có hoành độ $x=2$.

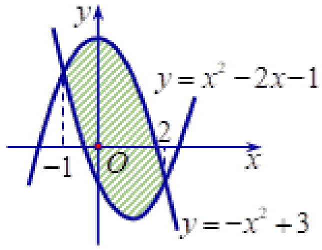
Vậy diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)-0\right|dx$

Do hình phẳng được phân chia ra 2 phần bởi giao điểm có hoành độ $x=1$ nên

$$S=\int_{-1}^{2}\left|f(x)-0\right|dx=\int_{-1}^{1}\left|f(x)-0\right|dx+\int_1^2\left|f(x)-0\right|dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\left[f(x)-0\right]dx+\int_1^2\left[0-f(x)\right]dx=\int_{-1}^{1}f(x)dx-\int_1^2 f(x)dx$$ (Chọn **B**)

Ví dụ 11: Diện tích phần hình phẳng gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào dưới đây?



A. $\int_{-1}^{2}(2x-2)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-1}^{2}\left(2x^2-2x-4\right)\mathrm{d}x$.

C. $\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-1}^{2}(-2x+2)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta thấy:

Hình phẳng được giới hạn bởi 2 đồ thị hàm số $y=x^2-2x-1,\ y=-x^2+3$

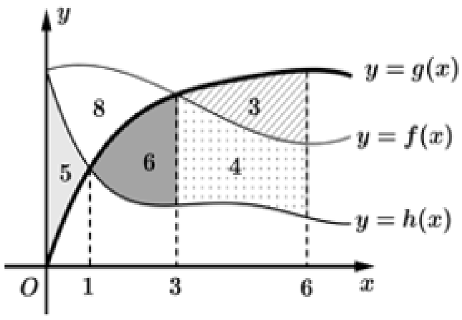
Giao điểm cực trái có hoành độ $x=-1$, giao điểm cực phải có hoành độ $x=2$ và hình phẳng không bị phân chia.

Vậy diện tích hình phẳng đã cho là

$S=\int_{-1}^{2}\left|\left(x^2-2x-1\right)-\left(-x^2+3\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left[\left(-x^2+3\right)-\left(x^2-2x-1\right)\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left(-2x^2+2x+4\right)\mathrm{d}x$ (do trên đoạn $[-1;2]$ phần đồ thị $y=-x^2+3$ nằm trên đồ thị $y=x^2-2x-1$). (Chọn **C**)

Ví dụ 12: Cho ba hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và $y=h(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Diện tích mỗi miền được ghi bằng số trong hình.

Tính $\int_1^6[h(x)-g(x)]dx+\int_0^6[f(x)-g(x)]dx$



Lời giải

$\int_1^6[h(x)-g(x)]dx+\int_0^6[f(x)-g(x)]dx$

$=\int_1^6[h(x)-g(x)]dx+\int_0^3[f(x)-g(x)]dx+\int_3^6[f(x)-g(x)]dx$

$=-(6+4+3)+(5+8)-3=-3$

Dạng toán ☞ TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẲNG GIỚI HẠN BỞI CÁC ĐƯỜNG CHO BẰNG CÔNG THỨC

Phương pháp: Dùng Định lí 1

Bước 1. Xác định $y=f(x),\ y=g(x),\ x=a,\ x=b$

Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x=a,\ x=b$) thì ta thực hiện như sau:

Giải phương trình $f(x)-g(x)=0$, tìm các nghiệm $x_1,\ x_2,...,x_n$ (gọi là các hoành độ giao điểm) → Chọn cận dưới trong công thức (1), (2) là số nhỏ nhất và cận trên là số lớn nhất trong các số a,b (nếu có), $x_1,\ x_2,...,x_n$.

Bước 2. Lập công thức tính diện tích và tính kết quả

Ví dụ 13: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi hàm số $y=x^4-4x^2+4,\ \ y=x^2$, đường thẳng $x=0$, $x=1$.

Lời giải

Hình phẳng đã cho giới hạn đủ 4 đường.

Diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int_0^1\left|x^4-4x^2+4-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^4-5x^2+4\right|\mathrm{d}x=\frac{38}{15}$

Ví dụ 14: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1, x=2$.

Lời giải

Trục hoành có phương trình $y=0$. Hình phẳng đã cho giới hạn đủ 4 đường.

Diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int_1^2\left|\left(x^2-4x+3\right)-0\right|\mathrm{d}x=\int_1^2\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\frac{2}{3}$.

Ví dụ 15: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$.

Lời giải

Hình phẳng đã cho giới hạn không đủ 4 đường.

Giải phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường $y=x(1-x)$ và $y=x^3-x$

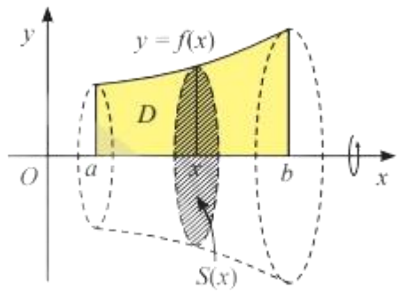
Ta có: $x(1-x)-\left(x^3-x\right)=0 \Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2=a\\x=1=b\end{array}\right.$

Vậy diện tích hình phẳng đã cho là $S=\int_{-2}^{1}\left|x(1-x)-\left(x^3-x\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{12}$

Dạng toán ☞ *TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ TRÒN XOAY*

Phương pháp: Dùng định lí 2

Thể tích khối tròn xoay được sinh ra khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường: $y=f(x)$, Ox, $x=a$, $x=b$ $(a<b)$ được tính bởi công thức: $\boxed{V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\,\mathrm{d}x}$ (3)



Bước 1. Xác định $y=f(x)$, $Ox: y=0,\ x=a,\ x=b$

Nếu hình phẳng giới hạn không đủ 4 đường như trên (thiếu ít nhất 1 trong 2 đường thẳng $x=a,\ x=b$) thì ta thực hiện như sau:

Giải phương trình $f(x)=0$, tìm các nghiệm $x_1,\ x_2,\dots,x_n$ (gọi là các hoành độ giao điểm) → Chọn cận dưới trong công thức (1), (2) là số nhỏ nhất và cận trên là số lớn nhất trong các số a,b (nếu có), $x_1,\ x_2,\dots,x_n$.

Bước 2. Lập công thức tính thể tích (3) và tính kết quả

Ví dụ 16: Tính thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường sau xung quanh trục Ox: $y=x^2+3,\ y=0,\ x=0,\ x=2$.

Lời giải

Hình phẳng đã cho giới hạn đủ 4 đường như Định lí 2.

Thể tích khối tròn xoay đã cho là $V=\pi\int_0^2\left(x^2+3\right)^2\mathrm{d}x=\frac{202}{5}\pi$

Ví dụ 17: Tính thể tích của vật thể tạo nên khi quay quanh trục Ox hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị $(P): y=-x^2+2x$ và trục Ox.

Lời giải

Hình phẳng đã cho giới hạn không đủ 4 đường như Định lí 2.

Giải phương trình hoành độ giao điểm của 2 đường $y=-x^2+2x$ và $y=0$

Ta có: $-x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0=a \\ x=2=b \end{array}\right.$

Thể tích khối tròn xoay đã cho là $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

PHẦN☞ HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

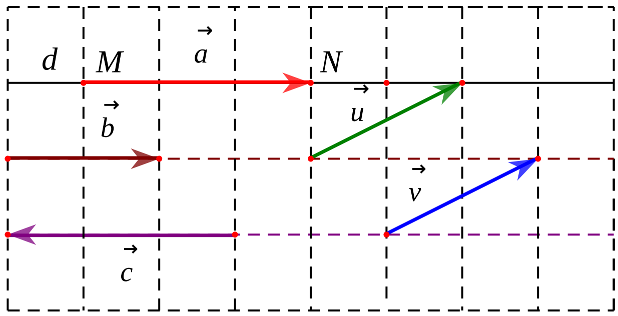
CHƯƠNG ☞ VECTƠ VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Bài 1: VECTO VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Các khái niệm liên quan đến vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như vectơ trong mặt phẳng:



□***Độ dài*** vectơ là khoảng cách từ điểm đầu đến điểm cuối của vectơ đó.

□***Giá vectơ*** là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ.

□Hai vectơ được gọi là ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

□Hai vectơ cùng phương thì chúng ***cùng hướng*** hoặc ***ngược hướng***.

□Hai vectơ được gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

□Hai vectơ được gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

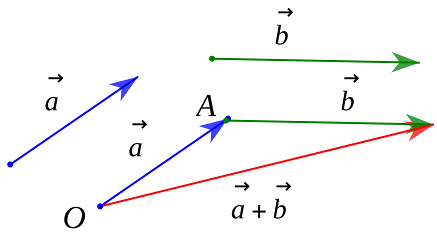
□Vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối được gọi là ***vectơ-không***. Vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

2. Tổng và hiệu của hai vectơ. tích của vectơ với một số.

Tổng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Lấy điểm O bất kì và hai điểm A, Bbsao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} + \vec{b}$.

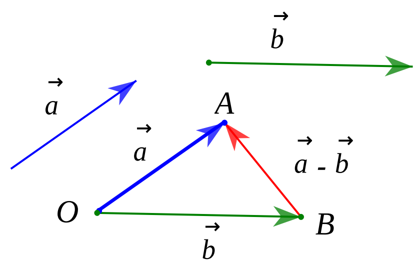
Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Hiệu của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$. Ta gọi $\vec{a} + (-\vec{b})$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.



Tích của vectơ với một số

Trong không gian, cho số thực $k \neq 0$ và vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

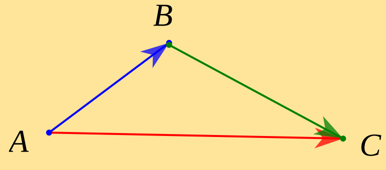
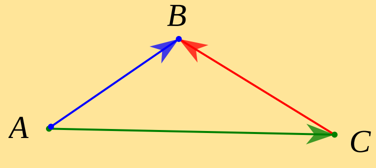
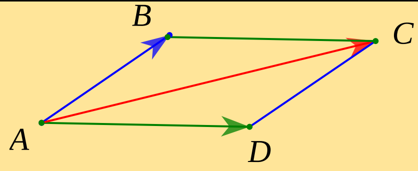
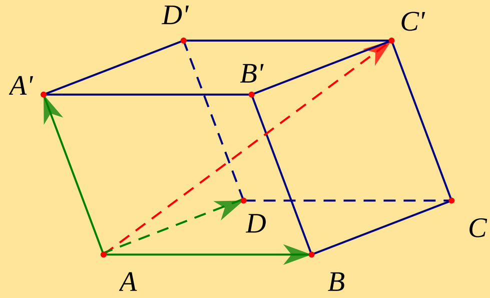
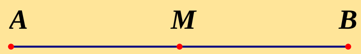
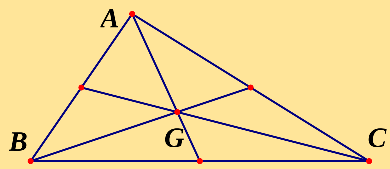
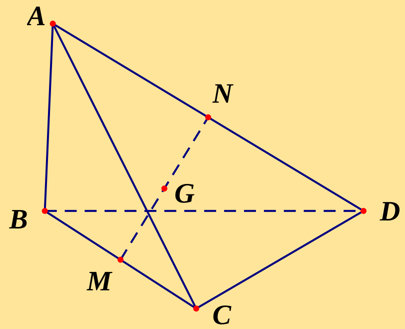
Chú ý:

(1) Các tính chất về phép toán vectơ trong không gian tương tự như trong mặt phẳng

(2) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a} = k\vec{b}$.

(3) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chi khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

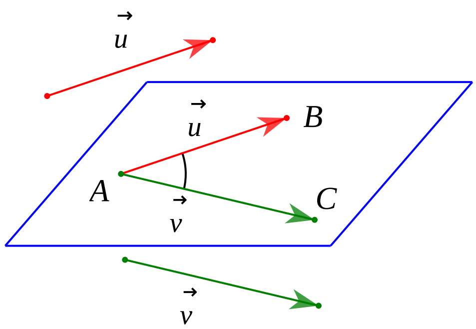
Các quy tắc về phép toán vectơ.

1. Quy tắc ba điểm	Với ba điểm A,B,C. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}.$ Quy ba điểm dùng để cộng hai vectơ có điểm cuối của vectơ này trùng với điểm đầu của vectơ kia	
2. Quy tắc hiệu vectơ	Với ba điểm A,B,C. Ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.$ Quy tắc hiệu vectơ dùng để trừ hai vectơ có cùng điểm đầu (hay trùng điểm cuối)	
3. Quy tắc hình bình hành	Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$	
4. Quy tắc hình hộp	Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'C'D'$. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}.$	
5. Quy tắc trung điểm đoạn thẳng	Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì (1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$; (2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2.\overrightarrow{IM}$ (với điểm I tùy ý)	
6. Quy tắc trọng tâm tam giác	Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì (1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; (2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3.\overrightarrow{IG}$ (với điểm I tùy ý)	
7. Quy tắc trọng tâm tứ giác (hay tứ diện)	Cho tứ giác (hay tứ diện) $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC và G là trung điểm của MN. Khi đó, điểm G gọi là trọng tâm của tứ giác (hay tứ diện) $ABCD$. Nếu G là trọng tâm của tứ giác (hay tứ diện) $ABCD$ thì (1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$; (2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=4.\overrightarrow{IG}$ (với điểm I tùy ý)	

3. Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Khi đó, ta gọi BAC là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u},\vec{v})$.



Nhận xét:

(1) $0^\circ \le (\vec{u},\vec{v}) \le 180^\circ$

(2) Nếu $(\vec{u},\vec{v})=90^\circ$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u}\cdot\vec{v}$, được xác định bởi công thức

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v}).$$

Chú ý:

(1) Trong trường hợp $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

(2) $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=|\vec{u}|^2;\vec{u}^2\geq 0;\vec{u}^2=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$

(3) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

(4) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Nhận xét:

Tương tự như trong mặt phẳng, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất sau:

Với ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ và số k, ta có:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ **(2)** $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ **(3)** $\left(k\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=k\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(k\vec{b}\right)$.

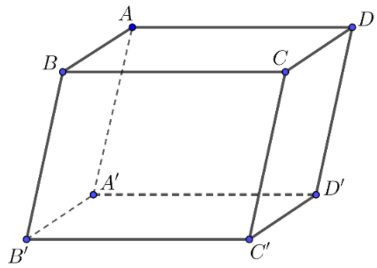
🕮 CÁC DẠNG TOÁN CÓ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ RÚT GỌN BIỂU THỨC VECTƠ, CHỨNG MINH HỆ THỨC VECTƠ

Phương pháp.

Sử dụng các quy tắc của các phép toán vectơ để biến đổi vectơ

Ví dụ 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tính tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'C'}$.



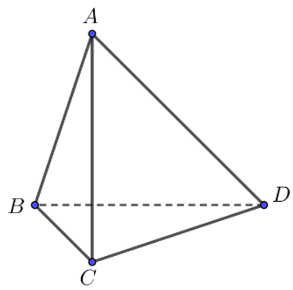
Lời giải

Theo quy tắc hình bình hành ta có,

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{A'C'}=2.\overrightarrow{AC}$.

Ví dụ 2: Cho tứ diện $ABCD$. Chứng minh $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$.



Lời giải

Ta có:

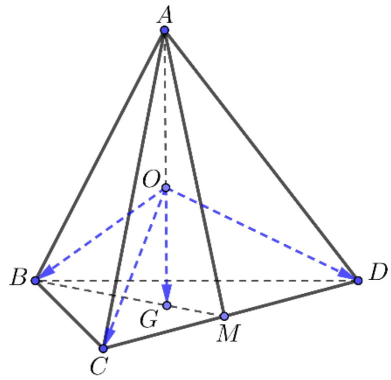
$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)+\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)$

$=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)+\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}\right)=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)+\overrightarrow{DD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ (Đpcm).

Ví dụ 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BCD và O là trung điểm đoạn thẳng AG. Chứng minh rằng:

(1) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$;

(2) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).



Lời giải

(1) $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$;

Vì G là trọng tâm của ΔBCD nên $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$.

Vì O là trung điểm đoạn thẳng AG nên $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}=\vec{0}$.

Do đó: $3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=3\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OG}\right)=\vec{0}$.

(2) $3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=6\overrightarrow{MO}$ (M là điểm bất kì trong không gian).

Theo quy tắc ba điểm, ta có:

$3\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$

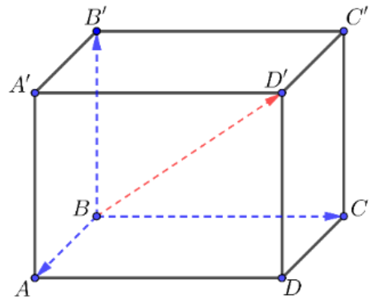
$=3\left(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}\right)+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OD}=6\overrightarrow{MO}+3\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=6\overrightarrow{MO}$

Dạng toán ☞ *TÍNH ĐỘ DÀI VECTƠ, GÓC GIỮA HAI VECTƠ, TÍCH VÔ HƯỚNG,...*

Ví dụ 4: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Tìm độ dài của các vectơ sau:

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}$; **(2)** $\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}$

Lời giải



(1) $\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}$;

$\vec{a}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{BD'}\Rightarrow\left|\vec{a}\right|=\left|\overrightarrow{BD'}\right|=BD'=2\sqrt{3}$.

(2) $\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}$

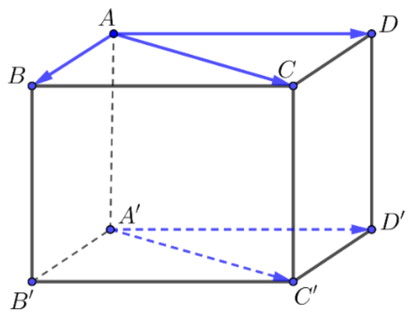
$\vec{b}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{C'A}=\overrightarrow{C'C}\Rightarrow\left|\vec{b}\right|=\left|\overrightarrow{C'C}\right|=C'C=2$.

Ví dụ 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các góc:

(1) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D'}\right)$ **(2)** $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)$

(3) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D'C'}\right)$ **(4)** $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C'B'}\right)$

Lời giải



(1) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D'}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{A'D'}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'D'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)=BAD=90^\circ$.

(2) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)$

Ta có $\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{AC}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=BAC=45^\circ$ (Do tam giác ABC vuông cân tại B)

(3) $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D'C'}\right)$

Ta có $\overrightarrow{D'C'}=\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{D'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC}\right)=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AB}\right)=0^\circ$.

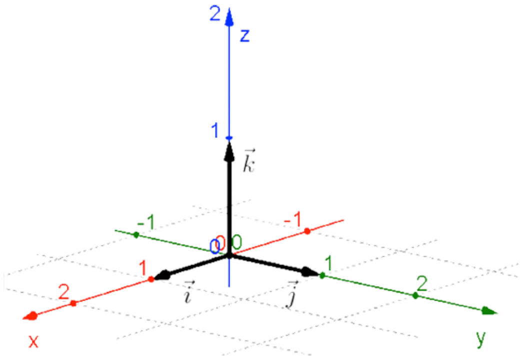
(4) $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C'B'}\right)$

Ta có $\overrightarrow{C'B'}=\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$, suy ra $\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{C'B'}\right)=\left(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{DA}\right)=180^\circ$ (do $\overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{DA}$ đối nhau nên ngược hướng).

Bài 2: TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1. Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, cho ba trục Ox, Oy, Oz đôi một vuông góc. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz. Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản là hệ tọ độ $Oxyz$.



Nhận xét:

(1) Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

(2) Các trục Ox, Oy, Oz được gọi là các trục tọa độ.

(3) Các mặt phẳng $(Oxy), (Oyz), (Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặtphẳng toạ dộ.

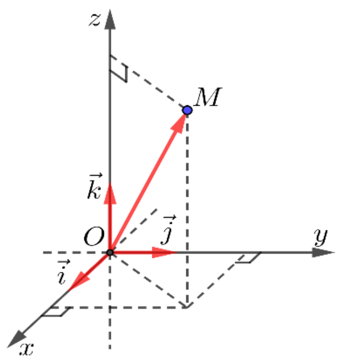
(4) Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

(5) Vì $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = 0$.

2. Tọa độ của điểm và vectơ

Tọa độ của điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M. Nếu $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x; y; z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$ và viết $M = (x; y; z)$ hoặc $M(x; y; z)$; x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M.



Toạ độ của vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$. Nếu $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1; a_2; a_3)$ là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ và viết $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1; a_2; a_3)$.

Nhận xét:

(1) Điểm O có tọa độ $(0;0;0)$

(2) Toạ độ của điểm M là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, tức là $M = (x; y; z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x; y; z)$.

(3) Cho $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$. Khi đó: $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$

TỌA ĐỘ CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT

Điểm thuộc trục tọa độ	***Điểm thuộc mặt phẳng tọa độ***
$M \in Ox \Leftrightarrow M(x;0;0)$ $M \in Oy \Leftrightarrow M(0;y;0)$ $M \in Oz \Leftrightarrow M(0;0;z)$	$M \in (Oxy) \Leftrightarrow M(x;y;0)$ $M \in (Oxz) \Leftrightarrow M(x;0;z)$ $M \in (Oyz) \Leftrightarrow M(0;y;z)$
Hình chiếu của điểm lên trục tọa độ	***Hình chiếu của điểm lên mặt phẳng tọa độ***
Hình chiếu của điểm $M(x;y;z)$ lên: ☞ Trục tọa độ Ox là điểm $H(x;0;0)$ ☞ Trục tọa độ Oy là điểm $H(0;y;0)$	Hình chiếu của điểm $M(x;y;z)$ lên: ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oxy) là điểm $H(x;y;0)$ ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oxz) là điểm $H(x;0;z)$

☞ Trục tọa độ Oz là điểm $H(0;0;z)$	☞ Mặt phẳng tọa độ (Oyz) là điểm $H(0;y;z)$
Điểm đối xứng của điểm qua trục tọa độ	***Điểm đối xứng của điểm qua mặt phẳng tọa độ***
Điểm đối xứng của điểm $M(x;y;z)$ qua: ☞ Trục tọa độ Ox là điểm $M'(x;-y;-z)$ ☞ Trục tọa độ Oy là điểm $M'(-x;y;-z)$ ☞ Trục tọa độ Oz là điểm $M'(-x;-y;z)$	Điểm đối xứng của điểm $M(x;y;z)$ qua: ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oxy) là điểm $M'(x;y;-z)$ ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oxz) là điểm $M'(x;-y;z)$ ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oyz) là điểm $M'(-x;y;z)$
Điểm đối xứng của điểm $M(x;y;z)$ qua gốc tọa độ O là điểm $M'(-x;-y;-z)$	

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM BẰNG HỆ THỨC VECTƠ, TỌA ĐỘ ĐIỂM ĐẶC BIỆT,..

Ví dụ 6: Xác định tọa độ điểm M trong các trường hợp sau

(1) $\overrightarrow{MO}=2\vec{i}-3\vec{k}$ **(2)** $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}+\vec{i}$ với $A(2;-3;1)$

Lời giải

(1) $\overrightarrow{MO}=2\vec{i}-3\vec{k}$

Ta có $\overrightarrow{OM}=-2\vec{i}+3\vec{k}$. Do đó $M(-2;0;3)$.

(2) $\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}+\vec{i}$ với $A(2;-3;1)$

Ta có $\overrightarrow{OM}=2\left(2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}\right)+3\vec{k}=4\vec{i}-4\vec{j}+5\vec{k}$. Vậy $M(4;-4;5)$.

Ví dụ 7: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây thuộc trục Oz?

A. $M(0;5;0)$ **B.** $N(4;0;0)$ **C.** $P(0;0;6)$ **D.** $Q(4;5;0)$

Lời giải

Chọn C

Điểm thuộc trục Oz có dạng tọa độ $(0;0;z)$ nên chọn $P(0;0;6)$.

Ví dụ 8: Trong không gian $Oxyz$, điểm nào sau đây nằm trên mặt phẳng tọa độ (Oyz)?

A. $N(0;4;-1)$ **B.** $P(-2;0;3)$ **C.** $M(3;4;0)$. **D.** $Q(2;0;0)$

Lời giải

Chọn A

Điểm thuộc mặt phẳng tọa độ (Oyz) có dạng tọa độ $(0;y;z)$ nên chọn $N(0;4;-1)$.

Ví dụ 9: Trong không gian $Oxyz$, tọa độ hình chiếu của $M(2;1;4)$ lên trục Ox là

A. $(2;0;0)$. **B.** $(0;1;0)$. **C.** $(0;0;4)$. **D.** $(0;1;4)$.

Lời giải

Chọn A

Hình chiếu của $M(x;y;z)$ lên trục Ox có dạng tọa độ $H(x;0;0)$ nên chọn $(2;0;0)$.

Ví dụ 10: Trong không gian $Oxyz$, hình chiếu vuông góc của điểm $M(5;-6;2)$ lên mặt phẳng (Oxz) có tọa độ là

A. $(0;-6;0)$. **B.** $(5;0;2)$. **C.** $(5;-6;0)$. **D.** $(0;-6;2)$.

Lời giải

Chọn B

Hình chiếu của $M\left(x;y;z\right)$ lên trục $\left(Oxz\right)$ có dạng tọa độ $H\left(x;0;z\right)$ nên chọn $\left(2;0;0\right)$.

Ví dụ 11: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng với điểm $M\left(4;-5;3\right)$ qua trục Oz có tọa độ là

A. $\left(4;-5;-3\right)$. **B.** $\left(-4;5;3\right)$. **C.** $\left(-4;5;-3\right)$. **D.** $\left(0;0;3\right)$.

Lời giải

Chọn B

Điểm đối xứng của $M\left(x;y;z\right)$ qua trục Oz có dạng tọa độ $M'\left(-x;-y;z\right)$ nên chọn $\left(-4;5;3\right)$

Ví dụ 12: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng của điểm $M\left(-1;2;-2\right)$ qua mặt phẳng $\left(Oxz\right)$ là điểm

A. $H\left(1;2;2\right)$. **B.** $E\left(0;2;0\right)$. **C.** $F\left(-1;-2;-2\right)$. **D.** $G\left(-1;2;2\right)$.

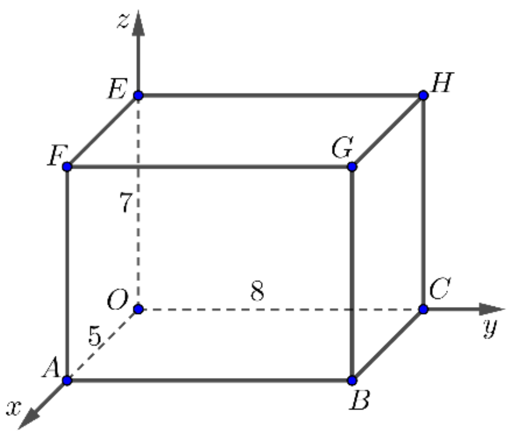
Lời giải

Chọn C

Điểm đối xứng của $M\left(x;y;z\right)$ qua mặt phẳng $\left(Oxz\right)$ có dạng tọa độ $M'\left(x;-y;z\right)$ nên chọn $F\left(-1;-2;-2\right)$

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM CHO BỞI HÌNH VẼ

Ví dụ 13: Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $OABC.EFGH$ có các cạnh $OA=5$, $OC=8$, $OE=7$ (xem hình vẽ dưới đây). Xác định tọa độ các điểm A, B, H, G



Lời giải

Cách 1.

Ta có: $\overrightarrow{OA}=5.\vec{i}$ nên điểm $A(5;0;0)$

Theo quy tắc hình bình hành, ta có:

$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=5.\vec{i}+8.\vec{j}$ nên điểm $B(5;8;0)$

$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=8.\vec{j}+7.\vec{k}$ nên điểm $H\left(0;8;7\right)$

Theo quy tắc hình hộp, ta có:

$\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OE}=5.\vec{i}+8.\vec{j}+7.\vec{k}$ nên điểm $G(5;8;7)$

Cách 2.

Ta có: $A\in Ox$ và $OA=5$ nên điểm $A(5;0;0)$

Do điểm $B\in(Oxy)$ nên có cao độ bằng 0 và hình chiếu của điểm B lên trục Ox, Oy lần lượt là điểm A, C nên có hoành độ bằng 5, tung độ bằng 8

Vậy điểm $B(5;8;0)$

Tương tự cho điểm H

Chiếu điểm G lên mặt phẳng (Oxy) ta được điểm $B(5;8;0)$ suy ra điểm G có hoành độ bằng 5, tung độ bằng 8 và $GB=EO=7$ suy ra, điểm G có cao độ bằng 7

Vậy điểm $G(5;8;7)$

Ví dụ 14: **Cần trục chân đế** là kiểu cột quay được sử dụng để phục vụ công việc xếp dỡ hàng hóa chủ yếu ngoài các cảng bến, bãi (hình ảnh minh họa). Ta chọn hệ trục $Oxyz$ thỏa trục Ox trùng với trục chân đế, trục Oy vuông góc với trục Ox và trục Oz trùng với trục cần cẩu (theo đơn vị mét, như hình vẽ). Gọi M là vị trí tại đỉnh cần cẩu, H là hình chiếu của M lên (Oxy). Biết tay cần KM của cần trục dài $50m$, trục cần OK dài $50m$, $\left(\vec{k};\overrightarrow{KM}\right)=60°;\left(\vec{i};\overrightarrow{OH}\right)=45°$.

Xác định cao độ của điểm M

A. $\dfrac{100\sqrt{3}}{2}$. **B.** $93,3$. **C.** 75. **D.** 60.

Lời giải

Chọn C

Ta gọi E là hình chiếu của M lên Oz.

Ta có:

$$EK = MK.\cos 60° = 50.\frac{1}{2} = 25m$$

$$\Rightarrow z_M = OE = OK + KE = 50 + 25 = 75m.$$

Bài 3: BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

1. Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và số thực k. Khi đó:

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$	**(2)** $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$	**(3)** $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

Nhận xét:

Cho hai vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3), \vec{b}\neq\vec{0}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\begin{cases} a_1 = kb_1 \\ a_2 = kb_2 \\ a_3 = kb_3 \end{cases}$

hay $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}, (b_1.b_2.b_3\neq 0)$

2. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ được xác định bởi công thức $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Nhận xét:

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$, $(\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0})$

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

(3) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$, ($\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0}$).

3. Vận dụng

(1) $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$

(2) $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

(3) Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

(4) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

(5) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ cùng phương ***hay*** $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC},\ k\in\mathbb{R}$

🕮 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA VECTƠ, BIỂU THỨC VECTƠ

Ví dụ 15: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;1;-2)$ và $B(2;2;1)$. Vectơ $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ là

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)=\left(2-1;2-1;1-(-2)\right)=(1;1;3)$.

Ví dụ 16: Trong không gian $Oxyz$, cho ba vectơ $\vec{a}=(2;-1;0)$, $\vec{b}=(-1;-3;2)$, $\vec{c}=(-2;-4;-3)$. Xác định tọa độ của $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}$

Lời giải

Ta có: $\vec{u}=2\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}=\left(2.2-3.(-1)+(-2);2.(-1)-3.(-3)+(-4);2.0-3.2+(-3)\right)=(5;3;-9)$.

Ví dụ 17: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;3;2)$ và $B(3;-1;4)$. Xác định tọa độ vectơ $\vec{u}=2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{BA}=(-2;4;-2)$ suy ra $2\overrightarrow{BA}=(-4;8;-4)$ và $\overrightarrow{OB}=(3;-1;4)$

Vậy $\vec{u}=2\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{OB}=\left(-4-3;8-(-1);-4-4\right)=(-7;9;-8)$.

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM THỎA ĐIỀU KIỆN CHO TRƯỚC

Ví dụ 18: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$ và $C(-3;5;1)$. Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Gọi $D(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;-3;4)$, $\overrightarrow{DC}=(-3-x;5-y;1-z)$.

$$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow\begin{cases}1=2(-3-x)\\-3=2(5-y)\\4=2(1-z)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{7}{2}\\y=\dfrac{13}{2}\\z=-1\end{cases}.$$

Vậy $D\left(-\frac{7}{2};\frac{13}{2};-1\right)$.

Ví dụ 19: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(1;-2;2)$ và $N(1;0;4)$. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng MN là

Lời giải

Gọi I là trung điểm MN. Ta có: $\begin{cases} x_I = \frac{x_M + x_N}{2} = \frac{1+1}{2} = 1 \\ y_I = \frac{y_M + y_N}{2} = \frac{-2+0}{2} = -1 \\ z_I = \frac{z_M + z_N}{2} = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$.

Vậy $I(1;-1;3)$.

Ví dụ 20: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC, biết $A(1;-2;4)$, $B(0;2;5)$, $C(5;6;3)$. Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC là

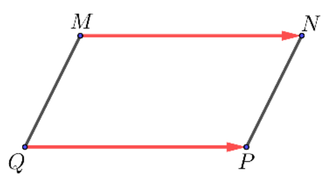
Lời giải

Do G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{1+0+5}{3} = 2 \\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{-2+2+6}{3} = 2 \\ z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{4+5+3}{3} = 4 \end{cases}$.

Vậy $G(2;2;4)$.

Ví dụ 21: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho ba điểm $M(1;1;1), N(2;3;4), P(7;7;5)$. Tìm tọa độ điểm Q để tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải



Ta có: $\overrightarrow{MN} = (1;2;3), \overrightarrow{QP} = (7-x_Q;7-y_Q;5-z_Q)$.

$MNPQ$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 7 - x_Q \\ 2 = 7 - y_Q \\ 3 = 5 - z_Q \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 6 \\ y_Q = 5 \\ z_Q = 2 \end{cases}$.

Vậy $Q(6;5;2)$.

Ví dụ 22: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $\mathrm{A}(2;-1;5), B(5;-5;7)$, $M(x;y;1)$. Xác định tọa độ điểm M để ba điểm A, B, M thẳng hàng.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (3;-4;2)$, $\overrightarrow{AM} = (x-2;y+1;-4)$.

A, B, M thẳng hàng. $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}$ cùng phương $\Leftrightarrow \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-4} = \frac{-4}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = 7 \end{cases}$.

Vậy $M(-4;7;1)$.

Ví dụ 23: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2;0;0)$, $B(0;3;1)$, $C(-3;6;4)$. Tìm điểm M thuộc đoạn BC sao cho $MC = 2MB$.

Lời giải

Giả sử $M(a;b;c) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = (a;b-3;c-1)$ và $\overrightarrow{BC} = (-3;3;3)$.

Điểm $M \in BC$ sao cho $MC = 2MB \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{3}.(-3) \\ b-3 = \dfrac{1}{3}.3 \\ c-1 = \dfrac{1}{3}.3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases}$.

Vậy $M(-1;4;2)$.

Ví dụ 24: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;-1)$ và $B(0;-2;3)$. Tìm tọa độ chân đường cao kẻ từ đỉnh O của tam giác OAB.

Lời giải

Gọi $H(x;y;z)$ là điểm cần tìm.

Ta có: $\overrightarrow{AH} = (x-1;y-2;z+1)$, $\overrightarrow{AB} = (-1;-4;4)$.

Vì A, H, B thẳng hàng nên $\overrightarrow{AH} = k.\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k.(-1) \\ y-2 = k.(-4) \\ z+1 = k.4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k+1 \\ y = -4k+2 \\ z = 4k-1. \end{cases} \Rightarrow H(-k+1;-4k+1;4k-1)$

$\Rightarrow \overrightarrow{OH} = (-k+1;-4k+2;4k-1)$.

Vì $OH \perp AB$ nên $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow (-k+1).(-1)+(-4k+2).(-4)+(4k-1).4 = 0 \Leftrightarrow k = \dfrac{13}{33}$.

Vậy $H\left(\dfrac{20}{33};\dfrac{14}{33};\dfrac{19}{33}\right)$.

Dạng toán ☞ TÍNH SỐ ĐO CỦA CÁC ĐẠI LƯỢNG HÌNH HỌC

Ví dụ 25: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(-1;4;1)$. Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng AB. Tính $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BA}$.

Lời giải

Vì I là trung điểm AB nên $I(0;3;2)$. Suy ra $\overrightarrow{IA} = (1;-1;1)$ và $\overrightarrow{BA} = (2;-2;2)$.

Vậy $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{BA} = 1.2+(-1).(-2)+1.2 = 6$.

Ví dụ 26: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;1)$ và $B(3;-2;1)$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3;-4;0)$ nên $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2+(-4)^2+0^2} = 5$.

Ví dụ 27: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC biết $A(1;0;-2), B(2;1;-1)$, $C(1;-2;2)$. Tính chu vi của ΔABC.

Lời giải

Theo công thức tính độ dài vectơ, ta được

$AB = \sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2+(-1+2)^2} = \sqrt{3}$; $BC = \sqrt{1+9+9} = \sqrt{10}$; $AC = \sqrt{0+4+16} = 2\sqrt{5}$.

Chu vi của ABC: $\sqrt{3}+\sqrt{10}+2\sqrt{5}$.

Ví dụ 28: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;2;-1)$, $B(0;3;1)$; $C(3;2;0)$. Tính diện tích ΔABC (nếu có).

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-1;1;2)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;0;1)$ không cùng phương nên ba điểm $A;B;C$ lập thành tam giác.

Và $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1.2+1.0+2.1=0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AC}\Rightarrow AB\perp AC$ nên ΔABC vuông tại A.

Mặt khác $AB=\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}$ và $AC=\sqrt{2^2+0+1^2}=\sqrt{5}$

Vậy diện tích tam giác ABC là $S=\frac{1}{2}AB.AC=\frac{1}{2}\sqrt{6}.\sqrt{5}=\frac{\sqrt{30}}{2}$.

Ví dụ 29: Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-1;-2;3)$, $B(0;3;1)$, $C(4;2;2)$. Tính số đo BAC.

Lời giải

Ta có: $BAC=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{AB}=(1;5;-2)$, $\overrightarrow{AC}=(5;4;-1)$

$$\cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)=\frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}=\frac{1.5+5.4+(-2)(-1)}{\sqrt{1^2+5^2+(-2)^2}\sqrt{5^2+4^2+(-1)^2}}=\frac{9\sqrt{35}}{70}$$

Vậy $BAC=\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\approx 40^\circ 29'$

CHƯƠNG ☞ PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

Bài 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

• Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có *giá vuông góc* với mặt phẳng (α) được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của mặt phẳng (α)

• Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *không cùng phương* và *giá* của chúng *song song* hoặc *nằm trên* mặt phẳng (α) thì $\vec{a},\vec{b}$ được gọi là ***cặp vectơ chỉ phương*** của mặt phẳng (α).

Nhận xét

(1)Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k\cdot\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α) (Nói cách khác, một mặt phẳng có vô số vectơ pháp tuyến và chúng cùng phương nhau)

(2) Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó, hoặc biết một điểm và một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.

2. Tích có hướng của 2 vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

Vectơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ được gọi là ***tích có hướng*** của hai $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

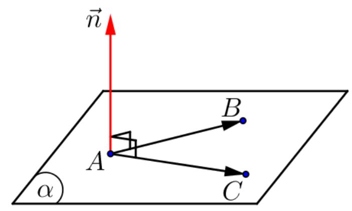
Nhận xét

(1) Biểu thức $a_1b_2-a_2b_1$ thường được kí hiệu $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$. Tương tự $\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2$, $\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}=a_3b_1-a_1b_3$. Như vậy: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$

(2) $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$

(3) Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

(4) Nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$ (1), với $A,\ B,\ C$ không đồng thời bằng 0, được gọi là ***phương trình tổng quát*** của mặt phẳng.

Nhận xét

(1) Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (với $A,\ B,\ C$ không đồng thời bằng 0) đều xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n}=(A;B;C)$ làm vectơ pháp tuyến.

(2) Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Khi đó: $N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

(Nói cách khác, Một điểm thuộc một mặt phẳng khi chỉ khi tọa độ của điểm thỏa mãn phương trình của mặt phẳng. Khái quát, Một Điểm thuộc một Hình khi chỉ khi tọa độ của Điểm thỏa mãn phương trình của Hình)

(3)Mặt phẳng(α) qua $M(x_o;y_o;z_o)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ có phương trình là

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ (2) \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$, với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

(4) *Phương trình theo đoạn chắn*

Mặt phẳng cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ có phương trình dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (3)$ $(a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0)$ (gọi là ***phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn***)

Phương trình mặt phẳng trong các trường hợp đặc biệt

Tính chất mặt phẳng	*Phương trình*	*Hệ số*
(α) đi qua gốc O.	$(\alpha): Ax+By+Cz=0$	$D=0$
(α) song song hoặc chứa Ox.	$(\alpha): By+Cz+D=0$	$A=0$ (Chứa Ox khi $D=0$)
(α) song song hoặc chứa Oy.	$(\alpha): Ax+Cz+D=0$	$B=0$ (Chứa Oy khi $D=0$)
(α) song song hoặc chứa Oz.	$(\alpha): Ax+By+D=0$	$C=0$ (Chứa Oz khi $D=0$)
(α) song song (Oxy).	$(\alpha): Cz+D=0$	$A=B=0$
(α) song song (Oxz).	$(\alpha): By+D=0$	$A=C=0$
(α) song song (Oyz).	$(\alpha): Ax+D=0$	$B=C=0$
Phương trình các mặt phẳng tọa độ: $(Oyz): x=0$; $(Oxz): y=0$; $(Oxy): z=0$		

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó:

$(\alpha_1)\parallel(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k.\overrightarrow{n_2}\\ D_1\neq k.D_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1\neq k.D_2\end{cases}$ hay $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$, $(A_2.B_2.C_2.D_2\neq 0)$
$(\alpha_1)\equiv(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k.\overrightarrow{n_2}\\ D_1=k.D_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1=k.D_2\end{cases}$ hay $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$, $(A_2.B_2.C_2.D_2\neq 0)$
$(\alpha_1),(\alpha_2)$ cắt nhau $\Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương
$(\alpha_1)\perp(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách	*Cách tính và Công thức*
1. Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ ***đến mặt phẳng*** $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$	$d(M,(\alpha))=\frac{\lvert Ax_o+By_o+Cz_o+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
2. Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song: $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ Với $(A';B';C')=k(A;B;C)$	***Cách 1:*** Bằng khoảng cách từ 1 điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. Lấy $M(x_0;y_0;z_0)\in(\beta)$. Khi đó: $d((\alpha),(\beta))=d(M;(\alpha))$
	Cách 2: Đồng nhất hệ số của phương trình 2 mặt phẳng:

	Biến đổi 2 phương trình của 2 mặt phẳng sao cho các hệ số của x,y,z tương ứng bằng nhau. Chẳng hạn $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): Ax+By+Cz+D_0=0$ Khi đó: $d((\alpha);(\beta))=\dfrac{\lvert D-D_0\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

ĐẶC BIỆT

Khoảng cách từ điểm	***Đến***	***Bằng***
$M(x_M;y_M;z_M)$	Gốc tọa độ O	$\sqrt{x_M{}^2+y_M{}^2+z_M{}^2}$
	Trục tọa độ Ox	$\sqrt{y_M{}^2+z_M{}^2}$ (cho hoành độ bằng 0)
	Trục tọa độ Oy	$\sqrt{x_M{}^2+z_M{}^2}$ (cho tung độ bằng 0)
	Trục tọa độ Oz	$\sqrt{x_M{}^2+y_M{}^2}$ (cho cao độ bằng 0)
	Mặt phẳng tọa độ (Oxy)	$\sqrt{z_M{}^2}=\lvert z_M\rvert$ (cho hoành độ và tung độ bằng 0)
	Mặt phẳng tọa độ (Oxz)	$\sqrt{y_M{}^2}=\lvert y_M\rvert$ (cho hoành độ và cao độ bằng 0)
	Mặt phẳng tọa độ (Oyz)	$\sqrt{x_M{}^2}=\lvert x_M\rvert$ (cho tung độ và cao độ bằng 0)

🕮 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG

(1) Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của mặt phẳng (α)

(2) Nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=[\vec{a},\vec{b}]$ làm vectơ pháp tuyến

(3) Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ thì vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

(4) Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Ví dụ 36: rong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 3x-y+2z-1=0$. Vectơ nào dưới đây **không** phải là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1}=(-3;1;-2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(3;1;2)$ **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;-1;2)$ **D.** $\overrightarrow{n_4}=(6;-2;4)$

Lời giải

Dựa vào phương trình $(P): 3x-y+2z-1=0$, ta thấy vectơ pháp tuyến của (P) là: $\overrightarrow{n_3}=(3;-1;2)$

$\overrightarrow{n_1}=(-3;1;-2)=-1(3;-1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P)

$\overrightarrow{n_4}=(6;-2;4)=2(3;-1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P)

Ví dụ 37: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$. Xác định một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng AB.

Lời giải

Đường thẳng AB là giá của $\overrightarrow{AB}$.

Do mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng AB nên một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8)$

Ví dụ 38: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;5)$. Tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Lời giải

Do mặt phẳng (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α)

Vậy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-10;4;6)$.

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG

Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Khi đó: $N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

(***Nói cách khác***, Một điểm thuộc một mặt phẳng khi chỉ khi tọa độ của điểm thỏa mãn phương trình của mặt phẳng. Khái quát, Một Điểm thuộc một Hình khi chỉ khi tọa độ của Điểm thỏa mãn phương trình của Hình)

Ví dụ 39: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

A. $Q(3;3;0)$. **B.** $N(2;2;2)$. **C.** $P(1;2;3)$. **D.** $M(1;-1;1)$.

Lời giải

A. Thay toạ độ $Q(3;3;0)$ vào phương trình mặt phẳng (α), ta được $3+3+0-6=0$ (đúng) $\Rightarrow Q\in(\alpha)$

B. Thay toạ độ $N(2;2;2)$ vào phương trình mặt phẳng (α), ta được $2+2+2-6=0$ (đúng) $\Rightarrow N\in(\alpha)$

C. Thay toạ độ $P(1;2;3)$ vào phương trình mặt phẳng (α), ta được $1+2+3-6=0$ (đúng) $\Rightarrow P\in(\alpha)$

D. Thay toạ độ $M(1;-1;1)$ vào phương trình mặt phẳng (α), ta được $1+(-1)+1-6=0$ (sai) $\Rightarrow M\notin(\alpha)$

Dạng toán ☞ LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Cách 1. Xác định 2 yếu tố cơ bản của mặt phẳng là Điểm đi qua và vectơ pháp tuyến.

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác (nếu cần)

Bước 2. Xác định tọa độ điểm $M(x_o;y_o;z_o)$ và tọa độ vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ của mặt phẳng

Bước 3. Thay vào phương trình $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, Thu gọn về phương trình tổng quát

Dạng	Điều kiện xác định mặt phẳng (α) (giả thiết cho)	Đi qua điểm	Vectơ pháp tuyến
1	Qua M và song song $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$	M	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}=(A;B;C)$

2	*Qua M và vuông góc đường thẳng AB*	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}$
	Qua M và vuông góc đường thẳng (d)	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{a_d}$
3	*Là mặt phẳng trung trực đoạn AB*	*M là trung điểm AB*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}$
4	*Qua 3 điểm A, B, C*	*A (hay B, hay C)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$
5	*Qua A, B và song song CD*	*A (hay B)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]$
	Qua A, B và song song (d)	*A (hay B)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{a_d}\right]$
	Chứa (d) và song song AB	*Lấy M $\in$ (d)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{AB}\right]$
	Chứa (d) và song song (d')	*Lấy M $\in$ (d)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{a_{d'}}\right]$
6	*Qua 2 điểm M, N và vuông góc mặt phẳng(β)*	*M (hay N)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
	Chứa (d) và vuông góc mặt phẳng (β)	*Lấy M $\in$ (d)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
7	*Qua điểm M và vuông góc 2 mặt phẳng (β), (γ)*	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{n_\beta},\overrightarrow{n_\gamma}\right]$
8	*Qua điểm M và song song 2 đường thẳng (d), (d')*	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{a_{d'}}\right]$
9	*Qua điểm M, vuông góc mp(β) và song song đường thẳng (d)*	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
10	*Chứa (d) và đi qua $M\in(d)$*	*M hay Lấy N $\in$(d)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{a_d}\right]$

Cách 2. Xác định hệ số

Bước 1. Gọi mặt phẳng đã cho có phương trình dạng: $Ax+By+Cz+D=0$

Bước 2. Từ giả thiết, xác định 4 hệ số *A, B, C, D* (kiểm tra điều kiện, nếu có)

Bước 3. Thay vào phương trình $Ax+By+Cz+D=0$

Đặc biệt:

Nếu mặt phẳng không qua gốc tọa độ O thì phương trình mặt phẳng được biến đổi về dạng $ax+by+cz=1$ (4).

Khi mặt phẳng được xác định bởi 3 yếu tố thì ta lập được hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn $a,\ b,\ c$. Giải hệ phương trình tìm $a,\ b,\ c$ rồi thay vào phương trình (4) và thu gọn và phương trình dạng tổng quát.

Ví dụ 40: Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt phẳng (β) qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$

Lời giải

Cách 1.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-2;1)$

Do mặt phẳng (β) song song mặt phẳng (α) nên mặt phẳng (β) nhận $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-2;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Mà mặt phẳng (β) qua điểm $A(-1;1;2)$

Vậy phương trình mặt phẳng (β) là $2(x+1)-2(y-1)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z+2=0$

Cách 2.

Do mặt phẳng (β) song song mặt phẳng (α) nên mặt phẳng (β) có phương trình dạng $2x-2y+z+m=0$, với $m\neq -1$.

Mà (β) đi qua điểm $A(-1;1;2)$ nên $-2-2+2+m=0\Leftrightarrow m=2$ (nhận)

Vậy phương trình mặt phẳng (β) là $2x-2y+z+2=0$.

Ví dụ 41: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC), với $A(-1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-1;0)$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-1;-2);\overrightarrow{AC}=(2;-1;-3)$

Do mặt phẳng (ABC) chứa $AB,\ AC$ nên mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right]=(-1;-5;1)$.

Mà mặt phẳng (ABC) qua $A(-1;0;3)$

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là $-(x+1)-5(y-0)+1(z-3)=0\Leftrightarrow x+5y-z+4=0$

Cách 2.

Giả sử mặt phẳng (ABC) có phương trình dạng $ax+by+cz=1$ (*) (giả sử mặt phẳng không qua O)

Do mặt phẳng (ABC) qua $A,\ B,\ C$ nên thay tọa độ 3 điểm $A,\ B,\ C$ vào phương trình (*) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-a+0b+3c=1\\2a-b+c=1\\a-b+0c=1\end{cases}\Leftrightarrow (a;b;c)=\left(-\dfrac{1}{4};-\dfrac{5}{4};\dfrac{1}{4}\right)$

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là $-\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{4}y+\dfrac{1}{4}z=1\Leftrightarrow x+5y-z+4=0$

Ví dụ 42: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1),B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P):x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải

Cách 1.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp (P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Do mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{n_P}$ là cặp vectơ chỉ phương của mp (Q). Suy ra, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp (Q).

Mặt phẳng (Q) đi qua $A(2;4;1)$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0\Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Cách 2.

Giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình dạng $ax+by+cz=1$ (giả sử mặt phẳng không qua O)

Ta có:

Mặt phẳng (Q) qua điểm $A(2;4;1)$ nên $2a+4b+c=1$ (1)

Mặt phẳng (Q) qua điểm $B(-1;1;3)$ nên $-a+b+3c=1$ (2)

Mặt phẳng (Q) vuông góc mặt phẳng (P) nên $a.1+b(-3)+c.2=0$ (3)

Giải hệ phương trình (1), (2), (3), ta được: $a=0,\ b=\frac{2}{11},\ c=\frac{3}{11}$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $0.x+\frac{2}{11}y+\frac{3}{11}z=1 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$

Chú ý

Khi giải cách 2 mà hệ phương trình không giải được (khi đó mặt phẳng đi qua gốc O) thì ta phải giải bằng cách 1.

Dạng toán ☞ VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp: Xem mục 4. Bài 1.

Ví dụ 43: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y-6z-5=0$ $(\beta): x+2y-3z-2=0$.

Lời giải

Xét tỉ lệ các hệ số tương ứng: $\frac{2}{1}=\frac{4}{2}=\frac{-6}{-3}\neq\frac{-5}{-2}$

Suy ra hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ song song nhau

Ví dụ 44: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y-3z-5=0$ $(\beta): x-2y-z+3=0$.

Lời giải

Xét tỉ lệ các hệ số tương ứng: $\frac{1}{1}\neq\frac{4}{-2}\neq\frac{-3}{-1}$, suy ra hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau.

Xét tích vô hướng của hai vectơ pháp tuyến: $1\cdot1+2\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)=0$

Vậy hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ vuông góc nhau

Dạng toán ☞ TÍNH KHOẢNG CÁCH

Phương pháp: Xem mục 5. Bài 1.

Ví dụ 45: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-1=0$. Tính khoảng cách từ điểm $M(-1;2;1)$ đến mặt phẳng (P).

Lời giải

Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;1)$ đến mặt phẳng (P) là $d(M,(P))=\frac{|2.(-1)-2.2+1-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=2$.

Ví dụ 46: Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): 2x+4y+4z-5=0$

Lời giải

Cách 1.

Lấy $A(2;1;3)\in(P)$.

Do (P) song song với (Q) nên khoảng cách giữa 2 mặt phẳng $(P), (Q)$ là

$d\left((P),(Q)\right)=d\left(A,(Q)\right)=\dfrac{|2.2+4.1+4.3-5|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=\dfrac{5}{3}$

Cách 2.

Ta có $(P): x+2y+2z-10=0 \Leftrightarrow 2x+4y+4z-20=0$ (Đồng nhất hệ số của x,y,z trong 2 phương trình)

Do mp(P) song song với mp(Q) nên khoảng cách giữa 2 mặt phẳng (P), (Q) là

$d\left((P),(Q)\right)=\dfrac{|-20-(-5)|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=\dfrac{5}{3}$

Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

• Vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của đường thẳng d.

Nhận xét

(1) Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k.\vec{a}$ $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d. (Nói cách khác, một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương và chúng cùng phương nhau)

(2) Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của nó.

(3) Nếu đường thẳng d vuông góc với giá 2 vectơ $\vec{u}$, $\vec{v}$ thì $\vec{a}=[\vec{u},\vec{v}]$ là vectơ chỉ phương của d.

2. Phương trình của đường thẳng

Đường thẳng d đi qua $M(x_o;y_o;z_o)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, có:

Phương trình tham số: $\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t,(t\in\mathbb{R}) \\ z=z_o+a_3t \end{cases}$ (1)

Phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$, $(a_1.a_2.a_3\neq 0)$ (2)

Chú ý

Phương trình các trục tọa độ: $Ox:\begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ $Oy:\begin{cases} x=0 \\ y=t \\ z=0 \end{cases}$ $Oz:\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases}$

Nhận xét

(1) Cho đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t,(t\in\mathbb{R}) \\ z=z_o+a_3t \end{cases}$. Với mỗi giá trị của tham số t duy nhất xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

(2) Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$, $(a_1.a_2.a_3\neq 0)$. Với mỗi giá trị duy nhất của các tỉ lệ thức ta xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

3. Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng

Cho hai đường thẳng $(d):\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

và $(d'):\begin{cases} x = x'_o + a'_1.t' \\ y = y'_o + a'_2.t' \\ z = z'_o + a'_3.t' \end{cases}$ đi qua điểm $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a'} = (a'_1; a'_2; a'_3)$

Xét hệ phương trình tương giao giữa (*d*) và (*d'*): $(I):\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1.t' & (1) \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2.t' & (2) \\ z_o + a_3 t = z'_o + a'_3.t' & (3) \end{cases}$.

Khi đó :

Vị trí tương đối	***Điều kiện***		
	Cách 1	***Cách 2***	***Cách 3***
d và *d'* song song	$\vec{a}, \overrightarrow{a'}$ cùng phương ***và*** $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương với $\vec{a}, \overrightarrow{a'}$	$\vec{a}, \overrightarrow{a'}$ cùng phương ***và*** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	$\vec{a}, \overrightarrow{a'}$ cùng phương ***và*** $M \in d \Rightarrow M \notin d'$
d và *d'* trùng nhau	$\vec{a}, \overrightarrow{a'}, \overrightarrow{MM'}$ cùng phương	Hệ phương trình (I) có vô số nghiệm	$\vec{a}, \overrightarrow{a'}$ cùng phương ***và*** $M \in d \Leftrightarrow M \in d'$
d và *d'* cắt nhau	$\vec{a}, \overrightarrow{a'}$ không cùng phương ***và*** $\left[\vec{a}, \overrightarrow{a'}\right].\overrightarrow{MM'} = 0$	Hệ phương trình (I) có đúng 1 nghiệm $(t;t') = (t_0; t'_0)$	
d và *d'* chéo nhau	$\vec{a}, \overrightarrow{a'}$ không cùng phương ***và*** $\left[\vec{a}, \overrightarrow{a'}\right].\overrightarrow{MM'} \neq 0$	$\vec{a}, \overrightarrow{a'}$ không cùng phương ***và*** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	

Chú ý: Cách giải Hệ phương trình (I), xem phần cách giải dạng toán "Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng"

4. Góc

Cho hai đường thẳng d, d' có lần lượt vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\overrightarrow{a'} = (a'_1; a'_2; a'_3)$ và hai mặt phẳng (α), (α') có lần lượt vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (A; B; C)$, $\overrightarrow{n'} = (A'; B'; C')$. Khi đó:

$\cos(d, d') = \dfrac{\left|\vec{a}.\overrightarrow{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\overrightarrow{a'}\right|} = \dfrac{\left|a_1 a'_1 + a_2 a'_2 + a_3 a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{a'^2_1 + a'^2_2 + a'^2_3}}$
$\sin(d, (\alpha)) = \dfrac{\left|\vec{a}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\left|a_1 A + a_2 B + a_3 C\right|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}.\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
$\cos((\alpha), (\alpha')) = \dfrac{\left|\vec{n}.\overrightarrow{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\overrightarrow{n'}\right|} = \dfrac{\left|A.A' + B.B' + C.C'\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.\sqrt{A'^2 + B'^2 + C'^2}}$

📖 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

(1) Nếu đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x = x_o + a_1t \\ y = y_o + a_2t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_o + a_3t \end{cases}$ thì d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ (tọa độ vectơ chỉ phương là các hệ số của tham số t)

(2) Nếu đường thẳng d có phương trình chính tắc $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$, $(a_1.a_2.a_3 \neq 0)$ thì d có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ (tọa độ vectơ chỉ phương là các số ở mẫu)

(3) Trục tọa độ Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i} = (1;0;0)$.

Trục tọa độ Oy có vectơ chỉ phương là $\vec{j} = (0;1;0)$.

Trục tọa độ Oz có vectơ chỉ phương là . $\vec{k} = (0;0;1)$

Ví dụ 47: Trong không gian $Oxyz$, xác định một vectơ chỉ phương của đường thẳng dưới đây:

a) $d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$, **b)** $d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{2}$, **c)** $d_3: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{2-z}{1}$

Lời giải

a) Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_1} = (-1; 2; 1)$.

b) Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_2} = (2; 1; 2)$.

c) Phương trình đường thẳng d_3 chưa đúng cấu trúc nên ta viết lại

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{2-z}{1} \Leftrightarrow d: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$$

Vậy đường thẳng d_3 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_3} = (2; 2; -1)$.

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG

(1) Cho đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_o + a_1t \\ y = y_o + a_2t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_o + a_3t \end{cases}$. Với mỗi giá trị của tham số t duy nhất xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

(2) Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$, $(a_1.a_2.a_3 \neq 0)$. Với mỗi giá trị duy nhất của các tỉ lệ thức ta xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

Ví dụ 48: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ hai điểm thuộc mỗi đường thẳng dưới đây:

a) $d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$, **b)** $d_2: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2}$,

Lời giải

a) Cho $t = 0$, ta tính được $x = 2 - 0 = 2;\ y = 1 + 2.0 = 1;\ z = 3 + 0 = 3$.

Vậy $A(2;1;3) \in d_1$ (tọa độ điểm A là các hệ số tự do trong các phương trình)

Cho $t = 1$, ta tính được $x = 2 - 1 = 1;\ y = 1 + 2.1 = 3;\ z = 3 + 1 = 4$. Vậy $A(1;3;4) \in d_1$

b) Cho $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2} = 0$, ta tính được $x = 1 + 2.0 = 1;\ y = 2 + 1.0 = 2;\ z = -1 + 2.0 = -1$.

Vậy $C(1;2;-1) \in d_2$ (tọa độ điểm C là số đối của các hệ số tự do ở các tử thức trong phương trình)

Cho $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{2} = 1$, ta tính được $x = 1 + 2.1 = 3;\ y = 2 + 1.1 = 3;\ z = -1 + 2.1 = 1$.

Vậy $D(3;3;1) \in d_2$

Dạng toán ☞ _LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG_

Phương pháp: Xác định yếu tố: Điểm đi qua và vectơ chỉ phương (như bảng dưới đây)

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)
Bước 2. Xác định tọa độ vectơ chỉ phương và tọa độ một điểm của đường thẳng
Bước 3. Thay vào phương trình tham số hay phưng trình chính tắc

Dạng	*Điều kiện xác định đường thẳng d (giả thiết cho)*	*Đi qua điểm*	*Vectơ chỉ phương*
1	*Qua A, B*	*A hay B*	$\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{AB}$
2	*Qua A và song song đường thẳng Δ*	*A*	$\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{a_\Delta}$
3	*Qua A và vuông góc mặt phẳng* (α)	*A*	$\overrightarrow{a_d} = \overrightarrow{n_\alpha}$
4	*Qua A và vuông góc 2 đường thẳng* d_1, d_2	*A*	$\overrightarrow{a_d} = \left[\overrightarrow{a_{d_1}}, \overrightarrow{a_{d_2}}\right]$
5	*Qua A, song song* (α) *và* (β) *(hay song song mặt phẳng này và chứa trong mặt phẳng kia)*	*A*	$\overrightarrow{a_d} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}\right]$
6	*Là giao tuyến của* (α) *và* (β)	$I \in (\alpha) \cap (\beta)$	$\overrightarrow{a_d} = \left[\overrightarrow{n_\alpha}, \overrightarrow{n_\beta}\right]$
7	*Qua A, vuông góc đường thẳng Δ và song song (hay chứa trong) mặt phẳng* (α)	*A*	$\overrightarrow{a_d} = \left[\overrightarrow{a_\Delta}, \overrightarrow{n_\alpha}\right]$

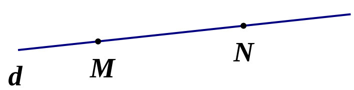
Ví dụ 49: Trong không gian *Oxyz*, viết phương trình của đường thẳng d

a) Đi qua hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(2;-3;1)$

b) Đi qua điểm $A(2;-1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x - z + 5 = 0$

Lời giải

a) Do đường thẳng d đi qua M, N nên $\overrightarrow{MN}$ có giá là đường thẳng d, suy ra đường thẳng d nhận $\overrightarrow{MN} = (-1; 3; 2)$ làm vectơ chỉ phương.

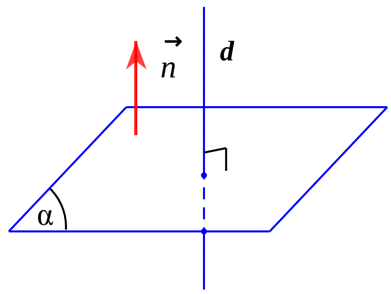


Đường thẳng d qua M nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2-t \\ y=3t \\ z=-1+2t \end{cases}$

Hay đường thẳng d qua N nên có phương trình chính tắc là $\frac{x}{-1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{2}$

Nhận xét. Đường thẳng qua 2 điểm M, N nên có thể chọn điểm tọa độ điểm M hay N để thế vào phương trình.

b) Do đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;0;-1)$ của mặt phẳng (α) có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d, suy ra đường thẳng d nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương.



Mà đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-1;0)$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$

Nhận xét. Do vectơ chỉ phương có thành phần tọa độ bằng 0 nên đường thẳng không viết được dạng phương trình chính tắc.

Dạng toán ☞ XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cách 1

Cho hai đường thẳng (d) đi qua điểm M, có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và (d') đi qua điểm M', có vectơ chỉ phương $\vec{a'}$

Vị trí tương đối	***Điều kiện***
d và *d’* song song	$\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương **và** $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương với $\vec{a}, \vec{a'}$
d và *d’* trùng nhau	$\vec{a}, \vec{a'}, \overrightarrow{MM'}$ cùng phương
d và *d’* cắt nhau	$\vec{a}, \vec{a'}$ không cùng phương **và** $\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}=0$
d và *d’* chéo nhau	$\vec{a}, \vec{a'}$ không cùng phương **và** $\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\neq 0$

Cách 2.

Trường hợp 1: Hai đường thẳng cho bởi phương trình tham số

Cho hai đường thẳng $(d):\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t \\ z=z_o+a_3t \end{cases}$ đi qua điểm $M(x_0;y_0;z_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$

và $(d'):\begin{cases} x=x'_o+a'_1.t' \\ y=y'_o+a'_2.t' \\ z=z'_o+a'_3.t' \end{cases}$ đi qua điểm $M'(x'_0;y'_0;z'_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$

Phương pháp

Bước 1. Lập Hệ phương trình tương giao giữa (*d*) và (*d’*): $(I):\begin{cases} x_o+a_1t=x'_o+a'_1.t' & (1) \\ y_o+a_2t=y'_o+a'_2.t' & (2) \\ z_o+a_3t=z'_o+a'_3.t' & (3) \end{cases}$.

Bước 2. Dựa vào nghiệm Hệ phương trình (I), ta kết luận vị trí tương đối:

Vị trí tương đối	*Điều kiện*	
d và *d'* song song	$\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương **và** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	$\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương **và** $M \in d \Rightarrow M \notin d'$
d và *d'* trùng nhau	Hệ phương trình (I) có vô số nghiệm	$\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương **và** $M \in d \Leftrightarrow M \in d'$
d và *d'* cắt nhau	Hệ phương trình (I) có đúng 1 nghiệm $(t;t') = (t_0;t'_0)$	
d và *d'* chéo nhau	$\vec{a}, \vec{a'}$ không cùng phương **và** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	

Trường hợp 2: Một phương trình tham số và một phương trình chính tắc.

Trường hợp 3: Hai phương trình chính tắc.

Phương pháp: Hai trường hợp này giải phức tạp nên đưa về trường hợp 1 để giải

Cách giải Hệ bậc nhất 2 ẩn gồm 3 phương trình

$$\begin{cases} x_o + a_1t = x'_o + a'_1.t' & (1) \\ y_o + a_2t = y'_o + a'_2.t' & (2) \\ z_o + a_3t = z'_o + a'_3.t' & (3) \end{cases} \quad (I) \text{ (ẩn } t,\ t')$$

Giải Hệ phương trình gồm 2 phương trình (thường chọn (1) và (2)) $\begin{cases} x_o + a_1t = x'_o + a'_1.t' & (1) \\ y_o + a_2t = y'_o + a'_2.t' & (2) \end{cases} \quad (II)$

① Nếu Hệ phương trình (II) vô nghiệm thì Hệ (*I*) vô nghiệm;

② Nếu Hệ phương trình (II) có 1 nghiệm $(t;t') = (t_0;t'_0)$ thì thế nghiệm này vào phương trình (3):

Nếu thỏa phương trình (3) thì Hệ phương trình (*I*) có 1 nghiệm $(t;t') = (t_0;t'_0)$;

Nếu không thỏa phương trình (3) thì Hệ phương trình (*I*) vô nghiệm;

③ Nếu Hệ phương trình (II) vô số nghiệm thì Giải Hệ gồm phương trình (2) và (3) (hay gồm phương trình (1) và (3)): Khi đó, nghiệm của Hệ phương trình này cũng là nghiệm của Hệ phương trình (*I*)

Ví dụ 50: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$

b) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d': \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{2}$

c) $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và $d': \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$

Lời giải

a) ***Dùng cách 1***

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;3)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;2;-1)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;3;5)$, có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{a'}=(2;4;-2)$

$\overrightarrow{MM'}=(1;3;2)$

Ta có: $\vec{a}=\frac{1}{2}\overrightarrow{a'}$ suy ra $\vec{a},\ \overrightarrow{a'}$ cùng phương

và $\overrightarrow{MM'}\neq k.\vec{a},\ \forall k$ suy ra $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương với $\vec{a},\ \overrightarrow{a'}$

Vậy hai đường thẳng *d* và *d'* song song

b) ***Cách 1***

Ta có: d qua $M(1;-1;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(2;3;1)$

d' qua $M'(1;-2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(3;2;2)$

$\overrightarrow{MM'}=(0;-1;-6)$

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

Và tính được $\left[\vec{a},\overrightarrow{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\neq 0$

Nên hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Cách 2

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

Do d' qua $M'(1;-2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(3;2;2)$ nên $d':\begin{cases}x=1+3t'\\y=-2+2t'\\z=-1+2t'\end{cases}(t'\in\mathbb{R})$

Xét hệ phương trình tương giao: $\begin{cases}1+2t=1+3t' & (1)\\-1+3t=-2+2t' & (2)\\5+t=-1+2t' & (3)\end{cases}$

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases}2t-3t'=0\\3t-2t'=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\frac{3}{5}\\t'=-\frac{2}{5}\end{cases}$

Thay $t=-\frac{3}{5},\ t'=-\frac{2}{5}$ vào phương trình (3), ta được: $5+\left(-\frac{3}{5}\right)=-1+2\left(-\frac{2}{5}\right)$ (Sai)

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Nhận xét. Chỉ nên dùng cách 1, nếu 2 đường thẳng cắt nhau và có yêu cầu tìm tọa độ giao điểm thì mới giải hệ phương trình tương giao.

c) ***Cách 1***

Ta có: d đi qua $M(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;2)$;

d' đi qua $M'(1;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(5;1;-2)$.

$\overrightarrow{MM'}=(1;1;-2)$

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương (tọa độ 2 vectơ không tỉ lệ) nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau

Và tính được $\left[\vec{a},\vec{a}'\right].\overrightarrow{MM'}=0$

Nên hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Chú ý. Cách này không tính được tọa độ giao điểm của hai đường thẳng nên những bài toán có yêu cầu tính tọa độ giao điểm thì ta phải dùng cách 2.

Cách 2

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

Phương trình tham số của d và d' lần lượt là $d:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1+5t'\\y=2+t'\\z=-2-2t'\end{cases}$

Xét hệ phương trình tương giao: $\begin{cases}t=1+5t' & (1)\\1-t=2+t' & (2)\\2t=-2-2t' & (3)\end{cases}$

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases}t-5t'=1\\-t-t'=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{2}{3}\\t'=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Thay $t=-\dfrac{2}{3}$, $t'=-\dfrac{1}{3}$ vào phương trình (3), ta được: $2\left(-\dfrac{2}{3}\right)=-2-2\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ (Đúng)

Suy ra hệ phương trình có một nghiệm $t=-\dfrac{2}{3}$, $t'=-\dfrac{1}{3}$

Thay $t=-\dfrac{2}{3}$ vào phương trình đường thẳng d (hay thay $t'=-\dfrac{1}{3}$ vào phương trình đường thẳng d'), ta tính được $x=-\dfrac{2}{3}$; $y=\dfrac{5}{3}$; $z=-\dfrac{4}{3}$

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm $I\left(-\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3};-\dfrac{4}{3}\right)$

Dạng toán ☞ TÍNH GÓC

Phương pháp: Dùng công thức ở mục 4.

Hay có thể Tính góc bằng máy tính cầm tay (MTCT).

Vào môi trường vector trên MTCT, tính góc giữa các cặp vectơ pháp tuyến của mặt phẳng hay vectơ chỉ phương của đường thẳng.

(1)Góc giữa hai đường thẳng d, d'

Nếu $0°\le\left(\vec{a},\vec{a}'\right)\le 90°$ thì $\left(d,d'\right)=\left(\vec{a},\vec{a}'\right)$;

Nếu $90°<\left(\vec{a},\vec{a}'\right)\le 180°$ thì $\left(d,d'\right)=180°-\left(\vec{a},\vec{a}'\right)$;

(2) Góc giữa hai mặt phẳng $\left((\alpha),(\alpha')\right)$

Nếu $0°\le\left(\vec{n},\vec{n}'\right)\le 90°$ thì $\left((\alpha),(\alpha')\right)=\left(\vec{n},\vec{n}'\right)$;

Nếu $90°<\left(\vec{n},\vec{n}'\right)\le 180°$ thì $\left((\alpha),(\alpha')\right)=180°-\left(\vec{n},\vec{n}'\right)$;

(3) Góc giữa đường thẳng d ***và mặt phẳng*** (α)

Nếu $0^\circ \le \left(\vec{a},\vec{n}\right) \le 90^\circ$ thì $\left(d,(\alpha)\right) = 90^\circ - \left(\vec{a},\vec{n}\right)$;

Nếu $90^\circ < \left(\vec{a},\vec{n}\right) \le 180^\circ$ thì $\left(d,(\alpha)\right) = 90^\circ - \left(180^\circ - \left(\vec{a},\vec{n}\right)\right) = \left(\vec{a},\vec{n}\right) - 90^\circ$

Ví dụ 51: Trong không gian $Oxyz$, tính các góc:

a) Giữa hai đường thẳng $d_1:\begin{cases} x = t \\ y = 5 - 2t \\ z = 14 - 3t \end{cases}$ và $d_2:\begin{cases} x = 1 - 4t' \\ y = 2 + t' \\ z = -1 + 5t' \end{cases}$.

b) Giữa đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-4}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + z - 1 = 0$.

c) Giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y + z + 10 = 0$ và $(Q): -x + y + 2z + 13 = 0$.

Lời giải

a) Đường thẳng d_1 có một VTCP $\vec{u}_1 = (1;-2;-3)$.

Đường thẳng d_2 có một VTCP $\vec{u}_2 = (-4;1;5)$.

Ta có: $\cos\left(d_1, d_2\right) = \dfrac{\left|\vec{u}_1.\vec{u}_2\right|}{\left|\vec{u}_1\right|.\left|\vec{u}_2\right|} = \dfrac{\left|1.(-4) + (-2).1 + (-3).5\right|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-3)^2}.\sqrt{(-4)^2 + 1^2 + 5^2}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $\left(d_1, d_2\right) = 30^\circ$

Dùng Máy tính cầm tay (MTCT)

Tính góc giữa 2 vectơ chỉ phương, ta được: $\left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right) = 150^\circ$

Vậy $\left(d_1, d_2\right) = 180^\circ - \left(\vec{u_1},\vec{u_2}\right) = 180^\circ - 150^\circ = 30^\circ$

b) Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{u} = (1;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n} = (2;1;1)$.

Ta có: $\sin\left(\Delta,(P)\right) = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \dfrac{\left|1.2 + 2.1 + (-1).1\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}.\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \dfrac{1}{2}$

Vậy $\left(\Delta,(P)\right) = 30^\circ$

Dùng MTCT

Tính góc giữa 2 vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng, ta được: $\left(\vec{u},\vec{n}\right) = 60^\circ$

Vậy $\left(\Delta,(P)\right) = 90^\circ - \left(\vec{u},\vec{n}\right) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

c) Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_1 = (1;2;1)$.

Mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n}_2 = (-1;1;2)$.

Ta có: $\cos\left((P),(Q)\right) = \dfrac{\left|\vec{n}_1.\vec{n}_2\right|}{\left|\vec{n}_1\right|.\left|\vec{n}_2\right|} = \dfrac{\left|1.(-1) + 2.1 + 1.2\right|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}.\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2}} = \dfrac{1}{2}$

Vậy $\left((P),(Q)\right) = 60^\circ$

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. Khái niệm mặt cầu

Định nghĩa

Tập hợp các điểm trong không gian cách đều điểm I cố định một khoảng không đổi R gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R. Kí hiệu là $S(I,R)$.

Đoạn thẳng nối hai điểm trên mặt cầu và đi qua tâm gọi là đường kính của mặt cầu.

2. Phương trình mặt cầu

(1) Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ***(1)***

(2) Phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ ***(2)*** với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

3. Vị trí tương đối

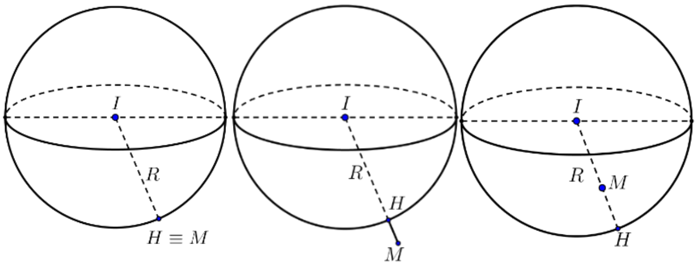
a) Điểm với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(I,R)$ và điểm M

(1) Nếu $IM=R$ thì điểm M nằm trên mặt cầu

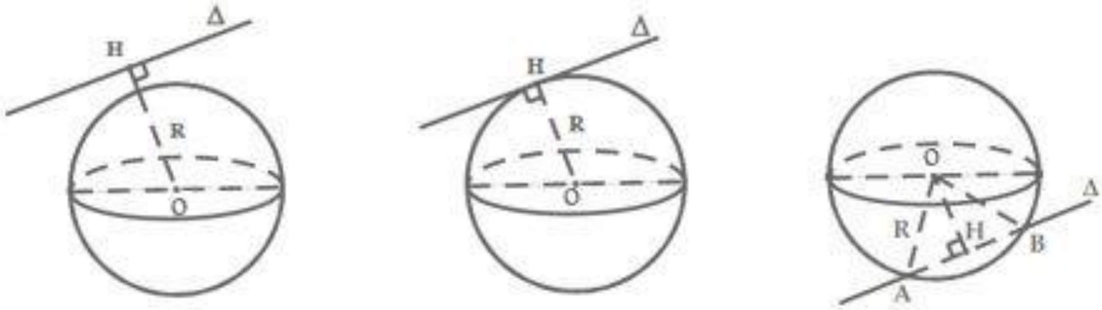
(2) Nếu $IM>R$ thì điểm M nằm ngoài mặt cầu

(3) Nếu $IM<R$ thì điểm M nằm trong mặt cầu



b) Đường thẳng với mặt cầu

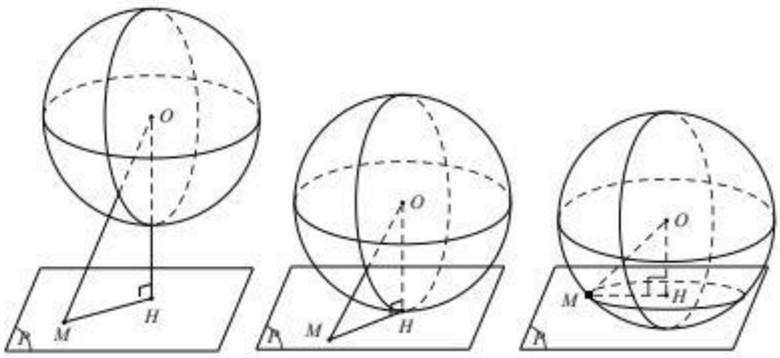
Cho mặt cầu (S) có tâm *I*, bán kính R và đường thẳng Δ.



(1) $d(I,\Delta)>R$	$(S)\cap\Delta=\varnothing$	Δ không cắt (S)
(2) $d(I,\Delta)=R$	$(S)\cap\Delta=\{H\}$	Δ tiếp xúc (S) tại H (*H*: tiếp điểm, Δ: tiếp tuyến)
(3) $d(I,\Delta)<R$	$(S)\cap\Delta=\{A;B\}$	Δ cắt (S) tại 2 điểm *A*, *B*

c) Mặt phẳng với mặt cầu

Cho (S): $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (tâm *I*, bán kính R) và $(P): Ax+By+Cz+D=0$



(1) $d(I,(P))>R$	$(S)\cap(P)=\varnothing$	(P) không cắt (S) nhau
(2) $d(I,(P))=R$	$(S)\cap(P)=\{H\}$	(P) tiếp xúc (S) tại H (*H* gọi là tiếp điểm, (P) gọi là tiếp diện)

(3) $d\left(I,(P)\right)<R$	$(S)\cap(P)=C(H;r)$	(P) cắt (S) theo một đường tròn có tâm H (là hình chiếu của I lên (P)) và bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2}$, với $d=d\left(I,(P)\right)$

🕮 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ TÂM VÀ BÁN KÍNH CỦA MẶT CẦU CHO BỞI PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 52: Trong không gian $Oxyz$, trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu và xác định tọa độ tâm, bán kính.

a) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ **b)** $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0.$

c) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$ **d)** $x^2+y^2+z^2+2x-2y+5=0$

Lời giải

a) Phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ đúng dạng (1) và có $a=1,\ b=-2,\ c=0,\ R^2=9$

Vậy phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=3$.

b) Phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0.$ đúng dạng (2) và có $a=1,\ b=-2,\ c=3,\ d=-2$ *(lấy hệ số của $x,\ y,\ z$ lần lượt chia cho -2 ta được $a,\ b,\ c$ và d là hệ số tự do)*

Kiểm tra điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d=1^2+(-2)^2+3^2-(-2)=16>0$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2-(-2)}=4$.

c) Phương trình $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$ không đúng dạng (1) và (2).

Vậy phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

d) Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-2y+5=0$ đúng dạng (2) và có $a=-1,\ b=1,\ c=0,\ d=5$

Kiểm tra điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d=(-1)^2+1^2+0^2-5=-3<0$ (không thỏa điều kiện)

Vậy phương trình đã cho là không phải phương trình của mặt cầu.

Dạng toán ☞ LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Cách 1: Xác định yếu tố: Tâm và bán kính, (như bảng dưới đây)

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

Bước 2. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu

Bước 3. Thay vào PT (1).

Xác định tâm và bán kính của các mặt cầu thường gặp

Dạng	Điều kiện xác định mặt cầu (giả thiết cho)	Tâm	Bán kính
Dạng 1	Mặt cầu (S) tâm I đi qua A	I	$R=IA$
Dạng 2	Mặt cầu (S) đường kính AB	I là trung điểm AB	$R=\dfrac{AB}{2}$
Dạng 3	Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc mặt phẳng(α)	I	$R=\mathrm{d}\left(I,(\alpha)\right)$
Dạng 4	Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc đường thẳng Δ	I	$R=\mathrm{d}(I,\Delta)$
Dạng 5	Mặt cầu (S) tâm I và cắt mp(α) theo đường tròn có bán kính r	I	$R=\sqrt{r^2+d^2}$ với $d=\mathrm{d}\left(I,(\alpha)\right)$

Cách 2: Xác định hệ số (Áp dụng cho trường hợp xác định tâm và bán kính gặp khó khăn)

Bước 1. Gọi mặt cầu đã cho có PT dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$, (2)

Bước 2. Từ giả thiết lập hệ 4 PT ẩn *a, b, c, d* → Giải tìm a,b,c,d

Bước 3. Thay vào PT (2)

Dạng 6: Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD (hay đi qua 4 điểm A, B, C, D)

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2)

$\Leftrightarrow 2ax+2by+2cz-d=x^2+y^2+z^2$ (2')

+ $A,\ B,\ C,\ D\in(S)\Rightarrow$ Tọa độ 3 điểm *A, B, C, D* thỏa mãn PT(2) → Thay tọa độ *A, B, C, D* vào PT(2), Ta được hệ 4 phương trình 4 ẩn a,b,c,d

+ Giải hệ tìm a,b,c,d

Dạng 7: Mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm I $\in$ (α)

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a;b;c)$

+ A, *B, C* $\in$ *(S)* $\Rightarrow$ Tọa độ 3 điểm *A, B, C* thỏa mãn PT(2) → Thay tọa độ 3 điểm *A, B, C* vào PT(2), Ta được 3 phương trình 4 ẩn a,b,c,d

+ Tâm $I(a;b;c)\in$ (α)$\Rightarrow$ *a, b, c* thỏa mãn phương trình mặt phẳng(α) → Thay *a, b, c* vào phương trình mặt phẳng(α), ta được thêm 1 PT 4 ẩn a,b,c,d

+ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a,b,c,d

Dạng 8: Mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B và tâm I $\in$ (d)

Cách 1*: Đường thẳng (d) cho bởi phương trình tham số*

+ $I\in(d)\Rightarrow I(x_0+a_1t;y_0+a_2t;z_0+a_3t)$

+ $A,\ B\in(S)\Rightarrow AI^2=BI^2$ → Ta được phương trình ẩn t → Giải tìm t → Thay t, tìm tọa độ điểm I

Cách 2*: Đường thẳng (d) cho bởi phương trình chính tắc:*

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a;b;c)$

+ $A,\ B\in(S)\Rightarrow$ tọa độ điểm *A, B* thỏa mãn PT(2) → Thay tọa độ *A, B* vào PT(2), Ta được 2 phương trình 4 ẩn a,b,c,d

+ Tâm $I(a,b,c)\in(d)\Rightarrow$ *a, b, c* thỏa mãn phương trình đường thẳng (*d*) → Thay *a, b, c* vào phương trình đường thẳng (*d*), ta được thêm 2 PT 3 ẩn *a, b, c*

+ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a,b,c,d

Ví dụ 53: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu (S) trong các trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

b) Có đường kính AB với $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$.

c) Có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy).

d) Đi qua bốn điểm $M(2;2;2),N(4;0;2),P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$

Lời giải

a) Do mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$ nên có bán kính là $R=IA=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

b) Do mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm $I(2;1;-1)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB và bán kính là $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{6}$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$.

c) Do mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc (Oxy) nên có bán kính $R=d(I;(Oxy))=\sqrt{z_I^2}=\sqrt{(1)^2}=1$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$.

d) Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\ \left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$

$$\Leftrightarrow 2ax+2by+2cz-d=x^2+y^2+z^2\ (*)$$

Vì $M,N,P,Q\in(S)$ nên tọa độ 4 điểm thỏa mãn phương trình (*) (thay tọa độ 4 điểm vào (*))

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}4a+4b+4c-d=2^2+2^2+2^2\\8a+0b+4c-d=4^2+0^2+2^2\\8a+4b+0c-d=4^2+2^2+0^2\\8a+4b+4c-d=4^2+2^2+2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\\c=1\\d=8\end{cases}$

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y-2z+8=0$

Chú ý

Với dạng toán lập phương trình mặt cầu qua 4 điểm thì ta có thể giải trực tiếp bằng "Máy tính cầm tay": Giải Hệ phương trình bậc nhất 4 ẩn với "5 hệ số" ở mỗi phương trình, theo quy tắc như sau:

- ☞ 3 hệ số đầu, lần lượt là các thành phần tọa độ của các điểm ***nhân 2***
- ☞ Hệ số thứ tư, luôn bằng -1
- ☞ Hệ số thứ năm (hệ số tự do ở vế phải), là ***tổng bình phương*** của các thành phần tọa độ của các điểm.

✓ BỔ SUNG MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN THIẾT

🕮 TÌM TOẠ ĐỘ GIAO ĐIỂM

➤ Giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

→ Lập phương trình tương giao (Lấy phương trình tham số của đường thẳng thế vào phương trình tổng quát của mặt phẳng)

→ Giải tìm được $t=t_0$

→ Thế $t=t_0$ vào phương trình tham số của đường thẳng

→ Tính được $x,\ y,\ z$ là tọa độ giao điểm.

➤ Giao điểm của hai đường thẳng

→ Lập Hệ phương trình tương giao giữa 2 đường thẳng $(I):\begin{cases}x_o+a_1t=x'_o+a'_1.t' & (1)\\y_o+a_2t=y'_o+a'_2.t' & (2)\\z_o+a_3t=z'_o+a'_3.t' & (3)\end{cases}$

→ Giải như trên (Xem cách giải ở mục ***4.***): Nếu Hệ có 1 nghiệm $(t_0;t'_0)$ thì thế $t=t_0$ vào phương trình đường thẳng có tham số t hay thế $t'=t'_0$ vào phương trình đường thẳng có tham số t'

→ Tính được $x,\ y,\ z$ là tọa độ giao điểm.

➤ Giao điểm của hai mặt phẳng

→ Lập Hệ phương trình tương giao (gồm 2 phương trình của 2 mặt phẳng và có 3 ẩn $x,\ y,\ z$)

→ Cho 1 số tùy ý vào một ẩn nào đó (Thường cho $z=0$)

→ Ta được Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn $x,\ y$

→ Giải tìm được nghiệm $(x_0;y_0)$

→ Tọa độ giao điểm là $(x_0; y_0; 0)$

➢ Giao điểm của đường thẳng và mặt cầu

→ Lập phương trình tương giao (Thế phương trình tham số của đường thẳng vào phương trình mặt cầu)

→ Giải phương trình, tìm được nghiệm $t = t_0$

→ Thế $t = t_0$ vào phương trình tham số của đường thẳng

→ Tính được x, y, z là tọa độ giao điểm.

Ví dụ 54: Trong không gian $Oxyz$, tìm toa độ giao điểm của đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 2 = 0$

Lời giải

Thay phương trình tham số của đường thẳng d vào phương trình mặt phẳng (α), ta được:

$2(1+t) + (2-2t) - (3+3t) + 2 = 0 \Rightarrow -3t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1$

Thay $t = 1$ ngược lại vào phương trình đường thẳng d, ta được:

$x = 1 + 1 = 2$; $y = 2 - 2(1) = 0$; $z = 3 + 3(1) = 6$

Kết quả: Giao điểm là $M(2;0;6)$.

Ví dụ 55: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ giao điểm cảu mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 56$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}$

Lời giải

Thay phương trình tham số của đường thẳng d vào phương trình mặt cầu (S), ta được:

$(t-1)^2 + (-2t+2)^2 + (3t-3)^2 = 56$, khai triển thu gọn, ta được:

$t^2 - 2t - 3 = 0$, giải phương trình ta được 2 nghiệm: $t = -1$; $t = 3$

Thay t vào phương trình đường thẳng d, ta được:

Với $t = -1$: $x = -1$; $y = 2$; $z = -3 \Rightarrow M_1(-1;2;-3)$

Với $t = 3$: $x = 3$; $y = -6$; $z = 9 \Rightarrow M_2(3;-6;9)$

Vậy giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S) là $M_1(-1;2;-3)$ và $M_2(3;-6;9)$

TÌM HÌNH CHIẾU

➢ Tìm hình chiếu của điểm lên mặt phẳng

Tìm tọa độ hình chiếu H của điểm M lên $mp(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$

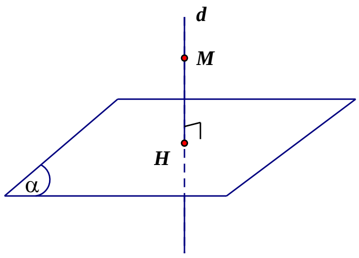
Cách 1.

→ H là hình chiếu của M lên $(\alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (\alpha) \\ \overrightarrow{MH} = k.\overrightarrow{n_\alpha} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Ax_H + By_H + Cz_H + D = 0 \\ x_H - x_M = A.k \\ y_H - y_M = B.k \\ z_H - z_M = C.k \end{cases}$

→ Giải hệ phương trình, tìm được tọa độ điểm H

Cách 2.

→ Lập phương trình (tham số) đường thẳng (d) qua M và vuông góc mp(α): $\begin{cases} x = x_M + At \\ y = y_M + Bt, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_M + Ct \end{cases}$



→ Lập phương trình tương giao giữa (d) và (α):

$$A(x_M + At) + B(y_M + Bt) + C(z_M + Ct) + D = 0$$

→ Giải phương trình, tìm được nghiệm $t = t_0$

→ Thế $t = t_0$ vào phương trình tham số của đường thẳng (d)

→ Tính được $x,\ y,\ z$ là tọa độ của điểm H

➢ Tìm hình chiếu của điểm lên đường thẳng

Tìm tọa độ H là hình chiếu của M lên đường thẳng (d): $\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$

Cách 1.

→ H là hình chiếu của M lên $(d) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{u_d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{a_d} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = x_o + a_1 t \\ y_H = y_o + a_2 t \\ z_H = z_o + a_3 t \\ (x_H - x_M).a_1 + (y_H - y_M).a_2 + (z_H - z_M).a_3 = 0 \end{cases}$$

→ Giải hệ phương trình, tìm tọa độ điểm H.

Cách 2.

→ Lập phương trình mp(α) qua M và vuông góc đương thẳng (d):

$(x - x_M).a_1 + (y - y_M).a_2 + (z - z_M).a_3 = 0$

→Đưa về dạng: $a_1 x + a_2 y + a_3 z + n = 0$

→ Lập phương trình tương giao giữa (d) và (α): $a_1(x_0 + a_1 t) + a_2(y_0 + a_2 t) + a_3(z_0 + a_3 t) + n = 0$

→Giải phương trình, tìm t

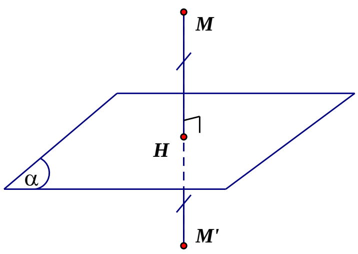
→ Thay t vào phương trình (d), Ta được tọa độ điểm H

🕮 TÌM ĐIỂM ĐỐI XỨNG

➢ Tìm điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α)

→ Tìm hình chiếu H của M lên mặt phẳng(α). Khi đó, H là trung điểm của MM'

→ Tọa độ M' là $\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$



➢ Tìm Điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng (d)

→ Tìm hình chiếu H của M lên đường thẳng (d). Khi đó, H là trung điểm của MM'

→ Tọa độ M': $\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$

TÍNH KHOẢNG CÁCH

➢ Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M\left(x_0; y_0; z_0\right)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$\mathrm{d}\left(M,(\alpha)\right) = \frac{\left|Ax_o + By_o + Cz_o + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

➢ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cách 1.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ***là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu H của M lên đường thẳng*** Δ **.**

→ Tìm điểm H là hình chiếu của M lên đường tthẳng Δ.

→ Khi đó: $\mathrm{d}\left(M;\Delta\right) = MH$

Cách 2.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được tính bởi công thức

$$\mathrm{d}\left(M,\Delta\right) = \frac{\left|\overrightarrow{M_0M} \wedge \overrightarrow{a_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\right|},$$ với $M_0 \in \Delta$ và $\overrightarrow{a_\Delta}$ là vectơ chỉ phương của Δ

➢ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): A'x + B'y + C'z + D' = 0$, với $\left(A'; B'; C'\right) = k\left(A; B; C\right)$

Cách 1. Bằng khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

→ Lấy $M\left(x_0; y_0; z_0\right) \in (\beta)$.

→ Khi đó: $\mathrm{d}\left((\alpha),(\beta)\right) = \mathrm{d}\left(M;(\alpha)\right) = \dfrac{\left|Ax_o + By_o + Cz_o + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Cách 2.

→ Đồng nhất hệ số của phương trình 2 mặt phẳng: Biến đổi 2 phương trình của 2 mặt phẳng sao cho các hệ số của x, y, z tương ứng bằng nhau. Chẳng hạn $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ và $(\beta): Ax + By + Cz + D_0 = 0$

→ Khi đó: $d\left((\alpha);(\beta)\right) = \dfrac{\left|D - D_0\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

➢ Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ song song với nhau ***bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (α).***

→ Lấy $M\left(x_0; y_0; z_0\right) \in \Delta$.

→ Khi đó: $\mathrm{d}\left(\Delta;(\alpha)\right) = \mathrm{d}\left(M;(\alpha)\right) = \dfrac{\left|Ax_o + By_o + Cz_o + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

➢ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Cách 1.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau ***là khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) song song chứa đường thẳng d'.***

→ Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ' và song song với Δ.

→ Lấy $M(x_0;y_0;z_0)\in\Delta$.

→ Khi đó: $\mathrm{d}(\Delta;\Delta')=\mathrm{d}(\Delta;(\alpha))=\mathrm{d}(M;(\alpha))=\dfrac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

Cách 2.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau được tính bởi công thức:

$\mathrm{d}(\Delta,\Delta')=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{a_\Delta}\wedge\overrightarrow{a_{\Delta'}}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\wedge\overrightarrow{a_{\Delta'}}\right|}$, với $A\in d, B\in\Delta$ và $\overrightarrow{a_\Delta}$, $\overrightarrow{a_{\Delta'}}$ là vectơ chỉ phương của Δ, Δ'

TÍNH GÓC

Xem mục 4 và Dạng toán tính góc ở Bài 3 "Phương trình Đường thẳng"

CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến một điểm cố định A nhỏ nhất.

Khi đó, M là hình chiếu của A lên mặt phẳng (α) (Cách tìm hình chiếu xem mục phía trên)

Dạng 2: Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ điểm M đến một điểm cố định A nhỏ nhất.

Khi đó, M là hình chiếu của A lên đường thẳng Δ (Cách tìm hình chiếu xem mục phía trên)

Dạng 3: Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

TH1: Nếu *A*, *B* khác phía so với $mp(\alpha)$ thì $M=AB\cap(\alpha)$

TH2: Nếu *A*, *B* cùng phía so với $mp(\alpha)$ thì $M=AB'\cap(\alpha)$, với *B'* là điểm đối xúng của *B* lên $mp(\alpha)$

hay $M=A'B\cap(\alpha)$, với *A'* là điểm đối xứng của *A* lên $mp(\alpha)$

<u>Chú ý</u>: Vị trí tương đối của 2 điểm với mặt phẳng:

Cho hai điểm $M(x_M;y_M), N(x_N;y_N)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó:

☝ *M* và *N* nằm cùng phía đối với $mp(\alpha)\Leftrightarrow(Ax_M+By_M+Cz_M+D)(Ax_N+By_N+Cz_N+D)>0$

✌ *M* và *N* nằm khác phía đối với $mp(\alpha)\Leftrightarrow(Ax_M+By_M+Cz_M+D)(Ax_N+By_N+Cz_N+D)<0$

Dạng 4: Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$(hay đường thẳng Δ) sao cho $k.MA^2+h.MB^2$ hay $\left|k.\overrightarrow{MA}+h.\overrightarrow{MB}\right|$ ***nhỏ nhất.***

→ Tìm tọa độ điểm *I* thỏa $k.\overrightarrow{IA}+h.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

→ *M* là hình chiếu của *I* lên mặt phẳng (α) (hay đường thẳng Δ)

Mở rộng:

Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$ (hay đường thẳng Δ) ***sao cho*** $k_1.MA_1^2+k_2.MA_2^2+...+k_n.MA_n^2$

hay $\left|k_1.\overrightarrow{MA_1}+k_2.\overrightarrow{MA_2}+...+k_n.\overrightarrow{MA_n}\right|$ ***nhỏ nhất.***

→ Tìm tọa độ điểm *I* thỏa $k_1.\overrightarrow{IA_1}+k_2.\overrightarrow{IA_2}+...+k_n.\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$

→ Khi đó, điểm M là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (α) (hay lên đường thẳng Δ)

Dạng 5: Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến một điểm cố định A nhỏ nhất (lớn nhất).

→ Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua tâm I và điểm A

→ Tìm giao điểm của (d) và (S) là M_1, M_2

→ Tính AM_1, AM_2. So sánh và kết luận.

Dạng 6: Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) nhỏ nhất (lớn nhất).

→ Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua tâm I của mặ cầu (S) và vuông góc $mp(\alpha)$

→ Tìm giao điểm của (d) và (S) là M_1, M_2

→ Tính khoảng cách từ M_1, M_2 đến mặt phẳng (α). So sánh và kết luận.

PHẦN☞ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

CHƯƠNG ☞ CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Bài 1. KHOẢNG BIẾN THIÊN KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Khoảng biến thiên

Khoảng biến thiên, kí hiệu R, của mẫu số liệu ghép nhóm là hiệu số giữa đầu mút phải của nhóm cuối cùng và đầu mút trái của nhóm đầu tiên có chứa dữ liệu của mẫu số liệu.

Chú ý:

Xét mẫu số liệu ghép nhóm được cho ở bảng sau:

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\dots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Nếu n_1 và n_{k+1} cùng khác 0 thì $R=u_{k+1}-u_1$.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm luôn lớn hơn hoặc bằng khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

Khoảng biến thiên $R=u_{k+1}-u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

Ví dụ 56: Cô Hà thống kê lại đường kính thân gỗ của một số cây xoan đào 6 năm tuổi được trồng ở một lâm trường ở bảng sau.

Đường kính (cm)	[40; 45)	[45; 50)	[50; 55)	[55; 60)	[60; 65)
Tần số	5	20	18	7	3

Hãy tìm khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

Lời giải

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là $65-40=25(\text{ cm})$.

Ý nghĩa của khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm

□Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ khoảng biến thiên của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu.

□Khoảng biến thiên $R=u_{k+1}-u_1$ chưa phản ánh được đầy đủ mức độ phân tán của phần lớn các số liệu. Hơn nữa, giá trị của R thường tăng vọt khi xuất hiện giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Do đó, để phản ánh mức độ phân tán của số liệu, người ta còn dùng các số đặc trưng khác.

2. Khoảng tứ phân vị

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\dots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Tứ phân vị thứ i, kí hiệu là Q_v, với $i=1,2,3$ của mẫu số liệu ghép nhóm (Bảng 1) được xác định như sau:

$$Q_i=u_m+\frac{\frac{i.n}{4}-C}{n_m}(u_{m+1}-u_m)$$

Trong đó:

□ $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ là cỡ mẫu;

□ $[u_m;u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i;

□ n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i;

□ $C=n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}$ (Tổng tần số các nhóm trước nhóm chứa tứ phân vị ***gọi là tần số tích lũy)***.

Chú ý

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cũng được xác định dựa trên tứ phân vị thứ nhất và tứ phân vị thứ ba như đối với mẫu số liệu không ghép nhóm.

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm cho ở Bảng 1, kí hiệu Δ_Q, là hiệu giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất: $\Delta_Q=Q_3-Q_1$.

Ý nghĩa của khoảng tứ phân vi của mẫu số liêu ghép nhóm

□Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và có thể dùng để đo mức độ phân tán của nửa giữa của mẫu số liệu (tập hợp gồm 50% số liệu nằm chính giữa mẫu số liệu).

□Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm càng nhỏ thì dữ liệu càng tập trung xung quanh trung vị.

□Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu. Giá trị x trong mẫu số liệu là giá trị ngoại lệ nếu $x>Q_3+1,5\Delta_Q$ hoặc $x<Q_1-1,5\Delta_Q$.

□Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm không bị ảnh hưởng nhiều bởi các giá trị ngoại lệ trong mẫu số liệu.

QUY TẮC TÌM CÁC TỨ PHÂN VỊ VÀ KHOẢNG TỨ PHÂN VỊ CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\cdots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Bước 1: Xác định cỡ mẫu $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$

Bước 2: Xác định các nhóm chứa các tứ phân vị

Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được $x_1\le x_2\le\ldots\le x_n$.

- Trung vị của mẫu, ki hiệu là M_e, là giá trị ở chính giữa dãy $x_1,x_2,\cdots,x_n$. Cụ thể:

+ Nếu n lẻ thì trung vị mẫu là $M_e=x_{\frac{n+1}{2}}$ (Số liệu đứng chính giữa)

+ Nếu n chẵn thì trung vị mẫu là $M_e=\dfrac{1}{2}\left(x_{\frac{n}{2}}+x_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (Trung bình cộng của 2 số liệu ở giữa)

- Tứ phân vị của một mẫu ngẫu nhiên gồm 3 giá trị, đó là tư phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba (lần lượt ki hiệu là Q_1,Q_2,Q_3). Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau. Cụ thể:

+ Giá trị tứ phân vị thứ hai, Q_2, chinh là trung vị của mẫu.

+ Giá trị tứ phân vị thứ nhất, Q_1, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

+ Giá trị tứ phân vị thứ ba, Q_3, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Bước 3: Xác định các đại lượng, yếu tố và thay vào công thức tính tứ phân vị

□ $[u_m;u_{m+1})$ là nhóm chứa tứ phân vị thứ i;

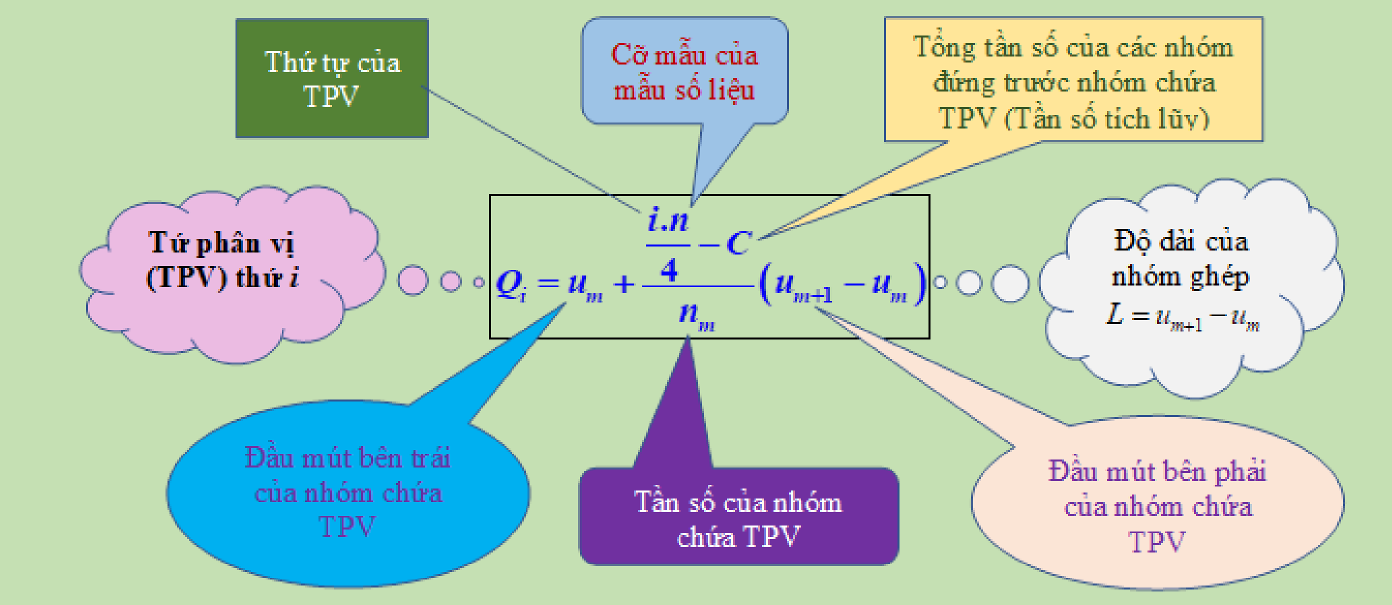
□ n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ i;

□ $C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$ (Tổng tần số các nhóm trước nhóm chứa tứ phân vị ***gọi là tần số tích lũy)***.

$$Q_i = u_m + \frac{\frac{i.n}{4} - C}{n_m}\left(u_{m+1} - u_m\right)$$

CÁCH GHI NHỚ VÀ ÁP DỤNG CÔNG THỨC TÍNH TỨ PHÂN VỊ

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\ldots$	$[u_{m-1};u_m)$	$[u_m;u_{m+1})$	$\ldots$	$[u_k;u_{k+1})$	Cỡ mẫu
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_{m-1}	n_m	$\ldots$	n_k	n
	$C = n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$				Nhóm chứa tứ phân vị			



QUY TẮC TÌM GIÁ TRỊ NGOẠI LỆ

Bước 1: Xác định các tứ phân vị và tính giá trị khoảng tứ phân vị: $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Bước 2: Tính $Q_1 - 1,5\Delta_Q$ và $Q_3 + 1,5\Delta_Q$.

Bước 3: Kết luận: các giá trị x (trong mẫu số liệu) nằm ngoài đoạn $\left[Q_1 - \frac{3}{2}\Delta_Q; Q_3 + \frac{3}{2}\Delta_Q\right]$ là ***giá trị ngoại lệ***

Vùng chứa giá trị ngoại lệ

x_1	***Giá trị ngoại lệ***	$Q_1 - 1,5\Delta_Q$		$Q_3 + 1,5\Delta_Q$	***Giá trị ngoại lệ***	x_n

Ví dụ 57: Hằng ngày ông Thắng đều đi xe buýt từ nhà đến cơ quan. Dưới đây là bảng thống kê thời gian của 100 lần ông Thắng đi xe buýt từ nhà đến cơ quan.

Thời gian (phút)	[15; 18)	[18; 21)	[21; 24)	[24; 27)	[27; 30)	[30; 33)
Số lượt	22	38	27	8	4	1

a) Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên.

b) Biết rằng trong 100 lần đi trên, chỉ có đúng một lần ông Thắng đi hết hơn 29 phút. Thời gian của lần đi đó có phải là giá trị ngoại lệ không?

Lời giải

a) Cỡ mẫu $n = 100$.

Gọi $x_1;x_2;\ldots;x_{100}$ là mẫu số liệu gốc gồm thời gian 100 lần đi xe buýt của ông Thắng.

Ta có: $x_1,\ldots,x_{22}\in[15;18);x_{23},\ldots,x_{60}\in[18;21);x_{61},\ldots,x_{87}\in[21;24);x_{88},\ldots,x_{95}\in[24;27)$; $x_{96},\ldots,x_{99}\in[27;30);x_{100}\in[30;33)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{25}+x_{26})\in[18;21)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_1=18+\dfrac{\frac{100}{4}-22}{38}\cdot(21-18)=\dfrac{693}{38}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{75}+x_{76})\in[21;24)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là $Q_3=21+\dfrac{\frac{3\cdot100}{4}-(22+38)}{27}\cdot(24-21)=\dfrac{68}{3}$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q=\dfrac{68}{3}-\dfrac{693}{38}=\dfrac{505}{114}$.

b) Trong lần duy nhất ông Thắng đi hết hơn 29 phút, thời gian đi của ông thuộc nhóm [30; 33). Vì $Q_3+1,5\Delta_Q=\dfrac{6683}{228}<30$ nên thời gian của lần ông Thắng đi hết hơn 29 phút là giá trị ngoại lệ của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bài 2. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN CỦA MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Phương sai và độ lệch chuẩn

Ở lớp 11, ta đã biết giá trị đại diện của nhóm $[a;b)$ là $c=\frac{1}{2}(a+b)$.

Tương tự như cách tính số trung bình, phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được xác định thông qua giá trị đại diện và tần số của mỗi nhóm.

Xét mẫu số liệu ghép nhóm cho bởi bảng sau:

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\ldots$	$[u_k;u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	$\ldots$	c_k
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S^2, được tính bởi công thức:

$$S^2=\frac{1}{n}\left[n_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+n_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2\right]$$

Trong đó: $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$ là cỡ mẫu

$\overline{x}=\frac{1}{n}(n_1c_1+n_2c_2+\ldots+n_kc_k)$ là số trung bình

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu S, là căn bậc hai số học của phương sai.

Chú ý

(1) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm có thể được tính theo công thức sau:

$$S^2=\frac{1}{n}\left(n_1c_1^2+n_2c_2^2+\ldots+n_kc_k^2\right)-\overline{x}^2$$

(2) Trong thống kê, người ta còn dùng đại lượng sau để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$\hat{s}^2 = \frac{1}{n-1}\left[n_1\left(c_1-\overline{x}\right)^2 + n_2\left(c_2-\overline{x}\right)^2 + \ldots + n_k\left(c_k-\overline{x}\right)^2\right].$$

2. Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm

(1) Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho phương sai của mẫu số liệu gốc. Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm cũng là giá trị xấp xỉ cho độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc. Chúng được dùng để đo mức độ phân tán của mẫu số liệu ghép nhóm. Phương sai và độ lệch chuẩn càng lớn thì dữ liệu càng phân tán.

(2) Độ lệch chuẩn có cùng đơn vị với đơn vị của mẫu số liệu.

Ví dụ 58: Thống kê tổng số giờ nắng trong tháng 9 tại một trạm quan trắc đặt ở Cà Mau trong các năm từ 2002 đến 2021 được thống kê như sau:

111,6	134,9	130,3	134,2	140,9	109,3	154,4	156,3	116,1	96,7
105,2	80,8	80,8	110	109	139	145	161	126	114

a) Hãy tính phương sai và độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên.

b) Hãy lập bảng tần số ghép nhóm với nhóm đầu tiên là $[80;98)$ và độ dài mỗi nhóm bằng 18. Tính phương sai, độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm.

c) Hãy tính sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc.

(Kết quả các phép tính làm tròn đến hàng phần nghìn.)

Lời giải

a) Cỡ mẫu là $n = 20$.

Số trung bình của mẫu số liệu trên là $\overline{x}_1 = \dfrac{111,6+134,9+\ldots+114}{20} = 122,755.$

Phương sai của mẫu số liệu trên là $S_1^2 = \dfrac{1}{20}\left(111,6^2+134,9^2+\ldots+114^2\right) - 122,755^2 \approx 515,453.$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu trên là $S_1 \approx \sqrt{515,453} \approx 22,704.$

b) Ta có bảng sau:

Số giờ nắng	[80; 98)	[98; 116)	[116; 134)	[134; 152)	[152; 170)
Giá trị đại diện	89	107	125	143	161
Số năm	3	6	3	5	3

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là $\overline{x}_2 = \dfrac{3.89+6.107+3.125+5.143+3.161}{20} = 124,1.$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$S_2^2 = \dfrac{1}{20}\left(3.89^2+6.107^2+3.125^2+5.143^2+3.161^2\right) - 124,1^2 = 566,19.$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_2 = \sqrt{566,19} \approx 23,795.$

c) Sai số tương đối của độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm so với độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gốc là

$\dfrac{|S_2 - S_1|}{S_1} = \dfrac{|23,795-22,704|}{22,704} \cdot 100\% \approx 4,805\%.$

CHƯƠNG ☞ XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

Bài 1. XÁC SUẤT CÓ ĐIỀU KIỆN

1. Định nghĩa xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B. Xác suất của biến cố A với điều kiện biến cố B đã xảy ra được gọi là xác suất của A với điều kiện B. Kí hiệu $P(A|B)$.

2. Công thức tính xác suất có điều kiện

Cho hai biến cố A và B trong đó $P(B)>0$. Khi đó: $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$

Chú ý

(1) Giao của hai biến cố A và B còn được kí hiệu AB *hay* $A\cap B=AB$

(2) *Công thức nhân xác suất*:

Nếu A và B là hai biến cố bất kì thì : $P(AB)=P(A)\cdot P(B\,|\,A)$ ***hay*** $P(AB)=P(B)\cdot P(A\,|\,B)$.

(3) Cho A và B là hai biến cố với $P(B)>0$. Khi đó, ta có: $P(A|B)=\dfrac{n(AB)}{n(B)}$

Trong đó: $n(AB)$ là số các trường hợp thuận lợi của AB;

$n(B)$ là số các trường hợp thuận lợi của B.

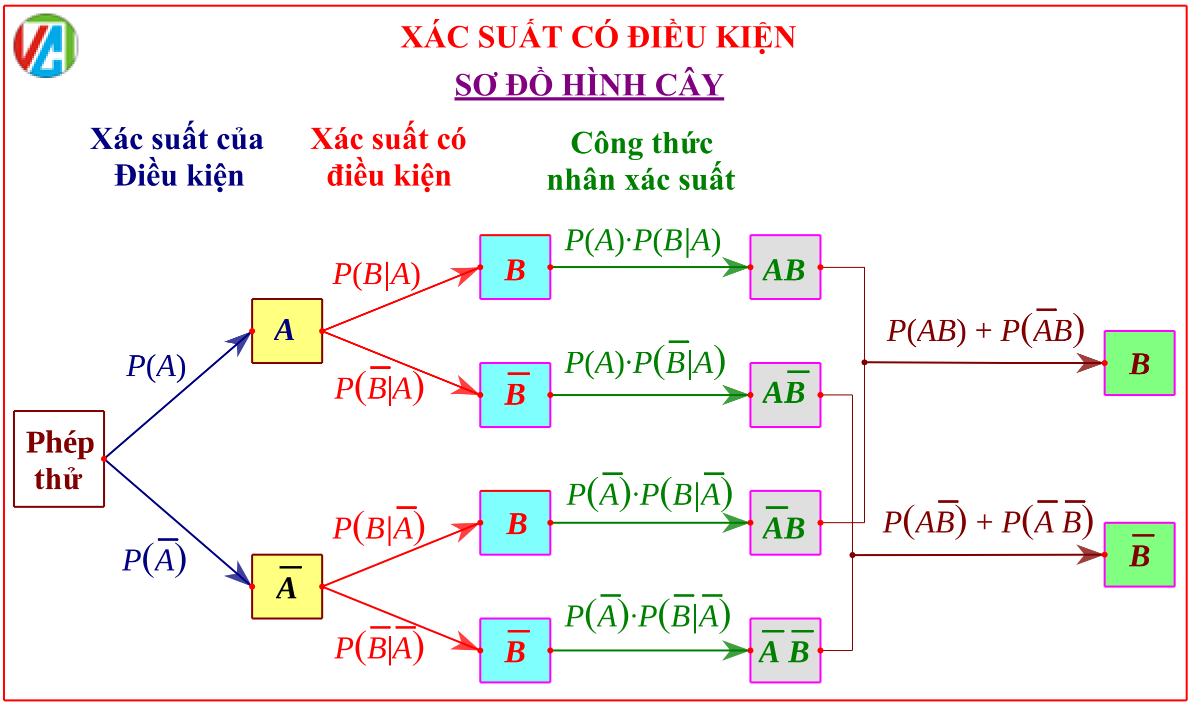
(4) Nếu A và B là hai biến cố bất kì, với $P(B)>0$ thì $P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$

(5) Cho A và B là hai biến cố với $0<P(A)<1;\ 0<P(B)<1$. Khi đó:

A và B là hai biến cố độc lập *khi và chỉ khi* $P(A)=P(A|B)=P(A|\bar{B})$ và $P(B)=P(B|A)=P(B|\bar{A})$

(6) Những bài toán xảy ra xác suất điều kiện thường đi kèm với việc sử dụng quy tắc nhân xác suất, khi gặp bài toán này ta cần lưu ý đến sự độc lập của biến cố để vận dụng công thức đúng.

3. Sơ đồ hình cây



(1) Xác suất xảy ra của mỗi kết quả bằng tích các xác suất trên các nhánh của cây đi đến kết quả đó.

Chẳng hạn: $P\left(A\overline{B}\right)=P(A).P\left(\overline{B}|A\right)$

(2) Vì $\overline{A}B\cap AB=\varnothing$ (hai biến cố xung khắc) và $\overline{A}B\cup AB=B$ nên theo ***công thức cộng xác suất*** ta có

$$P(B)=P\left(\overline{A}B\right)+P(AB)$$

Bài 2. CÔNG THỨC XÁC SUẤT TOÀN PHẦN VÀ CÔNG THỨC BAYES

1. Công thức xác suất toàn phần

Cho hai biến cố A và B với $0<P(B)<1$, ta có:

$$P(A)=P(AB)+P\left(A\overline{B}\right) \text{ hay } P(A)=P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)$$

gọi là ***công thức xác suất toàn phần***

Chú ý

Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với mọi biến cố B bất kì

2. Công thức Bayes

Cho hai biến cố A và B với $P(A)>0,P(B)>0$, ta có:

$$P(B|A)=\frac{P(B).P(A|B)}{P(A)}$$

Chú ý

(1) Công thức xác suất toàn phần cũng đúng với mọi biến cố B bất kì

(2) Cho hai biến cố A và B với $P(A)>0,P(B)>0$, do $P(A)=P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)$

Nên ***công thức Bayes*** còn có dạng: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)}$

(3) ***Các công thức cần nhớ***

» $P(A)+P\left(\overline{A}\right)=1$ hay $P\left(\overline{A}\right)=1-P(A)$ (Biến cố đối)

» $P\left(A|B\right)+P\left(\overline{A}|B\right)=1$ hay $P\left(\overline{A}|B\right)=1-P\left(A|B\right)$

» $P(AB)+P\left(A\overline{B}\right)=P(A)$

» $P(AB)+P\left(\overline{A}B\right)=P(B)$

(4) Công thức xác suất toàn phần và Công thức Bayes được áp dụng trong các trường hợp sự việc bài toán đề cập đến gồm ***nhiều giai đoạn*** có sự ***liên quan nhân quả*** trong quá trình xảy ra.

CÁC KIẾN THỨC CẦN NẮM CỦA CHƯƠNG

(1) ***Công thức xác suất có điều kiện:*** $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}\ \left(P(B)>0\right)$; $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}\ \left(P(A)>0\right)$

(2) Từ (1) suy ra ***Công thức nhân xác suất***: $P(AB)=P(A)\cdot P(B|A)$ ***hay*** $P(AB)=P(B)\cdot P(A|B)$

Suy ra: $P(A)\cdot P(B|A)=P(B)\cdot P(A|B)$

(3) Vì $\overline{A}B\cap AB=\varnothing$ (hai biến cố xung khắc) và $\overline{A}B\cup AB=B$ nên theo ***công thức cộng xác suất*** ta có:

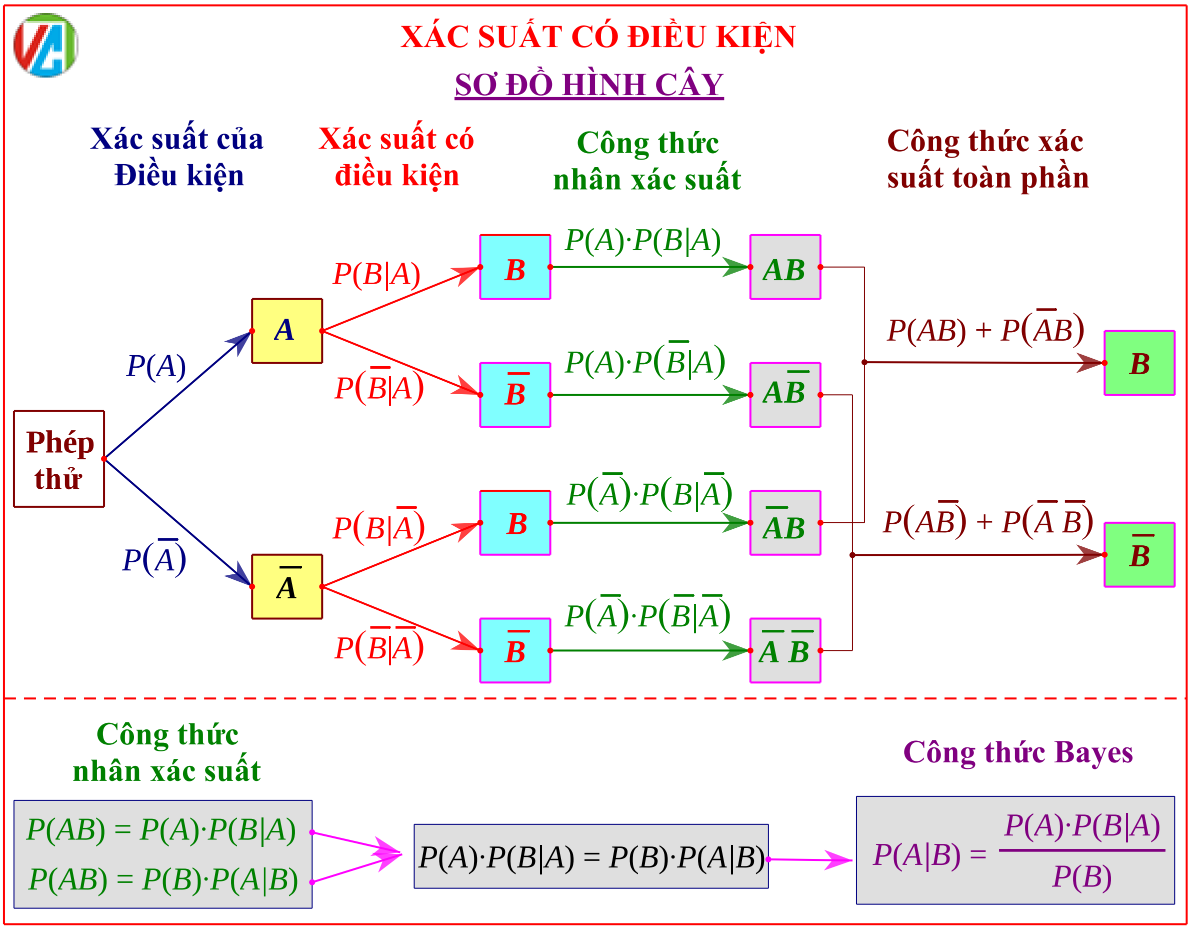
$$P(B)=P\left(\overline{A}B\right)+P(AB)$$

Tương tự ta có: $P(A)=P\left(A\overline{B}\right)+P(AB)$

(4) Từ (2), (3) suy ra ***Công thức xác suất toàn phần***: $P(A)=P(B).P(A|B)+P\left(\overline{B}\right).P\left(A|\overline{B}\right)$

(5) Từ (2) suy ra ***Công thức Bayes***: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(A)},\ (P(A)>0)$

(6) Từ (4), (5) suy ra ***Công thức Bayes (dạng đầy đủ)***: $P(B|A)=\dfrac{P(B).P(A|B)}{P(B).P(A|B)+P(\overline{B}).P(A|\overline{B})}$



Quy tắc áp dụng công thức Bayes theo sơ đồ hình cây

$$P(A|B)=\dfrac{\text{Tích dọc theo nhánh từ } A \text{ đến } B}{\text{Tổng tất cả các nhánh dẫn đến } B}$$

PHỤ LỤC ☞ CHƯƠNG TRÌNH TOÁN LỚP 10 VÀ 11

PHẦN ☞ ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

Chương ☞ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

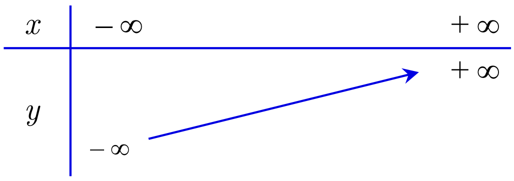
Bài 1. HÀM SỐ BẬC NHẤT

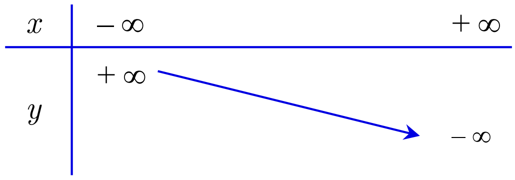
1. Hàm số bậc nhất $y = ax + b$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Chiều biến thiên:

$a > 0$: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ $a < 0$: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$



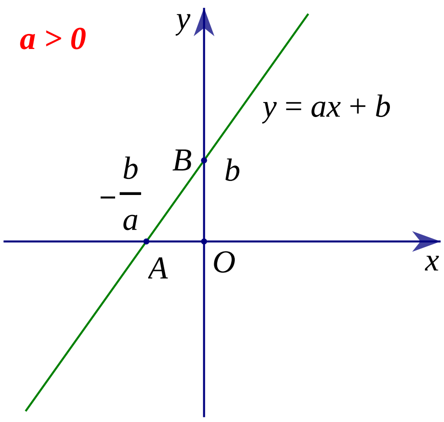


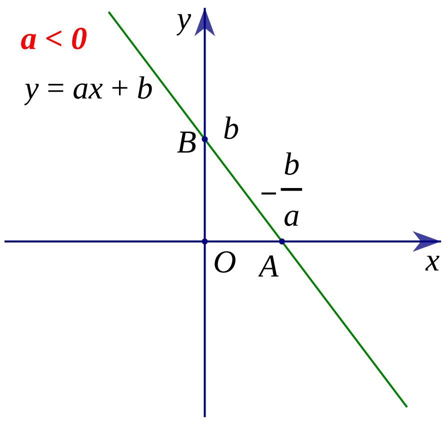
2. Đồ thị của hàm số bậc nhất

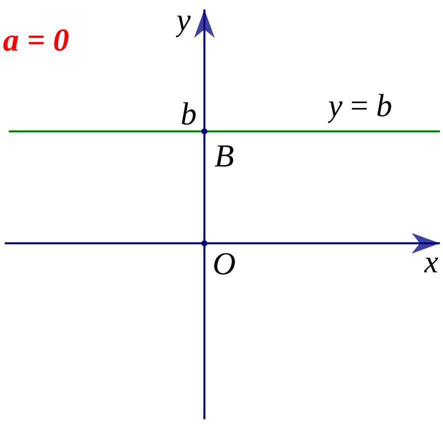
Đồ thị là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm $A(0;b)$

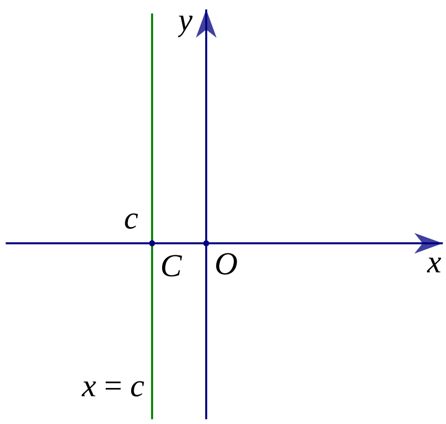
Nếu $a = 0$ thì ta được hàm số $y = b$ là hàm hằng và có đồ thị là đường thẳng nằm ngang cắt trục tung tại điểm $A(0;b)$

Đường thẳng $x = c$ là đường thẳng đứng luôn cắt trục hoành tại điểm $M(c;0)$









Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI

1. Hàm số bậc hai

Định nghĩa

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$,

Trong đó x là biến số, a,b,c là các hằng số và $a\neq 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý

» Khi $a=0$, $b\neq 0$, hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y=bx+c$.

» Khi $a=b=0$, hàm số trở thành hàm hằng $y=c$.

2. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

$a>0$

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{-b}{2a};+\infty\right)$; nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{2a}\right)$

$a<0$

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{2a}\right)$; nghịch biến trên $\left(\dfrac{-b}{2a};+\infty\right)$

Chú ý

Khi $a>0$, $\min f\left(x\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ khi $x=\dfrac{-b}{2a}$; Khi $a<0$, $\max f\left(x\right)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ khi $x=\dfrac{-b}{2a}$

3. Đồ thị của hàm số bậc hai

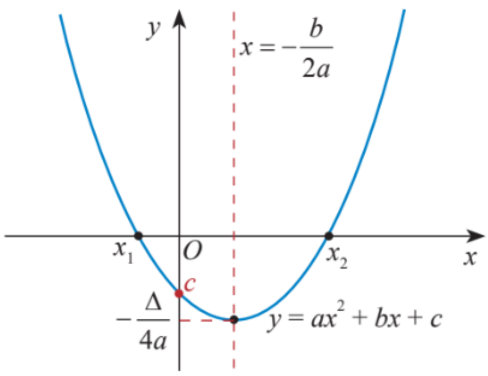
Trong mặt phẳng Oxy, đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c\left(a\neq 0\right)$ là một đường Parabol $\left(P\right)$, có:

» Đỉnh là $S\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$.

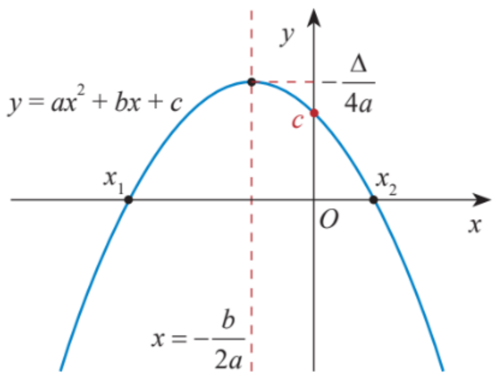
» Trục đối xứng là đường thẳng $x=-\dfrac{b}{2a}$.

» Bề lõm hướng lên trên nếu $a>0$, bề lõm hướng xuống dưới nếu $a<0$.

» Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng c, tức là đồ thị đi qua điểm $\left(0;c\right)$



a) $a>0$



b) $a<0$

Chú ý

✓ Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2

✓ Cắt trục tung tại điểm $A(0;c)$: Nằm trên trục hoành → $c>0$; Nằm dưới trục hoành → $c<0$.

✓ Đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$: Nằm bên trái trục tung → a, b cùng dấu; Nằm bên phải trục tung → a, b trái dấu.

Cách vẽ đồ thị

(1) Xác định toạ độ đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$;

(2) Vẽ trục đối xứng d là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$;

(3) Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) *hay* Lập bảng giá trị

(4) Vẽ parabol có đỉnh S, có trục đối xứng d và đi qua các điểm tìm được

Chương ☞ BẤT PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:

$$ax+by+c\le 0 \quad (1) \quad (ax+by+c<0; ax+by+c\ge 0; ax+by+c>0)$$

Trong đó a,b,c là những số thực, $a^2+b^2\ne 0$;

$(x_0;y_0)$ là nghiệm của $(1)\Leftrightarrow ax_0+by_0+c\le 0$

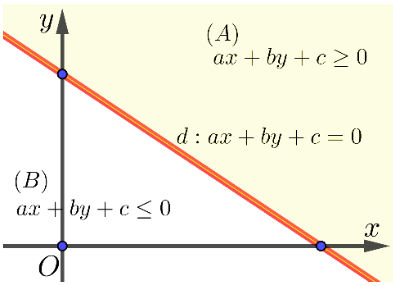
2. Biểu diễn nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Định nghĩa

Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Đường thẳng $d: ax+by+c=0$ chia *mp* thành hai nửa *mp*, khi đó:

- Nửa *mp (A)* (kể cả bờ) là miền nghiệm của $ax+by+c\le 0$
- Nửa *mp (B)* (kể cả bờ) là miền nghiệm của $ax+by+c\ge 0$.



QUY TẮC: Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình

≫ ***Bước 1:*** *Vẽ đường thẳng* $\Delta : ax+by+c=0$.

≫ ***Bước 2:*** *Lấy một điểm* $M_0(x_0;y_0)$ *không thuộc* Δ *(thường lấy gốc tọa độ* O*).*

≫ ***Bước 3:*** *Tính* ax_0+by_0+c *và so sánh với 0.*

≫ ***Bước 4:*** *Kết luận:*

- *Nếu* $ax_0+by_0+c<0$ *thì nửa mp bờ* Δ *chứa* M_0 *là miền nghiệm của* (1).
- *Nếu* $ax_0+by_0+c>0$ *thì nửa mp bờ* Δ *không chứa* M_0 *là miền nghiệm của* (1).

Chú ý:

Miền nghiệm của (1) bỏ đi đường thẳng Δ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c<0$.

CÁC DẠNG TOÁN CÓ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ TÌM NGHIỆM CỦA BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Ví dụ 1. Cho các điểm $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(1;-1)$, $D(4;2)$. Điểm nào là nghiệm của bất phương trình $7x-3y-7<0$

Lời giải

Thay tọa độ các điểm vào bất phương trình.

Xét điểm $A(1;-1)$, ta có $7+3-7<0$ (sai).

Xét điểm $B(-2;1)$, ta có $-14-3-7<0$ (đúng).

Xét điểm $C(1;-1)$, ta có $7+3-7<0$ (sai).

Xét điểm $D(4;2)$, ta có $28-6-7<0$ (sai).

Vậy điểm B nằm trong miền nghiệm của bất phương trình.

Dạng toán ☞ BIỂU DIỄN HÌNH HỌC MIỀN NGHIỆM

Phương pháp

Xét bất phương trình $ax+by+c\ge 0$ (1).

» ***Bước 1:*** Vẽ đường thẳng Δ : $ax+by+c=0$.

» ***Bước 2:*** Lấy một điểm $M_0(x_0;y_0)$ không thuộc Δ (thường lấy gốc tọa độ O).

» ***Bước 3:*** Tính ax_0+by_0+c và so sánh với 0.

» ***Bước 4:*** Kết luận:

- Nếu $ax_0+by_0+c<0$ thì nửa *mp* bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của (1)
- Nếu $ax_0+by_0+c>0$ thì nửa *mp* bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của (1)

Chú ý:

Miền nghiệm của (1) bỏ đi đường thẳng Δ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c<0$.

a)

Ví dụ 2. Xác định miền nghiệm của các bất phương trình:

(1) $x\ge 1$ **(2)** $y\le 1$ **(3)** $x+y<4$ **(4)** $2x+y\le 3$

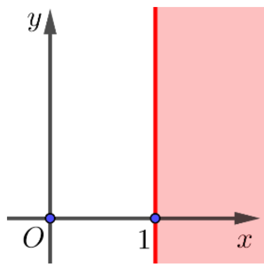
Lời giải

(1) Xác định miền nghiệm của $x\ge 1$

Vẽ đường thẳng Δ : $x-1=0$.

Lấy một điểm $O(0;0)\notin\Delta$.

Ta có: $-1<0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $x\ge 1$ là nửa *mp* không chứa điểm O (tính cả bờ Δ).

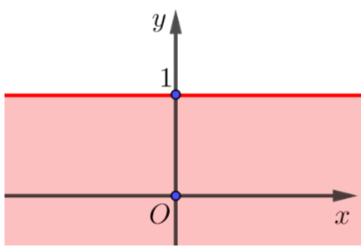


(2) Xác định miền nghiệm của $y\le 1$

Vẽ đường thẳng Δ : $y-1=0$.

Lấy một điểm $O(0;0)\notin\Delta$.

Ta có: $-1<0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $y\le 1$ là nửa mp chứa điểm O (tính cả bờ Δ).

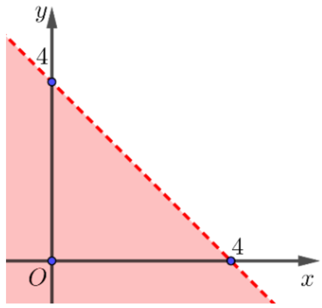


(3) Xác định miền nghiệm của $x+y<4$

Vẽ đường thẳng $\Delta: x+y-4=0$.

Lấy một điểm $O(0;0)\notin\Delta$.

Ta có: $-4<0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $x+y<4$ là nửa mp chứa điểm O (không tính bờ Δ).

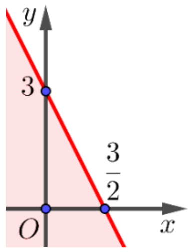


(4) Biểu diễn hình học tập nghiệm của $2x+y\le 3$

Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x+y=3$.

Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$,

Ta thấy $O\notin\Delta$ và có $2.0+0<3$ nên nửa *mp* bờ Δ chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (miền bị tô đậm trong hình, tính cả bờ).



Bài 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa

» Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn $x,\ y$ mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

» Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

2. Biểu diễn nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc

» Ta có thể biểu diễn hình học miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn: là giao của các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

» Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta làm như sau:

- Trong cùng hệ toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

3. Bài toán tối ưu (Quy hoạch tuyến tính).

» *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức dạng $F=ax+by$, trong đó x,y nghiệm đúng cuả một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho:*

- Vẽ miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

Miền nghiệm nhận được thường là một đa giác. (Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác).

- Tính giá trị của F ứng với (x,y) là tọa độ các đỉnh của miền đa giác này.
- So sánh các kết quả vừa tính được, từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ BIỂU DIỄN MIỀN NGHIỆM CỦA HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

Phương pháp

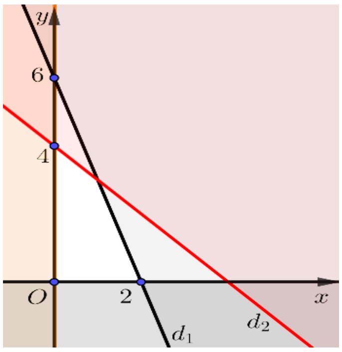
» Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta làm như sau:

- Trong cùng hệ toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách tô màu phần không thuộc miền nghiệm của nó.

□ Phần không bị tô là miền nghiệm cần tìm.

Ví dụ 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x+y\le 6 \\ x+y\le 4 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Lời giải



Vẽ các đường thẳng

$d_1: 3x+y=6; d_2: x+y=4; d_3: x=0\ (Oy); d_4: y=0\ (Ox)$

Vì điểm $M_0(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) không chứa điểm M_0.

Miền không bị tô đậm (hình tứ giác $OCIA$ kể cả bốn cạnh AI, IC, CO, OA) trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho.

Dạng toán ☞ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC HAI ẨN

Phương pháp

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x,y)=ax+by$ với $(x;y)$ nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

» **Bước 1:** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.

» **Bước 2:** Tính giá trị của F tương ứng với $(x;y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.

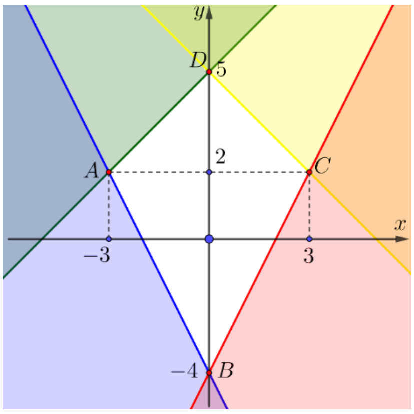
» **Bước 3:** Kết luận:

□ Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.

□ Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $F=30x-4y-6$ với $(x;y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y+5\ge 0 \\ 2x+y+4\ge 0 \\ x+y-5\le 0 \\ 2x-y-4\le 0 \end{cases}$.

Lời giải



Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y+5\ge 0 \\ 2x+y+4\ge 0 \\ x+y-5\le 0 \\ 2x-y-4\le 0 \end{cases}$,(2)

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) là miền tứ giác $ABCD$ kể cả bờ, với $A(-3;2), B(0;-4), C(3;2), D(0;5)$

$F(-3;2)=-104$; $F(0;-4)=10$; $F(3;2)=66$; $F(0;5)=-26$

Vậy GTLN là $F=66$ và GTNN là $F=-104$

Dạng toán ☞ BÀI TOÁN TỐI ƯU

Phương pháp

Bài toán: *Tìm phương án tối ưu của một kế hoạch sản xuất, kinh doanh,... (hai ẩn).*

» **Bước 1:** Dựa vào giả thiết, lập hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và biểu thức mục tiêu $F=F(x;y)$.

» **Bước 2:** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho

» **Bước 2:** Tính giá trị của F tương ứng với $(x;y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.

» **Bước 3:** Theo yêu cầu bài toán, kết luận:

□ Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của F tương ứng với phương án tối ưu $(x;y)$.

Ví dụ 5. Có 3 nhóm máy A,B,C dùng để sản xuất ra 2 lại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc nhóm máy khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng bên dưới:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất một đơn vị SP	
		Loại *I*	Loại *II*
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

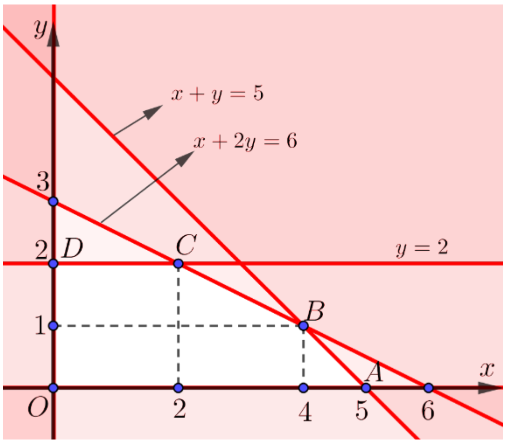
Một đơn vị sản phẩm *I* lãi 3000 đồng, một đơn vị sản phẩm *II* lãi 5000 đồng. Hãy lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số đơn vị sản phẩm I và II $(x,y\ge 0)$.

Số tiền lãi của đơn vị này là $F(x;y)=3x+y$ (nghìn đồng).

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases}2x+2y\le 10\\2y\le 4\\2x+4y\le 12\\x,y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\le 5\\y\le 2\\x+2y\le 6\\x,y\ge 0\end{cases}(*)$



Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x;y)=3x+y$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là ngũ giác *OABCD* (kể cả biên).

Ta có: $O(0;0),A(5;0),B(4;1),C(2;2),D(0;2)$.

$F(0;0)=0,\ F(5;0)=150,\ F(4;1)=190,\ F(2;2)=160,\ f(0;2)=100$

Dễ thấy $F(x;y)=3x+y$ lớn nhất khi $(x;y)=(4;1)$ tức là cần sản xuất 4 sản phẩm *I* và 1 sản phẩm *II* để thu về lợi nhận cao nhất.

CHƯƠNG ☞ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Tam thức bậc hai

Định nghĩa

» Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f(x)=ax^2+bx+c$, trong đó a,b,c là những hệ số, $a\neq 0$.

» Nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ được gọi là ***nghiệm của tam thức bậc hai*** $f(x)=ax^2+bx+c$.

» $\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=b'^2-ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Định lí

Cho $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0), \Delta=b^2-4ac$.

» Nếu $\Delta<0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

» Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\neq -\dfrac{b}{2a}$.

» Nếu $\Delta>0$ thì $f(x)$ luôn:

- Cùng dấu với hệ số a khi $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$
- Trái dấu với hệ số a khi $x\in(x_1;x_2)$.

Trong đó $x_1.x_2$ *là hai nghiệm của* $f(x)$.

Bảng xét dấu

$\Delta<0$ ($f(x)$ vô nghiệm)	
x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f(x)	Cùng dấu a

$\Delta=0$ ($f(x)$ có nghiệm kép)			
x	$-\infty$	$\dfrac{-b}{2a}$	$+\infty$
f(x)	Cùng dấu a	0	Cùng dấu a

$\Delta>0$ ($f(x)$ có 2 nghiệm phân biệt)					
x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
f(x)	Cùng dấu a	0	Trái dấu a	0	Cùng dấu a

3. Bất phương trình bậc hai

Định nghĩa

» ***Bất phương trình bậc hai một ẩn*** x là bất phương trình dạng $ax^2+bx+c<0$ (*hoặc* $ax^2+bx+c\le 0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$), Trong đó a,b,c là những số thực đã cho, $a\neq 0$.

» ***Nghiệm*** của bất phương trình là các giá trị của ẩn x thỏa mãn bất phương trình đó.

4. Giải bất phương trình bậc hai

» ***Giải bất phương trình bật hai*** là tìm tập hợp các nghiệm của bất phương trình đó.

Bài 2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

» Ta làm như sau:

- ***Bước 1:*** Bình phương hai vế và rút gọn về phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.
- ***Bước 1:*** Giải phương trình nhận được ở Bước 1.
- ***Bước 2:*** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

2. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

» Ta làm như sau:

- ***Bước 1:*** Bình phương hai vế và rút gọn về phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.

▪***Bước 1:*** Giải phương trình nhận được ở Bước 1.
▪***Bước 2:*** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ GIẢI PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

Phương pháp (như trên)

Ví dụ 6. Giải các phương trình sau:

(1) $\sqrt{2x^2-4x-2}=\sqrt{x^2-x-2}$ (2) $\sqrt{3x^2-6x+1}=\sqrt{-2x^2-9x+1}$

(3) $\sqrt{2x^2-5x-9}=x-1$ (4) $\sqrt{2x^2+x+3}=1-x$

Lời giải

(1) $\sqrt{2x^2-4x-2}=\sqrt{x^2-x-2}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được: $2x^2-4x-2=x^2-x-2$
Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x=0$
Từ đó tìm được $x=0$ hoặc $x=3$
Thay lần lượt hai giá trị này vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=3$ thỏa mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$.

(2) $\sqrt{3x^2-6x+1}=\sqrt{-2x^2-9x+1}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $3x^2-6x+1=-2x^2-9x+1$.
Sau khi thu gọn ta được $5x^2+3x=0$.
Từ đó tìm được $x=0$ hoặc $x=-\dfrac{3}{5}$.
Thay lần lượt hai giá trị này vào phương trình đã cho, ta thấy $x=0$ và $x=-\dfrac{3}{5}$ thỏa mãn.
Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{0;-\dfrac{3}{5}\right\}$

(3) $\sqrt{2x^2-5x-9}=x-1$

Bình phương hai vế của phương trình ta được: $2x^2-5x-9=x^2-2x+1$.
Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x-10=0$.
Từ đó tìm được $x=-2$ hoặc $x=5$.
Thay lần lượt vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=5$ thỏa mãn.
Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=5$.

(4) $\sqrt{2x^2+x+3}=1-x$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $2x^2+x+3=1-2x+x^2$
Sau khi thu gọn ta được $x^2+3x+2=0$
Từ đó tìm được $x=-1$ hoặc $x=-2$
Thay lần lượt vào phương trình đã cho, ta thấy $x=-1$ hoặc $x=-2$ thỏa mãn.
Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-1;-2\}$.

Chương ☞ ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Bài 1. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

1. Quy tắc cộng

Định nghĩa

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Phương án A có n cách thực hiện, phương án B có m cách thực hiện (không trùng với bất cứ cách nào của phương án A). Khi đó, công việc có thể được thực hiện theo $n+m$ cách.

Tổng quát

✓Một công việc được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, ..., A_k$, trong đó:

» Phương án A_1 có n_1 cách thực hiện.

» Phương án A_2 có n_2 cách thực hiện.

……………………………………

» Phương án A_k có n_k cách thực hiện.

Số cách hoàn thành: $n(X) = n_1 + n_2 + ... + n_k$ cách.

2. Quy tắc nhân

Định nghĩa

Giả sử một công việc được thực hiện theo hai công đoạn. Công đoạn tthứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn thứ hai. Khi đó, công việc có thể được thực hiện theo $m.n$ cách.

Tổng quát

✓Một công việc được thực hiện theo k công đoạn $A_1, A_2, ..., A_k$, trong đó:

» Công đoạn A_1 có n_1 cách thực hiện.

» Công đoạn A_2 có n_2 cách thực hiện

……………………………………

» Phương án A_k có n_k cách thực hiện.

Số cách hoàn thành: $n(X) = n_1.n_2.....n_k$ cách.

Bài 2. HOÁN VỊ, CHỈNH HỢP, TỔ HỢP

Loại	*Định nghĩa*	*Công thức tính số lượng*	*Dấu hiệu nhận biết*
Hoán vị	Mỗi vị trí sắp xếp thứ tự của n phần tử $(n \in \mathbb{N}^*)$ gọi là một hoán vị của n phần tử.	$P_n = n.(n-1).(n-2).....2.1 = n!$	Lấy hết ***n*** phần tử để ***sắp xếp*** thứ tự
Chỉnh hợp	Mỗi vị trí sắp xếp thứ tự k phần tử được lấy trong n phần tử $(n \geq k)$ gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử.	$A_n^k = n(n-1).....(n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	Lấy ***k*** phần tử trong ***n*** phần tử để ***sắp xếp*** thứ tự
Tổ hợp	Mỗi tập hợp k phần tử được lấy trong n phần tử $(n \geq k)$ gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử.	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	Lấy ***k*** phần tử trong ***n*** phần tử và ***không sắp xếp*** thứ tự

Công thức tổ hợp mở rộng

Loại	Công việc thực hiện	Công thức đếm
Hoán vị vòng quanh	Sắp xếp n phần tử theo một vòng tròn	$(n-1)!$
Chỉnh tổ hợp	Chọn k phần tử trong n phần tử và sắp xếp vào m vị trí $(k\le n,\ k\le m)$	$C_n^k.A_m^k$

Công thức đặc biệt

$0!=1$	Nếu $k=n$ thì $A_n^n=\dfrac{n!}{0!}=\dfrac{n!}{1}=n!=P_n$.
$C_n^0=C_n^n=1$	$C_n^1=n$
$C_n^k=C_n^{n-k}\quad(0\le k\le n)$	$C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1}\quad(0\le k<n)$
$\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k=C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n\ \ (0\le k\le n)$	$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=\dfrac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}=\dfrac{A_n^k}{k!}$

Bài 3. NHỊ THỨC NEWTON

Công thức nhị thức Newton

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+...+C_n^ka^{n-k}b^k+...+C_n^nb^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^ka^{n-k}b^k,\ (n\in\mathbb{N}^*)$$

Tính chất của nhị thức Newton

- Số các số hạng của công thức là $n+1$
- Số mũ của *a* giảm dần từ *n* đến 0, số mũ của *b* tăng từ 0 đến *n*; đồng thời tổng các số mũ của *a* và *b* trong mỗi hạng tử đều bằng *n*
- Số hạng tổng quát thứ $k+1$ có dạng $T_{k+1}=C_n^ka^{n-k}b^k\quad(k=0,1,...,n)$
- Các hệ số của nhị thức cách đều hai số hạng đầu và cuối bằng nhau: $C_n^k=C_n^{n-k};0\le k\le n$

🕮 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN THƯỜNG GẶP

Quy tắc: ***Hành động nào có điều kiện mạnh nhất thì thực hiện đếm trước nhất,...***

Dạng toán ☞ ĐẾM SỐ TỰ NHIÊN

B1: Gọi số tự nhiên có dạng: $\overline{a_1a_2...a_n}$ và a_i thuộc tập chứa các chữ số theo đề.

B2: Chọn chữ số thỏa điều kiện bài toán đặt vào các hàng số theo thứ tự ưu tiên: ***Hàng nào có điều kiện "mạnh" nhất thì thực hiện trước nhất.*** *(Chú ý phân ra nhiều trường hợp nếu bị trùng điều kiện)*

B3: Dùng Quy tắc nhân để tính kết quả từng trường hợp và Dùng Quy tắc cộng để tính Kết quả cả bài.

Tính chất chia hết	*Dấu hiệu chia hết*
Số lẻ	Chữ số tận cùng là chữ số lẻ
Số chẵn (Số chia hết cho 2)	Chữ số tận cùng là chữ số chẵn
Chia hết cho 3	Tổng các chữ số chia hết cho 3
Chia hết cho 4	Số gồm 2 chữ số cuối là số chia hết cho 4
Chia hết cho 5	Chữ số tận cùng là 0 hoặc 5
Chia hết cho 6	Chia hết cho 2 và 3
Chia hết cho 7	Nhân đôi chữ số cuối cùng rồi lấy số gồm các chữ số còn lại trừ cho phép nhân đó nếu kết quả chia hết cho 7 thì số đã cho sẽ chia hết cho 7
Chia hết cho 8	Số gồm 3 chữ số cuối là số chia hết cho 8

Chia hết cho 9	Tổng các chữ số chia hết cho 9
Chia hết cho 10	Chữ số tận cùng là 0
Chia hết cho 11	Tổng các chữ số ở hàng lẻ trừ đi tổng các chữ số ở hàng chẵn là một số chia hết cho 11.
Chia hết cho 25	Hai chữ số tận cùng là 00, 25, 50 hoặc 75.

Dạng toán ☞ ĐẾM SỐ CÁCH SẮP XẾP

① **Sắp xếp xen kẽ 2 nhóm *A*, *B*:**

TH1. Số phần tử 2 nhóm bằng nhau: $n(A)=n(B)=m$ → Số cách sắp xếp là $2.m!.m!$.

TH2. Số phần tử 2 nhóm hơn kém 1 đơn vị: $n(A)=m,\ n(B)=m+1$ → Số cách sắp xếp là $m!.(m+1)!$

② **Sắp xếp theo nhóm *A, B, C*:** cho $n(A)=a,\ n(B)=b,\ n(C)=c$

TH1. Chỉ có các phần tử nhóm *A* kề nhau → Số cách sắp xếp là $a!.(b+c+1)!$

TH2. Các phần tử 2 nhóm *A, B* kề nhau → Số cách sắp xếp là $a!.b!.(c+2)!$

TH3. Các phần tử 3 nhóm *A, B, C* kề nhau → Số cách sắp xếp là $a!.b!.c!.3!$

☺ Tương tự cho sắp xếp n nhóm.

③ Sắp xếp nhóm *A* có n phần tử sao cho có k phần tử $a_1, a_2, ..., a_k$ không kề nhau $\left(k \le \dfrac{n+1}{2}\right)$:

B1. Xem số vị trí cần sắp xếp là $2(n-k)+1$ → Sắp xếp $n-k$ phần tử $a_{k+1}, a_{k+2}, ..., a_n$ vào các vị trí chẵn → Có $(n-k)!$ cách

B2. Sắp xếp k phần tử $a_1, a_2, ..., a_k$ vào $n-k+1$ vị trí còn lại → Có A_{n-k+1}^{k} cách

Vậy Số cách sắp xếp là $(n-k)!.A_{n-k+1}^{k}$

Dạng toán ☞ ĐẾM SỐ CÁCH CHỌN

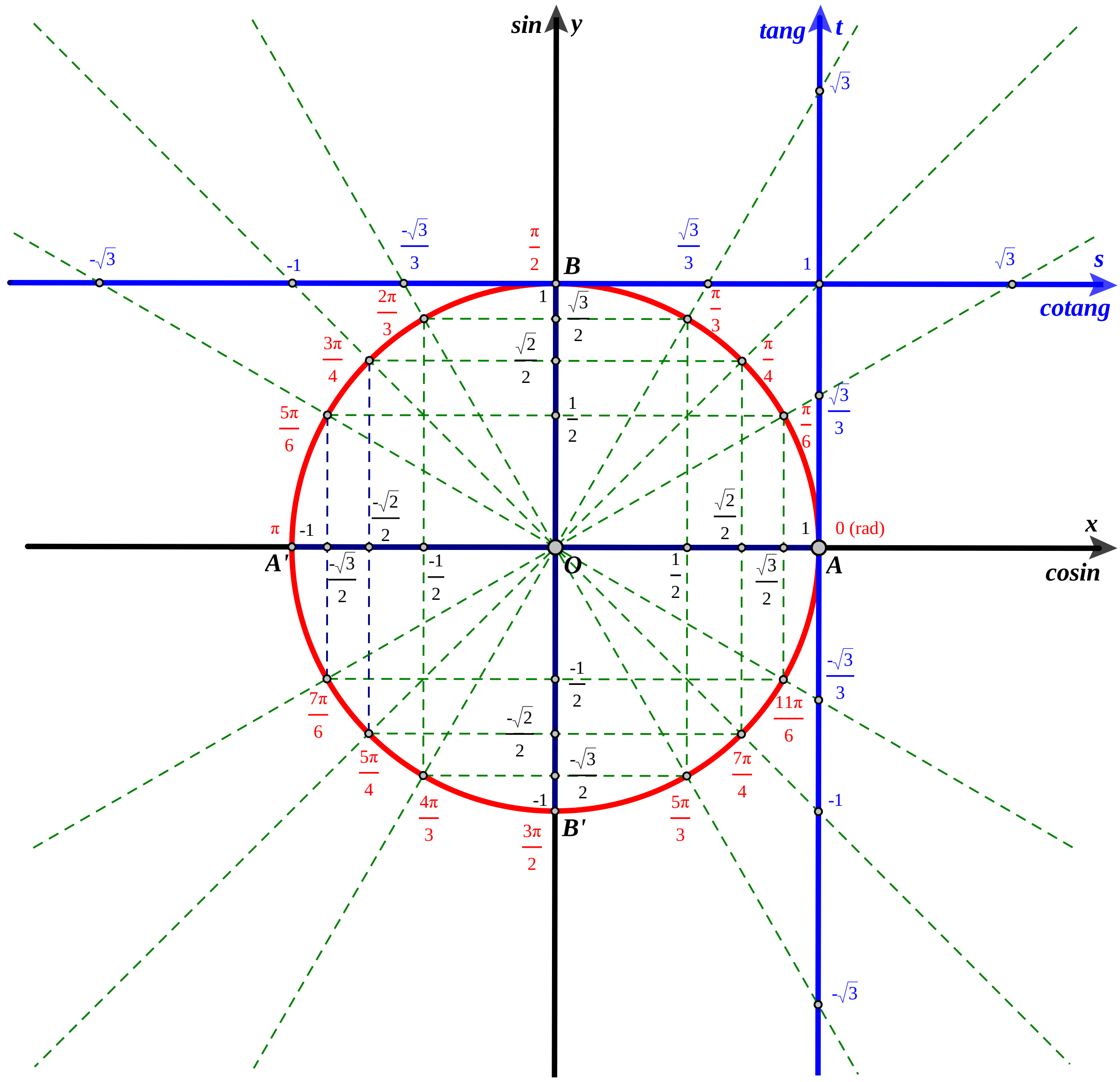
① **Chọn không sắp xếp:**

Chọn *k* phần tử loại *I* từ các nhóm *A, B, C,...* → Phân loại nhiều Trường hợp, chọn mỗi nhóm 1 số lượng phần tử loại *I*, sao cho tổng số lượng phần tử loại *I* ở mỗi trường hợp phải bằng *k* phần tử.

② **Chọn có sắp xếp *(Chỉnh tổ hợp):***

Chọn k phần tử trong n phần tử và sắp xếp vào m vị trí $(k \le n,\ k \le m)$ có: $C_n^k.A_m^k$ cách

Chương ☞ HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC



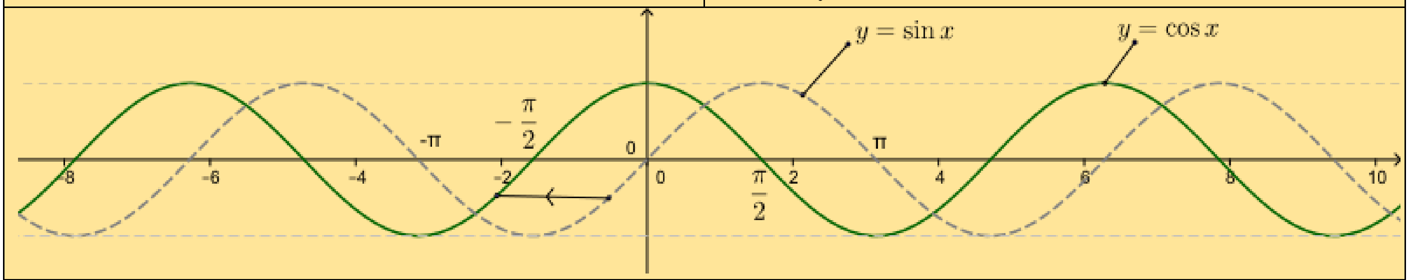
Bài 1. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

Hệ thức cơ bản	Cos đối
$\sin^2 a+\cos^2 a=1;\quad \tan a.\cot a=1$ $1+\tan^2 a=\dfrac{1}{\cos^2 a};\quad 1+\cot^2 a=\dfrac{1}{\sin^2 a}$	$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha\quad \tan(-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cos(-\alpha)=\cos\alpha\quad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$
Sin bù	**Chéo phụ**
$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha\quad \tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$ $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha\quad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$	$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha,\ \cot\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$
Tang, Cotang hơn kém π	**Công thức cộng**
$\sin(\alpha+\pi)=-\sin\alpha$ $\cos(\alpha+\pi)=-\cos\alpha$ $\tan(\alpha+\pi)=\tan\alpha$ $\cot(\alpha+\pi)=\cot\alpha$	$\sin(a\pm b)=\sin a.\cos b\pm\cos a.\sin b$ $\cos(a\pm b)=\cos a.\cos b\mp\sin a.\sin b$ $\tan(a\pm b)=\dfrac{\tan a\pm\tan b}{1\mp\tan a.\tan b}$

Công thức nhân đôi	***Công thức hạ bậc***
$\sin 2a = 2\sin a.\cos a$ $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$ $= 2\cos^2 a - 1$ $= 1 - 2\sin^2 a$ $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$	$\cos^2 a = \dfrac{1+\cos 2a}{2}$ $\sin^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{2}$ $\tan^2 a = \dfrac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$
Công thức biến đổi tích thành tổng	***Công thức biến đổi tổng thành tích***
$\cos a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]$ $\sin a.\sin b = \dfrac{1}{2}\left[\cos(a-b)-\cos(a+b)\right]$ $\sin a.\cos b = \dfrac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]$	$\cos a + \cos b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$ $\cos a - \cos b = -2\sin\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$ $\sin a + \sin b = 2\sin\dfrac{a+b}{2}.\cos\dfrac{a-b}{2}$ $\sin a - \sin b = 2\cos\dfrac{a+b}{2}.\sin\dfrac{a-b}{2}$

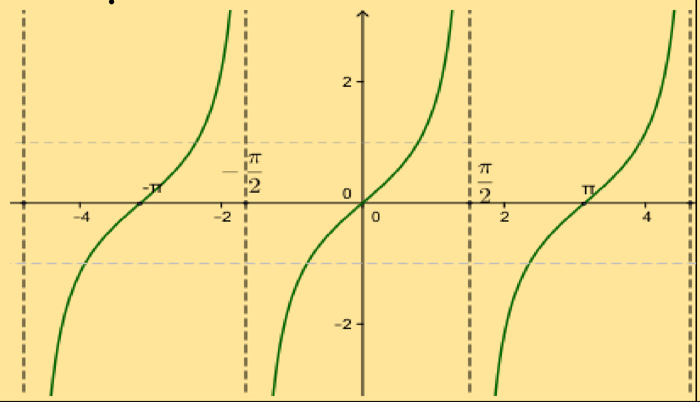
Bài 2. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

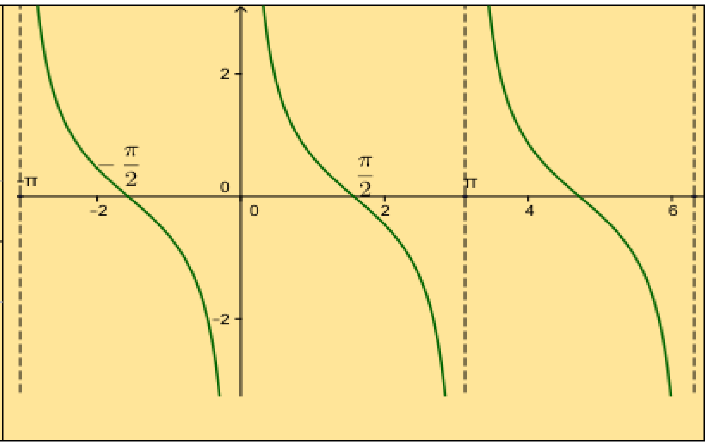
Hàm số $y = \sin x$	***Hàm số*** $y = \cos x$
□***TXĐ:*** $D = \mathbb{R}$. ***TGT:*** $T = [-1;1]$ □***Tính chẵn lẻ:*** Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ □***Tính tuần hoàn:*** Tuần hoàn với chu kì 2π □***Sự biến thiên:*** Đồng biến trên $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; Nghịch biến trên $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$ □***Đồ thị:***	□***TXĐ:*** $D = \mathbb{R}$. ***TGT:*** $T = [-1;1]$ □***Tính chẵn chẵn:*** Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua trục tung. □***Tính tuần hoàn:*** Tuần hoàn với chu kì 2π □***Sự biến thiên:*** Nghịch biến trên $(0;\pi)$; Đồng biến trên $(\pi;2\pi)$ □***Đồ thị:***



Hàm số $y = \tan x$	***Hàm số*** $y = \cot x$
□***TXĐ:*** $D = \mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\right\}$. ***TGT:*** $T = \mathbb{R}$ □***Tính chẵn lẻ:*** Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ □***Tính tuần hoàn:*** Tuần hoàn với chu kì π □***Sự biến thiên:*** Luôn đồng biến trên từng khoảng xác định $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$; $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right)$	□***TXĐ:*** $D = \mathbb{R}\setminus\{k\pi \,/\, k\in\mathbb{Z}\}$. ***TGT:*** $T = \mathbb{R}$ □***Tính chẵn lẻ:*** Là hàm lẻ $\Rightarrow$ Đồ thị đối xứng qua gốc tọa độ □***Tính tuần hoàn:*** Tuần hoàn với chu kì π □***Sự biến thiên:*** Luôn nghịch biến trên từng khoảng xác định $(0;\pi)$; $(\pi;2\pi)$ □***Đồ thị:***

□**Đồ thị:**





Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Dạng $f(u)=m$	**Dạng** $f(u)=f(v)$
$\sin u=m,\ (-1\le m\le 1)$ $\Leftrightarrow \sin u=\sin\alpha,\ \left(\alpha=\sin^{-1}(m)\right)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=\alpha+k2\pi\\u=\pi-\alpha+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$	$\sin u=\sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=v+k2\pi\\u=\pi-v+k2\pi\end{array}\right.$
$\cos u=m,\ (-1\le m\le 1)$ $\Leftrightarrow \cos u=\cos\alpha,\ \left(\alpha=\cos^{-1}(m)\right)$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}u=\alpha+k2\pi\\u=-\alpha+k2\pi\end{array}\right.,\ k\in\mathbb{Z}$	$\cos u=\cos v \Leftrightarrow u=\pm v+k2\pi$
$\tan u=m$ $\Leftrightarrow \tan u=\tan\alpha,\ \left(\alpha=\tan^{-1}(m)\right)$ $\Leftrightarrow u=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	$\tan u=\tan v\Leftrightarrow u=v+k\pi$
$\cot u=m$ $\Leftrightarrow \cot u=\cot\alpha,\ \left(\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{1}{m}\right)\right)$ $\Leftrightarrow u=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$	$\cot u=\cot v\Leftrightarrow u=v+k\pi$

Trường hợp đặc biệt: Đối với phương trình $\sin u=m$, $\cos u=m$

□Nếu $m=\pm1$ thì chỉ cần lấy 1 trong 2 công thức nghiệm.

□Nếu $m=0$ thì chỉ cần lấy 1 trong 2 công thức nghiệm và thay $k2\pi$ thành $k\pi$

Cụ thể:

$\sin u=1\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k2\pi$	$\sin u=-1\Leftrightarrow u=-\frac{\pi}{2}+k2\pi$	$\sin u=0\Leftrightarrow u=k\pi$
$\cos u=1\Leftrightarrow u=k2\pi$	$\cos u=-1\Leftrightarrow u=\pi+k2\pi$	$\cos u=0\Leftrightarrow u=\frac{\pi}{2}+k\pi$

Chương ☞ DÃY SỐ, CẤP SỐ CỘNG, CẤP SỐ NHÂN

	Cấp số cộng	Cấp số nhân
Định nghĩa	Dãy số (u_n) là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n+d$, $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	Dãy số (u_n) là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n+1}=u_n\cdot q$, $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$
Số hạng tổng quát	$u_n=u_1+(n-1)d$, $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$	$u_n=u_1.q^{n-1}$, $\left(n\in\mathbb{N}^*\right)$
Tính chất	$u_k=\dfrac{u_{k-1}+u_{k+1}}{2}$, $\left(k\geq 2\,,\,k\in\mathbb{N}^*\right)$	$u_k^2=u_{k-1}.u_{k+1}$, $\left(k\geq 2\,,\,k\in\mathbb{N}^*\right)$
Tổng n số hạng đầu tiên $S_n=u_1+u_2+...+u_n$	$S_n=\dfrac{n(u_1+u_n)}{2}$ $S_n=\dfrac{n}{2}\left[2u_1+(n-1)d\right]$	Khi $q=1$: $S_n=nu_1$ Khi $q\neq 1$: $S_n=u_1.\dfrac{1-q^n}{1-q}$
Công sai, công bội	$d=u_{n+1}-u_n$; $d=\dfrac{u_k-u_m}{k-m}$	$q=\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$; $q^{k-m}=\dfrac{u_k}{u_m}$

Chương ☞ GIỚI HẠN, HÀM SỐ LIÊN TỤC

Bài 1. GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Giới hạn hữu hạn

Giới hạn đặc biệt:

- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^k}=0\ (k\in\mathbb{Z}^+)$
- $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=0\ (|q|<1)$;
- $\lim\limits_{n\to+\infty}C=C$

Định lí:

Cho $\lim u_n=a,\ \lim v_n=b$. Ta có:

- $\lim(u_n\pm v_n)=a\pm b$
- $\lim(u_n.v_n)=a.b$
- $\lim\dfrac{u_n}{v_n}=\dfrac{a}{b}$ (nếu $b\neq 0$)
- $\lim|u_n|=|a|$
- $\lim\sqrt{u_n}=\sqrt{a}$ ($u_n,\ a\geq 0$)

Tổng của cấp số nhân lùi vô hạn

$$S=u_1+u_1q+u_1q^2+\ldots=\frac{u_1}{1-q}\quad(|q|<1)$$

2. Giới hạn vô cực

Giới hạn đặc biệt:

- $\lim n^k=+\infty\ (k\in\mathbb{Z}^+)$
- $\lim\sqrt{n}=+\infty$
- $\lim q^n=+\infty\ (q>1)$

Định lí: *(Quy tắc về giới hạn vô cực)*

- $\dfrac{u_n{}^{\nearrow a}}{v_n{}_{\searrow\infty}}\to 0$;
- $\dfrac{u_n{}^{\nearrow a\neq 0}}{v_n{}_{\searrow 0}}\to\infty$;
- $[\underset{\infty}{\underset{\downarrow}{u_n}}.\underset{a\neq 0}{\underset{\downarrow}{v_n}}]\to\infty$

(Dấu của giới hạn vô cực được xác định theo quy tắc nhân dấu)

Bài 2. GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. Giới hạn hữu hạn

Giới hạn đặc biệt:

- $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$;
- $\lim\limits_{x\to x_0} C = C$ (*C là hằng số*)

Định lí:

Cho $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=M$. Ta có:

- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=L+M$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]=L-M$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x).g(x)\right]=L.M$;
- $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (*nếu* $M\neq 0$)
- $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$ $\left(f(x)\geq 0\right)$
- $\lim\limits_{x\to x_0}\left|f(x)\right|=\left|L\right|$

Giới hạn một bên:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=L$$

2. Giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực

Giới hạn đặc biệt:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^k=+\infty$;
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k=\begin{cases}+\infty & \text{nếu } k \text{ chẵn}\\ -\infty & \text{nếu } k \text{ lẻ}\end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} C=C$;
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{c}{x^k}=0$

Định lí: *(Quy tắc về giới hạn vô cực)*

- $\dfrac{f(x)^{\nearrow L}}{g(x)_{\searrow\infty}}\to 0$;
- $\dfrac{f(x)^{\nearrow L\neq 0}}{g(x)_{\searrow 0}}\to\infty$;
- $[\underset{\downarrow\,\infty}{f(x)}.\underset{\downarrow\,L\neq 0}{g(x)}]\to\infty$

(với $x\to x_0$ hay $x\to\infty$)

(Dấu của giới hạn vô cực được xác định theo quy tắc nhân dấu)

Bài 3. HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Hàm số liên tục tại một điểm

✓ $y=f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

✓ $y=f(x)$ liên tục tại $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$

2. Hàm số liên tục trên một khoảng , đoạn

✓ Hàm số liên tục trên một khoảng khi hàm số liên tục tại mọi điểm thuộc khoảng đó.

✓ Hàm số $y=f(x)$ liên tục trên một đoạn $[a;b]$ nếu $y=f(x)$ liên tục trên $(a;b)$ và $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

3. Tính chất

- Hàm số đa thức liên tục trên $\mathbb{R}$.
- Hàm số phân thức, các hàm số lượng giác liên tục trên từng khoảng xác định của chúng.
- Tổng hiệu, hiệu, tích, thương của các hàm số liên tục tại một điểm là hàm số liên tục tại điểm đó.

Chương ☞ HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

Bài 1. PHÉP TÍNH LŨY THỪA

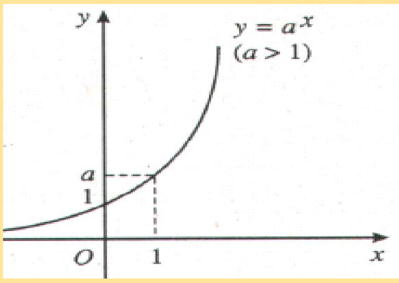
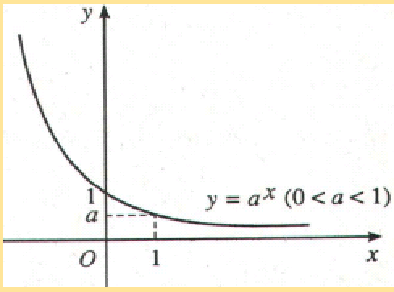
(1) $a^n = a.a.....a$ (tích của n thừa số a) (2) $a^0 = 1 \ ,(a \neq 0)$ (3) $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n},(a \neq 0)$	(4) $a^m.a^n = a^{m+n}$ (5) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ (6) $a^n.b^n = (a.b)^n$ (7) $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$ (8) $(a^m)^n = (a^n)^m = a^{m.n}$	(9) $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ (10) $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

Bài 2. PHÉP TÍNH LÔGARIT

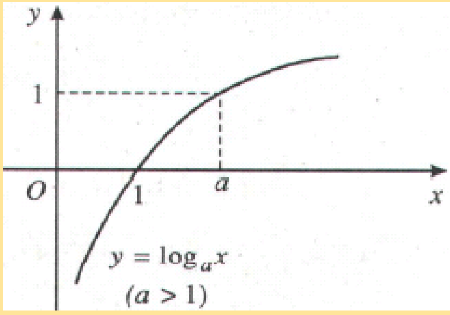
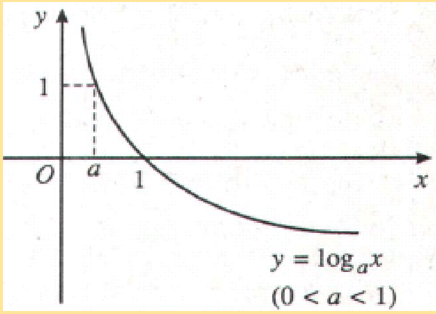
(1) $\log_a b = \alpha \Leftrightarrow a^\alpha = b \quad (a,b > 0; a \neq 1)$ (2) $\log_a 1 = 0$ (3) $\log_a a = 1$ (4) $\log_a \left(a^\alpha\right) = \alpha$ (5) $a^{\log_a b} = b$	(6) $\log_a(b_1.b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2$ (7) $\log_a\left(\dfrac{b_1}{b_2}\right) = \log_a b_1 - \log_a b_2$ (8) $\log_a\left(b^\alpha\right) = \alpha.\log_a b$ (9) $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}\log_a b$	(10) $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ (11) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ (12) $\log_c a.\log_a b = \log_c b$ (13) $\log_{a^\alpha}\left(b^\beta\right) = \dfrac{\beta}{\alpha}\log_a b$

Bài 3. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARÍT

1. Hàm số mũ $y = a^x \left(0 < a \neq 1\right)$

$a > 1$	$0 < a < 1$
□TXĐ: $D = \mathbb{R}$. TGT: $T = \left(0;+\infty\right)$. □Hàm số luôn đồng biến □Tiệm cận ngang là trục Ox □Đồ thị nằm phía trên trục hoành  	□TXĐ: $D = \mathbb{R}$. TGT: $T = \left(0;+\infty\right)$. □Hàm số luôn nghịch biến □Tiệm cận ngang là trục Ox □Đồ thị nằm phía trên trục hoành 

2. Hàm số logarit $y=\log_a x$, $(0<a\neq 1)$

$a>1$	$0<a<1$
□TXĐ: $D=(0;+\infty)$. TGT: $T=\mathbb{R}$. □Hàm số luôn đồng biến □Tiệm cận đứng là trục Oy □Đồ thị nằm phía bên phải trục tung  	□TXĐ: $D=(0;+\infty)$. TGT: $T=\mathbb{R}$ □Hàm số luôn nghịch biến □Tiệm cận đứng là trục Oy □Đồ thị nằm phía bên phải trục tung 
Chú ý : Đồ thị hàm số $y=a^x$ và $y=\log_a x$ (hai hàm ngược nhau) đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$	

Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ, LÔGARIT CƠ BẢN

1. Phương trình, bất phương trình mũ cơ bản

Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^u=b$, $(a>0, a\neq 1)$

□ $b\leq 0$: Phương trình vô nghiệm

□ $b>0$: $a^u=b \Leftrightarrow u=\log_a b$

Chú ý: $a^u=a^v \Leftrightarrow u=v$

Bất phương trình mũ có bản dạng $a^u>b$, $(a>0, a\neq 1)$

□Với $b\leq 0$: Bất phương trình có nghiệm với mọi u thỏa điều kiện xác định.

□ Với $b>0$:

Khi $a>1$ $a^u>b \Leftrightarrow u>\log_a b$,

Khi $0<a<1$ $a^u>b \Leftrightarrow u<\log_a b$,

Chú ý: Tương tự cho các bất phương trình dạng: $a^u<0$; $a^u\leq 0$; $a^u\geq 0$

Tổng quát

Khi $a>1$: $a^u>a^v \Leftrightarrow u>v$

Khi $0<a<1$: $a^u>a^v \Leftrightarrow u<v$

2. Phương trình, bất phương trình logarit cơ bản

Phương trình logarit cơ bản có dạng $\log_a u=b, (a>0, a\neq 1)$

□Điều kiện: $u>0$

□ $\log_a u=b \Leftrightarrow u=a^b$

Chú ý: $\log_a u=\log_a v \Leftrightarrow u=v$ (Điều kiện: $u>0; v>0$)

Bất phương trình logarit cơ bản dạng $\log_a u>b, (a>0, a\neq 1)$

□Điều kiện: $u>0$

□ Khi $a>1$: $\log_a u>b \Leftrightarrow u>a^b$

Khi $0<a<1$: $\log_a u>b \Leftrightarrow u<a^b$

Chú ý: Tương tự cho các bất phương trình: $\log_a u<b$; $\log_a u\geq b$; $\log_a u\leq b$

Tổng quát: Với điều kiện: $u>0;\ v>0$

Khi $a>1$: $\log_a u>\log_a v\Leftrightarrow u>v$

Khi $0<a<1$: $\log_a u>\log_a v\Leftrightarrow u<v$

ỨNG DỤNG HÀM MŨ – LÔGARIT VÀO BÀI TOÁN THỰC TẾ

Bài toán	***Công thức***	***Diễn giải***
1.Tính tiền gửi lãi kép: *Gửi một lần và rút một lần*	$T_n=T_0(1+r)^n$	T_0: số tiền ban đầu gửi; r: lãi suất/kì; n: số kì gửi; T_n: số tiền sau n kì gửi.
2.Tính tiền gửi tiết kiệm lãi kép: *Mỗi kì gửi một lần số tiền cố định và chỉ rút một lần*	$T_n=T_0.\dfrac{1+r}{r}\left[(1+r)^n-1\right]$	T_0: số tiền gửi mỗi kì; r: lãi suất/kì; n: số kì gửi; T_n: số tiền sau n kì gửi.
3.Tính tiền vay trả góp lãi kép: *Vay một lần và trả góp cố định mỗi kì*	$t=T_0.\dfrac{r(1+r)^n}{(1+r)^n-1}$	t: số tiền trả mỗi kì; T_0: số tiền vay ban đầu; r: lãi suất/kì; n: số kì phải trả
4.Tính tiền rút định kì: *Gửi một lần và rút dần mỗi kì số tiền cố định*	$T_n=T_0.(1+r)^n+\dfrac{M}{r}\left[1-(1+r)^n\right]$	T_0: số tiền gửi ban đầu; r: lãi suất/kì; n: số kì gửi; T_n: số tiền còn lại sau n kì; M: số tiền rút mỗi kì.
5.Tính số dân tăng, giảm:	$S_n=S_0.e^{n.r}$	S_0: số dân ban đầu; r: tỉ lệ biến động dân số/kì; n: số kì; S_n: số dân sau n kì.
6.Tính lượng phóng xạ bán rã:	$m_t=m_0.\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$	m_0: khối lượng chất phóng xạ ban đầu; t: thời gian bán rã; T: chu kì bán rã; m_t: khối lượng tại thời điểm t.
7.Tính cường độ động đất:	$M=\log\left(\dfrac{A}{A_0}\right)$	M: cường độ động đất; A: biên độ rung tối đa; A_0: biên độ chuẩn (hằng số định trước).
8.Công thức liên hệ 2 trận động đất có cùng biên độ chuẩn:	$\dfrac{A_1}{A_2}=10^{M_1-M_2}$	A_1, M_1 và A_2, M_2: lần lượt là biên độ rung tối đa, cường độ của trận động đất thứ nhất và thứ hai.

Chương ☞ ĐẠO HÀM

☞ CÔNG THỨC ĐẠO HÀM

Hàm sơ cấp	*Hàm hợp*	*Phép toán*
	Quy tắc đạo hàm của hàm hợp với $u = u(x)$: $\left[f(u)\right]' = f'(u).u'$	(57) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
(33) $(C)' = 0$		(58) $(u.v)' = u'.v + u.v'$
(34) $(x)' = 1$		(59) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - v'.u}{v^2}$
(35) $(x^\alpha)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	(46) $(u^\alpha)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$	(60) $(k.u)' = k.u'$, (k là hằng số)
(36) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2.\sqrt{x}}$	(47) $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2.\sqrt{u}}$	(61) $\left(\frac{k}{v}\right)' = \frac{-k.v'}{v^2}$
(37) $\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$	(48) $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$	***Đặc biệt***
(38) $(\sin x)' = \cos x$	(49) $(\sin u)' = u'.\cos u$	(62) $\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)' = \frac{-\alpha}{x^{\alpha+1}}$
(39) $(\cos x)' = -\sin x$	(50) $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$	
(40) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	(51) $(\cos u)' = -u'.\sin u$	(63) $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$
(41) $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$	(52) $(\cot u)' = \frac{-u'}{\sin^2 u}$	
(42) $(a^x)' = a^x.\ln a$	(53) $(a^u)' = a^u.\ln a.u'$	(64) $\left(\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\right)' = \frac{adx^2 + 2aex + (be-cd)}{(dx+e)^2}$
(43) $(e^x)' = e^x$	(54) $(e^u)' = e^u.u'$	
(44) $(\log_a x)' = \frac{1}{x.\ln a}$	(55) $(\log_a u)' = \frac{u'}{u.\ln a}$	
(45) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	(56) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	

QUY TẮC TÌM ĐẠO HÀM

Khi tìm đạo hàm của hàm số ta thực hiện theo thứ tự ưu tiên như sau:

PHÉP TOÁN → HÀM HỢP → HÀM SƠ CẤP.

☞ TIẾP TUYẾN

1. Định lý

Phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = f(x)$ tại tiếp điểm $M(x_0;\, y_0)$ có dạng:

$$y - y_0 = k.(x - x_0) \quad (*)$$

Trong đó:

x_0: Hoành độ tiếp điểm;

$y_0 = y(x_0)$: Tung độ tiếp điểm;

$k = f'(x_0)$: Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm có hoành độ x_0

2. Quy tắc lập phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = f(x)$

Bước 1. Tìm đạo hàm $y' = f'(x)$

Bước 2. Dựa vào giả thiết, tính $x_0,\, y_0,\, f'(x_0)$.

Bước 3. Thay vào phương trình (*), thu gọn, ta được phương trình tiếp tuyến cần tìm (Chú ý: So điều kiện, loại phương trình nếu có)

3. Chú ý

☞Đường thẳng $(d): y = ax + b$ có hệ số góc $k_d = a$;

☞Đường thẳng $(d): ax + by + c = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ có hệ số góc $k_d = \frac{-a}{b}$.

☞Hai đường thẳng song song thì hệ số góc của chúng bằng nhau.

☞Hai đường thẳng vuông góc thì tích hệ số góc của chúng bằng –1.

4. Các dạng phương trình tiếp tuyến

Giả thiết	*Theo GT, Ta có:*	*Các đại lượng cần tính*
Biết hoành độ tiếp điểm	x_0	Tính: $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$
Biết tung độ tiếp điểm	y_0	Từ: $y_0 = y(x_0)$ → Tính được x_0 và $k = f'(x_0)$
Biết hệ số góc của tiếp tuyến	k	Từ: $k = f'(x_0)$ → Tính được x_0 và $y_0 = y(x_0)$
Biết tiếp tuyến song song đường thẳng (d)	$k = k_d$	Từ: $k = f'(x_0)$ → Tính được x_0 và $y_0 = y(x_0)$ (***Chú ý*** loại phương trình tiếp tuyến trùng phương trình đường thẳng *d*)
Biết tiếp tuyến vuông góc đường thẳng (d)	$k.k_d = -1 \Leftrightarrow k = \frac{-1}{k_d}$	Từ: $k = f'(x_0)$ → Tính được x_0 và $y_0 = y(x_0)$
Biết tiếp tuyến qua $A(x_A; y_A)$	$y_A - y(x_0) = y'(x_0).(x_A - x_0)$	Giải tìm x_0 → Tính $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$
Tiếp tuyến tại giao điểm của $(C): y = f(x)$ ***và*** $(d): y = ax + b$	$f(x_0) = ax_0 + b$	Giải tìm x_0 → Tính $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$
Tiếp tuyến tại giao điểm của (C) ***và*** Ox	$y_0 = 0$	Từ: $y_0 = y(x_0)$ → Tính được x_0 và $k = f'(x_0)$
Tiếp tuyến tại giao điểm của (C) ***và*** Oy	$x_0 = 0$	Tính: $y_0 = y(x_0)$, $k = f'(x_0)$

☞ *ỨNG DỤNG CỦA ĐẠO HÀM TRONG THỰC TẾ*

☑ $f'(x)$ là tốc độ thay đổi của $y = f(x)$

☑ Một vật chuyển động được cho bởi hàm số theo thời gian t là $s = s(t)$. Khi đó:

- $v(t) = s'(t)$ là tốc độ của chuyển động tại thời điểm t
- $a(t) = v'(t)$ là gia tốc của chuyển động tại thời điểm t

PHẦN ☞ HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương ☞ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC, TỨ GIÁC

☞ *HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC THƯỜNG*

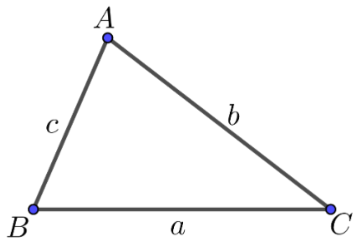
1. Định lí Côsin

» Trong ΔABC với $BC=a, CA=b, AB=c$, ta có:

- $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$
- $b^2=a^2+c^2-2ac.\cos B$
- $c^2=b^2+a^2-2ba.\cos C$

» Hệ quả

- $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ ▫ $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ ▫ $\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ac}$



2. Định lí Sin

» Trong ΔABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

» Hệ quả

- $a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$; $c=2R\sin C$
- $\sin A=\dfrac{a}{2R}$; $\sin B=\dfrac{b}{2R}$; $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

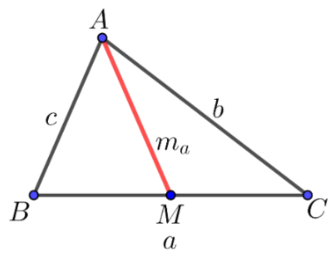
3. Đường trung tuyến

» Cho ΔABC, M là trung điểm cạnh BC,

$$AB^2+AC^2=2AM^2+BC^2.$$

» Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ A, B, C

- $m_a{}^2=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$ ▫ $m_b{}^2=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}$ ▫ $m_c{}^2=\dfrac{b^2+a^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}$



4. Công thức tính diện tích tam giác

» Trong ΔABC ta có diện tích được tính bởi các công thức

(1) $S=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{1}{2}b.h_b=\frac{1}{2}c.h_c$ (h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao đinhe A, B, C)

(2) $S=\frac{1}{2}bc.\sin A=\frac{1}{2}ac.\sin B=\frac{1}{2}ab.\sin C$

(3) $S=\dfrac{abc}{4R}$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

(4) $S=p.r$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC).

(5) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, với p là nửa chu vi.

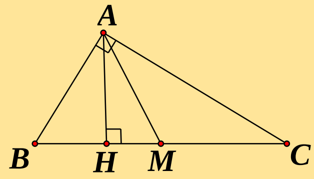
☞ *HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC ĐẶC BIỆT*

1. Tam giác vuông:

Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AH và trung tuyến AM. Ta có:

- $BC^2=AB^2+AC^2$ (Pi-ta-go)
- $AH.BC=AB.AC$

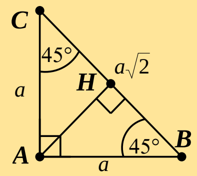
- $AC^2 = CH.BC$
- $AB^2 = BH.BC$
- $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$
- $AH^2 = \dfrac{AB^2.AC^2}{AB^2 + AC^2}$
- $\dfrac{BH}{BC} = \dfrac{AB^2}{BC^2} = \dfrac{AB^2}{AB^2 + AC^2}$
- $\dfrac{CH}{BC} = \dfrac{AC^2}{BC^2} = \dfrac{AC^2}{AB^2 + AC^2}$
- $AM = \dfrac{BC}{2}$
- Diện tích: $S = \dfrac{1}{2}.AB.AC$ (bằng nửa tích độ dài 2 cạnh góc vuông)



2. Tam giác vuông cân:

Cho ΔABC vuông cân tại A có đường cao AH. Ta có:

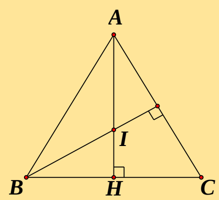
- $AB = AC = a$
- $BC = a\sqrt{2}$
- $AH = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- Diện tích: $S = \dfrac{AB^2}{2} = \dfrac{AC^2}{2} = \dfrac{BC^2}{4}$



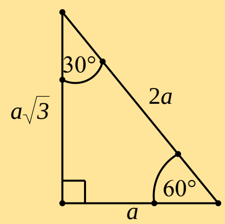
3. Tam giác đều:

Cho ΔABC đều cạnh a, có tâm I và đường cao AH. Ta có:

- $AH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$
- $AI = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$
- $IH = \dfrac{a\sqrt{3}}{6}$
- Diện tích: $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$



Nửa tam giác đều:



☞ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TỨ GIÁC

1. Hình thang:

Diện tích hình thang $ABCD$ có đáy AB, CD: $S = \dfrac{1}{2}(AB + CD).h$ (với h là chiều cao và h bằng khoảng cách giữa AB và CD)

2. Hình thang vuông:

Diện tích hình thang $ABCD$ vuông tại A, D: $S = \dfrac{1}{2}(AB + CD).AD$

3. Hình bình hành:

Diện tích hình bình hành $ABCD$: $S = \dfrac{1}{2}(AB + CD).h$ (với h là chiều cao và h bằng khoảng cách giữa AB và CD)

4. Hình thoi:

Diện tích hình thoi $ABCD$: $S = \dfrac{1}{2}AC.BD$ (bằng nửa tích độ dài 2 đường chéo)

5. Hình chữ nhật:

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$: $S = AB.BC$ (bằng tích chiều dài và chiều rộng)

6. Hình vuông:

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a, tâm O

- Đường chéo: $AC = BD = a\sqrt{2}$
- $OA = OB = OC = OD = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$
- Diện tích: $S = a^2$

CÁC TÂM CỦA TAM GIÁC

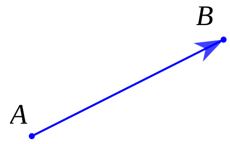
- Trọng tâm tam giác là giao điểm 3 đường trung tuyến
- Trực tâm tam giác là giao điểm 3 đường cao
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm 3 đường trung trực
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điiểm 3 đường phân giác

Chương ☞ VECTƠ

1. Khái niệm vectơ

Định nghĩa

» Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.



Kí hiệu

» Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".

» Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{x},\vec{y},\ldots$ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

Độ dài vectơ

» Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

» Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, như vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $\left|\vec{a}\right|$.

» Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*.

2. Vectơ cùng phương, cùng hướng

Định nghĩa

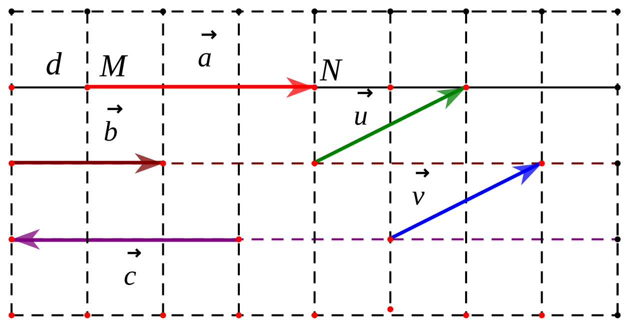
Giá của vectơ

» Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của 1 vectơ được gọi là *giá của vectơ* đó.

Vectơ cùng phương, cùng hướng

» Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

» Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.



Nhận xét

» Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

3. Hai vectơ bằng nhau – đối nhau

Định nghĩa

» Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là **bằng nhau** nếu chúng *cùng hướng* và có *cùng độ dài*.

Kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$

» Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

Chú ý

» Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

4. Vectơ – không

Định nghĩa

» Vectơ-không là vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối đều cùng một điểm, ta kí hiệu là $\vec{0}$.

» Ta quy ước vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

» Như vậy $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ và $\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$.

5. Các quy tắc về phép toán vectơ

Quy tắc ba điểm

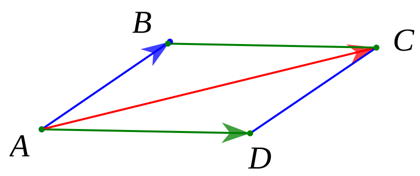
» Với 3 điểm A,B,C: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Quy tắc hiệu vectơ:

» Với 3 điểm O,A,B: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Quy tắc hình bình hành

» Tứ giác A,B,C,D là hình bình hành: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.



Trung điểm của đoạn thẳng

» Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

» Nếu I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$, $\forall M$

Trọng tâm của tam giác

» Nếu G là trọng tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\overrightarrow{MG}$, $\forall M$

» Điểm G là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

6. Điều kiện để hai vecto cùng phương

» Hai vecto $\vec{a},\vec{b}$ $(\vec{b}\neq\vec{0})$ cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k để $\vec{a}=k.\vec{b}$.

Nhận xét

Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chỉ khi có một số thực $k\neq 0$ để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

7. Góc giữa hai vectơ

Định nghĩa

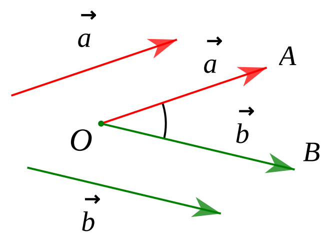
» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.

» Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Góc AOB với số đo từ $0°$ đến $180°$ được gọi là ***góc giữa hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

» Kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90°$ *thì ta nói rằng* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *vuông góc với nhau, kí hiệu là* $\vec{a}\perp\vec{b}$ *hoặc* $\vec{b}\perp\vec{a}$.



Chú ý.

» Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

» Góc giữa hai vectơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng luôn bằng $0°$

» Góc giữa hai vectơ (khác $\vec{0}$) ngược hướng luôn bằng $180°$

8. Tích vô hướng hai vectơ

Định nghĩa

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

Kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)}$.

» Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=\vec{0}$.

Chú ý.

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0°=\left|\vec{a}\right|^2$

Chương ☞ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

Bài 1. TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ VECTO

Cho $\vec{u}=(x;y),\vec{v}=(x';y')$. Khi đó:

$\vec{u}=\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}x=x'\\y=y'\end{cases}$	$\vec{u}\pm\vec{v}=(x\pm x';y\pm y')$	$k\cdot\vec{u}=(kx;ky)$	$\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'$
$\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow xx'+yy'=0$	$\lvert\vec{u}\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$	$\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{\lvert\vec{u}\rvert.\lvert\vec{v}\rvert}=\dfrac{x\cdot x'+y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$	

Cho $A(x_A;y_A)$, $B(x_B;y_B)$. Khi đó:

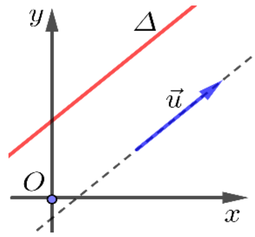
$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$
M là trung điểm của AB: $x_M=\dfrac{x_A+x_B}{2};y_M=\dfrac{y_A+y_B}{2}$.	G là trọng tâm tam giác ABC: $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}$; $y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}$
G là trọng tâm tứ giác $ABCD$: $x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4}$	M chia AB theo tỉ số k: $x_M=\dfrac{x_A-kx_B}{1-k};y_M=\dfrac{y_A-ky_B}{1-k}$

Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

1. Véc tơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ chỉ phương

» Véctơ $\vec{u}$ gọi là véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u}\neq\vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.



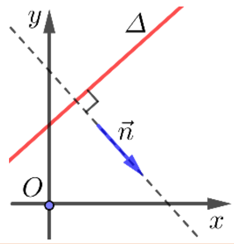
Nhận xét

(1) Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k.\vec{u}$, $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d.

(2) Một đường thẳng xác định khi biết một vectơ chỉ phương và một điểm mà nó đi qua.

Vectơ pháp tuyến

» Véctơ $\vec{n}$ gọi là véctơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n}\neq\vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ.



Nhận xét

(1) Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d thì $k.\vec{n}$, $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của d.

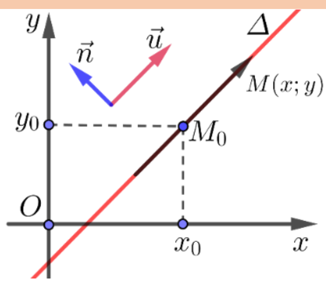
(2) Một đường thẳng xác định khi biết một vectơ pháp tuyến và mộ điểm nó đi qua.

(3) Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $\vec{n}.\vec{u}=0$.

Liên hệ giữa vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến

Từ nhận xét (3), ta có:

(1) Nếu $\vec{n}=(a;b)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d thì vectơ chỉ phương của d là $\vec{u}=(b;-a)$ hay $\vec{u}=(-b;a)$



(2) Nếu $\vec{u}=(a;b)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì một vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n}=(-b;a)$ hay $\vec{n}=(b;-a)$

2. Phương trình đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)$.

» Khi đó $M(x;y)$ thuộc đường thẳng Δ khi và chỉ khi tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM}=t.\vec{u}$, hay

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (2) được gọi là ***phương trình tham số*** của đường thẳng Δ (t là tham số).

» Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)$ thì có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}.$$

(Mỗi điểm M bất kỳ thuộc đường thẳng (d) tương ứng với duy nhất một số thực $t\in\mathbb{R}$ và ngược lại).

Nhận xét

(1) $A\in\Delta \Leftrightarrow A(x_0+at;y_0+bt), t\in\mathbb{R}$

(2) Trong mặt phẳng Oxy, mọi phương trình dạng $\begin{cases} x=x_0+at \\ y=y_0+bt \end{cases}$ với $a^2+b^2\neq 0$ đều là phương trình của đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(a;b)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng

» Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(a;b)$ với $a\neq 0, b\neq 0$ có ***phương trình chính tắc*** là: $\dfrac{x-x_0}{a}=\dfrac{y-y_0}{b}$

Phương trình tổng quát của đường thẳng

» Mọi đường thẳng đều có ***phương trình tổng quát*** dạng $ax+by+c=0$, với a và b không đồng thời bằng 0.

» Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax+by+c=0$, với a và b không đồng thời bằng 0, đều là phương trình của một đường thẳng, nhận $\vec{n}=(a;b)$ là một vectơ pháp tuyến.

Nhận xét

(1)Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ thì có phương trình tổng quát là $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

(2)Nếu $a=0$ phương trình trở thành $by+c=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{c}{b}$ đường thẳng song song với trục hoành Ox và cắt trục tung Oy tại điểm $M\left(0;-\dfrac{c}{b}\right)$.

(3)Nếu $b=0$ phương trình trở thành $ax+c=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{c}{a}$ đường thẳng song song với trục tung Oy và cắt trục hoành Ox tại $M\left(-\dfrac{c}{a};0\right)$

(4)Nếu $c=0$ phương trình trở thành $ax+by=0$ đường thẳng qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

(5)Đường thẳng $y=ax+b$, (trong đó a được gọi là hệ số góc của đường thẳng) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;-1)$.

Ngược lại đường thẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ thì có hệ số góc là $-\dfrac{a}{b}$.

(6)Đường thẳng d đi qua điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

3. Vị trí tương đối của đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có lần lượt hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}$ hay có lần lượt hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}$. Khi đó:

(1) Nếu $\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}$ (hay $\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}$) cùng phương và $M\in\Delta_1 \Rightarrow M\in\Delta_2$ thì $\Delta_1\equiv\Delta_2$

(2) Nếu $\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}$ (hay $\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}$) cùng phương và $M\in\Delta_1 \Rightarrow M\notin\Delta_2$ thì $\Delta_1 \parallel \Delta_2$

(3) Nếu $\overrightarrow{u_1},\ \overrightarrow{u_2}$ (hay $\overrightarrow{n_1},\ \overrightarrow{n_2}$) không cùng phương Δ_1 và Δ_2 cắt nhau

Trường hợp 1: Hai đường thẳng cho bởi phương trình tổng quát

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$.

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad (1)$$

(1) $\Delta_1\equiv\Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ $(a_2,b_2,c_2\neq 0)$

(2) $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ $(a_2,b_2,c_2\neq 0)$

(3) Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow$ hệ (1) có một nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ $(a_2,b_2,c_2\neq 0)$

✓ Nếu hệ (1) có một nghiệm $(x;y)=(x_0;y_0)$ thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại điểm $I(x_0;y_0)$

Trường hợp 2: Hai đường thẳng cho bởi phương trình tham số

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x=x_1+a_1.t \\ y=y_1+b_1.t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x=x_2+a_2.k \\ y=y_2+b_2.k \end{cases}$. Xét hệ phương trình tương giao bậc nhất hai ẩn $t,\ k$ (ghép lại từ hai phương trình):

$$\begin{cases} x_1+a_1.t=x_2+a_2.k \\ y_1+b_1.t=y_2+b_2.k \end{cases} \quad (2)$$

(1) $\Delta_1\equiv\Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (2) có vô số nghiệm

(2) $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow$ hệ (2) vô nghiệm

(3) Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow$ hệ (3) có một nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ $(a_2,b_2,c_2\neq 0)$

✓ Nếu hệ (2) có một nghiệm $(t;k)=(t_0;k_0)$ thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại điểm $I(x_1+a_1.t_0;y_1+b_1.t_0)$ (thay $t=t_0$ vào phương trình tham số Δ_1 hay tại điểm $I(x_2+a_2.k_0;y_2+b_2.k_0)$ (thay $k=k_0$ vào phương trình tham số Δ_2.

Chú ý

Các trường hợp khác thì biến đổi phương trình về trường hợp 1 hoạc trường hợp 2.

4. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Cho điểm $M\left(x_0;y_0\right)$ và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$. Khi đó:

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là $d\left(M,\Delta\right)=\dfrac{\left|ax_0+by_0+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

» Nếu Δ_1 và Δ_2 không vuông góc nhau thì góc nhọn trong bốn góc đó gọi là ***góc giữa hai đường thẳng*** Δ_1 và Δ_2, kí hiệu là $\left(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}\right)$ hay $\left(\Delta_1,\Delta_2\right)$

» Nếu Δ_1 và Δ_2 vuông góc nhau thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng $90°$

Quy ước: Nếu Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng $0°$

Nhận xét: $0°\le\left(\widehat{\Delta_1,\Delta_2}\right)\le 90°$

Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

» Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có lần lượt hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}=\left(a_1;b_1\right)$, $\overrightarrow{u_2}=\left(a_2;b_2\right)$. Khi đó:

$$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{u_1}.\overrightarrow{u_2}\right|}{\left|\overrightarrow{u_1}\right|.\left|\overrightarrow{u_2}\right|}\text{ suy ra }\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\frac{\left|a_1.b_1+a_2.b_2\right|}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}.\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}}}$$

» Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có lần lượt hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}=\left(a_1;b_1\right)$, $\overrightarrow{n_2}=\left(a_2;b_2\right)$. Khi đó:

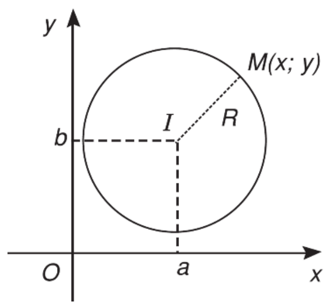
$$\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right)\right|=\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}\text{ suy ra }\cos\left(\Delta_1,\Delta_2\right)=\frac{\left|a_1.b_1+a_2.b_2\right|}{\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}}.\sqrt{b_1^{\ 2}+b_2^{\ 2}}}$$

Bài 3. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

1. Phương trình đường tròn

Định nghĩa

Phương trình $\left(x-a\right)^2+\left(y-b\right)^2=R^2$ được gọi là ***phương trình đường tròn*** có tâm $I\left(a;b\right)$ bán kính R



Nhận xét

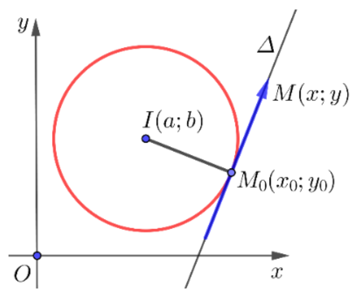
Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình đường tròn tâm $I\left(a;b\right)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Phương trình tiếp tuyến tại điểm nằm trên đường tròn

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tâm $I\left(a;b\right)$ tại điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ nằm trên đường tròn là

$$\left(a-x_0\right)\left(x-x_0\right)+\left(b-y_0\right)\left(y-y_0\right)=0$$



Phương trình tiếp tuyến tại điểm nằm ngoài đường tròn

Viết phương trình tiếp tuyến Δ của $\left(C\right)$ tại điểm $M_0\left(x_0;y_0\right)$ nằm ngoài $\left(C\right)$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của $\left(C\right)$.

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

Bước 3. Do Δ tiếp xúc với (C) nên $d(I;\Delta)=R$ $(*)$.

Giải $(*)$ tìm được mối liên hệ giữa a, b. Chọn a, b phù hợp để kết luận.

Phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng

Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết Δ song song với $d: ax+by+c=0$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).

Bước 2. Do Δ song song với $d: ax+by+c=0$ nên phương trình Δ có dạng $ax+by+c'=0$ $(c'\neq c)$

Bước 3. Do Δ tiếp xúc với (C) nên $d(I;\Delta)=R$ $(*)$.

Giải $(*)$ tìm được c', so với điều kiện để kết luận.

Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết Δ vuông góc với $d: ax+by+c=0$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).

Bước 2. Do Δ vuông góc với $d: ax+by+c=0$ nên phương trình Δ có dạng $bx-ay+c'=0$ $(c'\neq c)$

Bước 3. Do Δ tiếp xúc với (C) nên $d(I;\Delta)=R$ $(*)$.

Giải $(*)$ tìm được c', so với điều kiện để kết luận.

Bài 4. BA ĐƯỜNG CONIC TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

1. Elip

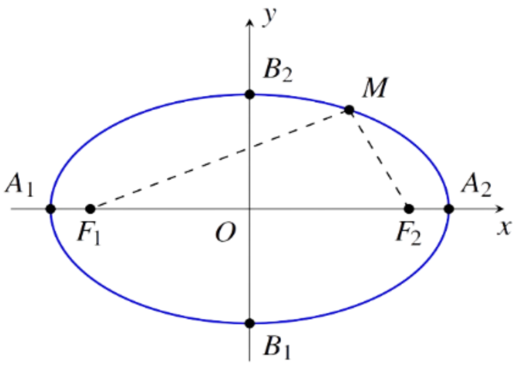
Định nghĩa elip

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ lớn hơn F_1F_2.

Elip (E) là tập hợp tất cả điểm M trong mặt phẳng thỏa $MF_1+MF_2=2a$

Các điểm F_1, F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của elip

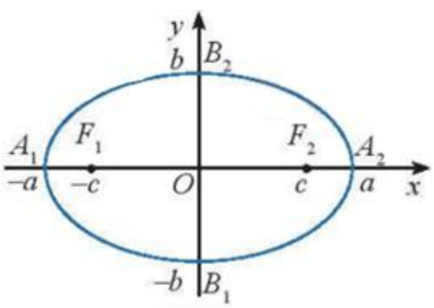
Độ dài $F_1F_2=2c$ gọi là **tiêu cự** của elip $(a>c)$.



Phương trình chính tắc của elip

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Phương trình có dạng $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2=a^2-c^2$ được gọi là ***phương trình chính tắc của elip*** (E)



Chú ý

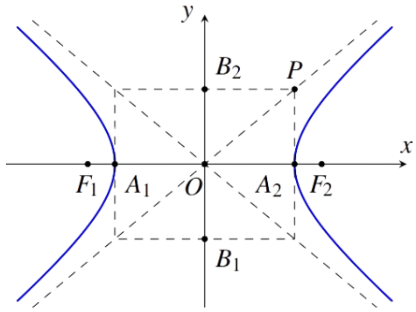
» Elip (E) cắt trục Ox, Oy tại các điểm $A_1(-a;0)$, $A_2(a;0)$, $B_1(0;-b)$, $B_2(0;b)$ gọi là các ***đỉnh*** của elip.

» Đoạn thẳng $A_1A_2=2a$ gọi là ***trục lớn***; đoạn thẳng $B_1B_2=2b$ gọi là ***trục bé.***

» Giao điểm O của hai trục gọi là ***tâm đối xứng*** của elip.

2. Hypebol

Định nghĩa hypebol



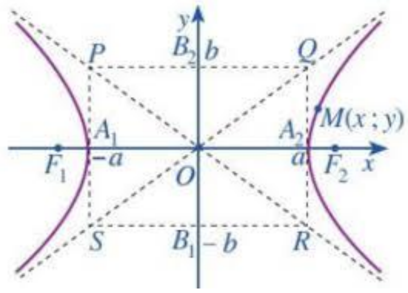
Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ nhỏ hơn F_1F_2.

Hypebol (H) là tập hợp tất cả điểm M trong mặt phẳng thỏa $|MF_1 - MF_2| = 2a$

Các điểm F_1, F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của hypebol

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của hypebol $(a < c)$.

Phương trình chính tắc của hypebol



Trong mặt phẳng Oxy, cho hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$ được gọi là ***phương trình chính tắc của hypebol*** (H)

Chú ý

» Hypebol (H) cắt trục Ox tại các điểm $A_1(-a;0), A_2(a;0)$ gọi là các ***đỉnh*** của hypebol.

» Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là ***trục thực***; đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là ***trục ảo.***

» Giao điểm O của hai trục gọi là ***tâm đối xứng*** của hypebol.

3. Parabol

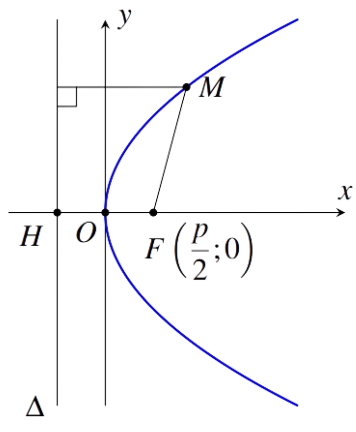
Định nghĩa parabol

Cho một điểm F và một đường thẳng cố định Δ không qua F.

Parabol (P) là tập hợp tất cả điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ

Điểm F gọi là ***tiêu điểm*** của parabol và đường thẳng Δ gọi là ***đường chuẩn*** của parabol (P)

Phương trình chính tắc của hypebol



Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và đường chuẩn $\Delta: x + \frac{p}{2} = 0$.

Phương trình có dạng $y^2 = 2px$ được gọi là ***phương trình chính tắc của parabol*** (P)

Chú ý

» Điểm O gọi là đỉnh của parabol (P).

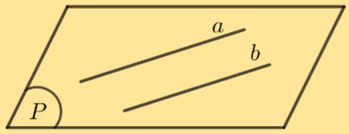
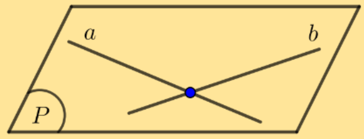
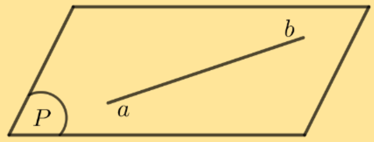
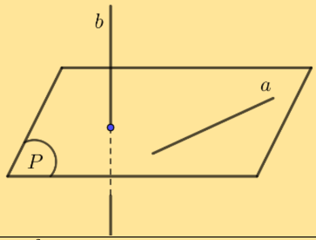
» Trục Ox gọi là ***trục đối xứng*** của parabol (P).

» p gọi là ***tham số tiêu*** của parabol (P).

Chương ☞ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG. QUAN HỆ SONG SONG KHÔNG GIAN

Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

Vị trí tương đối giữa hai đường thẳng và Định nghĩa

(1) Hai đường thẳng a và b cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung. Khi đó: a và b song song nhau. » Kí hiệu: $a \parallel b$	
(2) Hai đường thẳng a và b cùng nằm trong một mặt phẳng và có một điểm chung I duy nhất. Khi đó: a và b cắt nhau tại điểm I » Kí hiệu: $a \cap b = I$	
(3) Hai đường thẳng a và b và b cùng nằm trong một mặt phẳng và có từ hai điểm chung trở lên. Khi đó: a và b trùng nhau » Kí hiệu: $a \equiv b$	
(4) Hai đường thẳng a và b không cùng nằm trong một mặt phẳng. Khi đó: a và b chéo nhau	

» Hai đường thẳng gọi là ***đồng phẳng*** nếu chúng cùng nằm trong một mặt phẳng.
» Hai đường thẳng ***chéo nhau*** nếu chúng không đồng phẳng.
» Hai đường thẳng ***song song*** nếu chúng đồng phẳng và không có điểm chung.
» Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.

Tính chất (các quan hệ song song thường gặp trong các hình đa giác)

(1) ***Hình thang:*** Hai cạnh đáy song song

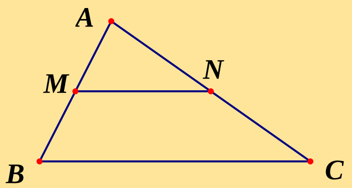
(2) ***Các dạng hình bình hành*** *(hình bình hành thường, hình thoi, hình chữ nhật, hình vuông):* Hai cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

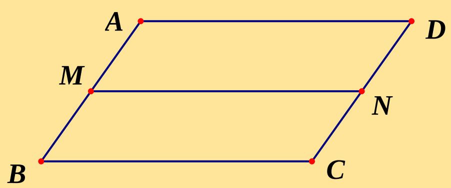
(3) ***Đường trung bình:***

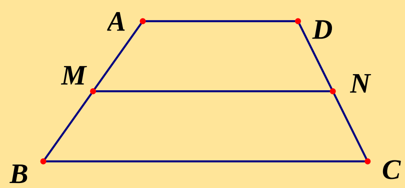
□*Đường trung bình của tam giác:* Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh, song song và bằng nửa cạnh còn lại.

□*Đường trung bình hình bình hành:* Đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh đối, song song và bằng hai cạnh còn lại.

□*Đường trung bình hình thang:* Đoạn thẳng nối hai cạnh bên, song song và bằng trung bình cộng hai cạnh đáy.



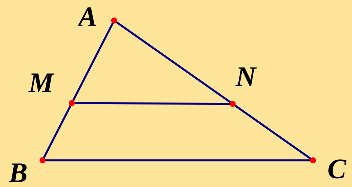




(4) ***Định lý Thalès trong tam giác***

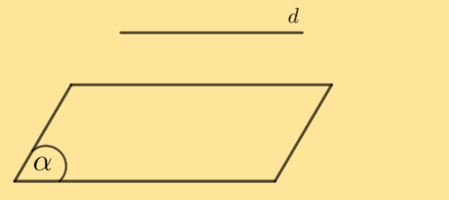
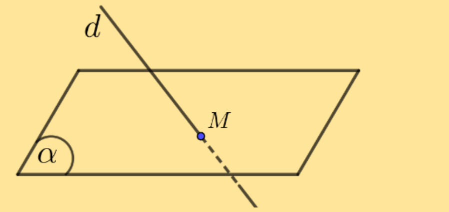
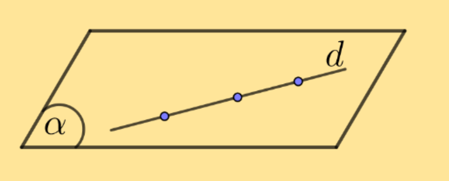
Một đường thẳng chắn hai cạnh của tam giác theo các đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại và ngược lại

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} \Leftrightarrow MN \parallel BC$$

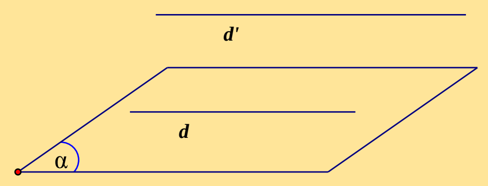
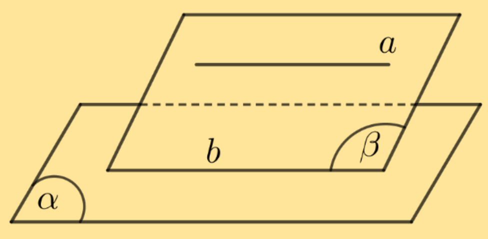
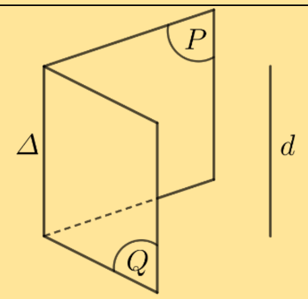


Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

Vị trí tương đối giữa đường thẳng, mặt phẳng và Định nghĩa

(1) d và (α) không có điểm chung. Khi đó ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d » Kí hiệu là $d//(\alpha)$ hay $(\alpha)//d$.	
(2) d và (α) có một điểm chung duy nhất M. Khi đó ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M » Kí hiệu là $d\cap(\alpha)=\{M\}$ hay $d\cap(\alpha)=M$.	
(3) d và (α) có từ hai điểm chung trở lên. Khi đó ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d » Kí hiệu là $d\subset(\alpha)$ hay $(\alpha)\supset d$	

Tính chất

Định lí 1: Nếu đường thẳng d không chứa trong mặt phẳng (α) và song song với đường thẳng d' chứa trong mặt phẳng (α) thì đường thẳng d song song với mặt phẳng (α)	$\begin{cases} d\not\subset(\alpha) \\ d \parallel d' \\ d'\subset(\alpha) \end{cases}$ $\Rightarrow d\parallel(\alpha)$	
Định lí 2: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (α). Nếu mặt phẳng (β) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.	$\begin{cases} a//(\alpha) \\ a\subset(\beta) \\ (\alpha)\cap(\beta)=b \end{cases}$ $\Rightarrow a//b$	
Hệ quả: Hai mặt phẳng cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng nếu có cũng song song với đường thẳng đó.	$\begin{cases} (P)\cap(Q)=\Delta \\ (P)//d,(Q)//d \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta//d$	

Bài 3. HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

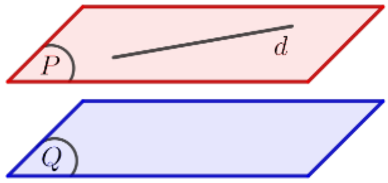
Định nghĩa

Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là song song với nhau nếu chúng không có điểm chung.

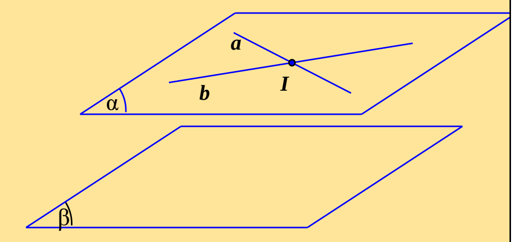
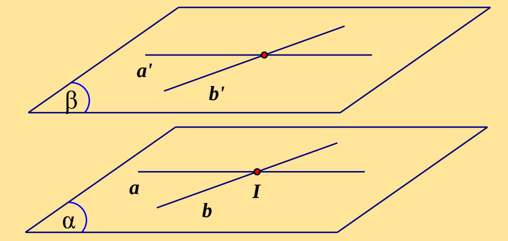
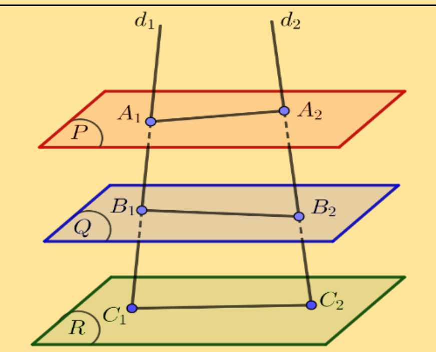
Ký hiệu: $(P)//(Q)$ hoặc $(Q)//(P)$.

⁂ *Nhận xét:*

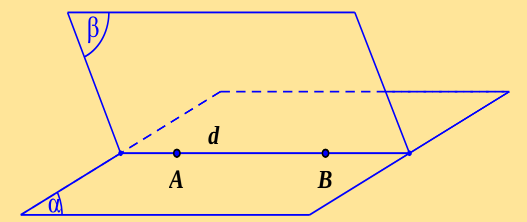
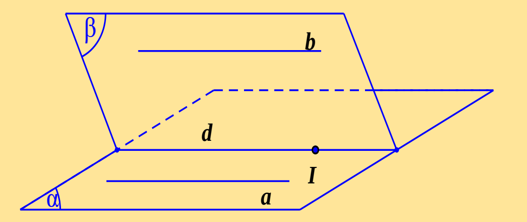
Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì bất kỳ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này cũng song song với mặt phẳng kia.

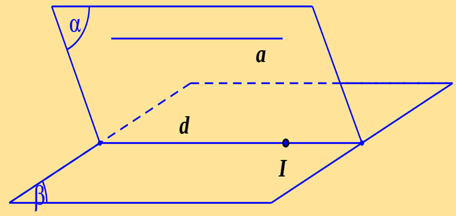


Tính chất

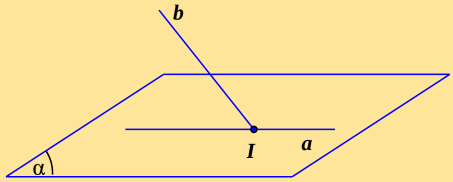
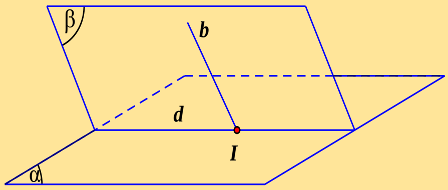
Định lí 1: Nếu mặt phẳng này có chứa 2 đường thẳng cắt nhau cùng song song với mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng song song nhau.	$\begin{cases}(\alpha)\supset a,b\\ a\cap b=I\\ a,\ b\parallel(\beta)\end{cases}$ $\Rightarrow(\alpha)\parallel(\beta)$	
Hệ quả: Nếu mặt phẳng này có chứa 2 đường thẳng cắt nhau lần lượt song song 2 đường thẳng chứa trong mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng song song nhau.	$\begin{cases}a,b\subset(\alpha)\\ a\cap b=I\\ a\parallel a',\ b\parallel b'\\ a',b'\subset(\beta)\end{cases}$ $\Rightarrow(\alpha)\parallel(\beta)$	
Định lí thales trong không gian: Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.	$\dfrac{A_1B_1}{A_2B_2}=\dfrac{B_1C_1}{B_2C_2}=\dfrac{C_1A_1}{C_2A_2}$	

☞ TÌM GIAO TUYẾN CỦA HAI MẶT PHẲNG

Cách 1: Tìm 2 điểm chung phân biệt của 2 mặt phẳng → Giao tuyến là đường thẳng đi qua 2 điểm chung đó	$\begin{cases}A\in(\alpha)\cap(\beta)\\ B\in(\alpha)\cap(\beta)\\ A\neq B\end{cases}$ $\Rightarrow AB=(\alpha)\cap(\beta)$	
Cách 2: Tìm 1 điểm chung của 2 mặt phẳng và chứng tỏ trong 2 mặt phẳng lần lượt có chưa 2 đường thẳng song song nhau → Giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung và song song 2 đường thẳng đó.	$\begin{cases}I\in(\alpha)\cap(\beta)\\ a\subset(\alpha),\ b\subset(\beta)\\ a\parallel b\end{cases}$ $\Rightarrow(\alpha)\cap(\beta)=Ix\ (Ix\parallel a\parallel b)$	

Cách 3: Tìm 1 điểm chung của 2 mặt phẳng và chứng tỏ trong mặt phẳng này có chưa 1 đường thẳng song song với mặt phẳng kia→ Giao tuyến là đường thẳng đi qua điểm chung và song song đường thẳng đó.	$\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (\beta) \\ a \subset (\alpha) \\ a \parallel (\beta) \end{cases}$ $\Rightarrow (\alpha) \cap (\beta) = Ix \ (Ix \parallel a)$	

☞ TÌM GIAO ĐIỂM CỦA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG.

Trường hợp 1: Nếu trong (α) có chứa sẵn đường thẳng a cắt b tại I thì I là giao điểm của b và (α).	$\begin{cases} (\alpha) \supset a \\ a \cap b = I \end{cases}$ $\Rightarrow b \cap (\alpha) = I$	
Trường hợp 2: Nếu trong (α) **không** chứa sẵn đường thẳng a cắt b như TH1 thì ta thực hiện như sau: **B1:** Chọn mặt phẳng phụ (β) chứa b sao cho giao tuyến của (α) và (β) dễ tìm. **B2:** Tìm giao tuyến d của (α) và (β). **B3:** Trong (β), tìm giao điểm I của d và b → I là giao điểm của b và (α).	$\begin{cases} (\beta) \supset b \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ d \cap b = I \end{cases}$ $\Rightarrow b \cap (\alpha) = I$	

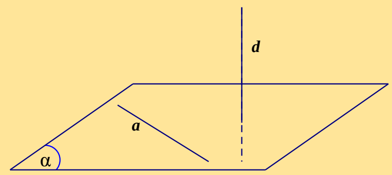
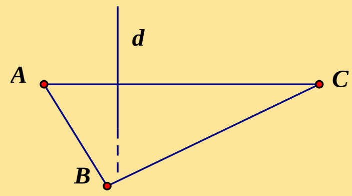
☞ TÌM THIẾT DIỆN CỦA HÌNH CHÓP, LĂNG TRỤ ĐƯỢC CẮT BỞI MỘT MẶT PHẲNG

Cách 1: Tìm tất cả các đoạn giao tuyến của (α) với các mặt của hình chóp, lăng trụ → Thiết diện là đa giác tạo bởi các đoạn giao tuyến đó.

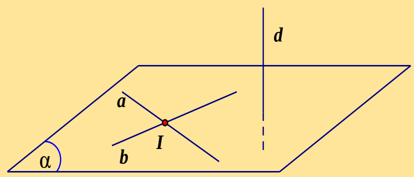
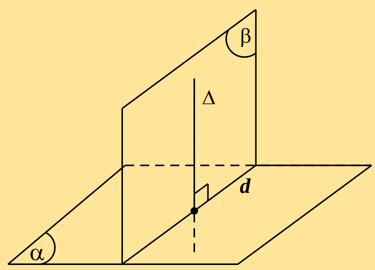
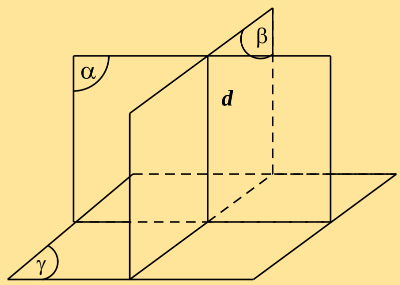
Cách 2: Tìm tất cả các giao điểm của (α) với các cạnh (nếu có) của hình chóp, lăng trụ → Thiết diện là đa giác tạo bởi các giao điểm đó.

Chương ☞ QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

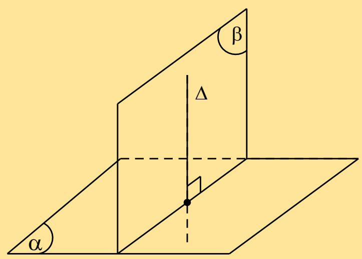
Bài 1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC.

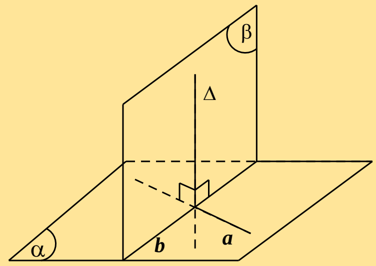
Định lí Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì đường thẳng đó vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng ấy. →Để chứng minh 2 đường thẳng vuông góc, ta chứng minh: đường thẳng này vuông góc với mặt phẳng chứa đường thẳng kia.	$\begin{cases} d \perp (\alpha) \\ a \subset (\alpha) \end{cases}$ $\Rightarrow d \perp a$	
Hệ quả Nếu một đường thẳng vuông góc với hai cạnh của một tam giác thì đường thẳng đó vuông góc với cạnh còn lại của tam giác ấy.	$\begin{cases} d \perp AB \\ d \perp AC \end{cases}$ $\Rightarrow d \perp BC$	

Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC.

Định lí Nếu một đường thẳng vuông góc với 2 đường thẳng cắt nhau cùng chứa trong mặt phẳng thì đường thẳng đó vuông góc với mặt phẳng ấy.	$\begin{cases} d \perp a;\ d \perp b \\ a \cap b = I \\ a, b \subset (\alpha) \end{cases}$ $\Rightarrow d \perp (\alpha)$	
Hệ quả 1 Nếu 2 mặt phẳng vuông góc nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến 2 mặt phẳng sẽ vuông góc mặt phẳng kia.	$\begin{cases} (\alpha) \perp (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ \Delta \subset (\beta) \\ \Delta \perp d \end{cases}$ $\Rightarrow \Delta \perp (\alpha)$	
Hệ quả 2 Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc mặt phẳng thứ 3 thì giao tuyến của 2 mặt phẳng đó (nếu có) sẽ vuông góc mặt phẳng thứ 3 đó.	$\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = d \\ (\alpha) \perp (\gamma) \\ (\beta) \perp (\gamma) \end{cases}$ $\Rightarrow d \perp (\gamma)$	

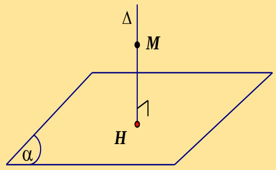
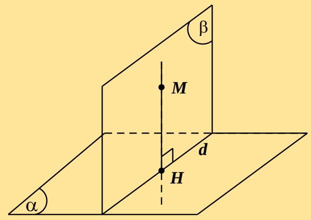
Bài 3. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC.

Định nghĩa Hai mặt phẳng vuông góc khi mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia. → Để chứng minh hai mặt phẳng vuông góc, ta chứng minh: mặt phẳng này có chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia.	$\begin{cases} \Delta \subset (\beta) \\ \Delta \perp (\alpha) \end{cases}$ $\Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$	

Định lí Nếu mặt phẳng này có chứa một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng kia thì hai mặt phẳng vuông góc nhau.	$\begin{cases}(\beta)\supset\Delta\\ \Delta\perp a,\ \Delta\perp b\\ a\cap b=I\\ a,b\subset(\alpha)\end{cases}$ $\Rightarrow(\alpha)\perp(\beta)$	

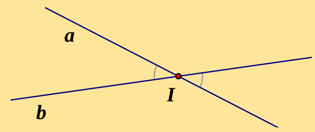
TÌM HÌNH CHIẾU CỦA ĐIỂM LÊN MẶT PHẲNG

• ***Định nghĩa:*** H là hình chiếu của M lên $(\alpha)\Leftrightarrow MH\perp(\alpha)$ tại H.

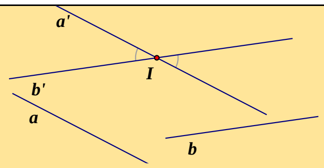
Trường hợp 1 Có đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc mặt phẳng (α) tại H . Suy ra, H là hình chiếu của M lên (α) 	***Trường hợp 2*** Chưa có sẵn đường thẳng Δ như trường hợp 1. • Tìm mặt phẳng (β) qua M và $(\beta)\perp(\alpha)$ • Tìm $d=(\alpha)\cap(\beta)$ • Vẽ $MH\perp d$ tại H $\Rightarrow MH\perp(\alpha)$ tại H $\Rightarrow H$ là hình chiếu của M lên (α) 

Bài 4. GÓC

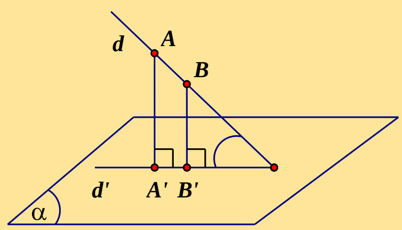
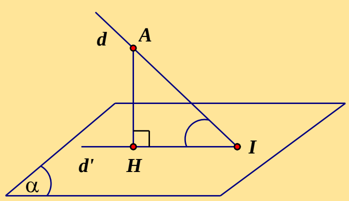
1. Góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau

Định nghĩa Góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau là góc có số đo nhỏ nhất (góc nhọn) trong 4 góc tạo thành.	

2. Góc giữa 2 đường thẳng bất kì

Định nghĩa Góc giữa 2 đường thẳng bất kì là góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với 2 đường thẳng đó.	$\begin{cases}a\parallel a'\\ b\parallel b'\end{cases}\Rightarrow(a;b)=(a';b')$	

3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

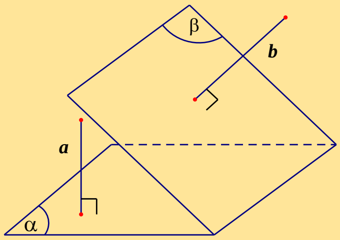
Định nghĩa Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng với hình chiếu của nó trên mặt phẳng. $(d,(\alpha))=(d,d')$ Với d' là hình chiếu của d lên (α)	Lấy $A,\ B\in d$ Tìm $A',\ B'$ lần lượt là hình chiếu của $A,\ B$ lên (α) → d' (hay $A'B'$) là hình chiếu của d lên (α) → $(d,(\alpha))=(d,d')$	
	Đặc biệt Nếu AI cắt (α) tại I và AH vuông góc (α) tại H thì $(AI,(\alpha))=AIH$	

4. Góc giữa hai mặt phẳng

Định nghĩa

Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng đó.

$$\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\beta) \end{cases} \Rightarrow ((\alpha),(\beta)) = (a,b)$$

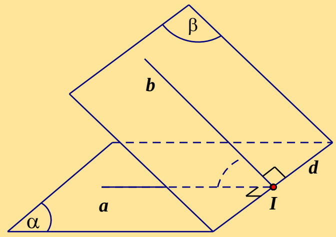


Cách xác định thường dùng

Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa 2 đường thẳng lần lượt chứa trong 2 mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến của 2 mặt phẳng đó.

$$\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \\ a \perp d; \quad b \perp d \end{cases}$$

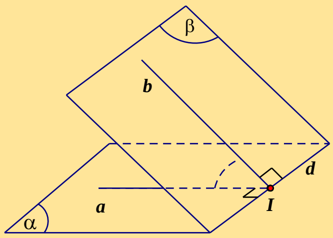
$$\Rightarrow ((\alpha),(\beta)) = (a,b)$$



5. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

Định nghĩa

Góc nhị diện (hay nhị diện) là hình tạo bởi hai nửa mặt phẳng và giao tuyến của hai nửa mặt phẳng đó.



Góc nhị diện $[\alpha, d, \beta]$

Hai nửa mặt phẳng α, β là hai mặt của nhị diện; d là cạnh của nhị diện

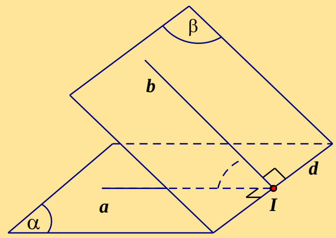
Định nghĩa

Góc phẳng nhị diện của một góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của nhị diện

Cách xác định góc phẳng nhị diện

$$\begin{cases} (\alpha) \cap (\beta) = d \\ a \subset (\alpha); b \subset (\beta) \\ a \perp d; \quad b \perp d \\ a \cap b = I \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\alpha, d, \beta] = aIb$$



Bài 5. KHOẢNG CÁCH

1. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

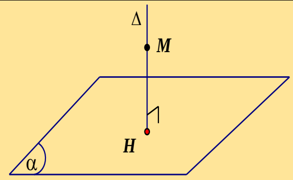
Định nghĩa

Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó lên mặt phẳng.

Tìm H là hình chiếu của A lên (α).

Khi đó:

$$d(A,(\alpha)) = AH$$



2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

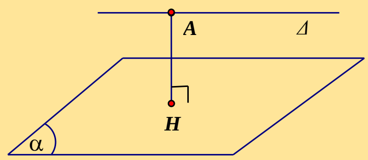
Định nghĩa

Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.

Lấy $A \in \Delta$.

Khi đó:

$$d(\Delta,(\alpha)) = d(A,(\alpha))$$



3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song

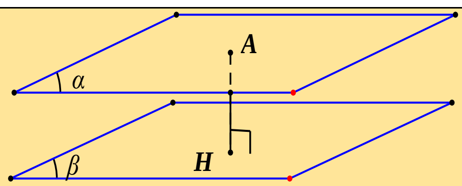
Định nghĩa

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

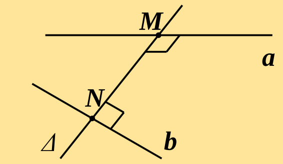
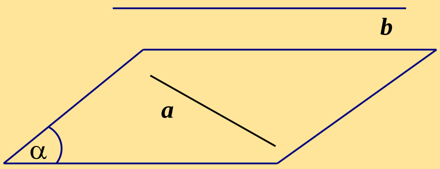
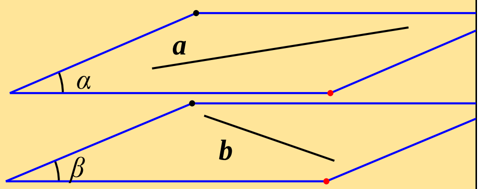
Lấy $A \in (\alpha)$.

Khi đó:

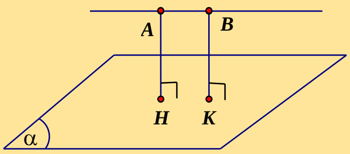
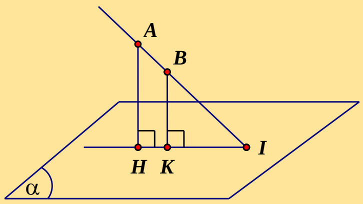
$$d((\alpha),(\beta)) = d(A,(\beta))$$



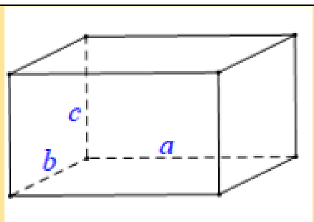
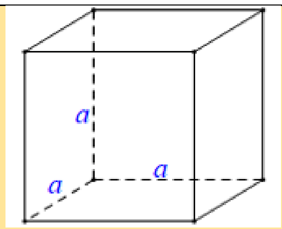
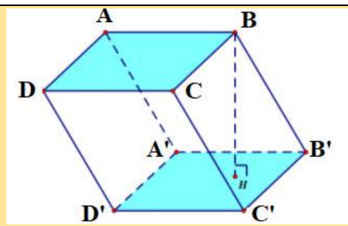
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

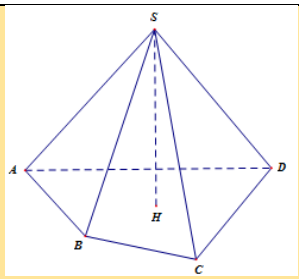
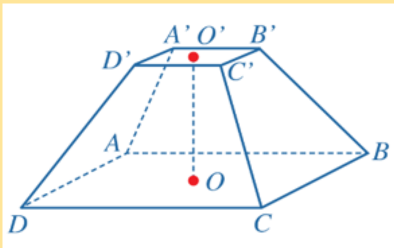
Định nghĩa Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng đó.	Tìm đường thẳng Δ cùng vuông góc a tại M và vuông góc với b tại N. Khi đó: $d(a,b)=MN$	
Cách xác định khác ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*** là khoảng cách giữa đường thẳng này với mặt phẳng song song chứa đường thẳng còn lại.	$\begin{cases}(\alpha)\supset a\\(\alpha)//b\end{cases}$ $\Rightarrow d(a,b)=d(b,(\alpha))$	
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song lần lượt chứa 2 đường thẳng đó.	$\begin{cases}(\alpha)\supset a,(\beta)\supset b\\(\alpha)//(\beta)\end{cases}$ $\Rightarrow d(a,b)=d((\alpha),(\beta))$	

•ĐẶC BIỆT: Quy tắc dời điểm khi tính khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng:

 $AB\parallel(\alpha)\Rightarrow \mathrm{d}(A,(\alpha))=\mathrm{d}(B,(\alpha))$	 $AB\cap(\alpha)=I\Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}(A,(\alpha))}{\mathrm{d}(B,(\alpha))}=\dfrac{AI}{BI}$

Bài 6. THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Khối hộp chữ nhật	***Khối lập phương***	***Khối lăng trụ***
		
$V=a.b.c$	$V=a^3$	$V=S.h$
Bằng tích 3 kích thước	Bằng lập phương độ dài cạnh	Bằng diện tích đáy nhân chiều cao

Khối chóp	***Khối chóp cụt***
	
$V=\frac{1}{3}S.h$ (Bằng một phần ba diện tích đáy nhân chiều cao)	$V=\frac{1}{3}\left(S+\sqrt{S.S'}+S'\right).h$

✓ Quy tắc tính thể tích khối đa diện

•**Bước 1.** Xác định các yếu tố: đường cao, đáy → Lập công thức thể tích (khai triển)

•**Bước 2.** Xác định các đại lượng không gian (nếu có): các loại góc không gian, các loại khoảng cách,…

•**Bước 3.** Tính số đo của các yếu tố (có trong công thức thể tích ở B1)

•**Bước 4.** Thay vào công thức thể tích ở B1 → Kết quả.

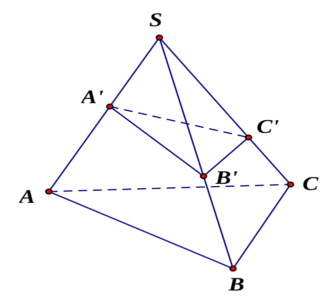
☞ Ứng dụng thể tích

1. Công thức tỉ số thể tích

Cho hình chóp *S.ABC* và *A', B', C'* lần lượt thuộc cạnh bên *SA, SB, SC*. Khi đó:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}\cdot\frac{SB'}{SB}\cdot\frac{SC'}{SC}$$

(*Chú ý: Chỉ áp dụng cho hình chóp tam giác)



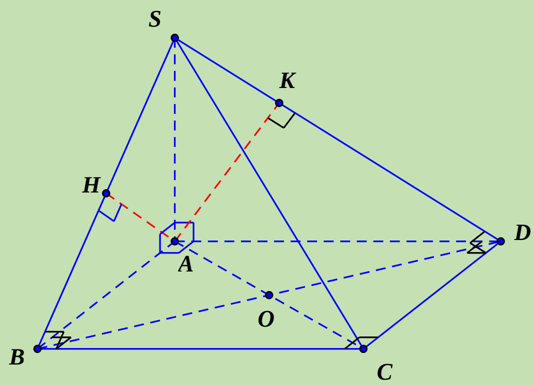
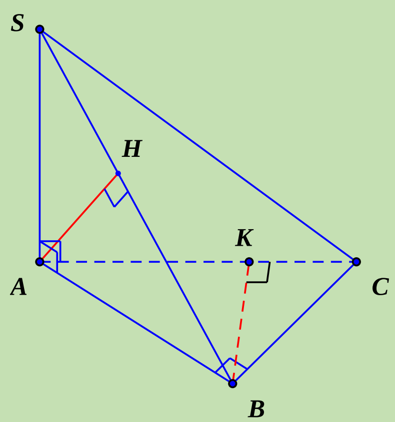
2. Khoảng cách từ 1 đỉnh đến mặt đối diện của một hình tứ diện (hình chóp tam giác)

$$V_{A.BCD}=\frac{1}{3}.S_{BCD}.d\left(A,(BCD)\right)\Rightarrow d\left(A,(BCD)\right)=\frac{3.V_{A.BCD}}{S_{BCD}}$$

📖 CÁC DẠNG HÌNH KHÔNG GIAN THƯỜNG GẶP

✓ HÌNH CHÓP

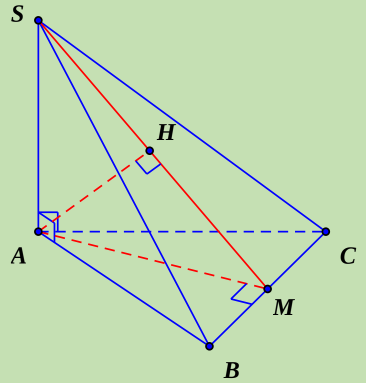
1. Hình chóp có một cạnh bên vuông góc đáy (hay hai mặt bên vuông góc với đáy)

Dạng 1: Hình chóp *S.ABCD* có đáy là hình chữ nhật và cạnh bên *SA* vuông góc mặt đáy. H, K lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. □Nếu một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì đường thẳng đó vuông góc với mọi đường thẳng chứa trong mặt phẳng. □Nếu một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng thì mặt phẳng đó vuông góc với mọi mặt phẳng chứa đường thẳng. □ $SA\perp(ABCD)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp AB,BC,CD,DA,AC,BD,...\\(ABCD)\perp(SAB),(SAC),(SAD),...\end{cases}$ □ $BC\perp(SAB),\ AD\perp(SAB)$; □ $AB\perp(SAD),\ DC\perp(SAD)$; □ $AH\perp(SBC);\ AK\perp(SCD)$ □Nếu đáy là hình vuông thì $BD\perp(SAC)$	
Dạng 2: Hình chóp *S.ABC* có đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B* và cạnh bên *SA* vuông góc mặt đáy. H là hình chiếu của A lên SB và K là hình chiếu của B lên AC. □ $SA\perp(ABC)\Rightarrow\begin{cases}SA\perp AB,BC,AC,...\\(ABC)\perp(SAB),(SAC),...\end{cases}$ □ $BC\perp(SAB)$; □ $AH\perp(SBC)$; □ $BK\perp(SACD)$	

Dạng 3: Hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều và cạnh bên SA vuông góc mặt đáy. M là trung điểm BC, H lần lượt là hình chiếu của A lên SM

□ $BC \perp (SAM)$;

□ $AH \perp (SBC)$;



2.Hình chóp đều *(Là hình chóp có đáy là đa giác đều và hình chiếu của đỉnh lên đáy (chân đường cao) trùng tâm đáy)*

Tính chất (chung):

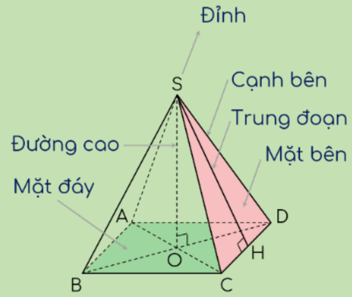
-Các cạnh bên bằng nhau, cạnh đáy bằng nhau

-Các mặt bên là những tam giác cân tại đỉnh hình chóp và bằng nhau

-Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là tâm đáy)

-Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau,

-Góc giữa các mặt bên và mặt đáy bằng nhau.



Hình chóp tam giác đều:

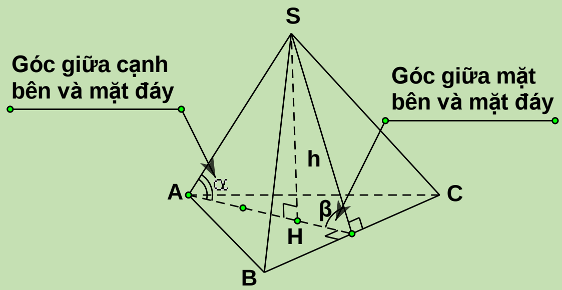
Tính chất (riêng):

Mặt đáy là tam giác đều

Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là giao điểm 2 đường trung tuyến của tam giác đáy)

Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là: $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = \alpha$.

Góc giữa mặt bên và mặt đáy là: $\widehat{SIH} = \beta$ (với I là trung điểm cạnh đáy)

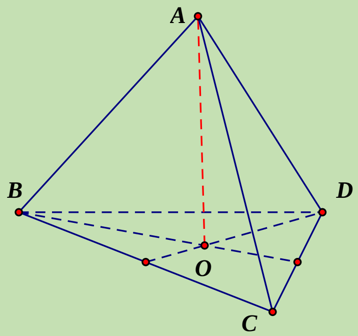


Cách vẽ hình chóp tam giác đều S.ABC (hoặc tứ diện đều):

Vẽ đáy ABC → Dựng trọng tâm H (Là giao điểm 2 đường trung tuyến) → Vẽ SH vuông góc (ABC) → Vẽ các cạnh bên

Hình tứ diện đều là hình chóp tam giác đều có cạnh bên bằng cạnh đáy (hình chóp tam giác có tất cả các cạnh bằng nhau.

Cho khối tứ diện đều cạnh a, chiều cao h và d là khoảng cách giữa hai cạnh đối diện. Ta có: $h = a\frac{\sqrt{6}}{3}$ $d = a\frac{\sqrt{2}}{2}$



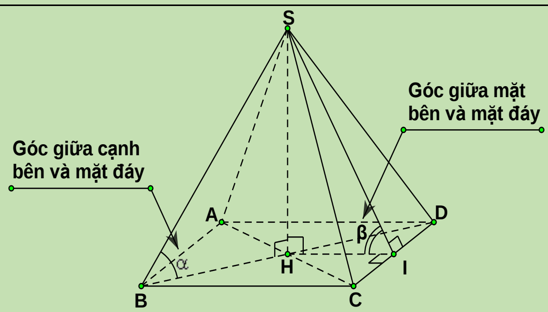
Hình chóp tứ giác đều

Tính chất (riêng):

Mặt đáy là hình vuông

Đường cao của hình chóp là SH (Với S là đỉnh và H là giao điểm 2 đường chéo của đáy hình vuông)

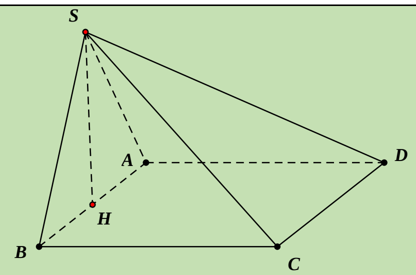
Góc giữa cạnh bên và mặt đáy là: $\widehat{SAH} = \widehat{SBH} = \widehat{SCH} = \widehat{SDH} = \alpha$.



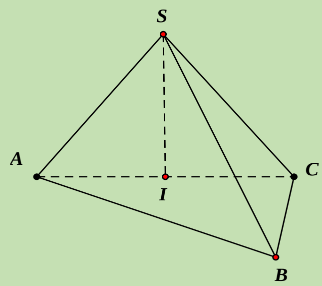
Cách vẽ hình chóp tứ giác đều S.ABCD:

Góc giữa mặt bên và mặt đáy là: $\widehat{SIH}=\beta$ (với I là trung điểm cạnh đáy)	Vẽ đáy hình bình hành $ABCD$ → Vẽ H là giao điểm của hai đường chéo AC và BD → Vẽ SH vuông góc $(ABCD)$ → Vẽ các cạnh bên

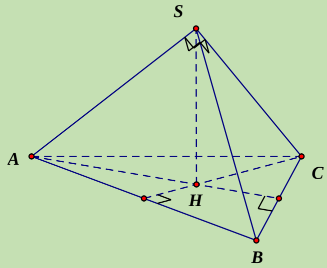
3. Hình chóp có một mặt bên vuông góc đáy

→ Đường cao hình chóp là đường cao của mặt bên đó (hạ từ đỉnh hình chóp). ***Ví dụ:*** Hình chóp *S.ABCD* có (*SAB*) vuông góc mặt đáy (*ABCD*) → Đường cao *SH* của tam giác *SAB* là đường cao hình chóp *S.ABCD*	

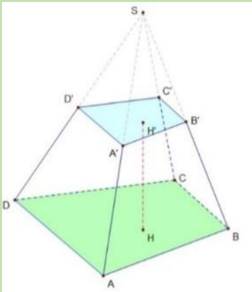
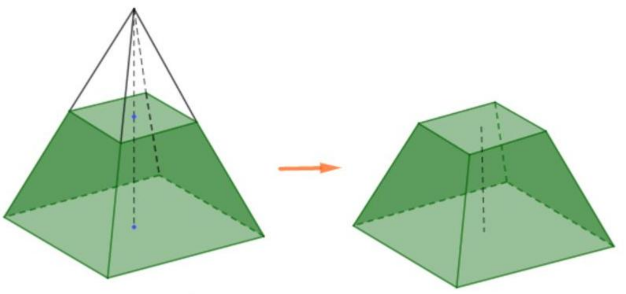
4. Hình chóp có tất cả cạnh bên bằng nhau

→ Đường cao hình chóp là đoạn thẳng hạ từ đỉnh hình chóp đến tâm đường tròn ngoại tiếp của đa giác đáy. ***Ví dụ:*** Hình chóp *S.ABC* các cạnh bên *SA*, *SB*, *SC* bằng nhau và đáy *ABC* là tam giác vuông tại *B* →Đường cao hình chóp là *SI*, với *I* là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác *ABC* (*I* là trung điểm *AC*)	

5. Tứ diện vuông

(Tứ diện có 3 mặt là 3 tam giác vuông tại cùng một đỉnh hay có 3 cạnh đôi một vuông góc) → Chân đường cao ứng với đỉnh vuông là trực tâm mặt đối diện với đỉnh vuông. ***Ví dụ:*** Hình chóp *S.ABC* có mặt bên *SAB*, *SBC*, *SCA* là tam giác vuông tại *S* →Đường cao *SH*, (với *H* là trực tâm tam giác *ABC*)	

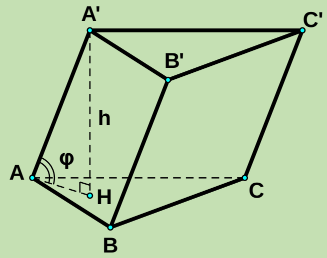
✓HÌNH CHÓP CỤT

Tính chất: ***Hình chóp cụt có*** + Các cạnh bên đồng quy; + Các mặt bên là hình thang; + Hai mặt đáy song song và đồng dạng nhau; + Đường cao là đoạn thẳng nối từ một điểm thuộc đáy này đến hình chiếu của nó lên đáy kia;	
Hình chóp cụt đều có + Các cạnh bên đồng quy; + Các mặt bên là hình thang cân; + Hai mặt đáy là hai đa giác đều, song song và đồng dạng nhau; + Đường cao là đoạn thẳng nối từ một điểm thuộc đáy này đến hình chiếu của nó lên đáy kia; + Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy bằng nhau; + Góc phẳng nhị diện tạo bởi các mặt bên và mặt đáy bằng nhau.	 Hình chóp đều Hình chóp cụt đều

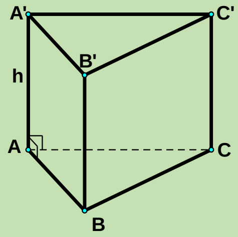
✓*HÌNH LĂNG TRỤ*

Tính chất: ***Hình Lăng trụ có***

+ Các cạnh bên song song và bằng nhau;
+ Các mặt bên là hình bình hành;
+ Hai mặt đáy song song và bằng nhau;
+ Đường cao là đoạn thẳng nối từ một điểm thuộc đáy này đến hình chiếu của nó lên đáy kia;
+ Góc giữa các cạnh bên và mặt đáy đều bằng nhau

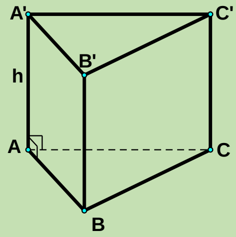


Lăng trụ đứng là lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với đáy



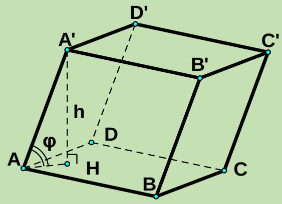
Đường cao là các cạnh bên *A'A*, *B'B*, *C'C*

Lăng trụ đều là lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều



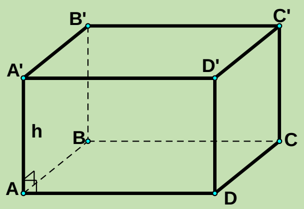
Đường cao là các cạnh bên *A'A*, *B'B*, *C'C*

Hình hộp là lăng trụ có đáy là hình bình hành



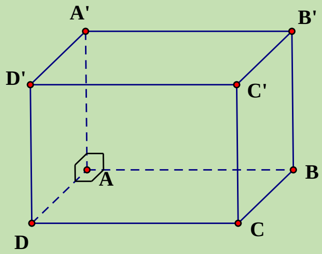
Đường cao: *A'H* (với *H* là hình chiếu của *A'* lên (*ABC*))

Hình hộp đứng là hình hộp có các cạnh bên vuông góc đáy (đáy là hình bình hành)



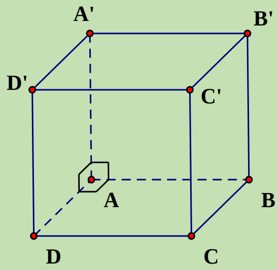
Đường cao:
$A'A,\ B'B,\ C'C,\ D'D$

Hình hộp chữ nhật là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật (có 6 mặt đều là hình chữ nhật)



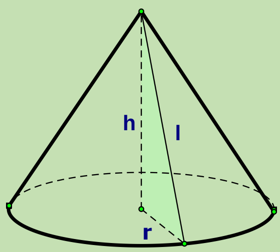
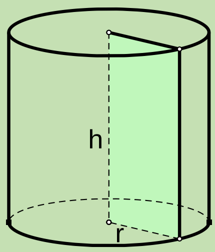
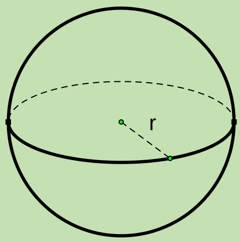
Đường chéo:
$AC' = \sqrt{AB^2 + AD^2 + AA'^2}$

Hình lập phương là hình hộp có 6 mặt đều là hình vuông



Đường chéo: $AC' = AB.\sqrt{3}$

Bài 7. THỂ TÍCH KHỐI TRÒN XOAY: NÓN, TRỤ, CẦU

	Hình nón	***Hình trụ***	***Hình cầu***
Hình vẽ và các yếu tố	 Chiều cao: *h* Bán kính đáy: *r* Độ dài đường sinh: *l*	 Chiều cao: *h* Bán kính: *r* Độ dài đường sinh: $l = h$	 Bán kính: *r*
Diện tích xung quanh	$S_{xq} = \pi rl$	$S_{xq} = 2\pi rl$	$S = 4\pi r^2$
Diện tích toàn phần	$S_{tp} = S_{xq} + S_d = \pi rl + \pi r^2$	$S_{tp} = S_{xq} + 2.S_d = 2\pi rl + 2.\pi r^2$	$S = 4\pi r^2$
Thể tích	$V = \dfrac{1}{3}\pi.r^2.h$	$V = \pi.r^2.h$	$V = \dfrac{4}{3}\pi.r^3$

PHẦN ☞ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

Chương ☞ THỐNG KÊ

Bài 1. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. Số trung bình

- Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Số trung bình (hay số trung bình cộng) của mẫu số liệu này, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bởi công thức

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}.$$

- Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số

Giá trị	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

Khi đó, công thức tính số trung binh trở thành $\overline{x} = \dfrac{n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k}{n}$, trong đó $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$.

Ta gọi n là cỡ mẫu.

Chú ý

Ki hiệu $f_k = \dfrac{n_k}{n}$ là tần số tương đối (hay còn gọi là tần suất) của x_k trong mẫu số liệu thì số trung binh còn có thể biểu diễn là $\overline{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + \ldots + f_kx_k$.

Ý nghĩa của số trung bình

Số trung bình của mẫu số liệu được dùng làm đại diện cho các số liệu của mẫu. Nó là một số đo xu thế trung tâm của mẫu đó.

2. Trung vị và tứ phân vị

Sắp xếp lại mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_n$.

Trung vị của mẫu, ki hiệu là M_e, là giá trị ở chính giữa dãy $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Cụ thể:

+ Nếu $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N}$ thì trung vị mẫu là $M_e = x_{k+1}$.

+ Nếu $n = 2k,\ k \in \mathbb{N}$ thì trung vị mẫu là $M_e = \dfrac{1}{2}\left(x_k + x_{k+1}\right)$.

Ý nghĩa của trung vị

Trung vị được dủng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu. Trung vị là giá trị nằm ở chinh giữa của mẫu số liệu theo nghĩa: luôn có it nhất 50% số liệu trong mẫu lớn hơn hoặc bằng trung vị và it nhất 50% số liệu trong mẫu nhỏ hơn hoặc bằng trung vị. Khi trong mẫu xuất hiện thêm một giá trị rất lớn hoặc rất nhỏ thi số trung binh sẽ bị thay đổi đáng kể nhưng trung vị thì it thay đổi.

- Tứ phân vị của một mẫu ngẫu nhiên gồm 3 giá trị, đó là tư phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba (lần lượt ki hiệu là Q_1, Q_2, Q_3). Ba giá trị này chia tập hợp dữ liệu đã sắp xếp thành bốn phần đều nhau. Cụ thể:

+ Giá trị tứ phân vị thứ hai, Q_2, chinh là trung vị của mẫu.

+ Giá trị tứ phân vị thứ nhất, Q_1, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên trái Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

+ Giá trị tứ phân vị thứ ba, Q_3, là trung vị của nửa số liệu đã sắp xếp bên phải Q_2 (không bao gồm Q_2 nếu n lẻ).

Ý nghĩa của tứ phân vị

Các điểm tứ phân vị Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần chứa khoảng 25% tổng số số liệu đã thu thập được. Tứ phân vị thứ nhất Q_1 còn được gọi là tứ phân vị dưới và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía dưới. Tứ phân vị thứ ba Q_3 còn được gọi là tứ phân vị trên và đại diện cho nửa mẫu số liệu phía trên.

3. Mốt

- Cho một mẫu số liệu dưới dạng bảng tần số. Giá trị có tần số lớn nhất được gọi là mốt của mẫu số liệu, kí hiệu là M_o.

Ý nghĩa của mốt

Mốt đặc trưng cho giá trị xuất hiện nhiều nhất trong mẫu. liệu có tần số xuất hiện bằng nhau thì mẫu số liệu đó không có mốt.

Bài 2. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO MỨC ĐỘ PHÂN TÁN CỦA MẪU SỐ LIỆU

1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm, ta được: $x_1 \le x_2 \le x_3 \le ... \le x_n$

Khoảng biến thiên của một mẫu số liệu, kí hiệu là R, là hiệu giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của mẫu số liệu đó, tức là: $\boxed{R = x_n - x_1}$

Khoảng tứ phân vị, kí hiệu là Δ_Q, là hiệu giữa Q_3 và Q_1, tức là: $\boxed{\Delta_Q = Q_3 - Q_1}$

Ví dụ 1

Hãy tính khoảng biền thiên và khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu: 10; 20; 3; 1; 3; 4; 7 ; 4; 9

Giải

Xét mẫu số liệu đã sắp xếp là: 1; 3; 3; 4; 4; 7; 9; 10; 20.

- Khoảng biến thiên của mẫu số liệu là: R = 20 - 1 = 19.
- Cỡ mẫu là n = 9 là số lẻ nên giá trị tứ phân vị thứ hai là: $Q_2 = 4$.
- Tứ phân vị thứ nhất là trung vị của mẫu: 1; 3; 3; 4. Do đó $Q_1 = 3$.
- Tứ phân vị thứ ba là trung vị của mẫu: 7; 9; 10; 20. Do đó $Q_3 = 9,5$.
- Khoảng tứ phân vị của mẫu là: $\Delta_Q = 9,5 - 3 = 6,5$..

Ý nghĩa của khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Khoảng biến thiên đặc trưng cho độ phân tán của toàn bộ mẫu số liệu.

Khoảng tứ phân vị đặc trưng cho độ phân tán của một nửa các số liệu, có giá trị thuộc đoạn từ Q_1 đến Q_3 trong mẫu.

Khoảng tứ phân vị không bị ảnh hưởng bởi các giá trị rất lớn hoặc rất bé trong mẫu.

Giá trị ngoại lệ

Khoảng tứ phân vị được dùng để xác định các *giá trị ngoại lệ* trong mẫu, đó là các giá trị quá nhỏ hay quá lớn so với đa số các giá trị của mẫu.

Cụ thể, phần tử x trong mẫu là giá trị ngoại lệ nếu $x < Q_1 - 1,5.\Delta_Q$ hoặc $x > Q_3 + 1,5.\Delta_Q$

Trong Ví dụ 1, $Q_3 + 1,5.\Delta_Q = 9,5 + 1,5.6,5 = 19,25$ và $Q_1 - 1,5.\Delta_Q = 3 - 1,5.6,5 = -6,75$

Nên mẫu có một giá trị ngoại lệ là 20.

Sự xuất hiện của các giá trị ngoại lệ làm cho số trung bình và phạm vi của mẫu thay đổi lớn. Do đó, khi mẫu có giá trị ngoại lệ, người ta thường sử dụng trung vị và khoảng tứ phân vị đo mức độ tập trung và mức độ phân tán của đa số các phần tử trong mẫu số liệu.

2. Phương sai và độ lệch chuẩn

Giả sử ta có một mẫu số liệu là $x_1;x_2;...;x_n$

□**Phương sai** của mẫu số liệu này, kí hiệu là S^2, được tính bởi công thức:

$$\boxed{S^2=\frac{1}{n}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]}$$

trong đó $\overline{x}$ là số trung bình của mẫu số liệu.

□Căn bậc hai của phương sai được gọi là ***độ lệch chuẩn***, kí hiệu là S.

Chú ý: Có thể biến đổi công thức tính phương sai ở trên thành:

$$\boxed{S^2=\frac{1}{n}\left(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2\right)-\overline{x}^2.}$$

Trong thống kê, người ta cũng quan tâm đến phương sai hiệu chỉnh, kí hiệu là $\hat{s}^2$, được tính bởi công thức:

$$\boxed{\hat{s}^2=\frac{1}{n-1}\left[\left(x_1-\overline{x}\right)^2+\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+\left(x_n-\overline{x}\right)^2\right]}$$

Ý nghĩa của phương sai và độ lệch chuẩn

Phương sai là trung bình cộng của các bình phương độ lệch từ mỗi giá trị của mẫu số liệu đến số trung bình.

Phương sai và độ lệch chuẩn được dùng để đo mức độ phân tán của các số liệu trong mẫu quanh số trung bình. Phương sai và độ lệch chuẩn cùng lớn thì các giá trị của mẫu càng cách xa nhau (có độ phân tán lớn).

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số:

Giá trị	x_1	x_2	$\cdots$	x_k
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Khi đó, công thức tính phương sai trở thành:

$$\boxed{S^2=\frac{1}{n}\left[n_1\left(x_1-\overline{x}\right)^2+n_2\left(x_2-\overline{x}\right)^2+\ldots+n_k\left(x_k-\overline{x}\right)^2\right]}$$

trong đó $n=n_1+n_2+...+n_k$

Có thể biến đổi công thức tính phương sai trên thành:

$$\boxed{S^2=\frac{1}{n}\left(n_1.x_1^2+n_2.x_2^2+\ldots+n_k.x_k^2\right)-\overline{x}^2.}$$

Bài 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM CHO MẪU SỐ LIỆU GHÉP NHÓM

1. Số trung bình và mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

a) Số liệu ghép nhóm

Mẫu số liệu ghép nhóm thường được trình bày dưới dạng bảng thống kê có dạng như sau:

Bảng 1: Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\cdots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\cdots$	n_k

Chú ý

- Bảng trên gồm k nhóm $[u_j;u_{j+1})$ với $1\le j\le k$, mỗi nhóm gồm một số giá trị được ghép theo một tiêu chí xác định.

- Cỡ mẫu $n=n_1+n_2+\ldots+n_k$.

- Giá trị chính giữa mỗi nhóm được dùng làm ***giá trị đại diện*** cho nhóm ấy. Ví dụ nhóm $[u_1;u_2)$ có giá trị đại diện là $\frac{1}{2}(u_1+u_2)$.

- Hiệu $u_{j+1}-u_j$ được gọi là độ dài của nhóm $[u_j;u_{j+1})$.

Một số quy tắc ghép nhóm của mẫu số liệu

Mỗi mẫu số liệu có thể được ghép nhóm theo nhiều cách khác nhau nhưng thường tuân theo một số quy tắc sau:

- Sử dụng từ $k=5$ đến $k=20$ nhóm. Cỡ mẫu càng lớn thì cần càng nhiều nhóm số liệu. Các nhóm có cùng độ dài bằng L thoả mãn $R<k.L$, trong đó R là khoảng biến thiên, k là số nhóm.

- Giá trị nhỏ nhất của mẫu thuộc vào nhóm $[u_1;u_2)$ và càng gần u_1 càng tốt. Giá trị lớn nhất của mẫu thuộc nhóm $[u_k;u_{k+1})$ và càng gần u_{k+1} càng tốt.

b) Số trung bình

Giả sử mẫu số liệu được cho dưới dạng bảng tần số ghép nhóm:

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\dots$	$[u_k;u_{k+1})$
Giá trị đại diện	c_1	c_2	$\dots$	c_k
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu $\overline{x}$, được tính như sau:

$$\boxed{\overline{x}=\frac{n_1c_1+n_2c_2+\dots+n_kc_k}{n}}$$

trong đó $n=n_1+n_2+\dots+n_k$.

Ý nghĩa của số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho số trung bình của mẫu số liệu gốc.

Nó thường dùng để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

c) Mốt

Bảng tần số ghép nhóm

Nhóm	$[u_1;u_2)$	$[u_2;u_3)$	$\dots$	$[u_k;u_{k+1})$
Tần số	n_1	n_2	$\dots$	n_k

Nhóm chứa mốt của mẫu số liệu ghép nhóm là nhóm có tần số lớn nhất.

Giả sử nhóm chứa mốt là $[u_m;u_{m+1})$, khi đó **mốt của mẫu số liệu ghép nhóm**, kí hiệu là M_o, được xác định bởi công thức

$$\boxed{M_o=u_m+\frac{n_m-n_{m-1}}{(n_m-n_{m-1})+(n_m-n_{m+1})}\cdot(u_{m+1}-u_m).}$$

Chú ý:

Nếu không có nhóm kề trước của nhóm chứa mốt thì $n_{m-1}=0$. Nếu không có nhóm kề sau của nhóm chứa mốt thì $n_{m+1}=0$.

Ý nghĩa của mốt của mẫu số liệu ghép nhóm

- Mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm là giá trị có khả năng xuất hiện cao nhất khi lấy mẫu. Mốt của mẫu số liệu sau khi ghép nhóm M_o xấp xỉ với mốt của mẫu số liệu không ghép nhóm. Các giá trị nằm xung quanh M_o thường có khả năng xuất hiện cao hơn các giá trị khác.

- Một mẫu số liệu ghép nhóm có thể có nhiều nhóm chứa mốt và nhiều mốt.

2. Trung vị và tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

a) Trung vị

Công thức xác định trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

- Gọi n là cỡ mẫu.
- Giả sử nhóm $[u_m;u_{m+1})$ chứa trung vị;
- n_m là tần số của nhóm chứa trung vị;
- $C=n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}$.

Khi đó: $$\boxed{M_e=u_m+\frac{\frac{n}{2}-C}{n_m}\cdot(u_{m+1}-u_m).}$$

Ý nghĩa của trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Từ dữ liệu ghép nhóm nói chung không thể xác định chính xác trung vị của mẫu số liệu gốc. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho mẫu số liệu gốc và có thể lấy làm giá trị đại diện cho mẫu số liệu.

b) Tứ phân vị

Công thức xác định tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Tứ phân vị thứ hai của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_2, cũng chính là trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Để tìm tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_1, ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_m;u_{m+1})$ chứa tứ phân vị thứ nhất;
- n_m là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ nhất;
- $C=n_1+n_2+\ldots+n_{m-1}$.

Khi đó: $$\boxed{Q_1=u_m+\frac{\frac{n}{4}-C}{n_m}\cdot(u_{m+1}-u_m)}$$

Tương tự, để tìm tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm, kí hiệu Q_3, ta thực hiện như sau:

- Giả sử nhóm $[u_j;u_{j+1})$ chứa tứ phân vị thứ ba;
- n_j là tần số của nhóm chứa tứ phân vị thứ ba;
- $C=n_1+n_2+\ldots+n_{j-1}$.

Khi đó: $$\boxed{Q_3=u_j+\frac{\frac{3n}{4}-C}{n_j}\cdot(u_{j+1}-u_j).}$$

Ý nghĩa của tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm

Ba điểm tứ phân vị chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự không giảm thành bốn phần đều nhau. Giống như với trung vị, nói chung không thể xác định chính xác các điểm tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm.

Bộ ba tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là giá trị xấp xỉ cho tứ phân vị của mẫu số liệu gốc và được sử dụng làm giá trị đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu.

Tứ phân vị thứ nhất và thứ ba đo xu thế trung tâm của nửa dưới (các dữ liệu nhỏ hơn Q_2) và nửa trên (các dữ liệu lớn hơn Q_2) của mẫu số liệu.

Chương ☞ XÁC SUẤT

Bài 1. XÁC SUẤT CỔ ĐIỂN

1. Không gian mẫu

Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của một phép thử gọi là không gian mẫu. Kí hiệu: Ω

2. Biến cố

Biến cố là tập con của không gian mẫu
Biến cố không thể xảy ra gọi là biến cố không. Kí hiệu là $\varnothing$
Không gian mẫu là biến cố luôn xảy ra gọi là biến cố chắc chắn.

3. Xác suất của biến cố

Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Xác suất của biến cố A là: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}=\dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$

Trong đó: $n(A)=|\Omega_A|$ là số phần tử (hay kết quả thuận lợi) của biến cố A;

$n(\Omega)=|\Omega|$ là số phần tử của không gian mẫu (hay tất cả kết quả có thể xảy ra của phép thử).

Tính chất

- $P(\varnothing)=0$;
- $P(\Omega)=1$;
- $0\le P(A)\le 1$;
- $P(\overline{A})=1-P(A)$

Quy tắc tính xác suất

Bước 1. Mô tả không gian mẫu Ω (Nếu được). Kiểm tra tính hữu hạn của Ω, tính đồng khả năng của các kết quả. Đếm số kết quả có thể xảy ra của phép thử: Tính $n(\Omega)$

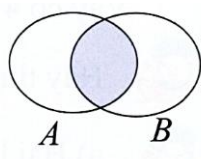
Bước 2. Xác định biến cố A và Đếm số kết quả có thể xảy ra của biến cố A: Tính $n(A)$

Bước 3. Tính xác suất của biến cố A: $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

Bài 2. BIẾN CỐ GIAO VÀ QUY TẮC NHÂN XÁC SUẤT

1. Biến cố giao

Cho hai biến cố A và B. Biến cố "Cả A và B cùng xảy ra", kí hiệu AB hoặc $A\cap B$ được gọi là biến cố giao của A và B.

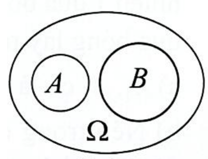


Chú ý:

Tập hợp mô tả biến cố AB là giao của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B. Biến cố AB xảy ra khi và chỉ khi cả hai biến cố A và B xảy ra.

2. Hai biến cố xung khắc

Hai biến cố A và B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra. (Hay $A\cap B=\varnothing$)



3. Biến cố độc lập

Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng tới xác suất xảy ra của biến cố kia.

4. Quy tắc nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Để tính xác suất của giao các biến cố độc lập, ta sử dụng quy tắc nhân xác suất sau:
Nếu hai biến cố A và B độc lập thì $P(AB)=P(A)P(B)$.

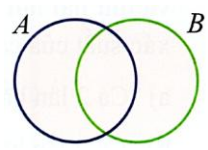
Chú ý:

Từ quy tắc nhân xác suất ta thấy, nếu $P(AB)\ne P(A)P(B)$ thì hai biến cố A và B không độc lập.

Bài 3. BIẾN CỐ HỢP VÀ QUY TẮC CỘNG XÁC SUẤT

1. Biến cố hợp

Cho hai biến cố A và B. Biến cố " A hoặc B xảy ra", kí hiệu là $A \cup B$, được gọi là biến cố hợp của A và B.



Chú ý:

Biến cố $A \cup B$ xảy ra khi có ít nhất một trong hai biến cố A và B xảy ra. Tập hợp mô tả biến cố $A \cup B$ là hợp của hai tập hợp mô tả biến cố A và biến cố B.

2. Quy tắc cộng xác suất

Cho hai biến cố xung khắc A và B. Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Cho hai biến cố A và B bất kì. Khi đó $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$