VÕ CÔNG TRƯỜNG
0983 900 570

TOÁN 10

HỆ THỐNG KIẾN THỨC VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

2025-2026

MỤC LỤC

Phần ☛ ĐẠI SỐ VÀ MỘT SỐ YẾU TỐ GIẢI TÍCH

CHƯƠNG ☛ MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP

Bài 1. MỆNH ĐỀ

1. Mệnh đề

Định nghĩa

Mệnh đề là một khẳng định đúng hoặc sai.
≫ Một khẳng định đúng gọi là ***mệnh đề đúng.*** Một khẳng định sai gọi là ***mệnh đề sai.***
≫ Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

2. Mệnh đề chứa biến

Định nghĩa

Một mệnh đề chứa biến có thể chứa một biến hoặc nhiều biến.
Hay “Câu có tính đúng, sai phụ thuộc vào một hoặc nhiều yếu tố gọi là mệnh đề chứa biến”.

3. Phủ định của một mệnh đề

Định nghĩa

Mỗi mệnh đề P có mệnh đề phủ định, kí hiệu là $\overline{P}$.
Mệnh đề P và mệnh đề phủ định $\overline{P}$ của nó có tính đúng sai trái ngược nhau.
Nghĩa là:

Nếu P đúng thì $\overline{P}$ sai.
Nếu P sai thì $\overline{P}$ đúng.

4. Mệnh đề kéo theo

Định nghĩa

Cho hai mệnh đề P và Q.
Mệnh đề "Nếu P thì Q" được gọi là ***mệnh đề kéo theo***, và kí hiệu là $P \Rightarrow Q$.
Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ còn được phát biểu là "P kéo theo Q" hoặc "Từ P suy ra Q".
Mệnh đề $P \Rightarrow Q$ chỉ sai khi P đúng và Q sai.
▶ Như vậy, ta chỉ xét tính đúng sai của mệnh đề $P \Rightarrow Q$ khi P đúng.
Khi đó, nếu Q đúng thì $P \Rightarrow Q$ đúng, nếu Q sai thì $P \Rightarrow Q$ sai.

Nhận xét.

Các định lí, toán học là những mệnh đề đúng và thường có dạng $P \Rightarrow Q$.
Khi mệnh đề $P \Rightarrow Q$ là định lý, ta nói:

(1) P là giả thiết, Q là kết luận của định lí;.
(2) P là **điều kiện đủ** để có Q;
(3) Q là **điều kiện cần** để có P.

5. Mệnh đề đảo. Hai mệnh đề tương đương

Mệnh đề đảo

Mệnh đề $Q \Rightarrow P$ được gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $P \Rightarrow Q$.
Mệnh đề đảo của một mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

Mệnh đề tương đương

Nếu hai mệnh đề $P \Rightarrow Q$ và $Q \Rightarrow P$ đều đúng thì P và Q là ***hai mệnh đề tương đương***.
Kí hiệu $P \Leftrightarrow Q$ và đọc là

» P *tương đương* Q, *hoặc*
» P là *điều kiện cần và đủ* để có Q, *hoặc*
» P *khi và chỉ khi* Q.

6. Mệnh đề chưa kí hiệu lượng từ “với mọi” $(\forall)$, “tồn tại” $(\exists)$

Kí hiệu “với mọi”

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$.
Khi đó “với mọi $x \in X$ thì $P(x)$” là một mệnh đề,
Được kí hiệu: "$\forall x \in X : P(x)$"

» Mệnh đề này ***đúng*** khi với x_0 bất kì thuộc X, $P(x_0)$ đúng.

» Mệnh đề này ***sai*** khi tồn tại x thuộc X sao cho $P(x_0)$ sai.

Kí hiệu "tồn tại"

Cho mệnh đề chứa biến $P(x)$ với $x \in X$.

Khi đó "tồn tại $x \in X$ để $P(x)$" là một mệnh đề ,

Được kí hiệu: $"\exists x \in X, P(x)"$

» Mệnh đề này ***đúng*** khi với x_0 bất kì thuộc X, $P(x_0)$ đúng.

» Mệnh đề này ***sai*** khi với mọi x_0 bất kì thuộc X sao cho $P(x_0)$ sai (không có x nào để $P(x)$ đúng).

Phủ định mệnh đề chứa kí hiệu "với mọi", "tồn tại"

» Mệnh đề phủ định của mệnh đề $"\forall x \in X, P(x)"$ là mệnh đề: $"\exists x \in X, \overline{P(x)}"$

» Mệnh đề phủ định của mệnh đề $"\exists x \in X, P(x)"$ là mệnh đề: $"\forall x \in X, \overline{P(x)}"$

Bài 2. TẬP HỢP

1. Nhắc lại về tập hợp

Tập hợp và phần tử

Tập hợp (còn gọi là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học, không định nghĩa.

Giả sử đã cho tập hợp A.

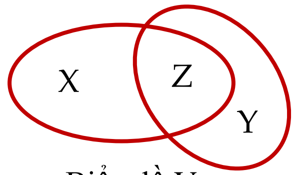
- Để chỉ a là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \in A$ (đọc là a thuộc A).
- Để chỉ a không phải là một phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là P không thuộc A).

Cách xác định tập hợp

Một tập hợp được xác định bằng một trong hai cách sau:

- Liệt kê các phần tử của nó: Các phần tử viết trong dấu $\{\ \}$, cách nhau bởi dấu phẩy (hoặc chấm phẩy), mỗi phần tử chỉ viết 1 lần.
- Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó: Nếu tập X chứa và chỉ chứa những phần tử có tính chất P thì ta ghi $X = \{x \mid x \text{ co tinh chat } P\}$.

Người ta thường minh họa tập hợp bằng một hình phẳng được bao quanh bởi một đường kín, gọi là biểu đồ Ven như hình.



Biểu đồ Venn

Tập hợp rỗng

Tập hợp rỗng, kí hiệu là $\varnothing$, là tập hợp không chứa phần tử nào.

Nếu A không phải là tập hợp rỗng thì A chứa ít nhất một phần tử.

$A \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists x : x \in A.$

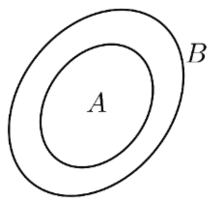
Chú ý

Số phần tử của tập hợp A được kí hiệu là $n(A)$

2. Tập con và hai tập hợp bằng nhau

Tập hợp con

Nếu mọi phần tử của tập hợp A đều là phần tử của tập hợp B thì ta nói A là một **tập hợp con** của B và viết $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B).



Thay cho $A \subset B$ ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A hoặc B bao hàm A)

Như vậy $A \subset B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Rightarrow x \in B)$.

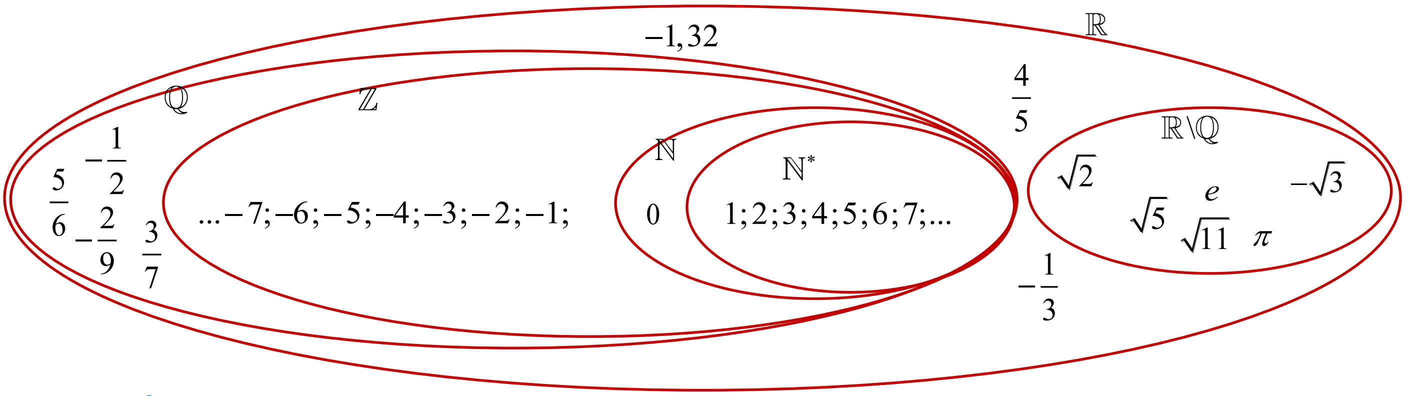
Nếu A không phải là một tập con của B, ta viết $A \not\subset B$.

Ta có các tính chất sau

- $A \subset A$ với mọi tập hợp A
- Nếu $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$ $(h.4)$
- $\varnothing \subset A$ với mọi tập hợp A.

Các tập hợp số đã học

Tên gọi	Kí hiệu	Mô tả
Tập hợp các số tự nhiên khác 0	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{N}^* = \{1;2;3;......\}$
Tập hợp các số tự nhiên	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N} = \{0;1;2;3;......\}$
Tập hợp các số nguyên	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z} = \{...;-2;-1;0;1;2;3;......\}$
Tập hợp các số hữu tỉ	$\mathbb{Q}$	⊙ Số hữu tỉ là các số có dạng $\frac{a}{b}$ $(a,b \in \mathbb{Z}$ và $b \neq 0)$. ⊙ Số thập phân hữu hạn hoặc vô hạn tuần hoàn.
Tập hợp các số vô tỉ	I	Các số thập phân vô hạn không tuần hoàn.
Tập hợp các số thực	$\mathbb{R}$	Là tập hợp các số hữu tỉ và số vô tỉ.



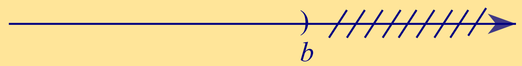
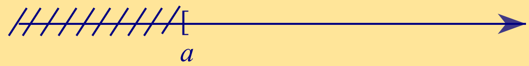
Tập hợp bằng nhau

Khi $A \subset B$ và $B \subset A$ ta nói tập hợp A bằng tập hợp B và viết là $A = B$.

Như vậy : $A = B \Leftrightarrow (\forall x : x \in A \Leftrightarrow x \in B)$.

3. Một số tập hợp con của tập hợp số thực

Trong toán học ta thường gặp các tập hợp con sau đây của tập hợp các số thực $\mathbb{R}$.

Tên gọi và kí hiệu	Tập hợp	Biểu diễn trên trục số (phần không bị gạch chéo)
Tập số thực, khoảng $(-\infty;+\infty)$	$(-\infty;+\infty) = \mathbb{R}$	
Đoạn $[a;b]$	$[a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$	
Khoảng $(a;b)$	$(a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
Khoảng $(-\infty;b)$	$(-\infty;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$	
Khoảng $(a;+\infty)$	$(a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
Nửa khoảng $[a;b)$	$[a;b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$	
Nửa khoảng $(a;b]$	$(a;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$	
Nửa khoảng $[a;+\infty)$	$[a;+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	
Nửa khoảng $(-\infty;b]$	$(-\infty;b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le b\}$	

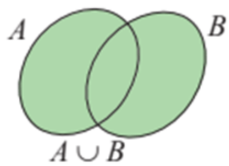
Bài 3. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

1. Hợp của hai tập hợp

Định nghĩa

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B được gọi là hợp của A và B. Kí hiệu $C = A \cup B$ (phần gạch chéo trong hình 6).

Vậy $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoac } x \in B\}$ hay $x \in A \cup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in A \\ x \in B \end{array}\right.$

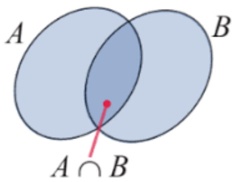


2. Giao của hai tập hợp

Định nghĩa

Tập hợp C gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B được gọi là giao của A và B. Kí hiệu $C = A \cap B$ (phần gạch chéo trong hình 5).

Vậy $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ va } x \in B\}$ hay $x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$



Nhận xét

(1) Nếu A và B là hai tập hợp hữu hạn thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

(2) Nếu A và B không có phần tử chung, tức $A \cap B = \varnothing$ thì $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

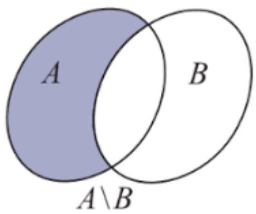
3. Hiệu và phần bù của hai tập hợp

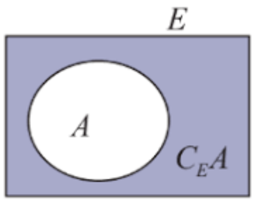
Định nghĩa

Tập hợp C gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B gọi là hiệu của A và B. Kí hiệu $C = A \setminus B$ (phần gạch chéo trong hình 7).

Vậy $A \setminus B = \{x \mid x \in A \,;\, x \notin B\}$

Khi $A \subset E$ thì $E \setminus A$ gọi là phần bù của A trong AE kí hiệu $C_E A$





Bài 1. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa

Bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y có dạng tổng quát là:

$$ax+by+c\le 0 \quad (1) \quad (ax+by+c<0; ax+by+c\ge 0; ax+by+c>0)$$

Trong đó a,b,c là những số thực, $a^2+b^2\ne 0$;

$(x_0;y_0)$ là nghiệm của $(1)\Leftrightarrow ax_0+by_0+c\le 0$

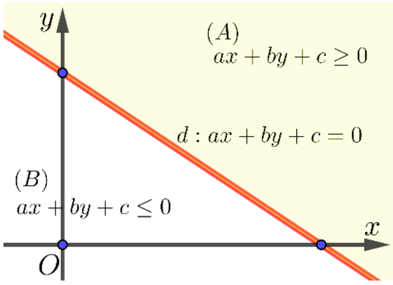
2. Biểu diễn nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn.

Định nghĩa

Trong mặt phẳng Oxy, tập hợp các điểm có toạ độ là nghiệm của (1) được gọi là miền nghiệm của nó.

Đường thẳng $d: ax+by+c=0$ chia *mp* thành hai nửa *mp*, khi đó:

- Nửa *mp (A)* (kể cả bờ) là miền nghiệm của $ax+by+c\le 0$
- Nửa *mp (B)* (kể cả bờ) là miền nghiệm của $ax+by+c\ge 0$.



QUY TẮC: Biểu diễn miền nghiệm của bất phương trình

» ***Bước 1:*** *Vẽ đường thẳng* $\Delta: ax+by+c=0$.

» ***Bước 2:*** *Lấy một điểm* $M_0(x_0;y_0)$ *không thuộc* Δ *(thường lấy gốc tọa độ* O*).*

» ***Bước 3:*** *Tính* ax_0+by_0+c *và so sánh với 0.*

» ***Bước 4:*** *Kết luận:*

- *Nếu* $ax_0+by_0+c<0$ *thì nửa mp bờ* Δ *chứa* M_0 *là miền nghiệm của* (1).
- *Nếu* $ax_0+by_0+c>0$ *thì nửa mp bờ* Δ *không chứa* M_0 *là miền nghiệm của* (1).

▶ ***Chú ý:***

Miền nghiệm của (1) bỏ đi đường thẳng Δ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c<0$.

🕮 CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Tìm nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Ví dụ 1. Cho các điểm $A(1;-1)$, $B(-2;1)$, $C(1;-1)$, $D(4;2)$. Điểm nào là nghiệm của bất phương trình $7x-3y-7<0$

Lời giải

Thay tọa độ các điểm vào bất phương trình.

Xét điểm $A(1;-1)$, ta có $7+3-7<0$ (sai).

Xét điểm $B(-2;1)$, ta có $-14-3-7<0$ (đúng).

Xét điểm $C(1;-1)$, ta có $7+3-7<0$ (sai).

Xét điểm $D(4;2)$, ta có $28-6-7<0$ (sai).

Vậy điểm B nằm trong miền nghiệm của bất phương trình.

Dạng toán ☞ Biểu diễn hình học miền nghiệm

Phương pháp

Xét bất phương trình $ax+by+c\ge 0$ (1).

» ***Bước 1:*** Vẽ đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$.

≫ ***Bước 2:*** Lấy một điểm $M_0(x_0;y_0)$ không thuộc Δ (thường lấy gốc tọa độ O).

≫ ***Bước 3:*** Tính ax_0+by_0+c và so sánh với 0.

≫ ***Bước 4:*** Kết luận:

- Nếu $ax_0+by_0+c<0$ thì nửa *mp* bờ Δ không chứa M_0 là miền nghiệm của (1)
- Nếu $ax_0+by_0+c>0$ thì nửa *mp* bờ Δ chứa M_0 là miền nghiệm của (1)

▶ ***Chú ý:***

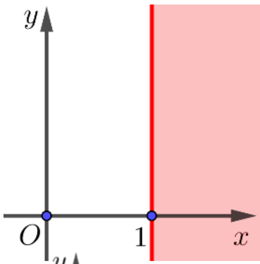
Miền nghiệm của (1) bỏ đi đường thẳng Δ là miền nghiệm của bất phương trình $ax+by+c<0$.

Ví dụ 2. Xác định miền nghiệm của các bất phương trình:

(1) $x\ge 1$ **(2)** $y\le 1$ **(3)** $x+y<4$ **(4)** $2x+y\le 3$

Lời giải

(1) Xác định miền nghiệm của $x\ge 1$

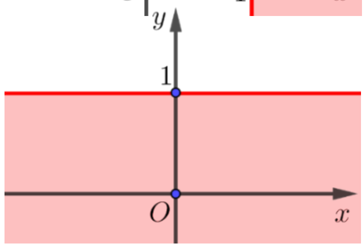


Vẽ đường thẳng $\Delta: x-1=0$.

Lấy một điểm $O(0;0)\notin\Delta$.

Ta có: $-1<0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $x\ge 1$ là nửa *mp* không chứa điểm O (tính cả bờ Δ).

(2) Xác định miền nghiệm của $y\le 1$

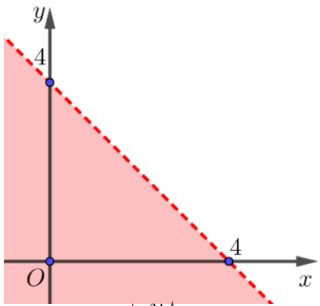


Vẽ đường thẳng $\Delta: y-1=0$.

Lấy một điểm $O(0;0)\notin\Delta$.

Ta có: $-1<0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $y\le 1$ là nửa mp chứa điểm O (tính cả bờ Δ).

(3) Xác định miền nghiệm của $x+y<4$

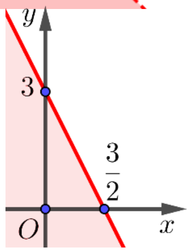


Vẽ đường thẳng $\Delta: x+y-4=0$.

Lấy một điểm $O(0;0)\notin\Delta$.

Ta có: $-4<0$ nên miền nghiệm của bất phương trình $x+y<4$ là nửa mp chứa điểm O (không tính bờ Δ).

(4) Biểu diễn hình học tập nghiệm của $2x+y\le 3$



Vẽ đường thẳng $\Delta: 2x+y=3$.

Lấy gốc tọa độ $O(0;0)$,

Ta thấy $O\notin\Delta$ và có $2.0+0<3$ nên nửa *mp* bờ Δ chứa gốc tọa độ O là miền nghiệm của bất phương trình đã cho (miền bị tô đậm trong hình, tính cả bờ).

BÀI 2. HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

1. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Định nghĩa

» Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn gồm một số bất phương trình bậc nhất hai ẩn x, y mà ta phải tìm nghiệm chung của chúng.

» Mỗi nghiệm chung đó được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

2. Biểu diễn nghiệm của bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Quy tắc

» Ta có thể biểu diễn hình học miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn: là giao của các miền nghiệm của các bất phương trình trong hệ.

» Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta làm như sau:

- Trong cùng hệ toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách gạch bỏ phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị gạch là miền nghiệm cần tìm.

3. Bài toán tối ưu (Quy hoạch tuyến tính).

» *Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức dạng $F = ax + by$, trong đó x, y nghiệm đúng cuả một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn đã cho:*

- Vẽ miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho.

  Miền nghiệm nhận được thường là một đa giác. (Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của F đạt được tại một trong các đỉnh của miền đa giác).
- Tính giá trị của F ứng với (x, y) là tọa độ các đỉnh của miền đa giác này.
- So sánh các kết quả vừa tính được, từ đó suy ra giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức.

📖 CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

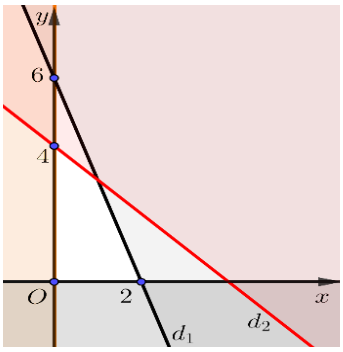
Phương pháp

» Để biểu diễn miền nghiệm của hệ bất phương trình ta làm như sau:

- Trong cùng hệ toạ độ, biểu diễn miền nghiệm của mỗi bất phương trình trong hệ bằng cách tô màu phần không thuộc miền nghiệm của nó.
- Phần không bị tô là miền nghiệm cần tìm.

Ví dụ 3. Biểu diễn hình học tập nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x + y \le 6 \\ x + y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

Lời giải



Vẽ các đường thẳng

$d_1: 3x + y = 6; d_2: x + y = 4; d_3: x = 0\ (Oy); d_4: y = 0\ (Ox)$

Vì điểm $M_0(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta tô đậm các nửa mặt phẳng bờ (d_1), (d_2), (d_3), (d_4) không chứa điểm M_0.

Miền không bị tô đậm (hình tứ giác $OCIA$ kể cả bốn cạnh AI, IC, CO, OA) trong hình vẽ là miền nghiệm của hệ đã cho.

Dạng toán ☞ Tìm giá trị lớn nhất – nhỏ nhất của biểu thức hai ẩn

Phương pháp

▶ ***Bài toán:*** Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của biểu thức $T(x,y)=ax+by$ với $(x;y)$ nghiệm đúng một hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn cho trước.

≫ ***Bước 1:*** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho. Kết quả thường được miền nghiệm S là đa giác.

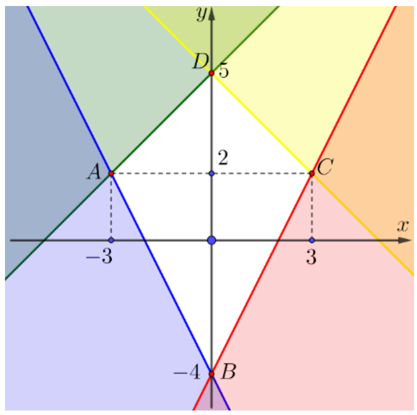
≫ ***Bước 2:*** Tính giá trị của F tương ứng với $(x;y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.

≫ ***Bước 3:*** Kết luận:

- Giá trị lớn nhất của F là số lớn nhất trong các giá trị tìm được.
- Giá trị nhỏ nhất của F là số nhỏ nhất trong các giá trị tìm được.

Ví dụ 4. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $F=30x-4y-6$ với $(x;y)$ là nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y+5\ge 0\\ 2x+y+4\ge 0\\ x+y-5\le 0\\ 2x-y-4\le 0\end{cases}$.

Lời giải



Miền nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} x-y+5\ge 0\\ 2x+y+4\ge 0\\ x+y-5\le 0\\ 2x-y-4\le 0\end{cases}$,(2)

Miền nghiệm của hệ bất phương trình (1) là miền tứ giác $ABCD$ kể cả bờ, với $A(-3;2),B(0;-4),C(3;2),D(0;5)$

$F(-3;2)=-104$; $F(0;-4)=10$; $F(3;2)=66$; $F(0;5)=-26$

Vậy GTLN là $F=66$ và GTNN là $F=-104$

Dạng toán ☞ Bài toán tối ưu

Phương pháp

▶ ***Bài toán:*** *Tìm phương án tối ưu của một kế hoạch sản xuất, kinh doanh,... (hai ẩn).*

≫ ***Bước 1:*** Dựa vào giả thiết, lập hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn và biểu thức mục tiêu $F=F(x;y)$.

≫ ***Bước 2:*** Xác định miền nghiệm của hệ bất phương trình đã cho

≫ ***Bước 2:*** Tính giá trị của F tương ứng với $(x;y)$ là tọa độ của các đỉnh của đa giác.

≫ ***Bước 3:*** Theo yêu cầu bài toán, kết luận:

- Giá trị lớn nhất (nhỏ nhất) của F tương ứng với phương án tối ưu $(x;y)$.

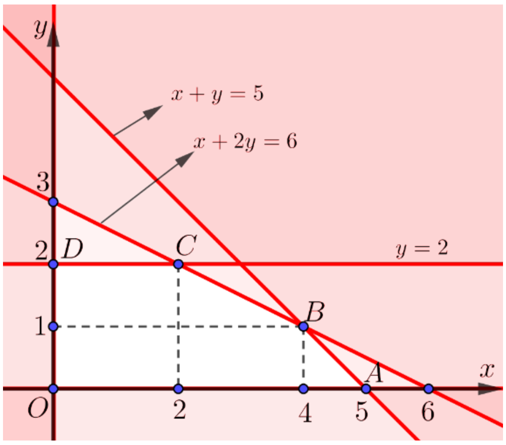
Ví dụ 5. Có 3 nhóm máy A,B,C dùng để sản xuất ra 2 lại sản phẩm I và II. Để sản xuất một đơn vị sản phẩm mỗi loại phải lần lượt dùng các máy thuộc nhóm máy khác nhau. Số máy trong một nhóm và số máy từng nhóm cần thiết để sản xuất ra một đơn vị sản phẩm thuộc mỗi loại được cho trong bảng bên dưới:

Nhóm	Số máy trong mỗi nhóm	Số máy trong từng nhóm để sản xuất một đơn vị SP	
		Loại I	Loại II
A	10	2	2
B	4	0	2
C	12	2	4

Một đơn vị sản phẩm *I* lãi 3000 đồng, một đơn vị sản phẩm *II* lãi 5000 đồng. Hãy lập phương án sản xuất hai loại sản phẩm trên sao cho có lãi cao nhất.

Lời giải

Gọi x và y lần lượt là số đơn vị sản phẩm I và II $(x,y\ge 0)$.



Số tiền lãi của đơn vị này là $F(x;y)=3x+y$ (nghìn đồng).

Ta có hệ bất phương trình: $\begin{cases}2x+2y\le 10\\2y\le 4\\2x+4y\le 12\\x,y\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y\le 5\\y\le 2\\x+2y\le 6\\x,y\ge 0\end{cases}(*)$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x;y)=3x+y$ trên miền nghiệm của hệ (*).

Miền nghiệm của hệ (*) là ngũ giác *OABCD* (kể cả biên).

Ta có: $O(0;0),A(5;0),B(4;1),C(2;2),D(0;2)$.

$F(0;0)=0,\ F(5;0)=150,\ F(4;1)=190,\ F(2;2)=160, f(0;2)=100$

Dễ thấy $F(x;y)=3x+y$ lớn nhất khi $(x;y)=(4;1)$ tức là cần sản xuất 4 sản phẩm *I* và 1 sản phẩm *II* để thu về lợi nhận cao nhất.

CHƯƠNG ☞ HÀM SỐ BẬC HAI VÀ ĐỒ THỊ

Bài 1. HÀM SỐ VÀ ĐỒ THỊ

1. Hàm số. Tập xác định và tập giá trị của hàm số

Định nghĩa

Giả sử x và y là hai đại lượng biến thiên và x nhận giá trị thuộc tập D

Nếu với mỗi giá trị x thuộc D ta xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng của y thuộc tập số thực $\mathbb{R}$ thì ta có một ***hàm số***.

Ta gọi

» x là ***biến số***, y là ***hàm số*** của, x

» Tập hợp D được gọi là ***tập xác định*** của hàm số.

» Tập hợp T gồm tất cả các giá trị của y (tương ứng với x thuộc D) được gọi là ***tập giá trị*** của hàm số.

Chú ý

(1) Khi y là hàm số của x, ta có thể viết $y=f(x), y=g(x),\dots$

(2) Khi hàm số cho bằng công thức $y=f(x)$ mà không chỉ rõ tập xác định thì ta quy ước: *Tập xác định của hàm số $y=f(x)$ là tập hợp tất cả các giá trị x để $f(x)$ có nghĩa.*

(3) Một hàm số có thể cho bằng nhiều công thức công thức.

2. Đồ thị hàm số

Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên tập D

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, đồ thị (C) của của hàm số $y=f(x)$ là tập hợp các điểm $M(x;y)$ với $x\in D$ và $y=f(x)$.

Vậy $(C)=\left\{M(x;f(x))\,|\,x\in D\right\}$

Chú ý

(1) Điểm $M(x_M;y_M)$ thuộc đồ thị hàm số $y=f(x)$ khi và chỉ khi $x_M\in D$ và $y_M=f(x_M)$

(2) Ta thường gặp đồ thị của hàm số $y=f(x)$ là một đường. Khi đó ta có $y=f(x)$ là phương trình của đường đó.

3. Sự đồng biến, nghịch biến của hàm số

Định nghĩa

Cho hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$.

✍ Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***đồng biến*** (tăng) trên $(a;b)$

$$\Leftrightarrow \forall x_1,\ x_2\in(a;b): x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

✍ Hàm số $y=f(x)$ được gọi là ***nghịch biến*** (giảm) trên $(a;b)$

$$\Leftrightarrow \forall x_1,\ x_2\in(a;b): x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Nhận xét

(1) Hàm số $y=f(x)$ đồng biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi lên" trên khoảng đó.

(2) Hàm số $y=f(x)$ nghịch biến trên $(a;b)$ khi và chỉ khi đồ thị hàm số "đi xuống" trên khoảng đó.

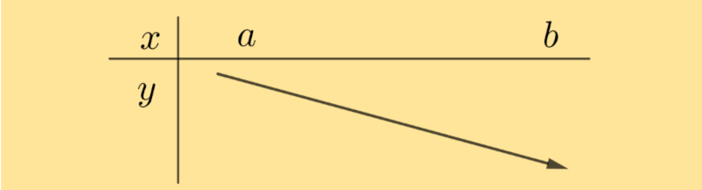
Bảng biến thiên

Hàm số $y=f(x)$ xác định trên $(a;b)$.

✍ Xét sự biến thiên của hàm số là tìm khoảng tăng, giảm của hàm số.

✍ Kết quả đó được tổng kết trong một bảng gọi là bảng biến thiên:

Đồ thị hàm số đồng biến trên (a,b) là một đường "đi lên" trong khoảng (a,b).	*Đồ thị hàm số nghịch biến trên (a,b) là một đường "đi xuống" trong khoảng (a,b)*



CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Tìm tập xác định của hàm số

Phương pháp

Tập xác định của hàm số *$y=f\left(x\right)$ là tập hợp tất cả các số thực x sao cho biểu thức $f\left(x\right)$ có nghĩa.*

Bước 1. Lập điều kiện xác định

$\dfrac{u}{v}$ xác định khi $v\neq 0$	$\sqrt{u}$ xác định khi $u\geq 0$	$\dfrac{u}{\sqrt{v}}$ xác định khi $v>0$

Bước 2. Giải điều kiện xác định, tìm điều kiện của biến

Bước 3. Tùy theo điều kiện của biến, ta kết luận tập xác định như sau:

① $\begin{cases} x\neq a \\ x\neq b \\ \ldots\ldots \end{cases} \rightarrow D=\mathbb{R}\backslash\left\{a;b;...\right\}$; ② $a<x\leq b \rightarrow D=\left(a;b\right]$; ③ $\left[\begin{array}{l} x=a \\ x=b \\ \ldots\ldots \end{array}\right. \rightarrow D=\left\{a;b;...\right\}$

Ví dụ 6. Tìm tập xác định của hàm số:

(1) $y=2x^3-3x^2+2025$ (2) $y=\dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ (3) $y=\sqrt{-2x+3}-\sqrt{x-1}$ (4) $y=\dfrac{3x-1}{\sqrt{2x-2}}$

Lời giải

(1) Hàm số là hàm đa thức (không có điều kiện xác định) nên xác định $\forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}$.

(2) Hàm số xác định khi $x^3-3x+2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ x^2+x-2\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -2 \end{cases}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\mathbb{R}\backslash\left\{-2;1\right\}$.

(3) Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x-2>0 \Leftrightarrow x>1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left(1;+\infty\right)$.

(4) Hàm số xác định khi $\begin{cases} -2x+3\geq 0 \\ x-1\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\leq \dfrac{3}{2} \\ x\geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1\leq x\leq \dfrac{3}{2}$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D=\left[1;\dfrac{3}{2}\right]$.

Dạng toán ☞ Xét sự biến thiên của hàm số

Phương pháp 1.

≫ ***Bước 1.*** Tìm tập xác định D của hàm số.

≫ ***Bước 2.*** Với mọi $x_1,x_2\in D$, $x_1\neq x_2$. Tính $f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)$.

- Nếu $x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ thì hàm số đã cho đồng biến (tăng).
- Nếu $x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$ thì hàm số đã cho nghịch biến (giảm).

Phương pháp 2.

≫ ***Bước 1.*** Tìm tập xác định D của hàm số.

Bước 2. Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$. Lập tỉ số $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

- Nếu $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0$ thì hàm số đã cho đồng biến (tăng).
- Nếu $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0$ thì hàm số đã cho nghịch biến (giảm).

Ví dụ 7. Xét tính đồng biến và nghịch biến của hàm số $f(x) = x^2 - 7$ trên khoảng $(-\infty;0)$, $(0;+\infty)$

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.
Với mọi $x_1, x_2 \in D$, $x_1 \neq x_2$,
Ta có $f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - 7 - x_2^2 + 7 = x_1^2 - x_2^2 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$
Với mọi $x_1, x_2 \in (-\infty;0)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_1 - x_2 < 0$ và $x_1 + x_2 < 0$.
Suy ra $f(x_1) - f(x_2) > 0$ hay $f(x_1) > f(x_2)$.
Vậy hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.
Với mọi $x_1, x_2 \in (0;+\infty)$ và $x_1 < x_2$ ta có $x_1 - x_2 < 0$ và $x_1 + x_2 > 0$.
Suy ra $f(x_1) - f(x_2) < 0$ hay $f(x_1) < f(x_2)$.
Vậy hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

NHẮC LẠI HÀM SỐ BẬC NHẤT

$y = ax + b$

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$

Chiều biến thiên:

$a > 0$: Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
y			$+\infty$
		$\nearrow$	
	$-\infty$		

$a < 0$: Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
y	$+\infty$		
		$\searrow$	
			$-\infty$

Đồ thị:

Đồ thị là một đường thẳng cắt trục tung tại điểm $A(0;b)$

Nếu $a = 0$ thì ta được hàm số $y = b$ là hàm hằng và có đồ thị là đường thẳng nằm ngang cắt trục tung tại điểm $A(0;b)$

Đường thẳng $x = c$ là đường thẳng đứng luôn cắt trục hoành tại điểm $M(c;0)$

Bài 2. HÀM SỐ BẬC HAI

1. Hàm số bậc hai

Định nghĩa

Hàm số bậc hai là hàm số cho bởi công thức: $y=f\left(x\right)=ax^2+bx+c$,

Trong đó x là biến số, a,b,c là các hằng số và $a\ne 0$.

Tập xác định của hàm số bậc hai là $\mathbb{R}$.

Chú ý

» Khi $a=0$, $b\ne 0$, hàm số trở thành hàm số bậc nhất $y=bx+c$.

» Khi $a=b=0$, hàm số trở thành hàm hằng $y=c$.

2. Đồ thị của hàm số bậc hai

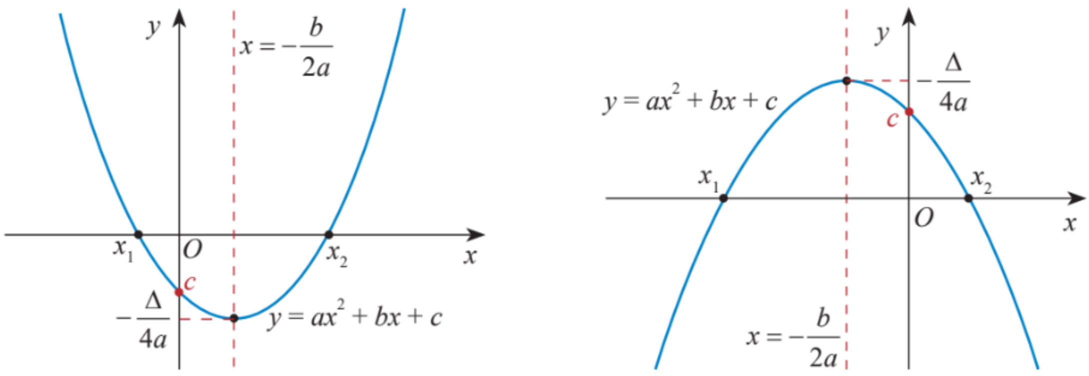
Trong mặt phẳng Oxy, đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c\left(a\ne 0\right)$ là một đường Parabol $\left(P\right)$, có:

» Đỉnh là $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$.

» Trục đối xứng là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$.

» Bề lõm hướng lên trên nếu $a>0$, bề lõm hướng xuống dưới nếu $a<0$.

» Cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng c, tức là đồ thị đi qua điểm $\left(0;c\right)$



a) $a>0$ b) $a<0$

Chú ý

✓ Nếu phương trình $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thì đồ thị hàm số $y=ax^2+bx+c$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2

✓ Cắt trục tung tại điểm $A\left(0;c\right)$: Nằm trên trục hoành → $c>0$; Nằm dưới trục hoành → $c<0$.

✓ Đỉnh $I\left(\frac{-b}{2a};\frac{-\Delta}{4a}\right)$: Nằm bên trái trục tung → a, b cùng dấu; Nằm bên phải trục tung → a, b trái dấu.

Cách vẽ đồ thị

(1) Xác định toạ độ đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a};-\frac{\Delta}{4a}\right)$;

(2) Vẽ trục đối xứng d là đường thẳng $x=-\frac{b}{2a}$;

(3) Xác định toạ độ các giao điểm của parabol với trục tung, trục hoành (nếu có) *hay* Lập bảng giá trị

(4) Vẽ parabol có đỉnh S, có trục đối xứng d và đi qua các điểm tìm được

3. Sự biến thiên của hàm số bậc hai

$a>0$	$a<0$

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	↗	$+\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(\dfrac{-b}{2a};+\infty\right)$; nghịch biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{2a}\right)$

x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
y	$-\infty$	↗	$\dfrac{-\Delta}{4a}$	↘	$-\infty$

Hàm số đồng biến trên $\left(-\infty;\dfrac{-b}{2a}\right)$; nghịch biến trên $\left(\dfrac{-b}{2a};+\infty\right)$

Chú ý

Khi $a>0$, $\min f(x)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ khi $x=\dfrac{-b}{2a}$

Khi $a<0$, $\max f(x)=\dfrac{-\Delta}{4a}$ khi $x=\dfrac{-b}{2a}$

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị hàm số

Phương pháp

(1) Xác định toạ độ đỉnh $S\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{\Delta}{4a}\right)$;

(2) Lập bảng biến thiên, nêu chiều biến thiên

(3) Lập bảng giá trị

x	x_1	x_2	$-\dfrac{b}{2a}$	x_3	x_4
y	$y(x_1)$	$y(x_2)$	$-\dfrac{\Delta}{4a}$	$y(x_3)$	$y(x_4)$

(4) Vẽ trục đối xứng d là đường thẳng $x=-\dfrac{b}{2a}$;

(5) Vẽ parabol có đỉnh S, có trục đối xứng d và đi qua các điểm tìm được

Ví dụ 8. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số: (1) $y=x^2-2x$, (2) $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-2$

Lời giải

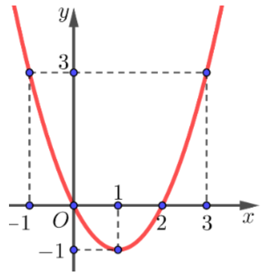
(1) Ta có $a=1$, $b=-2$, $c=3$.

Toạ độ đỉnh là $S(1;-1)$.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

Do đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.



Bảng giá trị

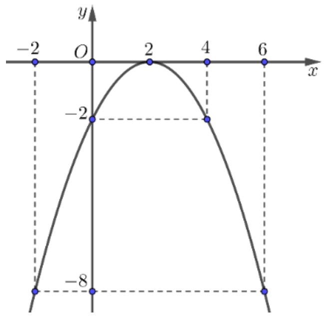
x	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3

Đồ thị của hàm số $y=x^2-2x$ là parabol có đỉnh là $S(1;-1)$ và trục đối xứng là $x=1$.

(2) Ta có $a=-\dfrac{1}{2}$, $b=2$, $c=-2$.

Toạ độ đỉnh là $S(2;0)$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
y		$\nearrow$	0	$\searrow$	
	$-\infty$				$-\infty$



Do đó hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty;2)$ và nghịch biến trên khoảng $(2;+\infty)$.

Vẽ đồ thị: Ta có đỉnh là $I(2;0)$ và trục đối xứng là $x=2$.

Bảng giá trị

x	-2	0	2	4	6
y	-8	-2	0	-2	-8

Đồ thị của hàm số $y=-\dfrac{1}{2}x^2+2x-2$ là parabol có đỉnh là $S(2;0)$ và trục đối xứng là $x=2$.

CHƯƠNG ☞ BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

Bài 1. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

1. Tam thức bậc hai

Định nghĩa

» Tam thức bậc hai đối với x là biểu thức có dạng $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$, trong đó a,b,c là những hệ số, $a\neq 0$.

» Nghiệm của phương trình $ax^2+bx+c=0$ được gọi là ***nghiệm của tam thức bậc hai*** $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

» $\Delta=b^2-4ac$ và $\Delta'=b'^2-ac$ theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai $f\left(x\right)=ax^2+bx+c$.

2. Dấu của tam thức bậc hai

Định lí

Cho $f\left(x\right)=ax^2+bx+c\ \left(a\neq 0\right),\Delta=b^2-4ac$.

» Nếu $\Delta<0$ thì $f\left(x\right)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

» Nếu $\Delta=0$ thì $f\left(x\right)$ luôn cùng dấu với hệ số a, với mọi $x\neq -\dfrac{b}{2a}$.

» Nếu $\Delta>0$ thì $f\left(x\right)$ luôn:

- Cùng dấu với hệ số a khi $x\in\left(-\infty;x_1\right)\cup\left(x_2;+\infty\right)$
- Trái dấu với hệ số a khi $x\in\left(x_1;x_2\right)$.

Trong đó $x_1.x_2$ *là hai nghiệm của* $f\left(x\right)$.

Bảng xét dấu

$\Delta<0$ ($f\left(x\right)$ vô nghiệm)	
x	$-\infty$ $+\infty$
f(x)	*Cùng dấu a*

$\Delta=0$ ($f\left(x\right)$ có nghiệm kép)					
x	$-\infty$		$\dfrac{-b}{2a}$		$+\infty$
f(x)		*Cùng dấu a*	*0*	*Cùng dấu a*	

$\Delta>0$ ($f\left(x\right)$ có 2 nghiệm phân biệt)								
x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
f(x)		*Cùng dấu a*	*0*	*Trái dấu a*	*0*	*Cùng dấu a*	

🕮 CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Xét dấu của tam thức bậc hai

Phương pháp

Bước 1. Tìm nghiệm của tam thức bậc hai
Bước 2. Lập bảng xét dấu như trên.
Bước 3. Kết luận về dấu của tam thức bậc hai

Ví dụ 9. Xét dấu của các tam thức sau:
(1) $f\left(x\right)=3x^2-2x+1$ (2) $f\left(x\right)=3x^2-2x-8$ (3) $f\left(x\right)=-x^2+2x-1$

Lời giải

(1) $f\left(x\right)=3x^2-2x+1$

Ta có $\Delta'=-2<0$ và $a=3>0$. Suy ra $3x^2-2x+1>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

(2) $f\left(x\right)=3x^2-2x-8$

Ta có: $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow 3x^2-2x-8=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\dfrac{4}{3}\\ x=2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		$\frac{-4}{3}$		2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra: $f\left(x\right)>0\Leftrightarrow\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ và $f\left(x\right)<0\Leftrightarrow x\in\left(-\frac{4}{3};2\right)$.

(3) $f\left(x\right)=-x^2+2x-1$

Ta có: $f\left(x\right)=0\Leftrightarrow -x^2+2x-1=0\Leftrightarrow x=1$.

Bảng xét dấu

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Suy ra: $f\left(x\right)<0$ với mọi $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{1\right\}$.

Bài 2. GIẢI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

1. Bất phương trình bậc hai

Định nghĩa

» ***Bất phương trình bậc hai một ẩn*** x là bất phương trình dạng $ax^2+bx+c<0$ *(hoặc* $ax^2+bx+c\le 0$, $ax^2+bx+c>0$, $ax^2+bx+c\ge 0$*),*
Trong đó a,b,c là những số thực đã cho, $a\ne 0$.

» ***Nghiệm*** của bất phương trình là các giá trị của ẩn x thỏa mãn bất phương trình đó.

2. Giải bất phương trình bậc hai

» ***Giải bất phương trình bật hai*** là tìm tập hợp các nghiệm của bất phương trình đó.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Giải bất phương trình bậc hai

Phương pháp

Bước 1. Biến đổi bất phương trình về dạng bất phương trình bậc hai một ẩn
Bước 2. Xét dấu tam thức bậc hai ở vế trái.
Bước 3. Dựa vào bảng xét dấu, kết luận tập nghiệm của bất phương trình bậc hai.

Ví dụ 10. Giải các bất phương trình sau:
(1) $-3x^2+2x+1<0$ (2) $x^2-6x+9\ge 0$ (3) $x^2+3x\le -x^2+x-5$

Lời giải

(1) Xét dấu $f(x)=-3x^2+2x+1$

Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=\left(-\infty;-\dfrac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$.

(2) Xét dấu $f(x)=x^2-6x+9$

Ta có: $f(x)=0\Leftrightarrow x=3$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$+$	

Vậy tập nghiệm của bất phương trình: $S=\mathbb{R}$.

(3) Ta có: $x^2+3x\le -x^2+x-5\Leftrightarrow 2x^2+2x+5\le 0$

Xét dấu $f(x)=2x^2+2x+5$.

Ta có: $f(x)=0$ vô nghiệm

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

Bài 3. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

1. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{dx^2+ex+f}$

» Ta làm như sau:
- ***Bước 1:*** Bình phương hai vế và rút gọn về phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.
- ***Bước 1:*** Giải phương trình nhận được ở Bước 1.
- ***Bước 2:*** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

2. Phương trình dạng $\sqrt{ax^2+bx+c}=dx+e$

» Ta làm như sau:
- ***Bước 1:*** Bình phương hai vế và rút gọn về phương trình bậc 2 hoặc bậc nhất.
- ***Bước 1:*** Giải phương trình nhận được ở Bước 1.
- ***Bước 2:*** Thử lại các giá trị x tìm được có thỏa phương trình ban đầu hay không? Sau đó kết luận nghiệm.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Giải phương trình quy về phương trình bậc hai

Phương pháp (như trên)

Ví dụ 11. Giải các phương trình sau:

(1) $\sqrt{2x^2-4x-2}=\sqrt{x^2-x-2}$ (2) $\sqrt{3x^2-6x+1}=\sqrt{-2x^2-9x+1}$

(3) $\sqrt{2x^2-5x-9}=x-1$ (4) $\sqrt{2x^2+x+3}=1-x$

Lời giải

(1) $\sqrt{2x^2-4x-2}=\sqrt{x^2-x-2}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được: $2x^2-4x-2=x^2-x-2$

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x=0$

Từ đó tìm được $x=0$ hoặc $x=3$

Thay lần lượt hai giá trị này vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=3$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=3$.

(2) $\sqrt{3x^2-6x+1}=\sqrt{-2x^2-9x+1}$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $3x^2-6x+1=-2x^2-9x+1$.

Sau khi thu gọn ta được $5x^2+3x=0$.

Từ đó tìm được $x=0$ hoặc $x=-\frac{3}{5}$.

Thay lần lượt hai giá trị này vào phương trình đã cho, ta thấy $x=0$ và $x=-\frac{3}{5}$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\left\{0;-\frac{3}{5}\right\}$

(3) $\sqrt{2x^2-5x-9}=x-1$

Bình phương hai vế của phương trình ta được: $2x^2-5x-9=x^2-2x+1$.

Sau khi thu gọn ta được $x^2-3x-10=0$.

Từ đó tìm được $x=-2$ hoặc $x=5$.

Thay lần lượt vào phương trình đã cho, ta thấy chỉ có $x=5$ thỏa mãn.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là $x=5$.

(4) $\sqrt{2x^2+x+3}=1-x$

Bình phương hai vế của phương trình ta được $2x^2+x+3=1-2x+x^2$

Sau khi thu gọn ta được $x^2+3x+2=0$

Từ đó tìm được $x=-1$ hoặc $x=-2$

Thay lần lượt vào phương trình đã cho, ta thấy $x=-1$ hoặc $x=-2$ thỏa mãn.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S=\{-1;-2\}$.

CHƯƠNG ☞ ĐẠI SỐ TỔ HỢP

Bài 1. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

1. Quy tắc cộng

Định nghĩa

Giả sử một công việc có thể được thực hiện theo phương án A hoặc phương án B. Phương án A có n cách thực hiện, phương án B có m cách thực hiện (không trùng với bất cứ cách nào của phương án A). Khi đó, công việc có thể được thực hiện theo $n+m$ cách.

Tổng quát

✓Một công việc được thực hiện theo một trong k phương án $A_1, A_2, ..., A_k$, trong đó:

» Phương án A_1 có n_1 cách thực hiện.

» Phương án A_2 có n_2 cách thực hiện.

……………………………………

» Phương án A_k có n_k cách thực hiện.

Số cách hoàn thành: $n(X) = n_1 + n_2 + ... + n_k$ cách.

2. Quy tắc nhân

Định nghĩa

Giả sử một công việc được thực hiện theo hai công đoạn. Công đoạn tthứ nhất có m cách thực hiện và ứng với mỗi cách đó có n cách thực hiện công đoạn thứ hai. Khi đó, công việc có thể được thực hiện theo $m.n$ cách.

Tổng quát

✓Một công việc được thực hiện theo k công đoạn $A_1, A_2, ..., A_k$, trong đó:

» Công đoạn A_1 có n_1 cách thực hiện.

» Công đoạn A_2 có n_2 cách thực hiện

……………………………………

» Phương án A_k có n_k cách thực hiện.

Số cách hoàn thành: $n(X) = n_1.n_2.....n_k$ cách.

🕮 CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Bài toán đếm

Phương pháp

Quy tắc cộng, ta thực hiện các bước như sau:

» **Bước 1:** Phân tích xem có bao nhiêu phương án riêng biệt để thực hiện công việc A (có nghĩa công việc A có thể hoàn thành một trong các phương án $A_1, A_2, ..., A_n$).

» **Bước 2:** Đếm số cách chọn $x_1, x_2, ..., x_n$ trong các phương án $A_1, A_2, ..., A_n$.

» **Bước 3:** Dùng quy tắc cộng ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

Quy tắc nhân, ta thực hiện các bước như sau:

» **Bước 1:** Phân tích xem có bao nhiêu công đoạn liên tiếp cần phải tiến hành để thực hiện công việc A (giả sử A chỉ hoàn thành sau khi tất cả các công đoạn $A_1, A_2, ..., A_n$ hoàn thành).

» **Bước 2:** Đếm số cách chọn $x_1, x_2, ..., x_n$ trong các công đoạn $A_1, A_2, ..., A_n$.

» **Bước 3:** Dùng quy tắc nhân ta tính được số cách lựa chọn để thực hiện công việc A là $x = x_1.x_2.\cdots.x_n$.

Ví dụ 12. Bạn An có 3 cái áo và 4 cái quần. Hỏi bạn An có mấy cách chọn

(1) Một cái quần hoặc một cái áo?

(2) Một bộ quần áo ?

Lời giải

(1) Một cái quần hoặc một cái áo?

Để chọn một cái quần hoặc một cái áo ta có hai phương án lựa chọn

Phương án *A,* chọn một cái quần: Có 4 cách thực hiện.

Phương án *B,* chọn một cái áo: Có 3 cách thực hiện.

Theo quy tắc cộng ta có: $4+3=7$ cách chọn một cái quần hoặc một cái áo.

(2) Một bộ quần áo?

Để chọn một bộ quần áo, ta phải thực hiện hai công đoạn liên tiếp

Công đoạn 1, Chọn một cái quần: Có 4 cách thực hiện

Công đoạn 2, Chọn một cái áo: Có 3 cách thực hiện.

Theo quy tắc nhân ta có $4.3=12$ cách chọn một bộ quần áo.

Bài 2. HOÁN VỊ , CHỈNH HỢP VÀ TỔ HỢP

1. Hoán vị

Định nghĩa

Giai thừa.

» Cho số tự nhiên $n \geq 1$, ta định nghĩa n giai thừa, ký hiệu $n!$, là $n! = n.(n-1).(n-2)....2.1$

Hoán vị.

Cho tập hợp A có n phần tử ($n \geq 1$).

» Mỗi cách sắp xếp thứ tự của n phần tử tập hợp A là *hoán vị* của n phần tử này.

» ***Số các hoán vị*** của n phần tử tập hợp A được ký hiệu P_n.

» Được xác định theo công thức:

$$P_n = n! = n.(n-1).(n-2)....2.1$$

Chú ý

Các hoán vị khác nhau chỉ khác nhau về thứ tự sắp xếp các phần tử.

Hoán vị của 3 phần tử *a, b, c* gồm: *a, b, c; a, c, b; b, a, c;...*

2. Chỉnh hợp

Định nghĩa

Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$.

» Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A (gọi tắt là chỉnh hợp n chập k của A).

» ***Số các chỉnh hợp*** chập k của của một tập hợp có n phần tử là $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $(1 \leq k \leq n)$.

» Quy ước: $0! = 1, A_n^0 = 1, A_n^n = P_n = n!$

Chú ý

Khi giải bài toán chọn trên tập X có n phần tử, ta sẽ dùng chỉnh hợp nếu có 2 dấu hiệu sau:

» Chỉ chọn k phần tử của X ($1 \leq k \leq n$).

» Có sắp thự tự các phần tử đã chọn.

3. Tổ hợp

Định nghĩa

Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$.

» Một tổ hợp chập k của n là một cách chọn k phần tử từ một tập hợp n phần tử (với k, n là các số tự nhiên, $0 \leq k \leq n$).

» ***Số các tổ hợp*** chập k của của một tập hợp có n phần tử là

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!}, \quad (1 \leq k \leq n).$$

$$\text{Hay } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Tính chất

» Cho số nguyên dương n và số nguyên k với $0 \leq k \leq n$. Khi đó $C_n^k = C_n^{n-k}$.

» Cho các số nguyên n và k với $1 \leq k \leq n$. Khi đó $C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}$ *(Công thức Pascal)*

📖 CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Hoán vị

Phương pháp

(1) Hoán vị các chữ số trong số tự nhiên.

» Tập hợp A là tập con có n phần tử của tập hợp $\{0,1,...8,9\}$ với $1 \leq n \leq 10$.

» Khi đó, số cách thành lập số tự nhiên x có n chữ số được lấy từ A là số hoán vị của n phần tử này, tức là có $P_n = n!$ số

(2) Hoán vị đồ vật.

(3) Hoán vị vòng quanh.

» Có n phần tử được sắp xếp trên một vòng tròn n vị trí. Số cách xếp sẽ là hoán vị của $n-1$ phần tử: $(n-1)!$.

» Thật vậy, mỗi cách xếp không thay đổi khi các phần tử lần lượt dời chỗ qua bên phải (hoặc trái) một vị trí. Như vậy, có n vị trí trên vòng tròn, nên có $\frac{n!}{n}=(n-1)!$ cách xếp.

(4) Hoán vị lặp.

» Cho k phần tử khác nhau $a_1,a_2,...,a_k$. Một cách sắp xếp n phần tử trong đó gồm n_1 phần tử a_1, n_2 phần tử a_2, …, n_k phần tử a_k $(n_1+n_2+...+n_k=n)$ theo một thứ tự nào đó được gọi là hoán vị lặp cấp n và kiểu $(n_1,n_2,...,n_k)$ của k phần tử.

» Số các hoán vị lặp dạng như trên là $P_n(n_1,n_2,...,n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!...!n_k!}$.

Ví dụ 13. Cho tập hợp $S=\{1,2,3,4\}$. Có bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số phân biệt lấy từ tập *A?*

Lời giải

Gọi $x=\overline{a_1a_2a_3a_4}$ là số cần tìm, $a_i\in S$, $\forall i=\overline{1,4}$.

Mỗi hoán vị của 4 phần tử tập hợp A ta được 1 số tự nhiên có 4 chữ số cần tìm, ví dụ như $x=3214$.

Do vậy, ta được $P_4=4!=4.3.2.1=24$ số.

Ví dụ 14. Một chồng sách gồm 4 quyển sách Toán khác nhau, 3 quyển sách Vật Lý khác nhau, 5 quyển sách Hóa Học khác nhau. Hỏi có bao nhiêu cách xếp các quyển sách trên thành một hàng ngang sao cho

(1) Các quyển sách cùng môn thì đứng cạnh nhau.

(2) Các quyển sách toán đứng gần nhau.

Lời giải

(1) Các quyển sách cùng môn thì đứng cạnh nhau.

Xếp 4 quyển sách toán thành một nhóm đứng gần nhau có $P_4=4!=24$ cách xếp.

Xếp 3 quyển sách Vật Lí thành một nhóm gần nhau có $P_3=3!=6$ cách xếp

Xếp 5 quyển sách Hóa Học thành một nhóm gần nhau có $P_5=5!=120$ cách xếp.

Xếp 3 nhóm sách trên lên giá sách có $P_3=3!=6$ cách xếp.

Vậy có 24.6.120.6 = 103680 cách xếp các cuốn sách cùng môn thì đứng cạnh nhau.

(2) Các quyển sách toán đứng gần nhau.

Xếp 4 quyển sách Toán thành một nhóm đứng gần nhau có $P_4=4!=24$ cách xếp.

Coi nhóm sách Toán là một quyển sách lớn, xếp quyển sách lớn đó và 8 quyển sách còn lại có $P_9=9!$ cách xếp.

Vậy có $24.9!=8709120$ cách xếp các cuốn sách Toán đứng gần nhau.

Ví dụ 15. Có bao nhiêu cách sắp xếp 5 bạn nam và 5 bạn nữ ngồi xung quanh một bàn tròn sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ?

Lời giải

Chọn 1 bạn nam ngồi cố định vào 1 vị trí, 9 bạn còn lại sẽ hoán vị vòng quanh bạn này theo nguyên tắc là nam nữ xen kẽ.

Khi đó các bạn nam còn lại sẽ ở vị trí mang số $3,5,7,9$ và nữ sẽ ở vị trí số $2,4,6,8,10$ (theo chiều kim đồng hồ).

Ở mỗi vị trí của mình, các nam và nữ được hoán vị cho nhau.

Do đó, có $1.4!.5!=2880$ cách sắp xếp.

Ví dụ 16. Từ các chữ số $0,1,2,3,4$ có thể lập được bao nhiêu số gồm 7 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt

3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần.

Lời giải

Xếp các chữ số $0,1,2,2,2,3,4$ thành một hàng có $\frac{7!}{3!}$ cách xếp.

Xếp các chữ số $0,1,2,2,2,3,4$ thành một hàng sao cho chữ số 0 đứng đầu có $\frac{6!}{3!}$ cách xếp.

Vậy có $\frac{7!}{3!}-\frac{6!}{3!}=1440$ số thỏa mãn yêu cầu.

Dạng toán ☞ Chỉnh hợp

Phương pháp

(1) Chỉnh hợp các chữ số trong số tự nhiên.

Cách giải thông thường

» Gọi số cần tìm là $x=\overline{a_1a_2...a_n}$.

» Liệt kê các số x thỏa mãn điều kiện đề bài. Dựa vào tính chất bài toán xem có chia trường hợp hay không?

» Thứ tự đếm và sử dụng quy tắc cộng, nhân (nếu có).

(2) Chỉnh hợp đồ vật.

Ví dụ 17. Cho tập $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(1) Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm có 6 chữ số khác nhau và mỗi số chứa chữ số 5 ?

(2) Trong các số trên, có bao nhiêu số không chia hết cho 5 ?

Lời giải

(1) Từ tập A có thể lập được bao nhiêu số gồm có 6 chữ số khác nhau và mỗi số chứa chữ số 5?

Một số gồm 6 chữ số phân biệt hình thành từ $A:\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6}$, $\left(a_i\in A; i=\overline{1,6}; a_i\neq a_j, i\neq j\right)$

Để số tìm được phải có mặt chữ số 5, ta thấy: $5\in\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}$ có 6 cách chọn.

Mỗi bộ số dành cho 5 vị trí còn lại ứng với một chỉnh hợp chập 5 của các phần tử của tập $A\setminus\{5\}$ có 8 phần tử. Suy ra có A_8^5 cách chọn.

Như vậy ta được $6.A_8^5=40320$ số.

(2) Trong các số trên, có bao nhiêu số không chia hết cho 5?

Trong các số trên, những số chia hết cho 5 có $a_6=5$, tức là có A_8^5 số.

Vậy số các số tìm thấy không chia hết cho 5 là $6A_8^5-A_8^5=33600$ số.

Ví dụ 18. Có bao nhiêu cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11 m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm.

Lời giải

Số cách chọn 5 cầu thủ từ 11 trong một đội bóng để thực hiện đá 5 quả luân lưu 11 m, theo thứ tự quả thứ nhất đến quả thứ năm là số chỉnh hợp chập 5 của 11 phần tử nên số cách chọn là A_{11}^5.

Dạng toán ☞ Tổ hợp

Phương pháp

Khi giải bài toán chọn trên một tập hợp X có n phần tử, ta sẽ dùng tổ hợp nếu có 2 dấu hiệu sau:

» Chỉ chọn k phần tử trong n phần tử của X ($1\le k\le n$).

» Không phụ thuộc vào thứ tự sắp xếp các phần tử đã chọn.

Ví dụ 19. Một tổ gồm 8 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Cần lấy một nhóm 5 người trong đó có 2 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

Lời giải

Lấy một nhóm 5 người trong đó có 2 nữ và 3 nam được thực hiện theo 2 công đoạn.

Chọn 2 nữ trong 6 nữ có C_6^2 cách.

Chọn 3 nữ trong 8 nữ có C_8^3 cách.

Theo quy tắc nhân ta có $C_6^2.C_8^3 = 840$ cách chọn.

Ví dụ 20. Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng, 4 bông hồng đỏ (các bông hồng xem như đôi một khác nhau). Người ta muốn chọn ra 1 bó hoa hồng gồm 7 bông. Có bao nhiêu cách chọn.

(1) 1 bó hoa trong đó có đúng một bông hồng đỏ.

(2) 1 bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ.

Lời giải

(1) 1 bó hoa trong đó có đúng một bông hồng đỏ.

Chọn 1 bó hoa gồm 7 bông, trong đó có đúng 1 bông hồng đỏ, 6 bông hồng còn lại chọn trong 8 bông (gồm vàng và trắng) .

Số cách chọn: $C_4^1.C_8^6 = 112$ cách.

(2) 1 bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông hồng vàng và ít nhất 3 bông hồng đỏ.

Trường hợp 1: Chọn 3 bông vàng, 3 bông đỏ và 1 bông trắng, có $C_5^3.C_4^3.C_3^1$ cách.

Trường hợp 2: Chọn 4 bông vàng và 3 bông đỏ , có $C_5^4.C_4^3$ cách.

Trường hợp 3: Chọn 3 bông vàng và 4 bông đỏ , có $C_5^3.C_4^4$ cách.

Theo quy tắc cộng có: $C_5^3.C_4^3.C_3^1 + C_5^4.C_4^3 + C_5^3.C_4^4$.

Bài 3. NHỊ THỨC NEWTON

1. Công thức nhị thức Newton

Định nghĩa

Khai triển $(a+b)^n$ được cho bởi công thức sau:

» Với a,b là các số thực và n là sô nguyên dương, ta có

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\ldots+C_n^k a^{n-k}b^k+\ldots+C_n^n b^n \qquad (1)$$

» Quy ước $a^0=b^0=1$.

Công thức trên được gọi là công thức nhị thức Newton (viết tắt là Nhị thức Newton)

» Số các hạng tử là $n+1$

» Số mũ của a giảm dần từ n đến 0,
Số mũ của b tăng dần từ 0 đến n,
Nhưng tổng các số mũ của a và b trong mỗi hạng tử luôn bằng n.

» Các hệ số của mỗi hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối thì bằng nhau.

» Số hạng thứ k (số hạng tổng quát) của khai triển là: $T_{k+1}=C_n^k a^{n-k}b^k$.

Nhận xét

✓ Với $a=b=1$, thì ta có $2^n=C_n^0+C_n^1+\ldots+C_n^n$.

✓ Với $a=1;\ b=-1$, ta có $0=C_n^0-C_n^1+\ldots+(-1)^k C_n^k+\ldots+(-1)^n C_n^n$

✓ $(x+1)^n=C_n^0x^n+C_n^1x^{n-1}+C_n^2x^{n-2}+\ldots+C_n^kx^{n-k}+\ldots+C_n^{n-1}x+C_n^n$

✓ $(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^kx^k+\ldots+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n$

✓ $(x-1)^n=C_n^0-C_n^1x+C_n^2x^2-\ldots+(-1)^kC_n^kx^k+\ldots+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}x^{n-1}+(-1)^nC_n^nx^n$

✓ $C_n^k=C_n^{n-k}$

✓ $C_n^k+C_n^{k+1}=C_{n+1}^{k+1},\ (n\ge 1)$

✓ $k.C_n^k=\dfrac{k.n!}{(n-k)!k!}=\dfrac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!}=nC_{n-1}^{k-1}$

✓ $\dfrac{1}{k+1}C_n^k=\dfrac{k.n!}{(k+1)(n-k)!k!}=\dfrac{n(n-1)!}{(n+1)(n-k)!(k+1)!}=\dfrac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

2. Tam giác pascal

Trong công thức nhị thức Newton,
Cho $n=0,1,\ldots$ và xếp các hệ số thành dòng, ta nhận được tam giác, gọi là tam giác Pascal.

$n=0$: 1
$n=1$: 1 1
$n=2$: 1 2 1
$n=3$: 1 3 3 1
$n=4$: 1 4 6 4 1
$n=5$: 1 5 10 10 5 1
$n=6$: 1 6 15 20 15 6 1
$n=7$: 1 7 21 35 35 21 7 1

Từ công thức $C_n^k=C_{n-1}^{k-1}+C_{n-1}^k$ suy ra cách tính các số ở mỗi dòng dựa vào các số ở dòng trước nó. Chẳng hạn $C_5^2=C_4^1+C_4^2=4+6=10$.

📖 CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Khai triển nhị thức Newton

Phương pháp

Sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton

» Với $n=4$ ta có: $(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4$.

» Với $n=5$ ta có: $(a+b)^5 = C_5^0a^5 + C_5^1a^4b^1 + C_5^2a^3b^2 + C_5^3a^2b^3 + C_5^4a^1b^4 + C_5^5b^5$

Hay $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5a^1b^4 + b^5$

Ví dụ 21. Khai triển các biểu thức sau:

(1) $(3x-2y)^4$ (2) $(x-2y)^5$

Lời giải

(1) $(3x-2y)^4$

Ta có: $(3x-2y)^4 = C_4^0(3x)^4 + C_4^1(3x)^3(-2y)^1 + C_4^2(3x)^2(-2y)^2 + C_4^13x(-2y)^3 + C_4^0(-2y)^4$

$= 81x^4 - 216x^3y + 216x^2y^2 - 96xy^3 + 16y^4$

(2) $(x-2y)^5$

Ta có: $(x-2y)^5 = C_5^0x^5 + C_5^1x^4(-2y) + C_5^2x^3(-2y)^2 + C_5^3x^2(-2y)^3 + C_5^4x(-2y)^4 + C_5^5(-2y)^5$

$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$

Dạng toán ☞ Xác định hệ số hay số hạng trong khai triển nhị thức Newton

Phương pháp

» Xác định số hạng tổng quát $T_k = C_n^ka^{n-k}b^k$ trong khai triển $(a+b)^n$ và kết hợp với yêu cầu của bài toán để thiết lập một phương trình, từ đó tìm ra kết quả mà bài toán yêu cầu.

Lưu ý: T_k là số hạng thứ $k+1$ trong khai triển $(a+b)^n$ theo lũy thừa tăng dần của b.

Ví dụ 22. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển $(2x-1)^4$.

Lời giải

Ta xét khai triển $(2x-1)^4$ có số hạng tổng quát là

$T_{k+1} = C_4^k(2x)^{4-k}(-1)^k = (-1)^kC_4^k2^{4-k}x^{4-k}$

Số hạng chứa x^3 trong khai triển ứng với giá trị k thỏa mãn : $4-k=3 \Rightarrow k=1$.

Vậy số hạng chứa x^3 trong khai triển là: $C_4^1(-1)^12^3x^3 = -32x^3$.

Ví dụ 23. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển $\left(\dfrac{3}{x}+2x\right)^4$ với $x \neq 0$.

Lời giải

Ta xét khai triển $\left(\dfrac{3}{x}+2x\right)^4$ (với $x \neq 0$) có số hạng tổng quát là

$T_{k+1} = C_4^k(2x)^k\left(\dfrac{3}{x}\right)^{4-k} = C_4^k2^k3^{4-k}x^{2k-4}$

Số hạng không chứa x trong khai triển tương ứng với giá trị k thỏa mãn: $2k-4=0 \Leftrightarrow k=2$.

Vậy số hạng không chứa x trong khai triển là $C_4^22^23^2 = 216$.

Phần ☞ HÌNH HỌC VÀ ĐO LƯỜNG

Chương ☞ HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

Bài 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°

1. Giá trị lượng giác của một góc

Định nghĩa

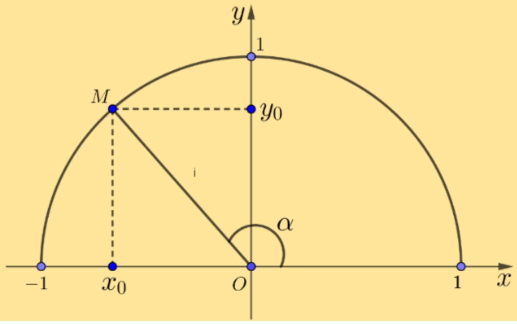
» Trong mặt phẳng Oxy, nửa đường tròn tâm O nằm phía trên trục hoành bán kính $R=1$ được gọi là *nửa đường tròn đơn vị*.

» Với mỗi góc α $\left(0^\circ \le \alpha \le 180^\circ\right)$ ta xác định một điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{xOM}=\alpha$ và giả sử điểm M có tọa độ $M\left(x_0;y_0\right)$.

Khi đó:

① $\sin\alpha = y_0$. ② $\cos\alpha = x_0$. ③ $\tan\alpha = \dfrac{y_0}{x_0}\left(x_0 \ne 0\right)$. ④ $\cot\alpha = \dfrac{x_0}{y_0}\left(y_0 \ne 0\right)$.

» Các số $\sin\alpha, \cos\alpha, \tan\alpha, \cot\alpha$ được gọi là *các giá trị lượng giác* của góc α.



Chú ý

Với $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$ ta có $0 \le \sin\alpha \le 1; -1 \le \cos\alpha \le 1$

Góc α	0° 90°	180°
$\sin\alpha$	+	+
$\cos\alpha$	+	–
$\tan\alpha$	+	–
$\cot\alpha$	+	–

2. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

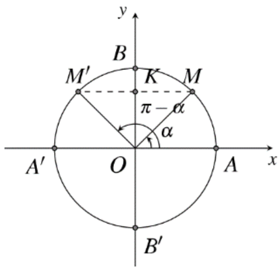
$\sin\left(180^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$

$\cos\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cos\alpha$

$\tan\left(180^\circ-\alpha\right)=-\tan\alpha$

$\cot\left(180^\circ-\alpha\right)=-\cot\alpha$

Sin – bù



3. Mối quan hệ giữa các giá trị lượng giác của hai góc phụ nhau

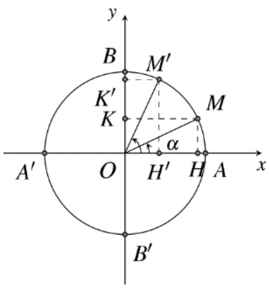
$\sin\left(90^\circ-\alpha\right)=\cos\alpha$

$\cos\left(90^\circ-\alpha\right)=\sin\alpha$

$\tan\left(90^\circ-\alpha\right)=\cot\alpha$

$\cot\left(90^\circ-\alpha\right)=\tan\alpha$

Phụ – chéo



4. Giá trị lượng giác của các góc đặc biệt

Góc α	**0^0**	**30^0**	**45^0**	**60^0**	**90^0**
$\sin\alpha$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1

$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\Vert$
$\cot\alpha$	$\Vert$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

7. Các hệ thức lượng giác cơ bản

(1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ (2) $\tan\alpha.\cot\alpha=1$ (3) $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

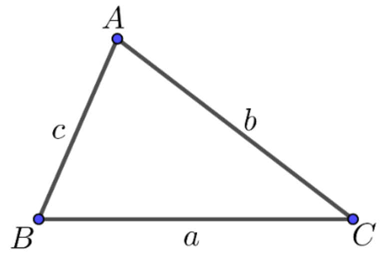
(4) $\cot\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (5) $1+\tan^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ (6) $1+\cot^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Bài 2. ĐỊNH LÍ CÔSIN VÀ ĐỊNH LÍ SIN

1. Định lí Côsin

» Trong ΔABC với $BC=a, CA=b, AB=c$, ta có:

- $a^2=b^2+c^2-2bc.\cos A$
- $b^2=a^2+c^2-2ac.\cos B$
- $c^2=b^2+a^2-2ba.\cos C$



» Hệ quả

- $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
- $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$
- $\cos C=\dfrac{b^2+a^2-c^2}{2ac}$

2. Định lí Sin

» Trong ΔABC ta có:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

» Hệ quả

- $a=2R\sin A$; $b=2R\sin B$; $c=2R\sin C$
- $\sin A=\dfrac{a}{2R}$; $\sin B=\dfrac{b}{2R}$; $\sin C=\dfrac{c}{2R}$

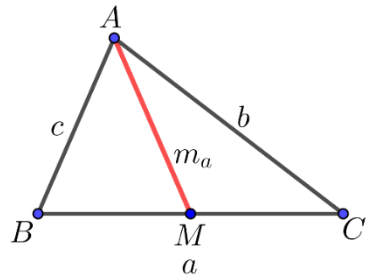
3. Đường trung tuyến

» Cho ΔABC, M là trung điểm cạnh BC,

$$AB^2+AC^2=2AM^2+BC^2.$$

» Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến từ A, B, C

- $m_a^{\ 2}=\dfrac{b^2+c^2}{2}-\dfrac{a^2}{4}$
- $m_b^{\ 2}=\dfrac{a^2+c^2}{2}-\dfrac{b^2}{4}$
- $m_c^{\ 2}=\dfrac{b^2+a^2}{2}-\dfrac{c^2}{4}$



4. Công thức tính diện tích tam giác

» Trong ΔABC ta có diện tích được tính bởi các công thức

(1) $S=\dfrac{1}{2}a.h_a=\dfrac{1}{2}b.h_b=\dfrac{1}{2}c.h_c$ (h_a, h_b, h_c lần lượt là độ dài đường cao đinhe A, B, C)

(2) $S=\dfrac{1}{2}bc.\sin A=\dfrac{1}{2}ac.\sin B=\dfrac{1}{2}ab.\sin C$

(3) $S=\dfrac{abc}{4R}$ (R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC).

(4) $S=p.r$ (r là bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC).

(5) $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ với $p=\dfrac{a+b+c}{2}$, với p là nửa chu vi.

Bài 3. GIẢI TAM GIÁC VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Giải tam giác

» Giải tam giác là tìm số đo các cạnh còn lại và các góc còn lại của tam giác khi biết một số yếu tố cho trước.

» Để giải tam giác ta sử dụng một cách hợp lý các công cụ là: Định lý cosin, định lý sin và công thức về diện tích tam giác.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ Giải tam giác

Ví dụ 24. Cho tam giác ABC có $a=7;b=8;c=5$. Tính A,S,h_a,R.

Lời giải

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{8^2+5^2-7^2}{2.8.5}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=60^\circ .$$

$$S=\frac{1}{2}b.c.\sin A=\frac{1}{2}.8.5.\sin 60^\circ=10\sqrt{3} .$$

Ta có: $S=\frac{1}{2}a.h_a\Rightarrow h_a=\frac{2S}{a}=\frac{2.10\sqrt{3}}{7}=\frac{20\sqrt{3}}{7}$.

Ta có: $S=\frac{a.b.c}{4R}\Rightarrow R=\frac{a.b.c}{4S}=\frac{7.8.5}{4.10\sqrt{3}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}$.

Ví dụ 25. Tam giác ABC có cạnh $a=2\sqrt{3},b=2,C=30^0$.

(1) Tính cạnh c, góc A và diện tích S của ΔABC.

(2) Tính chiều cao h và độ dài m của đường trung tuyến kẻ từ A của ΔABC.

Lời giải

(1) Tính cạnh c, góc A và diện tích S của ΔABC.

Ta có $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C\Leftrightarrow c^2=\left(2\sqrt{3}\right)^2+2^2-2.2\sqrt{3}.2\cos 30^\circ=4\Rightarrow c=2$.

Xét tam giác ABC có $b=c=2\Rightarrow$ tam giác ABC cân tại $A\Rightarrow \hat{C}=\hat{B}=30^\circ\Rightarrow \hat{A}=120^\circ$.

Ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}.2.2\sin 120^\circ=\sqrt{3}$.

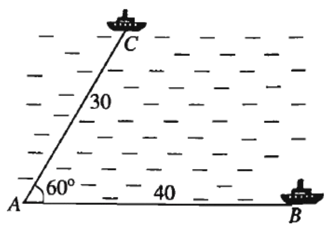
(2) Tính chiều cao h và độ dài m của đường trung tuyến kẻ từ A của ΔABC.

Ta có $S_{ABC}=\frac{1}{2}a.h_a\Rightarrow h_a=\frac{2.S_{ABC}}{a}=\frac{2.\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}=1$.

Ta có $m_a{}^2=\frac{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}{4}=\frac{2\left(2^2+2^2\right)-\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4}=1\Rightarrow m_a=1$.

Dạng toán ☞ Ứng dụng thực tế

Ví dụ 26. Hai chiếc tàu thuỷ cùng xuất phát từ vị trí A, đi thẳng theo hai hướng tạo với nhau một góc 60^0. Tàu thứ nhất chạy với tốc độ $30\,km/h$, tàu thứ hai chạy với tốc độ $40\,km/h$. Hỏi sau 2 giờ hai tàu cách nhau bao nhiêu km?



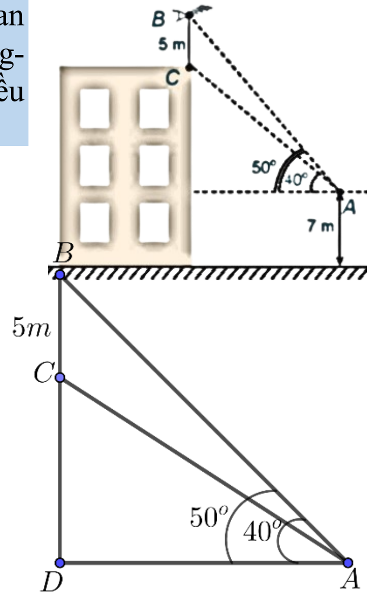
Lời giải

Ta có: Sau $2h$ quãng đường tàu thứ nhất chạy được là:
$S_1=30.2=60\,km.$

Sau $2h$ quãng đường tàu thứ hai chạy được là: $S_2=40.2=80\,km.$

Vậy: sau $2h$ hai tàu cách nhau là: $S=\sqrt{S_1{}^2+S_2{}^2-2S_1.S_2.\cos 60^0}=20\sqrt{13}.$

Ví dụ 27. Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao 5 m. Từ một vị trí quan sát A cao 7 m so với mặt đất có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten, với các góc tương ứng là $50°$ và $40°$ so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà.



Lời giải

Ta có $BAC = 50° - 40° = 10°$, $ABC = 90° - BAD = 40°$

$\Rightarrow ACB = 180° - ABC - BAC = 130°$

Áp dụng định lý sin trong tam giác ABC ta có

$$\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} \Rightarrow AC = \frac{BC.\sin B}{\sin A} = \frac{5.\sin 40°}{\sin 10°} \approx 18,51.$$

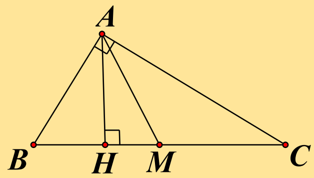
Xét tam giác ACD vuông tại D có $CD = AC.\sin 40° \approx 11,9$

Vậy chiều cao của tòa nhà là: $11,9 + 7 = 18,9m$.

CAC HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

1. Tam giác vuông:

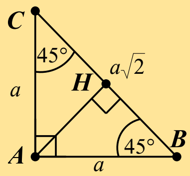
Cho ΔABC vuông tại A có đường cao AH và trung tuyến AM. Ta có:



- $BC^2 = AB^2 + AC^2$ (Pi-ta-go)
- $AH.BC = AB.AC$
- $AC^2 = CH.BC$
- $AB^2 = BH.BC$
- $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$
- $AH^2 = \frac{AB^2.AC^2}{AB^2 + AC^2}$
- $\frac{BH}{BC} = \frac{AB^2}{BC^2} = \frac{AB^2}{AB^2 + AC^2}$
- $\frac{CH}{BC} = \frac{AC^2}{BC^2} = \frac{AC^2}{AB^2 + AC^2}$
- $AM = \frac{BC}{2}$
- Diện tích: $S = \frac{1}{2}.AB.AC$ (bằng nửa tích độ dài 2 cạnh góc vuông)

2. Tam giác vuông cân:

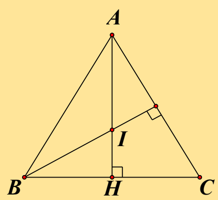
Cho ΔABC vuông cân tại A có đường cao AH. Ta có:



- $AB = AC = a$
- $BC = a\sqrt{2}$
- $AH = a\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Diện tích: $S = \frac{AB^2}{2} = \frac{AC^2}{2} = \frac{BC^2}{4}$

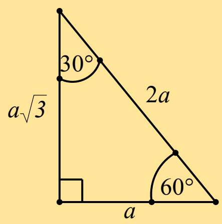
3. Tam giác đều:

Cho ΔABC đều cạnh a, có tâm I và đường cao AH. Ta có:



- $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
- $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
- $IH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$
- Diện tích: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

Nửa tam giác đều:



HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TỨ GIÁC

1. Hình thang:

Diện tích hình thang ABCD có đáy AB, CD: $S = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right).h$ (với h là chiều cao và h bằng khoảng cách giữa AB và CD)

2. Hình thang vuông:

Diện tích hình thang ABCD vuông tại A, D: $S = \frac{1}{2}\left(AB + CD\right).AD$

3. Hình bình hành:

Diện tích hình bình hành ABCD: $S=\frac{1}{2}\left(AB+CD\right).h$ (với h là chiều cao và h bằng khoảng cách giữa AB và CD)

4. Hình thoi:

Diện tích hình thoi ABCD: $S=\frac{1}{2}AC.BD$ (bằng nửa tích độ dài 2 đường chéo)

5. Hình chữ nhật:

Diện tích hình chữ nhật $ABCD: S = AB.BC$ (bằng tích chiều dài và chiều rộng)

6. Hình vuông:

Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O

- $AC=BD=a\sqrt{2}$
- $OA=OB=OC=OD=a\frac{\sqrt{2}}{2}$
- Diện tích: $S=a^2$

CÁC TÂM CỦA TAM GIÁC

- Trọng tâm tam giác là giao điểm 3 đường trung tuyến
- Trực tâm tam giác là giao điểm 3 đường cao
- Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác là giao điểm 3 đường trung trực
- Tâm đường tròn nội tiếp tam giác là giao điiểm 3 đường phân giác

Chương ☞ VECTƠ

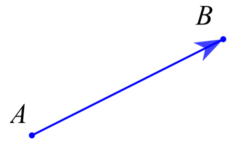
Bài 1. KHÁI NIỆM VECTƠ

1. Khái niệm vectơ

Định nghĩa

» Vectơ là một đoạn thẳng có hướng.

Kí hiệu



» Vectơ có điểm đầu A và điểm cuối B được kí hiệu là $\overrightarrow{AB}$, đọc là "vectơ AB".

» Vectơ còn được kí hiệu là $\vec{a},\vec{b},\vec{x},\vec{y},\ldots$ khi không cần chỉ rõ điểm đầu và điểm cuối của nó.

Độ dài vectơ

» Độ dài của vectơ là khoảng cách giữa điểm đầu và điểm cuối của vectơ đó.

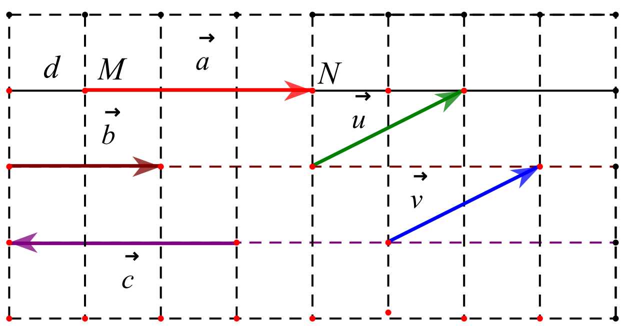
» Độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, như vậy $\left|\overrightarrow{AB}\right| = AB$. Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.

» Vectơ có độ dài bằng 1 gọi là *vectơ đơn vị*.

2. Vectơ cùng phương, cùng hướng

Định nghĩa

Giá của vectơ



» Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của 1 vectơ được gọi là *giá của vectơ* đó.

Vectơ cùng phương, cùng hướng

» Hai vectơ cùng phương nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

» Hai vectơ cùng phương thì chúng chỉ có thể cùng hướng hoặc ngược hướng.

Nhận xét

» Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng $\Leftrightarrow$ hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BC}$ cùng phương.

3. Hai vectơ bằng nhau – đối nhau

Định nghĩa

» Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng *cùng hướng* và có *cùng độ dài*.

Kí hiệu $\vec{a} = \vec{b}$

» Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và có cùng độ dài.

Chú ý

» Khi cho trước vectơ $\vec{a}$ và điểm O, thì ta luôn tìm được một điểm A duy nhất sao cho $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$.

4. Vectơ – không

Định nghĩa

» Vectơ-không là vectơ đặc biệt có điểm đầu và điểm cuối đều cùng một điểm, ta kí hiệu là $\vec{0}$.

» Ta quy ước vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

» Như vậy $\vec{0} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \ldots$ và $\overrightarrow{MN} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv N$.

Bài 2. TỔNG VÀ HIỆU CỦA HAI VECTO

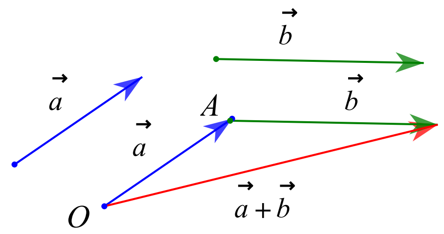
1. Tổng của hai vectơ

Định nghĩa

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- Lấy một điểm A tùy ý, vẽ $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$.
- Vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai $\vec{a};\vec{b}$.
- Kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$.

Vậy $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$.



Điểm đặc biệt:

» Điểm I là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

» Điểm G là trọng tâm của $\Delta ABC \Leftrightarrow \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

2. Hiệu của hai vectơ

Định nghĩa

» Vectơ đối của vecto $\vec{a}$, kí hiệu là $-\vec{a}$, là vectơ cùng phương nhưng ngược hướng với vecto $\vec{a}$.

» Cho hai vecto $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Ta gọi hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vecto $\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

Tính chất

Với $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ tùy ý, ta có:

(1) Tính chất giao hoán $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

(2) Tính chất kết hợp $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

(3) Tính chất của vectơ – không $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$

Các quy tắc vectơ

Quy tắc ba điểm:

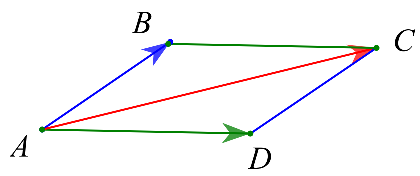
» Với 3 điểm A,B,C: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Quy tắc hiệu vectơ:

» Với 3 điểm O,A,B: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

Quy tắc hình bình hành:

» Tứ giác A,B,C,D là hình bình hành: $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.



Bài 3. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1. Tích của một số với một vectơ

Định nghĩa

» Cho số $k \neq 0$ và một véc tơ $\vec{a} \neq \vec{0}$. Tích của véc tơ $\vec{a}$ với k là một véc tơ, ký hiệu $k.\vec{a}$

Vectơ $\vec{b} = k.\vec{a}$

- Cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k > 0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k < 0$
- Có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

» Quy ước: $0.\vec{a} = \vec{0}$; $\vec{0}.k = \vec{0}$

Tính chất

Với hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và hai số thực số k, h ta có

(1) $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right) = k\vec{a} + k\vec{b}$ (2) $\left(h+k\right)\vec{a} = h\vec{a} + k\vec{a}$

(3) $h\left(k\vec{a}\right) = \left(hk\right)\vec{a}$ (4) $1.\vec{a} = \vec{a}$ (5) $\left(-1\right)\vec{a} = -\vec{a}$

Trung điểm của đoạn thẳng và trọng tâm của tam giác

» Nếu I là trung điểm của AB thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$, $\forall M$

» Nếu G là trọng tâm của ΔABC thì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$, $\forall M$

2. Điều kiện để hai vecto cùng phương

» Hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ ($\vec{b} \neq \vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có một số thực k để $\vec{a} = k.\vec{b}$.

Nhận xét

Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có một số thực $k \neq 0$ để $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

Chú ý

Cho hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương. Khi đó:

Mọi vec tơ $\vec{x}$ đều phân tích được một cách duy nhất theo hai véc tơ $\vec{a}, \vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số $(m;n)$ thực duy nhất sao cho $x = m.\vec{a} + n.\vec{b}$.

CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

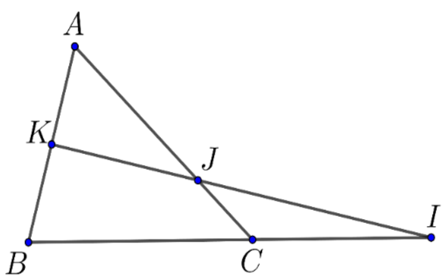
Dạng toán ☞ Phân tích một vectơ theo các vectơ cho trước và chứng minh 3 điểm thẳng hàng

Ví dụ 28. Cho ΔABC với I, J, K lần lượt được xác định bởi $\overrightarrow{IB} = 2\overrightarrow{IC}; \overrightarrow{JC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{JA}; \overrightarrow{KA} = -\overrightarrow{KB}$.

(1) Tính $\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IK}$ theo $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

(2) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

Lời giải



(1) Tính $\overrightarrow{IJ}; \overrightarrow{IK}$ theo $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$.

- Ta có: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{CJ}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = -\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}.$$

- $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BK}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{IK} = -2\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

(2) Chứng minh ba điểm I, J, K thẳng hàng.

- Theo câu (1), ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{IK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{IK} = \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\right) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{IK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$

Vậy I, J, K thẳng hàng.

Bài 4. TÍCH VÔ HƯỚNG HAI VECTƠ

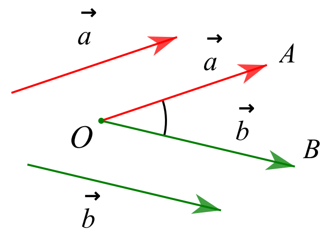
1. Góc giữa hai vectơ

Định nghĩa

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$.

» Từ một điểm O bất kì ta vẽ $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ và $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$.

Góc AOB với số đo từ $0°$ đến $180°$ được gọi là ***góc giữa hai vectơ*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$.



» Kí hiệu góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là $\left(\vec{a},\vec{b}\right)$.

Nếu $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=90°$ *thì ta nói rằng* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ *vuông góc với nhau, kí hiệu là* $\vec{a}\perp\vec{b}$ *hoặc* $\vec{b}\perp\vec{a}$.

Chú ý.

» Từ định nghĩa ta có $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left(\vec{b},\vec{a}\right)$.

» Góc giữa hai vectơ (khác $\vec{0}$) cùng hướng luôn bằng $0°$

» Góc giữa hai vectơ (khác $\vec{0}$) ngược hướng luôn bằng $180°$

2. Tích vô hướng hai vectơ

Định nghĩa

» Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số.

Kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$ được xác định bởi công thức $\boxed{\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right)}$.

» Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng $\vec{0}$ ta quy ước $\vec{a}.\vec{b}=\vec{0}$.

Chú ý.

Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$ ta có $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}.\vec{b}=0$.

Khi $\vec{a}=\vec{b}$ thì $\vec{a}.\vec{a}$ được kí hiệu là $\vec{a}^2$ và gọi là bình phương vô hướng của vectơ $\vec{a}$.

Ta có $\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{a}\right|\cos 0°=\left|\vec{a}\right|^2$

3. Tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ bất kì và mọi số thực k ta có:

(1) $\vec{a}.\vec{b}=\vec{b}.\vec{a}$ (tính chất giao hoán).

(2) $\vec{a}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$ (tính chất phân phối).

(3) $\left(k.\vec{a}\right).\vec{b}=k\left(\vec{a}.\vec{b}\right)=\vec{a}.\left(k\vec{b}\right)$.

(4) $\vec{a}^2\geq 0;\ \vec{a}^2=0\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{0}$.

(5) $\vec{a}.\vec{b}>0\Leftrightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc nhọn.

(6) $\vec{a}.\vec{b}<0\Leftrightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc tù.

(7) $\vec{a}.\vec{b}=0\Leftrightarrow\left(\vec{a};\vec{b}\right)$ là góc vuông.

Chương ☞ PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

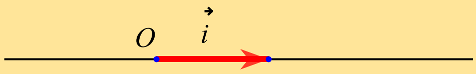
Bài 1. TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG MẶT PHẲNG

1. Trục tọa độ

Định nghĩa

» Trục tọa độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O gọi là điểm gốc và một vectơ đơn vị $\vec{i}$.

» Điểm O gọi là gốc tọa độ.



» Hướng của vectơ đơn vị là hướng của trục.

» Ta kí hiệu trục đó là $\left(O;\vec{i}\right)$.

Tọa độ của vectơ và của điểm trên trục

» Cho vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ khi đó số a được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$ trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ khi và chỉ khi $\vec{u}=a.\vec{i}$.

» Cho điểm M nằm trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ khi đó số m được gọi là tọa độ của điểm M trên trục $\left(O;\vec{i}\right)$ khi và chỉ khi $\overrightarrow{OM}=m\vec{i}$.

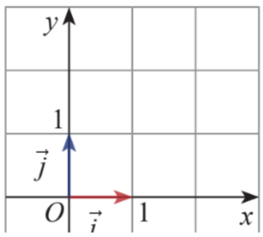
Như vậy tọa điểm M là tọa độ vectơ $\overrightarrow{OM}$.

2. Hệ trục tọa độ

Định nghĩa

» Hệ trục tọa độ gồm hai trục vuông góc Ox và Oy với hai vectơ đơn vị lần lượt là $\vec{i},\vec{j}$. Điểm O là gốc tọa độ, Ox gọi là trục hoành và Oy gọi là trục tung.

Kí hiệu: Oxy hay $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.



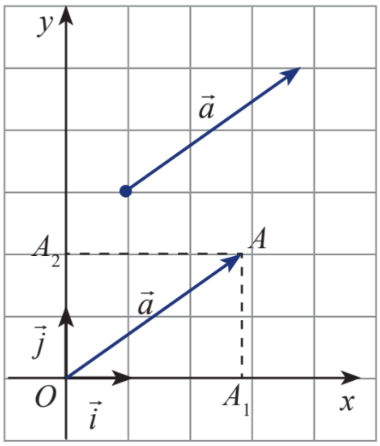
Tọa độ điểm, tọa độ vectơ

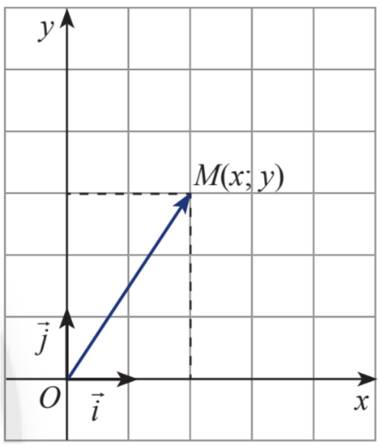
» Trong mặt phẳng Oxy , cặp số $(x;y)$ được gọi là tọa độ của vectơ $\vec{a}$ nếu $\vec{a}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

Kí hiệu: $\vec{a}=(x;y)$ hay $\vec{a}(x;y)$.

» Trong mặt phẳng Oxy , tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ gọi là tọa độ của điểm M .

Kí hiệu: $M=(x;y)$ hay $M(x;y)$.





Nhận xét

(1) $\vec{a}=(x;y)\Leftrightarrow\vec{a}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

(2) $M(x;y)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x.\vec{i}+y.\vec{j}$

3. Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ và số thực k . Khi đó ta có

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2)$;

(2) $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2)$

(3) $k.\vec{a}=(ka_1;ka_2)$

(4) $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2$

4. Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vecto

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2),\vec{b}=(b_1;b_2)$. Ta có:

(1) $\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;y_B-y_A)$.

(2) M là trung điểm của đoạn $AB \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.

(3) G là trọng tâm tam giác $ABC \Leftrightarrow \begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$.

(4) $\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$

(5) $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow a_1b_1 + a_2b_2 = 0$

(6) $\vec{a};\vec{b}$ cùng phương $\Leftrightarrow a_1b_1 - a_2b_2 = 0$

(7) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$

(8) $AB = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

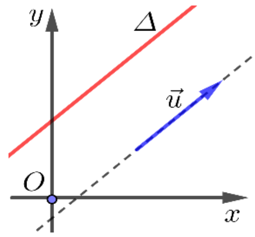
(9) $\cos\left(\vec{a};\vec{b}\right) = \dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$ ($\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác $\vec{0}$)

Bài 2. ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

1. Véc tơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến của đường thẳng

Vectơ chỉ phương

» Véctơ $\vec{u}$ gọi là véctơ chỉ phương của đường thẳng Δ nếu $\vec{u} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{u}$ song song hoặc trùng với Δ.



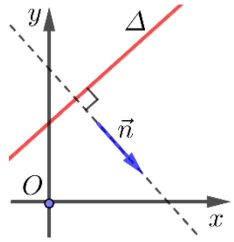
Nhận xét

(1) Nếu $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k.\vec{u}$, $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d.

(2) Một đường thẳng xác định khi biết một vectơ chỉ phương và một điểm mà nó đi qua.

Vectơ pháp tuyến

» Véctơ $\vec{n}$ gọi là véctơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và giá của $\vec{n}$ vuông góc với Δ.



Nhận xét

(1) Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d thì $k.\vec{n}$, $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của d.

(2) Một đường thẳng xác định khi biết một vectơ pháp tuyến và mộ điểm nó đi qua.

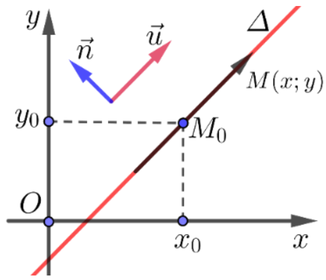
(3) Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d và $\vec{u}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $\vec{n}.\vec{u} = 0$.

Liên hệ giữa vectơ chỉ phương và vectơ pháp tuyến

Từ nhận xét (3), ta có:

(1) Nếu $\vec{n} = (a;b)$ là một vectơ pháp tuyến của đường thẳng d thì vectơ chỉ phương của d là $\vec{u} = (b;-a)$ hay $\vec{u} = (-b;a)$

(2) Nếu $\vec{u} = (a;b)$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì một vectơ pháp tuyến của d là $\vec{n} = (-b;a)$ hay $\vec{n} = (b;-a)$



2. Phương trình đường thẳng

Phương trình tham số của đường thẳng

Cho đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b)$.

» Khi đó $M(x;y)$ thuộc đường thẳng Δ khi và chỉ khi tồn tại số thực t sao cho $\overrightarrow{AM} = t.\vec{u}$, hay

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases} \quad (2)$$

Hệ (2) được gọi là ***phương trình tham số*** của đường thẳng Δ (t là tham số).

» Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b)$ thì có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}.$$

(Mỗi điểm M bất kỳ thuộc đường thẳng (d) tương ứng với duy nhất một số thực $t \in \mathbb{R}$ và ngược lại).

Nhận xét

(1) $A \in \Delta \Leftrightarrow A(x_0 + at; y_0 + bt), t \in \mathbb{R}$

(2) Trong mặt phẳng Oxy, mọi phương trình dạng $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ đều là phương trình của đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (a;b)$.

Phương trình chính tắc của đường thẳng

» Đường thẳng Δ đi qua điểm $A(x_0;y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b)$ với $a \neq 0, b \neq 0$ có ***phương trình chính tắc*** là: $\dfrac{x - x_0}{a} = \dfrac{y - y_0}{b}$

Phương trình tổng quát của đường thẳng

» Mọi đường thẳng đều có ***phương trình tổng quát*** dạng $ax+by+c=0$, với a và b không đồng thời bằng 0.

» Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax+by+c=0$, với a và b không đồng thời bằng 0, đều là phương trình của một đường thẳng, nhận $\vec{n}=(a;b)$ là một vectơ pháp tuyến.

Nhận xét

(1) Đường thẳng d đi qua điểm $M(x_0;y_0)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ thì có phương trình tổng quát là $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$.

(2) Nếu $a=0$ phương trình trở thành $by+c=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{c}{b}$ đường thẳng song song với trục hoành Ox và cắt trục tung Oy tại điểm $M\left(0;-\dfrac{c}{b}\right)$.

(3) Nếu $b=0$ phương trình trở thành $ax+c=0 \Leftrightarrow x=-\dfrac{c}{a}$ đường thẳng song song với trục tung Oy và cắt trục hoành Ox tại $M\left(-\dfrac{c}{a};0\right)$

(4) Nếu $c=0$ phương trình trở thành $ax+by=0$ đường thẳng qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

(5) Đường thẳng $y=ax+b$, (trong đó a được gọi là hệ số góc của đường thẳng) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(a;-1)$.

Ngược lại đường thẳng có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$ thì có hệ số góc là $-\dfrac{a}{b}$.

(6) Đường thẳng d đi qua điểm $A(a;0)$ và $B(0;b)$ có phương trình là $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$.

3. Vị trí tương đối của đường thẳng

Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có lần lượt hai vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ hay có lần lượt hai vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$. Khi đó:

(1) Nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ (hay $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$) cùng phương và $M\in\Delta_1 \Rightarrow M\in\Delta_2$ thì $\Delta_1\equiv\Delta_2$

(2) Nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ (hay $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$) cùng phương và $M\in\Delta_1 \Rightarrow M\notin\Delta_2$ thì $\Delta_1 \parallel \Delta_2$

(3) Nếu $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ (hay $\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}$) không cùng phương Δ_1 và Δ_2 cắt nhau

Trường hợp 1: Hai đường thẳng cho bởi phương trình tổng quát

Cho hai đường thẳng $\Delta_1: a_1x+b_1y+c_1=0$ và $\Delta_2: a_2x+b_2y+c_2=0$.

Toạ độ giao điểm của Δ_1 và Δ_2 là nghiệm của hệ phương trình bậc nhất hai ẩn:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1=0 \\ a_2x+b_2y+c_2=0 \end{cases} \quad (1)$$

(1) $\Delta_1\equiv\Delta_2$ $\Leftrightarrow$ hệ (1) có vô số nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ $(a_2,b_2,c_2\neq 0)$

(2) $\Delta_1 // \Delta_2$ $\Leftrightarrow$ hệ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}\neq\dfrac{c_1}{c_2}$ $(a_2,b_2,c_2\neq 0)$

(3) Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow$ hệ (1) có một nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ $(a_2,b_2,c_2\neq 0)$

✓ Nếu hệ (1) có một nghiệm $(x;y)=(x_0;y_0)$ thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại điểm $I(x_0;y_0)$

Trường hợp 2: Hai đường thẳng cho bởi phương trình tham số

Cho hai đường thẳng $\Delta_1:\begin{cases}x=x_1+a_1.t\\ y=y_1+b_1.t\end{cases}$ và $\Delta_2:\begin{cases}x=x_2+a_2.k\\ y=y_2+b_2.k\end{cases}$. Xét hệ phương trình tương giao bậc nhất hai ẩn t, k (ghép lại từ hai phương trình):

$$\begin{cases}x_1+a_1.t=x_2+a_2.k\\ y_1+b_1.t=y_2+b_2.k\end{cases}\ (2)$$

(1) $\Delta_1\equiv\Delta_2$ $\Leftrightarrow$ hệ (2) có vô số nghiệm

(2) $\Delta_1 // \Delta_2$ $\Leftrightarrow$ hệ (2) vô nghiệm

(3) Δ_1 cắt Δ_2 $\Leftrightarrow$ hệ (3) có một nghiệm $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2}\neq\dfrac{b_1}{b_2}$ $(a_2,b_2,c_2\neq 0)$

✓ Nếu hệ (2) có một nghiệm $(t;k)=(t_0;k_0)$ thì Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tại điểm $I(x_1+a_1.t_0;y_1+b_1.t_0)$ (thay $t=t_0$ vào phương trình tham số Δ_1 hay tại điểm $I(x_2+a_2.k_0;y_2+b_2.k_0)$ (thay $k=k_0$ vào phương trình tham số Δ_2.

Chú ý

Các trường hợp khác thì biến đổi phương trình về trường hợp 1 hoạc trường hợp 2.

4. Khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng

Cho điểm $M(x_0;y_0)$ và đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0$. Khi đó:

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là $d(M,\Delta)=\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

5. Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa

Hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 cắt nhau tạo thành bốn góc.

» Nếu Δ_1 và Δ_2 không vuông góc nhau thì góc nhọn trong bốn góc đó gọi là ***góc giữa hai đường thẳng*** Δ_1 và Δ_2, kí hiệu là (Δ_1,Δ_2) hay (Δ_1,Δ_2)

» Nếu Δ_1 và Δ_2 vuông góc nhau thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng $90°$

Quy ước: Nếu Δ_1 và Δ_2 song song hoặc trùng nhau thì góc giữa Δ_1 và Δ_2 bằng $0°$

Nhận xét: $0°\le(\Delta_1,\Delta_2)\le 90°$

Công thức tính góc giữa hai đường thẳng

» Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có lần lượt hai vectơ chỉ phương $\vec{u_1}=(a_1;b_1)$, $\vec{u_2}=(a_2;b_2)$. Khi đó:

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{u_1},\vec{u_2})\right|=\frac{|\vec{u_1}.\vec{u_2}|}{|\vec{u_1}|.|\vec{u_2}|}\ \text{suy ra}\ \cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{|a_1.b_1+a_2.b_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

» Cho hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 có lần lượt hai vectơ pháp tuyến $\vec{n_1}=(a_1;b_1)$, $\vec{n_2}=(a_2;b_2)$. Khi đó:

$$\cos(\Delta_1,\Delta_2)=\left|\cos(\vec{n_1},\vec{n_2})\right|=\frac{|\vec{n_1}.\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|.|\vec{n_2}|}\ \text{suy ra}\ \cos(\Delta_1,\Delta_2)=\frac{|a_1.b_1+a_2.b_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}.\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

Bài 3. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

1. Phương trình đường tròn

Định nghĩa

Phương trình $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ được gọi là ***phương trình đường tròn*** có tâm $I(a;b)$ bán kính R

Nhận xét

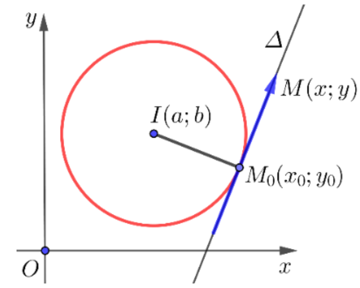
Phương trình $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a^2+b^2-c>0$ là phương trình đường tròn tâm $I(a;b)$ bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Phương trình tiếp tuyến tại điểm nằm trên đường tròn

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn tâm $I(a;b)$ tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn là

$$(a-x_0)(x-x_0)+(b-y_0)(y-y_0)=0$$



Phương trình tiếp tuyến tại điểm nằm ngoài đường tròn

Viết phương trình tiếp tuyến Δ của (C) tại điểm $M_0(x_0;y_0)$ nằm ngoài (C)

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).

Bước 2. Tiếp tuyến là đường thẳng đi qua M_0 nên có dạng $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$

Bước 3. Do Δ tiếp xúc với (C) nên $d(I;\Delta)=R$ $(*)$.

Giải $(*)$ tìm được mối liên hệ giữa a, b. Chọn a, b phù hợp để kết luận.

Phương trình tiếp tuyến song song với đường thẳng

Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết Δ song song với $d: ax+by+c=0$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).

Bước 2. Do Δ song song với $d: ax+by+c=0$ nên phương trình Δ có dạng $ax+by+c'=0$ $(c'\neq c)$

Bước 3. Do Δ tiếp xúc với (C) nên $d(I;\Delta)=R$ $(*)$.

Giải $(*)$ tìm được c', so với điều kiện để kết luận.

Phương trình tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng

Viết phương trình tiếp tuyến Δ với (C) biết Δ vuông góc với $d: ax+by+c=0$

Bước 1. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (C).

Bước 2. Do Δ vuông góc với $d: ax+by+c=0$ nên phương trình Δ có dạng $bx-ay+c'=0$ $(c'\neq c)$

Bước 3. Do Δ tiếp xúc với (C) nên $d(I;\Delta)=R$ $(*)$.

Giải $(*)$ tìm được c', so với điều kiện để kết luận.

Bài 4. BA ĐƯỜNG CONIC TRONG MẶT PHẲNG TỌA ĐỘ

1. Elip

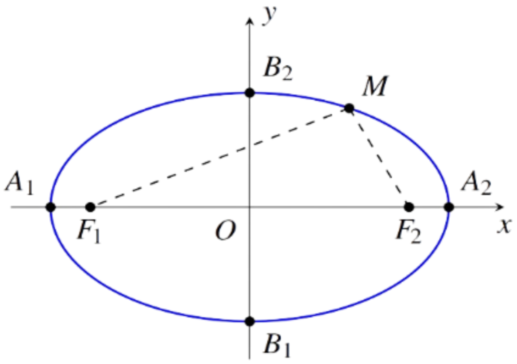
Định nghĩa elip

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ lớn hơn F_1F_2.

Elip (E) là tập hợp tất cả điểm M trong mặt phẳng thỏa $MF_1 + MF_2 = 2a$

Các điểm F_1, F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của elip

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của elip $(a > c)$.



Phương trình chính tắc của elip

Trong mặt phẳng Oxy, cho elip (E) có các tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = a^2 - c^2$ được gọi là ***phương trình chính tắc của elip*** (E)

Chú ý

» Elip (E) cắt trục Ox, Oy tại các điểm $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$ gọi là các ***đỉnh*** của elip.

» Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là ***trục lớn*** ; đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là ***trục bé.***

» Giao điểm O của hai trục gọi là ***tâm đối xứng*** của elip.

2. Hypebol

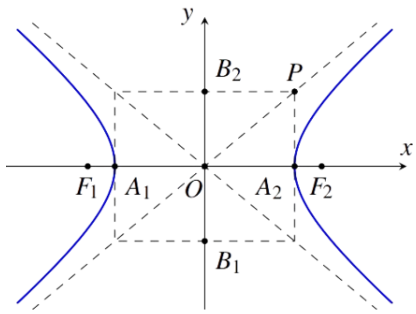
Định nghĩa hypebol

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và một độ dài không đổi $2a$ nhỏ hơn F_1F_2.

Hypebol (H) là tập hợp tất cả điểm M trong mặt phẳng thỏa $|MF_1 - MF_2| = 2a$

Các điểm F_1, F_2 gọi là các ***tiêu điểm*** của hypebol

Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là ***tiêu cự*** của hypebol $(a < c)$.



Phương trình chính tắc của hypebol

Trong mặt phẳng Oxy, cho hypebol (H) có các tiêu điểm $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$.

Phương trình có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ với $b^2 = c^2 - a^2$ được gọi là ***phương trình chính tắc của hypebol*** (H)

Chú ý

» Hypebol (H) cắt trục Ox tại các điểm $A_1(-a;0), A_2(a;0)$ gọi là các ***đỉnh*** của hypebol.

» Đoạn thẳng $A_1A_2 = 2a$ gọi là ***trục thực***; đoạn thẳng $B_1B_2 = 2b$ gọi là ***trục ảo.***

» Giao điểm O của hai trục gọi là ***tâm đối xứng*** của hypebol.

3. Parabol

Định nghĩa parabol

Cho một điểm F và một đường thẳng cố định Δ không qua F.

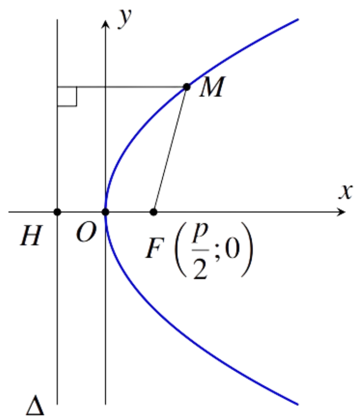
Parabol (P) là tập hợp tất cả điểm M trong mặt phẳng cách đều F và Δ

Điểm F gọi là ***tiêu điểm*** của parabol và đường thẳng Δ gọi là ***đường chuẩn*** của parabol (P)

Phương trình chính tắc của hypebol

Trong mặt phẳng Oxy, cho parabol (P) có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và đường chuẩn $\Delta: x+\frac{p}{2}=0$.

Phương trình có dạng $y^2=2px$ được gọi là ***phương trình chính tắc của parabol*** (P)



Chú ý

» Điểm O gọi là đỉnh của parabol (P).

» Trục Ox gọi là ***trục đối xứng*** của parabol (P).

» p gọi là ***tham số tiêu*** của parabol (P).

Phần ☞ THỐNG KÊ VÀ XÁC SUẤT

CHƯƠNG ☞ THỐNG KÊ

Bài 1. SỐ GẦN ĐÚNG VÀ SAI SỐ

1. Số gần đúng

Định nghĩa

» Trong nhiều trường hợp ta không thể biết hoặc khó biết số đúng (kí hiệu $\overline{a}$) mà ta chỉ tìm được giá trị khá xấp xỉ nó.

» Giá trị này được gọi là số gần đúng kí hiệu là a.

2. Sai số tuyệt đối và sai số tương đối

Sai số tuyệt đối của số gần đúng

» Cho $\overline{a}$ là giá trị đúng, a là giá trị gần đúng của $\overline{a}$.

» Giá trị $\Delta_a = |\overline{a} - a|$, được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.

Độ chính xác của một số gần đúng

» Nếu $\Delta_a = |\overline{a} - a| \le d$ thì $a - d \le \overline{a} \le a + d$.

» Quy ước $\overline{a} = a \pm d$, thì d được gọi là độ chính xác của số gần đúng a.

Sai số tương đối của số gần đúng

» Tỉ số $\delta_a = \dfrac{\Delta_a}{|a|} = \dfrac{|\overline{a} - a|}{|a|}$, được gọi là sai số tương đối của số gần đúng a.

» Nếu $\overline{a} = a \pm d$ thì $\Delta_a \le d$ do đó $\delta_a < \dfrac{d}{|a|}$.

» Vậy $\dfrac{d}{|a|}$ càng nhỏ thì chất lượng của phép đo đạc càng cao.

3. Quy tắc làm tròn số

» Nếu chữ số sau hàng quy tròn ***nhỏ hơn 5*** thì ta thay nó và các chữ số bên phải nó bởi chữ số 0.

» Nếu chữ số sau hàng quy tròn ***lớn hơn hoặc bằng 5*** thì ta cũng làm như trên nhưng cộng thêm 1 đơn vị vào chữ số hàng quy tròn.

Chú ý

(1) Khi thay số đúng bởi số quy tròn đến một hàng nào đó thì sai số tuyệt đối của số quy tròn không vượt quá nửa đơn vị của hàng quy tròn.

Ta có thể nói độ chính xác của số quy tròn bằng nửa đơn vị của hàng quy tròn.

(2) Khi quy tròn số đúng $\overline{a}$ đến một hàng nào đó thì ta nói số gần đúng a nhận được là chính xác đến hàng đó.

Ví dụ số gần đúng của π chính xác đến hàng phần trăm là 3,14.

Xác định số quy tròn của số gần đúng a với độ chính xác d cho trước

» **Bước 1:** Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

» **Bước 2:** Quy tròn số a ở hàng gấp 10 lần hàng tìm được ở *Bước 1*.

Xác định số gần đúng của một số với độ chính xác cho trước

» **Bước 1:** Tìm hàng của chữ số khác 0 đầu tiên bên trái của d.

» **Bước 2:** Quy tròn $\overline{a}$ đến hàng tìm được ở trên.

Bài 2. MÔ TẢ VÀ BIỂU DIỄN DỮ LIỆU TRÊN BẢNG VÀ BIỂU ĐỒ

1. Bảng số liệu

Định nghĩa

» Dựa vào các thông tin đã biết và sử dụng mối liên hệ toán học giữa các số liệu, ta có thể phát hiện ra được số liệu không chính xác trong một số trường hợp.

Ví dụ 1.

Trong 6 tháng đầu năm, số sản phẩm bán ra mỗi tháng của một của hàng đều tăng khoảng 20% so với tháng trước đó, Biết rằng, trong bảng dưới đây, số sản phẩm bán ra của một tháng bị nhập sai, Hãy tìm tháng đó.

Tháng	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Số sản phẩm bán ra	145	175	211	256	340	371

Lời giải

Tỉ lệ phần trăm tăng thêm của số sản phẩm bán ra mỗi tháng được tính ở bảng sau:

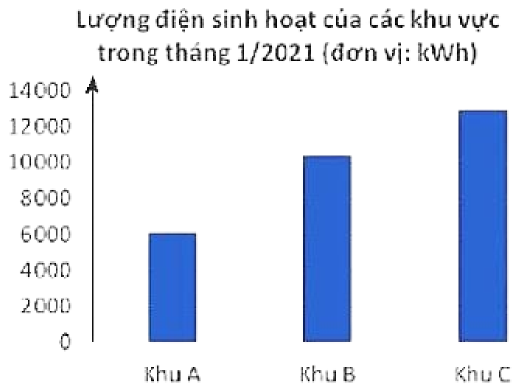
Tháng	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Tỉ lệ phần trăm tăng thêm so với tháng trước	20,7%	20,6%	21,3%	32,8%	9,1%

Ta thấy ti lệ tăng của tháng 5 và tháng 6 đều khác xa 20%,
Do đó trong bảng số liệu đã cho, số sản phẩm của tháng 5 là không chính xác.

2. Biểu đồ

Ví dụ 2.

Lượng điện sinh hoạt trong tháng 1/2O21 của các 140000 hộ gia đình thuộc Khu A (60 hộ), Khu B (100 hộ) 120000 và Khu C (120 hộ) được biểu diễn ở biểu đồ bên.



Hãy cho biết các phát biểu sau là đúng hay sai:
(1) Mỗi khu đều tiêu thụ trên 6000 kWh.
(2) Trung binh mỗi hộ ở Khu C sử dụng số điện gấp hai lần mỗi hộ ở Khu A.

Lời giải

Nhìn vào biểu đồ ta thấy mỗi khu đều tiêu thụ trên 6000 kWh nên khẳng định ở câu (1) là đúng.
Mặc dù lượng điện tiêu thụ ở Khu C gần gấp hai lần lượng điện tiêu thụ ở Khu A nhưng số hộ ở Khu C lại gấp hai lần số hộ Khu A. Do đó khẳng định ở câu (2) là sai.

Bài 3. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO XU THẾ TRUNG TÂM

1. Số trung bình

Định nghĩa

» Số trung bình (số trung bình cộng) của mẫu số liệu $x_1, x_2, \ldots, x_n$, kí hiệu là $\overline{x}$, được tính bằng công thức:

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

Chú ý

» Trong trường hợp mẫu số liệu cho dưới dạng bảng tần số thì số trung bình được tính theo công thức:

$$\overline{x} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_kx_k}{n}$$

Trong đó m_k là tần số của giá trị x_k và $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k$.

Ý nghĩa

Số trung bình là giá trị trung bình cộng của các số trong mẫu số liệu, nó cho biết vị trí trung tâm của mẫu số liệu và có thể dùng để đại diện cho mẫu số liệu.

2. Trung vị và tứ phân vị

Trung vị

» Để tìm trung vị của một mẫu số liệu, ta thực hiện như sau:
- Sắp xếp các giá trị trong mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Nếu số giá trị của mẫu số liệu là:
  - số lẻ thì giá trị chính giữa của mẫu là trung vị.
  - số chẵn thì trung vị là trung bình cộng của hai giá trị chính giữa của mẫu.

Ý nghĩa

» Trung vị là giá trị chia đôi mẫu số liệu. Nghĩa là trong mẫu số liệu được sắp xếp theo thứ tự không giảm thì giá trị trung vị ***ở vị trí chính giữa.***

» Trung vị không bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường trong khi số trung bình bị ảnh hưởng bởi giá trị bất thường.

Tứ phân vị

» Để tìm các tứ phân vị của mẫu số liệu có n giá trị, ta làm như sau:
- Sắp xếp mẫu số liệu theo thứ tự không giảm.
- Tìm trung vị. Giá trị này là Q_2.
- Tìm trung vị của nửa số liệu *bên trái* Q_2
(không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_1.
- Tìm trung vị của nửa số liệu *bên phải* Q_2
(không bao gồm Q_2 nếu n lẻ). Giá trị này là Q_3.

Khi đó Q_1, Q_2, Q_3 được gọi là các tứ phân vị của mẫu số liệu.

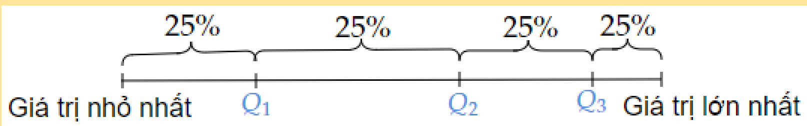
Chú ý

Q_1 được gọi là tứ phân vị thứ nhất hay tứ phân vị dưới.

Q_3 được gọi là tứ phân vị thứ ba hay tứ phân vị trên

Ý nghĩa

» Các điểm Q_1, Q_2, Q_3 chia mẫu số liệu đã sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn thành bốn phần, mỗi phần đều chứa 25% giá trị



3. Mốt

» Mốt của mẫu số liệu là giá trị xuất hiện với tần số lớn nhất.

Ý nghĩa

» Có thể dùng mốt để đo xu thế trung tâm của mẫu số liệu khi mẫu số liệu có nhiều giá trị trùng nhau.

Bài 4. CÁC SỐ ĐẶC TRƯNG ĐO ĐỘ PHÂN TÁN

1. Khoảng biến thiên và khoảng tứ phân vị

Khoảng biến thiên

» **Khoảng biến thiên**, kí hiệu là R, là hiệu số giữa giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trong mẫu số liệu. Tức là

$$R = x_n - x_1$$

Ý nghĩa

Khoảng biến thiên dùng để ***đo độ phân tán*** của mẫu số liệu.
Khoảng biến thiên càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

Khoảng tứ phân vị

» **Khoảng tứ phân vị**, kí hiệu Δ_Q, là hiệu số giữa tứ phân vị thứ ba và tứ phân vị thứ nhất, tức là:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

Chú ý.

*Một số tài liệu gọi khoảng biến thiên là biên độ và khoảng tứ phân vị là **độ trải giữa**.*

Ý nghĩa

Khoảng tứ phân vị cũng là ***một số đo độ phân tán*** của mẫu số liệu.
Khoảng tứ phân vị càng lớn thì mẫu số liệu càng phân tán.

2. Phương sai và độ lệch chuẩn

Định nghĩa

» Giả sử với mẫu số liệu $x_1, x_2, ..., x_n$, nếu gọi số trung bình là $\overline{x}$ thì với mỗi giá trị x_i, độ lệch của nó so với giá trị trung bình là $x_i - \overline{x}$.

Phương sai là giá trị $s^2 = \dfrac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n}$.

Độ lệch chuẩn bằng căn bậc hai của phương sai: $s = \sqrt{s^2}$

Chú ý

Người ta còn sử dụng đại lượng để đo độ phân tán của mẫu số liệu:

$$\hat{s}^2 = \frac{(x_1 - \overline{x})^2 + (x_2 - \overline{x})^2 + ... + (x_n - \overline{x})^2}{n-1}$$

Ý nghĩa

Nếu số liệu ***càng phân tán*** thì phương sai và độ lệch chuẩn ***càng lớn***.

CHƯƠNG ☞ XÁC SUẤT

Bài 1. KHÔNG GIAN MẪU VÀ BIẾN CỐ

1. Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Định nghĩa

» ***Phép thử ngẫu nhiên*** (gọi tắt là phép thử) là một phép thử mà ta không đoán trước được kết quả của nó, mặc dù đã biết tập hợp tất cả các kết quả có thể có của phép thử đó.

» Tập hợp các kết quả có thể xảy ra của một phép thử được gọi là ***không gian mẫu*** của phép thử đó và ký hiệu là Ω.

2. Biến cố

Định nghĩa

» Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

» Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là một kết quả thuận lợi cho A.

» Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là $n\left(A\right)$.

» Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra khi thực hiện hiện phép thử T.
Biến cố chắc chắn được mô tả bởi tập Ω và được ký hiệu là Ω.

» Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra khi thực hiện phép thử T.
Biến cố không thể được mô tả bởi tập $\varnothing$.

3. Các phép toán trên biến cố

Định nghĩa

» Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử.
Tập $\Omega \setminus A$ được gọi là biến cố đối của biến cố A, ký hiệu: $\overline{A}$.
Như vậy $\overline{A}$ xảy ra $\Leftrightarrow$ biến cố A không xảy ra.

» Giả sử A và B là hai biến cố liên quan đến một phép thử. Ta có:
▪Tập $A\cup B$ được gọi là ***hợp*** của các biến cố A và B.
Biến cố $A\cup B$ xảy ra $\Leftrightarrow$ có ít nhất 1 trong 2 biến cố A hoặc B xảy ra.
▪Tập $A\cap B$ được gọi là ***giao*** của các biến cố A và B.
Biến cố $A\cup B$ xảy ra $\Leftrightarrow$ cả 2 biến cố A và B đồng thời xảy ra.
Biến cố $A\cap B$ còn được viết là $A.B$.
▪Nếu $A\cap B=\varnothing$ thì ta nói A và B là hai biến cố xung khắc.
Ta thấy A và $\overline{A}$ là hai biến cố xung khắc.

Bài 2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

1. Xác suất của biến cố

Định nghĩa

» Giả sử A là biến cố liên quan đến một phép thử với không gian mẫu Ω chỉ có một số hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện.

» Ta gọi tỷ số $\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$ là xác suất của biến cố A, kí hiệu là: $P(A)$

$$\boxed{P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}}$$

Định lí

Giả sử A và B là các biến cố có liên quan đến một phép thử có một số điểm hữu hạn kết quả đồng khả năng xuất hiện. Khi đó:

- $P(\Omega)=1$, $P(\varnothing)=0$.
- $0\le P(A)\le 1$, với mọi biến cố A.
- Nếu A và B xung khắc thì $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ (công thức cộng xác suất).

2. Tính xác suất bằng sơ đồ hình cây

» Trong chương ***"Đại số tổ hợp"***, chúng ta đã được làm quen với phương pháp sử dụng sơ đồ hình cây để liệt kê các kết quả của một thí nghiệm. Ta cũng có thể sử dụng sơ đồ hình cây để tính xác suất.

3. Biến cố đối

Định nghĩa

» Cho A là một biến cố.

Khi đó biến cố "Không xảy ra A", kí hiệu là $\overline{A}$, được gọi là ***biến cố đối*** của A.

» Ký hiệu: $\overline{A}=\Omega\setminus A$

Và $P(\overline{A})+P(A)=1$ *từ đó suy ra:* $P(\overline{A})=1-P(A)$

4. Nguyên lí xác suất bé

Định nghĩa

» Trong thực tế, các biến cố có xác suất xảy ra gần bằng 1 thì gần như là luôn xảy ra trong một phép thử. Ngược lại, các biến cố mà xác suất xảy ra gần bằng 0 thì gần như không xảy ra trong một phép thử.

» Trong Lí thuyết Xác suất, Nguyên lí xác suất bé được phát biểu như sau:
Nếu một biến cố có xác suất rất bé thì trong một phép thử, biến cố đó sẽ không xảy ra