

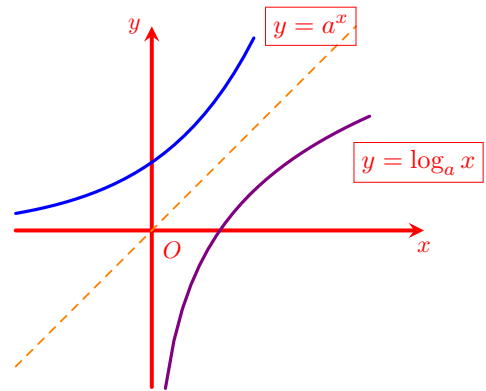
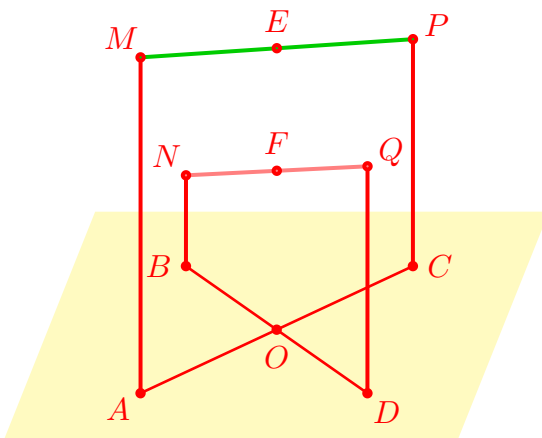
THẦY NGÔ ĐỨC TÀI
Zalo: 0889 971 004

TOÁN

11

LÝ THUYẾT VÀ PHÂN DẠNG BÀI TẬP
(Dùng chung 3 bộ sách)

TẬP 2



NĂM HỌC 2025 - 2026

Chương VI. Hàm số mũ và hàm số lôgarit 2

| | |
|--|----|
| §1. Lũy thừa | 2 |
| §2. Phép tính lôgarit | 17 |
| §3. Hàm số mũ. Hàm số lôgarit | 37 |
| §4. Phương trình, bất phương trình mũ và lôgarit | 56 |
| §5. ÔN TẬP CHƯƠNG 6 | 75 |

Chương VII. Quan hệ vuông góc trong không gian 87

| | |
|---|-----|
| §1. Hai đường thẳng vuông góc | 87 |
| §2. Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng | 100 |
| §3. Phép chiếu vuông góc. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng | 113 |
| §4. Hai mặt phẳng vuông góc | 127 |
| §5. Khoảng cách trong không gian | 156 |
| §6. Thể tích | 183 |
| §7. ÔN TẬP CHƯƠNG 7 | 211 |

Chương VIII. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT 224

| | |
|--|-----|
| §1. Biến cố hợp, biến cố giao, biến cố độc lập | 224 |
| §2. Công thức cộng và công thức nhân xác suất | 233 |
| §3. ÔN TẬP CHƯƠNG 8 | 249 |

Chương IX. ĐẠO HÀM 269

| | |
|---|-----|
| §1. Định nghĩa và ý nghĩa của đạo hàm | 269 |
| §2. Các quy tắc tính đạo hàm. Đạo hàm cấp hai | 282 |
| §3. ÔN TẬP CHƯƠNG 8 | 308 |

Trong chương này, chúng ta tìm hiểu những nội dung sau: lũy thừa; lôgarit và các phép tính lôgarit; hàm số mũ, hàm số lôgarit, phương trình và bất phương trình mũ và lôgarit

§1 LŨY THỪA

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Lũy thừa với số mũ nguyên

Ta đã biết $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ thừa số } a}$ ($n \in \mathbb{N}, n > 0, a \in \mathbb{R}$) và $a^0 = 1, \forall a \neq 1$. Lũy thừa với số mũ nguyên được định nghĩa như sau:



Với số nguyên dương n , số thực $a \neq 0$, **lũy thừa** của a với số mũ $-n$ xác định bởi

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$



🔔 LƯU Ý.

- 1) $a^0 = 1, \forall a \in \mathbb{R}, a \neq 0$;
- 2) 0^0 và 0^{-n} (với $n > 0$) không có nghĩa;
- 3) Nếu $m < n$ và $a > 1$ thì $a^m < a^n$;
- 4) Nếu $m < n$ và $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$.

2) Căn bậc n



Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$ và b là số thực bất kì. Số a được gọi là căn bậc n của b nếu $a^n = b$. Khi đó:

- Nếu n chẵn thì:

- $b < 0$: không tồn tại căn bậc n của b .
- $b = 0$: có duy nhất một căn bậc n của b là 0.
- $b > 0$: có hai căn bậc n đối nhau là $\sqrt[n]{b}$ và $-\sqrt[n]{b}$.

- Nếu n lẻ thì có duy nhất một căn bậc n của b là $\sqrt[n]{b}$.

**LƯU Ý.**

- ◇ Nếu n chẵn thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ có nghĩa khi $b \geq 0$.
- ◇ Nếu n lẻ thì căn thức $\sqrt[n]{b}$ luôn có nghĩa với mọi số thực b .

Tính chất. Từ định nghĩa ta có các tính chất sau đây (với điều kiện các căn thức đều có nghĩa).

- 1) $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.
- 2) $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$.
- 3) $\sqrt[n]{a} = \begin{cases} a & \text{khi } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{khi } n \text{ chẵn} \end{cases}$.
- 4) $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$.
- 5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

4) Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n > 0$. Lũy thừa của a với số mũ r , kí hiệu a^r xác định bởi

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

5) Lũy thừa với số mũ thực

Tính chất. Lũy thừa với số mũ thực có tính chất tương tự như lũy thừa với số mũ tự nhiên. Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực bất kì. Khi đó:

- 1) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;
- 2) $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$;
- 3) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$;
- 4) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;
- 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP**Dạng 1** Tính giá trị biểu thức chứa lũy thừa

Áp dụng các tính chất lũy thừa với số mũ nguyên, hữu tỉ và thực đã nêu ở trên để tính toán các giá trị của biểu thức chứa lũy thừa.

Ví dụ 1

Tính giá trị của biểu thức:

a) $P = \sqrt[5]{-4} \cdot \sqrt[5]{8}$.

b) $S = 27^{\frac{2}{3}}$.

c) $A = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}}$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $P = \sqrt[5]{-4 \cdot 8} = \sqrt[5]{-32} = -2$.

b) Ta có $S = 27^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{27^2} = 3^2 = 9$.

c) $A = \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{1}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{3}{4}} = 27^{\frac{1}{3}} + 16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[3]{3^3} + \sqrt[4]{2^{12}} = 3 + 2^3 = 11$.

Ví dụ 2



Tính giá trị của các biểu thức:

a) $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4}$;

b) $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}}$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4} = |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$ vì $1-\sqrt{2} < 0$.

b) Ta có $\sqrt[4]{2\sqrt[3]{2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^3 \cdot 2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^4}} = \sqrt[4]{(\sqrt[3]{2})^4} = \sqrt[3]{2}$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1



Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0$;

b) $\left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$;

c) $(2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5})$.

[Hand icon]

.....

.....

.....

.....

Bài 2



Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $2^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$;

c) $4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}$;

e) $\left(\frac{1}{49}\right)^{-1,5} - \left(\frac{1}{125}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

b) $27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5}$;

d) $\left(\frac{1}{256}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{4}{3}}$;

f) $(4^{3+\sqrt{3}} - 4^{\sqrt{3}-1}) \cdot 2^{-2\sqrt{3}}$.

[Hand icon]

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

2

Rút gọn, biến đổi biểu thức chứa lũy thừa

- ◆ Biến đổi về **cùng cơ số** hoặc **cùng số mũ**;
- ◆ Chú ý công thức $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$.

Ví dụ 3



Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $\sqrt{2^3}$.

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{27}}$.

c) $(\sqrt[5]{a})^4$ ($a > 0$).

Hướng dẫn giải.

a) $\sqrt{2^3} = 2^{\frac{3}{2}}$.

b) $\sqrt[5]{\frac{1}{27}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{5}}$.

c) $(\sqrt[5]{a})^4 = a^{\frac{4}{5}}$.

Ví dụ 4



Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{2}{5}}$ với $a > 0$;

b) $\sqrt{a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a}}}$ với $a > 0$;

c) $x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$;

d) $\frac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{b}}$ với $b > 0$;

e) $\sqrt[3]{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}}$ với $x > 0$;

f) $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}} : a^{\frac{11}{6}}$ với $a > 0$.

Hướng dẫn giải.

① $a^{\frac{3}{5}} \cdot a^{\frac{1}{2}} : a^{-\frac{2}{5}} = a^{\frac{3}{5} + \frac{1}{2} + \frac{2}{5}} = a^{\frac{3}{2}}$.

② $\sqrt{a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \sqrt{a}}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}}} = \sqrt{a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$.

③ $x^{\frac{1}{3}} x^{\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{3} + \frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$.

④ $b^{\frac{1}{3} - \frac{1}{5}} = b^{\frac{2}{15}}$.

⑤ Với $x > 0$ ta có $\sqrt[3]{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}} = \sqrt[3]{x^5 \cdot x^{\frac{1}{4}}} = \sqrt[3]{x^{5 + \frac{1}{4}}} = \left(x^{\frac{21}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{21}{4} \cdot \frac{1}{3}} = x^{\frac{7}{4}}$.

⑥ $\sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}} : a^{\frac{11}{6}} = \sqrt{a \sqrt{a \cdot a^{\frac{1}{2}}}} : a^{\frac{11}{6}} = \sqrt{a \sqrt{a^{\frac{3}{2}}}} : a^{\frac{11}{6}} = \sqrt{a \cdot a^{\frac{3}{4}}} : a^{\frac{11}{6}} = a^{\frac{7}{8}} : a^{\frac{11}{6}} = a^{-\frac{23}{24}}$.

Ví dụ 5



Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}}$ với $a > 0$.

Hướng dẫn giải.

$$A = \frac{a^{\sqrt{5}-1} \cdot a^{3-\sqrt{5}}}{(a^{\sqrt{3}+1})^{\sqrt{3}-1}} = \frac{a^{\sqrt{5}-1+3-\sqrt{5}}}{a^{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}} = \frac{a^2}{a^{3-1}} = \frac{a^2}{a^2} = 1.$$

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 3



Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa với số mũ hữu tỉ:

a) $\sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[3]{7}}$;

b) $\alpha^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\alpha}$ với $\alpha > 0$;

c) $x^{\frac{1}{6}} \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$;

d) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ với $a > 0$;

e) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^{-3}} : \sqrt[6]{a^{-1}}$ với $a > 0$;

f) $\sqrt[3]{x^2 \sqrt{x^5 \sqrt[5]{x^3}}} : x^3$ với $x > 0$;

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{5}+1} \cdot a^{7-\sqrt{5}}}{(a^{3-\sqrt{2}})^{3+\sqrt{2}}}$ ($a > 0$).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Rút gọn biểu thức: $(x^{\sqrt{2}}y)^{\sqrt{2}} (9y^{-\sqrt{2}})$ (với $x, y > 0$).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6



Rút gọn biểu thức $N = \frac{x^{\frac{4}{3}}y + xy^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}}$ ($x > 0, y > 0$).

.....

.....

.....

Bài 7



Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^8} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^5 \cdot \sqrt[4]{a^{-3}}}$ ($a > 0$).

.....

.....

.....

Bài 8



Tìm α biết $\frac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{a^3} = a^\alpha, 0 < a \neq 1$.

.....

.....

.....

Dạng

3

So sánh các lũy thừa

- ① Nếu $m < n$ và $a > 1$ thì $a^m < a^n$;
- ② Nếu $m < n$ và $0 < a < 1$ thì $a^m > a^n$.

Tương tự cho trường hợp $m > n$.

⇒ Ví dụ 6



Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

a) $10^{\sqrt{2}}$ và 10;

b) $3^{\sqrt{8}}$ và 3^3 ;

c) $8^{\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}}$.

Hướng dẫn giải.

a) Ta có $1 = \sqrt{1}$. Do $1 < 2$ nên $\sqrt{1} < \sqrt{2}$. Vì cơ số 10 lớn hơn 1 nên $10^{\sqrt{2}} > 10^{\sqrt{1}}$ hay $10^{\sqrt{2}} > 10$.

b) Ta có $3 = \sqrt{9}$. Do $8 < 9$ nên $\sqrt{8} < \sqrt{9}$. Vì cơ số 3 lớn hơn 1 nên $3^{\sqrt{8}} < 3^{\sqrt{9}}$.

c) Ta có: $8^{\sqrt{3}} = (2^3)^{\sqrt{3}} = 2^{3\sqrt{3}}$ và $4^{2\sqrt{3}} = (2^2)^{2\sqrt{3}} = 2^{4\sqrt{3}}$.

Vì $3\sqrt{3} < 4\sqrt{3}$ và $2 > 1$ nên $2^{3\sqrt{3}} < 2^{4\sqrt{3}}$. Vậy $8^{\sqrt{3}} < 4^{2\sqrt{3}}$.

⇒ Ví dụ 7



Tìm số nhỏ hơn 1 trong các số sau:

- Ⓐ $(0,7)^{2017}$. Ⓑ $(0,7)^{-2017}$. Ⓒ $(1,7)^{2017}$. Ⓓ $(2,7)^{2017}$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Ta có: $0,7 < 1 \Leftrightarrow (0,7)^{2017} < 1^{2017} \Leftrightarrow (0,7)^{2017} < 1$.

⇒ Ví dụ 8



Cho $(\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n$. Khi đó

- Ⓐ $m > n$. Ⓑ $m \neq n$. Ⓒ $m < n$. Ⓓ $m = n$.

✍ *Hướng dẫn giải.* Do $\begin{cases} 0 < \sqrt{2}-1 < 1 \\ (\sqrt{2}-1)^m < (\sqrt{2}-1)^n \end{cases} \Rightarrow m > n$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9



Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số:

- a) $2^{2\sqrt{3}}$ và $2^{3\sqrt{2}}$; b) $16^{\sqrt{3}}$ và $4^{3\sqrt{2}}$.

✍

.....

.....

.....

Bài 10



Thực hiện các yêu cầu sau:

- ① Cho $A = 199^{2023}$, $B = \sqrt{199}^{2024}$. So sánh A, B.
 ② Sắp theo $A = 3^{4999}$, $B = 11^{4001}$ và $C = 1331^{1000}$ theo thứ tự từ lớn đến bé.

✍

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Ví dụ 9



Trong mẫu của một sinh vật đã chết T năm, tỉ số R của carbon phóng xạ còn lại và carbon không phóng xạ còn lại có thể được ước tính bằng công thức $R = A \cdot 2,7^{\frac{T}{8033}}$. Trong đó A là tỉ số của carbon phóng xạ và carbon không phóng xạ trong cơ thể sống

(Nguồn: R.I. Charles et al. Algebra 2, Pearson).

Tính đại lượng R theo A trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 2000 năm; sau 4000 năm; sau 8000 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Hướng dẫn giải.

Đại lượng R trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 2000 năm là $R = A \cdot 2,7^{-\frac{2000}{8033}} \approx 0,78 \cdot A$.

Đại lượng R trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 4000 năm là $R = A \cdot 2,7^{-\frac{4000}{8033}} \approx 0,61 \cdot A$.

Đại lượng R trong mẫu sinh vật đã chết đó sau 8000 năm là $R = A \cdot 2,7^{-\frac{8000}{8033}} \approx 0,37 \cdot A$.

BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 11



Tại một vùng biển, giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.

- ① Tại độ sâu 1 m, cường độ ánh sáng gấp bao nhiêu lần I_0 ?
- ② Cường độ ánh sáng tại độ sâu 2 m gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu 10 m? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.



BÀI TẬP

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- ❖ **Câu 1.** Giá trị của biểu thức $P = \frac{2^3 \cdot 2^{-1} + 5^{-3} \cdot 5^4}{10^{-3} : 10^{-2} - (0,1)^0}$ là
 (A) -9. (B) -10. (C) 10. (D) 9.
- ❖ **Câu 2.** Cho các số thực $a, b, m, n (a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
 (A) $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt{a^m}$. (B) $(a^m)^n = a^{m+n}$. (C) $(a+b)^m = a^m + b^m$. (D) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- ❖ **Câu 3.** Cho các số thực $a, b, n, m (a, b > 0)$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?
 (A) $(a^m)^n = a^{m+n}$. (B) $(a+b)^m = a^m + b^m$. (C) $\frac{a^m}{a^n} = \sqrt{a^m}$. (D) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.
- ❖ **Câu 4.** Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$ với $b > 0$.
 (A) $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. (B) $Q = b^{\frac{4}{3}}$. (C) $Q = b^{\frac{5}{9}}$. (D) $Q = b^2$.
- ❖ **Câu 5.** Biểu thức $P = \sqrt[5]{-4} \cdot \sqrt[5]{8}$ có giá trị bằng
 (A) $4\sqrt{2}$. (B) -2. (C) 2. (D) $-4\sqrt{2}$.
- ❖ **Câu 6.** Cho $x, y > 0$ và $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tìm đẳng thức **sai** dưới đây.
 (A) $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$. (B) $x^\alpha + y^\alpha = (x+y)^\alpha$. (C) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$. (D) $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.
- ❖ **Câu 7.** Với a là số thực dương tùy ý, $\sqrt[3]{a^2}$ bằng
 (A) $a^{\frac{1}{6}}$. (B) a^6 . (C) $a^{\frac{2}{3}}$. (D) $a^{\frac{3}{2}}$.
- ❖ **Câu 8.** Với a là số thực dương tùy ý, $a^4 \cdot a^{\frac{1}{2}}$ bằng
 (A) a^8 . (B) a^2 . (C) $a^{\frac{7}{2}}$. (D) $a^{\frac{9}{2}}$.
- ❖ **Câu 9.** Thu gọn biểu thức $A = \sqrt[4]{a^3} \cdot a$ với a là số thực dương ta được
 (A) $A = a^{\frac{5}{2}}$. (B) $A = a^{\frac{7}{4}}$. (C) $A = a^{\frac{3}{4}}$. (D) $A = a^{\frac{1}{4}}$.
- ❖ **Câu 10.** Với m là số thực dương tùy ý, biểu thức $m^{\frac{10}{3}} : m^{\frac{1}{3}}$ bằng
 (A) m^3 . (B) m^{10} . (C) $m^{\frac{11}{3}}$. (D) $m^{\frac{10}{3}}$.
- ❖ **Câu 11.** Cho $a > 0; a \neq 1; \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
 (A) $\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$. (B) $a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. (C) $a^\alpha + a^\beta = a^{\alpha+\beta}$. (D) $(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$.
- ❖ **Câu 12.** Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó m là một số nguyên và n là số nguyên dương. Lũy thừa của a với số mũ r , ký hiệu a^r , được xác định bởi
 (A) $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. (B) $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n}$. (C) $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m+n]{a}$. (D) $r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt{a^m}$.
- ❖ **Câu 13.** Tính giá trị của biểu thức $P = (7+4\sqrt{3})^{2017} \cdot (4\sqrt{3}-7)^{2016}$.
 (A) $P = (7+4\sqrt{3})^{2016}$. (B) $P = 1$. (C) $P = 7-4\sqrt{3}$. (D) $P = 7+4\sqrt{3}$.
- ❖ **Câu 14.** Biểu thức $P = \sqrt[5]{-4} \cdot \sqrt[5]{8}$ có giá trị bằng
 (A) $4\sqrt{2}$. (B) -2. (C) 2. (D) $-4\sqrt{2}$.

- ❖ **Câu 15.** Giá trị $\sqrt[3]{2021} \cdot \sqrt[5]{2021}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là
 (A) $2021^{\frac{2}{5}}$. (B) $2021^{\frac{1}{15}}$. (C) $2021^{\frac{8}{15}}$. (D) $2021^{\frac{1}{10}}$.
- ❖ **Câu 16.** Cho a là số thực dương khác 1. Giá trị của biểu thức $P = a^{\frac{2}{3}} \sqrt{a}$ bằng
 (A) $a^{\frac{2}{3}}$. (B) $a^{\frac{5}{6}}$. (C) a^3 . (D) $a^{\frac{7}{6}}$.
- ❖ **Câu 17.** Cho biểu thức $P = \sqrt[6]{x \cdot \sqrt[4]{x^5 \cdot \sqrt{x^3}}}$, với $x > 0$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?
 (A) $P = x^{\frac{15}{16}}$. (B) $P = x^{\frac{7}{16}}$. (C) $P = x^{\frac{5}{42}}$. (D) $P = x^{\frac{47}{48}}$.
- ❖ **Câu 18.** Biết biểu thức $P = \sqrt[6]{x^3 \sqrt[3]{x^2 \sqrt{x}}}$, ($x > 0$) được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ là x^α . Khi đó, giá trị của α bằng
 (A) $\frac{37}{15}$. (B) $\frac{23}{36}$. (C) $\frac{23}{30}$. (D) $\frac{53}{30}$.
- ❖ **Câu 19.** Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[9]{x}$ với $x > 0$.
 (A) $P = \sqrt{x}$. (B) $P = x^{\frac{1}{8}}$. (C) $P = x^{\frac{2}{9}}$. (D) $P = x^2$.
- ❖ **Câu 20.** Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[3]{x}$ với $x > 0$.
 (A) $P = x^{\frac{1}{8}}$. (B) $P = \sqrt{x}$. (C) $P = x^{\frac{2}{9}}$. (D) $P = x^2$.
- ❖ **Câu 21.** Biết rằng $10^\alpha = 2$; $10^\beta = 5$. Tính $10^{\alpha+\beta} + 10^{\alpha-\beta}$.
 (A) 10. (B) $\frac{52}{5}$. (C) $\frac{2}{5}$. (D) $\frac{5}{52}$.
- ❖ **Câu 22.** Cho hai số thực dương a, b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt{a}}{\sqrt[9]{a} + \sqrt[6]{b}}$ ta thu được $A = a^m \cdot b^n$. Tích của $m \cdot n$ là
 (A) $\frac{1}{8}$. (B) $\frac{1}{21}$. (C) $\frac{1}{9}$. (D) $\frac{1}{18}$.
- ❖ **Câu 23.** Cho $x > 0$. Viết biểu thức $\sqrt[5]{x^7} : \sqrt{x}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỷ.
 (A) $x^{\frac{9}{7}}$. (B) $x^{\frac{9}{5}}$. (C) $x^{\frac{7}{10}}$. (D) $x^{\frac{9}{10}}$.
- ❖ **Câu 24.** Rút gọn biểu thức $A = \frac{\sqrt[3]{a^5} \cdot a^{\frac{7}{3}}}{a^4 \cdot \sqrt[7]{a^{-2}}}$ với $a > 0$ ta được kết quả $A = a^{\frac{m}{n}}$, trong đó $m, n \in \mathbb{N}^*$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Khẳng định nào sau đây đúng?
 (A) $3m^2 - 2n = 2$. (B) $m^2 + n^2 = 43$. (C) $2m^2 + n = 15$. (D) $m^2 + n^2 = 25$.
- ❖ **Câu 25.** Cho a, b là các số thực dương và thỏa mãn $a = 5^x, b = 3^x$. Giá trị của biểu thức $P = 25^x + 15^x + 27^x$ bằng
 (A) $P = a^3 + ab + b^2$. (B) $P = a^2 b^2 + ab + b^2$. (C) $P = a^2 + ab + b^3$. (D) $P = ab^3 + ab + b^2$.
- ❖ **Câu 26.** Khẳng định nào đúng?
 (A) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\sqrt{3}} > \left(\frac{5}{8}\right)^{\sqrt{3}}$. (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\pi} < \left(\frac{1}{3}\right)^{-\pi}$.
 (C) $3^{-\sqrt{2}} < \left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{2}}$. (D) $\left(\frac{1}{4}\right)^{-50} < (\sqrt{2})^{100}$.
- ❖ **Câu 27.** Nếu $a^{\frac{1}{3}} > a^{\frac{1}{6}}$ và $b^{\sqrt{3}} > b^{\sqrt{5}}$ thì

- (A) $a < 1; 0 < b < 1$. (B) $a > 1; b < 1$. (C) $0 < a < 1; b < 1$. (D) $a > 1; 0 < b < 1$.

❖ **Câu 28.** Biểu thức $K = \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

- (A) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5}{18}}$. (B) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}$. (C) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{8}}$. (D) $\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{6}}$.

❖ **Câu 29.** Cho a là một số thực dương. Giá trị của biểu thức $P = (\sqrt{2a})^{\frac{4}{a}}$ bằng

- (A) 4. (B) 2. (C) 8. (D) 1.

❖ **Câu 30.** Viết biểu thức $P = \frac{a^2 a^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^7}}$, ($a > 0$) dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

- (A) $P = a^5$. (B) $P = a^{\frac{14}{3}}$. (C) $P = a^4$. (D) $P = a^{\frac{13}{3}}$.

❖ **Câu 31.** Cho hai số thực dương x và y . Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{x^{\sqrt{5}}}{y^{\sqrt{5}-2}}\right)^{\sqrt{5}+2} \cdot \left(\frac{x^{-2\sqrt{5}-2}}{y^{-3}}\right)$ được kết quả có dạng $x^a y^b$ với a, b là 2 số nguyên. Khẳng định nào đúng?

- (A) $5b + a = 13$. (B) $5a + b = 12$. (C) $a + b = 3$. (D) $2a + b = 1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

❖ **Câu 1.** Cho biểu thức $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = A$ và $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = B$.

- a) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = (9 \cdot 27)^{\frac{2}{5}}$. b) $9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} = 3^k$ thì $k = 3$.
c) $144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}} = 2^k$ thì $k = 3$. d) $A - B = 1$.

❖ **Câu 2.** Cho các biểu thức $A = \frac{\sqrt{a} + \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}} - \frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{\sqrt[4]{a} - \sqrt[4]{b}}$, $B = -\sqrt[4]{b}$, với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

- a) Sau khi rút gọn, thì A chỉ chứa biến b . b) Biểu thức A luôn dương.
c) $A = B + \sqrt{a}$. d) $A - \sqrt{b} < B$.

❖ **Câu 3.** Cho biểu thức $A = (\sqrt{2} - 1)^{2x} + (3 + 2\sqrt{2})^x$.

- a) Cho $(\sqrt{2} + 1)^x = 3$ thì $A = \frac{82}{9}$. b) Cho $(\sqrt{2} + 1)^x = 1$ thì $A = 2$.
c) Cho $(\sqrt{2} + 1)^x = 2$ thì $A = \frac{17}{9}$. d) Cho $(\sqrt{2} + 1)^x = m^2$ thì $A = \frac{1 + m^6}{m^4}$.

❖ **Câu 4.** Với mọi số thực $a > 0, b > 0$. Giả sử các biểu thức xuất hiện trong các công thức của mỗi mệnh đề đều có nghĩa. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) $\sqrt[3]{a^2} = a^{\frac{2}{3}}$. b) $a^{\frac{1}{3}} \sqrt{a} = a^{\frac{1}{6}}$. c) $\frac{\sqrt[3]{b^7}}{b^3} = b^{\frac{7}{9}}$. d) $\frac{(\sqrt{ab^2})^4}{\sqrt[3]{a^6 b^{12}}} = ab^2$.

❖ **Câu 5.** Cho biểu thức $P(x) = \sqrt[3]{x^4 \sqrt{x^3} \sqrt{x}}$, với $x > 0$.

- a) $P(x) = x^{\frac{5}{8}}$.
b) $P(\sqrt{3} - 1) < P(\sqrt{2} - 1)$.
c) $P(\sqrt[5]{256}) \neq 2$.
d) $P(3) \cdot P(3) \cdot P(9) \cdot P(27) \cdot P(81) \cdot P(243) = 59049$.

PHẦN III. Tự luận

❖ **Câu 1.** Tính

$$\text{a) } \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}; \quad \text{b) } 4^{\frac{3}{2}}; \quad \text{c) } \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{-2}{3}}; \quad \text{d) } \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75}.$$

❖ **Câu 2.** Tính

$$\text{a) } \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{1}{3}} + 9^{-\frac{3}{2}}; \quad \text{b) } 27^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} - 25^{0,5}; \quad \text{c) } 9^{\frac{2}{5}} \cdot 27^{\frac{2}{5}} - 144^{\frac{3}{4}} : 9^{\frac{3}{4}}.$$

❖ **Câu 3.** Tính giá trị các biểu thức sau:

$$\text{a) } \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot 3^2 \cdot 12^0. \quad \text{b) } \left(\frac{1}{12}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}. \quad \text{c) } (2^{-2} \cdot 5^2)^{-2} : (5 \cdot 5^{-5}).$$

❖ **Câu 4.** Thực hiện phép tính

$$\text{a) } 27^{\frac{2}{3}} + 81^{-0,75} - 25^{0,5}; \quad \text{b) } 4^{2-3\sqrt{7}} \cdot 8^{2\sqrt{7}}.$$

❖ **Câu 5.** Tính giá trị của biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{2}\right)^{-12} \cdot 8^{-3} + (0,2)^{-4} \cdot 25^{-2} + 243^{-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-6}.$$

❖ **Câu 6.** Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{(4+2\sqrt{3})^{2016} \cdot (1-\sqrt{3})^{2014}}{(1+\sqrt{3})^{2018}}$.

❖ **Câu 7.** Viết các biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0, b > 0$):

$$\text{a) } 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3}; \quad \text{b) } \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}; \quad \text{c) } \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}}{(\sqrt[5]{a})^3 \cdot a^{\frac{2}{5}}}; \quad \text{d) } b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}.$$

❖ **Câu 8.** Rút gọn các biểu thức sau ($a > 0, b > 0$):

$$\begin{aligned} \text{a) } a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{2}} a^{\frac{7}{6}}; & \quad \text{b) } a^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{4}} : a^{\frac{1}{6}}; & \quad \text{c) } \left(\frac{3}{2} a^{-\frac{3}{2}} b^{-\frac{1}{2}}\right) \left(-\frac{1}{3} a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{3}{2}}\right); \\ \text{d) } \frac{a^{\frac{4}{3}} (a^{-\frac{1}{3}} + a^{\frac{2}{3}})}{a^{\frac{1}{4}} (a^{\frac{3}{4}} + a^{-\frac{1}{4}})}; & \quad \text{e) } \frac{a^{\frac{1}{5}} (\sqrt[5]{a^4} - \sqrt[5]{a^{-1}})}{a^{\frac{2}{3}} (\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{a^{-2}})}. \end{aligned}$$

❖ **Câu 9.** Cho a, b là những số thực dương. Viết các biểu thức sau dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ

$$\text{a) } a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{a}; \quad \text{b) } b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{b}; \quad \text{c) } a^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{a}; \quad \text{d) } \sqrt[3]{b} : b^{\frac{1}{6}}.$$

❖ **Câu 10.** Rút gọn các biểu thức sau

$$\text{a) } A = \frac{x^5 y^{-2}}{x^3 y} (x, y \neq 0); \quad \text{b) } B = \frac{x^2 y^{-3}}{(x^{-1} y^4)^{-3}} (x, y \neq 0).$$

⇨ **Câu 11.** Cho x, y là các số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau

$$a) A = \frac{x^{\frac{1}{3}}\sqrt{y} + y^{\frac{1}{3}}\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x} + \sqrt[6]{y}};$$

$$b) B = \left(\frac{x^{\sqrt{3}}}{y^{\sqrt{3}-1}} \right)^{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{x^{-\sqrt{3}-1}}{y^{-2}}.$$

⇨ **Câu 12.** Rút gọn biểu thức $P = \frac{a^{\sqrt{7}+1}a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

⇨ **Câu 13.** Rút gọn mỗi biểu thức sau

$$a) \frac{a^{\frac{7}{3}} - a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{4}{3}} - a^{\frac{1}{3}}} - \frac{a^{\frac{5}{3}} - a^{-\frac{1}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} \quad (a > 0, a \neq 1);$$

$$b) B = \frac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} \quad (a > 0, b > 0);$$

$$c) P = \frac{(\sqrt[4]{a^3b^2})^4}{\sqrt[3]{\sqrt{a^{12}b^6}}} \quad (a > 0, b > 0);$$

$$d) Q = \frac{a^{\frac{1}{3}}b + b^{\frac{1}{3}}a}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}} \quad (a > 0, b > 0).$$

⇨ **Câu 14.** Cho hai số thực dương a và b . Rút gọn biểu thức $A = \frac{a^{\frac{1}{3}}\sqrt{b} + b^{\frac{1}{3}}\sqrt{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

⇨ **Câu 15.** Cho hai số thực dương a và b và $a \neq b$. Rút gọn biểu thức

$$A = \left[\frac{a-b}{a^{\frac{3}{4}} + a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{4}}} - \frac{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}{a^{\frac{1}{4}} + b^{\frac{1}{4}}} \right] : (a^{\frac{1}{4}} - b^{\frac{1}{4}}).$$

⇨ **Câu 16.** Chứng minh rằng $\sqrt{4+2\sqrt{3}} - \sqrt{4-2\sqrt{3}} = 2$.

⇨ **Câu 17.** Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy so sánh các số sau

$$a) \sqrt{42} \text{ và } \sqrt[3]{51};$$

$$b) (0,2)^{\sqrt{16}} \text{ và } (0,2)^{\sqrt[3]{60}};$$

⇨ **Câu 18.** Xác định các giá trị của số thực a thỏa mãn

$$a) a^{\frac{1}{2}} > a^{\sqrt{3}};$$

$$b) a^{-\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}};$$

$$c) (\sqrt{2})^a > (\sqrt{3})^a.$$

⇨ **Câu 19.** Biết rằng $10^\alpha = 2$; $10^\beta = 5$. Tính giá trị của biểu thức $10^{\alpha+\beta}$; $10^{\alpha-\beta}$; $10^{2\alpha}$; $10^{-2\alpha}$; 1000^β ; $0,01^{2\alpha}$.

⇨ **Câu 20.** Biết rằng $4^\alpha = \frac{1}{5}$. Tính giá trị các biểu thức sau:

$$a) 16^a + 16^{-a}.$$

$$b) (2^\alpha + 2^{-\alpha})^2.$$

⇨ **Câu 21.** Biết rằng $5^{2x} = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}}$.

⇨ **Câu 22.** Cho $4^x + 4^{-x} = 7$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{5 + 2^x + 2^{-x}}{8 - 4 \cdot 2^x - 4 \cdot 2^{-x}}$.

⇨ **Câu 23.** Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Khi đó biểu thức $A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}} = \frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính $P = ab$.

⇨ **Câu 24.** Biết rằng $4^x = 25^y = 10$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

❖ **Câu 25.** Cho x, y là hai số nguyên thỏa mãn $3^x \cdot 6^y = \frac{2^{15} \cdot 6^{40}}{9^{50} \cdot 12^{25}}$. Tính xy ?

❖ **Câu 26.** Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^N.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

❖ **Câu 27.** Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

❖ **Câu 28.** Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi một hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm)

(Nguồn: *R.I.Charles et al., Algebra 2, Pearson*).

Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

❖ **Câu 29.** Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1 m^2 và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7} \text{ m}$. Đồng xu 5 000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$. Cần chong bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5 000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

❖ **Câu 30.** Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

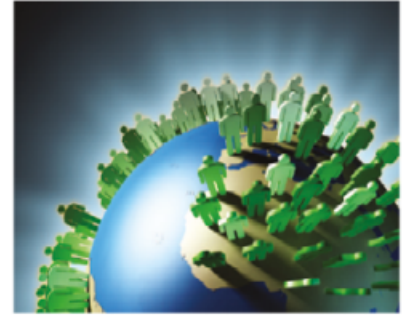
❖ **Câu 31.** Tính đến đầu năm 2011, dân số toàn thành phố A đạt xấp xỉ 905.300 người. Mỗi năm dân số thành phố tăng thêm 1,37%. Để thành phố A thực hiện tốt chủ trương 100% trẻ em đúng độ tuổi đều vào lớp 1 thì đến năm học 2024 – 2025 số phòng học cần chuẩn bị cho học sinh lớp 1 (mỗi phòng 35 học sinh) khoảng bao nhiêu phòng; biết rằng sự di cư đến, đi khỏi thành phố và số trẻ tử vong trước 6 tuổi đều không đáng kể, ngoài ra trong năm sinh của lứa học sinh lớp 1 đó toàn thành phố có 2400 người chết?

❖ **Câu 32.** Giả sử một lọ nuôi cấy có 100 con vi khuẩn lúc ban đầu và số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi sau mỗi 2 giờ. Khi đó số vi khuẩn N sau t (giờ) là $N = 100 \cdot 2^{\frac{t}{2}}$ (con). Hỏi sau $3\frac{1}{2}$ giờ sẽ có bao nhiêu con vi khuẩn?

❖ **Câu 33.** Chu kì dao động (tính bằng giây) của một con lắc có chiều dài L (tính bằng mét) được cho bởi $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}$. Nếu một con lắc có chiều dài 19,6 m, hãy tính chu kì T của con lắc này (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

❖ **Câu 34.** Nếu một người gửi số tiền A với lãi suất kép r mỗi kì thì sau n kì, số tiền T_n (cả vốn lẫn lãi) được cho bởi $T_n = A(1+r)^n$. Một người gửi 150 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi suất kép với lãi suất cố định 8,4%/năm. Nếu kì hạn là 1 năm thì sau 3 năm, người đó thu được bao nhiêu triệu đồng (cả vốn và lãi, làm tròn đến hàng phần trăm)?

❖ **Câu 35.** Dân số sau n năm được ước tính theo công thức $P_n = P_0e^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm, $e \approx 2,71828$. Biết rằng năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là 1,05%. Hỏi dân số thế giới vào năm 2035 khoảng bao nhiêu tỉ người (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?



❖ **Câu 36.** Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

❖ **Câu 37.** Cho x, y là các số thực dương và số thực a thỏa mãn

$$a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2y^4}}.$$

Chứng minh rằng $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.

§2 PHÉP TÍNH LÔGARIT

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Khái niệm lôgarit



Cho hai số thực dương a và b với $a \neq 1$. Số thực α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là **lôgarit** cơ số a của b , kí hiệu là $\log_a b$. Ta có

$$\alpha = \log_a b \iff a^\alpha = b.$$



🔔 **LƯU Ý.** Từ định nghĩa lôgarit ta có:

a) Biểu thức $\log_a b$ có nghĩa khi $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$.

b) Ta có

$$\diamond \log_a 1 = 0.$$

$$\diamond \log_a a^b = b.$$

$$\diamond \log_a a = 1.$$

$$\diamond a^{\log_a b} = b.$$

2) Tính chất của lôgarit



Cho các số thực dương a, M, N với $a \neq 1$, ta có:

$$\diamond \log_a (MN) = \log_a M + \log_a N.$$

$$\diamond \log_a \frac{1}{N} = -\log_a N.$$

$$\diamond \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$$

$$\diamond \log_a M^\alpha = \alpha \log_a M.$$

$$\diamond \log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M \text{ với } n \in \mathbb{N}^*.$$



🔔 **LƯU Ý.**

① Lôgarit cơ số 10 được gọi là **lôgarit thập phân**. Ta viết $\log N$ hoặc $\lg N$ thay cho $\log_{10} N$.

② Lôgarit cơ số e với $e = 2,718, \dots$ còn được gọi là **lôgarit tự nhiên**. Ta viết $\ln N$ thay cho $\log_e N$.

3) Công thức đổi cơ số



Cho các số dương a, b, N với $a \neq 1, b \neq 1$, ta có

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Đặc biệt, ta có

$$\diamond \log_a N = \frac{1}{\log_N a}.$$

$$\diamond \log_{a^\alpha} N = \frac{1}{\alpha} \log_a N (\alpha \neq 0).$$

$$\diamond \log_a N \cdot \log_N b = \log_a b.$$

4) Số e và lôgarit tự nhiên

Bài toán lãi kép liên tục và số e



$$e = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \approx 2,7183.$$



◇ **Công thức lãi kép theo N kì hạn**

Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau $tm = N$ kì hạn) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^N.$$

◇ **Công thức lãi kép liên tục**

Với số vốn ban đầu là P , theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$A = Pe^{tr}.$$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Tính giá trị biểu thức chứa lôgarit

Cho các số thực dương a, M, N với $a \neq 1$, ta có:

◇ $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N.$

◇ $\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$

◇ $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N.$

◇ $\log_a N = \frac{1}{\log_N a}.$

◇ $\log_a M^\alpha = \alpha \log_a M.$

◇ $\log_a \frac{1}{N} = -\log_a N.$

◇ $\log_{a^\alpha} N = \frac{1}{\alpha} \log_a N (\alpha \neq 0).$

◇ $\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M$ với $n \in \mathbb{N}^*.$

◇ $\log_a N \cdot \log_N b = \log_a b.$

◇ **Ví dụ 1**

Tính

a) $\log_2 \frac{1}{4};$

b) $9^{\log_3 5};$

c) $\log_3 \sqrt[3]{3};$

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8;$

e) $\log_4 8;$

f) $\log_2 \frac{1}{8};$

g) $\log_{\sqrt{3}} 9;$

h) $\log_9 27;$

i) $\log_{\frac{1}{4}} 8;$

j) $\log_3 9^2.$

↳ *Lời giải.*

a) $\log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2.$

b) $9^{\log_3 5} = (3^2)^{\log_3 5} = 3^{2 \log_3 5} = (3^{\log_3 5})^2 = 5^2 = 25.$

c) $\log_3 \sqrt[3]{3} = \log_3 (3)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log_3 3 = \frac{1}{3}$.

d) $\log_{\frac{1}{2}} 8 = \log_{2^{-1}} (2)^3 = -3 \log_2 2 = -3$.

e) $\log_4 8 = \frac{\log_2 8}{\log_2 4} = \frac{\log_2 2^3}{\log_2 2^2} = \frac{3}{2}$.

f) $\log_2 \frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$.

g) $\log_{\sqrt{3}} 9 = \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 = 4$.

h) $\log_9 27 = \log_{3^2} 3^3 = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$.

i) $\log_{\frac{1}{4}} 8 = \log_{2^{-2}} 2^3 = \frac{3}{-2} \log_2 2 = -\frac{3}{2} \cdot 1 = -\frac{3}{2}$.

j) $\log_3 9^2 = 2 \log_3 9 = 2 \log_3 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot \log_3 3 = 4$.

❖ Ví dụ 2

Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12$;

b) $\log_3 (9^2 \cdot 3^2)$;

c) $\log_5 \sqrt[3]{25}$;

d) $\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4}$;

e) $\log_2 28 - \log_2 7$;

f) $\log \sqrt{1000}$.

👉 Lời giải.

a) $\log_2 \frac{2}{3} + \log_2 12 = \log_2 \left(\frac{2}{3} \cdot 12 \right) = \log_2 2^3 = 3 \log_2 2 = 3 \cdot 1 = 3$.

b) $\log_3 (9^2 \cdot 3^2) = \log_3 9^2 + \log_3 3^2 = 2 \log_3 3^2 + 2 \log_3 3 = 2 \cdot 2 \log_3 3 + 2 = 4 + 2 = 6$.

c) $\log_5 \sqrt[3]{25} = \log_5 25^{\frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \log_5 5 = \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$.

d) $\log_5 4 + \log_5 \frac{1}{4} = \log_5 4 + \log_5 4^{-1} = \log_5 4 + (-1) \log_5 4 = 0$;

e) $\log_2 28 - \log_2 7 = \log_2 \frac{28}{7} = \log_2 4 = \log_2 2^2 = 2 \log_2 2 = 2 \cdot 1 = 2$;

f) $\log \sqrt{1000} = \log 10^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log 10 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}$.

❖ Ví dụ 3

Tính trị của biểu thức $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 256$.

👉 Lời giải. $M = \log_2 2 + \log_2 4 + \log_2 8 + \dots + \log_2 256$

$$= \log_2 2 + \log_2 2^2 + \log_2 2^3 + \dots + \log_2 2^8 = 1 + 2 + 3 + \dots + 8 = \frac{8 \cdot (8+1)}{2} = 36$$

❖ Ví dụ 4

Với $a > 0$ và $a \neq 1$, tính giá trị của biểu thức:

a) $a^{8 \log_a 7}, (0 < a \neq 1)$;

b) $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7}$.

👉 Lời giải.

a) Ta có: $a^{8\log_a 2^7} = a^{4\log_a 7} = a^{\log_a 7^4} = 7^4$. b) $\log_{\frac{1}{a}} \sqrt[3]{a^7} = \log_{a^{-1}} a^{\frac{7}{3}} = \frac{\frac{7}{3}}{-1} \log_a a = -\frac{7}{3}$.

❖ Ví dụ 5

Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a^2}{4} \right)$.

✍️ Lời giải. $I = \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} \right)^2 = 2 \log_{\frac{a}{2}} \left(\frac{a}{2} \right) = 2$ (vì $a \neq 2$).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Tính

- a) $\log_2 8$; b) $\log_3 \frac{1}{9}$; c) $\log_3 81$; d) $\log_{10} \frac{1}{100}$; e) $\log_5 \sqrt[3]{5}$;
 f) $4^{\log_2 7}$; g) $\log_4 \sqrt[5]{16}$; h) $36^{\log_6 8}$; i) $\log_9 3$; j) $5^{\log_{125} 64}$.

✍️

.....

.....

.....

.....

Bài 2



Tính

- a) $\log_4 2 + \log_4 32$; b) $\log_2 80 - \log_2 5$; c) $\log_2 3 \cdot \log_3 \frac{1}{4}$;
 d) $\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 8$; e) $\log_6 9 + \log_6 4$; f) $\log_5 100 - \log_5 20$;
 g) $\ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2)$; h) $\log 400 - \log 4$; i) $\log_5 15 - 2 \log_5 \sqrt{3}$.

✍️

.....

.....

.....

.....

Bài 3



Tính

a) $\log_4 8 + \log_4 12 + \log_4 \frac{32}{3}$;

b) $P = 2\log_3 5 - \log_3 50 + \frac{1}{2}\log_3 36$.

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Tính giá trị của biểu thức $A = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \dots \log_{63} 64$.

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $\log_a b = 2$. Tính $\log_{\sqrt{a}} (\sqrt[3]{b} \cdot a)$.

(A) $-\frac{10}{9}$.

(B) $\frac{2}{3}$.

(C) $\frac{2}{15}$.

(D) $-\frac{2}{9}$.

.....

.....

.....

.....

Bài 6



Với $a > 0$ và $a \neq 1$, tính giá trị của biểu thức:

a) $\log_a \frac{1}{a^2}$;

b) $\log_a (a^5 \sqrt{a^3 \sqrt{a \sqrt{a}}})$.

Bài 7



Với a, b là các số thực dương tùy ý và a khác 1, đặt $P = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

(A) $P = 9\log_a b$.

(B) $P = 27\log_a b$.

(C) $P = 15\log_a b$.

(D) $P = 6\log_a b$.

.....

.....

.....

Dạng 2 Biến đổi, biểu diễn biểu thức chứa lôgarit

Áp dụng các công thức biến đổi như dạng 1 để biến đổi và biểu diễn biểu thức chứa lôgarit.

VD 6

Cho $\log_a b = 2$ và $\log_a c = 3$. Tính $P = \log_a (b^2 c^3)$.

Lời giải. Ta có $P = \log_a (b^2 c^3) = 2\log_a b + 3\log_a c = 2.2 + 3.3 = 13$.

VD 7

Cho $\log_c a = 2$ và $\log_c b = 4$. Tính $P = \log_a b^4$.

Lời giải. Ta có $\frac{\log_c a}{\log_c b} = \log_a b = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow 4\log_a b = \log_a b^4 = 8$.

VD 8

Cho $\log_a x = 2, \log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.

Lời giải. Từ giả thiết ta suy ra $0 < x \neq 1$.

$$\text{Ta có } P = \frac{1}{\log_x \frac{a}{b^2}} = \frac{1}{\log_x a - 2\log_x b}.$$

$$\text{Mặt khác } \log_x a = \frac{1}{\log_a x} = \frac{1}{2}, \log_x b = \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Thế vào } P \text{ ta được } P = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3}} = -6.$$

Vậy $P = -6$.

VD 9

Đặt $\log_2 3 = a, \log_2 5 = b$. Tính $\log_9 10$ theo a và b .

Lời giải. $\log_9 10 = \frac{\log_2 10}{\log_2 9} = \frac{\log_2 (2 \cdot 5)}{\log_2 3^2} = \frac{\log_2 2 + \log_2 5}{2\log_2 3} = \frac{1 + b}{2a}.$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8

Biết $\log_2 x = a$, tính theo a giá trị của biểu thức $P = \log_2 4x^2$.

Lời giải.

Bài 9

Biết $\log_2 5 = a$, tính theo a giá trị của biểu thức $P = \log_4 500$.



.....

.....

.....

Bài 10

Đặt $a = \log_{12} 6$, $b = \log_{12} 7$. Tính $\log_2 7$ theo a và b .



.....

.....

.....

Bài 11

Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_3 5$. Tính $\log_{24} 600$ theo a, b



.....

.....

.....

.....

Bài 12

Cho $\log_2 7 = a$, $\log_3 7 = b$, tính $\log_6 7$ theo a và b .



.....

.....

.....

Bài 13

Cho $a = \log_3 15$, $b = \log_3 10$. Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b .



.....

.....

.....

.....

.....

Bài 14

Cho $\log_2 6 = a$; $\log_2 7 = b$. Tính $\log_3 7$ theo a và b .



.....

.....

.....

.....

Bài 15



Cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Tính giá trị của $P = \log_a(x^2 y^3)$.

.....

Bài 16



Cho $\log_a x = 3$, $\log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.

.....

.....

Bài 17



Cho $\log_a b = 5$, $\log_a c = -3$. Tính giá trị biểu thức $\log_a \left(\frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^2} \right)$.

.....

.....

.....

Bài 18



Biết $\log_6 a = 2$ ($0 < a \neq 1$). Tính $I = \log_a 6$.

.....

Bài 19



Biết $\log_{12} 27 = a$. Tính $\log_6 16$ theo a .

.....

.....

.....

.....

Bài 20



Biết rằng $\log_6 \sqrt{a} = 2$. Tính $\log_6 a$.

.....

.....

Bài 21



Cho a, b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = 2$, tính giá trị của $P = \log_a^2 b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

.....

.....

.....

.....

Bài 22

Đặt $\log_3 2 = a$, $\log_3 7 = b$. Tính $\log_{12} 21$ theo a và b .



.....

.....

.....

.....

.....

Bài 23

Đặt $\log_2 3 = a$; $\log_2 5 = b$. Tính $P = \log_3 240$ theo a và b .



.....

.....

.....

.....

.....

Bài 24

Đặt $a = \log_2 3$; $b = \log_3 5$. Tính $\log_{20} 12$ theo a , b .



.....

.....

.....

.....

.....

Bài 25

Với $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$, tính $\log_6 35$ theo a và b .



.....

.....

.....

.....

.....

Bài 26

Biết $a = \log_{30} 3$ và $b = \log_{30} 5$, tính $\log_{30} 1350$.



.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

3

Vận dụng vào các bài toán thực tiễn và bài toán lãi kép

◆ **Công thức lãi kép theo N kì hạn**

Nếu đem gửi ngân hàng một số vốn ban đầu là P theo thể thức lãi kép với lãi suất hằng năm không đổi là r và chia mỗi năm thành m kì tính lãi thì sau t năm (tức là sau $tm = N$ kì hạn) số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) là

$$A_m = P \left(1 + \frac{r}{m}\right)^N.$$

◆ **Công thức lãi kép liên tục**

Với số vốn ban đầu là P , theo thể thức lãi kép liên tục, lãi suất hằng năm không đổi là r thì sau t năm, số tiền thu được cả vốn lẫn lãi sẽ là

$$A = Pe^{tr}.$$

◆ **Ví dụ 10**

Vào đầu mỗi tháng, ông An đều gửi vào ngân hàng số tiền cố định 30 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% /tháng. Tính tổng số tiền ông An có được sau tháng thứ hai. (đơn vị triệu đồng, làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

🔗 *Lời giải.* Số tiền ông An có được

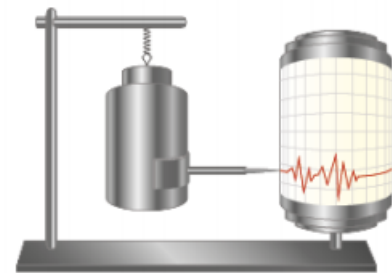
◆ Sau tháng thứ nhất là $T_1 = 30 + 30 \cdot \frac{0,6}{100} = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) = 30,18$ (triệu đồng).

◆ Sau tháng thứ hai là

$$\begin{aligned} T_2 &= 30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) + \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)\right] \frac{0,6}{100} \\ &= \left[30 + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)\right] \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) = 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right) + 30 \left(1 + \frac{0,6}{100}\right)^2 \approx 60,5 \text{ (triệu đồng)} \end{aligned}$$

◆ **Ví dụ 11**

Độ lớn M của một trận động đất theo thang Richter được tính theo công thức $M = \log \frac{A}{A_0}$, trong đó A là biên độ lớn nhất ghi được bởi máy đo địa chấn, A_0 là biên độ tiêu chuẩn được sử dụng để hiệu chỉnh độ lệch gây ra bởi khoảng cách của máy đo địa chấn so với tâm chấn.



Hình 6.3. Máy đo địa chấn ngang

a) Tính độ lớn của trận động đất có biên độ $A = 10^{5,1}$ và $A = 65000A_0$.

b) Một trận động đất tại địa điểm N có biên độ lớn nhất gấp ba lần biên độ lớn nhất của trận động đất tại địa điểm P . So sánh độ lớn của hai trận động đất.

🔗 *Lời giải.*

a) Tại $A = 10^{5,1}A_0$ ta có $M = \log \frac{10^{5,1}A_0}{A_0} = \log 10^{5,1} = 5,1 \log 10 = 5,1$ (Richter).

Tại $A = 65000A_0$ ta có $M = \log \frac{65000A_0}{A_0} = \log 65000 \approx 4,81$ (Richter).

b) Với $A_N = 3A_P$ ta có $M_N = \log \frac{A_N}{A_0}$ và $M_P = \log \frac{A_P}{A_0}$.

Xét $\log \frac{A_N}{A_0} - \log \frac{A_P}{A_0} = \log \left(\frac{A_N}{A_0} : \frac{A_P}{A_0} \right) = \log \frac{A_N}{A_P} = \log 3 \approx 0,48$.

Vậy trận động đất tại địa điểm N lớn hơn trận động đất tại địa điểm P khoảng 0,48 (Richter).

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 27



Trong hóa học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$, trong đó $[\text{H}^+]$ là nồng độ H^+ (ion hydro) tính bằng mol/L. Các dung dịch có pH bé hơn 7 thì có tính acid, có pH lớn hơn 7 thì có tính kiềm, có pH bằng 7 thì trung tính.

a) Tính độ pH của dung dịch có nồng độ H^+ là 0,0001 mol/L. Dung dịch này có tính acid, hay kiềm hay trung tính?

b) Dung dịch A có nồng độ H^+ gấp đôi nồng độ H^+ của dung dịch B.

Độ pH của dung dịch nào lớn hơn và lớn hơn bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 28



Biết thời gian cần thiết (tính theo năm) để tăng gấp đôi số tiền đầu tư theo thể thức lãi kép liên tục với lãi suất không đổi r mỗi năm được cho bởi công thức sau:

$$t = \frac{\ln 2}{r}.$$

Tính thời gian cần thiết để tăng gấp đôi một khoản đầu tư khi lãi suất là 6% mỗi năm (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

.....

.....

.....

.....

Bài 29



Bác An gửi tiết kiệm ngân hàng 100 triệu đồng kì hạn 12 tháng, với lãi suất không đổi là 6% một năm. Khi đó sau n năm gửi thì tổng số tiền bác An thu được (cả vốn lẫn lãi) cho bởi công thức sau:

$$A = 100 \cdot (1 + 0,06)^n (\text{triệu đồng}).$$

Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm, tổng số tiền bác An thu được là không dưới 150 triệu đồng?

.....

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\ln(a + b) = \ln a + \ln b$. (B) $\log(ab) = \log a + \log b$.
 (C) $\log(a + b) = \log a + \log b$. (D) $\ln(ab) = \ln a \ln b$.

❖ **Câu 2.** Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Tìm khẳng định **sai**.

- (A) $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$. (B) $\log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}$. (C) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$. (D) $\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$.

❖ **Câu 3.** Giá trị của biểu thức $A = 4^{\log_2 7}$ bằng

- (A) 14. (B) 28. (C) 2. (D) 49.

❖ **Câu 4.** Biết $\log_6 a = 2$. Tính $I = \log_a 6$.

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) 64. (C) $\frac{1}{4}$. (D) 32.

❖ **Câu 5.** Tính giá trị của biểu thức $I = a \cdot \log_2 \sqrt{8}$.

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{3a}{2}$. (C) $\frac{2a}{3}$. (D) $\frac{2}{3}$.

❖ **Câu 6.** Giá trị biểu thức $N = \log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$ với $0 < a \neq 1$ bằng

- (A) $-\frac{3}{4}$. (B) $\frac{4}{3}$. (C) $\frac{3}{2}$. (D) $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 7.** Với a, b là hai số dương tùy ý, $\log(a^3 b^2)$ có giá trị bằng

- (A) $3 \log a + \frac{1}{2} \log b$. (B) $2 \log a + 3 \log b$. (C) $3 \log a + 2 \log b$. (D) $3 \left(\log a + \frac{1}{2} \log b \right)$.

❖ **Câu 8.** Cho $a > 0, a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[2024]{a^{2025}}$ bằng

- (A) 2024. (B) $\frac{2025}{2024}$. (C) $\frac{2024}{2025}$. (D) 2025.

❖ **Câu 9.** Cho a, b là hai số thực dương khác 1. Đặt $\log_a b = 2$. Tính $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

- (A) $\frac{13}{4}$. (B) -4. (C) $\frac{1}{4}$. (D) -2.

- ❖ **Câu 10.** Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $(a^3)^{\log_{\sqrt{a}} 2}$ bằng
 (A) 64. (B) $2\sqrt{2}$. (C) 12. (D) $2\sqrt{3}$.
- ❖ **Câu 11.** Cho $\log_a b = 2; \log_a c = 3$. Biểu thức $Q = \log_a (b^3 c)$ bằng
 (A) $Q = 4$. (B) $Q = 9$. (C) $Q = 10$. (D) $Q = 12$.
- ❖ **Câu 12.** Cho a, b là các số thực dương, $a \neq 1$ và $\log_a (a^2 b) = \frac{1}{2}$. Giá trị $\log_{a^2} b$ bằng
 (A) $-\frac{3}{4}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) -3 . (D) $\frac{3}{4}$.
- ❖ **Câu 13.** Cho $P = \sqrt[10]{3^5 \sqrt[5]{27} \sqrt[3]{243}}$. Tính $\log_3 P$.
 (A) $\frac{45}{28}$. (B) $\frac{21}{100}$. (C) $\frac{45}{56}$. (D) $\frac{13}{100}$.
- ❖ **Câu 14.** Biết $\log_2 x = a$. Tính theo a giá trị của biểu thức $P = \log_2 (4x^2)$.
 (A) $2 + a$. (B) $4 + 2a$. (C) $4 + a$. (D) $2 + 2a$.
- ❖ **Câu 15.** Cho $\log_2 7 = a, \log_3 7 = b$. Tính tổng $\log_6 7$ theo a và b .
 (A) $\frac{1}{a+b}$. (B) $a^2 + b^2$. (C) $a + b$. (D) $\frac{ab}{a+b}$.
- ❖ **Câu 16.** Với mọi số thực a dương, $\log_4 a^4$ bằng
 (A) 4. (B) $4\log_4 a$. (C) $\frac{1}{4}\log_4 a$. (D) $\frac{1}{4}$.
- ❖ **Câu 17.** Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$, khẳng định nào sau đây **đúng**?
 (A) $a^3 b = 64$. (B) $a^3 b = 36$. (C) $a^3 + b = 64$. (D) $a^3 + b = 36$.
- ❖ **Câu 18.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng
 (A) $1 - \log a$. (B) $2 + \log a$. (C) $2 - \log a$. (D) $1 + \log a$.
- ❖ **Câu 19 (Mã 101 2018).** Với a là số thực dương tùy ý, $\ln(5a) - \ln(3a)$ bằng
 (A) $\ln \frac{5}{3}$. (B) $\frac{\ln 5}{\ln 3}$. (C) $\frac{\ln(5a)}{\ln(3a)}$. (D) $\ln(2a)$.
- ❖ **Câu 20 (Mã 123 2017).** Cho $\log_a x = 3, \log_b x = 4$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} x$.
 (A) $P = 12$. (B) $P = \frac{12}{7}$. (C) $P = \frac{7}{12}$. (D) $P = \frac{1}{12}$.
- ❖ **Câu 21.** Xét tất cả các số dương a và b thỏa mãn $\log_3 a + \log_3 b = \log_9(ab)$. Tính giá trị của ab .
 (A) $ab = 1$. (B) $ab = 2$. (C) $ab = \frac{1}{2}$. (D) $ab = 0$.
- ❖ **Câu 22.** Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?
 (A) $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$. (B) $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$.
 (C) $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$. (D) $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$.
- ❖ **Câu 23 (Mã 102 - 2020 Lần 1).** Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1, \log_{a^2} b$ bằng
 (A) $\frac{1}{2} + \log_a b$. (B) $\frac{1}{2}\log_a b$. (C) $2 + \log_a b$. (D) $2\log_a b$.

❖ **Câu 24 (Đề Tham Khảo 2019).** Đặt $\log_3 2 = a$ khi đó $\log_{16} 27$ bằng

- (A) $\frac{3a}{4}$. (B) $\frac{3}{4a}$. (C) $\frac{4}{3a}$. (D) $\frac{4a}{3}$.

❖ **Câu 25 (MĐ 103 2020-2021 - ĐỢT 2).** Với $a > 0$, đặt $\log_3(3a) = b$, khi đó $\log_3(9a^3)$ bằng

- (A) $3b$. (B) $3b - 1$. (C) $3b + 2$. (D) $3b + 5$.

❖ **Câu 26.** Với mọi a, b, x là các số thực dương thỏa mãn $\log_3 x = 2\log_3 a + 3\log_3 b$, mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $x = 2a + 3b$. (B) $x = 3a + 2b$. (C) $x = a^2 b^3$. (D) $x = a^2 + b^3$.

❖ **Câu 27.** Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^2 b^5 = 64$. Giá trị của $P = 2\log_2 a + 5\log_2 b$ là

- (A) $P = 7$. (B) $P = 64$. (C) $P = 6$. (D) $P = 2$.

❖ **Câu 28 (MĐ 102 2020-2021 - ĐỢT 1).** Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[3]{a}$ bằng

- (A) -3 . (B) $\frac{1}{3}$. (C) $-\frac{1}{3}$. (D) 3 .

❖ **Câu 29 (Mã 101 - 2020 Lần 1).** Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$, $\log_{a^5} b$ bằng

- (A) $5\log_a b$. (B) $\frac{1}{5} + \log_a b$. (C) $5 + \log_a b$. (D) $\frac{1}{5} \log_a b$.

❖ **Câu 30.** Với $a > 0$, đặt $\log_2(2a) = b$, khi đó $\log_2(4a^3)$ bằng

- (A) $3b + 5$. (B) $3b$. (C) $3b + 2$. (D) $3b - 1$.

❖ **Câu 31.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 a^3$ bằng

- (A) $\frac{1}{3} \log_5 a$. (B) $\frac{1}{3} + \log_5 a$. (C) $3 + \log_5 a$. (D) $3 \log_5 a$.

❖ **Câu 32.** Với mọi số thực a dương, $\log_3 \left(\frac{a^2}{9} \right)$ bằng

- (A) $2(\log_3 a - 1)$. (B) $\frac{1}{2} \log_3 a$. (C) $\log_3 a - 1$. (D) $\log_3 a + 2$.

❖ **Câu 33.** Cho $\log_{30} 3 = a$, $\log_{30} 5 = b$. Tính $\log_{30} 1350$ theo a, b ; $\log_{30} 1350$ bằng

- (A) $2a + b$. (B) $2a + b + 1$. (C) $2a + b - 1$. (D) $2a + b - 2$.

❖ **Câu 34.** Cho $a > 0$ và $a \neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[2021]{a^{2022}}$ bằng

- (A) 2021 . (B) $\frac{2022}{2021}$. (C) $\frac{2021}{2022}$. (D) 2022 .

❖ **Câu 35.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_{\frac{1}{2}}(8a)$ bằng

- (A) $\frac{1}{2} + \log_2 a$. (B) $-3 + \log_2 a$. (C) $-(\log_2 a)^3$. (D) $-3 - \log_2 a$.

❖ **Câu 36.** Cho $a = \log_7 5$, $b = \log_3 5$. Biểu thức $M = \log_{21} 5$ bằng

- (A) $\frac{ab}{a+b}$. (B) ab . (C) $\frac{1}{ab}$. (D) $\frac{a+b}{ab}$.

❖ **Câu 37.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_7(7a)$ bằng

- (A) $1 - \log_7 a$. (B) $1 + \log_7 a$. (C) $1 + a$. (D) a .

❖ **Câu 38.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_5 \frac{25}{a}$ bằng

(A) $2 - \log_5 a$. (B) $\frac{5}{\log_5 a}$. (C) $5 - \log_5 a$. (D) $\frac{2}{\log_5 a}$.

❖ **Câu 39.** Cho a, b là các số thực dương và $a \neq 1$ thỏa mãn $\log_a (a^2 b) = \frac{1}{2}$. Tính $\log_a^2 b$.

(A) $-\frac{3}{4}$. (B) $-\frac{3}{2}$. (C) -3 . (D) $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 40.** Với mọi a, b thỏa mãn $\log_3 (3a^2) + \log_3 b^3 = 4$, khẳng định nào dưới đây đúng?

(A) $a^2 b^3 = 81$. (B) $a^3 + b^3 + 1 = 81$. (C) $a^2 b^3 = 27$. (D) $a^2 + b^3 = 27$.

❖ **Câu 41.** Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1$, $a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

(A) $P = -5 + 3\sqrt{3}$. (B) $P = -1 + \sqrt{3}$. (C) $P = -1 - \sqrt{3}$. (D) $P = -5 - 3\sqrt{3}$.

❖ **Câu 42.** Cho a, b là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_2 a = 2$ và $\log_4 b = 3$. Giá trị biểu thức $P = \log_a (a^2 b)$ bằng

(A) $P = 10$. (B) $P = 5$. (C) $P = 2$. (D) $P = 1$.

❖ **Câu 43.** Cho a, b là các số thực dương ($a, b \neq 1$) và $\log_a b = 16$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a \sqrt{b}$.

(A) 256. (B) 4. (C) 23. (D) 8.

❖ **Câu 44.** Với a, b là hai số dương tùy ý, $\log (a^2 b^3)$ bằng

(A) $\frac{1}{2} \log a + \frac{1}{3} \log b$. (B) $2 \log a + \log b$. (C) $2 \log a + 3 \log b$. (D) $\log a + 3 \log b$.

❖ **Câu 45.** Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I = \log_{\frac{a}{5}} \left(\frac{a^3}{125} \right)$.

(A) $I = -\frac{1}{3}$. (B) $I = -3$. (C) $I = \frac{1}{3}$. (D) $I = 3$.

❖ **Câu 46.** Cho a, b là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b = \sqrt{3}$. Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}} \right)$ là

(A) $-\sqrt{3}$. (B) $-2\sqrt{3}$. (C) $\sqrt{3}$. (D) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

❖ **Câu 47.** Với a, b là các số thực dương bất kỳ, $\log_2 \frac{a}{b^4}$ bằng

(A) $\log_2 a - \log_2 (4b)$. (B) $\frac{1}{4} \log_2 \frac{a}{b}$. (C) $2 \log_2 \frac{a}{b}$. (D) $\log_2 a - 4 \log_2 b$.

❖ **Câu 48.** Cho $\log_2 3 = a$. Giá trị của biểu thức $P = \log_6 12$ tính theo a bằng

(A) $\frac{a}{2+a}$. (B) $\frac{1+a}{2+a}$. (C) $\frac{a}{1+a}$. (D) $\frac{2+a}{1+a}$.

❖ **Câu 49.** Tính $P = \log_{a^2} (a^{10} b^2) + \log_{\sqrt{a}} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) + \log_{\sqrt[3]{b}} b^{-2}$ với $0 < a \neq 1$ và $0 < b \neq 1$.

(A) $P = 2$. (B) $P = 1$. (C) $P = \sqrt{3}$. (D) $P = \sqrt{3}$.

❖ **Câu 50.** Cho $P = \sqrt[10]{3 \sqrt[5]{27 \sqrt[2]{243}}}$. Tính $\log_3 P$.

(A) $\frac{45}{28}$. (B) $\frac{21}{100}$. (C) $\frac{45}{56}$. (D) $\frac{13}{100}$.

❖ **Câu 51.** Với các số thực dương a, b bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a + \log_2 b.$ (B) $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a + \log_2 b.$
 (C) $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + 3\log_2 a - \log_2 b.$ (D) $\log_2 \left(\frac{2a^3}{b} \right) = 1 + \frac{1}{3}\log_2 a - \log_2 b.$

❖ **Câu 52.** Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a \neq 1, a \neq \sqrt{b}$ và $\log_a b = \sqrt{3}$. Tính $P = \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}} \sqrt{\frac{b}{a}}$.

- (A) $P = -5 + 3\sqrt{3}.$ (B) $P = -1 + \sqrt{3}.$ (C) $P = -1 - \sqrt{3}.$ (D) $P = -5 - 3\sqrt{3}.$

❖ **Câu 53.** Cho a là số thực dương khác 1. Tính $P = \log_a \left(a^4 \cdot a^{\frac{1}{3}} \right).$

- (A) $P = \frac{3}{4}.$ (B) $P = 12.$ (C) $P = 1.$ (D) $P = \frac{13}{3}.$

❖ **Câu 54.** Với t là số thực dương tùy ý, $\log_9(9t)$ bằng

- (A) $1 + \log_9 t.$ (B) $1 + t.$ (C) $t.$ (D) $1 - \log_9 t.$

❖ **Câu 55.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a^3)$ bằng

- (A) $6\log a.$ (B) $2 + 3\log a.$ (C) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\log a.$ (D) $3 + 3\log a.$

❖ **Câu 56.** Với a, b là các số thực dương tùy ý và $a \neq 1$. Ta có $\log_a(a^3b)$ bằng

- (A) $3 \cdot \log_a b.$ (B) $\frac{1}{3} \cdot \log_a b.$ (C) $\frac{1}{3} + \log_a b.$ (D) $3 + \log_a b.$

❖ **Câu 57.** Cho hai số tự nhiên x, y thỏa mãn $x\log_{28} 2 + y\log_{28} 7 = 2$. Giá trị của $x + y$ bằng

- (A) 5. (B) 6. (C) 4. (D) 8.

❖ **Câu 58.** Với a là số thực dương tùy ý, $\log_3 \left(\frac{3}{a} \right)$ bằng

- (A) $1 - \log_3 a.$ (B) $3 - \log_3 a.$ (C) $\frac{1}{\log_3 a}.$ (D) $1 + \log_3 a.$

❖ **Câu 59.** Tính giá trị của biểu thức $P = 2^{\log_2 a} + \log_a(a^b)$ với $a > 0, a \neq 1$.

- (A) $P = 2^a + b.$ (B) $P = a - b.$ (C) $P = 2a + b.$ (D) $P = a + b.$

❖ **Câu 60.** Cho $\log_6 3 = a, \log_6 5 = b$. Biểu diễn $\log_{54} 50$ theo a, b ?

- (A) $\frac{2b - a + 1}{2a + 1}.$ (B) $\frac{2a - b + 1}{2a + 1}.$ (C) $\frac{2b + 1 + a}{2a + 1}.$ (D) $\frac{2a + b + 1}{2a + 1}.$



2 Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho $\log_a b = 4$, với a và b là hai số dương khác 1.

- a) Giá trị của $\log_{a^2} b$ bằng 8. b) Giá trị của $\log_a(a^2b)$ bằng 6.
 c) Giá trị của $\log_b \sqrt[3]{a}$ bằng $\frac{1}{12}$. d) Giá trị của $\log_{a^3b^2}(a^2b^3)$ bằng 4.

❖ **Câu 2.** Tính được giá trị của biểu thức sau (biết $a > 0, a \neq 1$). Vậy

- a) $A = 2^{\log_2 3} - \log_{\sqrt{3}} 3$ có $A > 2$.
 b) $B = \ln 2 \cdot \log_2 4 \cdot \log_4 3 \cdot \log_3 2 - 5^{\log_5 \ln 2}$ có $B = 0$.
 c) $C = \log_a \sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$ có $C > 1$.

d) $D = \log_a \frac{\sqrt{a^3}}{a^4 \sqrt{a}}$ có $D > 1$.

❖ **Câu 3.** Cho các biểu thức sau: $A = \log_{2^{2030}} 4 - \frac{1}{1015} + \ln e^{2035}$, $B = \log_5 3 \cdot \log_2 5 - \frac{\ln 9}{\ln 4}$
 a) A chia hết cho 5. b) $A - B = 2036$. c) $A + 2024B = 2035$. d) $A - 2024B = 2035$.

❖ **Câu 4.** Cho $a, b, c > 0$, $a \neq 1$ và $m, n \in \mathbb{R}$.

a) $\log_a 1 = 1$.

b) $a^{\log_a b} = b$.

c) $\log_a a^m = \frac{1}{m}$.

d) $\log_a b^m c^n = m \log_a b + n \log_a c$.

❖ **Câu 5.** Cho $a, b, c > 1$ và $m, n \in \mathbb{R}$.

a) $\log_a \sqrt{a \sqrt{a}} = \frac{3}{4}$.

b) $\log_a b^2 \cdot \log_{\sqrt{b}} c \cdot \log_{c^2} a^3 = \frac{1}{6}$.

c) Cho $\log 3 = m$, $\log 7 = n$. Khi đó $\log_3 70 = \frac{n+1}{m}$.

d) Cho $\log_5 2 = m$, $\log_5 3 = n$. Khi đó $\log_{250} 30 = (m+n+1)(3+m)$.

❖ **Câu 6.** Cho các biểu thức sau: $P = \frac{\log_a(a^3 b^2) - \log_b\left(\frac{b^3}{a^2}\right)}{\log_a^2 b + 1}$ và $Q = \log_a b^3 + \log_{a^2} b^6$ với a, b

là các số dương và a khác 1.

a) $Q = 6 \log_a b$.

b) $P = 6 \log_b a$.

c) $Q = 3P$.

d) $Q \cdot P = 12$.

❖ **Câu 7.** Biết $a = \log_{27} 5$, $b = \log_8 7$, $c = \log_2 3$.

a) $c > 2$.

b) $a \cdot c = \frac{1}{3} \log_2 5$.

c) $\frac{a \cdot c}{b} = \log_7 5$.

d) $\log_{12} 35 = \frac{3(b+ac)}{c+2}$.

❖ **Câu 8.** Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% mỗi năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ mỗi năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là $A = P \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại 86490000 đồng.

b) Nếu tỉ lệ lạm phát là 7% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại 96490000 đồng.

c) Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau ba năm chỉ còn lại 80 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của ba năm đó là 9,17% (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

d) Nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là 6% một năm thì sau 15 năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa.

3 Tự luận

Bài 1. Tính

a) $\log_2 2^{-13}$;

b) $\ln e^{\sqrt{2}}$;

c) $\log_8 16 - \log_8 2$;

d) $\log_2 6 \cdot \log_6 8$.

Bài 2. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 16$; b) $\log_3 27$; c) $\log 1000$; d) $9^{\log_3 12}$.

Bài 3. Tính:

a) $\log_{12} 12^3$; b) $\log_{0,5} 0,25$; c) $\log_a a^{-3}$ ($a > 0, a \neq 1$).

Bài 4. Tính:

a) $8^{\log_2 5}$; b) $\left(\frac{1}{10}\right)^{\log 81}$; c) $5^{\log_{25} 16}$.

Bài 5. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_6 9 + \log_6 4$; b) $\log_5 2 - \log_5 50$; c) $\log_3 \sqrt{5} - \frac{1}{2} \log_3 15$.

Bài 6. Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $\log_2 9 \cdot \log_3 4$; b) $\log_{25} \frac{1}{\sqrt{5}}$; c) $\log_2 3 \cdot \log_9 \sqrt{5} \cdot \log_5 4$.

Bài 7. Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \log_{\frac{1}{3}} 5 + 2\log_9 25 - \log_{\sqrt{3}} \frac{1}{5}$; b) $B = \log_a M^2 + \log_{a^2} M^4$.

Bài 8. Tính $P = \log_{2^{2018}} 4 - \frac{1}{1009} + \ln e^{2018}$.

Bài 9. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $A = \log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$; b) $B = \log_2 2 \cdot \log_2 4 \cdots \log_2 2^n$.

Bài 10. Viết mỗi biểu thức sau thành lôgarit của một biểu thức (giả thiết các biểu thức đều có nghĩa):

a) $A = \ln \left(\frac{x}{x-1}\right) + \ln \left(\frac{x+1}{x}\right) - \ln(x^2 - 1)$; b) $B = 21 \log_3 \sqrt[3]{x} + \log_3(9x^2) - \log_3 9$.

Bài 11. Cho $\log_a b = 2$. Tính:

a) $\log_a(a^2 b^3)$; b) $\log_a \frac{a\sqrt{a}}{b\sqrt[3]{b}}$; c) $\log_a(2b) + \log_a \left(\frac{b^2}{2}\right)$.

Bài 12. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $a^3 b^2 = 100$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = 3 \log a + 2 \log b.$$

Bài 13. Tìm các giá trị của x để biểu thức sau có nghĩa

a) $\log_3(1 - 2x)$; b) $\log_{x+1} 5$.

🌀 **Bài 14.** Đặt $\log 2 = a$, $\log 3 = b$. Biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

🌀 **Bài 15.** Cho $\log_a b = 5$. Tính giá trị của biểu thức $\log_{\sqrt{a}}(b^4 \sqrt[3]{a})$.

🌀 **Bài 16.** Cho ba số $a + \log_2 3$, $a + \log_4 3$, $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Tìm công bội của cấp số nhân đó.

🌀 **Bài 17.** Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_2 5 = b$. Hãy biểu thị các biểu thức sau theo a và b .

a) $\log_2 45$;

b) $\log_2 \frac{\sqrt{15}}{6}$;

c) $\log_3 20$.

🌀 **Bài 18.** Đặt $\log x = a$, $\log y = b$, $\log z = c$ ($x, y, z > 0$). Hãy biểu thị các biểu thức sau theo a, b, c :

a) $\log(xyz)$

b) $\log \frac{x^3 \sqrt[3]{y}}{100\sqrt{z}}$

c) $\log_z(xy^2)$ ($z \neq 1$)

🌀 **Bài 19.** Đặt $\log_2 3 = a$, $\log_3 15 = b$. Biểu thị $\log_{30} 18$ theo a và b .

🌀 **Bài 20.** Cho $x > 0, y > 0$ thỏa mãn $x^2 + 4y^2 = 6xy$. Chứng minh rằng:

$$2\log(x+2y) = 1 + \log x + \log y.$$

🌀 **Bài 21.** Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là

$$a = 15500(5 - \log p),$$

trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal). Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển.

🌀 **Bài 22.** Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau:

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0},$$

trong đó $I_0 = 10^{-12} W/m^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là ngưỡng nghe). Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} W/m^2$.

b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} W/m^2$.

🌀 **Bài 23.**

a) Nước cất có nồng độ H^+ là $10^{-7} mol/L$. Tính nồng độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính pH của dung dịch đó.

🌀 **Bài 24.** Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$. Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

🌀 **Bài 25.** Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần. Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6 \cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Bài 26. Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương N viết trong hệ thập phân được cho bởi công thức $[\log N] + 1$, ở đó $[\log N]$ là phần nguyên của số thực dương $\log N$. Tìm số các chữ số của 22 023 khi viết trong hệ thập phân.

Bài 27. Khi gửi tiết kiệm P (đồng) theo thể thức trả lãi kép định kì với lãi suất mỗi kì là r (r cho dưới dạng số thập phân) thì số tiền A (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau t kì là $A = P(1+r)^t$ (đồng). Tính thời gian gửi tiết kiệm cần thiết để số tiền ban đầu tăng gấp đôi.

Bài 28. Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau bao lâu người đó nhận được ít nhất 120 triệu đồng?

Bài 29. Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ ${}^14_6\text{C}$ có trong mẫu vật tại thời điểm t (năm) (so với thời điểm ban đầu $t = 0$), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ

$$H = H_0 e^{-\lambda t}$$

(đơn vị Becquerel, kí hiệu Bq), trong đó H_0 là độ phóng xạ ban đầu; $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ, $T = 5730$ (năm). Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là 0,215 Bq. Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là 0,250 Bq. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn đến hàng đơn vị).

Bài 30. Nồng độ cồn trong máu (BAC) là chỉ số dùng để đo lượng cồn trong máu của một người. Chẳng hạn, BAC 0,02% hay 0,2mg/ml, nghĩa là có 0,02 g cồn trong 100 ml máu. Nếu một người với BAC bằng 0,02% có nguy cơ bị tai nạn ô tô cao gấp 1,4 lần so với một người không uống rượu, thì nguy cơ tương đối của tai nạn với BAC 0,02% là 1,4. Nghiên cứu y tế gần đây cho thấy rằng nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn khi đang lái ô tô có thể được mô hình hóa bằng một phương trình có dạng

$$R = e^{kx},$$

trong đó x (%) là nồng độ cồn trong máu và k là một hằng số.

- Nghiên cứu chỉ ra rằng nguy cơ tương đối của một người bị tai nạn với BAC bằng 0,02% là 1,4. Tìm hằng số k trong phương trình.
- Nguy cơ tương đối là bao nhiêu nếu nồng độ cồn trong máu là 0,17%?
- Tìm BAC tương ứng với nguy cơ tương đối là 100.
- Giả sử nếu một người có nguy cơ tương đối từ 5 trở lên sẽ không được phép lái xe, thì một người có nồng độ cồn trong máu từ bao nhiêu trở lên sẽ không được phép lái xe?

§3 HÀM SỐ MŨ. HÀM SỐ LÔGARIT

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

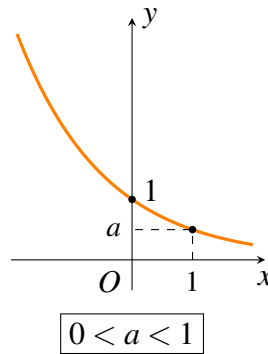
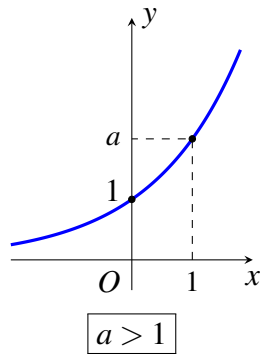
1) Hàm số mũ



Cho số thực $a > 0$ và khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .

Tính chất. Hàm số mũ $y = a^x$, trong đó $0 < a \neq 1$:

- ◇ Có tập xác định là \mathbb{R} và tập giá trị $(0; +\infty)$.
- ◇ Đồng biến trên \mathbb{R} khi $a > 1$ và nghịch biến trên \mathbb{R} khi $0 < a < 1$.
- ◇ Liên tục trên \mathbb{R} .
- ◇ Có đồ thị đi qua các điểm $(0; 1)$, $(1; a)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.



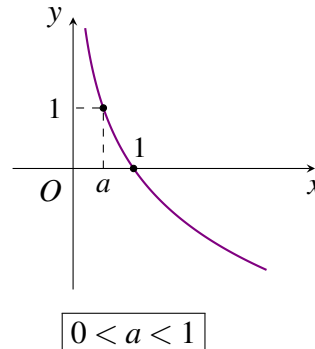
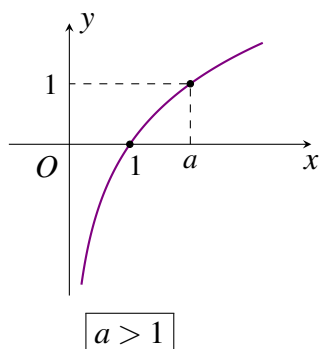
2) Hàm số logarit



Cho số thực $a > 0$ và khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số logarit cơ số a .

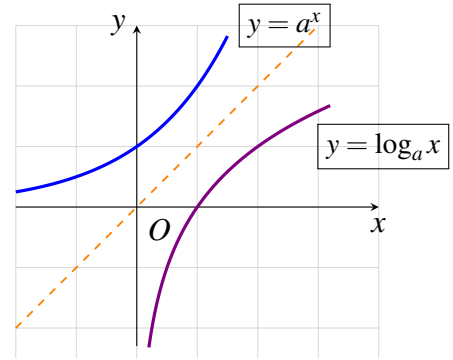
Tính chất. Hàm số logarit $y = \log_a x$, trong đó $0 < a \neq 1$:

- ◇ Có tập xác định là $(0; +\infty)$ và tập giá trị là \mathbb{R} ;
- ◇ Đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$;
- ◇ Liên tục trên $(0; +\infty)$;
- ◇ Có đồ thị đi qua các điểm $(1; 0)$, $(a; 1)$ và luôn nằm bên phải trục tung.



3) Liên hệ đồ thị của hai hàm số

Đồ thị hàm số $y = a^x$ và $y = \log_a x$ đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư (đường thẳng $y = x$) thứ nhất.



II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Xác định hàm số mũ, hàm số lôgarit

- ◇ Cho số thực $a > 0$ và khác 1. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .
- ◇ Cho số thực $a > 0$ và khác 1. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a .

◇ Ví dụ 1



Trong các hàm số sau đây, hàm số nào là hàm số mũ? Chỉ ra cơ số của nó.

- a) $y = 3^{\frac{x}{2}}$. b) $y = x^{-4}$. c) $y = 4^{-x}$.

👉 *Hướng dẫn giải.*

- ① $y = 3^{\frac{x}{2}} = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^x = (\sqrt{3})^x$ là hàm số mũ với cơ số $a = \sqrt{3}$.
- ② $y = x^{-4}$ không phải là hàm số mũ.
- ③ $y = 4^{-x} = (4^{-1})^x = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ là hàm số mũ với cơ số $a = \frac{1}{4}$.

◇ Ví dụ 2



Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lôgarit? Chỉ ra cơ số của nó.

- a) $y = \log_{\sqrt{2}} x$. b) $y = -\log_3 x$. c) $y = x \log_2 3$.

👉 *Hướng dẫn giải.*

- ① $y = \log_{\sqrt{2}} x$ là hàm số lô-ga-rít với cơ số $\sqrt{2}$.
- ② $y = -\log_3 x = \log_{\frac{1}{3}} x$ là hàm số lô-ga-rít với cơ số $\frac{1}{3}$.
- ③ $y = x \log_2 3$ không phải là hàm số lô-ga-rít (mà là hàm số bậc nhất với hệ số góc $\log_2 3$).

BÀI TẬP ỨNG DỤNG

Bài 1



Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số mũ?

① $y = x^2$;

② $y = (\sqrt{3})^x$;

③ $y = \frac{1}{x}$;

④ $y = x^{\sqrt{5}}$.



Bài 2



Trong các hàm số sau, hàm số nào là hàm số lôgarit?

① $y = \log_x 5$;

② $y = \log_x e$;

③ $y = \log_5 x$;

④ $y = x^5$.



Dạng 2 Vẽ đồ thị của hàm số

Ví dụ 3

Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 4^x$.

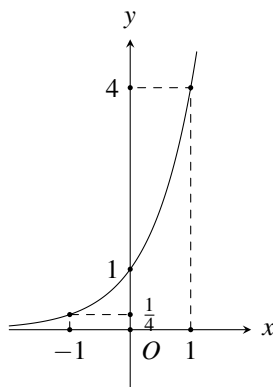
b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

Lời giải.

a) Lập bảng giá trị của hàm số ta được

| | | | | | |
|-----------|---------------|----------------|---|---------------|---|
| x | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $y = 4^x$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |

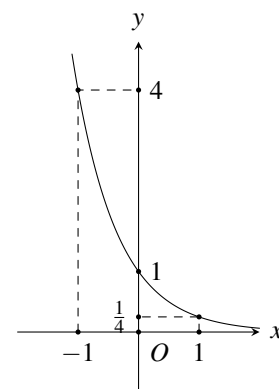
Đồ thị của hàm số $y = 4^x$ như bên dưới



b) Lập bảng giá trị của hàm số ta được

| | | | | | |
|----------------------------------|----|----------------|---|---------------|---------------|
| x | -1 | $-\frac{1}{2}$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ | 4 | 2 | 1 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ |

Đồ thị của hàm số $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ như bên dưới



Ví dụ 4

Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = \log x$.

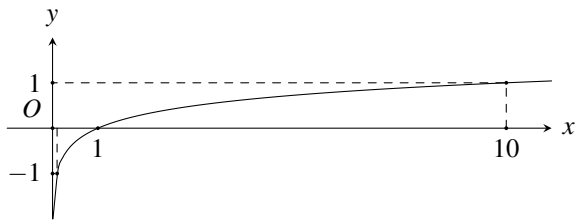
b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Lời giải.

a) Lập bảng giá trị của hàm số ta được

| | | | |
|--------------|----------------|---|----|
| x | $\frac{1}{10}$ | 1 | 10 |
| $y = \log x$ | -1 | 0 | 1 |

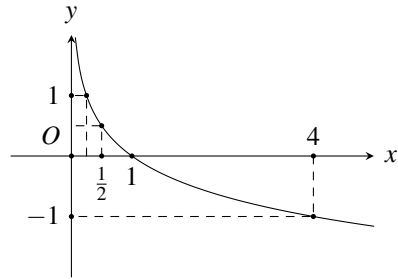
Đồ thị của hàm số $y = \log x$ như bên dưới



b) Lập bảng giá trị của hàm số ta được

| | | | | | |
|----------------------------|---------------|---------------|---|----------------|----|
| x | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 2 | 4 |
| $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ | 1 | $\frac{1}{2}$ | 0 | $-\frac{1}{2}$ | -1 |

Đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ như bên dưới




BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 3

Vẽ đồ thị các hàm số sau:

① $y = 3^x$;

② $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Vẽ đồ thị các hàm số sau:

① $y = \log_3 x$;

② $y = \log_{\frac{1}{3}} x$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

3

So sánh các cặp số

Áp dụng tính chất của hàm số mũ và hàm số lôgarit để so sánh các số với nhau. Cụ thể

◇ Với hàm số $y = a^x$.

✓ Nếu $m > n$ và $0 < a < 1$ thì $a^m < a^n$.

✓ Nếu $m > n$ và $a > 1$ thì $a^m > a^n$.

Tương tự cho trường hợp $m < n$.

◇ Với hàm số $y = \log_a x$.

✓ Nếu $m > n$ và $0 < a < 1$ thì $\log_a m < \log_a n$.

✓ Nếu $m > n$ và $a > 1$ thì $\log_a m > \log_a n$.

Tương tự cho trường hợp $m < n$.

Ví dụ 5

Sử dụng tính chất của hàm số mũ, so sánh các cặp số sau:

a) $1,4^2$ và $1,4^{1,8}$.

b) $0,9^{-1,2}$ và $0,9^{-0,8}$.

c) $\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[5]{4}$.

Lời giải.

① Do $1,4 > 1$ nên hàm số $y = 1,4^x$ đồng biến trên \mathbb{R} . Mà $2 > 1,8$ nên $1,4^2 > 1,4^{1,8}$.

② Do $0,9 < 1$ nên hàm số $y = 0,9^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} . Mà $-1,2 < -0,8$ nên $0,9^{-1,2} > 0,9^{-0,8}$.

③ Ta có $\sqrt[3]{2} = 2^{\frac{1}{3}}$ và $\sqrt[5]{4} = \sqrt[5]{2^2} = 2^{\frac{2}{5}}$. Do $2 > 1$ nên hàm số $y = 2^x$ đồng biến trên \mathbb{R} . Mà $\frac{1}{3} < \frac{2}{5}$ nên $2^{\frac{1}{3}} < 2^{\frac{2}{5}}$, suy ra $\sqrt[3]{2} < \sqrt[5]{4}$.

Ví dụ 6

So sánh các cặp số sau:

a) $\log_3 7$ và $3\log_3 2$.

b) $2\log_{0,4} 5$ và $3\log_{0,4} 3$.

Lời giải.

① Ta có $3\log_3 2 = \log_3 2^3 = \log_3 8$.

Hàm số $y = \log_3 x$ có cơ số $3 > 1$ nên đồng biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $7 < 8$ nên $\log_3 7 < \log_3 8$. Vậy $\log_3 7 < 3\log_3 2$.

② Ta có $2\log_{0,4} 5 = \log_{0,4} 5^2 = \log_{0,4} 25$ và $3\log_{0,4} 3 = \log_{0,4} 3^3 = \log_{0,4} 27$.

Hàm số $y = \log_{0,4} x$ có cơ số $0,4 < 1$ nên nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Mà $25 < 27$ nên $\log_{0,4} 25 > \log_{0,4} 27$. Vậy $2\log_{0,4} 5 > 3\log_{0,4} 3$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 5



Sử dụng tính chất của hàm số mũ, so sánh các cặp số sau:

a) $2,5$ và $2,5^{0,8}$.

b) $0,7^{-2,2}$ và $0,7^{-2,1}$.

c) $\sqrt[4]{3}$ và $\sqrt[3]{9}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6



So sánh các cặp số sau:

a) $\log_2 8$ và $2\log_2 3$.

b) $3\log_{0,9} 2$ và $2\log_{0,9} 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

4

Tìm tập xác định của hàm số

- ◇ Hàm số $y = a^x$ với $a > 0, a \neq 1$ có tập xác định là \mathbb{R} ;
- ◇ Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 0, a \neq 1$, xác định khi $x > 0$.

Ví dụ 7

Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

- a) $y = 7^{x^2+x-2}$; b) $y = 3^{\frac{x+2}{x-1}}$; c) $y = 5^{\sqrt{x-1}}$;
- d) $y = 4^{\ln x}$; e) $y = \log_3(2x+1)$; f) $y = 2 \log_{x+1}(2-x)$;
- g) $y = \log_6(2x-x^2)$.

Lời giải.

- a) Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- b) Điều kiện: $x \neq 1 \Rightarrow \mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.
- c) Điều kiện: $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow \mathcal{D} = [1; +\infty)$.
- d) Điều kiện: $x > 0 \Rightarrow \mathcal{D} = (0; +\infty)$.
- e) Điều kiện: $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2} \Rightarrow \mathcal{D} = \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$.
- f) Điều kiện: $\begin{cases} 0 < x+1 \neq 1 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < x \neq 0 \\ x < 2 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{D} = (-1; 2) \setminus \{0\}$.
- g) Điều kiện: $2x-x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < 2 \Rightarrow \mathcal{D} = (0; 2)$.

BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 7



Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

- a) $y = 15^{\frac{x-5}{x+2}}$; b) $y = 9^{\sqrt{4-2x}}$; c) $y = 7^{\log_3(1-x)}$;
- d) $y = \log_3(4-x^2)$; e) $y = \log_2 \frac{x+3}{2-x}$; f) $y = \frac{3}{\log_2 x - 4}$;
- g) $y = \ln x^2$; h) $y = \log_2(x^3 - 8)^{1000}$;



Dạng

5

Sự biến thiên và một số bài toán liên quan đến đồ thị hàm số mũ và hàm số lôgarit

- ◇ Hàm số $y = a^x$ với $0 < a \neq 1$.
 - ✔ Đồng biến trên \mathbb{R} khi $a > 1$.
 - ✔ Nghịch biến trên \mathbb{R} khi $0 < a < 1$.
- ◇ Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a \neq 1$.
 - ✔ Đồng biến trên $(0; +\infty)$ khi $a > 1$.
 - ✔ Nghịch biến trên $(0; +\infty)$ khi $0 < a < 1$.

⇨ Ví dụ 8

Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào nghịch biến trên tập số thực \mathbb{R} .

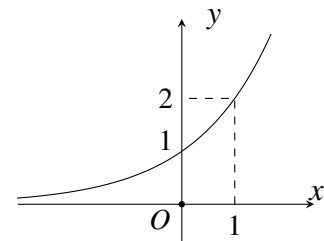
- (A) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.
- (B) $y = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x$.
- (C) $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$.
- (D) $y = \log_{\frac{\pi}{4}}(2x^2 + 1)$.

🔗 Lời giải. Hàm số $y = \left(\frac{2}{\pi}\right)^x$ có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ và cơ số $a = \frac{2}{\pi} < 1$ nên hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .

⇨ Ví dụ 9

Đường cong trong hình sau là đồ thị hàm số nào?

- (A) $y = 2^x$.
- (B) $y = (\sqrt{2})^x$.
- (C) $y = \log_2(2x)$.
- (D) $y = \frac{1}{2}x + 1$.

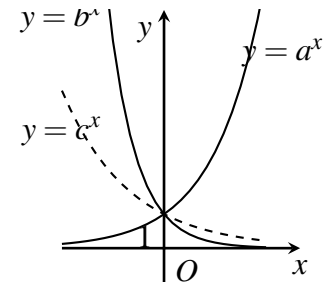


🔗 Lời giải. Đồ thị đi qua điểm có tọa độ (1;2) và đồ thị luôn nằm trên trục hoành nên chỉ có hàm số $y = 2^x$ thỏa mãn.

⇨ Ví dụ 10

Trên hình vẽ, đồ thị của ba hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ (a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c .

- (A) $c > b > a$.
- (B) $b > c > a$.
- (C) $a > c > b$.
- (D) $a > b > c$.



🔗 Lời giải. Từ đồ thị ta thấy các hàm số $y = c^x, y = b^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} , do đó $0 < b, c < 1$. Lại có $x > 0 \Rightarrow c^x > b^x$ và $x < 0 \Rightarrow c^x < b^x$ nên $c > b$. Hàm số $y = a^x$ đồng biến trên \mathbb{R} nên $a > 1$.

Vậy $a > c > b$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8



Hàm số nào trong bốn hàm số dưới đây đồng biến trên các khoảng xác định của nó?

Ⓐ $y = (\ln 2)^x$.

Ⓑ $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$.

Ⓒ $y = \left(\frac{3}{2 + \sin 2018}\right)^x$.

Ⓓ $y = (\sin 2018)^x$.



Bài 9



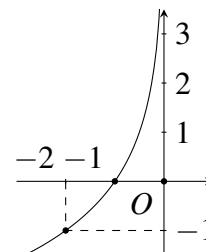
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

Ⓐ $y = -2^{-x}$.

Ⓑ $y = 2^{-x}$.

Ⓒ $y = \log_2(-x)$.

Ⓓ $y = -\log_2(-x)$.

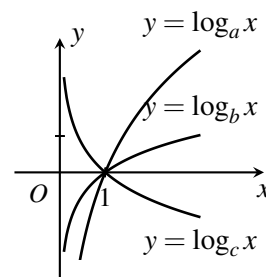


Bài 10



Hình bên là đồ thị của ba hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ được vẽ trên cùng một hệ trục tọa độ. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

Ⓐ $a > c > b$. Ⓑ $b > c > a$. Ⓒ $b > a > c$. Ⓓ $a > b > c$.



Dạng

6

Vận dụng vào các bài toán thực tiễn

❖ Ví dụ 11

Năm 2020, dân số thế giới là 7,795 tỉ người và tốc độ tăng dân số là 1,05%/năm (nguồn: <http://www.worldmeters.info/world-population>). Nếu tốc độ tăng này tiếp tục duy trì ở những năm tiếp theo thì dân số thế giới sau t năm kể từ năm 2020 được tính bởi công thức

$$P(t) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^t \text{ (tỉ người)}. \quad (*)$$

Khi đó, hãy tính dân số thế giới vào năm 2025 và năm 2030. (Mốc thời điểm để tính dân số của mỗi năm là ngày 1 tháng 7.)

👉 *Lời giải.* Năm 2025 ứng với $t = 5$ nên có dân số thế giới là

$$P(5) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^5 \approx 8,213 \text{ (tỉ người)}.$$

Năm 2030 ứng với $t = 10$ nên có dân số thế giới là

$$P(10) = 7,795 \cdot (1 + 0,0105)^{10} \approx 8,653 \text{ (tỉ người)}.$$

❖ Ví dụ 12

Trong âm học, mức cường độ âm được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ (dB) (dB là đơn vị mức cường độ âm, đọc là đề-xi-ben), trong đó I là cường độ âm tính theo W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} \text{ W/m}^2$ là cường độ âm chuẩn (cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được).

(Nguồn: Vật lí 12, NXB Giáo dục Việt Nam, năm 2017, trang 52,53)

- ❶ Mức cường độ âm L thấp nhất mà tai người có thể nghe được là bao nhiêu?
- ❷ Cuộc trò chuyện có cường độ âm 10^{-9} W/m^2 thì có mức cường độ âm bằng bao nhiêu?
- ❸ Cường độ âm tại một khu văn phòng nằm trong miền từ 10^{-7} W/m^2 đến $5 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$ (tức là $10^{-7} \leq I \leq 5 \cdot 10^{-6}$). Mức cường độ âm tại khu văn phòng này nằm trong khoảng nào? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

👉 *Lời giải.*

- ❶ Khi $I = I_0$ thì $L = 10 \log 1 = 0$ (dB). Vậy mức cường độ âm thấp nhất mà tai người bình thường có thể nghe được là 0 (dB).
- ❷ Khi $I = 10^{-9} \text{ W/m}^2$, ta có $L = 10 \log \frac{10^{-9}}{10^{-12}} = 10 \log 10^3 = 30 \log 10 = 30$ (dB).
- ❸ Với $I = 10^{-7} \text{ W/m}^2$, $L = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log 10^5 = 50 \log 10 = 50$ (dB).

Với $I = 5 \cdot 10^{-6} \text{ W/m}^2$, $L = 10 \log \frac{5 \cdot 10^{-6}}{10^{-12}} = 10 \log (5 \cdot 10^6) = 10(6 + \log 5) \approx 67$ (dB).

Hàm số $y = \log x$ đồng biến nên hàm số $y = 10 \log x$ cũng đồng biến.

Do đó, từ $10^{-7} \leq I \leq 5 \cdot 10^{-6}$ suy ra $50 \leq L \leq 67$.

Vậy mức cường độ âm tại khu văn phòng nằm trong khoảng từ 50 (dB) đến 67 (dB).

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Trong các hàm số sau đây hàm số nào **không phải** là hàm số mũ?

- (A) $y = x^{-4}$. (B) $y = (\sqrt{3})^x$. (C) $y = 4^{-x}$. (D) $y = 5^{\frac{x}{3}}$.

❖ **Câu 2.** Hàm số nào sau đây là hàm số mũ?

- (A) $y = x^{2x+1}$. (B) $y = 3^x$. (C) $y = x^3$. (D) $y = 3x$.

❖ **Câu 3.** Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số $y = (2-a)^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

- (A) $2 < a < 3$. (B) $1 < a < 2$. (C) $a > 2$. (D) $0 < a < 1$.

❖ **Câu 4.** Tập xác định của hàm số $y = \log x$ là

- (A) $[1; +\infty)$. (B) $(0; +\infty)$. (C) $[0; +\infty)$. (D) $(1; +\infty)$.

❖ **Câu 5.** Tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log_2(x^2 - 3x + 2)$ là

- (A) $\mathcal{D} = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$. (B) $\mathcal{D} = (-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$.

- (C) $\mathcal{D} = (1; 2)$. (D) $\mathcal{D} = [1; 2]$.

❖ **Câu 6.** Hàm số nào trong các hàm số sau đây đồng biến trên $(0; +\infty)$?

- (A) $y = (\sqrt{2} - 1)^x$. (B) $y = \log_9 x$. (C) $y = (0,6)^x$. (D) $\log_{0,7} x$.

❖ **Câu 7.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên \mathbb{R} ?

- (A) $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$. (B) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. (C) $y = 2005^x$. (D) $y = 2022$.

❖ **Câu 8.** Tập xác định của hàm số $y = \log_2(x-1)$ là

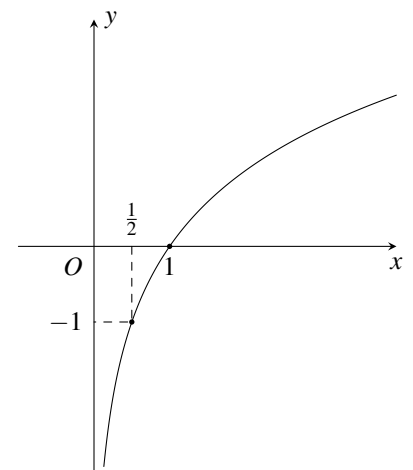
- (A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; +\infty)$. (C) $(1; +\infty)$. (D) $(-\infty; 1)$.

❖ **Câu 9.** Tập giá trị của hàm số $y = e^{-2x+4}$ là

- (A) $(0; +\infty)$. (B) $[0; +\infty)$. (C) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. (D) \mathbb{R} .

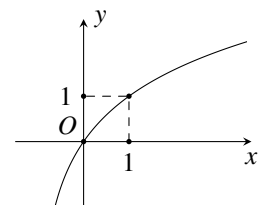
❖ **Câu 10.** Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào trong bốn hàm số sau?

- (A) $y = \log_2 x$. (B) $y = \log_2 x^2$. (C) $y = \log_2 2x$. (D) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.



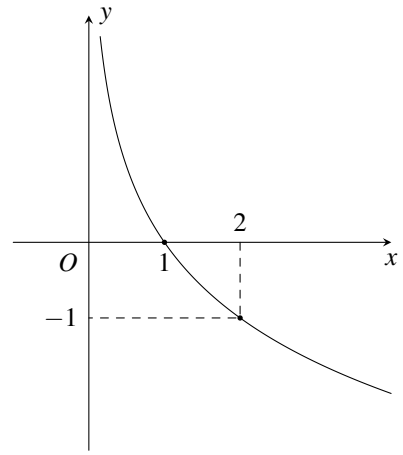
❖ **Câu 11.** Hàm số nào sau đây có đồ thị như hình bên?

- (A) $y = \log_3 x$. (B) $y = \log_2 x + 1$.
(C) $y = \log_2(x+1)$. (D) $y = \log_3(x+1)$.

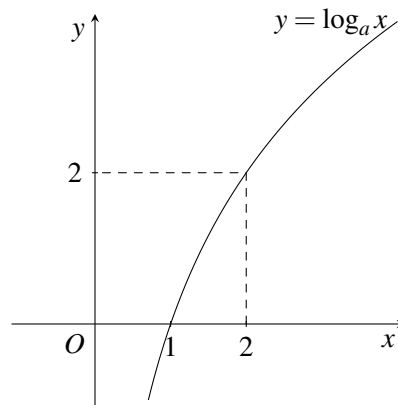


❖ **Câu 12.** Cho hàm số $y = \log_a x$ ($a > 0, a \neq 1$) có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của a bằng

- Ⓐ $a = 2$. Ⓑ $a = \frac{1}{2}$. Ⓒ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ⓓ $a = \sqrt{2}$.



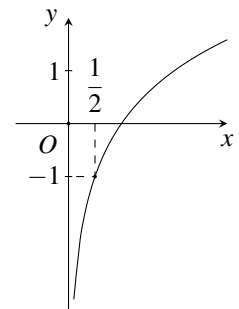
❖ **Câu 13.** Tìm a để đồ thị hàm số $y = \log_a x$, ($0 < a \neq 1$) có đồ thị là hình bên.



- Ⓐ $a = \sqrt{2}$. Ⓑ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ⓒ $a = \frac{1}{2}$. Ⓓ $a = 2$.

❖ **Câu 14.** Đường cong trong hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- Ⓐ $y = \log_2(2x)$. Ⓑ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Ⓒ $y = \log_{\sqrt{2}} x$. Ⓓ $y = \log_2 x$.

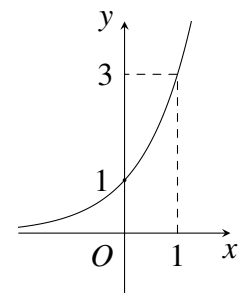


❖ **Câu 15.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên \mathbb{R} ?

- Ⓐ $y = \left(\frac{2}{5}\right)^x$. Ⓑ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Ⓒ $y = 2005^x$. Ⓓ $y = 2022^{-x}$.

❖ **Câu 16.** Đồ thị hình bên là đồ thị của hàm số nào sau đây?

- Ⓐ $y = 2^x$. Ⓑ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ⓒ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. Ⓓ $y = 3^x$.



❖ **Câu 17.** Trong các hàm số sau đây, hàm số nào đồng biến trên \mathbb{R} ?

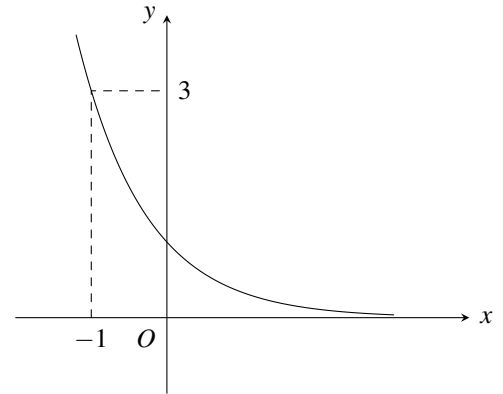
- Ⓐ $y = \left(\frac{2}{e}\right)^x$. Ⓑ $y = \left(\frac{\pi}{3}\right)^x$. Ⓒ $y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^x$. Ⓓ $y = 2^{-x}$.

❖ **Câu 18.** Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log(x^2 + 2x + 3)$.

- Ⓐ $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$. Ⓑ $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
 Ⓒ $\mathcal{D} = \emptyset$. Ⓓ $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

❖ **Câu 19.** Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

- Ⓐ $y = 3^x$. Ⓑ $y = (\sqrt{3})^x$.
 Ⓒ $y = \left(-\frac{1}{3}\right)^x$. Ⓓ $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.



❖ **Câu 20.** Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến trên \mathbb{R} ?

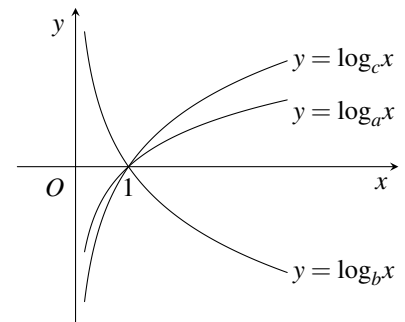
- Ⓐ $y = \log_3 x$. Ⓑ $y = \log_5 \left(\frac{1}{x^2}\right)$. Ⓒ $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Ⓓ $y = 2018^x$.

❖ **Câu 21.** Hàm số nào dưới đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

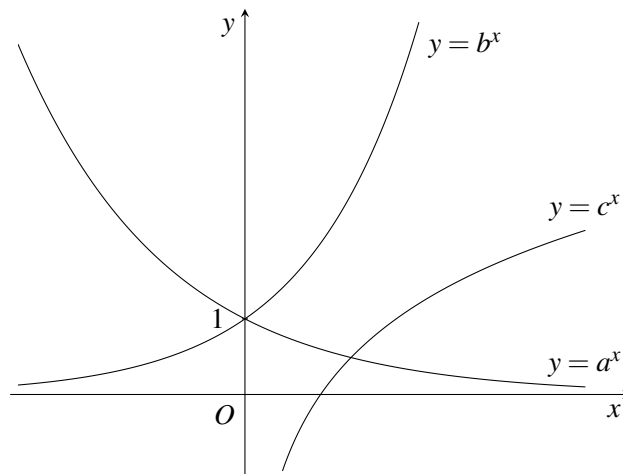
- Ⓐ $y = \left(\frac{e}{2}\right)^x$. Ⓑ $y = \left(\frac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}\right)^x$. Ⓒ $y = \left(\frac{4}{\sqrt{3} + 2}\right)^x$. Ⓓ $y = \left(\frac{\pi + 3}{2\pi}\right)^x$.

❖ **Câu 22.** Cho a, b, c là các số thực dương và khác 1. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- Ⓐ $c < a < b$. Ⓑ $b < c < a$. Ⓒ $b < a < c$. Ⓓ $a < b < c$.



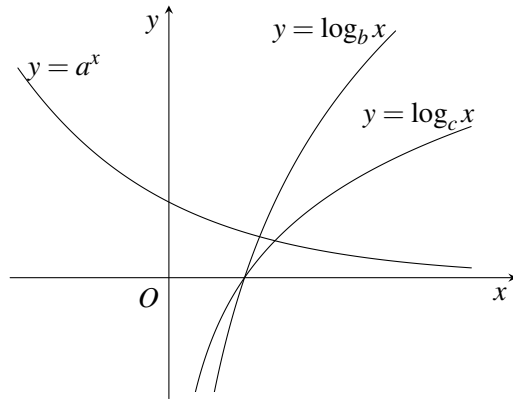
❖ **Câu 23.** Trong hình vẽ dưới đây có đồ thị của các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = \log_c x$.



Mệnh đề nào sau đây đúng?

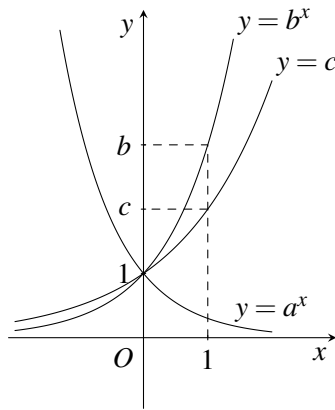
- Ⓐ $a < b < c$. Ⓑ $a < b = c$. Ⓒ $b < c < a$. Ⓓ $a < c < b$.

⇨ **Câu 24.** Cho các hàm số $y = a^x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ có đồ thị như hình vẽ bên. Chọn khẳng định đúng?



- (A) $b > c > a$. (B) $b > a > c$. (C) $a > b > c$. (D) $c > b > a$.

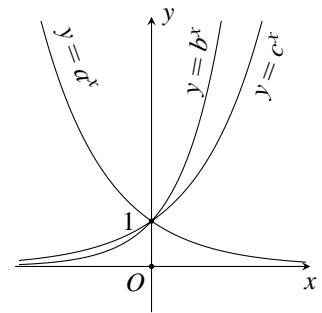
⇨ **Câu 25.** Cho a, b, c là ba số thực dương khác 1. Đồ thị hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho ở hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?



- (A) $a < b < c$. (B) $b < c < a$. (C) $c < a < b$. (D) $a < c < b$.

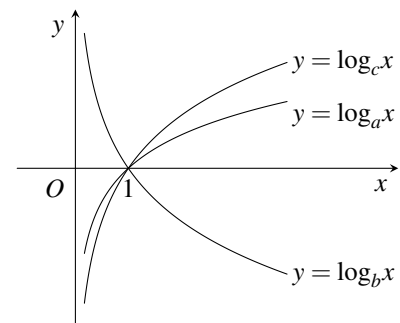
⇨ **Câu 26.** Cho ba số thực dương a, b, c khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x$, $y = b^x$, $y = c^x$ được cho trong hình vẽ bên. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $b < c < a$. (B) $c < a < b$. (C) $a < b < c$. (D) $a < c < b$.



⇨ **Câu 27.** Cho a, b, c là các số thực dương và khác 1. Hình vẽ dưới đây là đồ thị của hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $c < a < b$. (B) $b < c < a$. (C) $b < a < c$. (D) $a < b < c$.



❖ **Câu 28.** Một người gửi 20 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6,3%/ năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó sử dụng công thức $y = \log_{1,063} \left(\frac{x}{20} \right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 30 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

- (A) 7 năm. (B) 6,6 năm. (C) 6 năm. (D) 5 năm.

❖ **Câu 29.** Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau 3,5 ngày đêm? (Kết quả làm tròn đến 3 chữ số thập phân sau dấu phẩy)

- (A) 22,097 gam. (B) 23,097 gam. (C) 20,097 gam. (D) 24,097 gam.



Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $y = 3^x$ có đồ thị (C).

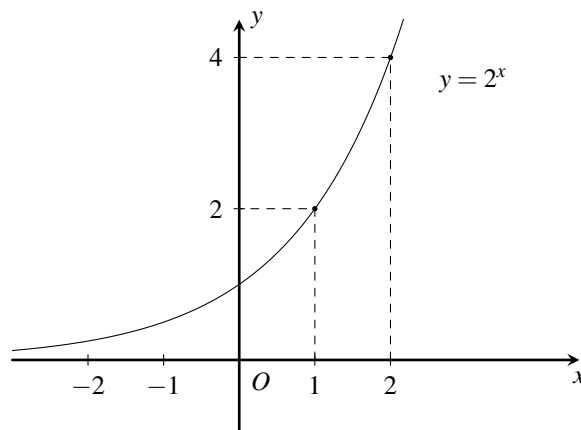
- a) Tập xác định của hàm số là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. b) Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$.
c) $A(2; 6)$ thuộc (C). d) (C) nằm hoàn toàn trên trục hoành.

❖ **Câu 2.** Cho các hàm số $y = \log_{\frac{1}{3}} x$; $y = \pi^x$; $y = \ln x$; $y = \log_{0,2} x$ và $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

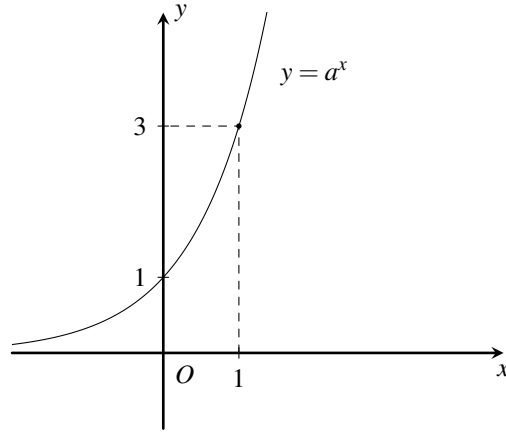
- a) Hàm số $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} .
b) Hàm số $y = \log_{\pi} x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.
c) Có ba hàm số nghịch biến trên tập xác định.
d) Có hai hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $y = 2^x$

- a) Hàm số có tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
b) Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
c) Đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; 4)$.
d) Đồ thị hàm số có hình sau.



⇨ **Câu 4.** Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ dưới đây.



- a) Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(0; 1)$.
- b) Hàm số cho bởi công thức $y = 3^x$.
- c) Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = \frac{1}{3}$ tại điểm có hoành độ không âm.
- d) Đồ thị hàm số đã cho cắt đường thẳng $y = -x + 1$ tại điểm có hoành độ dương.

⇨ **Câu 5.** Ông X gửi vào ngân hàng số tiền 300 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 6%/năm.

- a) Số tiền lãi ông X nhận được ở năm đầu tiên là 6 triệu đồng.
- b) Công thức tính số tiền ông X nhận được cả gốc và lãi sau n năm gửi tiền là $T_n = 300000000 \cdot (1 + 6\%)^n$ (đồng).
- c) Số tiền ông X nhận được sau 5 năm là nhiều hơn 410 triệu đồng.
- d) Nếu ông X muốn nhận được số tiền cả gốc lẫn lãi nhiều hơn 500 triệu đồng thì cần gửi ít nhất 9 năm.

⇨ **Câu 6.** Số người trong cộng đồng sinh viên đã nghe một tin đồn nào đó là $N = P(1 - e^{-0,15d})$, trong đó P là tổng số sinh viên của cộng đồng và d là số ngày trôi qua kể từ khi tin đồn bắt đầu.

- a) Trong một cộng đồng 1000 sinh viên, sau ngày thứ nhất có 140 sinh viên nghe được tin đồn.
- b) Trong một cộng đồng 1450 sinh viên, để 525 sinh viên nghe được tin đồn phải mất 3 ngày.
- c) Sau 3 ngày 500 sinh viên nghe được tin đồn thì cộng đồng có 1400 sinh viên.
- d) Số ngày để một nửa cộng đồng sinh viên nghe được tiếng đồn là 5 ngày.

3 Tự luận

🔗 **Bài 1.** Vẽ đồ thị các hàm số sau:

a) $y = 4^x$.

b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.

🔗 **Bài 2.** Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = \log x$.

b) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$.

Bài 3. Tìm tập xác định của các hàm số

① $y = 12^x$;

② $y = \log_5(2x - 3)$;

③ $y = \log_{\frac{1}{5}}(-x^2 + 4)$.

Bài 4. Tìm tập xác định của các hàm số:

a) $y = \log_2(3 - 2x)$;

b) $y = \log_3(x^2 + 4x)$;

c) $y = \log|x + 3|$;

d) $y = \ln(4 - x^2)$.

Bài 5. So sánh các cặp số sau:

a) $\log_\pi 0,8$ và $\log_\pi 1,2$.

b) $\log_{0,3} 2$ và $\log_{0,3} 2,1$.

Bài 6. So sánh các cặp số sau:

a) $1,3^{0,7}$ và $1,3^{0,6}$.

b) $0,75^{-2,3}$ và $0,75^{-2,4}$.

Bài 7. Trong các hàm số sau, hàm số nào đồng biến, hàm số nào nghịch biến trên khoảng xác định của hàm số đó? Vì sao?

① $y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x$;

② $y = \left(\frac{\sqrt[3]{26}}{3}\right)^x$;

③ $y = \log_\pi x$;

④ $y = \log_{\frac{\sqrt{15}}{4}} x$.

Bài 8. Ta định nghĩa các hàm sin hyperbolic và hàm cosin hyperbolic như sau:

$$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

Chứng minh rằng:

a) $\sinh x$ là hàm số lẻ;

b) $\cosh x$ là hàm số chẵn;

c) $(\cosh x)^2 - (\sinh x)^2 = 1$ với mọi x .

Bài 9. Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x + 2025 - m)$ xác định trên \mathbb{R} .

Bài 10. Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{9^x + 3}$.

a) Với a, b là hai số thực thỏa mãn $a + b = 1$. Tính $f(a) + f(b)$.

b) Tính tổng $S = f\left(\frac{1}{2023}\right) + f\left(\frac{2}{2023}\right) + \dots + f\left(\frac{2022}{2023}\right)$.

Bài 11. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2} \log_2\left(\frac{2x}{1-x}\right)$. Tính giá trị của biểu thức

$$S = f\left(\frac{1}{2025}\right) + f\left(\frac{2}{2025}\right) + \dots + f\left(\frac{2023}{2025}\right) + f\left(\frac{2024}{2025}\right).$$

Bài 12. Giả sử một chất phóng xạ bị phân rã theo cách sao cho khối lượng $m(t)$ của chất còn lại (tính bằng kilôgam) sau t ngày được cho bởi hàm số $m(t) = 13e^{-0,0015t}$.

a) Tìm khối lượng của chất đó tại thời điểm $t = 0$.

b) Sau 45 ngày khối lượng chất đó còn lại là bao nhiêu?

Bài 13. Trong một nghiên cứu, một nhóm học sinh được cho xem cùng một danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ còn nhớ bao nhiêu phần trăm danh sách đó sau mỗi tháng. Giả sử sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó được tính theo công thức $M(t) = 75 - 20\ln(t + 1)$, $0 \leq t \leq 12$ (đơn vị: %). Hãy tính khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh đó sau 6 tháng.

Bài 14. Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, $a > 0$ là hằng số và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: <http://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

- Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.
- Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .
- Tại độ sâu 20m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Bài 15. Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng ki-lô-mét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa - đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: <http://doi.org/10.1007/s40828-020-0111-6>)

- Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?
- Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu ki-lô-mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Bài 16. Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A \cdot e^{rt}$. Trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số 0,93%/năm (Nguồn: <https://danso.org/viet-nam>). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Bài 17. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày?

Bài 18. Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[\text{H}^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau: Mẫu 1: $[\text{H}^+] = 8 \cdot 10^{-7}$; Mẫu 2: $[\text{H}^+] = 2 \cdot 10^{-9}$. Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

🔗 **Bài 19.** Nếu một ô kính ngăn khoảng 3% ánh sáng truyền qua nó thì phần trăm ánh sáng p truyền qua n ô kính liên tiếp được cho gần đúng bởi hàm số:

$$p(n) = 100 \cdot (0,97)^n.$$

- Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 10 ô kính?
- Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 25 ô kính?

🔗 **Bài 20.** Các nhà khoa học xác định được chu kỳ bán rã của $^{14}_6\text{C}$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử $^{14}_6\text{C}$ giảm đi một nửa.

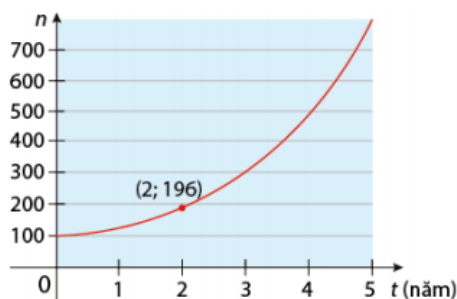
- Gọi m_0 là khối lượng của $^{14}_6\text{C}$ tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của $^{14}_6\text{C}$ tại thời điểm t (năm).
- Một cây còn sống có lượng $^{14}_6\text{C}$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng $^{14}_6\text{C}$ trong cây phân rã theo chu kỳ bán rã của nó. Các nhà khảo cổ tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng $^{14}_6\text{C}$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn đến hàng phần mười).

🔗 **Bài 21.** Mức cường độ âm L (dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{10^{-12}} \right)$, trong đó I (W/m^2) là cường độ âm. Tai người có thể nghe được âm có cường độ từ 10^{-12} W/m^2 đến 10 W/m^2 . Tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được.

🔗 **Bài 22.** Số tiền ban đầu 120 triệu đồng được gửi tiết kiệm với lãi suất năm không đổi là 6%. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) thu được sau 5 năm nếu nó được tính lãi kép:

- hàng quý;
- hàng tháng;
- liên tục.

🔗 **Bài 23.** Lúc đầu trong ao có một số con ếch. Người ta ghi nhận số lượng ếch trong 5 năm đầu như hình bên. Giả sử số lượng ếch tăng theo hàm số $n(t) = Ca^t; C, a \in \mathbb{R}$.



- Tính số lượng ếch lúc ban đầu.
- Tìm hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao.
- Dự đoán số lượng ếch sau 15 năm.

§4 PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

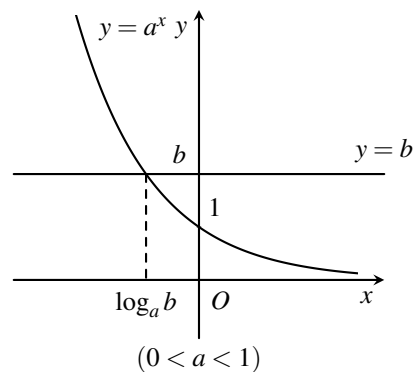
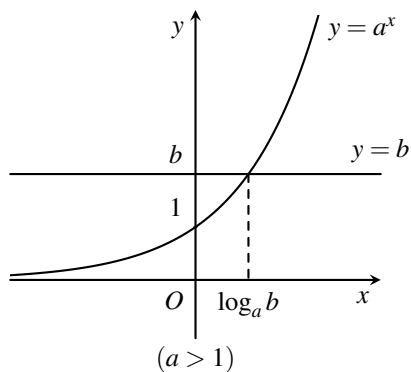
1) Phương trình mũ



Phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x = b$ với $0 < a \neq 1$.

- ◇ Nếu $b > 0$ thì phương trình có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- ◇ Nếu $b \leq 0$ thì phương trình vô nghiệm.

Minh họa bằng đồ thị



⚠ Lưu ý. Phương pháp giải phương trình mũ bằng cách đưa về cùng cơ số:
Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

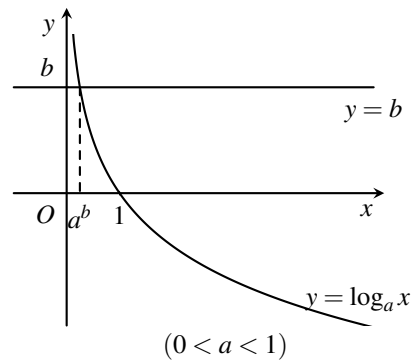
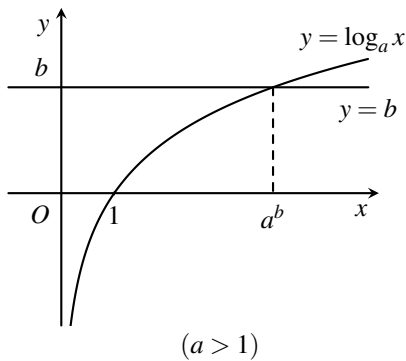
2) Phương trình lôgarit



Phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x = b$ ($0 < a \neq 1$).

Phương trình lôgarit cơ bản $\log_a x = b$ có nghiệm duy nhất $x = a^b$

Minh họa bằng đồ thị



⚠ Lưu ý. Phương pháp giải phương trình lôgarit bằng cách đưa về cùng cơ số:
Nếu $u, v > 0$ và $0 < a \neq 1$ thì $\log_a u = \log_a v \Leftrightarrow u = v$.



Tổng quát, xét phương trình dạng

$$\log_a u(x) = \log_a v(x), \quad 0 < a \neq 1 \quad (1)$$

Để giải phương trình (1), trước hết ta cần đặt điều kiện có nghĩa $\begin{cases} u(x) > 0 \\ v(x) > 0 \end{cases}$. Khi đó phương trình (1) biến đổi thành phương trình

$$u(x) = v(x) \quad (2)$$

Sau khi giải phương trình (2), ta cần kiểm tra sự thỏa mãn điều kiện. Nghiệm của phương trình (1) là những nghiệm của (2) thỏa mãn điều kiện.

3) Bất phương trình mũ



Bất phương trình mũ cơ bản có dạng $a^x > b$ (hoặc $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$) với ($a > 0$, $a \neq 1$). Xét bất phương trình dạng $a^x > b$:

- ◇ Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là $S = \mathbb{R}$.
- ◇ Nếu $b > 0$ thì bất phương trình tương đương với $a^x > a^{\log_a b}$.
 - ☆ Với $a > 1$, nghiệm của bất phương trình là $x > \log_a b$.
 - ☆ Với $0 < a < 1$, nghiệm của bất phương trình $x < \log_a b$.



🔔 LƯU Ý.

- ◇ Các bất phương trình mũ cơ bản còn lại được giải tương tự.
- ◇ Nếu $a > 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u > v$.
- ◇ Nếu $0 < a < 1$ thì $a^u > a^v \Leftrightarrow u < v$.

4) Bất phương trình lôgarit



Bất phương trình lôgarit cơ bản có dạng $\log_a x > b$ (hoặc $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$) với ($a > 0$, $a \neq 1$).

Xét bất phương trình dạng $\log_a x > b$:

- ◇ Nếu $a > 1$ thì nghiệm của bất phương trình là $x > a^b$.
- ◇ Với $0 < a < 1$ thì nghiệm của bất phương trình $0 < x < a^b$.



🔔 LƯU Ý.

- ◇ Các bất phương trình lôgarit cơ bản còn lại được giải tương tự.
- ◇ Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v > 0$.
- ◇ Nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow 0 < u < v$.



Khi giải phương trình và bất phương trình lôgarit trước tiên phải tìm điều kiện xác định sau đó mới giải phương trình hoặc bất phương trình.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Phương trình mũ & lôgarit cơ bản (đưa về cùng cơ số)

◇ Phương trình mũ.

✓ $a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b.$

✓ $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).$

◇ Phương trình lôgarit.

✓ $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$

✓ $\log_a u(x) = \log_a v(x) \Leftrightarrow \begin{cases} u(x) > 0, v(x) > 0 \\ u(x) = v(x) \end{cases}.$

◇ Ví dụ 1

Giải các phương trình sau:

a) $2^{x-1} = 3;$

b) $2^{x^2-9x+16} = 4;$

c) $2^{x-1} = 32;$

d) $5^{2x+1} = 125;$

e) $2^x = \frac{1}{8}.$

f) $5 \cdot 10^x = 1.$

↳ Lời giải.

a) $2^{x-1} = 3 \Leftrightarrow x - 1 = \log_2 3 \Leftrightarrow x = 1 + \log_2 3 = \log_2 6 \Leftrightarrow x = \log_2 6.$ Tập nghiệm $S = \{\log_2 6\}.$

b) $2^{x^2-9x+16} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 9x + 16 = \log_2 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 7 \end{cases}.$ Tập nghiệm $S = \{2; 7\}.$

c) Ta có $2^{x-1} = 32 \Leftrightarrow x - 1 = \log_2 32 \Leftrightarrow x - 1 = 5 \Leftrightarrow x = 6.$ Tập nghiệm $S = \{6\}.$

d) $5^{2x+1} = 125 \Leftrightarrow 2x + 1 = \log_5 125 \Leftrightarrow 2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1.$ Tập nghiệm $S = \{1\}.$

e) $2^x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2^x = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3.$

◇ Ví dụ 2

Giải các phương trình

a) $4^{2x} = 8^{2x-1};$

b) $4^{x-2} = 2^{3x+1};$

c) $2^{x^2+x} = 2^{x+1};$

d) $4^{2x+5} = 2^{2-x};$

e) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x;$

f) $5^{3x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2}.$

↳ Lời giải.

- a) $4^{2x} = 8^{2x-1} \Leftrightarrow 2^{4x} = 2^{6x-3} \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.
- b) $4^{x-2} = 2^{3x+1} \Leftrightarrow 2^{2(x-2)} = 2^{3x+1} \Leftrightarrow 2(x-2) = 3x+1 \Leftrightarrow 2x-4 = 3x+1 \Leftrightarrow x = -5$.
- c) $2^{x^2+x} = 2^{x+1} \Leftrightarrow x^2+x = x+1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$. Vậy nghiệm $x = 1; x = -1$
- d) $4^{2x+5} = 2^{2-x} \Leftrightarrow 2^{4x+10} = 2^{2-x} \Leftrightarrow 4x+10 = 2-x \Leftrightarrow x = \frac{-8}{5}$.
- e) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x+1} = 125^x \Leftrightarrow 5^{-2x-2} = 5^{3x} \Leftrightarrow -2x-2 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{-2}{5}$.
- f) $5^{3x-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^{-x^2} \Leftrightarrow 5^{3x-2} = 5^{x^2} \Leftrightarrow 3x-2 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = 2$.

❖ Ví dụ 3

Giải các phương trình sau:

- a) $\log_2(x-1) = 3$; b) $\log_2(-x^2+3x) = 1$; c) $\log_2(x-5) = 4$;
 d) $\log(x-1) = 2$; e) $\ln(4-x) = 100$; f) $\log_3(2^x-1) = 4$.

🔗 Lời giải.

- a) Điều kiện $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
 Ta có $\log_2(x-1) = 3 \Leftrightarrow x-1 = 2^3 \Leftrightarrow x = 9$. Vậy nghiệm $x = 9$.
- b) Điều kiện $-x^2+3x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 3$.
 Ta có $\log_2(-x^2+3x) = 1 \Leftrightarrow -x^2+3x = 2^1 \Leftrightarrow x^2-3x+2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$.
 Vậy nghiệm $x = 1; x = 2$.
- c) Điều kiện $x-5 > 0 \Leftrightarrow x > 5$.
 Ta có $\log_2(x-5) = 4 \Leftrightarrow x-5 = 2^4 \Leftrightarrow x = 21$. Vậy nghiệm $x = 21$.
- d) Điều kiện $x-1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$.
 Ta có $\log(x-1) = 2 \Leftrightarrow x-1 = 10^2 \Leftrightarrow x = 101$. Vậy nghiệm $x = 101$.
- e) Điều kiện $4-x > 0 \Leftrightarrow x < 4$.
 Ta có $\ln(4-x) = 100 \Leftrightarrow 4-x = e^{100} \Leftrightarrow x = 4 - e^{100}$. Vậy nghiệm $x = 4 - e^{100}$
- f) Điều kiện $2^x-1 > 0 \Leftrightarrow 2^x < 2^0 \Leftrightarrow x < 0$.
 Ta có $\log_3(2^x-1) = 4 \Leftrightarrow 2^x-1 = 3^4 \Leftrightarrow 2^x = 82 \Leftrightarrow x = \log_2 82$ (không thỏa mãn điều kiện).
 Vậy phương trình vô nghiệm.

❖ Ví dụ 4

Giải các phương trình sau

- a) $\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1$; b) $\log_2(x^2-3) = \log_2 2x$;
 c) $\log_8(3x-6) = -\log_{\frac{1}{8}}(2x-2)$; d) $\log_2 x = \log_2(x^2-x)$;
 e) $\log_{\sqrt{2}} x \cdot \log_2 x = 18$; f) $2\log_4(x-3) + \log_4(x-5)^2 = 0$.

Lời giải.

a) Điều kiện: $\begin{cases} x > -6 \\ x > -1 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1.$

Ta có $\log_2(x+6) = \log_2(x+1) + 1 \Leftrightarrow \log_2(x+6) = \log_2(2x+2) \Leftrightarrow x+6 = 2x+2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

b) Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 3 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} (*)$

Khi đó, phương trình đã cho trở thành $x^2 - 3 = 2x \Leftrightarrow x^2 - 3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 3$.
Thay lần lượt hai giá trị này vào (*), ta thấy chỉ có $x = 3$ thỏa mãn.

Vậy phương trình có nghiệm là $x = 3$.

c) Điều kiện xác định là $\begin{cases} 3x - 6 > 0 \\ 2x - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Ta có: $\log_8(3x - 6) = -\log_{\frac{1}{8}}(2x - 2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ \log_8(3x - 6) = \log_8(2x - 2) \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ 3x - 6 = 2x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình có nghiệm $x = 4$.

d) Điều kiện xác định của phương trình là $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Phương trình đã cho tương đương với phương trình sau: $x = x^2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (loại)} \\ x = 2. \end{cases}$

Nghiệm của phương trình là $x = 2$.

e) Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình đã cho tương đương với

$$2\log_2 x \cdot \log_2 x = 18 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x = 3 \\ \log_2 x = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ x = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

Vậy các nghiệm của phương trình là $x = 8; x = \frac{1}{8}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Giải các phương trình sau

a) $3^{x-1} = 27;$

b) $2^{x^2-5x+6} = 1;$

c) $3^{x+2} = \sqrt[3]{9};$

d) $2 \cdot 10^{2x} = 30;$

e) $4^{2x-3} = 5;$

f) $10^{x+1} - 2 \cdot 10^x = 8.$

.....
.....
.....

BÀI 2



Giải các phương trình sau:

a) $5^{2x-1} = 25;$

b) $3^{x+1} = 9^{2x+1};$

c) $4^{2x+5} = 2^{2-x};$

d) $27^{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{\sqrt{3}^{7x}}{243};$

e) $2^{x^2-5x+6} + 2^{1-x^2} = 2 \cdot 2^{6-5x} + 1;$

f) $\left(\frac{1}{9}\right)^x = \frac{27^x}{3}.$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI 3



Giải các phương trình sau:

a) $\log_2 x = 5;$

b) $\log_4(5x - 4) = 2;$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x - 2) = -2;$

d) $\log_3 x = -2;$

e) $\log_2(3^{3x-1} - 1) = 3;$

f) $\log_2(x^2 - 9x) = 3.$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

- b) $0,4^x > 2 \Leftrightarrow x < \log_{0,4} 2$ (do $0 < 0,4 < 1$).
 c) $2^x > 16 \Leftrightarrow x > 4$.
 d) $0,1^x \leq 0,001 \Leftrightarrow 0,1^x \leq 0,1^3 \Leftrightarrow x \geq 3$.

❖ Ví dụ 6

Giải các bất phương trình sau

- a) $\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2$; b) $\log_5(x+2) \leq 1$; c) $\log_{\frac{1}{2}}x > -2$; d) $\log_2(x+1) > 3$.

✎ Lời giải.a) Điều kiện: $x > -1$.

$$\log_{\frac{1}{3}}(x+1) < 2 \Leftrightarrow x+1 > \left(\frac{1}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x > -\frac{8}{9}.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $x > -\frac{8}{9}$

b) Điều kiện $x > -2$.

$$\log_5(x+2) \leq 1 \Leftrightarrow x+2 \leq 5 \Leftrightarrow x \leq 3.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là $-2 < x \leq 3$.

c) $\log_{\frac{1}{2}}x > -2 \Leftrightarrow 0 < x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \Leftrightarrow 0 < x < 2^2 \Leftrightarrow 0 < x < 4$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(0; 4)$.

d) $\log_2(x+1) > 3 \Leftrightarrow x+1 > 2^3 \Leftrightarrow x > 7$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là $(7; +\infty)$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN**Bài 5**

Giải mỗi bất phương trình sau:

- a) $5^x > 12$; b) $(0,3)^{x+1} > 1,7$; c) $16^x > \frac{1}{8}$; d) $3^{2x-1} > 27$.



Bài 6



Giải các bất phương trình sau:

a) $3^{2x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2}$; b) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1-3x} \geq \frac{25}{4}$; c) $2^x > 3^{x+1}$; d) $25^{x-5} - 5^x \leq 0$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 7



Giải các bất phương trình sau

a) $\log_2(2x-1) \leq 1$; b) $\log_2(3x-1) > 3$; c) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > 0$; d) $\log_2(3x-2) \leq 3$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8



Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_3 x > \log_3(2x-1)$; b) $\log_{\frac{1}{5}}(3x-5) > \log_{\frac{1}{5}}(x+1)$; c) $\log_2(3x-2) > \log_2(6-5x)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

3

Vận dụng thực tiễn

Ví dụ 7

Nước chanh có độ pH bằng 2,4; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải. Kí hiệu x, y lần lượt là nồng độ H^+ trong nước chanh và giấm.

Theo giả thiết, ta có $2,4 = -\log x$ và $3 = -\log y$.

Suy ra $x = 10^{-2,4}$ và $y = 10^{-3}$. Suy ra $\frac{x}{y} = \frac{10^{-2,4}}{10^{-3}} = 10^{0,6} \approx 3,98$.

Vậy nồng độ H^+ của nước chanh gấp 3,98 lần nồng độ H^+ của giấm.

Ví dụ 8

Công thức tính khối lượng còn lại của một chất phóng xạ từ khối lượng ban đầu M_0 là $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó t là thời gian tính từ thời điểm ban đầu và T là chu kỳ bán rã của chất. Đồng vị plutonium-234 có chu kỳ bán rã là 9 giờ. Từ khối lượng ban đầu 200 g, sau bao lâu thì khối lượng plutonium-234 còn lại là

a) 100 g?

b) 50 g?

c) 20 g?

Lời giải.

$$\text{a) } 100 = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{9}} \Leftrightarrow t = 9 \text{ giờ.}$$

$$\text{b) } 50 = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{9}} \Leftrightarrow t = 18 \text{ giờ.}$$

$$\text{c) } 20 = 200 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{9}} \Leftrightarrow t = 9 \cdot \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{10} \approx 29,9 \text{ giờ.}$$

Ví dụ 9

Mức cường độ âm L (đơn vị: dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (đơn vị: W/m^2) là cường độ âm (Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Mức cường độ âm ở một khu dân cư được quy định là dưới 60 dB. Hỏi cường độ âm ở khu vực đó phải dưới bao nhiêu W/m^2 ?

Lời giải. Ta có

$$L < 60 \Leftrightarrow 10 \log \frac{I}{10^{-12}} < 60 \Leftrightarrow \log \frac{I}{10^{-12}} < 6 \Leftrightarrow \log I - \log 10^{-12} < 6 \Leftrightarrow \log I < -6 \Leftrightarrow I < 10^{-6}.$$

Vậy cường độ âm ở khu vực đó phải dưới $10^{-6} W/m^2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9



Nếu khối lượng carbon-14 trong cơ thể sinh vật lúc chết là M_0 (g) thì khối lượng carbon-14 còn lại (tính theo gam) sau t năm được tính theo công thức $M(t) = M_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$ (g), trong đó $T = 5730$ (năm) là chu kỳ bán rã của carbon-14. Nghiên cứu hoá thạch của một sinh vật, người ta xác định được khối lượng carbon-14 hiện có trong hoá thạch là $5 \cdot 10^{-13}$ g. Nhờ biết tỉ lệ khối lượng của carbon-14 so với carbon-12 trong cơ thể sinh vật sống, người ta xác định được khối lượng carbon-14 trong cơ thể lúc sinh vật chết là $M_0 = 1,2 \cdot 10^{-12}$ (g). Sinh vật này sống cách đây bao nhiêu năm? (Làm tròn kết quả đến hàng trăm).

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 10



Nước uống đạt tiêu chuẩn phải có độ pH nằm trong khoảng từ 6,5 đến 8,5 (theo Quy chuẩn Việt Nam QCVN 01 : 2009/BYT). Nồng độ H^+ trong nước uống tiêu chuẩn phải nằm trong khoảng nào?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 11



Dân số nước ta năm 2021 ước tính là 98 564 407 người (Nguồn: <https://danso.org/viet-nam>) Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm của nước ta là $r = 0,93\%$. Biết rằng sau t năm, dân số Việt Nam (tính từ mốc 2021) ước tính theo công thức: $S = A \cdot e^{rt}$. Hỏi từ năm nào trở đi, dân số nước ta vượt 110 triệu người?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

- ❖ **Câu 1.** Tập nghiệm của phương trình $3^{2x+1} = 9$ là
 (A) $S = \{2\}$. (B) $S = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. (C) $S = \{1\}$. (D) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$.
- ❖ **Câu 2.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x \leq 3$ là
 (A) $(0; 8]$. (B) $(-\infty; 8]$. (C) $(0; 9]$. (D) $(0; 8)$.
- ❖ **Câu 3.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x - 1) < 3$ là
 (A) $(-\infty; 3)$. (B) $\left[\frac{1}{3}; 3\right]$. (C) $\left(\frac{1}{3}; 3\right)$. (D) $(3; +\infty)$.
- ❖ **Câu 4.** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{3}\right)^x > 9$ là
 (A) $(2; +\infty)$. (B) $(-\infty; -2)$. (C) $(-2; +\infty)$. (D) $(-\infty; 2)$.
- ❖ **Câu 5.** Số nghiệm thực của phương trình $3\log_3(x - 1) - \log_{\frac{1}{3}}(x - 5)^3 = 3$ là
 (A) 3. (B) 1. (C) 2. (D) 0.
- ❖ **Câu 6.** Nghiệm của phương trình $\log_3(x - 2) = 2$ là
 (A) $x = 11$. (B) $x = 10$. (C) $x = 7$. (D) $x = 8$.
- ❖ **Câu 7.** Nghiệm của phương trình $\log_3(x - 1) = 2$ là
 (A) $x = 8$. (B) $x = 9$. (C) $x = 7$. (D) $x = 10$.
- ❖ **Câu 8.** Tập nghiệm của bất phương trình $0,6^x > 3$ là
 (A) $(-\infty; \log_{0,6} 3)$. (B) $(\log_{0,6} 3; +\infty)$. (C) $(-\infty; \log_3 0,6)$. (D) $(\log_3 0,6; +\infty)$.
- ❖ **Câu 9.** Nghiệm của phương trình $\log_2(3x - 4) = -1$ là:
 (A) $x = 2$. (B) $x = \frac{3}{2}$. (C) $x = \frac{7}{6}$. (D) $x = \frac{5}{3}$.
- ❖ **Câu 10.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_5(x + 1) > 2$ là
 (A) $(9; +\infty)$. (B) $(25; +\infty)$. (C) $(31; +\infty)$. (D) $(24; +\infty)$.
- ❖ **Câu 11.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x + 1) < 3$ là
 (A) $S = (-\infty; 8)$. (B) $S = (-\infty; 7)$. (C) $S = (1; 8)$. (D) $S = (-1; 7)$.
- ❖ **Câu 12.** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x - 1) = 2$ là
 (A) $x = 3$. (B) $x = 5$. (C) $x = \frac{9}{2}$. (D) $x = \frac{7}{2}$.
- ❖ **Câu 13.** Tìm nghiệm của phương trình $\log_{25}(x + 1) = \frac{1}{2}$.
 (A) $x = 6$. (B) $x = 4$. (C) $x = \frac{23}{2}$. (D) $x = -6$.
- ❖ **Câu 14.** Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \frac{1}{32}$ có tập nghiệm là $S = (a; b)$. Khi đó $b - a$ bằng
 (A) 4. (B) 2. (C) 6. (D) 8.

❖ **Câu 15.** Tổng tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 + x + 1) = 2 + \log_2 x$ bằng

- (A) 1. (B) 4. (C) 2. (D) 3.

❖ **Câu 16.** Tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x^2+3x} < \frac{1}{4}$ là

- (A) $S = [1; 2]$. (B) $S = (-\infty; 1)$. (C) $S = (1; 2)$. (D) $S = (2; +\infty)$.

❖ **Câu 17.** Tổng các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2x-5} = 27$ là

- (A) 0. (B) -8. (C) -2. (D) 2.

❖ **Câu 18.** Tập nghiệm của bất phương trình $(0,8)^x < 3$ là

- (A) $(-\infty; \log_{0,8} 3)$. (B) $(\log_3 2; +\infty)$. (C) $(-\infty; \log_3 0,8)$. (D) $(\log_{0,8} 3; +\infty)$.

❖ **Câu 19.** Tập nghiệm của bất phương trình $2^x > 3$ là

- (A) $(\log_3 2; +\infty)$. (B) $(-\infty; \log_2 3)$. (C) $(-\infty; \log_3 2)$. (D) $(\log_2 3; +\infty)$.

❖ **Câu 20.** Biết nghiệm lớn nhất của phương trình $\log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}}(2x-1) = 1$ là $x = a + b\sqrt{2}$

(a, b là hai số nguyên). Giá trị của $a + 2b$ bằng

- (A) 4. (B) 6. (C) 0. (D) 1.

❖ **Câu 21.** Nghiệm của phương trình $\log_5(3x) = 2$ là

- (A) $x = 25$. (B) $x = \frac{32}{3}$. (C) $x = 32$. (D) $x = \frac{25}{3}$.

❖ **Câu 22.** Tập nghiệm S của phương trình $\log_2(x-1) = \log_2(2x+1)$ là

- (A) $S = \{0\}$. (B) $S = \{2\}$. (C) $S = \{-2\}$. (D) $S = \emptyset$.

❖ **Câu 23.** Có tất cả bao nhiêu giá trị của tham số m để phương trình

$$\log_3(x+2) = \log_3[x^2 - (m-1)x + m^2 - 6m + 2]$$

có hai nghiệm trái dấu?

- (A) 4. (B) 3. (C) vô số. (D) 5.

❖ **Câu 24.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(3x) > 3$ là

- (A) $(3; +\infty)$. (B) $\left(\frac{8}{3}; +\infty\right)$. (C) $\left(0; \frac{8}{3}\right)$. (D) $(0; 3)$.

❖ **Câu 25.** Nghiệm của phương trình $\log_3(2x) = 2$ là

- (A) $x = \frac{9}{2}$. (B) $x = 9$. (C) $x = 4$. (D) $x = 8$.

❖ **Câu 26.** Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{1}{8}$ là

- (A) $(3; +\infty)$. (B) $(-\infty; 3)$. (C) $[3; +\infty)$. (D) $(-\infty; 3]$.

❖ **Câu 27.** Giải bất phương trình $\left(\frac{3}{4}\right)^{x^2-4} \geq 1$, ta được tập nghiệm T . Tìm T .

- (A) $T = [-2; 2]$. (B) $T = [2; +\infty)$.
(C) $T = (-\infty; -2]$. (D) $T = (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

❖ **Câu 28.** Biết nghiệm của phương trình $\log_3(x-1) + \log_3(x-5) = 1$ có dạng $x = a + \sqrt{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Tính giá trị biểu thức $T = a + b$.

- (A) $T = 5$. (B) $T = -4$. (C) $T = 10$. (D) $T = -2$.



Câu trắc nghiệm đúng sai.

- ❖ **Câu 1.** Cho phương trình $\log_2(x^2 - 5x - 6) = 3$ (1)
- Điều kiện của phương trình (1) là $-1 < x < 6$.
 - Phương trình (1) có hai nghiệm trái dấu.
 - Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1 < x_2$ thỏa mãn $2x_1 + x_2 = 3$.
 - Tổng bình phương các nghiệm của phương trình (1) lớn hơn 53.
- ❖ **Câu 2.** Xét phương trình $\log_2(1 - x^2) = 2\log_4(2x)$. Khi đó
- Điều kiện của phương trình là $x > 0$.
 - Phương trình tương đương $1 - x^2 = 2x$.
 - Phương trình có điều kiện là $-1 < x < 1$.
 - Phương trình có nghiệm duy nhất là $x = -1 + \sqrt{2}$.
- ❖ **Câu 3.** Cho bất phương trình $16^{-x^2+1} < \frac{1}{16}$. Khi đó
- Bất phương trình tương đương với bất phương trình $4^{-2x^2} < 4^{-2}$.
 - Bất phương trình tương đương với bất phương trình $-2x < 4$.
 - $16^{-x^2+1} < \frac{1}{16}$ có nghiệm nguyên dương nhỏ nhất là $x = 2$.
 - $16^{-x^2+1} < \frac{1}{16}$ có tập nghiệm $S = (a; b) \cup (c; d)$ thì $b + c = 0$.
- ❖ **Câu 4.** Cho phương trình $3^{2x} - m + 1 = 0$.
- Với $m = 1$ thì phương trình có nghiệm.
 - Với $m = 10$ thì phương trình có nghiệm $x = 1$.
 - Với $m = 4$ thì phương trình có nghiệm là số nguyên.
 - Phương trình có nghiệm khi $m > 1$.
- ❖ **Câu 5.** Giải các bất phương trình sau. Khi đó
- $\log_2(-x + 3) \geq 1$ có nghiệm lớn nhất bằng 1.
 - $\log_1(2x - 2) \leq 3$ có nghiệm bé nhất bằng $\frac{55}{54}$.
 - $\log_2(x^2 + 5x + 4) < 2$ có điều kiện nghiệm là $-4 < x < -1$.
 - $\log_1(-2x - 1) > \log_1(x + 1)$ tập nghiệm của bất phương trình này là: $S = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.
- ❖ **Câu 6.** Cho bất phương trình $\log_{0,5}(x + 1)^2 \leq \log_{0,5} 2x$, có tập nghiệm là $S = (a; b)$. Khi đó:
- $a = 0$.
 - $(a; b) \cap (3; 2024) = (3; 2024)$.
 - $A(a; 0)$ là tọa độ đỉnh của parabol $(P) : y = x^2 + 2$.
 - $\lim_{x \rightarrow b} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) = 3$.
- ❖ **Câu 7.** Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con.
- Phương trình thể hiện tỷ lệ tăng trưởng là $300 = 100 \cdot e^{5r}$.
 - Tỉ lệ tăng trưởng của loại vi khuẩn này là $r = \ln \frac{3}{5}$ mỗi giờ.

- c) Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100 \cdot e^{10 \cdot \frac{\ln 3}{5}} = 900$ con.
 d) Phải cần ít nhất 20 giờ để số con vi khuẩn lớn hơn 10000 con.

❖ **Câu 8.** Cô Minh lần đầu gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với kỳ hạn 3 tháng, lãi suất 2% một quý theo hình thức lãi kép.

- a) Sau 6 tháng cô Minh có tổng số tiền là 104,04 triệu.
 b) Để số tiền nhận được là 150 triệu thì cô Minh phải gửi ngân hàng 18 quý.
 c) Sau đúng 6 tháng cô Minh gửi thêm 100 triệu đồng với kỳ hạn và lãi suất như trước đó. Tổng số tiền cô Minh nhận được 1 năm sau khi gửi thêm tiền gần nhất là 216 triệu.
 d) Để nhận được số tiền 200 triệu trong 30 tháng với lãi suất như trên thì ban đầu cô Minh phải gửi ít nhất 164 triệu.

❖ **Câu 9.** Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được cho bởi công thức $m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$; trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu, $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t và T là chu kỳ bán rã. Hạt nhân Poloni là chất phóng xạ α có chu kỳ bán rã là 138 ngày. Giả sử lúc đầu có 100 gam Poloni.

- a) Sau 138 ngày thì khối lượng Poloni còn lại là 50 (gam).
 b) Khối lượng Poloni còn lại sau 30 ngày nhiều hơn 85 (gam).
 c) Kể từ ngày thứ 55 trở đi thì khối lượng Poloni còn lại ít hơn 75 (gam).
 d) Kể từ ngày thứ 117 trở đi thì khối lượng Poloni mất đi nhiều hơn 80% so với khối lượng Poloni còn lại.

❖ **Câu 10.** Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililit nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 4000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 1000. Xét tính Đúng Sai các mệnh đề sau.

- a) α nằm trong khoảng (1;2).
 b) Sau 3 giờ 30 phút thì lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước ít hơn 500.
 c) Lượng vi khuẩn mất đi trong mỗi mililit trong khoảng thời gian từ 1 giờ đến 2,5 giờ tính từ lúc dùng thuốc thì lớn hơn 1200.
 d) Lượng vi khuẩn sau khoảng 1,32 giờ sẽ bằng 40% lượng vi khuẩn ban đầu.

 **3** Tự luận

❖ **Bài 1.** Giải các phương trình sau

- a) $3^{x-1} = 27$; b) $100^{2x^2-3} = 0,1^{2x^2-18}$; c) $\sqrt{3}e^{3x} = 1$; d) $5^x = 3^{2x-1}$.

❖ **Bài 2.** Giải các phương trình sau. Làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn.

- a) $3^{x+2} = 7$; b) $3 \cdot 10^{2x+1} = 5$; c) $10^{1-2x} = 100000$.

❖ **Bài 3.** Giải mỗi phương trình sau

- a) $(0,3)^{x-3} = 1$; b) $5^{3x-2} = 25$; c) $9^{x-2} = 243^{x+1}$;
 d) $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) = -3$; e) $\log_5(3x-5) = \log_5(2x+1)$; f) $\log_{\frac{1}{7}}(x+9) = \log_{\frac{1}{7}}(2x-1)$.

Bài 4. Giải các phương trình sau

a) $\log_6(4x+4) = 2.$

b) $\log_3 x - \log_3(x-2) = 1.$

Bài 5. Giải các phương trình sau

a) $\log(x+1) = 2;$

b) $2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2;$

c) $\ln x + \ln(x-1) = \ln 4x;$

d) $\log_3(x^2 - 3x + 2) = \log_3(2x - 4).$

Bài 6. Giải các phương trình sau $\log_2(4^x + 4) = x - \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 3)$

Bài 7. Giải các bất phương trình sau

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \leq 9;$

b) $4^x > 2^{x-2};$

c) $4^x < 2^{x+1};$

d) $\left(\sqrt[3]{5}\right)^{x-1} < 5^{x+3}.$

Bài 8. Giải các bất phương trình sau

a) $\log_2(x-2) < 2.$

b) $\log(x+1) \geq \log(2x-1).$

Bài 9. Giải các bất phương trình sau

a) $0,1^{2-x} > 0,1^{4+2x};$

b) $2 \cdot 5^{2x+1} \leq 3;$

c) $\log_3(x+7) \geq -1.$

Bài 10. Giải mỗi bất phương trình sau

a) $3^x > \frac{1}{243};$

b) $\left(\frac{2}{3}\right)^{3x-7} \leq \frac{3}{2};$

c) $4^{x+3} \geq 32^x;$

d) $\log(x-1) < 0;$

e) $\log_{\frac{1}{2}}(2x-1) \geq \log_{\frac{1}{2}}(x+3);$

f) $\ln(x+3) \geq \ln(2x-8).$

Bài 11. Tìm tất cả các số nguyên x thỏa mãn $\log_3(x-2)\log_3(x-1) < 0.$

Bài 12. Cho phương trình $\log_{\sqrt{3}}(x-2) + \log_3(x-4)^2 = 0.$ Gọi S là tổng các nghiệm của phương trình, khi đó $S = a + b\sqrt{2}$ (với a, b là các số nguyên). Tính giá trị của biểu thức $Q = ab.$

Bài 13.

a) Giải phương trình $4^{x^2-3x+2} + 4^{2x^2+6x+5} = 4^{3x^2+3x+7} + 1.$

b) Tìm m để phương trình $7^{mx^2+2x} = 7^{2mx-m}$ có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn

$$\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = -2.$$

Bài 14. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1}{3^x - 9};$

c) $y = \log\left(\frac{1}{5-x}\right);$

b) $y = \ln(4-x^2);$

d) $y = \frac{2}{\log_4(x-1)}.$

Bài 15. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \sqrt{1 + \log_{0,8}(x-2)}.$

Bài 16. Bác Minh gửi tiết kiệm 500 triệu đồng ở một ngân hàng với lãi suất không đổi 7,5% một năm theo thể thức lãi kép kì hạn 12 tháng. Tổng số tiền bác Minh thu được (cả vốn lẫn lãi) sau n năm là:

$$A = 500 \cdot (1 + 0,075)^n \text{ (triệu đồng).}$$

Tính thời gian tối thiểu gửi tiết kiệm để bác Minh thu được ít nhất 800 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Bài 17. Số lượng vi khuẩn ban đầu trong một mẻ nuôi cấy là 500 con. Người ta lấy một mẫu vi khuẩn trong mẻ nuôi cấy đó, đếm số lượng vi khuẩn và thấy rằng tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn là 40% mỗi giờ. Khi đó số lượng vi khuẩn $N(t)$ sau t giờ nuôi cấy được ước tính bằng công thức sau:

$$N(t) = 500e^{0,4t}.$$

Hỏi sau bao nhiêu giờ nuôi cấy, số lượng vi khuẩn vượt mức 80000 con?

Bài 18. Giả sử nhiệt độ T ($^{\circ}\text{C}$) của một vật giảm dần theo thời gian cho bởi công thức:

$$T = 25 + 70e^{-0,5t},$$

trong đó thời gian t được tính bằng phút.

- Tìm nhiệt độ ban đầu của vật.
- Sau bao lâu nhiệt độ của vật còn lại 30°C ?

Bài 19. Chất phóng xạ polonium-210 có chu kì bán rã là 138 ngày. Điều này có nghĩa là cứ sau 138 ngày, lượng polonium còn lại trong một mẫu chỉ bằng một nửa lượng ban đầu. Một mẫu 100 g có khối lượng polonium-210 còn lại sau t ngày được tính theo công thức

$$M(t) = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{138}} \text{ (g).}$$

- Khối lượng polonium-210 còn lại bao nhiêu sau 2 năm?
- Sau bao lâu thì còn lại 40 g polonium-210?

Bài 20. Nhắc lại rằng, mức cường độ âm L được tính bằng công thức $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0}\right)$ (dB), trong đó I là cường độ của âm tính bằng W/m^2 và $I_0 = 10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$.

- Một giáo viên đang giảng bài trong lớp học có mức cường độ âm là 50 dB. Cường độ âm của giọng nói giáo viên bằng bao nhiêu?
- Mức cường độ âm trong một nhà xưởng thay đổi trong khoảng từ 75 dB đến 90 dB. Cường độ âm trong nhà xưởng này thay đổi trong khoảng nào?

Bài 21. Một người gửi ngân hàng 100 triệu đồng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất là x %/năm ($x > 0$). Sau 3 năm, người đó rút được cả gốc và lãi là 119,1016 triệu đồng. Tìm x , biết rằng lãi suất không thay đổi qua các năm và người đó không rút tiền ra trong suốt thời gian gửi.

Bài 22. Sử dụng công thức tính mức cường độ âm L ở ví dụ 14, hãy tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được, biết rằng tai người có thể nghe được âm với cường độ âm từ $10^{-12} \text{ W}/\text{m}^2$ đến $10 \text{ W}/\text{m}^2$.

Bài 23. Tốc độ của gió S (dặm/giờ) gần tâm của một cơn lốc xoáy được tính bởi công thức $S = 93 \log d + 65$, trong đó d (dặm) là quãng đường cơn lốc xoáy đó di chuyển được. Tính quãng đường cơn lốc xoáy đã di chuyển được, biết tốc độ của gió ở gần tâm bằng 140 dặm/giờ.

☞ **Bài 24.** Sự tăng trưởng của một quần thể vi khuẩn được tính theo công thức $S = a \cdot 5^{rt}$ trong đó a là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 21 con, sau 24 giờ là 525 con. Hỏi tỉ lệ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn là bao nhiêu?

☞ **Bài 25.** Với nước biển có nồng độ muối 30%, nhiệt độ $T(^{\circ}\text{C})$ của nước biển được tính bởi công thức $T = 7,9 \ln(1,0245 - d) + 61,84$, ở đó $d(\text{g}/\text{cm}^3)$ là khối lượng riêng của nước biển. (Nguồn: Ron Larson, *Intermediate Algebra*, Cengage). Biết vùng biển khơi mặt ở một khu vực có nồng độ muối 30% và nhiệt độ là 8°C . Tính khối lượng riêng của nước biển ở vùng biển đó (làm tròn kết quả đến hàng phần chục nghìn).

☞ **Bài 26.** Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ ^{14}C có trong mẫu vật tại thời điểm t (năm) (so với thời điểm ban đầu $t = 0$), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ $H = H_0 e^{-\lambda t}$ (đơn vị là Becquerel, kí hiệu Bq) với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ, $T = 5730$ (năm) (Nguồn: Vật lí 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2014). Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là 0,215 Bq. Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là 0,250 Bq. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

☞ **Bài 27.** Để quảng bá cho sản phẩm A, một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: nếu sau n lần quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức

$$P(n) = \frac{1}{1 + 49e^{-0,015n}}.$$

Hỏi cần phát ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

☞ **Bài 28.** Dân số thế giới được dự đoán theo công thức $S = A \cdot e^{Nr}$ (trong đó A : là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm). Theo số liệu thực tế, dân số thế giới năm 1950 là 2560 triệu người; dân số thế giới năm 1980 là 3040 triệu người. Hãy dự đoán dân số thế giới năm 2025?

☞ **Bài 29.** Số lượng của loại vi khuẩn A trong một phòng thí nghiệm ước tính theo công thức $S(t) = S_0 2^t$ trong đó S_0 là số lượng vi khuẩn A ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn A có sau t phút. Biết sau 3 phút thì số lượng vi khuẩn A là 625 nghìn con. Hỏi sau bao lâu, kể từ lúc ban đầu, số lượng vi khuẩn A là 10 triệu con?

☞ **Bài 30.** Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A?

☞ **Bài 31.** Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililit nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit có 9 000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 6 000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1 000?

☞ **Bài 32.** Cho x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $\log_9 x = \log_6 y = \log_4(x + y)$. Biết rằng $\frac{x}{y} = \frac{-a + \sqrt{b}}{2}$ với a, b là các số nguyên dương. Tính giá trị $a + b$.

§5 ÔN TẬP CHƯƠNG 6

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho hai số thực dương x, y và hai số thực α, β tùy ý. Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A) $x^\alpha \cdot x^\beta = x^{\alpha+\beta}$. (B) $x^\alpha \cdot y^\beta = (xy)^{\alpha+\beta}$. (C) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha \cdot \beta}$. (D) $(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha$.

❖ **Câu 2.** Rút gọn biểu thức $\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$: $x^{\frac{5}{8}}$ ($x > 0$) ta được

- (A) $\sqrt[4]{x}$. (B) \sqrt{x} . (C) $\sqrt[3]{x}$. (D) $\sqrt[5]{x}$.

❖ **Câu 3.** Cho hai số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $\log_a(a^3b^2) = 3 + \log_a b$. (B) $\log_a(a^3b^2) = 3 + 2\log_a b$.
 (C) $\log_a(a^3b^2) = \frac{3}{2} + \log_a b$. (D) $\log_a(a^3b^2) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\log_a b$.

❖ **Câu 4.** Cho bốn số thực dương a, b, x, y với $a, b \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A) $\log_a(xy) = \log_a x + \log_b y$. (B) $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
 (C) $\log_a \frac{1}{x} = \frac{1}{\log_a x}$. (D) $\log_a b \cdot \log_b x = \log_a x$.

❖ **Câu 5.** Đặt $\log_2 5 = a, \log_3 5 = b$. Khi đó, $\log_6 5$ tính theo a và b bằng

- (A) $\frac{ab}{a+b}$. (B) $\frac{1}{a+b}$. (C) $a^2 + b^2$. (D) $a + b$.

❖ **Câu 6.** Cho hàm số $y = 2^x$. Khẳng định nào sau đây là sai?

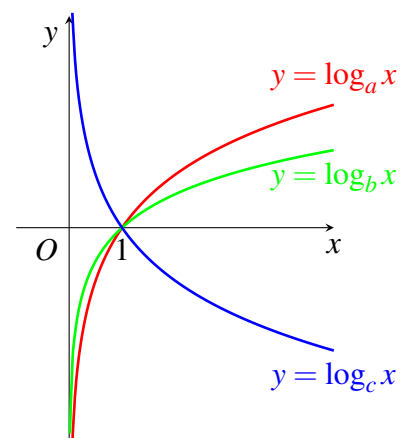
- (A) Tập xác định của hàm số là \mathbb{R} .
 (B) Tập giá trị của hàm số là $(0; +\infty)$.
 (C) Đồ thị của hàm số cắt trục Ox tại đúng một điểm.
 (D) Hàm số đồng biến trên tập xác định của nó.

❖ **Câu 7.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó?

- (A) $y = \log_{0,5} x$. (B) $y = e^{-x}$. (C) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$. (D) $y = \ln x$.

❖ **Câu 8.** Cho đồ thị ba hàm số $y = \log_a x, y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ như hình bên. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $a > b > c$. (B) $b > a > c$. (C) $a > c > b$. (D) $b > c > a$.



❖ **Câu 9.** Điều kiện xác định của x^{-3} là

- (A) $x \in \mathbb{R}$. (B) $x \geq 0$. (C) $x \neq 0$. (D) $x > 0$.

❖ **Câu 10.** Điều kiện xác định của $x^{\frac{3}{5}}$ là

- (A) $x \in \mathbb{R}$. (B) $x \geq 0$. (C) $x \neq 0$. (D) $x > 0$.

❖ **Câu 11.** Tập xác định của hàm số $y = \log_{0,5}(x^2 - 2x + 1)$ là

- (A) \mathbb{R} . (B) $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(1; +\infty)$.

❖ **Câu 12.** Hàm số nào sau đây đồng biến trên tập xác định của nó

- (A) $y = (0,5)^x$. (B) $y = \left(\frac{2}{3}\right)^x$. (C) $y = (\sqrt{2})^x$. (D) $y = \left(\frac{e}{\pi}\right)^x$.

❖ **Câu 13.** Hàm số nào sau đây nghịch biến trên tập xác định của nó?

- (A) $y = \log_3 x$. (B) $y = \log_{\sqrt{3}} x$. (C) $y = \log_{\frac{1}{e}} x$. (D) $y = \log_{\pi} x$.

❖ **Câu 14.** Nếu $3^x = 5$ thì 3^{2x} bằng

- (A) 15. (B) 125. (C) 10. (D) 25.

❖ **Câu 15.** Cho $A = 4^{\log_2 3}$. Khi đó giá trị của A bằng

- (A) 9. (B) 6. (C) $\sqrt{3}$. (D) 81.

❖ **Câu 16.** Nếu $\log_a b = 3$ thì $\log_a b^2$ bằng

- (A) 9. (B) 5. (C) 6. (D) 8.

❖ **Câu 17.** Nghiệm của phương trình $3^{2x-5} = 27$ là

- (A) 1. (B) 4. (C) 6. (D) 7.

❖ **Câu 18.** Nghiệm của phương trình $\log_{0,5}(2-x) = -1$ là

- (A) 0. (B) 2,5. (C) 1,5. (D) 2.

❖ **Câu 19.** Tập nghiệm của bất phương trình $(0,2)^x > 1$ là

- (A) $(-\infty; 0,2)$. (B) $(0,2; +\infty)$. (C) $(0; +\infty)$. (D) $(-\infty; 0)$.

❖ **Câu 20.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{4}} x > -2$ là

- (A) $(-\infty; 16)$. (B) $(16; +\infty)$. (C) $(0; 16)$. (D) $(-\infty; 0)$.

❖ **Câu 21.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{3}}(1-x) > \log_{\frac{1}{3}}(2x+3)$.

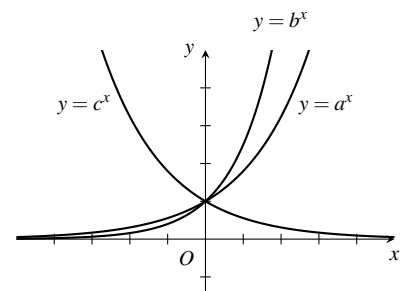
- (A) $S = \left(-\infty; -\frac{2}{3}\right)$. (B) $S = \left(-\frac{2}{3}; +\infty\right)$. (C) $S = \left(-\frac{2}{3}; 1\right)$. (D) $S = (1; +\infty)$.

❖ **Câu 22.** Cho $a = \log_7 5$; $b = \log_3 5$. Biểu thức $M = \log_{21} 5$ bằng

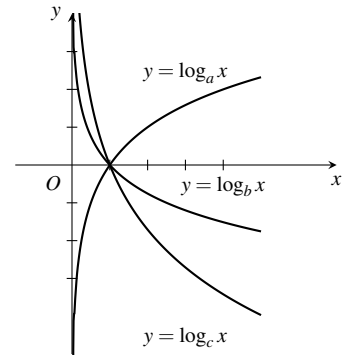
- (A) $\frac{ab}{a+b}$. (B) ab . (C) $\frac{1}{ab}$. (D) $\frac{a+b}{ab}$.

❖ **Câu 23.** Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị của ba hàm số mũ $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho bởi hình sau. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c ?

- (A) $c < a < b$. (B) $c < b < a$. (C) $a < b < c$. (D) $b < c < a$.



❖ **Câu 24.** Cho ba số thực dương a, b, c khác 1 và đồ thị của ba hàm số lôgarit $y = \log_a x, y = \log_b x, y = \log_c x$ được cho bởi hình bên. Kết luận nào sau đây là đúng đối với ba số a, b, c ?



- (A) $c < a < b.$ (B) $c < b < a.$ (C) $a < b < c.$ (D) $b < c < a.$

❖ **Câu 25.** Rút gọn biểu thức $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]^{\frac{1}{4}} \cdot (\sqrt{3})^5$, ta được

- (A) $\sqrt{3}.$ (B) $3\sqrt{3}.$ (C) $\frac{1}{\sqrt{3}}.$ (D) 9.

❖ **Câu 26.** Nếu $2^\alpha = 9$ thì $\left(\frac{1}{16}\right)^{\frac{\alpha}{8}}$ có giá trị bằng

- (A) $\frac{1}{3}.$ (B) 3. (C) $\frac{1}{9}.$ (D) $\frac{1}{\sqrt{3}}.$

❖ **Câu 27.** Nếu $a^{\frac{1}{2}} = b$ ($a > 0, a \neq 1$) thì

- (A) $\log_{\frac{1}{2}} a = b.$ (B) $2\log_a b = 1.$ (C) $\log_a \frac{1}{2} = b.$ (D) $\log_{\frac{1}{2}} b = a.$

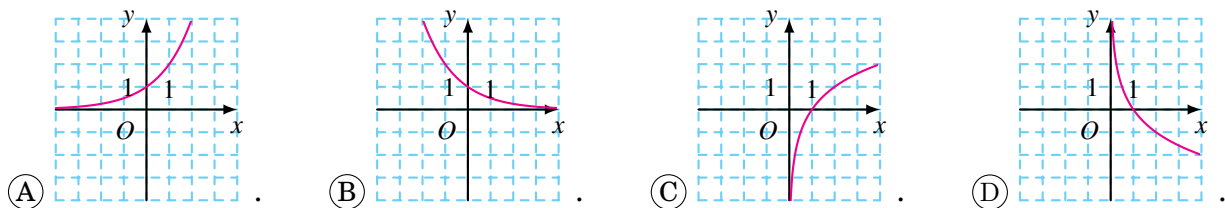
❖ **Câu 28.** Nếu $x = \log_3 4 + \log_9 4$ thì 3^x có giá trị bằng

- (A) 6. (B) 8. (C) 16. (D) 64.

❖ **Câu 29.** Cho α, β là hai số thực với $\alpha < \beta$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $(0, 3)^\alpha < (0, 3)^\beta.$ (B) $\pi^\alpha \geq \pi^\beta.$ (C) $(\sqrt{2})^\alpha < (\sqrt{2})^\beta.$ (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^\beta > \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha.$

❖ **Câu 30.** Hình nào vẽ đồ thị của hàm số $y = \log_{\frac{1}{2}} x$?



❖ **Câu 31.** Phương trình $0,1^{2x-1} = 100$ có nghiệm là

- (A) $-\frac{1}{2}.$ (B) $\frac{1}{3}.$ (C) $1\frac{1}{2}.$ (D) $2\frac{1}{3}.$

❖ **Câu 32.** Tập nghiệm của bất phương trình $0,5^{3x-1} > 0,25$ là

- (A) $(-\infty; 1).$ (B) $(1; +\infty).$ (C) $(0; 1).$ (D) $(-\infty; -\frac{1}{3}).$

❖ **Câu 33.** Nếu $\log x = 2\log 5 - \log 2$ thì

- (A) $x = 8.$ (B) $x = 23.$ (C) $x = 12,5.$ (D) $x = 5.$

❖ **Câu 34.** Số nguyên x nhỏ nhất thỏa mãn $\log_{0,1}(1-2x) > -1$ là

- (A) $x = 0.$ (B) $x = 1.$ (C) $x = -5.$ (D) $x = -4.$

❖ **Câu 35.** Xét tất cả các số dương a và b thỏa mãn $\log_2 a = \log_8(ab)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- (A) $a = b^2$. (B) $a^3 = b$. (C) $a = b$. (D) $a^2 = b$.

❖ **Câu 36.** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \log_3(x^2 - 4x - m + 1)$ xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

- (A) $m < -3$. (B) $m > 3$. (C) $m \geq -3$. (D) $m < 3$.

❖ **Câu 37.** Bất phương trình $\log_4(x^2 - 4x) > \log_2(8 - x)$ có bao nhiêu nghiệm nguyên?

- (A) vô số. (B) 2. (C) 3. (D) 1.

❖ **Câu 38.** Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_2(11 - 5x) - 3\log_8(x - 1) \geq 0$ là

- (A) $S = \left(1; \frac{5}{3}\right]$. (B) $S = (1; 2]$. (C) $S = \left[2; \frac{11}{5}\right)$. (D) $S = \left[\frac{5}{3}; \frac{11}{5}\right)$.

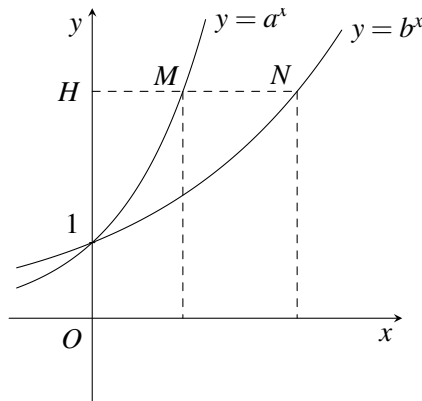
❖ **Câu 39.** Biết $4^x + 4^{-x} = 14$, tính giá trị của biểu thức $P = 2^x + 2^{-x}$.

- (A) 4. (B) 16. (C) $\sqrt{17}$. (D) ± 4 .

❖ **Câu 40.** Với hai số thực dương a, b tùy ý và $\frac{\log_3 5 \log_5 a}{1 + \log_3 2} - \log_6 b = 2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

- (A) $a = b \log_6 2$. (B) $a = 36b$. (C) $2a + 3b = 0$. (D) $a = b \log_6 3$.

❖ **Câu 41.** Cho a, b là các số thực dương khác 1, đường thẳng d song song trục hoành cắt trục tung, đồ thị hàm số $y = a^x$, đồ thị hàm số $y = b^x$ lần lượt tại H, M, N (như hình bên). Biết $HM = 3MN$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

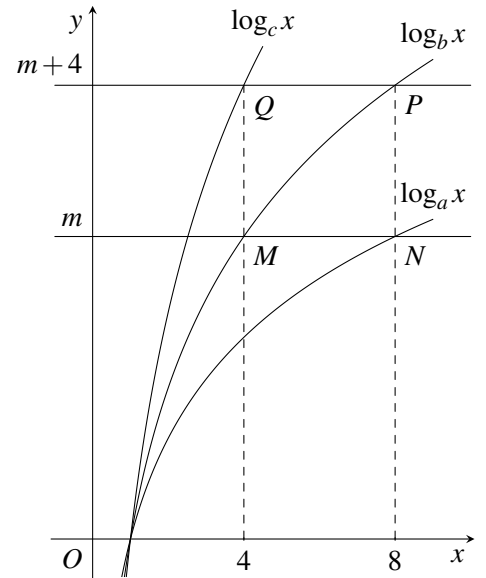


- (A) $4a = 3b$. (B) $b^4 = a^3$. (C) $b^3 = a^4$. (D) $3a = 4b$.

❖ **Câu 42.** Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ độ âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ độ âm là dexinben (viết tắt là dB). Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức là $L(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} \text{ w/m}^2$). Tiếng ồn phát ra từ tiếng gõ phím liên tục ở một bàn phím của máy vi tính, có cường độ âm đo được là 10^{-5} w/m^2 . Giả sử trong phòng làm việc của một công ty có hai nhân viên văn phòng cùng thực hiện thao tác gõ phím trên hai bàn phím máy vi tính giống nhau thì mức cường độ âm tổng cộng do cả hai bàn phím phát ra cùng lúc là bao nhiêu?

- (A) 73 dB. (B) 140 dB. (C) 100 dB. (D) 72 dB.

❖ **Câu 43.** Trong hình vẽ bên các đồ thị hàm số $y = \log_a x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$ với $(0 < a, b, c \neq 1)$ cắt các đường thẳng $x = 4$, $x = 8$ tạo thành hình vuông $MNPQ$ có cạnh bằng 4. Biết rằng $abc = 2^{\frac{x}{y}}$ với $x, y \in \mathbb{R}^+$ và $\frac{x}{y}$ tối giản, giá trị của $y - x$ bằng



- (A) 34. (B) 5. (C) 19. (D) 43.

❖ **Câu 44.** Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = Ae^{rt}$ trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt nam là 93 671 600 người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81% dự báo dân số Việt nam năm 2035 là bao nhiêu người?

- (A) 109 256 100. (B) 108 374 700. (C) 107 500 500. (D) 108 311 100.

❖ **Câu 45.** Trong vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kì bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Cho biết chu kì bán rã của một chất phóng xạ là 24 giờ (1 ngày đêm). Hỏi 250 gam chất đó sẽ còn lại bao nhiêu sau 3,5 ngày đêm? (Kết quả làm tròn đến 3 chữ số thập phân sau dấu phẩy)

- (A) 22,097 gam. (B) 23,097 gam. (C) 20,097 gam. (D) 24,097 gam.

❖ **Câu 46.** Sự tăng trưởng dân số được ước tính theo công thức sau $A = P \cdot e^{r \cdot t}$, trong đó P là dân số năm lấy làm mốc, A là dân số sau t năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng vào năm 2020 dân số Việt Nam khoảng 97,34 triệu người và tỉ lệ tăng dân số là 0,91%. Nếu tỉ lệ tăng dân số này giữ nguyên, hãy ước tính dân số Việt Nam vào năm 2030.

- (A) 106,61 triệu người. (B) 105,61 triệu người.
(C) 241,82 triệu người. (D) 100 triệu người.

2 Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho các biểu thức sau: $A = (a^3 \sqrt{a})^{\log_a b} + (\sqrt[3]{b^2})^{\log_b a}$ với $\begin{cases} a, b > 0 \\ a \neq 1, b \neq 1 \end{cases}$ và

$$B = \log \frac{a}{b} + \log \frac{b}{c} + \log \frac{c}{d} - \log \frac{a}{d}$$

với a, b, c, d là các số dương.

Khi đó

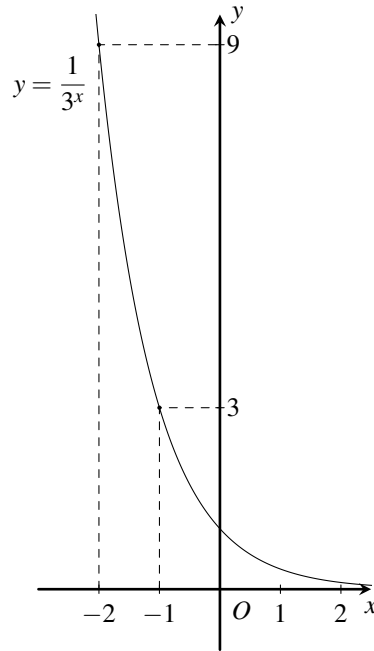
- a) $A = \sqrt[3]{a} + \sqrt{b^4}$. b) $B = \frac{a}{b}$.
c) $A + B\sqrt{a} = \sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b^7}$. d) $A - B\sqrt{b} = 2\sqrt[3]{a^2} + \sqrt{b^7}$.

❖ **Câu 2.** Cho hàm số $y = \log_5 x$ có đồ thị (C) . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Tập xác định của hàm số $y = \log_5 x$ là $D = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$.
- c) Đồ thị (C) nằm phía trên trục hoành.
- d) Đồ thị (C) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3^x}$.

- a) Hàm số có tập xác định là $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số đồng biến trên $(-\infty; +\infty)$.
- c) Hàm số đi qua điểm $A(-2; -9)$.
- d) Hàm số có đồ thị như hình sau.



❖ **Câu 4.** Cho hàm số $y = \log_4 x$. Khi đó:

- a) Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.
- b) Hàm số có tập giá trị $T = \mathbb{R}$.
- c) Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; +\infty)$.
- d) Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 1$ tại điểm có hoành độ bằng 3.

❖ **Câu 5.** Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

- a) Giá trị còn lại của máy sau 3 năm sử dụng là 250 triệu đồng.
- b) Giá trị còn lại của máy sau 4 năm 3 tháng sử dụng gần bằng 180 triệu đồng.
- c) Sau 2 năm đưa vào sử dụng thì giá trị của chiếc máy giảm 185 triệu đồng so với giá trị ban đầu.
- d) Sau 1 năm đưa vào sử dụng thì giá trị của chiếc máy giảm 20,6% so với giá trị ban đầu của nó.

❖ **Câu 6.** Cho $\log_a b = 4$, với a và b là hai số dương khác 1.

- a) Giá trị của $\log_{a^2} b$ bằng 8.
- b) Giá trị của $\log_a (a^2 b)$ bằng 6.
- c) Giá trị của $\log_b \sqrt[3]{a}$ bằng $\frac{1}{12}$.
- d) Giá trị của $\log_{a^3 b^2} (a^2 b^3)$ bằng 4.

❖ **Câu 7.** Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian giữa hai nốt nhạc có tần số a và b ($a > b$) là $n = 1200 \cdot \log_2 \frac{a}{b}$.

- Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 443 Hz và 415 Hz là 131 cent.
- Khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc có tần số 345 Hz và 398 Hz nằm trong khoảng (246;250).
- Giả sử khoảng thời gian là 230 cent và tần số đầu là 328 Hz thì tần số cuối cùng là 287,2 Hz.
- Với tần số đầu không vượt quá 355 Hz và tần số cuối cùng là 384 Hz thì khoảng thời gian chênh lệch giữa hai nốt nhạc không vượt quá 178 cent.

❖ **Câu 8.** Để đặc trưng cho độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ của âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ của âm là đề-xi-ben. Khi đó mức cường độ L của âm được tính theo công thức $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$. Trong đó, I là cường độ của âm tại thời điểm đang xét, I_0 cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12}$ (w/m²)).

- Một cuộc trò chuyện bình thường trong lớp học có mức cường độ âm trung bình là 68 dB. Cường độ âm tương ứng ra lớn hơn $6,5 \cdot 10^{-6}$ (w/m²).
- Hai cây đàn ghi ta giống nhau, cùng hòa tấu một bản nhạc. Mỗi chiếc phát ra âm có mức âm trung bình là 60 dB. Mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra xấp xỉ 63 dB.
- Tiếng ồn phát ra ở xưởng cưa ở mức cường độ âm đo được là 93 dB do 7 chiếc cưa máy giống nhau cùng hoạt động gây ra. Giả sử có 3 chiếc cưa máy đột ngột ngừng hoạt động thì mức cường độ âm trong xưởng lúc này nhỏ hơn 90 dB. .
- Tiếng ồn phát ra từ tiếng phím liên tục ở một bàn phím của máy tính có cường độ âm đo được là 10^{-5} (w/m²). Giả sử phòng làm việc của một công ty có hai nhân viên văn phòng cùng thực hiện thao tác gõ phím trên hai bàn phím máy tính giống nhau thì mức cường độ âm tổng cộng đo cả hai bàn phím phát ra cùng lúc là 70 dB.

❖ **Câu 9.** Một người gửi tiết kiệm vào ngân hàng 1 tỷ đồng. Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- 8 tháng sau người đó lấy về tất cả số tiền cả gốc và lãi là 1 020 175 878 đồng.
- 2 năm sau thì người đó thu được số tiền số tiền cả gốc và lãi là 1 127 159 776 đồng.
- Kể từ lúc gửi sau mỗi tháng vào ngày ngân hàng tính lãi người đó rút 10 triệu đồng để chi tiêu thì đến 139 tháng người đó rút hết tiền trong tài khoản.
- Chưa đầy một năm thì lãi suất tăng lên thành 1,15%/ tháng. Tiếp theo, sáu tháng sau lãi suất chỉ còn 0,9%/ tháng. Người đó tiếp tục gửi thêm một số tháng nữa rồi rút cả vốn lẫn lãi được 1 143 816 503 đồng. Vậy người đó gửi tiền vào ngân hàng với tổng thời gian là 16 tháng.

3 Tự luận

❖ **Bài 1.** Cho $a > 0, a \neq 1$ và $a^{\frac{3}{5}} = b$

- Viết $a^6; a^3 b; \frac{a^9}{b^9}$ theo lũy thừa cơ số b .
- Tính $\log_a b; \log_a (a^2 b^5); \log_{\sqrt[3]{a}} \left(\frac{a}{b}\right)$.

❖ **Bài 2.** Cho $0 < a \neq 1$. Tính giá trị của biểu thức $B = \log_a \left(\frac{a^2 \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[4]{a}} \right) + a^{2 \log_a} \frac{\sqrt{105}}{30}$.

Bài 3. Viết các biểu thức sau về lũy thừa cơ số a

a) $A = \sqrt[3]{5\sqrt{\frac{1}{5}}}$ với $a = 5$;

b) $B = \frac{4\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{4}}$ với $a = \sqrt{2}$.

Bài 4. Biết $4^\alpha + 4^{-\alpha} = 5$. Tính giá trị của các biểu thức

a) $2^\alpha + 2^{-\alpha}$;

b) $4^{2\alpha} + 4^{-2\alpha}$.

Bài 5. Tính giá trị của các biểu thức

a) $\log_2 72 - \frac{1}{2}(\log_2 3 + \log_2 27)$; b) $5^{\log_2 40 - \log_2 5}$; c) $3^{2 + \log_9 2}$.

Bài 6. Biết rằng $5^x = 3$ và $3^y = 5$. Không sử dụng máy tính cầm tay, tính giá trị của xy .

Bài 7. Viết công thức biểu thị y theo x , biết $2\log_2 y = 2 + \frac{1}{2}\log_2 x$.

Bài 8. Cho x, y là các số thực dương khác 1. Rút gọn mỗi biểu thức sau:

a) $A = \frac{x^{\frac{5}{4}} \cdot y + x \cdot y^{\frac{5}{4}}}{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y}}$;

b) $B = \left(\sqrt[7]{\frac{x}{y}} \sqrt[5]{\frac{y}{x}} \right)^{\frac{35}{4}}$;

c) $P = \frac{x^{3\sqrt{3}-1}}{x^{\sqrt{3}}-1} - \frac{x^{2\sqrt{3}} + x^{\sqrt{3}}}{x^{\sqrt{3}}}$;

d) $Q = \frac{x^{2\sqrt{2}} - y^{2\sqrt{3}}}{(x^{\sqrt{2}} - y^{\sqrt{3}})^2} + 1$.

Bài 9. Tìm tập xác định của mỗi hàm số sau:

a) $y = \frac{5}{2x-3}$;

b) $y = \sqrt{25-5^x}$;

c) $y = \frac{x}{1-\ln x}$;

d) $y = \sqrt{1-\log_3 x}$.

Bài 10. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

① $y = \sqrt{4^x - 2^{x+1}}$;

③ $y = \frac{\log_2 x}{3 - \log_2 x}$;

② $y = \ln(1 - \ln x)$;

④ $y = \frac{1}{\log_{0,2} x + 2}$.

Bài 11. Giải các phương trình sau:

① $3^{1-2x} = 4^x$;

② $\log_3(x+1) + \log_3(x+4) = 2$.

Bài 12. Giải mỗi phương trình sau:

a) $3^{x^2-4x+5} = 9$;

b) $0,5^{2x-4} = 4$;

c) $\log_3(2x-1) = 3$;

d) $\log x + \log(x-3) = 1$;

e) $0,05^{x-3} = (2\sqrt{5})^x$;

f) $\log_x 8 = \frac{3}{4}$;

g) $3^{x+4} + 3 \cdot 5^{x+3} = 5^{x+4} + 3^{x+3}$;

h) $\log_7(x-1) \cdot \log_7 x = \log_7 x$.

Bài 13. Giải mỗi bất phương trình sau:

a) $5^x < 0,125$;

b) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x+1} \geq 3$;

c) $\log_{0,3} x > 0$;

d) $\ln(x+4) > \ln(2x-3)$.

Bài 14. Giải các phương trình sau

a) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-2} = \sqrt{8}$;

b) $9^{2x-1} = 81 \cdot 27^x$;

c) $2\log_5(x-2) = \log_5 9$;

d) $\log_2(3x+1) = 2 - \log_2(x-1)$.

Bài 15. Giải các bất phương trình

a) $\left(\frac{1}{9}\right)^{x+1} > \frac{1}{81}$;

b) $\left(\sqrt[4]{3}\right)^x \leq 27 \cdot 3^x$;

c) $\log_2(x+1) \leq \log_2(2-4x)$;

d) $\log_{\frac{1}{5}}(x^2 - 6x + 8) + \log_5(x-4) > 0$.

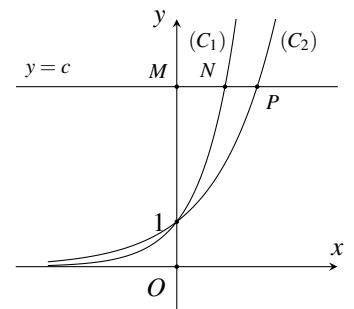
Bài 16. Có bao nhiêu số nguyên x thỏa mãn $(2^{x^2} - 4^x) [\log_3(x+25) - 3] \leq 0$?

Bài 17. Giả sử $\log_{27} 5 = a$, $\log_8 7 = b$, $\log_2 3 = c$. Biểu diễn $\log_{12} 35$ theo a và b .

Bài 18. Cho đồ thị của hàm số $y = 2^{ax+b}$ đi qua điểm $A(0;4)$ và $B(1;8)$. Tính giá trị ab .

Bài 19. Cho đồ thị của hàm số $y = \log_2(ax+b)$ đi qua điểm $A(1;3)$ và $B(9;6)$. Tính giá trị $a+3b$.

Bài 20. Cho hai hàm số $y = a^x$, $y = b^x$ với a, b là các số dương khác 1 có đồ thị là (C_1) , (C_2) như hình vẽ. Vẽ đường thẳng $y = c$, ($c > 1$) cắt trục tung và (C_1) , (C_2) lần lượt tại M, N, P . Biết rằng $S_{OMN} = 3S_{ONP}$. Tìm mối liên hệ giữa a và b .



Bài 21. Giải phương trình $\log_2 x + \log_3 x + \log_4 x = \log_{20} x$.

Bài 22. Cho số thực dương a, b thỏa mãn $\log_{16} a = \log_{20} b = \log_{25} \frac{2a-b}{3}$. Tính $\frac{a}{b}$.

Bài 23. Tìm giá trị của tham số m để phương trình $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-(m+2)x} = 5^{27}$ có hai nghiệm phân biệt a và b thỏa mãn điều kiện $\log_a(b^{\log_a b}) - 2\log_{\sqrt{a}} b + 4 = 0$.

Bài 24. Cho $x \geq 0, y \geq 0, x+y > 0$ thỏa mãn

$$2^{x^2+y^2} + 2023^{x+y} \cdot \log_2 \frac{x^2+y^2}{x+y} \leq 4^{x+y} + 2023^{x+y}.$$

Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 - 8x - 2y + 10$ (làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 25. Giải bất phương trình $(x^2 + 1) \cdot 2^{x^2-1} + 2^{x^2+x-1} - 2^x - x^2 - 1 < 0$.

Bài 26. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình

$$\frac{1}{2} \log_{\sqrt{3}}(x+3) + \frac{1}{4} \log_9(x-1)^8 = \log_3(4x).$$

Bài 27. Tính giá trị của biểu thức

$$N = \frac{1}{\log_{2^{2023}} 2023!} + \frac{1}{\log_{3^{2023}} 2023!} + \frac{1}{\log_{4^{2023}} 2023!} + \dots + \frac{1}{\log_{2023^{2023}} 2023!}$$

Bài 28. Giải phương trình $\log_2(8-x^2) + \log_{\frac{1}{2}}(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}) - 2 = 0$.

Bài 29. Cho hai số thực $a > 1, b > 1$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_b a} = \sqrt{2018}$. Tính giá

trị của biểu thức $P = \frac{1}{\log_{ab} b} - \frac{1}{\log_{ab} a}$.

Bài 30. Lạm phát là sự tăng mức giá chung một cách liên tục của hàng hoá và dịch vụ theo thời gian, tức là sự mất giá trị của một loại tiền tệ nào đó. Chẳng hạn, nếu lạm phát là 5% một năm thì sức mua của 1 triệu đồng sau một năm chỉ còn là 950 nghìn đồng (vì đã giảm mất 5% của 1 triệu đồng, tức là 50000 đồng). Nói chung, nếu tỉ lệ lạm phát trung bình là $r\%$ một năm thì tổng số tiền P ban đầu, sau n năm số tiền đó chỉ còn giá trị là

$$A = P \cdot \left(1 - \frac{r}{100}\right)^n.$$

- Nếu tỉ lệ lạm phát là 8% một năm thì sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm sẽ còn lại bao nhiêu?
- Nếu sức mua của 100 triệu đồng sau hai năm chỉ còn là 90 triệu đồng thì tỉ lệ lạm phát trung bình của hai năm đó là bao nhiêu?
- Nếu tỉ lệ lạm phát là 5% một năm thì sau bao nhiêu năm sức mua của số tiền ban đầu chỉ còn lại một nửa?

Bài 31. Giả sử quá trình nuôi cấy vi khuẩn tuân theo quy luật tăng trưởng tự do. Khi đó, nếu gọi N_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu và $N(t)$ là số lượng vi khuẩn sau t giờ thì ta có:

$$N(t) = N_0 e^{rt},$$

trong đó r là tỉ lệ tăng trưởng vi khuẩn mỗi giờ. Giả sử ban đầu có 500 con vi khuẩn và sau 1 giờ tăng lên 800 con. Hỏi:

- Sau 5 giờ thì số lượng vi khuẩn là khoảng bao nhiêu con?
- Sau bao lâu thì số lượng vi khuẩn ban đầu sẽ tăng lên gấp đôi?

Bài 32. Vào năm 1938, nhà vật lí Frank Benford đã đưa ra một phương pháp để xác định xem một bộ số đã được chọn ngẫu nhiên hay đã được chọn theo cách thủ công. Nếu bộ số này không được chọn ngẫu nhiên thì công thức Benford sau sẽ được dùng ước tính xác suất P để chữ số d là chữ số đầu tiên của bộ số đó: $P = \log \frac{d+1}{d}$. (Theo F. Benford, The Law of Anomalous Numbers, Proc. Am. Philos. Soc. 78 (1938), 551 - 572). Chẳng hạn, xác suất để chữ số đầu tiên là 9 bằng khoảng 4,6% (thay $d = 9$ trong công thức Benford để tính P).

- Viết công thức tìm chữ số d nếu cho trước xác suất P .
- Tìm chữ số có xác suất bằng 9,7% được chọn.
- Tính xác suất để chữ số đầu tiên là 1.

Bài 33. Trong một trận động đất, năng lượng giải toả E (đơn vị: Jun, kí hiệu J) tại tâm địa chấn ở M độ Richter được xác định xấp xỉ bởi công thức: $\log E \approx 11,4 + 1,5M$.

(Nguồn: Giải tích 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2021)

- Tính xấp xỉ năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter.
- Năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 8 độ Richter gấp khoảng bao nhiêu lần năng lượng giải toả tại tâm địa chấn ở 5 độ Richter?

Bài 34. Trong cây cối có chất phóng xạ $^{14}_6C$. Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ của nó bằng 86% độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó. Biết chu kì bán rã của $^{14}_6C$ là $T = 5\,730$ năm. độ phóng xạ của chất phóng xạ tại thời điểm t được cho bởi công thức $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ.

(Nguồn: Vật lí 12, NXBGD Việt Nam, 2021)

Bài 35. Thực hiện một mẻ nuôi cấy vi khuẩn với 1000 vi khuẩn ban đầu, nhà sinh học phát hiện ra số lượng vi khuẩn tăng thêm 25% sau mỗi hai ngày.

- Công thức $P(t) = P_0 \cdot a^t$ cho phép tính số lượng vi khuẩn của mẻ nuôi cấy sau t ngày kể từ thời điểm ban đầu. Xác định các tham số P_0 và a ($a > 0$). Làm tròn a đến hàng phần trăm.
- Sau 5 ngày thì số lượng vi khuẩn bằng bao nhiêu? Làm tròn kết quả đến hàng trăm.
- Sau bao nhiêu ngày thì số lượng vi khuẩn vượt gấp đôi số lượng ban đầu? Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

Bài 36. Nhắc lại rằng, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log [\text{H}^+]$, trong đó $[\text{H}^+]$ là nồng độ H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Nồng độ H^+ trong dung dịch cho biết độ acid của dung dịch đó.

- Dung dịch acid A có độ pH bằng 1,9; dung dịch acid B có độ pH bằng 2,5. Dung dịch nào có độ acid cao hơn và cao hơn bao nhiêu lần?
- Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L. Nước chảy ra từ một vòi nước có độ pH từ 6,5 đến 6,7 thì có độ acid cao hay thấp hơn nước cất?

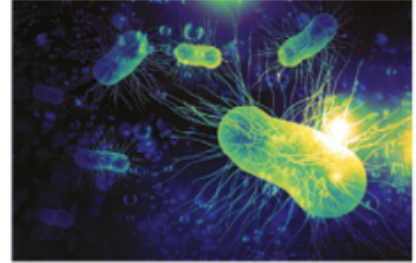
Bài 37. Các loài cây xanh trong quá trình quang hợp sẽ nhận được một lượng nhỏ cacbon 14 (một đồng vị của cacbon). Khi một bộ phận của cây nào đó bị chết thì hiện tượng quang hợp cũng ngưng và nó sẽ không nhận thêm cacbon 14 nữa. Lượng cacbon 14 của bộ phận đó sẽ phân hủy một cách chậm chạp, nó chuyển hóa thành nitơ 14. Gọi $P(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì $P(t)$ được tính theo công thức $P(t) = 100 \cdot (0,5)^{\frac{t}{5730}}$ (%). Phân tích một mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thu được lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ đó là 50%. Tìm niên đại công trình kiến trúc trên.

Bài 38. Một người gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 0,4%/ tháng. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi tháng, số tiền lãi sẽ được lập vào vốn ban đầu để tính lãi cho tháng tiếp theo. Hỏi sau 6 tháng, người đó được lĩnh số tiền bao nhiêu, nếu trong khoảng thời gian này người đó không rút tiền ra và lãi xuất không thay đổi?

Bài 39. Vào đầu mỗi tháng, ông An đều gửi vào ngân hàng số tiền cố định 30 triệu đồng theo hình thức lãi kép với lãi suất 0,6% /tháng. Tính tổng số tiền ông An có được sau tháng thứ hai. (đơn vị triệu đồng, làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 40. Một ngân hàng X quy định về số tiền nhận được của khách hàng sau n năm gửi tiền vào ngân hàng tuân theo công thức $P(n) = A(1 + 8\%)^n$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu của khách hàng. Hỏi số tiền A (triệu đồng) ít nhất mà khách hàng phải gửi là bao nhiêu để sau 3 năm khách hàng đó nhận được lớn hơn 850 triệu đồng.

Bài 41. Vi khuẩn Escherichia coli (thường được viết tắt là E.coli) là một trong những loài vi khuẩn chính kí sinh trong đường ruột của động vật máu nóng, gây tiêu chảy và các bệnh đường ruột (nguồn: <https://ylamsang.net/vi-khuan-e-co-li-gay-benh-escherichia-coli/>). Khi nuôi cấy vi khuẩn E.coli trong môi trường nước thịt ở nhiệt độ 37 độ C, cứ sau 20 phút thì một tế bào vi khuẩn phân chia thành hai tế bào. Biết số lượng tế bào nuôi cấy ban đầu là 60.



- Tìm số lượng tế bào sau 8 giờ.
- Khi nào quần thể vi khuẩn sẽ nhiều hơn 20 000 tế bào?

Bài 42. Các khí thải gây hiệu ứng nhà kính là nguyên nhân chủ yếu làm Trái đất nóng lên. Theo OECD (Tổ chức Hợp tác và Phát triển kinh tế thế giới), khi nhiệt độ Trái đất tăng lên thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm. Người ta ước tính rằng, khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm 2°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 3%; còn khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm 5°C thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm 10%. Biết rằng, nếu nhiệt độ Trái đất tăng thêm $t^\circ\text{C}$, tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm $f(t)\%$ thì $f(t) = k \cdot a^t$ trong đó k, a là các hằng số dương. Khi nhiệt độ Trái đất tăng thêm bao nhiêu độ thì tổng giá trị kinh tế toàn cầu giảm đến 25% (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

Bài 43. Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho 200 000 000 VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là 243 101 250 VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

Bài 44. Sau một tháng thi công, công trình xây dựng lớp học từ thiện cho học sinh vùng cao đã thực hiện được một khối lượng công việc. Nếu tiếp tục với tiến độ như vậy thì dự kiến sau đúng 23 tháng nữa công trình sẽ hoàn thành. Để sớm hoàn thành công trình và kịp thời đưa vào sử dụng, đơn vị xây dựng quyết định từ tháng thứ hai tăng 5% khối lượng công việc so với tháng kể trước. Hỏi công trình sẽ hoàn thành ở tháng thứ mấy sau khi khởi công?

Bài 45. Ông Bình vay vốn ngân hàng với số tiền 100 triệu đồng. Ông dự định sau đúng 5 năm thì trả hết nợ theo hình thức: sau đúng một tháng kể từ ngày vay, ông bắt đầu hoàn nợ, hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ ở mỗi lần là như nhau. Hỏi theo cách đó, số tiền a mà ông sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết lãi suất hàng tháng là 1,2% và không thay đổi trong thời gian ông hoàn nợ.

Trong chương này, chúng ta tìm hiểu về quan hệ vuông góc, góc, khoảng cách và thể tích trong Hình học không gian

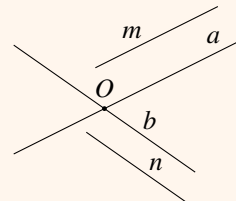
§1 HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Góc giữa hai đường thẳng



Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m, n) , là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n .



🔔 LƯU Ý.

- ◆ Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b , ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b . Khi đó $(a, b) = (a, b')$.
- ◆ Với hai đường thẳng a, b bất kì $0^\circ \leq (a, b) \leq 90^\circ$.
- ◆ Nếu a song song hoặc trùng với a' và b song song hoặc trùng với b' thì $(a, b) = (a', b')$.

2) Hai đường thẳng vuông góc



Hai đường thẳng a, b được gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $a \perp b$, nếu góc giữa chúng bằng 90° .



🔔 LƯU Ý.

- ◆ Hai đường thẳng vuông góc có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
- ◆ Cho hai đường thẳng song song, đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng

này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia. Nghĩa là:

$$\begin{cases} a \parallel b \\ c \perp a \end{cases} \Rightarrow c \perp b.$$

◇ Trong không gian, khi có hai đường thẳng phân biệt a, b cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba c thì ta chưa kết luận được $a \parallel b$ như trong hình học phẳng.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Xác định góc giữa hai đường thẳng trong không gian

Để xác định góc giữa hai đường thẳng a và b , ta có thể lấy một điểm O thuộc đường thẳng a và qua đó kẻ đường thẳng b' song song với b . Khi đó $(a, b) = (a, b')$.

⇒ Ví dụ 1

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các mặt là các hình vuông. Tính các góc (AA', CD) , $(A'C', BD)$, (AC, DC') .

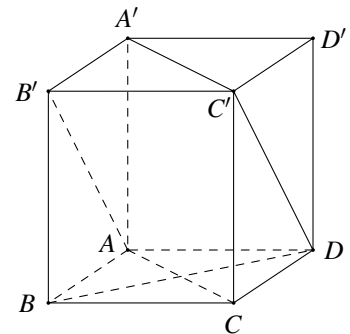
Lời giải.

Vì $CD \parallel AB$ nên $(AA', CD) = (AA', AB) = 90^\circ$.

Tứ giác $ACC'A'$ có các cặp cạnh đối bằng nhau nên nó là một hình bình hành. Do đó, $A'C' \parallel AC$. Vậy $(A'C', BD) = (AC, BD) = 90^\circ$.

Tương tự, $DC' \parallel AB'$. Vậy $(AC, DC') = (AC, AB')$.

Tam giác $AB'C$ có ba cạnh bằng nhau (vì là các đường chéo của các hình vuông có độ dài cạnh bằng nhau) nên nó là một tam giác đều. Từ đó ta có, $(AC, DC') = (AC, AB') = 60^\circ$.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau:

① AB và $A'D'$.

② AD và $A'C'$.

③ BC' và $B'D'$.

✎

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BM = 3AM$. Tính góc tạo bởi hai đường thẳng CM và BD .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 2 Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Để chứng minh hai đường thẳng Δ và Δ' vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

- ◆ $(\Delta, \Delta') = 90^\circ$.
- ◆ Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.
- ◆ Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- ◆ Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC .
- ◆ Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.

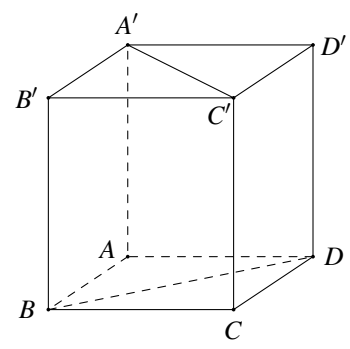
Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \Delta$ và $\Delta' \parallel d$ thì Δ' cũng vuông góc với đường thẳng Δ .

⇨ Ví dụ 2

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông. Chứng minh rằng $AB \perp CC'$, $AC \perp B'D'$.

Lời giải.

Ta có $CC' \parallel BB'$, suy ra $(AB, CC') = (AB, BB') = \widehat{ABB'} = 90^\circ$.
 Vậy $AB \perp CC'$.
 Ta có $B'D' \parallel BD$, suy ra $(AC, B'D') = (AC, BD) = 90^\circ$ (hai đường chéo của hình vuông luôn vuông góc với nhau).
 Vậy $AC \perp B'D'$.



Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC . Chứng minh rằng

- a) $SH \perp AC$. b) $AB \perp BC$.

Lời giải.

a) Do tam giác SAC cân tại S và H là trung điểm AC nên $SH \perp AC$.

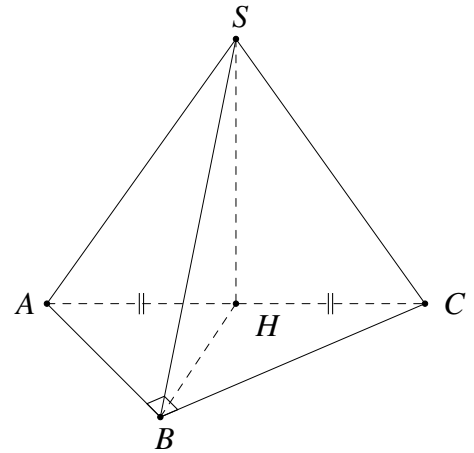
b) Do $SA = SB = a$ và $\widehat{ASB} = 60^\circ$ nên $\triangle SAB$ đều. Từ đó suy ra $AB = a$. (1)

Áp dụng định lý hàm số cos cho các tam giác SAC ta có

$$AC^2 = SA^2 + SC^2 - 2SA \cdot SC \cdot \cos \widehat{ASC} = 2a^2 - 2a^2 \cdot \cos 120^\circ = 3a^2. \quad (2)$$

Áp dụng định lý Pitago cho tam giác SBC , ta có $BC^2 = SB^2 + SC^2 = 2a^2$. (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $AC^2 = AB^2 + BC^2 \Rightarrow AB \perp BC$.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6



Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng AC và $B'D'$.
 b) Chứng minh rằng AC và $B'D'$ vuông góc với nhau khi và chỉ khi $ABCD$ là một hình thoi.

[Handwriting practice area with dotted lines]

Bài 7



Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O và $SA = SB = SC = SD$. Chứng minh rằng $SO \perp AB$ và $SO \perp AD$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 9



Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N lần lượt là trung điểm $BC, C'D'$. Chứng minh rằng $AM \perp B'N$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

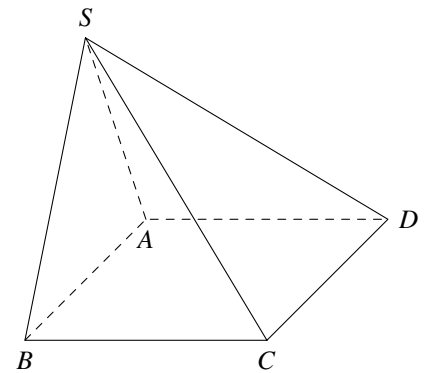
BÀI TẬP



Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

- ❖ **Câu 1.** Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Khẳng định nào đúng?
- (A) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c .
 - (B) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và đường thẳng b song song với đường thẳng c thì đường thẳng a vuông góc với đường thẳng c .
 - (C) Trong không gian, nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b và đường thẳng b vuông góc với đường thẳng c thì đường thẳng a cắt đường thẳng c tại một điểm.
 - (D) Nếu ba đường thẳng a, b, c vuông góc với nhau từng đôi một và có đường thẳng d vuông góc với đường thẳng a thì đường thẳng d song song với b hoặc c .

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (hình vẽ minh họa). Góc giữa hai đường thẳng SD và BC bằng



- (A) Góc giữa hai đường thẳng SD và DC .
- (B) Góc giữa hai đường thẳng SD và AD .
- (C) Góc giữa hai đường thẳng SD và BD .
- (D) Góc giữa hai đường thẳng SD và SC .

❖ **Câu 3.** Mệnh đề nào dưới đây là đúng?

- (A) Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì cũng vuông góc với đường thẳng còn lại.
- (B) Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì luôn cắt nhau.
- (C) Góc giữa hai đường thẳng bằng góc giữa hai vec-tơ chỉ phương của chúng.
- (D) Hai đường thẳng cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

❖ **Câu 4.** Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau:

- (A) Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể cắt nhau hoặc chéo nhau.
- (B) Trong không gian, hai đường thẳng vuông góc với nhau thì phải cắt nhau.
- (C) Trong không gian, hai đường thẳng không có điểm chung thì song song với nhau.
- (D) Trong không gian, hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo của góc (IJ, CD) bằng

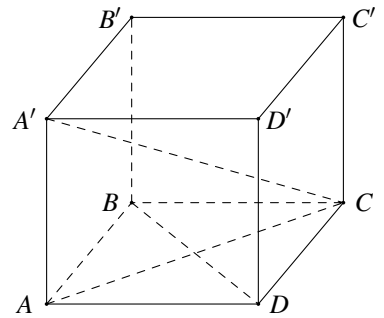
- (A) 30° .
- (B) 60° .
- (C) 45° .
- (D) 90° .

❖ **Câu 6.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BD và AD' bằng

- (A) 30° .
- (B) 45° .
- (C) 60° .
- (D) 90° .

❖ **Câu 7.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, biết đáy $ABCD$ là hình vuông. Tính góc giữa AC' và BD .

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 90° . (D) 45° .



❖ **Câu 8.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC' ?

- (A) $A'D$. (B) AC . (C) BB' . (D) AD' .

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $SABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và các cạnh bên bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và SD . Số đo góc (MN, SC) bằng

- (A) 60° . (B) 45° . (C) 30° . (D) 90° .

❖ **Câu 10.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là ABC là tam giác cân tại A , M là trung điểm của BC . Góc giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AM bằng

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 45° . (D) 90° .

❖ **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và góc $\widehat{SAB} = 135^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

- (A) 45° . (B) 90° .
(C) 135° . (D) 0° .

❖ **Câu 12.** Cho hình chóp $SABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a và O là tâm hình vuông $ABCD$. Gọi M là trung điểm AB , N là trung điểm SB . Gọi α là góc giữa hai đường thẳng MN và MO . Khi đó $\cos \alpha$ bằng

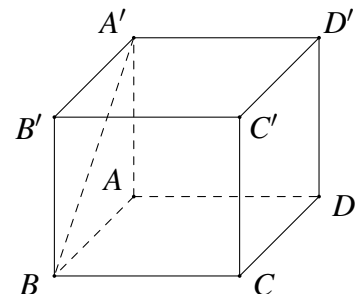
- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

❖ **Câu 13.** Cho hình chóp $SABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Số đo góc (IJ, CD) bằng

- (A) 60° . (B) 45° . (C) 30° . (D) 90° .

❖ **Câu 14.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và CD bằng

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 45° . (D) 90° .



❖ **Câu 15.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a , M là trung điểm CD . Gọi α là góc tạo bởi $A'B$ và $D'M$. Tính $\cos \alpha$.

- (A) $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. (B) $\cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5}$. (C) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

❖ **Câu 16.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$. Góc giữa AC và DA_1 là

- (A) 90° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 120° .

❖ **Câu 17.** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$, góc giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ là

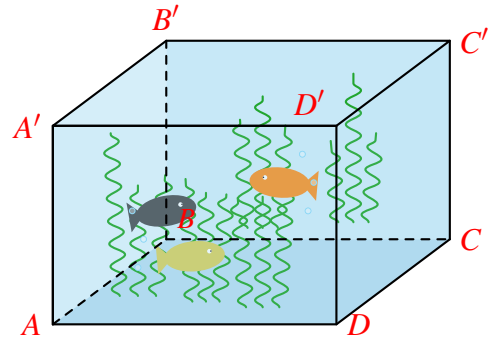
- (A) 90° . (B) 60° . (C) 30° . (D) 45° .

❖ **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{SAB} = \widehat{SAD} = 90^\circ$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của điểm A trên các cạnh SB, SD . Đường thẳng HK vuông góc với đường thẳng nào sau đây?

- (A) AC . (B) SB . (C) SD . (D) AB .

❖ **Câu 19.** Ta biết hình hộp chữ nhật có 6 mặt là các hình chữ nhật. Quan sát một bể nuôi cá cảnh hình hộp chữ nhật sau và cho biết góc giữa hai đường thẳng AA' và $C'D'$ bằng góc nào sau đây?

- (A) $(A'A, AB)$. (B) $(A'A, AD)$.
(C) $(A'A, A'B)$. (D) $(A'A, AB')$.

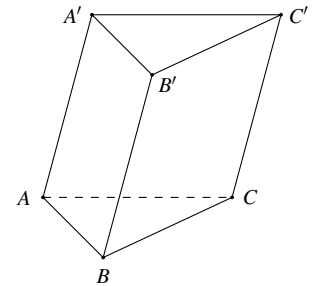


❖ **Câu 20.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng SA và CD bằng

- (A) 30° . (B) 90° . (C) 60° . (D) 45° .

❖ **Câu 21.** Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng AB và $C'A'$ bằng

- (A) 30° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 90° .



2 Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, $\triangle SAB$ là tam giác cân tại S . Gọi M, N là trung điểm của AB, BC .

- a) $SM \perp AB$.
b) Góc giữa đường thẳng SM và đường thẳng CD bằng 90° .
c) Góc giữa đường thẳng SM và đường thẳng AC bằng góc giữa SM và MN .
d) Góc giữa đường thẳng SB và đường thẳng AD bằng \widehat{SBC} .

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi. Gọi M, N theo thứ tự là trung điểm của đoạn SB, SD .

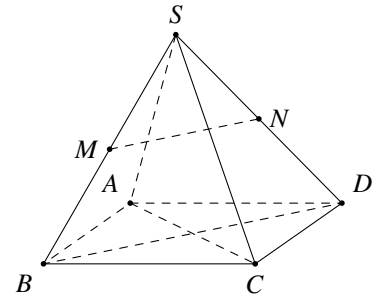
- a) $MN \parallel BD$.
b) MN và AC là hai đường thẳng chéo nhau.
c) $AC \perp BD$.
d) $(MN, AC) = 90^\circ$.

❖ **Câu 3.** Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

- a) $BD \parallel B'D'$. (b) Góc giữa AC và $B'D'$ bằng 90° .
c) Tam giác ACD' là tam giác đều. (d) Góc giữa AC và $A'B$ bằng 30° .

Bài 3. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có 6 mặt đều là hình vuông. Chứng minh rằng $AB \perp CC'$, $AC \perp B'D'$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB và SD . Chứng minh rằng $AC \perp MN$.



Bài 5. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có các đáy là các tam giác đều. Tính góc $(AB, B'C')$.

Bài 6. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng nhau. Chứng minh rằng tứ diện $ACB'D'$ có các cặp cạnh đối diện vuông góc với nhau.

Bài 7. Cho tứ diện $ABCD$ có $\widehat{CBD} = 90^\circ$.

- Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, AD . Chứng minh rằng MN vuông góc với BC .
- Gọi G, K tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD . Chứng minh rằng GK vuông góc với BC .

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi $ABCD$ cạnh a . Cho biết $SA = a\sqrt{3}, SA \perp AB$ và $SA \perp AD$. Tính góc giữa SB và CD, SD và CB .

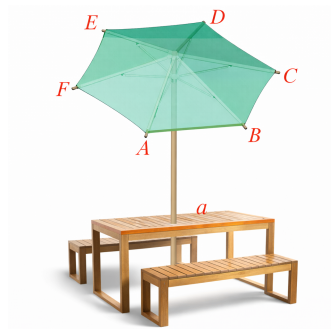
Bài 9. Cho tứ diện đều $ABCD$. Chứng minh rằng $AB \perp CD$.

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a, \widehat{BSA} = \widehat{CSA} = 60^\circ, \widehat{BSC} = 90^\circ$. Cho I và J lần lượt là trung điểm của SA và BC . Chứng minh rằng $IJ \perp SA$ và $IJ \perp BC$.

Bài 11. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Gọi K là trung điểm của CD . Tính góc giữa hai đường thẳng AK và BC .

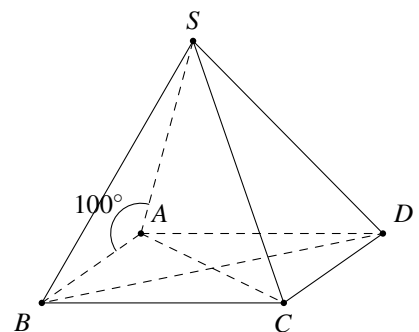
Bài 12. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD . Biết $AB = CD = 2a$ và $MN = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa AB và CD .

Bài 13. Một ô che nắng có viền khung hình lục giác đều $ABCDEF$ song song với mặt bàn và có cạnh AB song song với cạnh bàn a . Tính số đo góc hợp bởi đường thẳng a lần lượt với các đường thẳng AF, AE và AD .



Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $\widehat{SAB} = 100^\circ$ (Hình bên). Tính góc giữa hai đường thẳng:

- SA và AB ,
- SA và CD .



§2 ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Đường thẳng vuông góc với mặt phẳng



Đường thẳng Δ được gọi là vuông góc với mặt phẳng (P) nếu Δ vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong (P) .



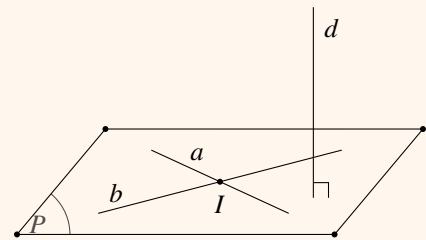
🔔 LƯU Ý.

- ◆ Khi Δ vuông góc với (P) , ta còn nói (P) vuông góc với Δ hoặc Δ và (P) vuông góc với nhau, kí hiệu $\Delta \perp (P)$.
- ◆ Nếu đường thẳng Δ và mặt phẳng (P) vuông góc với nhau thì chúng cắt nhau.

Định lí.



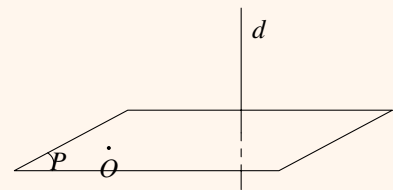
Nếu đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau thuộc cùng một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng đó.



2) Tính chất



Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



🔗 **NHẬN XÉT.** Nếu ba đường thẳng đôi một phân biệt a, b, c cùng đi qua một điểm O và cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì ba đường thẳng đó cùng nằm trong mặt phẳng đi qua O và vuông góc với Δ .



🔔 **LƯU Ý.** Mặt phẳng đi qua trung điểm của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB được gọi là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB . Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là tập hợp các điểm cách đều hai điểm A, B .



Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.

3) Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng



- ◇ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì các đường thẳng song song với a cũng vuông góc với (P) .
- ◇ Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



⚠ LƯU Ý.

- ◇ Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ cũng vuông góc với các mặt phẳng song song với (P) .
- ◇ Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



- ◇ Nếu đường thẳng Δ vuông góc với mặt phẳng (P) thì Δ vuông góc với mọi đường thẳng song song với (P) .
- ◇ Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với một đường thẳng Δ thì a nằm trong (P) hoặc song song với (P) .

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

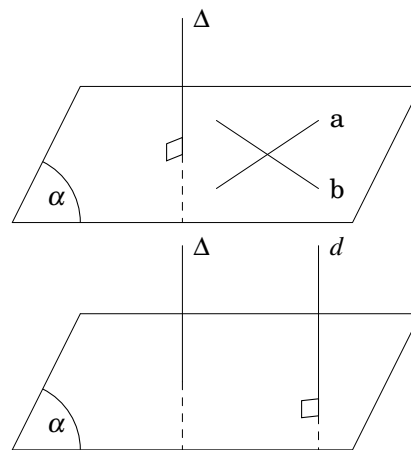
Dạng

1

Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Một trong hai cách thường dùng

- 1 Chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau thuộc (α) .
- 2 Chứng minh Δ song song với đường thẳng d , trong đó d vuông góc với (α) .



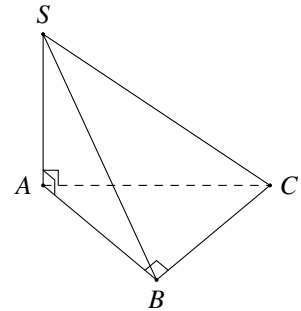
⇒ Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B và cạnh SA vuông góc với các cạnh AB, AC . Chứng minh rằng $BC \perp (SAB)$.

Lời giải.

Vì SA vuông góc với hai đường thẳng AB và AC nên $SA \perp (ABC)$. Suy ra $SA \perp BC$.

Tam giác ABC vuông tại B nên $BC \perp BA$. Vì BC vuông góc với hai đường thẳng SA và BA nên $BC \perp (SAB)$.



⇒ Ví dụ 2

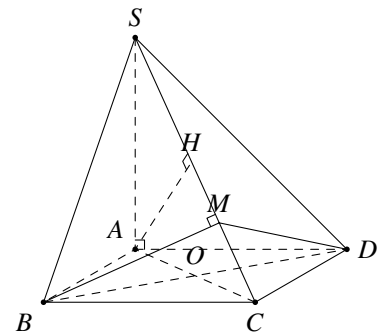
Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Kẻ AH vuông góc với SC (H thuộc SC), BM vuông góc với SC (M thuộc SC). Chứng minh rằng $SC \perp (MBD)$ và $AH \parallel (MBD)$.

Lời giải.

◇ Vì $SA \perp (ABCD)$ nên $SA \perp BD$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp SC$. Mà $BM \perp SC$ nên $SC \perp (BMD)$.

◇ Ta có $\begin{cases} SC \perp (MBD) \\ SC \perp AH \end{cases} \Rightarrow AH \parallel (MBD)$.



⇒ Ví dụ 3

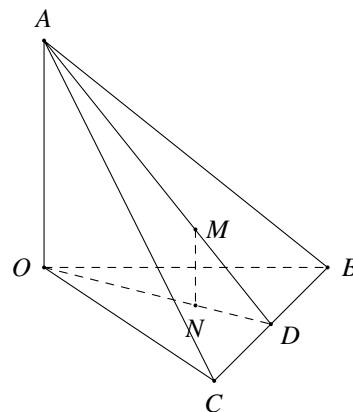
Cho tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC tương ứng vuông góc với nhau. Gọi M, N tương ứng là trọng tâm của các tam giác ABC, OBC . Chứng minh rằng đường thẳng MN vuông góc với mặt phẳng (OBC) .

Lời giải.

Vì AO vuông góc với các đường thẳng OB, OC nên $AO \perp (OBC)$.
 Kẻ các đường trung tuyến AD, OD tương ứng của các tam giác ABC, OBC .

Ta có $\frac{MA}{MD} = 2 = \frac{NO}{ND}$. Do đó MN song song với AO .

Mặt khác $AO \perp (OBC)$ nên $MN \perp (OBC)$.



Bài 1



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2



Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có AC cắt BD tại O . Gọi M là trung điểm của SC . Chứng minh rằng $OM \perp (ABCD)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

a) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.

b) Gọi I, K lần lượt là trung điểm của BA và BC . Chứng minh: $IK \perp SD$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Gọi AH, AK lần lượt là các đường cao trong tam giác SAB và SAC .

- a) Chứng minh tam giác SBC vuông.
- b) Chứng minh tam giác AHK vuông.
- c) Chứng minh $SC \perp (AHK)$.
- d) Chứng minh tam giác SHK vuông.
- e) Gọi $I = HK \cap BC$. Chứng minh $IA \perp (SAC)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông cân tại B . Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC và N là điểm thuộc cạnh SB sao cho $SN = 2NB$.

- a) Chứng minh $BC \perp (SAB)$.
- b) Chứng minh $NG \perp (SAC)$.

**Bài 6**

Cho hình chóp $S.ABC$. Các điểm M, N, P tương ứng là trung điểm của SA, SB, SC . Đường thẳng qua S vuông góc với mặt phẳng (ABC) và cắt mặt phẳng đó tại H . Chứng minh rằng $SH \perp (MNP)$.

**Bài 7**

Cho tứ diện $ABCD$ có ABD và DBC là những tam giác cân tại A và D . Gọi I là trung điểm của BC và AH là đường cao của tam giác ADI .

a) Chứng minh $BC \perp AD$.

b) Chứng minh $AH \perp (BCD)$.

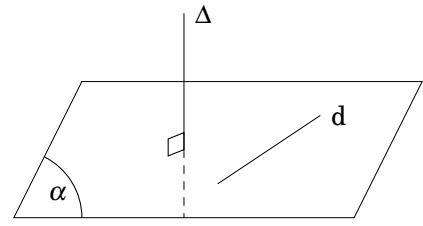
**Dạng****2****Chứng minh hai đường thẳng vuông góc**

Các phương pháp thường dùng

Dạng 2 Phần tiếp theo

① Chứng minh Δ vuông góc với mặt phẳng (α) chứa d .

$$\begin{cases} \Delta \perp (\alpha) \\ d \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp d.$$



③ Sử dụng các phương pháp đã xét ở Bài 1. Hai đường thẳng vuông góc.

Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh $BC \perp SA$.

Lời giải.

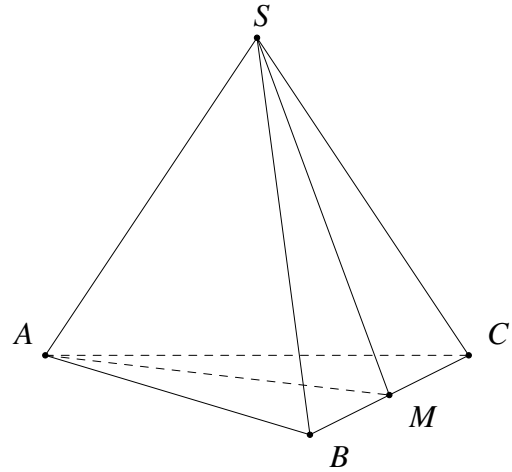
Tam giác ABC có $AB = AC$ nên là tam giác cân tại đỉnh A . Mặt khác M là trung điểm BC nên AM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên $AM \perp BC$. (1)

Xét hai tam giác SAB và SAC , ta có

$$\begin{cases} SA \text{ chung} \\ AB = AC \\ \widehat{SAB} = \widehat{SAC} \end{cases} \Rightarrow \Delta SAB = \Delta SAC (c - g - c).$$

Suy ra $SB = SC$ nên SBC là tam giác cân tại đỉnh S . Mặt khác M là trung điểm BC nên SM vừa là đường trung tuyến vừa là đường cao nên $SM \perp BC$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $BC \perp (SAM) \Rightarrow BC \perp SA$.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8



Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, $BC \perp CD$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC và AD . Chứng minh rằng:

- ① $CD \perp BM$;
- ② $BM \perp MN$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 9



Cho hình chóp $O.ABC$ có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

- ① $BC \perp OA$; ② $CA \perp OB$; ③ $AB \perp OC$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hai mặt phẳng cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 (B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
 (C) Hai mặt phẳng song song khi và chỉ khi góc giữa chúng bằng 0° .
 (D) Hai đường thẳng trong không gian cắt nhau khi và chỉ khi góc giữa chúng lớn hơn 0° và nhỏ hơn 90° .

❖ **Câu 2.** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

- (A) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. (B) Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.
 (C) Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$. (D) Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

❖ **Câu 3.** Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α) . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

- (A) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel (\alpha)$ thì $b \parallel a$. (B) Nếu $a \perp (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $b \parallel (\alpha)$.
 (C) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. (D) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.

❖ **Câu 4.** Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ ?

- (A) Vô số. (B) 3. (C) 2. (D) 1.

❖ **Câu 5.** Trong không gian, số mặt phẳng đi qua điểm M và vuông góc với đường thẳng a là

- (A) 1. (B) 2. (C) 0. (D) vô số.

❖ **Câu 6.** Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau

- (A) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \parallel (\alpha)$. (B) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp a$ thì $b \perp (\alpha)$.
 (C) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \perp (\alpha)$ thì $a \perp b$. (D) Nếu $a \parallel (\alpha)$ và $b \parallel a$ thì $b \parallel (\alpha)$.

❖ **Câu 7.** Trong không gian cho các đường thẳng a, b, c và mặt phẳng (P) . Mệnh đề nào sau đây là **sai**?

- (A) Nếu $a \perp (P)$ và $b \parallel (P)$ thì $a \perp b$.
 (B) Nếu $a \perp b, c \perp b$ và a cắt c thì b vuông góc với mặt phẳng chứa a và c .
 (C) Nếu $a \parallel b$ và $b \perp c$ thì $c \perp a$.
 (D) Nếu $a \perp b$ và $b \perp c$ thì $a \parallel c$.

❖ **Câu 8.** Trong không gian cho đường thẳng a và điểm M . Có bao nhiêu đường thẳng đi qua M và vuông góc với đường thẳng a ?

- (A) Không có. (B) Có hai.
 (C) Có vô số. (D) Có một và chỉ một.

❖ **Câu 9.** Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Trong các mệnh đề sau, có bao nhiêu mệnh đề đúng?

- (I) Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. (III) Nếu $b \perp a$ thì $b \parallel (P)$.
 (II) Nếu $b \perp (P)$ thì $b \parallel a$. (IV) Nếu $b \parallel (P)$ thì $b \perp a$.
 (A) 1. (B) 2. (C) 4. (D) 3.

❖ **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $AB \perp (SAD)$. (B) $AB \perp (SAC)$. (C) $AB \perp (SBC)$. (D) $AB \perp (SCD)$.

❖ **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều, biết $SA \perp (ABC)$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

- (A) $AB \perp BC$. (B) $SA \perp BC$. (C) $SB \perp AB$. (D) $SC \perp BC$.

❖ **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết rằng $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- (A) $CD \perp (SBD)$. (B) $AB \perp (SAC)$. (C) $SO \perp (ABCD)$. (D) $CD \perp AC$.

❖ **Câu 13.** Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H là trực tâm của tam giác BCD và AH vuông góc với mặt phẳng đáy. Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- (A) $AB \perp CD$. (B) $AB = CD$. (C) $AC = BD$. (D) $CD \perp BD$.

❖ **Câu 14.** Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $AB \perp (ABC)$. (B) $BC \perp CD$. (C) $AB \perp CD$. (D) $CD \perp (ABC)$.

❖ **Câu 15.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $BD \perp (SAC)$. (B) $AB \perp (SBC)$. (C) $SO \perp (ABCD)$. (D) $AC \perp (SBD)$.

❖ **Câu 16.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với O là tâm đa giác đáy $ABCD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $BD \perp (SAC)$. (B) $BC \perp (SAB)$. (C) $AC \perp (SBD)$. (D) $OS \perp (ABCD)$.

❖ **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi AE, AF lần lượt là các đường cao của tam giác SAB và SAD . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $SC \perp (AED)$. (B) $SC \perp (ACE)$. (C) $SC \perp (AFB)$. (D) $SC \perp (AEF)$.

❖ **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm BC , J là trung điểm BM . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $BC \perp (SAM)$. (B) $BC \perp (SAC)$. (C) $BC \perp (SAJ)$. (D) $BC \perp (SAB)$.

❖ **Câu 19.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có điểm M là trung điểm của cạnh CD . Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau.

- (A) $BM \perp AD$. (B) $BM \perp CD$. (C) $AM \perp CD$. (D) $AB \perp CD$.

❖ **Câu 20.** Cho hình lập phương $ABCD.A_1B_1C_1D_1$, đường thẳng AC_1 vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- (A) (A_1DC_1) . (B) (A_1BD) . (C) (A_1CD_1) . (D) (A_1B_1CD) .

❖ **Câu 21.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

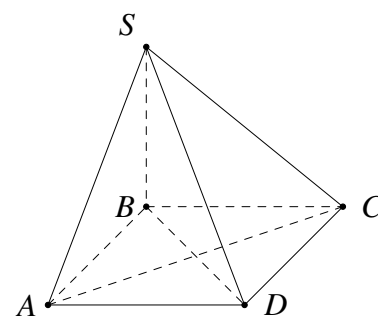
- (A) $AC \perp (SBD)$. (B) $AC \perp SO$. (C) $AC \perp SB$. (D) $SC \perp AD$.

❖ **Câu 22.** Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A) $BB' \perp BD$. (B) $A'C' \perp BD$. (C) $A'B \perp DC'$. (D) $BC' \perp A'D$.

❖ **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ). Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $AC \perp (SCD)$. (B) $AC \perp (SBD)$.
(C) $AC \perp (SBC)$. (D) $AC \perp (SAB)$.



❖ **Câu 24.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào **sai**?

- (A) $SA \perp SB$. (B) $SA \perp CD$. (C) $SA \perp BD$. (D) $SA \perp BC$.

❖ **Câu 25.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

- (A) Cho đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và b nằm trong mặt phẳng (P) ; mọi mặt phẳng (Q) chứa a và vuông góc với b thì (P) vuông góc với (Q) .
(B) Nếu đường thẳng a vuông góc với đường thẳng b và mặt phẳng (P) chứa a , mặt phẳng (Q) chứa b thì (P) vuông góc với (Q) .
(C) Cho đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) , mọi mặt phẳng (Q) chứa a thì (P) vuông góc với (Q) .
(D) Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.

❖ **Câu 26.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC và SD . Khẳng định nào dưới đây đúng?

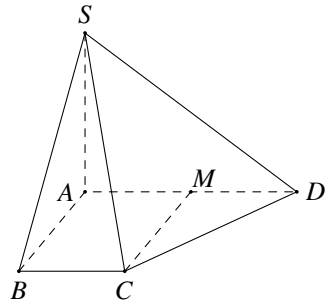
- (A) $MN \perp AC$. (B) $MN \perp BD$. (C) $MN \perp AB$. (D) $MN \perp BC$.

❖ **Câu 27.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- (A) $SA \perp BD$. (B) $SO \perp BD$. (C) $AD \perp SC$. (D) $SC \perp BD$.

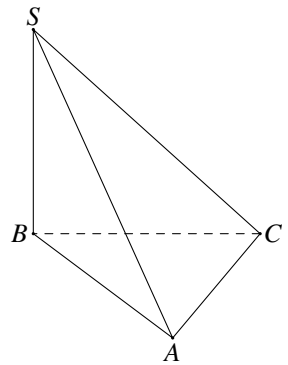
⇨ **Câu 28.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $SA \perp (ABCD)$ và $AD = 2BC$. Gọi M là trung điểm của AD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $CM \perp (SAD)$. (B) $AB \perp AD$.
 (C) $AB \perp SA$. (D) $CM \perp (SBC)$.



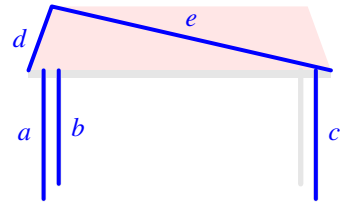
⇨ **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , cạnh bên SB vuông góc với mặt phẳng đáy (tham khảo hình bên). Đường thẳng AC vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

- (A) (SAC) . (B) (SAB) . (C) (ABC) . (D) (SBC) .



⇨ **Câu 30.** Một chiếc bàn cân đối hình chữ nhật được đặt trên mặt sàn nằm ngang, mặt bàn song song với mặt sàn (như hình vẽ bên dưới). Hình ảnh này gợi nên hình ảnh đường thẳng (được biểu thị bởi các đường thẳng a, b, c, d, e vuông góc với mặt bàn (kí hiệu mặt phẳng (P)). Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $d \perp (P)$. (B) $a \perp (P)$. (C) $b \perp (P)$. (D) $c \perp (P)$.



Câu trắc nghiệm đúng sai.

⇨ **Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$.

- a) $BC \perp (SAB)$. b) $CD \perp (SAD)$. c) $AC \perp (SBD)$. d) $BD \perp (SAC)$.

⇨ **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD .

- a) Tam giác SBC vuông. b) Tam giác SCD vuông.
 c) $SC \perp (AHK)$. d) $HK \perp SC$.

⇨ **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC .

- a) Tam giác SBC cân tại B .
 b) AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .
 c) $(SC, HK) = 90^\circ$.
 d) Giả sử HK cắt BC tại D . Khi đó $(AC, AD) = 90^\circ$.

⇨ **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC, SB = SD$.

- a) $SO \perp AC$. b) $SO \perp (ABCD)$. c) $AC \perp (SBD)$. d) $(AC, SB) = 60^\circ$.

⇨ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K lần lượt là trực tâm các tam giác SBC và ABC (biết rằng các trực tâm này không trùng với các đỉnh của tam giác ABC và SBC).

- a) $BC \perp (SAH)$. b) $SB \perp (CHK)$. c) $HK \perp (SBC)$. d) $BC \perp (SAB)$.

❖ **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA = a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt đáy. Gọi M là trung điểm của BC và H là hình chiếu vuông góc của A lên SM .

- Đường thẳng BC vuông góc với đường thẳng AH .
- Đường thẳng AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .
- Đường thẳng SH là hình chiếu của đường thẳng SA lên mặt phẳng (SBC) .
- Độ dài đoạn thẳng AH bằng $\frac{6a}{11}$.

❖ **Câu 7.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Kẻ $OH \perp (ABC)$ tại H .

- $OA \perp BC, OB \perp AC, OC \perp AB$.
- Tam giác ABC có ba góc nhọn.
- H là trọng tâm của tam giác ABC .
- $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$.

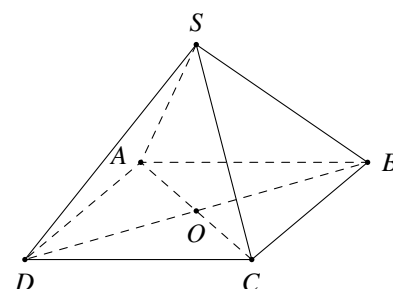
❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD .

- Tam giác SBC vuông.
- Tam giác SCD vuông.
- $SC \perp (AHK)$.
- $HK \perp SC$.

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a$ và $AD = 2a$, cạnh SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M là trung điểm cạnh AD .

- BD vuông góc mặt phẳng (SAC) .
- CM vuông góc mặt phẳng (SAD) .
- Tam giác SCD vuông tại C .
- Gọi H là trung điểm SC . Khi đó, AH vuông góc cạnh SD .

❖ **Câu 10.** Kim tự tháp Cheops là kim tự tháp lớn nhất trong các kim tự tháp ở Ai Cập, được xây dựng vào thế kỉ thứ 26 trước Công nguyên và là một trong bảy kì quan của thế giới cổ đại. Kim tự tháp có dạng hình chóp với đáy là hình vuông có cạnh dài khoảng 230m, các cạnh bên bằng nhau và dài khoảng 219m (kích thước hiện nay). Kim tự tháp Cheops được mô phỏng bởi hình chóp $S.ABCD$ với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD như hình bên dưới. (Theo britannica.com).



- Góc tạo bởi cạnh bên SC và cạnh đáy AB của kim tự tháp (gần đúng) là $48,3^\circ$.
- Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$.
- Đường thẳng SO vuông góc cạnh đáy AB và BC .
- Biết rằng độ dài SO chính là chiều cao của kim tự tháp Cheops, ta tính được $SO \approx 146,67\text{m}$.

3 Tự luận

❖ **Bài 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác cân tại A và $SA \perp (ABC)$. Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng

- $BC \perp (SAM)$.
- Tam giác SBC cân tại S .

❖ **Bài 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Cho biết $ABCD$ là hình thang vuông tại A và $D, AB = 2AD$.

- ① Chứng minh $CD \perp (SAD)$;
- ② Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh $CM \perp (SAB)$.

Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, AD . Trên đường thẳng vuông góc với $(ABCD)$ tại H , lấy điểm S . Chứng minh rằng:

- a) $AC \perp (SHK)$;
- b) $CK \perp (SDH)$.

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD)$, các tam giác BCD và ACD là những tam giác nhọn. Gọi H và K lần lượt là trực tâm của các tam giác BCD, ACD . Chứng minh rằng:

- a) $CD \perp (ABH)$.
- b) $CD \perp (ABK)$.
- c) Ba đường thẳng AK, BH, CD cùng đi qua một điểm.

Bài 5. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp (BCD), BC \perp CD$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của B trên AC và AD . Chứng minh rằng:

- a) $CD \perp BM$;
- b) $BM \perp MN$.

Bài 6. Cho hình chóp $O.ABC$ có $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ$. Chứng minh rằng:

- a) $BC \perp OA$;
- b) $CA \perp OB$;
- c) $AB \perp OC$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng các mặt bên của hình chóp $S.ABCD$ là các tam giác vuông.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N tương ứng là hình chiếu của A trên SB, SD . Chứng minh rằng $AM \perp (SBC), AN \perp (SCD), SC \perp (AMN)$.

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a, \widehat{ASB} = 90^\circ, \widehat{BSC} = 60^\circ$ và $\widehat{ASC} = 120^\circ$. Gọi I là trung điểm cạnh AC . Chứng minh $SI \perp (ABC)$.

Bài 10. Cho tứ diện $SABC$ có đáy ABC vuông tại A , biết $SB \perp (ABC)$ và $SB = AB$. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, BC và AB . Chứng minh:

- a) $AC \perp (SAB)$.
- b) $BH \perp (SAC)$.
- c) $KI \perp SA$.
- d) $AB \perp IH$.

Bài 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB \perp CD$ và $AC \perp BD$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A xuống mặt phẳng (BCD) . Chứng minh H là trực tâm của tam giác BCD và $AD \perp BC$.

Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . Tam giác SAB đều và $SC = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và AD . Chứng minh:

- a) $SH \perp (ABCD)$.
- b) $AC \perp SK$.
- c) $CK \perp SD$.

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ tâm O . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD và $SA = SB = SC = SD$. Gọi H là hình chiếu của O lên cạnh SN .

- a) Chứng minh: $SO \perp (ABCD)$.
- b) Chứng minh: $MN \perp SA$.
- c) Chứng minh: $OH \perp (SCD)$.

§3 PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Phép chiếu vuông góc



Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P)* .



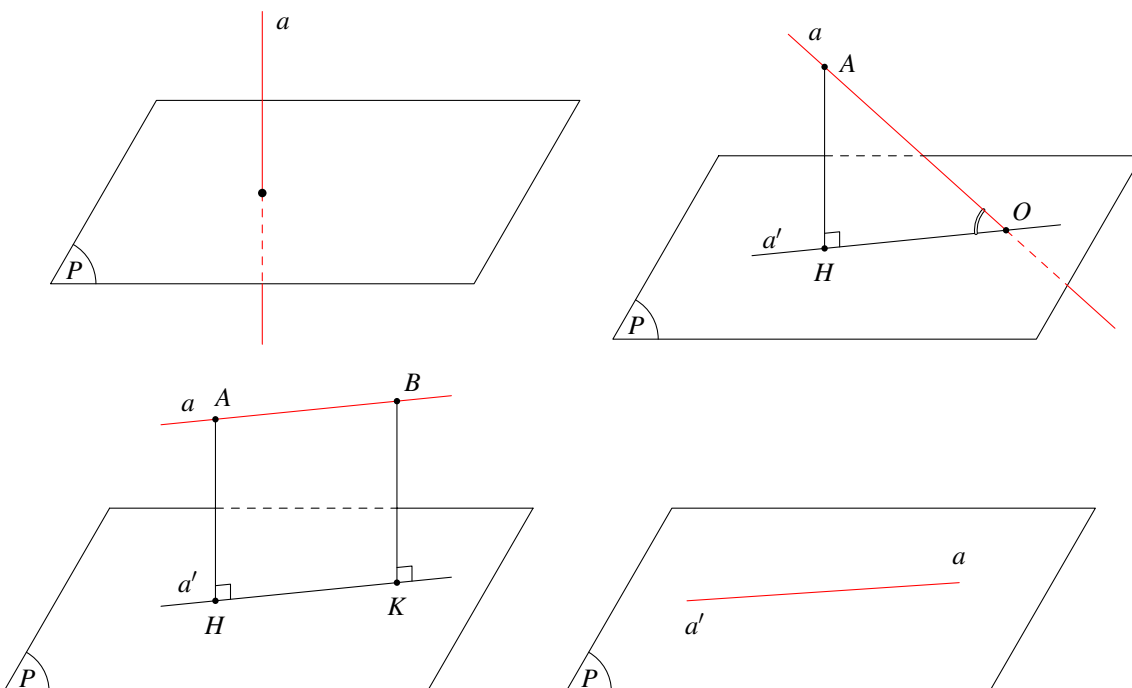
- ◇ Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
- ◇ Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P) . *Hình chiếu vuông góc \mathcal{H}' của hình \mathcal{H} trên mặt phẳng (P) còn được gọi là hình chiếu của \mathcal{H} trên mặt phẳng (P) .*

2) Định lý (Định lý ba đường vuông góc). Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) không vuông góc với nhau. Khi đó, một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) vuông góc với đường thẳng a khi và chỉ khi b vuông góc với hình chiếu vuông góc a' của a trên (P) .

3) Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

4) Định nghĩa. Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói rằng góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° .

Nếu đường thẳng a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .

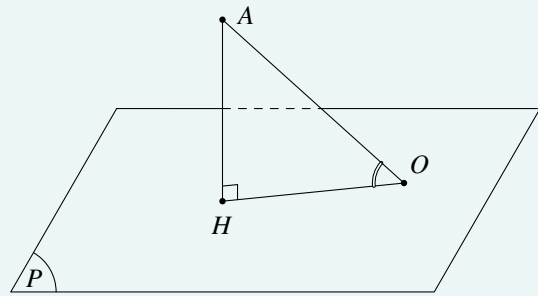




LƯU Ý.

◇ Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0 \leq \alpha \leq 90^\circ$.

Cho điểm A có hình chiếu H trên mặt phẳng (P) . Lấy điểm O thuộc mặt phẳng (P) , O không trùng H . Khi đó góc giữa đường thẳng AO và mặt phẳng (P) bằng góc AOH



Dạng

1

Phép chiếu vuông góc

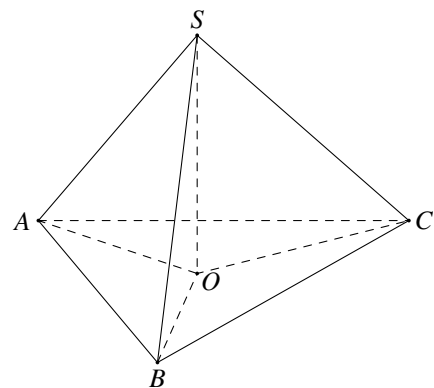
Ví dụ 1

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC$. Gọi O là hình chiếu của S trên mặt phẳng (ABC) .

- Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
- Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC) .
- Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.
- Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC) .

Lời giải.

- Chứng minh rằng O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
Tam giác SOA, SOB, SOC bằng nhau (c-g-c). Suy ra $OA = OB = OC$. Do đó O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC
- Xác định hình chiếu của đường thẳng SA trên mặt phẳng (ABC) .
Vì O là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) nên AO là hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC)
- Chứng minh rằng nếu $AO \perp BC$ thì $SA \perp BC$.
Ta có $AO \perp BC, SO \perp BC$. Suy ra $BC \perp (SAO) \Rightarrow SA \perp BC$.
- Xác định hình chiếu của các tam giác SBC, SCA, SAB trên mặt phẳng (ABC) .
Hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC) là tam giác OBC .
Hình chiếu của tam giác SAB trên mặt phẳng (ABC) là tam giác OAB .
Hình chiếu của tam giác SAC trên mặt phẳng (ABC) là tam giác OAC .



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B .

- Xác định hình chiếu của điểm S trên mặt phẳng (ABC) .
- Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (ABC) .
- Xác định hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng (SAB) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

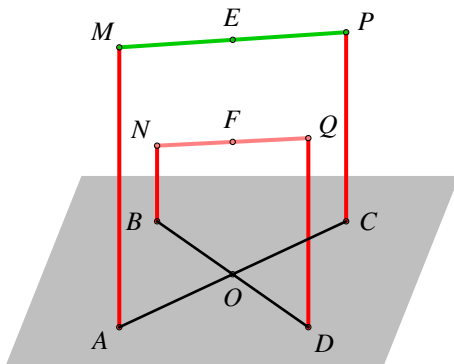
.....

Bài 2



Trên một sân phẳng nằm ngang, tại các điểm A, B, C, D người ta dựng các cột thẳng đứng AM, BN, CP, DQ và nối các sợi dây thẳng giữa M và P, N và Q như hình bên.

- Hãy chỉ ra hình chiếu của các dây MP và NQ trên sân.
- Chứng minh rằng nếu $BD \perp AC$ thì $BD \perp MP$.
- Chứng minh rằng nếu $ABCD$ là một hình bình hành thì các trung điểm E, F tương ứng của các đoạn thẳng MP và NQ có cùng hình chiếu trên sân.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

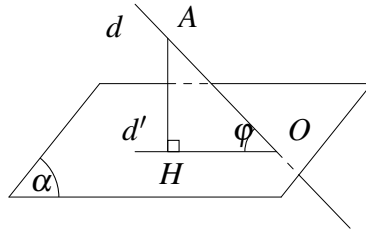
.....

Dạng

2

Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.
 Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90^\circ$.



Nếu $d \not\perp (P)$ thì để xác định góc giữa d và (P) , ta thường làm như sau

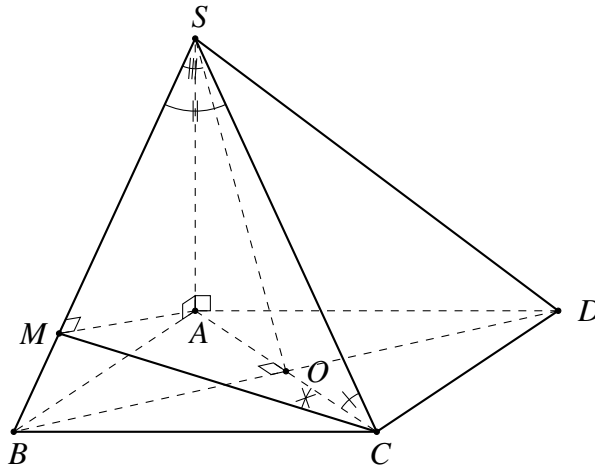
- ① Xác định giao điểm O của d và (P) .
- ② Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P) . Lúc đó $(d, (P)) = (d, d') = \widehat{AOH}$.

⇒ Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

- a) SC và $(ABCD)$. b) SC và (SAB) . c) SB và (SAC) . d) AC và (SBC) .

Lời giải.



- ① Vì AC là hình chiếu vuông góc của SC lên $(ABCD)$ nên góc giữa SC và $(ABCD)$ là \widehat{SCA} .
 Trong tam giác SCA , ta có $\tan \widehat{SCA} = \frac{SA}{SC} = \sqrt{3}$ nên $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCA} = 60^\circ$.
- ② Vì $BC \perp (SAB)$ tại B nên SB là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB) .
 Do đó $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{CSB}$.
 Trong tam giác SCB , ta có $\tan \widehat{CSB} = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{7}}$ nên $(SC, (SAB)) = \arctan \frac{1}{\sqrt{7}}$.
- ③ Vì $BO \perp (SAC)$ tại O nên SO là hình chiếu vuông góc của SB lên (SAC) .
 Do đó $(SB, (SAC)) = (SB, SO) = \widehat{BSO}$.

Trong tam giác SBO , ta có $\sin \widehat{BSO} = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$ nên $(SB, (SAC)) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{14}}$.

- ④ Gọi M là hình chiếu vuông góc của A lên SB . Lúc đó $AM \perp SB$ và $AM \perp BC$ (vì $BC \perp (SAB)$ và $AM \subset (SAB)$) nên $AM \perp (SBC)$ tại M . Do đó MC là hình chiếu vuông góc của AC lên (SBC) .

Suy ra $(AC, (SBC)) = (AC, MC) = \widehat{ACM}$.

Trong tam giác SAB , ta có $AM = \frac{SA \cdot AB}{SB} = \frac{a\sqrt{6}}{\sqrt{7}}$ và trong tam giác ACM , ta có $\sin \widehat{ACM} = \frac{MA}{AC} = \frac{\sqrt{21}}{7}$ nên $(AC, (SBC)) = \arcsin \frac{\sqrt{21}}{7}$.

⇒ Ví dụ 3

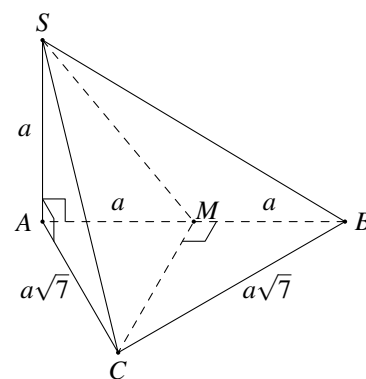
Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, $CA = CB = a\sqrt{7}$, $AB = 2a$.

- Gọi α là góc giữa SB và (ABC) . Tính $\tan \alpha$.
- Tính góc giữa SC và (SAB) .

Lời giải.

Do $SA \perp (ABC)$ nên $\alpha = \widehat{SBA}$. Tam giác SAB vuông tại A nên

$$\tan \alpha = \tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$



-
- Gọi M là trung điểm của AB . Tam giác ABC cân tại C nên $CM \perp AB$. Mặt khác, từ $SA \perp (ABC)$ ta có $CM \perp SA$. Do đó $CM \perp (SAB)$. Vậy góc giữa SC và (SAB) bằng \widehat{CSM} . Tam giác SAC vuông tại A nên $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 7a^2} = a\sqrt{8}$. Ta có $AM = \frac{1}{2}AB = a$. Do đó, tam giác SAM vuông cân tại A và $SM = a\sqrt{2}$. Tam giác CMS vuông tại M và $\cos \widehat{CSM} = \frac{SM}{SC} = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{8}} = \frac{1}{2}$. Vậy $\widehat{CSM} = 60^\circ$ và do đó góc giữa SC và (SAB) bằng 60° .

BÀI TẬP RÈN LUYỆN


Bài 3



Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và SA vuông góc với đáy. Tính góc giữa

a) SC và (ABC) .

b) SC và (SAB) .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....


.....

Bài 4



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a , SO vuông góc $(ABCD)$ và $SO = a\sqrt{6}$.

- a) Tính góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy.
- b) Tính góc giữa SO và (SAD) .
- c) Gọi I là trung điểm BC . Tính góc giữa SI và (SAD) .



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $BC = a$, $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 Tính góc giữa SA và (ABC) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 7



Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và AA' vuông góc (ABC) . Đường chéo BC' của mặt bên $(BCC'B')$ hợp với $(ABB'A')$ một góc 30° .

- a) Tính AA' .
- b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và BB' . Tính góc giữa MN và $(ACC'A')$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O , SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính góc giữa MN và (SBD) .

✎

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

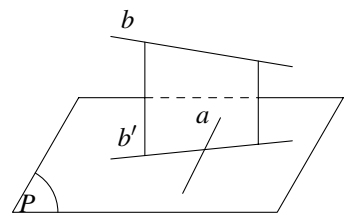
.....

.....

BÀI TẬP

1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

Câu 1. Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) , b là đường thẳng không nằm trong (P) và không vuông góc với (P) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (P) (hình vẽ).



- (A) a vuông góc với b' khi và chỉ khi a vuông góc với (P) .
- (B) a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với (P) .
- (C) a vuông góc với b' khi và chỉ khi b vuông góc với b' .
- (D) a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .

Câu 2. Chọn hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Hình chiếu vuông góc của điểm C trên mặt phẳng $(ABB'A')$ là điểm nào dưới đây?

- (A) D .
- (B) B .
- (C) C' .
- (D) B' .

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $(ABCD)$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$. Góc giữa cạnh SC và mặt phẳng (SAD) là góc nào sau đây?

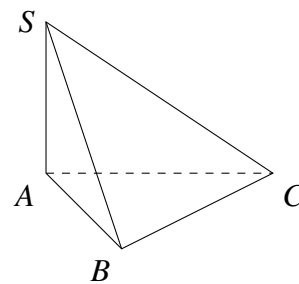
- (A) \widehat{SCA} .
- (B) \widehat{CSA} .
- (C) \widehat{SCD} .
- (D) \widehat{CSD} .

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

- (A) 60° .
- (B) 90° .
- (C) 30° .
- (D) 45° .

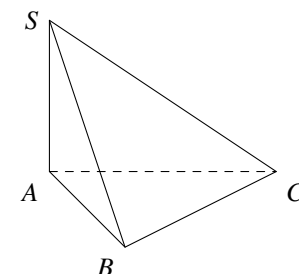
⇨ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $\triangle ABC$ vuông tại B và $SA \perp (ABC)$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là góc nào sau đây?

- (A) \widehat{SAC} . (B) \widehat{CSA} . (C) \widehat{CSB} . (D) \widehat{SCB} .



⇨ **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) là góc nào sau đây?

- (A) \widehat{SBA} . (B) \widehat{SCA} . (C) \widehat{SAC} . (D) \widehat{SAB} .

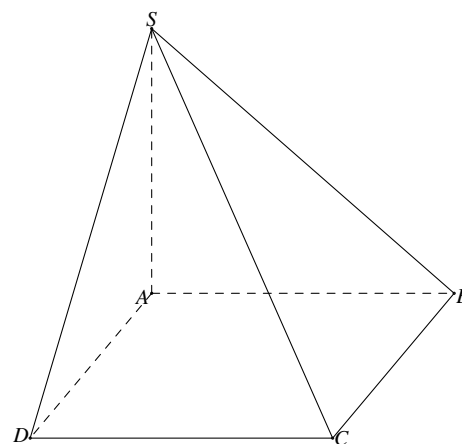


⇨ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$. Hình chiếu của tam giác SBC trên mặt phẳng $(ABCD)$ là

- (A) Tam giác SAB . (B) Tam giác ABC . (C) Tam giác SAD . (D) Tam giác BCD .

⇨ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$ như hình vẽ bên. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là

- (A) \widehat{ASD} . (B) \widehat{DAS} . (C) \widehat{SDA} . (D) \widehat{SDC} .

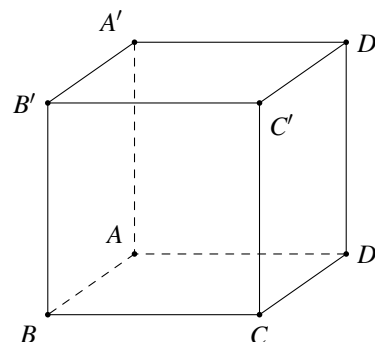


⇨ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng (ABC) . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) I là trung điểm AC . (B) I là trung điểm BC .
(C) I là trung điểm AB . (D) I là trọng tâm tam giác ABC .

⇨ **Câu 10.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Giá trị sin của góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



⇨ **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = a$. Số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng

- (A) 30° . (B) 90° . (C) 60° . (D) 45° .

❖ **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SD = a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .

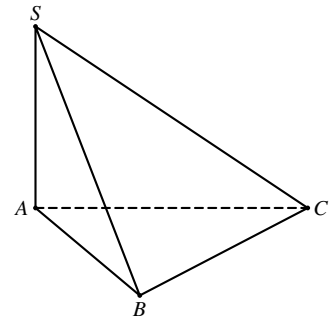
- (A) 60° . (B) 14° . (C) 45° . (D) 30° .

❖ **Câu 13.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi α là góc giữa $A'C$ và $(ADD'A')$. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

- (A) $\alpha = 30^\circ$. (B) $\alpha = 45^\circ$. (C) $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. (D) $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

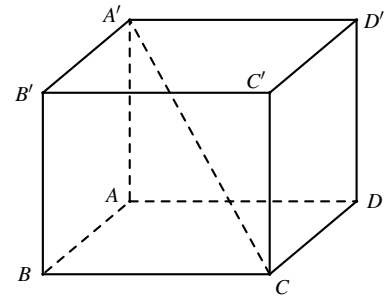
❖ **Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ (tham khảo hình vẽ). Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SB trên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng

- (A) BC . (B) AB . (C) AC . (D) SA .



❖ **Câu 15.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AD = 2$ và $AA' = 2\sqrt{2}$ (tham khảo hình bên). Góc giữa đường thẳng CA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

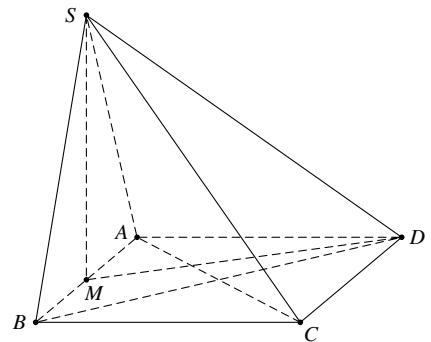


❖ **Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- (A) 45° . (B) 30° . (C) 60° . (D) 90° .

❖ **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$, gọi M là trung điểm cạnh AB . Biết đáy là hình vuông cạnh a , $SM \perp (ABCD)$, tam giác SAB đều (minh họa như hình vẽ). Kí hiệu φ là góc giữa SD và $(ABCD)$, khi đó $\tan \varphi$ bằng

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{5}$. (B) $\frac{\sqrt{15}}{5}$. (C) $\frac{\sqrt{15}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$.



❖ **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, đáy là tam giác vuông tại A , cạnh $BC = a$. Côsin của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$. (B) $\frac{1}{3}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{\sqrt{5}}{5}$.

❖ **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O , tam giác ABD đều có cạnh bằng $a\sqrt{2}$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- (A) 45° . (B) 30° . (C) 60° . (D) 90° .



2 Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết $SA = SC$ và $SB = SD$.

- a) Hình chiếu vuông góc của điểm S lên $(ABCD)$ là điểm O .
- b) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng SO lên $(ABCD)$ là điểm O .
- c) Hình chiếu vuông góc của $\triangle SAB$ lên $(ABCD)$ là $\triangle OAB$.
- d) Hình chiếu vuông góc của $\triangle BCD$ lên (SBD) là $\triangle SBD$.

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

- a) AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$.
- b) $(SB, (ABCD)) \approx 54,75^\circ$.
- c) $(SC, (ABCD)) = 45^\circ$.
- d) $(SC, (SAB)) = 60^\circ$.

❖ **Câu 3.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC .

- a) $SO \perp (ABC)$.
- b) $(SA, (ABC)) = (SA, OA)$.
- c) $(SA, (ABC)) = 60^\circ$.
- d) $(SM, (ABC)) \approx 70,9^\circ$.

❖ **Câu 4.** Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$.

- a) Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) là C .
- b) Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng (SBC) là B .
- c) Hình chiếu vuông góc của $\triangle SBC$ lên mặt phẳng (ABC) là $\triangle ABC$.
- d) Hình chiếu vuông góc của $\triangle SBC$ lên mặt phẳng (ABC) có diện tích bằng $\frac{a^2}{2}$.

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi O là tâm của hình chữ nhật $ABCD$.

- a) Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SOA} .
- b) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .
- c) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAD) bằng 60° .
- d) Gọi α là góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) thì $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

- a) Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 90° .
- b) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .
- c) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .
- d) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) bằng 30° .

❖ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD . Khi đó

- a) Góc giữa đường thẳng AE và mặt phẳng (SBC) bằng 90° .
- b) Góc giữa đường thẳng AF và mặt phẳng (SCD) bằng 60° .
- c) Góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBC) bằng 45° .
- d) Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (AEF) bằng 30° .

❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O .

- a) AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$.
- b) $BD \perp SC$.
- c) C là hình chiếu của B trên (SAC) .
- d) $\triangle SAB$ là hình chiếu của $\triangle SAO$ trên (SAB) .

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Biết SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A trên SB và SD .

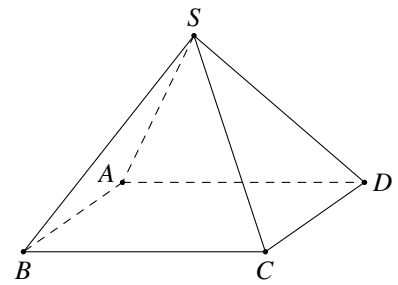
- a) Góc giữa SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng góc \widehat{SDA} .
- b) Góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) bằng góc \widehat{SCA} .
- c) Góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 30° .
- d) Góc tạo bởi đường thẳng SD và mặt phẳng (AHK) bằng 60° .

❖ **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a, AD = a\sqrt{3}$.

- a) Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .
- b) SC là hình chiếu vuông góc của SD trên mặt phẳng (SAC) .
- c) Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng \widehat{BSA} .

d) Gọi M là trung điểm của CD , α góc giữa SA và mặt phẳng (SBM) . Khi đó $\tan \alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$.

❖ **Câu 11.** Đại Kim tự tháp Giza có dạng là một hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình vuông cạnh dài 230 mét, hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy trùng với tâm của hình vuông đáy và có chiều cao 146 mét. Gọi O là chân đường cao của Kim tự tháp.



- a) Cạnh của Kim tự tháp tạo với đáy một góc gần bằng 42° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- b) Gọi I là trung điểm cạnh CD , góc giữa SI và mặt đáy của Kim tự tháp gần bằng 52° (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- c) Góc giữa đường thẳng SO và mặt phẳng (SCD) gần bằng 48° (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- d) Tia nắng mặt trời in bóng của đỉnh Kim tự tháp trên mặt đất, cách chân kim tự tháp 93 mét. Khi đó, góc giữa tia nắng và mặt đất gần bằng 35° . (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

3 Tự luận

❖ **Bài 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

- a) Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.
- b) Tính góc giữa BD và mặt phẳng (SAC) .
- c) Tìm hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAC) .

❖ **Bài 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $SA = AB = BC = a$.

- a) Xác định hình chiếu của A trên mặt phẳng (SBC) .
- b) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) .

Bài 3. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' lên mặt đáy trùng với giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $BB' = a$. Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a và $SO \perp (ABCD)$. Mặt phẳng (P) qua A vuông góc với SC cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng $\frac{a^2}{2}$. Tính góc giữa SC và $(ABCD)$.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 120^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 60^\circ$.

a) Chứng minh tam giác ABC vuông.

b) Xác định hình chiếu H của S trên mặt phẳng (ABC) . Tính độ dài SH theo a . **ĐS:** $SH = \frac{a}{2}$

Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B có $AD = 2a$, $CD = a$ và tam giác ACD vuông tại C , cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với đáy. Tính góc giữa đường SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

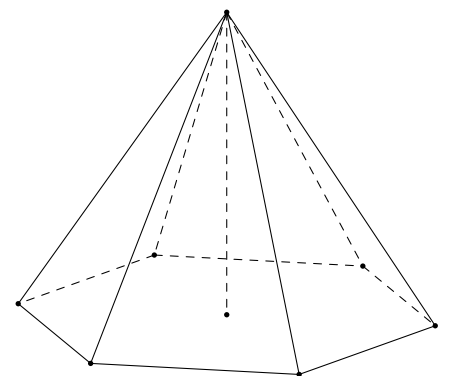
Bài 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N là hai điểm thay đổi lần lượt trên các cạnh $AB, A'D'$ sao cho $MN = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$. Tính góc giữa đường thẳng MN và mặt phẳng $(ABCD)$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu vuông góc của đỉnh A lên các cạnh SB và SD . Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (AMN) .

Bài 10. Một con diều được thả với dây căng, tạo với mặt đất một góc 45° . Đoạn dây diều (từ đầu ở mặt đất đến đầu ở con diều) dài 10 m. Hỏi hình chiếu vuông góc trên mặt đất của con diều cách đầu dây diều trên mặt đất bao nhiêu centimet (kết quả làm tròn đến chữ số hàng đơn vị)?

Bài 11. Một chiếc lều du lịch hình chóp có đáy là lục giác đều và hình chiếu của đỉnh lều trên mặt đất trùng với tâm của lục giác đáy, khung lều làm bằng tre (như hình). Người ta muốn treo một dây đèn trang trí dọc theo cột ở giữa của lều từ đỉnh xuống sàn. Độ dài của dây đèn cần chuẩn bị là bao nhiêu mét nếu biết góc giữa các thanh tre với mặt sàn là 30° ; tâm lều sàn hình lục giác đều có diện tích 18 mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Bài 12. Trong một khoảng thời gian đầu kể từ khi cất cánh, máy bay bay theo một đường thẳng. Góc cất cánh của máy bay là góc giữa đường bay và mặt phẳng nằm ngang nơi cất cánh. Máy bay cất cánh và bay thẳng với vận tốc 210 km/h với góc cất cánh 12° . Sau 2 phút kể từ khi cất cánh, độ cao của máy bay so với mặt đất là bao nhiêu mét.

Bài 13. Một cây cột cờ cao 2,2m ở sân trường được xây theo phương thẳng đứng so với mặt sân. Người ta dùng một sợi dây cột từ đỉnh cột cờ đến một điểm dưới sân và chiều dài của dây là 3m. Giả sử dây được kéo thẳng và không co giãn. Số đo góc (theo độ) tạo bởi sợi dây và mặt sân là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

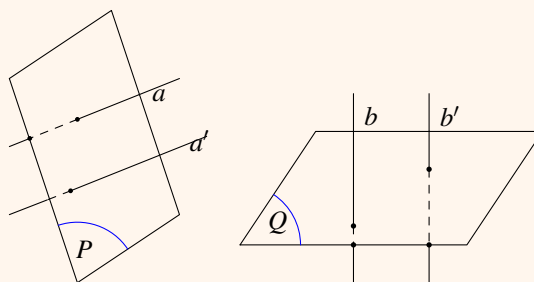
§4 HAI MẶT PHẪNG VUÔNG GÓC

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Góc giữa hai mặt phẳng, hai mặt phẳng vuông góc



- Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) . Lấy các đường thẳng a, b tương ứng vuông góc với $(P), (Q)$. Khi đó, góc giữa a và b không phụ thuộc vào vị trí của a, b và được gọi là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) .
- Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa chúng bằng 90° .

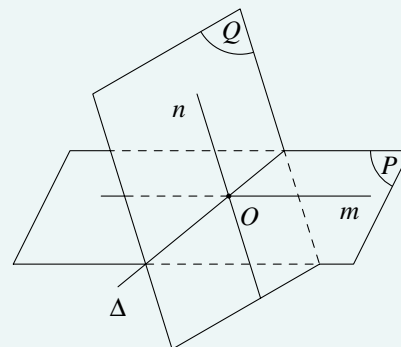


⚠ LƯU Ý. Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.



🔍 NHẬN XÉT.

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau theo giao tuyến Δ . Lấy hai đường thẳng m, n tương ứng thuộc $(P), (Q)$ cùng vuông góc với Δ tại một điểm O (nói cách khác, lấy một mặt phẳng vuông góc với Δ , cắt $(P), (Q)$ tương ứng theo các giao tuyến m, n). Khi đó góc giữa (P) và (Q) bằng góc giữa m và n . Đặc biệt, (P) vuông góc với (Q) khi và chỉ khi m vuông góc với n .



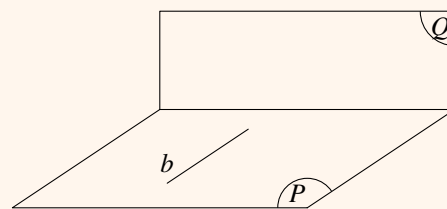
2) Điều kiện hai mặt phẳng vuông góc



Hai mặt phẳng vuông góc với nhau nếu mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

Kí hiệu

$$\begin{cases} b \subset (P) \\ b \perp (Q) \end{cases} \Rightarrow (P) \perp (Q).$$



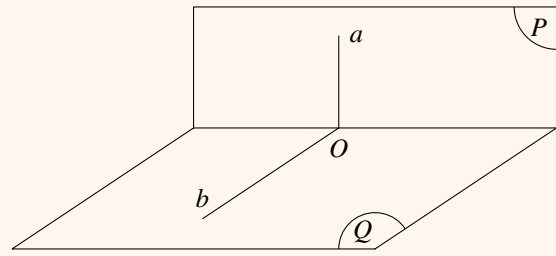
3) Tính chất hai mặt phẳng vuông góc



Với hai mặt phẳng vuông góc với nhau, bất kì đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này mà vuông góc với giao tuyến cũng vuông góc với mặt phẳng kia.

Kí hiệu

$$\begin{cases} (P) \perp (Q) \\ (P) \cap (Q) = c \Rightarrow a \perp (Q). \\ a \subset (P), a \perp c \end{cases}$$



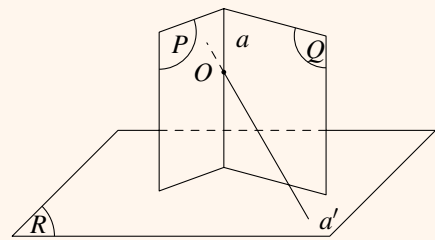
NHẬN XÉT. Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau. Mỗi đường thẳng qua điểm O thuộc (P) và vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng đó thuộc mặt phẳng (P) .



Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.

Kí hiệu

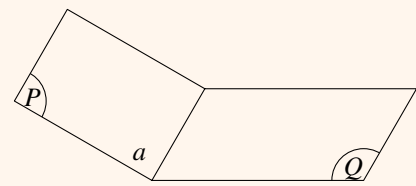
$$\begin{cases} (P) \cap (Q) = a, (P) \perp (R) \\ (P) \perp (R), (Q) \perp (R) \end{cases} \Rightarrow a \perp (R)$$



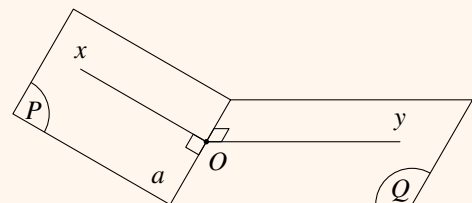
4) Góc nhị diện



Hình gồm hai nửa mặt phẳng (P) , (Q) có chung bờ a được gọi là một **góc nhị diện**, kí hiệu là $[P, a, Q]$. Đường thẳng a và các nửa mặt phẳng (P) , (Q) tương ứng được gọi là các mặt phẳng của góc nhị diện đó.



Từ một điểm O bất kì thuộc cạnh a của góc nhị diện $[P, a, Q]$, vẽ các tia Ox , Oy tương ứng thuộc (P) , (Q) và vuông góc với a . Góc xOy được gọi là một **góc phẳng của góc nhị diện** $[P, a, Q]$ (gọi tắt là **góc phẳng nhị diện**). Số đo của góc xOy không phụ thuộc vào vị trí của O trên a , được gọi là số đo của góc nhị diện $[P, a, Q]$.

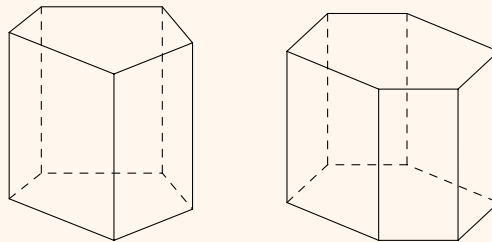



LƯU Ý.

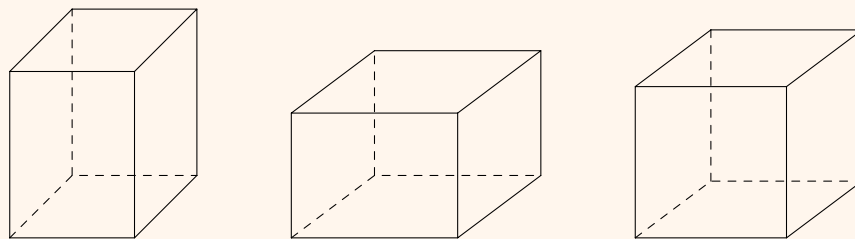
- ◇ Số đo của góc nhị diện có thể nhận từ 0° đến 180° . Góc nhị diện được gọi là vuông, nhọn, tù nếu nó có số đo tương ứng bằng, nhỏ hơn, lớn hơn 90° .
- ◇ Đối với hai điểm M, N không thuộc đường thẳng a , ta kí hiệu $[M, a, N]$ là góc nhị diện có cạnh a và các mặt phẳng tương ứng chứa M, N .
- ◇ Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành bốn góc nhị diện. Nếu một trong bốn góc nhị diện đó là góc nhị diện vuông thì các góc nhị diện còn lại cũng là góc nhị diện vuông.

5) Hình lăng trụ đứng. Hình lăng trụ đều


- ◇ **Hình lăng trụ đứng** là hình lăng trụ có các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. Hình lăng trụ đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật và vuông góc với mặt đáy.
- ◇ **Hình lăng trụ đều** là hình lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều. Hình lăng trụ đều có các mặt bên là các hình chữ nhật có cùng kích thước.



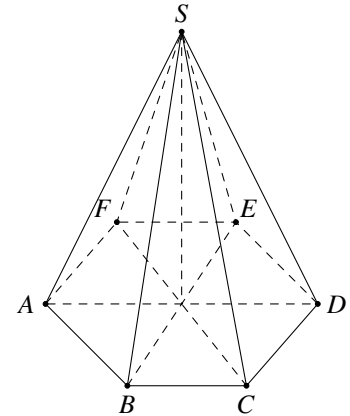
- ◇ **Hình hộp đứng** là hình lăng trụ đứng có đáy là hình bình hành. Hình hộp đứng có các mặt bên là các hình chữ nhật.
- ◇ **Hình hộp chữ nhật** là hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật. Hình hộp chữ nhật có các mặt bên là hình chữ nhật. Các đường chéo của hình hộp chữ nhật có độ dài bằng nhau và chúng cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.
- ◇ **Hình lập phương** là hình hộp chữ nhật có tất cả các cạnh bằng nhau. Hình lập phương có các mặt là các hình vuông.



6) Hình chóp đều. Hình chóp cụt đều



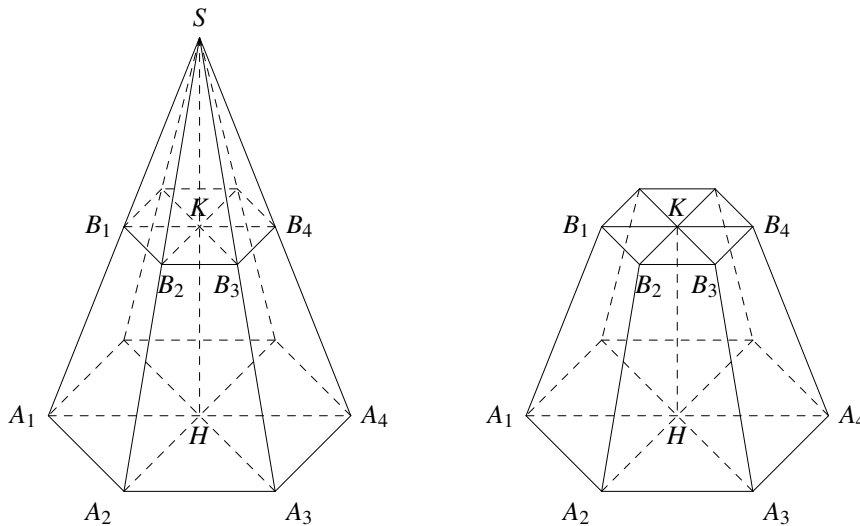
Hình chóp đều là hình chóp có đáy là đa giác đều và các cạnh bên bằng nhau.



Tương tự như đối với hình chóp, khi đáy của hình chóp đều là tam giác đều, hình vuông, ngũ giác đều, ... đôi khi ta cũng gọi rõ chúng tương ứng là chóp tam giác đều, tứ giác đều, ngũ giác đều, ...



Một hình chóp là đều khi và chỉ khi đáy của nó là một hình đa giác đều và hình chiếu của đỉnh trên mặt phẳng đáy là tâm của mặt đáy.



Cho hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$. Một mặt phẳng không đi qua S và song song với mặt phẳng đáy, cắt các cạnh $SA_1, SA_2, ... SA_n$ tương ứng tại $B_1, B_2, ..., B_n$. Khi đó

- ◇ $S.B_1B_2...B_n$ là một hình chóp đều.
- ◇ Gọi H là tâm của đa giác $A_1A_2...A_n$ thì đường thẳng SH đi qua tâm K của đa giác đều $B_1B_2...B_n$ và HK vuông góc với các mặt phẳng $(A_1A_2...A_n), (B_1B_2...B_n)$.



- ◇ Hình gồm các đa giác đều $A_1A_2...A_n, B_1B_2...B_n$ và các hình thang cân $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, ..., A_nA_1B_1B_n$ được tạo thành như trên được gọi là một *hình chóp cụt đều* (nói đơn giản là hình chóp cụt được tạo thành từ hình chóp đều $S.A_1A_2...A_n$ sau khi cắt đi chóp đều $S.B_1B_2...B_n$), kí hiệu là $A_1A_2...A_n.B_1B_2...B_n$.
- ◇ Các đa giác $A_1A_2...A_n$ và $B_1B_2...B_n$ được gọi là hai *mặt đáy*, các hình thang $A_1A_2B_2B_1, A_2A_3B_3B_2, ..., A_nA_1B_1B_n$ được gọi là các *mặt bên* của hình chóp cụt. Các đoạn thẳng $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ được gọi là các *cạnh bên*; các cạnh của mặt đáy được gọi là các *cạnh đáy* của hình chóp cụt.

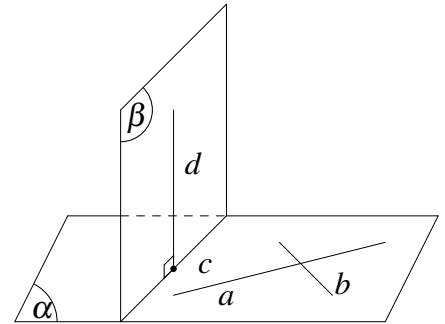
- ◇ Đoạn thẳng HK nối hai tâm của đáy được gọi là *đường cao* của hình chóp cắt đều. Độ dài của đường cao được gọi là *chiều cao* của hình chóp cắt.

Dạng 1 Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc

- ✓ Chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.

★ Do $\begin{cases} d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha);$

★ Mà $d \subset (\beta)$ nên $(\beta) \perp (\alpha).$



- ✓ Nếu xác định được góc giữa (α) và (β) , thì ta cần chứng minh góc đó bằng 90° .



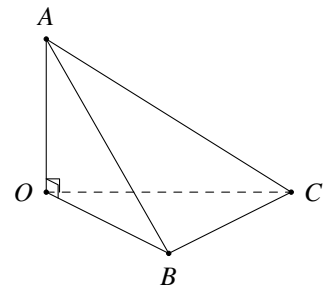
⚠ Lưu ý. Cho hai mặt phẳng vuông góc nhau. Đường thẳng nào nằm trong mặt này mà **vuông góc với giao tuyến** thì sẽ vuông với mặt thứ hai.

⇒ Ví dụ 1

Cho tứ diện $OABC$ có $OA \perp OB$ và $OA \perp OC$. Chứng minh $(OAB) \perp (OBC)$, $(OAC) \perp (OBC)$.

👉 *Lời giải.*

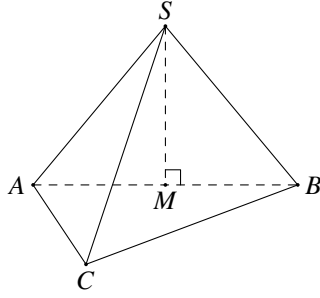
Do OA vuông góc với OB và OC nên $OA \perp (OBC)$. Mặt khác, các mặt phẳng (OAB) , (OAC) chứa OA . Do đó chúng cùng vuông góc với mặt phẳng (OBC) .



⇒ Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABC$ có SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh $SM \perp (ABC)$.

Lời giải.



Theo đề bài ta có $(SAB) \perp (ABC)$. Ta có tam giác SAB đều và M là trung điểm của AB , suy ra $SM \perp AB$. Đường thẳng SM nằm trong (SAB) và vuông góc với giao tuyến AB của hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) . Từ đó suy ra $SM \perp (ABC)$.

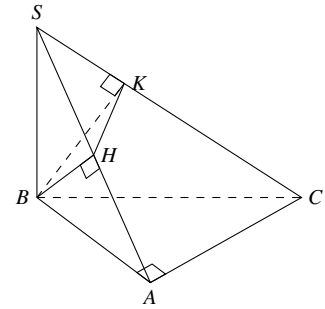
Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABC$ có tam giác ABC vuông tại A , $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là hình chiếu của B trên các đường thẳng SA và SC . Chứng minh rằng:

- a) $(SAC) \perp (SAB)$. b) $(SAC) \perp (BHK)$.

Lời giải.

- a) Ta có $AC \perp AB$, $AC \perp SA$ (vì $SA \perp (ABC)$). Do đó $AC \perp (SAB)$. Vì vậy $(SAC) \perp (SAB)$.
- b) Ta có $SC \perp BK$. Mặt khác $BH \perp SA$ và $BH \perp AC$ (vì $AC \perp (SAB)$). Do đó $BH \perp (SAC)$, suy ra $SC \perp BH$. Từ đó $SC \perp (BHK)$. Vì vậy $(SAC) \perp (BHK)$.

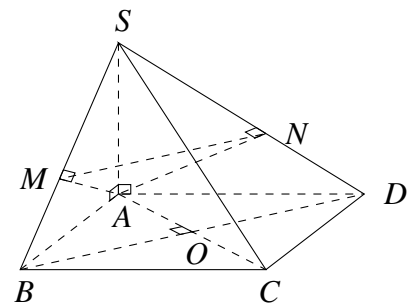


Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AMN)$.

Lời giải.

Ta có $BD \perp AC$, $BD \perp SA$ (vì $SA \perp (ABCD)$).
Do đó $BD \perp (SAC)$.
Mà $MN \parallel BD$ (do $\frac{SM}{SB} = \frac{SN}{SD}$) nên $MN \perp (SAC)$.
Vì vậy $(SAC) \perp (AMN)$.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Chứng minh rằng các mặt phẳng $(ABC), (BAD), (CAD)$ đôi một vuông góc với nhau.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2



Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$, $SA \perp (ABC)$. Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh rằng $(SAI) \perp (SBC)$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3



Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi H và K lần lượt là trực tâm các tam giác ABC và SBC . Chứng minh rằng $(SBC) \perp (CHK)$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và $SA = SB = SC$. Chứng minh rằng $(SBD) \perp (ABCD)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông $ABCD$. Gọi S là một điểm không thuộc (P) sao cho SAB là tam giác đều và $(SAB) \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAD) \perp (SAB)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm AD . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SMB)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 7



Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I và F lần lượt là trung điểm AB và AD . Chứng minh rằng $(SID) \perp (SFC)$.

.....

.....

.....

.....

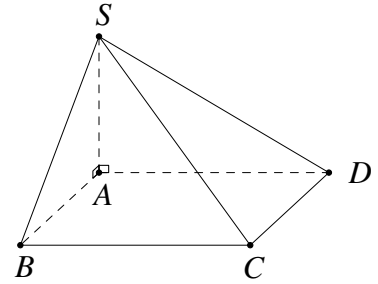
.....

Bài 8



Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình bên). Chứng minh rằng:

- a) $(SAB) \perp (ABCD)$;
- b) $(SAB) \perp (SAD)$.



.....

.....

.....

.....

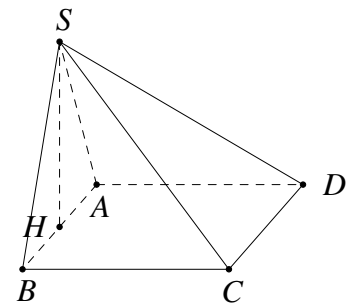
.....

.....

Bài 9



Cho hình chóp $S.ABCD$ có $(SAB) \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình chữ nhật (Hình bên). Chứng minh rằng: $(SBC) \perp (SAB)$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 10



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của A lên SB và SD . Chứng minh rằng $(SAC) \perp (AMN)$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

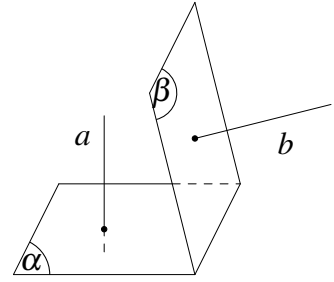
2

Tìm góc giữa hai mặt phẳng

Ta thường áp dụng một trong bốn cách sau đây:

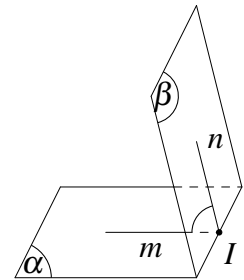
1 Dùng định nghĩa:

- ◇ Góc giữa (α) và (β) bằng góc giữa hai đường thẳng a và b lần lượt vuông góc với chúng.
- ◇ Nếu $a \perp (\alpha)$; $b \perp (\beta)$ thì $\widehat{((\alpha), (\beta))} = \widehat{(a, b)}$.
 - ☆ Nếu a và b đồng phẳng, ta có thể tính góc giữa a và b bằng cách dùng các định lý trong tam giác;
 - ☆ Nếu a và b không đồng phẳng, ta thực hiện các bước dời hình để đưa về góc trong hình phẳng.



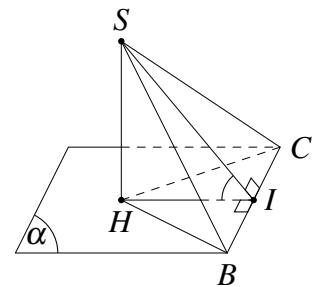
2 Dựng hai đường trong hai mặt lần lượt vuông góc với giao tuyến.

- ◇ Dựng giao tuyến $c = (\alpha) \cap (\beta)$;
- ◇ Dựng $m \perp c$ và $n \perp c$ tại I , ($m \in (\alpha)$, $n \in (\beta)$).
- ◇ Góc cần tìm là $\widehat{(m; n)}$.



3 Nếu biết hình chiếu của một đỉnh nằm trên mặt này đến mặt kia (hình vẽ) thì ta dựng thông qua 2 lần kẻ như sau:

- ◇ Từ chân đường cao H , kẻ $HI \perp BC$.
 - ☆ Nếu ΔHBC cân tại H hoặc đều thì I là trung điểm của BC .
 - ☆ Nếu ΔHAB vuông tại B (hoặc C) thì I trùng B (hoặc C).
- ◇ Từ S , kẻ SI . Suy ra góc cần tìm là \widehat{SIH} .



4 Diện tích hình chiếu:

- ◇ Cho đa giác (H') nằm trong (β) và đa giác (H) là hình chiếu vuông góc của (H') lên (α) . Nếu $\widehat{((\alpha), (\beta))} = \varphi$ thì $S_{(H)} = S_{(H')} \cdot \cos \varphi$.
- ◇ Như hình trên thì:

$$S_{\Delta HBC} = S_{\Delta SBC} \cdot \cos \widehat{SIH}$$

⇒ Ví dụ 5

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính góc giữa hai mặt phẳng

- a) (SAC) và (SAD) .
- b) (SAB) và (SAD) .

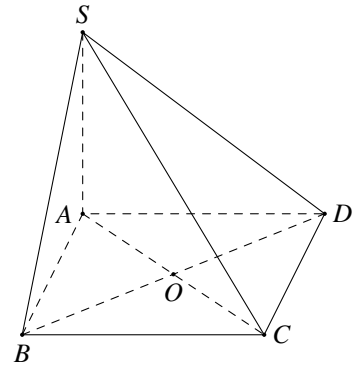
Lời giải.

- a) Ta có $BO \perp SA$ và $BO \perp AC$, suy ra $BO \perp (SAC)$.
 $BA \perp SA$ và $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$.
 Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SAD) là α thì

$$\alpha = (BO, BA) = \widehat{ABO} = 45^\circ.$$

- b) Ta có $CB \perp SA$ và $CB \perp AB$, suy ra $CB \perp (SAB)$.
 $CD \perp SA$ và $CD \perp AD$, suy ra $CD \perp (SAD)$.
 Do đó, nếu gọi góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là β thì

$$\beta = (CB, CD) = \widehat{BCD} = 90^\circ.$$

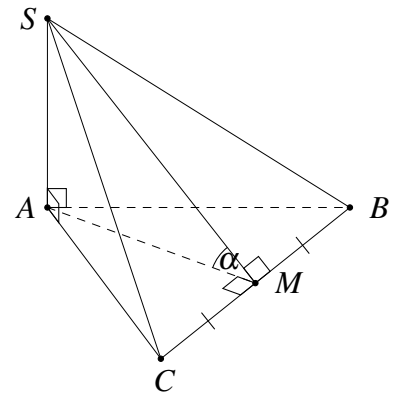


❖ Ví dụ 6

Cho tứ diện $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$ và $SA = \frac{3a}{2}$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

🔪 Lời giải.

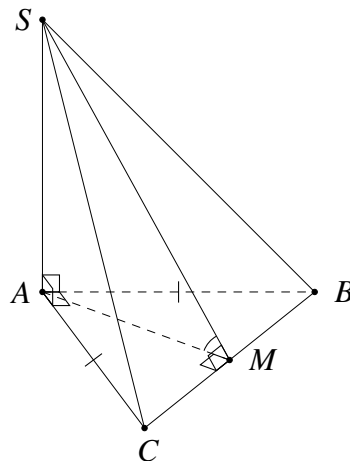
Gọi góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là α .
 Gọi M là trung điểm của BC . Do $\triangle ABC$ đều nên $AM \perp BC$. (1)
 Theo giả thiết $SA \perp (ABC)$, suy ra theo (1) ta có $SM \perp BC$. (2)
 Lại có $(SBC) \cap (ABC) = BC$. (3)
 Từ (1), (2) và (3) ta có $\alpha = \widehat{SMA}$.
 Ta có $AM = \sqrt{AC^2 - CM^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Xét tam giác SAM vuông tại A , ta có: $\tan \alpha = \frac{SA}{AM} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$, suy ra $\alpha = 60^\circ$.



❖ Ví dụ 7

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $SA = \frac{a}{2}$ và $SA \perp (ABC)$. Tính diện tích tam giác SBC .

🔪 Lời giải.

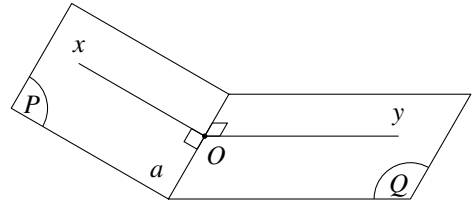


Dạng

3

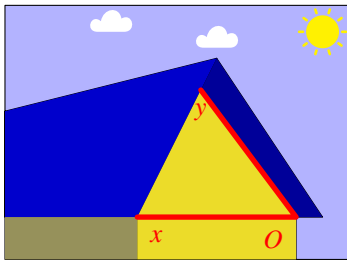
Góc nhị diện

- ✓ Bước 1: Tìm $(P) \cap (Q) = a$;
- ✓ Bước 2: Tìm $x \subset (P), x \perp a$ và $y \subset (Q), y \perp a$;
- ✓ Bước 3: Kết luận $[P, a, Q] = (x, y)$.

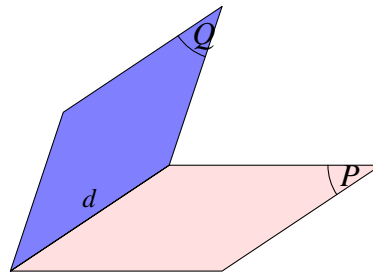


Ví dụ 8

Trong các công trình xây dựng nhà ở, độ dốc mái được hiểu là độ nghiêng của mái khi hoàn thiện so với mặt phẳng nằm ngang. Khi thi công, mái nhà cần một độ nghiêng nhất định để đảm bảo thoát nước tốt tránh gây ra tình trạng đọng nước hay thấm dột. Quan sát hình dưới và cho biết góc nhị diện nào phản ánh độ dốc của mái.



a)



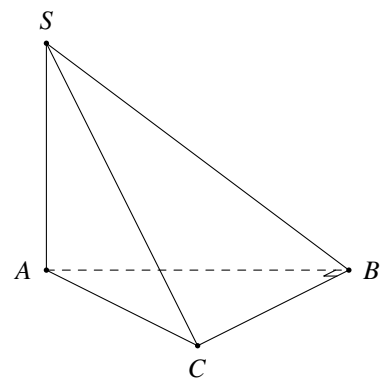
b)

Lời giải. Giả sử nửa mặt phẳng (P) (minh hoạ mặt phẳng nằm ngang) và nửa mặt phẳng (Q) (minh hoạ mái nhà) cắt nhau theo giao tuyến d (Hình b). Khi đó góc nhị diện có cạnh là đường thẳng d , hai mặt lần lượt là (P) và (Q) phản ánh độ dốc của mái. Độ dốc đó cũng được phản ánh bởi góc phẳng nhị diện xOy của góc nhị diện trên (Hình a).

Ví dụ 9

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, AB = a, SA \perp (ABC), SA = a\sqrt{3}$ (Hình bên). Tính số đo theo đơn vị độ của mỗi góc nhị diện sau:

- a) $[B, SA, C]$; b) $[A, BC, S]$.



Lời giải.

- a) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB, SA \perp AC$. Do đó, góc BAC là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[B, SA, C]$. Do tam giác ABC vuông cân tại B nên $\widehat{BAC} = 45^\circ$. Vậy số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$ bằng 45° .
- b) Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp BC$. Như vậy BC vuông góc với hai đường thẳng AB và SB , suy

- ② Diện tích $S_{ABB'A'} = 2a \cdot a = 2a^2$; Diện tích $S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = \frac{(2a+a) \cdot a}{2} = \frac{3}{2}a^2$; Diện tích $S_{BCC'B'} = 2a \cdot a = 2a^2$; Diện tích $S_{ADD'A'} = 2a \cdot 2a = 4a^2$.
 Diện tích $S_{CDD'C'} = 2a \cdot a\sqrt{2} = 2a^2\sqrt{2}$.
 Vậy tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ bằng

$$2a^2 + 3a^2 + 2a^2 + 4a^2 + 2a^2\sqrt{2} = (11 + 2\sqrt{2})a^2.$$

❖ Ví dụ 11

Cho hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ và đường nối tâm hai đáy bằng a . Tính độ dài cạnh bên và đường cao của mỗi mặt bên.

Lời giải.

Kí hiệu các đỉnh của hình chóp cụt và tâm của hai đáy như hình vẽ bên.

Trong hình thang vuông $O'OCC'$, vẽ đường cao $C'H$ ($H \in OC$). Do $C'H \parallel OO'$ nên $C'H \perp (ABCD)$.

Ta có $O'C' = \frac{A'C'}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$; $OC = \frac{AC}{2} = \frac{2a\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$. Suy ra

$$HC = OC - O'C' = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

Trong tam giác $C'HC$ vuông tại H , ta có

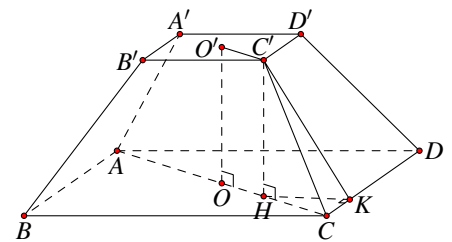
$$CC' = \sqrt{C'H^2 + HC^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}.$$

Trong $(ABCD)$, vẽ $HK \parallel AD$ ($K \in CD$). Suy ra $HK \perp CD$.

Ta có $\begin{cases} CD \perp HK \\ CD \perp C'H \end{cases} \Rightarrow CD \perp C'K$, suy ra $C'K$ là đường cao của mặt bên $CDD'C'$.

$$\text{Do } HK \parallel AD \Rightarrow \frac{HK}{AD} = \frac{CH}{CA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{1}{4} \Rightarrow HK = \frac{AD}{4} = \frac{2a}{4} = \frac{a}{2}.$$

Trong tam giác $C'HK$ vuông tại H ta có: $C'K = \sqrt{C'H^2 + HK^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 17



Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a .

- Tính độ dài đường chéo của hình lập phương.
- Chứng minh rằng $(ACC'A') \perp (BDD'B')$.
- Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Chứng minh rằng $\widehat{COC'}$ là một góc phẳng của góc nhị diện $[C, BD, C']$. Tính (gần đúng) số đo của các góc nhị diện $[C, BD, C']$, $[A, BD, C']$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 18



Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- a) Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.
- b) Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.
- c) Cho $AB = a, BC = b, CC' = c$. Tính AC' .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 19



Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b .

- a) Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.
- b) Tính tang của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 20



Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh bên bằng a , mặt bên tạo với đáy một góc 60° .

- Tính góc giữa đường cao của hình chóp và mặt bên.
- Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy của hình chóp.



BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Mệnh đề nào sau đây đúng?

- Đường thẳng d là đường vuông góc chung của hai đường thẳng nhau a, b khi và chỉ khi d vuông góc với cả a và b .
- Cho hai mặt phẳng vuông góc với nhau, nếu một đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng thì vuông góc với mặt phẳng kia.
- Nếu đường thẳng a và mặt phẳng (P) cùng vuông góc với đường thẳng d thì đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) .
- Nếu hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

❖ **Câu 2.** Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(P), (Q)$. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- $\alpha > 0^\circ$.
- $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- $90^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.
- $0^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$.

❖ **Câu 3.** Mệnh đề nào sau đây là **đúng**?

- (A) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- (B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
- (C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- (D) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.

❖ **Câu 4.** Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
- (B) Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.
- (C) Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
- (D) Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.

❖ **Câu 5.** Trong không gian, khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) Nếu ba mặt phẳng cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song với nhau.
- (B) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- (C) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- (D) Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.

❖ **Câu 6.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm AC và BD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) Các mặt bên là các tam giác đều.
- (B) $SA = SB = SC = SD$.
- (C) $ABCD$ là hình vuông.
- (D) $SO \perp (ABCD)$.

❖ **Câu 7.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là **đúng**?

- (A) Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- (B) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
- (C) Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- (D) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

❖ **Câu 8.** Trong các khẳng định sau về hình lăng trụ đều, khẳng định nào là **sai**?

- (A) Các mặt bên là những hình vuông.
- (B) Các cạnh bên vuông góc với mặt đáy.
- (C) Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy.
- (D) Đáy là đa giác đều.

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của S lên BD . Góc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ là

- (A) \widehat{SOA} .
- (B) \widehat{SBA} .
- (C) \widehat{SHA} .
- (D) \widehat{SDA} .

❖ **Câu 10.** Trong các mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) Số đo của góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180° .
- (B) Số đo của góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 90° .
- (C) Số đo của góc nhị diện nhận giá trị từ 90° đến 180° .
- (D) Hai mặt phẳng cắt nhau tạo thành hai góc nhị diện.

❖ **Câu 11.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

- (A) Các góc phẳng nhị diện của một góc nhị diện có số đo phụ thuộc vào vị trí của đỉnh góc.
- (B) Số đo góc nhị diện không vượt quá 90° .
- (C) Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của góc nhị diện, hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.
- (D) Góc nhị diện chính là góc giữa hai mặt phẳng.

❖ **Câu 12.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây đúng?

- (A) Số đo của góc nhị diện $[S, AB, C]$ bằng \widehat{SBC} .
- (B) Số đo của góc nhị diện $[D, SA, B]$ bằng 90° .
- (C) Số đo của góc nhị diện $[S, AC, B]$ bằng 90° .
- (D) Số đo của góc nhị diện $[D, SA, B]$ bằng \widehat{BSD} .

❖ **Câu 13.** Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc. Góc phẳng nhị diện $[B, SA, C]$ bằng

- (A) 30° .
- (B) 45° .
- (C) 60° .
- (D) 90° .

❖ **Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB, CD . Góc phẳng nhị diện $[S, AB, K]$ là

- (A) \widehat{SHK} .
- (B) \widehat{SAK} .
- (C) \widehat{SAC} .
- (D) \widehat{SAD} .

❖ **Câu 15.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- (A) Số đo của góc nhị diện $[S, AB, C]$ bằng \widehat{SBC} .
- (B) Số đo của góc nhị diện $[D, SA, B]$ bằng 90° .
- (C) Số đo của góc nhị diện $[S, AC, B]$ bằng 90° .
- (D) Số đo của góc nhị diện $[D, SA, B]$ bằng \widehat{BSD} .

❖ **Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm $O, SA \perp (ABCD)$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

- (A) $(SBC) \perp (SAB)$.
- (B) $(SAB) \perp (ABCD)$.
- (C) $(SAC) \perp (ABCD)$.
- (D) $(SAC) \perp (SAD)$.

❖ **Câu 17.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

- (A) $(ABCD) \perp (SBD)$.
- (B) $(SAB) \perp (ABCD)$.
- (C) $(SAC) \perp (SBD)$.
- (D) $(SAC) \perp (ABCD)$.

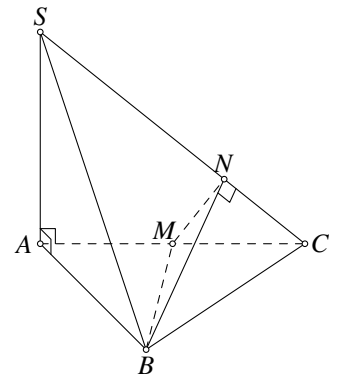
❖ **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy, I là trung điểm AC , H là hình chiếu của I lên SC . Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $(BIH) \perp (SBC)$.
- (B) $(SAC) \perp (SAB)$.
- (C) $(SBC) \perp (ABC)$.
- (D) $(SAC) \perp (SBC)$.

- ❖ **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD) ?
- (A) (SBC) . (B) (SAD) . (C) (SCD) . (D) (SAC) .
- ❖ **Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc nhau và $SA = SC = a, SB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng
- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .
- ❖ **Câu 21.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây đúng?
- (A) Góc phẳng nhị diện $[S, AB, C]$ là \widehat{SBC} . (B) Góc phẳng nhị diện $[D, SA, C]$ là \widehat{DAC} .
 (C) Góc phẳng nhị diện $[S, AC, B]$ là \widehat{SOB} . (D) Góc phẳng nhị diện $[D, SA, B]$ là \widehat{BSD} .
- ❖ **Câu 22.** Cho hình chóp $S.ABC$ như hình vẽ. Biết $SA \perp (ABC)$, H là điểm thuộc đoạn thẳng BC . Xác định góc nhị diện $[H, SA, B]$.
- (A) \widehat{HAB} . (B) \widehat{HBA} . (C) \widehat{CHA} . (D) \widehat{CAH} .
- ❖ **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại $O, SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều. Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Xác định góc nhị diện $[M, SO, D]$.
- (A) \widehat{MOD} . (B) \widehat{SOM} . (C) \widehat{SOD} . (D) \widehat{MOA} .
- ❖ **Câu 24.** Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}, OA = a$. Tính góc nhị diện $[A, BC, O]$
- (A) 60° . (B) 30° . (C) 45° . (D) 90° .
- ❖ **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Ta có tan của góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) bằng
- (A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. (B) $\sqrt{2}$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.
- ❖ **Câu 26.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$, $BC = a, AC = 2a, A'A = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa mặt phẳng $(BCD'A')$ và mặt phẳng $(ABCD)$.
- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .
- ❖ **Câu 27.** Cho hình lăng trụ xiên $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều ABC . Hình chiếu của A' lên mặt phẳng ABC là trọng tâm G , hình lăng trụ có cạnh bằng $6a$ và cạnh bên bằng $a\sqrt{21}$. Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng
- (A) 60° . (B) 30° . (C) 90° . (D) 45° .
- ❖ **Câu 28.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?
- (A) $BM \perp AC$. (B) $(SBM) \perp (SAC)$. (C) $(SAB) \perp (SBC)$. (D) $(SAB) \perp (SAC)$.
- ❖ **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại $B; SA \perp (ABC)$. Góc giữa (SBC) và (ABC) là góc nào?
- (A) \widehat{SBC} . (B) \widehat{SBA} . (C) \widehat{SCB} . (D) \widehat{SCA} .
- ❖ **Câu 30.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây **đúng**?
- (A) $\tan \alpha = \sqrt{6}$. (B) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (D) $\tan \alpha = \sqrt{2}$.

❖ **Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy, M là trung điểm AC , N là hình chiếu của B lên SC (như hình bên). Khẳng định nào sau đây **đúng**?

- (A) $(BMN) \perp (SBC)$. (B) $(SAC) \perp (SAB)$.
 (C) $(BMN) \perp (ABC)$. (D) $(SAC) \perp (SBC)$.



❖ **Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) bằng

- (A) 45° . (B) 30° . (C) 60° . (D) 90° .

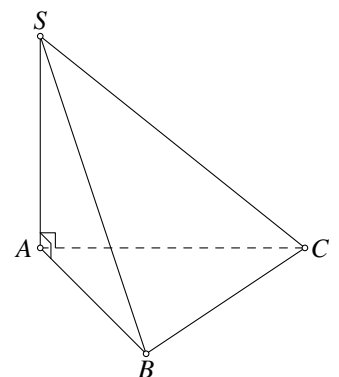
❖ **Câu 33.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (ACD') và $(ABCD)$. Giá trị của $\sin \alpha$ bằng:

- (A) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (B) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (C) $\frac{\sqrt{6}}{3}$. (D) $\sqrt{2}$.

❖ **Câu 34.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{21}}{6}$. Giá trị góc α giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

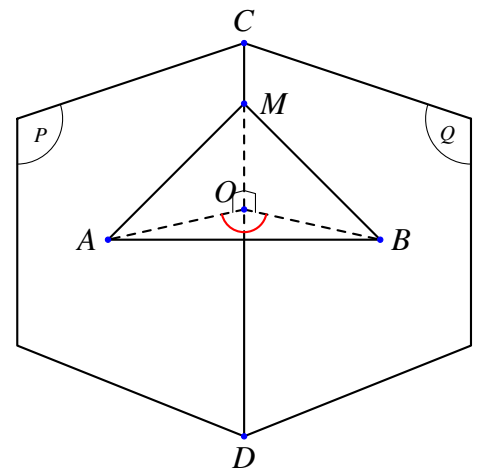
❖ **Câu 35.** Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác cân tại A , $AB = a, BC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy. Tính góc tạo bởi hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) .



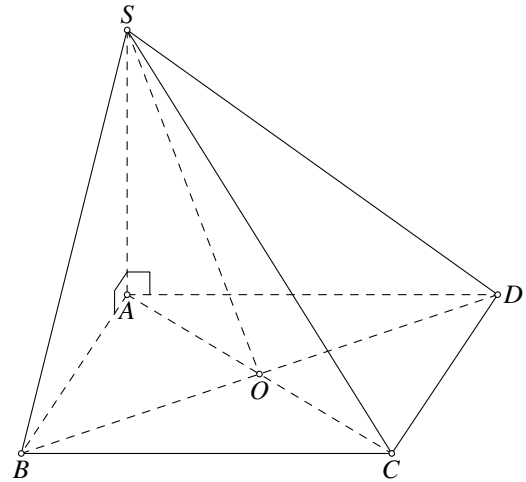
- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

❖ **Câu 36.** Cho hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có giao tuyến là đường thẳng CD . Điểm $A \in (P), B \in (Q)$ và AO, BO cùng vuông góc với CD . M là một điểm bất kì thuộc CD ($M \neq O$). Xác định góc nhị diện $[A, CD, B]$.

- (A) \widehat{AOB} . (B) \widehat{AMO} . (C) \widehat{AMB} . (D) \widehat{OAB} .



⇨ **Câu 37.** Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Số đo của góc nhị diện $[S, BD, A]$?



- (A) 90° . (B) 30° . (C) 60° . (D) 45° .

⇨ **Câu 38.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S, BC, O]$.

- (A) $\alpha \approx 75^\circ 46'$. (B) $\alpha \approx 71^\circ 21'$. (C) $\alpha \approx 68^\circ 31'$. (D) $\alpha \approx 65^\circ 21'$.

⇨ **Câu 39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a\sqrt{2}$, $SO = a$. Tính tan của góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) .

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) 1. (C) $\sqrt{3}$. (D) $2\sqrt{2}$.



2 Câu trắc nghiệm đúng sai.

⇨ **Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = 2a$, $AD = a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H , K lần lượt là trung điểm AB và CD .

- a) $SH \perp (ABCD)$. b) Góc giữa SC và $(ABCD)$ là \widehat{SCA} .
 c) Góc giữa SB và CD là 90° . d) Góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$ bằng 60° .

⇨ **Câu 2.** Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB = AC = a$, $AD = a\sqrt{3}$.

- a) $AC \perp (ABD)$. b) $(CD, (ABD)) = 30^\circ$.
 c) Góc phẳng nhị diện $[A, BC, D] \approx 87,79^\circ$. d) Góc phẳng nhị diện $[C, AB, D] = 90^\circ$.

⇨ **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

- a) Số đo của góc nhị diện $[S, AB, D]$ bằng số đo \widehat{SDA} .
 b) Số đo của góc nhị diện $[S, AD, B]$ bằng 90° .
 c) Số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng số đo của \widehat{SCO} .
 d) Số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135° .

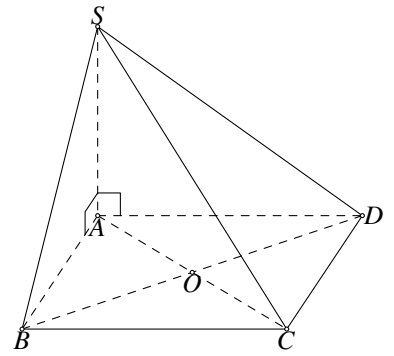
⇨ **Câu 4.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$.

- a) Gọi M là trung điểm $A'B'$, ta có $C'M = a\sqrt{2}$.
 b) Góc phẳng nhị diện $[C, A'B', C']$ bằng 60° .

c) Gọi K là trung điểm AB , M là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$.

d) Góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ bằng 30° .

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy như hình vẽ sau đây.



a) $(SAB) \perp (ABCD)$.

b) Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ là \widehat{SCD} .

c) Góc giữa (SCD) và $(ABCD)$ là \widehat{SDA} .

d) Số đo của góc nhị diện $[B, SA, D]$ bằng 90° .

❖ **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thoi có cạnh bằng a , $AC = a$, $SA = \frac{a}{2}$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình thoi $ABCD$ và H là hình chiếu của O lên SC .

a) $[B, SA, D]$ không phải là góc nhị diện vuông.

b) Số đo của góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng 60° .

c) Số đo của góc nhị diện $[S, BD, C]$ bằng 135° .

d) Số đo của góc nhị diện $[B, SC, D]$ là $\widehat{BHD} = 120^\circ$.

❖ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = 2a$, $AD = a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H , K lần lượt là trung điểm AB và CD .

a) $SH \perp (ABCD)$.

b) Góc phẳng nhị diện $[S, AB, C]$ bằng 90° .

c) $SH = a\sqrt{5}$.

d) Góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$ bằng 30° .

❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O , đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Biết $AB = SB = a$, $SO = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Khi đó

a) $AC \perp (SBD)$.

b) $((SAC), (SBD)) = 60^\circ$.

c) $BD = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

d) $(SAB) \perp (SAD)$.

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H và I lần lượt là trung điểm của AB và BC . Khi đó

a) $SH \perp (ABCD)$.

b) $AD \perp (SAB)$.

c) $((SAB), (SAD)) = 60^\circ$.

d) $(SHC) \perp (SDI)$.

❖ **Câu 10.** Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là tam giác vuông tại A , biết $AB = a$, $AC = a\sqrt{3}$ và $((ACB'), (ABC)) = 60^\circ$. Khi đó

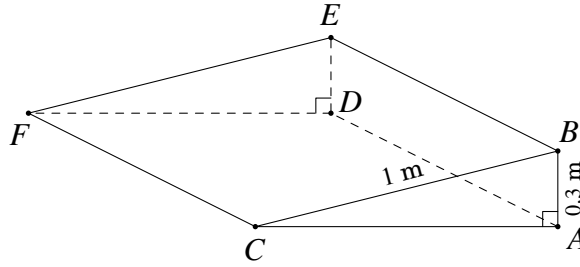
a) $A'A \perp (ABC)$.

b) $((ACB'), (ABB'A')) = 60^\circ$.

c) $((ACC'A'), (BCCB')) = 30^\circ$.

d) Tổng diện tích ba mặt bên của hình lăng trụ đã cho bằng $(3\sqrt{3} + 3)a^2$.

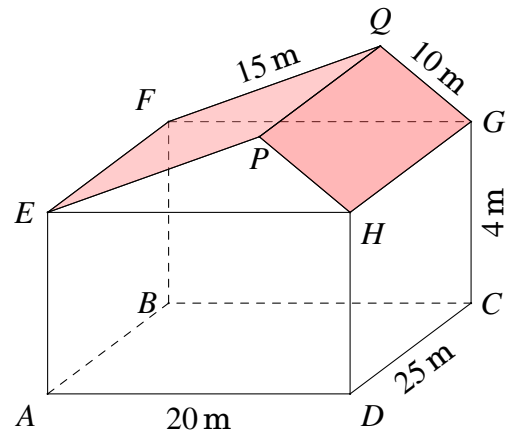
❖ **Câu 11.** Một tấm cầu dốc kê bậc thêm được làm bằng cao su như hình vẽ sau. Biết $BCFE$ là hình vuông có cạnh bằng 1 m và $AB = 0,3$ m (đơn vị độ, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



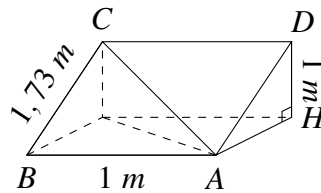
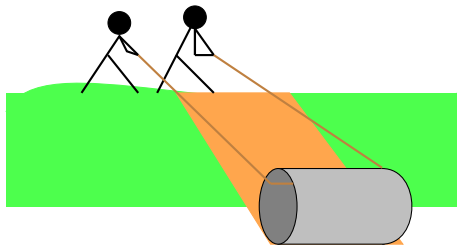
- a) $\sin \widehat{BCA} = 0,5$.
- b) $(BC, (ACFD)) \approx 17^\circ$.
- c) $BF = \sqrt{2}$ m.
- d) $(BF, (ACFD)) \approx 15^\circ$.

❖ **Câu 12.** Hình vẽ bên dưới mô tả một nhà xưởng có bốn bức tường và hai mái nhà đều là các hình chữ nhật với các kích thước ghi trên hình.

- a) Bức tường $(ABFE)$ vuông góc với mặt đất $(ABCD)$.
- b) Góc tạo bởi hai bức tường $(ADHE)$ và $(BCGF)$ bằng 90° .
- c) Góc dốc giữa mái nhà $(EFQP)$ so với mặt đất $(ABCD)$ có số đo xấp xỉ bằng 29° (làm tròn đến hàng đơn vị).
- d) Góc nhị diện tạo bởi hai mái nhà có số đo xấp xỉ bằng $104,5^\circ$ (làm tròn đến một chữ số thập phân).



❖ **Câu 13.** Trong lao động, mặt phẳng nghiêng thường được sử dụng vì tính tiện dụng của nó. Hình vẽ sau minh họa một mặt phẳng nghiêng dùng để vận chuyển đồ, có độ nghiêng so với mặt phẳng nằm ngang là 30° , vận chuyển lên mặt phẳng có độ cao 1 m. Quan sát hình vẽ và xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau.



- a) \widehat{CAK} được gọi là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (Q) .
- b) \widehat{CAK} là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện $[C, AB, K]$.
- c) Mặt phẳng nghiêng có độ dài khoảng 1,73 m.
- d) Biết chiều rộng của mặt phẳng nghiêng đang sử dụng là 1 m, khi đó sin của góc giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (Q) là $\frac{\sqrt{5}}{5}$.


3 Tự luận

Bài 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , mặt bên SAC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với (ABC) .

- Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAC)$.
- Gọi I là trung điểm của SC . Chứng minh rằng $(ABI) \perp (SBC)$.

Bài 2. Cho tam giác đều ABC cạnh a , I là trung điểm của BC , D là điểm đối xứng với A qua I . Vẽ đoạn thẳng SD có độ dài bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và vuông góc với (ABC) . Chứng minh rằng

- $(SBC) \perp (SAD)$
- $(SAB) \perp (SAC)$.

Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt đáy, tam giác SAB vuông cân tại S . Gọi M là trung điểm của AB . Chứng minh rằng:

- $SM \perp (ABCD)$;
- $AD \perp (SAB)$;
- $(SAD) \perp (SBC)$.

Bài 4. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh cùng bằng a , hai mặt phẳng $(A'AB)$ và $(A'AC)$ cùng vuông góc với (ABC) .

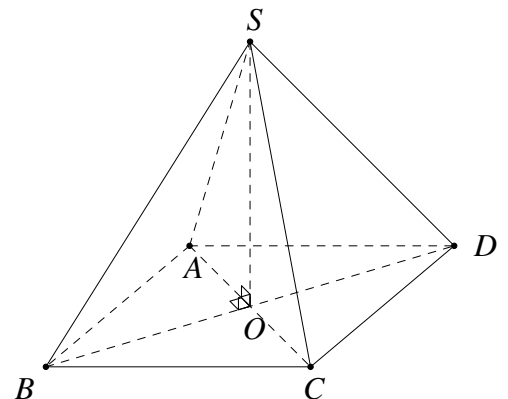
- Chứng minh rằng $AA' \perp (ABC)$.
- Tính số đo góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) .

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$, $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh rằng $(SAC) \perp (SCD)$.

Bài 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , $AA' = b$. Gọi M là trung điểm của CC' . Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để hai mặt phẳng $(A'BD)$ và (MBD) vuông góc với nhau.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a với tâm O , $SO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

- Chứng minh rằng $SO \perp (ABCD)$.
- Tính góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.



Bài 8. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$.

- Chứng minh rằng $(BDD'B') \perp (ABCD)$.
- Xác định hình chiếu của AC' trên mặt phẳng $(ABCD)$.
- Cho $AB = a$, $BC = b$, $CC' = c$. Tính AC' .

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA bằng a , đáy ABC là tam giác đều với cạnh bằng a . Biết hai mặt bên (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính SB và SC theo a .

Bài 10. Cho hình hộp đứng $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi. Biết $AB = BD = a, A'C = 2a$.

- Tính độ dài AA' .
- Tính tổng diện tích các mặt của hình hộp.

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại $O, SO \perp (ABCD)$, tam giác SAC là tam giác đều.

- Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$.
- Chứng minh rằng $AC \perp (SBD)$. Tính số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (SBD) .
- Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính số đo của góc nhị diện $[M, SO, D]$.

Bài 12. Trong không gian cho tam giác đều SAB và hình vuông $ABCD$ cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) . Khi đó hãy tính $\tan \alpha$.

Bài 13. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là số đo của góc phẳng nhị diện $[A', B'C', A]$. Tính $\tan \alpha$?

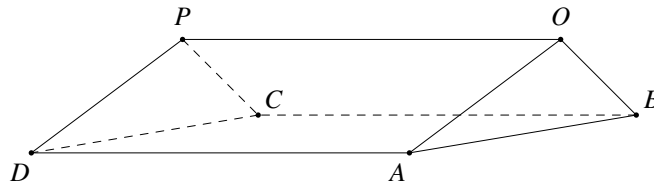
Bài 14. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Biết $OA = OB = a\sqrt{3}, OC = a$. Tìm số đo độ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (OAB) . (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Bài 15. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$? (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

Bài 16. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có các cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$ và đáy là tam giác vuông tại $A, AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tính \tan góc tạo bởi hai mặt phẳng $(A'BC)$ và $(BCC'B')$.

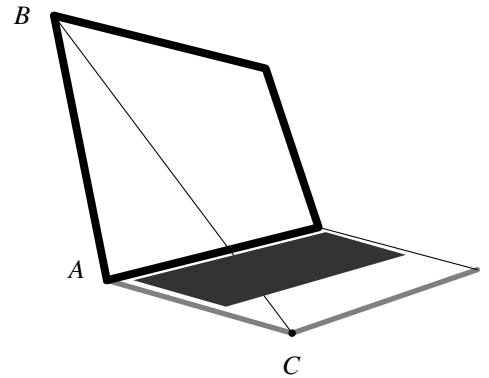
Bài 17. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ tâm O . Gọi I là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và M là điểm thuộc đoạn thẳng OI sao cho $MO = 2MI$. Tính \cos của góc tạo bởi hai mặt phẳng $(MC'D')$ và (MAB) .

Bài 18. Hai mái nhà trong hình bên là hai hình chữ nhật $(AOPD)$ và $(BOPC)$. Giả sử $AB = 4,8$ m, $OA = 2,8$ m, $OB = 4$ m.

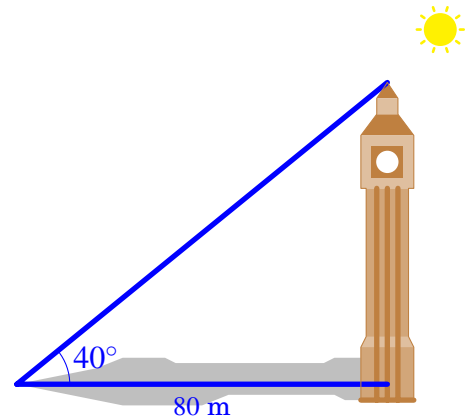


- Tính (gần đúng) số đo của góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái nhà.
- Chứng minh rằng mặt phẳng (OAB) vuông góc với mặt đất phẳng. Lưu ý: Đường giao giữa hai mái (đường nóc) song song với mặt đất.
- Điểm A ở độ cao (so với mặt đất) hơn điểm B là $0,5$ m. Tính (gần đúng) góc giữa mái nhà (chứa OB) so với mặt đất.

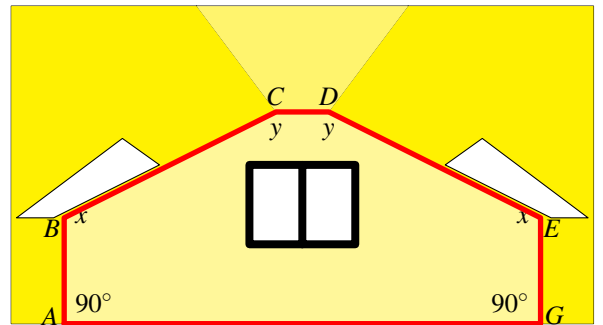
Bài 19. Trong hình bên, máy tính xách tay đang mở gọi nên hình ảnh của một góc nhị diện. Ta gọi số đo góc nhị diện đó là độ mở của màn hình máy tính. Tính độ mở của màn hình máy tính theo đơn vị độ, biết tam giác ABC có độ dài các cạnh là $AB = AC = 30$ cm và $BC = 30\sqrt{3}$ cm.



Bài 20 (Bài toán đo chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp.). Để ước lượng chiều cao của tháp khi không thể lên tới đỉnh tháp, người ta đo góc giữa tia nắng chiếu qua đỉnh tháp và mặt đất, đo chiều dài của bóng tháp trên mặt đất, từ đó ước lượng được chiều cao của tháp. Giả sử khi tia nắng tạo với mặt đất một góc 40° , chiều dài của bóng tháp là 80 m (Hình bên). Tính chiều cao của tháp theo đơn vị mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Bài 21. Trong hình bên, xét các góc nhị diện có góc phẳng nhị diện tương ứng là \widehat{B} , \widehat{C} , \widehat{D} , \widehat{E} trong cùng mặt phẳng. Lục giác $ABCDEG$ nằm trong mặt phẳng đó có $AB = GE = 2$ m, $BC = DE$, $\widehat{A} = \widehat{G} = 90^\circ$, $\widehat{B} = \widehat{E} = x$, $\widehat{C} = \widehat{D} = y$. Biết rằng khoảng cách từ C và D đến AG là 4 m, $AG = 12$ m, $CD = 1$ m. Tìm x, y (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị độ).



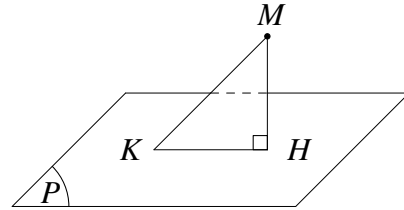
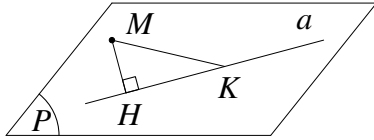
Bài 22. Trong cửa sổ ở hình bên, cánh và khung cửa là các nửa hình tròn có đường kính $D = 100$ cm, bản lề được gắn ở điểm chính giữa O của các cung tròn khung và cánh cửa. Khi cửa mở, đường kính của khung và đường kính của cánh song song với nhau và cách nhau một khoảng d (cm); khi cửa đóng, hai đường kính đó trùng nhau. Hãy tìm khoảng cách d lớn nhất để góc nhị diện tạo bởi cánh và khung cửa không vượt quá 60° .



§5 KHOẢNG CÁCH TRONG KHÔNG GIAN

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, đến một mặt phẳng



- ◇ Khoảng cách từ một điểm M đến một đường thẳng a , kí hiệu $d(M, a)$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên a .
- ◇ Khoảng cách từ một điểm M đến một mặt phẳng (P) , kí hiệu $d(M, (P))$, là khoảng cách giữa M và hình chiếu H của M trên (P) .



- ✔ $d(M, a) = 0$ khi và chỉ khi $M \in a$;
- ✔ $d(M, (P)) = 0$ khi và chỉ khi $M \in (P)$.

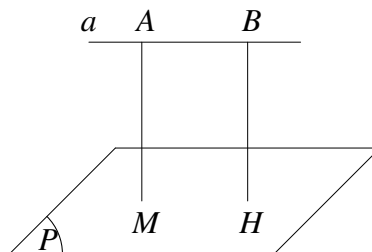


📎 **NHẬN XÉT.** Khoảng cách từ M đến đường thẳng a (mặt phẳng (P)) là khoảng cách nhỏ nhất giữa M và một điểm thuộc a (thuộc (P)).

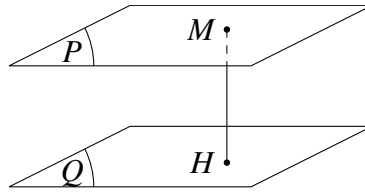


Khoảng cách từ đỉnh đến mặt phẳng chứa mặt đáy của một hình chóp được gọi là chiều cao của hình chóp đó.

2) Khoảng cách giữa các đường thẳng và mặt phẳng song song, giữa hai mặt phẳng song song



Khoảng cách giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) song song với a , kí hiệu $d(a, (P))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì trên a đến (P) .



- ◇ Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) , kí hiệu $d((P), (Q))$, là khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.
- ◇ Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song m và n , kí hiệu $d(m, n)$, là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.



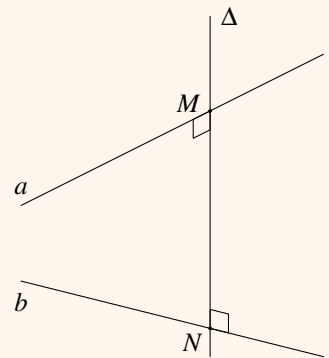
Khoảng cách giữa hai đáy của một hình lăng trụ được gọi là chiều cao của hình lăng trụ đó.

3) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau



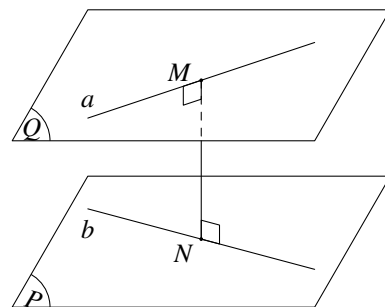
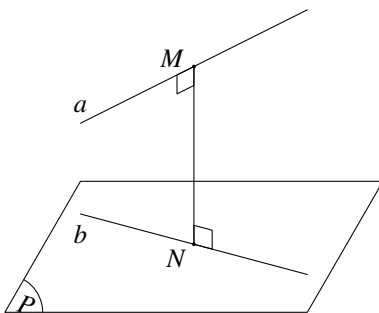
Đường thẳng Δ cắt hai đường thẳng chéo nhau a, b và vuông góc với cả hai đường thẳng đó được gọi là đường vuông góc chung của a và b .

Nếu đường vuông góc chung Δ cắt a, b tương ứng tại M, N thì độ dài đoạn MN được gọi là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a, b .



Nhận xét

- ◇ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó đến mặt phẳng song song với nó và chứa đường thẳng còn lại.
- ◇ Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song tương ứng chứa hai đường thẳng đó.



II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

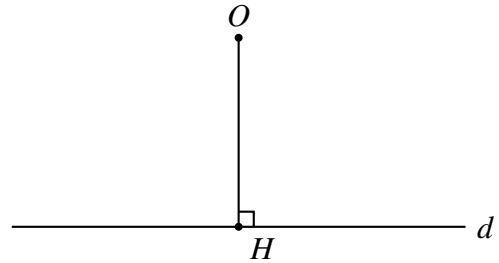
Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng, một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm xuống đường thẳng,

Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d , ta thực hiện các bước sau:

- ◊ Trong mặt phẳng $(O; d)$, hạ $OH \perp d$ tại H .
- ◊ Suy ra $d(O, d) = OH$.

Cuối cùng, tính độ dài OH dựa trên các công thức về hệ thức lượng trong tam giác, tứ giác,...



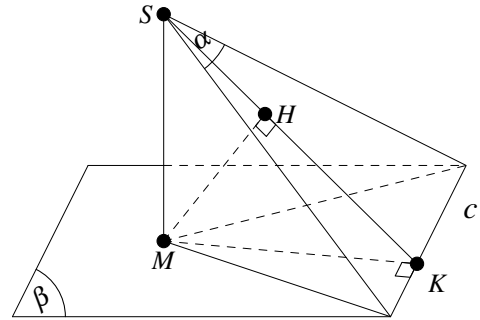
Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

✍ **Tính khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) :** Theo định nghĩa, ta sẽ tìm hình chiếu H của điểm M lên (α) . Khi đó độ dài đoạn MH là khoảng cách cần tìm. Ta thường gặp hai bài toán cơ bản sau:

① **Bài toán 1:** M là hình chiếu vuông góc của một điểm $S \in (\alpha)$ xuống (β) . Khi đó ta dựng điểm H như sau:

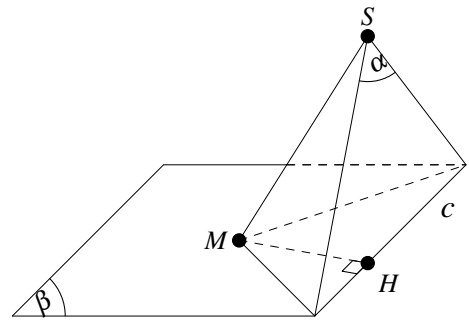
- Bước 1. Dựng MK vuông góc với giao tuyến c tại K ;
- Bước 2. Dựng SK .
- Bước 3. Dựng $MH \perp SK$ tại H . Suy ra

$$d(M, (\alpha)) = MH$$



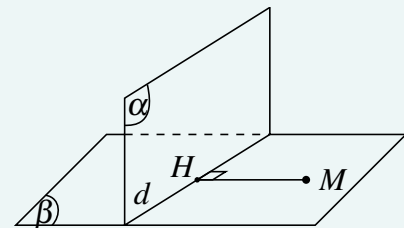
② **Bài toán 2:** $M \in (\beta)$ mà $(\alpha) \perp (\beta)$ thì

- Kẻ MH vuông góc với giao tuyến c tại H
- Suy ra $d(M, (\alpha)) = MH$



Trường hợp tổng quát, ta làm như sau:

- Dựng mặt phẳng (β) chứa điểm M và $(\beta) \perp (\alpha)$
- Xác định giao tuyến d của (β) và (α) .
- Kẻ $MH \perp d$ tại H thì $MH \perp (\alpha)$. Suy ra $d(M, (\alpha)) = MH$.

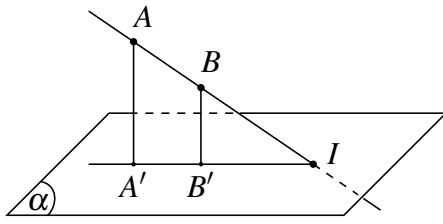


✍ **Chuyển khoảng cách:**

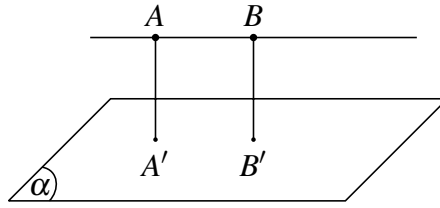
Dạng

1

Phần tiếp theo



$$\frac{d(A, (\alpha))}{d(B, (\alpha))} = \frac{AI}{BI}$$

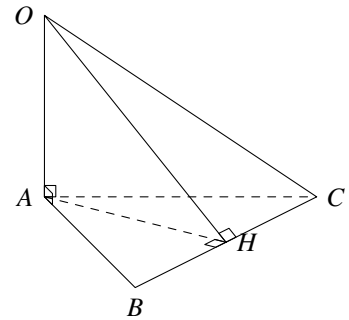


$$d(A, (\alpha)) = d(B, (\alpha))$$

Ví dụ 1

Cho hình chóp $O.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA \perp (ABC)$. Cho biết $OA = a$.

- ① Tính khoảng cách từ điểm O đến (ABC) .
- ② Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC .



Lời giải.

- ① Ta có $OA \perp (ABC)$, suy ra $d(O, (ABC)) = OA = a$.
- ② Vẽ $AH \perp BC$, ta có $OH \perp BC$ (định lý ba đường vuông góc), suy ra $d(O, BC) = OH$.

Tam giác ABC đều có cạnh bằng a suy ra $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Trong tam giác vuông OAH , ta có $OH = \sqrt{OA^2 + AH^2} = \sqrt{a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

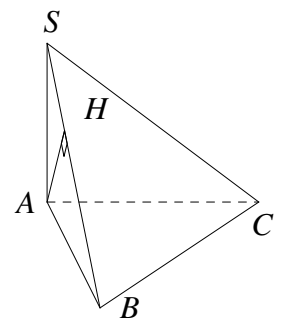
Vậy ta có $d(O, BC) = \frac{a\sqrt{7}}{2}$.

Ví dụ 2

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = a\sqrt{3}$, $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B và $AB = a$. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

Lời giải.

Do $SA \perp (ABC)$ và $SA \subset (SAB)$ nên $(SAB) \perp (ABC)$. Mà $(SAB) \cap (ABC) = AB$ và $AB \perp BC$ nên $BC \perp (SAB)$. Do $BC \subset (SBC)$ nên $(SBC) \perp (SAB)$. Kẻ $AH \perp SB$ với $H \in SB$. Do $(SAB) \cap (SBC) = SB$ nên $AH \perp (SBC) \Rightarrow d(A, (SBC)) = AH$. Do $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ nên $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AB^2} = \frac{1}{3a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{4}{3a^2}$. Vậy $d(A, (SBC)) = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

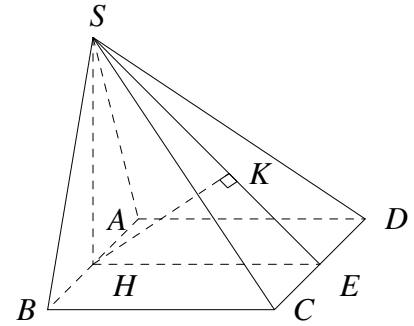


Ví dụ 3

Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Gọi H là trung điểm của AB . Tính khoảng cách từ điểm H đến mặt phẳng (SCD) .

Lời giải.

Do tam giác SAB đều và H là trung điểm của AB nên $SH \perp AB$. Mà $(SAB) \perp (ABCD)$. Nên $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp CD$. Do $ABCD$ là hình vuông nên gọi E là trung điểm của CD nên $HE \perp CD$. Vậy $CD \perp (SHE)$. Mà $CD \subset (SCD)$ nên $(SCD) \perp (SHE)$. Ta có $(SCD) \cap (SHE) = SE$. Kẻ $HK \perp SE$ với $K \in SE$ nên $HK \perp (SCD)$. Khi đó $d(H, (SCD)) = HK$. Vì $AB = a$ nên $SH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. Do $ABCD$ là hình vuông nên $HE = a$. Vì $SH \perp (ABCD)$ nên $SH \perp HE$.



$$\text{Khi đó } \frac{1}{HK^2} = \frac{1}{SH^2} + \frac{1}{HE^2} = \frac{7}{3a^2}. \text{ Nên } HK = \frac{\sqrt{21}a}{7}. \text{ Vậy } d(H, (SCD)) = \frac{\sqrt{21}a}{7}.$$

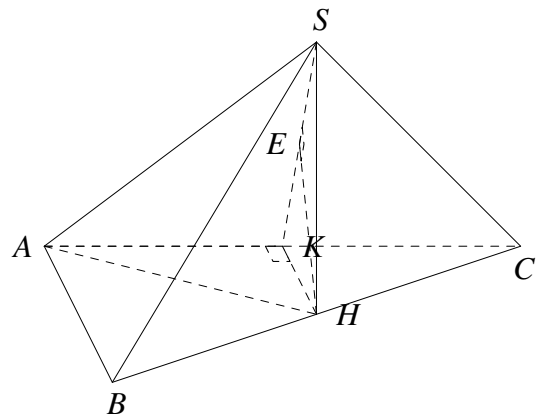
Ví dụ 4

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 1, AC = \sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .

Lời giải.

Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$. Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \perp AC$. Kẻ $HE \perp SK (E \in SK)$. Khi đó $d(B, (SAC)) = \frac{BC}{HC} = 2$.

$$\begin{aligned} \text{Do đó } \frac{d(B, (SAC))}{d(H, (SAC))} &= 2d(H, (SAC)) \\ &= 2HE = 2 \cdot \frac{SH \cdot HK}{\sqrt{SH^2 + HK^2}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}. \end{aligned}$$



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Cho hình chóp đều $S.ABC$. Biết độ dài cạnh đáy, cạnh bên tương ứng bằng $a, b (a < b\sqrt{3})$. Tính chiều cao của hình chóp.

.....

Bài 7



Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là một tam giác đều cạnh a , cạnh SA vuông góc với (ABC) và $SA = h$, góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° . Tính khoảng cách từ A đến (SBC) theo a và h .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 8



Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các mặt đều là hình thoi cạnh a , các góc $\widehat{BAA'} = \widehat{BAD} = \widehat{DAA'} = 60^\circ$. Tính khoảng cách từ A' đến $(ABCD)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

2

Khoảng cách giữa đường và mặt song song - Khoảng cách giữa hai mặt song song

- ① Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) , để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện
 - ◇ Chọn điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A tới (α) được xác định dễ nhất.
 - ◇ Kết luận $d(d; (\alpha)) = d(A, (\alpha))$.
- ② Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha), (\beta)$. Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng ta thực hiện các bước
 - ◇ Chọn điểm A trên (α) sao cho khoảng cách từ A tới (β) được xác định dễ nhất.
 - ◇ Kết luận $d((\beta); (\alpha)) = d(A, (\beta))$.

❖ Ví dụ 5

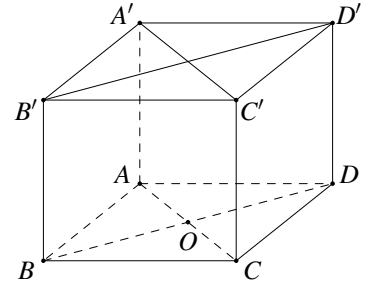
Cho một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AA' = h$. Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD)$, AA' và $(BDD'B')$.

🔍 Lời giải.

Đường thẳng $A'C'$ thuộc mặt phẳng $(A'B'C'D')$ nên nó song song với mặt phẳng $(ABCD)$. Do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp đứng nên $A'A \perp (ABCD)$.

Vậy $d(A'C', (ABCD)) = d(A', (ABCD)) = A'A = h$.

Do AA' song song với BB' nên AA' song song với $(BDD'B')$.



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$. Do $AO \perp BD$ và $AO \perp BB'$ nên $AO \perp (BDD'B')$. Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng độ dài đoạn thẳng AO .

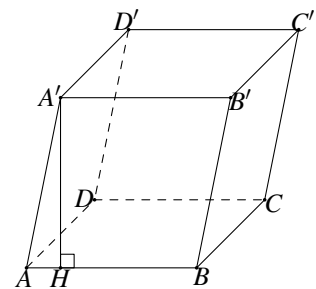
Tam giác BAD cân tại A và có $\widehat{BAD} = 120^\circ$ nên $\widehat{ABO} = 30^\circ$.

Do đó, trong tam giác vuông AOB , ta có $AO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Vậy khoảng cách giữa AA' và $(BDD'B')$ bằng $\frac{a}{2}$.

❖ Ví dụ 6

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, góc giữa hai đường thẳng AB và DD' bằng 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $A'B'$.



🔍 Lời giải. Gọi H là hình chiếu vuông góc của A' trên AB . Do $AB \parallel A'B'$ nên $d(AB, A'B') = A'H$.

Vì $AA' \parallel DD'$ nên góc giữa đường thẳng AB và AA' bằng góc giữa đường thẳng AB và DD' .

Suy ra $\widehat{A'AH} = 60^\circ$.

Trong tam giác vuông HAA' có $A'H = AA' \cdot \sin \widehat{A'AH} = a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Vậy $d(AB, A'B') = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

❖ Ví dụ 7

Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, đáy $(ABCD)$ là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính $AD = 2a$.

- ① Tính khoảng cách từ A, B đến mặt phẳng (SCD) .
- ② Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC) .

🔍 Lời giải.

Ta có $(SCD) \perp (SAC)$. Hạ $AH \perp SC \Rightarrow AH \perp (SCD)$. Suy ra AH là khoảng cách từ A tới (SCD) .

$$\text{Xét } \triangle SAB: \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{SA^2} \Rightarrow AH = a\sqrt{2}.$$

Gọi I là trung điểm của AD , suy ra

$$BI \parallel CD \Rightarrow BI \parallel (SCD) \Rightarrow d(B, (SCD)) = d(I, (SCD)).$$

$$\text{Mặt khác, } AI \cap (SCD) = D, \text{ nên } \frac{d(I, (SCD))}{d(A, (SCD))} = \frac{ID}{AD} = \frac{1}{2}.$$

1 Suy ra $d(I, (SCD)) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

2 Ta có $AD \parallel CD \Rightarrow AD \parallel (SBC) \Rightarrow d(AD, (SBC)) = d(A, (SBC))$.

Hạ $AK \perp BC$, ta có $BC \perp (SAK) \Rightarrow (SBC) \perp (SAK)$ và $(SBC) \perp (SAK) = AK$.

Hạ $AG \perp SK$, suy ra $AG \perp (SBC)$.

Xét $\triangle SAK$, ta có

$$\frac{1}{AG^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AK^2} \Rightarrow AG = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 9



Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a , mặt bên (SBC) vuông góc với đáy. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm AB, SA, AC . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (SBC) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 10



Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo a :

a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$.

b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

.....

.....

.....

.....

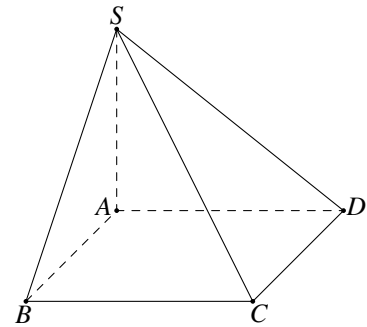
.....

.....

Bài 11



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Chứng minh $CD \parallel (SAB)$ và tính khoảng cách giữa CD và mặt phẳng (SAB) .



.....

.....

.....

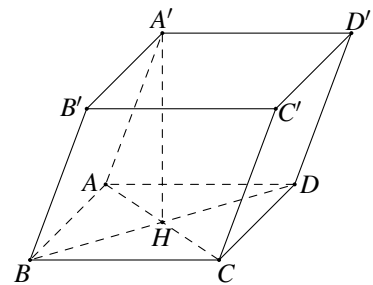
.....

.....

Bài 12



Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có tất cả các cạnh bằng a và đáy là hình vuông. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(ABCD)$ là giao điểm H của AC và BD . Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$.



.....

.....

.....

.....

.....

Bài 13



Hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ S tới $(ABCD)$.

b) Tính khoảng cách giữa đường thẳng AB và mặt (SCD) .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

3

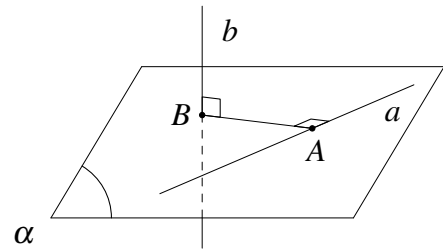
Đoạn vuông góc chung - Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Phương pháp. Ta có các trường hợp sau:

1) Trường hợp 1

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

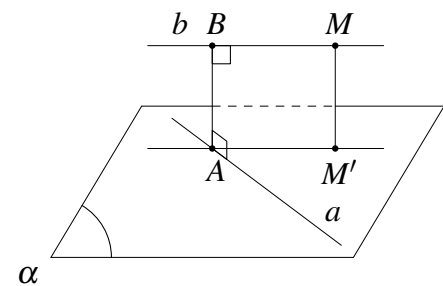
- ◇ Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .
- ◇ Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A , ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .



2) Trường hợp 2

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

- ◇ Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .
- ◇ Lấy một điểm M tùy ý trên b và dựng MM' vuông góc với (α) tại M' .
- ◇ Từ M' dựng b' song song với b cắt a tại A .
- ◇ Từ A dựng AB song song với MM' cắt b tại B , độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .



Nhận xét

- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.
- b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

Ví dụ 8

Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$.

Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

Lời giải.

Gọi H là hình chiếu của A trên BC . Tam giác ABH vuông tại H và có $AB = a$, $\widehat{ABH} = 60^\circ$ nên $BH = \frac{a}{2}$.

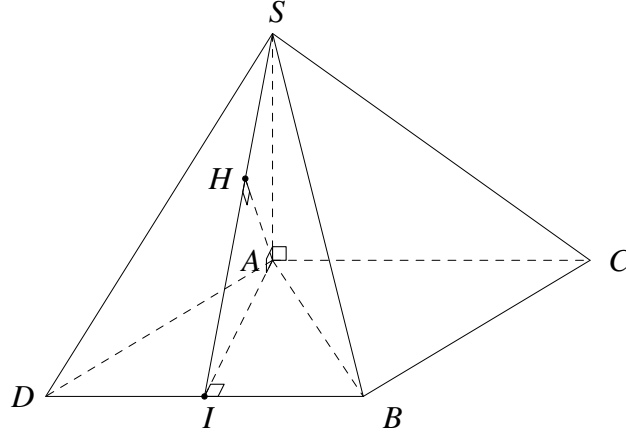
Do SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên AH là đường vuông góc chung của SA và BC (H thuộc tia BC và $BH = \frac{a}{2}$).

Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $d(SA, BC) = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

❖ Ví dụ 9

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC .

🔗 *Lời giải.*



Trong mặt phẳng (ABC) , dựng hình thoi $ACBD$, ta có: $BD \parallel AC \Rightarrow AC \parallel (SBD)$.

$\Rightarrow d(AC, SB) = d(AC, (SBD)) = d(A, (SBD))$.

Gọi I là trung điểm của BD , ta có: $BD \perp AI$ và $BD \perp SA \Rightarrow BD \perp (SAI)$.

$\Rightarrow (SBD) \perp (SAI)$ theo giao tuyến SI .

Trong mặt phẳng (SAI) , kẻ $AH \perp SI$ tại H , ta có: $AH \perp (SBD) \Rightarrow AH = d(A, (SBD))$.

Tam giác SAI vuông tại A có đường cao AH .

$$\Rightarrow \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AI^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{3a^2} = \frac{19}{12a^2}.$$

$$\Rightarrow AH^2 = \frac{12a^2}{19} \text{ hay } AH = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

$$\text{Vậy } d(SB, AC) = \frac{2a\sqrt{57}}{19}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 16



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{2}$.

- Tính khoảng cách từ A đến SC .
- Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$.
- Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa BD và SC .



với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của CD . Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SAB) bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) a . (C) $a\sqrt{2}$. (D) $2a$.

❖ **Câu 5.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AD = b$, $AA' = c$. Khẳng định nào sau đây là sai?

- (A) Khoảng cách giữa đường thẳng AB và $(A'B'C'D')$ bằng a .
 (B) Khoảng cách giữa đường thẳng AC và đường thẳng $B'C'$ bằng c .
 (C) Khoảng cách giữa đường thẳng AD và $(A'B'C'D')$ bằng c .
 (D) Khoảng cách giữa đường thẳng A và (CDC') bằng b .

❖ **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến (SAC) .

- (A) $\frac{a}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

❖ **Câu 7.** Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$, biết $AB = AA' = a$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng

- (A) $a\sqrt{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) a .

❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = 1$, $SA \perp (ABC)$, $SA = 1$. Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) bằng

- (A) $\sqrt{2}$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. (C) 1 . (D) $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh bằng a . Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) a . (C) $2a$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

❖ **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .

- (A) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. (B) a . (C) $\frac{a\sqrt{15}}{5}$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $\sqrt{3}a$, cạnh bên $SD = \sqrt{6}a$ và SD vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng

- (A) $a\sqrt{3}$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $2a$. (D) a .

❖ **Câu 12.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $BC = a$, tam giác đều SAB nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khoảng cách giữa BC và SD là

- (A) $\frac{\sqrt{5}}{5}a$. (B) $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{2}a$. (D) $a\sqrt{3}$.

❖ **Câu 13.** Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

- (A) $a\sqrt{3}$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

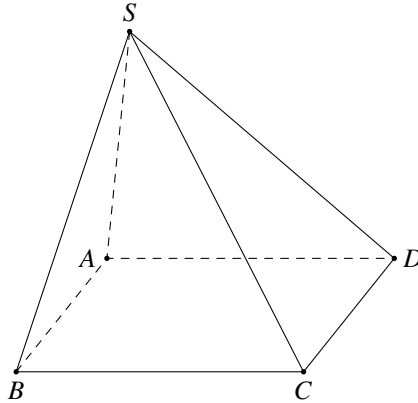
❖ **Câu 14.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SO .

- (A) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. (B) $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. (C) $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

⚡ **Câu 15.** Cho lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là một tam giác vuông cân tại B , $AB = AA' = 2a$, M là trung điểm BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $B'C$ bằng

- (A) $\frac{a}{2}$. (B) $\frac{2a}{3}$. (C) $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. (D) $a\sqrt{3}$.

⚡ **Câu 16.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD là



- (A) CB . (B) CA . (C) CD . (D) CS .

⚡ **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, $SA = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- (A) $a\sqrt{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $2a\sqrt{3}$. (D) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

⚡ **Câu 18.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a\sqrt{3}$, $AD = a$, $AA' = 2a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

- (A) $2a$. (B) $a\sqrt{3}$. (C) a . (D) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

⚡ **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AC = 3a$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng

- (A) $\sqrt{2}a$. (B) $2a$. (C) a . (D) $2\sqrt{2}a$.

⚡ **Câu 20.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $AC = a\sqrt{2}$ và $SA \perp (ABC)$, $SA = a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{a}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{2}}{5}$. (D) $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

⚡ **Câu 21.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng

- (A) $a\sqrt{3}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $2a$. (D) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

⚡ **Câu 22.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $AA' = a\sqrt{3}$. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng

- (A) $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

⚡ **Câu 23.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy, $SA = a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

Ⓐ $a\sqrt{3}$.

Ⓑ $a\sqrt{2}$.

Ⓒ $2a$.

Ⓓ a .

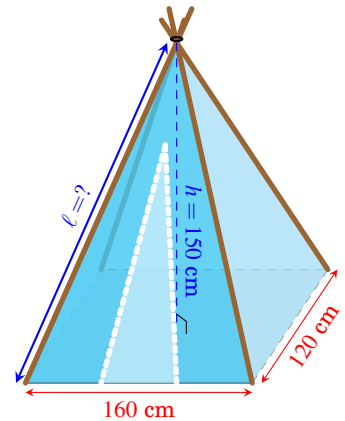
❖ **Câu 24.** Bạn Khang muốn dựng một chiếc lều nhỏ có dạng hình chóp (tham khảo hình vẽ) trang trí cho sinh nhật em trai. Mặt đáy của chiếc lều có kích thước là 120×160 cm. Để dựng được lều có chiều cao 150 cm thì bạn Khang cần chuẩn bị bốn thanh gỗ dựng khung có chiều dài tối thiểu bao nhiêu? Biết rằng các thanh gỗ có khoảng cách từ chân đến đỉnh lều bằng nhau.

Ⓐ $30\sqrt{11}$ cm.

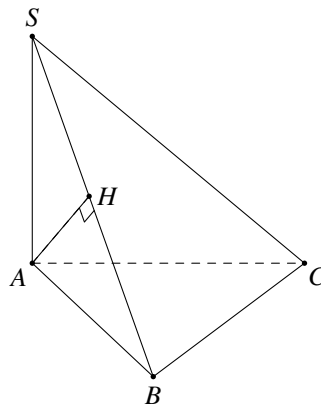
Ⓑ $50\sqrt{11}$ cm.

Ⓒ $50\sqrt{13}$ cm.

Ⓓ $30\sqrt{13}$ cm.



❖ **Câu 25.** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với đáy, $AB = a$. Khoảng cách từ điểm A đến SB bằng



Ⓐ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Ⓑ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ $\frac{a}{2}$.

Ⓓ $a\sqrt{2}$.

❖ **Câu 26.** Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC . Khoảng cách giữa MN và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng

Ⓐ $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ⓑ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ⓒ $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Ⓓ $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Câu 27.** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng $a\sqrt{3}$, $ABC = 60^\circ$. Gọi M là điểm thuộc cạnh BB' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và $C'D$.

Ⓐ $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Ⓑ $\frac{3a}{4}$.

Ⓒ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ⓓ $\frac{3a}{2}$.

❖ **Câu 28.** Cho hình chóp $S.ACBD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, $SA = AB = BC = 1$, $AD = 2$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

Ⓐ $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Ⓑ $d = 1$.

Ⓒ $d = \frac{2a}{3}$.

Ⓓ $d = \frac{2}{3}$.

❖ **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D với $AB = 2a$, $AD = DC = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 60° . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AC và SB .

Ⓐ $d = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ⓑ $d = a\sqrt{2}$.

Ⓒ $d = \frac{2a\sqrt{15}}{5}$.

Ⓓ $d = 2a$.

❖ **Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD .

- (A) $d = \frac{a\sqrt{21}}{7}$. (B) $d = a$. (C) $d = \frac{a\sqrt{21}}{14}$. (D) $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = BC = a, AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

- (A) $d = \frac{2a}{\sqrt{5}}$. (B) $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. (C) $d = a\sqrt{2}$. (D) $d = 2a$.

❖ **Câu 32.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a và cạnh bên bằng $\frac{a\sqrt{21}}{6}$. Tính khoảng cách d từ đỉnh A đến mặt phẳng (SBC) .

- (A) $d = \frac{a}{4}$. (B) $d = \frac{3}{4}$. (C) $d = \frac{3a}{4}$. (D) $d = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

❖ **Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{15}}{2}$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC) .

- (A) $d = \frac{\sqrt{285}}{38}$. (B) $d = \frac{a\sqrt{285}}{38}$. (C) $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $d = \frac{a\sqrt{285}}{19}$.

❖ **Câu 34.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại $B, AB = 3a, BC = 4a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc tạo bởi giữa SC và đáy bằng 60° . Gọi M là trung điểm của AC , tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SM .

- (A) $d = \frac{5a}{2}$. (B) $d = \frac{10a\sqrt{3}}{\sqrt{79}}$. (C) $d = a\sqrt{3}$. (D) $d = 5a\sqrt{3}$.

❖ **Câu 35.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (SBC) .

- (A) $d = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (B) $d = \frac{1}{2}$. (C) $d = \frac{\sqrt{7}}{2}$. (D) $d = \frac{\sqrt{42}}{14}$.

❖ **Câu 36.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc $\widehat{SBD} = 60^\circ$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AB và SO .

- (A) $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $d = \frac{a\sqrt{6}}{4}$. (C) $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. (D) $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

❖ **Câu 37.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh có độ dài bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BB' và $A'H$.

- (A) $d = a$. (B) $d = 2a$. (C) $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

❖ **Câu 38.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ D đến mặt phẳng (SBC) .

- (A) $d = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. (B) $d = \frac{a\sqrt{10}}{2}$. (C) $d = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. (D) $d = a\sqrt{2}$.

❖ **Câu 39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $2a$. Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SCD) .

$$\textcircled{A} d = \frac{a\sqrt{2}}{2}. \quad \textcircled{B} d = \frac{a}{2}. \quad \textcircled{C} d = \frac{2a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}. \quad \textcircled{D} d = \frac{a\sqrt{7}}{\sqrt{30}}.$$

❖ **Câu 40.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 1. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ($ABCD$). Tính khoảng cách d từ A đến (SCD).

$$\textcircled{A} d = 1. \quad \textcircled{B} d = \frac{\sqrt{21}}{7}. \quad \textcircled{C} d = \frac{2\sqrt{3}}{3}. \quad \textcircled{D} d = \sqrt{2}.$$

❖ **Câu 41.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a . Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng ($ABCD$) trùng với trọng tâm của tam giác ABC . Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng ($ABCD$) góc 30° . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SCD) theo a .

$$\textcircled{A} d = a. \quad \textcircled{B} d = \frac{2a\sqrt{21}}{21}. \quad \textcircled{C} d = a\sqrt{3}. \quad \textcircled{D} d = \frac{a\sqrt{21}}{7}.$$

❖ **Câu 42.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, góc giữa SD với đáy bằng 60° . Tính khoảng cách d từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) theo a .

$$\textcircled{A} d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}. \quad \textcircled{B} d = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \textcircled{C} d = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \textcircled{D} d = \frac{a\sqrt{5}}{2}.$$

❖ **Câu 43.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O . Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$). Gọi H và K lần lượt là trung điểm của cạnh BC và CD . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng HK và SD .

$$\textcircled{A} d = 2a. \quad \textcircled{B} d = \frac{a}{2}. \quad \textcircled{C} d = \frac{2a}{3}. \quad \textcircled{D} d = \frac{a}{3}.$$

❖ **Câu 44.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AD = 2BC$, $AB = BC = a\sqrt{3}$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng ($ABCD$). Gọi E là trung điểm của cạnh SC . Tính khoảng cách d từ điểm E đến mặt phẳng (SAD).

$$\textcircled{A} d = \sqrt{3}. \quad \textcircled{B} d = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \textcircled{C} d = a\sqrt{3}. \quad \textcircled{D} d = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

❖ **Câu 45.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC). Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC).

$$\textcircled{A} d = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \textcircled{B} d = a. \quad \textcircled{C} d = \frac{a\sqrt{15}}{5}. \quad \textcircled{D} d = \frac{a\sqrt{5}}{5}.$$

❖ **Câu 46.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (BDA').

$$\textcircled{A} d = \frac{\sqrt{6}}{4}. \quad \textcircled{B} d = \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad \textcircled{C} d = \sqrt{3}. \quad \textcircled{D} d = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

❖ **Câu 47.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng $4a$. Cạnh bên $SA = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng ($ABCD$) là trung điểm của H của đoạn thẳng AO . Tính khoảng cách d giữa các đường thẳng SD và AB .

$$\textcircled{A} d = \frac{4a\sqrt{22}}{11}. \quad \textcircled{B} d = 2a. \quad \textcircled{C} d = 4a. \quad \textcircled{D} d = \frac{3a\sqrt{2}}{\sqrt{11}}.$$

❖ **Câu 48.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AD = 2AB = 2a$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SD . Tính khoảng cách d từ S đến mặt phẳng (AMN).

$$\textcircled{A} d = a\sqrt{5}. \quad \textcircled{B} d = 2a. \quad \textcircled{C} d = \frac{a\sqrt{6}}{3}. \quad \textcircled{D} d = \frac{3a}{2}.$$

❖ **Câu 49.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AC = 2a, BC = a$. Đỉnh S cách đều các điểm A, B, C . Tính khoảng cách d từ trung điểm M của SC đến mặt phẳng (SBD) .

- (A) $d = a$. (B) $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. (C) $d = a\sqrt{5}$. (D) $d = \frac{a\sqrt{5}}{2}$.

❖ **Câu 50.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với mặt đáy một góc 60° . Tính khoảng cách d từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) .

- (A) $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $d = a$. (C) $d = a\sqrt{3}$. (D) $d = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 51.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , cạnh bằng 2. Đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SO = \sqrt{3}$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng SA và BD .

- (A) $d = \sqrt{2}$. (B) $d = 2$. (C) $d = \frac{\sqrt{30}}{5}$. (D) $d = 2\sqrt{2}$.

❖ **Câu 52.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a, AC = a\sqrt{3}$. Tam giác SBC đều và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SAC) .

- (A) $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$. (C) $d = a$. (D) $d = \frac{2a\sqrt{39}}{13}$.

❖ **Câu 53.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $AA' = 2a$. Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng BD và CD' .

- (A) $d = a\sqrt{2}$. (B) $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$. (C) $d = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. (D) $d = 2a$.

❖ **Câu 54.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính khoảng cách d giữa BD và MN .

- (A) $d = \sqrt{5}$. (B) $d = 10$. (C) $d = 3\sqrt{5}$. (D) $d = 5$.

❖ **Câu 55.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) ; góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng 60° . Gọi M là trung điểm của cạnh AB . Tính khoảng cách d từ B đến mặt phẳng (SMC) .

- (A) $d = a\sqrt{3}$. (B) $d = \frac{a}{2}$. (C) $d = a$. (D) $d = \frac{a\sqrt{39}}{13}$.

❖ **Câu 56.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy, SB hợp với đáy góc 60° . Tính khoảng cách d giữa hai đường thẳng AD và SC .

- (A) $d = \frac{a\sqrt{3}}{4}$. (B) $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $d = \frac{a}{2}$. (D) $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Câu 57.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng (SCD) .

- (A) $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. (B) $d = a\sqrt{3}$. (C) $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $d = a$.



2 Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a tâm O , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy ($ABCD$) và $SA = a$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên cạnh SD và O lên cạnh SC .

- OK là đoạn vuông góc chung của BD và SC .
- Đoạn vuông góc chung của SD và AB là AD .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và AB là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh a .

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.
- Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

❖ **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a\sqrt{2}$, $AC = a\sqrt{3}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy ($ABCD$).

- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
- Kẻ $AK \perp SD$ tại K , khi đó AK là đường vuông góc chung của hai đường thẳng SD, AB .
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD, AB bằng $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

❖ **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân đỉnh B , $AB = a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$.

- Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng CB .
- Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$.
- Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.
- Gọi M là trung điểm của AB . Khoảng cách d giữa SM và BC là $\frac{a\sqrt{17}}{17}$.

❖ **Câu 5.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bằng a .

- Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng $A'B$ bằng $\frac{\sqrt{2}a}{2}$.
- Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng ($A'BD$) bằng $\frac{\sqrt{3}a}{3}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'C$ bằng $\frac{a}{2}$.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng $A'B$ và $B'D$ bằng $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

❖ **Câu 6.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $SA \perp (ABCD)$; $SA = a$; $AB = BC = a$; $AD = 2a$.

- a) Khoảng cách từ điểm D đến cạnh BC là $a\sqrt{2}$.
- b) Khoảng cách từ điểm A đến (SBC) là a .
- c) Khoảng cách từ điểm A đến (SCD) là $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD là $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

❖ **Câu 7.** Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $AA' = 2a$.

- a) Độ dài $A'C$ bằng $a\sqrt{3}$.
- b) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng a .
- c) Khoảng cách giữa $B'D'$ và AC bằng $2a$.
- d) Khoảng cách giữa BD và CD' bằng $\frac{a}{3}$.

❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$.

- a) Khoảng cách từ S đến đường thẳng AC bằng $2\sqrt{2}a$.
- b) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAD) bằng a .
- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD bằng a .
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SC và BD bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của AB và $\widehat{SCH} = 45^\circ$.

- a) $BC \perp (SAB)$.
- b) $d(H, (SBC)) = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.
- c) Gọi K là trung điểm CD khi đó: $CD \perp (SHK)$.
- d) Khoảng cách từ H đến mặt phẳng (SCD) bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

❖ **Câu 10.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

- a) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc \widehat{SBA} .
- b) Cạnh bên SC tạo với đáy góc 45° .
- c) Cạnh bên SC tạo với mặt bên (SAB) góc 60° .
- d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD là $d = a\sqrt{2}$.

❖ **Câu 11.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và $A'A = 2a$. Gọi M là trung điểm của AA' .

- a) Khoảng cách từ A' đến mặt phẳng (ABC) bằng $2a$.
- b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng $B'C'$ và AB là $3a$.
- c) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- d) Khoảng cách từ M đến mặt phẳng (ACB) bằng $\frac{2a\sqrt{57}}{19}$.


3 Tự luận

Bài 1. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $BD = c$, $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của AB , AC , AD .

- Tính khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AB .
- Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ABC) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

Bài 2. Cho hình tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $BC = b$, $BD = c$, $\widehat{ABC} = \widehat{ABD} = \widehat{BCD} = 90^\circ$. Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của AB , AC , AD .

- Chứng minh rằng $MN \parallel BC$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BC .
- Chứng minh rằng $MP \parallel (BCD)$. Tính khoảng cách từ đường thẳng MP đến mặt phẳng (BCD) .
- Chứng minh rằng $(MNP) \parallel (BCD)$. Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng (MNP) và (BCD) .

Bài 3. Cho hai tam giác cân ABC và ABD có đáy chung AB và không cùng nằm trong một mặt phẳng.

- Chứng minh rằng $AB \perp CD$.
- Xác định đoạn vuông góc chung của AB và CD .

Bài 4. Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh đều bằng a . Gọi M , N tương xứng là trung điểm của các cạnh AB , CD . Chứng minh rằng

- MN là đường vuông góc chung của AB và CD .
- Các cặp cạnh đối diện trong tứ diện $ABCD$ đều vuông góc với nhau.

Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình vuông cạnh a , mặt bên SAD là một tam giác đều và $(SAD) \perp (ABCD)$.

- Tính chiều cao của hình chóp.
- Tính khoảng cách giữa BC và (SAD) .
- Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AB và SD .

Bài 6. Cho hình chóp $SABCD$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a có O là giao điểm của hai đường chéo, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SO \perp (ABCD)$, $SO = a\sqrt{3}$. Tính khoảng cách từ O đến mặt phẳng (SCD) .

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA = SB = SC = SD = a\sqrt{2}$. Gọi I , J lần lượt là trung điểm của AB và CD .

- Chứng minh $AB \perp (SIJ)$.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC .

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$.

- Tính khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng CD .
- Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAB) .
- Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

Bài 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = a$.

- Chứng minh rằng $BC \parallel (SAD)$ và tính khoảng cách giữa BC và mặt phẳng (SAD) .
- Chứng minh rằng $BD \perp (SAC)$ và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

Bài 10. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AA' = a$, $AB = b$, $BC = c$.

- Tính khoảng cách giữa CC' và $(BB'D'D)$.
- Xác định đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa AC và $B'D'$

Bài 11. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh a .

- Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(D'AC)$ và $(BC'A')$ song song với nhau và DB' vuông góc với hai mặt phẳng đó.
- Xác định các giao điểm E, F của DB' với $(D'AC)$, $(BC'A')$. Tính $d((D'AC), (BC'A'))$.

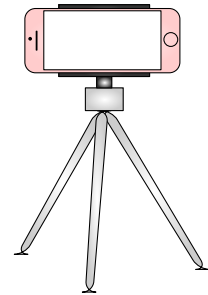
Bài 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = a$, $ABCD$ là hình thoi cạnh a , $\widehat{ABC} = 60^\circ$. Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SCD) bằng

Bài 13. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) là trọng tâm tam giác ABC và góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BC và AA' bằng

Bài 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông $ABCD$ cạnh a và $SA \perp (ABCD)$. Biết mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC .

Bài 15. Người ta dựng một cái lều cắm trại có dạng hình chóp tứ giác đều có tất cả các cạnh bằng nhau và bằng 3 m trên mặt đất bằng phẳng. Sau đó từ đỉnh của lều, người ta gắn một bóng đèn sao cho khoảng cách từ đỉnh lều đến bóng đèn bằng 30 cm. Khoảng cách từ bóng đèn đến mặt đất xấp xỉ bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần mười).

Bài 16. Trong một chuyến du lịch anh An dùng giá đỡ ba chân để kẹp điện thoại chụp hình (một chiếc giá đỡ cấu tạo gồm hai phần: Phần thứ nhất là chân; phần thứ hai là đầu kẹp điện thoại như hình vẽ). Biết rằng giá đỡ được mở ra sao cho ba góc chân cách đều nhau một khoảng cách bằng 120 cm. Tính chiều cao của giá đỡ, biết chân của giá đỡ dài 130 cm và đầu kẹp điện thoại dài 15 cm (kết quả tính centimet).



Bài 17. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 262 mét, cạnh bên dài 230 mét. Khi xây dựng kim tự tháp người Ai Cập cổ đại đã tính toán xây dựng một đường hầm lấy sáng tự nhiên từ một mặt bên đến tâm đáy ngắn nhất. Khoảng cách xây đường hầm đó là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất)?

§6 THỂ TÍCH

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ



Phần không gian được giới hạn bởi hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng được gọi là khối chóp, khối chóp cắt đều, khối lăng trụ, khối hộp. Đỉnh, mặt, cạnh, đường cao của các khối đó lần lượt là đỉnh, cạnh, đường cao của hình chóp, hình chóp cắt đều, hình lăng trụ, hình hộp tương ứng

◇ **Thể tích của khối chóp** có diện tích đáy S và chiều cao h là

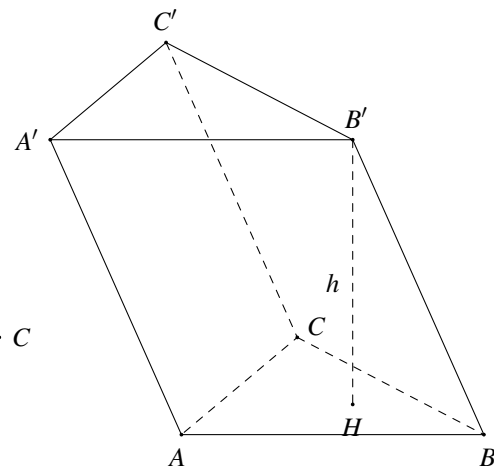
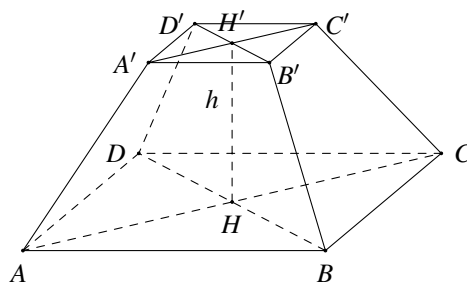
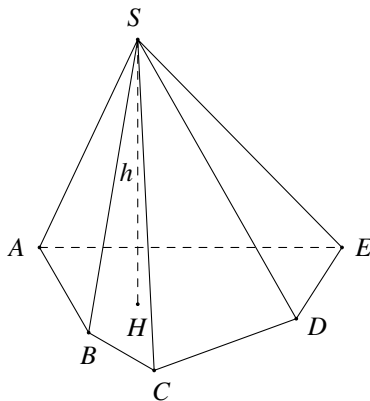
$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S.$$

◇ **Thể tích của khối chóp cắt đều** có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'}).$$

◇ **Thể tích của khối lăng trụ** có diện tích đáy S và chiều cao h là

$$V = h \cdot S.$$



Nhận xét

- ◇ Thể tích khối tứ diện bằng một phần ba tích của chiều cao từ một đỉnh và diện tích mặt đối diện với đỉnh đó.
- ◇ Thể tích của khối hộp bằng tích của một mặt và chiều cao của khối hộp ứng với mặt đó.

II. MỘT SỐ CÔNG THỨC DIỆN TÍCH TAM GIÁC ĐẶC BIỆT

1) Tam giác vuông

Cho $\triangle ABC$ vuông tại A có M là trung điểm của BC và đường cao AH .

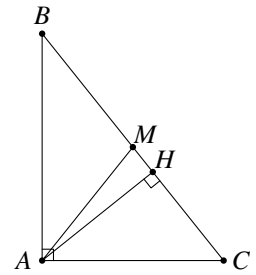
◇ $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

◇ $AM = BM = CM = \frac{BC}{2}$.

◇ **Đường cao:** $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2}$.

◇ $AC^2 = CH \cdot CB$; $AB^2 = BH \cdot BC$.

◇ **Diện tích:** $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC$.



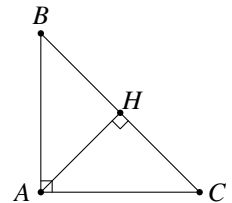
2) Tam giác vuông cân

Cho $\triangle ABC$ vuông cân tại A , có đường cao AH .

◇ $BC = AB\sqrt{2} = AC\sqrt{2}$; $AB = AC = \frac{BC}{\sqrt{2}}$.

◇ **Đường cao:** $AH = \frac{BC}{2}$.

◇ **Diện tích:** $S_{\triangle ABC} = \frac{AB^2}{2} = \frac{AC^2}{2}$.



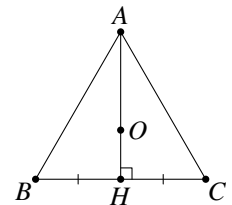
3) Tam giác đều

Cho $\triangle ABC$ đều cạnh a , đường cao AH và tâm O .

◇ **Đường cao:** $AH = \frac{(\text{cạnh}) \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

◇ $AO = \frac{2}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ và $OH = \frac{1}{3}AH = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

◇ **Diện tích:** $S_{\triangle ABC} = \frac{(\text{cạnh})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.



III. DIỆN TÍCH CÁC HÌNH TỨ GIÁC ĐẶC BIỆT

1) Hình thang

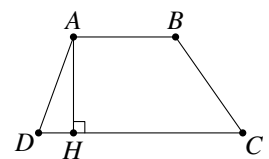
Cho hình thang $ABCD$ có hai đáy AB và CD

◇ AH là chiều cao của hình thang $ABCD$.

◇ **Diện tích** $S_{ABCD} = \frac{AB + CD}{2} \cdot AH$.

◇ Nếu hình thang $ABCD$ vuông tại A và D thì chiều cao chính là AD .

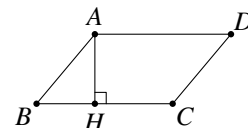
◇ Nếu hình thang cân $ABCD$ có đáy nhỏ AB và đáy lớn CD thì chiều cao AH của hình thang là $AH = \sqrt{AD^2 - \left(\frac{CD - AB}{2}\right)^2}$.



2) Hình bình hành

Cho hình bình hành $ABCD$ ◇ AH là đường cao của hình bình hành.

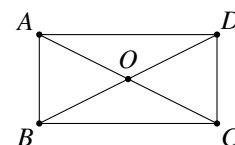
$$\begin{aligned} \text{◇ Diện tích } S_{ABCD} &= AH \cdot BC \\ &= AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}. \end{aligned}$$



3) Hình chữ nhật

Cho hình chữ nhật $ABCD$ ◇ Đường chéo $AC = BD = \sqrt{AB^2 + BC^2}$.

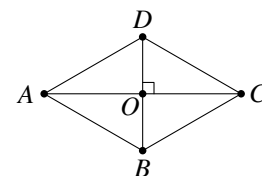
$$\text{◇ Diện tích } S_{ABCD} = AB \cdot BC = AB \cdot AD.$$



4) Hình thoi

Cho hình thoi $ABCD$ ◇ $AB = BC = CD = AD$.◇ $AC \perp BD$, O là trung điểm của AC và BD .

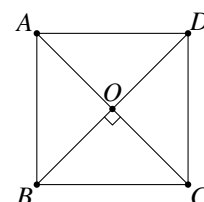
$$\begin{aligned} \text{◇ Diện tích } S_{ABCD} &= \frac{1}{2} AC \cdot BD \\ &= AB \cdot AD \cdot \sin \widehat{BAD}. \end{aligned}$$



5) Hình vuông

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a .◇ Đường chéo $AC = BD = (\text{cạnh}) \cdot \sqrt{2} = a\sqrt{2}$.

$$\text{◇ Diện tích } S_{ABCD} = (\text{cạnh})^2 = a^2.$$



IV. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Thể tích khối chóp đều, chóp cụt đều

◇ Thể tích của khối chóp có diện tích đáy S và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S.$$

◇ Thể tích của khối chóp cụt đều có diện tích đáy lớn S , diện tích đáy bé S' và chiều cao h là

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'}).$$

❖ Ví dụ 1

Cho khối chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$ biết cạnh bên bằng $2a$.

🔪 *Lời giải.*

Gọi M là trung điểm của BC . Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , do $S.ABC$ là hình chóp đều nên $SG \perp (ABC)$.

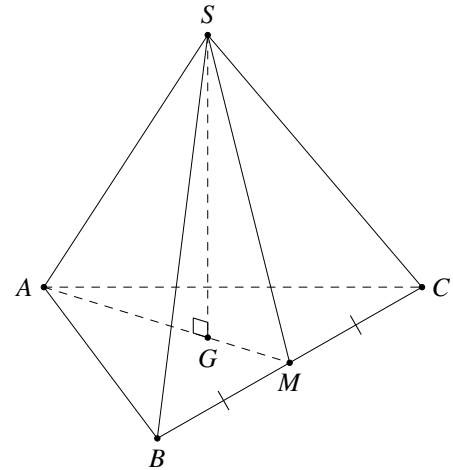
$$\text{Vì } \triangle ABC \text{ đều cạnh } a \text{ nên } AM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Ta có } AG = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Do $SG \perp (ABC)$ nên $\triangle SAG$ vuông tại G

$$\Rightarrow SG = \sqrt{SA^2 - AG^2} = \sqrt{4a^2 - \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } V = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot SG = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{11}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{11}}{12}.$$



❖ Ví dụ 2

Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh đáy $AB = 2a\sqrt{3}$, mặt bên tạo với đáy góc 60° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

🔪 *Lời giải.*

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ và M là trung điểm CD , khi đó

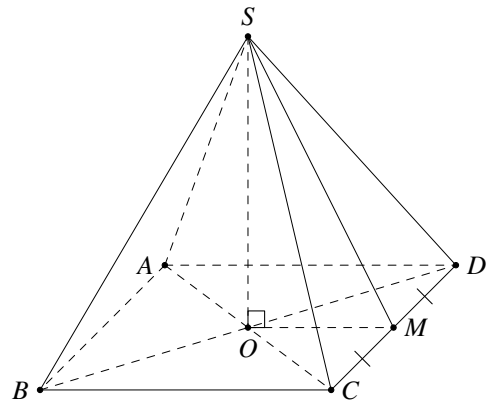
$$\begin{cases} CD \perp SM \\ CD \perp OM \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SOM)$$

$$\text{Suy ra } (\widehat{SCD}, \widehat{ABCD}) = (\widehat{SM}, \widehat{OM}) = \widehat{SMO} = 60^\circ.$$

Vì $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SO \perp (ABCD)$, do đó $\triangle SOM$ vuông tại O .

$$\Rightarrow SO = OM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 3a.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}Sh = \frac{1}{3} (2a\sqrt{3})^2 \cdot 3a = 12a^3.$$



❖ Ví dụ 3

Cho khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a$, $A'B' = a$. Tính thể tích của khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$.

🔪 *Lời giải.*

Diện tích tam giác đều ABC là

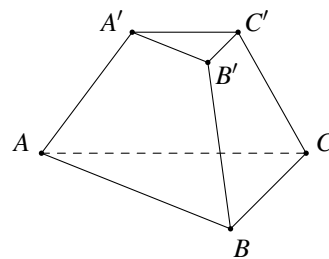
$$S_1 = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \widehat{BAC} = \frac{1}{2} \cdot 4a \cdot 4a \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}a^2.$$

Diện tích tam giác đều $A'B'C'$ là

$$S_2 = \frac{1}{2}A'B' \cdot A'C' \cdot \sin \widehat{B'A'C'} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}.$$

Thể tích khối chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ là

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3a \cdot \left(4\sqrt{3}a^2 + \sqrt{4\sqrt{3}a^2 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} + \frac{\sqrt{3}a^2}{4}} \right) = \frac{21\sqrt{3}a^3}{4}.$$



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có $AB = a$, cạnh bên $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2



Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a và mặt bên tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 3



Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 4



Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , khoảng cách giữa cạnh bên SA và cạnh đáy BC bằng $\frac{3a}{4}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng a , góc giữa cạnh bên hợp với mặt đáy bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6



Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O cạnh bằng $2a$. Gọi I là trung điểm của SO . Biết khoảng cách từ I đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{5}}{5}$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

✎

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

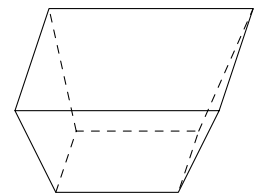
.....

.....

Bài 7



Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều. Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có cạnh bằng 60 cm, 30 cm, cạnh bên của sọt dài 50 cm. Tính thể tích của sọt.



✎

.....

.....

.....

.....

Dạng 2 Thể tích khối chóp có cạnh bên vuông góc với mặt đáy

Lúc này cạnh bên chính là chiều cao của hình chóp.

Ví dụ 4

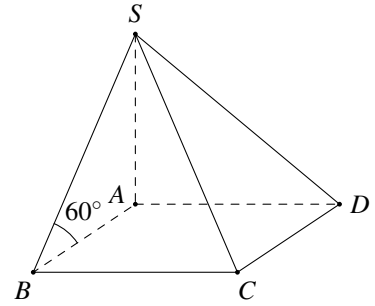
Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh SA vuông góc với mặt đáy (ABC) và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot SA \cdot S_{ABC} = \frac{a^3}{4}.$$

Ví dụ 5

Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$. Biết đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .



Lời giải. Do $SA \perp (ABCD)$ và BA chứa trong $(ABCD)$ nên $SA \perp AB$, suy ra $SA = AB \cdot \tan \widehat{SBA}$. Vì $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng \widehat{SBA} . Suy ra $\widehat{SBA} = 60^\circ$. Từ đó, ta có $SA = a \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$. Mặt khác, do diện tích hình vuông $ABCD$ là $S_{ABCD} = a^2$ nên thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 8



Cho khối tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a, OB = b, OC = c$. Tính thể tích của khối tứ diện.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 9



Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA = 2a$ vuông góc với mặt đáy. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 10



Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là hình tam giác vuông cân tại B và SA vuông với (ABC) . Biết $AC = 3a\sqrt{2}$ và góc giữa cạnh bên SB và (ABC) bằng 45° . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 11



Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với đáy ABC ; góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 30° . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 12



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SAC) bằng $a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

❖ Ví dụ 6

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

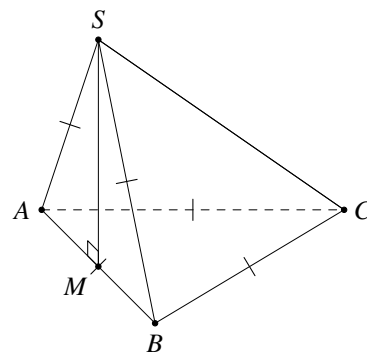
Lời giải.

Do $(SAB) \perp (ABCD)$ và tam giác SAB đều nên chân đường cao hạ từ S xuống $(ABCD)$ là trung điểm M của AB .

Tam giác SAB đều cạnh a nên $SM = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Ta có $S_{ABCD} = a^2$.

Vậy $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a^2 = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 15



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Tính thể tích của khối chóp $S.ABCD$.



Bài 16



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 2a$, $AD = a$. Hình chiếu của S lên $(ABCD)$ là trung điểm H của AB ; SC tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.



Bài 17



Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại C ; mặt bên SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy (ABC) . Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 18



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $a\sqrt{2}$, mặt bên SAB là tam giác vuông cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 19



Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$. Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 20



Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a , mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy, $SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng 4 Thể tích khối lăng trụ

Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy S và chiều cao h là

$$V = h \cdot S.$$

Ví dụ 7

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải. Ta có $V_{ABC.A'B'C'} = S_{\triangle ABC} \cdot AA' = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot AA' = \frac{a^3}{2}$.

Ví dụ 8

Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a . Hình chiếu vuông góc của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh AB . Góc giữa cạnh bên của lăng trụ và mặt đáy bằng 30° . Tính thể tích của lăng trụ đã cho theo a .

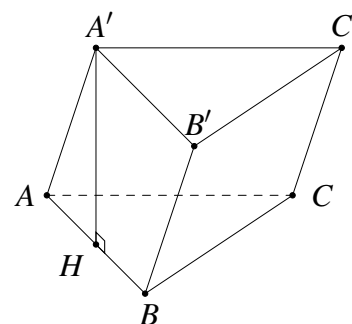
Lời giải.

Ta có góc giữa cạnh bên AA' với mặt đáy (ABC) là góc $\widehat{A'AH}$ và

$$\tan \widehat{A'AH} = \frac{A'H}{AH}.$$

$$\text{Suy ra } A'H = \frac{a}{2} \cdot \tan 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$

$$\text{Do đó } V = A'H \cdot S_{\triangle ABC} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3}{8}.$$



BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 21



Tính theo a thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Biết rằng mặt phẳng $(A'BC)$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 60° , $A'C$ hợp với đáy $(ABCD)$ một góc 30° và $AA' = a\sqrt{3}$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 22



Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông tại A , $AC = a$, $\widehat{ACB} = 60^\circ$. Đường thẳng BC' tạo với mặt phẳng $(AA'C'C)$ góc 30° . Tính thể tích khối lăng trụ đã cho.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 23



Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm A' lên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC . Biết khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 27



Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh 3 cm, cạnh bên $2\sqrt{3}$ cm tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 28



Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = \sqrt{3}$ cm, $AD = \sqrt{7}$ cm. Hai mặt bên $(ABB'A')$ và $(ADD'A')$ lần lượt tạo với đáy những góc 45° và 60° . Tính thể tích khối hộp nếu biết cạnh bên bằng 1 cm.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 29



Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có $ABCD$ là hình chữ nhật $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$, $A'A = A'B = A'D = 2a$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho khối tứ diện $OABC$ có các cạnh OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a, OB = b, OC = c$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng

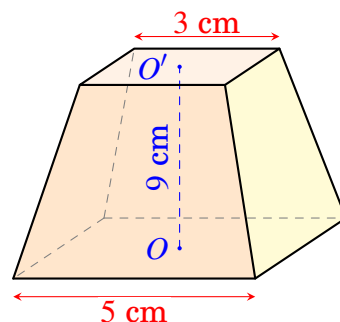
- (A) $V = \frac{1}{2}abc$. (B) $V = \frac{1}{6}abc$. (C) $V = 3abc$. (D) $V = abc$.

❖ **Câu 2.** Cho khối chóp có diện tích đáy bằng $3a^2$ và chiều cao bằng $2a$. Thể tích của khối chóp đó bằng

- (A) $6a^3$. (B) $3a^3$. (C) $2a^3$. (D) $\frac{a^3}{3}$.

❖ **Câu 3.** Một đồ chơi có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (hình vẽ) với độ dài hai cạnh đáy lần lượt là 3 cm và 5 cm, chiều cao là 9 cm. Thể tích của khối chóp cụt tứ giác đều đó bằng

- (A) 151 cm^3 . (B) 441 cm^3 .
(C) 195 cm^3 . (D) 147 cm^3 .



❖ **Câu 4.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$, góc giữa cạnh bên SB và mặt phẳng đáy $ABCD$ bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng

- (A) $3\sqrt{3}a^3$. (B) $\frac{a^3}{3\sqrt{3}}$. (C) $\frac{\sqrt{3}}{3}a^3$. (D) a^3 .

❖ **Câu 5.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có AB, AC, AA' đôi một vuông góc với nhau. Biết $AB = a, AC = 2a, AA' = 3a$, tính theo a thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

- (A) $V = a^3$. (B) $V = 3a^3$. (C) $V = 6a^3$. (D) $V = 2a^3$.

❖ **Câu 6.** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, AA' = a\sqrt{2}, \widehat{BAC} = 45^\circ$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho là

- (A) $\frac{a^3}{4}$. (B) $\frac{\sqrt{2}a^3}{4}$. (C) $\frac{a^3}{2}$. (D) $\frac{a^3}{6}$.

❖ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- (A) $V = \frac{3}{4}a^3$. (B) $V = a^3$. (C) $V = 2a^3\sqrt{2}$. (D) $V = \frac{1}{2}a^3$.

❖ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng

- (A) $\frac{4\sqrt{3}a^3}{3}$. (B) $4\sqrt{3}a^3$. (C) $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. (D) $2\sqrt{3}a^3$.

❖ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có $AB = 2a\sqrt{3}, AD = 2a$. Mặt bên (SAB) là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABD$ là

- (A) $4\sqrt{3}a^3$. (B) $\frac{2\sqrt{3}}{3}a^3$. (C) $4a^3$. (D) $2\sqrt{3}a^3$.

❖ **Câu 10.** Cho hình chóp $SABC$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , có $AB = a\sqrt{3}$, $BC = a$. Tam giác SAC cân tại S và thuộc mặt phẳng vuông góc với đáy, mặt phẳng (SBC) tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối chóp $SABC$ là

- (A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{a^3}{4}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (D) $2a^3$.

❖ **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng $2a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là

- (A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (C) $4a^3\sqrt{3}$. (D) $\frac{4a^3\sqrt{3}}{3}$.

❖ **Câu 12.** Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ biết $AB = a$ và $SA = 2a$. Tính chiều cao của khối chóp $S.ABC$.

- (A) $V = \frac{a\sqrt{33}}{9}$. (B) $V = \frac{a\sqrt{33}}{3}$. (C) $V = \frac{a\sqrt{141}}{6}$. (D) $V = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

❖ **Câu 13.** Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 12$ và chiều cao $h = 5$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A) 60. (B) 20. (C) 30. (D) 80.

❖ **Câu 14.** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng 15 và chiều cao bằng 10. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.

- (A) $V = 50$. (B) $V = 75$. (C) $V = \frac{25}{3}$. (D) $V = 150$.

❖ **Câu 15.** Cho khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\widehat{ABC} = 120^\circ$, $AA' = a\sqrt{2}$ và góc giữa AA' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Thể tích khối hộp bằng bao nhiêu?

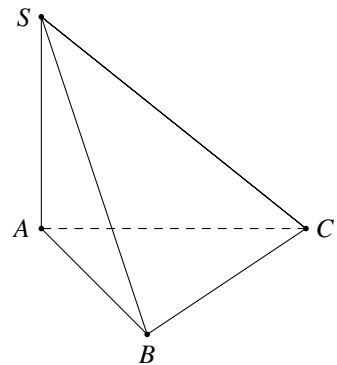
- (A) a^3 . (B) $\sqrt{3}a^3$. (C) $4\sqrt{3}a^3$. (D) $2\sqrt{3}a^3$.

❖ **Câu 16.** Cho khối chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$ có đường cao $h = 3$ cm, hai mặt đáy $ABC, A'B'C'$ có cạnh tương ứng lần lượt là 4 cm, 2 cm. Tính thể tích khối chóp cụt.

- (A) 4 cm^3 . (B) $= 4\sqrt{3} \text{ cm}^3$. (C) $7\sqrt{3} \text{ cm}^3$. (D) $6\sqrt{3} \text{ cm}^3$.

❖ **Câu 17.** Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = 2$; SA vuông góc với đáy và $SA = 3$ (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối chóp đã cho bằng

- (A) 12. (B) 2.
(C) 6. (D) 4.



❖ **Câu 18.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B . Biết SA vuông góc với đáy, $AB = BC = 2a$; $AD = 4a$; góc giữa mặt phẳng (SCD) và đáy bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

- (A) $\frac{8\sqrt{6}a^3}{3}$. (B) $\frac{4\sqrt{6}a^3}{3}$. (C) $\frac{8\sqrt{6}a^3}{15}$. (D) $4\sqrt{6}a^3$.

❖ **Câu 19.** Thể tích của khối lập phương cạnh bằng 3 là

- (A) 6. (B) 1. (C) 9. (D) 27.

❖ **Câu 20.** Tính thể tích khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng a

- (A) a^3 . (B) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. (C) $\frac{1}{12}a^3$. (D) $6a^3$.

❖ **Câu 21.** Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = 2a$, cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

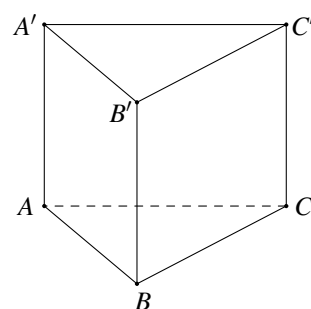
- (A) $\sqrt{2}a^3$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}a^3$. (C) $\frac{\sqrt{2}}{6}a^3$. (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}a^3$.

❖ **Câu 22.** Cho hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Biết mặt phẳng $(A'BC)$ tạo với đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho là

- (A) $\frac{2a^2\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (C) $\frac{3a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $\frac{3a^3\sqrt{3}}{4}$.

❖ **Câu 23.** Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AC = AA' = 2$ (tham khảo hình vẽ bên). Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) 2. (B) $\frac{2}{3}$.
(C) $\frac{4}{3}$. (D) 4.



❖ **Câu 24.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $AA' = a\sqrt{2}$. Thể tích V của khối lăng trụ bằng

- (A) $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{2}$. (B) $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{4}$. (C) $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{6}$. (D) $V = \frac{\sqrt{6}a^3}{12}$.

❖ **Câu 25.** Cho khối chóp cắt đều $ABCD.A'B'C'D'$, đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ có độ dài cạnh lần lượt là $6a$ và $3a$, độ dài cạnh bên bằng $4a$. Tính thể tích của khối chóp cắt đều $ABCD.A'B'C'D'$.

- (A) $\frac{3a^3\sqrt{41}}{2}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{46}}{2}$. (C) $\frac{21a^3\sqrt{46}}{2}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{41}}{2}$.

❖ **Câu 26.** Cho khối chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, $SA = 4$, $AB = 6$, $BC = 10$ và $CA = 8$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.

- (A) $V = 32$. (B) $V = 192$. (C) $V = 40$. (D) $V = 24$.

❖ **Câu 27.** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 4a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) $\frac{2}{3}a^3$. (B) $4a^3$. (C) $\frac{4}{3}a^3$. (D) $2a^3$.

❖ **Câu 28.** Cho khối chóp có diện tích đáy $S = 7a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- (A) $\frac{7}{6}a^3$. (B) $\frac{7}{2}a^3$. (C) $\frac{7}{3}a^3$. (D) $7a^3$.

❖ **Câu 29.** Cho khối hộp chữ nhật có 3 kích thước 3; 4; 5. Thể tích của khối hộp đã cho bằng?

- (A) 10. (B) 20. (C) 12. (D) 60.

❖ **Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$; SA vuông góc với đáy, khoảng cách từ A đến (SCD) bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích của khối chóp theo a .

- (A) $\frac{4\sqrt{15}}{45}a^3$. (B) $\frac{4\sqrt{15}}{15}a^3$. (C) $\frac{2\sqrt{5}}{15}a^3$. (D) $\frac{2\sqrt{5}}{45}a^3$.

❖ **Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Biết $SA = 2a$ và vuông góc với mặt phẳng (ABC) . Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng

- (A) a^3 . (B) $a^3\sqrt{3}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

❖ **Câu 32.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có cạnh $AB = a$, góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) bằng 45° . Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là

- (A) $\frac{a^3}{3}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{2}}{6}$. (C) $\frac{a^3}{6}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$.

❖ **Câu 33.** Thể tích khối lăng trụ có diện tích đáy B và có chiều cao h là

- (A) Bh . (B) $\frac{4}{3}Bh$. (C) $\frac{1}{3}Bh$. (D) $3Bh$.

❖ **Câu 34.** Cho hình chóp cụt đều $ABC.A'B'C'$. Tứ giác $AA'B'B$ là hình gì?

- (A) Hình vuông. (B) Hình thoi. (C) Hình thang cân. (D) Hình chữ nhật.

❖ **Câu 35.** Một khối lăng trụ tam giác có đáy là tam giác đều cạnh bằng 3, cạnh bên bằng $2\sqrt{3}$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 30° . Khi đó thể tích khối lăng trụ là

- (A) $\frac{9}{4}$. (B) $\frac{27}{4}$. (C) $\frac{27\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

❖ **Câu 36.** Tính thể tích khối tứ diện đều có tất cả các cạnh bằng a

- (A) a^3 . (B) $\frac{\sqrt{2}}{12}a^3$. (C) $\frac{1}{12}a^3$. (D) $6a^3$.

❖ **Câu 37.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $AA' = \frac{3a}{2}$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của A' lên (ABC) là trung điểm BC . Thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là

- (A) $\frac{a^3\sqrt{2}}{8}$. (B) $\frac{3a^3\sqrt{2}}{8}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{6}}{2}$. (D) $\frac{2a^3}{3}$.

❖ **Câu 38.** Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Tính thể tích của khối chóp đã cho.

- (A) $V = \frac{a^3}{3}$. (B) $V = a^3$. (C) $V = \frac{\sqrt{3}a^3}{9}$. (D) $V = \frac{a^3}{2}$.

❖ **Câu 39.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

- (A) $\frac{a^3}{4}$. (B) $\frac{a^3}{2}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (D) $\frac{3a^3}{4}$.

❖ **Câu 40.** Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 3$ và chiều cao $h = 2$. Thể tích khối chóp đã cho bằng

- (A) 6. (B) 12. (C) 2. (D) 3.

❖ **Câu 41.** Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 30° . Hình chiếu của A' lên (ABC) là trung điểm I của BC . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- (A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{13}}{12}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.



Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AB = a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của BC , biết $\widehat{AMS} = 60^\circ$.

- $SA \perp (ABCD)$.
- $SA = 3a$.
- $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
- Khoảng cách từ D đến mặt phẳng (SBC) bằng $\frac{3a}{4}$.

❖ **Câu 2.** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$.

- Công thức tính thể tích hình lăng trụ là $V_{ABCD.A'B'C'D'} = S_{ABCD} \cdot AA'$.
- Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $a^2\sqrt{2}$.
- Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .
- Thể tích của khối lăng trụ bằng $2a^3\sqrt{2}$.

❖ **Câu 3.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng a và góc nhị diện $[A', BC, A]$ bằng 30° .

- Góc nhị diện bằng góc $\widehat{A'MA}$, với M là trung điểm của BC .
- Diện tích đáy của hình lăng trụ là $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
- Chiều cao của hình lăng trụ bằng a .
- Thể tích khối lăng trụ bằng $\frac{3a^3}{4}$.

❖ **Câu 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D có $AB = 2$, $AD = CD = 1$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SB .

- Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc \widehat{SCD} .
- Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\sqrt{6}$.
- Thể tích của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
- Thể tích của khối chóp $M.BCD$ bằng $\frac{\sqrt{6}}{12}$.

❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết góc giữa cạnh SC và mặt đáy bằng 60° .

- Chiều cao của hình chóp $S.ABC$ là SA .
- Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) bằng góc \widehat{SCA} .
- Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.
- Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{4}$.

❖ **Câu 6.** Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A có $AB = AC = a$. Biết diện tích tam giác $A'BC$ bằng $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

- Diện tích đáy của lăng trụ là $S_{ABC} = a^2$.
- Độ dài đường cao của lăng trụ bằng $\frac{a}{2}$.

- c) Thể tích khối lăng trụ là $V = \frac{a^3}{2}$. d) Thể tích khối chóp $A.A'B'C'$ là $V' = \frac{a^3}{6}$.

⇨ **Câu 7.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 6. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° .

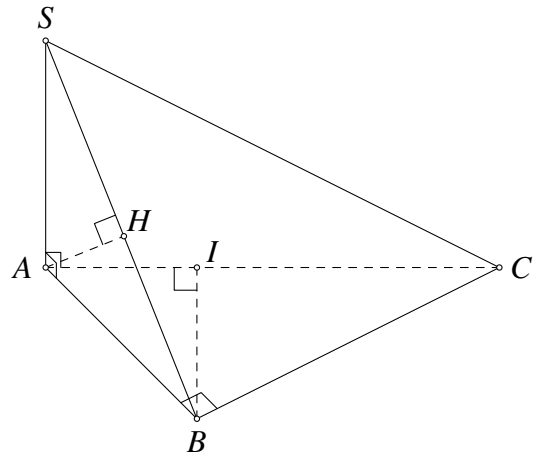
- a) Diện tích đáy của hình lăng trụ đã cho là $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$.
 b) Hình lăng trụ đã cho có chiều cao $h = 3\sqrt{3}$.
 c) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = 27\sqrt{3}$.
 d) Thể tích của tứ diện $A'AMN$ bằng $3\sqrt{3}$ với M, N lần lượt là trung điểm cạnh BB', CC' .

⇨ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABC$ có ABC là tam giác đều cạnh a và cạnh bên SA vuông góc với $SA = \frac{a}{2}$.

- a) Diện tích đáy của hình chóp $S.ABC$ là $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.
 b) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{8}$.
 c) Góc tạo bởi mặt phẳng (SBC) và mặt phẳng (ABC) bằng 60° .
 d) Gọi P, Q lần lượt là trung điểm SB, SC . Thể tích khối chóp $A.BCQP$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$.

⇨ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC vuông tại B có $AB = 1, \widehat{ACB} = 30^\circ$. Biết SA vuông góc với mặt đáy và $SA = 2$. Gọi H là hình chiếu của A trên SB . Khi đó

- a) $d(A, SB) = AH$.
 b) $d(B, (SAC)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
 c) $BC = \sqrt{3}$.
 d) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$.



⇨ **Câu 10.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(AB'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

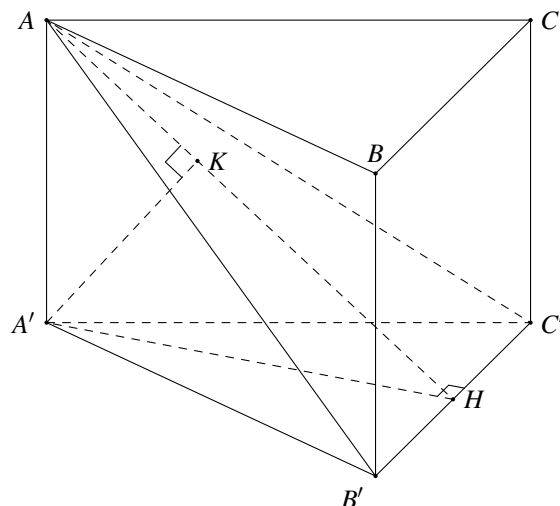
- a) Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H . Khi đó $B'C' \perp (AA'H)$.
 b) $d((ABC), (A'B'C')) = a$.
 c) Diện tích đáy của lăng trụ là $a^2\sqrt{3}$.
 d) Thể tích khối lăng trụ là $a^3\sqrt{3}$.

⇨ **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy và $\triangle SAB$ đều cạnh $2a$. Biết $\triangle ABC$ vuông tại C và cạnh $AC = a\sqrt{3}$.

- a) $SH \perp (ABC)$.
 b) $d(S, (ABC)) = a\sqrt{3}$.
 c) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.
 d) Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{6}$.

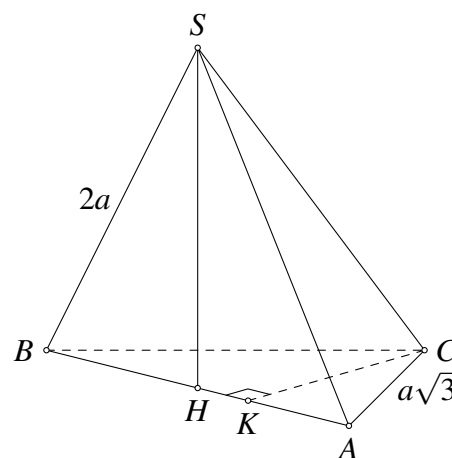
❖ **Câu 12.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, cạnh bên bằng a . Gọi H là trung điểm cạnh $B'C'$. Khi đó

- $B'C' \perp (AA'H)$.
- Góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 90° .
- Thể tích khối lăng trụ là $a^3\sqrt{3}$.
- M là một điểm nằm trên cạnh AA' . Thể tích khối chóp $M.BB'C'C$ là $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.



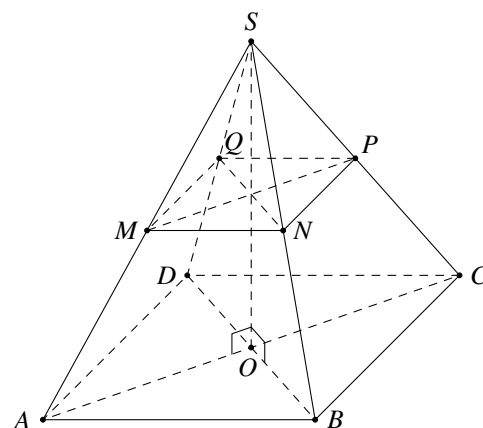
❖ **Câu 13.** Cho hình chóp $S.ABC$ có mặt bên (SAB) vuông góc với mặt đáy và tam giác SAB đều cạnh $2a$. Biết tam giác ABC vuông tại C và cạnh $AC = a\sqrt{3}$. Khi đó

- $SH \perp (ABC)$.
- $d(S, (ABC)) = a\sqrt{3}$.
- $d(C, (SAB)) = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
- Thể tích của khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{6}$.



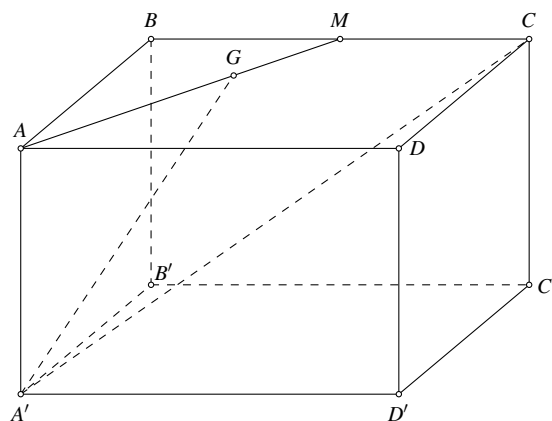
❖ **Câu 14.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy cạnh a và chiều cao $SO = 2a$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, SD . Khi đó

- Thể tích khối chóp đều $S.ABCD$ là $2a^3$.
- Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và $(ABCD)$ bằng a .
- Diện tích đa giác $MNPQ$ là $\frac{a^2}{2}$.
- Thể tích khối chóp cụt đều $ABCD.MNPQ$ là $\frac{7a^3}{12}$.



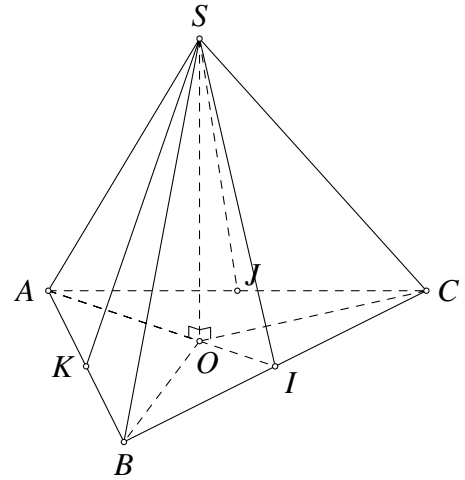
❖ **Câu 15.** Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh $3a$, $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $AA' = 2a$. Đỉnh A' cách đều ba đỉnh A, B, C . Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC . Khi đó

- Diện tích hình thoi $ABCD$ bằng $9a^2\sqrt{3}$.
- Độ dài đường cao của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $a\sqrt{3}$.
- Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $\frac{9a^3\sqrt{3}}{2}$.
- Thể tích của khối chóp $AGC'C$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.



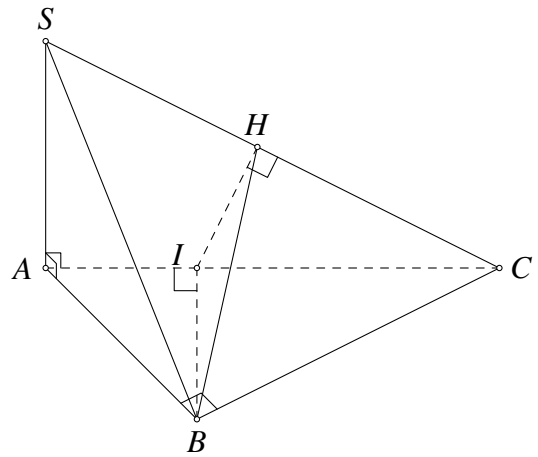
❖ **Câu 16.** Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 45° . Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm ba cạnh BC, AC, AB và O là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó

- a) Đường cao của khối chóp $S.ABC$ là SO .
- b) Độ dài cạnh bên của khối chóp là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- c) Thể tích V của khối chóp $S.ABC$ là $\frac{a^3}{8}$.
- d) Thể tích V của khối chóp $S.IJK$ là $\frac{a^3}{96}$.



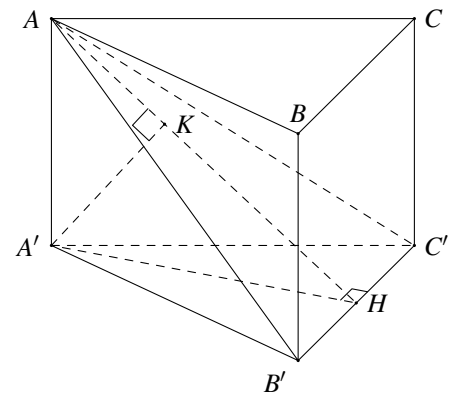
❖ **Câu 17.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC) và $SA = a$. Gọi I là trung điểm của AC và H là hình chiếu vuông góc của I lên SC .

- a) Độ dài đường cao của khối chóp $S.ABC$ bằng a .
- b) Thể tích khối chóp $S.ABC$ là $\frac{a^3}{3}$.
- c) Thể tích khối chóp $S.ABI$ là $\frac{a^3}{12}$.
- d) Thể tích khối chóp $I.BHC$ là $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$.



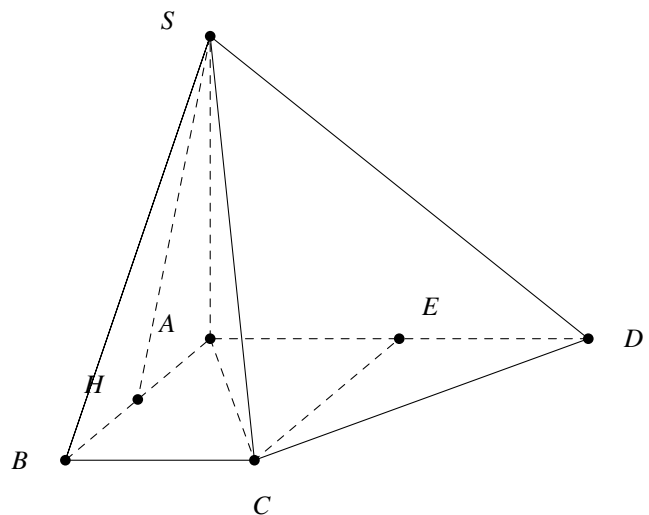
❖ **Câu 18.** Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$, khoảng cách từ điểm A' đến mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

- a) Trong mặt phẳng $(A'B'C')$, kẻ $A'H \perp B'C'$ tại H . Khi đó $B'C' \perp (AA'H)$.
- b) $d((ABC), (A'B'C')) = a$.
- c) Diện tích đáy của lăng trụ là $a^2\sqrt{3}$.
- d) Thể tích khối lăng trụ là $a^3\sqrt{3}$.



❖ **Câu 19.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \frac{1}{2}AD = a$, gọi H là trung điểm cạnh AB . Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Khi đó

- a) $SH \perp (ABCD)$.
- b) Thể tích $V_{S.ABCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.
- c) Thể tích $V_{S.ACD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}$.
- d) Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAD) bằng a .




3 Tự luận

Bài 1. Cho khối chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b . Tính thể tích của khối chóp đó. Từ đó suy ra thể tích của khối tứ diện đều có cạnh bằng a .

Bài 2. Cho khối chóp đều $S.ABCD$, đáy có cạnh 6 cm. Tính thể tích của khối chóp đó trong các trường hợp sau:

- Cạnh bên tạo với mặt đáy một góc bằng 60° .
- Mặt bên tạo với mặt đáy một góc bằng 45° .

Bài 3. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a và có O là giao điểm hai đường chéo của đáy.

- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SB .
- Tính thể tích của khối chóp.

Bài 4. Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có các cạnh bên và các cạnh đáy đều bằng a .

- Chứng minh rằng các tam giác ASC và BSD là tam giác vuông cân.
- Gọi O là giao điểm của AC và BD , chứng minh rằng đường thẳng SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
- Chứng minh rằng góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° .

Bài 5. Một loại đèn đá muối có dạng khối chóp tứ giác đều (Hình 97). Tính theo a thể tích của đèn đá muối đó, giả sử các cạnh đáy và các cạnh bên đều bằng a .

Bài 6. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = 5$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 2$ cm, $\widehat{ABC} = 150^\circ$. Tính thể tích của khối lăng trụ.

Bài 7. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$, góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 60° .

- Tính khoảng cách giữa hai đáy của hình lăng trụ.
- Tính thể tích của khối lăng trụ.

Bài 8. Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là các tam giác đều cạnh a , $A'A = A'B = A'C = b$. Tính thể tích khối lăng trụ.

Bài 9. Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = 2a$ và đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB = a$ và $AC = a\sqrt{3}$.

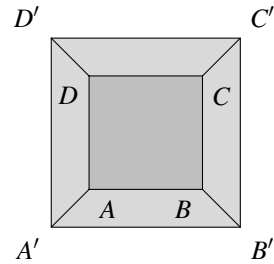
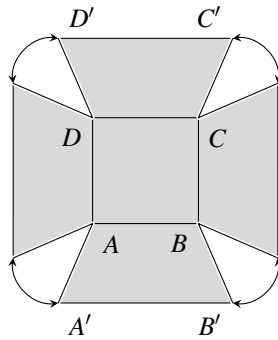
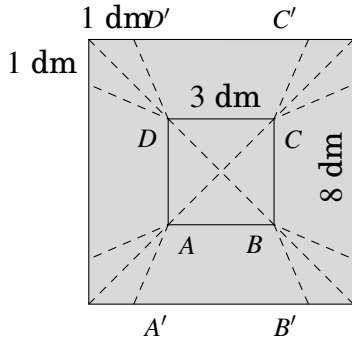
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và AA' .
- Tính thể tích của khối hộp.

Bài 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Góc giữa đường thẳng AC' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° .

- Chứng minh rằng hai mặt phẳng $(ACC'A')$ và $(BDD'B')$ vuông góc với nhau.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $C'D'$.

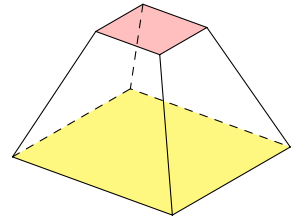
Bài 11. Từ một tấm tôn hình vuông có cạnh 8 dm, bác Hùng cắt bỏ bốn phần như nhau ở bốn góc, sau đó bác hàn các mép lại để được một chiếc thùng (không có nắp) như hình bên dưới.

- Giải thích vì sao chiếc thùng có dạng hình chóp cụt.
- Tính cạnh bên của thùng.
- Hỏi thùng có thể chứa được nhiều nhất bao nhiêu lít nước?



Bài 12. Tính thể tích của khối chóp cụt lục giác đều $ABCDEF \cdot A'B'C'D'E'F'$ với O và O' là tâm hai đáy, cạnh đáy lớn và đáy nhỏ lần lượt là a và $\frac{a}{2}$, $OO' = a$.

Bài 13. Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều. Cạnh đáy dưới dài 5 m, cạnh đáy trên dài 2 m, cạnh bên dài 3 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1 470 000 đồng/m³. Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp theo đơn vị đồng.



Bài 14. Một miếng pho mát có dạng khối lăng trụ đứng với chiều cao 10 cm và đáy là tam giác vuông cân có cạnh góc vuông bằng 12 cm. Tính khối lượng của miếng pho mát theo đơn vị gam, biết khối lượng riêng của loại pho mát đó là 3 g/cm³.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC đều cạnh 2, tam giác SBA vuông tại B , tam giác SAC vuông tại C . Biết góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và $AB = 2$, $AC = 4$, $BC = 2\sqrt{3}$. Tam giác SAD vuông cân tại S , hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ vuông góc nhau. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là bao nhiêu?

Câu 22. Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B . Biết $C'A = a\sqrt{2}$ và $\widehat{AC'C} = 45^\circ$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng bao nhiêu?

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh bằng $\sqrt{2}$; $\widehat{ABC} = 60^\circ$; cạnh SA vuông góc với đáy, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

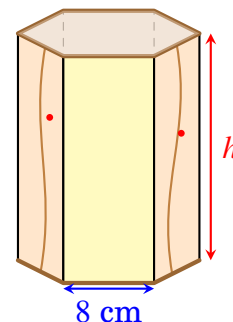
Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật; ΔSAB đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$. Biết SC tạo với $(ABCD)$ một góc bằng 30° . Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, cạnh SA vuông góc với đáy, góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy bằng 60° . Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên các đường thẳng SB, SC, SD , khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và BD bằng $3\sqrt{2}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

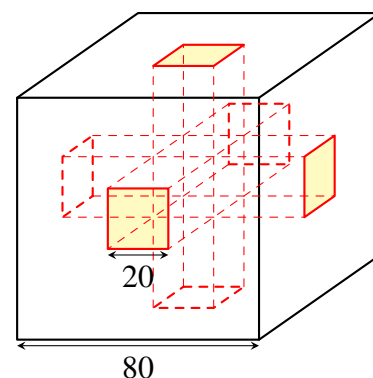
❖ **Câu 26.** Cho khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = a$, $BC = 2a$. Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của cạnh AC . Góc giữa hai mặt phẳng $(BCB'C')$ và (ABC) bằng 60° . Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng $\frac{k\sqrt{k}}{m}a^3$, trong đó k, m là các số tự nhiên nguyên tố cùng nhau. Tính giá trị biểu thức $m - k$.

❖ **Bài 15.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh bằng 1. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến mặt phẳng (SAC) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $S.ABC$.

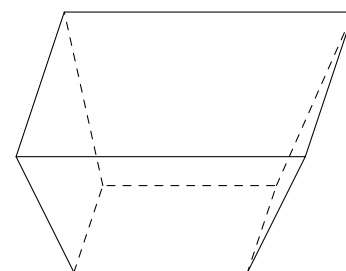
❖ **Câu 27.** Một chiếc lồng đèn kéo quân có hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy 8 cm. Biết tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn này bằng 1536 cm^2 . Tính thể tích của chiếc lồng đèn đó (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị cm^3).



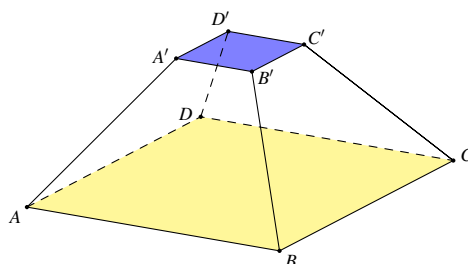
❖ **Câu 28.** Một khối gỗ hình lập phương có độ dài cạnh bằng x (cm). Ở chính giữa một mặt của hình lập phương người ta đục một lỗ hình vuông thông sang mặt đối diện, tâm của lỗ hình vuông là tâm của mặt hình lập phương, các cạnh lỗ hình vuông song song với các cạnh của hình lập phương và có độ dài y (cm) như hình vẽ bên. Biết rằng $x = 80 \text{ cm}$, $y = 20 \text{ cm}$ và thể tích V của khối gỗ sau khi đục có dạng $a \cdot 10^3 \text{ (cm}^3\text{)}$. Giá trị của a là bao nhiêu?



❖ **Bài 16.** Một sọt đựng đồ có dạng hình chóp cụt đều (tham khảo hình bên dưới). Đáy và miệng sọt là các hình vuông tương ứng có diện tích lần lượt là $400 \text{ (cm}^2\text{)}$ và $900 \text{ (cm}^2\text{)}$, cạnh bên của sọt dài 15 cm. Tính thể tích của sọt làm tròn đến hàng đơn vị. (đơn vị cm^3)

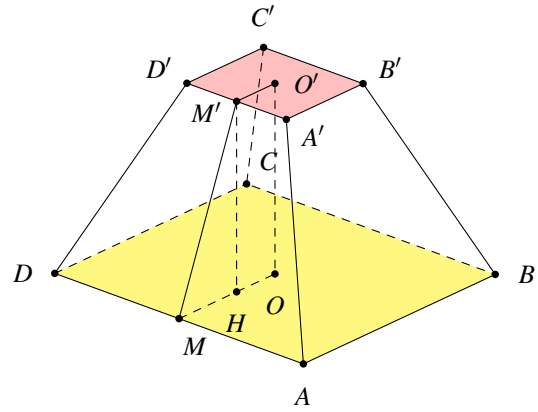


❖ **Bài 17.** Người ta xây dựng một chân tháp bằng bê tông có dạng khối chóp cụt tứ giác đều (Hình bên). Cạnh đáy dưới dài 5 m, cạnh đáy trên dài 2 m, cạnh bên dài 3 m. Biết rằng chân tháp được làm bằng bê tông tươi với giá tiền là 1470000 đồng/m^3 .

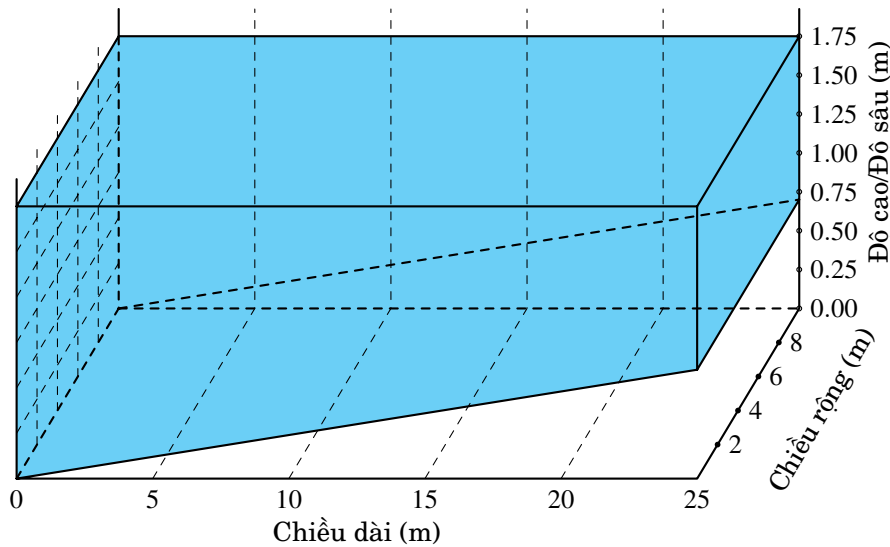


Tính số tiền để mua bê tông tươi làm chân tháp, kết quả làm tròn đến hàng triệu.

Bài 18. Người ta định đào một cái hầm có dạng hình chóp cắt tứ giác đều có hai cạnh đáy là $14m$ và $10m$. Mặt bên tạo với đáy nhỏ thành một góc nhị diện có số đo bằng 135° . Tính số mét khối đất cần phải di chuyển ra khỏi hầm (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



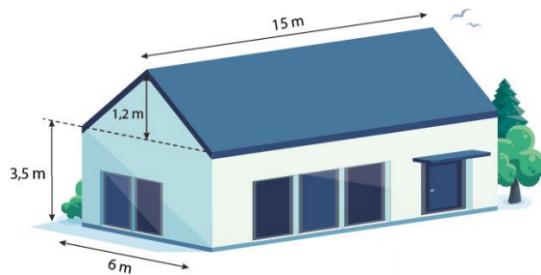
Bài 19. Một bể bơi với mặt nước khi đầy có dạng hình chữ nhật với chiều rộng $12m$ và chiều dài $25m$. Các thành bể xung quanh thẳng đứng và đáy là một mặt phẳng nghiêng. Chiều sâu tại một đầu bể là $1,0m$ và tăng dần đều đến $1,8m$ ở đầu kia của bể (xem hình vẽ). Ban đầu bể không chứa nước. Người ta sử dụng một máy bơm công suất lớn để bơm nước vào bể với tốc độ không đổi là $60m^3/\text{giờ}$. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì máy bơm bơm đầy bể nước?



Bài 20. Một chiếc bút chì màu vỏ gỗ, chưa gọt, dài $20cm$, có dạng hình lăng trụ đứng với đáy là lục giác đều cạnh $3mm$. Tính thể tích của chiếc bút chì màu này.



Bài 21. Tính thể tích phần không gian bên trong ngôi nhà có dạng hình lăng trụ đứng, đáy là ngũ giác (các kích thước như hình bên).



§7 ÔN TẬP CHƯƠNG 7

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho các phát biểu sau:

- ❖ Hai mặt phẳng (P) và (Q) có giao tuyến là đường thẳng a và cùng vuông góc với mặt phẳng (R) thì $a \perp (R)$.
- ❖ Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau và có giao tuyến là đường thẳng a , một đường thẳng b nằm trong mặt phẳng (P) và vuông góc với đường thẳng a thì $b \perp (Q)$.
- ❖ Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và a vuông góc với (Q) thì $(P) \perp (Q)$.
- ❖ Đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) và mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) thì $a \perp (Q)$.

Số phát biểu đúng trong các phát biểu trên là

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 2.** Cho mặt phẳng (P) vuông góc với mặt phẳng (Q) và a là giao tuyến của (P) và (Q) . Trong các phát biểu dưới đây, phát biểu nào đúng?

- (A) Đường thẳng d nằm trên (Q) thì d vuông góc với (P) .
- (B) Đường thẳng d nằm trên (Q) và d vuông góc với a thì d vuông góc với (P) .
- (C) Đường thẳng d vuông góc với a thì d vuông góc với (P) .
- (D) Đường thẳng d vuông góc với (Q) thì d vuông góc với (P) .

❖ **Câu 3.** Thể tích của khối chóp có diện tích đáy bằng S , chiều cao bằng h là

- (A) $V = S \cdot h$. (B) $V = \frac{1}{2}S \cdot h$. (C) $V = \frac{1}{3}S \cdot h$. (D) $V = \frac{2}{3}S \cdot h$.

❖ **Câu 4.** Cho khối lăng trụ có diện tích đáy bằng a^2 và chiều cao bằng $3a$. Thể tích của khối lăng trụ đó bằng

- (A) a^3 . (B) $3a^3$. (C) $\frac{a^3}{3}$. (D) $9a^3$.

❖ **Câu 5.** Cho khối chóp có diện tích đáy là a^2 chiều cao là $3a$. Thể tích của khối chóp bằng

- (A) a^3 . (B) $3a^3$. (C) $\frac{a^3}{3}$. (D) $9a^3$.

❖ **Câu 6.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

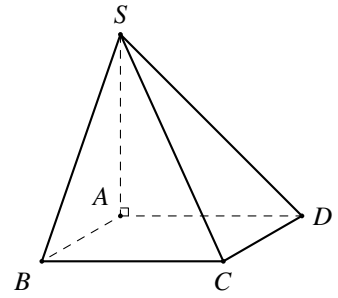
- (A) Số đo của góc nhị diện $[S, AB, C]$ bằng \widehat{SBC} .
- (B) Số đo của góc nhị diện $[D, SA, B]$ bằng 90° .
- (C) Số đo của góc nhị diện $[S, AC, B]$ bằng 90° .
- (D) Số đo của góc nhị diện $[D, SA, B]$ bằng \widehat{BSD} .

❖ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Phát biểu nào sau đây là **sai**?

- (A) $BC \perp (SAB)$. (B) $BD \perp (SAC)$. (C) $AC \perp (SBD)$. (D) $AD \perp (SAB)$.

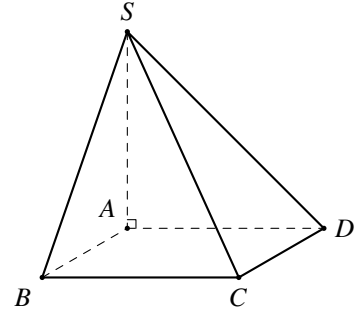
⇨ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với mặt đáy. Đường thẳng CD vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- (A) (SAD) . (B) (SAC) . (C) (SAB) . (D) (SBD) .



⇨ **Câu 9.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh b , SA vuông góc với mặt đáy, $SC = 2b\sqrt{2}$. Số đo góc giữa cạnh bên SC và mặt đáy là

- (A) 60° . (B) 30° . (C) 45° . (D) 50° .



⇨ **Câu 10.** Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $2a$ và chiều cao bằng $a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ tâm O của đáy ABC đến một mặt bên là

- (A) $\frac{a\sqrt{14}}{7}$. (B) $\frac{a\sqrt{2}}{7}$. (C) $\frac{a\sqrt{14}}{2}$. (D) $\frac{2a\sqrt{14}}{7}$.

⇨ **Câu 11.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Gọi M là trung điểm của SA . Mặt phẳng (MBD) vuông góc với mặt phẳng nào dưới đây?

- (A) (SBC) . (B) (SAC) . (C) (SBD) . (D) $(ABCD)$.

⇨ **Câu 12.** Cho tứ diện $OABC$ thỏa mãn $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COA} = 90^\circ$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ bằng

- (A) abc . (B) $\frac{abc}{2}$. (C) $\frac{abc}{3}$. (D) $\frac{abc}{6}$.

⇨ **Câu 13.** Cho chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Góc nhị diện $[S, BC, A]$ có số đo là

- (A) $75^\circ 46'$. (B) $71^\circ 21'$. (C) $68^\circ 31'$. (D) $65^\circ 12'$.

⇨ **Câu 14.** Thể tích của khối chóp cắt tam giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ là

- (A) $\frac{7\sqrt{2}}{8}a^3$. (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$. (C) $\frac{7\sqrt{2}}{12}a^3$. (D) $\frac{7\sqrt{3}}{4}a^3$.

⇨ **Câu 15.** Nếu hình hộp chữ nhật có ba kích thước là 3; 4; 5 thì độ dài đường chéo của nó là

- (A) $5\sqrt{2}$. (B) 50. (C) $2\sqrt{5}$. (D) 12.

⇨ **Câu 16.** Thể tích của khối lăng trụ tam giác đều có tất cả các cạnh đều bằng a là

- (A) $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. (B) $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. (C) $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. (D) $\frac{a^3\sqrt{2}}{2}$.

⇨ **Câu 17.** Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng MN và $M'P'$ bằng

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

❖ **Câu 18.** Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có cạnh bằng a . Gọi α là số đo góc giữa đường thẳng $M'P$ và mặt phẳng $(MNPQ)$. Giá trị $\tan \alpha$ bằng

- (A) 1. (B) 2. (C) $\sqrt{2}$. (D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

❖ **Câu 19.** Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có cạnh bằng a . Số đo của góc nhị diện $[N, MM', P]$ bằng

- (A) 30° . (B) 45° . (C) 60° . (D) 90° .

❖ **Câu 20.** Cho hình lập phương $MNPQ.M'N'P'Q'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng $(NQ'N')$ bằng

- (A) a . (B) $\frac{a}{\sqrt{2}}$. (C) $a\sqrt{2}$. (D) $\frac{a}{2}$.

❖ **Câu 21.** Cho hình hộp chữ nhật $MNPQ.M'N'P'Q'$ có $MN = 2a$, $MQ = 3a$, $MM' = 4a$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng NP và $M'N'$ bằng

- (A) $2a$. (B) $3a$. (C) $4a$. (D) $5a$.

❖ **Câu 22.** Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng 60° . Tính độ dài đường cao SH của khối chóp.

- (A) $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (B) $SH = \frac{a\sqrt{2}}{3}$. (C) $SH = \frac{a}{2}$. (D) $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

❖ **Câu 23.** Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $\tan \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. (B) $\tan \varphi = \sqrt{2}$. (C) $\tan \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (D) $\tan \varphi = \sqrt{6}$.

❖ **Câu 24.** Cho hình lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy cạnh bằng a , góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (ABC') có số đo bằng 60° . Độ dài cạnh bên của hình lăng trụ bằng

- (A) $2a$. (B) $a\sqrt{2}$. (C) $3a$. (D) $a\sqrt{3}$.

❖ **Câu 25.** Trong không gian cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Khẳng định nào đúng?

- (A) Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng và cùng vuông góc với c thì $a \parallel b$.
 (B) Nếu $a \parallel b$ và $c \perp a$ thì $c \perp b$.
 (C) Nếu a, b, c cùng nằm trong mặt phẳng (P) và góc giữa a và c bằng góc giữa b và c thì $a \parallel b$.
 (D) Nếu a và b cùng nằm trong mặt phẳng (P) và $(P) \parallel c$ thì góc giữa a và c bằng góc giữa b và c .

❖ **Câu 26.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Trong số 5 đường thẳng $AC', AB', BD, C'D, BC'$ có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với $A'C'$?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 27.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

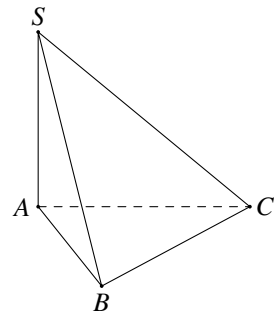
- (A) $BM \perp AC$. (B) $(SBM) \perp (SAC)$. (C) $(SAB) \perp (SBC)$. (D) $(SAB) \perp (SAC)$.

❖ **Câu 28.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Đường thẳng nào sau đây vuông góc với đường thẳng BC' ?

- (A) $A'D$. (B) AC . (C) BB' . (D) AD' .

⇔ **Câu 29.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt đáy (ABC) . Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $SA \perp AB$. (B) $SA \perp AC$. (C) $SA \perp BC$. (D) $SA \perp SB$.



⇔ **Câu 30.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và SA vuông góc đáy. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

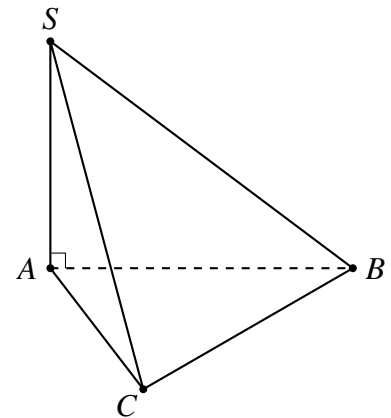
- (A) $BD \perp (SAC)$. (B) $BC \perp (SAB)$. (C) $AC \perp (SBD)$. (D) $CD \perp (SAD)$.

⇔ **Câu 31.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác không vuông, $SA \perp (ABC)$ và H là hình chiếu vuông góc của S lên BC . Hãy chọn khẳng định đúng.

- (A) $BC \perp AB$. (B) $BC \perp SC$. (C) $BC \perp AH$. (D) $BC \perp AC$.

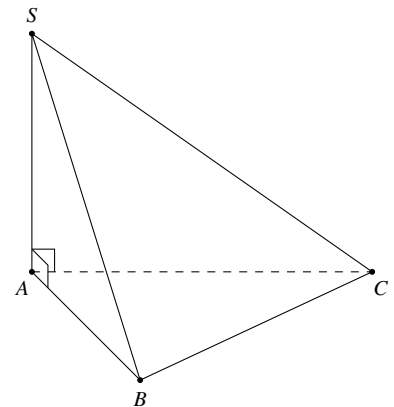
⇔ **Câu 32.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại A , $AB = a$ và SA vuông góc với đáy. Tính khoảng cách từ B đến (SAC)

- (A) $a\sqrt{3}$. (B) a . (C) $a\sqrt{2}$. (D) $2a$.



⇔ **Câu 33.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều, cạnh bên SA vuông góc với đáy (tham khảo hình vẽ). Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) là

- (A) 45° . (B) 90° . (C) 30° . (D) 60° .



⇔ **Câu 34.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $SA \perp (ABCD)$. Gọi H là hình chiếu của A lên BD và K là hình chiếu của A lên SD . Góc phẳng nhị diện $[S, BD, A]$ là

- (A) \widehat{SKA} . (B) \widehat{SBA} . (C) \widehat{SHA} . (D) \widehat{SDA} .

⇔ **Câu 35.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O và $SA = SC$, $SB = SD$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

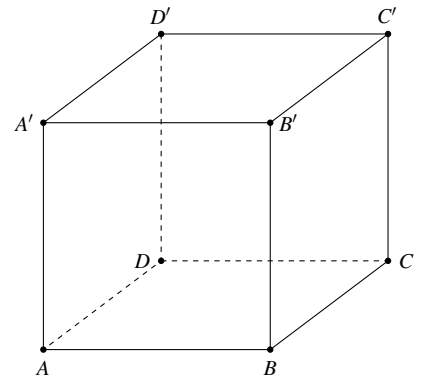
- (A) $(SBD) \perp (ABCD)$. (B) $SC \perp (SBD)$. (C) $SO \perp (ABCD)$. (D) $(SAC) \perp (ABCD)$.

⇔ **Câu 36.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi và SB vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Mặt phẳng nào sau đây vuông góc với mặt phẳng (SBD) ?

- (A) (SCD) . (B) (SBC) . (C) (SAC) . (D) (SAD) .

⇨ **Câu 37.** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ (tham khảo hình vẽ). Góc giữa hai đường thẳng AC và $C'D'$ bằng góc

- (A) $\widehat{AD'C}$. (B) \widehat{BCD} . (C) $\widehat{AC'D}$. (D) \widehat{ACD} .



⇨ **Câu 38.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp AB$, $SA \perp AC$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $SA \perp (SBC)$. (B) $SA \perp (ABC)$. (C) $SA \perp (SAB)$. (D) $SA \perp (SAC)$.

⇨ **Câu 39.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SD \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- (A) $AD \perp (SCD)$. (B) $BC \perp (SAB)$. (C) $AC \perp (SBD)$. (D) $AB \perp (SBC)$.

⇨ **Câu 40.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi J là trung điểm của SA , G là trọng tâm tam giác ABC . Hình chiếu của đường thẳng JG trên mặt phẳng (ABC) là

- (A) đường thẳng AB . (B) đường thẳng BC . (C) đường thẳng AC . (D) đường thẳng AG .

⇨ **Câu 41.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt phẳng vuông góc với (SAC) là

- (A) (SAB) . (B) (SBD) . (C) (SBC) . (D) (SAD) .

⇨ **Câu 42.** Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy $S = 12$ và chiều cao $h = 4$ là

- (A) $V = 24$. (B) $V = 3$. (C) $V = 16$. (D) $V = 48$.

⇨ **Câu 43.** Chiều cao của khối chóp có thể tích V và diện tích S là

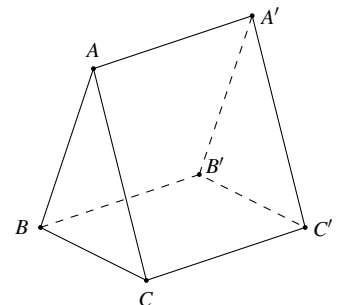
- (A) $h = \frac{S}{V}$. (B) $h = \frac{3S}{V}$. (C) $h = \frac{V}{S}$. (D) $h = \frac{3V}{S}$.

⇨ **Câu 44.** Một tháp chuông có hình dạng là hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy dài 6 m, cạnh bên dài 15 m. Chiều cao của tháp chuông bằng

- (A) $3\sqrt{21}$ m. (B) $3\sqrt{17}$ m. (C) $6\sqrt{6}$ m. (D) $3\sqrt{23}$ m.

⇨ **Câu 45.** Một cái lều ở trại hè có dạng hình lăng trụ đứng tam giác $ABC.A'B'C'$. Cho biết $AB = AC = 2$ m; $BC = 3,2$ m; $AA' = 5$ m. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$.

- (A) 1,2 m. (B) 2 m. (C) 3,2 m. (D) 5 m.



⇨ **Câu 46.** Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy (ABC) . H là hình chiếu vuông góc của A lên BC . Góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ là

- (A) \widehat{SAH} . (B) \widehat{SBA} . (C) \widehat{SHA} . (D) \widehat{ASH} .

⇨ **Câu 47.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$. Tìm góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) ?

- (A) 135° . (B) 60° . (C) 45° . (D) 90° .

❖ **Câu 48.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc với đáy. Khi đó góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là

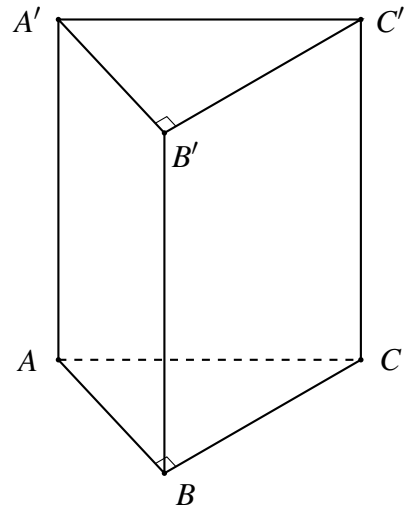
- (A) \widehat{BSD} . (B) \widehat{SBA} . (C) \widehat{BAD} . (D) \widehat{SDB} .

❖ **Câu 49.** Cho hình chóp $S.ABC$ có diện tích đáy ABC bằng $a^2\sqrt{3}$ và thể tích khối chóp bằng a^3 . Tính chiều cao h của hình chóp đã cho.

- (A) $h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. (B) $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (C) $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. (D) $h = a\sqrt{3}$.

❖ **Câu 50.** Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $AA' = 2a\sqrt{5}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho

- (A) $V = 4a^3\sqrt{5}$. (B) $V = a^3\sqrt{15}$.
 (C) $V = \frac{a^3\sqrt{15}}{3}$. (D) $V = \frac{4a^3\sqrt{5}}{3}$.



❖ **Câu 51.** Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $SA \perp (ABCD)$. Khoảng cách giữa đường thẳng BC và mặt phẳng (SAD) bằng

- (A) AB . (B) BD . (C) SB . (D) CA .

❖ **Câu 52.** Tính khoảng cách d giữa hai cạnh đối của một tứ diện đều cạnh a .

- (A) $d = \frac{3a}{2}$. (B) $d = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. (C) $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. (D) $d = a\sqrt{2}$.

❖ **Câu 53.** Thể tích khối lập phương cạnh bằng 2 bằng

- (A) 6. (B) 8. (C) 4. (D) 2.

❖ **Câu 54.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật với $AB = a$, $AD = 3a$. Biết $SA = 2a$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách từ điểm C đến đường thẳng AD bằng

- (A) a . (B) $2a$. (C) $3a$. (D) $a\sqrt{10}$.

❖ **Câu 55.** Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $AD = a\sqrt{2}$, $AB' = a\sqrt{5}$. Thể tích khối lăng trụ đã cho là

- (A) $a^3\sqrt{2}$. (B) $2a^3\sqrt{2}$. (C) $a^3\sqrt{10}$. (D) $\frac{2a^3\sqrt{2}}{3}$.

❖ **Câu 56.** Cho khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy là a và khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BC)$ bằng $\frac{a}{2}$. Thể tích của khối lăng trụ bằng

- (A) $\frac{3\sqrt{2}a^3}{12}$. (B) $\frac{\sqrt{2}a^3}{16}$. (C) $\frac{3a^3\sqrt{2}}{16}$. (D) $\frac{3a^3\sqrt{2}}{48}$.

❖ **Câu 57.** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a , tan của góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và mặt đáy (ABC) bằng

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$. (B) $\frac{2}{\sqrt{3}}$. (C) $\frac{3}{\sqrt{2}}$. (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.



2 Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $SA \perp (ABC)$, $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $SA = a\sqrt{3}$. Gọi AH , AK lần lượt là đường cao của $\triangle SAB$, $\triangle SAC$.

- a) $(SC, (ABC)) = 45^\circ$. b) $(SBC) \perp (SAB)$. c) $(AHK) \perp (SBC)$. d) $(AK, (SBC)) = 60^\circ$.

❖ **Câu 2.** Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O và $SO = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M , N lần lượt là trung điểm của AD và BC .

- a) $(SMN) \perp (ABCD)$. b) $(SMN) \perp (SAD)$.
c) $((SBC), (ABCD)) = 30^\circ$. d) $((SBC), (SCD)) \approx 81^\circ$.

❖ **Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Mặt bên SAB là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy.

- a) Chiều cao hình chóp bằng a .
b) Thể tích khối chóp bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}a^3$.
c) Khoảng cách giữa đường thẳng CD và mặt phẳng (SAB) bằng a .
d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CD bằng $\sqrt{2}a$.

❖ **Câu 4.** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC cân tại A , góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và $AB = 2a$. Hình chiếu của A' trên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của BC , biết $AA' = a\sqrt{2}$

- a) Hình chiếu vuông góc của đường thẳng AA' lên mặt phẳng (ABC) là đường thẳng AH .
b) Góc $\widehat{A'AH}$ là góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng (ABC) .
c) Góc giữa hai đường thẳng AA' và AH bằng 60° .
d) $(A'AH) \perp (BCC'B')$.

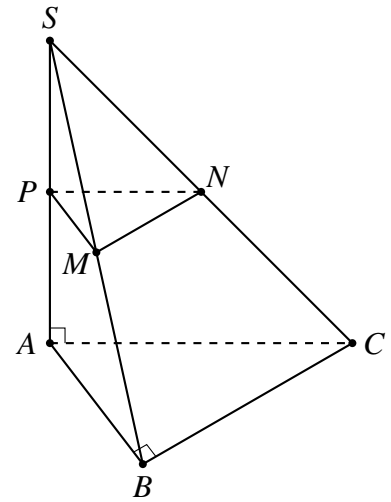
❖ **Câu 5.** Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy là tam giác ABC vuông tại B , biết $SA = AB = BC = a$. Các phát biểu sau đúng hay sai?

- a) Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng $\frac{a^3}{3}$.
b) Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.
c) Khoảng cách từ B đến đường thẳng SC bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.
d) Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB và SC bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

❖ **Câu 6.** Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại A với cạnh huyền $BC = 2a$. Biết $A'H \perp (ABC)$ với H là trung điểm BC .

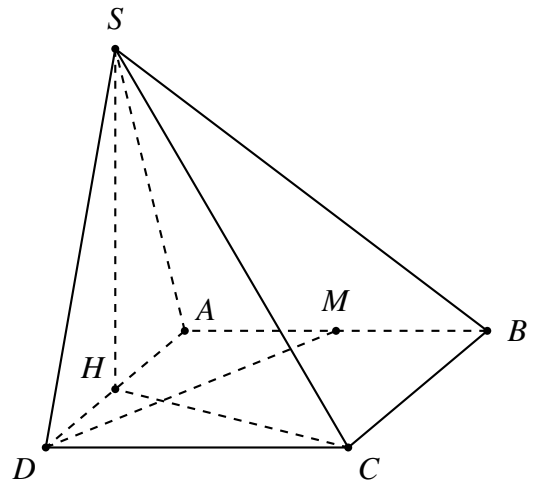
- a) $BC \perp (AA'H)$.
b) $B'C' \perp AA'$.
c) Tìm được hình chiếu của tam giác $A'AB$ trên mặt phẳng (ABC) khi đó, diện tích hình chiếu đó theo a bằng $\frac{a^2}{3}$.
d) Gọi I là hình chiếu của A' trên mặt phẳng $(BCC'B')$. Biết $A'I = \frac{a}{2}$. Khi đó độ dài $A'H$ theo a bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

⇔ **Câu 7.** Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $BC \perp AB$, $AB = 1$, $BC = \sqrt{3}$. Lấy hai điểm M , N lần lượt là trung điểm của SB , SC và điểm P nằm trên cạnh SA .



- a) $SA \perp AB$.
- b) $BC \perp (SAB)$.
- c) $(MN, AC) = 60^\circ$.
- d) Tam giác MNP vuông tại M .

⇔ **Câu 8.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tam giác SAD đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi H , M lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và AB .



- a) $(SC, (ABCD)) = \widehat{SCH}$.
- b) Số đo của góc nhị diện $[(ABCD), CD, (SCD)]$ bằng 90° .
- c) cosin của góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
- d) $(SMD) \perp (SHC)$.

3 Tự luận

✿ **Bài 1.** Cho tứ diện $OABC$ có OA , OB , OC đôi một vuông góc với nhau và $OA = a$, $OB = a\sqrt{2}$ và $OC = 2a$. Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) .

✿ **Bài 2.** Cho tứ diện $ABCD$ có $\triangle ABC$ cân tại A , $\triangle BCD$ cân tại D . Gọi I là trung điểm của BC .

- a) Chứng minh rằng $BC \perp (AID)$.
- b) Kẻ đường cao AH của $\triangle AID$. Chứng minh rằng $AH \perp (BCD)$.
- c) Kẻ đường cao IJ của $\triangle AID$. Chứng minh rằng IJ là đường vuông góc chung của AD và BC .

✿ **Bài 3.** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $BC = a$ và $\widehat{CAB} = 30^\circ$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a\sqrt{2}$.

- a) Chứng minh rằng $(SBC) \perp (SAB)$.
- b) Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SC và khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

✿ **Bài 4.** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Biết $\triangle SAD$ vuông cân tại S và $(SAD) \perp (ABCD)$.

- a) Tính theo a thể tích của khối chóp $S.ABCD$.
- b) Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AD và SC .

Bài 5. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài tất cả các cạnh bằng a , $AA' \perp (ABCD)$ và $\widehat{BAD} = 60^\circ$.

- Tính thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$.
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng $(A'BD)$.

Bài 6. Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A'.ABCD$ là hình chóp đều có tất cả các cạnh đều bằng nhau và bằng a . Tính theo a thể tích của khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ và thể tích của khối chóp $A'.BB'C'C$.

Bài 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AB \parallel CD$ và $AB = BC = DA = a$, $CD = 2a$. Biết hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cùng vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{2}$. Tính theo a khoảng cách từ S đến mặt phẳng $(ABCD)$ và thể tích của khối chóp $S.ABCD$.

Bài 8. Trên mặt đất phẳng, người ta dựng một cây cột AB có chiều dài bằng 10 m và tạo với mặt đất góc 80° . Tại một thời điểm dưới ánh sáng mặt trời, bóng BC của cây cột trên mặt đất dài 12 m vào tạo với cây cột một góc bằng 120° (tức là $\widehat{ABC} = 120^\circ$). Tính góc giữa mặt đất và đường thẳng chứa tia sáng mặt trời tại thời điểm nói trên.

Bài 9. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD .

- Chứng minh rằng $(SMD) \perp (SNC)$.
- Tính khoảng cách từ M đến mặt phẳng (SNC) .

Bài 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC và SD . Tính khoảng cách giữa AM và NP .

Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D ; $AB = AD = 2a$; $CD = a$; số đo góc nhị diện $[S, BC, A]$ bằng 60° . Gọi I là trung điểm của cạnh AD . Biết hai mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$ theo a .

Bài 12. Một chân cột bằng gang có dạng hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ bằng a , chiều cao $h = 2a$ và bán kính đáy phần trụ rỗng bên trong bằng $\frac{a}{2}$.

- Tìm góc phẳng nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy.
- Tính thể tích chân cột nói trên theo a .

Bài 13. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AC \perp BC$, $SA = BC = a\sqrt{3}$, $AC = a$.

- Tính góc giữa hai đường thẳng SA và BC .
- Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) .
- Tính số đo của góc nhị diện $[B, SA, C]$.
- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .
- Tính thể tích của khối chóp $S.ABC$.

Bài 14. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bên $AA' = a$, đáy $ABCD$ là hình thoi có $AB = BD = a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt đáy trùng với điểm O là giao điểm hai đường chéo của đáy. Tính thể tích của khối hộp.

Bài 15. Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB .

- Tính góc giữa hai đường thẳng AB và $B'C'$.
- Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) .
- Tính số đo của góc nhị diện $[B, CC', M]$.
- Chứng minh rằng $CC' \parallel (ABB'A')$. Tính khoảng cách giữa đường thẳng CC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.
- Chứng minh rằng $CM \perp (ABB'A')$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CC' và $A'M$.
- Tính thể tích của khối lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ và thể tích khối chóp $A'.MBC$.

Bài 16. Hình bên là hình chụp đền Kukulcan, là một kim tự tháp Trung Mỹ nằm ở khu di tích Chichen Itza, Mexico, được người Maya xây vào khoảng từ thế kỉ IX đến thế kỉ XII. Phần thân của đền, không bao gồm ngôi đền nằm phía trên, có dạng một khối chóp cụt tứ giác đều (không tính cầu thang và coi các mặt bên là phẳng) với độ dài đáy dưới là 55,3 m, chiều cao là 24 m, góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy là khoảng 47° . Tính thể tích phần thân ngôi đền có dạng khối chóp cụt tứ giác đều đó theo đơn vị mét khối (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Bài 17. Cho hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AA' = 2a, AD = 2a, AB = BC = a$.

- Tính độ dài đoạn thẳng AC' .
- Tính tổng diện tích các mặt của hình lăng trụ.

Bài 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, AC = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của AC . Chứng minh rằng $(BC'M) \perp (ACC'A')$.

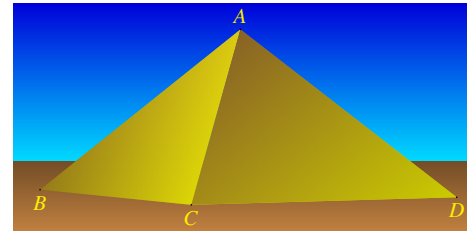
Bài 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$, đáy có cạnh bằng a , cạnh bên bằng b .

- Tính sin của góc tạo bởi cạnh bên và mặt đáy.
- Tính tang của góc giữa mặt phẳng chứa mặt đáy và mặt phẳng chứa mặt bên.

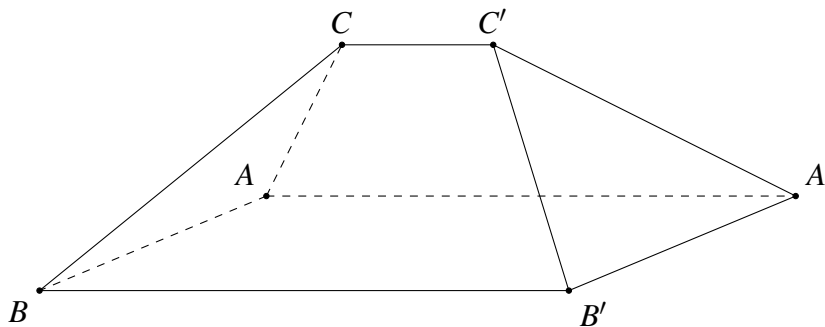
Bài 20. Cho hình chóp cụt tứ giác đều có cạnh đáy lớn bằng $2a$, cạnh đáy nhỏ và đường nối tâm hai đáy bằng a . Tính độ dài cạnh bên và đường cao của mỗi mặt bên.

Bài 21. Cho khối chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là 60° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

Bài 22. Kim tự tháp bằng kính tại bảo tàng Louvre ở Paris có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao là 21,6 m và cạnh đáy dài 34 m. Tính độ dài cạnh bên và diện tích xung quanh của kim tự tháp.



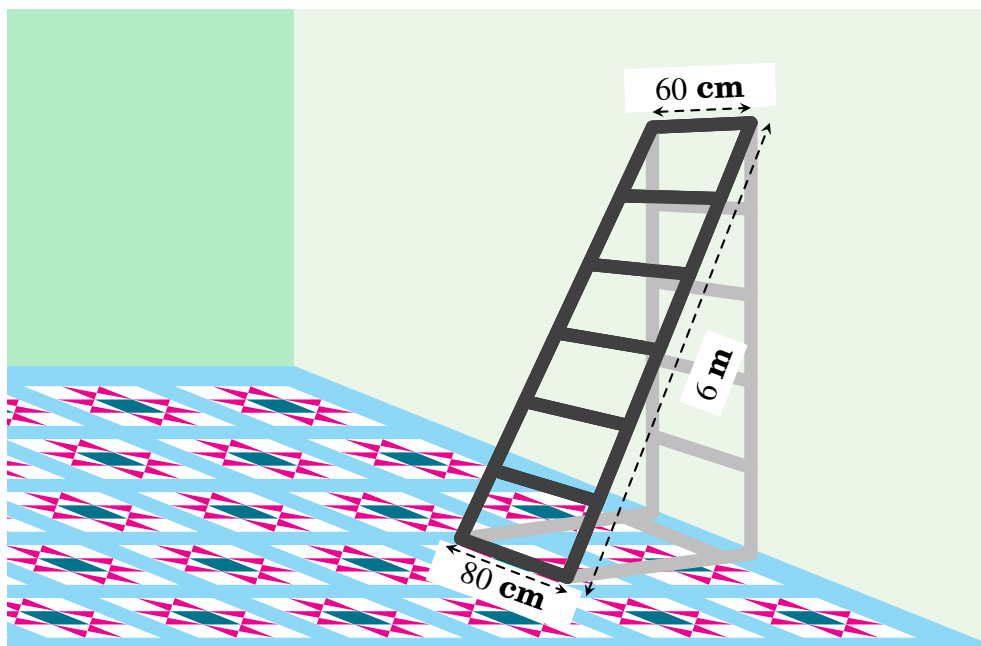
Bài 23. Gia đình bác An muốn làm mái tôn cho sân thượng là hình chữ nhật $ABB'A'$ với kích thước chiều dài $AA' = 10$ m và chiều rộng $AB = 6$ m. Bác dự định làm mái tôn (kín) có thanh ngang $CC' = 6$ m nằm chính giữa mái, song song và cách mặt sàn sân thượng 2 m (tham khảo hình vẽ). Biết rằng chi phí làm mái tôn trọn gói cho mỗi m^2 là 250000 VNĐ. Tính số tiền (triệu đồng) bác An phải chi trả (làm tròn đến hàng phần mười).



Lưu ý: Khoảng cách giữa thanh ngang và mặt sàn là độ dài đoạn thẳng nối một điểm thuộc thanh ngang đến hình chiếu của điểm đó trên mặt sàn.

KQ:

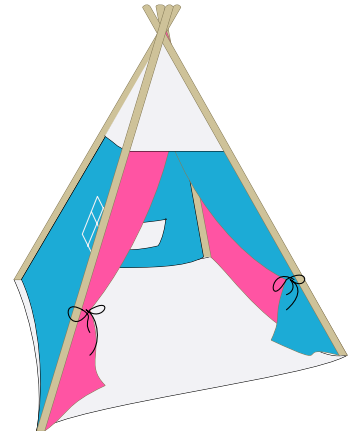
Bài 24. Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao 7 m, hai chân thang cách nhau 80 cm, hai ngọn thang cách nhau 60 cm. Thang được dựa vào bờ tường như hình sau. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



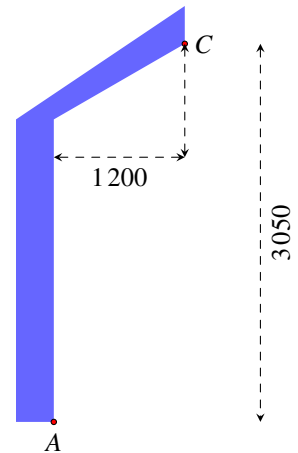
Bài 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 7, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 7\sqrt{6}$. Gọi M là trung điểm của SB . Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (AMC) (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Bài 26. Một khối hộp chữ nhật làm từ kim loại rắn có đáy hình chữ nhật kích thước 48 cm x 25 cm. Khối kim loại này sau đó được nung chảy và đúc lại thành khối chóp đáy hình vuông với độ cao không đổi. Tìm độ dài cạnh đáy của khối chóp này.

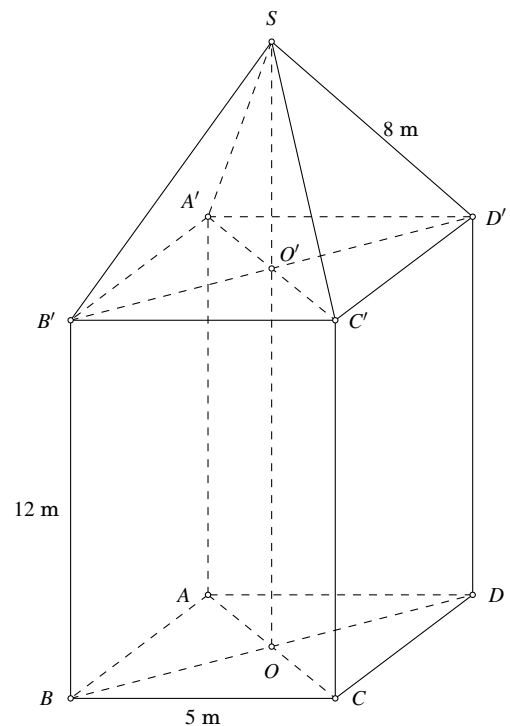
Bài 27. Trong một buổi dã ngoại, bạn Nam muốn dựng một cái lều hình kim tự tháp. Biết khoảng cách từ đỉnh lều tới một chân lều là 270 (cm), góc nhị diện tạo bởi hai nửa mặt phẳng tương ứng chứa hai mái lều đối diện là 55° . Hỏi khoảng cách giữa hai chân lều liên tiếp Nam cần dựng bằng bao nhiêu milimet? (Làm tròn đến hàng đơn vị)



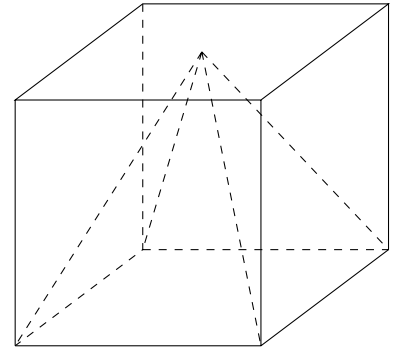
Bài 28. Một cột bóng rổ được gắn xuống nền sân phẳng. Người ta gắn một điểm C ở đỉnh của cột sao cho C nằm trên mặt phẳng song song với nền sân và điểm A đặt ở chân cột bóng rổ như hình vẽ. Người ta muốn buộc một sợi dây căng vào hai điểm A và C . Hỏi sợi dây có độ dài bằng bao nhiêu mm (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



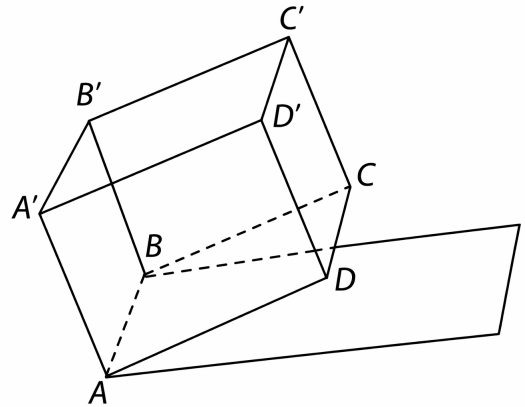
Bài 29. Một chiếc tháp có phần dưới có dạng hình hộp chữ nhật, đáy là hình vuông có cạnh dài 5 m. chiều cao của hình hộp chữ nhật là 12 m. Phần trên của tháp có dạng hình chóp đều, các mặt bên là các tam giác cân chung đỉnh. Mỗi cạnh bên của hình chóp dài 8 m. Tính thể tích của tháp đồng hồ này (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



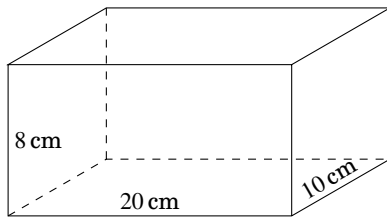
Bài 30. Một cái hộp hình lập phương, bên trong nó đựng một mô hình đồ chơi có dạng hình chóp tứ giác đều mà đỉnh của hình chóp đó trùng với tâm của một mặt chiếc hộp, giả sử hình vuông đáy của hình chóp trùng với một mặt của chiếc hộp (mặt này cùng với mặt chứa đỉnh hình chóp là hai mặt đối nhau). Biết cạnh của chiếc hộp bằng 30 cm, hãy tính thể tích phần không gian bên trong chiếc hộp không bị chiếm bởi mô hình đồ chơi dạng hình chóp (mô hình đồ chơi được làm bởi chất liệu nhựa đặc bên trong, đơn vị dm^3).



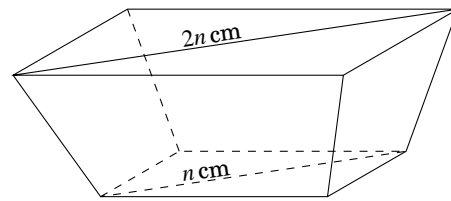
Bài 31. Một bể chứa nước hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ được đặt trên một mái nhà nghiêng so với mặt đất nằm ngang góc 10° , $AB = 1$ m, $AD = 1,5$ m, $AA' = 1$ m. Đáy bể là hình chữ nhật $ABCD$. Các điểm A, B cùng ở độ cao 5 m (so với mặt đất), các điểm C, D ở độ cao lớn hơn so với độ cao của các điểm A, B . Khi nước trong bể phẳng lặng người ta đo được khoảng cách giữa đường mép nước ở mặt phẳng $(ABB'A')$ và mặt đáy của bể là 80 cm. Tính thể tích của phần nước trong bể.



Bài 32. Một chiếc khay đựng đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật với kích thước chiều dài 20 cm, chiều rộng 10 cm, chiều cao 8 cm (hình a).



Hình a



Hình b

Để san bớt nước cho đỡ đầy, người ta đổ nước từ chiếc khay thứ nhất đó sang chiếc khay thứ hai có dạng hình chóp cụt tứ giác đều với đáy khay là hình vuông nhỏ có đường chéo dài n (cm), miệng khay là hình vuông lớn có đường chéo dài $2n$ (cm) (hình b). Sau khi đổ, mực nước ở khay thứ hai cao bằng $\frac{2}{5}$ chiều cao của khay đó và lượng nước trong khay thứ nhất giảm đi $\frac{1}{4}$ so với ban đầu. Thể tích của chiếc khay thứ hai theo đơn vị centimet khối có kết quả chính xác đến hàng đơn vị là a (cm^3). Tổng các chữ số của số a bằng bao nhiêu?

Trong chương này, chúng ta tìm hiểu một số khái niệm cơ bản về xác suất cổ điển và một số quy tắc tính xác suất

§1

BIÊN CỐ HỢP, BIÊN CỐ GIAO, BIÊN CỐ ĐỘC LẬP

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Biến cố hợp



Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω . Đặt $C = A \cup B$, ta có C là một biến cố và được gọi là **biến cố hợp** của hai biến cố A và B , kí hiệu là $A \cup B$.



🔔 **LƯU Ý.** Xét một kết quả thuận lợi α cho biến cố C , tức là $\alpha \in C$. Vì $C = A \cup B$ nên $\alpha \in A$ hoặc $\alpha \in B$. Nói cách khác, α là một kết quả thuận lợi cho biến cố A hoặc biến cố B . Điều đó có nghĩa là biến cố A hoặc biến cố B xảy ra. Vì vậy, biến cố C có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện là “ A xảy ra hoặc B xảy ra” hay “**Có ít nhất một trong các biến cố A, B xảy ra**”.

2) Biến cố giao



Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω . Đặt $D = A \cap B$, ta có D là một biến cố và được gọi là **biến cố giao** của hai biến cố A và B , kí hiệu là $A \cap B$ hay AB .



🔔 **LƯU Ý.** Xét một kết quả thuận lợi β cho biến cố D , tức là $\beta \in D$. Vì $D = A \cap B$ nên $\beta \in A$ và $\beta \in B$. Nói cách khác, β là một kết quả thuận lợi cho cả hai biến cố A và B . Điều đó có nghĩa là cả hai biến cố A và B cùng xảy ra. Vì vậy, biến cố D có thể phát biểu dưới dạng mệnh đề nêu sự kiện “**Cả A và B cùng xảy ra**”.

3) Biến cố xung khắc



Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω . Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì A và B gọi là hai biến cố xung khắc.



⚠ Lưu ý. Xét một kết quả thuận lợi γ cho biến cố A , tức là $\gamma \in A$. Vì $A \cap B = \emptyset$ nên $\gamma \notin B$, tức là γ không là một kết quả thuận lợi cho biến cố B . Do đó, hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi nếu **biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra**.

4) Biến cố độc lập



Cho hai biến cố A và B . Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.



⚠ Lưu ý. Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau cũng độc lập: A và \bar{B} ; \bar{A} và B ; \bar{A} và \bar{B} .

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Biến cố hợp, biến cố giao

Cho hai biến cố A và B .

- ✓ **Biến cố giao** của hai biến cố A và B , kí hiệu là $A \cap B$ hay AB là biến cố cả A và B cùng xảy ra.
- ✓ **Biến cố hợp** của hai biến cố A và B kí hiệu là $A \cup B$ là biến cố “ A xảy ra hoặc B xảy ra” hay “**Có ít nhất một trong các biến cố A, B xảy ra**”.

Ví dụ 1

Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi E là biến cố “Số ghi trên tấm thẻ là số lẻ”; F là biến cố “Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố”.

- 1 Mô tả không gian mẫu.
- 2 Nêu nội dung của biến cố hợp $G = E \cup F$.

Lời giải.

- 1 Không gian mẫu $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$.
- 2 $E \cup F$ là biến cố “Số ghi trên tấm thẻ là số lẻ hoặc số nguyên tố”.
Ta có $E = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$; $F = \{2; 3; 5; 7; 11; 13\}$.

Vậy $G = E \cup F = \{1; 2; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15\}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Một tổ trong lớp 11C có 9 học sinh. Phỏng vấn 9 bạn này với câu hỏi: “Bạn có biết chơi môn thể thao nào trong hai môn này không?”. Nếu biết thì đánh dấu X vào ô ghi tên môn thể thao đó, không biết thì để trống. Kết quả thu được như sau:

| Tên học sinh \ Môn thể thao | Cầu lông | Bóng bàn |
|-----------------------------|----------|----------|
| Bảo | X | |
| Đặng | X | X |
| Giang | | |
| Hoa | X | X |
| Long | | |
| Mai | X | X |
| Phúc | X | X |
| Tuấn | X | |
| Yến | | |

Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong tổ. Xét các biến cố sau:

U : “Học sinh được chọn biết chơi cầu lông”;

V : “Học sinh được chọn biết chơi bóng bàn”.

- ① Mô tả không gian mẫu.
- ② Nội dung của biến cố giao $T = UV$ là gì? Mỗi biến cố U, V, T là tập con nào của không gian mẫu?

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 2



Một hộp đựng 25 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố P : “Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 4”; Q : “Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 6”.

- ① Mô tả không gian mẫu.
- ② Nội dung của biến cố giao $S = PQ$ là gì?

Dạng

2

Biến cố độc lập, xung khắc

Cho hai biến cố A và B .

- ✓ Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi nếu **biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra**.
- ✓ Hai biến cố A và B được gọi là **độc lập** nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia. Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau cũng độc lập: A và \bar{B} ; \bar{A} và B ; \bar{A} và \bar{B} .

Ví dụ 2

Gieo đồng thời hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét các biến cố sau:

A : “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc lớn hơn hoặc bằng 7”;

B : “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc nhỏ hơn hoặc bằng 4”;

C : “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số nguyên tố”.

Trong các cặp biến cố A và B ; A và C ; B và C , cặp biến cố nào xung khắc? Tại sao?

Lời giải. Cặp biến cố A và B là xung khắc vì A và B không đồng thời xảy ra.

Cặp biến cố A và C không xung khắc vì nếu tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7 thì cả A và C xảy ra.

Cặp biến cố B và C không xung khắc vì nếu tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 3 thì cả B và C xảy ra.

Ví dụ 3

Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, gọi B là biến cố “Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm”. Hai biến cố A và B có thể đồng thời cùng xảy ra không?

Lời giải.

◇ Biến cố $A = \{(1;4); (4;1); (2;3); (3;2)\}$.

◇ Biến cố $B = \{(1;1); (2;2); (3;3); (4;4); (5;5); (6;6)\}$.

Hai biến cố A và B không thể đồng thời cùng xảy ra, chúng là 2 biến cố xung khắc.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3



Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”. Gọi C là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm”. Hãy tìm một biến cố khác rỗng và xung khắc với cả ba biến cố A, B và C .

.....

Bài 4



- 1 Hai biến cố đối nhau có xung khắc với nhau không?
- 2 Hai biến cố xung khắc có phải là hai biến cố đối nhau không?

.....

.....

Bài 5



Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: “Đồng xu xuất hiện mặt S ở lần gieo thứ nhất”.

B: “Đồng xu xuất hiện mặt N ở lần gieo thứ nhất”.

Hai biến cố trên có xung khắc không?

Bài 6



Một hộp có 3 quả bóng màu xanh, 4 quả bóng màu đỏ; các quả bóng có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy bóng ngẫu nhiên hai lần liên tiếp, trong đó mỗi lần lấy ngẫu nhiên một quả bóng trong hộp, ghi lại màu của quả bóng lấy ra và bỏ lại quả bóng đó vào hộp.

Xét các biến cố:

A: “Quả bóng màu xanh được lấy ra ở lần thứ nhất”;

B: “Quả bóng màu đỏ được lấy ra ở lần thứ hai”.

Hỏi

- 1 Hai biến cố A và B có độc lập không? Vì sao?
- 2 Hai biến cố A và B có xung khắc không? Vì sao?

Bài 7



Một hộp đựng 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh, có cùng kích thước và khối lượng.

- 1 Bạn Minh lấy ngẫu nhiên một viên bi, ghi lại màu của viên bi được lấy ra rồi trả lại viên bi vào hộp. Tiếp theo, bạn Hùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:

A: “Minh lấy được viên bi màu đỏ”;

B: “Hùng lấy được viên bi màu xanh”.

Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

- 2 Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi và không trả lại vào hộp. Tiếp theo, bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:

C: “Sơn lấy được viên bi màu đỏ”;

D: “Tùng lấy được viên bi màu xanh”.

Chứng tỏ rằng hai biến cố C và D không độc lập.

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho hai biến cố A và B . Biến cố hợp của A và B là biến cố

- (A) “ A và B xảy ra”. (B) “ A hoặc B xảy ra”.
 (C) “ A xảy ra”. (D) “ B xảy ra hoặc cả A và B xảy ra”.

❖ **Câu 2.** Cho hai biến cố A, B ; biến cố giao của hai biến cố A, B ký hiệu là

- (A) $A \setminus B$. (B) $B \setminus A$. (C) $A \cup B$. (D) $A \cap B$.

❖ **Câu 3.** Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ”. Viết tập hợp mô tả biến cố AB .

- (A) $AB = \{(1; 5); (3; 3)\}$. (B) $AB = \{(1; 5); (2; 4); (3; 3)\}$.
 (C) $AB = \{(1; 5); (3; 1); (3; 3); (3; 5)\}$. (D) $AB = \{(1; 5); (1; 6); (3; 3); (3; 5)\}$.

❖ **Câu 4.** Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong một trường. Xét 2 biến cố sau:

P : “Học sinh đó bị cận thị”.

Q : “Học sinh đó học giỏi Toán”.

Nêu nội dung của biến cố P giao Q là

- (A) Biến cố PQ xảy ra khi học sinh đó chỉ bị cận thị hoặc chỉ học giỏi môn Toán.
 (B) Biến cố PQ xảy ra khi học sinh đó bị cận thị hoặc học giỏi môn Toán.
 (C) Biến cố PQ xảy ra khi học sinh đó vừa bị cận thị vừa học giỏi môn Toán.
 (D) Biến cố PQ xảy ra khi học sinh đó không bị cận thị và không học giỏi môn Toán.

❖ **Câu 5.** Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ”. Gọi C là biến cố khác rỗng và xung khắc với cả hai biến cố A và B . Tìm biến cố C .

- (A) $C = \{(1; 2); (1; 4); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 5); (3; 2); (3; 4)\}$.
 (B) $C = \{(1; 2); (1; 4); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 5); (3; 3); (3; 5)\}$.
 (C) $C = \{(1; 2); (1; 4); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 5); (3; 3); (3; 6)\}$.
 (D) $C = \{(1; 3); (1; 4); (2; 1); (2; 2); (2; 3); (2; 5); (3; 2); (3; 4)\}$.

❖ **Câu 6.** Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”. Biến cố AB là tập hợp nào dưới đây?

- (A) $\{6; 12; 18\}$. (B) $\{6; 8; 10; 12; 14; 16; 18\}$.
 (C) $\{6; 9; 12\}$. (D) $\{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21\}$.

❖ **Câu 7.** Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”. Hãy mô tả bằng lời biến cố $A \cup B$.

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

- (A) $A \cup B = \{2; 3; 6; 9; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$.
- (B) $A \cup B = \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 16; 18; 20; 21\}$.
- (C) $A \cup B = \{6; 8; 10; 12; 14; 15; 16; 18\}$.
- (D) $A \cup B = \{6; 9; 12; 15; 18; 21\}$.

❖ **Câu 8.** Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- (A) Hai biến cố A và B độc lập.
- (B) Hai biến cố A và B xung khắc.
- (C) Hai biến cố A và \bar{B} đối nhau.
- (D) Hai biến cố A và B không độc lập.

❖ **Câu 9.** Cho hai biến cố A, B độc lập. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) \bar{A}, B là độc lập.
- (B) A, \bar{B} là độc lập.
- (C) \bar{A}, \bar{B} là độc lập.
- (D) A, \bar{A} là độc lập.

❖ **Câu 10.** Hai bạn Dương và Khoa, mỗi người gieo đồng thời một con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét hai biến cố sau:

E : “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc bạn Dương gieo là số chính phương”.

B : “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc của bạn Khoa là số chia hết cho 4”.

Chọn câu **đúng**:

- (A) Hai biến cố E và B độc lập.
- (B) Hai biến cố E và B không độc lập.
- (C) Hai biến cố E và B xung khắc.
- (D) Hai biến cố E và B không xung khắc.

❖ **Câu 11.** Cho A, B là hai biến cố liên quan đến một phép thử có hữu hạn các kết quả đồng khả năng xuất hiện. Nếu $A \cap B = \emptyset$ thì A và B là hai biến cố

- (A) độc lập.
- (B) giao.
- (C) xung khắc.
- (D) đối nhau.

❖ **Câu 12.** Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số tự nhiên, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A : “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3”, và biến cố B : “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 4”.

Biến cố $A \cup B$ được phát biểu như sau:

- (A) “Số xuất hiện trên thẻ là số vừa chia hết cho 3 vừa chia hết cho 4”.
- (B) “Số xuất hiện trên thẻ là số chia hết cho 3 hoặc chia hết cho 4”.
- (C) “Số xuất hiện trên thẻ là số chia hết cho 12”.
- (D) “Số xuất hiện trên thẻ là số chia hết cho 7”.

❖ **Câu 13.** Một hộp có 52 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số tự nhiên, hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A : “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số lẻ” và biến cố B : “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số nguyên tố”.

Chọn câu **sai** khi phát biểu về biến cố AB .

- (A) “Số xuất hiện trên thẻ là số lẻ hoặc số nguyên tố”.
- (B) “Số xuất hiện trên thẻ là số nguyên tố lẻ”.
- (C) “Số xuất hiện trên thẻ là số nguyên tố khác 2”.
- (D) “Số xuất hiện trên thẻ vừa là số lẻ vừa là số nguyên tố”.

❖ **Câu 14.** Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

X : “Đồng xu xuất hiện mặt sấp ở lần gieo thứ nhất”.

Y: “Đồng xu xuất hiện mặt ngửa ở lần gieo thứ hai”.

Hai biến cố X và Y là hai

- (A) biến cố đối. (B) biến cố độc lập. (C) biến cố giao. (D) biến cố hợp.



2 Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Một hộp có 20 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một số trong các số $1, 2, \dots, 19, 20$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên một chiếc thẻ trong hộp. Xét các biến cố

- A: “Số trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5”.
 B: “Số trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3”.
 C: “Số trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5 hoặc chia hết cho 3”.
 D: “Số trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 15”.

- a) Biến cố A và biến cố D là hai biến cố xung khắc.
 b) Xác suất của biến cố D là $\frac{1}{20}$.
 c) Biến cố D là biến cố hợp của biến cố A và biến cố B.
 d) Số phần tử của không gian mẫu là 190.

❖ **Câu 2.** Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất.

- ◇ A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”.
 ◇ B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”.
 ◇ C là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm”.

Khi đó

- a) $A = \{(1; 4); (4; 1); (2; 3); (3; 2)\}$. b) $AC = \{(1; 4); (4; 1)\}$.
 c) $AB = \{(2; 3)\}$. d) $BC = \{(1; 6); (6; 1)\}$.



3 Tự luận

❖ **Bài 1.** Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ”.

- a) Hãy viết tập hợp mô tả biến cố AB và tính $P(AB)$.
 b) Hãy tìm một biến cố khác rỗng và xung khắc với cả hai biến cố A và B.

❖ **Bài 2.** Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”.

- a) Hãy mô tả bằng lời biến cố AB.
 b) Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

❖ **Bài 3.** Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: “Đồng xu xuất hiện mặt S ở lần gieo thứ nhất”.

B: “Đồng xu xuất hiện mặt N ở lần gieo thứ nhất”.

Hai biến cố trên có xung khắc không?

§2 CÔNG THỨC CỘNG VÀ CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Công thức xác suất cho hai biến cố xung khắc



Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2) Công thức cộng xác suất cho hai biến cố bất kì



Cho hai biến cố A và B . Khi đó, ta có

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Công thức này được gọi là công thức cộng xác suất.

3) Công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập



Nếu hai biến cố A và B độc lập với nhau thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Công thức này gọi là **công thức nhân xác suất cho hai biến cố độc lập**.



🔔 Lưu ý. Với hai biến cố A và B , nếu $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$ thì A và B không độc lập.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Bài toán sử dụng công thức nhân xác suất

A, B độc lập $\iff P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

1) Ví dụ minh họa

🔗 Ví dụ 1

Hai bạn Hạnh và Hà cùng chơi trò chơi bắn cung một cách độc lập. Mỗi bạn chỉ bắn một lần. Xác suất để bạn Hạnh và bạn Hà bắn trúng bia lần lượt là 0,6 và 0,7 trong lần bắn của mình. Tính xác suất của biến cố C : “Bạn Hạnh và bạn Hà đều bắn trúng bia”.

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

 *Lời giải.* Xét biến cố A : “Bạn Hạnh bắn trúng bia”, ta có $P(A) = 0,6$.


Xét biến cố B : “Bạn Hà bắn trúng bia”, ta có $P(B) = 0,7$.

Ta thấy A, B là hai biến cố độc lập và $C = A \cap B$. suy ra

$$P(C) = P(A) \cdot P(B) = 0,6 \cdot 0,7 = 0,42.$$

⇒ Ví dụ 2

Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,6$ và $P(B) = 0,8$. Hãy tính xác suất của các biến cố $AB, \bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

 *Lời giải.* Do A và B là hai biến cố độc lập nên

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0,48.$$

Vì \bar{A} là biến cố đối của A nên $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 0,4$. Do \bar{A} và B độc lập nên

$$P(\bar{A}B) = P(\bar{A})P(B) = 0,32.$$

Vì \bar{B} là biến cố đối của B nên $P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 0,2$. Do \bar{A} và \bar{B} độc lập nên

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0,08.$$

2) Bài tập áp dụng


Bài 1



Để nghiên cứu mối liên quan giữa thói quen hút thuốc lá với bệnh viêm phổi, nhà nghiên cứu chọn một nhóm 5000 người đàn ông. Với mỗi người trong nhóm, nhà nghiên cứu kiểm tra xem họ có nghiện thuốc lá và có bị viêm phổi hay không. Kết quả được thống kê trong bảng sau:

| | Viêm phổi | Không viêm phổi |
|-----------------------|-----------|-----------------|
| Nghiện thuốc lá | 752 người | 1236 người |
| Không nghiện thuốc lá | 575 người | 2437 người |


Từ bảng thống kê trên, hãy chứng tỏ rằng việc nghiện thuốc lá và mắc bệnh viêm phổi có liên quan với nhau.



Bài 2



Số liệu thống kê tại một vùng cho thấy trong các vụ tai nạn ô tô có 0,37% người tử vong; 29% người không thắt dây an toàn và 0,28% người không thắt dây an toàn và tử vong. Chứng tỏ rằng việc không thắt dây an toàn khi lái xe và nguy cơ tử vong khi gặp tai nạn có liên quan với nhau.



Dạng

2

Bài toán sử dụng công thức cộng xác suất

- ✓ Cho hai biến cố A và B . Khi đó, ta có

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

- ✓ Nếu A và B xung khắc thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Ví dụ 3

Một hộp đựng 9 tấm thẻ cùng loại được ghi số từ 1 đến 9. Rút ngẫu nhiên đồng thời hai tấm thẻ từ trong hộp. Xét các biến cố sau:

A : “Cả hai tấm thẻ đều ghi số chẵn”;

B : “Chỉ có một tấm thẻ ghi số chẵn”;

C : “Tích hai số ghi trên hai tấm thẻ là một số chẵn”.

a) Chứng minh rằng $C = A \cup B$.

b) Tính $P(C)$.

Lời giải.

a) Biến cố C xảy ra khi và chỉ khi trong hai tấm thẻ có ít nhất một tấm thẻ ghi số chẵn. Nếu cả hai tấm thẻ ghi số chẵn thì biến cố A xảy ra. Nếu chỉ có một tấm thẻ ghi số chẵn thì biến cố B xảy ra. Vậy C là biến cố hợp của A và B .

b) Hai biến cố A và B là xung khắc. Do đó $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Ta cần tính $P(A)$ và $P(B)$. Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả các tập con có hai phần tử của tập $\{1; 2; \dots; 9\}$. Do đó $n(\Omega) = C_9^2 = 36$.

Tính $P(A)$: Biến cố A là tập hợp tất cả các tập con có hai phần tử của tập $\{2; 4; 6; 8\}$. Do đó $n(A) = C_4^2 = 6$. Suy ra $P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{6}{36}$.

Tính $P(B)$: Mỗi phần tử của B được hình thành từ hai công đoạn:

◇ Công đoạn 1: Chọn một số chẵn từ tập $\{2; 4; 6; 8\}$. Có 4 cách chọn.

◇ Công đoạn 2: Chọn một số lẻ từ tập $\{1; 3; 5; 7; 9\}$. Có 5 cách chọn.

Theo quy tắc nhân, tập B có $4 \cdot 5 = 20$ (phần tử).


Do đó $n(B) = 20$. Suy ra $P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{20}{36}$.

Vậy $P(C) = P(A) + P(B) = \frac{6}{36} + \frac{20}{36} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$.

Ví dụ 4

Một hộp chứa 100 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 100. Chọn ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Tính xác suất của biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3 hoặc 5”.

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

 *Lời giải.* Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3” và B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 5”.

$A \cup B$ là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3 hoặc 5”.

Từ 1 đến 100 có 33 số chia hết cho 3 nên $P(A) = \frac{33}{100} = 0,33$.

Từ 1 đến 100 có 20 số chia hết cho 5 nên $P(B) = \frac{20}{100} = 0,2$.

Một số chia hết cho cả 3 và 5 khi nó chia hết cho 15. Từ 1 đến 100 có 6 số chia hết cho 15 nên

$$P(AB) = \frac{6}{100} = 0,06.$$

Vậy $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,33 + 0,2 - 0,06 = 0,47$.


BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 3



Hai bạn Trung và Dũng của lớp 11A tham gia giải bóng bàn đơn nam do nhà trường tổ chức. Hai bạn đó không cùng thuộc một bảng đấu loại và mỗi bảng đấu loại chỉ chọn một người vào vòng chung kết. Xác suất lọt qua vòng loại để vào vòng chung kết của Trung và Dũng lần lượt là 0,8 và 0,6. Tính xác suất của các biến cố sau

- 1 A : “Cả hai bạn lọt vào vòng chung kết”;
- 2 B : “Có ít nhất một bạn lọt vào vòng chung kết”;
- 3 C : “Chỉ có bạn Trung lọt vào vòng chung kết”.



.....

.....

.....

.....

.....

.....


.....

.....

Bài 4



Một hộp có 12 chiếc thẻ cùng loại, mỗi thẻ được ghi một trong các số $1, 2, 3, \dots, 12$; hai thẻ khác nhau thì ghi hai số khác nhau. Rút ngẫu nhiên 1 chiếc thẻ trong hộp. Xét biến cố A : “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 3” và biến cố B : “Số xuất hiện trên thẻ được rút ra là số chia hết cho 5”. Tính $P(A \cup B)$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 5



Ở một trường trung học phổ thông X , có 19% học sinh học khá môn Ngữ văn, 32% học sinh học khá môn Toán, 7% học sinh học khá cả hai môn Ngữ văn và Toán. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của trường X . Xét hai biến cố sau:

A : “Học sinh đó học khá môn Ngữ văn”;

B : “Học sinh đó học khá môn Toán”. Hãy tính tỉ lệ học sinh học khá môn Ngữ văn hoặc học khá môn Toán của trường X .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

3

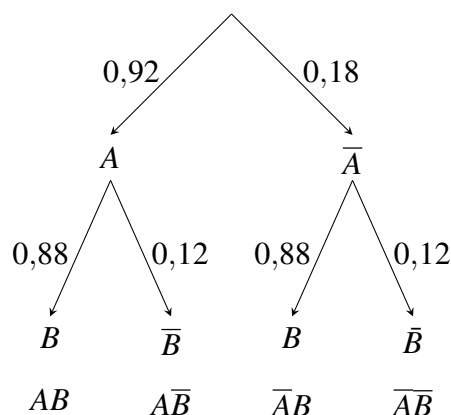
Tính xác suất bằng sơ đồ hình cây

Ví dụ 5

Các học sinh lớp 11D làm thí nghiệm gieo hai loại hạt giống A và B . Xác suất để hai loại hạt giống A và B nảy mầm tương ứng là 0,92 và 0,88. Giả sử việc nảy mầm của hạt A và hạt B là độc lập với nhau. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để:

- Hạt giống A nảy mầm còn hạt giống B không nảy mầm;
- Hạt giống A không nảy mầm còn hạt giống B nảy mầm;
- Ít nhất có một trong hai loại hạt giống nảy mầm.

Lời giải.



Gọi A là biến cố “Hạt giống A nảy mầm”; B là biến cố “Hạt giống B nảy mầm”.

Vậy \bar{A} : “Hạt giống A không nảy mầm”; \bar{B} : “Hạt giống B không nảy mầm”.

Vì hai biến cố A và B là độc lập với nhau nên

- Áp dụng công thức nhân xác suất, ta có xác suất của biến cố “Hạt giống A nảy mầm còn hạt giống B không nảy mầm” là

$$P(A \cdot \bar{B}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) = 0,92 \cdot 0,12 = 0,1104.$$

- b) Áp dụng công thức nhân xác suất, ta có xác suất của biến cố “Hạt giống A không nảy mầm còn hạt giống B nảy mầm” là

$$P(\bar{A} \cdot B) = P(\bar{A}) \cdot P(B) = 0,18 \cdot 0,88 = 0,1584.$$

- c) Xác suất của biến cố C: “Ít nhất có một trong hai loại hạt giống nảy mầm” là phần bù của biến cố “Cả hai loại hạt giống đều nảy mầm”, ta có xác suất

$$P(C) = 1 - P(A) \cdot P(B) = 0,92 \cdot 0,18 = 0,8244.$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 6



Hai bệnh nhân X và Y bị nhiễm vi rút SARS-CoV-2. Biết rằng xác suất bị biến chứng nặng của bệnh nhân X là 0,1 và của bệnh nhân Y là 0,2. Khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập.

Hãy tính xác suất của các biến cố:

- ① “Cả hai bệnh nhân đều bị biến chứng nặng”;
- ② “Cả hai bệnh nhân đều không bị biến chứng nặng”;
- ③ “Bệnh nhân X bị biến chứng nặng, bệnh nhân Y không bị biến chứng nặng”.

✍️

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP



Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc. Biết $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Tính $P(B)$

- Ⓐ $\frac{1}{8}$. Ⓑ $\frac{1}{4}$. Ⓒ $\frac{1}{3}$. Ⓓ $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 2.** Cho A, B là hai biến cố xung khắc. Biết $P(A) = \frac{1}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$. Tính $P(B)$.

- Ⓐ $\frac{3}{5}$. Ⓑ $\frac{8}{15}$. Ⓒ $\frac{2}{15}$. Ⓓ $\frac{1}{15}$.

❖ **Câu 3.** Cho A, B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$. Giá trị của $P(A \cap B)$ bằng

- Ⓐ $\frac{1}{12}$. Ⓑ $\frac{1}{7}$. Ⓒ $\frac{7}{12}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 4.** Hai bạn Sơn và Tùng độc, mỗi người tung một con xúc xắc một cách độc lập với nhau. Xác suất để xúc xắc của bạn Sơn xuất hiện số lẻ, xúc xắc của bạn Tùng xuất hiện số lớn hơn 4 là

- (A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) $\frac{1}{7}$. (D) $\frac{2}{11}$.

❖ **Câu 5.** Hai đối thủ ngang tài nhau, cùng thi đấu với nhau để tranh chức vô địch. Người thắng cuộc là người đầu tiên thắng được 6 ván đấu. Hết buổi sáng, người I đã thắng 5 ván, còn người II chỉ mới thắng 3 ván. Buổi chiều hai người sẽ tiếp tục thi đấu. Xác suất để người I vô địch bằng

- (A) $\frac{5}{8}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{3}{4}$. (D) $\frac{7}{8}$.

❖ **Câu 6.** Hộp A có 4 viên bi trắng, 5 viên bi đỏ và 6 viên bi xanh. Hộp B có 7 viên bi trắng, 6 viên bi đỏ và 5 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi hộp một viên bi, tính xác suất để hai viên bi được lấy ra có cùng màu.

- (A) $\frac{91}{135}$. (B) $\frac{44}{135}$. (C) $\frac{88}{135}$. (D) $\frac{45}{88}$.

❖ **Câu 7.** Lớp 11A1 có 50 học sinh, trong đó có 32 bạn thích học môn Toán, 17 bạn thích học môn Hóa và 8 bạn thích cả hai môn trên. Chọn ngẫu nhiên một bạn. Xác suất để bạn đó thích môn Toán hoặc Hóa là?

- (A) $\frac{49}{50}$. (B) $\frac{9}{50}$. (C) $\frac{33}{50}$. (D) $\frac{41}{50}$.

❖ **Câu 8.** Xác suất bắn trúng mục tiêu của một vận động viên khi bắn một viên đạn là 0,6. Người đó bắn hai viên đạn một cách độc lập. Xác suất để một viên trúng mục tiêu và một viên trượt mục tiêu là

- (A) 0,4. (B) 0,6. (C) 0,48. (D) 0,24.

❖ **Câu 9.** Một học sinh tô ngẫu nhiên 5 câu trắc nghiệm, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó có một phương án đúng. Xác suất để học sinh đó tô sai cả 5 câu là bao nhiêu?

- (A) $\frac{15}{1024}$. (B) $\frac{3}{4}$. (C) $\frac{243}{1024}$. (D) $\frac{1}{1024}$.

❖ **Câu 10.** Hai người độc lập nhau ném bóng vào rổ. Mỗi người ném vào rổ của mình một quả bóng. Biết rằng xác suất ném bóng trúng vào rổ của từng người tương ứng là $\frac{1}{3}$ và $\frac{3}{7}$. Gọi A là biến cố: "Cả hai cùng ném bóng trúng vào rổ". Tính $P(A)$.

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{7}$. (C) $\frac{1}{21}$. (D) $\frac{3}{7}$.

❖ **Câu 11.** Cho một đồng xu cân đối đồng chất có mặt sấp và mặt ngửa. Gieo đồng xu 6 lần. Xác suất để số lần xuất hiện mặt ngửa nhiều hơn số lần xuất hiện mặt sấp là

- (A) $\frac{21}{32}$. (B) $\frac{21}{64}$. (C) $\frac{11}{32}$. (D) $\frac{3}{64}$.

❖ **Câu 12.** Cho A, B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = \frac{1}{9}$. Tính $P(B)$.

- (A) $\frac{4}{9}$. (B) $\frac{5}{36}$. (C) $\frac{13}{36}$. (D) $\frac{9}{4}$.

❖ **Câu 13.** Trong ngân hàng câu hỏi kiểm tra có 20 câu hỏi trắc nghiệm và 10 câu hỏi tự luận. Thầy giáo cần chọn ngẫu nhiên 5 câu hỏi để tạo thành một đề kiểm tra. Xác suất để thầy giáo chọn được đề chỉ có 1 hoặc 2 câu hỏi tự luận gần nhất với giá trị nào sau đây?

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

- (A) 0,5. (B) 0,6. (C) 0,7. (D) 0,8.

❖ **Câu 14.** Cho hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc. Biết $P(B) = \frac{2}{5}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Tính $P(A)$

- (A) $\frac{9}{10}$. (B) $\frac{1}{10}$. (C) $\frac{1}{5}$. (D) $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 15.** Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ một hộp chứa 5 quả bóng xanh và 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Xác suất của biến cố “Hai quả bóng lấy ra có cùng màu” là

- (A) $\frac{1}{9}$. (B) $\frac{2}{9}$. (C) $\frac{4}{9}$. (D) $\frac{5}{9}$.

❖ **Câu 16.** Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau, $P(A) = 0,4$ và $P(AB) = 0,02$. Khi đó $P(B)$ bằng

- (A) 0,55. (B) 0,06. (C) 0,05. (D) 0,25.

❖ **Câu 17.** Ba xạ thủ cùng bắn vào một bia. Xác suất trúng đích lần lượt là 0,5; 0,6 và 0,8. Xác suất để ít nhất một người bắn trúng bia là

- (A) 0,24. (B) 0,16. (C) 0,82. (D) 0,96.

❖ **Câu 18.** Một người có một chùm chìa khóa gồm 9 chiếc, bề ngoài chúng giống hệt nhau và chỉ có đúng hai chiếc mở được cửa nhà. Người đó thử ngẫu nhiên từng chìa. Xác suất để mở được cửa trong lần mở thứ ba bằng

- (A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{2}{7}$. (C) $\frac{14}{81}$. (D) $\frac{7}{81}$.

❖ **Câu 19.** Cho A và B là hai biến cố xung khắc. Biết $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$. Tính $P(A \cup B)$.

- (A) $\frac{7}{12}$. (B) $\frac{1}{12}$. (C) $\frac{1}{7}$. (D) $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 20.** Lớp 11A8 trường THPT X có 25 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai bạn từ lớp này để tham dự cuộc họp của trường. Tính xác suất chọn được hai bạn có cùng giới tính để đi dự cuộc họp.

- (A) $\frac{19}{99}$. (B) $\frac{10}{33}$. (C) $\frac{49}{99}$. (D) $\frac{29}{99}$.

❖ **Câu 21.** Hai học sinh cùng giải 1 bài tập toán một cách độc lập. Xác suất giải đúng bài tập toán của 2 học sinh lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$. Xác suất để cả hai học sinh không giải được bài tập toán bằng

- (A) $\frac{1}{2}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{5}{6}$.

❖ **Câu 22.** Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau thỏa mãn $P(A) = 0,4$, $P(B) = 0,3$. Khi đó $P(AB)$ bằng

- (A) 0,58. (B) 0,7. (C) 0,1. (D) 0,12.

❖ **Câu 23.** Ba người cùng bắn vào 1 bia. Xác suất để người thứ nhất, thứ hai, thứ ba bắn trúng đích lần lượt là 0,8; 0,6; 0,5. Xác suất để có đúng 2 người bắn trúng đích bằng

- (A) 0,24. (B) 0,96. (C) 0,46. (D) 0,92.

❖ **Câu 24.** Một hộp chứa 22 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 22. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là

biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”. Xác suất của biến cố AB bằng

- (A) $\frac{3}{22}$. (B) $\frac{7}{22}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{7}{44}$.

❖ **Câu 25.** Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5” là

- (A) $\frac{5}{36}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{7}{36}$. (D) $\frac{2}{9}$.

❖ **Câu 26.** Có 3 học sinh lớp 12A, 4 học sinh lớp 12B và 5 học sinh lớp 12C xếp thành hàng dọc. Xác suất để 4 học sinh lớp 12B đứng cạnh nhau bằng?

- (A) $\frac{1}{55}$. (B) $\frac{1}{330}$. (C) $\frac{2}{11}$. (D) $\frac{1}{27720}$.

❖ **Câu 27.** Hai xạ thủ mỗi người bắn một viên đạn vào bia một cách độc lập. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ thứ nhất và xạ thủ thứ hai lần lượt là 0,9 và 0,7. Xác suất để người thứ nhất bắn trúng và người thứ hai bắn không trúng bia là

- (A) 0,27. (B) 0,63. (C) 0,07. (D) 0,72.



2 Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất liên tiếp hai lần. Xét các biến cố sau

- A: “Số chấm xuất hiện trong hai lần gieo đều là số chẵn”;
 B: “Số chấm xuất hiện trong hai lần gieo khác tính chẵn lẻ”;
 C: “Tích số chấm xuất hiện trong hai lần gieo là số chẵn”;
 D: “Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo là số lớn hơn 9”.

Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Xác suất của biến cố A là $\frac{1}{4}$. b) Biến cố C là hợp của hai biến cố A và B.
 c) Xác suất của biến cố C là $\frac{2}{3}$. d) Xác suất của biến cố D là $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 2.** Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố sau

- A là biến cố “Số ghi trên tấm thẻ là số chẵn”;
 B là biến cố “Số ghi trên tấm thẻ là số chính phương”;
 C là biến cố “Số ghi trên thẻ là số chẵn hoặc số chính phương”.

Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) $n(\Omega) = 15$. b) $C = A \cup B$. c) $P(A) = \frac{8}{15}$. d) $P(C) = \frac{2}{3}$.

❖ **Câu 3.** Một hộp đựng 10 bi trong đó có 4 bi xanh và 6 bi đỏ. Lấy ra 1 bi và không hoàn lại, tiếp tục lấy ra 1 bi nữa. Xét các biến cố

- A: “Bi lấy được lần 1 màu xanh”;
 B: “Bi lấy được lần 2 màu đỏ”.

Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) A, B là hai biến cố xung khắc.
 b) $P(AB) = \frac{6}{25}$.
 c) $P(AB) = P(A) \cdot P(B) + \frac{2}{25}$.
 d) Xác suất để 2 bi lấy được cùng màu là $\frac{7}{15}$.

❖ **Câu 4.** Hộp I đựng 4 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu xanh, hộp II đựng 2 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu xanh. Gieo một con súc sắc, nếu được mặt 6 chấm thì lấy 1 viên bi từ hộp I, nếu được mặt khác thì lấy 1 viên từ hộp II. Gọi A là biến cố “Con súc sắc xuất hiện mặt 6”, B_i là biến cố “Lấy được viên bi màu đỏ từ hộp i ”, ($i = 1, 2$).

- a) Xác suất để gieo con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm là $P(A) = \frac{1}{6}$.
- b) Xác suất lấy được bi màu đỏ từ hộp I là $P(B_1) = \frac{2}{5}$.
- c) Xác suất lấy đc bi từ hộp II là $P(B_2) = \frac{1}{5}$.
- d) Xác suất lấy được bi màu đỏ là $\frac{3}{5}$.

❖ **Câu 5.** Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau từ tập E . Gọi A là biến cố “Số viết trước có chữ số 5 và số viết sau không có chữ số 5”, B là biến cố “Số viết trước không có chữ số 5 và số viết sau có chữ số 5”. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) A và B là hai biến cố xung khắc.
- b) $A \cup B$ là biến cố “Trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5”.
- c) $P(A) = \frac{865}{3600}$.
- d) $P(A \cup B) = \frac{12}{25}$.

❖ **Câu 6.** Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được cộng 5 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 2 điểm. Một học sinh không học bài nên chọn hù họa một đáp án. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Số câu học sinh đó trả lời đúng để được 1 điểm là 3.
- b) Xác suất để học sinh trả lời được 1 điểm là $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$.
- c) Xác suất để học sinh không trả lời được câu nào là $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$.
- d) Xác suất để học sinh đó nhận điểm không lớn hơn 1 là $\approx 0,7759$.

❖ **Câu 7.** Lớp 10A1 có 35 học sinh gồm 20 học sinh nữ và 15 học sinh nam. Nhà trường cần chọn 3 học sinh của lớp đó tham gia trồng cây. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

- a) Xác suất để 3 học sinh được chọn có đúng một học sinh nữ bằng $\frac{60}{187}$.
- b) Xác suất để 3 học sinh được chọn có đúng hai học sinh nữ bằng $\frac{570}{1309}$.
- c) Xác suất để 3 học sinh được chọn có ít nhất một học sinh nữ bằng $\frac{90}{119}$.
- d) Xác suất để 3 học sinh được chọn có nhiều nhất hai học sinh nữ bằng $\frac{114}{187}$.

❖ **Câu 8.** Lớp 11A của một trường có 30 học sinh, trong đó có 12 bạn thích nhạc cổ điển, 11 bạn thích nhạc trẻ và 3 bạn thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

- a) Biến cố bạn đó thích nhạc cổ điển và biến cố bạn đó thích nhạc trẻ là hai biến cố xung khắc.
- b) Xác suất để bạn đó thích nhạc trẻ là $\frac{2}{5}$, xác suất để bạn đó thích nhạc cổ điển là $\frac{11}{30}$.

c) Xác suất để bạn đó thích nhạc cổ điển hoặc nhạc trẻ là $\frac{2}{3}$.

d) Xác suất để bạn đó không thích nhạc cổ điển và không thích nhạc trẻ là $\frac{1}{3}$.

❖ **Câu 9.** Hai bạn Y và Q mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có một chữ số. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

a) Xác suất để bạn Y chọn được số là số chẵn là $\frac{4}{9}$.

b) Xác suất để bạn Q chọn được số là số lẻ và chia hết cho 3 là $\frac{1}{3}$.

c) Xác suất để hai bạn Y và Q chọn được hai số giống nhau là $\frac{4}{9}$.

d) Xác suất để hai bạn Y và Q chọn được hai số có tích là một số chẵn là $\frac{56}{81}$.

❖ **Câu 10.** Một hộp gồm 6 viên bi trắng, 4 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

a) Xác suất để thu được 3 viên bi cùng màu là $\frac{34}{455}$.

b) Xác suất để thu được có đúng 2 viên bi màu xanh là $\frac{12}{91}$.

c) Xác suất để thu được 3 viên bi khác màu là $\frac{24}{91}$.

d) Xác suất để thu được ít nhất 1 viên bi màu đỏ là $\frac{38}{91}$.

❖ **Câu 11.** Có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40, rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ. Khi đó

a) Biến cố A: “rút được ba thẻ được đánh số lẻ” và B: “rút được ba thẻ trong đó có đúng một thẻ được đánh số lẻ” là hai biến cố không xung khắc.

b) Xác suất của biến cố C: “rút được ba thẻ mà tổng ba số được đánh trên đó là một số lẻ” là $\frac{1}{2}$.

c) Xác suất của biến cố D: “rút được ba thẻ mà tích ba số trên đó là một số chẵn” là $\frac{3}{26}$.

d) Xác suất của biến cố E: “rút được ba thẻ mà tổng ba số được đánh trên đó là một số chia hết cho 3” là $\frac{127}{380}$.

❖ **Câu 12.** Một vận động viên thi bắn súng. Biết rằng xác suất để vận động viên đó bắn trúng vòng 10 là 0,25; bắn trúng vòng 9 là 0,3; bắn trúng vòng 8 là 0,4. Nếu bắn trúng vòng k thì được k điểm. Vận động viên thực hiện bắn hai lần, hai lần bắn độc lập với nhau.

a) Xác suất để cả hai lần bắn của vận động viên đó đều trúng vòng 9 là 0,6.

b) Xác suất để vận động viên đó đạt 16 điểm là 0,8.

c) Xác suất để vận động viên đó đạt 17 điểm là 0,24.

d) Xác suất để vận động viên đó có số điểm lớn hơn 17 là 0,3025.

❖ **Câu 13.** Lớp 11A1 có 50 học sinh, trong đó có 32 bạn thích học môn Toán, 17 bạn thích học môn Lịch Sử và 8 bạn thích cả hai môn trên. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp.

a) Xác suất để bạn đó thích học môn Toán là $\frac{16}{25}$.

b) Xác suất để bạn đó thích cả môn Toán và môn Lịch Sử là $\frac{4}{25}$.

c) Xác suất để bạn đó thích môn Toán hoặc môn Lịch Sử là $\frac{41}{50}$.

d) Xác suất để bạn đó không thích cả môn Toán và môn Lịch Sử là $\frac{1}{50}$.

 **Tự luận**

Bài 1. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”.

- Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố trên.
- Hãy liệt kê các kết quả của phép thử làm cho cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.

Bài 2. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”. Gọi C là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm”. Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao AC và BC .

Bài 3. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”. Gọi C là biến cố “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 1 chấm”.

- Gọi D là biến cố “Số chấm xuất hiện trên con xúc xắc thứ nhất là 3”. Hãy xác định các biến cố AD , BD và CD .
- Gọi \bar{A} là biến cố đối của biến cố A . Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố giao $\bar{A}B$ và $\bar{A}C$.

Bài 4. Một hộp chứa 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 viên bi từ hộp. Gọi A là biến cố “Hai viên bi lấy ra đều có màu xanh”, B là biến cố “Hai viên bi lấy ra đều có màu đỏ”.

- Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố A ? Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố B ?
- Hãy mô tả bằng lời biến cố $A \cup B$ và tính số kết quả thuận lợi cho biến cố $A \cup B$.

Bài 5. Thực hiện hai thí nghiệm. Gọi T_1 và T_2 lần lượt là các biến cố “Thí nghiệm thứ nhất thành công” và “Thí nghiệm thứ hai thành công”. Hãy biểu diễn các biến cố sau theo hai biến cố T_1 và T_2 .

- A : “Có ít nhất một trong hai thí nghiệm thành công”.
- B : “Có đúng một trong hai thí nghiệm thành công”.

Bài 6. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

- A : “Lần thứ nhất xuất hiện mặt ngửa”;
 B : “Lần thứ hai xuất hiện mặt ngửa”;
 C : “Cả hai lần đều xuất hiện mặt ngửa”;
 D : “Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa”.

Trong hai biến cố C, D , biến cố nào là biến cố hợp của hai biến cố A, B ? Biến cố nào là biến cố giao của hai biến cố A, B ?

Bài 7. Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

- A : “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất lớn hơn 4”;
 B : “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai nhỏ hơn 4”;
 C : “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn 4”.
- Trong các biến cố trên, hãy tìm cặp biến cố độc lập.

Bài 8. Gieo ngẫu nhiên một xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Xét các biến cố:

A: “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất lớn hơn 4”;

B: “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ hai nhỏ hơn 4”;

C: “Số chấm xuất hiện ở lần gieo thứ nhất nhỏ hơn 4”.

Trong các biến cố trên, hãy:

- Tìm cặp biến cố xung khắc;
- Tìm cặp biến cố độc lập.

🔗 Bài 9. Trong hộp có 1 quả bóng xanh, 1 quả bóng đỏ, 1 quả bóng vàng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 quả bóng, xem màu rồi trả lại hộp. Lặp lại phép thử trên 2 lần và gọi A_k là biến cố quả bóng lấy ra lần thứ k là bóng xanh ($k = 1, 2$).

- A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?
- Nếu trong mỗi phép thử trên ta không trả bóng lại hộp thì A_1, A_2 có là các biến cố độc lập không? Tại sao?

🔗 Bài 10. Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ và quan sát số ghi trên thẻ. Gọi A là biến cố “Số ghi trên tấm thẻ nhỏ hơn 7”; B là biến cố “Số ghi trên tấm thẻ là số nguyên tố”.

- Mô tả không gian mẫu.
- Mỗi biến cố $A \cup B$ và AB là tập con nào của không gian mẫu?

🔗 Bài 11. Gieo hai con xúc xắc cân đối, đồng chất. Xét các biến cố sau:

E : “Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc đều là số chẵn”;

F : “Số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc khác tính chẵn lẻ”;

K : “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc là số chẵn”.

Chứng minh rằng K là biến cố hợp của E và F .

🔗 Bài 12. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong trường em. Xét hai biến cố sau:

P : “Học sinh đó bị cận thị”;

Q : “Học sinh đó học giỏi môn Toán”.

Nêu nội dung của các biến cố $P \cup Q$; PQ và $\bar{P}\bar{Q}$.

🔗 Bài 13. Có hai chuồng nuôi thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 3 con thỏ trắng và 7 con thỏ đen. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra một con thỏ. Xét hai biến cố sau:

A : “Bắt được con thỏ trắng từ chuồng I”;

B : “Bắt được con thỏ đen từ chuồng II”.

Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

🔗 Bài 14. Có hai chuồng nuôi gà. Chuồng I có 9 con gà mái và 3 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái và 6 con gà trống. Bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng I để đem bán rồi dồn các con gà còn lại của chuồng I vào chuồng II. Sau đó bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng II. Xét hai biến cố sau:

E : “Bắt được con gà trống từ chuồng I”;

F : “Bắt được con gà mái từ chuồng II”.

Chứng tỏ rằng hai biến cố E và F không độc lập.

🔗 Bài 15. Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”.

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

- Hãy mô tả bằng lời biến cố AB .
- Hai biến cố A và B có độc lập không? Tại sao?

Bài 16. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số. Tính xác suất của biến cố M : “Số tự nhiên có hai chữ số được viết ra chia hết cho 11 hoặc chia hết cho 12”.

Bài 17. Một hộp có 12 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để trong 5 viên bi được chọn có ít nhất 2 viên bi màu vàng.

Bài 18. Hai bạn Việt và Nam cùng tham gia một kì thi trắc nghiệm môn Toán và môn Tiếng Anh một cách độc lập nhau. Đề thi của mỗi môn gồm 6 mã đề khác nhau và các môn khác nhau thì mã đề cũng khác nhau. Đề thi được sắp xếp và phát cho học sinh một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để hai bạn Việt và Nam có chung đúng một mã đề thi trong kì thi đó.

Bài 19. Trong một chiếc hộp có 20 viên bi có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 9 viên bi màu đỏ, 6 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 viên bi. Tìm xác suất để 3 viên bi lấy ra có đúng hai màu.

Bài 20. Cho A và B là hai biến cố độc lập.

- Biết $P(A) = 0,7$ và $P(B) = 0,2$. Hãy tính xác suất của các biến cố $AB, \bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.
- Biết $P(A) = 0,5$ và $P(AB) = 0,3$. Hãy tính xác suất của các biến cố $B, \bar{A}B$ và $\bar{A}\bar{B}$.

Bài 21. Một xạ thủ bắn lần lượt 2 viên đạn vào một bia. Xác suất trúng đích của viên thứ nhất và thứ hai lần lượt là 0,9 và 0,6. Biết rằng kết quả các lần bắn là độc lập với nhau. Tính xác suất của các biến cố sau bằng cách sử dụng sơ đồ hình cây:

- “Cả 2 lần bắn đều trúng đích”;
- “Cả 2 lần bắn đều không trúng đích”;
- “Lần bắn thứ nhất trúng đích, lần bắn thứ hai không trúng đích”.

Bài 22. Cho hai biến cố A và B là hai biến cố xung khắc với $P(A) > 0, P(B) > 0$. Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B không độc lập.

Bài 23. Một thùng đựng 60 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 60. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong thùng. Xét hai biến cố sau:

A : “Số ghi trên tấm thẻ là ước của 60” và B : “Số ghi trên tấm thẻ là ước của 48”.

Chứng tỏ rằng A và B là hai biến cố không độc lập.

Bài 24. Có hai túi đựng các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Túi I có 3 viên bi màu xanh và 7 viên bi màu đỏ. Túi II có 10 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu đỏ. Từ mỗi túi, lấy ngẫu nhiên ra một viên bi. Tính xác suất để

- Hai viên bi được lấy có cùng màu xanh;
- Hai viên bi được lấy có cùng màu đỏ;
- Hai viên bi được lấy có cùng màu;
- Hai viên bi được lấy không cùng màu.

Bài 25. Có hai túi mỗi túi đựng 10 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng được đánh số từ 1 đến 10. Từ mỗi túi, lấy ngẫu nhiên ra một quả cầu. Tính xác suất để trong hai quả cầu được lấy ra không có quả cầu nào ghi số 1 hoặc ghi số 5.

Bài 26. Trong đợt kiểm tra cuối học kì II lớp 11 của các trường trung học phổ thông, thống kê cho thấy có 93% học sinh tỉnh X đạt yêu cầu; 87% học sinh tỉnh Y đạt yêu cầu. Chọn ngẫu nhiên một học sinh của tỉnh X và một học sinh của tỉnh Y. Giả thiết rằng chất lượng học tập của hai tỉnh là độc lập. Tính xác suất để

- Cả hai học sinh được chọn đều đạt yêu cầu;
- Cả hai học sinh được chọn đều không đạt yêu cầu;
- Chỉ có đúng một học sinh được chọn đạt yêu cầu;
- Có ít nhất một trong hai học sinh được chọn đạt yêu cầu.

Bài 27. Một bệnh truyền nhiễm có xác suất truyền bệnh là 0,8 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang; là 0,1 nếu tiếp xúc với người bệnh mà có đeo khẩu trang. Anh Lâm tiếp xúc với 1 người bệnh hai lần, trong đó có một lần đeo khẩu trang và một lần không đeo khẩu trang. Tính xác suất anh Lâm bị lây bệnh từ người bệnh mà anh tiếp xúc đó.

Bài 28. Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ”.

Hãy tìm một biến cố khác rỗng và xung khắc với cả hai biến cố A và B.

Bài 29. Một hộp đựng 8 viên bi màu xanh và 6 viên bi màu đỏ, có cùng kích thước và khối lượng. Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp (lấy xong không trả lại vào hộp). Tiếp đó đến lượt bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Tính xác suất để bạn Tùng lấy được viên bi màu xanh.

Bài 30. Lớp 11A của một trường có 40 học sinh, trong đó có 14 bạn thích nhạc cổ điển, 13 bạn thích nhạc trẻ và 5 bạn thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Tính xác suất để:

- Bạn đó thích nhạc cổ điển hoặc nhạc trẻ;
- Bạn đó không thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ.

Bài 31. Một khu phố có 50 hộ gia đình nuôi chó hoặc nuôi mèo, trong đó có 18 hộ nuôi chó, 16 hộ nuôi mèo và 7 hộ nuôi cả chó và mèo. Chọn ngẫu nhiên một hộ trong khu phố trên. Tính xác suất để

- Hộ đó nuôi chó hoặc nuôi mèo;
- Hộ đó không nuôi cả chó và mèo.

Bài 32. Một nhà xuất bản phát hành hai cuốn sách A và B. Thống kê cho thấy có 50% người mua sách A; 70% người mua sách B; 30% người mua cả sách A và sách B. Chọn ngẫu nhiên một người mua. Tính xác suất để:

- Người mua đó mua ít nhất một trong hai sách A hoặc B;
- Người mua đó không mua cả sách A và sách B.

Bài 33. Tại các trường trung học phổ thông của một tỉnh, thống kê cho thấy có 63% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa A, 56% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa B và 28,5% giáo viên môn Toán tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B. Tính tỉ lệ giáo viên môn Toán các trường trung học phổ thông của tỉnh đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B.

§3 ÔN TẬP CHƯƠNG 8

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Chọn ngẫu nhiên hai số khác nhau từ 21 số nguyên dương đầu tiên. Xác suất để chọn được hai số có tổng là một số chẵn bằng:

- (A) $\frac{11}{21}$. (B) $\frac{221}{441}$. (C) $\frac{10}{21}$. (D) $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 2.** Một hộp đựng 20 tấm thẻ cùng loại đánh số từ 1 đến 20. rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi A là biến cố “Rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 9”, B là biến cố “Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 8 và không lớn hơn 15”. Số phần tử của $A \cup B$ là

- (A) 11. (B) 10. (C) 12. (D) 13.

❖ **Câu 3.** Một hộp đựng 20 tấm thẻ cùng loại đánh số từ 1 đến 20. rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi A là biến cố “Rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 9”, B là biến cố “Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 8 và không lớn hơn 15”. Số phần tử của AB là

- (A) 5. (B) 6. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 4.** Tại một hội thảo quốc tế có 50 nhà khoa học, trong đó có 31 người thành thạo tiếng Anh, 21 người thành thạo tiếng Pháp và 5 người thành thạo cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một người trong hội thảo. Xác suất để người được chọn thành thạo ít nhất một trong hai thứ tiếng Anh hoặc Pháp là

- (A) $\frac{47}{50}$. (B) $\frac{37}{50}$. (C) $\frac{39}{50}$. (D) $\frac{41}{50}$.

❖ **Câu 5.** Tại một hội thảo quốc tế có 50 nhà khoa học, trong đó có 31 người thành thạo tiếng Anh, 21 người thành thạo tiếng Pháp và 5 người thành thạo cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một người trong hội thảo. Xác suất để người được chọn không thông thạo cả hai thứ tiếng Anh hoặc Pháp là

- (A) $\frac{7}{50}$. (B) $\frac{3}{50}$. (C) $\frac{9}{50}$. (D) $\frac{11}{50}$.

❖ **Câu 6.** Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 23 học sinh thích bóng chuyền, 18 học sinh thích bóng rổ, 26 học sinh thích bóng chuyền hoặc bóng rổ hoặc cả hai. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Xác suất để chọn được học sinh không thích cả bóng chuyền và bóng rổ là

- (A) $\frac{18}{40}$. (B) $\frac{14}{40}$. (C) $\frac{19}{40}$. (D) $\frac{21}{40}$.

❖ **Câu 7.** Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 23 học sinh thích bóng chuyền, 18 học sinh thích bóng rổ, 26 học sinh thích bóng chuyền hoặc bóng rổ hoặc cả hai. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Xác suất để chọn được học sinh thích bóng chuyền và không thích bóng rổ là

- (A) $\frac{7}{40}$. (B) $\frac{9}{40}$. (C) $\frac{8}{40}$. (D) $\frac{11}{40}$.

❖ **Câu 8.** Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tích số chấm xuất hiện là số lẻ”. Biến cố nào sau đây xung khắc với biến cố A ?

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

- (A) “Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm”.
- (B) “Tổng số chấm xuất hiện là số lẻ”.
- (C) “Xuất hiện ít nhất một mặt có số chấm là số lẻ”.
- (D) “Xuất hiện hai mặt có số chấm khác nhau”.

❖ **Câu 9.** Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,5$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- (A) 0,9 .
- (B) 0,7.
- (C) 0,5.
- (D) 0,2.

❖ **Câu 10.** Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5” là

- (A) $\frac{5}{36}$.
- (B) $\frac{1}{6}$.
- (C) $\frac{7}{36}$.
- (D) $\frac{2}{9}$.

❖ **Câu 11.** Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ một hộp chứa 5 quả bóng xanh và 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Xác suất của biến cố “Hai bóng lấy ra có cùng màu” là

- (A) $\frac{1}{9}$.
- (B) $\frac{2}{9}$.
- (C) $\frac{4}{9}$.
- (D) $\frac{5}{9}$.

❖ **Câu 12.** Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh của một hình bát giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Xác suất để khoảng cách giữa hai đỉnh đó bằng $R\sqrt{2}$ là

- (A) $\frac{2}{7}$.
- (B) $\frac{3}{7}$.
- (C) $\frac{4}{7}$.
- (D) $\frac{5}{56}$.

❖ **Câu 13.** Một hộp đựng 20 tấm thẻ cùng loại đánh số từ 1 đến 20. rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi A là biến cố “Rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 9”, B là biến cố “Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 8 và không lớn hơn 15”. Số phần tử của $A \cup B$ là

- (A) 11.
- (B) 10.
- (C) 12.
- (D) 13.

❖ **Câu 14.** Một hộp đựng 20 tấm thẻ cùng loại đánh số từ 1 đến 20. rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Gọi A là biến cố “Rút được tấm thẻ ghi số chẵn lớn hơn 9”, B là biến cố “Rút được tấm thẻ ghi số không nhỏ hơn 8 và không lớn hơn 15”. Số phần tử của AB là

- (A) 5.
- (B) 6.
- (C) 3.
- (D) 4.

❖ **Câu 15.** Tại một hội thảo quốc tế có 50 nhà khoa học, trong đó có 31 người thành thạo tiếng Anh, 21 người thành thạo tiếng Pháp và 5 người thành thạo cả tiếng Anh và tiếng Pháp. Chọn ngẫu nhiên một người trong hội thảo. Xác suất để người được chọn không thông thạo cả hai thứ tiếng Anh hoặc Pháp là

- (A) $\frac{7}{50}$.
- (B) $\frac{3}{50}$.
- (C) $\frac{9}{50}$.
- (D) $\frac{11}{50}$.

❖ **Câu 16.** Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 23 học sinh thích bóng chuyền, 18 học sinh thích bóng rổ, 26 học sinh thích bóng chuyền hoặc bóng rổ hoặc cả hai. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Xác suất để chọn được học sinh không thích cả bóng chuyền và bóng rổ là

- (A) $\frac{18}{40}$.
- (B) $\frac{14}{40}$.
- (C) $\frac{19}{40}$.
- (D) $\frac{21}{40}$.

❖ **Câu 17.** Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 23 học sinh thích bóng chuyền, 18 học sinh thích bóng rổ, 26 học sinh thích bóng chuyền hoặc bóng rổ hoặc cả hai. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Xác suất để chọn được học sinh thích bóng chuyền và không thích bóng rổ là

- (A) $\frac{7}{40}$. (B) $\frac{9}{40}$. (C) $\frac{8}{40}$. (D) $\frac{11}{40}$.

❖ **Câu 18.** Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tích số chấm xuất hiện là số lẻ”. Biến cố nào sau đây xung khắc với biến cố A ?

- (A) “Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm”.
 (B) “Tổng số chấm xuất hiện là số lẻ”.
 (C) “Xuất hiện ít nhất một mặt có số chấm là số lẻ”.
 (D) “Xuất hiện hai mặt có số chấm khác nhau”.

❖ **Câu 19.** Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,5$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- (A) 0,9. (B) 0,7. (C) 0,5. (D) 0,2.

❖ **Câu 20.** Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Xác suất của biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 5” là

- (A) $\frac{5}{36}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{7}{36}$. (D) $\frac{2}{9}$.

❖ **Câu 21.** Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ một hộp chứa 5 quả bóng xanh và 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Xác suất của biến cố “Hai bóng lấy ra có cùng màu” là

- (A) $\frac{1}{9}$. (B) $\frac{2}{9}$. (C) $\frac{4}{9}$. (D) $\frac{5}{9}$.

❖ **Câu 22.** Chọn ngẫu nhiên 2 đỉnh của một hình bát giác đều nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Xác suất để khoảng cách giữa hai đỉnh đó bằng $R\sqrt{2}$ là

- (A) $\frac{2}{7}$. (B) $\frac{3}{7}$. (C) $\frac{4}{7}$. (D) $\frac{5}{56}$.

❖ **Câu 23.** Cho phép thử có không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Cặp biến cố không đối nhau là

- (A) $A = \{1\}$ và $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. (B) Ω và \emptyset .
 (C) $C = \{1, 4, 5\}$ và $D = \{2, 3, 6\}$. (D) $E = \{1, 3, 6\}$ và $F = \{2, 3\}$.

❖ **Câu 24.** Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối, đồng chất 1 lần. Gọi A là biến cố số chấm xuất hiện trên con súc sắc bé hơn 3. Biến cố đối của biến cố A là

- (A) Số chấm xuất hiện trên con súc sắc lớn hơn hoặc bằng 4.
 (B) Số chấm xuất hiện trên con súc sắc không phải là 3.
 (C) Số chấm xuất hiện trên con súc sắc không bé hơn 3.
 (D) Số chấm xuất hiện trên con súc sắc lớn hơn 3.

❖ **Câu 25.** Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ”. Viết tập hợp mô tả biến cố AB .

- (A) $AB = \{(1; 5); (3; 3)\}$. (B) $AB = \{(1; 5); (2; 4); (3; 3)\}$.
 (C) $AB = \{(1; 5); (3; 1); (3; 3); (3; 5)\}$. (D) $AB = \{(1; 5); (1; 6); (3; 3); (3; 5)\}$.

❖ **Câu 26.** Hộp thứ nhất chứa 3 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 3. Hộp thứ hai chứa 5 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 5. Lấy ra ngẫu nhiên từ mỗi

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

hộp 1 thẻ. Gọi A là biến cố “Tổng các số ghi trên 2 thẻ bằng 6”, B là biến cố “Tích các số ghi trên 2 thẻ là số lẻ”. Gọi C là biến cố khác rỗng và xung khắc với cả hai biến cố A và B . Tìm biến cố C .

- (A) $C = \{(1;2);(1;4);(2;1);(2;2);(2;3);(2;5);(3;2);(3;4)\}$.
(B) $C = \{(1;2);(1;4);(2;1);(2;2);(2;3);(2;5);(3;3);(3;5)\}$.
(C) $C = \{(1;2);(1;4);(2;1);(2;2);(2;3);(2;5);(3;3);(3;6)\}$.
(D) $C = \{(1;3);(1;4);(2;1);(2;2);(2;3);(2;5);(3;2);(3;4)\}$.

❖ **Câu 27.** Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”. Biến cố AB là tập hợp nào dưới đây?

- (A) $\{6;12;18\}$. (B) $\{6;8;10;12;14;16;18\}$.
(C) $\{6;9;12\}$. (D) $\{2;3;4;6;8;9;10;12;14;15;16;18;20;21\}$.

❖ **Câu 28.** Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”. Hãy mô tả bằng lời biến cố $A \cup B$.

- (A) $A \cup B = \{2;3;6;9;10;12;14;16;18;20\}$.
(B) $A \cup B = \{2;3;4;6;8;9;10;12;14;15;16;18;20;21\}$.
(C) $A \cup B = \{6;8;10;12;14;15;16;18\}$.
(D) $A \cup B = \{6;9;12;15;18;21\}$.

❖ **Câu 29.** Một hộp chứa 21 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 21. Chọn ra ngẫu nhiên 1 thẻ từ hộp. Gọi A là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 2”, B là biến cố “Số ghi trên thẻ được chọn chia hết cho 3”. Chọn khẳng định **đúng** trong các khẳng định sau:

- (A) Hai biến cố A và B độc lập. (B) Hai biến cố A và B xung khắc.
(C) Hai biến cố A và \bar{B} đối nhau. (D) Hai biến cố A và B không độc lập.

❖ **Câu 30.** Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối và đồng chất. Xác suất để mặt 3 chấm xuất hiện là

- (A) $\frac{5}{6}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $\frac{1}{3}$.

❖ **Câu 31.** Người ta muốn chia tập hợp 16 học sinh gồm 3 học sinh lớp 12A, 5 học sinh lớp 12B và 8 học sinh lớp 12C thành hai nhóm, mỗi nhóm có 8 học sinh. Xác suất sao cho ở mỗi nhóm đều có học sinh lớp 12A và mỗi nhóm có ít nhất hai học sinh lớp 12B là

- (A) $\frac{84}{143}$. (B) $\frac{56}{143}$. (C) $\frac{42}{143}$. (D) $\frac{356}{1287}$.

❖ **Câu 32.** Trong một lớp học gồm có 18 học sinh nam và 17 học sinh nữ. Giáo viên gọi ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Xác suất để 4 được gọi có cả nam và nữ bằng

- (A) $\frac{69}{77}$. (B) $\frac{68}{75}$. (C) $\frac{65}{71}$. (D) $\frac{443}{506}$.

❖ **Câu 33.** Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất của biến cố “tổng số chấm xuất hiện của hai lần gieo là 11”.

- (A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{1}{18}$. (C) $\frac{1}{12}$. (D) $\frac{1}{36}$.

❖ **Câu 34.** Gieo ngẫu nhiên một con xúc sắc cân đối và đồng chất hai lần. Tính xác suất của biến cố “Tổng số chấm trong hai lần gieo bằng 9”.

- (A) $\frac{1}{9}$. (B) $\frac{5}{18}$. (C) $\frac{1}{6}$. (D) $\frac{5}{36}$.

❖ **Câu 35.** Một nhóm học sinh gồm 6 bạn nam và 4 bạn nữ đứng ngẫu nhiên thành 1 hàng. Xác suất để có đúng 2 trong 4 bạn nữ đứng cạnh nhau là

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{1}{2}$. (C) $\frac{1}{4}$. (D) $\frac{1}{3}$.

❖ **Câu 36.** Có 8 cái bút khác nhau và 7 quyển vở khác nhau được gói trong 15 hộp. Một học sinh được chọn bất kỳ hai hộp. Xác suất để học sinh đó chọn được một cặp bút và vở là

- (A) $\frac{1}{15}$. (B) $\frac{1}{7}$. (C) $\frac{8}{15}$. (D) $\frac{8}{105}$.

❖ **Câu 37.** Xếp 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ vào một bàn tròn có 10 ghế. Tính xác suất để không có hai học sinh nữ ngồi cạnh nhau.

- (A) $\frac{37}{42}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{5}{42}$. (D) $\frac{5}{1008}$.

❖ **Câu 38.** Cho đa giác đều (P) có 20 đỉnh. Lấy tùy ý 3 đỉnh của (P) , tính xác suất để 3 đỉnh lấy được tạo thành tam giác vuông không có cạnh nào là cạnh của (P) .

- (A) $\frac{7}{114}$. (B) $\frac{3}{38}$. (C) $\frac{5}{114}$. (D) $\frac{7}{57}$.

❖ **Câu 39.** Gọi S là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập S . Tìm xác suất để số được chọn có các chữ số sắp xếp theo thứ tự tăng dần và không chứa hai chữ số nguyên nào liên tiếp nhau.

- (A) $\frac{2}{3}$. (B) $\frac{5}{63}$. (C) $\frac{1}{36}$. (D) $\frac{5}{1512}$.

❖ **Câu 40.** Một hộp có 5 bi đen và 4 bi trắng. Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi. Tính xác suất để hai viên bi được chọn có cùng màu.

- (A) $\frac{5}{9}$. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{4}{9}$. (D) $\frac{1}{9}$.

❖ **Câu 41.** Có 2 chiếc hộp chứa bi. Hộp thứ nhất chứa 4 bi đỏ và 3 bi trắng. Hộp thứ hai chứa 2 bi đỏ, 4 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên từ 1 hộp ra 1 bi. Tính xác suất để 2 bi lấy ra có cùng màu.

- (A) $\frac{8}{21}$. (B) $\frac{5}{21}$. (C) $\frac{10}{21}$. (D) $\frac{7}{21}$.

❖ **Câu 42.** Lấy ngẫu nhiên hai tấm thẻ trong một hộp chứa chín tấm thẻ đánh số từ 1 đến 9. Tính xác suất để tổng của các số trên hai thẻ lấy ra là số chẵn.

- (A) $\frac{5}{3}$. (B) $\frac{4}{9}$. (C) $\frac{5}{9}$. (D) $\frac{1}{9}$.

❖ **Câu 43.** Chọn ngẫu nhiên hai số nguyên dương khác nhau có hai chữ số. Xác suất để chọn được hai số có tổng là số chia hết cho 3 bằng

- (A) $\frac{29}{267}$. (B) $\frac{1}{6}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{59}{267}$.

❖ **Câu 44.** Có 30 đề thi trong đó có 10 đề khó, 20 đề trung bình. Một học sinh bắt hai đề, tính xác suất để được ít nhất một đề trung bình.

- (A) $\frac{25}{64}$. (B) $\frac{40}{87}$. (C) $\frac{29}{87}$. (D) $\frac{40}{89}$.

❖ **Câu 45.** Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9. Tính xác suất của biến cố X : “lấy được vé không có chữ số 1 hoặc chữ số 2”.

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

- (A) $P(X) = 0,8534$. (B) $P(X) = 0,8533$. (C) $P(X) = 0,814$. (D) $P(X) = 0,84$.

❖ **Câu 46.** Có năm chiếc thẻ được đánh số từ 1 đến 5. Rút ngẫu nhiên ba chiếc thẻ. Tính xác suất để tổng các số ghi trên ba thẻ được rút bằng 8.

- (A) $\frac{1}{10}$. (B) $\frac{3}{10}$. (C) $\frac{1}{30}$. (D) $\frac{1}{5}$.

❖ **Câu 47.** Một lớp có 20 nam sinh và 15 nữ sinh. Giáo viên chọn ngẫu nhiên 4 học sinh lên bảng giải bài tập. Xác suất để 4 học sinh được chọn có cả nam và nữ bằng

- (A) $\frac{4651}{5236}$. (B) $\frac{4615}{5236}$. (C) $\frac{4615}{5263}$. (D) $\frac{4610}{5236}$.

❖ **Câu 48.** Một lớp có 20 học sinh, trong đó có 2 cán bộ lớp. Chọn ngẫu nhiên ra 3 học sinh. Tính xác suất để có ít nhất một cán bộ lớp.

- (A) $\frac{26}{95}$. (B) $\frac{24}{95}$. (C) $\frac{27}{95}$. (D) $\frac{32}{95}$.

❖ **Câu 49.** Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.

- (A) $0,25^{30} \cdot 0,75^{20}$. (B) $0,25^{30} \cdot 0,75^{20} \cdot C_{50}^{20}$. (C) $1 - 0,25^{20} \cdot 0,75^{30}$. (D) $0,25^{20} \cdot 0,75^{30}$.

❖ **Câu 50.** Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Bạn An làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án ở mỗi câu. Tính xác suất để An được 6 điểm.

- (A) $0,25^{20} \cdot 0,75^{30}$. (B) $0,25^{30} \cdot 0,75^{20} \cdot C_{50}^{20}$. (C) $0,25^{30} \cdot 0,75^{20}$. (D) $1 - 0,25^{20} \cdot 0,75^{30}$.

❖ **Câu 51.** Có 8 người khách bước ngẫu nhiên vào một cửa hàng có 3 quầy. Tính xác suất để 3 người cùng đến quầy thứ nhất.

- (A) $\frac{C_8^3 \cdot 2^5}{3^8}$. (B) $\frac{C_2^5}{A_3^8}$. (C) $\frac{C_8^3 \cdot A_2^5}{A_3^8}$. (D) $\frac{C_8^3 \cdot A_5^2}{3^8}$.

❖ **Câu 52.** Một hộp chứa 11 quả cầu trong đó có 5 quả màu xanh và 6 quả màu đỏ. Lấy ngẫu nhiên lần lượt 2 quả từ hộp đó. Tính xác suất để 2 lần đều lấy được quả cầu màu xanh.

- (A) $\frac{5}{11}$. (B) $\frac{9}{55}$. (C) $\frac{2}{11}$. (D) $\frac{4}{11}$.

❖ **Câu 53.** Hai xạ thủ cùng bắn mỗi người bắn một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của hai xạ thủ lần lượt là $\frac{1}{2}$ và $\frac{1}{3}$. Tính xác suất của biến cố có ít nhất một xạ thủ không bắn trúng bia.

- (A) $\frac{5}{6}$. (B) $\frac{2}{3}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{3}$.

❖ **Câu 54.** Một bài kiểm tra có 5 câu theo 5 mức độ khác nhau, xác suất để bạn An làm đúng câu 1 là 100% và giảm dần đều 10% khi sang mỗi câu tiếp theo. Tính xác suất để bạn An làm đúng hết cả bài kiểm tra đó.

- (A) $\frac{189}{625}$. (B) $\frac{36}{125}$. (C) $\frac{189}{6250}$. (D) $\frac{18}{125}$.

❖ **Câu 55.** Trong một khoảng thời gian, xác suất để các hãng taxi Vrab, VNGopro, NVTaxi có chương trình khuyến mãi lần lượt là 0,6; 0,7; 0,8. Tính xác suất để trong khoảng thời gian đó khách hàng nhận được khuyến mãi.

- (A) $\frac{16}{25}$. (B) $\frac{83}{125}$. (C) $\frac{122}{125}$. (D) $\frac{81}{25}$.

❖ **Câu 56.** Trong một cuộc thi bắn cung, 3 xạ thủ I, II, III độc lập nhau cùng bắn vào một mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của ba xạ thủ I, II và III tương ứng là 0,8; 0,4 và 0,3. Tính xác suất để xạ thủ I bắn trúng còn hai xạ thủ kia bắn trượt.

- (A) $\frac{12}{125}$. (B) $\frac{83}{125}$. (C) $\frac{42}{125}$. (D) $\frac{113}{125}$.

❖ **Câu 57.** Việt và Nam cùng tham gia kì thi THPTQG năm 2016, ngoài thi ba môn Toán, Văn, Tiếng Anh bắt buộc thì Việt và Nam đều đăng kí thi thêm đúng hai môn tự chọn khác trong ba môn Vật lí, Hóa học và Sinh học dưới hình thức thi trắc nghiệm để xét tuyển Đại học. Mỗi môn tự chọn trắc nghiệm có 12 mã đề thi khác nhau, mã đề thi của các môn khác nhau là khác nhau. Tìm xác suất để Việt và Nam có chung đúng một môn thi tự chọn và chung một mã đề.

- (A) $\frac{1}{15}$. (B) $\frac{1}{12}$. (C) $\frac{1}{10}$. (D) $\frac{1}{18}$.

❖ **Câu 58.** Trong một bài thi trắc nghiệm khách quan có 10 câu. Mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một câu trả lời đúng. Một học sinh không học bài nên làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên một phương án trả lời. Tính xác suất để học sinh đó trả lời đúng 10 câu.

- (A) $1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{10}$. (B) $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$. (C) $1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{10}$. (D) $\left(\frac{1}{4}\right)^{10}$.

❖ **Câu 59.** Cho A, B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = \frac{1}{4}, P(AB) = \frac{1}{9}$. Tính $P(B)$.

- (A) $\frac{4}{9}$. (B) $\frac{5}{36}$. (C) $\frac{13}{36}$. (D) $\frac{9}{4}$.

❖ **Câu 60.** Trong kỳ thi THPT Quốc gia, bài thi môn Toán có 50 câu hỏi trắc nghiệm khách quan dạng bốn lựa chọn và chỉ có một lựa chọn đúng, mỗi câu đúng được 0,2 điểm. Sau khi làm chắc chắn đúng 30 câu hỏi, bạn An khoanh ngẫu nhiên đáp án 20 câu còn lại. Tính xác suất để bạn An được đúng 7 điểm.

- (A) $C_{50}^{30} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{35} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$. (B) $\left(\frac{1}{4}\right)^5$.
 (C) $\left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$. (D) $C_{20}^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{15}$.

❖ **Câu 61.** Cho $X = \{0, 1, 2, 3, \dots, 15\}$. Chọn ngẫu nhiên 3 số trong tập hợp X . Tính xác suất để trong ba số được chọn không có hai số liên tiếp.

- (A) $\frac{13}{35}$. (B) $\frac{13}{20}$. (C) $\frac{7}{20}$. (D) $\frac{20}{35}$.

❖ **Câu 62.** Hai người ngang tài ngang sức tranh chức vô địch của một cuộc thi cờ tướng. Người giành chiến thắng là người đầu tiên thắng được 5 ván cờ. Tại thời điểm người chơi thứ nhất đã thắng được 4 ván và người chơi thứ hai mới thắng 2 ván, tính xác suất để người chơi thứ nhất giành chiến thắng.

- (A) $\frac{7}{8}$. (B) $\frac{11}{27}$. (C) $\frac{21}{64}$. (D) $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 63.** Có 25 bạn học sinh được chia thành 2 nhóm A và B , sao cho trong mỗi nhóm đều có nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi nhóm một học sinh. Tính xác suất để hai học sinh được chọn có cả nam và nữ. Biết rằng xác suất chọn được hai học sinh nam là 0,57.

- (A) 0,02. (B) 0,23. (C) 0,41. (D) 0,59.

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

❖ **Câu 64.** Trong kì thi THPT Quốc gia, An làm đề thi trắc nghiệm môn Toán. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng, trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. An trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại An chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi môn Toán của An không dưới 9,5 điểm.

- (A) $\frac{53}{512}$. (B) $\frac{2}{19}$. (C) $\frac{13}{1042}$. (D) $\frac{9}{22}$.

❖ **Câu 65.** Một người bắn 3 viên đạn. Xác suất để cả 3 viên trúng vòng 10 điểm là 0,008, xác suất để 1 viên trúng vòng 8 điểm là 0,15, xác suất để 1 viên trúng vòng dưới 8 điểm là 0,4. Tính xác suất để xạ thủ đạt ít nhất 28 điểm (biết rằng điểm tính cho mỗi vòng là các số nguyên không âm và không vượt quá 10).

- (A) 0,0935. (B) 0,808. (C) 0,558. (D) 0,0365.

❖ **Câu 66.** Đội văn nghệ của nhà trường gồm 4 học sinh lớp 12A, 3 học sinh lớp 12B và 2 học sinh lớp 12C. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ đội văn nghệ để biểu diễn một tiết mục. Tính xác suất sao cho lớp nào cũng có học sinh được chọn và có ít nhất 2 học sinh lớp 12A.

- (A) $\frac{13}{21}$. (B) $\frac{4}{21}$. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{10}{21}$.

❖ **Câu 67.** Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 2 điểm. Một học sinh không học bài và đánh hù họa các câu trả lời (giả sử học sinh đó chọn đáp án cho đủ 10 câu hỏi). Tìm xác suất để học sinh này nhận điểm dưới 1.

- (A) 0,7124. (B) 0,7336. (C) 0,783. (D) 0,7759.

❖ **Câu 68.** Một túi đựng 7 quả cầu màu xanh, 6 quả cầu màu đỏ, 5 quả cầu màu vàng. Lấy ngẫu nhiên 4 quả cầu trong túi. Tính xác suất sao cho số quả cầu màu xanh bằng số quả cầu màu đỏ.

- (A) $\frac{7}{68}$. (B) $\frac{59}{3060}$. (C) $\frac{49}{204}$. (D) $\frac{16}{153}$.

❖ **Câu 69.** Một đoàn tàu gồm ba toa đỗ sân ga. Có 5 hành khách lên tàu. Mỗi hành khách độc lập với nhau. Chọn ngẫu nhiên một toa. Tìm xác suất để mỗi toa có ít nhất 1 hành khách bước lên tàu.

- (A) $\frac{10}{81}$. (B) $\frac{20}{81}$. (C) $\frac{50}{81}$. (D) $\frac{20}{243}$.

❖ **Câu 70.** Một đa giác đều có 24 đỉnh, tất cả các cạnh của đa giác sơn màu xanh và tất cả các đường chéo của đa giác đó sơn màu đỏ. Gọi X là tập hợp tất cả các tam giác có ba đỉnh là các đỉnh của đa giác đều trên. Người ta chọn ngẫu nhiên từ X một tam giác, tính xác suất để chọn được tam giác có ba cạnh cùng màu.

- (A) $\frac{24}{115}$. (B) $\frac{190}{253}$. (C) $\frac{27}{1290}$. (D) $\frac{1}{24}$.

❖ **Câu 71.** Trong thư viện có 3 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 3 quyển sách hóa, 3 quyển sách sinh. Biết các quyển sách cùng môn giống nhau. Xếp 12 quyển sách trên lên giá thành một hàng sao cho không có 3 quyển nào cùng môn đứng cạnh nhau. Hỏi có tất cả bao nhiêu cách xếp?

- (A) 16800. (B) 295176. (C) 308664. (D) 369600.

❖ **Câu 72.** Một trường có 50 em học sinh giỏi trong đó có 5 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 học sinh để tham gia trại hè. Tính xác suất trong 3 em ấy không có cặp anh em sinh đôi nào.

Ⓐ $\frac{102}{245}$.

Ⓑ $\frac{48}{49}$.

Ⓒ $\frac{97}{98}$.

Ⓓ $\frac{242}{245}$.



Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Có hai hộp đựng các viên bi. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ, 6 viên bi xanh và 7 viên bi vàng. Hộp thứ hai chứa 3 viên bi trắng, 4 viên bi đen (các viên bi kích thước như nhau). Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Xác suất lấy 1 viên bi đỏ từ hộp thứ nhất là $\frac{1}{18}$.

b) Xác suất lấy 2 viên bi cùng màu từ hộp thứ hai là $\frac{3}{7}$.

c) Xác suất lấy 4 viên bi có nhiều nhất 2 viên bi đỏ từ hộp thứ nhất là $\frac{20}{51}$.

d) Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp thứ nhất và 2 viên bi từ hộp thứ hai. Xác suất để trong 6 viên bi lấy được 1 viên bi trắng và có ít nhất 3 viên bi đỏ là $\frac{743}{4284}$.

❖ **Câu 2.** Một xạ thủ bắn lần lượt hai viên đạn vào bia. Xác suất bắn không trúng đích của viên thứ nhất và viên thứ hai lần lượt là 0,2 và 0,3. Biết rằng kết quả các lần bắn độc lập với nhau. Gọi biến cố A_i : “Lần bắn thứ i không trúng đích” với $i \in \{1;2\}$. Trong các khẳng định nào sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) $A_1; A_2$ là hai biến cố độc lập.

b) Xác suất biến cố “Cả hai lần bắn không trúng đích” là 0,5.

c) Xác suất biến cố “Lần bắn thứ nhất không trúng đích, lần bắn thứ hai trúng đích” là 0,14.

d) Xác suất biến cố “Có ít nhất một lần bắn trúng đích” là 0,94.

❖ **Câu 3.** Hai người cùng đi câu cá trên một hồ. Xác suất câu được cá của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là 0,8 và 0,9. Gọi biến cố A_i : “Người thứ i câu được cá” với $i \in \{1;2\}$. Trong các khẳng định nào sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) $A_1; A_2$ là hai biến cố độc lập.

b) Xác suất biến cố “Cả hai người câu được cá” là 0,96.

c) Xác suất biến cố “Người thứ nhất câu được cá, người thứ hai không câu được cá” là 0,08.

d) Xác suất biến cố “Có ít nhất một người câu được cá” là 0,98.

❖ **Câu 4.** Chọn ngẫu nhiên một lá bài từ bộ bài tú lơ khơ 52 lá, trả lại lá bài vừa rút vào bộ bài và rút tiếp một lá khác. Xét biến cố A : “Lần đầu rút được lá 2”! và B : “Lần hai rút được lá Át”. Hãy chỉ ra các khẳng định đúng và các khẳng định sai?

a) Hai biến cố A và B độc lập.

b) Xác suất của biến cố A bằng $\frac{1}{13}$.

c) Xác suất để lần đầu rút lá 2 và lần hai rút được lá Át bằng $\frac{2}{13}$.

d) Xác suất để trong hai lá bài rút ra có đủ hai chất cơ là $\frac{1}{16}$.

❖ **Câu 5.** Một nhóm có 50 người được phỏng vấn họ đã mua cành đào hay cây quất vào dịp Tết vừa qua, trong đó có 31 người mua cành đào, 12 người mua cây quất và 5 người mua cả cành đào và cây quất. Chọn ngẫu nhiên một người. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

- a) Biến cố người đó mua đào và biến cố người đó mua quất là hai biến cố xung khắc.
- b) Xác suất để người đó mua cành đào là $\frac{31}{50}$, xác suất để người đó mua cành quất là $\frac{12}{50}$.
- c) Xác suất để người đó mua cành đào hoặc mua cây quất là $\frac{19}{50}$.
- d) Xác suất để người đó không mua cành đào và không mua cây quất là $\frac{6}{25}$.

❖ **Câu 6.** Một cuộc thi bắn súng, có 3 người tham gia thi. Trong đó xác suất bắn trúng của người thứ nhất là 0,9; người thứ 2 là 0,7 và người thứ 3 là 0,8. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

- a) Xác suất để cả ba người đều bắn trúng là 0,504.
- b) Xác suất để có đúng hai người bắn trúng là 0,398.
- c) Xác suất để không có người nào bắn trúng là 0,4.
- d) Xác suất để có ít nhất một người bắn trúng là 0,994.

❖ **Câu 7.** Ba xạ thủ cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất cả ba xạ thủ đều bắn trúng bia là $\frac{1}{4}$.
- b) Xác suất để duy nhất xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là $\frac{1}{2}$.
- c) Xác suất có duy nhất một xạ thủ bắn trúng bia là $\frac{1}{4}$.
- d) Xác suất có ít nhất hai xạ thủ bắn trúng bia là $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 8.** Có hai hộp cùng chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất có 7 quả cầu đỏ, 5 quả cầu xanh. Hộp thứ 2 có 6 quả cầu đỏ, 4 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ra ngẫu nhiên 1 quả cầu. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để quả cầu lấy ra từ hộp thứ nhất có màu đỏ là $\frac{7}{12}$.
- b) Xác suất để hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ là $\frac{1}{2}$.
- c) Xác suất để 2 quả cầu lấy ra có ít nhất 1 quả màu đỏ là $\frac{3}{8}$.
- d) Xác suất để 2 quả cầu lấy ra cùng màu là $\frac{31}{60}$.

❖ **Câu 9.** Trong đề kiểm tra 15 phút môn Toán có 20 câu trắc nghiệm. Mỗi câu trắc nghiệm có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng. Bình giải chắc chắn đúng 10 câu, 10 câu còn lại lựa chọn ngẫu nhiên đáp án. Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm, trả lời sai không bị trừ điểm. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Bình chắc chắn được 5 điểm.
- b) Xác suất trả lời sai ở một câu là $\frac{3}{4}$.
- c) Xác suất để Bình đạt đúng 8 điểm là $\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$.
- d) Xác suất để Bình đạt được từ 9 điểm trở lên nhỏ hơn 0,0004.

❖ **Câu 10.** Trong kì thi THPT Quốc Gia năm 2023 có môn thi bắt buộc là môn Toán. Môn thi này thi dưới hình thức trắc nghiệm với bốn phương án trả lời A, B, C, D. Mỗi câu trả lời

đúng được cộng 0,2 điểm; mỗi câu trả lời sai bị trừ 0,1 điểm. Bạn Việt vì học rất kém môn Toán nên chọn ngẫu nhiên cả 50 câu trả lời. Các khẳng định sau đây khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để bạn Việt làm đúng ở một câu là $\frac{1}{4}$.
- b) Xác suất để bạn Việt làm sai ở một câu là $\frac{1}{3}$.
- c) Bạn Việt làm được 7 điểm, khi đó bạn Việt làm đúng 30 câu và sai 20 câu.
- d) Xác suất để bạn Việt đạt được 4 điểm môn Toán trong kì thi trên là $2,5 \cdot 10^{-6}$.

❖ **Câu 11.** Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất liên tiếp hai lần. Xét các biến cố sau

- A: “Số chấm xuất hiện trong hai lần gieo đều là số chẵn”;
- B: “Số chấm xuất hiện trong hai lần gieo khác tính chẵn lẻ”;
- C: “Tích số chấm xuất hiện trong hai lần gieo là số chẵn”;
- D: “Tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo là số lớn hơn 9”.

Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Xác suất của biến cố A là $\frac{1}{4}$.
- b) Biến cố C là hợp của hai biến cố A và B.
- c) Xác suất của biến cố C là $\frac{2}{3}$.
- d) Xác suất của biến cố D là $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 12.** Có hai hộp đựng các viên bi. Hộp thứ nhất chứa 5 viên bi đỏ, 6 viên bi xanh và 7 viên bi vàng. Hộp thứ hai chứa 3 viên bi trắng, 4 viên bi đen (các viên bi kích thước như nhau). Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Xác suất lấy 1 viên bi đỏ từ hộp thứ nhất là $\frac{1}{18}$.
- b) Xác suất lấy 2 viên bi cùng màu từ hộp thứ hai là $\frac{3}{7}$.
- c) Xác suất lấy 4 viên bi có nhiều nhất 2 viên bi đỏ từ hộp thứ nhất là $\frac{20}{51}$.
- d) Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp thứ nhất và 2 viên bi từ hộp thứ hai. Xác suất để trong 6 viên bi lấy được 1 viên bi trắng và có ít nhất 3 viên bi đỏ là $\frac{743}{4284}$.

❖ **Câu 13.** Một hộp đựng 15 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 15. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố sau

- A là biến cố “Số ghi trên tấm thẻ là số chẵn”;
- B là biến cố “Số ghi trên tấm thẻ là số chính phương”;
- C là biến cố “Số ghi trên thẻ là số chẵn hoặc số chính phương”.

Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) $n(\Omega) = 15$.
- b) $C = A \cup B$.
- c) $P(A) = \frac{8}{15}$.
- d) $P(C) = \frac{2}{3}$.

❖ **Câu 14.** Một hộp đựng 10 bi trong đó có 4 bi xanh và 6 bi đỏ. Lấy ra 1 bi và không hoàn lại, tiếp tục lấy ra 1 bi nữa. Xét các biến cố

- A: “Bi lấy được lần 1 màu xanh”;
- B: “Bi lấy được lần 2 màu đỏ”.

Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) A, B là hai biến cố xung khắc.
- b) $P(AB) = \frac{6}{25}$.
- c) $P(AB) = P(A) \cdot P(B) + \frac{2}{25}$.

d) Xác suất để 2 bi lấy được cùng màu là $\frac{7}{15}$.

❖ **Câu 15.** Hộp I đựng 4 viên bi màu đỏ và 6 viên bi màu xanh, hộp II đựng 2 viên bi màu đỏ và 8 viên bi màu xanh. Gieo một con súc sắc, nếu được mặt 6 chấm thì lấy 1 viên bi từ hộp I, nếu được mặt khác thì lấy 1 viên từ hộp II. Gọi A là biến cố “Con súc sắc xuất hiện mặt 6”, B_i là biến cố “Lấy được viên bi màu đỏ từ hộp i ”, ($i = 1, 2$).

a) Xác suất để gieo con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm là $P(A) = \frac{1}{6}$.

b) Xác suất lấy được bi màu đỏ từ hộp I là $P(B_1) = \frac{2}{5}$.

c) Xác suất lấy đc bi từ hộp II là $P(B_2) = \frac{1}{5}$.

d) Xác suất lấy được bi màu đỏ là $\frac{3}{5}$.

❖ **Câu 16.** Cho tập $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Viết ngẫu nhiên lên bảng hai số tự nhiên, mỗi số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau từ tập E . Gọi A là biến cố “Số viết trước có chữ số 5 và số viết sau không có chữ số 5”, B là biến cố “Số viết trước không có chữ số 5 và số viết sau có chữ số 5”. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) A và B là hai biến cố xung khắc.

b) $A \cup B$ là biến cố “Trong hai số đó có đúng một số có chữ số 5”.

c) $P(A) = \frac{865}{3600}$.

d) $P(A \cup B) = \frac{12}{25}$.

❖ **Câu 17.** Một bài trắc nghiệm có 10 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 4 phương án lựa chọn trong đó có 1 đáp án đúng. Giả sử mỗi câu trả lời đúng được cộng 5 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 2 điểm. Một học sinh không học bài nên chọn hù họa một đáp án. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) Số câu học sinh đó trả lời đúng để được 1 điểm là 3.

b) Xác suất để học sinh trả lời được 1 điểm là $\left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^7$.

c) Xác suất để học sinh không trả lời được câu nào là $\left(\frac{3}{4}\right)^{10}$.

d) Xác suất để học sinh đó nhận điểm không lớn hơn 1 là $\approx 0,7759$.

❖ **Câu 18.** Một xạ thủ bắn lần lượt hai viên đạn vào bia. Xác suất bắn không trúng đích của viên thứ nhất và viên thứ hai lần lượt là 0,2 và 0,3. Biết rằng kết quả các lần bắn độc lập với nhau. Gọi biến cố A_i : “Lần bắn thứ i không trúng đích” với $i \in \{1; 2\}$. Trong các khẳng định nào sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) $A_1; A_2$ là hai biến cố độc lập.

b) Xác suất biến cố “Cả hai lần bắn không trúng đích” là 0,5.

c) Xác suất biến cố “Lần bắn thứ nhất không trúng đích, lần bắn thứ hai trúng đích” là 0,14.

d) Xác suất biến cố “Có ít nhất một lần bắn trúng đích” là 0,94.

❖ **Câu 19.** Hai người cùng đi câu cá trên một hồ. Xác suất câu được cá của người thứ nhất và người thứ hai lần lượt là 0,8 và 0,9. Gọi biến cố A_i : “Người thứ i câu được cá” với $i \in \{1; 2\}$. Trong các khẳng định nào sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

a) $A_1; A_2$ là hai biến cố độc lập.

- b) Xác suất biến cố “Cả hai người câu được cá” là 0,96.
 c) Xác suất biến cố “Người thứ nhất câu được cá, người thứ hai không câu được cá” là 0,08.
 d) Xác suất biến cố “Có ít nhất một người câu được cá” là 0,98.

❖ **Câu 20.** Chọn ngẫu nhiên một lá bài từ bộ bài tú lơ khơ 52 lá, trả lại lá bài vừa rút vào bộ bài và rút tiếp một lá khác. Xét biến cố A : “Lần đầu rút được lá 2”! và B : “Lần hai rút được lá Át”. Hãy chỉ ra các khẳng định đúng và các khẳng định sai?

- a) Hai biến cố A và B độc lập.
 b) Xác suất của biến cố A bằng $\frac{1}{13}$.
 c) Xác suất để lần đầu rút lá 2 và lần hai rút được lá Át bằng $\frac{2}{13}$.
 d) Xác suất để trong hai lá bài rút ra có đủ hai chất cơ là $\frac{1}{16}$.

❖ **Câu 21.** Lớp 10A1 có 35 học sinh gồm 20 học sinh nữ và 15 học sinh nam. Nhà trường cần chọn 3 học sinh của lớp đó tham gia trồng cây. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

- a) Xác suất để 3 học sinh được chọn có đúng một học sinh nữ bằng $\frac{60}{187}$.
 b) Xác suất để 3 học sinh được chọn có đúng hai học sinh nữ bằng $\frac{570}{1309}$.
 c) Xác suất để 3 học sinh được chọn có ít nhất một học sinh nữ bằng $\frac{90}{119}$.
 d) Xác suất để 3 học sinh được chọn có nhiều nhất hai học sinh nữ bằng $\frac{114}{187}$.

❖ **Câu 22.** Một nhóm có 50 người được phỏng vấn họ đã mua cành đào hay cây quất vào dịp Tết vừa qua, trong đó có 31 người mua cành đào, 12 người mua cây quất và 5 người mua cả cành đào và cây quất. Chọn ngẫu nhiên một người. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

- a) Biến cố người đó mua đào và biến cố người đó mua quất là hai biến cố xung khắc.
 b) Xác suất để người đó mua cành đào là $\frac{31}{50}$, xác suất để người đó mua cành quất là $\frac{12}{50}$.
 c) Xác suất để người đó mua cành đào hoặc mua cây quất là $\frac{19}{50}$.
 d) Xác suất để người đó không mua cành đào và không mua cây quất là $\frac{6}{25}$.

❖ **Câu 23.** Lớp 11A của một trường có 30 học sinh, trong đó có 12 bạn thích nhạc cổ điển, 11 bạn thích nhạc trẻ và 3 bạn thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

- a) Biến cố bạn đó thích nhạc cổ điển và biến cố bạn đó thích nhạc trẻ là hai biến cố xung khắc.
 b) Xác suất để bạn đó thích nhạc trẻ là $\frac{2}{5}$, xác suất để bạn đó thích nhạc cổ điển là $\frac{11}{30}$.
 c) Xác suất để bạn đó thích nhạc cổ điển hoặc nhạc trẻ là $\frac{2}{3}$.
 d) Xác suất để bạn đó không thích nhạc cổ điển và không thích nhạc trẻ là $\frac{1}{3}$.

❖ **Câu 24.** Hai bạn Y và Q mỗi bạn chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương có một chữ số. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

- a) Xác suất để bạn Y chọn được số là số chẵn là $\frac{4}{9}$.
- b) Xác suất để bạn Q chọn được số là số lẻ và chia hết cho 3 là $\frac{1}{3}$.
- c) Xác suất để hai bạn Y và Q chọn được hai số giống nhau là $\frac{4}{9}$.
- d) Xác suất để hai bạn Y và Q chọn được hai số có tích là một số chẵn là $\frac{56}{81}$.

❖ **Câu 25.** Một hộp gồm 6 viên bi trắng, 4 viên bi đỏ, 5 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên 3 viên bi. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

- a) Xác suất để thu được 3 viên bi cùng màu là $\frac{34}{455}$.
- b) Xác suất để thu được có đúng 2 viên bi màu xanh là $\frac{12}{91}$.
- c) Xác suất để thu được 3 viên bi khác màu là $\frac{24}{91}$.
- d) Xác suất để thu được ít nhất 1 viên bi màu đỏ là $\frac{38}{91}$.

❖ **Câu 26.** Một cuộc thi bắn súng, có 3 người tham gia thi. Trong đó xác suất bắn trúng của người thứ nhất là 0,9; người thứ 2 là 0,7 và người thứ 3 là 0,8. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

- a) Xác suất để cả ba người đều bắn trúng là 0,504.
- b) Xác suất để có đúng hai người bắn trúng là 0,398.
- c) Xác suất để không có người nào bắn trúng là 0,4.
- d) Xác suất để có ít nhất một người bắn trúng là 0,994.

❖ **Câu 27.** Có 40 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 40, rút ngẫu nhiên ba tấm thẻ. Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Biến cố A: “rút được ba thẻ được đánh số lẻ” và B: “rút được ba thẻ trong đó có đúng một thẻ được đánh số lẻ” là hai biến cố không xung khắc.
- b) Xác suất của biến cố C: “rút được ba thẻ mà tổng ba số được đánh trên đó là một số lẻ” là $\frac{1}{2}$.
- c) Xác suất của biến cố D: “rút được ba thẻ mà tích ba số trên đó là một số chẵn” là $\frac{3}{26}$.
- d) Xác suất của biến cố E: “rút được ba thẻ mà tổng ba số được đánh trên đó là một số chia hết cho 3” là $\frac{127}{380}$.

❖ **Câu 28.** Một vận động viên thi bắn súng. Biết rằng xác suất để vận động viên đó bắn trúng vòng 10 là 0,25; bắn trúng vòng 9 là 0,3; bắn trúng vòng 8 là 0,4. Nếu bắn trúng vòng k thì được k điểm. Vận động viên thực hiện bắn hai lần, hai lần bắn độc lập với nhau. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để cả hai lần bắn của vận động viên đó đều trúng vòng 9 là 0,6.
- b) Xác suất để vận động viên đó đạt 16 điểm là 0,8.
- c) Xác suất để vận động viên đó đạt 17 điểm là 0,24.
- d) Xác suất để vận động viên đó có số điểm lớn hơn 17 là 0,3025.

❖ **Câu 29.** Ba xạ thủ cùng bắn mỗi người một viên đạn vào bia một cách độc lập với nhau. Xác suất bắn trúng bia của xạ thủ thứ nhất, thứ hai, thứ ba lần lượt là $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{3}{4}$. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất cả ba xạ thủ đều bắn trúng bia là $\frac{1}{4}$.
- b) Xác suất để duy nhất xạ thủ thứ nhất bắn trúng bia là $\frac{1}{2}$.
- c) Xác suất có duy nhất một xạ thủ bắn trúng bia là $\frac{1}{4}$.
- d) Xác suất có ít nhất hai xạ thủ bắn trúng bia là $\frac{3}{4}$.

❖ **Câu 30.** Có hai hộp cùng chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất có 7 quả cầu đỏ, 5 quả cầu xanh. Hộp thứ 2 có 6 quả cầu đỏ, 4 quả cầu xanh. Từ mỗi hộp lấy ra ngẫu nhiên 1 quả cầu. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để quả cầu lấy ra từ hộp thứ nhất có màu đỏ là $\frac{7}{12}$.
- b) Xác suất để hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ là $\frac{1}{2}$.
- c) Xác suất để 2 quả cầu lấy ra có ít nhất 1 quả màu đỏ là $\frac{3}{8}$.
- d) Xác suất để 2 quả cầu lấy ra cùng màu là $\frac{31}{60}$.

❖ **Câu 31.** Trong đề kiểm tra 15 phút môn Toán có 20 câu trắc nghiệm. Mỗi câu trắc nghiệm có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án trả lời đúng. Bình giải chắc chắn đúng 10 câu, 10 câu còn lại lựa chọn ngẫu nhiên đáp án. Biết rằng mỗi câu trả lời đúng được 0,5 điểm, trả lời sai không bị trừ điểm. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Bình chắc chắn được 5 điểm.
- b) Xác suất trả lời sai ở một câu là $\frac{3}{4}$.
- c) Xác suất để Bình đạt đúng 8 điểm là $\left(\frac{1}{4}\right)^6 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$.
- d) Xác suất để Bình đạt được từ 9 điểm trở lên nhỏ hơn 0,0004.

❖ **Câu 32.** Lớp 11A1 có 50 học sinh, trong đó có 32 bạn thích học môn Toán, 17 bạn thích học môn Lịch Sử và 8 bạn thích cả hai môn trên. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để bạn đó thích học môn Toán là $\frac{16}{25}$.
- b) Xác suất để bạn đó thích cả môn Toán và môn Lịch Sử là $\frac{4}{25}$.
- c) Xác suất để bạn đó thích môn Toán hoặc môn Lịch Sử là $\frac{41}{50}$.
- d) Xác suất để bạn đó không thích cả môn Toán và môn Lịch Sử là $\frac{1}{50}$.

❖ **Câu 33.** Trong kì thi THPT Quốc Gia năm 2023 có môn thi bắt buộc là môn Toán. Môn thi này thi dưới hình thức trắc nghiệm với bốn phương án trả lời A, B, C, D. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 0,2 điểm; mỗi câu trả lời sai bị trừ 0,1 điểm. Bạn Việt vì học rất kém môn Toán nên chọn ngẫu nhiên cả 50 câu trả lời. Các khẳng định sau đây khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để bạn Việt làm đúng ở một câu là $\frac{1}{4}$.
- b) Xác suất để bạn Việt làm sai ở một câu là $\frac{1}{3}$.
- c) Bạn Việt làm được 7 điểm, khi đó bạn Việt làm đúng 30 câu và sai 20 câu.

d) Xác suất để bạn Việt đạt được 4 điểm môn Toán trong kì thi trên là $2,5 \cdot 10^{-6}$.

❖ **Câu 34.** Trong một công ty có 40 nhân viên, trong đó có 27 người thích chơi bóng bàn, 25 người thích chơi cầu lông. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong công ty đó. Các khẳng định sau đây khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để người đó thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng bàn và cầu lông không vượt quá 100%.
- b) Xác suất để người đó thích chơi cả hai môn cầu lông và bóng bàn ít nhất là 25%.
- c) Xác suất để người đó không thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông ít nhất là 2,5%.
- d) Xác suất để người đó không thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông nhiều nhất là 25%.

❖ **Câu 35.** Một tổ có 6 học sinh nam và 9 học sinh nữ. Xác suất có thể xảy ra khi chọn 6 học sinh đi lao động. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất 6 học sinh được chọn đều là nam là $\frac{1}{5005}$.
- b) Xác suất có đúng 2 học sinh nam là $\frac{3}{143}$.
- c) Xác suất có cả nam và nữ là $\frac{618}{715}$.
- d) Xác suất có ít nhất 1 học sinh nữ là $\frac{5004}{5005}$.

❖ **Câu 36.** Một hộp chứa 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 2 quả bóng vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên từ hộp 3 quả bóng. Khẳng định nào sau đây đúng, khẳng định nào sau đây sai?

- a) Số phần tử không gian mẫu là 286 phần tử.
- b) Số phần tử của biến cố “Chọn được 3 quả bóng khác màu” là 13.
- c) Xác suất của biến cố “Cả 3 quả bóng lấy ra đều có cùng màu” là $\frac{113}{143}$.
- d) Xác suất của biến cố “Có đúng 2 quả bóng xanh trong 3 quả bóng lấy ra” là $\frac{45}{143}$.

❖ **Câu 37.** Một lớp học có 38 học sinh, trong đó có 18 học sinh thích chơi bóng đá, 16 học sinh thích chơi cầu lông, 10 học sinh không thích chơi cả bóng đá và cầu lông. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp đó. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để học sinh đó thích chơi cầu lông bằng $\frac{8}{19}$.
- b) Xác suất để học sinh đó thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng đá và cầu lông bằng $\frac{5}{19}$.
- c) Xác suất để học sinh đó thích chơi cầu lông và không thích chơi bóng đá bằng $\frac{6}{19}$.
- d) Thích chơi đúng một trong hai môn bằng $\frac{11}{19}$.

❖ **Câu 38.** Một đội tình nguyện gồm 6 học sinh khối 10, 5 học sinh khối 11 và 4 học sinh khối 12. Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh trong đội. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Số phần tử không gian mẫu là 15.
- b) Số phần tử của biến cố “cả 5 học sinh được chọn học cùng một khối” là $C_6^5 + C_5^5$.

- c) Xác suất của biến cố “cả 5 học sinh được chọn học cùng một khối” là $\frac{5}{3003}$.
- d) Xác suất của biến cố “chọn được 5 học sinh đủ ba khối” là $\frac{310}{429}$.

❖ **Câu 39.** Gieo con xúc xắc cân đối và đồng chất 1 lần. Khẳng định nào sau đây đúng, khẳng định nào sau đây sai?

- a) Số chấm xuất hiện là số lẻ thì xác suất của nó bằng $\frac{1}{2}$.
- b) Số chấm xuất hiện là số chia hết cho 3 thì xác suất của nó bằng $\frac{1}{3}$.
- c) Số chấm xuất hiện là số không lớn hơn 4 thì xác suất của nó bằng $\frac{5}{6}$.
- d) Số chấm xuất hiện là số nguyên tố thì xác suất của nó bằng $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 40.** Một nhà xuất bản phát hành hai cuốn sách A và B . Thống kê cho thấy có 60% người mua sách A ; 70% người mua sách B ; 50% người mua cả sách A và sách B . Chọn ngẫu nhiên một người mua sách. Gọi A là biến cố “người đó mua quyển sách A ”, B là biến cố “người đó mua quyển sách B ”. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) $P(A) = 0,6$ và $P(B) = 0,7$.
- b) Biến cố “người mua đó mua cả sách A và sách B ” là biến cố $A \cap B$.
- c) Xác suất để người mua đó mua ít nhất một trong hai sách A hoặc B là 0,9.
- d) Xác suất để người mua đó không mua cả sách A và sách B là 0,2.

❖ **Câu 41.** Từ tập hợp $X = \{0; 2; 3; 4; 5; 8\}$. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Số các số tự nhiên có bốn chữ số là 4^6 .
- b) Số các số tự nhiên có bốn chữ số đôi một khác nhau là A_6^4 .
- c) Số các số tự nhiên chẵn có bốn chữ số đôi một khác nhau là 108.
- d) Số các số tự nhiên chẵn có bốn chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 2024 là 50.

❖ **Câu 42.** Một hộp có 18 viên bi, trong đó có 7 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 7, 6 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 6 và 5 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 5. Lấy ngẫu nhiên trong hộp ra 3 viên bi. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để lấy được 3 viên bi màu đỏ là $\frac{35}{816}$.
- b) Xác suất để lấy được 3 viên bi cùng màu là $\frac{67}{816}$.
- c) Xác suất để lấy được 3 viên bi đủ cả ba màu là $\frac{35}{136}$.
- d) Xác suất để lấy được 3 viên bi khác màu và khác số là $\frac{121}{816}$.

❖ **Câu 43.** Hai bạn An và Hà của lớp 11A tham gia giải bóng bàn đơn nữ do nhà trường tổ chức. Hai bạn đó nằm ở hai bảng đấu loại khác nhau, mỗi bảng đấu loại chỉ chọn một người vào vòng chung kết. Xác suất lọt qua vòng loại để vào vòng chung kết của An và Hà lần lượt là 0,6 và 0,7. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Biến cố “Bạn An lọt vào vòng chung kết” và “Bạn Hà lọt vào vòng chung kết” là hai biến cố độc lập.
- b) Xác suất cả hai bạn lọt vào vòng chung kết là 0,42.
- c) Xác suất có ít nhất một bạn lọt vào vòng chung kết là 0,8.
- d) Xác suất chỉ có bạn Hà lọt vào vòng chung kết là 0,7.

❖ **Câu 44.** Một chiếc máy có hai động cơ I và II hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để động cơ I và động cơ II chạy tốt lần lượt là 0,8 và 0,9. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Xác suất để cả hai động cơ đều chạy tốt là 0,72.
- b) Xác suất để cả hai động cơ đều không chạy tốt là 0,63.
- c) Xác suất để có ít nhất một động cơ chạy tốt là 0,94.
- d) Xác suất để một trong hai động cơ chạy tốt là 0,26.

❖ **Câu 45.** Gieo hai con súc sắc I và II cân đối, đồng chất một cách độc lập. Xét các biến cố A, B, C sau đây

- A: “Có ít nhất một con súc sắc xuất hiện mặt 6 chấm”;
- B: “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con là 7”;
- C: “Tổng số chấm trên mặt xuất hiện của hai con lớn hơn hoặc bằng 8”.

Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào đúng, khẳng định nào sai?

- a) Số phần tử của không gian mẫu bằng 12.
- b) $P(B) = \frac{1}{18}$.
- c) Hai biến cố A và B không độc lập.
- d) $P(C) = \frac{19}{36}$.

 **3** Tự luận

❖ **Bài 1.** Bạn Dũng và bạn Hương tham gia đội văn nghệ của nhà trường. Nhà trường chọn từ đội văn nghệ đó một bạn nam và một bạn nữ để lập tiết mục song ca. Xác suất được nhà trường chọn vào tiết mục song ca của Dũng và Hương lần lượt là 0,7 và 0,9. Tính xác suất của các biến cố sau:

- a) A: "Cả hai bạn được chọn vào tiết mục song ca";
- b) B: "Có ít nhất một bạn được chọn vào tiết mục song ca";
- c) C: "Chỉ có bạn Hương được chọn vào tiết mục song ca".

❖ **Bài 2.** Hai bạn Mai và Thi cùng tham gia một kì kiểm tra ngoại ngữ một cách độc lập nhau. Xác suất để bạn Mai và bạn Thi đạt từ điểm 7 trở lên lần lượt là 0,8 và 0,9. Tính xác suất của biến cố C: "Cả hai bạn đều đạt từ điểm 7 trở lên".

❖ **Bài 3.** Một người cho ngẫu nhiên 3 lá thư vào 3 chiếc phong bì đã ghi địa chỉ sao cho mỗi phong bì chỉ chứa một lá thư. Tính xác suất để có ít nhất một lá thư được cho vào đúng phong bì đã ghi địa chỉ theo lá thư đó.

❖ **Bài 4.** Một hộp chứa 9 quả cầu có cùng kích thước và khối lượng, trong đó có 4 quả cầu màu xanh đánh số từ 1 đến 4, có 3 quả cầu màu vàng đánh số từ 1 đến 3, có 2 quả cầu màu đỏ đánh số 1 và 2. Lấy ngẫu nhiên 2 quả cầu từ hộp. Tính xác suất để 2 quả cầu được lấy vừa khác màu vừa khác số.

❖ **Bài 5.** Bạn Anh vẽ trên đất một bảng gồm 9 ô vuông như Hình bên. Sau đó, bạn An cầm 4 viên bi giống nhau đặt ngẫu nhiên vào 4 ô vuông trong bảng đó. Tính xác suất để bất kì hàng nào và cột nào của bảng cũng có viên bi.

| | | |
|--|--|--|
| | | |
| | | |
| | | |

Bài 6. Hai vận động viên bắn súng A và B mỗi người bắn một viên vào tấm bia một cách độc lập. Xét các biến cố sau M : “Vận động viên A bắn trúng vòng 10”; N : “Vận động viên B bắn trúng vòng 10”.

Hãy biểu diễn các biến cố sau theo biến cố M và N .

- ◇ C : “Có ít nhất một vận động viên bắn trúng vòng 10”;
- ◇ D : “Cả hai vận động viên bắn trúng vòng 10”;
- ◇ E : “Cả hai vận động viên đều không bắn trúng vòng 10”;
- ◇ F : “Vận động viên A bắn trúng và vận động viên B không bắn trúng vòng 10”;
- ◇ G : “Chỉ có duy nhất một vận động viên bắn trúng vòng 10”.

Bài 7. Một đoàn khách du lịch gồm 31 người, trong đó có 7 người đến từ Hà Nội, 5 người đến từ Hải Phòng. Chọn ngẫu nhiên một người trong đoàn. Tính xác suất để người đó đến từ Hà Nội hoặc đến từ Hải Phòng.

Bài 8. Gieo một con xúc xắc cân đối, đồng chất liên tiếp hai lần. Xét các biến cố sau

- ◇ A : “Ở lần gieo thứ nhất, số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 1”;
- ◇ B : “Ở lần gieo thứ hai số chấm xuất hiện trên con xúc xắc là 2”;
- ◇ C : “Tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo là 8”;
- ◇ D : “Tổng số chấm xuất hiện trên con xúc xắc ở hai lần gieo là 7”.

Chứng tỏ các cặp biến cố A và C ; B và C ; C và D không độc lập.

Bài 9. Hai chuyến bay của hai hãng hàng không X và Y , hoạt động độc lập với nhau. Xác suất để chuyến bay của hãng X và hãng Y khởi hành đúng giờ tương ứng là 0,92 và 0,98. Dùng sơ đồ hình cây, tính xác suất để

- ◇ Cả hai chuyến khởi hành đúng giờ;
- ◇ Chỉ có duy nhất một trong hai chuyến bay khởi hành đúng giờ;
- ◇ Có ít nhất một trong hai chuyến bay khởi hành đúng giờ

Bài 10. Cho A và B là hai biến cố thoả mãn $P(A) = 0,5$; $P(B) = 0,7$ và $P(A \cup B) = 0,8$.

- a) Tính xác suất của các biến cố AB , $\bar{A}B$ và $A\bar{B}$.
- b) Hai biến cố A và B có độc lập hay không?

Bài 11. Vệ tinh A lần lượt truyền một tin đến vệ tinh B cho đến khi vệ tinh B phản hồi là đã nhận được. Biết khả năng vệ tinh B phản hồi đã nhận được tin ở mỗi lần A gửi là độc lập với nhau và xác suất phản hồi mỗi lần đều là 0,4. Sử dụng sơ đồ hình cây, tính xác suất vệ tinh A phải gửi tin không quá 3 lần.

Bài 12. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố: “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc chia hết cho 6”.

Bài 13. Một hộp có 5 quả bóng xanh, 6 quả bóng đỏ và 4 quả bóng vàng có kích thước và khối lượng như nhau. Chọn ra ngẫu nhiên từ hộp 4 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố:
 A : “Cả 4 quả bóng lấy ra có cùng màu”;
 B : “Trong 4 quả lấy ra có đủ 3 màu”.

Bài 14. Cường, Trọng và 6 bạn nữ xếp ngẫu nhiên thành một hàng ngang để chụp ảnh. Tính xác suất của biến cố: “Có ít nhất một trong hai bạn Cường và Trọng đứng ở đầu hàng”

Bài 15. Chọn ngẫu nhiên 3 trong 24 đỉnh của đa giác đều 24 cạnh. Tính xác suất của biến cố: "3 đỉnh được chọn là 3 đỉnh của một tam giác cân hoặc một tam giác vuông".

Bài 16. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp các số tự nhiên có 3 chữ số. Tính xác suất của các biến cố:

A: "Số được chọn chia hết cho 2 hoặc 7."

B: "Số được chọn có tổng các chữ số là số chẵn".

Bài 17. Cho hai giống cá kiếm mắt đen thuần chủng và mắt đỏ thuần chủng giao phối với nhau được F1 toàn cá kiếm mắt đen. Lại cho cá F1 giao phối với nhau lại được cá con mới. Chọn ra ngẫu nhiên 2 con trong đàn cá con mới. Ước lượng xác suất của biến cố: "Có ít nhất 1 con cá mắt đen trong 2 con cá đó."

Bài 18. Trong kì thi THPT Quốc Gia, An làm đề thi trắc nghiệm môn Toán. Đề thi gồm 50 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời, trong đó chỉ có một phương án đúng; trả lời đúng mỗi câu được 0,2 điểm. An trả lời hết các câu hỏi và chắc chắn đúng 45 câu, 5 câu còn lại An chọn ngẫu nhiên. Tính xác suất để điểm thi môn Toán của An không dưới 9,5 điểm.

Bài 19. Bạn Tài tham gia một trò chơi rút thăm trúng thưởng. Hộp đựng thăm có 50 lá thăm cứng với kích thước và khối lượng như nhau, trong đó có 20 lá trúng thưởng, 30 lá không trúng thưởng. Mỗi người được rút 2 lần (sau mỗi lần rút thì ghi kết quả và bỏ lại thăm vào hộp), mỗi lần 2 lá thăm. Nếu rút được 2 lá trúng thưởng thì được 1 tai nghe, nếu rút được 3 lá trúng thưởng thì được 1 tai nghe và 1 bàn phím, nếu rút được 4 lá trúng thưởng thì được 1 máy tính bảng. Tính xác suất để bạn Tài được trúng thưởng có tai nghe (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Trong chương này, chúng ta tìm hiểu khái niệm và các quy tắc tính đạo hàm, công thức tính đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản, cũng như ý nghĩa hình học và ý nghĩa cơ học của đạo hàm

§1 ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Đạo hàm của hàm số tại một điểm



Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



⚠ Lưu ý. Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- ◇ Tính $f(x) - f(x_0)$.
- ◇ Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.
- ◇ Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.



⚠ Lưu ý. Đặt $\Delta x = x - x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 có thể tính theo công thức:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Δx được gọi là số gia của biến số tại điểm x_0 .

2) Đạo hàm của hàm số trên một khoảng



Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y' = f'(x)$.



⚠ **LƯU Ý.** Nếu phương trình chuyển động của một vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .

3) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số



Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.



🔗 **NHẬN XÉT.** Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến



Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa

Ta sử dụng một trong hai cách tính sau:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{hoặc} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

🔗 Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

🔗 *Lời giải.* Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2 (\sqrt{4x^2 + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1} = 2.\end{aligned}$$

Vậy $f'(0) = 2$.

❖ Ví dụ 2

Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ tại điểm $x_0 = 3$;

b) $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$;

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0 = 5$.

Lời giải.

a) Ta có: $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{3}}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2(3-x)}{3x}}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{3x} \\ &= -\frac{1}{9}\end{aligned}$$

b) Ta có: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(\sqrt{x} + 1)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

c) Ta có: $f'(2) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$.

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2-1}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x-1} \\ &= -1\end{aligned}$$

d) Ta có: $f'(5) = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5}$.

$$\begin{aligned}&= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-1}}{x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x - 5}{(\sqrt{x-1} + 2)(x - 5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $f(x) = \frac{2}{x}$; b) $f(x) = \sqrt{x}$; c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; d) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

.....

BÀI TẬP

Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- Ⓐ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Ⓑ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.
 Ⓒ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$. Ⓓ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$.

❖ **Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- Ⓐ $f'(2) = 3$. Ⓑ $f'(x) = 2$. Ⓒ $f'(x) = 3$. Ⓓ $f'(3) = 2$.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- Ⓐ $f'(2) = 3$. Ⓑ $f'(x) = 2$. Ⓒ $f'(x) = 3$. Ⓓ $f'(3) = 2$.

❖ **Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

- Ⓐ 12. Ⓑ 2. Ⓒ $\frac{1}{3}$. Ⓓ $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- Ⓐ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Ⓑ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.
 Ⓒ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$. Ⓓ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$.

❖ **Câu 6.** Phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng?

- Ⓐ Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trái tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
 Ⓑ Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm phải tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
 Ⓒ Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm $-x_0$.
 Ⓓ Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

❖ **Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

- (A) 12. (B) 2. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 5$. Kết quả đúng là

- (A) $f'(2) = 3$. (B) $f'(x) = 2$. (C) $f'(x) = 5$. (D) $f'(4) = 5$.

❖ **Câu 9.** Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$ tại điểm $x = 0$.

- (A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 2021!$. (C) $f'(0) = 2021$. (D) $f'(0) = -2021!$.

❖ **Câu 10.** Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1+|x|}$. Tính $f'(0)$.

- (A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 1$. (C) $f'(0) = \frac{1}{3}$. (D) $f'(0) = 3$.

❖ **Câu 11.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1}, & x \neq 1 \\ -\frac{5}{4} & x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

- (A) Không tồn tại. (B) 0. (C) $-\frac{7}{50}$. (D) $-\frac{9}{64}$.

❖ **Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x - 2}$ bằng

- (A) 0. (B) $f'(2)$. (C) $2f'(2) - f(2)$. (D) $f(2) - 2f'(2)$.

❖ **Câu 13.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của a, b thì hàm số có

đạo hàm tại $x = 1$?

- (A) $a = 1; b = -\frac{1}{2}$. (B) $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}$. (C) $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$. (D) $a = 1; b = \frac{1}{2}$.

❖ **Câu 14.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

- (A) 12. (B) 2. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 15.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$. $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là

- (A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 1$. (C) $f'(0) = -2$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 16.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại điểm $x = 2$

- (A) 9. (B) 4. (C) 7. (D) 6.

❖ **Câu 17.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- (A) $f'(2) = 3$. (B) $f'(x) = 2$. (C) $f'(x) = 3$. (D) $f'(3) = 2$.

❖ **Câu 18.** Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2+1}-1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

(A) 2. (B) 0. (C) $\frac{1}{2}$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 19.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ -\frac{5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Khi đó $f'(1)$

(A) Không tồn tại. (B) 0. (C) $\frac{3}{8}$. (D) $-\frac{9}{64}$.

❖ **Câu 20.** Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10, & x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$. Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

(A) 20. (B) 17. (C) 18. (D) 25.

❖ **Câu 21.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề sai là

(A) $f'(1) = 2$. (B) f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
 (C) $f'(0) = 2$. (D) $f'(2) = 4$.

❖ **Câu 22.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 1$ thì $2a + b$ bằng

(A) 2. (B) 5. (C) -2. (D) -5.

❖ **Câu 23.** Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1+|x|}$. Tính $f'(0)$.

(A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 1$. (C) $f'(0) = \frac{1}{3}$. (D) $f'(0) = 3$.

❖ **Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

(A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{16}$. (C) $\frac{1}{32}$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 25.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề sai là

(A) $f'(1) = 2$. (B) f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
 (C) $f'(0) = 2$. (D) $f'(2) = 4$.

❖ **Câu 26.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại $x = 3$

(A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{3}{16}$. (C) $\frac{2}{9}$. (D) $\frac{4}{5}$.

❖ **Câu 27.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x-2}$.

- (A) 0. (B) $f'(2)$. (C) $2f'(2) - f(2)$. (D) $f(2) - 2f'(2)$.

❖ **Câu 28.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ bằng

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{16}$. (C) $\frac{1}{32}$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 29.**] Tính đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1} - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 1$.

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{4}$.

❖ **Câu 30.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là

- (A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 1$. (C) $f'(0) = -2$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 31.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- (A) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.
 (C) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$. (D) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$.

❖ **Câu 32.** Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + |x+1|}{x}$ tại $x = 1$.

- (A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) Đáp án khác.

III. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Đạo hàm của hàm số tại một điểm



Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và điểm $x_0 \in (a; b)$. Nếu tồn tại giới hạn hữu hạn

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

thì giới hạn đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 , kí hiệu bởi $f'(x_0)$ (hoặc $y'(x_0)$), tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$



⚠ **Lưu ý.** Để tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm $x_0 \in (a; b)$, ta thực hiện theo các bước sau:

- ◇ Tính $f(x) - f(x_0)$.
- ◇ Lập và rút gọn tỉ số $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ với $x \in (a; b), x \neq x_0$.
- ◇ Tìm giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

🔔 **LƯU Ý.** Đặt $\Delta x = x - x_0$, khi đó đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 có thể tính theo công thức:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Δx được gọi là số gia của biến số tại điểm x_0 .

2) Đạo hàm của hàm số trên một khoảng

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm $f'(x)$ tại mọi điểm x thuộc khoảng đó, kí hiệu là $y' = f'(x)$.

🔔 **LƯU Ý.** Nếu phương trình chuyển động của một vật là $s = f(t)$ thì $v(t) = f'(t)$ là vận tốc tức thời của vật tại thời điểm t .

3) Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số

Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đường thẳng đi qua P với hệ số góc $k = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ nếu giới hạn này tồn tại và hữu hạn, nghĩa là $k = f'(x_0)$. Điểm P gọi là tiếp điểm.

🔍 **NHẬN XÉT.** Hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại điểm $P(x_0; f(x_0))$ là đạo hàm $f'(x_0)$.

Phương trình tiếp tuyến

Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $P(x_0; y_0)$ là

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0),$$

trong đó $y_0 = f(x_0)$.

IV. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1 Tính đạo hàm của hàm số bằng định nghĩa

Ta sử dụng một trong hai cách tính sau:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad \text{hoặc} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Ví dụ 1

Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

Lời giải. Tập xác định $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

Ta có

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^2}{x^2 (\sqrt{4x^2 + 1} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4}{\sqrt{4x^2 + 1} + 1} = 2. \end{aligned}$$

Vậy $f'(0) = 2$.

Ví dụ 2

Tính (bằng định nghĩa) đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x) = \frac{2}{x}$ tại điểm $x_0 = 3$;

b) $f(x) = \sqrt{x}$ tại điểm $x_0 = 1$;

c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ tại điểm $x_0 = 2$;

d) $f(x) = \sqrt{x-1}$ tại điểm $x_0 = 5$.

Lời giải.

a) Ta có: $f'(3) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\frac{2}{x} - \frac{2}{3}}{x - 3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(3-x)}{3x(x-3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-2}{3x} \\ &= -\frac{1}{9} \end{aligned}$$

b) Ta có: $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$.

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(\sqrt{x} + 1)(x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) Ta có: } f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{(x-1)(x-2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-1}{x-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Ta có: } f'(5) &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x - 5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-1}}{x-5} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{(\sqrt{x-1} + 2)(x-5)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x-1} + 2} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Sử dụng định nghĩa, tìm đạo hàm của các hàm số sau:

- a) $f(x) = \frac{2}{x}$; b) $f(x) = \sqrt{x}$; c) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; d) $f(x) = \sqrt{x-1}$.

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP

Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- Ⓐ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Ⓑ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.
- Ⓒ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$. Ⓓ $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$.

❖ **Câu 2.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- Ⓐ $f'(2) = 3$. Ⓑ $f'(x) = 2$. Ⓒ $f'(x) = 3$. Ⓓ $f'(3) = 2$.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- Ⓐ $f'(2) = 3$. Ⓑ $f'(x) = 2$. Ⓒ $f'(x) = 3$. Ⓓ $f'(3) = 2$.

❖ **Câu 4.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

- (A) 12. (B) 2. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 5.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- (A) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.
 (C) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$. (D) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$.

❖ **Câu 6.** Phát biểu nào trong các phát biểu sau là đúng?

- (A) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trái tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
 (B) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm phải tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.
 (C) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm $-x_0$.
 (D) Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

❖ **Câu 7.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

- (A) 12. (B) 2. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 8.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = 5$. Kết quả đúng là

- (A) $f'(2) = 3$. (B) $f'(x) = 2$. (C) $f'(x) = 5$. (D) $f'(4) = 5$.

❖ **Câu 9.** Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$ tại điểm $x = 0$.

- (A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 2021!$. (C) $f'(0) = 2021$. (D) $f'(0) = -2021!$.

❖ **Câu 10.** Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1+|x|}$. Tính $f'(0)$.

- (A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 1$. (C) $f'(0) = \frac{1}{3}$. (D) $f'(0) = 3$.

❖ **Câu 11.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1}-2x}{x-1}, & x \neq 1 \\ -\frac{5}{4} & x = 1 \end{cases}$. Tính $f'(1)$.

- (A) Không tồn tại. (B) 0. (C) $-\frac{7}{50}$. (D) $-\frac{9}{64}$.

❖ **Câu 12.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Khi đó $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x-2}$ bằng

- (A) 0. (B) $f'(2)$. (C) $2f'(2) - f(2)$. (D) $f(2) - 2f'(2)$.

❖ **Câu 13.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \leq 1 \\ ax + b, & x > 1 \end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của a, b thì hàm số có

đạo hàm tại $x = 1$?

- (A) $a = 1; b = -\frac{1}{2}$. (B) $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}$. (C) $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$. (D) $a = 1; b = \frac{1}{2}$.

❖ **Câu 14.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm thỏa mãn $f'(6) = 2$. Giá trị của biểu thức

$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{f(x) - f(6)}{x - 6}$ bằng

- (A) 12. (B) 2. (C) $\frac{1}{3}$. (D) $\frac{1}{2}$.

❖ **Câu 15.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x \geq 0 \\ -x^2, & x < 0 \end{cases}$. $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là

- (A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 1$. (C) $f'(0) = -2$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 16.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2x^2 + x + 1$ tại điểm $x = 2$

- (A) 9. (B) 4. (C) 7. (D) 6.

❖ **Câu 17.** Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên \mathbb{R} thỏa mãn $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 2$. Kết quả đúng là

- (A) $f'(2) = 3$. (B) $f'(x) = 2$. (C) $f'(x) = 3$. (D) $f'(3) = 2$.

❖ **Câu 18.** Cho hàm số $f(x)$ xác định bởi $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4x^2 + 1} - 1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Giá trị $f'(0)$ bằng

- (A) 2. (B) 0. (C) $\frac{1}{2}$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 19.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3x+1} - 2x}{x-1} & \text{khi } x \neq 1 \\ \frac{-5}{4} & \text{khi } x = 1 \end{cases}$. Khi đó $f'(1)$

- (A) Không tồn tại. (B) 0. (C) $\frac{3}{8}$. (D) $-\frac{9}{64}$.

❖ **Câu 20.** Cho hàm số $y = \begin{cases} x^2 + ax + b, & x \geq 2 \\ x^3 - x^2 - 8x + 10, & x < 2 \end{cases}$. Biết hàm số có đạo hàm tại điểm $x = 2$.

Giá trị của $a^2 + b^2$ bằng

- (A) 20. (B) 17. (C) 18. (D) 25.

❖ **Câu 21.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 1 \\ 2x, & x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề **sai** là

- (A) $f'(1) = 2$. (B) f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
(C) $f'(0) = 2$. (D) $f'(2) = 4$.

❖ **Câu 22.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx, & x \geq 1 \\ 2x - 1, & x < 1 \end{cases}$. Để hàm số đã cho có đạo hàm tại $x = 1$ thì

$2a + b$ bằng

- (A) 2. (B) 5. (C) -2. (D) -5.

❖ **Câu 23.** Cho hàm số $f(x) = \frac{3x}{1 + |x|}$. Tính $f'(0)$.

- (A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 1$. (C) $f'(0) = \frac{1}{3}$. (D) $f'(0) = 3$.

❖ **Câu 24.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{4}, & x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{16}$. (C) $\frac{1}{32}$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 25.** Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 1 \\ 2x & \text{khi } x < 1 \end{cases}$. Mệnh đề **sai** là

- (A) $f'(1) = 2$. (B) f không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.
(C) $f'(0) = 2$. (D) $f'(2) = 4$.

❖ **Câu 26.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ tại $x = 3$

- (A) $\frac{1}{6}$. (B) $\frac{3}{16}$. (C) $\frac{2}{9}$. (D) $\frac{4}{5}$.

❖ **Câu 27.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 2$. Tìm $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2f(x) - xf(2)}{x-2}$.

- (A) 0. (B) $f'(2)$. (C) $2f'(2) - f(2)$. (D) $f(2) - 2f'(2)$.

❖ **Câu 28.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3 - \sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ bằng

- (A) $\frac{1}{4}$. (B) $\frac{1}{16}$. (C) $\frac{1}{32}$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 29.**] Tính đạo hàm của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1} - 1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$$

tại điểm $x_0 = 1$.

- (A) $\frac{1}{3}$. (B) $\frac{1}{5}$. (C) $\frac{1}{2}$. (D) $\frac{1}{4}$.

❖ **Câu 30.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{khi } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm tại điểm $x_0 = 0$ là

- (A) $f'(0) = 0$. (B) $f'(0) = 1$. (C) $f'(0) = -2$. (D) Không tồn tại.

❖ **Câu 31.** Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 . Tìm khẳng định đúng trong các khẳng định sau

- (A) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. (B) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x - x_0}$.
(C) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x + x_0}$. (D) $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) + f(x_0)}{x + x_0}$.

❖ **Câu 32.** Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + |x+1|}{x}$ tại $x = 1$.

- (A) 2. (B) 0. (C) 3. (D) Đáp án khác.

§2 CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM. ĐẠO HÀM CẤP HAI

I. LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1) Đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản

Đạo hàm của hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)

Hàm số $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Đạo hàm của hàm số lượng giác

- ◇ Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(\sin x)' = \cos x$.
- ◇ Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(\cos x)' = -\sin x$.
- ◇ Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- ◇ Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

Đạo hàm của hàm số mũ

- ◇ Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(e^x)' = e^x$.
- ◇ Hàm số $y = a^x$ ($0 < a \neq 1$) có đạo hàm trên \mathbb{R} và $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$.

Đạo hàm của hàm số logarit

- ◇ Hàm số $\ln x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.
- ◇ Hàm số $\log_a x$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$.

🔔 LƯU Ý. Với $x < 0$, ta có:

$$\ln |x| = \ln(-x) \text{ và } [\ln(-x)]' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x}.$$

Từ đó ta có:

$$(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \forall x \neq 0$$

2) Đạo hàm của tổng hiệu tích thương và đạo hàm của hàm hợp

Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương



Giả sử các hàm số $u = u(x)$, $v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó

$$\checkmark (u + v)' = u' + v';$$

$$\checkmark (u - v)' = u' - v';$$

$$\checkmark (u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v';$$

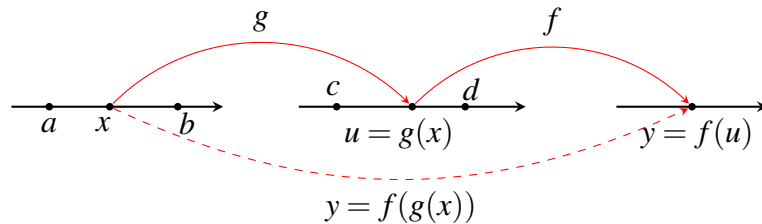
$$\checkmark \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \quad (v = v(x) \neq 0).$$



LƯU Ý.

- ◇ Quy tắc tính đạo hàm của tổng, hiệu có thể áp dụng cho tổng, hiệu của hai hay nhiều hàm số.
- ◇ Với k là một hằng số, ta có $(ku)' = k \cdot u'$.
- ◇ Đạo hàm của hàm số nghịch đảo: $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ ($v = v(x) \neq 0$).

Đạo hàm của hàm số hợp Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa trong khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên khoảng $(c; d)$. Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

3) Bảng đạo hàm

| Đạo hàm của hàm số sơ cấp cơ bản thường gặp | Đạo hàm của hàm hợp (ở đây $u = u(x)$) |
|--|---|
| $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$ | $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ |
| $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ | $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ |
| $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ | $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ |
| $(\sin x)' = \cos x$ | $(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ |

| | |
|-----------------------------------|------------------------------------|
| $(\cos x)' = -\sin x$ | $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ |
| $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ | $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ |
| $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ | $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$ |
| $(e^x)' = e^x$ | $(e^u)' = u' \cdot e^u$ |
| $(a^x)' = a^x \ln a$ | $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a$ |
| $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ | $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ |
| $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ | $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ |

4) Khái niệm đạo hàm cấp 2



Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x . Kí hiệu là $y''(x)$.

5) Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai



Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có

$$a(t) = f''(t).$$

II. PHÂN DẠNG BÀI TẬP

Dạng

1

Tính đạo hàm

Sử dụng các quy tắc tính đạo hàm để tính đạo hàm của một số hàm số cơ bản.

Ví dụ 1

Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \cos x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải. Ta có $f'(x) = -\sin x$.

Đạo hàm của hàm số trên tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{6}$ là $f' \left(\frac{\pi}{6} \right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

Ví dụ 2

Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sqrt{x^2 + 1}$;

b) $\frac{1}{2x-3}$.

c) $y = \sin\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$.

d) $y = \cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Lời giải.

a) Ta có $y' = \frac{(x^2 + 1)'}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

b) $y' = \left(\frac{1}{2x-3}\right)' = \frac{-(2x-3)'}{(2x-3)^2} = \frac{-2}{(2x-3)^2}$.

c) Ta có $y' = \left(2x + \frac{\pi}{8}\right)' \cdot \cos\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 2 \cos\left(2x + \frac{\pi}{8}\right)$.

d) Ta có $y' = -\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)' \cdot \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -4 \sin\left(4x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Ví dụ 3

Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = 2x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 2\sqrt{x} - 5$.

③ $y = \frac{2x+1}{1-3x}$.

② $y = x^2 \cdot 3^x$;

④ $y = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$.

Lời giải.

① Ta có $y' = 4x^3 - x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

② $y' = (x^2 \cdot 3^x)' = (x^2)' \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x)' = 2x \cdot 3^x + x^2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = x \cdot 3^x (2 + x \ln 3)$.

③ Ta có $y' = \frac{(2x-1)'(1-3x) - (2x-1)(1-3x)'}{(1-3x)^2} = \frac{2(1-3x) - (2x-1)(-3)}{(1-3x)^2} = \frac{5}{(1-3x)^2}$.

④ $y' = \left(\frac{\sqrt{x}}{\cos x}\right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \cos x - \sqrt{x} \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^2 x}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 1



Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ tại $x = \frac{3\pi}{4}$.



Bài 2



Tìm đạo hàm của các hàm số

a) $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$;

b) $y = \frac{2}{x}$ tại $x = \frac{1}{5}$.

.....

.....

.....

Bài 3



Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2^x$ tại điểm $x_0 = 1$.

.....

.....

Bài 4



Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \ln x$ tại điểm $x_0 = 1$.

.....

.....

Bài 5



Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (3x^2 + x)^3$;

b) $y = \sin 2x$;

c) $y = \ln(x^2 + 1)$;

d) $y = 2^{x^2 - x}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Bài 6



Tính đạo hàm của hàm số sau

a) $y = \sqrt{3x - 5}$;

b) $\frac{1}{3 - x}$.

c) $y = \tan^2 3x$.

d) $y = \cot^3 4x$.

.....

.....

.....


.....

.....

Bài 7. Tính đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $f(x) = x^3 + x;$

b) $g(x) = x^4 - x^2.$




.....

.....

Bài 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot \log_2 x;$

b) $y = x^3 \cdot e^x.$



.....

.....


.....

Bài 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x-1};$

b) $y = x \sin x;$

c) $y = \frac{3x+2}{2x-1}.$



.....

.....

.....

.....


Bài 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

① $y = \frac{1}{2}x^5 + \frac{2}{3}x^4 - x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 5.$

③ $y = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x.$

② $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,5x^4.$

④ $y = x^5 - 4x^3 + 2x - 3\sqrt{x}.$



.....

.....

.....

Ví dụ 4

Cho đường cong $(C) : y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 1$.

- ① Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.
- ② Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

Lời giải.

- ① Ta có $f'(x) = x - 4$. Với $x_0 = -2 \Rightarrow y_0 = 11$.
Do đó, tiếp tuyến cần tìm có phương trình: $y = f'(-2)(x + 2) + 11 = -6x - 1$.
- ② Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm. Ta có $f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow x_0 - 4 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 5 \Rightarrow y_0 = -\frac{13}{2}$.
Vậy, tiếp tuyến có phương trình là $y = 1(x - 5) - \frac{13}{2} = x - \frac{23}{2}$.

Ví dụ 5

Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : 3x + y = 2$.

Lời giải. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm.

Vì tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : y = -3x + 2$ nên ta có

$$f'(x_0) = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 - 6x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1 \Rightarrow y_0 = 0.$$

Do vậy, tiếp tuyến có phương trình: $y = -3(x - 1) + 0 = -3x + 3$.

Ví dụ 6

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C) : y = \frac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta : 3x + y - 2 = 0$.

Lời giải. Tập xác định: $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$. Đạo hàm $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$. Viết lại phương trình đường thẳng $\Delta : y = -3x + 2$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến cần tìm. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng Δ nên

$$f'(x_0) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0+2)^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -5. \end{cases}$$

Từ đó tìm được hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán là: $y = \frac{x-1}{3}$ và $y = \frac{x+11}{3}$.

Ví dụ 7

Cho hàm số $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$ (1). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số (1), biết rằng tiếp tuyến đó đi qua điểm $M(-1; -9)$.

Lời giải. Ta có $y' = 12x^2 - 12x$. Gọi $(x_0; y_0)$ là tiếp điểm của tiếp tuyến đó.

Khi đó, phương trình tiếp tuyến tương ứng có dạng: $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$.

Mặt khác, tiếp tuyến đi qua điểm $M(-1; -9)$ nên ta có phương trình

$$-9 = (12x_0^2 - 12x_0)(-1 - x_0) + 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1 \Leftrightarrow (x_0 + 1)^2(4x_0 - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

Với $x = -1$ ta tìm được phương trình tiếp tuyến: $y = 24x + 15$.

Với $x = \frac{5}{4}$ ta có phương trình tiếp tuyến: $y = \frac{15}{4}x + \frac{21}{4}$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 12



Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(2; 5)$

.....

.....

.....

Bài 13



Viết phương trình tiếp tuyến của parabol $(P) : y = f(x) = -x^2 + 4x - 3$ tại các giao điểm của (P) với trục hoành.

.....

.....

.....

.....

Bài 14



Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C) : y = f(x) = x(x^2 + x - 1) + 1$ tại điểm có tung độ bằng -1 .

.....

.....

.....

.....

Bài 15



Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x-1}{x-2}$, biết tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1 .

.....

.....

.....

.....

Bài 16



Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 + 5$, biết tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $\Delta : y = -\frac{1}{9}x$.



.....

.....

.....

Bài 17



Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, biết tiếp tuyến đó vuông góc với đường thẳng $\Delta : y = -\frac{1}{9}x$.



.....

.....

.....

Bài 18



Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{3} - x^2$, biết tiếp tuyến đó đi qua điểm $A(3;0)$.



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Dạng

3

bài toán chuyển động

Nếu $s = s(t)$ là quãng đường vật chuyển động sau t giây thì:

- ✓ Vận tốc của vật sau t giây là

$$v(t) = s'(t).$$

- ✓ Gia tốc của vật sau t giây là

$$a(t) = s''(t) = v'(t).$$

Ví dụ 8

Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s là quãng đường tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc và gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

Lời giải. Ta có $v = s'(t) = (t^2 - 4t + 3)' = 2t - 4$, $a = s''(t) = (2t - 4)' = 2$.

Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $v(4) = 2 \cdot 4 - 4 = 4$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $s''(4) = 2 \text{ m/s}^2$.

BÀI TẬP RÈN LUYỆN

Bài 19



Một hòn sỏi rơi tự do có quãng đường rơi tính theo thời gian t là $s(t) = 4,9t^2$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc rơi của hòn sỏi lúc $t = 3$.

Lời giải......

Bài 20



Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{2}{3}t^3 + 4t^2 - 1$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật di chuyển được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 5 giây, kể từ khi bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải......

Bài 21



Một vật được phóng lên theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu $v_0 = 20 \text{ m/s}$. Trong vật lí, ta biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao h so với mặt đất (tính bằng mét) của vật tại thời điểm t (giây) sau khi ném được cho bởi công thức sau: $h(t) = v_0t - \frac{1}{2}gt^2$, trong đó v_0 là vận tốc ban đầu của vật, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc rơi tự do. Hãy tính vận tốc của vật khi nó đạt độ cao cực đại và khi nó chạm đất.

Lời giải......

Bài 23



Giải phương trình $y' = 0$ với $y = \tan x + \cot x$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

- (A) $y' = \frac{\ln 10}{x}$. (B) $y' = \frac{1}{x \ln 10}$. (C) $y' = \frac{1}{10 \ln x}$. (D) $y' = \frac{1}{x}$.

❖ **Câu 2.** Cho các hàm số $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$ có đạo hàm trên tập xác định của nó. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- (A) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. (B) $(\sin x)' = \cos x$. (C) $(\cos x)' = -\sin x$. (D) $(\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$.

❖ **Câu 3.** Mệnh đề nào sau đây **đúng**?

- (A) $(\sin^2 2x)' = \sin 4x$. (B) $(\cos 2x)' = 2 \sin 2x$.
 (C) $(\cos^2 2x)' = -2 \sin 4x$. (D) $(\sin 2x)' = -2 \cos 2x$.

❖ **Câu 4.** Đạo hàm của hàm số $y = 5^x$ là

- (A) $y' = -5^x \ln 5$. (B) $y' = 5^x \ln 5$. (C) $y' = \frac{5^x}{\ln 5}$. (D) $y' = -\frac{5^x}{\ln 5}$.

❖ **Câu 5.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x$.

- (A) $y' = x \cdot 2^{x-1}$. (B) $y' = 2^x \ln 2$. (C) $y' = 2^x$. (D) $y' = 2^x \ln x$.

❖ **Câu 6.** Hàm số $y = -\frac{1}{\sin^2 x}$ là đạo hàm của hàm số nào dưới đây?

- (A) $y = \tan x$. (B) $y = \cot x$. (C) $y = -\cot x$. (D) $y = \frac{1}{\sin x}$.

❖ **Câu 7.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 3^x$.

- (A) $y' = 3^x$. (B) $y' = \frac{3^x}{\ln 3}$. (C) $y' = 3^x \ln 3$. (D) $y' = x \cdot 3^{x-1}$.

❖ **Câu 8.** Tìm đạo hàm của hàm số $y = 2022^x$.

- (A) $y' = x \cdot 2022^{x-1}$. (B) $y' = \frac{2022^x}{\ln 2022}$.
 (C) $y' = 2022^x \cdot \ln 2022$. (D) 2022 .

❖ **Câu 9.** Đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x - \cos x$ là

- (A) $y' = 2 \cos x + \sin x$. (B) $y' = \cos 2x + \sin x$. (C) $y' = 2 \cos 2x + \sin x$. (D) $y' = 2 \cos x - \sin x$.

❖ **Câu 10.** Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 2x + 1$.

- (A) $y' = 3x^2 + 2x$. (B) $y' = 3x^2 + 2$. (C) $y' = 3x^2 + 2x + 1$. (D) $y' = x^2 + 2$.

❖ **Câu 11.** Khẳng định nào sau đây sai?

- (A) $y = x \Rightarrow y' = 1$. (B) $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$. (C) $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x$. (D) $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$.

❖ **Câu 12.** Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ là

- (A) $y' = \frac{1}{x \ln 2}$. (B) $y' = \frac{\ln 2}{x}$. (C) $y' = \frac{1}{x}$. (D) $y' = \frac{1}{2x}$.

❖ **Câu 13.** Hàm số $y = x^4$ có đạo hàm trên $(-\infty; +\infty)$ là

- (A) $y' = 4x^3$. (B) $y' = 3x^3$. (C) $y' = 4x^4$. (D) $y' = 3x^4$.

❖ **Câu 14.** Đạo hàm của hàm số nào dưới đây bằng 0?

- (A) $y = \cos x$. (B) $y = x$. (C) $y = \cos 1^\circ$. (D) $y = \sqrt{x}$.

❖ **Câu 15.** Hàm số $y = 5^{x^2+1}$ có đạo hàm là?

- (A) 5^{x^2+1} . (B) $(x^2 + 1) 5^{x^2+1} \ln 5$. (C) $(x^2 + 1) 5^{x^2}$. (D) $2x 5^{x^2+1} \ln 5$.

❖ **Câu 16.** Với mọi $x \in \mathbb{R}$, đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin x - \cos x$ là

- (A) $y' = 2 \cos x - \sin x$. (B) $y' = -2 \cos x - \sin x$. (C) $y' = 2 \cos x + \sin x$. (D) $y' = 2 \cos x + \sin x$.

❖ **Câu 17.** Cho hàm số $f(x)$ là hàm số trên \mathbb{R} xác định bởi $f(x) = 2x$. Chọn khẳng định đúng.

- (A) $f'(x) = 2$. (B) $f'(x) = 1$.
(C) $f'(x) = x$. (D) $f'(x)$ không tồn tại.

❖ **Câu 18.** Đạo hàm của hàm số $y = 6^x$ là

- (A) $y' = \frac{6^x}{\ln 6}$. (B) $y' = 6^x \ln 6$. (C) $y' = 6^x$. (D) $y' = x \cdot 6^{x-1}$.

❖ **Câu 19.** Cho hàm số $y = \frac{4}{x-1}$. Khi đó $y'(-1)$ bằng

- (A) -1 . (B) -2 . (C) 2 . (D) 1 .

❖ **Câu 20.** Trên khoảng $(0; +\infty)$, hàm số $y = \log_3 x$ có đạo hàm là

- (A) $y' = \frac{x}{\ln 3}$. (B) $y' = x \ln 3$. (C) $y' = \frac{1}{x \ln 3}$. (D) $y' = \frac{\ln 3}{x}$.

❖ **Câu 21.** Đạo hàm của hàm số $y = -2x^3 + 3$ là

- (A) $y' = -6x$. (B) $y' = -6x^2 + 3$. (C) $y' = -6x^2$. (D) $y' = -3x^2$.

❖ **Câu 22.** Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ là

- (A) $y' = \frac{1}{x}$. (B) $y' = \frac{\ln 2}{x}$. (C) $y' = \frac{1}{2x}$. (D) $y' = \frac{1}{x \ln 2}$.

❖ **Câu 23.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \tan 3x$.

- (A) $y' = \frac{3}{\cos^2 3x}$. (B) $y' = \frac{-3}{\cos^2 3x}$. (C) $y' = \frac{-3}{\sin^2 3x}$. (D) $y' = \frac{1}{\cos^2 3x}$.

❖ **Câu 24.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x-1}{2x-1}$.

- (A) $y' = \frac{1}{(2x-1)^2}$. (B) $y' = \frac{1}{2x-1}$. (C) $y' = \frac{1}{(2x+1)^2}$. (D) $y' = -\frac{3}{(2x-1)^2}$.

❖ **Câu 25.** Đạo hàm của hàm số $y = 2 \sin^2 x - \cos 2x + x$ là

- (A) $y' = 4 \sin 2x + 1$. (B) $y' = 4 \sin x + \sin 2x + 1$.

- (C) $y' = 4 \sin x - 2 \sin 2x + 1$. (D) $y' = 1$.
- ❖ **Câu 26.** Đạo hàm của hàm số $y = \tan x$ là
 (A) $\frac{1}{\sin^2 x}$. (B) $-\frac{1}{\sin^2 x}$. (C) $\frac{1}{\cos^2 x}$. (D) $-\frac{1}{\cos^2 x}$.
- ❖ **Câu 27.** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{x}$ tại điểm $x = -2$ là
 (A) $y'(-2) = -\frac{1}{4}$. (B) $y'(-2) = \frac{1}{4}$. (C) $y'(-2) = -\frac{1}{2}$. (D) $y'(-2) = \frac{1}{2}$.
- ❖ **Câu 28.** Khẳng định nào sau đây là **sai**?
 (A) $(\sin x)' = \cos x$. (B) $(\cot x)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$. (C) $(\tan x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$. (D) $(\cos x)' = -\sin x$.
- ❖ **Câu 29.** Tìm đạo hàm của hàm số $y = \pi^x$.
 (A) $y' = x \cdot \pi^{x-1} \ln \pi$. (B) $y' = \pi^x \ln \pi$. (C) $y' = \frac{\pi^x}{\ln \pi}$. (D) $y' = x \cdot \pi^{x-1}$.
- ❖ **Câu 30.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2017$. Bất phương trình $y' < 0$ có tập nghiệm là
 (A) $S = (-1; 1)$. (B) $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
 (C) $S = (1; +\infty)$. (D) $S = (-\infty; -1)$.
- ❖ **Câu 31.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x-1}$. Đạo hàm của hàm số tại $x = 1$ là
 (A) $\frac{1}{2}$. (B) 1. (C) 0. (D) Không tồn tại.
- ❖ **Câu 32.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 4}$. Đạo hàm y' của hàm số là
 (A) $y' = \frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$. (B) $y' = \frac{2x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$.
 (C) $y' = \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$. (D) $y' = \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$.
- ❖ **Câu 33.** Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$. Tìm x để $f'(x) > 0$.
 (A) $-1 < x < 0$. (B) $x < 0$. (C) $x > 0$. (D) $x < -1$.
- ❖ **Câu 34.** Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x) = (x^3 - 2x^2)^2$.
 (A) $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3$. (B) $f'(x) = 6x^5 + 16x^3$.
 (C) $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 + 4x^3$. (D) $f'(x) = 6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.
- ❖ **Câu 35.** Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là
 (A) $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. (B) $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. (C) $(x^2-x) \cdot 2^{x^2-x-1}$. (D) $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x}$.
- ❖ **Câu 36.** Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 2x + 1$.
 (A) $y' = 3x^2 + 2x$. (B) $y' = 3x^2 + 2$. (C) $y' = 3x^2 + 2x + 1$. (D) $y' = x^2 + 2$.
- ❖ **Câu 37.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là
 (A) $[-1; 5]$. (B) \emptyset . (C) $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$. (D) $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.
- ❖ **Câu 38.** Trên khoảng $(\frac{1}{2}; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log(2x-1)$ là
 (A) $y' = \frac{1}{(2x-1) \ln 10}$. (B) $y' = \frac{2}{(2x-1) \ln 10}$. (C) $y' = \frac{2}{2x-1}$. (D) $y' = \frac{1}{2x-1}$.
- ❖ **Câu 39.** Hàm số $f(x) = 5^{2x^2-1}$ có đạo hàm là

(A) $2x \cdot 5^{2x^2-1} \cdot \ln 5$. (B) $4x \cdot 5^{2x^2-1}$. (C) $4x \cdot 5^{2x^2-1} \cdot \ln 5$. (D) 5^{2x^2-1} .

❖ **Câu 40.** Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

(A) $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$. (B) $y' = x - \frac{1}{x^2}$. (C) $y' = x + \frac{1}{x^2}$. (D) $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$.

❖ **Câu 41.** Đạo hàm của hàm số $y = (2 - \sqrt{3})^x$ trên tập \mathbb{R} là

(A) $y' = (2 + \sqrt{3})^{-x} \ln(2 - \sqrt{3})$. (B) $y' = (2 + \sqrt{3})^{-x} \ln(2 + \sqrt{3})$.
 (C) $y' = (2 + \sqrt{3})^x \ln(2 - \sqrt{3})$. (D) $y' = (2 - \sqrt{3})^x \ln(2 + \sqrt{3})$.

❖ **Câu 42.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{1-3x}$.

(A) $y' = \frac{4}{(1-3x)^2}$. (B) $y' = \frac{4x}{(1-3x)^2}$. (C) $y' = \frac{-4}{(1-3x)^2}$. (D) $y' = \frac{4}{1-3x}$.

❖ **Câu 43.** Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

(A) $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$. (B) $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.
 (C) $f'(x) = \frac{(2x-2) \ln 2}{x^2 - 2x}$. (D) $f'(x) = \frac{2x-2}{(x^2 - 2x) \ln 2}$.

❖ **Câu 44.** Hàm số $y = 3x^2 + 2\sqrt{x} - 1$ với $x > 0$ có đạo hàm là

(A) $y' = 6x + \frac{1}{\sqrt{x}}$. (B) $y' = 3x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$. (C) $y' = 3x^2 + \frac{2}{\sqrt{x}}$. (D) $y' = 6x + \frac{2}{\sqrt{x}}$.

❖ **Câu 45.** Hàm số $y = \sqrt{\cot 2x}$ có đạo hàm là

(A) $-\frac{1 + \tan^2 2x}{2\sqrt{\cot 2x}}$. (B) $-\frac{1 + \tan^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$. (C) $-\frac{1 + \cot^2 2x}{2\sqrt{\cot 2x}}$. (D) $-\frac{1 + \cot^2 2x}{\sqrt{\cot 2x}}$.

❖ **Câu 46.** Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$ tại điểm $x_0 = 0$ là

(A) $y'(0) = 5$. (B) $y'(0) = 6$. (C) $y'(0) = 0$. (D) $y'(0) = -6$.

❖ **Câu 47.** Đạo hàm của hàm số $y = \log_4(2x+5)$ là

(A) $y' = \frac{1}{(2x+5) \ln 4}$. (B) $y' = \frac{1}{(2x+5) \ln 2}$. (C) $y' = \frac{2 \ln 4}{(2x+5)}$. (D) $y' = \frac{2}{(2x+5) \ln 5}$.

❖ **Câu 48.** Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+a}{x-b}$ ($a, b \in \mathbb{R}; b \neq 1$). Ta có $f'(1)$ bằng

(A) $\frac{-a+2b}{(b-1)^2}$. (B) $\frac{a-2b}{(b-1)^2}$. (C) $\frac{a+2b}{(b-1)^2}$. (D) $\frac{-a-2b}{(b-1)^2}$.

❖ **Câu 49.** Cho $f(x) = \sqrt{1-4x} + \frac{1-x}{x-3}$, với $x \in (-\infty; \frac{1}{4})$. Tìm $f'(x)$.

(A) $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{x-3}$. (B) $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2}$. (C) $\frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + 1$. (D) $\frac{-2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2}$.

❖ **Câu 50.** Cho hàm số $y = \ln(\cos x + 1 + m^2)$. Với giá trị nào của m thì $y'(\frac{\pi}{2}) = \frac{-1}{5}$.

(A) $m = \pm 2$. (B) $m = 2$. (C) $m = \frac{1}{2}$. (D) $m = \pm 1$.

❖ **Câu 51.** Đạo hàm của hàm số $y = 10^{x^2}$ là

(A) $10^{x^2} \cdot \ln 10$. (B) $2x \cdot 10^{x^2}$. (C) $2x \cdot 10^{x^2} \cdot \ln 10$. (D) $\frac{1}{2} + \log_2 a$.

❖ **Câu 52.** Tính đạo hàm của hàm số $y = 9^{2x+1}$.

(A) $y' = 2 \cdot 9^{2x+1} \cdot \ln 9.$

(B) $y' = (2x + 1) \cdot 9^{2x+1}.$

(C) $y' = 9^{2x+1} \cdot \ln 9.$

(D) $y' = (2x + 1) \cdot 9^{2x+1} \cdot \ln 9.$

❖ **Câu 53.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x + 1$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

(A) $\{-1; 5\}.$

(B) $\emptyset.$

(C) $\{1; -5\}.$

(D) $\{2 - \sqrt{5}; 2 + \sqrt{5}\}.$

❖ **Câu 54.** Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x}{x-1}.$

(A) $y' = \frac{-1}{(x-1)^2}.$

(B) $y' = \frac{2}{(x-1)^2}.$

(C) $y' = \frac{3}{(x-1)^2}.$

(D) $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}.$

❖ **Câu 55.** Hàm số $y = \frac{1}{x^2+5}$ có đạo hàm bằng

(A) $y' = \frac{1}{(x^2+5)^2}.$

(B) $y' = \frac{2x}{(x^2+5)^2}.$

(C) $y' = \frac{-1}{(x^2+5)^2}.$

(D) $y' = \frac{-2x}{(x^2+5)^2}.$

❖ **Câu 56.** Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+7}{x+4}$ tại $x = 2$ ta được

(A) $f'(2) = \frac{1}{36}.$

(B) $f'(2) = \frac{11}{6}.$

(C) $f'(2) = \frac{3}{2}.$

(D) $f'(2) = \frac{5}{12}.$

❖ **Câu 57.** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{4} - \frac{1}{3}x + x^2 - 0,25x^4$ là

(A) $y' = \frac{1}{3}x - 2x - 2x^3.$

(B) $y' = -\frac{1}{3} + x - 2x^3.$

(C) $y' = \frac{4}{3} + x - 2x^3.$

(D) $y' = -\frac{1}{3} + 2x - x^3.$

❖ **Câu 58.** Cho hàm số $f(x) = \sin^2 2x$. Tính $f'(x)$.

(A) $f'(x) = 2 \sin 2x.$

(B) $f'(x) = 2 \cos^2 2x.$

(C) $f'(x) = 2 \sin 4x.$

(D) $f'(x) = -2 \sin 4x.$

❖ **Câu 59.** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$ là

(A) $y' = -\frac{\ln^2 x}{x}.$

(B) $y' = \frac{1 + \ln x}{x^2}.$

(C) $y' = -\frac{1}{x^3}.$

(D) $y' = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$

❖ **Câu 60.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(H): y = \frac{x-1}{x+2}$ tại giao điểm của (H) và trục hoành là

(A) $y = x - 3.$

(B) $y = \frac{1}{3}(x - 1).$

(C) $y = 3x.$

(D) $y = 3(x - 1).$

❖ **Câu 61.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = x^4 - 8x^2 + 9$ tại điểm M có hoành độ bằng -1 .

(A) $y = 12x + 14.$

(B) $y = 12x - 14.$

(C) $y = 12x + 10.$

(D) $y = -20x - 22.$

❖ **Câu 62.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x$ có đồ thị (C) . Số các tiếp tuyến của đồ thị (C) song song với đường thẳng $y = 3x - 10$ là

(A) 2.

(B) 1.

(C) 3.

(D) 0.

❖ **Câu 63.** Cho hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là tiếp tuyến của (C) tại điểm có tung độ bằng 3. Tìm hệ số góc k của đường thẳng d .

(A) $-\frac{1}{2}.$

(B) $-2.$

(C) 2.

(D) $\frac{1}{2}.$

❖ **Câu 64.** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x + 1$ có đồ thị là (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C)

tại điểm $M\left(1; \frac{1}{3}\right)$ là

- (A) $y = 3x - 2$. (B) $y = -3x + 2$. (C) $y = x - \frac{2}{3}$. (D) $y = -x + \frac{2}{3}$.

❖ **Câu 65.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 6x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.

- (A) $y = -8x - 16$. (B) $y = 8x - 19$. (C) $y = -8x + 16$. (D) $y = 8x + 19$.

❖ **Câu 66.** Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2$. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 9x + 5$ là

- (A) $y = 9(x + 3)$. (B) $y = 9(x - 3)$.
(C) $y = 9x + 5$ và $y = 9(x - 3)$. (D) $y = 9x + 5$.

❖ **Câu 67.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{x+1}{x-1}$ tại điểm $A(2; 3)$ có phương trình $y = ax + b$. Tính $a + b$.

- (A) 9. (B) 5. (C) 1. (D) -1.

❖ **Câu 68.** Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 + mx + 1$. Gọi S là tổng tất cả giá trị của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(x)$ cắt đường thẳng $y = 1$ tại ba điểm phân biệt $A(0; 1)$, B , C sao cho các tiếp tuyến của đồ thị tại B , C vuông góc với nhau. Giá trị của S bằng

- (A) $\frac{9}{2}$. (B) $\frac{9}{5}$. (C) $\frac{9}{4}$. (D) $\frac{11}{5}$.

❖ **Câu 69.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2x$. Có tất cả bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số đi qua điểm $A(-1; 0)$?

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

❖ **Câu 70.** Số tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = -x^4 + 2x^2$ song song với trục hoành là

- (A) 3. (B) 2. (C) 0. (D) 1.

❖ **Câu 71.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{x-1}$ tại điểm có hoành độ $x = 2$.

- (A) $y = 2x + 9$. (B) $y = -2x + 9$. (C) $y = 2x - 9$. (D) $y = -2x - 9$.

❖ **Câu 72.** Cho hàm số $y = \frac{x-m}{x+1}$ có đồ thị là (C_m) . Với giá trị nào của m thì tiếp tuyến của (C_m) tại điểm có hoành độ bằng 0 song song với đường thẳng $d: y = 3x + 1$?

- (A) $m = 3$. (B) $m = 2$. (C) $m = 1$. (D) $m = -2$.

❖ **Câu 73.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{-x+1}{3x-2}$ tại giao điểm của đồ thị hàm số với trục tung có hệ số góc là

- (A) -1. (B) $\frac{1}{4}$. (C) $\frac{5}{4}$. (D) $-\frac{1}{4}$.

❖ **Câu 74.** Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-2}$ tại điểm có hoành độ bằng 3 là

- (A) $y = 7x + 13$. (B) $y = -7x + 30$. (C) $y = 3x + 9$. (D) $y = -x - 2$.

❖ **Câu 75.** Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x$ tại điểm có hoành độ bằng 2.

- (A) $y = -9x + 16$. (B) $y = -9x + 20$. (C) $y = 9x - 20$. (D) $y = 9x - 16$.

- ❖ **Câu 76.** Cho hàm số $y = x^3 - 2x + 1$ có đồ thị (C) . Hệ số góc k của tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$ là
 (A) $k = -5$. (B) $k = 10$. (C) $k = 25$. (D) $k = 1$.
- ❖ **Câu 77.** Phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = 3x - 4x^2$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$ là
 (A) $y = 0$. (B) $y = 3x$. (C) $y = 3x - 2$. (D) $y = -12x$.
- ❖ **Câu 78.** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số trên tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.
 (A) $y = 3x - 2$. (B) $y = -3x - 2$. (C) $y = 3x - 3$. (D) $y = 3x + 2$.
- ❖ **Câu 79.** Cho hàm số $y = x^2 + mx + 1$ có đồ thị C_m . Xác định m sao cho tiếp tuyến với đồ thị (C_m) tại điểm có hoành độ $x = 1$ song song với đường thẳng $y = 3x - 17$.
 (A) $m = 1$. (B) $m = -1$. (C) $m = 3$. (D) $m = 0$.
- ❖ **Câu 80.** Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$ đi qua $A(3; 2)$?
 (A) 3. (B) 0. (C) 1. (D) 2.
- ❖ **Câu 81.** Cho hàm số $y = x^4 + 2x^2 + 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(1; 4)$ là
 (A) $y = 8x - 4$. (B) $y = x + 3$. (C) $y = -8x + 12$. (D) $y = 8x + 4$.
- ❖ **Câu 82.** Cho hàm số $y = x^3 - x - 1$ có đồ thị (C) . Phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung là
 (A) $y = -x - 1$. (B) $y = -x + 1$. (C) $y = 2x + 2$. (D) $y = 2x - 1$.
- ❖ **Câu 83.** Tìm các tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ biết các tiếp tuyến đó song song với đường thẳng $y = -3x$.
 (A) $y = -3x + 11, y = -3x - 1$. (B) $y = -3x - 6, y = -3x - 11$.
 (C) $y = -3x + 1$. (D) $y = -3x + 6$.
- ❖ **Câu 84.** Một chất điểm chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 + 5t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động khi $t = 3$ là:
 (A) 12 m/s^2 . (B) 17 m/s^2 . (C) 24 m/s^2 . (D) 14 m/s^2 .
- ❖ **Câu 85.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$ có đạo hàm cấp hai. Mệnh đề nào sau đây đúng?
 (A) $y^3 y'' + 1 = 0$. (B) $y' = \frac{1}{2\sqrt{2x - x^2}}$. (C) $y^2 y'' + y' = 1$. (D) $y^2 + y' - y'' = 1$.
- ❖ **Câu 86.** Cho chuyển động được xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 + t + 11$, trong đó t được tính bằng giây và S được tính bằng mét. Vận tốc của chuyển động khi $t = 2$ giây là
 (A) 9 m/s . (B) 6 m/s . (C) -3 m/s . (D) 1 m/s .
- ❖ **Câu 87.** Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 1}{x - 2}$ bằng
 (A) $y' = \frac{x^2 - 4x + 5}{(x - 2)^2}$. (B) $y' = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 2)^2}$. (C) $y' = \frac{x^2 - 6x + 4}{(x - 2)^2}$. (D) $y' = \frac{x^2 - 6x - 1}{(x - 2)^2}$.
- ❖ **Câu 88.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$. Đường thẳng $d: y = ax + b$ là tiếp tuyến của đồ thị hàm

số. Biết d cắt trục hoành, trục tung lần lượt tại hai điểm A, B sao cho ΔOAB cân tại O . Khi đó $a + b$ bằng

- (A) -1 . (B) 0 . (C) 2 . (D) -3 .

❖ **Câu 89.** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{1-x}$ có đồ thị (C) và điểm $A(m; 1)$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của m để có đúng một tiếp tuyến của (C) đi qua A . Tính tổng bình phương các phần tử của tập S .

- (A) $\frac{25}{4}$. (B) $\frac{5}{2}$. (C) $\frac{13}{4}$. (D) $\frac{9}{4}$.

❖ **Câu 90.** Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1}$ có đồ thị. Có bao nhiêu tiếp tuyến của đồ thị cắt trục Ox, Oy lần lượt tại hai điểm A và B thỏa mãn điều kiện $OA = 4OB$.

- (A) 2 . (B) 3 . (C) 1 . (D) 4 .

❖ **Câu 91.** Cho hàm số $y = \frac{x+2}{2x+3}$ có đồ thị (C) . Đường thẳng d có phương trình $y = ax + b$ là tiếp tuyến của (C) biết d cắt trục hoành tại A và cắt trục tung tại B sao cho tam giác ΔOAB cân tại O , với O là gốc tọa độ. Tính $a + b$.

- (A) -1 . (B) -2 . (C) 0 . (D) -3 .

❖ **Câu 92.** Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x$, với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $f''(x)$ bằng

- (A) $f''(x) = 2\cos x$. (B) $f''(x) = 2\sin 2x$. (C) $f''(x) = \cos 2x$. (D) $f''(x) = 2\cos 2x$.

❖ **Câu 93.** Cho hàm số $y = \frac{x-2}{x+3}$. Tính y'' .

- (A) $y'' = \frac{-5}{(x+3)^3}$. (B) $y'' = \frac{10}{(x+3)^2}$. (C) $y'' = \frac{-10}{(x+3)^3}$. (D) $y'' = \frac{5}{(x+3)^3}$.

❖ **Câu 94.** Cho hàm số $y = \sin^3 x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- (A) $y'' + 9y - \sin x = 0$. (B) $y'' + 9y - 6\sin x = 0$.
(C) $y'' + 9y - 6\cos x = 0$. (D) $y'' + 9y + 6\sin x = 0$.

❖ **Câu 95.** Cho hàm số $y = x\cos x$. Tìm hệ thức đúng trong các hệ thức sau.

- (A) $y'' + y = \sin x + 2x\cos x$. (B) $y'' + y = 2\sin x$.
(C) $y'' + y = -\sin x + x\cos x$. (D) $y'' + y = -2\sin x$.

❖ **Câu 96.** Cho hàm số $f(x) = (3x-7)^5$. Tính $f''(2)$.

- (A) $f''(2) = 0$. (B) $f''(2) = 20$. (C) $f''(2) = -180$. (D) $f''(2) = 30$.

❖ **Câu 97.** Cho $y = \sqrt{2x-x^2}$, tính giá trị biểu thức $A = y^3 \cdot y''$.

- (A) 1 . (B) 0 . (C) -1 . (D) 4 .

❖ **Câu 98.** Cho hàm số $y = x\sin x$. Hệ thức nào sau đây đúng?

- (A) $y'' - y = 2\sin x$. (B) $y'' + y = 2\sin x$. (C) $y'' - y = 2\cos x$. (D) $y'' + y = 2\cos x$.

❖ **Câu 99.** Cho hàm số $y = \sin 2x$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- (A) $y^2 + (y')^2 = 4$. (B) $y = y' \cdot \tan 2x$. (C) $4y - y'' = 0$. (D) $4y + y'' = 0$.

❖ **Câu 100.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Tính $f''(-1)$.

- (A) $-\frac{8}{27}$. (B) $\frac{2}{9}$. (C) $\frac{8}{27}$. (D) $-\frac{4}{27}$.

- ❖ **Câu 8.** Viết được phương trình tiếp tuyến Δ của đồ thị hàm số $y = \frac{x+9}{x+1}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: x - 2y + 2 = 0$.
- Có hai phương trình tiếp tuyến thỏa mãn.
 - Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2 .
 - Phương trình tiếp tuyến Δ đi qua điểm $A(1; 5)$.
 - Phương trình tiếp tuyến Δ đi qua điểm $B(1; -7)$.

- ❖ **Câu 9.** Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s(t) = \frac{1}{4}t^4 - t^3 + 2t^2 + 2t$, trong đó s tính bằng mét (m) và thời gian t tính bằng giây (s).
- Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ (s) là 4 m/s^2 .
 - Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc đạt 34 m/s là 24 m/s^2 .
 - Vận tốc của vật tại thời điểm gia tốc bằng 13 m/s^2 là 12 m/s .
 - Vận tốc của vật tại thời điểm gia tốc đạt giá trị nhỏ nhất trong 5 giây đầu là 1 m/s .

- ❖ **Câu 10.** Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t + 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét.
- Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 2$ là 9 (m/s) .
 - Vận tốc cực đại của chuyển động là 12 (m/s) .
 - Quãng đường của vật đi được từ thời điểm bắt đầu chuyển động cho đến lúc dừng lại là 30 (m) .
 - Gia tốc của vật khi vận tốc đạt giá trị lớn nhất bằng 0 .

3 Tự luận

❖ **Bài 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 3x^2 + 2x + 1;$

b) $y = x^2 - 4\sqrt{x} + 3.$

❖ **Bài 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x-1}{x+2};$

b) $y = \frac{2x}{x^2+1}.$

❖ **Bài 3.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2x^3 - \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{1}{3};$

b) $y = \frac{-2x+3}{x-4};$

c) $y = \frac{x^2-2x+3}{x-1};$

d) $y = \sqrt{5x}.$

❖ **Bài 4.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = (x^2 - x) \cdot 2^x;$

b) $y = x^2 \cdot \log_3 x;$

c) $y = e^{3x+1}.$

❖ **Bài 5.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = 2x^4 - 5x^2 + 3;$

b) $y = x \cdot e^x.$

Bài 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \sin 3x$; b) $y = \cos^3 2x$; c) $y = \tan^2 x$; d) $y = \cot(4 - x^2)$.

Bài 7. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau

a) $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x + 10$; b) $y = \frac{x+1}{x-1}$;
 c) $y = -2x\sqrt{x}$; d) $y = 3\sin x + 4\cos x - \tan x$;
 e) $y = 4^x + 2e^x$; f) $y = x \ln x$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x) = 2^{3x+2}$.

- ① Hàm số $f(x)$ là hàm hợp của các hàm số nào?
- ② Tìm đạo hàm của $f(x)$.

Bài 9. Tìm đạo hàm của mỗi hàm số sau:

a) $y = \sin 3x + \sin^2 x$; b) $y = \log_2(2x+1) + 3^{-2x+1}$.

Bài 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \sin^2 x$; b) $y = \cos^2 x + \sin 2x$; c) $y = \sin 3x - 3 \sin x$; d) $y = \tan x + \cot x$.

Bài 11. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 2^{3x-x^2}$; b) $y = \log_3 x$.

Bài 12. Cho hàm số $f(x) = 2 \sin^2 \left(3x - \frac{\pi}{4} \right)$. Chứng minh rằng $|f'(x)| \leq 6$ với mọi x .

Bài 13. Một vật chuyển động rơi tự do có phương trình $h(t) = 100 - 4,9t^2$, ở đó độ cao h so với mặt đất tính bằng mét và thời gian t tính bằng giây. Tính vận tốc của vật:

- ① Tại thời điểm $t = 5$ giây;
- ② Khi vật chạm đất.

Bài 14. Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi $s(t) = 12 + 0,5 \sin(4\pi t)$, trong đó s được tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu?

Bài 15. Cho $u = u(x), v = v(x), w = w(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Chứng minh rằng $(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'$.

Bài 16. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị mỗi hàm số sau:

- ① $y = x^3 - 3x^2 + 4$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;
- ② $y = \ln x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = e$;
- ③ $y = e^x$ tại điểm có hoành độ $x_0 = 0$.

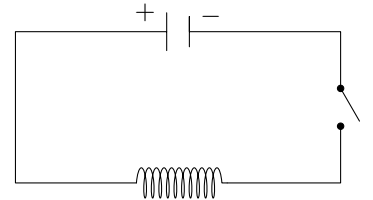
☞ **Bài 17.** Một viên đạn được bắn lên từ mặt đất theo phương thẳng đứng với tốc độ ban đầu $v_0 = 196 \text{ m/s}$ (bỏ qua sức cản của không khí). Tìm thời điểm tại đó tốc độ của viên đạn bằng 0. Khi đó viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét (lấy $g = 9,8 \text{ m/s}^2$)?

☞ **Bài 18.** Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại mọi điểm thuộc tập xác định, hàm số $g(x)$ được xác định bởi $g(x) = f^2(x) + 2xf(x)$. Biết $f'(0) = f(0) = 1$. Tính $g'(0)$.

☞ **Bài 19.** Biết y là hàm số của x thỏa mãn phương trình $xy = 1 + \ln y$. Tính $y'(0)$.

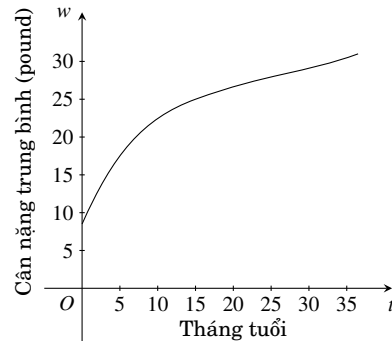
☞ **Bài 20.** Cho mạch điện như hình bên. Lúc đầu tụ điện có điện tích Q_0 .

Khi đóng khoá K , tụ điện phóng điện qua cuộn dây; điện tích q của tụ điện phụ thuộc vào thời gian t theo công thức $q(t) = Q_0 \sin \omega t$, trong đó ω là tốc độ góc. Biết rằng cường độ $I(t)$ của dòng điện tại thời điểm t được tính theo công thức $I(t) = q'(t)$. Cho biết $Q_0 = 10^{-8} \text{ (C)}$ và $\omega = 10^6 \pi \text{ (rad/s)}$.



Tính cường độ của dòng điện tại thời điểm $t = 6 \text{ (s)}$ (tính chính xác đến 10^{-5} (mA)).

☞ **Bài 21.** Cân nặng trung bình của một bé gái trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,000758t^3 - 0,0596t^2 + 1,82t + 8,15$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound (*nguồn: <https://www.cdc.gov/growthcharts/data/who/GrChrt-Boys>*). Tính tốc độ thay đổi cân nặng của bé gái đó tại thời điểm 10 tháng tuổi.



☞ **Bài 22.** Một công ty xác định rằng tổng chi phí của họ, tính theo nghìn đô-la, để sản xuất x mặt hàng là $C(x) = \sqrt{5x^2 + 60}$ và công ty lên kế hoạch nâng sản lượng trong t tháng kể từ nay theo hàm số $x(t) = 20t + 40$. Chi phí sẽ tăng thế nào sau 4 tháng kể từ khi công ty thực hiện kế hoạch đó?

☞ **Bài 23.** Trên Mặt Trăng, quãng đường rơi tự do của một vật được cho bởi công thức $s(t) = 0,81t^2$, trong đó t là thời gian được tính bằng giây và s tính bằng mét. Một vật thả rơi từ độ cao 200 m phía trên Mặt Trăng. Tại thời điểm $t = 2$ sau khi thả vật đó, tính quãng đường vật đã rơi.

☞ **Bài 24.** Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức

$$s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right),$$

trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất.)

☞ **Bài 25.** Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = 200(x - 2)(17 - x)$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

Bài 26. Cho $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$ (a là tham số). Tìm a để $f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Bài 27. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Giải bất phương trình $f'(x) < 0$.

Bài 28. Một bình nuôi cây vi sinh vật được truyền nhiệt đến một nhiệt độ thích hợp. Biết rằng nhiệt độ của bình tại thời điểm t phút được tính bằng hàm số $f(t) = t^3$.

- Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ của bình tại thời điểm $t = 2$ phút.
- Sau bao lâu thì nhiệt độ của bình đạt 27°C . Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ của bình tại thời điểm đó.

Bài 29. Năm 2001, dân số Việt Nam khoảng 78 690 000 người. Nếu tỉ lệ tăng dân số hằng năm luôn là 1,7% thì ước tính dân số Việt Nam sau x năm kể từ năm 2001 được tính theo hàm số sau: $f(x) = 7,869e^{0,017x}$ (chục triệu người). Tốc độ gia tăng dân số (chục triệu người/năm) sau x năm kể từ 2001 được xác định bởi hàm số $f'(x)$.

- Tìm hàm số thể hiện tốc độ gia tăng dân số sau x năm kể từ năm 2001.
- Tính tốc độ gia tăng dân số Việt Nam theo đơn vị chục triệu người/năm vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Bài 30. Trong thuyết động lực học phân tử chất khí, với một khối khí lí tưởng, các đại lượng áp suất p (Pa), thể tích V (m^3), nhiệt độ T (K), số mol n (mol) liên hệ với nhau theo phương trình: $pV = nRT$, trong đó $R = 8,31$ (J/mol.K) là hằng số. Một bóng thám không chứa 8 mol khí hydrogen ở trạng thái khí lí tưởng có áp suất không đổi $p = 10^5$ Pa. Tính tốc độ thay đổi thể tích theo nhiệt độ của khối khí trong bóng thám không.

Bài 31. Nồng độ C (g/l) của loại thuốc A một người uống vào sau t giờ cho bởi hàm số

$$C(t) = 6,2t^4 e^{-0,5t}.$$

Biết rằng nồng độ C sẽ tăng lên trong 8 giờ đầu tiên và tốc độ tăng của nồng độ C tại thời điểm t được tính bởi công thức $C'(t)$.

- Tính tốc độ tăng nồng độ của thuốc A tại thời điểm $t_0 = 1$.
- Trong hai thời điểm $t_0 = 1$ và $t_1 = 5$, thời điểm nào nồng độ thuốc A tăng nhanh hơn?

Bài 32. Năm 2010, dân số ở một tỉnh D là 1 038 229 người. Tính đến năm 2015, dân số của tỉnh đó là 1 153 600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức $S(N) = Ae^{Nr}$, trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm (được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số $S'(N)$. Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hằng năm không đổi.

Bài 33. Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vật cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 20t - \frac{5}{2}t^2$, trong đó s (m) là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, t (s) là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \leq t \leq 4$).

- Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh. Hãy cho biết xe ô tô trên có chạy quá tốc độ hay không, biết tốc độ giới hạn cho phép là 70 km/h.
- Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm.

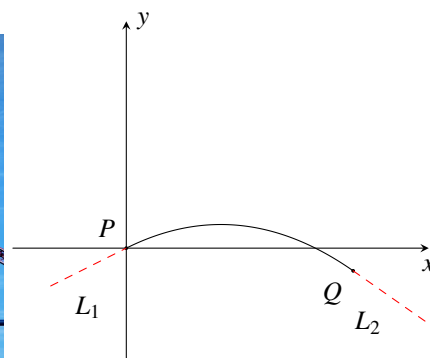
Bài 34. Trong kinh tế học, xét mô hình doanh thu y (đồng) được tính theo số sản phẩm sản xuất ra x (chiếc) theo công thức $y = f(x)$. Xét giá trị ban đầu $x = x_0$.

Đặt $M_f(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0)$ và gọi giá trị đó là giá trị y -cận biên của x tại $x = x_0$. Giá trị $M_f(x_0)$ phản ánh lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mức sản phẩm x_0 . Xem hàm doanh thu $y = f(x)$ như là hàm biến số thực x . Khi đó

$$M_f(x_0) = f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0).$$

Như vậy, đạo hàm $f'(x_0)$ cho chúng ta biết (xấp xỉ) lượng doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm tại mức sản phẩm x_0 . Tính doanh thu tăng thêm khi sản xuất thêm một đơn vị sản phẩm nếu hàm doanh thu là $y = 10x - \frac{x^2}{100}$ tại mức sản phẩm $x_0 = 10000$.

Bài 35. Một kỹ sư thiết kế một đường ray tàu lượn, mà mặt cắt của nó gồm một cung đường cong có dạng parabol, đoạn dốc lên L_1 và đoạn dốc xuống L_2 là những phần đường thẳng có hệ số góc lần lượt là $0,5$ và $-0,75$. Để tàu lượn chạy êm và không bị đổi hướng đột ngột, L_1 và L_2 phải là những tiếp tuyến của cung parabol tại các điểm chuyển tiếp P và Q . Giả sử gốc tọa độ đặt tại P và phương trình của parabol là $y = ax^2 + bx + c$, trong đó x tính bằng mét.



- 1 Tìm c .
- 2 Tính $y'(0)$ và tìm b .
- 3 Giả sử khoảng cách theo phương ngang giữa P và Q là 40m . Tìm a .
- 4 Tìm chênh lệch độ cao giữa hai điểm chuyển tiếp P và Q .

§3 ÔN TẬP CHƯƠNG 9

BÀI TẬP



1 Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.

❖ **Câu 1.** Quy tắc tính đạo hàm nào sau đây là đúng?

- (A) $(u+v)' = u' - v'$. (B) $(uv)' = u'v + uv'$. (C) $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{1}{v^2}$. (D) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v + uv'}{v^2}$.

❖ **Câu 2.** Cho hàm số $f(x) = x^2 + \sin^3 x$. Khi đó $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$ bằng

- (A) π . (B) 2π . (C) $\pi + 3$. (D) $\pi - 3$.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$. Tập nghiệm của bất phương trình $f'(x) \leq 0$ là

- (A) $[1; 3]$. (B) $[-1; 3]$. (C) $[-3; 1]$. (D) $[-3; -1]$.

❖ **Câu 4.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{4 + 3u(x)}$ với $u(1) = 7$, $u'(1) = 10$. Khi đó $f'(1)$ bằng

- (A) 1. (B) 6. (C) 3. (D) -3.

❖ **Câu 5.** Cho hàm số $f(x) = x^2 e^{-2x}$. Tập nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ là

- (A) $\{0; 1\}$. (B) $\{-1; 0\}$. (C) $\{0\}$. (D) $\{1\}$.

❖ **Câu 6.** Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = \sin\left(0,8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$ với s tính bằng centimet và thời gian t tính bằng giây. Tại các thời điểm vận tốc bằng 0, giá trị tuyệt đối của gia tốc của vật gần với giá trị nào sau đây nhất?

- (A) $4,5(\text{cm/s}^2)$. (B) $5,5(\text{cm/s}^2)$. (C) $6,3(\text{cm/s}^2)$. (D) $7,1(\text{cm/s}^2)$.

❖ **Câu 7.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$ có đồ thị là (C). Hệ số góc nhỏ nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) là

- (A) 1. (B) 2. (C) -1. (D) 3.

❖ **Câu 8.** Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2$. Tiếp tuyến với đồ thị của hàm số tại điểm $M(-1; -4)$ có hệ số góc bằng

- (A) -3. (B) 9. (C) -9. (D) 72.

❖ **Câu 9.** Hàm số $y = -x^2 + x + 7$ có đạo hàm tại $x = 1$ bằng

- (A) -1. (B) 7. (C) 1. (D) 6.

❖ **Câu 10.** Cho hai hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3$ và $g(x) = x^3 + \frac{x^2}{2} - 5$. Bất phương trình $f'(x) > g'(x)$ có tập nghiệm là

- (A) $(-\infty; 0] \cup [1; +\infty)$. (B) $(0; 1)$. (C) $[0; 1]$. (D) $(-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

❖ **Câu 11.** Hàm số $y = \frac{x+3}{x+2}$ có đạo hàm là

- (A) $y' = \frac{1}{(x+2)^2}$. (B) $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$. (C) $y' = \frac{-1}{(x+2)^2}$. (D) $y' = \frac{-5}{(x+2)^2}$.

❖ **Câu 12.** Hàm số $y = \frac{1}{x+1}$ có đạo hàm cấp hai tại $x = 1$ là

(A) $y''(1) = \frac{1}{2}$. (B) $y''(1) = -\frac{1}{4}$. (C) $y''(1) = 4$. (D) $y''(1) = \frac{1}{4}$.

❖ **Câu 13.** Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x) = x \sin x - 3$ là biểu thức nào trong các biểu thức sau?

(A) $f''(x) = 2 \cos x - x \sin x$. (B) $f''(x) = -x \sin x$.
 (C) $f''(x) = \sin x - x \cos x$. (D) $f''(x) = 1 + \cos x$.

❖ **Câu 14.** Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos x$ là

(A) $y'' = -\cos x$. (B) $y'' = \cos x$. (C) $y'' = \sin x$. (D) $y'' = -\sin x$.

❖ **Câu 15.** Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, tính giá trị của $f''(1)$.

(A) 6. (B) 8. (C) 3. (D) 2.

❖ **Câu 16.** Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = (\sin x + \cos x)^2$ là

(A) $y'' = 4 \sin 2x$. (B) $y'' = -4 \sin 2x$. (C) $y'' = -4 \cos 2x$. (D) $y'' = 4 \cos 2x$.

❖ **Câu 17.** Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = x^2 + x^3$.

(A) $y'' = 3x^2 + 2x$. (B) $y'' = 6x + 2$. (C) $y'' = 3x^2 + 2$. (D) $y'' = 6x$.

❖ **Câu 18.** Cho hàm số $y = 2x^4 + 4x^2$. Đạo hàm cấp hai của hàm số bằng

(A) $8x^3 + 8x$. (B) $24x^2 + 8x$. (C) $24x^2 + 8$. (D) $8x^2 + 8x$.

❖ **Câu 19.** Cho hàm số $y = \frac{2}{1+x}$. Tính giá trị của $y^{(3)}(1)$.

(A) $y^{(3)}(1) = -\frac{3}{4}$. (B) $y^{(3)}(1) = \frac{3}{4}$. (C) $y^{(3)}(1) = -\frac{4}{3}$. (D) $y^{(3)}(1) = \frac{4}{3}$.

❖ **Câu 20.** Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = (\sin x + \cos x)^2$ là

(A) $y'' = 4 \sin 2x$. (B) $y'' = -4 \sin 2x$. (C) $y'' = -4 \cos 2x$. (D) $y'' = 4 \cos 2x$.

❖ **Câu 21.** Cho hàm số $f(x) = \sin^2 x - x^2 + 1$. Ta có $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$ có giá trị bằng

(A) -2. (B) -4. (C) 2. (D) 4.

❖ **Câu 22.** Đạo hàm cấp 2 của hàm số $y = (x+1)^5$ là

(A) $y'' = 5(x+1)^3$. (B) $y'' = 5(x+1)^4$. (C) $y'' = 20(x+1)^3$. (D) $y'' = 20(x+1)^4$.



Câu trắc nghiệm đúng sai.

❖ **Câu 1.** Cho hàm số $y = 2 \sin 2x - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$. b) $y'' = -8 \cdot \sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
 c) $y''(0) = 1$. d) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2y''(0) = -2$.

❖ **Câu 2.** Cho hàm số $y = 2 \sin 2x - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2$. b) $y'' = -8 \cdot \sin 2x + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
 c) $y''(0) = 1$. d) $y'\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2y''(0) = -2$.

❖ **Câu 3.** Cho hàm số $y = x \cdot e^{4x}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

a) $y' = (4+4x) \cdot e^{4x}$. b) $y'(1) = 5 \cdot e^4$. c) $y'(0) = -1$. d) $y' = e^{4x} + 4y$.

❖ **Câu 10.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{khi } x < 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{khi } x \geq 1 \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$.
 b) Hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại $x = 1$.
 c) Hàm số $f(x)$ liên tục tại $x = 1$ và hàm số $f(x)$ cũng có đạo hàm tại $x = 1$.
 d) Hàm số $f(x)$ không có đạo hàm tại $x = 1$.

❖ **Câu 11.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x-x^2}$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau

- a) $y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$. b) $y'' = \frac{-1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$.
 c) $y^3 \cdot y'' = 1$. d) $y' + (x^3 - 2x^2) \cdot y'' = -\frac{1}{y}$.

❖ **Câu 12.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2-4}$ và $g(x) = 3x-2$. Khi đó

- a) Giá trị của hàm số $g(x)$ tại $x = 2$ bằng 3.
 b) Đạo hàm của hàm số $f(x)$ tại $x = 3$ bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.
 c) Đạo hàm của hàm số $f[g(x)]$ tại $x = 3$ bằng $\frac{7\sqrt{5}}{5}$.
 d) Đạo hàm của hàm số $g[f(x)]$ tại $x = 3$ bằng $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.



3

Tự luận

❖ **Bài 1.** Tính đạo hàm của các hàm số sau

a) $y = \left(\frac{2x-1}{x+2}\right)^5$; b) $y = \frac{2x}{x^2+1}$; c) $y = e^x \cdot \sin^2 x$; d) $y = \log(x + \sqrt{x})$

❖ **Bài 2.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^4 - 7x^3 + 3x^2 + 1$ b) $y = (x^2 - x)^3$ c) $y = \frac{4x-1}{2x+1}$.

❖ **Bài 3.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (x^2 + 3x - 1)e^x$; b) $y = x^3 \log_2 x$.

❖ **Bài 4.** Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \tan(e^x + 1)$; b) $y = \sqrt{\sin 3x}$; c) $y = \cot(1 - 2^x)$.

❖ **Bài 5.** Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 4x^2 + 2x - 3$; b) $y = x^2 e^x$.

❖ **Bài 6.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{3x+1}$. Đặt $g(x) = f(1) + 4(x^2 - 1)f'(1)$. Tính $g(2)$.

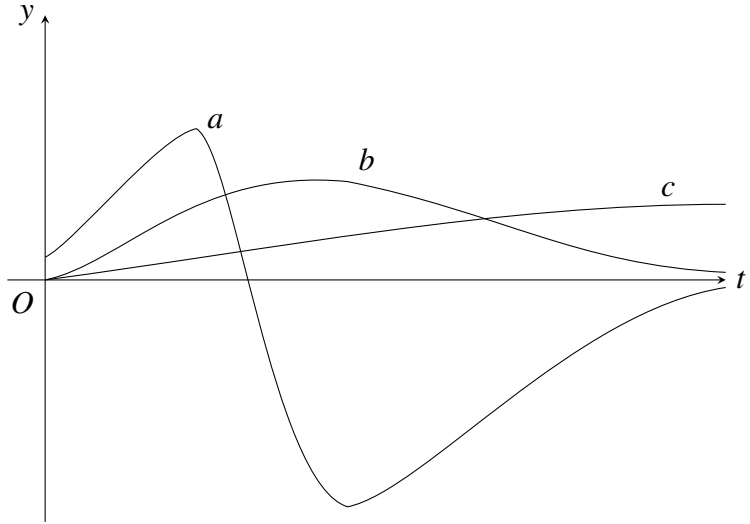
❖ **Bài 7.** Cho hàm số $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Tính $f''(1)$.

Bài 8. Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $f(1) = 2$ và $f'(x) = x^2 f(x)$ với mọi x . Tính $f''(1)$.

Bài 9. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1.

Bài 10. Đồ thị hàm số $y = \frac{a}{x}$ (a là hằng số dương) là một đường hyperbol. Chứng minh rằng tiếp tuyến tại một điểm bất kỳ của đường hyperbol đó tạo với các trục toạ độ một tam giác có diện tích không đổi.

Bài 11. Hình bên dưới biểu diễn đồ thị của ba hàm số. Hàm thứ nhất là hàm vị trí của một chiếc xe ô tô, hàm thứ hai là hàm vận tốc và hàm thứ ba là hàm gia tốc của ô tô đó. Hãy xác định đồ thị của mỗi hàm số này và giải thích?



Bài 12. Vị trí của một vật chuyển động thẳng được cho bởi phương trình $s = f(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét.

- 1 Tính vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ giây và $t = 4$ giây.
 - 2 Tại thời điểm nào vật đứng yên?
 - 3 Tìm gia tốc của vật tại thời điểm $t = 4$ giây.
 - 4 Tính tổng quãng đường vật đi được trong 5 giây đầu tiên.
- e) Trong 5 giây đầu tiên, khi nào vật tăng tốc, khi nào vật giảm tốc?

Bài 13. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2x + 3$ có đồ thị (C) và điểm $M(-1; 6) \in (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M .

Bài 14. Một viên sỏi rơi từ độ cao 44,1 m thì quãng đường rơi được biểu diễn bởi công thức $s(t) = 4,9t^2$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính:

- 1 Vận tốc rơi của viên sỏi lúc $t = 2$;
- 2 Vận tốc của viên sỏi khi chạm đất.

Bài 15. Một vật chuyển động trên một đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = 2t^3 + 4t + 1$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính vận tốc và gia tốc của vật khi $t = 1$.

Bài 16. Dân số P (tính theo nghìn người) của một thành phố nhỏ được tính theo công thức $P(t) = \frac{500t}{t^2 + 9}$, trong đó t là thời gian tính bằng năm. Tìm tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t = 12$.

Bài 17. Hàm số $S(r) = \frac{1}{r^4}$ có thể được sử dụng để xác định sức cản S của dòng máu có bán kính r (tính theo milimét) (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của S theo r khi $r = 0,8$.

☞ **Bài 18.** Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo nhiệt độ Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi của nhiệt độ ở thời điểm $t = 1,5$.

☞ **Bài 19.** Hàm số $R(v) = \frac{600}{v}$ có thể dùng để xác định nhịp tim R của một người mà tim của người đó có thể lấy đi được 6000 ml máu trên mỗi phút và v ml máu trên mỗi nhịp đập (theo Bách khoa toàn thư Y học "Harrison's internal medicine 21st edition"). Tìm tốc độ thay đổi của nhịp tim khi lượng máu tim đẩy đi ở một nhịp là $v = 80$.

☞ **Bài 20.** Kính viễn vọng không gian Hubble được triển khai vào ngày 24 tháng 4 năm 1990 bởi tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong nhiệm vụ này, từ khi xuất phát tại $t = 0$ (s) cho đến khi tên lửa đẩy nhiên liệu rắn bị loại bỏ, được xác định theo phương trình:

$$v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23,61t - 3,083 \quad (\text{ft/s}).$$



(Nguồn: James Stewart, *Calculus*)

Tính gia tốc tức thời của tàu con thoi tại thời điểm $t = 100$ (s) (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

☞ **Bài 21.** Sau khi uống đồ uống có cồn, nồng độ cồn trong máu tăng lên rồi giảm dần được xác định bằng hàm số: $C(t) = 1,35te^{-2,802t}$, trong đó C (mg/ml) là nồng độ cồn, t (h) là thời điểm đo tính từ ngay sau khi uống 15 ml đồ uống có cồn.

(Nguồn: P. Wilkinson et al., *Pharmacokinetics of Ethanol after Oral Administration in the Fasting State*, 1977)

Giả sử một người uống hết nhanh 15 ml đồ uống có cồn. Tính tốc độ chuyển hoá nồng độ cồn trong máu của người đó tại thời điểm $t = 3$ (h) (làm tròn kết quả đến hàng phần triệu).