

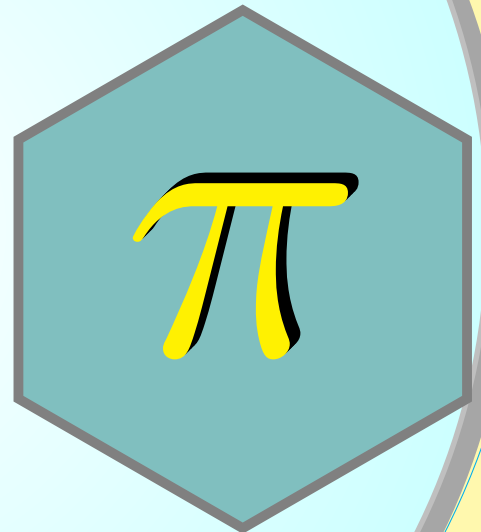


KẾT NỐI TRI THỨC  
VỚI CUỘC SỐNG

# TOÁN 10

TẬP HAI

- 1 Tóm tắt lý thuyết
- 2 Ví dụ minh họa
- 3 Bài tập tự luận
- 4 Bài tập trắc nghiệm



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

# Mục lục

<b>Chương 7.</b>	<b>BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN</b>	<b>1</b>
<b>Bài 1.</b>	<b>DẤU TAM THỨC BẬC HAI</b>	<b>1</b>
A	TÓM TẮT LÝ THUYẾT.....	1
B	RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN.....	3
	☞ Dạng 1. Xét dấu tam thức bậc hai $f(x) = ax^2 + bx + c$ , với $a \neq 0$ .....	3
	☞ Dạng 2. Giải bất phương trình bậc hai.....	3
	☞ Dạng 3. Vận dụng, thực tiễn.....	3
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	4
<b>Bài 2.</b>	<b>PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI</b>	<b>9</b>
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	9
B	RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN.....	9
	☞ Dạng 1. Giải phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$ .....	9
	☞ Dạng 2. Giải phương trình dạng $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$ .....	10
	☞ Dạng 3. Vận dụng, thực tiễn.....	10
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	11
<b>Chương 8.</b>	<b>ĐẠI SỐ TỔ HỢP</b>	<b>14</b>
<b>Bài 1.</b>	<b>QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN</b>	<b>14</b>
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	14
B	RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN.....	15
	☞ Dạng 1. Quy tắc cộng và sơ đồ hình cây.....	15
	☞ Dạng 2. Quy tắc nhân.....	15
	☞ Dạng 3. Kết hợp quy tắc cộng và quy tắc nhân.....	16
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	16
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	18
<b>Bài 2.</b>	<b>HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP</b>	<b>22</b>
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	22
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	23
	☞ Dạng 1. Hoán vị và số hoán vị.....	23



C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	48
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	49
<b>Bài 3.</b>	<b>VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI, GÓC, KHOẢNG CÁCH GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG</b>	<b>54</b>
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	54
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	55
	☞ Dạng 1. Vị trí tương đối của hai đường thẳng.....	55
	☞ Dạng 2. Góc giữa hai đường thẳng.....	56
	☞ Dạng 3. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng.....	56
	☞ Dạng 4. Tìm điểm $M$ thỏa mãn điều kiện cho trước.....	57
	☞ Dạng 5. Bài toán cực trị.....	57
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	58
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	59
<b>Bài 4.</b>	<b>ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ</b>	<b>64</b>
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	64
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	65
	☞ Dạng 1. Tìm tâm và bán kính đường tròn.....	65
	☞ Dạng 2. Lập phương trình đường tròn.....	65
	☞ Dạng 3. Tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm.....	66
	☞ Dạng 4. Tiếp tuyến của đường tròn song song hoặc vuông góc với một đường cho trước.....	67
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	67
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	69
<b>Bài 5.</b>	<b>BA ĐƯỜNG CONIC</b>	<b>74</b>
A	LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	74
B	PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	75
	☞ Dạng 1. Phương trình đường elip.....	75
	☞ Dạng 2. Phương trình đường hypebol.....	76
	☞ Dạng 3. Phương trình đường parabol.....	77
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	78
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	79

<b>Bài 1. KHÔNG GIAN MẪU VÀ BIẾN CỐ</b>	<b>85</b>
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	85
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	86
Dạng 1. Phép thử gieo đồng xu.....	86
Dạng 2. Phép thử gieo súc sắc.....	86
Dạng 3. Một số phép thử đơn giản khác.....	86
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	87
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	88
<b>Bài 2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ</b>	<b>90</b>
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	90
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	90
Dạng 1. Sử dụng phương pháp liệt kê tính xác suất của biến cố.....	91
Dạng 2. Sử dụng phương pháp tổ hợp tính xác suất của biến cố.....	91
Dạng 3. Sử dụng sơ đồ hình cây tính xác suất của biến cố.....	93
Dạng 4. Sử dụng biến cố đối.....	93
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	94
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	94

## BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

### §1. DẤU TAM THỨC BẬC HAI

#### A TÓM TẮT LÝ THUYẾT

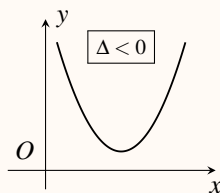
##### 1 Dấu của tam thức bậc hai

**Định nghĩa:** Tam thức bậc hai (đối với  $x$ ) là biểu thức có dạng  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Trong đó  $a, b, c$  là những số cho trước với  $a \neq 0$ .

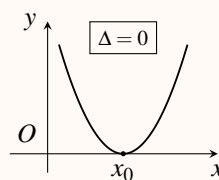
- Nghiệm của phương trình  $ax^2 + bx + c = 0$  được gọi là nghiệm của tam thức bậc hai.
- $\Delta = b^2 - 4ac$  và  $\Delta' = b^2 - ac$  theo thứ tự được gọi là biệt thức và biệt thức thu gọn của tam thức bậc hai.

**Định lý về dấu của tam thức bậc hai:** Ta đã biết hàm số  $y = ax^2 + bx + c$  với  $a \neq 0$  có đồ thị là một parabol.

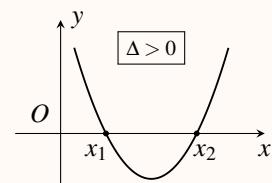
☑ Nếu  $a > 0$ , ta có các trường hợp sau:



Đồ thị luôn nằm trên  $Ox$ .

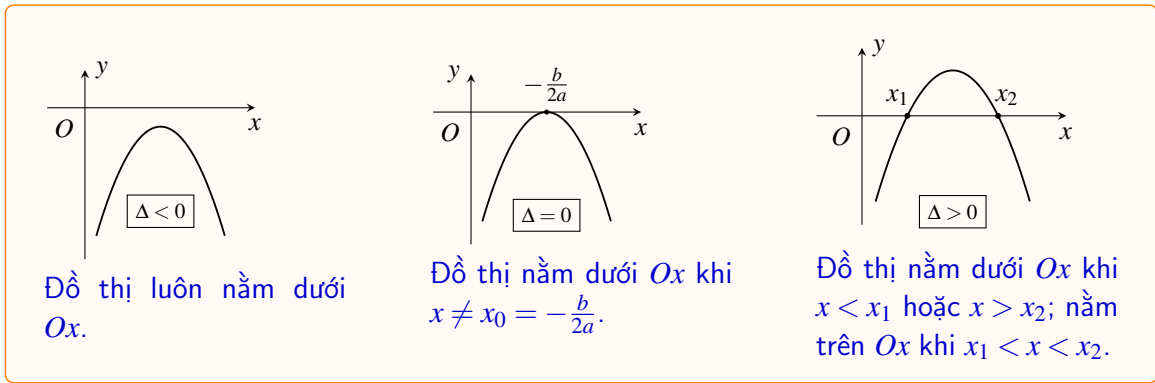


Đồ thị nằm trên  $Ox$  khi  $x \neq x_0 = -\frac{b}{2a}$ .



Đồ thị nằm trên  $Ox$  khi  $x < x_1$  hoặc  $x > x_2$ ; nằm dưới  $Ox$  khi  $x_1 < x < x_2$ .

☑ Nếu  $a < 0$ , ta có các trường hợp sau:



Tương ứng hình ảnh đồ thị ở trên, ta có bảng tổng kết dấu của tam thức bậc hai như sau:

✔ Nếu  $a > 0$ :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	+	

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$f(x)$	+	0	+

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

✔ Nếu  $a < 0$ :

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	-	

$x$	$-\infty$	$x_0$	$+\infty$
$f(x)$	-	0	-

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$f(x)$	-	0	+	0	-

**Định lý về dấu tam thức bậc hai:** Cho tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  ( $a \neq 0$ ).

- ✔ Nếu  $\Delta < 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .
- ✔ Nếu  $\Delta = 0$  thì  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \neq -\frac{b}{2a}$ .
- ✔ Nếu  $\Delta > 0$  thì tam thức  $f(x)$  có hai nghiệm phân biệt  $x_1$  và  $x_2$  ( $x_1 < x_2$ ). Khi đó,  $f(x)$  cùng dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ ;  $f(x)$  trái dấu với hệ số  $a$  với mọi  $x \in (x_1; x_2)$

**Ghi nhớ dấu của  $f(x)$  và  $a$**

✔ Nếu  $\Delta < 0$  thì

$x$	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu	

✔ Nếu  $\Delta = 0$  thì

$x$	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	cùng dấu	0	cùng dấu

✔ Nếu  $\Delta > 0$  thì

$x$	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$	
$f(x)$	cùng dấu	0	trái dấu	0	cùng dấu

**2 Bất phương trình bậc hai**

⚙ **Định nghĩa:** Bất phương trình bậc hai ẩn  $x$  là bất phương trình có dạng  $ax^2 + bx + c > 0$  (hoặc  $ax^2 + bx + c \geq 0, ax^2 + bx + c < 0, ax^2 + bx + c \leq 0$ ), trong đó  $a, b, c$  là những số thực đã cho và  $a \neq 0$ .

⚙ **Một số kết quả cần nhớ:** Cho tam thức bậc hai  $ax^2 + bx + c$ , với  $a \neq 0$ .

①  $ax^2 + bx + c > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

②  $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta < 0. \end{cases}$

③  $ax^2 + bx + c \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

④  $ax^2 + bx + c \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta \leq 0. \end{cases}$

**DT****1****Xét dấu tam thức bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , với  $a \neq 0$** 

- Tìm nghiệm  $ax^2 + bx + c = 0$  (1).
- Tùy thuộc vào số nghiệm của (1), ta lựa chọn bảng xét dấu phù hợp.

**≡ Ví dụ 1.** Xét dấu của các tam thức sau

a)  $3x^2 - 2x + 1$ .

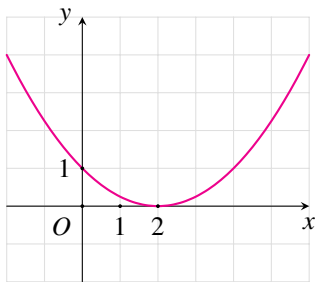
b)  $-x^2 + 4x + 5$ .

c)  $4x^2 + 4x + 1$ .

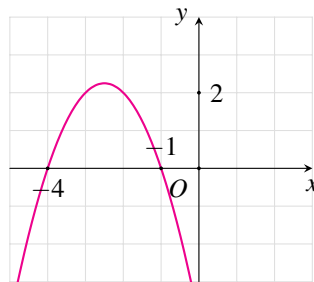
d)  $2x^2 - 6x + 4,5$ .

e)  $3x^2 - 2x - 8$ .

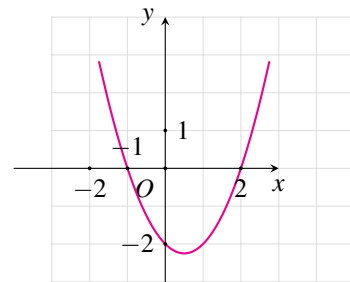
f)  $-x^2 + 2x - 1$ .

**≡ Ví dụ 2.** Tìm nghiệm và lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai  $f(x)$  với đồ thị được cho ở mỗi hình

a)



b)



c)

**DT****2****Giải bất phương trình bậc hai**

Ta lập bảng xét dấu của tam thức bậc hai. Sau đó, chọn kết quả phù hợp với yêu cầu đề bài.

**≡ Ví dụ 3.** Giải các bất phương trình sau

a)  $-3x^2 + 2x + 1 < 0$ .

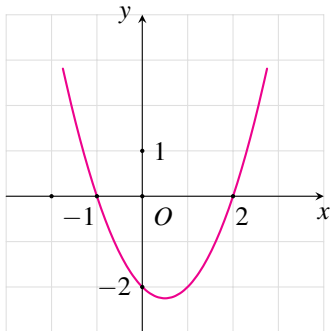
b)  $x^2 + x - 12 \geq 0$ .

c)  $-x^2 + x + 6 \leq 0$ .

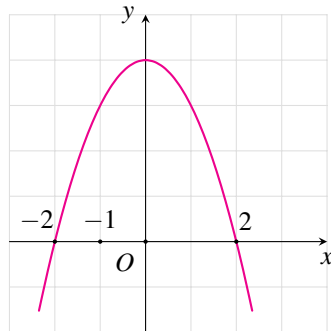
d)  $-x^2 + x - 5 < 0$

e)  $x^2 - 2x - 4 > 0$

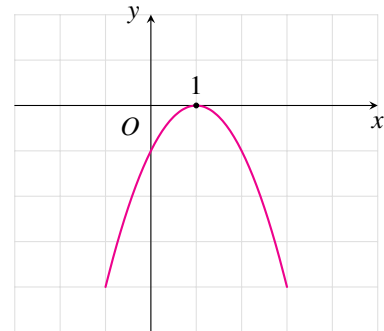
f)  $4x^2 + 4x + 1 > 0$

**≡ Ví dụ 4.** Tìm nghiệm của bất phương trình  $ax^2 + bx + c > 0$ , với đồ thị  $f(x) = ax^2 + bx + c$  được cho ở mỗi hình bên:

a)



b)



c)

**DT****3****Vận dụng, thực tiễn**

**Ví dụ 5.** Tìm các giá trị của tham số  $m$  để

a)  $x^2 - 2x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

b)  $x^2 - 2mx + 4 - 3m > 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

c)  $-x^2 - 2(2m - 1)x + 1 - 2m \leq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

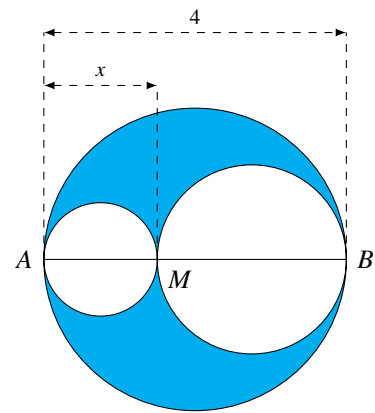
d)  $-2x^2 + 2(m - 2)x + m - 2 < 0, \forall x \in \mathbb{R}.$

**Ví dụ 6.** Độ cao so với mặt đất của một quả bóng được ném lên theo phương thẳng đứng được mô tả bởi hàm số bậc hai  $h(t) = -4,9t^2 + 20t + 1$ , ở đó độ cao  $h(t)$  tính bằng mét và thời gian  $t$  tính bằng giây. Trong khoảng thời điểm nào trong quá trình bay của nó, quả bóng sẽ ở độ cao trên 5 m so với mặt đất?

**Ví dụ 7.** Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao 320 m với vận tốc ban đầu  $v_0 = 20$  m/s. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá 100 m ? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

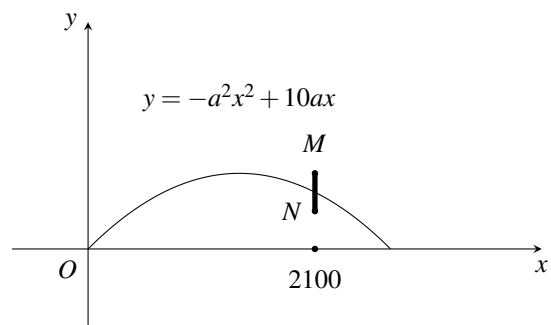
**Ví dụ 8.**

Xét đường tròn đường kính  $AB = 4$  và một điểm  $M$  di chuyển trên đoạn  $AB$ , đặt  $AM = x$ . Xét hai đường tròn đường kính  $AM$  và  $MB$ . Kí hiệu  $S(x)$  là diện tích phần hình phẳng nằm trong hình tròn lớn và nằm ngoài hai hình tròn nhỏ. Xác định các giá trị của  $x$  để diện tích  $S(x)$  không vượt quá một nửa tổng diện tích hai hình tròn nhỏ.



**Ví dụ 9.**

Một tình huống trong huấn luyện pháo binh được mô tả như sau: Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , khẩu đại bác được biểu thị bằng điểm  $O(0;0)$  và bia mục tiêu được biểu thị bằng đoạn thẳng  $MN$  với  $M(2100;25)$  và  $N(2100;15)$  (Hình 29). Xạ thủ cần xác định parabol  $y = -a^2x^2 + 10ax$  ( $a > 0$ ) mô tả quỹ đạo chuyển động của viên đạn sao cho viên đạn bắn ra từ khẩu đại bác phải chạm vào bia mục tiêu. Tìm giá trị lớn nhất của  $a$  để xạ thủ đạt được mục đích trên.



## C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Biểu thức nào sau đây là một tam thức bậc hai đối với  $x$ ?

A.  $f(x) = 2x^2 - \sqrt{3}.$

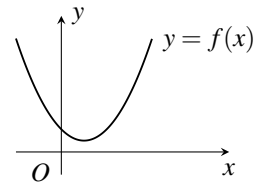
B.  $f(x) = 2x - 1.$

C.  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x}.$

D.  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x + 2}.$

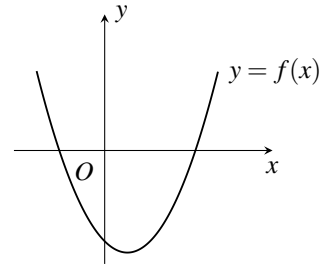
**Câu 2.** Cho hình vẽ bên, biết  $f(x) = ax^2 + bx + c$  và  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Xác định dấu của  $a$  và  $\Delta$ .

- A.  $a > 0, \Delta < 0$ .                      B.  $a < 0, \Delta < 0$ .  
 C.  $a > 0, \Delta > 0$ .                      D.  $a > 0, \Delta = 0$ .



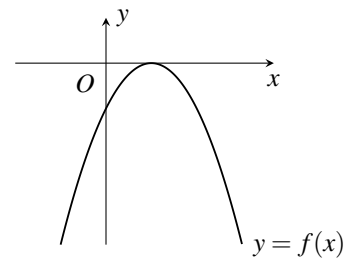
**Câu 3.** Cho hình vẽ bên, biết  $f(x) = ax^2 + bx + c$  và  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Xác định dấu của  $a$  và  $\Delta$ .

- A.  $a > 0, \Delta < 0$ .                      B.  $a < 0, \Delta < 0$ .  
 C.  $a > 0, \Delta > 0$ .                      D.  $a > 0, \Delta = 0$ .



**Câu 4.** Cho hình vẽ bên, biết  $f(x) = ax^2 + bx + c$  và  $\Delta = b^2 - 4ac$ . Xác định dấu của  $a$  và  $\Delta$ .

- A.  $a < 0, \Delta = 0$ .                      B.  $a < 0, \Delta < 0$ .  
 C.  $a > 0, \Delta > 0$ .                      D.  $a > 0, \Delta = 0$ .



**Câu 5.** Bảng xét dấu nào sau đây là bảng xét dấu của biểu thức  $f(x) = -x^2 + 14x - 49$ ?

A. 

$x$	$-\infty$	7	$+\infty$	
$f(x)$		+	0	+

B. 

$x$	$-\infty$	7	$+\infty$	
$f(x)$		+	0	-

C. 

$x$	$-\infty$	7	$+\infty$	
$f(x)$		-	0	-

D. 

$x$	$-\infty$	7	$+\infty$	
$f(x)$		-	0	+

**Câu 6.** Bảng xét dấu sau là của biểu thức nào?

$x$	$-\infty$	1	2	$+\infty$		
$f(x)$		-	0	+	0	-

- A.  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ .                      B.  $f(x) = -(x - 1)(x - 2)$ .  
 C.  $f(x) = -x^2 - 3x + 2$ .                      D.  $f(x) = x^2 - 3x + 2$ .

**Câu 7.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình  $-5x^2 + 4x + 12 > 0$ .

- A.  $(-\infty; -\frac{6}{5}) \cup (2; +\infty)$ .                      B.  $(-2; \frac{6}{5})$ .  
 C.  $(-\frac{6}{5}; 2)$ .                      D.  $(-\infty; -2) \cup (\frac{6}{5}; +\infty)$ .

**Câu 8.** Bất phương trình nào dưới đây có tập nghiệm là  $\mathbb{R}$ ?

- A.  $x^2 + 5x - 7 < 0$ .                      B.  $-x^2 + x - 5 < 0$ .                      C.  $x^2 - 4x + 4 > 0$ .                      D.  $-2x^2 + 9x - 13 > 0$ .

**Câu 9.** Tam thức bậc hai  $x^2 - 5x - 6$  luôn dương khi

- A.  $x < -1$  hoặc  $x > 6$ .                      B.  $-1 < x < 6$ .                      C.  $x \leq -1$  hoặc  $x \geq 6$ .                      D.  $-1 \leq x \leq 6$ .

**Câu 10.** Tam thức bậc hai  $-x^2 + 5x - 4$  không âm khi

- A.  $x < 1$  hoặc  $x > 4$ .                      B.  $1 < x < 4$ .                      C.  $x \leq 1$  hoặc  $x \geq 4$ .                      D.  $1 \leq x \leq 4$ .

**Câu 11.** Có bao nhiêu số nguyên  $x$  để biểu thức  $f(x) = (3x^2 + x - 2)^2 - (x^2 - x - 7)^2$  luôn âm?

- A. 1.                                      B. 0.                                      C. 2.                                      D. 3.

**Câu 12.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{2x^2 - 5x - 2}$  là

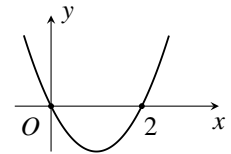
- A.  $(-\infty; \frac{1}{2}]$ .                                      B.  $[2; +\infty)$ .                                      C.  $(-\infty; \frac{1}{2}] \cup [2; +\infty)$ .                                      D.  $[\frac{1}{2}; 2]$ .

**Câu 13.** Tập xác định của hàm số  $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$  là

- A.  $(1; 3)$ .                                      B.  $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ .                                      C.  $(-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$ .                                      D.  $[-1; 3]$ .

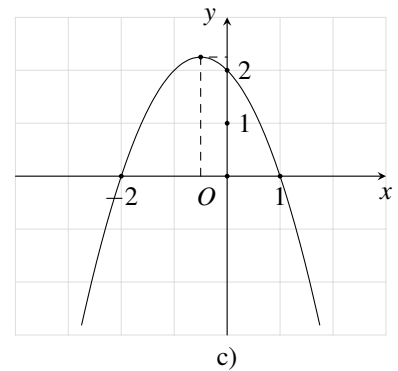
**Câu 14.** Cho hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  có đồ thị như hình bên. Tìm tập nghiệm của bất phương trình  $ax^2 + bx + c \leq 0$ .

- A.  $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ .                                      B.  $[0; 2]$ .  
 C.  $(-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$ .                                      D.  $(0; 2)$ .



**Câu 15.** Cho hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  có đồ thị như hình bên. Tìm tập nghiệm của bất phương trình  $ax^2 + bx + c \geq 0$ .

- A.  $(-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ .                                      B.  $(-\infty; -2] \cup [1; +\infty)$ .  
 C.  $[-2; 1]$ .                                      D.  $(0; 2)$ .



**Câu 16.** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để tam thức bậc hai  $f(x) = -2x^2 - (m+2)x + m^2 - m - 1$  luôn âm trên  $\mathbb{R}$ ?

- A. 4.                                      B. 3.                                      C. 2.                                      D. 1.

**Câu 17.** Tìm tất cả giá trị thực của tham số  $m$  để  $-2x^2 + (m+2)x + m - 4 < 0$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ .

- A.  $m < -14$  hoặc  $m > 2$ .                                      B.  $-14 \leq m \leq 2$ .  
 C.  $-2 < m < 14$ .                                      D.  $-14 < m < 2$ .

**Câu 18.** Lợi nhuận thu được từ việc sản xuất và bán  $x$  sản phẩm thủ công của một cửa hàng là  $I(x) = -0,1x^2 + 235x - 70000$  với  $I$  được tính bằng nghìn đồng. Hỏi số lượng sản phẩm bán ra tối thiểu là bao nhiêu thì cửa hàng có lãi?

- A. 300.                                      B. 250.                                      C. 350.                                      D. 320.

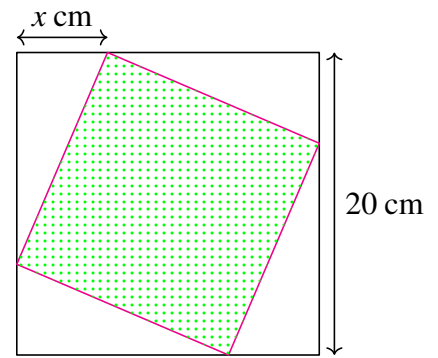
**Câu 19.** Kim muốn trồng một vườn hoa trên mảnh đất hình chữ nhật và làm hàng rào bao quanh. Kim chỉ có đủ vật liệu để làm 30 m hàng rào nhưng muốn diện tích vườn hoa ít nhất là  $50 \text{ m}^2$ . Hỏi chiều rộng của vườn hoa nằm trong khoảng nào?

- A.  $[8; 12]$ .                                      B.  $[3; 7]$ .                                      C.  $[5; 10]$ .                                      D.  $[10; 15]$ .



**Câu 20.** Xét một hình vuông lớn có kích thước  $20 \times 20$ . Từ hình vuông lớn, người ta cắt ra một hình vuông nhỏ như hình bên (các đỉnh hình vuông nhỏ nằm trên cạnh hình vuông lớn). Tìm tập hợp các giá trị của  $x$  để diện tích hình vuông nhỏ không vượt quá 208.

- A.  $8 \leq x \leq 12$ .                      B.  $6 \leq x \leq 14$ .  
C.  $12 \leq x \leq 14$ .                      D.  $12 \leq x \leq 18$ .



**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 24. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 21.** Cho hàm số bậc hai  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như hình bên dưới:

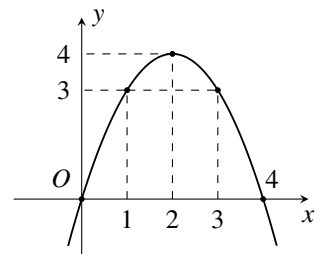
$x$	$-\infty$	$-2$	$4$	$+\infty$		
$f(x)$		$-$	$0$	$+$	$0$	$-$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $f(-1) < 0$ .  
b)  $f(5) > 0$ .  
c) Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) \leq 0$  là  $[-2; 3]$ .  
d) Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) < 0$  là  $(-\infty; -2)$ .

**Câu 22.** Cho hàm số  $f(x) = ax^2 + bx + c$  có đồ thị như hình bên. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hệ số  $a < 0$ .  
b) Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) \geq 0$  là  $[0; 4]$ .  
c) Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) \geq 4$  là  $\emptyset$ .  
d) Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) \geq 3$  là  $[1; 3]$ .



**Câu 23.** Cho  $f(x), g(x)$  là các hàm số xác định trên  $\mathbb{R}$ , có bảng xét dấu như sau

$x$	$-\infty$	$1$	$2$	$3$	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) < 0$  là  $(1; 2) \cup (2; 3)$ .  
b) Tập nghiệm của bất phương trình  $g(x) \geq 0$  là  $[2; +\infty)$ .  
c) Tập nghiệm của bất phương trình  $f(x) \cdot g(x) \leq 0$  là  $(-\infty; 1] \cup [2; 3]$ .  
d) Tập nghiệm của bất phương trình  $\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0$  là  $[1; 2] \cup [3; +\infty)$ .

**Câu 24.** Người ta thử nghiệm ném một quả bóng trên Mặt Trăng. Nếu quả bóng được ném lên từ độ cao  $h_0$  (m) so với bề mặt của Mặt Trăng với vận tốc  $v_0$  (m/s) thì độ cao của bóng sau  $t$  giây được cho bởi hàm số  $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h_0$  với  $g = 1,625$  (m/s<sup>2</sup>) là gia tốc trọng trường của Mặt Trăng. Biết

độ cao ban đầu của quả bóng vào các thời điểm 8 giây và 12 giây lần lượt là 30 m và 5 m. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Vận tốc ném  $v_0 = 10$  m/s.
- b) Độ cao ban đầu của quả bóng  $h_0 = 2$  m.
- c)  $h(t) = -0,8125t^2 + 10t + 2$ .
- d) Quả bóng ở độ cao trên 29 m trong khoảng 3,15 giây.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 25 đến câu 30 vào ô kết quả.**

**Câu 25.** Tập nghiệm của bất phương trình  $x^2 - x - 6 \leq 0$  có bao nhiêu số nguyên?

KQ:

**Câu 26.** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để phương trình  $4x^2 + 2(m - 2)x + m^2 = 0$  có nghiệm?

KQ:

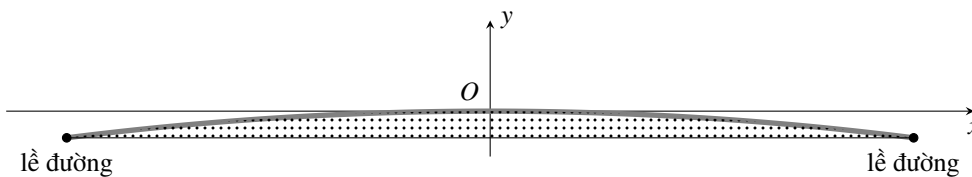
**Câu 27.** Một quả bóng được ném thẳng lên từ độ cao 1,6 m so với mặt đất với vận tốc 10 m/s. Độ cao của bóng so với mặt đất (tính bằng mét) sau  $t$  giây được cho bởi hàm số  $h(t) = -4,9t^2 + 10t + 1,6$ . Hỏi bóng ở độ cao trên 5 m trong khoảng thời gian bao lâu? (Kết quả tính bằng giây và làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

**Câu 28.** Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao 300 m với vận tốc ban đầu  $v_0 = 10$  m/s. Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể, hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá 120 m? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

**Câu 29.** Mặt cắt ngang của mặt đường thường có dạng hình parabol đê nước mưa đê dằng thoát sang hai bên. Mặt cắt ngang của một con đường được mô tả bằng hàm số  $y = -0,006x^2$  với gốc toạ độ đặt tại tim đường và đơn vị đo là mét như hình bên dưới.



Để tìm đường cao hơn lề đường không quá 15 cm thì chiều rộng của đường không vượt quá bao nhiêu mét?

KQ:

**Câu 30.** Một chiếc cống có hình parabol với chiều cao 5 m và khoảng cách giữa hai chân cống là 4 m. Người ta cần chuyển một thùng hàng hình hộp chữ nhật với chiều cao 3 m. Hỏi chiều rộng của thùng hàng tối đa là bao nhiêu để thùng có thể chuyển lọt qua được cống? (Đáp số làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:



## §2. PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

**1** Giải phương trình dạng  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

**Phương pháp giải:**

- Bình phương hai vế của phương trình (làm mất căn thức), ta được

$$ax^2 + bx + c = dx^2 + ex + f$$

*Chuyển vế, thu gọn ta được phương trình bậc hai. Giải phương trình này, tìm nghiệm.*

- Thay từng nghiệm vừa tìm được vào phương trình ban đầu. Nghiệm nào thoả mãn thì nhận; nghiệm nào **không** thoả thì loại.
- Kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

**2** Giải phương trình dạng  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$

**Phương pháp giải:**

- Bình phương hai vế của phương trình (làm mất căn thức), ta được

$$ax^2 + bx + c = (dx + e)^2$$

*Chuyển vế, thu gọn ta được phương trình bậc hai. Giải phương trình này, tìm nghiệm.*

- Thay từng nghiệm vừa tìm được vào phương trình ban đầu. Nghiệm nào thoả mãn thì nhận; nghiệm nào **không** thoả thì loại.
- Kết luận nghiệm của phương trình đã cho.

### B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

**DT** **1** Giải phương trình dạng  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + f}$

① **Phương pháp giải:** Bình phương hai vế, giải tìm  $x$ . Sau đó, thử lại và chọn nghiệm.

② **Chú ý:**

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

**≡ Ví dụ 1.** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{5x^2 - 28x - 29} = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$ ;

b)  $\sqrt{6x^2 - 22x + 14} = \sqrt{4x^2 - 11x - 1}$ ;

c)  $\sqrt{-x^2 + x + 17} = \sqrt{x^2 - 12x + 2}$ ;

d)  $\sqrt{x^2 - 6x - 4} = \sqrt{x - 4}$ .

e)  $\sqrt{2x^2 + 3x + 1} - \sqrt{x^2 + 4x + 3} = 0$ .

f)  $\sqrt{2x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 + x + 6} = 0$ ;

**DT**

**2**

**Giải phương trình dạng  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = dx + e$**

① **Phương pháp giải:** Bình phương hai vế, giải tìm  $x$ . Sau đó, thử lại và chọn nghiệm.

② **Chú ý:**

•  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

•  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ .

**Ví dụ 2.** Giải các phương trình sau:

a)  $\sqrt{2x^2 + 3x - 1} = x + 3$ ;

b)  $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = 3x + 5$ ;

c)  $\sqrt{69x^2 - 52x + 4} = -6x + 4$ ;

d)  $\sqrt{-x^2 - 4x + 22} = -2x + 5$ ;

e)  $\sqrt{-7x^2 - 60x + 27} + 3(x - 1) = 0$ ;

f)  $\sqrt{3x^2 - 9x - 5} + 2x = 5$ .

**DT**

**3**

**Vận dụng, thực tiễn**

**Ví dụ 3.**

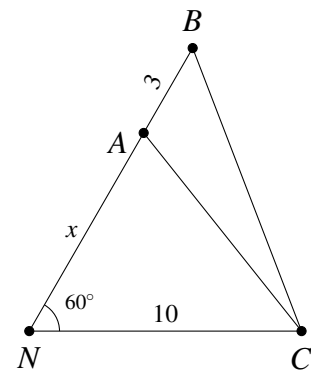
Khoảng cách từ nhà An ở vị trí  $N$  đến cột điện  $C$  là 10 m. Từ nhà, An đi  $x$  mét theo phương tạo với  $NC$  một góc  $60^\circ$  đến vị trí  $A$  sau đó đi tiếp 3 m đến vị trí  $B$  như hình bên.

a) Biểu diễn khoảng cách  $AC$  và  $BC$  theo  $x$ .

b) Tìm  $x$  để  $AC = \frac{8}{9}BC$ .

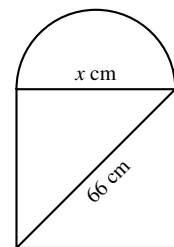
c) Tìm  $x$  để khoảng cách  $BC = 2AN$ .

Lưu ý: Đáp số làm tròn đến hàng phần mười.



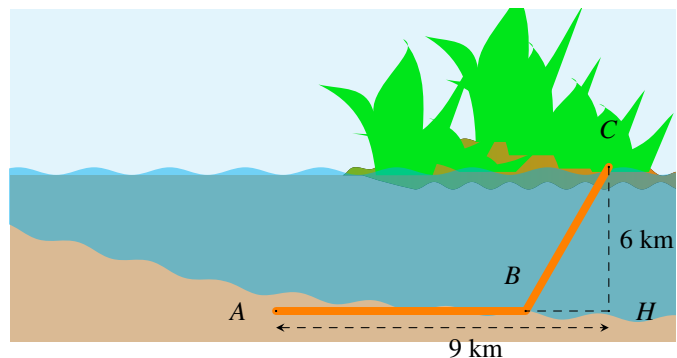
**Ví dụ 4.**

Mặt cắt đứng của cột cây số trên quốc lộ có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật (xem hình bên). Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài 66 cm. Tìm kích thước của hình chữ nhật, biết rằng diện tích của phần nửa hình tròn bằng 0,3 lần diện tích của phần hình chữ nhật. Lấy  $\pi = 3,14$  và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.



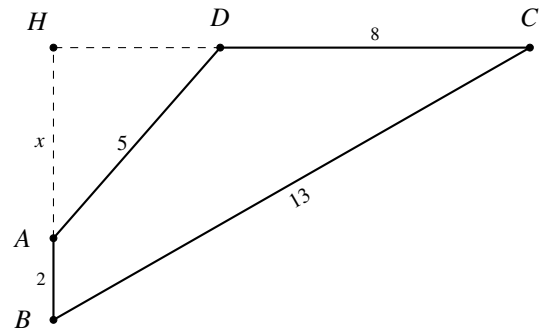
**Ví dụ 5.**

Một công ty muốn làm một đường ống dẫn từ một điểm  $A$  trên bờ đến một điểm  $C$  trên một hòn đảo. Hòn đảo cách bờ biển 6 km. Để thực hiện, công ty dự định xây dựng phần đường ống trên bờ từ  $A$  đến  $B$  và đường ống dưới nước từ  $B$  đến  $C$  (hình vẽ). Biết giá để xây dựng đường ống trên bờ là 50.000USD mỗi km, và 130.000USD mỗi km để xây dưới nước. Xác định đoạn đường từ  $A$  đến  $B$  để tổng chi phí xây dựng lắp đặt từ  $A$  đến  $C$  khoảng 1.170.000 USD.



**≡ Ví dụ 6.**

Cho tứ giác  $ABCD$  có  $AB \perp CD$ ;  $AB = 2$ ;  $BC = 13$ ;  $CD = 8$ ;  $DA = 5$ . Gọi  $H$  là giao điểm của  $AB$  và  $CD$  và đặt  $x = AH$ . Hãy thiết lập một phương trình để tính độ dài  $x$ , từ đó tính diện tích tứ giác  $ABCD$ .

**C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM**

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{x^2 + 3x - 2} = \sqrt{1 + x}$  là

- A.  $\emptyset$ .                      B.  $\{1\}$ .                      C.  $\{1; -3\}$ .                      D.  $\{-3\}$ .

**Câu 2.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{2x^2 - 3x - 2} = \sqrt{x^2 + x + 3}$  là

- A.  $\emptyset$ .                      B.  $\{-1; 5\}$ .                      C.  $\{-1; 4\}$ .                      D.  $\{5\}$ .

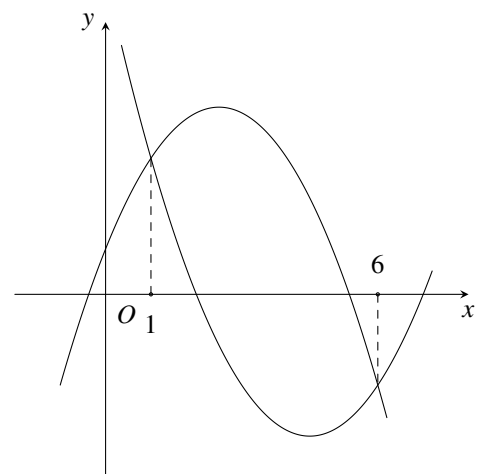
**Câu 3.** Khẳng định nào đúng với phương trình  $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = \sqrt{3x^2 - 2x - 13}$ ?

- A. Phương trình có hai nghiệm phân biệt cùng dấu.  
 B. Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu.  
 C. Phương trình có một nghiệm.  
 D. Phương trình vô nghiệm.

**Câu 4.**

Cho đồ thị của hai hàm số bậc hai  $f(x) = ax^2 + bx + c$  và  $g(x) = dx^2 + ex + h$  như hình bên. Khẳng định nào đúng với phương trình  $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \sqrt{dx^2 + ex + h}$ ?

- A. Phương trình có hai nghiệm phân biệt là  $x = 1$  và  $x = 6$ .  
 B. Phương trình có 1 nghiệm là  $x = 1$ .  
 C. Phương trình có 1 nghiệm là  $x = 6$ .  
 D. Phương trình vô nghiệm.



**Câu 5.** Tích các nghiệm của phương trình  $\sqrt{2x^2 - 3x - 1} = \sqrt{x^2 - 4x + 5}$  bằng

- A.  $-5$ .                      B.  $-6$ .                      C.  $6$ .                      D.  $5$ .

**Câu 6.** Số nghiệm của phương trình  $\sqrt{4x^2 - 3x + 2} = \sqrt{x^2 + 2x - 7}$ .

- A.  $1$ .                      B.  $0$ .                      C.  $3$ .                      D.  $2$ .

**Câu 7.** Khẳng định nào đúng với phương trình  $\sqrt{5x^2 + 27x + 36} = 2x + 5$ ?

- A. Phương trình có một nghiệm.  
 B. Phương trình vô nghiệm.

C. Tổng các nghiệm của phương trình là  $-7$ .

D. Các nghiệm của phương trình đều không bé hơn  $-\frac{5}{2}$ .

**Câu 8.** Phương trình  $\sqrt{x^2 + 2x - 3} = 5 - x$  có nghiệm là  $x = \frac{a}{b}$ . Khi đó  $a + 2b$  bằng

A. 10.                      B. 13.                      C. 8.                      D. 15.

**Câu 9.** Tập nghiệm của phương trình  $\sqrt{6x^2 + 4x - 1} = x + 2$  là

A.  $\emptyset$ .                      B.  $\{-1; 1\}$ .                      C.  $\{-1; 3\}$ .                      D.  $\{1\}$ .

**Câu 10.** Số nghiệm của phương trình  $\sqrt{2x^2 - x + 8} = 3x + 3$ .

A. 2.                      B. 1.                      C. 3.                      D. 0.

**Câu 11.** Tổng các nghiệm của phương trình  $\sqrt{5x^2 + 8x - 4} = 4 - x$  bằng

A. 4.                      B.  $-4$ .                      C. 6.                      D.  $-6$ .

**Câu 12.** Tổng bình phương các nghiệm của phương trình  $\sqrt{6x^2 + 10x - 3} = 2x + 5$  bằng

A. 10.                      B. 53.                      C. 8.                      D. 15.

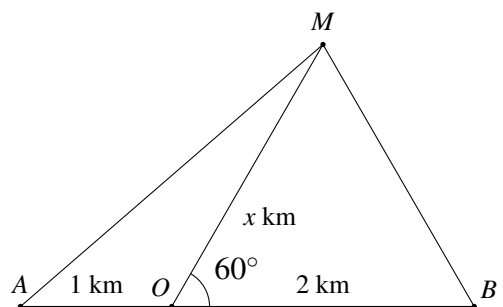
**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 13 đến câu 14. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 13.** Cho phương trình  $\sqrt{x^2 - 4x} = \sqrt{x + 1}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Điều kiện xác định của phương trình là  $x \geq -1$ .
- b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt.
- c) Tổng các nghiệm của phương trình bằng  $-5$ .
- d) Tích các nghiệm của phương trình bằng  $-1$ .

**Câu 14.**

Một con tàu biển  $M$  rời cảng  $O$  và chuyển động thẳng theo phương tạo với bờ biển một góc  $60^\circ$ . Trên bờ biển có hai đài quan sát  $A$  và  $B$  nằm về hai phía so với cảng  $O$  và lần lượt cách cảng  $O$  khoảng cách 1 km và 2 km. Đặt độ dài của  $MO$  là  $x$  (km). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a) Khoảng cách từ tàu đến đài quan sát A được tính theo  $x$  là  $x^2 + x + 1$ .
- b) Khoảng cách từ tàu đến đài quan sát B được tính theo  $x$  là  $\sqrt{x^2 - 2x + 4}$ .
- c) Khoảng cách từ tàu đến B bằng  $\frac{4}{5}$  khoảng cách từ tàu đến A khi  $x \approx 1,64$  (km) hoặc  $x \approx 5,69$  (km).
- d) Khoảng cách từ tàu đến B nhỏ hơn khoảng cách từ tàu đến O đúng 500 m khi  $x = 3,75$  (km).

**PHẦN III.** Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 15 đến câu 17 vào ô kết quả.

**Câu 15.** Tích hai nghiệm của phương trình  $\sqrt{2x^2 - x + 4} - \sqrt{x^2 + 5x - 1} = 0$  bằng bao nhiêu?

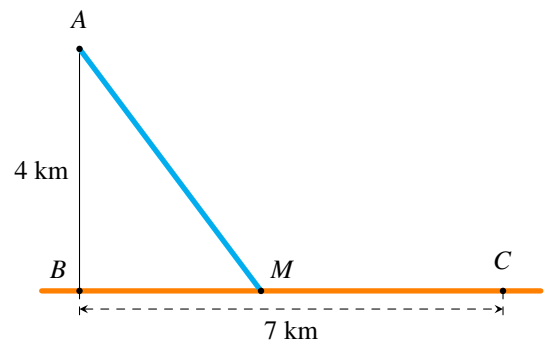
KQ:

**Câu 16.** Tổng hai nghiệm của phương trình  $\sqrt{2x^2 + 5x - 2} + x - 6 = 0$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 17.** Một ngọn hải đăng đặt tại vị trí  $A$  cách bờ biển một khoảng cách  $AB = 4$  km. Trên bờ biển có một cái kho ở vị trí  $C$  cách  $B$  một khoảng là 7 km. Người canh hải đăng có thể chèo thuyền từ  $A$  đến vị trí  $M$  trên bờ biển với vận tốc 3 km/h rồi đi bộ đến  $C$  với vận tốc 5 km/h như hình bên. Tính khoảng cách (đơn vị km) từ vị trí  $B$  đến  $M$ , biết thời gian người đó đi từ  $A$  đến  $C$  là 148 phút.

KQ:



# Chương 8

## ĐẠI SỐ TỔ HỢP

### §1. QUY TẮC CỘNG VÀ QUY TẮC NHÂN

#### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

##### 1 Quy tắc cộng và sơ đồ hình cây

###### ⚙️ Quy tắc cộng:

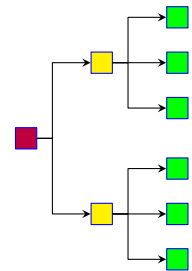
Giả sử một công việc được hoàn thành bởi một trong **hai** phương án khác nhau:

- Phương án 1 có  $n_1$  cách thực hiện;
- Phương án 2 có  $n_2$  cách thực hiện không trùng với bất kỳ cách nào của hành động thứ nhất.

Khi đó, số cách thực hiện công việc là  $n_1 + n_2$  cách.

###### ⚙️ Sơ đồ hình cây:

Là sơ đồ bắt đầu tại một nút duy nhất với các nhánh tỏa ra các nút bổ sung. Trong các bài toán đếm, ta thường dùng sơ đồ hình cây để minh họa, giúp cho việc đếm thuận tiện và không bỏ sót trường hợp.



##### 2 Quy tắc nhân

###### ⚙️ Quy tắc nhân:

Giả sử một công việc được hoàn thành bởi **hai** công đoạn **liên tiếp** nhau:

- Công đoạn 1 có  $m_1$  cách thực hiện,
- Với mỗi cách thực hiện công đoạn 1, có  $m_2$  cách thực hiện công đoạn 2.

Khi đó, số cách thực hiện công việc là  $m_1 \cdot m_2$  cách.

⚙️ **Lưu ý:** Quy tắc nhân áp dụng để tính số cách thực hiện công việc có nhiều công đoạn, các công đoạn nối tiếp nhau và những công đoạn này độc lập nhau.



**Ví dụ 9.** Một hộp chứa 10 quả cầu màu đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 15 quả cầu màu xanh được đánh số từ 1 đến 15. Chọn ngẫu nhiên 2 quả cầu. Hỏi có bao nhiêu cách để chọn được hai quả cầu khác màu và tổng của các số trên hai quả cầu là một số lẻ?

Đáp số: 75

**Ví dụ 10.** Một người có 7 cái áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cái cà vạt trong đó có hai cà vạt màu vàng. Hỏi người đó có bao nhiêu cách chọn áo - cà vạt nếu

- Chọn áo nào cũng được và cà vạt nào cũng được?
- Chọn áo trắng thì không chọn cà vạt màu vàng?

Đáp số: a) 35    b) 29.

**Ví dụ 11.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên là số chẵn có 4 chữ số khác nhau?

Đáp số: 750

**Ví dụ 12.** Cho tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ . Hỏi từ tập  $A$  có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số đôi một khác nhau sao cho một trong 3 chữ số đầu tiên phải bằng 1.

Đáp số: 2280.

**Ví dụ 13.** Cho tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số khác nhau và lớn hơn 350?

Đáp số: 43

## C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Trong tủ quần áo của bạn An có 4 chiếc áo khác nhau và 3 chiếc quần khác nhau. Hỏi bạn An có bao nhiêu cách chọn 1 bộ quần áo để mặc?

Đáp số: 12.

2 Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 7 món, 1 loại quả tráng miệng trong 4 loại quả tráng miệng và một nước uống trong 5 loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn.

Đáp số: 140.

3 Một hộp chứa các viên bi khác nhau gồm 6 viên bi đỏ, 9 viên bi xanh và 5 bi vàng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 viên bi có đủ cả ba màu?

Đáp số: 270

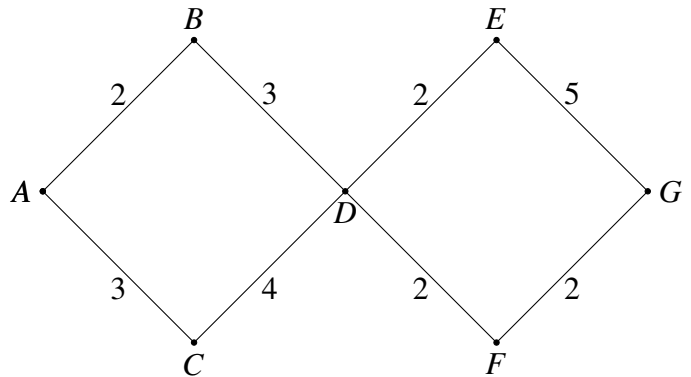
4 Một hội nghị 3 nước Đông Dương có số đại biểu gồm: 10 đại biểu Việt Nam; 8 đại biểu Campuchia và 6 đại biểu Lào.

- Có bao nhiêu cách chọn một vị đại biểu để đọc diễn văn khai mạc?
- Có bao nhiêu cách chọn 3 vị đại biểu của 3 nước khác nhau làm thư ký đoàn?
- Có bao nhiêu cách chọn 2 vị đại biểu của 2 nước khác nhau để họp báo?

5 Trên giá sách có 6 cuốn sách Ngữ Văn khác nhau, 7 cuốn sách Toán khác nhau và 8 cuốn sách Tiếng Anh khác nhau. Từ giá sách này,

- a) có bao nhiêu cách lấy một cuốn sách?
- b) có bao nhiêu cách lấy ba cuốn sách, mỗi môn một cuốn?
- c) có bao nhiêu cách lấy hai cuốn sách từ hai môn khác nhau?

6 Xét mạng đường nối các tỉnh A, B, C, D, E, F, G, trong đó số viết trên mỗi cạnh cho biết số con đường nối hai tỉnh nằm ở hai đầu mút của cạnh như hình vẽ. Có bao nhiêu cách đi từ tỉnh A đến tỉnh G?



7 Có bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi một khác nhau.  
Đáp số: 648.

8 Cho các số 1, 2, 5, 7, 8. Có bao nhiêu cách lập ra một số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau (các số lấy ra từ 5 số trên) sao cho số tạo thành

- a) là một số chẵn;
- b) không có chữ số 7;
- c) nhỏ hơn 278.

Đáp số: a) 24; b) 24; c) 20.

9 Cho các chữ số 0, 2, 4, 5, 6, 8, 9. Từ các số trên

- a) có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 3 chữ số khác nhau.
- b) có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau, trong đó nhất thiết phải có mặt chữ số 5.

Đáp số: a) 180; b) 420.

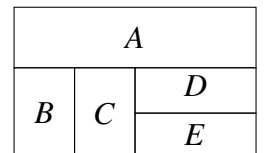
10 Cho tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Hỏi từ tập hợp A có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và đó là số chia hết cho 5.

Đáp số: 220.

11 Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 có thể lập ra được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau và số tạo thành không chia hết cho 10.

Đáp số: 1260.

12 Hình bên mô tả 5 xã trong một huyện. Hỏi có bao nhiêu cách mà em có thể dùng 4 màu khác nhau để tô màu sao cho không có hai xã giáp nhau nào trùng màu?



Đáp số: 96.

13 Mã xác thực (OTP – One Time Password) do một ngân hàng gửi vào điện thoại của khách hàng cho mỗi lần giao dịch là một dãy 6 kí tự từ các chữ số từ 0 đến 9. Có thể tạo ra bao nhiêu mã xác thực khác nhau như vậy?

Mã OTP xác thực giao dịch là 712892, hiệu lực trong 1 phút ...

Đáp số: 1000000.



- Câu 5.** Tung một con xúc xắc cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp và ghi lại kết quả. Hỏi có bao nhiêu kết quả khác nhau có bao nhiêu kết quả có thể xảy ra?
- A. 18.                      B. 216.                      C.  $3^6$ .                      D. 6.
- Câu 6.** Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 lập được bao nhiêu số tự nhiên lẻ có 3 chữ số khác nhau?
- A. 120.                      B. 30.                      C. 144.                      D. 168.
- Câu 7.** Nam muốn qua nhà Lan để cùng Lan tới trường. Từ nhà Nam tới nhà Lan có 3 con đường, từ nhà Lan đến trường có 5 con đường. Hỏi Nam có bao nhiêu cách chọn đường đi từ nhà đến trường?
- A. 8.                      B. 243.                      C. 10.                      D. 15.
- Câu 8.** Một người vào cửa hàng ăn, người đó chọn thực đơn gồm 1 món ăn trong 5 món, 1 loại quả trong 5 loại quả tráng miệng và một nước uống trong 3 loại nước uống. Có bao nhiêu cách chọn thực đơn?
- A. 25.                      B. 13.                      C. 75.                      D. 100.
- Câu 9.** Trong một bình đựng 4 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Lấy ngẫu nhiên ra 2 viên. Có bao nhiêu cách lấy được 2 viên khác màu?
- A. 64.                      B. 12.                      C. 81.                      D. 7.
- Câu 10.** Lớp 10A có 37 học sinh. Cô giáo cần chọn ra 3 bạn để bầu vào chức lớp trưởng, lớp phó và bí thư. Hỏi cô giáo có bao nhiêu cách chọn?
- A. 7770.                      B. 46620.                      C. 6.                      D. 5234.
- Câu 11.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 3 chữ số đôi khác nhau và chia hết cho 5?
- A. 144.                      B. 504.                      C. 120.                      D. 136.
- Câu 12.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn gồm bốn chữ số khác nhau.
- A. 252.                      B. 368.                      C. 480.                      D. 520.
- Câu 13.** Trong một tuần bạn A dự định mỗi ngày đi thăm một người bạn trong 12 người bạn của mình. Hỏi bạn A có thể lập được bao nhiêu kế hoạch đi thăm bạn của mình (thăm một bạn không quá một lần)?
- A. 3991680.                      B. 12.                      C. 35831808.                      D. 84.
- Câu 14.** Nhãn mỗi chiếc ghế trong hội trường gồm hai phần: phần đầu là một chữ cái (trong bảng 24 chữ cái tiếng Việt), phần thứ hai là một số nguyên dương nhỏ hơn 26. Hỏi có nhiều nhất bao nhiêu chiếc ghế được ghi nhãn khác nhau?
- A. 624.                      B. 48.                      C. 600.                      D. 26.
- Câu 15.** Biển số xe máy của tỉnh A (nếu không kể mã số tỉnh) có 6 kí tự, trong đó kí tự ở vị trí đầu tiên là một chữ cái (trong bảng 26 cái tiếng Anh), kí tự ở vị trí thứ hai là một chữ số thuộc tập  $\{1; 2; \dots; 9\}$ , mỗi kí tự ở bốn vị trí tiếp theo là một chữ số thuộc tập  $\{0; 1; 2; \dots; 9\}$ . Hỏi nếu chỉ dùng một mã số tỉnh thì tỉnh A có thể làm được nhiều nhất bao nhiêu biển số xe máy khác nhau?
- A. 2340000.                      B. 234000.                      C. 75.                      D. 2600000.
- Câu 16.** Có 10 cặp vợ chồng đi dự tiệc. Tổng số cách chọn một người đàn ông và một người đàn bà trong bữa tiệc phát biểu ý kiến sao cho hai người đó không là vợ chồng?
- A. 100.                      B. 91.                      C. 10.                      D. 90.

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

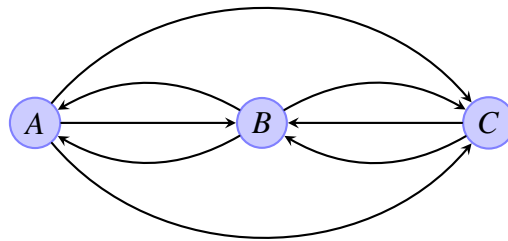
**Câu 17.** Trên một giá sách có 5 quyển sách Toán, 4 quyển sách Vật lý và 3 quyển sách Hóa học (các quyển sách đôi một khác nhau). Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Có 12 cách lấy một quyển sách tùy ý từ giá sách.
- b) Có 9 cách lấy hai quyển sách gồm Toán và Vật lý từ giá sách.
- c) Có 60 cách lấy ba quyển sách có đủ ba môn học từ giá sách.
- d) Có 48 cách lấy hai quyển sách gồm hai môn học khác nhau từ giá sách.

**Câu 18.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Có thể lập được 336 số có ba chữ số khác nhau.
- b) Có thể lập được 144 số là số lẻ có ba chữ số khác nhau.
- c) Có thể lập được 84 số có ba chữ số khác nhau và chia hết cho 5.
- d) Có thể lập được 154 số có ba chữ số khác nhau và nhỏ hơn 456.

**Câu 19.** Hình ảnh sau đây biểu diễn các con đường một chiều nối các thành phố A, B và C.



Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Có 2 cách di chuyển từ thành phố A đến thành phố C mà không đi qua thành phố B.
- b) Có 1 cách di chuyển từ thành phố A đến thành phố C mà đi qua thành phố B.
- c) Có 3 cách di chuyển từ thành phố A đến thành phố B mà không đi qua thành phố C.
- d) Có 3 cách di chuyển từ thành phố A đến thành phố C rồi quay trở về thành phố A.

**Câu 20.** Một cửa hàng có 7 bông hoa Ly, 15 bông hoa Hồng và 6 bông hoa Lan. Bạn Nam muốn mua 1 số bông hoa từ cửa hàng đó. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Có 28 cách chọn mua 1 bông hoa từ cửa hàng.
- b) Có 630 cách chọn mua một bó gồm 3 bông khác loại từ cửa hàng.
- c) Có 2766 cách chọn mua 2 bông khác loại từ cửa hàng.
- d) Có 13 cách chọn mua 1 bông Hồng từ cửa hàng.

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 21.** Một quán cafe cần trang trí một bức tường vuông được chia thành 4 ô như hình vẽ sau

1	2
4	3

Có bao nhiêu cách để người thợ sơn có thể dùng 4 màu khác nhau để sơn bức tường này sao cho mỗi ô vuông được tô một màu và các ô vuông cạnh nhau không có màu trùng nhau?

KQ:

**Câu 22.** Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm bốn chữ số đôi một khác nhau và không vượt quá 2024?

KQ:

**Câu 23.** Một hộp chứa 16 quả cầu gồm sáu quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, năm quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5 và năm quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 5. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra từ hộp đó 3 quả cầu vừa khác màu vừa khác số.

KQ:

**Câu 24.** Số số chẵn gồm bốn chữ số đôi một khác nhau được lập từ các số 0, 1, 2, 4, 5, 6, 8 bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 25.** Số điện thoại cho mỗi thuê bao của nhà mạng Viettel có 10 chữ số và có các đầu số là 032, 033, 034, 035, 036, 037, 038, 039, 096, 097, 098, 086. Giả sử hiện tại, nhà mạng đó đã cấp số cho tổng số 38 triệu thuê bao. Hỏi nếu không có thêm các đầu số mới và không thu hồi các đầu số đã cấp thì nhà mạng đó còn có thể cung cấp bao nhiêu triệu thuê bao nữa?

KQ:

## §2. HOÁN VỊ - CHỈNH HỢP - TỔ HỢP

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Hoán vị

Cho tập  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  được gọi là một hoán vị của  $n$  phần tử đó.

- Số các hoán vị của  $n$  phần tử, kí hiệu là  $P_n$ .
- Công thức tính  $P_n = n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ . ( $n!$  đọc là  $n$  giai thừa)

Nhận dạng bài toán: "Chọn hết phần tử và đi sắp xếp"

#### Ví dụ 1

Xếp 4 học sinh A, B, C, D vào một bàn dài 4 chỗ ngồi thì

- Các hoán vị là  $ABCD, ACDB, \dots$
- Số hoán vị (hay số cách xếp) là  $P_4 = 4! = 24$  cách.

#### 2 Chỉnh hợp

Cho tập  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n \geq 1$ ). Kết quả của việc lấy  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) phần tử khác nhau từ  $n$  phần tử của tập hợp  $A$  và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó được gọi là một chỉnh hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử đã cho (gọi tắt là một chỉnh hợp chập  $k$  của  $A$ ).

- Số các chỉnh hợp chập  $k$  của một tập hợp có  $n$  phần tử, kí hiệu là  $A_n^k$ .
- Với quy ước  $0! = 1$ , ta có công thức tính  $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$ .
- $A_n^n = n! = P_n$ .

Nhận dạng bài toán: "Chọn  $k$  phần tử trong tập gồm  $n$  phần tử và đi sắp xếp"

#### 3 Tổ hợp

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử và số nguyên  $k$  với  $1 \leq k \leq n$ . Mỗi tập con của  $A$  có  $k$  phần tử được gọi là một tổ hợp chập  $k$  của  $n$  phần tử của  $A$  (gọi tắt là một tổ hợp chập  $k$  của  $A$ ).

- Số các tổ hợp chập  $k$  của một tập hợp có  $n$  phần tử, kí hiệu là  $C_n^k$ .
- Số  $k$  trong định nghĩa cần thỏa mãn điều kiện  $1 \leq k \leq n$ . Tuy nhiên, tập hợp không có phần tử nào là tập rỗng nên ta quy ước gọi tổ hợp chập 0 của  $n$  phần tử là tập rỗng.
- Cho các số nguyên dương  $n$  và  $k$  với  $0 \leq k \leq n$ . Với quy ước  $0! = 1$ , số các tổ hợp chập  $k$  của một tập hợp có  $n$  phần tử là

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{A_n^k}{k!}.$$

Nhận dạng bài toán: "Chọn  $k$  phần tử trong tập gồm  $n$  phần tử để tạo thành 1 tập con."



**Ví dụ 9.** Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 7. Từ các số trên có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và chia hết cho 5?  
Đáp số: 60.

**DT 3** Tổ hợp và số tổ hợp

**Ví dụ 10.** Một tổ công nhân có 12 người. Cần chọn 3 người để đi làm cùng một nhiệm vụ, hỏi có bao nhiêu cách chọn?  
Đáp số: 220

**Ví dụ 11.** Giải bóng đá AFF-CUP 2018 có tất cả 10 đội bóng tham gia, chia đều làm hai bảng A và B. Ở vòng đấu bảng, mỗi đội bóng thi đấu với mỗi đội bóng cùng bảng 1 trận. Hỏi tại vòng bảng các đội thi đấu tổng cộng bao nhiêu trận?  
Đáp số: 20

**Ví dụ 12.** Có 20 bông hoa trong đó có 8 bông đỏ, 7 bông vàng, 5 bông trắng. Chọn ngẫu nhiên 4 bông để tạo thành một bó. Có bao nhiêu cách chọn để bó hoa có cả 3 màu?  
Đáp số: 2380

**Ví dụ 13.** Một đội xây dựng gồm 3 kỹ sư, 7 công nhân. Có bao nhiêu cách lập từ đó một tổ công tác 5 người gồm 1 kỹ sư làm tổ trưởng, 1 công nhân làm tổ phó và 3 công nhân làm tổ viên?  
Đáp số: 420

**Ví dụ 14.** Từ một tập gồm 10 câu hỏi, trong đó có 4 câu lý thuyết và 6 câu bài tập, người ta cấu tạo thành các đề thi. Biết rằng trong một đề thi phải gồm 3 câu hỏi trong đó có ít nhất 1 câu lý thuyết và 1 câu hỏi bài tập. Hỏi có thể tạo được bao nhiêu đề như trên?  
Đáp số: 96

**Ví dụ 15.** Từ các số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập ra được bao nhiêu số tự nhiên gồm 4 chữ số khác nhau sao cho số cần lập có đúng 2 chữ số chẵn và 2 chữ số lẻ?  
Đáp số: 216

**Ví dụ 16.** Thầy giáo Dương có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu dễ không ít hơn 2.  
Đáp số: 56875.

**C** BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Một hộp đựng 5 viên bi màu xanh, 7 viên bi màu vàng. Có bao nhiêu cách lấy ra 6 viên bi bất kỳ?  
Đáp số: 924.

2 Trong mặt phẳng cho tập hợp gồm 6 điểm phân biệt. Có bao nhiêu véc-tơ khác  $\vec{0}$  có điểm đầu và điểm cuối trong tập hợp này?  
Đáp số: 30.

3 Một câu lạc bộ có 25 thành viên. Tìm số cách chọn một ban quản lí gồm 1 chủ tịch, 1 phó chủ tịch và 1 thư ký.  
Đáp số: 13800

4 Có 10 cuốn sách khác nhau và 7 cây bút máy khác nhau. Cần chọn ra 3 cuốn sách và 3 cây bút máy để làm quà tặng cho 3 học sinh, mỗi em 1 cuốn sách và 1 cây bút máy. Hỏi có mấy cách chọn?  
Đáp số: 151200.

5 Một tổ có 5 học sinh nam và 5 học sinh nữ.  
a) Có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh đó thành một hàng dọc.

b) Có bao nhiêu cách xếp 10 học sinh đó thành một hàng dọc sao cho các học sinh cùng giới tính không đứng kề nhau.

Đáp số: a) 3628800 b) 28800

6 Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

Đáp số: 15120.

7 Cho tập hợp  $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số phân biệt lấy từ tập  $A$  và 3 chữ số 1, 2, 3 luôn đứng cạnh nhau?

Đáp số: 576.

8 Cho tập  $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ .

a) Từ tập  $A$  có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số khác nhau và mỗi số chứa chữ số 5?

b) Trong các số trên, có bao nhiêu số không chia hết cho 5?

Đáp số: a) 40320 số b) 33600 số.

9 Có 100 người mua 100 vé số, có 4 giải (nhất, nhì, ba, tư).

a) Có bao nhiêu kết quả nếu người giữ vé số 47 đạt giải nhất?

b) Có bao nhiêu kết quả biết rằng người giữ vé số 47 trúng 1 trong 4 giải

Đáp số: a) 941094 b) 3764376.

10 Một tổ gồm 8 học sinh nam và 6 học sinh nữ. Cần lấy một nhóm 5 người trong đó có 2 học sinh nữ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? Đáp số: 840.

11 Một tổ sinh viên có 20 em, trong đó có 8 em chỉ biết tiếng Anh, 7 em chỉ biết tiếng Pháp & 5 em chỉ biết tiếng Đức. Cần lập một nhóm đi thực tế gồm 3 em biết tiếng Anh, 4 em biết tiếng Pháp, 2 em biết tiếng Đức. Hỏi có bao nhiêu cách lập nhóm đi thực tế từ tổ sinh viên đó?

Đáp số: 19600.

12 Trên một mặt phẳng có 10 đường thẳng song song cắt 9 đường thẳng song song khác. Hỏi có bao nhiêu hình bình hành được tạo thành? Đáp số: 1620.

13 Trong một lớp học có 20 học sinh, trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách cử 3 học sinh đi dự Đại hội Đoàn trường sao cho trong 3 học sinh đó có ít nhất một cán bộ lớp.

Đáp số: 324.

14 Trong một lớp học có 50 học sinh, trong đó có 4 cặp anh em sinh đôi. Cần chọn một nhóm 3 học sinh tham gia đội diễn văn nghệ của trường sao cho trong nhóm không có cặp anh em sinh đôi nào. Hỏi có bao nhiêu cách chọn? Đáp số: 19408.

15 Cho hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  song song với nhau. Trên  $d_1$  có 10 điểm phân biệt, trên  $d_2$  có  $n$  điểm phân biệt ( $n \geq 2$ ). Biết rằng có 1725 tam giác có các đỉnh là ba trong số các điểm thuộc  $d_1$  và  $d_2$  nói trên. Tìm  $n$ . Đáp số:  $n = 15$ .

16 Từ các chữ số 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số, trong đó chữ số 1 xuất hiện 3 lần, các chữ số còn lại xuất hiện đúng một lần. Đáp số: 120.

17 Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số gồm 7 chữ số, trong đó chữ số 2 có mặt 3 lần, các chữ số còn lại có mặt đúng một lần. Đáp số: 1440.

- 18** Bạn Việt chọn mật khẩu cho Email của mình gồm 8 kí tự đôi một khác nhau, trong đó có 3 kí tự đầu tiên là 3 chữ cái trong bảng gồm 26 chữ in thường và 5 kí tự tiếp theo là chữ số. Bạn Việt có bao nhiêu cách tạo ra mật khẩu?

Đáp số: 471744000.

- 19** Mỗi máy tính tham gia vào mạng phải có một địa chỉ duy nhất, gọi là địa chỉ IP, nhằm định danh máy tính đó trên Internet. Xét tập hợp  $A$  gồm các địa chỉ IP có dạng  $192.168.abc.deg$ , trong đó  $a, b, c$  là các chữ số phân biệt được chọn ra từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4 còn  $d, e, g$  là các chữ số phân biệt được chọn ra từ các chữ số 5, 6, 7, 8, 9. Hỏi tập hợp  $A$  có bao nhiêu phần tử?

Đáp số: 3600.

## D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Cho 10 điểm, không có 3 điểm nào thẳng hàng. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng khác nhau tạo bởi 2 trong 10 điểm nói trên?

- A. Một số khác.      B. 90.      C. 45.      D. 20.

**Câu 2.** Có bao nhiêu cách mắc nối tiếp 4 bóng đèn được chọn từ 6 bóng đèn khác nhau?

- A. 15.      B. 17280.      C. 360.      D. 24.

**Câu 3.** Trong một lớp học có 20 bạn học sinh, hỏi có bao nhiêu cách chọn ra một bạn để làm lớp trưởng và một bạn khác làm lớp phó?

- A.  $A_{20}^{18}$ .      B.  $A_{20}^2$ .      C.  $20^2$ .      D.  $C_{20}^2$ .

**Câu 4.** Có bao nhiêu cách xếp khác nhau cho 5 người ngồi vào một bàn dài?

- A. 5.      B. 25.      C. 20.      D. 120.

**Câu 5.** (THPTQG 2021 – Mã đề 101) Với  $n$  là số nguyên dương bất kì,  $n \geq 4$ , công thức nào dưới đây đúng?

- A.  $A_m^4 = \frac{(n-4)!}{n!}$ .      B.  $A_m^4 = \frac{4!}{(n-4)!}$ .      C.  $A_m^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!}$ .      D.  $A_m^4 = \frac{n!}{(n-4)!}$ .

**Câu 6.** Trong một đa giác lồi  $n$  cạnh, số đường chéo của đa giác là

- A.  $C_n^2$ .      B.  $A_n^2$ .      C.  $A^2 - n$ .      D.  $C_n^2 - n$ .

**Câu 7.** Một lớp có 15 học sinh nam và 20 học sinh nữ. Có bao nhiêu cách chọn 5 bạn học sinh sao cho trong đó có đúng 3 học sinh nữ?

- A. 110790.      B. 110970.      C. 119700.      D. 117900.

**Câu 8.** Có bao nhiêu cách chọn ra 5 cầu thủ từ 11 cầu thủ để thực hiện quả đá luân lưu 11 m theo thứ tự từ quả thứ nhất đến quả thứ 5 ?

- A.  $A_{11}^5$ .      B.  $C_{11}^5$ .      C.  $A_{11}^5 \cdot 5!$ .      D.  $C_{10}^5$ .

**Câu 9.** Nhân dịp lễ sơ kết học kì 1, để thưởng cho 3 học sinh có thành tích tốt nhất lớp, cô An đã mua 10 cuốn sách khác nhau và chọn ra 3 cuốn để phát thưởng cho 3 học sinh đó mỗi học sinh nhận 1 cuốn. Hỏi cô An có bao nhiêu cách phát thưởng.

- A.  $C_{10}^3$ .      B.  $A_{10}^3$ .      C.  $10^3$ .      D.  $3 \cdot C_{10}^3$ .

**Câu 10.** Từ các số tự nhiên 1, 2, 3, 4 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau?

- A. 42.      B.  $4^4$ .      C. 1.      D. 24.

**Câu 11.** Cho tập  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ . Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau được tạo từ tập  $A$ ?

- A.  $A_{10}^4$ .                      B.  $9 \cdot C_9^4$ .                      C.  $9 \cdot A_9^4$ .                      D.  $C_{10}^4$ .

**Câu 12.** Có bao nhiêu cách chia hết 4 đồ vật khác nhau cho 3 người, biết rằng mỗi người nhận được ít nhất 1 đồ vật?

- A. 72.                      B. 18.                      C. 12.                      D. 36.

**Câu 13.** Cho hai đường thẳng song song  $d_1$  và  $d_2$ . Trên  $d_1$  lấy 17 điểm phân biệt, trên  $d_2$  lấy 20 điểm phân biệt. Tính số tam giác mà có các đỉnh được chọn từ 37 điểm này.

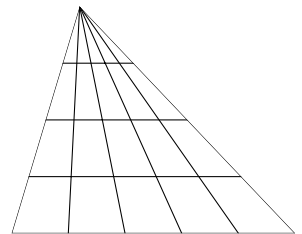
- A. 5960.                      B. 5690.                      C. 5590.                      D. 5950.

**Câu 14.** Có 3 bạn nam và 3 bạn nữ được xếp vào một ghế dài có 6 vị trí. Hỏi có bao nhiêu cách xếp sao cho nam và nữ ngồi xen kẽ lẫn nhau?

- A. 48.                      B. 72.                      C. 24.                      D. 36.

**Câu 15.** Trong hình vẽ bên có bao nhiêu hình tam giác?

- A. 60.                      B. 20.                      C. 70.                      D. 30.



**Câu 16.** Sắp xếp năm bạn học sinh An, Bình, Chi, Dũng, Lệ vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Số cách sắp xếp sao cho bạn Chi luôn ngồi chính giữa là

- A. 16.                      B. 120.                      C. 60.                      D. 24.

**Câu 17.** Tìm giá trị  $n \in \mathbb{N}$  thỏa mãn  $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$ .

- A.  $n = 14$ .                      B.  $n = 15$ .                      C.  $n = 17$ .                      D.  $n = 6$ .

**Câu 18.** Cho tập hợp  $A$  có 7 phần tử. Hỏi tập  $A$  có bao nhiêu tập con có nhiều hơn một phần tử?

- A.  $2^7 - 8$ .                      B.  $2^6$ .                      C.  $2^7$ .                      D.  $2^7 - 7$ .

**Câu 19.** Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số và các chữ số phân biệt?

- A. 2250.                      B. 2520.                      C. 2560.                      D. 2296.

**Câu 20.** Một bó hoa có 14 bông hoa gồm 3 bông màu hồng, 5 bông màu xanh, còn lại là màu vàng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 7 bông hoa, trong đó phải có đủ 3 màu?

- A. 3058.                      B. 129.                      C. 3060.                      D. 3432.

**Câu 21.** Từ các chữ số 1, 2, 3, 5, 6, 8, 9 lập được bao nhiêu số tự nhiên 5 chữ số phân biệt và chia hết cho 3?

- A. 720.                      B. 480.                      C. 2520.                      D. 360.

**Câu 22.** Có tất cả bao nhiêu số tự nhiên có 4 chữ số khác nhau và khác 0 mà trong mỗi số luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ?

- A.  $4!C_4^2C_5^2$ .                      B.  $3!C_4^2C_5^2$ .                      C.  $3!C_3^2C_5^2$ .                      D.  $4!C_4^1C_5^1$ .

**Câu 23.** Thầy giáo Dương có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu dễ không ít hơn 2.

- A. 56875.                      B. 42802.                      C. 41811.                      D. 32023.

**Câu 24.** Biển số xe máy tỉnh  $K$  gồm 2 dòng:

- Dòng thứ nhất là  $68XY$ , trong đó  $X$  là một trong 24 chữ cái,  $Y$  là một trong 10 chữ số.
- Dòng thứ hai là  $abc.de$ , trong đó  $a, b, c, d, e$  là chữ số.

Biển số xe được cho là “đẹp” khi dòng thứ 2 có tổng các số là số có chữ số tận cùng bằng 7 và có đúng 4 chữ số giống nhau. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 2 biển số trong số các biển số “đẹp” để đem bán đầu giá?

- A. 143988000.                      B. 4663440.                      C. 12000.                      D. 71994000.

**Câu 25.** Cho hai dãy ghế, mỗi dãy gồm 4 ghế và được đặt đối diện nhau

Dãy 1	1	2	3	4
Dãy 2	1	2	3	4

Xếp 4 bạn nam và 4 bạn nữ vào hai dãy ghế trên. Hai người được gọi là ngồi đối diện với nhau nếu ngồi ở hai dãy và có cùng số ghế. Có bao nhiêu cách xếp để mỗi bạn nam ngồi đối diện với một bạn nữ?

- A.  $4!4!2^4$ .                      B.  $4!4!$ .                      C.  $4!2$ .                      D.  $4!4!2$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 26.** Một hộp đựng 5 viên bi trắng, 3 viên bi xanh.

- a) Số cách chọn ra 1 viên bi là 8.                      b) Số cách chọn ra 2 viên bi khác màu là 8.  
c) Số cách chọn ra 2 viên bi cùng màu là 13.                      d) Số cách chọn ra 3 bi có đủ 2 màu là 45.

**Câu 27.** Một tổ học sinh gồm 4 nam và 3 nữ.

- a) Số cách xếp tổ học sinh này theo 1 hàng dọc là  $7!$ .  
b) Số cách xếp tổ học sinh này theo 1 hàng dọc sao cho nam nữ xen kẽ nhau là  $4! \cdot 3! \cdot 2$ .  
c) Số cách xếp tổ học sinh này theo 1 hàng dọc sao cho các học sinh nữ đứng kề nhau là  $3! \cdot 5!$ .  
d) Số cách chọn ra 3 học sinh để trực lớp sao cho phải có ít nhất 1 nam là 31.

**Câu 28.** Trong một hộp bánh có 6 loại bánh nhân thịt và 4 loại bánh nhân đậu xanh.

- a) Có 480 cách chọn ra 3 loại bánh nhân thịt và 3 loại bánh nhân đậu xanh.  
b) Có 5 cách chọn ra 5 loại bánh sao cho không có loại bánh nhân đậu xanh nào cả.  
c) Có 96 cách chọn ra 3 loại bánh gồm có cả nhân thịt và nhân đậu xanh.  
d) Có 120 cách chọn ra 6 loại bánh sao cho số loại bánh nhân thịt nhiều hơn loại bánh nhân đậu xanh.

**Câu 29.** Trên giá sách có 10 quyển sách Toán khác nhau, 8 quyển tiếng Anh khác nhau và 6 quyển sách Lý khác nhau.

- a) Có 3 cách chọn ra 3 quyển sách mỗi loại một quyển.  
b) Có 10920 cách chọn ra 5 sao cho có 3 quyển sách Toán.  
c) Có 5040 cách chọn ra 4 quyển sao cho có đủ cả ba loại.  
d) Có 12000 cách chọn ra 5 sao cho có nhiều nhất 1 quyển sách Toán.

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.**

**Câu 30.** Tính số cách sắp xếp 4 bạn học sinh vào 4 ghế xếp thành một hàng ngang.

KQ:

**Câu 31.** Cho đa giác đều  $n$  đỉnh và  $n \geq 3$ . Tìm  $n$  biết rằng đa giác đã cho có 135 đường chéo.

KQ:

**Câu 32.** Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 7 chữ số khác nhau đôi một, trong đó chữ số 2 đứng liền giữa hai chữ số 1 và 3?

KQ:

**Câu 33.** Một hộp đựng 11 tấm thẻ được đánh từ 1 đến 11. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 6 thẻ để tổng số ghi trên 6 thẻ đó là một số lẻ?

KQ:

**Câu 34.** Có 7 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 7, 6 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu trắng đánh số từ 1 đến 5, 4 quả cầu đen đánh số từ 1 đến 4. Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 4 quả cầu vừa khác màu, vừa khác số?

KQ:

**Câu 35.** Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ, sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy?

KQ:

## §3. NHỊ THỨC NIU - TƠN

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Nhị thức Niu-ton

① Nhắc lại các hằng đẳng thức

$$\textcircled{1} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\textcircled{2} (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

$$\textcircled{3} (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\textcircled{4} (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

② Công thức nhị thức Niu - tơn

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n \\ &= \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k. \end{aligned}$$

• Với  $a = b = 1$ , ta có  $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ .

• Với  $a = 1; b = -1$ , ta có  $C_n^0 - C_n^1 + \dots + (-1)^k C_n^k + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$ .

#### 2 Chú ý

Trong biểu thức ở vế phải của khai triển  $(a+b)^n$  thì

- Số các hạng tử là  $n+1$ ;
- Các hạng tử có số mũ của  $a$  giảm dần từ  $n$  đến  $0$ ; số mũ của  $b$  tăng dần từ  $0$  đến  $n$ , nhưng tổng các số mũ của  $a$  và  $b$  trong mỗi hạng tử luôn bằng  $n$  (quy ước  $a^0 = b^0 = 1$ );
- Các hệ số của mỗi cặp hạng tử cách đều hai hạng tử đầu và cuối đều bằng nhau.

### B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

#### DT 1 Khai triển nhị thức Newton.

Áp dụng công thức nhị thức Newton để khai triển các biểu thức.

**Ví dụ 1.** Khai triển các nhị thức sau

a)  $(x+2)^4$

b)  $(x-2)^6$

c)  $(2x-1)^5$

d)  $(x+2y)^5$

e)  $\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^5$

f)  $\left(2 + \frac{x}{2}\right)^6$

g)  $\left(x + \frac{2}{x}\right)^7$

h)  $x^2(1-2x)^5$

i)  $\left(\frac{1}{2x} - 2x\right)^6$

## DT

2

Tìm hệ số (số hạng) của  $x^k$  trong khai triển  $P(x)$ 

① **Cách 1:** Khai triển  $P(x)$ , từ đó trả lời hệ số (số hạng) chứa  $x^k$ .

② **Cách 2:** Sử dụng khai triển tổng quát  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ .

- Số hạng tổng quát trong khai triển trên là  $C_n^k a^{n-k} b^k$ , với  $k = 0, 1, 2, \dots, n$ .
- Thu gọn phần hệ số và phân biến trong công thức vừa lập.
- Đồng nhất lũy thừa của biến với yêu cầu đề. Từ đây, suy ra kết quả.

**Bài mẫu:** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{12}$  trong khai triển nhị thức Niuton của  $\left(x - \frac{1}{x^2}\right)^{18}$

**Lời giải:**

- Số hạng tổng quát của khai triển trên là

$$C_{18}^k x^{18-k} \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k = C_{18}^k (-1)^k \cdot x^{18-3k}, \text{ với } k \in \mathbb{N} \text{ và } 0 \leq k \leq 18.$$

- Số hạng chứa  $x^{12}$  tương ứng với  $18 - 3k = 12 \Leftrightarrow k = 2$ .
- Vậy hệ số của số hạng chứa  $x^{12}$  trong khai triển là  $(-1)^2 C_{18}^2 = 153$ .

≡ **Ví dụ 2.** Tìm hệ số của  $x^{15}$  trong khai triển  $(3x^2 - 2x)^{10}$ .

≡ **Ví dụ 3.** Tìm số hạng chứa  $x^{33}$  trong các khai triển  $(x^3 + 2xy)^{21}$ .

≡ **Ví dụ 4.** Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(2x - \frac{1}{x^2}\right)^6$ , với  $x \neq 0$ .

≡ **Ví dụ 5.** Tìm hệ số  $x^5$  trong khai triển  $P(x) = x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$  thành đa thức.

≡ **Ví dụ 6.** Tìm hệ số của  $x^{12}$  trong khai triển  $(x^2 + 1)^n$ , biết tổng tất cả các hệ số trong khai triển đó bằng 1024.

≡ **Ví dụ 7.** Khai triển  $(1 - 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Tìm  $a_5$  biết  $a_0 + a_1 + a_2 = 71$ .

≡ **Ví dụ 8.** Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^4$  trong khai triển  $(1 + x + 3x^2)^{10}$ .

**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

1 Khai triển các biểu thức sau

a)  $(x + y)^6$ .

b)  $(2x - 3)^4$ .

2 Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^6$  trong khai triển nhị thức  $(1 - 3x)^{11}$ .

3 Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^8y^9$  trong khai triển nhị thức  $(2x - 3y)^{17}$ .

4 Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{16}$  trong khai triển nhị thức  $(x^2 - 2x)^{10}$ .

- 5 Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(x - \frac{2}{x^2}\right)^{21}$ , với  $x \neq 0$ .
- 6 Tìm hệ số  $x^5$  trong khai triển  $P(x) = x(2x - 1)^6 + (3x - 1)^8$  thành đa thức.
- 7 Trong khai triển  $(\sqrt[4]{5} + \sqrt{3})^{12}$  có bao nhiêu số hạng hữu tỷ?
- 8 Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^n$  (với  $x$  khác 0) biết

$$C_n^n + C_n^{n-1} + C_n^{n-2} = 79.$$

## D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Khai triển nhị thức  $(2x^2 + 3)^{16}$  có bao nhiêu số hạng?

- A. 17.                      B.  $5^{16}$ .                      C. 16.                      D. 15.

**Câu 2.** Trong khai triển nhị thức  $(a + 2)^{n+6}$  có tất cả 17 số hạng. Khi đó giá trị  $n$  bằng

- A. 12.                      B. 11.                      C. 10.                      D. 17.

**Câu 3.** Đa thức  $P(x) = 32x^5 - 80x^4 + 80x^3 - 40x^2 + 10x - 1$  là khai triển của nhị thức nào dưới đây?

- A.  $(1 + 2x)^5$ .                      B.  $(x - 1)^5$ .                      C.  $(2x - 1)^5$ .                      D.  $(1 - 2x)^5$ .

**Câu 4.** Tìm số hạng chứa  $x^3y^3$  trong khai triển  $(x + 2y)^6$  thành đa thức

- A.  $20x^3y^3$ .                      B.  $160x^3y^3$ .                      C.  $120x^3y^3$ .                      D.  $8x^3y^3$ .

**Câu 5.** Hệ số của số hạng chứa  $x^3$  trong khai triển thành đa thức của biểu thức  $(1 - x)^{10}$  là

- A. -30.                      B. 120.                      C. -120.                      D. 30.

**Câu 6.** Tính tổng  $S$  tất cả các hệ số trong khai triển  $(3x - 4)^{17}$ .

- A.  $S = 1$ .                      B.  $S = 0$ .                      C.  $S = -1$ .                      D.  $S = 8192$ .

**Câu 7.** Tính tổng tất cả các hệ số trong khai triển  $(2x - 1)^{15}$  thành đa thức.

- A.  $3^{15}$ .                      B.  $2^{15}$ .                      C. -1.                      D. 1.

**Câu 8.** Xét khai triển  $(3x + 2)^{10} = a_{10}x^{10} + a_9x^9 + \dots + a_1x + a_0$ . Tính tổng  $S = a_{10} + a_9 + \dots + a_1 + a_0$ .

- A.  $S = 2^{10}$ .                      B.  $S = 5^{10}$ .                      C.  $S = 3^{10}$ .                      D.  $S = 6^{10}$ .

**Câu 9.** Tổng các hệ số trong khai triển  $(3x - 1)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  là  $2^{11}$ . Tìm  $a_6$ .

- A. -336798.                      B. 336798.                      C. -112266.                      D. 112266.

**Câu 10.** Biết hệ số  $x^2$  trong khai triển của  $(1 - 3x)^n$  là 90. Tìm  $n$ .

- A.  $n = 5$ .                      B.  $n = 8$ .                      C.  $n = 6$ .                      D.  $n = 7$ .

**Câu 11.** Giả sử trong khai triển  $(1 + ax)(1 - 3x)^6$  với  $\alpha \in \mathbb{R}$  thì hệ số của số hạng chứa  $x^3$  là 405. Giá trị của  $a$  bằng

- A. 9.                      B. 6.                      C. 7.                      D. 14.

**Câu 12.** Tìm hệ số của  $x^{12}$  trong khai triển  $(2x - x^2)^{10}$ .

- A.  $C_{10}^2$ .                      B.  $-C_{10}^2 2^8$ .                      C.  $C_{10}^8$ .                      D.  $C_{10}^2 2^8$ .

**Câu 13.** Tìm số hạng chứa  $x^3$  trong khai triển  $\left(x + \frac{1}{2x}\right)^9$ .

- A.  $-\frac{1}{8}C_9^3x^3$ .      B.  $C_9^3x^3$ .      C.  $\frac{1}{8}C_9^3x^3$ .      D.  $-C_9^3x^3$ .

**Câu 14.** Tìm số hạng chứa  $x^3y$  trong khai triển  $\left(xy + \frac{1}{y}\right)^5$ .

- A.  $4x^3y$ .      B.  $5x^3y$ .      C.  $3x^3y$ .      D.  $10x^3y$ .

**Câu 15.** Số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(3x - \frac{1}{3x^2}\right)^9$ , với  $x \neq 0$  là

- A. 84.      B. -27.      C. -2268.      D. 2268.

**Câu 16.** Biết tổng tất cả các hệ số của khai triển  $(x^2 + 1)^n$  bằng 1024. Tìm hệ số của  $x^{12}$ .

- A.  $210x^2$ .      B. 210.      C. 240.      D. 120.

**Câu 17.** Cho khai triển  $(1 + ax)(1 - 3x)^6$  với  $a \in \mathbb{R}$ . Biết rằng hệ số của  $x^3$  trong khai triển trên là 405. Tính  $a$ .

- A. 14.      B. 6.      C. 9.      D. 7.

**Câu 18.** Với  $n$  là số nguyên dương thỏa mãn  $C_n^1 + C_n^2 = 55$ , số hạng không chứa  $x$  trong khai triển của thức  $\left(x^3 + \frac{2}{x^2}\right)^n$  bằng

- A. 322560.      B. 3360.      C. 80640.      D. 13340.

**Câu 19.** Với  $n$  là số tự nhiên thỏa mãn  $C_{n-4}^{n-6} + nA_n^2 = 454$ , hệ số của số hạng chứa  $x^4$  trong khai triển nhị thức Newton  $\left(\frac{2}{x} - x^3\right)^n$  bằng

- A. 1792.      B. 786.      C. 1962.      D. -1792.

**Câu 20.** Biết rằng hệ số của  $x^{n-2}$  trong khai triển  $\left(x - \frac{1}{4}\right)^n$  bằng 31. Tìm  $n$ .

- A.  $n = 32$ .      B.  $n = 30$ .      C.  $n = 31$ .      D.  $n = 33$ .

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 21.** Cho  $\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^5 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $a_3 = \frac{5}{2}$ .

b)  $a_5 = -\frac{1}{32}$ .

c) Hệ số lớn nhất trong tất cả hệ số là  $\frac{5}{2}$ .

d) Tổng  $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{16}$ .

**Câu 22.** Cho khai triển  $(1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  (với  $n$  là số nguyên dương) thỏa mãn  $a_0 + 8a_1 = 2a_2 + 1$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a)  $a_0 = 1$ .

b)  $n = 5$ .

c) Hệ số của  $x^5$  trong khai triển là 32.

d) Hệ số lớn nhất trong khai triển là 40.

**Câu 23.** Trong khai triển nhị thức Niu-tơn của  $(xy + 2)^5$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Biểu thức triển khai có 5 số hạng.

b) Số hạng thứ 3 là  $40x^3y^3$ .

- c) Số hạng chứa  $x^2y^2$  trong khai triển là 80.  
 d) Tổng hệ số của các số hạng trong khai triển là 243.

**Câu 24.** Khai triển  $(x + 2y)^3 + (2x - y)^3$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hệ số của của  $x^3$  là 9.  
 b) Hệ số của của  $y^3$  là 7.  
 c) Hệ số của  $x^2y$  là 6.  
 d) Tổng các hệ số của số hạng mà lũy thừa của  $x$  lớn hơn lũy thừa của  $y$  bằng  $-3$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.**

**Câu 25.** Trong khai triển  $(3x + 2)^5$  thì hệ số của  $x^3$  là

KQ:

**Câu 26.** Trong khai triển  $(1 - 2x)^5$  có tổng các hệ số là

KQ:

**Câu 27.** Trên quầy có 5 tờ vé số khác nhau. Một khách hàng có bao nhiêu lựa chọn mua một số vé trong các vé xổ số đó (tính cả không mua vé nào)?

KQ:

**Câu 28.** Cho biết hệ số của  $x^2$  trong khai triển  $(1 + 2x)^n$  bằng 180. Vậy số tự nhiên  $n$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 29.** Tính tổng  $S = C_4^0 - 3C_4^1 + 9C_4^2 - 27C_4^3 + 81C_4^4$ .

KQ:

**Câu 30.** Ông A có 500 triệu đồng và ông B có 600 triệu đồng gửi hai ngân hàng khác nhau với lãi suất lần lượt là 6%/năm và 4%/năm. Với giải thiết sau mỗi tháng người đó không rút tiền thì số tiền lãi được nhập vào số tiền ban đầu. Đây được gọi là hình thức lãi kép. Biết số tiền cả vốn lẫn lãi  $P_n$  sau  $n$  tháng được tính bởi công thức  $P_n = P_0(1 + r)^n$  trong đó  $P_0$  là số tiền gửi lúc đầu và  $r$  là lãi suất của một tháng. Dùng hai số hạng đầu tiên trong khai triển của nhị thức Niu - tơn, ước lượng đến năm bao nhiêu thì số tiền của hai ông thu được là bằng nhau và mỗi người nhận được bao nhiêu tiền?

KQ:



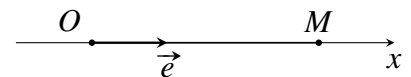
## PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẪNG

### §1. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ

#### A // TÓM TẮT LÝ THUYẾT

##### 1 Trục tọa độ

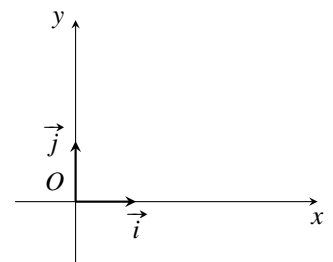
- Trục tọa độ là đường thẳng trên đó xác định một điểm gốc là  $O$  và một vec tơ đơn vị  $\vec{e}$ , kí hiệu  $(O, \vec{e})$ .
- Xét điểm  $M$  trên trục  $(O, \vec{e})$ , ta luôn có  $\overrightarrow{OM} = k\vec{e}$ . Khi đó  $k$  là tọa độ của  $M$  trên trục đã cho.



##### 2 Hệ trục tọa độ

Hệ trục tọa độ bao gồm 2 trục vuông góc nhau (hình vẽ), kí hiệu  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  hay  $Oxy$ .

- $O$  là gốc tọa độ;  $Ox$  là trục hoành;  $Oy$  là trục tung;
- $\vec{i}, \vec{j}$  là các vec tơ đơn vị và  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = 1$ .

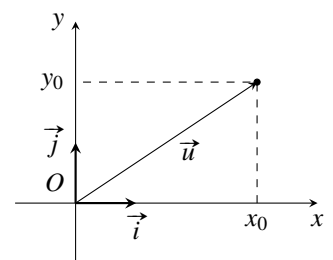


##### 3 Tọa độ của vectơ

- Định nghĩa:** Với mỗi vectơ  $\vec{u}$  trên mặt phẳng  $Oxy$ , có duy nhất cặp số  $(x_0; y_0)$  sao cho  $\vec{u} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ . Ta nói  $\vec{u}$  có tọa độ là  $(x_0; y_0)$  và viết  $\vec{u} = (x_0; y_0)$  hoặc  $\vec{u}(x_0; y_0)$ .

##### Chú ý:

- Tọa độ hai vectơ đơn vị là  $\vec{i} = (1; 0)$ ,  $\vec{j} = (0; 1)$ .
- $\vec{u}(x; y) = \vec{v}(x'; y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$ .



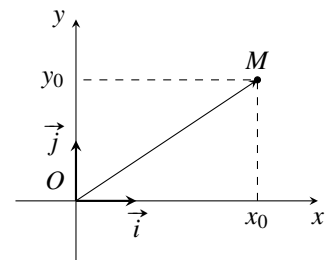
#### 4 Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

Cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ . Khi đó

- ①  $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$ .      ②  $\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$ .  
 ③  $k\vec{a} = (ka_1; ka_2)$ , với  $k$  là một hằng số.      ④  $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

#### 5 Tọa độ điểm

- Xét điểm  $M$  trên trục  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , ta luôn có  $\vec{OM} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}$ . Khi đó  $(x_0, y_0)$  là tọa độ của  $M$  trên hệ trục đã cho.



- Cho ba điểm  $A(x_A; y_A)$ ,  $B(x_B; y_B)$  và  $C(x_C; y_C)$ . Khi đó

- ①  $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$   
 ② Khoảng cách giữa hai điểm  $A, B$  là  $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ .  
 ③ Trung điểm  $I$  của  $AB$ :  $x_I = \frac{x_A + x_B}{2}$  và  $y_I = \frac{y_A + y_B}{2}$   
 ④  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ :  $x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$  và  $y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$ .  
 ⑤  $ABC$  là ba đỉnh của tam giác  $\Leftrightarrow \vec{AB}$  không cùng phương với  $\vec{AC}$

## B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

### DT 1 Biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ

**Ví dụ 1.** Cho  $\vec{a} = (2; 1)$ ,  $\vec{b} = (3; 4)$ ,  $\vec{c} = (7; 2)$ .

- a) Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$ .  
 b) Tìm tọa độ của vectơ  $\vec{x}$  sao cho  $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$ .

**Ví dụ 2.** Cho  $\vec{a} = (-2; 0)$ ,  $\vec{b} = (3; 4)$ ,  $\vec{c} = (7; 2)$ . Tính tọa độ vectơ

- a)  $\vec{u} = 2\vec{a} - 4\vec{b} + \vec{c}$ .      b)  $\vec{v} = -\vec{a} + \frac{1}{3} \cdot \vec{b} - \frac{1}{2} \cdot \vec{c}$ .

**DT****2****Phân tích vectơ theo hai vectơ không cùng phương**

Giả sử cần phân tích  $\vec{u} = (u_1; u_2)$  theo hai vectơ không cùng phương  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ . Ta thực hiện như sau:

- Giả sử  $\vec{u} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$  với  $m, n \in \mathbb{R}$ .
- Dùng điều kiện vectơ bằng nhau, ta được hệ 
$$\begin{cases} u_1 = m \cdot a_1 + n \cdot b_1 \\ u_2 = m \cdot a_2 + n \cdot b_2 \end{cases}$$
.
- Giải hệ trên tìm  $m$  và  $n$ . Kết luận  $\vec{u} = m \cdot \vec{a} + n \cdot \vec{b}$  với  $m, n$  vừa tìm được.

**≡ Ví dụ 3.** Phân tích vectơ  $\vec{u}$  theo hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ , biết

- a)  $\vec{u} = (-4; 7)$ ,  $\vec{a} = (2; -1)$ ,  $\vec{b} = (-3; 4)$ .      b)  $\vec{u} = (-1; 3)$ ,  $\vec{a} = (1; 1)$ ,  $\vec{b} = (2; 3)$ .  
 c)  $\vec{u} = (-1; 3)$ ,  $\vec{a} = (2; 1)$ ,  $\vec{b} = (3; 2)$ .      d)  $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$ ,  $\vec{a} = (1; 1)$ ,  $\vec{b} = (2; 3)$ .

**DT****3****Ứng dụng biểu thức tọa độ của các phép toán vectơ**

Cho hai vectơ  $\vec{a} = (a_1; a_2)$  và  $\vec{b} = (b_1; b_2)$ .

- ①  $\vec{a}$  cùng phương  $\vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$ .
- ② Chứng minh vuông góc:  $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$ .
- ③ Tính độ dài:  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ .
- ④ Tính góc:  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

**≡ Ví dụ 4.** Cặp vectơ nào sau đây cùng phương? cùng hướng? ngược hướng?

- a)  $\vec{a} = (1; 2)$  và  $\vec{b} = (2; 4)$ .      b)  $\vec{a} = (-3; 2)$  và  $\vec{b} = (1; 2)$ .  
 c)  $\vec{a} = (3; 0)$  và  $\vec{b} = (2; 0)$ .      d)  $\vec{a} = (4; -2)$  và  $\vec{b} = (-2; 1)$ .  
 e)  $\vec{a} = (0; 5)$  và  $\vec{b} = (4; 0)$ .      f)  $\vec{a} = (0; 2)$  và  $\vec{b} = (0; -3)$ .

**≡ Ví dụ 5.** Cho  $\vec{a} = (2; 1)$ ,  $\vec{b} = (m^2 - m; 3)$ . Tìm  $m$  để hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  cùng phương.

**≡ Ví dụ 6.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $\vec{a} = (m; 2)$ ,  $\vec{b} = (1 - m; m + 4)$  (với  $m$  là tham số). Tìm  $m$  sao cho  $2\vec{a} - 3\vec{b}$  cùng phương với  $\vec{c} = (4; -2)$ .

**≡ Ví dụ 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho ba vectơ  $\vec{a} = (1; 3)$ ,  $\vec{b} = (6; -2)$ ,  $\vec{c} = (x; 1)$ .

- Chứng minh  $\vec{a} \perp \vec{b}$ .
- Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $\vec{a} \perp \vec{c}$ .
- Tìm tất cả các giá trị của  $x$  để  $\vec{a}$  cùng phương với  $\vec{c}$ .
- Tìm tọa độ vectơ  $\vec{d}$  thỏa mãn  $\vec{a} \perp \vec{d}$  và  $\vec{b} \cdot \vec{d} = 20$ .

**≡ Ví dụ 8.** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , tính góc giữa các cặp vectơ sau:

- a)  $\vec{a} = (4; 3)$  và  $\vec{b} = (1; 7)$ .  
 b)  $\vec{a} = (-3; 2)$ ,  $\vec{b} = (4; 6)$ .  
 c)  $\vec{a} = (2; 5)$ ,  $\vec{b} = (3; -7)$ .  
 d)  $\vec{i}$ ,  $\vec{a} = (1; \sqrt{3})$ .

**≡ Ví dụ 9.** Cho véc-tơ  $\vec{a} = (1; -2)$ . Với giá trị nào của  $y$  thì véc-tơ  $\vec{b} = (3; y)$  tạo với véc-tơ  $\vec{a}$  một góc  $45^\circ$ .

**DT**

**4**

**Tọa độ điểm**

**≡ Ví dụ 10.** Cho ba điểm  $A(-3; 4)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(2; -5)$ .

- a) Chứng minh ba điểm  $A, B, C$  không thẳng hàng.  
 b) Gọi  $M, N, P$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC, CA$ . Tìm tọa độ  $M, N, P$ .  
 c) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho  $ABCD$  là hình bình hành.  
 d) Tìm tọa độ điểm  $E$  trên trục tung sao cho  $\vec{AE}$  và  $\vec{BC}$  cùng phương.

**≡ Ví dụ 11.** Cho  $A(-3; 4)$ ,  $B(1; 1)$ ,  $C(5; 5)$ .

- a) Tìm điểm  $D$  sao cho  $A$  là trung điểm  $BD$ .  
 b) Tìm điểm  $E$  trên trục  $Ox$  sao cho  $A, B, E$  thẳng hàng.

**≡ Ví dụ 12.** Cho ba điểm  $A(1; 1)$ ,  $B(3; 2)$  và  $C(m+4; 2m+1)$ . Tìm  $m$  để ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.

**≡ Ví dụ 13.** Cho tam giác  $ABC$ . Biết các điểm  $M(1; 1)$ ,  $N(2; 3)$ ,  $P(0; 4)$  lần lượt là trung điểm các cạnh  $AB, BC, CA$ .

- a) Tìm tọa độ các đỉnh  $A, B, C$ .  
 b) Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .

**≡ Ví dụ 14.** Cho ba điểm  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; -4)$ ,  $C(5; 0)$ . Tìm tọa độ điểm  $D$  nếu biết

- a)  $\vec{AD} - 2\vec{BD} + 3\vec{CD} = \vec{0}$ .  
 b)  $\vec{AD} - 2\vec{AB} = 2\vec{BD} + \vec{BC}$ .  
 c) tứ giác  $ABCD$  hình bình hành.  
 d) tứ giác  $ABCD$  hình thang có hai đáy là  $BC, AD$  với  $BC = 2AD$ .

**≡ Ví dụ 15.** Cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 2)$ ,  $B(-2; 6)$ ,  $C(9; 8)$ .

- a) Tính  $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ . Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .  
 b) Tìm tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .  
 c) Tính chu vi, diện tích tam giác  $ABC$ .  
 d) Tìm tọa độ điểm  $N$  trên  $Ox$  để tam giác  $ANC$  cân tại  $N$ .  
 e) Tìm tọa độ điểm  $D$  để  $ABDC$  là hình chữ nhật.

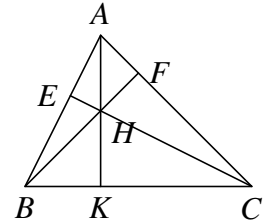
**Ví dụ 16.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $A(-2; 2)$ ,  $B\left(\frac{5}{2}; 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $C\left(\frac{5}{2}; 2 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

- a) Tính độ dài các cạnh của tam giác  $ABC$ . Chứng tỏ tam giác  $ABC$  đều.  
b) Tính diện tích tam giác  $ABC$  (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).

**DT 5** Xác định tọa độ các điểm đặc biệt trong tam giác

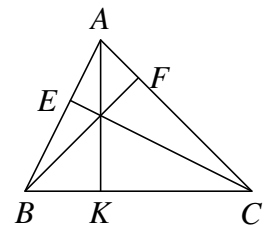
① Xác định tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

- Trực tâm  $H$  là giao ba đường cao.
- Gọi  $H(a; b)$  là trực tâm tam giác  $ABC$ .
- Giải hệ điều kiện  $\begin{cases} \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ , tìm  $a, b$ .



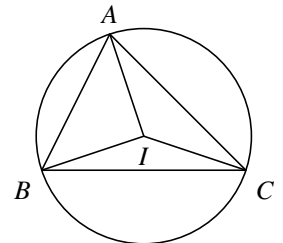
② Xác định tọa độ hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BC$

- Gọi  $K(a; b)$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BC$ .
- Giải hệ điều kiện  $\begin{cases} \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BK}$  cùng phương  $\overrightarrow{BC}$  \end{cases}, tìm  $a, b$ .



③ Xác định tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

- Tâm đường tròn ngoại tiếp là giao của ba đường trung trực.
- Gọi  $I(a; b)$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .
- Giải hệ điều kiện  $\begin{cases} IA = IB \\ IA = IC \end{cases}$ , tìm  $a, b$ .



④ Xác định tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

- Tính độ dài  $AB, AC$ .
- Áp dụng tính chất phân giác trong tam giác  $ABC$ , ta có

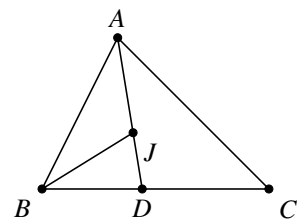
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = k_1 \Rightarrow \overrightarrow{DB} = k_1 \overrightarrow{DC}$$

Từ đây, tìm tọa độ điểm  $D$ .

- Áp dụng tính chất phân giác trong tam giác  $BAD$ , ta có

$$\frac{JA}{JD} = \frac{BA}{BD} = k_2 \Rightarrow \overrightarrow{JA} = -k_2 \overrightarrow{JD}$$

Từ đây, tìm tọa độ điểm  $J$ .



**Ví dụ 17.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 6)$ ,  $B(2; 6)$ ,  $C(1; 1)$ .

- a) Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .

b) Vẽ đường cao  $AK$  trong  $\triangle ABC$ . Xác định tọa độ điểm  $K$ .

**≡ Ví dụ 18.** Cho tam giác  $ABC$ , biết  $A(1;2)$ ,  $B(-1;1)$ ,  $C(5;-1)$ .

- Tìm tọa độ trọng tâm  $G$  của tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $BC$ .
- Tìm tọa độ trực tâm  $H$  của tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp  $I$  của tam giác  $ABC$ .
- Chứng minh rằng  $I, H, G$  thẳng hàng.

**≡ Ví dụ 19.** Cho ba điểm  $A(-2;3)$ ,  $B\left(\frac{1}{4};0\right)$  và  $C(2;0)$ . Tìm tọa độ tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$ .

**DT**

**6**

**Một số bài toán liên quan đến max - min**

**≡ Ví dụ 20.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(2;2)$ ,  $B(4;2)$ ,  $C(3;1)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thỏa mãn  $\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC} = \vec{0}$ .

**≡ Ví dụ 21.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(-4;5)$ ,  $B(-2;1)$ . Tìm tọa độ của điểm  $M$  trên trục tung sao cho  $|\vec{MA} + \vec{MB}|$  ngắn nhất.

**≡ Ví dụ 22.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $A(1;0)$ ,  $B(0;3)$ ,  $C(-3;-5)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc trục  $Ox$  sao cho  $|2\vec{MA} - 3\vec{MB} + 2\vec{MC}|$  nhỏ nhất.

**≡ Ví dụ 23.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-3;1)$ ,  $B(-5;5)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  trên trục  $Oy$  sao cho  $|MA - MB|$  lớn nhất.

**≡ Ví dụ 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho  $M$  thuộc trục  $Ox$  và  $A(4;1)$ ,  $B(1;3)$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức  $T = MA + MB$ .

**DT**

**7**

**Tọa độ hóa một số mô hình hình học**

**≡ Ví dụ 25.** Cho tam giác đều  $ABC$  cạnh  $a$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$ , trong đó  $O$  là trung điểm  $BC$ ,  $Ox$  cùng hướng với  $\vec{OC}$ ,  $Oy$  cùng hướng  $\vec{OA}$ .

- Tính tọa độ của các đỉnh của tam giác  $ABC$ .
- Tìm tọa độ trung điểm  $E$  của  $AC$ .
- Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

**≡ Ví dụ 26.** Cho hình bình hành  $ABCD$  có  $AD = 4$ , chiều cao ứng với cạnh  $AD$  bằng 3, góc  $\widehat{BAD} = 60^\circ$ . Chọn hệ trục tọa độ  $(A; \vec{i}, \vec{j})$  với  $\vec{i} = (1;0)$  và  $\vec{j} = (0;1)$  sao cho  $\vec{i}$  và  $\vec{AD}$  cùng hướng,  $y_B > 0$ . Tìm tọa độ đỉnh  $C$  của hình bình hành đã cho.

**≡ Ví dụ 27.** Để kéo một đường dây điện băng qua một hồ hình chữ nhật  $ABCD$  với độ dài  $AB = 200\text{m}$ ,  $AD = 180\text{m}$ , người ta định làm 4 cột điện liên tiếp cách đều nhau, cột thứ nhất nằm trên bờ

$AB$  và cách đỉnh  $A$  khoảng cách 20 m, cột thứ tư nằm trên bờ  $CD$  và cách đỉnh  $C$  khoảng 30 m. Tính khoảng cách từ vị trí các cột thứ hai, thứ ba đến các bờ  $AB, CD$ .

## C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Cho  $\vec{u} = (2; -1)$ ,  $\vec{v} = (4; 5)$ . Tính tọa độ các véc-tơ  $\vec{u} + \vec{v}$ ,  $\vec{u} - \vec{v}$ ,  $3\vec{u}$ ,  $5\vec{u} - 4\vec{v}$ .
- 2 Cho  $\vec{a} = (1; 2)$ ,  $\vec{b} = (3; -1)$ . Hãy phân tích véc-tơ  $\vec{c} = (-1; 5)$  theo hai véc-tơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .
- 3 Cho  $A(1; 2)$ ,  $B(-2; 1)$ ,  $C(2; -1)$ .
  - a) Chứng minh tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ .
  - b) Tính diện tích tam giác  $ABC$ .
- 4 Cho ba điểm  $A(1; -1)$ ,  $B(3; 5)$ ,  $C(2; 2)$ .
  - a) Chứng minh rằng ba điểm  $A, B, C$  thẳng hàng.
  - b) Tìm tọa độ điểm  $D$  trên  $Ox$  sao cho  $A, B, D$  thẳng hàng.
- 5 Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho ba điểm  $A(3; 4)$ ,  $B(2; 1)$ ,  $C(6; 3)$ . Tìm tọa độ điểm  $N$  thỏa mãn  $2\vec{NB} + \vec{NC} - \vec{NA} = \vec{0}$ .
- 6 Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(-3; 5)$ ,  $B(-4; -3)$ ,  $C(1; 1)$ .
  - a) Tìm tọa độ điểm  $D$  sao cho tứ giác  $ABCD$  là hình bình hành.
  - b) Tìm tọa độ điểm  $K$  thuộc trục hoành sao cho  $KA + KB$  nhỏ nhất.
- 7 Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hình bình hành  $ABCF$  có  $A(-4; 1)$ ,  $B(2; 4)$ ,  $C(2; -2)$ . Gọi  $M$  là điểm nằm trên đoạn  $FB$  sao cho  $2FM = 3MB$ . Tính tọa độ véc-tơ  $\vec{MB}$ .
- 8 Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(3; 4)$ ,  $B(4; 1)$ ,  $C(2; -3)$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$ .

## D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 16. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-8; -8)$  và  $H(-6; -1)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{AH}$ .

A.  $\vec{AH} = (-7; -\frac{9}{2})$ .    B.  $\vec{AH} = (-2; -7)$ .    C.  $\vec{AH} = (-14; -9)$ .    D.  $\vec{AH} = (2; 7)$ .

**Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (6; 1)$  và  $\vec{c} = (-7; -9)$ . Tìm tọa độ vectơ  $\vec{u} + \vec{c}$ .

A.  $\vec{u} + \vec{c} = (7; -16)$ .    B.  $\vec{u} + \vec{c} = (-13; -10)$ .  
C.  $\vec{u} + \vec{c} = (-1; -8)$ .    D.  $\vec{u} + \vec{c} = (-42; -9)$ .

**Câu 3.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho vectơ  $\vec{a} = (-9; -5)$ . Tính độ dài của vectơ  $\vec{a}$ .

A.  $|\vec{a}| = \sqrt{106}$ .    B.  $|\vec{a}| = 2$ .    C.  $|\vec{a}| = 106$ .    D.  $|\vec{a}| = \sqrt{14}$ .

**Câu 4.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{d} = (-4; 6m)$  và  $\vec{b} = (-10; 10 - m)$ . Tìm các giá trị của  $m$  để vectơ  $\vec{d}$  và vectơ  $\vec{b}$  cùng phương.

A.  $m = \frac{29}{8}$ .      B.  $m = \frac{5}{8}$ .      C.  $m = \frac{4}{7}$ .      D.  $m = 0$ .

**Câu 5.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $N(-1; -3)$  và  $H(-2; -3)$ . Tìm độ dài đoạn thẳng  $NH$ .

A.  $NH = 1$ .      B.  $NH = 1$ .      C.  $NH = 9$ .      D.  $NH = 1$ .

**Câu 6.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $E(-2; -8)$  và  $C(-4; -4)$ . Tìm tọa độ trung điểm của đoạn thẳng  $EC$ .

A.  $(1; -2)$ .      B.  $(-3; -6)$ .      C.  $(-6; -12)$ .      D.  $(-5; -4)$ .

**Câu 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $DBC$  có  $D(-3; -3)$ ,  $B(0; 1)$  và  $C(-7; -5)$ . Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác  $DBC$ .

A.  $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{4}\right)$ .      B.  $(-10; -7)$ .      C.  $\left(-\frac{10}{3}; -\frac{7}{3}\right)$ .      D.  $\left(-5; -\frac{7}{2}\right)$ .

**Câu 8.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(3; 1)$  và  $H(-6; -2)$ . Tìm tọa độ điểm  $P$  sao cho  $A$  và  $P$  đối xứng nhau qua  $H$ .

A.  $P(-11; -10)$ .      B.  $P(15; 5)$ .      C.  $P(-22; 3)$ .      D.  $P(-15; -5)$ .

**Câu 9.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(3; 1)$ ,  $N(4; 10)$  và  $H(6; -9)$ . Tìm tọa độ điểm  $K$  sao cho tam giác  $ANK$  nhận  $H(6; -9)$  làm trọng tâm.

A.  $K(11; -38)$ .      B.  $K(-11; 38)$ .      C.  $K(2; -30)$ .      D.  $K(14; -43)$ .

**Câu 10.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{m} = (-6; 5)$  và  $\vec{b} = (-1; 0)$ . Tính tích vô hướng  $\vec{m} \cdot \vec{b}$ .

A.  $\vec{m} \cdot \vec{b} = -35$ .      B.  $\vec{m} \cdot \vec{b} = -30$ .      C.  $\vec{m} \cdot \vec{b} = 6$ .      D.  $\vec{m} \cdot \vec{b} = -5$ .

**Câu 11.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (-1; 1)$  và  $\vec{b} = (2; 0)$ . Tính cosin của góc giữa hai vectơ  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$ .

A.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .      B.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{2}$ .  
 C.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ .      D.  $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$ .

**Câu 12.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{a} = (5; 2)$  và  $\vec{w} = (-3m; -4m - 5)$ . Tìm các giá trị của  $m$  để vectơ  $\vec{a}$  và vectơ  $\vec{w}$  vuông góc.

A.  $m = \frac{82}{23}$ .      B.  $m = 0$ .      C.  $m = -\frac{10}{23}$ .      D.  $m = -8$ .

**Câu 13.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(2; 2)$ ,  $B(5; -2)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc trục hoành sao cho  $\widehat{AMB} = 90^\circ$ .

A.  $M(1; 6)$ .      B.  $M(6; 0)$ .      C.  $M(0; 6)$ .      D.  $M(0; 1)$ .

**Câu 14.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , tìm điểm  $M$  thuộc trục hoành để khoảng cách từ đó đến điểm  $N(-1; 4)$  bằng  $2\sqrt{5}$ .

A.  $M(1; 0)$ ,  $M(-3; 0)$ .      B.  $M(1; 0)$ .      C.  $M(3; 0)$ .      D.  $M(1; 0)$ ,  $M(3; 0)$ .

**Câu 15.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(6; 0)$ ,  $B(3; 1)$ ,  $C(-1; -1)$ . Tính số đo góc  $B$  của tam giác đã cho.

A.  $\widehat{B} = 15^\circ$ .      B.  $\widehat{B} = 60^\circ$ .      C.  $\widehat{B} = 120^\circ$ .      D.  $\widehat{B} = 135^\circ$ .

**Câu 16.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-4; 1)$ ,  $B(2; 4)$ ,  $C(2; -2)$ . Tìm tọa độ tâm  $I$  của đường tròn ngoại tiếp tam giác đã cho.

A.  $I\left(\frac{1}{4}; 1\right)$ .      B.  $I\left(1; \frac{1}{4}\right)$ .      C.  $I\left(-\frac{1}{4}; 1\right)$ .      D.  $I\left(1; -\frac{1}{4}\right)$ .

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 17 đến câu 28. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 17.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  cho bốn điểm  $A(3; -2)$ ,  $B(7; 1)$ ,  $C(0; 1)$ ,  $D(-8; -5)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  ngược hướng.                      b) Bốn điểm  $A, B, C, D$  thẳng hàng.  
c) Hai véc-tơ  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  cùng hướng.                                      d)  $\overrightarrow{AB}$  và  $\overrightarrow{CD}$  là hai véc-tơ đối.

**Câu 18.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai véc-tơ  $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$  và  $\vec{b} = \vec{i} + 7\vec{j}$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $|\vec{a}| = 7$ .                      b)  $|\vec{b}| = 5\sqrt{2}$ .                      c)  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 14$ .                      d)  $(\vec{a}, \vec{b}) = 45^\circ$ .

**Câu 19.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{n} = (-5; -3)$ ,  $\vec{a} = (8; -4)$ .

- a)  $\vec{n} - \vec{a} = (-13; 3)$ .                      b)  $2\vec{n} - 4\vec{a} = (-42; 10)$ .  
c)  $|\vec{a}| = 4\sqrt{5}$ .                      d)  $\cos(\vec{n}; \vec{a}) = -\frac{7\sqrt{170}}{170}$ .

**Câu 20.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(2; -1)$ ,  $B(1; 4)$ ,  $C(7; 0)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $AB = \sqrt{26}$ .  
b) Chu vi tam giác  $ABC$  bằng 17,4 (làm tròn đến hàng phần chục).  
c) Tam giác  $ABC$  là tam giác đều.  
d) Diện tích tam giác  $ABC$  bằng 26.

**Câu 21.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , Cho tam giác  $ABC$  với  $A(5, -2)$ ,  $B(0, 0)$ ,  $C(-3, 3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{AB} = (-5; 2)$ .  
b) Tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$  là  $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right)$ .  
c)  $\hat{A}$  là góc nhọn.  
d) Tọa độ trực tâm tam giác là  $H\left(-\frac{32}{3}, -\frac{53}{3}\right)$ .

**Câu 22.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(-4, 4)$ ,  $B(2, -3)$ ,  $C(5, 3)$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a)  $\overrightarrow{BA} = (6; -7)$ .                      b) Tọa độ trọng tâm tam giác  $ABC$  là  $\left(1; \frac{4}{3}\right)$ .  
c)  $\hat{A}$  là góc tù.                      d) Tọa độ trực tâm tam giác là  $H\left(\frac{94}{19}, -\frac{9}{19}\right)$ .

**PHẦN III.** Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 23 đến câu 25 vào ô kết quả.

**Câu 23.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1; 4)$ ,  $B(3; 2)$ ,  $C(5; 4)$ . Tính chu vi  $P$  của tam giác đã cho (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

**Câu 24.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-3; 0)$ ,  $B(3; 0)$  và  $C(2; 6)$ . Gọi  $H(a; b)$  là tọa độ trực tâm của tam giác đã cho. Tính  $a + 6b$ .

KQ:

**Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai vectơ  $\vec{u} = (8; 3)$ ,  $\vec{m} = (-6; 3)$ . Biết vectơ  $\vec{x} = (a; b)$

thỏa mãn  $2\vec{u} - \vec{x} = \vec{m}$ . Tính  $a + b$ .

KQ:

**Câu 26.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $N(3; -2), M(-4; -4), E(4; -1)$ . Điểm  $C(a; b)$  thỏa mãn  $3\vec{NC} - 2\vec{NM} = -2\vec{NE}$ . Tính  $a + b$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

**Câu 27.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $F(-6; -1), N(6; -6)$ . Điểm  $C(a; b)$  thuộc trục hoành thỏa mãn cách đều hai điểm  $F$  và  $N$ . Tính  $3a + 2b$  (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

KQ:

**Câu 28.** Trên màn hình ra đa của đài kiểm soát (được coi như mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ ) với đơn vị trên các trục (tính theo ki-lô-mét), một xe thiết giáp chuyển động thẳng đều từ mục tiêu  $A$  có tọa độ  $(60; 20)$  đến mục tiêu  $B$  có tọa độ  $(20; 50)$  và thời gian đi quãng đường  $AB$  là 3 giờ. Gọi  $M(x_M; y_M)$  là tọa độ của xe thiết giáp tại thời điểm sau khi xuất phát 1 giờ. Hỏi  $y_M$  bằng bao nhiêu?

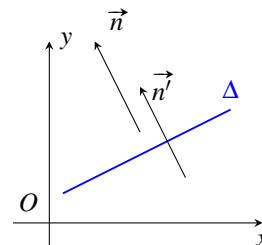
KQ:

## §2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Phương trình tổng quát của đường thẳng

**Véc tơ pháp tuyến:** Véc-tơ  $\vec{n} \neq \vec{0}$  được gọi là véc-tơ pháp tuyến (vtpt) của đường thẳng  $\Delta$  nếu giá của  $\vec{n}$  vuông góc với  $\Delta$  (hình vẽ).



- Một đường thẳng có vô số véc-tơ pháp tuyến và chúng cùng phương nhau.
- Nếu  $\vec{n}$  và  $\vec{n}'$  cùng là véc-tơ pháp tuyến của  $\Delta$  thì  $\vec{n}' = k \cdot \vec{n}$ .
- Đường thẳng  $\Delta$  hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một véc-tơ pháp tuyến của nó.

**Phương trình tổng quát của đường thẳng:**

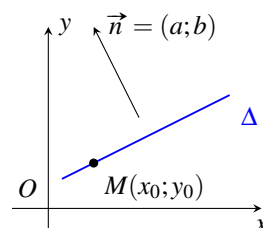
- ① Đường thẳng  $\Delta$ :  $\begin{cases} \text{qua } M(x_0; y_0) & (1) \\ \text{vtpt } \vec{n} = (a; b) & (2) \end{cases}$   
sẽ có phương trình tổng quát là

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \quad (*)$$

ta thu gọn (\*) về dạng  $ax + by + c = 0$ .

- ② Cho  $\Delta: ax + by + c = 0$ .

- Nếu  $b = 0$  thì  $\Delta$  có thể đưa về dạng  $x = -\frac{c}{a}$  (vuông góc với  $Ox$ ).
- Nếu  $b \neq 0$ , chia hai vế cho  $b$  thì  $\Delta$  có thể đưa về dạng  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ .



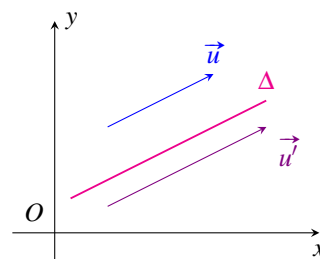
#### Chú ý

Để viết được phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$ , ta cần xác định được hai dữ kiện (1) và (2), sau đó áp dụng công thức (\*) và thu gọn kết quả.

#### 2 Phương trình tham số của đường thẳng

**Véc tơ chỉ phương:** Véc-tơ  $\vec{u} \neq \vec{0}$  được gọi là véc-tơ chỉ phương (vtcp) của đường thẳng  $\Delta$  nếu giá của  $\vec{u}$  song hoặc trùng với  $\Delta$ .

- Một đường thẳng có vô số véc-tơ chỉ phương và chúng cùng phương với nhau.
- Đường thẳng  $\Delta$  hoàn toàn xác định khi biết một điểm và một véc-tơ chỉ phương của nó.



Nếu  $\vec{u}$  và  $\vec{u}'$  là véc-tơ chỉ phương của  $\Delta$  thì  $\vec{u} = k \cdot \vec{u}'$ .

**Mối liên hệ giữa véc-tơ chỉ phương và véc-tơ pháp tuyến:** Cho  $\vec{n} = (a; b)$  là một véc-tơ pháp tuyến của  $\Delta$ . Khi đó  $\Delta$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (-b; a)$  hoặc  $\vec{u} = (b; -a)$ .

**Phương trình tham số của đường thẳng:** Đường thẳng  $\Delta$ :  $\begin{cases} \text{qua } M(x_0; y_0) & (1) \\ \text{vtcp } \vec{u} = (u_1; u_2) & (2) \end{cases}$  sẽ có phương trình tham số là

$$\begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

### 3 Mối liên hệ giữa đồ thị hàm bậc nhất và đường thẳng

① Đồ thị hàm số bậc nhất  $y = kx + y_0$  là một đường thẳng có hệ số góc  $k$  có thể được viết thành  $kx - y + y_0 = 0$ . Suy ra một véc tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (k; -1)$ .

**Ghi nhớ:** Một đường thẳng có hệ số góc  $k$  thì nó sẽ có một véc tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (k; -1)$ .

② Ngược lại, mỗi đường thẳng có phương trình  $ax + by + c = 0$ , với  $a, b \neq 0$  có thể được viết thành dạng hàm số bậc nhất  $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ .

## B RÈN LUYỆN KỸ NĂNG GIẢI TOÁN

### DT 1 Phương trình tổng quát của đường thẳng

**Xét phương trình tổng quát:** Cho  $\Delta: ax + by + c = 0$  thì

- Một vtpt là  $\vec{n} = (a, b)$  (hệ số của  $x$  và  $y$ .)
- Tìm điểm thuộc  $\Delta$ : Cho trước  $x$ , thay vào phương trình tìm  $y$  hoặc ngược lại.

**Ví dụ 1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: 2x - y + 5 = 0$ .

- Tìm một điểm thuộc  $\Delta$  và một véc tơ pháp tuyến của  $\Delta$ .
- Gọi  $M(x_1; y_1)$  và  $N(x_2; y_2)$  thuộc  $\Delta$ . Tính độ dài đoạn  $MN$ , biết  $x_1 = 4$  và  $x_2 = 1$ .

**Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tổng quát đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $M(-1; 5)$  và có véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n} = (-2; 3)$ .

**Ví dụ 3.** Lập phương trình tổng quát của đường thẳng qua điểm  $M(-2; 3)$  và có hệ số góc  $k = 2$ .

**Ví dụ 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; -2)$ ,  $B(2; 0)$ ,  $C(2; 4)$ .

- Lập phương trình đường cao kẻ từ  $A$  và đường cao kẻ từ  $B$  của tam giác  $ABC$ .
- Lập phương trình đường trung trực cạnh  $BC$  và trung trực cạnh  $AC$ .

### DT 2 Phương trình tham số của đường thẳng

**Xét phương trình tham số:** Cho  $\Delta: \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \end{cases}$  thì

- Một vtcp là  $\vec{u} = (u_1; u_2)$  (hệ số của  $t$ .)
- Tìm điểm thuộc  $\Delta$ : Cho trước  $t$ , thay vào phương trình tìm  $x$  và  $y$ .

≡ **Ví dụ 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta$ :  $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$ .

- Tìm một điểm thuộc  $\Delta$  và một véc tơ chỉ phương của  $\Delta$ .
- Gọi  $M(x_1; y_1)$  và  $N(x_2; y_2)$  thuộc  $\Delta$ . Tính độ dài đoạn  $MN$ , biết  $x_1 = 4$  và  $x_2 = 1$ .

≡ **Ví dụ 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tham số đường thẳng  $\Delta$  biết  $\Delta$  đi qua  $M(1; 2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (-1; 3)$ .

≡ **Ví dụ 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , lập phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(5; 1)$  và có hệ số góc  $k = 8$ .

≡ **Ví dụ 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; -2)$ ,  $B(2; 0)$ ,  $C(2; 4)$ .

- Lập phương trình đường thẳng đi qua  $A$  và song song với  $BC$ .
- Lập phương trình tham số của đường trung bình tam giác ứng với cạnh đáy  $BC$ .

DT

3

### Chuyển phương trình tham số về phương trình tổng quát và ngược lại

**Mối liên hệ giữa véc tơ chỉ phương và véc tơ pháp tuyến:** Cho  $\vec{n} = (a; b)$  là một véc tơ pháp tuyến của  $\Delta$ . Khi đó  $\Delta$  có một véc tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (-b; a)$  hoặc  $\vec{u} = (b; -a)$  (đổi chỗ và đổi 1 dấu).

≡ **Ví dụ 9.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta$ :  $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - t \end{cases}$ . Viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$ .

≡ **Ví dụ 10.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta$ :  $3x - 4y + 4 = 0$ . Lập phương trình tham số của  $\Delta$ .

DT

4

### Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước

⚙ Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(x_A; y_A)$  và  $B(x_B; y_B)$ . Khi đó, đường thẳng  $AB$  sẽ có một véc tơ chỉ phương là  $\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A)$ .

⚙ **Lưu ý:**

- Nếu  $x_B - x_A \neq 0$  và  $y_B - y_A \neq 0$  thì phương trình  $AB$  là  $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$ .
- Nếu  $A(a; 0)$  và  $B(0; b)$ , với  $a, b \neq 0$  thì phương trình  $AB$  là  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

≡ **Ví dụ 11.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , lập phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  đi qua  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 1)$ .

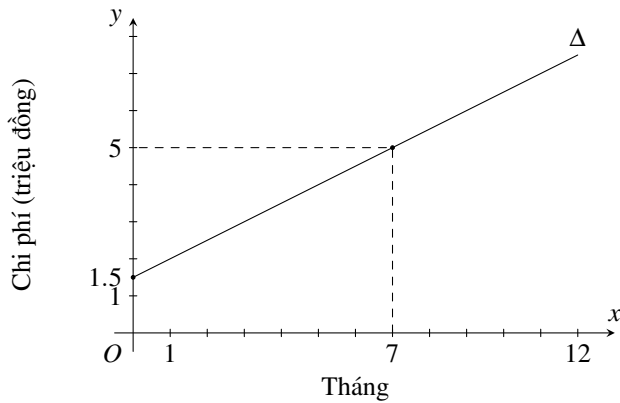
≡ **Ví dụ 12.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 2)$ ,  $B(3; 0)$ ,  $C(1; 4)$ .

- Viết phương trình tổng quát của các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác  $ABC$ .
- Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của đường trung tuyến kẻ từ  $A$ .

**Ví dụ 13.** Một đường thẳng đi qua điểm  $M(5; -3)$  cắt trục  $Ox$  và  $Oy$  tại  $A$  và  $B$  sao cho  $M$  là trung điểm của  $AB$ . Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đó.

**Ví dụ 14.**

Để tham gia một phòng tập thể dục, người tập phải trả một khoản phí tham gia ban đầu và phí sử dụng phòng tập. Đường thẳng  $\Delta$  ở hình bên biểu thị tổng chi phí (đơn vị: triệu đồng) tham gia một phòng tập thể dục theo thời gian tập của một người (đơn vị: tháng).



- a) Viết phương trình của đường thẳng  $\Delta$ .
- b) Cho biết giao điểm của đường thẳng  $\Delta$  với trục tung trong tình huống này có ý nghĩa gì?
- c) Tính tổng chi phí mà người đó phải trả khi tham gia phòng tập thể dục với thời gian 12 tháng.

**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

- 1) Viết phương trình tham số và phương trình tổng quát của trục  $Ox$ , trục  $Oy$ .
- 2) Lập phương trình tổng quát và phương trình tham số của đường thẳng  $d$  trong mỗi trường hợp sau:
  - a)  $d$  đi qua điểm  $M(2; 2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (4; 7)$ ;
  - b)  $d$  đi qua điểm  $N(0; 1)$  và có véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (-5; 3)$ ;
  - c)  $d$  đi qua  $A(-2; -3)$  và có hệ số góc  $k = 3$ ;
  - d)  $d$  đi qua hai điểm  $P(1; 1)$  và  $Q(3; 4)$ .
- 3) Cho đường thẳng  $d$  có phương trình tham số là  $\begin{cases} x = -1 - 3t \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$ 
  - a) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$ .
  - b) Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng  $d$  lần lượt với các trục  $Ox, Oy$ .
  - c) Đường thẳng  $d$  có đi qua điểm  $M(-7; 5)$  hay không?
- 4) Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác  $ABC$  với  $A(1; 4), B(3; -1), C(6; 2)$ .
  - a) Lập phương trình tổng quát của đường cao  $AH$  tam giác  $ABC$ .
  - b) Lập phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua  $B$  và song song với  $AC$ .
  - c) Lập phương trình tham số của đường trung bình tam giác ứng với cạnh đáy  $BC$ .
  - d) Lập phương trình tổng quát đường trung tuyến kẻ từ  $A$ .

- 5 Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  biết  $A(2; 1), B(-1; 0), C(0; 3)$ .
- Viết phương trình tổng quát của đường cao  $AH$ .
  - Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$ .
  - Viết phương trình tổng quát đường thẳng  $BC$ .
  - Viết phương trình tổng quát đường thẳng qua  $A$  và song song với đường  $BC$ .
  - Viết phương trình tổng quát đường trung tuyến kẻ từ  $A$ .
- 6 Theo Google Map, sân bay nội bài có vĩ độ  $21,2^\circ$  Bắc, kinh độ  $105,8^\circ$  Đông, sân bay Tân Sơn Nhất có vĩ độ  $10,8^\circ$  Bắc, kinh độ  $106,6^\circ$  Đông. Một máy bay, bay từ Nội Bài đến sân bay Tân Sơn Nhất. Tại thời điểm  $t$  giờ, tính từ lúc xuất phát, máy bay ở vị trí có vĩ độ  $x^\circ$  Bắc, kinh độ  $y^\circ$  Đông được tính theo công thức

$$\begin{cases} x = 21,2 - \frac{624}{125}t \\ y = 105,8 + \frac{48}{125}t \end{cases}$$

- Hỏi chuyến bay từ Hà Nội đến Tân Sơn Nhất mất mấy giờ?
- Tại thời điểm 1 giờ kể từ lúc cất cánh, máy bay đã qua vĩ tuyến  $17 (17^\circ$  Bắc) chưa?

## D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ x = 3 - t \end{cases}$ . Điểm nào sau đây thuộc  $\Delta$ ?

- A.  $M(1; 3)$ .      B.  $N(3; 2)$ .      C.  $P(2; -1)$ .      D.  $Q(2; 1)$ .

**Câu 2.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: 3x - y + 6 = 0$ . Điểm nào sau đây thuộc  $\Delta$ ?

- A.  $M(1; 3)$ .      B.  $N(3; 2)$ .      C.  $P(-1; 3)$ .      D.  $Q(2; 1)$ .

**Câu 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ x = 3 - t \end{cases}$ . Một véc tơ chỉ phương  $\vec{u}$  của  $\Delta$  là

- A.  $\vec{u} = (1; 3)$ .      B.  $\vec{u} = (2; -1)$ .      C.  $\vec{u} = (3; 1)$ .      D.  $\vec{u} = (2; 1)$ .

**Câu 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = 3 + t \end{cases}$ . Một véc tơ chỉ phương  $\vec{u}$  của  $\Delta$  là

- A.  $\vec{u} = (5; 3)$ .      B.  $\vec{u} = (-2; 3)$ .      C.  $\vec{u} = (2; 1)$ .      D.  $\vec{u} = (2; -1)$ .

**Câu 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 4 + 8t \end{cases}$ . Một véc tơ chỉ phương  $\vec{u}$  của  $\Delta$  là

- A.  $\vec{u} = (1; 4)$ .      B.  $\vec{u} = (-2; -8)$ .      C.  $\vec{u} = (1; -4)$ .      D.  $\vec{u} = (2; 8)$ .

**Câu 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho phương trình đường thẳng  $\Delta: 3x + 4y - 5 = 0$ . Tìm một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng  $\Delta$ .

- A.  $\vec{n} = (3; 4)$ .      B.  $\vec{n} = (4; -3)$ .      C.  $\vec{n} = (-4; 3)$ .      D.  $\vec{n} = (4; 3)$ .

**Câu 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho phương trình đường thẳng  $\Delta: x - 2y + 3 = 0$ . Tìm một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng  $\Delta$ .

- A.  $\vec{n} = (1; -2)$ .      B.  $\vec{n} = (2; 1)$ .      C.  $\vec{n} = (-2; 3)$ .      D.  $\vec{n} = (1; 3)$ .

**Câu 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -4 - 3t \end{cases}$ . Tìm một véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}$  của  $d$ .

- A.  $\vec{n} = (3; -5)$ .      B.  $\vec{n} = (3; 5)$ .      C.  $\vec{n} = (5; -3)$ .      D.  $\vec{n} = (5; 3)$ .

**Câu 9.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = -2 - t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$ . Tìm một véc-tơ pháp tuyến  $\vec{n}$  của  $d$ .

- A.  $\vec{n} = (-2; 4)$ .      B.  $\vec{n} = (3; 1)$ .      C.  $\vec{n} = (4; 2)$ .      D.  $\vec{n} = (-1; 3)$ .

**Câu 10.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 3x - 7y + 1 = 0$ . Tìm một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}$  của  $d$ .

- A.  $\vec{u} = (3; 7)$ .      B.  $\vec{u} = (3; -7)$ .      C.  $\vec{u} = (7; -3)$ .      D.  $\vec{u} = (7; 3)$ .

**Câu 11.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 8x + 1 = 0$ . Tìm một véc-tơ chỉ phương  $\vec{u}$  của  $d$ .

- A.  $\vec{u} = (8; 1)$ .      B.  $\vec{u} = (0; 1)$ .      C.  $\vec{u} = (1; 0)$ .      D.  $\vec{u} = (1; -8)$ .

**Câu 12.** Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1; -2)$  và có véc-tơ chỉ phương  $\vec{u} = (3; 5)$  có phương trình tham số là

- A.  $d: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 5 - 2t \end{cases}$ .      B.  $d: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ .      C.  $d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ .      D.  $d: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -2 + 5t \end{cases}$ .

**Câu 13.** Đường thẳng đi qua  $A(-1; 2)$ , nhận  $\vec{n} = (2; -4)$  làm véc-tơ pháp tuyến có phương trình là

- A.  $x + y + 4 = 0$ .      B.  $x - 2y - 4 = 0$ .      C.  $x - 2y + 5 = 0$ .      D.  $-x + 2y - 4 = 0$ .

**Câu 14.** Đường thẳng đi qua điểm  $C(3; -2)$  và có hệ số góc  $k = \frac{2}{3}$  có phương trình là

- A.  $2x + 3y = 0$ .      B.  $2x - 3y - 12 = 0$ .      C.  $2x - 3y - 9 = 0$ .      D.  $3x - 2y - 13 = 0$ .

**Câu 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua hai điểm  $A(2; -1)$  và  $B(2; 5)$ .

- A.  $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + 6t \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} x = 2t \\ y = -6t \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + 6t \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 6t \end{cases}$ .

**Câu 16.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm  $A(3; -1)$  và  $B(1; 5)$  là

- A.  $-x + 3y + 6 = 0$ .      B.  $3x - y + 6 = 0$ .      C.  $3x - y + 10 = 0$ .      D.  $3x + y - 8 = 0$ .

**Câu 17.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$  cắt hai trục  $Ox, Oy$  lần lượt tại hai điểm  $A(a; 0), B(0; b)$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ). Viết phương trình đường thẳng  $d$ .

- A.  $d: \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 1$ .      B.  $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$ .      C.  $d: \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .      D.  $d: \frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$ .

**Câu 18.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường thẳng cắt hai trục tọa độ tại  $A(2; 0)$  và  $B(0; 3)$  có phương trình là

- A.  $3x - 2y + 6 = 0$ .      B.  $3x - 2y - 6 = 0$ .      C.  $2x - 3y + 4 = 0$ .      D.  $2x + 3y - 4 = 0$ .

**Câu 19.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 15 \\ y = 6 + 7t \end{cases}$ ?

- A.  $6x - 15y = 0$ .      B.  $x - y - 9 = 0$ .      C.  $x - 15 = 0$ .      D.  $x + 15 = 0$ .

**Câu 20.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 3 - 5t \\ y = 1 + 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ . Phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  là

- A.  $4x - 5y - 7 = 0$ .      B.  $4x + 5y + 17 = 0$ .      C.  $4x + 5y - 17 = 0$ .      D.  $4x - 5y - 17 = 0$ .

**Câu 21.** Đường thẳng  $d$  có phương trình tổng quát  $4x + 5y - 8 = 0$ . Phương trình tham số của  $d$  là

- A.  $\begin{cases} x = 2 + 4t \\ y = 5t \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = -4t \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} x = 2 + 5t \\ y = 4t \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x = -5t \\ y = 4t \end{cases}$ .

**Câu 22.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho ba điểm  $A(2;0)$ ,  $B(0;3)$  và  $C(-3;-1)$ . Viết phương trình tham số của đường thẳng đi qua điểm  $B$  và song song với  $AC$ .

- A.  $\begin{cases} x = 5t \\ y = 3 + t \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = t \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} x = t \\ y = 3 - 5t \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x = 5 \\ y = 1 + 3t \end{cases}$ .

**Câu 23.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1;-2)$ ,  $B(3;6)$ . Phương trình tổng quát của đường trung trực của đoạn thẳng  $AB$  là

- A.  $x + 4y + 10 = 0$ .      B.  $4x - y - 6 = 0$ .      C.  $x + 4y - 10 = 0$ .      D.  $2x + 8y + 5 = 0$ .

**Câu 24.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với đỉnh  $A(1;2)$  và  $H(3;-1)$  là chân đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ . Khi đó đường thẳng  $BC$  có phương trình là

- A.  $2x - 3y - 9 = 0$ .      B.  $2x - 3y + 4 = 0$ .      C.  $3x + 2y - 7 = 0$ .      D.  $3x + 2y + 7 = 0$ .

**Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;2)$ ,  $B(3;1)$ ,  $C(5;4)$ . Phương trình nào sau đây là phương trình đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$ ?

- A.  $2x + 3y + 8 = 0$ .      B.  $2x + 3y - 8 = 0$ .      C.  $3x - 2y + 1 = 0$ .      D.  $2x + 3y - 2 = 0$ .

**Câu 26.** Cho ba điểm  $A(1;-2)$ ,  $B(5;-4)$ ,  $C(-1;4)$ . Đường cao kẻ từ  $A$  của tam giác  $ABC$  có phương trình tham số là

- A.  $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ .      B.  $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3 - 2t \end{cases}$ .      C.  $\begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ .      D.  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + 3t \end{cases}$ .

**Câu 27.** Cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;1)$ ,  $B(0;-2)$  và  $C(4;2)$ . Phương trình tổng quát của đường trung tuyến kẻ từ  $B$  của tam giác  $ABC$ .

- A.  $3x + y - 2 = 0$ .      B.  $5x - 3y + 1 = 0$ .      C.  $x + y + 7 = 0$ .      D.  $-7x + 5y + 10 = 0$ .

**Câu 28.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(2;4)$ ;  $B(2;1)$ ;  $C(5;0)$ . Trung tuyến  $CM$  đi qua điểm nào dưới đây?

- A.  $(-7;-6)$ .      B.  $(-1;5)$ .      C.  $\left(10; -\frac{5}{2}\right)$ .      D.  $\left(14; \frac{9}{2}\right)$ .

**Câu 29.** Đường thẳng đi qua điểm  $M(5;-3)$  và cắt hai trục tọa độ tại hai điểm  $A$  và  $B$  sao cho  $M$  là trung điểm của  $AB$  có phương trình là

- A.  $3x + 5y - 30 = 0$ .      B.  $3x - 5y - 30 = 0$ .      C.  $3x + 5y + 30 = 0$ .      D.  $5x - 3y - 34 = 0$ .

**Câu 30.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(0;0)$ ,  $B(1;-1)$ ,  $C(3;3)$ . Véc-tơ nào dưới đây là véc-tơ chỉ phương của đường phân giác trong góc  $A$ ?

- A.  $\vec{u}_4 = (0;1)$ .      B.  $\vec{u}_2 = (1;0)$ .      C.  $\vec{u}_3 = (1;-1)$ .      D.  $\vec{u}_1 = (-1;2)$ .

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 31.** Trong mặt phẳng ( $Oxy$ ), cho đường thẳng  $d: -2x + 5y + 35 = 0$ . Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:

- a) Điểm  $D(-10; -11)$  không thuộc đường thẳng  $d$ .
- b) Điểm  $Q(0; -7)$  thuộc đường thẳng  $d$ .
- c)  $d$  có một vectơ chỉ phương là  $\vec{u} = (4; -10)$ .
- d)  $d$  có một vectơ pháp tuyến là  $\vec{n}(5; 2)$ .

**Câu 32.** Trong hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 3x - 7y + 15 = 0$ . Các khẳng định sau đây đúng hay sai?

- a)  $\vec{u} = (7; 3)$  là véc-tơ chỉ phương của  $d$ .
- b)  $d$  không đi qua gốc tọa độ.
- c)  $d$  có hệ số góc  $k = \frac{3}{7}$ .
- d)  $d$  đi qua hai điểm  $M\left(-\frac{1}{3}; 2\right)$  và  $N(5; 0)$ .

**Câu 33.** Cho điểm  $A(1; -2), B(3; 1)$ . Xét tính đúng sai của mệnh đề sau:

- a) Đường thẳng đi qua hai điểm  $A, B$  nhận  $\vec{u} = (2; 3)$  làm vectơ chỉ phương.
- b) Phương trình tham số của đường thẳng đi qua  $A, B$  là  $\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -5 + 3t \end{cases}$ .
- c) Phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua  $A, B$  là  $3x - 2y - 7 = 0$ .
- d) Hệ số góc của đường thẳng đi qua  $A, B$  là  $k = -\frac{3}{2}$ .

**Câu 34.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-4; -1)$ , hai đường cao  $BH$  và  $CK$  có phương trình lần lượt là  $2x - y + 3 = 0$  và  $3x + 2y - 6 = 0$ . Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

- a) Phương trình đường thẳng  $AB$  là  $2x - 3y + 5 = 0$ .
- b) Phương trình đường thẳng  $AC$  là  $x + 2y - 6 = 0$ .
- c) Tọa độ điểm  $B$  của tam giác  $ABC$  là  $B(-1; 1)$ .
- d) Phương trình đường thẳng  $BC$  là  $x + y - 1 = 0$ .

**Câu 35.** Cho tam giác  $ABC$  biết trực tâm  $H(2; 1)$  và phương trình cạnh  $AB: x - 2y - 4 = 0$ , phương trình cạnh  $AC: 3x + 4y - 2 = 0$ .

- a) Tọa độ  $A(2; -1)$ .
- b) Phương trình đường thẳng  $BH: 3x - 3y + 2 = 0$ .
- c) Tọa độ  $B(3; 5)$ .
- d) Phương trình đường thẳng  $BC: 5y + 11 = 0$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 36.** Cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -4t \end{cases}$ . Gọi  $M$  là điểm thuộc  $\Delta$  và có hoành độ bằng 6. Tính độ dài đoạn  $OM$ .

KQ:

**Câu 37.** Cho đường thẳng  $\Delta$  có phương trình là  $2x - 3y + 1 = 0$ . Đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(1; -2)$  và vuông góc với đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $ax + by + 1 = 0$ . Tính  $P = a + b$ .

KQ:

**Câu 38.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có phương trình đường cao  $AH$  là  $x + y - 1 = 0$ ; phương trình đường trung tuyến  $AM$  là  $2x + y - 3 = 0$  và tọa độ  $B(0; -3)$ . Khi đó điểm  $C$  có tung độ bằng bao nhiêu?

KQ:

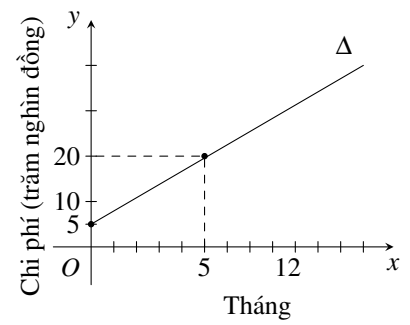
**Câu 39.** Màn hình radar tại trạm điều khiển không lưu được thiết lập hệ tọa độ  $Oxy$  có vị trí trạm có tọa độ  $O(0; 0)$  radar có bán kính hoạt động là 600 km. Một máy bay khởi hành từ sân bay lúc 8 giờ. Cho biết sau  $t$  giờ máy bay có tọa độ  $\begin{cases} x = 1 + 180t \\ y = 1 - 180t \end{cases}$ . Hỏi sau mấy giờ máy bay vừa ra khỏi tầm hoạt động

của rađa? (làm tròn đến hàng phần chục)

KQ:

**Câu 40.** Đường thẳng  $\Delta$  ở hình bên biểu thị tổng chi phí lắp đặt và tiền cước sử dụng dịch vụ Internet (đơn vị: trăm nghìn đồng) theo thời gian của một gia đình (đơn vị: tháng). Tính tổng chi phí lắp đặt và sử dụng Internet trong 12 tháng đầu tiên. (tính bằng đơn vị triệu đồng và làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:



## §3. VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI, GÓC, KHOẢNG CÁCH GIỮA 2 ĐƯỜNG THẲNG

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng  $\begin{cases} \Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ \Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$ . Để kiểm tra vị trí tương đối giữa chúng, ta có thể làm theo một trong hai cách sau:

⚙ **Cách 1: Dựa vào số nghiệm của hệ phương trình.**

$$\text{Xét hệ } \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

- Nếu hệ có một nghiệm  $(x_0; y_0)$  thì  $\Delta_1$  cắt  $\Delta_2$  tại điểm  $M_0(x_0; y_0)$ .
- Nếu hệ có vô số nghiệm thì  $\Delta_1$  trùng với  $\Delta_2$ .
- Nếu hệ vô nghiệm thì  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$  không có điểm chung, hay  $\Delta_1$  song song với  $\Delta_2$ .

⚙ **Cách 2: Xét tỉ số (với  $a_2, b_2, c_2$  khác 0)**

- Nếu  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$  thì  $\Delta_1$  trùng với  $\Delta_2$ .
- Nếu  $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$  thì  $\Delta_1$  song song  $\Delta_2$ .
- Nếu  $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$  thì  $\Delta_1$  cắt  $\Delta_2$ .

#### 2 Góc giữa hai đường thẳng

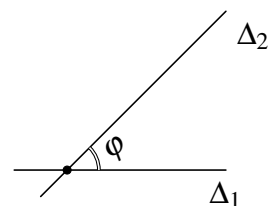
⚙ **Công thức tính:** Cho hai đường thẳng  $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$  và  $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Gọi  $\varphi$  ( $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ ) là góc tạo bởi giữa hai đường thẳng  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ . Khi đó

$$\cos \varphi = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cdot \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

với  $\vec{n}_1 = (a_1; b_1)$ ,  $\vec{n}_2 = (a_2; b_2)$  lần lượt là vtpt của  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .

⚙ **Chú ý:**

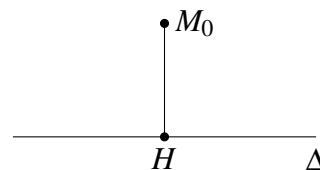
- $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ .
- Nếu  $\Delta_1$  song song hoặc trùng  $\Delta_2$  thì  $\varphi = 0^\circ$ .
- Nếu  $\Delta_1$  vuông góc  $\Delta_2$  thì  $\varphi = 90^\circ$  hay  $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ .



### 3 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

**Công thức tính:** Khoảng cách từ  $M_0(x_0; y_0)$  đến đường thẳng  $\Delta: ax + by + c = 0$  được tính theo công thức

$$d(M_0, \Delta) = M_0H = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



**Các trường hợp đặc biệt:**  $d(M_0, Ox) = M_0H = |y_0|$ ,  $d(M_0, Oy) = M_0K = |x_0|$ .

**Phương trình các đường phân giác góc tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau:** Cho hai đường thẳng  $\Delta_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$  và  $\Delta_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$  cắt nhau thì phương trình hai đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng trên là

$$\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

## B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### DT 1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

**Ví dụ 1.** Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm của 2 đường thẳng sau (nếu có).

- $2x - 5y + 3 = 0$  và  $5x + 2y - 3 = 0$ .
- $x - 3y + 4 = 0$  và  $0,5x - 1,5y + 4 = 0$ .
- $10x + 2y - 3 = 0$  và  $5x + y - 1,5 = 0$ .

**Ví dụ 2.** Xét vị trí tương đối và tìm giao điểm của cặp đường thẳng sau (nếu có).

- $d: \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$  và  $d': \begin{cases} x = -6 + 5t' \\ y = 2 - 4t' \end{cases}$ .
- $d: \begin{cases} x = 1 - 4t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$  và  $d': 2x + 4y - 10 = 0$ .
- $d: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 + 2t \end{cases}$  và  $d': \frac{x}{1} = \frac{y-3}{-2}$ .

**Ví dụ 3.** Tìm giá trị của tham số  $m$  để  $\Delta_1: mx + y + 8 = 0$  và  $\Delta_2: x - y + m = 0$  vuông góc nhau.

**Ví dụ 4.** Tìm  $m$  để ba đường thẳng sau đây đồng quy

$$d_1: 2x + y - 4 = 0, d_2: 5x - 2y + 3 = 0 \text{ và } d_3: mx + 3y - 2 = 0.$$

**Ví dụ 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$

- qua  $M(-1; -4)$  và song song với đường thẳng  $3x + 5y - 2 = 0$ .
- qua  $N(1; 1)$  và vuông góc với đường thẳng  $2x + 3y + 7 = 0$ .

**≡ Ví dụ 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $A(-5; 2)$  và đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 2t \end{cases}$ . Lập phương trình tổng quát của đường thẳng  $d'$  trong các trường hợp sau

- a)  $d'$  qua  $A$  và song song với  $d$ .                      b)  $d'$  qua  $A$  và vuông góc với  $d$ .

**DT 2 Góc giữa hai đường thẳng**

**≡ Ví dụ 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $\Delta_1: x + 2y - \sqrt{2} = 0$  và  $\Delta_2: x - y = 0$ . Tính côsin của góc giữa  $\Delta_1$  và  $\Delta_2$ .

**≡ Ví dụ 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tính góc giữa hai đường thẳng sau  $\Delta_1: 3x - 2y + 1 = 0$  và  $\Delta_2: \begin{cases} x = t \\ y = 7 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ .

**≡ Ví dụ 9.** Tìm  $m$  để góc hợp bởi hai đường thẳng  $\Delta_1: \sqrt{3}x - y + 7 = 0$  và  $\Delta_2: mx + y + 1 = 0$  một góc bằng  $30^\circ$ .

**≡ Ví dụ 10.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 3x - 2y + 1 = 0$  và  $M(1; 2)$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $M$  và tạo với  $d$  một góc  $45^\circ$ .

**DT 3 Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng**

**≡ Ví dụ 11.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $M(3; 5)$  và đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $2x - 3y - 6 = 0$ . Tính khoảng cách từ  $M$  đến  $\Delta$ .

**≡ Ví dụ 12.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $A(-1; 3)$ , đường thẳng  $\Delta: 5x + 3y - 5 = 0$  và  $\Delta': 5x + 3y + 8 = 0$ .

- a) Tính khoảng cách từ điểm  $A$  đến đường thẳng  $\Delta$ .  
b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng song song  $\Delta$  và  $\Delta'$

**≡ Ví dụ 13.** Trong một khu vực bằng phẳng, ta lấy hai xa lộ vuông góc với nhau làm hai trục tọa độ và mỗi đơn vị dài trên trục tương ứng với 1 km. Cho biết với hệ trục tọa độ vừa chọn thì một trạm viễn thông  $T$  có tọa độ  $(2; 3)$ . Một người đang gọi điện thoại di động trên chiếc xe khách chạy trên đoạn cao tốc có dạng một đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $6x + 8y - 5 = 0$ . Tính khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông  $T$ .

**≡ Ví dụ 14.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có tọa độ các đỉnh là  $A(1; 1)$ ,  $B(5; 2)$ ,  $C(4; 4)$ . Tính độ dài các đường cao của tam giác  $ABC$ .

**≡ Ví dụ 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tìm những điểm nằm trên đường thẳng  $\Delta: 2x + y - 1 = 0$  và có khoảng cách đến  $d: 4x + 3y - 10 = 0$  bằng 2.

**≡ Ví dụ 16.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-2; 4)$ ,  $B(3; 5)$ . Viết phương trình tổng quát của đường thẳng  $\Delta$  đi qua điểm  $I(0; 1)$  sao cho khoảng cách từ  $A$  đến đường thẳng  $\Delta$  gấp 2 lần khoảng cách từ  $B$  đến  $\Delta$ .

DT

4

Tìm điểm  $M$  thỏa mãn điều kiện cho trước

Để xác định tọa độ điểm  $M$ , ta thường tiếp cận theo hai cách sau:

**Cách 1:** Tham số tọa độ điểm  $M$  theo ẩn. Sau đó, kết hợp với giả thiết để xây dựng phương trình giải. Các kiểu tham số điểm thường gặp:

- Nếu  $M \in Ox$  thì  $M(m; 0)$ .
- Nếu  $M \in Oy$  thì  $M(0; m)$ .
- Nếu  $M \in \Delta: \begin{cases} x = x_0 + u_1t \\ y = y_0 + u_2t \end{cases}$  thì  $M(x_0 + u_1t; y_0 + u_2t)$ .
- Nếu  $M \in \Delta: ax + by + c = 0$  thì  $M\left(x_0; \frac{-c - ax_0}{b}\right)$ , với  $b \neq 0$ .

**⚠** Chú ý các công thức tính độ dài, tính góc, khoảng cách; điều kiện vuông góc,...

**Cách 2:** Điểm  $M$  có thể là giao của hai "đối tượng" hình nào đó trong đề bài (giao của hai đường thẳng, giao của đường thẳng với đường tròn,...). Khi đó, ta viết phương trình của hai "đối tượng" hình đó, rồi giải hệ tìm kết quả.

**≡ Ví dụ 17.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: 4x - 3y + 5 = 0$ .

- a) Tìm tọa độ điểm  $A$  thuộc  $\Delta$  và cách gốc tọa độ một khoảng bằng 4.
- b) Tìm điểm  $B$  thuộc  $\Delta$  và cách đều hai điểm  $E(5; 0)$ ,  $F(3; -2)$ .

**≡ Ví dụ 18.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: x - 2y + 4 = 0$  và điểm  $A(4; 1)$ .

- a) Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của  $A$  lên  $d$ .
- b) Tìm tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua  $d$ .

**≡ Ví dụ 19.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-1; 2)$  và  $B(3; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $C$  trên đường thẳng:  $x - 2y + 1 = 0$  sao cho  $\triangle ABC$  vuông ở  $C$ .

**≡ Ví dụ 20.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $A(-2; 2)$ ,  $B(1; 0)$ ,  $C(3; -3)$ . Xác định tọa độ trực tâm  $H$  của  $\triangle ABC$ .

**≡ Ví dụ 21.** Trong mặt phẳng tọa độ, một tín hiệu âm thanh phát đi từ một vị trí và được 3 thiết bị ghi tín hiệu đặt tại 3 vị trí  $A(1; 2)$ ,  $B(-1; 3)$ ,  $C(2; -3)$  nhận được cùng một thời điểm. Hãy xác định vị trí phát tín hiệu âm thanh.

DT

5

## Bài toán cực trị

**≡ Ví dụ 22.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: x + 2y - 4 = 0$  và điểm  $A(1; 4)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho  $MA$  nhỏ nhất.

**≡ Ví dụ 23.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: x + 2y - 4 = 0$  và hai điểm  $A(1; 4)$ ,  $B\left(8; \frac{1}{2}\right)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho  $5MA^2 + 2MB^2$  nhỏ nhất.

**Ví dụ 24.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: x + 2y - 4 = 0$  và hai điểm  $A(1;4)$ ,  $B(8;3)$ . Tìm tọa độ điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất.

**Ví dụ 25.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $A(2;1)$ . Lấy điểm  $B$  thuộc  $Ox$  có hoành độ không âm và điểm  $C$  thuộc  $Oy$  có tung độ không âm sao cho tam giác  $ABC$  vuông tại  $A$ . Tìm tọa độ điểm  $B$  và  $C$  sao cho diện tích tam giác  $ABC$

a) lớn nhất.

b) nhỏ nhất.

## C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Trong mặt phẳng  $Oxy$ , hãy tính khoảng cách từ  $M(3; -5)$  đến các trục tọa độ.
- 2 Tính khoảng cách từ điểm  $M(3;5)$  đến đường thẳng  $\Delta: x + y + 1 = 0$ .
- 3 Tính khoảng cách từ điểm  $M(4; -5)$  đến đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ .
- 4 Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau
  - a)  $\Delta_1: 2x - y + 1 = 0$  và  $\Delta_2: -x + 2y + 2 = 0$ .
  - b)  $\Delta_3: x - y - 1 = 0$  và  $\Delta_4: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$ .
  - c)  $\Delta_1: \begin{cases} x = 1 + t_1 \\ y = -2 + t_1 \end{cases}$  và  $\Delta_2: \begin{cases} x = 2t_2 \\ y = -3 + 2t_2 \end{cases}$ .
- 5 Tính góc giữa hai đường thẳng
  - a)  $d_1: x + 2y + 4 = 0$  và  $d_2: x - 3y + 6 = 0$ .
  - b)  $\Delta_1: 6x - 5y + 15 = 0$  và  $\Delta_2: \begin{cases} x = 10 + 5t \\ y = 1 + 6t \end{cases}$ .
- 6 Tìm  $m$  sao cho hai đường thẳng  $\Delta: x + 5my - 4 = 0$  và  $\Delta': 2x + 3y - 2 = 0$  song song với nhau.
- 7 Xác định tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hai đường thẳng  $d: 2x - 3y + 4 = 0$  và  $d': \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases}$  vuông góc với nhau.
- 8 Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $A(3;5)$  và đường thẳng  $d: 2x - y - 2 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua  $A$  và thỏa mãn
  - a)  $\Delta$  song song với  $d$ .
  - b)  $\Delta$  vuông góc với  $d$ .
  - c)  $\Delta$  tạo với  $d$  một góc bằng  $45^\circ$ .
- 9 Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình đường thẳng  $d$  song song với đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$  và cách đường thẳng  $\Delta$  một khoảng bằng 3.

- 10) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $M(4; 4)$  và đường thẳng  $d: 3x - y + 2 = 0$ .
- Tìm tọa độ điểm  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $M$  trên  $d$ .
  - Tìm tọa độ điểm  $N$  đối xứng với  $M$  qua  $d$ .
- 11) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(4; -13), B(4; 12), C(-8; 3)$ . Viết phương trình đường phân giác trong góc  $B$ .
- 12) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $A(2; -3), B(3; -2)$ . Trọng tâm  $G$  của  $\triangle ABC$  nằm trên đường thẳng  $d: 3x - y - 8 = 0$ , diện tích  $\triangle ABC$  bằng  $\frac{3}{2}$ . Tìm tọa độ điểm  $C$ .
- 13) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho  $\triangle ABC$ . Cạnh  $BC$  có trung điểm  $M(0; 4)$ , còn hai cạnh kia có phương trình là  $2x + y - 11 = 0$  và  $x + 4y - 2 = 0$ .
- Xác định đỉnh  $A$ .
  - Gọi  $C$  là đỉnh nằm trên đường thẳng  $x + 4y - 2 = 0$  và  $N$  là trung điểm  $AC$ . Tìm tọa độ điểm  $N$  rồi tính tọa độ  $B, C$ .
- 14) Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; 4)$  và  $B(3; 5)$ . Viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và cách  $B$  một khoảng lớn nhất.
- 15) Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: x - 2y - 2 = 0$  và hai điểm  $A(3; 4), B(-1; 2)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $d$  sao cho  $MA^2 - 2MB^2$  lớn nhất.

## D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Khoảng cách từ điểm  $M(3; -4)$  đến đường thẳng  $\Delta: 3x - 4y - 1 = 0$  bằng

- A.  $\frac{8}{5}$ .                      B. 5.                      C.  $\frac{7}{5}$ .                      D.  $\frac{24}{5}$ .

**Câu 2.** Tính khoảng cách từ điểm  $M(2; 0)$  đến đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2 + 4t \end{cases}$ .

- A.  $\frac{10}{\sqrt{5}}$ .                      B.  $\frac{2}{5}$ .                      C. 2.                      D.  $\frac{\sqrt{5}}{2}$ .

**Câu 3.** Tính khoảng cách  $d$  giữa hai đường thẳng  $\Delta_1: 7x + y - 3 = 0$  và  $\Delta_2: 7x + y + 12 = 0$ .

- A.  $d = 9$ .                      B.  $d = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ .                      C.  $d = 15$ .                      D.  $d = \frac{9}{\sqrt{50}}$ .

**Câu 4.** Cho hai đường thẳng song song  $d_1: 5x - 7y + 4 = 0, d_2: 5x - 7y + 6 = 0$ . Khoảng cách giữa  $d_1$  và  $d_2$  là

- A.  $\frac{4}{\sqrt{74}}$ .                      B.  $\frac{10}{\sqrt{74}}$ .                      C.  $\frac{6}{\sqrt{74}}$ .                      D.  $\frac{2}{\sqrt{74}}$ .

**Câu 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: 21x - 11y - 10 = 0$ . Trong các điểm  $M(21; -3), N(0; 4), P(-19; 5)$  và  $Q(1; 5)$  điểm nào gần đường thẳng  $d$  nhất?

- A.  $Q$ .                      B.  $P$ .                      C.  $N$ .                      D.  $M$ .

**Câu 6.** Tìm tọa độ giao điểm của hai đường thẳng  $\Delta_1: \begin{cases} x = 22 + 2t \\ y = 55 + 5t \end{cases}$  và  $\Delta_2: 2x + 3y - 19 = 0$ .

- A. (5;3).                      B. (2;5).                      C. (10;25).                      D. (-1;7).

**Câu 7.** Tính khoảng cách từ giao điểm của hai đường thẳng  $x - 3y + 4 = 0$  và  $2x + 3y - 1 = 0$  đến đường thẳng  $\Delta: 3x + y + 4 = 0$ .

- A.  $\frac{\sqrt{10}}{5}$ .                      B.  $2\sqrt{10}$ .                      C.  $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ .                      D. 2.

**Câu 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tính góc giữa đường thẳng  $\sqrt{3}x - y + 1 = 0$  và trục hoành.

- A.  $45^\circ$ .                      B.  $135^\circ$ .                      C.  $60^\circ$ .                      D.  $120^\circ$ .

**Câu 9.** Tìm góc giữa hai đường thẳng  $\Delta_1: x + \sqrt{3}y = 0$  và  $\Delta_2: x + 10 = 0$ .

- A.  $30^\circ$ .                      B.  $60^\circ$ .                      C.  $45^\circ$ .                      D.  $125^\circ$ .

**Câu 10.** Tính góc tạo bởi hai đường thẳng  $d_1: 2x - y - 10 = 0$  và  $d_2: x - 3y + 9 = 0$

- A.  $60^\circ$ .                      B.  $30^\circ$ .                      C.  $135^\circ$ .                      D.  $45^\circ$ .

**Câu 11.** Tìm cosin góc giữa 2 đường thẳng  $\Delta_1: 10x + 5y - 1 = 0$  và  $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$ .

- A.  $\frac{3}{10}$ .                      B.  $\frac{3}{5}$ .                      C.  $\frac{\sqrt{10}}{10}$ .                      D.  $\frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

**Câu 12.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $\Delta_1: 2x - 3y + 1 = 0$ ,  $\Delta_2: -4x + 6y + 5 = 0$ . Xác định vị trí tương đối của hai đường thẳng  $\Delta_1, \Delta_2$ .

- A.  $\Delta_1, \Delta_2$  vuông góc.                      B.  $\Delta_1, \Delta_2$  trùng nhau.  
C.  $\Delta_1, \Delta_2$  song song.                      D.  $\Delta_1, \Delta_2$  cắt nhau nhưng không vuông góc.

**Câu 13.** Cho đường thẳng  $d_1: 2x + y + 15 = 0$  và  $d_2: x - 2y - 3 = 0$ . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.  $d_1$  và  $d_2$  song song với nhau.  
B.  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau và không vuông góc với nhau.  
C.  $d_1$  và  $d_2$  vuông góc với nhau.  
D.  $d_1$  và  $d_2$  trùng nhau với nhau.

**Câu 14.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường thẳng  $\Delta: 3x - 2y - 7 = 0$  cắt đường thẳng nào sau đây?

- A.  $d_4: 6x - 4y - 14 = 0$ .                      B.  $d_2: 3x - 2y = 0$ .  
C.  $d_1: 3x + 2y = 0$ .                      D.  $d_3: -3x + 2y - 7 = 0$ .

**Câu 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường thẳng nào sau đây song song với đường thẳng  $2x + 3y - 1 = 0$ ?

- A.  $4x - 6y - 2 = 0$ .                      B.  $x - 2y + 5 = 0$ .                      C.  $2x - 3y + 3 = 0$ .                      D.  $2x + 3y + 1 = 0$ .

**Câu 16.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , véc-tơ nào dưới đây là một véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng song song với trục  $Oy$ ?

- A.  $\vec{n}_4 = (1;0)$ .                      B.  $\vec{n}_2 = (0;1)$ .                      C.  $\vec{n}_3 = (-1;1)$ .                      D.  $\vec{n}_1 = (1;1)$ .

**Câu 17.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tham số của đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $M(4; -7)$  và song song với trục  $Ox$ .

- A.  $\begin{cases} x = -7 + t \\ y = 4 \end{cases}$ .                      B.  $\begin{cases} x = t \\ y = -7 \end{cases}$ .                      C.  $\begin{cases} x = 4 \\ y = -7 + t \end{cases}$ .                      D.  $\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -7t \end{cases}$ .

**Câu 18.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , phương trình tham số của đường thẳng đi qua  $M(-2;3)$  và song song với đường thẳng  $\begin{cases} x = 7 - t \\ y = -5 + 5t \end{cases}$  là

A.  $\begin{cases} x = -t \\ y = 5t \end{cases}$       B.  $\begin{cases} x = -2 - t \\ y = 3 + 5t \end{cases}$       C.  $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -1 + 3t \end{cases}$       D.  $\begin{cases} x = 3 + 5t \\ y = -2 - t \end{cases}$

**Câu 19.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , phương trình tổng quát của đường thẳng  $d$  đi qua  $O$  và song song với đường thẳng  $\Delta: 6x - 4x + 1 = 0$  là

A.  $3x + 12y - 1 = 0$ .      B.  $6x - 4y - 1 = 0$ .      C.  $3x - 2y = 0$ .      D.  $4x + 6y = 0$ .

**Câu 20.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình đường thẳng  $d$  đi qua điểm  $I(4; -1)$  và vuông góc với đường thẳng  $\Delta: x + y - 2017 = 0$ .

A.  $4x - y + 5 = 0$ .      B.  $x - y + 5 = 0$ .      C.  $x - y - 5 = 0$ .      D.  $4x - y - 5 = 0$ .

**Câu 21.** Tìm tất cả các giá trị của tham số  $m$  sao cho hai đường thẳng  $d: m^2x - 6y + m + 6 = 0$  và  $d': 3x - 2y + 1 = 0$  song song với nhau.

A.  $m \in \emptyset$ .      B.  $m = -3$ .      C.  $\begin{cases} m = -3 \\ m = 3 \end{cases}$ .      D.  $m = 3$ .

**Câu 22.** Với giá trị nào của  $m$  thì hai đường thẳng  $d_1: 2x - 3y - 10 = 0$  và  $d_2: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases}$  vuông góc?

A.  $m = -\frac{5}{4}$ .      B.  $m = \frac{9}{8}$ .      C.  $m = -\frac{9}{8}$ .      D.  $m = \frac{1}{2}$ .

**Câu 23.** Xác định tất cả các giá trị của tham số  $m$  để hai đường thẳng  $d: 2x - 3y + 4 = 0$  và  $d': \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 - 4mt \end{cases}$  vuông góc với nhau.

A.  $m = -\frac{9}{8}$ .      B.  $m = -\frac{1}{2}$ .      C.  $m = \frac{1}{2}$ .      D.  $m = \pm\frac{9}{8}$ .

**Câu 24.** Có hai giá trị của tham số  $m$  để đường thẳng  $x + my - 3 = 0$  hợp với đường thẳng  $x + y = 0$  một góc  $60^\circ$ . Tổng của hai giá trị ấy bằng

A. 4.      B. 1.      C. -1.      D. -4.

**Câu 25.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho điểm  $A(2; 1)$  trên đường thẳng  $d: 2x + y - 7 = 0$ . Gọi  $H(a; b)$  là hình chiếu vuông góc của  $A$  trên  $d$ . Tính  $a + b$ .

A. 3.      B.  $\frac{21}{5}$ .      C.  $\frac{7}{5}$ .      D.  $\frac{14}{5}$ .

**Câu 26.** Cho điểm  $M(1; 2)$  và đường thẳng  $d: 2x + y - 5 = 0$ . Tọa độ của điểm đối xứng với điểm  $M$  qua  $d$  là

A.  $(-2; 6)$ .      B.  $(0; \frac{3}{2})$ .      C.  $(\frac{9}{5}; \frac{12}{5})$ .      D.  $(3; -5)$ .

**Câu 27.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(3; -1)$  và  $B(0; 3)$ . Tìm điểm  $M$  thuộc trục hoành sao cho khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $AB$  bằng 1.

A.  $\begin{bmatrix} M(\frac{7}{2}; 0) \\ M(1; 0) \end{bmatrix}$ .      B.  $\begin{bmatrix} M(\frac{14}{3}; 0) \\ M(\frac{4}{3}; 0) \end{bmatrix}$ .      C.  $\begin{bmatrix} M(-\frac{7}{2}; 0) \\ M(-1; 0) \end{bmatrix}$ .      D.  $\begin{bmatrix} M(-\frac{14}{3}; 0) \\ M(-\frac{4}{3}; 0) \end{bmatrix}$ .

**Câu 28.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(1; 1)$ ,  $B(4; -3)$  và đường thẳng  $d: x - 2y - 1 = 0$ . Tìm điểm  $M$  thuộc  $d$  có tọa độ nguyên và thỏa mãn khoảng cách từ  $M$  đến đường thẳng  $AB$  bằng 6.

A.  $M(3; -\frac{27}{11})$ .      B.  $M(3; 7)$ .      C.  $M(-43; -27)$ .      D.  $M(7; 3)$ .

**Câu 29.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$  và điểm  $A(1; -7)$ . Gọi  $M(a; b)$  là điểm thuộc đường thẳng  $\Delta$  sao cho khoảng cách từ điểm  $M$  đến điểm  $A$  là nhỏ nhất. Tính tổng  $a + b$ .

A.  $-\frac{42}{5}$ .      B.  $\frac{12}{5}$ .      C.  $\frac{42}{5}$ .      D.  $-\frac{12}{5}$ .

**Câu 30.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: x + 2y - 4 = 0$  và hai điểm  $A(1; 4), B(9; 0)$ . Biết điểm  $M(a; b)$  thuộc  $d$  thỏa mãn  $|\vec{MA} + 3\vec{MB}|$  nhỏ nhất. Tính  $a + b$ .

A.  $a + b = 4$ .      B.  $a + b = 5$ .      C.  $a + b = 10$ .      D.  $a + b = -4$ .

**PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.**

**Câu 31.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $d_1: 2x + 3y + 15 = 0$  và  $d_2: x - 2y - 3 = 0$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $d_1$  có một véc-tơ pháp tuyến là  $\vec{n} = (2; 3)$ .      b)  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau.  
 c) Góc giữa  $d_1$  và  $d_2$  bằng  $30^\circ$ .      d)  $d_2$  vuông góc với trục  $Ox$ .

**Câu 32.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $d$  có một véc-tơ chỉ phương là  $\vec{u} = (2; 6)$ .  
 b)  $d$  vuông góc với đường thẳng  $\Delta: x + 3y - 1 = 0$ .  
 c) Đường thẳng  $d_1: mx - 3y + 5 = 0$  cắt đường thẳng  $d$  khi  $m \neq 9$ .  
 d) Khoảng cách từ giao điểm của đường thẳng  $d$  và đường thẳng  $\Delta$  đến trục  $Oy$  bằng  $0,3$ .

**Câu 33.** Trong mặt phẳng ( $Oxy$ ), cho điểm  $N(6; 0)$  và đường thẳng  $\Delta: 6x + 8y - 64 = 0$ . Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau:

- a) Khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến điểm  $N$  bằng  $6$ .  
 b) Khoảng cách từ gốc tọa độ  $O$  đến đường thẳng  $\Delta$  bằng  $\frac{32}{5}$ .  
 c) Khoảng cách từ điểm  $N(6; 0)$  đến đường thẳng  $\Delta$  bằng  $2\sqrt{14}$ .  
 d) Hình chiếu vuông góc của điểm  $N$  trên đường thẳng  $\Delta$  là điểm  $H\left(\frac{192}{25}; \frac{56}{25}\right)$ .

**Câu 34.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d_1: 3x + 4y + 1 = 0$  và  $d_2: 5x - 12y + 3 = 0$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đường thẳng  $d_1, d_2$  cắt nhau tại điểm  $M\left(0; \frac{1}{4}\right)$ .  
 b) Cosin của góc tạo bởi  $d_1, d_2$  bằng  $\frac{33}{65}$ .  
 c) Đường thẳng  $\Delta: mx - 8y - n = 0$  song song với đường thẳng  $d_1$  khi  $m = -6; n = -2$ .  
 d) Đường thẳng  $d: y = kx$  tạo bởi đường thẳng  $d_2$  một góc bằng  $60^\circ$  thì tổng các giá trị của  $k = -408$ .

**PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.**

**Câu 35.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$  giả sử điểm  $A(a; b)$  thuộc đường thẳng  $d: x - y - 3 = 0$  và cách  $\Delta: 2x - y + 1 = 0$  một khoảng bằng  $\sqrt{5}$ . Tính  $P = ab$  biết  $a > 0$ .

KQ:

**Câu 36.** Cho điểm  $A(-2; 3)$  và đường thẳng  $\Delta: x - y + 1 = 0$ . Điểm  $A'(m; n)$  đối xứng với điểm  $A$  qua đường thẳng  $\Delta$ . Tính  $m^3 + 2n^2$ .

KQ: 

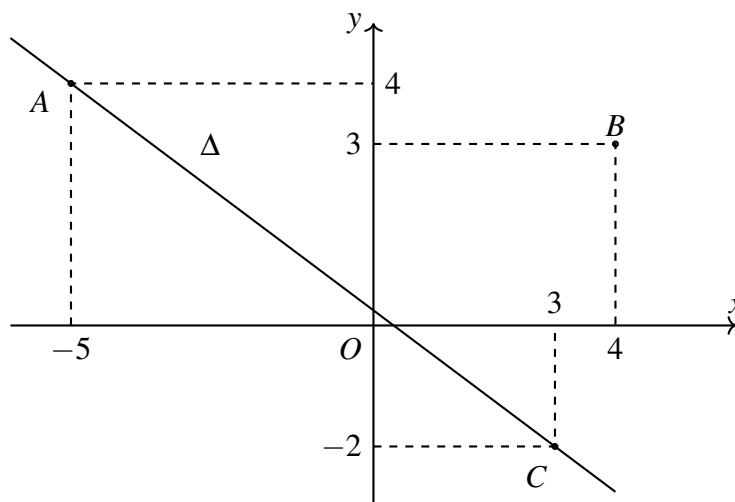
**Câu 37.** Một trạm viễn thông  $S$  có tọa độ  $(5; 1)$ . Một người đang ngồi trên chiếc xe khách chạy trên đoạn cao tốc có dạng một đường thẳng  $\Delta$  có phương trình  $12x + 5y - 20 = 0$ . Tính khoảng cách ngắn nhất giữa người đó và trạm viễn thông  $S$ . Biết rằng mỗi đơn vị độ dài tương ứng với 1 km. (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ: 

**Câu 38.** Trong một khu vực bằng phẳng, ta lấy hai xa lộ vuông góc với nhau làm hai trục tọa độ và mỗi đơn vị độ dài trên trục tương ứng với 1km. Với hệ trục vừa chọn, người ta đặt một trạm viễn thông tại vị trí có tọa độ  $M(5; 10)$ . Một xe khách di chuyển trên cao tốc có dạng phương trình đường thẳng  $d: x - 2y + 5 = 0$  sẽ bắt được sóng tốt nhất tại vị trí  $S(a; b)$  trên cao tốc. Tính  $P = a + b$  ?

KQ: 

**Câu 39.** Có hai con tàu cùng chuyển động đều theo đường thẳng ngoài biển. Trên màn hình radar của trạm điều khiển (được coi như mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  với đơn vị trên hai trục tính theo km), tàu số 1 chuyển động đều theo hướng đường thẳng  $\Delta$  từ vị trí  $A$  đến vị trí  $C$ . Tàu số 2 sắp hết nhiên liệu, đang ở vị trí  $B$  muốn gặp tàu số 1 để tiếp nhiên liệu. Hỏi tàu số 2 phải đi đoạn đường ngắn nhất là bao nhiêu?

KQ: 

**Câu 40.** Cho hình vuông  $ABCD$  có diện tích là 20, tâm  $I$  thuộc đường thẳng  $d: 3x - y - 6 = 0$ , cạnh  $AB$  nằm trên đường thẳng  $d': 2x + y - 4 = 0$ . Giả sử  $I(x_0; y_0)$  và  $y_0 > 0$ . Tính  $x_0 + y_0$ .

KQ:

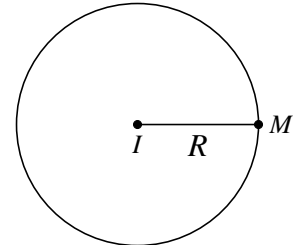
## §4. ĐƯỜNG TRÒN TRONG MẶT PHẪNG TỌA ĐỘ

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Phương trình đường tròn có tâm và bán kính cho trước

Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường tròn  $(\mathcal{C})$ :  $\begin{cases} \text{tâm } I(a; b) & (1) \\ \text{bán kính } R & (2) \end{cases}$  có phương trình

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \quad (*)$$



#### 2 Dạng khai triển

**Phương trình đường tròn:** Ta có thể khai triển  $(*)$ , biến đổi phương trình về dạng

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad (**)$$

trong đó  $c = a^2 + b^2 - R^2$ .

**Chú ý:**

- ① Trong trường hợp tổng quát, điều kiện để  $(**)$  là phương trình đường tròn là  $a^2 + b^2 - c > 0$ .
- ② Để xác định tâm và bán kính của đường tròn ở dạng  $(**)$ , ta làm như sau:
  - + Đổi dấu hệ số trước  $x$  và  $y$  rồi chia 2, ta được tâm  $I(a; b)$ .
  - + Tính bán kính theo công thức  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

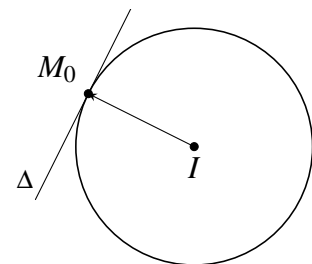
#### 3 Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

**Công thức tiếp tuyến:** Cho đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(a; b)$  và bán kính  $R$ . Đường thẳng  $\Delta$  là tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại điểm  $M_0(x_0; y_0)$ . Khi đó

- $M_0(x_0; y_0)$  thuộc  $\Delta$ .
- $\vec{IM}_0 = (x_0 - a; y_0 - b)$  là véc-tơ pháp tuyến của  $\Delta$ .

Do đó  $\Delta$  có phương trình là

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$



**Chú ý:** Đường thẳng  $\Delta$  tiếp xúc  $(\mathcal{C})$  khi  $d(I, \Delta) = R$ .

DT

1

## Tìm tâm và bán kính đường tròn.

⚙ **Xét dạng**  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = m$  (1).

- ① Nếu  $m > 0$  thì (1) là phương trình đường tròn có tâm  $I(a;b)$  và bán kính  $R = \sqrt{m}$ .  
 ② Nếu  $m \leq 0$  thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

⚙ **Xét dạng**  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  (2). Xét dấu biểu thức  $m = a^2 + b^2 - c$ .

- ① Nếu  $m > 0$  thì (2) là phương trình đường tròn có  
 + tâm  $I(a;b)$ ;  
 + bán kính  $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .  
 ② Nếu  $m \leq 0$  thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

≡ **Ví dụ 1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , tìm tâm và bán kính của đường tròn có phương trình sau đây.

a)  $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ .

b)  $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 9$ .

c)  $(x+2)^2 + y^2 = 4$ .

d)  $x^2 + y^2 = 5$ .

≡ **Ví dụ 2.** Phương trình nào trong các phương trình sau đây là phương trình đường tròn? Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn đó.

a)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ ;

b)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 6 = 0$ ;

c)  $x^2 + y^2 - 4x - 8y + 5 = 0$ ;

d)  $2x^2 + 2y^2 + 6x + 8y - 2 = 0$ .

≡ **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho phương trình  $x^2 + y^2 - 2mx - 4(m-2)y + 6 - m = 0$  (1). Tìm điều kiện của  $m$  để (1) là phương trình đường tròn.

DT

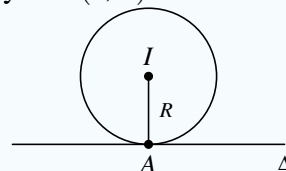
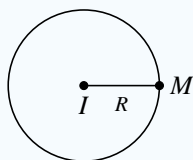
2

## Lập phương trình đường tròn

⚙ **Hướng tiếp cận 1.** Từ giả thiết, giải tìm tọa độ tâm và tính độ dài bán kính. Sau đó, viết phương trình của  $(\mathcal{C})$  theo công thức  $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ .

①  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I$  và đi qua điểm  $M$ , suy ra  $R = IM = \sqrt{(x_M - x_I)^2 + (y_M - y_I)^2}$ .

②  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta$  tại  $A$ , suy ra  $d(I; \Delta) = R = IA$ .



⚙ **Hướng tiếp cận 2.** Thường dùng cho bài toán lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác (qua ba điểm) hoặc qua hai điểm và có tâm thuộc đường thẳng  $d$ .

- Giả sử phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  là  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$
- Từ điều kiện của đề bài, ta thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là  $a, b, c$ . Giải hệ tìm  $a, b, c$ .

**≡ Ví dụ 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , lập phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$ , biết

- a)  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(3; -5)$  bán kính  $R = 2$ .      b)  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(3; -5)$  và qua điểm  $A(-2; 1)$ .

**≡ Ví dụ 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , lập phương trình đường tròn đường kính  $AB$  với  $A(1; 6)$ ,  $B(-3; 2)$ .

**≡ Ví dụ 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(-1; 2)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta : x - 2y + 7 = 0$ .

**≡ Ví dụ 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , lập phương trình đường tròn đi qua ba điểm  $M(-2; 4)$ ,  $N(5; 5)$ ,  $P(6; -2)$ .

**≡ Ví dụ 8.** Trong mặt phẳng tọa độ, một tín hiệu âm thanh phát đi từ một vị trí và được 3 thiết bị ghi tín hiệu đặt tại 3 vị trí  $O(0; 0)$ ,  $A(1; 0)$ ,  $B(1; 3)$  nhận được cùng một thời điểm. Hãy xác định vị trí phát tín hiệu âm thanh.

**≡ Ví dụ 9.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d : 2x - y - 5 = 0$  và hai điểm  $A(1; 2)$ ,  $B(4; 1)$ . Viết phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm thuộc  $d$  và đi qua hai điểm  $A, B$ .

**≡ Ví dụ 10.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d : 2x - y - 4 = 0$ . Viết phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  tiếp xúc với các trục tọa độ và có tâm ở trên đường thẳng  $d$ .

**≡ Ví dụ 11.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình đường tròn  $(\mathcal{C})$  đi qua điểm  $A(4; 2)$  đồng thời tiếp xúc với hai đường thẳng  $d_1 : x - 3y - 2 = 0$  và  $d_2 : x - 3y + 18 = 0$ .

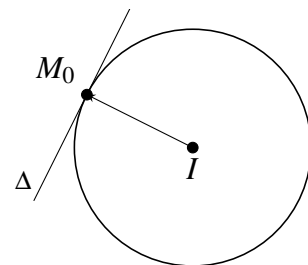
**DT**

**3**

**Tiếp tuyến của đường tròn tại một điểm**

Cho đường tròn  $(\mathcal{C})$  có tâm  $I(a; b)$  và bán kính  $R$ . Đường thẳng  $\Delta$  là tiếp tuyến với  $(\mathcal{C})$  tại điểm  $M_0(x_0; y_0)$ . Khi đó

- $M_0(x_0; y_0)$  thuộc  $\Delta$ .
- $\vec{IM}_0 = (x_0 - a; y_0 - b)$  là véc-tơ pháp tuyến của  $\Delta$ .



Do đó  $\Delta$  có phương trình là

$$(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0.$$

**≡ Ví dụ 12.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(\mathcal{C}) : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$  tại điểm  $M(3; -1)$ .

**≡ Ví dụ 13.** Viết phương trình tiếp tuyến  $d$  với đường tròn  $(C) : (x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$  tại điểm  $M(5; 6)$ .

**≡ Ví dụ 14.** Cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 8x - 6y + 17 = 0$ . Chứng minh  $M(6; 5)$  nằm trên đường tròn  $(C)$ . Viết phương trình tiếp tuyến  $d$  của  $(C)$  tại  $M$ .

DT

4

## Tiếp tuyến của đường tròn song song hoặc vuông góc với một đường cho trước

Cho đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) có tâm  $I(a; b)$  và bán kính  $R$ .

⚙️ **Loại 1:** Biết tiếp tuyến song song với  $d: Ax + By + C = 0$ .

- Gọi  $\Delta$  là tiếp tuyến và  $\Delta \parallel d$  nên  $\Delta$  có dạng  $Ax + By + m = 0$ , với  $m \neq C$ .
- $\Delta$  tiếp xúc ( $\mathcal{C}$ ) khi và chỉ khi

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|A \cdot a + B \cdot b + m|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$

Giải điều kiện này, tìm  $m$ .

⚠️ **Chú ý** rằng  $m$  phải khác  $C$ . Nếu giải ra giá trị  $m = C$  thì ta loại giá trị này.

⚙️ **Loại 2:** Biết tiếp tuyến vuông góc với  $d: Ax + By + C = 0$ .

- Gọi  $\Delta$  là tiếp tuyến và  $\Delta \perp d$  nên  $\Delta$  có dạng  $Bx - Ay + n = 0$ .
- $\Delta$  tiếp xúc ( $\mathcal{C}$ ) khi và chỉ khi

$$d(I, \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|B \cdot a - A \cdot b + n|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = R$$

Giải điều kiện này, tìm  $n$ .

≡ **Ví dụ 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn ( $\mathcal{C}$ ):  $(x - 1)^2 + y^2 = 9$ . Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn ( $\mathcal{C}$ ) biết rằng tiếp tuyến song song với đường thẳng  $y = 2x - 1$ .

≡ **Ví dụ 16.** Cho đường tròn ( $C$ ):  $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0$ . Viết phương trình tiếp tuyến của ( $C$ ) song song với đường thẳng  $d: x + 2y - 15 = 0$ .

≡ **Ví dụ 17.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tiếp tuyến ( $\Delta$ ) của đường tròn ( $\mathcal{C}$ ):  $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 4 = 0$  biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $x + 2y + 5 = 0$ .

≡ **Ví dụ 18.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn ( $C$ ):  $x^2 + y^2 + 4x + 4y - 17 = 0$ . Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  của ( $C$ ) biết  $\Delta$  vuông góc với đường thẳng  $d: 3x - 4y + 1 = 0$ .

## C // BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

a)  $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$ .

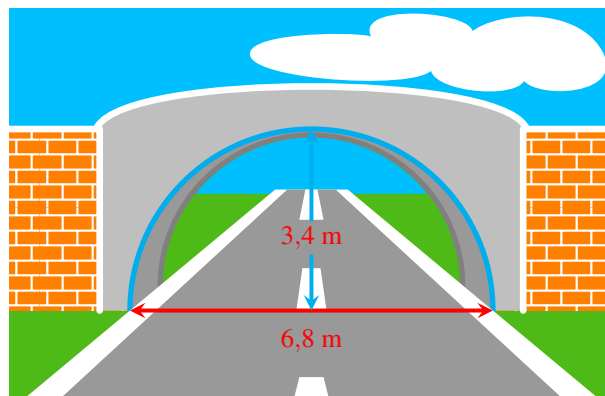
b)  $x^2 + y^2 - 8x + 2y + 20 = 0$ .

2 Tìm tâm và bán kính của đường tròn trong mỗi trường hợp sau

a) Đường tròn có phương trình  $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 9$ .

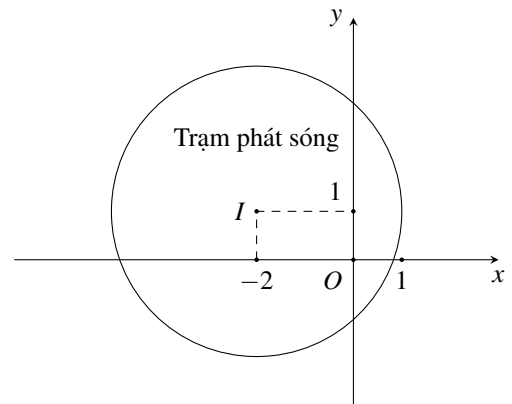
b) Đường tròn có phương trình  $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$ .

- 3) Viết Phương trình đường tròn có tâm  $I(2;3)$  và bán kính  $R = 2$ .
- 4) Lập phương trình đường tròn  $(C)$  trong các trường hợp sau:
- $(C)$  có tâm  $I(-2;3)$  và đi qua điểm  $M(2;-3)$ ;
  - $(C)$  có tâm  $I(-1;2)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta: x - 2y + 7 = 0$ ;
  - $(C)$  có đường kính  $AB$  với  $A(1;1)$  và  $B(7;5)$ .
- 5) Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác có tọa độ các đỉnh là:
- $A(1;4), B(0;1), C(4;3)$ ;
  - $O(0;0), P(16;0), R(0;12)$ .
- 6) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 4x + 4y + 3 = 0$  tại điểm  $M(-3;0)$ .
- 7) Lập phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$  tại  $A$  có hoành độ là 0.
- 8) Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn  $(C)$  biết tiếp tuyến có hệ số góc là  $-2$ .
- 9) Cho đường tròn  $(C): (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 25$ .
- Tìm tọa độ tâm và bán kính của đường tròn  $(C)$ .
  - Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  tại điểm  $M(5;-3)$ .
  - Lập phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  song song với đường thẳng  $d_1: 5x - 12 + 67 = 0$ .
- 10) Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $(C): (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 5$ , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $d: x - 2y + 7 = 0$ .
- 11) Tổng các giá trị của  $m$  để đường thẳng  $d: x - y - m = 0$  tiếp xúc với đường tròn  $(C): x^2 + (y - 1)^2 = 2$  là
- 12) Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục tọa độ  $Ox, Oy$  và đi qua điểm  $A(2;1)$ .
- 13) Một cái cổng hình bán nguyệt rộng 6,8(m), cao 3,4(m). Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn cho xe ra vào.
- Viết phương trình mô phỏng cái cổng;
  - Một chiếc xe tải rộng 2,4(m) và cao 2,5(m) đi đúng làn đường quy định có thể đi qua cổng hay không?



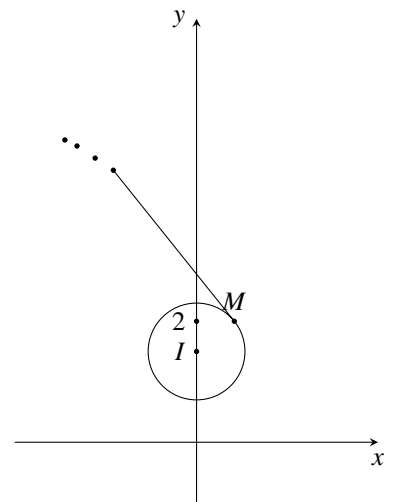
- 14 Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 90 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm  $t (0 \leq t \leq 90)$  vật thể ở vị trí có tọa độ  $(1 + \sin t^\circ; 3 + \cos t^\circ)$ .
- Tìm vị trí ban đầu và vị trí kết thúc của vật thể.
  - Tìm quỹ đạo chuyển động của vật thể.

**Câu 1.** Hình bên mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí  $I$  có tọa độ  $I(-2; 1)$  trong mặt phẳng tọa độ (đơn vị trên hai trục là ki-lô-mét).



- Lập phương trình đường tròn mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng, biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.
- Nếu người sử dụng điện thoại ở vị trí có tọa độ  $(-1; 3)$  thì có thể sử dụng dịch vụ của trạm này không?
- Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có tọa độ  $(-3; 4)$  di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

- 15 Ném đĩa là một môn thể thao thi đấu trong Thế vận hội Olympic mùa hè. Khi thực hiện cú ném, vận động viên thường quay lưng lại với hướng ném, sau đó xoay ngược chiều kim đồng hồ một vòng rưỡi của đường tròn để lấy đà rồi thả tay ra khỏi đĩa. Giả sử đĩa chuyển động trên một đường tròn tâm  $I \left( 0; \frac{3}{2} \right)$  bán kính 0,8 trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$  (đơn vị trên hai trục là mét). Đến điểm  $M \left( \frac{\sqrt{39}}{10}; 2 \right)$ , đĩa được ném đi (hình bên). Trong những giây đầu tiên ngay sau khi được ném đi, quỹ đạo chuyển động của chiếc đĩa có phương trình như thế nào?



## D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , phương trình nào dưới đây là phương trình của đường tròn?

- |                                     |                                    |
|-------------------------------------|------------------------------------|
| A. $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y - 1 = 0$ . | B. $x^2 + y^2 + x + y + 4 = 0$ .   |
| C. $x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$ .       | D. $x^2 - y^2 + 4x - 6y - 2 = 0$ . |

**Câu 2.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

- |                                     |                                       |
|-------------------------------------|---------------------------------------|
| A. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$ . | B. $2x^2 + 2y^2 + 4x - 8y + 19 = 0$ . |
| C. $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 9 = 0$ .  | D. $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 15 = 0$ .   |

**Câu 3.** Tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của đường tròn  $(C): x^2 + y^2 = 9$  là

- |                       |                       |                       |                        |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| A. $I(1; 1), R = 3$ . | B. $I(0; 0), R = 9$ . | C. $I(0; 0), R = 3$ . | D. $I(0; 0), R = 81$ . |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|

**Câu 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C) : (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 9$ . Tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của đường tròn  $(C)$  là

- A.  $I(-3; 2), R = 3$ .      B.  $I(3; -2), R = 3$ .      C.  $I(-2; 3), R = 3$ .      D.  $I(2; -3), R = 3$ .

**Câu 5.** Tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x - 6y - 10 = 0$  là

- A.  $I(-1; -3), R = 2\sqrt{5}$ .      B.  $I(1; 3), R = \sqrt{10}$ .  
C.  $I(1; 3), R = 2\sqrt{5}$ .      D.  $I(-1; -3), R = \sqrt{10}$ .

**Câu 6.** Tọa độ tâm  $I$  và bán kính  $R$  của đường tròn  $(C) : 16x^2 + 16y^2 + 16x - 8y - 11 = 0$  là

- A.  $I\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right), R = 1$ .      B.  $I(-8; 4), R = \sqrt{69}$ .      C.  $I(-8; 4), R = \sqrt{91}$ .      D.  $I(8; -4), R = \sqrt{91}$ .

**Câu 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C) : x^2 + y^2 - 2x + 10y + 1 = 0$ . Trong các điểm  $M(-1; 3), N(4; -1), P(2; 1), Q(3; -2)$  thì điểm nào thuộc  $(C)$ ?

- A. Điểm  $M$ .      B. Điểm  $N$ .      C. Điểm  $P$ .      D. Điểm  $Q$ .

**Câu 8.** Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; 2)$ , bán kính  $R = 3$  có phương trình là

- A.  $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 9$ .      B.  $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ .  
C.  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 3$ .      D.  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ .

**Câu 9.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường tròn tâm  $I(3; -1)$  và bán kính  $R = 2$  có phương trình là

- A.  $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ .      B.  $(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 4$ .  
C.  $(x + 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .      D.  $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$ .

**Câu 10.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(1; -5)$  và đi qua  $O(0; 0)$  có phương trình là

- A.  $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = \sqrt{26}$ .      B.  $(x - 1)^2 + (y + 5)^2 = 26$ .  
C.  $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 26$ .      D.  $(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = \sqrt{26}$ .

**Câu 11.** Viết phương trình đường tròn tâm  $I(3; -2)$  và đi qua điểm  $M(-1; 1)$  là

- A.  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 25$ .      B.  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$ .  
C.  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .      D.  $(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 5$ .

**Câu 12.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường tròn đường kính  $AB$  với  $A(3; -1), B(1; -5)$  có phương trình là

- A.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = \sqrt{5}$ .      B.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ .  
C.  $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 17$ .      D.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 5$ .

**Câu 13.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $A(-1; 2), B(-3; -2)$ . Đường tròn  $(C)$  nhận  $AB$  làm đường kính có phương trình là

- A.  $(x - 2)^2 + y^2 = 20$ .      B.  $(x + 2)^2 + y^2 = 25$ .      C.  $(x + 2)^2 + y^2 = 5$ .      D.  $(x + 2)^2 + y^2 = 20$ .

**Câu 14.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(2; -3)$  và tiếp xúc với trục  $Oy$  có phương trình là

- A.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 9$ .      B.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 9$ .  
C.  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$ .      D.  $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$ .

**Câu 15.** Trên mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường thẳng  $\Delta : 6x - 8y - 2 = 0$  và điểm  $M(1; -2)$ . Đường tròn  $(C)$  có tâm  $M$  và tiếp xúc  $\Delta$  có phương trình là

- A.  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 2$ .      B.  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4$ .  
C.  $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$ .      D.  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 2$ .

**Câu 16.** Đường tròn có tâm  $I(1;1)$  và tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta: \begin{cases} x = -5 + 4t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$  có phương trình là

- A.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 2 = 0$ .                      B.  $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$ .  
C.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 6 = 0$ .                      D.  $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ .

**Câu 17.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(1;3)$ ,  $B(-1;-1)$ ,  $C(1;1)$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có tâm  $I(a;b)$ . Giá trị  $a + b$  bằng

- A. 0.                      B. 2.                      C. 1.                      D. 3.

**Câu 18.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có  $A(-2;4)$ ,  $B(5;5)$ ,  $C(6;-2)$ . Đường tròn ngoại tiếp tam giác  $ABC$  có phương trình là

- A.  $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 20 = 0$ .                      B.  $x^2 + y^2 - 2x - y + 20 = 0$ .  
C.  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ .                      D.  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20$ .

**Câu 19.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , đường tròn  $(C)$  đi qua hai điểm  $A(1;1)$ ,  $B(5;3)$  và có tâm  $I$  thuộc trục hoành có phương trình là

- A.  $(x + 4)^2 + y^2 = 10$ .                      B.  $(x - 4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$ .  
C.  $(x - 4)^2 + y^2 = 10$ .                      D.  $(x + 4)^2 + y^2 = \sqrt{10}$ .

**Câu 20.** Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số  $m$  để phương trình  $x^2 + y^2 - 2mx + 4y + 2m^2 - 12 = 0$  là phương trình đường tròn?

- A. 6.                      B. 3.                      C. 5.                      D. 4.

**Câu 21.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho phương trình  $x^2 + y^2 - 2x + 2my + 10 = 0$  (1). Có bao nhiêu giá trị  $m$  nguyên dương không vượt quá 10 để (1) là phương trình của đường tròn?

- A. 6.                      B. 8.                      C. Không có.                      D. 7.

**Câu 22.** Phương trình tiếp tuyến  $d$  của đường tròn  $C: (x + 2)^2 + (y + 2)^2 = 25$  tại điểm  $M(2;1)$  là

- A.  $d: 4x + 3y + 14 = 0$ .    B.  $d: 3x - 4y - 2 = 0$ .    C.  $d: 4x + 3y - 11 = 0$ .    D.  $d: -y + 1 = 0$ .

**Câu 23.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(\mathcal{C}): x^2 + y^2 - 3x - y = 0$ . Phương trình tiếp tuyến của  $(\mathcal{C})$  tại  $M(1;-1)$  là

- A.  $x + 3y - 2 = 0$ .                      B.  $x + 3y + 2 = 0$ .                      C.  $x - 3y - 2 = 0$ .                      D.  $x - 3y + 2 = 0$ .

**Câu 24.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tiếp tuyến với  $(C): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 10$ , biết tiếp tuyến song song với đường thẳng  $d: x + 3y - 5 = 0$ .

- A.  $x + 3y - 1 = 0$ .                      B.  $x + 3y + 10 = 0$ .                      C.  $x + 3y + 5 = 0$ .                      D.  $x + 3y + 15 = 0$ .

**Câu 25.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn  $C: x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$ , biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $d: 2x - 3y + 2018 = 0$ .

- A.  $3x + 2y - 17 = 0$  hoặc  $3x + 2y + 9 = 0$ .                      B.  $3x + 2y + 17 = 0$  hoặc  $3x + 2y + 9 = 0$ .  
C.  $3x + 2y + 17 = 0$  hoặc  $3x + 2y - 9 = 0$ .                      D.  $3x + 2y - 17 = 0$  hoặc  $3x + 2y - 9 = 0$ .

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 26.** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $(Oxy)$ , cho đường tròn  $(C): (x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 16$ . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Đường tròn  $(C)$  không đi qua điểm  $M(4;1)$ .  
b) Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-4;3)$ .  
c) Đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R = 4$ .  
d) Tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$  tại điểm  $P(4;-7)$  có phương trình là  $y + 7 = 0$ .

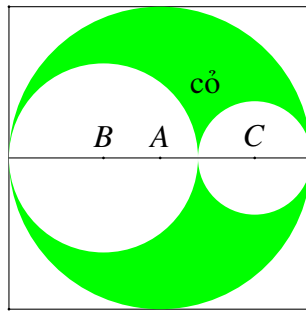
**Câu 27.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C)$  có phương trình  $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$ .

- a) Đường tròn  $(C)$  có tâm là  $I(1; -2)$ .
- b) Đường tròn  $(C)$  có bán kính  $R = 3$ .
- c) Điểm  $M(2; 2)$  thuộc đường tròn  $(C)$ .
- d) Đường tròn  $(C)$  tiếp xúc với đường thẳng  $\Delta: y = x$ .

**Câu 28.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$  và đường thẳng  $\Delta: x - y - 9 = 0$ .

- a) Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(-1; 2)$  bán kính  $R = 5$ .
- b) Khoảng cách từ tâm của  $(C)$  đến đường thẳng  $\Delta$  bằng  $3\sqrt{2}$ .
- c) Phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  tại điểm  $A(-3; 1)$  là  $4x + 3y + 9 = 0$ .
- d) Đường thẳng  $\Delta$  cắt  $(C)$  theo một dây cung có độ dài bằng  $2\sqrt{5}$ .

**Câu 29.** Một khu vườn hạnh phúc được thiết kế dưới dạng một hình vuông có độ dài cạnh 10 m (Tham khảo hình vẽ dưới đây).



Phần được tô đậm dùng để trồng cỏ, phần còn lại được lát gạch. Gọi  $x, y$  lần lượt là bán kính của phần lát gạch hình tròn. Mỗi mét vuông trồng cỏ chi phí 100.000 đồng, mỗi mét vuông lát gạch chi phí 300.000 đồng. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)  $x + y = 5$  (m).
- b) Diện tích được lát gạch của khu vườn là  $S = 100 + \pi(x^2 + y^2 - 25)$  ( $m^2$ ).
- c) Diện tích phần lát gạch nhỏ nhất bằng  $S_{min} = 100 - 25\pi$  ( $m^2$ ).
- d) Khi diện tích phần lát gạch nhỏ nhất thì chi phí để thi công khu vườn bằng 22.000.000 đồng.

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 30.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$  đường tròn tâm  $I(1; 1)$  và đi qua điểm  $M(-2; -3)$  có bán kính bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 31.** Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ  $Oxy$ , cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$  và điểm  $A(1; 5)$ . Giả sử tiếp tuyến của đường tròn  $(C)$  tại điểm  $A$  có phương trình  $ax + by + c = 0$ . Khi đó tích  $a.b.c$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 32.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng  $a: x + 3y + 8 = 0$  và  $b: 3x - 4y + 10 = 0$  và điểm  $A(-2; 1)$ . Đường tròn  $(C)$  có tâm  $I(c; d)$  thuộc đường thẳng  $a$ , đi qua điểm  $A$  và tiếp xúc với đường thẳng  $b$ . Giá trị của  $c + d$  bằng bao nhiêu?

KQ:

**Câu 33.** Trong mặt phẳng tọa độ  $Oxy$ , đường tròn  $(C)$  có tâm  $B(1; 1)$  và cắt  $d: 3x + 4y + 8 = 0$  tại  $M, N$  thỏa mãn  $MN = 8$  có bán kính bằng bao nhiêu?

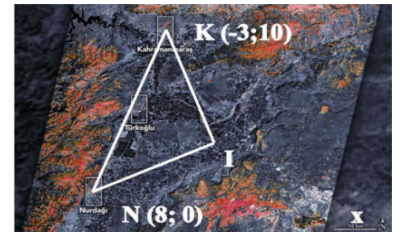
KQ:

**Câu 34.** Xét trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , ba thành phố nằm tại các vị trí  $A(-1;4), B(5;6), C(6;3)$ . Một đài truyền hình phục vụ cư dân muốn xây dựng một cơ sở phát sóng mới cách đều ba thành phố. Tọa độ của vị trí đặt cơ sở phát sóng mới có tổng hoành độ và tung độ là bao nhiêu?

KQ:

**Câu 35.** Ngày 6/2/2023, một trận động đất 7,8 độ richter có tâm chấn tại Thổ Nhĩ Kỳ (hình minh họa bên dưới). Biết rằng đường tròn tác động đi qua 2 thành phố Kahramanmaraş và Nurdagi có tọa độ lần lượt là  $K(-3;10)$  và  $N(8;0)$ . Mặt khác, tâm chấn cách đều hai thành phố nói trên. Bán kính tác động (km) tính từ tâm chấn (Tâm  $I$ ) bằng bao nhiêu? Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm.

KQ:



## §5. BA ĐƯỜNG CONIC

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Elip

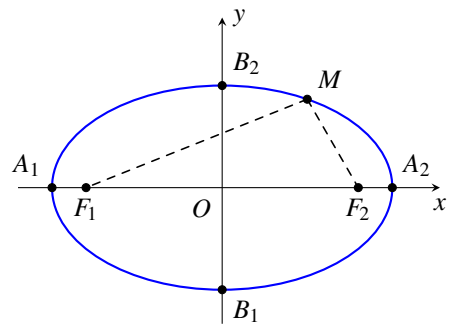
⚙ **Định nghĩa:** Cho hai điểm phân biệt  $F_1$  và  $F_2$ . Đặt  $F_1F_2 = 2c > 0$ . Tập hợp tất cả điểm  $M$  thỏa  $MF_1 + MF_2 = 2a$ , với  $a > c > 0$  là một elip.

⚙ **Phương trình elip:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$  (hai tiêu điểm thuộc trục hoành). Với  $b^2 = a^2 - c^2$ , ta có phương trình elip có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a > b > 0.$$

⚙ **Hình dạng elip và các đại lượng liên quan:**

- Trục lớn  $A_1A_2 = 2a$ ; Trục bé  $B_1B_2 = 2b$ ;
- Tiêu cự  $F_1F_2 = 2c$  và  $a^2 = b^2 + c^2$ .
- Tọa độ các đỉnh  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ ,  $B_1(0; -b)$ ,  $B_2(0; b)$ .
- Tiêu điểm  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ .



#### 2 Hypebol

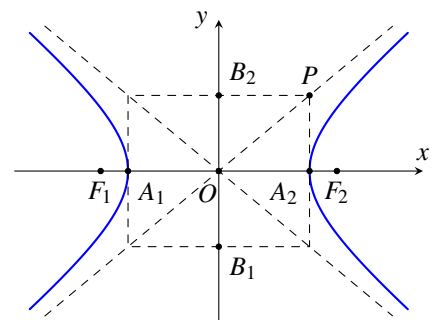
⚙ **Định nghĩa:** Cho hai điểm phân biệt  $F_1$  và  $F_2$ . Đặt  $F_1F_2 = 2c > 0$ . Tập hợp tất cả điểm  $M$  thỏa  $|MF_1 - MF_2| = 2a$ , với  $0 < a < c$  là một hypebol.

⚙ **Phương trình hypebol:** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hai điểm  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$  (hai tiêu điểm thuộc trục hoành). Với  $b^2 = c^2 - a^2$ , ta có phương trình hypebol có dạng

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ với } a, b > 0.$$

⚙ **Hình dạng hypebol và các đại lượng liên quan:**

- Đoạn thẳng  $A_1A_2 = 2a$  gọi là **trục thực**, đoạn thẳng  $B_1B_2 = 2b$  gọi là **trục ảo** của hypebol.
- Tiêu cự  $F_1F_2 = 2c$  và  $a^2 + b^2 = c^2$ .
- Tọa độ các đỉnh  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ .
- Tiêu điểm  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ .
- Giao điểm  $O$  của hai trục là **tâm đối xứng** của hypebol.



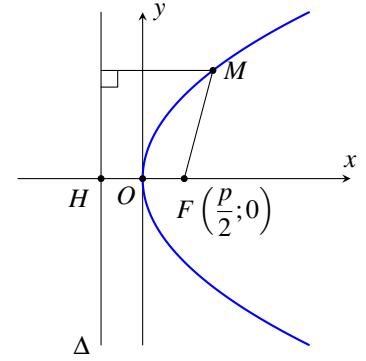
## 3 Parabol

☀ **Định nghĩa:** Cho một điểm  $F$  và một đường thẳng  $\Delta$  cố định không đi qua  $F$ . Tập hợp các điểm  $M$  cách đều  $F$  và  $\Delta$  là một đường parabol. Điểm  $F$  gọi là **tiêu điểm** và  $\Delta$  gọi là **đường chuẩn** của parabol ( $P$ ).

$$MF = d(M, \Delta)$$

☀ **Phương trình parabol:** Gọi  $H$  là hình chiếu vuông góc của  $F$  trên  $\Delta$ . Gọi khoảng cách từ tiêu điểm đến đường chuẩn là  $p = HF$ . Chọn hệ trục tọa độ  $Oxy$ , với  $O$  là trung điểm  $HF$  (như hình vẽ) thì  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  và  $\Delta: x = -\frac{p}{2}$ . Khi đó, phương trình ( $P$ ) là

$$y^2 = 2px, \text{ với } p > 0$$



☀ **Hình dạng parabol và các đại lượng liên quan:**

- $O$  là đỉnh;  $Ox$  gọi là **trục đối xứng** của parabol ( $P$ ).
- $p$  gọi là **tham số tiêu** của parabol ( $P$ ).
- Tiêu điểm  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  và đường chuẩn  $\Delta: x = -\frac{p}{2}$ .

## B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

## DT 1 Phương trình đường elip

☀ Xác định các yếu tố của elip ( $E$ ) có phương trình  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , với  $a > b > 0$ .

- Tính  $c^2 = a^2 - b^2$ .
- Độ dài trục lớn:  $A_1A_2 = 2a$ , độ dài trục nhỏ:  $B_1B_2 = 2b$ . Độ dài tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c$ .
- Tọa độ các đỉnh  $A_1(-a; 0)$ ,  $A_2(a; 0)$ ,  $B_1(0; -b)$ ,  $B_2(0; b)$ .
- Tiêu điểm  $F_1(-c; 0)$ ,  $F_2(c; 0)$ .

☀ Viết phương trình ( $E$ ), ta thực hiện các bước:

- Từ dữ kiện bài toán, giải tìm  $a$  và  $b$ , với  $a > b > 0$ .
- Ráp vào công thức ( $E$ ):  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

≡ **Ví dụ 1.** Xác định tọa độ các đỉnh và độ dài các trục của các elip có phương trình sau:

a)  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$

b)  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

c)  $x^2 + 4y^2 = 1$ .

d)  $4x^2 + 25y^2 = 36$ .

**≡ Ví dụ 2.** Cho elip  $(E)$  có độ dài trục lớn bằng 10, tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn là  $\frac{3}{5}$ .

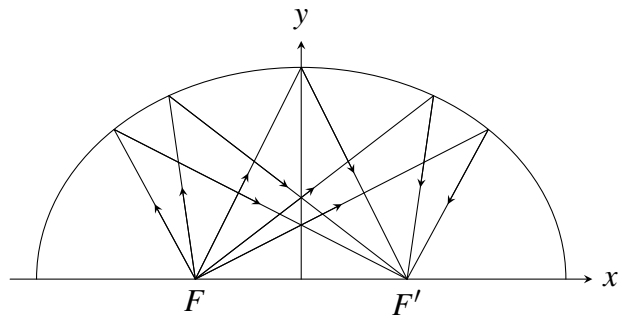
- Tính độ dài trục nhỏ và viết phương trình chính tắc của elip.
- Tìm những điểm thuộc  $(E)$  biết tung độ của chúng bằng  $\sqrt{15}$ .

**≡ Ví dụ 3.** Lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$ , biết

- độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục nhỏ bằng 4.
- độ dài trục lớn bằng 10, tiêu cự có độ dài bằng 6.
- elip đi qua hai điểm  $M(1;0), N(\frac{\sqrt{3}}{2}; 1)$ .

**≡ Ví dụ 4.**

Một mái vòm nhà hát có mặt cắt là hình nửa elip. Cho biết khoảng cách giữa hai tiêu điểm là  $F'F = 50\text{m}$  và chiều dài của đường đi của một tia sáng từ  $F'$  đến mái vòm rồi phản chiếu về  $F$  là 100m. Viết phương trình chính tắc của elip đó.



**DT**

**2**

**Phương trình đường hypebol**

⚙ Xác định các yếu tố của hypebol  $(H)$  có phương trình  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ , với  $a, b > 0$ .

- Tính  $c^2 = a^2 + b^2$ .
- Độ dài trục thực:  $A_1A_2 = 2a$ , độ dài trục ảo:  $B_1B_2 = 2b$ . Độ dài tiêu cự:  $F_1F_2 = 2c$ .
- Tọa độ các đỉnh  $A_1(-a;0), A_2(a;0)$ .
- Tiêu điểm  $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ .

⚙ Viết phương trình  $(H)$ , ta thực hiện các bước:

- Từ dữ kiện bài toán, giải tìm  $a$  và  $b$ , với  $a, b > 0$ .
- Ráp vào công thức  $(H)$ :  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

**≡ Ví dụ 5.** Xác định các tọa độ tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục thực, độ dài trục ảo và tiêu cự của hypebol  $(H)$  có phương trình như sau:

- $(H) : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$
- $(H) : \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$
- $(H) : 4x^2 - y^2 = 4$ .
- $(H) : 9x^2 - 25y^2 = 1$ .
- $(H) : 25x^2 - 16y^2 = 400$ .
- $(H) : 16x^2 - 9y^2 = 16$ .

**≡ Ví dụ 6.** Cho hyperbol  $(H) : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

- Tìm độ dài trục ảo, trục thực, tiêu cự của  $(H)$ .

- b) Tìm điểm thuộc  $(H)$  biết hoành độ của chúng bằng  $\sqrt{7}$ .  
 c) Tìm trên  $(H)$  những điểm  $M(x;y)$  sao cho  $MF_1 \perp MF_2$ , với  $F_1, F_2$  là hai tiêu điểm của  $(H)$ .

≡ **Ví dụ 7.** Lập phương trình chính tắc của hypebol, biết

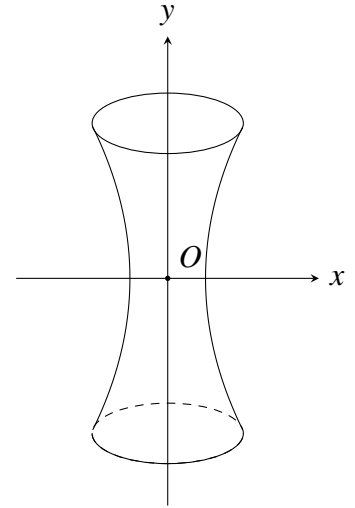
- a) Độ dài trục thực bằng 10, trục ảo bằng 6.      b) Độ dài trục thực bằng 8, tiêu cự bằng 10.  
 c) Có một tiêu điểm  $F_2(5;0)$  và đỉnh  $A_1(-4;0)$ .      d) qua điểm  $M(3\sqrt{2}; -4)$  và có một tiêu điểm là  $F_2(5;0)$ .

≡ **Ví dụ 8.**

Một tháp triển lãm có mặt cắt hình hypebol có phương trình

$$\frac{x^2}{18^2} - \frac{y^2}{36^2} = 1$$

Cho biết chiều cao của tháp là 100m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.



DT

3

### Phương trình đường parabol

⚙️ Xác định các yếu tố của parabol  $(P)$  có phương trình  $y^2 = 2px$ , với  $p > 0$ .

- $p$  gọi là **tham số tiêu** của parabol  $(P)$ .
- Tiêu điểm  $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$  và đường chuẩn  $\Delta: x = -\frac{p}{2}$ .

⚙️ Viết phương trình chính tắc của  $(P)$ , ta thực hiện các bước:

- Từ dữ kiện bài toán, giải tìm  $p > 0$ .
- Ráp vào công thức  $(P): y^2 = 2px$ .

≡ **Ví dụ 9.** Tìm tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các parabol  $(P)$  có phương trình chính tắc như sau:

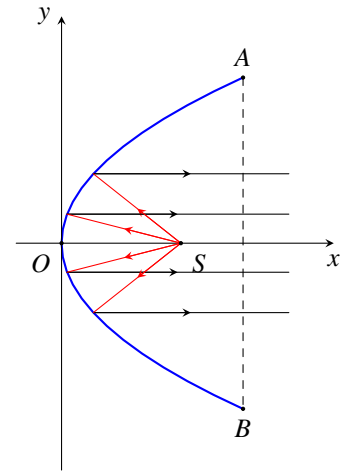
- a)  $(P): y^2 = 2x$ .      b)  $(P): y^2 = 4x$ .      c)  $(P): y^2 = x$ .  
 d)  $(P): y^2 = 9x$ .      e)  $(P): y^2 - 6x = 0$ .      f)  $(P): 2y^2 - 4x = 0$ .

≡ **Ví dụ 10.** Lập phương trình chính tắc của parabol  $(P)$  biết

- a)  $(P)$  có tiêu điểm  $F(3;0)$ .      b)  $(P)$  có tiêu điểm  $F(1;0)$ .  
 c)  $(P)$  đi qua điểm  $M(6;-2)$ .      d)  $(P)$  đi qua điểm  $M(1;-4)$ .  
 e)  $(P)$  có đường chuẩn  $x = -3$ .      f)  $(P)$  có đường chuẩn  $x + 2 = 0$ .

**≡ Ví dụ 11.**

Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol như hình bên. Hình parabol có chiều rộng giữa hai mép vành là  $AB = 40\text{cm}$  và chiều sâu  $h = 30\text{cm}$  ( $h$  bằng khoảng cách từ  $O$  đến  $AB$ ). Bóng đèn nằm ở tiêu điểm  $S$ . Viết phương trình chính tắc của parabol đó.



**C BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

- 1 Xác định tọa độ các đỉnh và các tiêu điểm của các elip có phương trình sau:
 

a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ ;	b) $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ;
c) $16x^2 + 25y^2 = 1$ ;	d) $0,25x^2 + 9y^2 = 1$ .
  
- 2 Tìm tọa độ các tiêu điểm, tọa độ các đỉnh, độ dài trục thực và trục ảo của các hypebol sau
 

a) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ ;	b) $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ ;
c) $x^2 - 16y^2 = 16$ ;	d) $9x^2 - 16y^2 = 144$ .
  
- 3 Tìm tọa độ tiêu điểm, phương trình đường chuẩn của các parabol sau
 

a) $y^2 = 12x$ ;	b) $y^2 = x$ .
------------------	----------------
  
- 4 Viết phương trình chính tắc của:
  - a) Elip có trục lớn bằng 12 và trục nhỏ bằng 8;
  - b) Hypebol có tiêu cự  $2c = 18$  và độ dài trục thực  $2a = 14$ ;
  - c) Parabol có tiêu điểm  $F(5;0)$ .
  
- 5 Cho parabol  $(P) : y^2 = 4x$  và điểm  $M(x_0; y_0) \in (P)$ .
  - a) Tính khoảng cách từ  $M$  đến tiêu điểm  $F$ .
  - b) Tìm tọa độ của điểm  $M$  biết  $MF = 2$ .
  - c) Đường thẳng  $d$  qua  $F$  cắt  $(P)$  tại hai điểm  $A$  và  $B$ . Chứng minh:  $AB = x_A + x_B + 2$ .
  
- 6 Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E) : 9x^2 + 16y^2 = 144$ . Tìm tất cả điểm  $M$  thuộc elip sao cho góc  $\widehat{F_1MF_2}$  bằng  $60^\circ$ .
  
- 7 Một tháp làm nguội của một nhà máy có mặt cắt là hình hypebol có phương trình  $\frac{x^2}{30^2} - \frac{y^2}{50^2} = 1$ . Biết chiều cao của tháp là 120m và khoảng cách từ nóc tháp đến tâm đối xứng của hypebol bằng

$\frac{1}{2}$  khoảng cách từ tâm đối xứng đến đáy. Tính bán kính nóc và bán kính đáy của tháp.

- 8 Để cắt một bảng hiệu quảng cáo hình elip có trục lớn là 1m và trục nhỏ là 0,6m từ một tấm ván ép hình chữ nhật có kích thước  $1m \times 0,6m$ , người ta vẽ hình elip đó lên tấm ván ép như hướng dẫn sau:

Chuẩn bị:

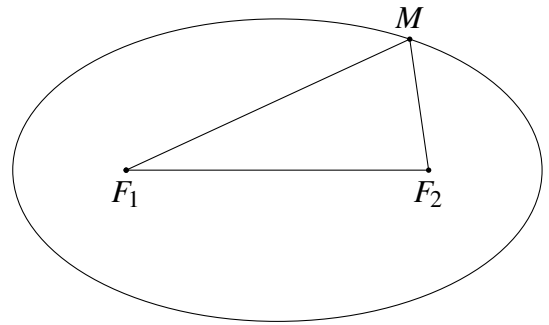
- Hai cái đinh, một vòng dây kín không đàn hồi, bút chì.

Thực hiện:

- Xác định vị trí (hai tiêu điểm của elip) và ghim hai cái đinh lên hai điểm đó trên tấm ván.

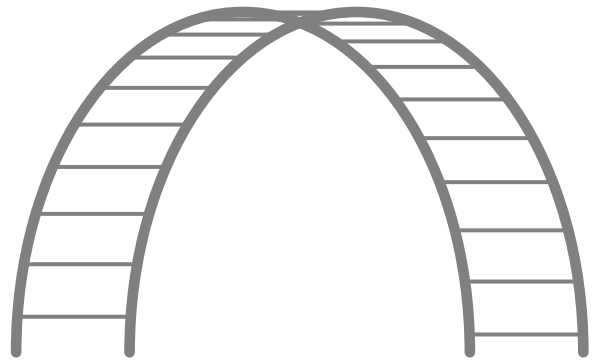
- Quàng vòng dây qua hai chiếc đinh và kéo căng tại một điểm  $M$  nào đó. Tựa đầu bút chì vào trong vòng dây tại điểm  $M$  rồi di chuyển sao cho dây luôn luôn căng.

Đầu bút chì vạch lên tấm bìa một đường mà ta gọi là đường elip. (Xem minh họa trong Hình bên). Phải ghim hai cái đinh cách các mép tấm ván ép bao nhiêu và lấy vòng dây có độ dài là bao nhiêu?

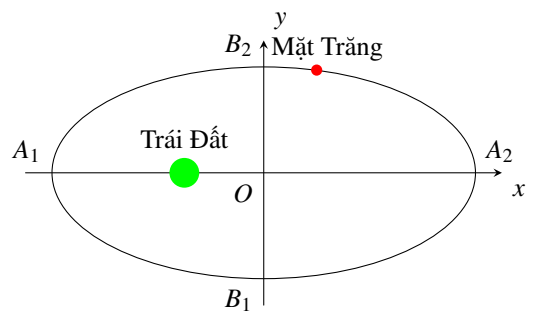


- 9 Thang leo gợn sóng cho trẻ em trong công viên có hai khung thép cong hình nửa elip cao 100cm và khoảng cách giữa hai chân là 240cm.

- Hãy chọn hệ tọa độ thích hợp và viết phương trình chính tắc của elip nói trên.
- Tính khoảng cách thẳng đứng từ một điểm cách chân khung 20cm lên đến khung thép.



- 10 Ta biết rằng Mặt Trăng chuyển động quanh Trái Đất theo quỹ đạo là một elip mà Trái Đất là một tiêu điểm. Elip đó có  $A_1A_2 = 768800$  km và  $B_1B_2 = 767619$  km (Nguồn: Ron Larson (2014), *Precalculus Real Mathematics, Real People, Cengage*) (Hình minh họa). Viết phương trình chính tắc của elip đó.



## D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Điểm nào sau đây là một đỉnh của  $(E)$ ?

- A.  $A_3(-5;0)$ .      B.  $A_1(25;9)$ .      C.  $A_2(5;3)$ .      D.  $A_4(3;0)$ .

**Câu 2.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E): \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$ . Độ dài trục nhỏ của  $(E)$  là

- A. 36.      B. 18.      C. 12.      D. 8.

**Câu 3.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E): 4x^2 + 9y^2 = 25$ . Độ dài trục lớn của  $(E)$  bằng

- A.  $\frac{5}{2}$ .                      B. 5.                      C. 9.                      D. 4.

**Câu 4.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Các tiêu điểm của  $(E)$  là

- A.  $F_1(-5;0)$  và  $F_1(5;0)$ .                      B.  $F_1(-4;0)$  và  $F_1(4;0)$ .  
C.  $F_1(-3;0)$  và  $F_1(3;0)$ .                      D.  $F_1(-8;0)$  và  $F_1(8;0)$ .

**Câu 5.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E): 5x^2 + 9y^2 = 45$ . Tiêu cự của  $(E)$  bằng

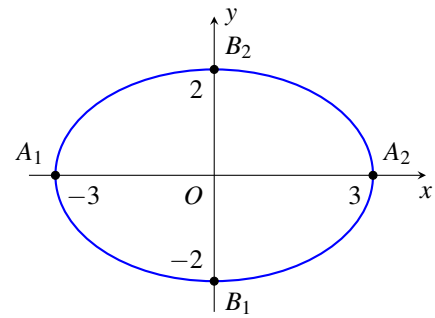
- A. -2.                      B. 2.                      C. 4.                      D. -4.

**Câu 6.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E): \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ . Gọi  $2a, 2c$  lần lượt là độ dài trục lớn và tiêu cự của  $(E)$ . Tỉ số  $\frac{c}{a}$  bằng

- A.  $\frac{3}{5}$ .                      B.  $\frac{5}{3}$ .                      C.  $\frac{5}{4}$ .                      D.  $\frac{4}{5}$ .

**Câu 7.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho elip  $(E)$  như hình vẽ bên. Xác định phương trình chính tắc của  $(E)$  đã cho.

- A.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ .                      B.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .  
C.  $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1$ .                      D.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .



**Câu 8.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho elip  $(E)$ . Viết phương trình chính tắc của  $(E)$  biết  $(E)$  có độ dài trục lớn bằng 6, độ dài trục bé bằng 4.

- A.  $9x^2 + 4y^2 = 36$ .                      B.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .                      C.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .                      D.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Câu 9.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$  biết  $(E)$  có độ dài trục bé bằng 6 và tiêu cự bằng 8.

- A.  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .                      B.  $(E): \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{6} = 1$ .                      C.  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .                      D.  $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Câu 10.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , viết phương trình chính tắc của elip  $(E)$  biết  $(E)$  có tiêu điểm  $F_1(-2;0)$  và qua  $A_1(-3;0)$ .

- A.  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ .                      B.  $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .                      C.  $(E): \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ .                      D.  $(E): \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Câu 11.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hypebol  $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ . Tính độ dài trục thực của  $(H)$ .

- A. 24.                      B. 10.                      C. 8.                      D. 7.

**Câu 12.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hypebol  $(H): \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ . Tính độ dài trục ảo của  $(H)$ .

- A. 25.                      B. 10.                      C. 24.                      D. 144.

**Câu 13.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho hypebol  $(H): \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ . Tính tiêu cự của  $(H)$ .

- A. 7.                      B. 16.                      C. 10.                      D. 9.

**Câu 14.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y^2 = 4x$ . Tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của  $(P)$  lần lượt là

- A.  $F(2;0)$  và  $x+1=0$ .  
C.  $F(1;0)$  và  $x-1=0$ .

- B.  $F(1;0)$  và  $x+1=0$ .  
D.  $F(2;0)$  và  $x-1=0$ .

**Câu 15.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho parabol  $(P): y^2 = 2x$ . Tọa độ tiêu điểm và phương trình đường chuẩn của  $(P)$  lần lượt là

- A.  $F\left(\frac{1}{2};0\right)$  và  $x-\frac{1}{2}=0$ .  
C.  $F\left(0;\frac{1}{2}\right)$  và  $x-\frac{1}{2}=0$ .

- B.  $F\left(-\frac{1}{2};0\right)$  và  $x+\frac{1}{2}=0$ .  
D.  $F\left(\frac{1}{2};0\right)$  và  $x+\frac{1}{2}=0$ .

**Câu 16.** Viết phương trình chính tắc của các hypebol biết độ dài trục thực là 10, độ dài trục ảo là 20.

- A.  $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{10} = 1$ .      B.  $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{10} = 1$ .      C.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$ .      D.  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{100} = 1$ .

**Câu 17.** Viết phương trình chính tắc của hypebol có tiêu cự bằng 10 và độ dài trục ảo bằng 6.

- A.  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ .      B.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ .      C.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$ .      D.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Câu 18.** Phương trình chính tắc của hypebol có hai đỉnh là  $(-4;0)$ ,  $(4;0)$  và hai tiêu điểm là  $(-5;0)$ ,  $(5;0)$  là

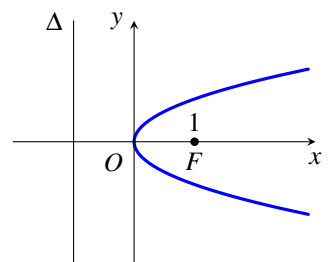
- A.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ .      B.  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .      C.  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ .      D.  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ .

**Câu 19.** Viết phương trình chính tắc của hypebol  $(H)$ , biết  $N(\sqrt{10};2)$  nằm trên  $(H)$  và hoành độ một giao điểm của  $(H)$  với trục  $Ox$  bằng 3.

- A.  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{36} = 1$ .      B.  $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ .      C.  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ .      D.  $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Câu 20.** Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho parabol  $(P)$  có tiêu điểm và đường chuẩn như hình vẽ bên. Xác định phương trình chính tắc của  $(P)$  đã cho.

- A.  $y = 2x^2$ .      B.  $y^2 = 2x$ .      C.  $y^2 = x$ .      D.  $y^2 = 4x$ .



**Câu 21.** Phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm là  $(2;0)$  là

- A.  $y^2 = 8x$ .      B.  $y^2 = 4x$ .      C.  $y^2 = 2x$ .      D.  $y = 2x^2$ .

**Câu 22.** Viết phương trình chính tắc của parabol  $(P)$  có đường chuẩn  $\Delta: x+1=0$ .

- A.  $y^2 = 4x$ .      B.  $y^2 = x$ .      C.  $y^2 = 2x$ .      D.  $y^2 = 8x$ .

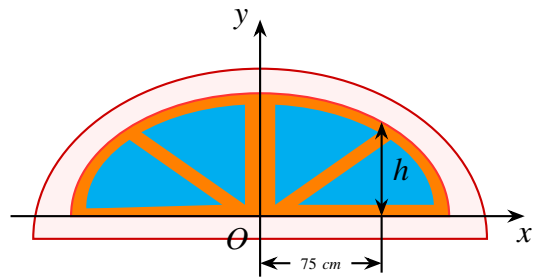
**Câu 23.** Mặt Trăng và các vệ tinh của Trái Đất chuyển động theo quỹ đạo là các đường elip mà tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Biết độ dài trục lớn và độ dài trục bé của quỹ đạo Mặt Trăng là 768796km và 767726km. Tính khoảng cách lớn nhất và khoảng cách bé nhất giữa tâm Trái Đất và tâm Mặt Trăng.

- A. 404672 và 364124.      B. 363598 và 404164.      C. 363589 và 404137.      D. 406472 và 364142.

**Câu 24.** Trong bản vẽ thiết kế, vòm của ô thoáng trong hình bên là nửa nằm phía trên trục hoành của elip có phương trình

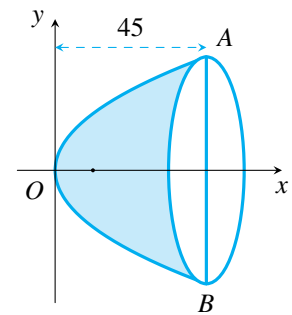
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Biết rằng 1 đơn vị trên mặt phẳng tọa độ của bản vẽ thiết kế ứng với 30 cm trên thực tế. Tính chiều cao  $h$  của ô thoáng tại điểm cách điểm chính giữa của đế ô thoáng 75 cm.



- A.  $h = 49,8$  cm.                      B.  $h = 46,8$  cm.  
C.  $h = 40,8$  cm.                      D.  $h = 66,8$  cm.

**Câu 25.** Một gương lõm có mặt cắt hình parabol (hình bên), có tiêu điểm cách đỉnh 5 cm. Cho biết bề sâu của gương là 45 cm, Tính khoảng cách  $AB$ .



- A.  $AB = 50$  cm.    B.  $AB = 55$  cm.    C.  $AB = 60$  cm.    D.  $AB = 65$  cm.

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 26.** Cho elip  $(E): \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Điểm  $A(4;0)$  thuộc elip  $(E)$ .  
b) Tiêu cự elip  $(E)$  bằng  $\sqrt{7}$ .  
c) Elip  $(E)$  có tiêu điểm  $F_1(-2\sqrt{7};0), F_2(2\sqrt{7};0)$ .  
d) Cho  $M$  là điểm thuộc  $(E)$  thỏa mãn  $MF_1 + 2MF_2 = 11$ . Khi đó  $2MF_1 + MF_2 = 13$ .

**Câu 27.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho hypebol  $(H)$  với trục thực có độ dài là 8 và một tiêu điểm  $F_2(6;0)$ . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Tiêu cự có độ dài là 6.  
b) Hypebol có một đỉnh  $A_1(-4;0)$ .  
c) Độ dài trục ảo là  $2\sqrt{5}$ .  
d) Phương trình chính tắc của  $(H)$  là  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1$ .

**Câu 28.** Cho hypebol  $(H): \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Khi đó

- a) Điểm  $A(3;0)$  nằm trên hypebol.  
b) Hypebol  $(H)$  có tiêu cự  $4\sqrt{5}$ .  
c) Điểm  $M$  có hoành độ dương là giao của hypebol  $(H)$  với trục  $Ox$  có tọa độ là  $M(2;0)$ .  
d) Hypebol  $(H)$  cắt đường thẳng  $y = 1$  tại hai điểm.

**Câu 29.** Cho parabol  $(P): y^2 = 4x$  và đường thẳng  $\Delta: 2x - y - 4 = 0$ . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đường chuẩn của  $(P)$  là  $x = 1$ .  
b) Tiêu điểm của  $(P)$  là  $F(1;0)$ .

- c) Có duy nhất một điểm  $M \in (P)$  cách tiêu điểm  $F$  một khoảng là 5.  
 d) Gọi  $A, B$  là giao điểm của  $\Delta$  và  $(P)$ . Điểm  $N \in (P)$  có tung độ âm và tam giác  $NAB$  có diện tích  $S_{\Delta NAB} = 12$ . Khi đó, điểm  $N$  có tung độ bằng  $-4$ .

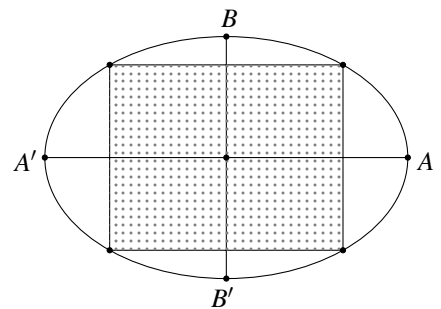
### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 30.** Trong mặt phẳng  $Oxy$  cho elip có phương trình  $(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ . Đường thẳng  $\Delta: x = -4$  cắt elip  $(E)$  tại hai điểm  $M, N$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $MN$ .

KQ:

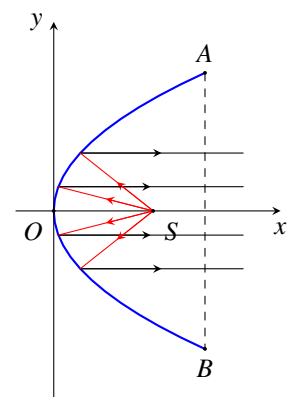
**Câu 31.** Một công viên có dạng hình elip có độ dài trục lớn bằng 100 m, độ dài trục bé bằng 80 m. Người ta muốn trồng hoa trong một hình chữ nhật nội tiếp elip, phần còn lại sẽ trồng cỏ (như hình vẽ). Diện tích trồng hoa lớn nhất bằng bao nhiêu mét vuông?

KQ:



**Câu 32.** Một chiếc đèn có mặt cắt ngang là hình parabol  $y^2 = 2px$  ( $p > 0$ ) như hình vẽ. Trong đó chiều rộng hai mép vành là  $AB = 40$  cm, chiều sâu  $h = 20$  cm (khoảng cách từ  $O$  đến  $AB$ ), bóng đèn nằm ở tiêu điểm  $S$ . Tìm giá trị của tham số tiêu.

KQ:

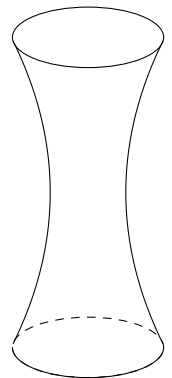


**Câu 33.** Cho parabol  $(P): y^2 = 16x$ . Biết khoảng cách từ điểm  $A$  nằm trên  $(P)$  đến đường chuẩn bằng 13. Khi đó khoảng cách từ  $A$  đến trục hoành bằng bao nhiêu?

KQ:

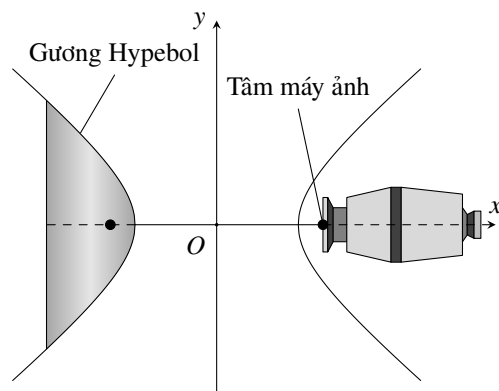
**Câu 34.** Một tòa tháp (hình bên) có mặt cắt là một đường hypebol và có chiều cao 200 m, chỗ nhỏ nhất ở chính giữa và rộng 50 m, đỉnh tháp và đáy tháp có độ rộng đều bằng 60 m. Độ rộng của tòa tháp ở độ cao 150 m bằng bao nhiêu (kết quả tính theo đơn vị mét và làm tròn đến hàng phần chục)?

KQ:



**Câu 35.** Để chụp toàn cảnh ta có thể sử dụng gương hypebol. Máy ảnh được đặt hướng về đỉnh của gương và tâm quang học của máy ảnh được đặt tại một tiêu điểm của Hypebol (hình vẽ tham khảo).

KQ:



Phương trình cho mặt cắt của gương là  $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$ . Khoảng cách từ tâm của máy ảnh đến đỉnh của gương (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm) bằng bao nhiêu?

—HẾT—

### §1. KHÔNG GIAN MẪU VÀ BIẾN CỐ

#### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

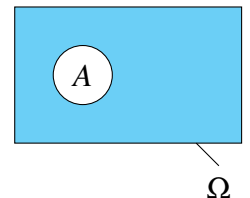
##### 1 Phép thử ngẫu nhiên, không gian mẫu

- **Phép thử ngẫu nhiên** (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà kết quả của nó không thể biết được trước khi phép thử được thực hiện.
- **Không gian mẫu** của phép thử (kí hiệu là  $\Omega$ ) là tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra khi thực hiện phép thử.

**Chú ý :** Ta chỉ xét phép thử mà không gian mẫu gồm hữu hạn kết quả.

##### 2 Biến cố

- Biến cố là một tập con của không gian mẫu  $\Omega$ , kí hiệu  $A, B, C, \dots$
- Một kết quả thuộc tập  $A$  được gọi là kết quả thuận lợi cho biến cố  $A$ .



**Chú ý :**

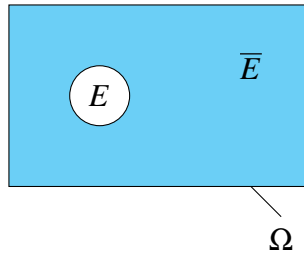
- Biến cố chắc chắn là biến cố luôn xảy ra, kí hiệu là  $\Omega$ .
- Biến cố không thể là biến cố không bao giờ xảy ra, kí hiệu là  $\emptyset$ .

##### 3 Biến cố đối

Xét phép thử  $T$  với không gian mẫu là  $\Omega$ . Giả sử  $E$  là một biến cố.

- Biến cố đối của biến cố  $E$  là biến cố " $E$  không xảy ra". Nếu biến cố  $E$  được mô tả dưới dạng mệnh đề toán học  $Q$  thì biến cố đối  $\bar{E}$  được mô tả bằng mệnh đề phủ định của mệnh đề  $Q$  (tức là mệnh đề  $\bar{Q}$ ).
- Biến cố đối của biến cố  $E$  kí hiệu là  $\bar{E}$ . Nhận xét  $\bar{E} = \Omega \setminus E$ .

**Nhận xét :** Nếu biến cố  $E$  là tập con của không gian mẫu  $\Omega$  thì  $\bar{E}$  là phần bù của  $E$  trong  $\Omega$ .



## B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

### DT 1 Phép thử gieo đồng xu

**Ví dụ 1.** Xét phép thử  $T$  “Gieo một đồng xu 3 lần”.

- Mô tả không gian mẫu. Tính số phần tử của tập không gian mẫu.
- Xác định phần tử của các biến cố và biến cố đối tương ứng với
  - $A$ : “Ba lần gieo đều mặt sấp”.

**Ví dụ 2.** Gieo một đồng xu cân đối và đồng chất liên tiếp cho đến khi lần đầu tiên xuất hiện mặt sấp hoặc cả năm lần ngửa thì dừng lại

- Mô tả không gian mẫu. Tính số phần tử của tập không gian mẫu.
- Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của các biến cố
  - $A$ : “Số lần gieo không vượt quá ba”.
  - $B$ : “Có ít nhất 2 lần gieo xuất hiện mặt ngửa”.

### DT 2 Phép thử gieo súc sắc

**Ví dụ 3.** Xét phép thử  $T$  “Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất”.

- Mô tả không gian mẫu.
- Gọi  $A$  là biến cố “Số chấm trên mặt xuất hiện là số chẵn”. Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  và  $\bar{A}$ .

**Ví dụ 4.** Gieo một con xúc xắc liên tiếp hai lần.

- Mô tả không gian mẫu.
- Gọi  $A$  là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện lớn hơn hoặc bằng 8”. Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của biến cố  $A$ .

### DT 3 Một số phép thử đơn giản khác

**Ví dụ 5.** Chọn ngẫu nhiên một số nguyên dương không lớn hơn 25.

- Mô tả không gian mẫu.

- b) Gọi  $A$  là biến cố "Số được chọn là số chính phương". Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của biến cố  $A$ .

≡ **Ví dụ 6.** Lập số tự nhiên có hai chữ số đôi một khác nhau từ các số 1, 2, 3, 4.

- a) Mô tả không gian mẫu.  
b) Gọi  $A$  là biến cố: "Số lập được chia hết cho 3". Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của biến cố  $A$ .

≡ **Ví dụ 7.** Một hộp chứa bốn thẻ được đánh số 1, 2, 3, 4. Lấy ngẫu nhiên hai thẻ.

- a) Mô tả không gian mẫu.  
b) Liệt kê tất cả các kết quả thuận lợi của các biến cố sau
- $H$ : "Tổng các số trên hai thẻ là số chẵn".
  - $K$ : "Tích các số trên hai thẻ là số chẵn".

## C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1) Gieo một con xúc xắc bốn mặt cân đối hai lần liên tiếp và quan sát số ghi trên đỉnh của con xúc xắc.
  - a) Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử.
  - b) Hãy viết tập hợp các kết quả thuận lợi cho biến cố "Số xuất hiện ở lần gieo thứ hai gấp 2 lần số xuất hiện ở lần gieo thứ nhất".
- 2) Tung một đồng xu ba lần liên tiếp. Phát biểu mỗi biến cố sau dưới dạng mệnh đề
  - a)  $A = \{SSS; NSS; SNS; NNS\}$ ;
  - b)  $B = \{SSN; SNS; NSS\}$ .
- 3) Một hộp chứa 5 quả bóng xanh, 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử lấy ra ngẫu nhiên một quả bóng từ hộp.
- 4) Trường mới của bạn Dũng có 3 câu lạc bộ ngoại ngữ là câu lạc bộ tiếng Anh, câu lạc bộ tiếng Bồ Đào Nha và câu lạc bộ tiếng Campuchia.
  - a) Dũng chọn ngẫu nhiên 1 câu lạc bộ ngoại ngữ để tìm hiểu thông tin. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử nêu trên.
  - b) Dũng thử chọn ngẫu nhiên 1 câu lạc bộ ngoại ngữ để tham gia trong học kì 1 và 1 câu lạc bộ ngoại ngữ khác để tham gia trong học kì 2. Hãy mô tả không gian mẫu của phép thử nêu trên.
- 5) Một hợp tác xã cung cấp giống lúa của 7 loại gạo ngon ST24, MS19RMTT, ST25, Hạt Ngọc Rồng, Ngọc trời Thiên Vương, gạo đặc sản 20 Gò Công Tiền Giang, gạo lúa tằm Kiên Giang, Bắc Bình và bắc An mỗi người chọn 1 trong 7 loại giống lúa trên để gieo trồng cho vụ mới.
  - a) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố "Hai bắc Bình và An chọn hai giống lúa giống nhau"?
  - b) Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố "Có ít nhất một trong hai bắc chọn giống lúa ST24"?

## D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Gieo ngẫu nhiên một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần. Ký hiệu mặt ngửa là  $N$  và mặt sấp là  $S$ . Không gian mẫu của phép thử là

- A.  $\Omega = \{S, N\}$ .  
 B.  $\Omega = \{SS, NN, SN, NS\}$ .  
 C.  $\Omega = \{SN, NS\}$ .  
 D.  $\Omega = \{SS, NN\}$ .

**Câu 2.** Gieo một đồng tiền cân đối đồng chất 3 lần. Tập không gian mẫu là

- A.  $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSN, SNS\}$ .  
 B.  $\{NN, NS, SN, SS\}$ .  
 C.  $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSS, SNN\}$ .  
 D.  $\{NNN, SSS, NNS, SSN, NSN, SNS, NSS, SNN\}$ .

**Câu 3.** Gieo ngẫu nhiên một đồng tiền cân đối và đồng chất 5 lần. Tính số phần tử không gian mẫu.

- A. 64.                      B. 16.                      C. 10.                      D. 32.

**Câu 4.** Gieo một con xúc sắc cân đối, đồng chất. Biến cố nào sau đây là biến cố chắc chắn

- A. A: “Xuất hiện mặt chẵn chấm”.  
 B. C: “Xuất hiện mặt nhỏ hơn 7 chấm”.  
 C. D: “Xuất hiện mặt có số chấm là một số nguyên tố”.  
 D. B: “Xuất hiện mặt lẻ chấm”.

**Câu 5.** Gieo một con súc sắc 2 lần. Số phần tử của không gian mẫu là

- A. 36.                      B. 12.                      C. 6.                      D. 18.

**Câu 6.** Gieo con súc sắc hai lần. Biến cố  $A$  là biến cố để sau hai lần gieo có ít nhất một mặt 6 chấm xuất hiện. Biến cố  $A$  là tập nào sau đây?

- A.  $A = \{(1;6), (2;6), (3;6), (4;6), (5;6), (6;6)\}$ .  
 B.  $A = \{(1;6), (2;6), (3;6), (4;6), (5;6), (6;6), (6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5)\}$ .  
 C.  $A = \{(1;6), (2;6), (3;6), (4;6), (5;6), (6;1), (6;2), (6;3), (6;4), (6;5)\}$ .  
 D.  $A = \{(1;6), (2;6), (3;6), (4;6), (5;6)\}$ .

**Câu 7.** Gieo một con súc sắc liên tiếp hai lần. Gọi  $A$  là biến cố “kết quả hai lần gieo như nhau”. Tính số phần tử của biến cố  $A$ .

- A.  $n(A) = 8$ .                      B.  $n(A) = 12$ .                      C.  $n(A) = 6$ .                      D.  $n(A) = 1$ .

**Câu 8.** Xét phép thử tung con súc sắc 6 mặt hai lần. Số phần tử của biến cố  $B$ : “Tổng số chấm xuất hiện ở hai lần tung chia hết cho 3” là

- A.  $n(B) = 14$ .                      B.  $n(B) = 15$ .                      C.  $n(B) = 13$ .                      D.  $n(B) = 11$ .

**Câu 9.** Minh muốn gọi điện cho Ngọc nhưng Minh quên mất chữ số cuối cùng của số điện thoại. Minh chọn ngẫu nhiên một chữ số cho chữ số cuối cùng để gọi thử. Tính số phần tử của tập không gian mẫu.

- A.  $n(\omega) = 9$ .                      B.  $n(\omega) = 10$ .                      C.  $n(\omega) = 1$ .                      D.  $n(\omega) = 11$ .

**Câu 10.** Hộp thứ nhất chứa 4 quả bóng được đánh số từ 1 đến 4. Hộp thứ hai chứa 5 quả bóng được đánh số từ 1 đến 5. Chọn ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả bóng. Có bao nhiêu kết quả thuận lợi cho biến cố “Tổng các số ghi trên hai quả bóng không vượt quá 7”?

- A. 17.                      B. 15.                      C. 13.                      D. 16.

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 11.** Một tiệm tranh có 13 bức tranh sơn dầu và 14 bức tranh lụa, các bức tranh là khác nhau. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Chọn ngẫu nhiên 4 bức tranh để mua. Biến cố chọn có cả bức tranh sơn dầu và bức tranh lụa có số phần tử là 15834 .
- b) Chọn ngẫu nhiên 6 bức tranh để mua. Biến cố chọn có ít nhất 1 bức tranh lụa là: 3003 .
- c) Chọn ngẫu nhiên 9 bức tranh để mua. Số phần tử của biến cố chọn được đúng 4 bức tranh sơn dầu là 715 .
- d) Chọn ngẫu nhiên 8 bức tranh để mua. Số phần tử của không gian mẫu là  $A_{27}^8$  .

**Câu 12.** Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau

- a) Số phần tử của biến cố "Tổng số chấm của hai lần gieo lớn 6 bằng 5" .
- b) Số phần tử của biến cố "Tích số chấm của hai lần gieo không nhỏ hơn 25 bằng 8" .
- c) Số phần tử của không gian mẫu là 36 .
- d) Số phần tử của biến cố "Tổng số chấm của hai lần gieo chia hết cho 2 bằng 2" .

**Câu 13.** Một hộp có 9 viên bi màu đen, 8 viên bi màu đỏ và 13 viên bi màu xanh. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau

- a) Biến cố "Có đúng hai loại viên bi được chọn" có số phần tử là 49933 .
- b) Số phần tử của không gian mẫu là 142508 .
- c) Biến cố "Có đúng 4 viên bi màu đen được chọn" có số phần tử là 126 .
- d) Biến cố "Cả 3 loại viên bi đều được chọn" có số phần tử là 936 .

**Câu 14.** Có 39 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 39. Lấy ngẫu nhiên 4 thẻ.

Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau

- a) Gọi  $B$  là biến cố "Số ghi trên các tám thẻ đều là số chẵn". Khi đó  $n(B) = 3879$  .
- b)  $n(\Omega) = 82251$  .
- c) Gọi  $E$  là biến cố "Có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 4". Khi đó  $n(E) = 54849$  .
- d) Gọi  $A$  là biến cố "Có đúng 4 thẻ chẵn được chọn". Khi đó  $n(E) = 3876$  .

## §2. XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ

### A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

#### 1 Định nghĩa cổ điển của xác suất

**Công thức tính:** Cho phép thử  $T$  có không gian mẫu là  $\Omega$ . Giả thiết rằng các kết quả có thể của  $T$  là đồng khả năng. Khi đó, nếu  $E$  là một biến cố liên quan phép thử  $T$  thì xác suất của  $E$  được cho bởi công thức

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

Trong đó,  $n(\omega)$  và  $n(E)$  lần lượt là số phần tử của tập không gian mẫu  $\omega$  và tập biến cố  $E$ .

**Nhận xét:**

- $0 \leq P(E) \leq 1$ , với mọi biến cố  $E$ .
- Với biến cố chắc chắn (là tập  $\Omega$ ), ta có  $P(\Omega) = 1$ .
- Với biến cố không thể (là tập  $\emptyset$ ), ta có  $P(\emptyset) = 0$ .

#### 2 Nguyên lý xác suất bé

Nếu một biến cố có xác suất rất bé thì trong một phép thử biến cố đó sẽ không xảy ra.

#### 3 Ý nghĩa thực tế của xác suất

Giả sử biến cố  $A$  có xác suất là  $P$ . Khi thực hiện phép thử  $n$  lần ( $n \geq 30$ ) thì số lần xuất hiện của biến cố  $A$  sẽ xấp xỉ bằng  $n \cdot P(A)$  (khi  $n$  càng lớn thì sai số tương đối càng bé).

### B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

#### GHI NHỚ

Để tính xác suất của biến cố theo định nghĩa cổ điển, ta thực hiện 3 bước sau:

- ① Tính  $n(\Omega)$  là số kết quả thuận lợi của tập không gian mẫu theo một trong hai cách sau:
  - Liệt kê phần tử rồi đếm;
  - Suy luận theo các quy tắc đếm.
- ② Tính  $n(A)$  là số kết quả thuận lợi của tập biến cố  $A$  theo một trong hai cách sau:
  - Liệt kê phần tử rồi đếm;
  - Suy luận theo các quy tắc đếm.
- ③ Lấy tỉ số  $\frac{n(A)}{n(\Omega)}$ .

**DT****1****Sử dụng phương pháp liệt kê tính xác suất của biến cố**

**Ví dụ 1.** Xét phép thử : Gieo một đồng tiền 2 lần

- Mô tả tập không gian mẫu
- Xác định các biến cố
  - $A$ : "Mặt sấp xuất hiện đúng một lần"
  - $B$ : "Mặt sấp xuất hiện ít nhất một lần"
- Tính xác suất của biến cố  $A$  và  $B$ .

**Ví dụ 2.** Xét phép thử gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 2 lần.

- Mô tả tập không gian mẫu.
- Xác định các biến cố
  - $A$ : "Số chẵn xuất hiện trong 2 lần gieo đều giống nhau".
  - $B$ : "Tích số chẵn xuất hiện trong 2 lần gieo là số lẻ".
  - $C$ : "Tổng số chẵn xuất hiện trong hai lần gieo là một số chia hết cho 5".
- Tính xác suất của biến cố  $A$ ,  $B$  và  $C$ .

**Ví dụ 3.** Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất 3 lần. Tính xác suất của biến cố sau:

- $A$ : "Số chẵn xuất hiện trong 3 lần gieo giống nhau".
- $B$ : "Tích số chẵn xuất hiện trong 3 lần gieo là số lẻ".

**Ví dụ 4.** Một cửa hàng bán ba loại kem: xoài, sôcôla và sữa. Một học sinh chọn mua ba cốc kem một cách ngẫu nhiên. Tính xác suất để ba cốc kem chọn được thuộc hai loại.

**Ví dụ 5.** Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên có hai chữ số nhỏ hơn 20. Gọi  $A$  là biến cố: "Số được chọn chia hết cho 3". Tính xác suất của biến cố  $A$ .

**Ví dụ 6.** Từ một hộp chứa 5 quả cầu được đánh số 1, 2, 3, 4, 5. Lấy ngẫu nhiên liên tiếp hai lần mỗi lần một quả cầu và xếp theo thứ tự từ trái sang phải. Tính xác suất các biến cố sau:

- $A$ : "Chữ số sau lớn hơn chữ số trước".
- $B$ : "Chữ số trước gấp đôi chữ số sau".
- $C$ : "Hai chữ số bằng nhau";
- $D$ : "Cả hai chữ số đều là số nguyên tố".

**DT****2****Sử dụng phương pháp tổ hợp tính xác suất của biến cố**

**Ví dụ 7.** Một chiếc hộp chứa 6 quả cầu trắng, 4 quả cầu đỏ và 2 quả cầu đen. Chọn ngẫu nhiên 6 quả cầu. Tính xác suất để chọn được 3 quả cầu trắng, 2 quả cầu đỏ và 1 quả cầu đen.

**Ví dụ 8.** Trong một chiếc hộp có 20 viên bi, trong đó có 8 viên bi màu đỏ, 7 viên bi màu xanh và 5 viên bi màu vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 3 viên bi. Tìm xác suất để:

- 3 viên bi lấy ra có cùng một màu.

- b) 3 viên bi lấy ra có đủ ba màu.
- c) 3 viên bi lấy ra có đúng 2 màu khác nhau.

**≡ Ví dụ 9.** Trong một hộp kín có 18 quả bóng khác nhau: 9 trắng, 6 đen, 3 vàng. Lấy ngẫu nhiên từ hộp đồng thời 5 quả bóng. Tính xác suất của các biến cố sau

- a)  $A$ : "5 quả bóng cùng màu".
- b)  $B$ : "5 quả bóng có đủ 3 màu"
- c)  $C$ : "5 quả bóng không có màu trắng"

**≡ Ví dụ 10.** Một hộp đựng 16 thẻ được đánh số từ 1 đến 16. Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 thẻ. Tính xác suất để 4 thẻ được chọn đều đánh số chẵn.

**≡ Ví dụ 11.** Một hộp đựng 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên 10 tấm thẻ. Tính xác suất để trong đó có 5 tấm mang số chia hết cho 3 và 5 tấm mang số không chia hết cho 3.

**≡ Ví dụ 12.** Một lớp có 40 học sinh trong đó có 16 học sinh nam. Trong các em nam có 3 em thuận tay trái. Trong các em nữ có 2 em thuận tay trái. Chọn ngẫu nhiên hai em. Tính xác suất để trong hai em được chọn có một em nữ không thuận tay trái và một em nam thuận tay trái.

**≡ Ví dụ 13.** Xếp ngẫu nhiên 5 người  $A, B, C, D, E$  vào một cái bàn dài có 5 chỗ ngồi.

- a) Tính xác suất để bạn  $A$  và  $B$  ngồi chính giữa.
- b) Tính xác suất để hai người  $A$  và  $B$  ngồi đầu bàn.

**≡ Ví dụ 14.** Hai thầy trò đến dự một buổi hội thảo. Ban tổ chức xếp ngẫu nhiên 6 đại biểu trong đó có hai thầy trò ngồi trên một chiếc ghế dài. Tính xác suất để hai thầy trò ngồi cạnh nhau.

**≡ Ví dụ 15.** Trong đợt ứng phó dịch MERS-CoV, Sở y tế thành phố đã chọn ngẫu nhiên 3 đội phòng chống dịch cơ động trong số 5 đội của Trung tâm y tế dự phòng thành phố và 20 đội của các trung tâm y tế cơ sở để kiểm tra công tác chuẩn bị. Tính xác suất để có ít nhất 2 đội của các Trung tâm y tế cơ sở được chọn.

**≡ Ví dụ 16.** Học sinh A thiết kế bảng điều khiển tự mở cửa phòng học của lớp mình. Bảng gồm 10 nút, mỗi nút được ghi một số từ 0 đến 9 và không có hai nút nào cùng ghi một số. Để mở cửa cần nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau sao cho 3 số ghi trên 3 nút đó theo thứ tự đã nhả tạo thành một dãy số tăng và có tổng bằng 10. Học sinh B không biết quy tắc mở cửa trên, đã nhấn liên tiếp 3 nút khác nhau trên bảng điều khiển. Tính xác suất để B mở được cửa phòng đó.

**≡ Ví dụ 17.** Tại một quán ăn lúc đầu có 50 khách trong đó có  $2x$  đàn ông và  $y$  phụ nữ. Sau một tiếng có  $y - 6$  đàn ông ra về và  $2x - 5$  khách mới đến là nữ. Chọn ngẫu nhiên một khách. Biết rằng xác suất để chọn được một khách nữ là  $\frac{9}{13}$ . Tìm  $x$  và  $y$ .

**≡ Ví dụ 18.** Một hội đồng có đúng 1 người là nữ. Nếu chọn ngẫu nhiên 2 người từ hội đồng thì xác suất để cả hai người đều là nam là 0,8. Chọn ngẫu nhiên hai người từ hội đồng. Tính xác suất của biến cố có đúng 1 người nữ trong 2 người đó.

**≡ Ví dụ 19.** Một hộp kín có 1 quả bóng xanh và 5 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng bằng nhau. Hỏi Dũng cần lấy ra từ hộp ít nhất bao nhiêu quả bóng để xác suất lấy được quả bóng xanh lớn hơn 0,5?

DT

3

## Sử dụng sơ đồ hình cây tính xác suất của biến cố

≡ Ví dụ 20. Chọn ngẫu nhiên một gia đình có ba con và quan sát giới tính của ba người con này.

- a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phân tử của không gian mẫu.  
 b) Tính xác suất của các biến cố sau:
- $A$ : " Con đầu là gái".
  - $B$ : "Có ít nhất một người con trai".
  - $C$ : "Con thứ hai là trai".
  - $D$ : " Có hai người con gái".

≡ Ví dụ 21. Gieo một đồng tiền cân đối ba lần.

- a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phân tử của không gian mẫu.  
 b) Tính xác suất của các biến cố :
- $A$ : "Trong ba lần gieo có hai lần sấp, một lần ngửa".
  - $B$ : "Trong ba lần gieo có ít nhất một lần sấp".

≡ Ví dụ 22. Trên một dãy phố có ba quán ăn  $A, B, C$ . Hai bạn Văn và Hải mỗi người chọn ngẫu nhiên một quán để ăn trưa.

- a) Vẽ sơ đồ hình cây mô tả các phân tử của không gian mẫu.  
 b) Tính xác suất của các biến cố sau:
- $E$ : "Hai người cùng vào một quán".
  - $F$ : " Cả hai người không chọn quán  $C$ ".

≡ Ví dụ 23. Màu hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là màu vàng và màu xanh tương ứng với hai loại gen là gen trội  $A$  và gen lặn  $a$ . Hình dạng hạt của đậu Hà Lan có hai kiểu hình là hạt trơn và hạt nhăn tương ứng với hai loại gen là gen trội  $B$  và gen lặn  $b$ . Biết rằng, cây con lấy ngẫu nhiên một gen từ cây bố và một gen từ cây mẹ. Phép thử là cho lai hai loại đậu Hà Lan, trong đó cả cây bố và cây mẹ đều có kiểu gen là  $(Aa, Bb)$  và kiểu hình là hạt màu vàng và trơn. Giả sử các kết quả có thể là đồng khả năng. Tính xác suất để cây con có kiểu hình là hạt màu xanh và nhăn.

DT

4

## Sử dụng biến cố đối

Khi đề bài yêu cầu tính xác suất của biến cố  $A$ , nhưng việc đếm số kết quả thuận lợi của biến cố  $A$  khó khăn (do phải phân chia nhiều trường hợp). Lúc này, ta có thể tìm biến cố đối của  $A$  là  $\bar{A}$ .

- ① Đếm số kết quả thuận lợi của  $\bar{A}$
- ② Tính  $P(\bar{A})$
- ③ Suy ra  $P(A) = 1 - P(\bar{A})$ .

≡ Ví dụ 24. Một hộp chứa 10 tấm thẻ có kích thước như nhau và được đánh số từ 2021 đến 2030, mỗi thẻ chỉ ghi đúng một số. Chọn ra ngẫu nhiên đồng thời 3 thẻ từ hộp.

- a) Tìm biến cố đối của biến cố  $A$ : " Tích các số ghi trên ba thẻ chia hết cho 5".

b) Tính xác suất của biến cố  $A$ .

**Ví dụ 25.** Gieo ba con xúc xắc cân đối. Tính xác suất để có ít nhất một con xuất hiện mặt 6 chấm.

**Ví dụ 26.** Một hộp đựng 5 viên bi xanh, 4 viên bi đỏ, 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên cùng một lúc ra 8 viên bi. Tính xác suất của biến cố  $A$ : “8 viên bi được chọn có đủ 3 màu”.

**Ví dụ 27.** Một lớp có 41 học sinh trong đó có 15 bạn nam và 26 bạn nữ. Cô giáo chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên ra bốn bạn đi trực ban.

a) Tính xác suất để cả bốn bạn đó đều là nữ.      b) Tính xác suất để có ít nhất một bạn nam.

**Ví dụ 28.** Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 10 thẻ đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hòm một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ lấy ra

a) có ít nhất một thẻ đánh số 1.      b) tổng hai số ghi trên hai thẻ khác 19.

**Ví dụ 29.** Xếp ngẫu nhiên 6 người  $A, B, C, D, E, F$  vào một cái bàn dài có 6 chỗ ngồi. Tính xác suất để

a) hai người  $A$  và  $B$  ngồi cạnh nhau.      b) hai người  $A$  và  $B$  không ngồi cạnh nhau.

## C BÀI TẬP TỰ LUYỆN

- 1 Trong hộp có 20 nắp khoen bia Tiger, trong đó có 2 nắp ghi “Chúc mừng bạn đã trúng thưởng xe FORD”. Bạn được chọn lên rút thăm lần lượt hai nắp khoen, tính xác suất để cả hai nắp đều trúng thưởng.
- 2 Trên giá sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lý và 2 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên ba quyển sách. Tính xác suất sao cho ba quyển lấy ra có ít nhất một quyển sách Toán.
- 3 Trong một buổi liên hoan có 15 cặp nam nữ, trong đó có 4 cặp vợ chồng. Chọn ngẫu nhiên 5 người để biểu diễn một tiết mục văn nghệ. Tính xác suất để 5 người được chọn không có cặp vợ chồng nào.
- 4 Một giáo viên muốn chọn hai câu hỏi ra đề kiểm tra 15 phút môn Toán lớp 11. Trong ngân hàng đề có 10 câu lượng giác, 6 câu toán tổ hợp, 8 câu hỏi toán xác suất.
  - a) Tính xác suất để hai câu hỏi rơi vào cùng một chủ đề.
  - b) Tính xác suất để hai câu hỏi rơi vào hai chủ đề khác nhau.
- 5 Một ngân hàng đề thi gồm 30 câu hỏi. Mỗi đề thi gồm 5 câu được lấy ngẫu nhiên từ ngân hàng đề thi. Thí sinh  $A$  đã học thuộc 10 câu trong ngân hàng đề thi. Tìm xác suất để thí sinh  $A$  rút ngẫu nhiên được một đề thi có ít nhất 3 câu đã thuộc.
- 6 Một bài thi trắc nghiệm khách quan gồm 5 câu hỏi, mỗi câu có 4 phương án trả lời. Tính xác suất để một học sinh làm bài thi được ít nhất 3 câu hỏi.

## D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

**PHẦN I.** Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

**Câu 1.** Gieo một đồng tiền cân đối và đồng chất bốn lần. Xác suất để cả bốn lần xuất hiện mặt sấp là

- A.  $\frac{4}{16}$ .                      B.  $\frac{2}{16}$ .                      C.  $\frac{1}{16}$ .                      D.  $\frac{6}{16}$ .

**Câu 2.** Gieo ba con xúc xắc. Xác suất để số chấm xuất hiện trên ba con xúc xắc như nhau là

- A.  $\frac{12}{216}$ .                      B.  $\frac{1}{216}$ .                      C.  $\frac{6}{216}$ .                      D.  $\frac{3}{216}$ .

**Câu 3.** Rút một lá bài từ bộ bài 52 lá. Xác suất để được lá bích là

- A.  $\frac{1}{13}$ .                      B.  $\frac{1}{4}$ .                      C.  $\frac{12}{13}$ .                      D.  $\frac{3}{4}$ .

**Câu 4.** Gieo hai con xúc xắc. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 11.

- A.  $\frac{1}{18}$ .                      B.  $\frac{1}{6}$ .                      C.  $\frac{1}{8}$ .                      D.  $\frac{2}{25}$ .

**Câu 5.** Gieo 1 đồng tiền đồng chất 2 lần. Xác suất để cả 2 lần đều thu được mặt sấp?

- A.  $\frac{1}{2}$ .                      B.  $\frac{1}{4}$ .                      C.  $\frac{1}{8}$ .                      D.  $\frac{1}{3}$ .

**Câu 6.** Gieo ngẫu nhiên 2 con súc sắc cân đối đồng chất. Xác suất của biến cố: “Hiệu số chấm xuất hiện trên 2 con súc sắc bằng 1” là

- A.  $\frac{2}{9}$ .                      B.  $\frac{1}{9}$ .                      C.  $\frac{5}{18}$ .                      D.  $\frac{5}{6}$ .

**Câu 7.** Lớp 11B có 20 nam và 25 nữ. Chọn ngẫu nhiên hai học sinh để làm trực nhật. Xác suất để trong đó có ít nhất một nam là

- A.  $\frac{20}{33}$ .                      B.  $\frac{23}{33}$ .                      C.  $\frac{25}{33}$ .                      D.  $\frac{1}{20}$ .

**Câu 8.** Một hội nghị có 15 nam và 10 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 người vào ban tổ chức. Xác suất để trong ban tổ chức có nhiều hơn hai người nam là

- A.  $\frac{1}{4}$ .                      B.  $\frac{1}{2}$ .                      C.  $\frac{3}{4}$ .                      D.  $\frac{91}{460}$ .

**Câu 9.** Một bình chứa 6 viên bi màu, trong đó có 2 bi xanh, 2 bi đỏ, 2 bi trắng. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi. Xác suất để lấy được 2 viên bi khác màu là

- A.  $\frac{1}{15}$ .                      B.  $\frac{2}{15}$ .                      C.  $\frac{4}{5}$ .                      D.  $\frac{4}{15}$ .

**Câu 10.** Một thùng có 7 sản phẩm, trong đó có 4 sản phẩm loại I và 3 sản phẩm loại II. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Xác suất để lấy được 2 sản phẩm cùng loại là

- A.  $\frac{1}{7}$ .                      B.  $\frac{2}{7}$ .                      C.  $\frac{3}{7}$ .                      D.  $\frac{4}{7}$ .

**Câu 11.** Một thùng có 7 sản phẩm, trong đó có 4 sản phẩm loại I và 3 sản phẩm loại II. Lấy ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Xác suất để lấy được 2 sản phẩm khác loại là

- A.  $\frac{1}{7}$ .                      B.  $\frac{2}{7}$ .                      C.  $\frac{3}{7}$ .                      D.  $\frac{4}{7}$ .

**Câu 12.** Một hộp chứa 5 bi xanh, 10 bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 bi. Xác suất để được đúng một bi xanh là

- A.  $\frac{45}{91}$ .                      B.  $\frac{2}{3}$ .                      C.  $\frac{3}{4}$ .                      D.  $\frac{200}{273}$ .

**Câu 13.** Một hộp chứa 2 loại bi xanh và đỏ. Lấy ra ngẫu nhiên từ hộp 1 viên bi. Biết xác suất lấy được bi đỏ là 0,3. Xác suất lấy được bi xanh là

A. 0,3.

B. 0,5.

C. 0,7.

D. 0,09.

**Câu 14.** Gọi  $X$  là tập hợp các số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau được tạo thành từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Chọn ngẫu nhiên một số từ tập hợp  $X$ . Tính xác suất để số được chọn chỉ chứa 3 chữ số lẻ.

A.  $\frac{10}{21}$ .

B.  $\frac{25}{49}$ .

C.  $\frac{1}{3}$ .

D.  $\frac{13}{25}$ .

**Câu 15.** Gọi  $A$  là tập các số có 6 chữ số khác nhau được tạo ra từ các số  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ . Từ  $A$  chọn ngẫu nhiên một số, xác suất số đó có số 3 và 4 đứng cạnh nhau là

A.  $\frac{8}{25}$ .

B.  $\frac{4}{15}$ .

C.  $\frac{4}{25}$ .

D.  $\frac{2}{15}$ .

**Câu 16.** Gọi tập  $A$  là tập các số có 6 chữ số khác nhau được lập từ các số  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Từ  $A$  chọn ra một số, xác suất số đó bé hơn 432000 là

A.  $\frac{17}{30}$ .

B.  $\frac{17}{40}$ .

C.  $\frac{23}{40}$ .

D.  $\frac{13}{30}$ .

**Câu 17.** Cho tập hợp  $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ . Gọi  $S$  là tập hợp các số có 3 chữ số khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập  $A$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ , tính xác suất để số được chọn có chữ số cuối gấp đôi chữ số đầu.

A.  $\frac{1}{5}$ .

B.  $\frac{23}{25}$ .

C.  $\frac{2}{25}$ .

D.  $\frac{4}{5}$ .

**Câu 18.** Cho tập hợp  $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ . Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập  $A$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ , tính xác suất để số được chọn mà trong mỗi số luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.

A.  $\frac{1}{5}$ .

B.  $\frac{3}{35}$ .

C.  $\frac{17}{35}$ .

D.  $\frac{18}{35}$ .

**Câu 19.** Một hộp đựng 10 chiếc thẻ được đánh số từ 0 đến 9. Lấy ngẫu nhiên ra 3 chiếc thẻ, tính xác suất để 3 chữ số trên 3 chiếc thẻ được lấy ra có thể ghép thành một số chia hết cho 5.

A.  $\frac{8}{15}$ .

B.  $\frac{7}{15}$ .

C.  $\frac{2}{5}$ .

D.  $\frac{3}{5}$ .

**Câu 20.** Có 20 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 20. Chọn ngẫu nhiên ra 8 tấm thẻ, tính xác suất để có 3 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

A.  $\frac{560}{4199}$ .

B.  $\frac{4}{15}$ .

C.  $\frac{11}{15}$ .

D.  $\frac{3639}{4199}$ .

**Câu 21.** Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có hai chữ số. Chọn ngẫu nhiên đồng thời hai số từ tập hợp  $S$ . Tính xác suất để hai số được chọn có chữ số hàng đơn vị giống nhau.

A.  $\frac{8}{89}$ .

B.  $\frac{81}{89}$ .

C.  $\frac{36}{89}$ .

D.  $\frac{53}{89}$ .

**Câu 22.** Trong một chiếc hộp có 7 viên bi trắng, 8 viên bi đỏ và 10 viên bi vàng. Lấy ngẫu nhiên ra 6 viên bi. Tính xác suất của biến cố “6 viên bi lấy ra có đủ ba màu”.

A.  $P(C) = \frac{22}{253}$ .

B.  $P(C) = \frac{20}{253}$ .

C.  $P(C) = \frac{2}{253}$ .

D.  $P(C) = \frac{202}{253}$ .

**Câu 23.** Gieo một con xúc sắc đồng chất cân đối ba lần liên tiếp. Tìm xác suất của các biến cố: “Có ít nhất một mặt chẵn xuất hiện”.

A.  $P(B) = \frac{7}{8}$ .

B.  $P(B) = \frac{3}{8}$ .

C.  $P(B) = \frac{5}{8}$ .

D.  $P(B) = \frac{1}{8}$ .

**Câu 24.** Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên 5 viên bi trong hộp, tính xác suất để 5 viên bi được chọn có đủ màu và số bi đỏ bằng số bi vàng.

A.  $\frac{313}{408}$ .      B.  $\frac{95}{408}$ .      C.  $\frac{5}{102}$ .      D.  $\frac{25}{136}$ .

**Câu 25.** Một hộp có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi vàng và 4 viên bi xanh. Chọn ngẫu nhiên từ hộp 4 viên bi, tính xác suất để 4 viên bi được chọn có số bi đỏ lớn hơn số bi vàng và nhất thiết phải có mặt bi xanh.

A.  $\frac{1}{12}$ .      B.  $\frac{1}{3}$ .      C.  $\frac{16}{33}$ .      D.  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 26.** Một chiếc hộp đựng 7 viên bi màu xanh, 6 viên bi màu đen, 5 viên bi màu đỏ, 4 viên bi màu trắng. Chọn ngẫu nhiên ra 4 viên bi, tính xác suất để lấy được ít nhất 2 viên bi cùng màu.

A.  $\frac{2808}{7315}$ .      B.  $\frac{185}{209}$ .      C.  $\frac{24}{209}$ .      D.  $\frac{4507}{7315}$ .

**Câu 27.** Một hộp chứa 12 viên bi kích thước như nhau, trong đó có 5 viên bi màu xanh được đánh số từ 1 đến 5; có 4 viên bi màu đỏ được đánh số từ 1 đến 4 và 3 viên bi màu vàng được đánh số từ 1 đến 3. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi từ hộp, tính xác suất để 2 viên bi được lấy vừa khác màu vừa khác số.

A.  $\frac{8}{33}$ .      B.  $\frac{14}{33}$ .      C.  $\frac{29}{66}$ .      D.  $\frac{37}{66}$ .

**Câu 28.** Một người có 10 đôi giày khác nhau và trong lúc đi du lịch vội vã lấy ngẫu nhiên 4 chiếc. Tính xác suất để trong 4 chiếc giày lấy ra có ít nhất một đôi.

A.  $\frac{3}{7}$ .      B.  $\frac{13}{64}$ .      C.  $\frac{99}{323}$ .      D.  $\frac{224}{323}$ .

**Câu 29.** Có 13 học sinh của một trường THPT đạt danh hiệu học sinh xuất sắc trong đó khối 12 có 8 học sinh nam và 3 học sinh nữ, khối 11 có 2 học sinh nam. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh bất kỳ để trao thưởng, tính xác suất để 3 học sinh được chọn có cả nam và nữ đồng thời có cả khối 11 và khối 12.

A.  $\frac{57}{286}$ .      B.  $\frac{24}{143}$ .      C.  $\frac{27}{143}$ .      D.  $\frac{229}{286}$ .

**Câu 30.** Một đội gồm 5 nam và 8 nữ. Lập một nhóm gồm 4 người hát tốp ca, tính xác suất để trong 4 người được chọn có ít nhất 3 nữ.

A.  $\frac{70}{143}$ .      B.  $\frac{73}{143}$ .      C.  $\frac{56}{143}$ .      D.  $\frac{87}{143}$ .

**Câu 31.** Giải bóng chuyền gồm 9 đội bóng tham dự, trong đó có 6 đội nước ngoài và 3 đội của Việt Nam. Ban tổ chức cho bốc thăm ngẫu nhiên để chia thành 3 bảng A, B, C và mỗi bảng có 3 đội. Tính xác suất để 3 đội bóng của Việt Nam ở 3 bảng khác nhau.

A.  $\frac{3}{56}$ .      B.  $\frac{19}{28}$ .      C.  $\frac{9}{28}$ .      D.  $\frac{53}{56}$ .

**Câu 32.** Bạn Tân ở trong một nhóm có 22 bạn học sinh. Chọn ngẫu nhiên 2 em trong lớp để đi xem văn nghệ. Xác suất để Tân được chọn là

A. 19,6%.      B. 9,1%.      C. 9,8%.      D. 9,1%.

**Câu 33.** Cho tập hợp  $A = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ . Gọi  $S$  là tập hợp các số tự nhiên có 4 chữ số đôi một khác nhau được lập thành từ các chữ số của tập  $A$ . Chọn ngẫu nhiên một số từ  $S$ , tính xác suất để số được chọn mà trong mỗi số đó luôn luôn có mặt hai chữ số chẵn và hai chữ số lẻ.

A.  $\frac{1}{5}$ .      B.  $\frac{3}{35}$ .      C.  $\frac{17}{35}$ .      D.  $\frac{18}{35}$ .

**Câu 34.** Một lớp học có 30 học sinh gồm có cả nam và nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 học sinh để tham gia hoạt động của Đoàn trường. Xác suất chọn được 2 nam và 1 nữ là  $\frac{12}{29}$ . Tính số học sinh nữ của lớp.

A. 16.      B. 14.      C. 13.      D. 17.

**Câu 35.** Một chi đoàn có 3 đoàn viên nữ và một số đoàn viên nam. Cần lập một đội thanh niên tình nguyện gồm 4 người. Biết xác suất để trong 4 người được chọn có 3 nữ bằng  $\frac{2}{5}$  lần xác suất 4 người được chọn toàn nam. Hỏi chi đoàn đó có bao nhiêu đoàn viên?

A. 9.

B. 10.

C. 11.

D. 12.

**PHẦN II.** Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

**Câu 36.** Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất 2 lần. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau

- a) Xác suất của biến cố "Tổng số chấm của hai lần gieo chia hết cho 5" bằng 0 .
- b) Xác suất của biến cố "Tổng số chấm của hai lần gieo lớn 6" bằng  $\frac{1}{4}$  .
- c) Xác suất của biến cố "lần thứ nhất xuất hiện mặt 2 chấm" bằng  $\frac{1}{6}$  .
- d) Số phần tử của không gian mẫu là 36 .

**Câu 37.** Một thư viện có 10 cuốn truyện cổ tích, 10 cuốn truyện tuyển thuyết và 8 cuốn truyện khoa học viễn tưởng. Chọn ngẫu nhiên 4 cuốn truyện để đọc. Xét tính đúng-sai của các khẳng định sau

- a) Xác suất của biến cố "Có đúng hai loại cuốn truyện được chọn" là  $\frac{1997}{4095}$  .
- b) Xác suất của biến cố "Cả 3 loại cuốn truyện đều được chọn" là  $\frac{32}{819}$  .
- c) Xác suất của biến cố "Có đúng 3 cuốn truyện cổ tích được chọn" là  $\frac{48}{455}$  .
- d) Số phần tử của không gian mẫu là 20475 .

**Câu 38.** Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất một lần. Gọi A là biến cố “ số chấm xuất hiện không lớn hơn 4”. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Không gian mẫu  $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .
- b)  $\bar{A}$  là biến cố: “ số chấm xuất hiện lớn hơn hoặc bằng 4”.
- c) Ta có  $A = \{1; 2; 3; 4\}$ .
- d) Xác suất biến cố A là  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 39.** Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất một lần. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Xác suất để số chấm xuất hiện là một số chia hết cho 3 là  $\frac{1}{6}$ .
- b) Xác suất để số chấm xuất hiện là một số chẵn là  $\frac{1}{2}$ .
- c) Xác suất để số chấm xuất hiện là một số chia hết cho 2 và 3 là  $\frac{1}{6}$ .
- d) Xác suất để số chấm xuất hiện là một số nguyên tố là  $\frac{1}{2}$ .

**Câu 40.** Bộ bài Tú lơ khơ có 52 quân bài. Rút ngẫu nhiên 4 quân bài, khi đó các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = C_{52}^4$ .
- b) Xác suất của biến cố A: “Rút ra được tứ quý K” là  $\mathcal{P}(A) = \frac{1}{270725}$ .
- c) Xác suất của biến cố B: “4 quân bài rút ra có ít nhất một con Át” là  $\mathcal{P}(B) = 0,15$ .
- d) Xác suất của biến cố C: “4 quân bài rút ra có ít nhất hai quân bích” là  $P(C) = \frac{69667}{C_{52}^4}$ .

**Câu 41.** Trên kệ sách có 4 quyển sách Toán, 3 quyển sách Lý và 2 quyển sách Hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách để đọc. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Số phần tử của không gian mẫu là  $n(\Omega) = 84$ .
- b) Xác suất của biến cố A: “3 quyển lấy ra thuộc 3 môn khác nhau” là  $\mathcal{P}(A) = \frac{2}{7}$ .

c) Xác suất của biến cố  $B$ : “3 quyển lấy ra đều là Toán” là  $\mathcal{P}(B) = \frac{1}{12}$ .

d) Xác suất của biến cố  $C$ : “3 quyển lấy ra có ít nhất 1 quyển Toán” là  $\mathcal{P}(C) = \frac{37}{42}$ .

### PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

**Câu 42.** Từ một bộ bài có 52 quân bài, người ta rút ra ngẫu nhiên 2 quân bài. Tính xác suất để rút ra được 2 quân bài khác màu.

KQ:

**Câu 43.** Một lô hàng có 14 sản phẩm, trong đó có đúng 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 8 sản phẩm từ lô hàng đó. Tính xác suất biến cố  $A$  “Trong 8 sản phẩm lấy ra có không quá 1 phế phẩm”.

KQ:

**Câu 44.** Cho đa giác đều gồm  $2n$  đỉnh. Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh trong số  $2n$  đỉnh của đa giác, xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là  $0,2$ . Tìm  $n$ , biết  $n$  là số nguyên dương và  $n \geq 2$ .

KQ:

**Câu 45.** Tổ 1 lớp 10A có 4 học sinh nam và 6 học sinh nữ, lấy ngẫu nhiên 3 học sinh làm trực nhật ngày thứ hai. Số phân tử của biến cố  $E$ : “lấy được 3 học sinh làm trực nhật có cả nam và nữ” là

KQ:

**Câu 46.** Giờ học giáo dục quốc phòng của lớp 10A, có một tiểu đội gồm 5 học sinh nam và 3 học sinh nữ xếp thành một hàng ngang. Xác suất để không có hai học sinh nữ nào cạnh nhau là (làm tròn đến hàng phần trăm?)

KQ:

**Câu 47.** Trong trò chơi “Chiếc nón kỳ diệu” chiếc kim của bánh xe có thể dừng lại ở một trong 6 vị trí với khả năng như nhau. Xác suất để trong ba lần quay, chiếc kim của bánh xe đó lần lượt dừng lại ở ba vị trí khác nhau là (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ: