



KẾT NỐI TRI THỨC
VỚI CUỘC SỐNG

TH.S NGUYỄN THÀNH NHÂN

TOÁN



TẬP HAI

1

Tóm tắt lý thuyết

2

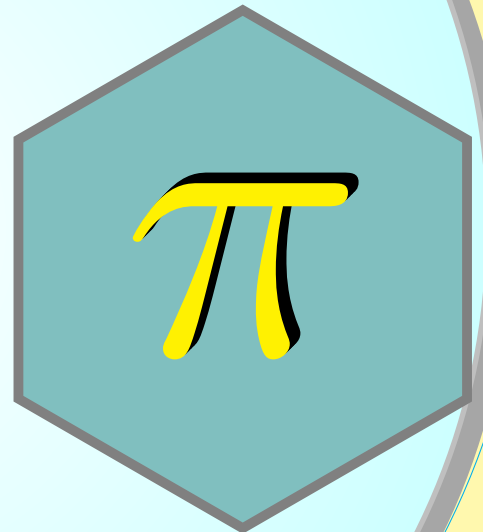
Ví dụ minh họa

3

Bài tập tự luận

4

Trắc nghiệm cấu trúc mới



TÀI LIỆU LƯU HÀNH NỘI BỘ

Mục lục

Chương 6. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT	1
Bài 1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC	1
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	1
B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	2
1. Tính giá trị biểu thức.....	2
2. Rút gọn biểu thức liên quan đến lũy thừa.....	3
3. So sánh hai lũy thừa.....	3
4. Vận dụng, thực tiễn.....	3
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	4
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	5
Bài 2. LÔGARIT	9
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	9
B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	10
1. Tính toán biểu thức chứa lôgarit.....	10
2. Phân tích một lôgarit theo hai lôgarit cho trước.....	10
3. Vận dụng, thực tiễn.....	10
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	11
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	12
Bài 3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT	16
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	16
B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	17
1. Tìm tập xác định.....	17
2. Đồ thị hàm số.....	17
3. Vận dụng. Thực tiễn.....	17
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	18
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	19
Bài 4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT	25
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ.....	25

B	CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP.....	27
	1. Giải các phương trình mũ và logarit đơn giản.....	27
	2. Giải các bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản.....	27
	3. Vận dụng, thực tiễn.....	28
C	BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	28
D	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	30
Chương 7.	QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN	34
Bài 1.	HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC	34
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	34
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	35
	1. Xác định góc giữa hai đường thẳng.....	35
	2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.....	36
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	37
Bài 2.	ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẲNG	41
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	41
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	43
	1. Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng.....	43
	2. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc.....	44
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	46
Bài 3.	PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG	49
A	KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	49
B	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	50
	1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.....	50
C	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	51
Bài 4.	HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC	55
A	PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	55
	1. Xác định góc giữa hai mặt phẳng.....	55
	2. Tính số đo của góc nhị diện.....	56
	3. Chứng minh hai mặt phẳng vuông góc.....	56
B	BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	58

Bài 5. KHOẢNG CÁCH	62
A PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	62
1. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng	62
2. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng	62
3. Khoảng cách giữa đường và mặt phẳng song song. Khoảng cách giữa hai mặt song song	64
4. Đoạn vuông góc chung. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau	64
B BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	66
Bài 6. THỂ TÍCH	71
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ	71
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	72
1. Tính thể tích khối lăng trụ	72
2. Tính thể tích khối chóp	73
3. Tính thể tích khối chóp cụt đều	74
C BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	76
Chương 8. CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT	80
Bài 1. BIẾN CỐ HỢP, BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC CỘNG VÀ CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT	80
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	80
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	81
1. Công thức cộng xác suất của hai biến cố xung khắc	81
2. Công thức cộng xác suất của hai biến cố bất kì	82
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN	82
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	84
Bài 2. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP	88
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ	88
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN	88
1. Biến cố độc lập	88
2. Công thức nhân xác suất của hai biến cố độc lập	88
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN	89
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM	90

Chương 9. ĐẠO HÀM	93
Bài 1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM	93
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	93
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	94
1. Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm.....	94
2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cho trước.....	95
3. Ý nghĩa vật lý của đạo hàm.....	95
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	95
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	96
Bài 2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM	99
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	99
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	100
1. Tính đạo hàm của hàm đa thức.....	100
2. Tính đạo hàm của hàm chứa căn thức.....	100
3. Tính đạo hàm của hàm lượng giác.....	101
4. Tính đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit.....	101
5. Tính đạo hàm dạng tích hoặc thương.....	101
6. Viết phương trình tiếp tuyến.....	102
7. Các bài toán vận dụng, thực tiễn.....	103
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	103
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	104
Bài 3. ĐẠO HÀM CẤP HAI	108
A KIẾN THỨC CẦN NHỚ.....	108
B PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN.....	108
1. Tính đạo hàm cấp hai.....	108
2. Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp 2.....	109
C BÀI TẬP TỰ LUYỆN.....	109
D BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM.....	109

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LÔGARIT

§1. LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ THỰC



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Lũy thừa với số mũ nguyên

- ✓ Lũy thừa với số mũ nguyên dương: Cho $a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ thừa số}}$.
- ✓ Lũy thừa với số mũ nguyên âm: Cho $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$, khi đó: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.
- ✓ Với $a \neq 0$, ta quy ước $a^0 = 1$; 0^0 và $0^{-n} (n \in \mathbb{N}^*)$ không có nghĩa.

2 Căn bậc n

- ✓ **Định nghĩa:** Cho số thực a và số nguyên dương $n (n \geq 2)$. Số b được gọi là *căn bậc n* của số a nếu $b^n = a$.

CHÚ Ý

- ① Với n lẻ và $a \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của a , ký hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- ② Với n chẵn, ta xét ba trường hợp sau:
 - $a < 0$: Không tồn tại căn bậc n của a ;
 - $a = 0$: Có một căn bậc n của a là số 0;
 - $a > 0$: Có hai căn bậc n của a là hai số đối nhau, kí hiệu giá trị dương là $\sqrt[n]{a}$, còn giá trị âm là $-\sqrt[n]{a}$.

✓ Tính chất:

$$\textcircled{1} \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{nếu } n \text{ chẵn;} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab};$$

$$\textcircled{4} (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m};$$

$$\textcircled{3} \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}};$$

$$\textcircled{5} \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}.$$

(Ở mỗi công thức trên, ta giả sử các biểu thức xuất hiện trong đó có nghĩa).

3 Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho $a > 0$ và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$; trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Khi đó: $a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

4 Công thức biến đổi lũy thừa cần nhớ

Cho cơ số $a, b > 0$ và hai số thực m, n . Khi đó, ta có:

① $a^0 = 1; a^1 = a.$	② $a^{-1} = \frac{1}{a}; a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$	③ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}; \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}.$
④ $a^{m+n} = a^m \cdot a^n.$	⑤ $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}.$	⑥ $a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m.$
⑦ $(ab)^n = a^n \cdot b^n.$	⑧ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$	⑨ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}.$

5 So sánh hai lũy thừa cùng cơ số

Cho cơ số $a > 0$ và hai số thực x, y . Khi đó, ta có:

- ① Nếu $a > 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$. ② Nếu $0 < a < 1$ thì $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$.

B CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT 1 Tính giá trị biểu thức

≡ Bài 1. Tính

a) $25^{\frac{3}{2}}$.	b) $32^{-\frac{2}{5}}$.	c) $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$.
d) $\sqrt[3]{-27}$.	e) $\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{27}$.	f) $\frac{\sqrt[3]{128}}{\sqrt[3]{2}}$.

≡ Bài 2. Tính

a) $A = (\sqrt{2})^{86} - 2^{43}$.	b) $B = \left(\frac{1}{16}\right)^{-0,75} + \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$.
c) $C = \left(\frac{3}{7}\right)^{-1} - \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{-1}$.	d) $D = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.
e) $E = \left(\frac{1}{625}\right)^{-\frac{1}{4}} + 16^{\frac{3}{4}} - 2^{-2} \cdot 64^{\frac{1}{3}}$.	f) $F = 64^{\frac{1}{2}} \cdot 64^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{64} + 4^{2+2\sqrt[3]{5}} : 16^{\sqrt[3]{5}}$.

≡ Bài 3. Biết rằng $3^x = 2$. Tính giá trị của biểu thức:

a) $A = 3^{2x-1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} + 9^{x+1}$.

b) $B = 81^x + \sqrt[4]{3^x} \cdot \sqrt[4]{27^x}$

DT 2 Rút gọn biểu thức liên quan đến lũy thừa**≡ Bài 4.** Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng một lũy thừa ($a > 0$)

a) $\sqrt[4]{2^{-3}}$;

b) $\frac{1}{\sqrt[5]{2^3}}$;

c) $(\sqrt[5]{3})^4$;

d) $\sqrt{a^3\sqrt{a}}$;

e) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a^3} : (\sqrt[6]{a})^5$;

f) $a^{\frac{1}{3}} : a^{-\frac{3}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}}$.

≡ Bài 5. Viết các biểu thức sau về dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ

a) $A = a^{\frac{1}{6}} \sqrt[3]{a}$, với $a > 0$.

b) $B = a^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{a}$, với $a > 0$.

c) $C = \frac{\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}}{a^3}$, với $a > 0$.

d) $D = \frac{a^{\sqrt{7}+1} a^{2-\sqrt{7}}}{(a^{\sqrt{2}-2})^{\sqrt{2}+2}}$ với $a > 0$.

DT 3 So sánh hai lũy thừa**≡ Bài 6.** Cho $a > 0$ và $a \neq 1$. Hãy so sánh cơ số a với 1, biết rằng

a) $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{5}{6}}$.

b) $a^{\frac{11}{6}} < a^{\frac{15}{8}}$.

c) $\sqrt[15]{a^7} > \sqrt[5]{a^2}$.

DT 4 Vận dụng, thực tiễn**≡ Bài 7.** Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = (7 + 4\sqrt{3})^{2020} (4\sqrt{3} - 7)^{2019}$.

b) $B = \frac{(4 + 2\sqrt{3})^{2018} \cdot (1 - \sqrt{3})^{2017}}{(1 + \sqrt{3})^{2019}}$.

≡ Bài 8. Cho $4^x + 4^{-x} = 14$. Tính giá trị của biểu thức $M = \frac{2 + 2^x + 2^{-x}}{7 - 2^x - 2^{-x}}$.**≡ Bài 9.** Rút gọn các biểu thức sau (với $a, b > 0$ và $a, b \neq 1$):

a) $A = \frac{a^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{b} + b^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a} + \sqrt[6]{b}}$.

b) $B = \frac{a - 3a^{\frac{1}{3}} + 2}{\sqrt[3]{a} - 1} + \frac{\sqrt{a} - a^{\frac{5}{6}} + \sqrt[6]{a}}{\sqrt[6]{a}}$.

≡ Bài 10. Cho $x > 0, y > 0$ và số thực a thỏa $a = \sqrt{x^2 + \sqrt[3]{x^4 y^2}} + \sqrt{y^2 + \sqrt[3]{x^2 y^4}}$. Chứng minh rằng $a^{\frac{2}{3}} = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}$.**≡ Bài 11.** Cường độ ánh sáng tại độ sâu h (m) dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

- a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?
- b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 m gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 6 m?

Bài 12. Để dự báo dân số của một quốc gia, người ta sử dụng công thức $S = A(2,71)^{nr}$; trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc tính, S là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Năm 2017, dân số Việt Nam là 93 671 600 người (Tổng cục Thống kê, Niên giám thống kê 2017, Nhà xuất bản Thống kê, Tr.79). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là 0,81%, dự báo dân số Việt Nam năm 2035 là bao nhiêu người (kết quả làm tròn đến chữ số hàng trăm)?

Bài 13. Một chất phóng xạ có chu kỳ bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\sqrt[4]{125} \cdot \sqrt[4]{5}$; b) $\frac{\sqrt[4]{243}}{\sqrt[4]{3}}$; c) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{24}}$;
 d) $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$; e) $\sqrt[4]{3\sqrt[3]{3}}$; f) $(-\sqrt[6]{4})^3$.

2 Tính giá trị của biểu thức

- a) $A = 4^4 \cdot 8^{11} \cdot 2^{2017}$. b) $B = 3^{1-\sqrt{2}} \cdot 3^{2+\sqrt{2}} \cdot 9^{\frac{1}{2}}$
 c) $C = 2018^{\sin^2 \alpha} \cdot 2018^{\cos^2 \alpha}$ d) $D = \frac{6^{2+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

3 Viết các biểu thức sau về dạng lũy thừa của số mũ hữu tỉ

- a) $A = a^{\frac{8}{3}} : \sqrt[3]{a^4}$ b) $B = a^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[4]{a}$
 c) $C = \frac{a^2 a^{\frac{5}{2}} \sqrt[3]{a^4}}{\sqrt[6]{a^5}} \quad (a > 0)$ d) $D = \frac{7^{5+2020\sqrt{5}} \cdot 7^{5-2020\sqrt{5}}}{(7^{\sqrt{3}-2})^{\sqrt{3}+2}}$.

4 Cho a là số thực dương. Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $(a^{\sqrt{6}})^{\sqrt{24}}$. b) $a^{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{a}\right)^{\sqrt{2}-1}$.
 c) $a^{-\sqrt{3}} : a^{(\sqrt{3}-1)^2}$. d) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a} \cdot \sqrt[12]{a^5}$.

5 Biết rằng $5^{2x} = 3$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{5^{3x} + 5^{-3x}}{5^x + 5^{-x}}$.

6 Cho $9^x + 9^{-x} = 23$. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{5 + 3^x + 3^{-x}}{1 - 3^x - 3^{-x}}$.



7 Với $0 < a$ và $a \neq 1$, hãy tìm a để

a) $(a-1)^{\frac{-2}{3}} < (a-1)^{\frac{-1}{3}}$

b) $(a-1)^{-2} > (a-1)^{\sqrt{2}}$

8 Xác định các giá trị của số thực a thỏa mãn

a) $a^{\frac{1}{2}} > a^{\sqrt{3}}$;

b) $a^{-\frac{3}{2}} < a^{\frac{2}{3}}$;

c) $(\sqrt{2})^a > (\sqrt{3})^a$.

9 Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (r được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^N.$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

10 Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương của chu kì quỹ đạo p (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tinh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo là một đường elip với Mặt Trời nằm ở một tiêu điểm) bằng lập phương của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU).

a) Tính p theo d .

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm).

11 Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất).

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008).

a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hỏa là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là bao nhiêu?

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày).

12 Tại một vùng biển, giả sử cường độ ánh sáng I thay đổi theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot 10^{-0,3d}$, trong đó d là độ sâu (tính bằng mét) so với mặt hồ, I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ.

a) Tại độ sâu 1 m, cường độ ánh sáng gấp bao nhiêu lần I_0 ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 2 m gấp bao nhiêu lần so với tại độ sâu 10 m? Làm tròn kết quả đến hai chữ số thập phân.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho a là số thực dương. Đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a^{x+y} = a^x + a^y$.

B. $(a^x)^y = a^{xy}$.

C. $(a^x)^y = a^x \cdot a^y$.

D. $a^{x-y} = a^x - a^y$.

Câu 2. Cho a, b là các số thực dương khác 1 và x, y là các số thực. Đẳng thức nào sau đây đúng?

- A. $a^x a^y = a^{x+y}$. B. $\frac{a^x}{a^y} = a^{\frac{x}{y}}$. C. $a^x b^y = (ab)^{x+y}$. D. $(a^x)^y = a^{x+y}$.

Câu 3. Tìm số nhỏ hơn 1 trong các số sau đây

- A. $(0, 7)^{2017}$. B. $(0, 7)^{-2017}$. C. $(1, 7)^{2017}$. D. $(2, 7)^{2017}$.

Câu 4. Cho $(0, 25\pi)^\alpha > (0, 25\pi)^\beta$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. $\alpha \cdot \beta = 1$. B. $\alpha > \beta$. C. $\alpha + \beta = 0$. D. $\alpha < \beta$.

Câu 5. Tính giá trị biểu thức $A = \frac{6^{3+\sqrt{5}}}{2^{2+\sqrt{5}} \cdot 3^{1+\sqrt{5}}}$.

- A. 1. B. $6^{-\sqrt{5}}$. C. 18. D. 9.

Câu 6. Giả sử a là số thực dương. Biểu thức $\sqrt{a^3 \sqrt{a}}$ được viết dưới dạng a^α . Khi đó giá trị α bằng bao nhiêu?

- A. $\alpha = \frac{2}{3}$. B. $\alpha = \frac{11}{6}$. C. $\alpha = \frac{1}{6}$. D. $\alpha = \frac{5}{3}$.

Câu 7. Giả sử x là số thực dương. Biểu thức $P = x^{\sqrt[5]{x}}$ được viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

- A. $x^{\frac{11}{10}}$. B. $x^{\frac{6}{5}}$. C. $x^{\frac{1}{5}}$. D. $x^{\frac{4}{5}}$.

Câu 8. Rút gọn biểu thức $P = x^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[6]{x}$ với $x > 0$.

- A. $P = x^{\frac{1}{8}}$. B. $P = x^2$. C. $P = \sqrt{x}$. D. $P = x^{\frac{2}{3}}$.

Câu 9. Rút gọn biểu thức $Q = b^{\frac{5}{3}} : \sqrt[3]{b}$, với $b > 0$.

- A. $Q = b^2$. B. $Q = b^{\frac{5}{9}}$. C. $Q = b^{-\frac{4}{3}}$. D. $Q = b^{\frac{4}{3}}$.

Câu 10. Rút gọn biểu thức $Q = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt[5]{b}}$, với $b > 0$.

- A. $Q = b^{\frac{1}{15}}$. B. $Q = b^{-\frac{2}{15}}$. C. $Q = b^{\frac{2}{15}}$. D. $Q = b^{\frac{5}{3}}$.

Câu 11. Hãy viết biểu thức $L = \sqrt[3]{7 \cdot \sqrt[3]{7}}$ dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ.

- A. $7^{\frac{1}{2}}$. B. $7^{\frac{1}{18}}$. C. $7^{\frac{4}{9}}$. D. $7^{\frac{1}{27}}$.

Câu 12. Biến đổi $\sqrt[3]{x^5 \cdot \sqrt[4]{x}}$, ($x > 0$) thành dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ ta được

- A. $x^{\frac{20}{3}}$. B. $x^{\frac{23}{12}}$. C. $x^{\frac{21}{12}}$. D. $x^{\frac{12}{5}}$.

Câu 13. Viết biểu thức $A = \sqrt{a \sqrt{a \sqrt{a}}} : a^{\frac{11}{6}}$ ($a > 0$) dưới dạng số mũ lũy thừa hữu tỉ.

- A. $A = a^{-\frac{23}{24}}$. B. $A = a^{\frac{21}{24}}$. C. $A = a^{\frac{23}{24}}$. D. $A = a^{-\frac{1}{12}}$.

Câu 14. Cho $a^{2b} = 5$. Tính $2 \cdot a^{6b}$.

- A. 120. B. 250. C. 15. D. 125.

Câu 15. Cho hai số dương a và b thỏa mãn $a^{\frac{1}{2}} = 3$, $b^{\frac{1}{3}} = 2$. Tính giá trị của tổng $S = a + b$.

- A. 5. B. 13. C. 17. D. 31.

Câu 16. Giá trị của biểu thức $P = (7 + 4\sqrt{3})^{2017} (7 - 4\sqrt{3})^{2016}$ bằng

- A. 1. B. $7 - 4\sqrt{3}$. C. $7 + 4\sqrt{3}$. D. $(7 + 4\sqrt{3})^{2016}$.

Câu 17. Giá trị của biểu thức $P = (9 + 4\sqrt{5})^{2017} (9 - 4\sqrt{5})^{2016}$ bằng

- A. $9 + 4\sqrt{5}$. B. 1. C. $(9 - 4\sqrt{5})^{2016}$. D. $9 - 4\sqrt{5}$.

Câu 18. Giá trị của biểu thức $P = (1 + \sqrt{3})^{2016} (3 - \sqrt{3})^{2016}$ bằng

- A. 12^{1008} . B. 4^{1008} . C. $(1 + \sqrt{3})^{1008}$. D. $(3 - \sqrt{3})^{1008}$.

Câu 19. Nếu $(a - 2)^{-\frac{1}{4}} \leq (a - 2)^{-\frac{1}{3}}$ thì khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $a > 3$. B. $a < 3$. C. $2 < a < 3$. D. $a > 2$.

Câu 20. Cho $(a + 1)^{-\frac{2}{3}} < (a + 1)^{-\frac{1}{3}}$. Kết luận nào sau đây đúng?

- A. $a > 0$. B. $-1 < a < 0$. C. $a \geq -1$. D. $a \geq 0$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho a là số thực dương tùy ý. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\sqrt[12]{a^6} = a^{\frac{1}{2}}$. b) $(a^4)^{11} = a^{44}$. c) $a^{14} \cdot a^5 = a^{70}$. d) $\frac{a^2}{a^6} = a^{\frac{1}{3}}$.

Câu 22. Cho $a = 2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $a^3 = 8$.

b) $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

c) $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{3}{2}} = a^3$.

d) Viết biểu thức $\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{4}}}{16^{0,75}}$ về dạng lũy thừa a^m ta được $m = -\frac{13}{6}$.

Câu 23. Cho a, b là các số thực dương tùy ý. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\sqrt[7]{\sqrt[10]{a}} = \sqrt[70]{a}$. b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a+b}$. c) $\sqrt[7]{a^2} = a^{\frac{2}{7}}$. d) $\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$.

Câu 24. Cho các biểu thức $A = (a^2)^{3+2\sqrt{2}} \cdot a^{1-\sqrt{2}} \cdot a^{-4-\sqrt{2}}$ với $a > 0$ và $B = \sqrt[4]{x \cdot \sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{x^3}}$ với $x > 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

A. Với $a = 2$ thì $A < 57$.

B. Với $x = 2$ thì $B > 2$.

C. Khi $x = a$ thì $A \cdot B = a^{\frac{39+26\sqrt{2}}{24}}$.

D. Khi $x = a$ thì $A : B = a^{\frac{72+48\sqrt{2}}{13}}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 25. Biết rằng $4^x = 25^y = 10$, với $x, y \in \mathbb{R}$. Tính giá trị của biểu thức $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

KQ:

Câu 26. Trong năm 2022, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 800 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 7% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Hỏi năm 2030, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là bao nhiêu ha? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

KQ:

Câu 27. Năm 2020 một hãng xe ô tô niêm yết giá bán loại xe X là 850 000 000 đồng và dự định trong năm tiếp theo, mỗi năm giảm 2% giá bán của năm liền trước. Theo dự định đó, năm 2025 hãng xe ô tô

niêm yết giá bán xe X là bao nhiêu triệu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 28. Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời.

Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU ($1AU$ là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là $1AU$ khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: *R.I.Charles et al., Algebra 2, Pearson*).

Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là $1,52 AU$.

KQ:

Câu 29. Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng. Hỏi sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?(làm tròn kết quả đến hàng phần chục)

KQ:

Câu 30. Cho $f(x) = e^{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2}}}$. Biết rằng $f(1) \cdot f(2) \cdot f(3) \cdots f(2025) = e^{\frac{m}{n}}$ với m, n là các số tự nhiên và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m - n^2$.

KQ:

§2. LÔGARIT



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Định nghĩa và tính chất

⚙️ **Định nghĩa:** Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$. Số α thỏa mãn đẳng thức $a^\alpha = b$ được gọi là lôgarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$.

$$\alpha = \log_a b \Leftrightarrow a^\alpha = b.$$

⚙️ **Tính chất:** Cho hai số dương a, b với $a \neq 1$, ta có tính chất sau:

$$\textcircled{1} \log_a 1 = 0.$$

$$\textcircled{2} \log_a a = 1.$$

$$\textcircled{3} a^{\log_a b} = b.$$

$$\textcircled{4} \log_a a^\alpha = \alpha.$$

2 Các công thức lôgarit cần nhớ

Cho các số dương $a, b, b_1, b_2, \dots, b_n$ với $a \neq 1$, ta có các quy tắc sau:

⚙️ **Công thức biến đổi tích thương:**

$$\textcircled{1} \log_a (b_1 b_2) = \log_a b_1 + \log_a b_2;$$

$$\textcircled{2} \log_a \left(\frac{b_1}{b_2} \right) = \log_a b_1 - \log_a b_2.$$

⚠️ **Ghi nhớ:** Lô ga của một tích thành một tổng; Lô ga của một thương thành một hiệu.

⚙️ **Công thức biến đổi số mũ:**

$$\textcircled{1} \log_a b^m = m \cdot \log_a b.$$

$$\textcircled{2} \log_a \left(\frac{1}{b} \right) = -\log_a b.$$

⚠️ **Ghi nhớ:** Với điều kiện $b \neq 0$ thì $\log_a b^{2n} = 2n \cdot \log_a |b|$.

⚙️ **Công thức đổi cơ số:**

$$\textcircled{1} \log_a b = \frac{1}{\log_b a}, \text{ với } b \neq 1$$

$$\textcircled{2} \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}, \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } a \neq 1, c \neq 1$$

$$\textcircled{3} \log_a b \cdot \log_b c = \log_a c, \text{ với } a, b, c > 0 \text{ và } a \neq 1, b \neq 1$$

3 Lôgarit thập phân và lôgarit tự nhiên

⚙️ **Lôgarit thập phân:** Lôgarit cơ số 10 gọi là lôgarit thập phân.

✓ $\log_{10} N, (N > 0)$ được viết là $\log N$ hay $\lg N$.

⚙️ **Lôgarit tự nhiên:** Lôgarit cơ số e gọi là lôgarit tự nhiên.

✓ $\log_e N, (N > 0)$ được viết là $\ln N$.



CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT 1 Tính toán biểu thức chứa lôgarit

Bài 1. Không sử dụng máy tính cầm tay, hãy tính:

- a) $\log_3 \sqrt[3]{9}$; b) $\log_{\sqrt{2}} 8$; c) $9^{\log_3 12}$;
 d) $2^{\log_4 9}$; e) $\log_2 5 \cdot \log_5 64$; f) $\log \sqrt{1000}$.

Bài 2. Với a là số thực dương và $a \neq 1$. Tính

- a) $\log_a \sqrt[3]{a}$. b) $\log_a (a^3 \sqrt{a \sqrt{a}})$; c) $\log_a \frac{1}{a^3}$;
 d) $\log_{\frac{a}{3}} \left(\frac{a^2}{9} \right)$; e) $\log_{a\sqrt{a}} a^3 \sqrt{a}$; f) $\log_{a^2} \sqrt[4]{a^3}$.

Bài 3. Tính giá trị của các biểu thức sau:

- a) $\log_3 \frac{9}{10} + \log_3 30$; b) $\log_5 75 - \log_5 3$;
 c) $\log_3 \frac{5}{9} - 2 \log_3 \sqrt{5}$; d) $4 \log_{12} 2 + 2 \log_{12} 3$;
 e) $2 \log_5 2 - \log_5 4 \sqrt{10} + \log_5 \sqrt{2}$; f) $\log_3 \sqrt{3} - \log_3 \sqrt[3]{9} + 2 \log_3 \sqrt[4]{27}$.

Bài 4. Cho $\log_2 x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{\log_2 (4x) + \log_2 \frac{x}{2}}{x^2 - \log_{\sqrt{2}} x}$.

Bài 5. Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $\sqrt{ab^3} = 27$. Tính giá trị của $\log_3 a + 6 \log_3 b$.

DT 2 Phân tích một lôgarit theo hai lôgarit cho trước

Bài 6. Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_2 9$. Tính $\log_2 \frac{40}{3}$ theo a và b .

Bài 7. Cho $\log_3 2 = a$, $\log_3 5 = b$. Tính $\log_6 20$ theo a và b .

Bài 8. Đặt $a = \log_3 5$; $b = \log_4 5$. Hãy biểu diễn $\log_{15} 20$ theo a và b .

DT 3 Vận dụng, thực tiễn

Bài 9. Cho $\log_a b = 4$. Tính:

- a) $\log_a (a^{\frac{1}{2}} b^5)$; b) $\log_a \left(\frac{a\sqrt{b}}{b^3 \sqrt{a}} \right)$;

- b) Cho $\log_a b = 2$; $\log_a c = 3$. Tính giá trị của biểu thức $P = \log_a (ab^3c^5)$.
- c) Cho $\log_a x = 2$, $\log_b x = 3$ với a, b là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{\frac{a}{b^2}} x$.
- d) Cho $\log_a c = 3$, $\log_b c = 4$ với a, b, c là các số thực lớn hơn 1. Tính $P = \log_{ab} c$.

4) Biết $\log_2 3 = a$; $\log_2 5 = b$. Tính $\log_5 360$ theo a và b .

5) Chứng minh rằng

a) $\log_a (x + \sqrt{x^2 - 1}) + \log_a (x - \sqrt{x^2 - 1}) = 0$;

b) $\ln (1 + e^{2x}) = 2x + \ln (1 + e^{-2x})$.

6) Cho a, b là các số thực dương thỏa mãn $a^2 + b^2 = 14ab$. Chứng minh rằng

$$\log_2(a + b) = \frac{1}{2}(4 + \log_2 a + \log_2 b).$$

7) Với mọi số thực dương a và b thỏa mãn $a^2 + b^2 = 8ab$. Chứng minh rằng

$$\log(a + b) = \frac{1}{2}(1 + \log a + \log b).$$

8) Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ (molL^{-1}) trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>).
Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết $\text{pH} = -\log [H^+]$.

9) Cường độ một trận động đất M (Richte) được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richte. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho a là số thực dương khác 1. Khẳng định nào dưới đây là sai?

- A. $\log_a 2 \cdot \log_2 a = 1$. B. $\log_a 1 = 0$. C. $\log_a a = 1$. D. $\log_a 2 = \frac{1}{\log_a 2}$.

Câu 2. Cho các số thực $a, b > 1$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

- A. $\log_a \frac{a}{b} = \log_b a$. B. $\log_a \frac{a}{b} = 1 + \log_a b$. C. $\log_a \frac{a}{b} = \log_a b$. D. $\log_a \frac{a}{b} = 1 - \log_a b$.

Câu 3. Cho a là số thực dương tùy ý khác 1. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. $\log_2 a = \log_a 2$. B. $\log_2 a = \frac{1}{\log_2 a}$. C. $\log_2 a = \frac{1}{\log_a 2}$. D. $\log_2 a = -\log_a 2$.

Câu 4. Với a, b, c là các số thực dương khác 1, mệnh đề nào dưới đây là mệnh đề sai?

$$\text{A. } \log_a b = \frac{\log b}{\log a}. \quad \text{B. } \log_a b = \frac{\log_c a}{\log_c b}. \quad \text{C. } \log_a b = \frac{1}{\log_b a}. \quad \text{D. } \log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}.$$

Câu 5. Cho $a, b > 0$. Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

$$\text{A. } \ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b}. \quad \text{B. } \ln \frac{a}{b} = \ln b - \ln a. \quad \text{C. } \ln \frac{a}{b} = \frac{\ln a}{\ln b}. \quad \text{D. } \ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln \frac{1}{b}.$$

Câu 6. Giá trị của biểu thức $A = 4^{\log_2 7}$ bằng

$$\text{A. } 14. \quad \text{B. } 28. \quad \text{C. } 2. \quad \text{D. } 49.$$

Câu 7. Biết $\log_6 a = 2$. Tính $I = \log_a 6$.

$$\text{A. } I = 36. \quad \text{B. } I = \frac{1}{2}. \quad \text{C. } I = 64. \quad \text{D. } I = \frac{1}{4}.$$

Câu 8. Tính giá trị của biểu thức $I = a \cdot \log_2 \sqrt{8}$.

$$\text{A. } I = \frac{2}{3}. \quad \text{B. } I = \frac{3a}{2}. \quad \text{C. } I = \frac{2a}{3}. \quad \text{D. } I = \frac{3}{2}.$$

Câu 9. Tính giá trị của biểu thức $N = \log_a \sqrt{a\sqrt{a}}$ với $0 < a \neq 1$.

$$\text{A. } N = \frac{-3}{4}. \quad \text{B. } N = \frac{4}{3}. \quad \text{C. } N = \frac{3}{2}. \quad \text{D. } N = \frac{3}{4}.$$

Câu 10. Biểu thức $\log_2 \left(2 \sin \frac{\pi}{12} \right) + \log_2 \left(\cos \frac{\pi}{12} \right)$ có giá trị bằng

$$\text{A. } -2. \quad \text{B. } -1. \quad \text{C. } 1. \quad \text{D. } \log_2 \sqrt{3} - 1.$$

Câu 11. Biết $\log_2 x = a$, tính theo a giá trị của biểu thức $P = \log_2 (4x^2)$.

$$\text{A. } P = 2 + a. \quad \text{B. } P = 4 + 2a. \quad \text{C. } P = 4 + a. \quad \text{D. } P = 2 + 2a.$$

Câu 12. Cho $\log_c a = 2$ và $\log_c b = 4$. Tính $P = \log_a b^4$.

$$\text{A. } P = 8. \quad \text{B. } P = \frac{1}{32}. \quad \text{C. } P = \frac{1}{8}. \quad \text{D. } P = 32.$$

Câu 13. Cho $\log_a b = 5$, $\log_a c = -3$. Giá trị biểu thức $\log_a \left(\frac{a^4 \sqrt[3]{b}}{c^2} \right)$ là

$$\text{A. } -\frac{1}{3}. \quad \text{B. } -40. \quad \text{C. } 40. \quad \text{D. } \frac{35}{3}.$$

Câu 14. (TN – 2021) Với mọi a, b thỏa mãn $\log_2 a^3 + \log_2 b = 6$. Khẳng định nào dưới đây đúng?

$$\text{A. } a^3 b = 64. \quad \text{B. } a^3 b = 36. \quad \text{C. } a^3 + b = 64. \quad \text{D. } a^3 + b = 36.$$

Câu 15. Nếu $a = \log_{30} 3$ và $b = \log_{30} 5$ thì

$$\begin{aligned} \text{A. } \log_{30} 1350 &= a + 2b + 1. & \text{B. } \log_{30} 1350 &= 2a + b + 1. \\ \text{C. } \log_{30} 1350 &= a + 2b + 2. & \text{D. } \log_{30} 1350 &= 2a + b + 2. \end{aligned}$$

Câu 16. Cho $\log_2 7 = a$, $\log_3 7 = b$. Tính $\log_6 7$ theo a và b .

$$\text{A. } \frac{1}{a+b}. \quad \text{B. } a^2 + b^2. \quad \text{C. } a + b. \quad \text{D. } \frac{ab}{a+b}.$$

Câu 17. Cho $a = \log_3 15$, $b = \log_3 10$. Tính $\log_{\sqrt{3}} 50$ theo a và b .

$$\begin{aligned} \text{A. } \log_{\sqrt{3}} 50 &= 2(a + b - 1). & \text{B. } \log_{\sqrt{3}} 50 &= 4(a + b + 1). \\ \text{C. } \log_{\sqrt{3}} 50 &= a + b - 1. & \text{D. } \log_{\sqrt{3}} 50 &= 3(a + b + 1). \end{aligned}$$

Câu 18. Cho $\log_2 6 = a$; $\log_2 7 = b$. Tính $\log_3 7$ theo a và b .

$$\text{A. } \log_3 7 = \frac{b}{a-1}. \quad \text{B. } \log_3 7 = \frac{a}{b-1}. \quad \text{C. } \log_3 7 = \frac{b}{1-a}. \quad \text{D. } \log_3 7 = \frac{a}{1-b}.$$

Câu 19. Đặt $a = \log_{12} 6$, $b = \log_{12} 7$. Hãy biểu diễn $\log_2 7$ theo a và b .

- A. $\frac{b}{a+1}$. B. $\frac{b}{1-a}$. C. $\frac{a}{b-1}$. D. $\frac{a}{b+1}$.

Câu 20. Đặt $a = \ln 2$; $b = \ln 5$. Hãy biểu diễn $I = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln \frac{98}{99} + \ln \frac{99}{100}$ theo a và b .

- A. $I = -2(a+b)$. B. $I = 2(a+b)$. C. $I = -2(a-b)$. D. $I = 2(a-b)$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho biểu thức $B = 2 \ln \sqrt{ex} - \ln \frac{e^2}{\sqrt{x}} + \ln 3 \cdot \log_3 (ex^2)$.

- a) Nếu $\ln x = 2$ thì $B = 7$. b) Nếu $\ln x = 4$ thì $B = 14$.
c) Nếu $\ln x = 3$ thì $B = \frac{15}{2}$. d) Nếu $\ln x = 6$ thì $B = 18$.

Câu 22. Cho các biểu thức sau $P = \log_2 8 + \log_3 27 - \log_5 5^3$; $Q = \ln(2e) - \log 100$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $P + Q = 2 \ln 2$. b) $Q - P = \ln 2 - 4$.
c) $3Q + P = 3 \ln 2$. d) $2Q + P = 2 \ln 2 + 1$.

Câu 23. Cho các biểu thức sau $A = \log_{2^{2030}} 4 - \frac{1}{1015} + \ln e^{2035}$; $B = \log_5 3 \cdot \log_2 5 - \frac{\ln 9}{\ln 4}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) A chia hết cho 5. b) $A - B = 2036$.
c) $A + 2024B = 2035$. d) $A - 2024B = 2035$.

Câu 24. Nồng độ cồn trong máu (BAC) là chỉ số dùng để đo lượng cồn trong máu của một người. Chẳng hạn, BAC 0,02% hay 0,2mg/ml, nghĩa là có 0,02 g cồn trong 100ml máu. Nếu một người với BAC bằng 0,02% có nguy cơ bị tai nạn ô tô cao gấp 1,4 lần so với một người không uống rượu, thì nguy cơ tương đối của tai nạn với BAC 0,02% là 1,4. Nghiên cứu y tế gần đây cho thấy rằng nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn khi đang lái ô tô có thể được mô hình hóa bằng một phương trình có dạng

$$R = e^{kx},$$

trong đó $x(\%)$ là nồng độ cồn trong máu và k là một hằng số.

Với giá trị của k được làm tròn đến hàng phần trăm, hãy xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Giá trị của k là 1682,36.
b) Nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn giao thông là 16,8 khi nồng độ cồn trong máu là 0,17% .
c) BAC tương ứng với nguy cơ tương đối là 100 là 0,27% (làm tròn đến hàng phần trăm).
d) Biết rằng một người có nguy cơ tương đối từ 5 trở lên sẽ không được phép lái xe, thì một người có nồng độ cồn trong máu từ 0,87% trở lên sẽ không được phép lái xe.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 25. Cho a, b là hai số thực dương, khác 1. Đặt $\log_a b = 2$, tính giá trị của $P = \log_{a^2} b - \log_{\sqrt{b}} a^3$.

KQ:

Câu 26. Cho $\log_a x = -1$ và $\log_a y = 4$. Tính giá trị của $P = \log_a (x^2 y^3)$.

KQ:

Câu 27. Cho x, y là các số dương lớn hơn 1 thỏa mãn $x^2 + 9y^2 = 6xy$. Tính $M = \frac{1 + \log_{12} x + \log_{12} y}{2\log_{12}(x + 3y)}$.

KQ:

Câu 28. Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương N viết trong hệ thập phân được cho bởi công thức $[\log N] + 1$, ở đó $[\log N]$ là phần nguyên của số thực dương $\log N$. Tìm số các chữ số của 2^{2023} khi viết trong hệ thập phân.

KQ:

Câu 29. Để đặc trưng đo độ to nhỏ của âm, người ta đưa ra khái niệm mức cường độ âm. Một đơn vị thường dùng để đo mức cường độ âm là đề xin ben (đB). Khi đó, mức cường độ âm L của âm được tính theo công thức $L(I) = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, trong đó I là cường độ âm tại thời điểm đang xét, I_0 là cường độ âm ở ngưỡng nghe ($I_0 = 10^{-12} \text{ w/m}^2$). Hai cây đàn ghi ta giống nhau, cùng hoà tấu một bản nhạc. Mỗi cây đàn phát ra âm có mức cường độ âm trung bình là 60 đB. Hỏi mức cường độ âm tổng cộng do hai chiếc đàn cùng phát ra là bao nhiêu đề xin ben (đB)?

KQ:

Câu 30. Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ của $^{14}_6\text{C}$ có trong mẫu vật tại thời điểm t (năm) (so với thời điểm ban đầu $t = 0$), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ $H = H_0 e^{-\lambda t}$ (đơn vị là Becquerel, kí hiệu Bq) với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ, $T = 5730$ (năm) (Nguồn: Vật lí 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2014).

Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là 0,215 Bq. Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là 0,250 Bq. Xác định độ tuổi (tính bằng năm) của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

KQ:

§3. HÀM SỐ MŨ, HÀM SỐ LÔGARIT



LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

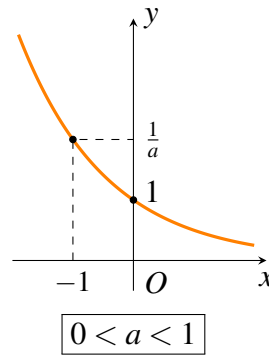
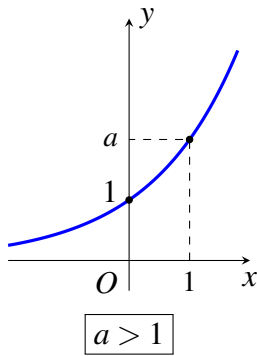
1 Hàm số mũ

Dạng: $y = a^x$, trong đó $0 < a \neq 1$.

- ① Tập xác định của hàm số $y = a^x$ là \mathbb{R} ;
- ① Tập giá trị của hàm số $y = a^x$ là $(0; +\infty)$.

Đồ thị hàm số $y = a^x$:

- ① Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .
- ② Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .
- ③ Đồ thị luôn qua $(0; 1)$ và luôn nằm phía trên trục hoành.



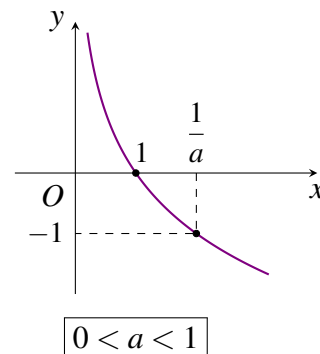
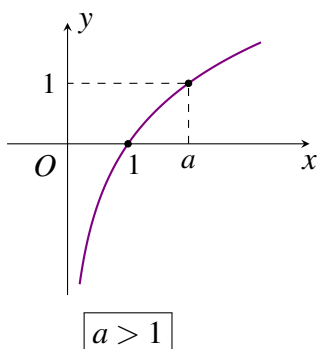
2 Hàm số lôgarit

Dạng: $y = \log_a x$, trong đó $0 < a \neq 1$ và $x > 0$.

- ① Tập xác định của hàm số $y = \log_a x$ là $(0; +\infty)$;
- ① Tập giá trị của hàm số $y = \log_a x$ là \mathbb{R} .

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$:

- ① Khi $a > 1$ thì hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$
- ② Khi $0 < a < 1$ thì hàm số nghịch biến trên $(0; +\infty)$.
- ③ Đồ thị luôn qua $(1; 0)$ và luôn nằm bên phải trục tung.





CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT 1 Tìm tập xác định

⚙ Đối với hàm số $y = a^{u(x)}$: Ta chỉ cần tìm điều kiện để $u(x)$ có nghĩa.

⚙ Đối với hàm số $y = \log_a u(x)$: Ta tìm điều kiện để $u(x) > 0$.

Với hàm số $y = \log_a b^{2n}$, ta chỉ cần điều kiện $b \neq 0$.

≡ **Bài 1.** Tìm tập xác định \mathcal{D} của các hàm số sau:

- a) $y = \log_2 x$; b) $y = \log_3(x-2)$; c) $y = \log_{\frac{1}{3}}(4-2x)$;
 d) $y = \log_3(x^2-x-2)$; e) $y = \ln(x^2+3x+2)$; f) $y = \log_5 \frac{x-3}{x+2}$.

≡ **Bài 2.** Tìm tập xác định \mathcal{D} của các hàm số sau:

- a) $y = \log_3 x^2$; b) $y = \log_3(4-x^2)^4$; c) $y = \frac{1}{\log_3 x}$;
 d) $y = \frac{1}{\log_3(x-1)}$; e) $y = \log|\sin x|$; f) $y = \ln(1-\cos x)$.

DT 2 Đồ thị hàm số

Để vẽ đồ thị hàm mũ $y = a^x$ hoặc hàm lôgarit $y = \log_a x$, ta làm như sau:

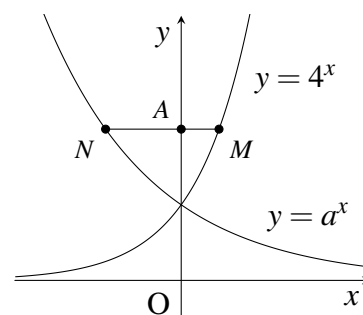
- ① Lập bảng giá trị của hàm số cần vẽ;
- ② Căn cứ vào cơ số và hình dáng đồ thị, ta vẽ đường cong qua các điểm đã cho.

≡ **Bài 3.** Vẽ đồ thị của các hàm số mũ sau:

- a) $y = 2^x$; b) $y = (\sqrt{3})^x$; c) $y = e^x$; d) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$.
 e) $y = \log_2 x$; f) $y = \log_{\sqrt{3}} x$; g) $y = \ln x$; h) $y = \log_{\frac{2}{3}} x$.

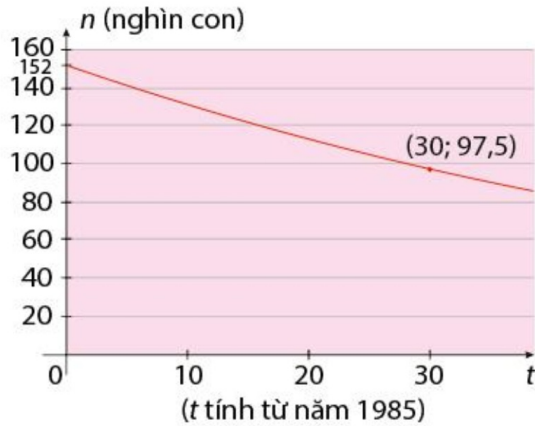
≡ **Bài 4.**

Cho số thực a dương, khác 1. Biết rằng bất kỳ đường thẳng nào song song với trục Ox mà cắt các đường $y = 4^x$, $y = a^x$, trục tung lần lượt tại M , N , A thì $AN = 2AM$ (hình vẽ bên). Tính a .



DT 3 Vận dụng. Thực tiễn

Bài 5. Đồ thị Hình bên dưới cho thấy số lượng hươu cao cổ trên thế giới suy giảm nghiêm trọng trong 30 năm qua (từ năm 1985 đến 2015) (nguồn: <https://tuoitre.vn/huou-cao-co-sap-vaio-danhsach-loai-gap-nguy-hiem-20190428162017473.htm>).



Giả sử rằng số lượng hươu ở đây giảm theo hàm số $n(t) = C \cdot a^t$.

- Tìm số lượng hươu vào năm 1985.
- Tìm hàm số biểu diễn số lượng hươu sau t năm kể từ năm 1985.
- Dự đoán số lượng hươu vào năm 2025.

Bài 6. Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của ^{14}C là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử ^{14}C giảm đi một nửa.

- Gọi m_0 là khối lượng của ^{14}C tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của ^{14}C tại thời điểm t (năm).
- Một cây còn sống có lượng ^{14}C trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng ^{14}C trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng ^{14}C còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trường (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số

- a) $y = (\sqrt{2})^x$; b) $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$; c) $y = \log_{\sqrt{3}}x$; d) $y = -\log_2x$.

2 So sánh các cặp số sau

- a) $1,04^{1,7}$ và $1,04^2$. b) $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{2}{5}}$ và $\left(\frac{3}{5}\right)^{-\frac{3}{5}}$.
- c) $1,2^{0,3}$ và $0,9^{1,8}$. d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-0,4}$ và $3^{-0,2}$.

3 So sánh các cặp số sau

- a) $2\log_{0,6}5$ và $3\log_{0,6}(2\sqrt[3]{3})$. b) $6\log_52$ và $2\log_56$.



c) $\frac{1}{2} \log_2 121$ và $2 \log_2 2\sqrt{3}$.

d) $2 \log_3 7$ và $6 \log_9 4$.

4 Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \log(x - 1)$;

b) $y = \log_2(2020 - x)$;

c) $y = \log(2x - x^2)$;

d) $y = \log_2 \frac{3-x}{2x}$;

e) $y = \ln(x - 2)^2 + \log(x + 1)$;

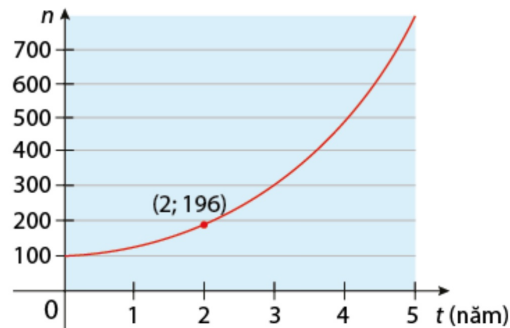
f) $y = \log_2 |x^2 - 4|$.

5 Dựa vào đồ thị hàm số, cho biết với giá trị nào của x thì đồ thị hàm số $y = \log_3 x$:

a) Nằm phía trên đường thẳng $y = 1$;

b) Nằm phía dưới trục hoành.

6 Lúc đầu trong ao có một số con ếch. Người ta ghi nhận số lượng ếch trong 5 năm đầu như Hình bên dưới.



Giả sử số lượng ếch tăng theo hàm số $n(t) = C \cdot a^t$.

a) Tính số lượng ếch lúc ban đầu.

b) Tìm hàm số biểu diễn số lượng ếch sau t năm kể từ khi chúng xuất hiện trong ao.

c) Dự đoán số lượng ếch sau 15 năm.

7 Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = \ln(x^2 - 2mx + 4)$ có tập xác định là \mathbb{R} .

8 Tìm tất cả giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = \ln(x^2 - 2mx + m + 2)$ có tập xác định là \mathbb{R} .

9 Tìm tất cả các giá trị của tham số a để hàm số $y = \log_{a^2 - 2a + 1} x$ nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

10 Chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức:

$$m = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. (THPTQG 2021 – Mã đề 101). Tập xác định của hàm số $y = 9^x$

- A. \mathbb{R} . B. $[0; +\infty)$. C. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 2. Tập xác định của hàm số $y = \log_3 x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. \mathbb{R} . D. $(0; +\infty)$.

Câu 3. Hàm số nào trong các hàm số sau đây có tập xác định là \mathbb{R} ?

- A. $y = \log_2 x$. B. $y = \frac{2x-1}{x+1}$.
C. $y = \tan x$. D. $y = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$.

Câu 4. Tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log_{2018}(2x-1)$ là

- A. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. C. $\mathcal{D} = \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$. D. $\mathcal{D} = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Câu 5. Tìm tập xác định D của hàm số $y = \log_2 \sqrt{6-x}$.

- A. $D = \mathbb{R} \setminus \{6\}$. B. $D = (-\infty; 6)$. C. $D = (6; +\infty)$. D. $D = (-\infty; 6]$.

Câu 6. Tập xác định của hàm số $y = \ln|4-x^2|$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus [-2; 2]$. B. $\mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$. C. \mathbb{R} . D. $(-2; 2)$.

Câu 7. Hàm số $y = \log_5(4x-x^2)$ có tập xác định là

- A. $\mathcal{D} = (0; +\infty)$. B. $\mathcal{D} = (0; 4)$.
C. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$.

Câu 8. Tìm tập xác định \mathcal{D} của hàm số $y = \log(x^2 + 2x + 3)$.

- A. $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\}$. B. $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.
C. $\mathcal{D} = \emptyset$. D. $\mathcal{D} = (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$.

Câu 9. Tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\ln(5-x)}$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{4\}$. B. $[-1; 5) \setminus \{4\}$. C. $(-1; 5)$. D. $[-1; 5]$.

Câu 10. Hàm số nào trong các hàm số sau đây nghịch biến trên \mathbb{R} ?

- A. $y = 9^x$. B. $y = \log_{0,9} x$. C. $y = \log_9 x$. D. $y = (0,9)^x$.

Câu 11. Tìm tất cả các giá trị của a thỏa mãn $(a-1)^{-\frac{2}{3}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$.

- A. $0 < a < 1$. B. $a > 1$. C. $1 < a < 2$. D. $a > 2$.

Câu 12. Hàm số nào sau đây đồng biến trên \mathbb{R} ?

- A. $y = \left(\frac{3}{\pi}\right)^x$. B. $y = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{e}\right)^x$.
C. $y = \log_7(x^4 + 5)$. D. $y = \left(\frac{\sqrt{2018} - \sqrt{2015}}{10^{-1}}\right)^x$.

Câu 13. Cho các số thực a, b thỏa mãn $0 < a < 1 < b$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\log_a b < 0$. B. $(0,5)^a < (0,5)^b$. C. $\ln a > \ln b$. D. $2^a > 2^b$.

Câu 14. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề sai?

- A. Nếu $0 < a < b$ thì $\ln a < \ln b$. B. Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{\pi}{4}} a < \log_{\frac{\pi}{4}} b$.

C. Nếu $0 < a < b$ thì $\log_{\frac{e}{2}} a < \log_{\frac{e}{2}} b$.

D. Nếu $0 < a < b$ thì $\log a < \log b$.

Câu 15. Tìm tất cả các giá trị của a để hàm số $y = (2020 - a)^x$ nghịch biến trên \mathbb{R} .

A. $a < 2019$.

B. $a < 2020$.

C. $2019 < a < 2020$.

D. $0 < a < 1$.

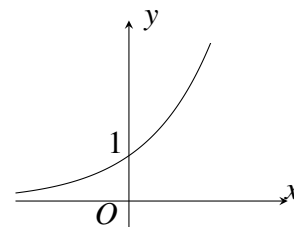
Câu 16. Đồ thị sau đây là của hàm số nào?

A. $y = 2^x$.

B. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

C. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

D. $y = \log_2 x$.



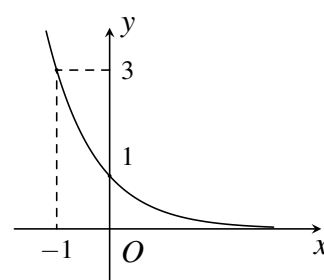
Câu 17. Đồ thị có trong hình vẽ kề bên là của hàm số nào dưới đây?

A. $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

B. $y = (\sqrt{2})^x$.

C. $y = (\sqrt{3})^x$.

D. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



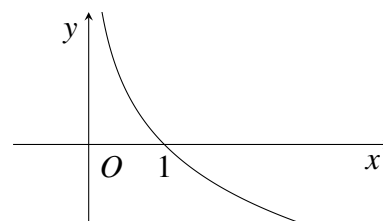
Câu 18. Đồ thị hàm số như hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào?

A. $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

B. $y = 2^x$.

C. $y = \log_2 x$.

D. $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.



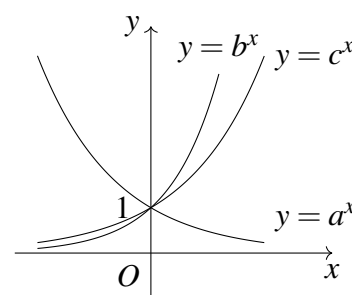
Câu 19. Cho a, b, c là các số thực dương, khác 1. Đồ thị các hàm số $y = a^x, y = b^x, y = c^x$ được cho trong hình vẽ dưới đây. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. $1 < a < c < b$.

B. $a < 1 < c < b$.

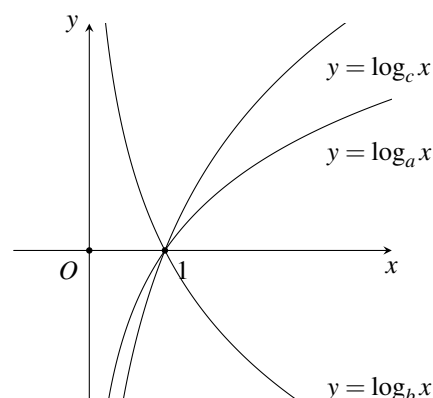
C. $a < 1 < b < c$.

D. $1 < a < b < c$.



Câu 20. Cho a, b, c là các số thực dương khác 1. Hình vẽ bên là đồ thị của hàm số $y = \log_x$, $y = \log_b x$, $y = \log_c x$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a < b < c$. B. $b < c < a$. C. $b < a < c$. D. $c < a < b$.



- b) Đồ thị hàm số đã cho luôn nằm bên trên trục hoành .
 c) Hàm số liên tục trên khoảng $(2; +\infty)$.
 d) Trên khoảng $(0; +\infty)$ thì hàm số đã cho nghịch biến .

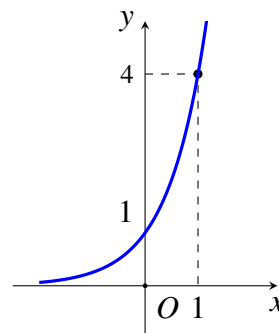
Câu 28. Cho hàm số $y = \log_{\frac{3}{8}} x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Trên khoảng $(9; +\infty)$ thì hàm số đã cho đồng biến .
 b) Đồ thị hàm số đã cho luôn nằm bên phải trục tung .
 c) Hàm số đã cho có tập xác định là $(-\infty; 6)$.
 d) Hàm số liên tục trên khoảng $(6; +\infty)$.

Câu 29.

Cho đồ thị hàm số $y = a^x$ với $a > 0$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

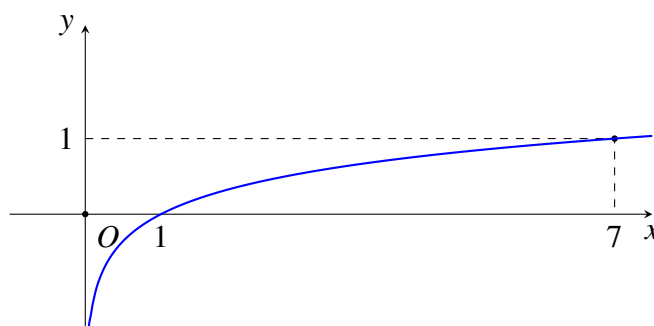
- a) Hàm số đã cho có tập giá trị là \mathbb{R} .
 b) Hàm số không liên tục trên \mathbb{R} .
 c) Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(-1; \frac{1}{4})$.
 d) Hàm số đã cho nghịch biến trên \mathbb{R} .



Câu 30.

Cho đồ thị hàm số $y = f(x) = \log_a x$ với $a > 0, a \neq 1$ có đồ thị như hình vẽ. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Hàm số đã cho có tập xác định là $(0; +\infty)$.
 b) Trên khoảng $(8; +\infty)$ thì hàm số đã cho đồng biến .
 c) Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $(\frac{1}{49}; -2)$.
 d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 31. Cho hai đồ thị $(C_1): y = 2^x$ và $(C_2): y = 3^{-x}$. Gọi M, N lần lượt là hai điểm thuộc (C_1) và (C_2) . Biết M và N đối xứng nhau qua $I(0; \frac{5}{2})$. Tính độ dài đoạn MN (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 32. Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức $y = \log_{1,06}(\frac{x}{10})$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 33. Số lượng của một loại vi khuẩn X trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $x(t) = x(0) \cdot 2^t$, trong đó $x(0)$ là số lượng vi khuẩn X ban đầu, $x(t)$ là số lượng vi khuẩn X sau t (phút). Biết sau 2 phút thì số lượng vi khuẩn X là 625 nghìn con. Hỏi sau bao nhiêu phút, kể từ lúc bắt đầu, số

lượng vi khuẩn X là 10 triệu con?

KQ:

Câu 34. Các nhà tâm lí học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-k})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

KQ:

Câu 35. Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t$ (mg), trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc. Biết rằng bệnh nhân đã uống 100 mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80 mg. Hỏi sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

KQ:



§4. PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LOGARIT



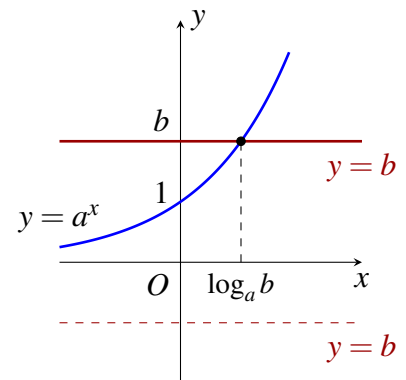
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Công thức nghiệm của phương trình mũ

- ☑ Dạng $a^x = b$ (1), với $a > 0$ và $a \neq 1$.
- ☑ Về mặt đồ thị, nghiệm của (1) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = a^x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang).

Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

- ① $b > 0$ (1) có nghiệm duy nhất $x = \log_a b$.
- ② $b \leq 0$ (1) vô nghiệm.



GHI NHỚ

Với $a > 0$ và $a \neq 1$, $b > 0$, ta có các công thức sau đây:

$$\textcircled{1} a^{f(x)} = b \Leftrightarrow f(x) = \log_a b$$

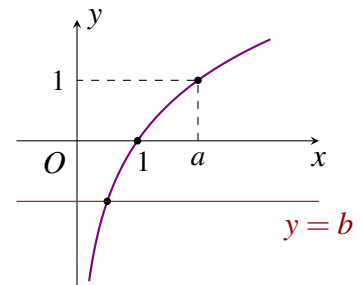
$$\textcircled{2} a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$$

2 Công thức nghiệm của phương trình lôgarit

- ☑ Dạng $\log_a x = b$ (2), với $a > 0$ và $a \neq 1$.
- ☑ Về mặt đồ thị, nghiệm của (2) là hoành độ giao điểm của đồ thị $y = \log_a x$ với đường thẳng $y = b$ (nằm ngang).

Từ hình vẽ, ta có các kết quả sau:

- ① Với mọi b , (2) luôn có nghiệm duy nhất.
- ② $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$.



GHI NHỚ

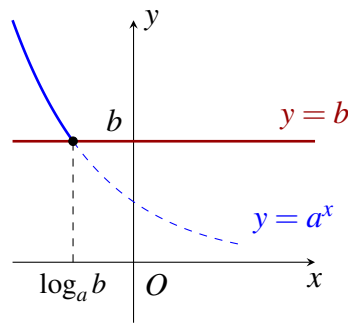
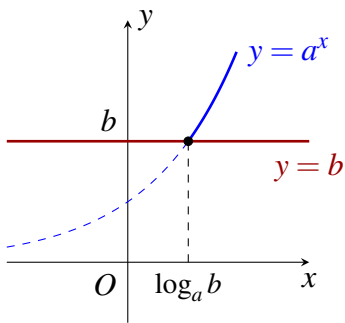
Với $a > 0$ và $a \neq 1$, b bất kì, ta có các công thức sau đây:

$$\textcircled{1} \log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b.$$

$$\textcircled{2} \log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \text{ (hoặc } g(x) > 0) \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

3 Công thức nghiệm của bất phương trình mũ

Minh họa dạng $a^x > b$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.

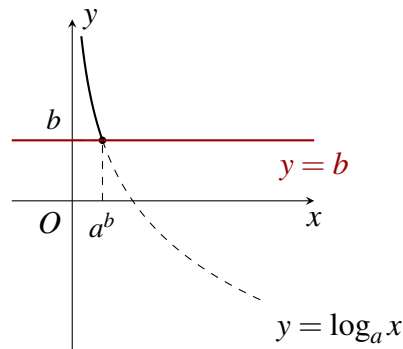
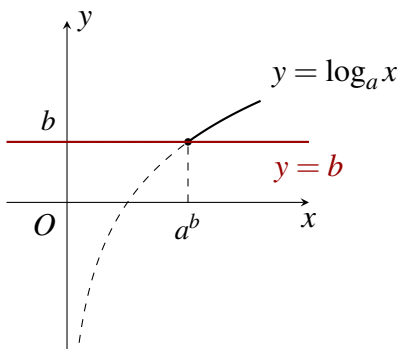


- Nếu $b \leq 0$ thì tập nghiệm của bất phương trình là \mathbb{R} .
- Nếu $b > 0$, ta có hai trường hợp:

- ① Với $a > 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x > \log_a b$ (Hình bên trái).
- ② Với $0 < a < 1$ thì $a^x > b \Leftrightarrow x < \log_a b$ (Hình bên phải).

4 Công thức nghiệm của bất phương trình lôgarit

Minh họa dạng $\log_a x > b$, với $a > 0$ và $a \neq 1$.



- Điều kiện xác định là $x > 0$.
- Ta có hai trường hợp:

- ① Với $a > 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow x > a^b$ (Hình bên trái).
- ② Với $0 < a < 1$ thì $\log_a x > b \Leftrightarrow 0 < x < a^b$ (Hình bên phải).

⚠ Các trường hợp $a^x \geq b$, $a^x < b$, $a^x \leq b$, $\log_a x \geq b$, $\log_a x < b$, $\log_a x \leq b$... ta suy luận tương tự.

- Cơ số $a > 1$: Ta so sánh "cùng chiều";
- Cơ số $0 < a < 1$: Ta so sánh "ngược chiều".

CHÚ Ý

Khi giải phương trình hoặc bất phương trình lôgarit, ta cần chú ý đặt điều kiện để các biểu thức lôgarit có nghĩa trước khi biến đổi (nếu không chắc phép biến đổi đó là phép biến đổi tương đương)



CÁC DẠNG TOÁN THƯỜNG GẶP

DT

1

Giải các phương trình mũ và logarit đơn giản

Bài 1. Giải các phương trình mũ sau:

a) $2^x = 3;$

b) $2^{x-1} = 32;$

c) $5^{x^2-5x-6} = 1;$

d) $4^{2x+5} = 2^{2-x};$

e) $3^{x-4} = \left(\frac{1}{9}\right)^{3x-1};$

f) $(0,4)^{8-2x^2} = (6,25)^{3x};$

g) $\left(\frac{1}{25}\right)^{x-1} = 125^{2x};$

h) $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{x-2} = 12;$

i) $2^x \cdot 15^{x+1} = 3^{x+3}.$

Bài 2. Giải các phương trình lôgarit sau:

a) $\log(x-1) = 2$

b) $\log_2(x^2 - 19x + 2) = 9$

c) $\log_{0,25}(x^2 + 3x) = -1$

d) $\log_2(x^2 - 4x + 3) = \log_2(4x - 4)$

e) $2\log_2 x = \log_2(2-x)$

f) $\ln x + \ln(3x-2) = 0$

g) $\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln(x+7)$

h) $\log_2 x + \log_2(x+2) = 3$

i) $\log_3(2x+1) - \log_3(x-1) = 1.$

j) $\log_2(x^2 - 3) - \log_2(6x - 10) + 1 = 0$

k) $2\log_4 x + \log_2(x-3) = 2$

l) $\log_3(x^2 + 4x) + \log_{\frac{1}{3}}(2x+3) = 0$

DT

2

Giải các bất phương trình mũ và lôgarit đơn giản

Bài 3. Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $3^{x-1} > 1;$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x \geq 2;$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-4x} < 8$

d) $(0,125)^{x^2} > \left(\frac{1}{8}\right)^{5x-6}$

e) $\left(\frac{3}{4}\right)^{x-12} \geq \left(\frac{4}{3}\right)^x$

f) $4^x > 2^{x+8};$

g) $3^{2x+1} > \left(\frac{1}{3}\right)^{-3x^2};$

h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{9x^2-17x+11} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{7-5x};$

Bài 4. Giải các bất phương trình lôgarit sau:

a) $\log x \geq 1$

b) $\log_2(3x-1) > 3$

c) $\log_{\frac{1}{2}}(x-3) \geq \log_{\frac{1}{2}} 4$

d) $\log_4(x+7) > \log_2(x+1)$

e) $\log_2(x^2 - x - 2) \leq 2\log_2(3 - x)$

f) $2\log_2(x - 1) > \log_2(5 - x) + 1$

DT 3 Vận dụng, thực tiễn

Bài 5. Áp suất khí quyển p lên một vật giảm khi độ cao tăng dần. Giả sử áp suất này (tính bằng milimét thủy ngân) được biểu diễn theo độ cao h (tính bằng kilômét) so với mực nước biển bằng công thức $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h}$.

- a) Một máy bay đang chịu áp suất khí quyển 320 mmHg. Tìm độ cao của máy bay đó.
- b) Một người đứng trên đỉnh của một ngọn núi và chịu áp suất khí quyển 667 mmHg. Tìm chiều cao của ngọn núi này.

Bài 6. Đồng vị phóng xạ Uranium-235 (thường được sử dụng trong điện hạt nhân) có chu kỳ bán rã là $T = 703800000$ năm. Theo đó, nếu ban đầu có 100 gam Uranium-235 thì sau t năm, do bị phân rã, lượng Uranium-235 còn lại được tính bởi công thức $M = 100 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ (g). Sau thời gian bao lâu thì lượng Uranium-235 còn lại bằng 90% so với ban đầu?

Bài 7. Người ta dùng thuốc để khử khuẩn cho một thùng nước. Biết rằng nếu lúc đầu mỗi mililit nước chứa P_0 vi khuẩn thì sau t giờ (kể từ khi cho thuốc vào thùng), số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là $P = P_0 \cdot 10^{-\alpha t}$, với α là một hằng số dương nào đó. Biết rằng ban đầu mỗi mililit nước có 9000 vi khuẩn và sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước là 6000. Sau thời gian bao lâu thì số lượng vi khuẩn trong mỗi mililit nước trong thùng ít hơn hoặc bằng 1000?

Bài 8. Giả sử giá trị còn lại V (triệu đồng) của một chiếc ô tô nào đó sau t năm được cho bằng công thức $V(t) = 730 \cdot (0,82)^t$.

- a) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 500 triệu đồng?
- b) Theo mô hình này, khi nào chiếc xe có giá trị 200 triệu đồng? (Kết quả của câu a và câu b được tính tròn năm).

Bài 9. Ông A gửi vào ngân hàng 300 triệu đồng theo thể thức lãi kép với lãi suất 10%/năm. Trong quá trình gửi lãi suất không đổi và ông A không rút tiền ra. Hỏi sau ít nhất mấy năm thì ông A rút được số tiền cả vốn và lãi đủ 500 triệu đồng?



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Giải các phương trình mũ sau:

a) $2^{2x-1} = \frac{1}{8}$

b) $e^{3x^2+x-2} = 1$

c) $9^{x+1} = 27^{2x+1}$

d) $2^{x+1} + 5 \cdot 2^x - 2^{x+2} = 21$

e) $2 \cdot 5^{x+1} - 5^x = 2^{x+1} + 2^{x+3}$

f) $27^{\frac{x-2}{x-1}} = \frac{\sqrt{3}^{7x}}{243}$

2 Giải các phương trình lôgarit sau:

a) $\log_3 x = 2$

b) $\log_3(2x - 1) = 2$

c) $\log_5(3x^2 - 2x + 1) = \log_5(x + 1)$

d) $\log x = \log(x + 3) - \log(x - 1)$.

e) $\log_2(x + 1) = 1 + \log_2(x - 1)$

f) $\log_{\sqrt{2}}(2x - 2) + \log_2(x - 3)^2 = 2$

3 Giải các bất phương trình mũ sau:

a) $\left(\frac{2}{3}\right)^x < 1$

b) $2^{x^2-2x} > 8$

c) $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x} \geq \frac{1}{125}$

d) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{x^2+1} \geq (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{3x-1}$.

e) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} > \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-1}$

f) $5^{x-1} \geq 5^{x^2-x-9}$

4 Giải các bất phương trình lôgarit sau:

a) $\log_5(3x + 2) > 1$;

b) $\log_{\frac{1}{4}}(4x - 2) \geq -1$;

c) $\log_{\frac{2}{3}}(3x) > \log_{\frac{2}{3}}(2x + 7)$

d) $\log_{\frac{1}{2}}(x + 1) < \log_{\frac{1}{2}}(2x - 1)$;

e) $\log_{2-\sqrt{3}}(2x - 5) \geq \log_{2-\sqrt{3}}(x - 1)$;

f) $\log_2(4x + 8) - \log_2 x \leq 3$.

5 Giải các bất phương trình sau:

a) $\log_3(x + 4) < 2$;

b) $\log_{\frac{1}{2}} x \geq 4$;

c) $\log_{0,25}(x - 1) \leq -1$;

d) $\log_5(x^2 - 24x) \geq 2$;

e) $2\log_{\frac{1}{4}}(x + 1) \geq \log_{\frac{1}{4}}(3x + 7)$;

f) $2\log_3(x + 1) \leq 1 + \log_3(x + 7)$.

6 Độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $\text{pH} = -\log x$, trong đó x là nồng độ ion H^+ của dung dịch đó tính bằng mol/L. Biết rằng độ pH của dung dịch A lớn hơn độ pH của dung dịch B là 0,7. Dung dịch B có nồng độ ion H^+ gấp bao nhiêu lần nồng độ ion H^+ của dung dịch A?

7 Người ta nuôi cấy vi khuẩn *Bacillus subtilis* trong nồi lên men và thu được số liệu sau: Lúc ban đầu, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $2 \cdot 10^2$. Sau 13 giờ, số tế bào/1 ml dịch nuôi là $3,33 \cdot 10^9$. Biết vi khuẩn *Bacillus subtilis* sinh trưởng trong điều kiện hoàn toàn tối ưu và sinh sản theo hình thức tự nhân đôi. Hỏi sau bao nhiêu phút, vi khuẩn *Bacillus subtilis* tự nhân đôi một lần (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

8 Sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công thức $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ trong đó m_0 là khối lượng chất phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$), $m(t)$ là khối lượng chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kỳ bán rã (tức là khoảng thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ biến thành chất khác). Với $T = 1000$ năm, hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm khối lượng chất phóng xạ còn lại nhỏ hơn $\frac{1}{6}$ khối lượng chất phóng xạ ban đầu?

9 Dân số thành phố Hà Nội năm 2022 khoảng 8,4 triệu người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm của Hà Nội không đổi và bằng $r = 1,04\%$. Biết rằng sau t năm dân số Hà Nội (tính từ mốc năm 2022) ước tính theo công thức: $S = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là dân số năm lấy làm mốc. Hỏi từ năm nào

trở đi, dân số của Hà Nội vượt quá 10 triệu người?

- 10** Cent âm nhạc là một đơn vị trong thang lôgarit của cao độ hoặc khoảng tương đối. Một quãng tám bằng 1200 cent. Công thức xác định chênh lệch khoảng thời gian (tính bằng cent) giữa hai nốt nhạc có tần số a và b là

$$n = 1200 \cdot \log_2 \frac{a}{b}.$$

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008)

- a) Tìm khoảng thời gian tính bằng cent khi tần số thay đổi từ 443 Hz về 415 Hz.
b) Giả sử khoảng thời gian là 55 cent và tần số đầu là 225 Hz, hãy tìm tần số cuối cùng.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Phương trình $2^{2x+1} = 32$ có nghiệm là

- A. $x = \frac{5}{2}$. B. $x = 2$. C. $x = \frac{3}{2}$. D. $x = 3$.

Câu 2. Tích tất cả các nghiệm của phương trình $2^{x^2+x} = 4$ bằng

- A. 2. B. 3. C. -2. D. -1.

Câu 3. Tọa độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = 2^{-x} + 3$ và đường thẳng $y = 11$ là

- A. $(-3; 11)$. B. $(4; 11)$. C. $(-4; 11)$. D. $(3; 11)$.

Câu 4. Biết rằng phương trình $2^{x^2-4x+2} = 2^{x-4}$ có hai nghiệm phân biệt là x_1, x_2 . Tính giá trị biểu thức $S = x_1^4 + x_2^4$.

- A. $S = 17$. B. $S = 257$. C. $S = 97$. D. $S = 92$.

Câu 5. Tìm nghiệm của phương trình $5^{2018x} = \sqrt{5}^{2018}$.

- A. $x = 1 - \log_5 2$. B. $x = -\log_5 2$. C. $x = \frac{1}{2}$. D. $x = 2$.

Câu 6. Tìm nghiệm của phương trình $9^{\sqrt{x-1}} = e^{\ln 81}$.

- A. $x = 5$. B. $x = 4$. C. $x = 6$. D. $x = 17$.

Câu 7. Tìm tập nghiệm S của phương trình $\left(\frac{2}{3}\right)^{4x} = \left(\frac{3}{2}\right)^{2x-6}$

- A. $S = \{-1\}$. B. $S = \{1\}$. C. $S = \{-3\}$. D. $S = \{3\}$.

Câu 8. Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $5^x - 1 - m = 0$ có nghiệm.

- A. $m > 0$. B. $m > -1$. C. $m < 0$. D. $m < -1$.

Câu 9. Nghiệm của phương trình $\log_2 x = 3$ là

- A. 9. B. 6. C. 8. D. 5.

Câu 10. Tìm nghiệm của phương trình $\log_{64}(x+1) = \frac{1}{2}$.

- A. -1. B. 4. C. 7. D. $-\frac{1}{2}$.

- Câu 11.** Tập nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 1) = 3$ là
 A. $\{-3; 3\}$. B. $\{-3\}$. C. $\{3\}$. D. $\{-\sqrt{10}; \sqrt{10}\}$.
- Câu 12.** Số giao điểm của đồ thị hàm số $y = \log_2(x^2 + 3x)$ và đường thẳng $y = 2$ là
 A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.
- Câu 13.** Số nghiệm của phương trình $\log_3(x^2 - 6) = \log_3(x - 2) + 1$ là
 A. 1. B. 3. C. 2. D. 0.
- Câu 14.** Giải phương trình $\log_4(x + 1) + \log_4(x - 3) = 3$.
 A. $x = 1 \pm 2\sqrt{17}$. B. $x = 1 + 2\sqrt{17}$. C. $x = 5$. D. $x = 33$.
- Câu 15.** Tìm tập nghiệm S của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^x > 8$.
 A. $S = (-3; +\infty)$. B. $S = (-\infty; 3)$. C. $S = (-\infty; -3)$. D. $S = (3; +\infty)$.
- Câu 16.** Tập nghiệm của bất phương trình $2^{2x} < 2^{x+6}$ là
 A. $(0; 6)$. B. $(-\infty; 6)$. C. $(0; 64)$. D. $(6; +\infty)$.
- Câu 17.** Bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+4x} > \frac{1}{32}$ có tập nghiệm là $S = (a; b)$. Khi đó giá trị $b - a$ là
 A. 4. B. 2. C. 6. D. 8.
- Câu 18.** Số nghiệm nguyên của bất phương trình $(\sqrt{2})^{x^2-2x} \leq (\sqrt{2})^3$ là
 A. 3. B. 2. C. 5. D. 4.
- Câu 19.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,3}(3x - 2) \geq 0$ là
 A. $\left(\frac{2}{3}; +\infty\right)$. B. $\left(\frac{2}{3}; 1\right)$. C. $\left(\frac{2}{3}; 1\right]$. D. $(2; +\infty)$.
- Câu 20.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,5}(x - 3) < \log_{0,5}(x^2 - 4x + 3)$ là
 A. $(3; +\infty)$. B. \mathbb{R} . C. \emptyset . D. $(2; 3)$.
- Câu 21.** Tập nghiệm của bất phương trình $\log(2x - 1) \leq \log x$ là
 A. $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$. B. $(-\infty; 1]$. C. $\left(\frac{1}{2}; 1\right]$. D. $(0; 1]$.
- Câu 22.** Tập nghiệm S của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 7) > 0$ là
 A. $S = (-\infty; 2)$. B. $S = (2; 3)$.
 C. $S = (3; +\infty)$. D. $S = (-\infty; 2) \cup (3; +\infty)$.
- Câu 23.** Tìm tất cả giá trị của tham số m để bất phương trình $3^x + 1 \geq m$ có tập nghiệm là \mathbb{R} .
 A. $m < 0$. B. $m \leq 1$. C. $m \leq 0$. D. $m > 1$.
- Câu 24.** Ông An gửi tiền vào ngân hàng với thể thức lãi kép theo công thức $T_n = A(1 + r)^n$, trong đó A là số tiền gửi ban đầu, r là lãi suất, n là số kì hạn, T_n là số tiền cả gốc lẫn lãi sau n kì hạn gửi. Nếu ông An gửi 100 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6,5%/năm và không rút tiền gốc lẫn lãi định kì thì sau bao nhiêu năm ông ấy nhận được số tiền ít nhất là 250 triệu đồng.
 A. 3. B. 10. C. 15. D. 8.
- Câu 25.** Một người gửi tiết kiệm với lãi suất 0,7%/tháng và lãi hàng tháng được nhập vào vốn, hỏi sau bao nhiêu tháng người đó thu được gấp đôi số tiền ban đầu?
 A. 96. B. 97. C. 99. D. 100.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26. Cho hai hàm số $f(x) = 2^{x^2-3x+4}$ và $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-10}$. Xét tính đúng - sai các khẳng định sau

- a) Phương trình $f(x) = 1$ vô nghiệm.
- b) Phương trình $g(x) = 1$ có nghiệm là số thực dương.
- c) Phương trình $f(x) = g(x)$ có tập nghiệm là $S = \{-2; 3\}$.
- d) Bất phương trình $f(x) \leq g(x)$ có tập nghiệm là $S = \{1 - \sqrt{7}; 1 + \sqrt{7}\}$.

Câu 27. Cho phương trình $\log(x-1)^2 = \log(x+1)$. Xét tính đúng - sai các khẳng định sau

- a) Điều kiện $x > 1$.
- b) Phương trình đã cho có chung tập nghiệm với phương trình $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0$.
- c) Tổng các nghiệm của phương trình bằng 3.
- d) Biết phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2, (x_1 < x_2)$. Khi đó 3 số $x_1; x_2; 6$ tạo thành một cấp số cộng.

Câu 28. Cho hàm số $f(x) = \frac{\log_3(x+25) - 4}{5^{x^2} - 125^x}$. Xét tính đúng - sai các khẳng định sau

- a) Hàm số $f(x)$ có tập xác định là $\mathcal{D} = [-25; +\infty) \setminus \{0; 3\}$.
- b) Phương trình $f(x) = 0$ có duy nhất một nghiệm.
- c) Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) \geq 0$ là $(0; 3) \cup [56; +\infty)$.
- d) Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) < 0$ có tất cả 52 số nguyên dương.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 29. Cho hai hàm số $f(x) = x(x-1)(x-2) \cdots (x-10)$ và $g(x) = 2(x-1)(x-2) \cdots (x-10)$. Tính tổng tất cả các nghiệm của phương trình $2^{f(x)} = 2^{g(x)}$.

KQ:

Câu 30. Sự tăng trưởng của một loài vi khuẩn được tính theo công thức $f(t) = A \cdot e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỷ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t (tính theo giờ) là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu có 1000 con và sau 10 giờ là 5000 con. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giờ thì số lượng vi khuẩn tăng gấp 10 lần? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 31. Một nghiên cứu cho thấy một nhóm học sinh được cho xem cùng danh sách các loài động vật và được kiểm tra lại xem họ nhớ bao nhiêu % mỗi tháng. Sau t tháng, khả năng nhớ trung bình của nhóm học sinh được cho bởi công thức $M(t) = 75 - 20 \ln(t+1), t \geq 0$ (đơn vị %). Hỏi sau khoảng bao nhiêu tháng thì nhóm học sinh đó nhớ được danh sách dưới 10%?

KQ:

Câu 32. Để quảng bá cho sản phẩm A , một công ty dự định tổ chức quảng cáo theo hình thức quảng cáo trên truyền hình. Nghiên cứu của công ty cho thấy: Nếu sau n quảng cáo được phát thì tỉ lệ người xem quảng cáo đó mua sản phẩm A tuân theo công thức: $P(n) = \frac{1}{1 + 49 \cdot e^{-0,015n}}$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu lần quảng cáo để tỉ lệ người xem mua sản phẩm đạt trên 30%?

KQ:

Câu 33. Anh Nam muốn mua một ngôi nhà trị giá 500 triệu đồng sau 3 năm nữa. Biết rằng lãi suất hàng năm vẫn không đổi là 8% một năm. Vậy ngay từ bây giờ số tiền ít nhất anh Nam phải gửi tiết

kiệm vào ngân hàng theo thể thức lãi kép để có đủ tiền mua nhà (kết quả làm tròn đến hàng triệu) là bao nhiêu?

KQ:

Câu 34. Một người sử dụng xe máy có giá trị ban đầu là 40 triệu đồng. Sau mỗi năm, giá trị xe giảm 10% so với năm trước đó. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì giá trị xe nhỏ hơn 12 triệu đồng?

KQ:

Câu 35. (QG.2020 lần 1 – Mã đề 103). Trong năm 2019, diện tích rừng trồng mới của tỉnh A là 900 ha. Giả sử diện tích rừng trồng mới của tỉnh A mỗi năm tiếp theo đều tăng 6% so với diện tích rừng trồng mới của năm liền trước. Kể từ sau năm 2019, năm nào là năm đầu tiên tỉnh A có diện tích rừng trồng mới trong năm đó đạt trên 1700 ha?

KQ:

QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

§1. HAI ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC



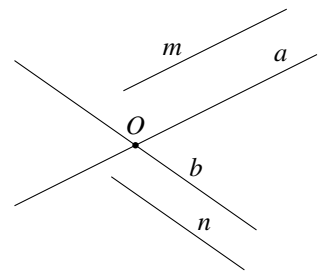
KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Góc giữa hai đường thẳng

Định nghĩa:

Góc giữa hai đường thẳng m và n trong không gian, kí hiệu (m, n) , là góc giữa hai đường thẳng a và b cùng đi qua một điểm và tương ứng song song với m và n . Ta tóm tắt cách dựng như sau:

- ① Chọn điểm O . Qua O , kẻ $a \parallel m$ và $b \parallel n$;
- ② Góc giữa m và n bằng góc giữa a và b .



Chú ý:

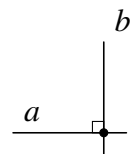
- ① Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng a, b thì $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.
- ② Nếu hai đường thẳng a, b song song hoặc trùng nhau thì $\varphi = 0^\circ$.

2 Hai đường thẳng vuông góc

Định nghĩa:

Hai đường thẳng được gọi là vuông góc nếu góc tạo bởi giữa chúng bằng 90° .

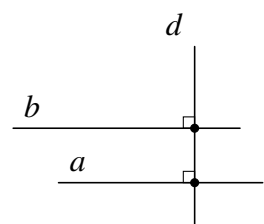
$$a \perp b \Leftrightarrow (a, b) = 90^\circ.$$



Định lý:

Nếu một đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì nó sẽ vuông góc với đường còn lại.

$$\begin{cases} a \parallel b \\ d \perp a \end{cases} \Rightarrow d \perp b.$$



! Hai đường thẳng vuông góc với nhau có thể chéo nhau hoặc cắt nhau.



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

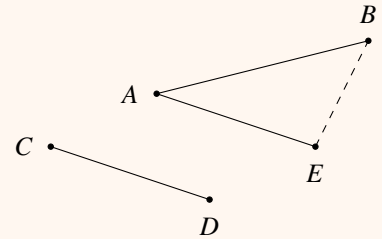
DT 1 Xác định góc giữa hai đường thẳng

Trong không gian, giả sử cần xác định góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Ta có thể thực hiện các bước như sau:

- ① Chọn gốc A , dựng $AE \parallel CD$;
- ② Kết luận góc giữa AB và CD bằng góc giữa AB và AE .
- ③ Xác định góc giữa AB và AE . Có thể dùng hệ quả định lý cô-sin:

$$\cos A = \frac{AB^2 + AE^2 - BE^2}{2AB \cdot AE}$$

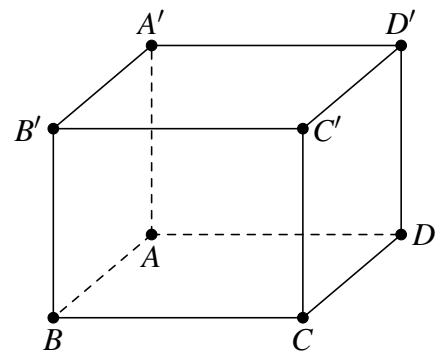
⚠ Ta có thể chọn điểm gốc khác điểm A , ưu tiên cho điểm dễ dựng hình.



≡ Bài 1.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh là a . Tính góc giữa các cặp đường thẳng sau đây:

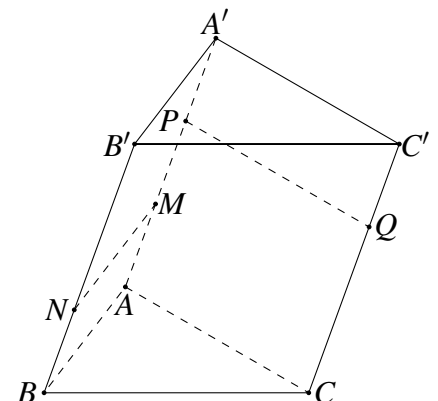
- a) AB và $A'D'$.
- b) AD và $A'C'$.
- c) BC' và $B'D'$.



≡ Bài 2.

Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC cân tại A và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Các điểm M, N lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và BB' thoả mãn $MN \parallel AB$, các điểm P, Q lần lượt thuộc hai đoạn thẳng AA' và CC' (P khác M) thoả mãn $PQ \parallel AC$ (hình bên dưới). Tính số đo các góc sau

- a) (AB, AC) .
- b) $(AB, B'C')$.
- c) (MN, PQ) .



≡ Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và AD , biết $AB = CD = a$, $MN = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD .

≡ Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = AB = AC = a\sqrt{2}$ và $BC = 2a$. Tính góc giữa hai đường thẳng AC và SB .

Để chứng minh hai đường thẳng Δ và Δ' vuông góc với nhau ta có thể sử dụng tính chất vuông góc trong mặt phẳng, cụ thể:

- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $\widehat{BAC} = 90^\circ \Leftrightarrow \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 90^\circ$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi $AB^2 + AC^2 = BC^2$.
- Tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi trung tuyến xuất phát từ A có độ dài bằng nửa cạnh BC .
- Nếu tam giác ABC cân tại A thì đường trung tuyến xuất phát từ A cũng là đường cao của tam giác.

Ngoài ra, chúng ta cũng sử dụng tính chất: Nếu $d \perp \Delta$ và $\Delta' \parallel d$ thì Δ' cũng vuông góc với đường thẳng Δ .

≡ Bài 5. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB = SC = a$, $\widehat{ASB} = 60^\circ$, $\widehat{BSC} = 90^\circ$, $\widehat{CSA} = 120^\circ$. Cho H là trung điểm AC . Chứng minh rằng

a) $SH \perp AC$.

b) $AB \perp BC$.

≡ Bài 6. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$. Lấy M, N và P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SB và SC . Chứng minh rằng AM vuông góc với NP .

≡ Bài 7. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều. Lấy M là trung điểm của cạnh BC . Chứng minh rằng AM vuông góc với $B'C'$.

≡ Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = x$ và tất cả các cạnh còn lại đều bằng 1. Chứng minh rằng $SA \perp SC$.

≡ Bài 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Các điểm M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC . Trên cạnh $B'C'$ lấy điểm P sao cho $C'P = x$ ($0 < x < a$). Trên cạnh $C'D'$ lấy điểm Q sao cho $C'Q = x$. Chứng minh rằng MN vuông góc với PQ .



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

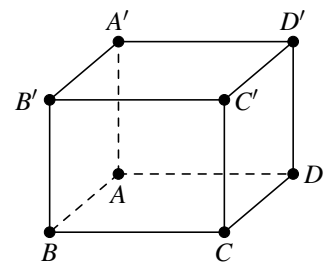
- A. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.
- B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- C. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì vuông góc với nhau.
- D. Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 2. Trong không gian cho đường thẳng Δ và điểm O . Qua O có bao nhiêu đường thẳng vuông góc với Δ ?

- A. 2.
- B. 1.
- C. 3.
- D. Vô số.

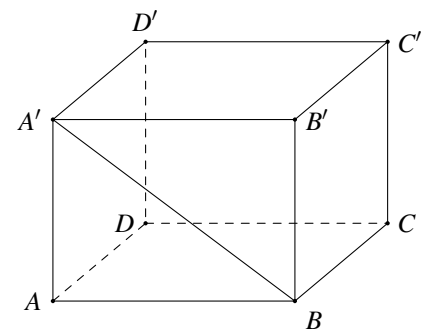
Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng AC và $B'D'$ bằng

- A. 90° .
- B. 60° .
- C. 30° .
- D. 45° .



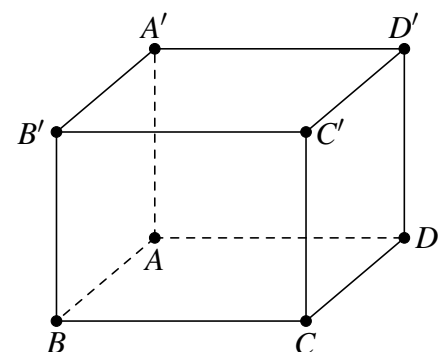
Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai đường thẳng BA' và CD bằng

- A. 45° .
- B. 30° .
- C. 60° .
- D. 90° .



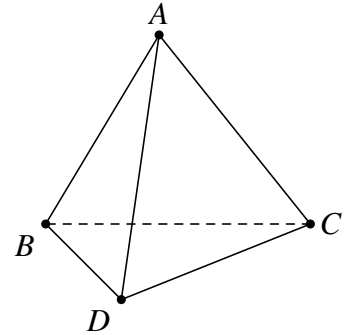
Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Góc giữa hai đường thẳng AB' và BC' bằng

- A. 90° .
- B. 60° .
- C. 30° .
- D. 45° .



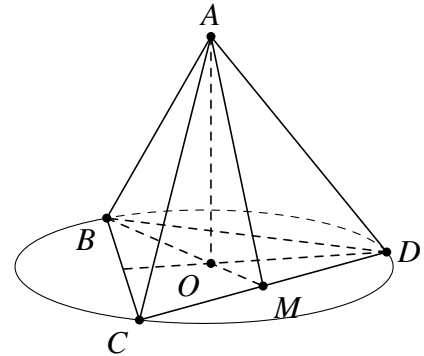
Câu 6. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Số đo góc giữa hai đường thẳng AB và CD bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 90° . D. 45° .



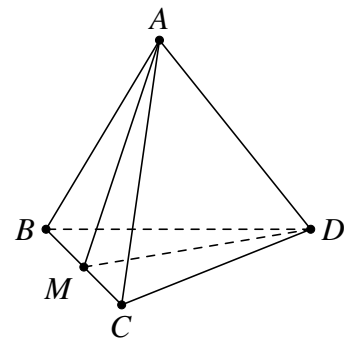
Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD . Góc giữa AO và CD bằng bao nhiêu?

- A. 0° . B. 90° . C. 30° . D. 60° .



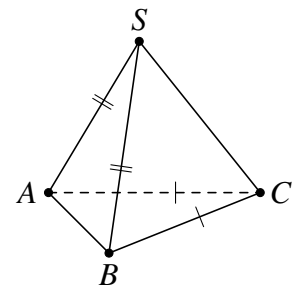
Câu 8. Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a , M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó $\cos(\widehat{AB, DM})$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. D. $\frac{1}{2}$.



Câu 9. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA = SB$ và $CA = CB$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SC và AB .

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .



Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Tính số đo của góc giữa hai đường thẳng chéo nhau SA và BC .

- A. 30° . B. 45° . C. 90° . D. 60° .

Câu 11. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = \frac{3}{2}AD$, $\widehat{CAB} = \widehat{DAB} = 60^\circ$, $CD = AD$. Gọi φ là góc giữa AB và CD . Chọn khẳng định đúng.

- A. $\cos \varphi = \frac{3}{4}$. B. $\varphi = 60^\circ$. C. $\varphi = 30^\circ$. D. $\cos \varphi = \frac{1}{4}$.

Câu 12. Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = CD$. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD . Góc (IE, JF) bằng

A. 30° .B. 45° .C. 60° .D. 90° .

Câu 13. Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = a, BD = 3a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC . Biết AC vuông góc với BD . Tính MN .

A. $MN = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

B. $MN = \frac{a\sqrt{10}}{2}$.

C. $MN = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

D. $MN = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SC và BC . Tính góc giữa IJ và CD .

A. 90° .B. 45° .C. 30° .D. 60° .

Câu 15. Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD . Mặt phẳng (P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q . Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình thang.

B. Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật.

D. Tứ giác không phải hình thang.

Câu 16. Trong không gian cho hai tam giác đều ABC và ABC' có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AC, CB, BC' và $C'A$. Tứ giác $MNPQ$ là hình gì?

A. Hình bình hành.

B. Hình chữ nhật.

C. Hình vuông.

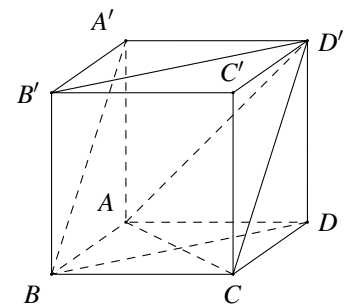
D. Hình thang.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

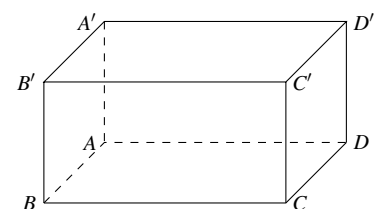
Câu 17. Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c . Xác định tính đúng sai các mệnh đề sau

a) Nếu $a \parallel b$ thì $(a, c) = (c, b)$.b) Nếu $c \parallel b$ thì $(a, b) = (a, c)$.c) Nếu $a \perp c, b \perp c$ thì $a \parallel b$.d) Nếu $a \perp c$ thì $(a, b) = (c, b)$.

Câu 18. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) $BD \parallel B'D'$.b) $(AC, B'D') = 90^\circ$.c) Tam giác ACD' đều.d) $(AC, A'B) = 30^\circ$.

Câu 19. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) Góc giữa hai đường thẳng $B'D'$ và $B'C$ bằng 30° .b) Góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và AD bằng 45° .c) Góc giữa hai đường thẳng $A'D'$ và CD bằng 90° .d) Góc giữa hai đường thẳng $B'C$ và AD' bằng 90° .

Câu 20. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a , M là trung điểm cạnh BC , N là trung điểm của AC . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

a) $MN \parallel AB$.

b) $MD = ND = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

c) $(AB, DM) = (MN, DM)$.

d) $\cos(AB, DM) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 21. Cho hình lăng trụ $ABC.MNP$ có ABC là tam giác vuông tại B , $\widehat{ACB} = 30^\circ$. Góc (MN, AC) bằng bao nhiêu độ?

KQ:

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA = a, SB = 2a, SC = 3a, \widehat{ASB} = \widehat{BSC} = 60^\circ, \widehat{CSA} = 90^\circ$. Gọi α là góc giữa hai đường thẳng SA và BC . Tính $\cos \alpha$ (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).

KQ:

Câu 23.

Một con dốc có dạng hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ (các mặt $AA'C'C, AA'B'B, BCC'B'$ là các hình chữ nhật; $\triangle ABC, \triangle A'B'C'$ là các tam giác vuông) với chiều cao bằng 5 m, độ dốc bằng 30° so với mặt đất. Biết con dốc rộng 8 m. Tính số đo góc (theo đơn vị độ) tạo bởi đường thẳng $A'C$ và $B'C'$. (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

KQ:

Câu 24.

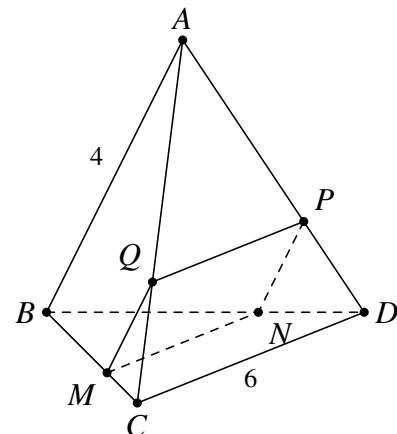
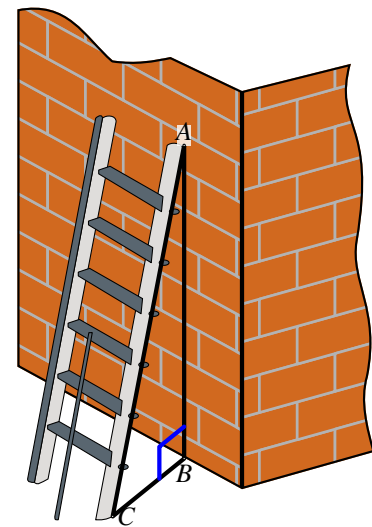
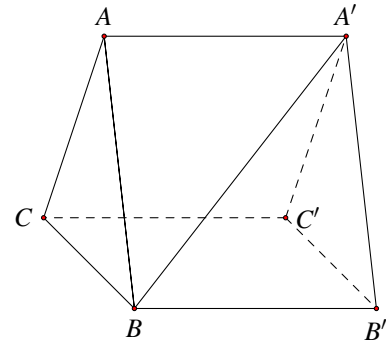
Một chiếc thang có dạng hình thang cân cao 6 m, hai chân cách nhau 80 cm, hai ngọn thang cách nhau 60 cm. Thang được dựa vào bờ tường như hình bên. Tính góc tạo giữa đường thẳng chân tường và cạnh cột thang (tính gần đúng theo đơn vị độ)

KQ:

Câu 25.

Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với $CD, AB = 4, CD = 6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC = 2BM$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với AB và CD . Tính diện tích thiết diện của P với tứ diện (kết quả làm tròn đến 2 chữ số thập phân).

KQ:



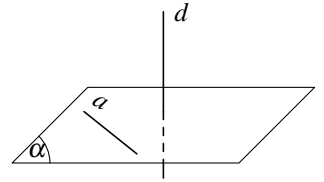
§2. ĐƯỜNG THẲNG VUÔNG GÓC VỚI MẶT PHẪNG



A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Đường thẳng d được gọi là vuông góc với mặt phẳng (α) nếu d vuông góc với mọi đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) . Khi đó ta còn nói (α) vuông góc d và kí hiệu $d \perp (\alpha)$ hoặc $(\alpha) \perp d$.

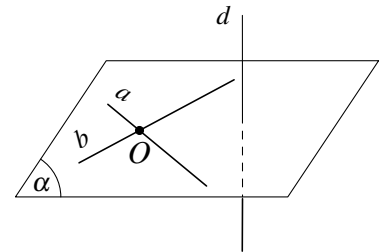


2 Điều kiện để đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cắt nhau cùng thuộc một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

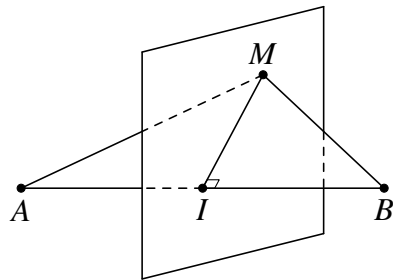
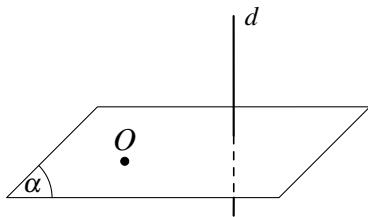


Tóm tắt định lí:
$$\begin{cases} a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = \emptyset \\ d \perp a \\ d \perp b \end{cases} \Rightarrow d \perp (\alpha).$$



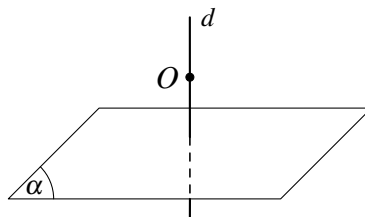
3 Tính chất

Tính chất 1: Có duy nhất một mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một đường thẳng cho trước.



Chú ý: Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB là mặt phẳng đi qua trung điểm I của đoạn thẳng AB và vuông góc với đường thẳng AB .

Tính chất 2: Có duy nhất một đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với một mặt phẳng cho trước.



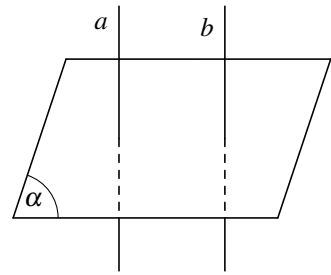
4 Liên hệ giữa quan hệ song song và quan hệ vuông góc của đường thẳng và mặt phẳng

Tính chất 3:

- a) Cho hai đường thẳng song song. Mặt phẳng nào vuông góc với đường thẳng này thì cũng vuông góc với đường thẳng kia.



Tóm tắt:
$$\begin{cases} a \parallel b \\ (\alpha) \perp a \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \perp b.$$



- b) Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.



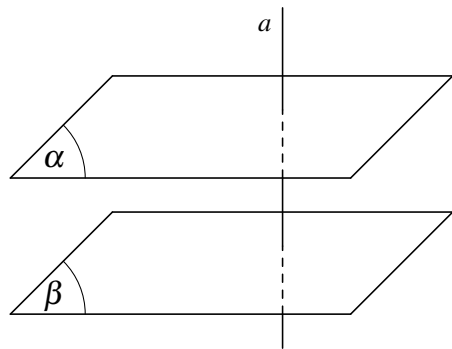
Tóm tắt:
$$\begin{cases} a \perp (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \\ a \neq b \end{cases} \Rightarrow a \parallel b.$$

Tính chất 4:

- a) Cho hai mặt phẳng song song. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng này thì cũng vuông góc với mặt phẳng kia.



Tóm tắt:
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel (\beta) \\ a \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow a \perp (\beta).$$



- b) Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.



Tóm tắt:
$$\begin{cases} (\alpha) \perp a \\ (\beta) \perp a \\ (\alpha) \neq (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \parallel (\beta).$$

Tính chất 5:

- a) Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Đường thẳng nào vuông góc với mặt phẳng (α) thì cũng vuông góc với a .

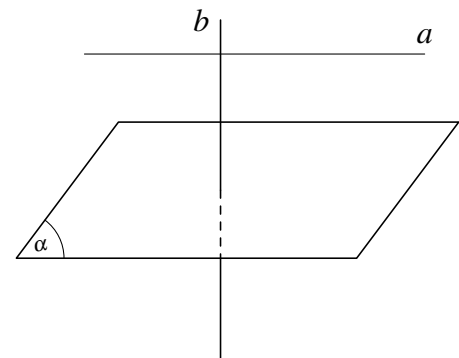


Tóm tắt:
$$\begin{cases} a \parallel (\alpha) \\ b \perp (\alpha) \end{cases} \Rightarrow b \perp a.$$

- b) Nếu một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đó) cùng vuông góc với một đường thẳng khác thì chúng song song với nhau.



Tóm tắt:
$$\begin{cases} a \not\subset (\alpha) \\ a \perp b \\ (\alpha) \perp b \end{cases} \Rightarrow a \parallel (\alpha).$$





PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Chứng minh đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

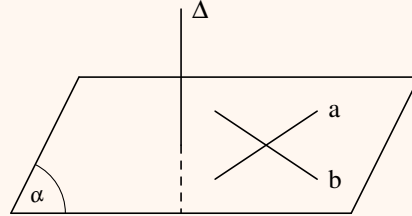
Một trong hai cách thường dùng:

- ① Chứng minh Δ vuông góc với hai đường thẳng a, b cắt nhau thuộc (α) .



Tóm tắt:

$$\begin{cases} a \text{ cắt } b \\ \Delta \perp a \Rightarrow \Delta \perp (\alpha) \\ \Delta \perp b \end{cases}$$

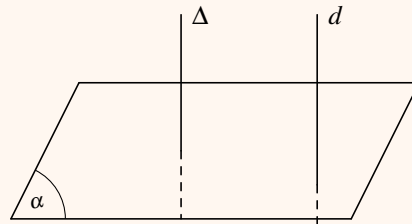


- ② Chứng minh Δ song song với đường thẳng d , trong đó d vuông góc với (α) .



Tóm tắt:

$$\begin{cases} \Delta \parallel d \\ d \perp (\alpha) \Rightarrow \Delta \perp (\alpha) \end{cases}$$



Khi giải toán, ta chú ý đến các "quan hệ" vuông góc thường gặp sau:

- ① Đường trung tuyến trong tam giác cân (hạ từ đỉnh cân), trong tam giác đều thì vuông góc với cạnh đáy.
- ② Đường chéo hình thoi, đường chéo hình vuông thì vuông góc nhau.
- ③ Xét trong tam giác, ta có thể kiểm tra quan hệ vuông góc của hai cạnh bằng cách thử định lý Pytago.
- ④ Trong không gian, khi đề bài cho giải thiết "SA vuông với đáy", ta có thể suy ra SA vuông với các đường nằm trong mặt đáy.

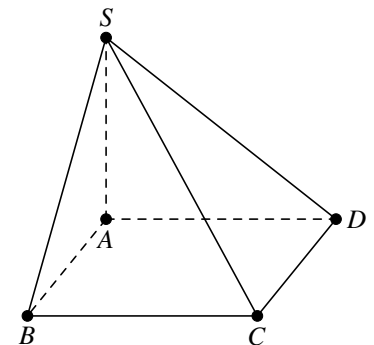
Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông và các cạnh bên bằng nhau. Gọi I là giao điểm của AC và BD . Chứng minh

- a) $SI \perp (ABCD)$. b) $AC \perp (SBD)$. c) $BD \perp (SAC)$.

Bài 2.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O ; SA vuông góc với $(ABCD)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên SB, SD . Chứng minh

- a) $BC \perp (SAB)$; $CD \perp (SAD)$.
b) $AH \perp (SBC)$; $AK \perp (SCD)$.
c) $SC \perp (AHK)$.

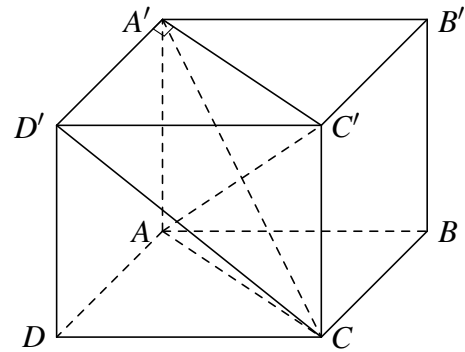


Bài 3. Cho tứ diện $ABCD$ có ABC và DBC là các tam giác đều cạnh a , $AD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Gọi I là trung điểm BC . Chứng minh rằng $AI \perp (BCD)$.

Bài 4. Cho hình chóp $S.ABC$ với đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA \perp (ABC)$, $SA = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi I, K lần lượt là trung điểm BC, SI . Chứng minh rằng $AK \perp (SBC)$.

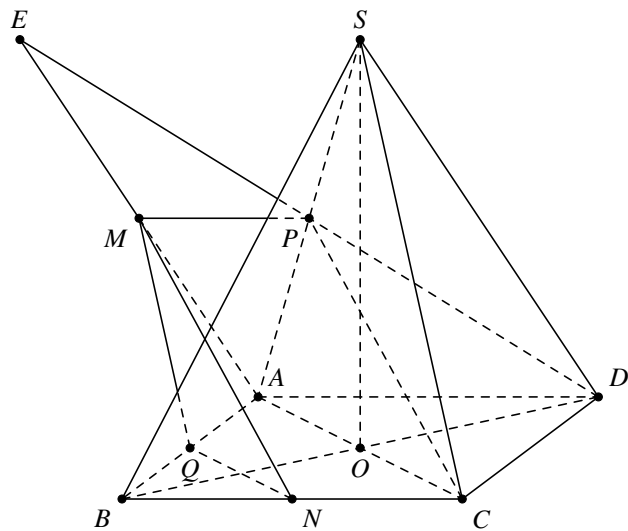
Bài 5.

Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các cạnh bên vuông góc với mặt đáy. $\triangle ACD$ vuông tại A , $AC = AA'$. Chứng minh rằng $AC' \perp (A'D'C)$.



Bài 6.

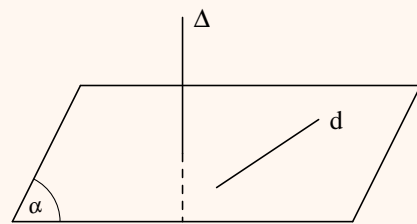
Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm P của SA . Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của AE, BC, AB . Chứng minh $BD \perp (MNQ)$.



DT 2 Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

Chứng minh đường thẳng Δ vuông góc với d , ta có thể chứng minh Δ vuông góc với mặt phẳng (α) chứa d , nghĩa là

$$\begin{cases} \Delta \perp (\alpha) \\ d \subset (\alpha) \end{cases} \Rightarrow \Delta \perp d.$$



Bài 7. Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = AC$ và $\widehat{SAC} = \widehat{SAB}$. Gọi M là trung điểm BC . Chứng minh $BC \perp SA$.

Bài 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, SA vuông góc $(ABCD)$.

- a) Chứng minh các mặt bên của hình chóp là các tam giác vuông.
- b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SD . Chứng minh $AH \perp SC$ và $BH \perp SD$.

Bài 9. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên CC' vuông góc với đáy và $CC' = a$.

- a) Gọi I là trung điểm của BC . Chứng minh $AI \perp BC'$.
- b) Gọi M là trung điểm của BB' . Chứng minh $BC' \perp AM$.
- c) Gọi K là điểm trên đoạn $A'B'$ sao cho $B'K = \frac{a}{4}$ và J là trung điểm của $B'C'$. Chứng minh $AM \perp MK$ và $AM \perp KJ$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Qua điểm O cho trước, có bao nhiêu mặt phẳng vuông góc với đường thẳng Δ cho trước?

- A. 3. B. 1. C. 2. D. Vô số.

Câu 2. Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P) , trong đó $a \perp (P)$. Chọn mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

- A. Nếu $b \parallel a$ thì $b \perp (P)$. B. Nếu $b \perp (P)$ thì $a \parallel b$.
C. Nếu $a \perp b$ thì $b \parallel (P)$. D. Nếu $b \subset (P)$ thì $b \perp a$.

Câu 3. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

- A. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song.
B. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song.
C. Một đường thẳng và một mặt phẳng (không chứa đường thẳng đã cho) cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thứ ba thì song song.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đó.
B. Có vô số mặt phẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với đường thẳng cho trước.
C. Có vô số đường thẳng đi qua một điểm cho trước và vuông góc với mặt phẳng cho trước.
D. Nếu một đường thẳng vuông góc với hai đường thẳng cùng nằm trong một mặt phẳng thì nó vuông góc với mặt phẳng ấy.

Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O . Biết rằng $SA = SC, SB = SD$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. $CD \perp (SBD)$. B. $AB \perp (SAC)$. C. $SO \perp (ABCD)$. D. $CD \perp AC$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $AB \perp (SAD)$. B. $AB \perp (SAC)$. C. $AB \perp (SCD)$. D. $AB \perp (SBC)$.

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy ABC vuông tại A có cạnh $SB \perp (ABC)$. AC vuông góc với mặt phẳng nào sau đây?

- A. (SBC) . B. (SAB) . C. (SBC) . D. (ABC) .

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là hình chiếu của A lên SD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $AM \perp (SBC)$. B. $AM \perp (SCD)$. C. $AM \perp CD$. D. $AM \perp SD$.

Câu 9. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Mặt phẳng nào dưới đây vuông góc với mặt đường thẳng BD ?

- A. (SAC) . B. (SCD) . C. (SAB) . D. (SBD) .

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H là chân đường cao kẻ từ A của tam giác SAB . Khẳng định nào dưới đây là **sai**?

- A. $AH \perp BC$. B. $AH \perp AC$. C. $AH \perp SC$. D. $SA \perp BC$.



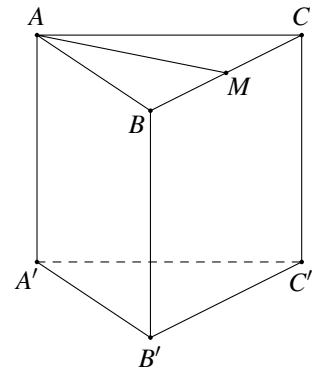
Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác cân tại C . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AB và SB . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $CH \perp AK$. B. $AK \perp SB$. C. $CH \perp SB$. D. $CH \perp SA$.

Câu 12.

Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có $AA' \perp AB, AA' \perp AC$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khẳng định nào dưới đây **sai**?

- A. $AA' \perp (ABC)$. B. $AA' \perp (A'B'C')$.
C. $AM \perp AA'$. D. $AM \perp (BCC'B')$.



Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB và SD , O là giao điểm của AC và BD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $SO \perp (ABCD)$. B. $EF \perp (SAC)$.
C. $EF \parallel (ABCD)$. D. $\widehat{(SA, (ABCD))} = 60^\circ$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $\widehat{BSC} = 120^\circ, \widehat{CSA} = 60^\circ, \widehat{ASB} = 90^\circ$ và $SA = SB = SC$. Gọi I là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) , khi đó

- A. I là trung điểm của AC . B. I là trọng tâm của tam giác ABC .
C. I là trung điểm của AB . D. I là trung điểm của BC .

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi AE, AF lần lượt là đường cao của tam giác SAB và tam giác SAD . Khẳng định nào dưới đây là đúng?

- A. $SC \perp (AEF)$. B. $SC \perp (AED)$. C. $SC \perp (AFB)$. D. $SC \perp (AEC)$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D , có $AD = CD = a, AB = 2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy $(ABCD)$, E là trung điểm của AB . Chỉ ra mệnh đề **sai** trong các mệnh đề dưới đây.

- A. $CE \perp (SAB)$. B. $CE \perp (SDC)$.
C. $CB \perp (SAC)$. D. Tam giác SDC vuông tại D .

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi H, K theo thứ tự là hình chiếu của A trên các cạnh SB, SD . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Tam giác SBC vuông. b) Tam giác SCD vuông.
c) $SC \perp (AHK)$. d) $HK \perp SC$.

Câu 18. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi OK là đường cao của tam giác OBC và OH là đường cao của tam giác OAK . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $OA \perp (OBC)$.
b) $OB \perp (OAC)$.
c) Các cạnh đối nhau trong tứ diện $OABC$ thì vuông góc với nhau.
d) OH không vuông góc với mặt phẳng (ABC) .

Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thoi tâm O và $SA = SC, SB = SD$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $SO \perp AC$. b) $SO \perp (ABCD)$. c) $AC \perp (SBD)$. d) $(AC, SB) = 60^\circ$.

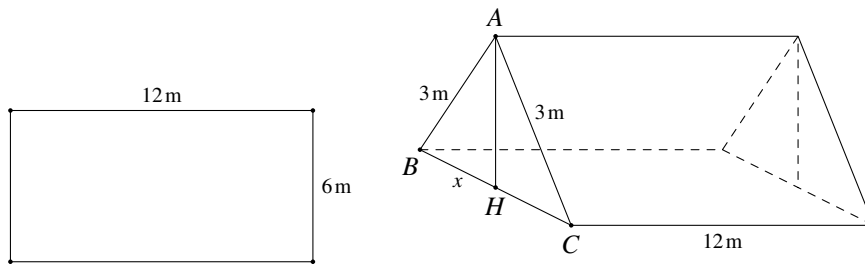
Câu 20. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và tam giác ABC vuông tại B . Gọi H, K là hình chiếu vuông góc của A trên các cạnh SB, SC . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Tam giác SBC cân tại B .
 b) AH vuông góc với mặt phẳng (SBC) .
 c) $(SC, HK) = 90^\circ$.
 d) Giả sử HK cắt BC tại D . Khi đó, $(AC, AD) = 90^\circ$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 21. Trong một đợt tổ chức cho học sinh đi dã ngoại tham quan. Để có chỗ nghỉ ngơi trong quá trình tham quan, các bạn học sinh đã dựng trên mặt đất bằng phẳng một chiếc lều bạt từ một tấm bạt hình chữ nhật có chiều dài là 12 m, chiều rộng 6 m bằng cách: Gấp đôi tấm bạt lại theo đoạn nối trung điểm hai cạnh là chiều rộng của tấm bạt sao cho hai mép chiều dài còn lại của tấm bạt sát mặt đất và cách nhau là x như hình vẽ. Em hãy tính chiều cao hạ từ đỉnh lều xuống mặt đất để diện tích cửa lều đạt lớn nhất, biết rằng cửa lều là một tam giác luôn có phương thẳng đứng.

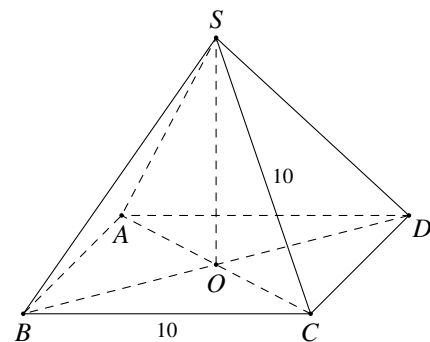
KQ:



Câu 22.

Bạn Sơn mua một mô hình kim tự tháp Ai Cập thu nhỏ để tặng sinh nhật bạn. Mô hình này có đáy là hình vuông, cạnh đáy bằng 10 cm, cạnh bên bằng nhau và có độ dài 10 cm. Bạn Sơn muốn cho mô hình này vào một hộp quà hình hộp chữ nhật. Em hãy giúp bạn Sơn chọn hộp quà có chiều cao tối thiểu bao nhiêu để cho vừa kim tự tháp trên.

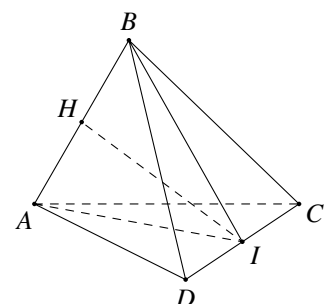
KQ:



Câu 23.

Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = x, (x > 0)$, các cạnh còn lại bằng nhau và bằng 4. Mặt phẳng (P) chứa cạnh AB và vuông góc với cạnh CD tại I . Khi diện tích tam giác IAB lớn nhất thì $x = \sqrt{a}$. Tìm a .

KQ:



§3. PHÉP CHIẾU VUÔNG GÓC. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

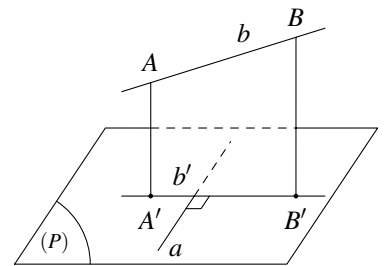
1 Phép chiếu vuông góc

Phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương Δ vuông góc với (P) được gọi là *phép chiếu vuông góc* lên mặt phẳng (P) .

- Vì phép chiếu vuông góc lên một mặt phẳng là một trường hợp đặc biệt của phép chiếu song song nên nó có mọi tính chất của phép chiếu song song.
- Phép chiếu vuông góc lên mặt phẳng (P) còn được gọi đơn giản là phép chiếu lên mặt phẳng (P) . Hình chiếu vuông góc \mathcal{H}' của hình \mathcal{H} trên mặt phẳng (P) còn được gọi là hình chiếu của \mathcal{H} trên mặt phẳng (P) .

2 Định lý ba đường vuông góc

Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α) và b là đường thẳng không thuộc (α) đồng thời không vuông góc với (α) . Gọi b' là hình chiếu vuông góc của b trên (α) . Khi đó a vuông góc với b khi và chỉ khi a vuông góc với b' .

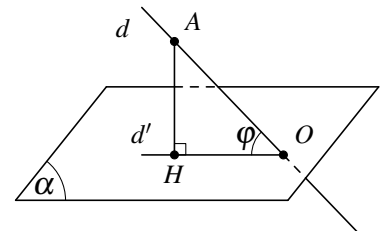


3 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α) .

- Trường hợp $d \perp (\alpha)$ thì góc giữa đường thẳng d và (α) bằng 90° .
- Trường hợp d không vuông góc với (α) thì góc giữa d và (α) bằng góc giữa d hình chiếu d' của nó trên (α) .

! Nếu φ là góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) thì ta luôn có $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$.





PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

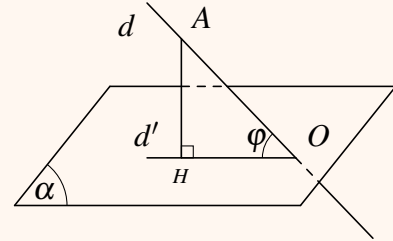
DT 1 Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (P) cắt nhau.

☀ Nếu $d \perp (P)$ thì $(d, (P)) = 90^\circ$.

☀ Nếu d không vuông (P) thì để xác định góc giữa d và (P) , ta thường làm như sau

- Xác định giao điểm O của d và (P) .
- Lấy một điểm A trên d (A khác O). Xác định hình chiếu vuông góc (vuông góc) H của A lên (P) . Lúc đó $(d, (P)) = (d, d') = \widehat{AOH}$.



⚠ $0^\circ \leq (d, (P)) \leq 90^\circ$.

≡ Bài 1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a , $SA = a\sqrt{6}$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Hãy xác định các góc giữa

- | | | |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| a) SB và $(ABCD)$. | b) SC và $(ABCD)$. | c) SO và $(ABCD)$. |
| d) SC và (SAB) . | e) SB và (SAC) . | f) BD và (SAC) . |

≡ Bài 2. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , $SA = 2a$ và vuông góc với đáy.

- a) Tính góc giữa SC với (ABC) .
- b) Tính góc giữa SC và mặt phẳng (SAB) .

≡ Bài 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , tâm O , SO vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, BC . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° . Tính góc giữa MN và (SBD) .

≡ Bài 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $AA' = a\sqrt{2}$. Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với trung điểm của $B'D'$. Tính góc giữa đường thẳng AA' và mặt phẳng $(A'B'C'D')$.

≡ Bài 5. Một chiếc cột cao 3 m được dựng vuông góc với mặt đất phẳng. Dưới ánh nắng mặt trời, bóng của cột trên mặt đất dài 5 m. Tính góc giữa đường thẳng chứa tia nắng mặt trời và mặt đất (tính gần đúng theo đơn vị độ, làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).





BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại C , $SA \perp (ABC)$. Gọi P là trung điểm của cạnh AB . Gọi Q là trung điểm của cạnh AC . Tìm hình chiếu của điểm C trên mặt phẳng (SAB) ?

- A. Điểm S . B. Điểm Q . C. Điểm A . D. Điểm P .

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi M là trung điểm của AB . Tìm hình chiếu của đường thẳng SC trên mặt phẳng $(ABCD)$?

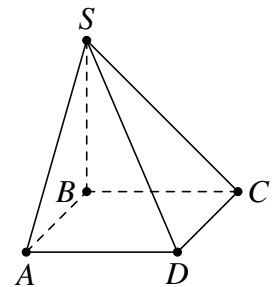
- A. SA . B. MC . C. BC . D. AC .

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$. Gọi I là trung điểm của AB . Tìm hình chiếu của đường thẳng AC trên mặt phẳng (SAB) ?

- A. SI . B. AB . C. CD . D. BC .

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SB \perp (ABCD)$ (xem hình bên), góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc nào sau đây?

- A. \widehat{SDB} . B. \widehat{DSB} .
C. \widehat{SDC} . D. \widehat{SDA} .



Câu 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với $(ABCD)$. Góc giữa cạnh SC và mặt (SAD) là góc nào sau đây?

- A. \widehat{SCD} . B. \widehat{CSA} . C. \widehat{CSD} . D. \widehat{SCA} .

Câu 6. Cho hình thoi $ABCD$ có tâm O . Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là.

- A. \widehat{SCO} . B. \widehat{ACB} . C. \widehat{SCD} . D. \widehat{SCB} .

Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng

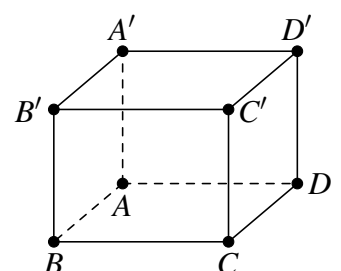
- A. 45° . B. 60° . C. 90° . D. 30° .

Câu 8. Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt đáy là góc giữa hai đường thẳng nào dưới đây?

- A. SB và BC . B. SB và SC . C. SB và AB . D. SA và SB .

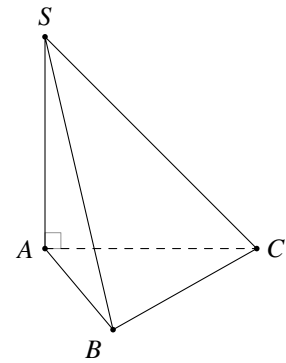
Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính góc φ của đường thẳng AA' với mặt phẳng $(ABCD)$.

- A. $\varphi = 45^\circ$. B. $\varphi = 90^\circ$.
C. $\varphi = 60^\circ$. D. $\varphi = 0^\circ$.



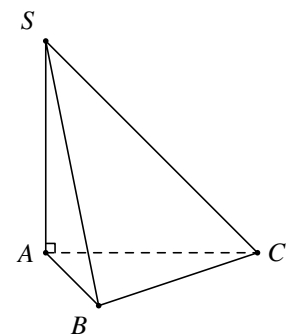
Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $SA = a\sqrt{3}$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Góc giữa cạnh bên SB và mặt đáy bằng

- A. 90° .
- B. 60° .
- C. 45° .
- D. 30° .



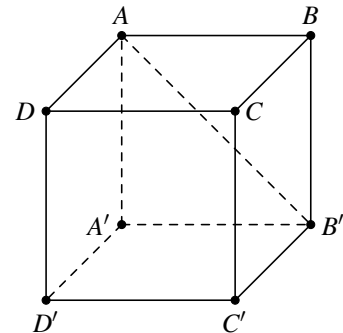
Câu 11. Cho hình chóp tam giác $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° .
- B. 45° .
- C. 30° .
- D. 90° .



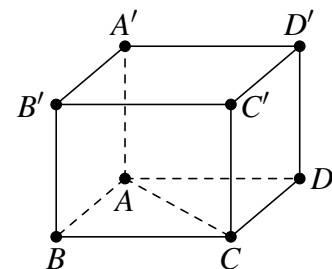
Câu 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

- A. 30° .
- B. 90° .
- C. 60° .
- D. 45° .



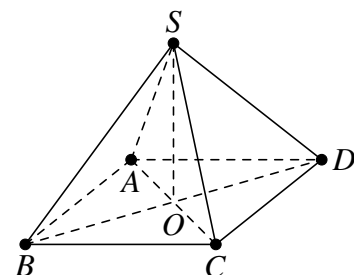
Câu 13. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi φ là góc giữa đường thẳng AC' với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \frac{1}{3}$.
- B. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{3}$.
- C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{6}}{2}$.
- D. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$.



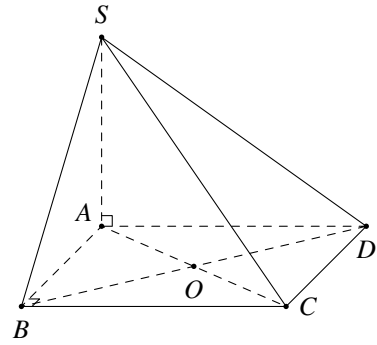
Câu 14. Cho hình chóp tứ giác đều $SABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi φ là góc giữa cạnh bên với mặt phẳng $(ABCD)$. Tính $\cos \varphi$.

- A. $\cos \varphi = \sqrt{2}$.
- B. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$.
- C. $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
- D. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$.



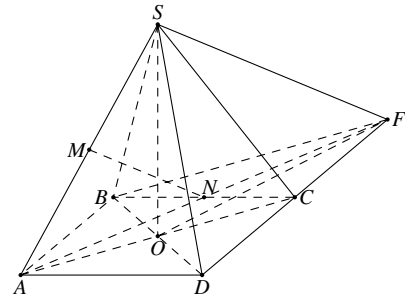
Câu 19. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, tâm O , $AB = a\sqrt{2}$, $AD = a$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) OD là hình chiếu vuông góc của SD lên $(ABCD)$.
- b) $(SB, (SAC)) = \widehat{BSO}$.
- c) $(SC, (ABCD)) = 30^\circ$.
- d) $\sin(SB, (SAC)) = \frac{\sqrt{2}}{3}$.



Câu 20. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , tâm O . Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và BC . Gọi F là giao điểm của AN và CD . Biết rằng góc giữa MN và $(ABCD)$ bằng 60° .

- a) Góc giữa $(SD, (ABCD)) = \widehat{SDA}$.
- b) Góc giữa $(MN, (ABCD)) = (SF, (ABCD))$.
- c) Góc giữa $(MN, (SBD))$ và $(SF, (SBD))$ bằng nhau.
- d) Cosin góc giữa MN và mặt phẳng (SBD) bằng $\frac{1}{\sqrt{5}}$.



PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 21.

Ở các thành phố lớn, để giảm tình trạng tắc nghẽn giao thông và nhằm đảm bảo an toàn thì ở các ngã tư người ta thường xây dựng các cầu vượt dành cho người đi bộ. Hỏi những phương tiện tham gia giao thông phải có chiều cao tối đa dưới bao nhiêu mét để có thể di chuyển an toàn bên dưới cầu vượt. Biết rằng đường dẫn lên cầu dài 12 mét và hợp với đường một góc 30° .



KQ:

Câu 22. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = a$, $AD = 2a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy. Tính góc (đơn vị độ) giữa đường thẳng SC với mặt phẳng (SAD) .

KQ:

Câu 23. Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\widehat{BAD} = 60^\circ$. Hình chiếu vuông góc của B' xuống mặt đáy trùng với giao điểm hai đường chéo của đáy và cạnh bên $BB' = a$. Tính góc (đơn vị độ) giữa cạnh bên và mặt đáy.

KQ:

Câu 24. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2\sqrt{2}$, $AA' = 4$. Tính góc giữa đường thẳng $A'C$ với mặt phẳng $(AA'B'B)$.

KQ:

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = 2a$, $AD = a\sqrt{2}$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) . Biết $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{a}}$, tìm a .

KQ:

≡ Bài 11. Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB cạnh a nằm trong hai mặt phẳng vuông góc nhau. Gọi I và F lần lượt là trung điểm AB và AD . Chứng minh rằng $(SID) \perp (SFC)$.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Trong khẳng định sau về lăng trụ đều, khẳng định nào **sai**?

- A. Đáy là đa giác đều.
- B. Các mặt bên là những hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy.
- C. Các mặt bên là những hình vuông.
- D. Các cạnh bên là những đường cao.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Nếu hình hộp có bốn đường chéo bằng nhau thì nó là hình lập phương.
- B. Nếu hình hộp có sáu mặt bằng nhau thì nó là hình lập phương.
- C. Nếu hình hộp có hai mặt là hình vuông thì nó là hình lập phương.
- D. Nếu hình hộp có ba mặt chung một đỉnh là hình vuông thì nó là hình lập phương.

Câu 3. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. Hình lăng trụ đứng có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.
- B. Hình lăng trụ đứng là hình lăng trụ đều.
- C. Hình lăng trụ tứ giác đều là hình lập phương.
- D. Hình lăng trụ có đáy là một đa giác đều là hình lăng trụ đều.

Câu 4. Khẳng định nào sau đây **sai** khi nói về hình chóp tứ giác đều?

- A. Các cạnh bên bằng nhau.
- B. Các mặt bên là những tam giác đều.
- C. Các cạnh đáy bằng nhau.
- D. Mặt đáy là hình vuông.

Câu 5. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , chiều cao của lăng trụ là cạnh

- A. BB' .
- B. AC' .
- C. AB .
- D. AB' .

Câu 6. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến của hai mặt phẳng sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- B. Hai mặt phẳng vuông góc với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng này sẽ vuông góc với mặt phẳng kia.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì vuông góc với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.

Câu 7. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

- A. Qua một đường thẳng có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một đường thẳng cho trước.
- B. Qua một điểm có duy nhất một mặt phẳng vuông góc với một mặt phẳng cho trước.
- C. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một mặt phẳng thì song song với nhau.
- D. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với một đường thẳng thì song song với nhau.

Câu 8. Hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì

- A. Song song với nhau.
- B. Trùng nhau.
- C. Không song song với nhau.
- D. Hoặc song song với nhau hoặc cắt nhau theo giao tuyến vuông góc với mặt phẳng thứ ba.



Câu 9. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng bao nhiêu?

- A. 60° . B. 0° . C. 45° . D. 90° .

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và $AB \perp BC$, gọi I là trung điểm BC . Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) là góc nào sau đây?

- A. \widehat{SCA} . B. \widehat{SBA} . C. \widehat{SIA} . D. \widehat{SCB} .

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , SA vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm của AC . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $(SBC) \perp (SAC)$. B. $(SBM) \perp (SAC)$. C. $BM \perp AC$. D. $(SAB) \perp (SBC)$.

Câu 12. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có O là giao điểm của AC và BD , cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(SAC) \perp (ABCD)$. B. $(SBC) \perp (SAC)$. C. $(SAC) \perp (SCD)$. D. $(SAD) \perp (SBD)$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ trùng với trung điểm cạnh AB . Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A. $(SBC) \perp (SAB)$. B. $(SAB) \perp (ABCD)$. C. $(SBD) \perp (ABCD)$. D. $(SHC) \perp (ABCD)$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$. Gọi I là hình chiếu của A trên BC , α là góc giữa đường thẳng SI và mặt phẳng (ABC) , β là số đo của góc nhị diện $[S, BC, A]$. Phát biểu nào sau đây là đúng?

- A. $\alpha = 90^\circ - \beta$. B. $\alpha = 180^\circ - \beta$. C. $\alpha = 90^\circ + \beta$. D. $\alpha = \beta$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi α là số đo của các góc nhị diện $[A, BC, S]$. Tính $\cos \alpha$.

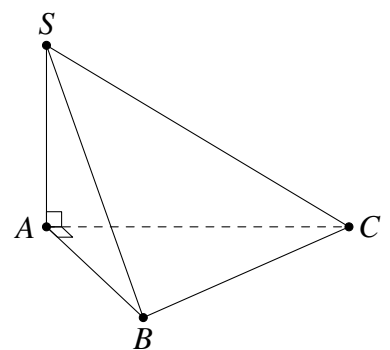
- A. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{5}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $AB \perp BC$, $SA = AB = 3a$, $BC = 4a$. Gọi α là số đo của các góc nhị diện $[B, SA, C]$. Tính $\cos \alpha$.

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{2}$. B. $\cos \alpha = \frac{3}{5}$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{5}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Câu 17. Hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a}{2}$, tam giác ABC vuông tại A , $AC = a\sqrt{3}$, $AB = a$. Tính góc giữa (SBC) với (ABC) .

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

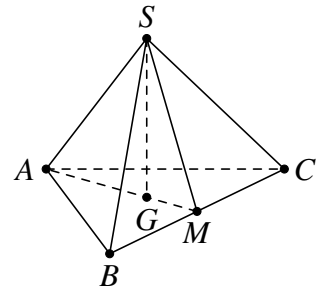


Câu 18. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) .

- A. 45° . B. 90° . C. 60° . D. 30° .

Câu 19. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có $AB = a$, $SA = 2a$. Gọi φ là góc giữa mặt bên và mặt đáy. Tính $\cos \varphi$.

- A. $\frac{\sqrt{5}}{15}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$. C. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.



Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên $SA = x$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định x để hai mặt phẳng (SBC) và (SCD) tạo với nhau một góc 60° .

- A. $x = \frac{3a}{2}$. B. $x = a$. C. $x = 2a$. D. $x = \frac{a}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC là tam giác đều. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $(SAB) \perp (ABC)$.
 b) $(SAC) \perp (ABC)$.
 c) Gọi H là trung điểm của cạnh BC . Khi đó \widehat{AHS} là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .
 d) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là \widehat{ACB} .

Câu 22. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a , $A'A = A'B = A'C = a$. O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , H là trung điểm BC . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Góc giữa hai mặt phẳng $(A'AH)$ và (ABC) bằng 90° .
 b) Góc giữa hai mặt phẳng $(A'AH)$ và $(BCC'B')$ bằng 90° .
 c) Góc giữa hai mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) bằng 90° .
 d) Gọi α là góc giữa mặt phẳng $(A'BC)$ và (ABC) . Khi đó $\tan \alpha = 2\sqrt{2}$.

Câu 23. Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$, $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Gọi I, J là trung điểm của AD, BC . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $(SAC) \perp (ABCD)$. b) $(SAC) \perp (SBD)$.
 c) $(SIJ) \perp (SBC)$. d) $((SAD), (SBC)) = 60^\circ$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A có $AB = 2a$, $AD = DC = a$, $SA = a$ và $SA \perp (ABCD)$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $(SAC) \perp (ABCD)$. b) $(SAC) \perp (SBC)$.
 c) $CB \perp (SAD)$. d) $\sin((SAB), (SBC)) = \frac{5}{\sqrt{30}}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 25. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SC \perp (ABCD)$, $CD = a$, $SB = \sqrt{21}a$, $SC = \sqrt{5}a$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[C, AB, S]$ (tính theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

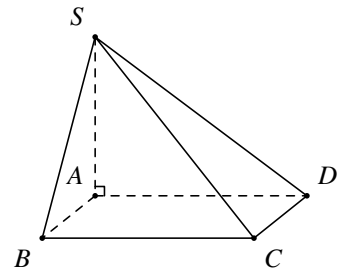
Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật, $SD \perp (ABCD)$, $DA = 5a, DC = 9a, SD = 6a$. Tính số đo góc phẳng nhị diện $[D, AC, S]$ (tính theo đơn vị độ, làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 27.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông, $SA \perp (ABCD)$, $SA = AB$. Góc giữa (SBC) và $(ABCD)$ có số đo bằng bao nhiêu? (tính theo đơn vị độ)

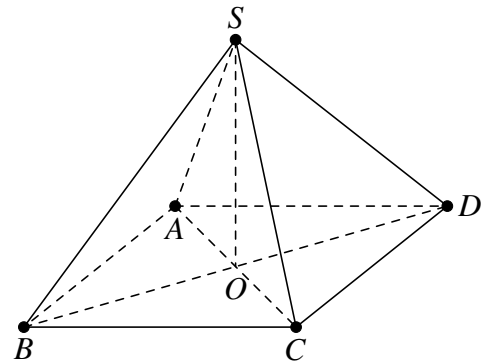
KQ:



Câu 28.

Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a . Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và (SCD) . Tính $\tan \varphi$ (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:



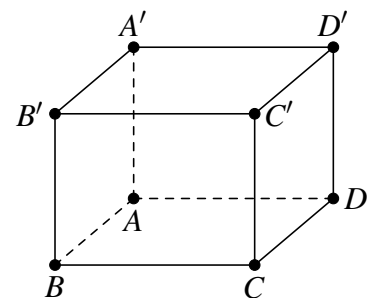
Câu 29. Trong hình chóp tam giác đều có góc giữa cạnh bên và mặt đáy bằng 60° . Gọi φ là góc giữa mặt phẳng bên với mặt đáy. Tính $\tan \varphi$ (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 30.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi O' là tâm của hình vuông $A'B'C'D'$ và α là góc giữa hai mặt phẳng $(O'AB)$ và $(ABCD)$. Tính $\tan \alpha$ (làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:



§5. KHOẢNG CÁCH



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng

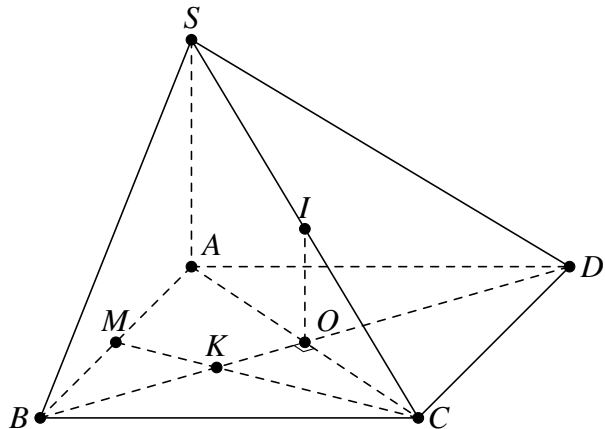
Để tính khoảng cách từ điểm O tới đường thẳng d , ta thực hiện các bước sau:

- Trong mặt phẳng $(O; d)$, hạ $OH \perp d$ tại H .
- Suy ra $d(O, d) = OH$.

≡ Bài 1.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , tâm O , $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi I, M theo thứ tự là trung điểm của SC, AB .

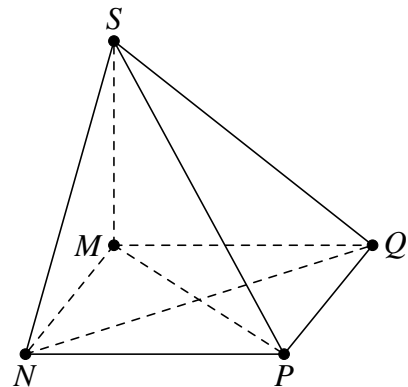
- Chứng minh $OI \perp (ABCD)$.
- Tính khoảng cách từ I đến CM , từ đó suy ra khoảng cách từ S tới CM .



≡ Bài 2.

Cho hình chóp $S.MNPQ$ có đáy là hình thoi cạnh a , SM vuông góc với mặt phẳng $(MNPQ)$, $SM = a\sqrt{3}$ và góc $\widehat{MNP} = 60^\circ$.

- Chứng minh rằng $NQ \perp SP$.
- Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và PQ .
- Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên (SPQ) . Tính độ dài MH .



DT

2

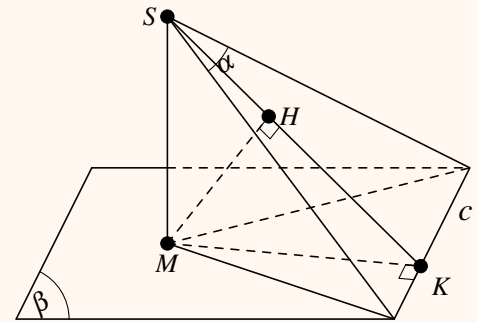
Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Dựng khoảng cách từ M đến (α) , ta chú ý hai trường hợp đặc biệt sau:

Trường hợp 1: Nếu M là hình chiếu vuông góc của một điểm $S \in (\alpha)$ xuống (β) . Khi đó khoảng cách từ M đến (α) được dựng như sau:

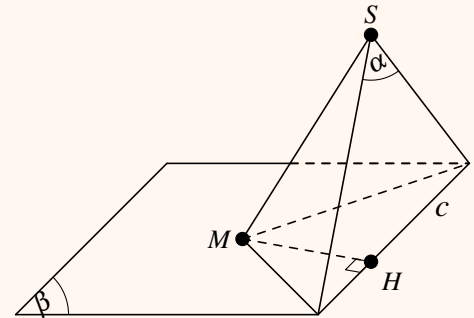
- Bước 1. Dựng MK vuông góc với giao tuyến c tại K ;
- Bước 2. Dựng SK .
- Bước 3. Dựng $MH \perp SK$ tại H . Suy ra

$$d(M, (\alpha)) = MH.$$



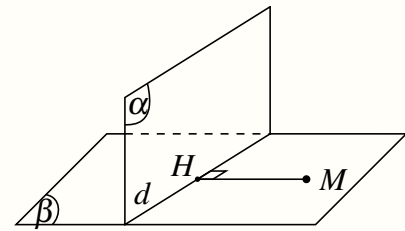
Trường hợp 2: Nếu $M \in (\beta)$ mà $(\alpha) \perp (\beta)$ thì khoảng cách từ M đến (α) được dựng như sau:

- Kẻ MH vuông góc với giao tuyến c tại H
- Suy ra $d(M, (\alpha)) = MH$.



Trường hợp tổng quát, ta làm như sau:

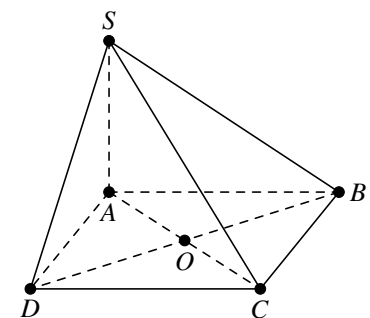
- Dựng mặt phẳng (β) chứa điểm M và $(\beta) \perp (\alpha)$
- Xác định giao tuyến d của (β) và (α) .
- Kẻ $MH \perp d$ tại H thì $MH \perp (\alpha)$. Suy ra $d(M, (\alpha)) = MH$.



≡ Bài 3.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O , $AB = a\sqrt{2}$. Cạnh bên $SA = 2a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$.

- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD) .
- Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAC) .
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) .
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SDC) .
- Tính khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBD) .



≡ Bài 4. Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O , $AB = 2a$, $SA = 4a$. Tính

- Khoảng cách từ O đến (SAB) .
- Khoảng cách từ C đến (SAB) .

≡ Bài 5. Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với $(ABCD)$, tứ giác $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) .

DT

3

Khoảng cách giữa đường và mặt phẳng song song. Khoảng cách giữa hai mặt song song

- ✔ **Cho đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) :** Để tính khoảng cách giữa d và (α) ta thực hiện
 - Chọn điểm A trên d sao cho khoảng cách từ A tới (α) được xác định dễ nhất.
 - Kết luận $d(d; (\alpha)) = d(A, (\alpha))$.
- ✔ **Cho hai mặt phẳng song song $(\alpha), (\beta)$:** Để tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng ta thực hiện các bước
 - Chọn điểm A trên (α) sao cho khoảng cách từ A tới (β) được xác định dễ nhất.
 - Kết luận $d((\beta); (\alpha)) = d(A, (\beta))$.

≡ Bài 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$.

- a) Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) ;
- b) Tính khoảng cách từ điểm AD đến mặt phẳng (SBC) .

≡ Bài 7. Cho một hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, đáy là các hình thoi có cạnh bằng a , $\widehat{BAD} = 120^\circ$, $AA' = h$. Tính các khoảng cách giữa $A'C'$ và $(ABCD)$, AA' và $(BDD'B')$.

≡ Bài 8. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Tính theo a :

- a) Khoảng cách giữa đường thẳng DD' và $(AA'C'C)$.
- b) Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AA'D'D)$ và $(BB'C'C)$.

DT

4

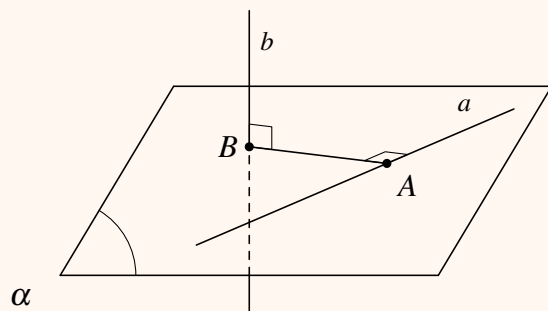
Đoạn vuông góc chung. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

Dựng đoạn vuông góc chung:

⚙ Trường hợp 1:

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau và $a \perp b$.

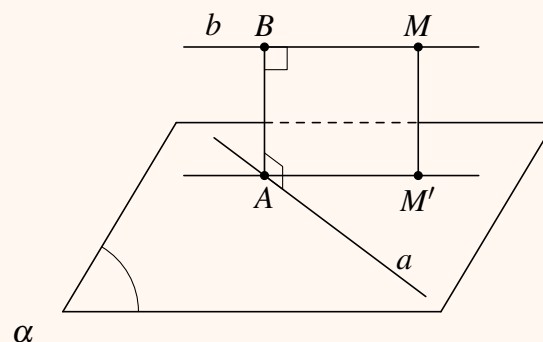
- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và vuông góc với b tại B .
- Trong (α) dựng $BA \perp a$ tại A , ta được độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .



⚙ Trường hợp 2:

Giả sử a và b là hai đường thẳng chéo nhau nhưng không vuông góc với nhau.

- Ta dựng mặt phẳng (α) chứa a và song song với b .
- Lấy một điểm M tùy ý trên b và dựng MM' vuông góc với (α) tại M' .
- Từ M' dựng b' song song với b cắt a tại A .
- Từ A dựng AB song song với MM' cắt b tại B , độ dài đoạn AB là khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau a và b .



⚠ Nhận xét:

- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa một trong hai đường thẳng đó và mặt phẳng song song với nó chứa đường thẳng còn lại.
- Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.

≡ Bài 9. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC vuông góc với nhau đôi một và $OA = OB = OC = a$. Gọi I là trung điểm của BC . Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của

a) OA và BC .

b) AI và OC .

≡ Bài 10. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A với $AB = a$, $AC = 2a$; cạnh bên $AA' = 2a$. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng BC' và AA' .

≡ Bài 11. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với đáy và $SA = a$. M là trung điểm của SB . Tính khoảng cách giữa các đường thẳng

a) SC và BD .

b) AC và SD .

c) SD và AM .

≡ Bài 12. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$.

≡ Bài 13. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng $\sqrt{11}$. Gọi I là trung điểm của cạnh CD . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BI .



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau là khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng tới đường thẳng.
- B. Khoảng cách từ một điểm tới một đường thẳng là khoảng cách từ điểm đó tới một điểm bất kì của đường thẳng.
- C. Khoảng cách từ một điểm tới một mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó tới một điểm bất kì của mặt phẳng.
- D. Khoảng cách giữa một đường thẳng và một mặt phẳng song song với nhau là khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng tới mặt phẳng.

Câu 2. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

- A. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song với nó đồng thời chứa đường thẳng kia.
- B. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc đường thẳng này đến đường thẳng kia.
- C. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau bằng khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song lần lượt chứa hai đường thẳng đó.
- D. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng đó.

Câu 3. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

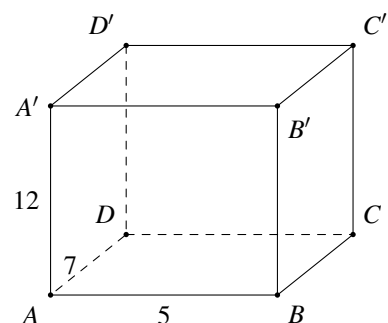
- A. a .
- B. $a\sqrt{2}$.
- C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- D. $a\sqrt{3}$.

Câu 4. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và $A'B'$.

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
- B. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
- C. $a\sqrt{2}$.
- D. $2a$.

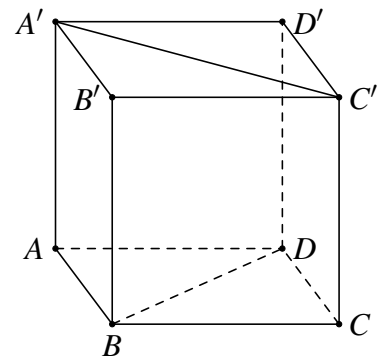
Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có ba kích thước 5; 7; 12 (xem hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng

- A. 7.
- B. 12.
- C. $\sqrt{74}$.
- D. 5.



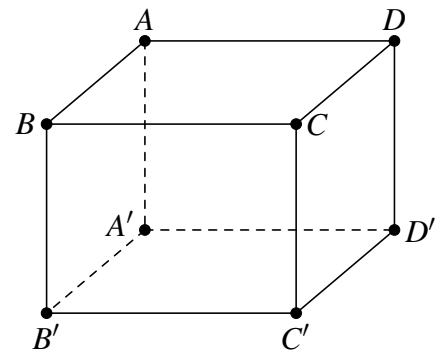
Câu 6. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a như hình vẽ bên. Khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và $A'C'$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. B. $\sqrt{2}a$.
C. a . D. $\sqrt{3}a$.



Câu 7. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng BB' và $A'C'$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $a\sqrt{2}$. C. $a\sqrt{3}$. D. a .



Câu 8. Cho hình chóp $A.BCD$ có $AC \perp (BCD)$ và BCD là tam giác đều cạnh bằng a , biết $AC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ A đến đường thẳng BD bằng

- A. $\frac{a\sqrt{11}}{2}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{4a\sqrt{5}}{3}$. D. $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng BC' bằng

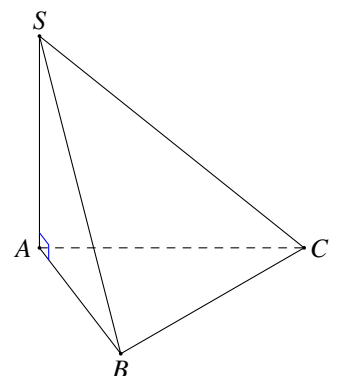
- A. $\frac{a\sqrt{7}}{2}$. B. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Cạnh bên $SA = a\sqrt{3}$ và vuông góc với mặt đáy (ABC) . Tính khoảng cách d từ A đến mặt phẳng (SBC)

- A. $d = a$. B. $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$. D. $d = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 11. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = a$ và tam giác ABC đều cạnh a (tham khảo hình bên). Tính theo a khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) .

- A. a . B. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{\sqrt{21}a}{7}$.



Câu 12. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình chữ nhật tâm I , $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$; H là trung điểm của AI . Biết SH vuông góc với đáy và tam giác SAC vuông tại S . Tính khoảng cách d từ điểm A đến mặt phẳng (SBD) .

A. $d = \frac{a\sqrt{15}}{5}$.

B. $d = a\sqrt{15}$.

C. $d = \frac{a\sqrt{15}}{15}$.

D. $d = \frac{3a\sqrt{15}}{5}$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O , SA vuông góc với mặt đáy. Hỏi mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $d(C, (SAB)) = d(C, (SAD))$.

B. $d(A, (SBD)) = d(B, (SAC))$.

C. $d(B, (SCD)) = 2d(O, (SCD))$.

D. $d(S, (ABCD)) = SA$.

Câu 14. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$. Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAC) .

A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. $\frac{a}{2}$.

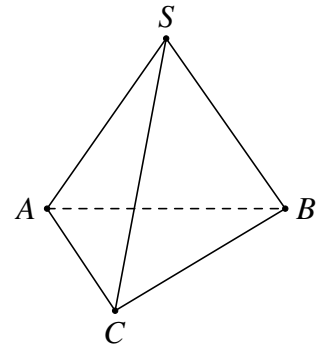
Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SAB) .

A. $a\sqrt{6}$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $2a\sqrt{3}$.



Câu 16. Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng AA' và BC .

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. a .

C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 17. Cho hình chóp đều $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh là $2a$, cạnh bên bằng $3a$. Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SCD) bằng

A. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{14}}{2}$.

C. $a\sqrt{14}$.

D. $\frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Câu 18. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a và mặt phẳng (SBC) vuông góc với mặt đáy. Tính theo a khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC .

A. $\frac{a\sqrt{22}}{11}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{11}}{22}$.

D. $\frac{a\sqrt{4}}{3}$.

Câu 19. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh đáy bằng 2. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD .

A. $\sqrt{2}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. 1.

D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 20. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với đường chéo $AC = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD là

A. $a\sqrt{2}$.

B. $a\sqrt{3}$.

C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

D. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

Câu 21. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy $(ABCD)$, góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và AC bằng

A. $a\sqrt{11}$.

B. $\frac{a\sqrt{10}}{5}$.

C. $\frac{2a\sqrt{11}}{3}$.

D. $a\sqrt{3}$.

Câu 22. Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, $OA = a, OB = OC = 2a$. Gọi M là trung điểm của BC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng OM và AB bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. $\frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. a . D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 23. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a, SO vuông góc với mặt phẳng $ABCD$ và $SO = a$. Khoảng cách giữa SC và AB bằng

- A. $\frac{2a\sqrt{5}}{15}$. B. $\frac{2a\sqrt{3}}{15}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{15}$. D. $\frac{a\sqrt{5}}{5}$.

Câu 24. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $SA \perp (ABCD)$, đáy $ABCD$ là hình thang vuông có chiều cao $AB = a$. Gọi I là J lần lượt là trung điểm của AB và CD . Tính khoảng cách giữa IJ và (SAD) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{a}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. D. $\frac{a}{2}$.

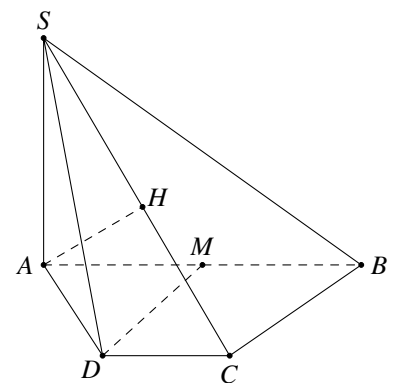
Câu 25. Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M, N, P là trung điểm của các cạnh $AD, CD, A'D'$. Tính khoảng cách giữa CC' và mặt phẳng (MNP) .

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. D. $a\sqrt{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB = 2a, AD = DC = CB = a, SA$ vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 3a$ (Hình bên). Gọi M là trung điểm cạnh AB . Kẻ $AH \perp SC$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) DM là đoạn vuông góc chung của SB và CD .
 b) Khoảng cách từ điểm A đến mp (SBC) bằng $\frac{3a}{2}$.
 c) Khoảng cách $d(M, (SBC)) = \frac{2}{3}d(A, (SBC))$.
 d) Khoảng cách giữa cạnh SB và DM bằng $\frac{3a}{4}$.



Câu 27. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh $a. SAD$ là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M là trung điểm AD, H là chân đường vuông góc hạ từ M lên SO . Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

- a) Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng $(ABCD)$ là SM .
 b) Khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (SAC) bằng $2MH$.
 c) Khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SAD) bằng a .
 d) Khoảng cách giữa AB và SD là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 28. Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC), SA = a$, tam giác ABC là tam giác đều cạnh a .

- a) Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
 b) Khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAB) là $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.
 c) Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

d) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khoảng cách từ G đến mặt phẳng (SBC) là $\frac{a\sqrt{21}}{21}$.

Câu 29. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi O, O' là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$, I là giao điểm của BO' và DB' .

- a) Khoảng cách giữa hai mặt $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$ bằng 2.
- b) Khoảng cách từ C đến $(BB'D'D)$ bằng đoạn CO .
- c) Khoảng cách giữa hai đường thẳng AD' và DC' lớn hơn 2.
- d) Khoảng cách từ B đến (CDI) bằng đoạn $2\sqrt{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 30. Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh 2. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau AB, CD . (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

Câu 31. Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh 2. Tam giác ABC đều, hình chiếu vuông góc H của đỉnh S trên mặt phẳng $ABCD$ trùng với trọng tâm tam giác ABC . Đường thẳng SD hợp với mặt phẳng đáy một góc 30° . Tính khoảng cách từ B đến mặt phẳng (SCD) . (làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

Câu 32. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = a, AD = 2a$. Hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng đáy là trung điểm H của AD , góc giữa SB và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là 45° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SD và BH theo a được kết quả ma . Khi đó giá trị $\frac{3}{5}m^2$ là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

Câu 33. Cho tứ diện $ABCD, AB = AD = 2a, CD = 2a\sqrt{2}$ và $\widehat{ABC} = \widehat{DAB} = 90^\circ$. Góc giữa hai đường thẳng AD và BC bằng 45° . Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD bằng $\frac{a\sqrt{2k}}{k}$. Tìm k .

KQ:

Câu 34. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B với $AB = 2, BC = \frac{3}{2}, AD = 3$. Hình chiếu vuông góc của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ là trung điểm H của BD . Biết góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính khoảng cách từ điểm C đến mặt phẳng (SBD) (làm tròn đến hàng phần trăm)

KQ:

§6. THỂ TÍCH



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

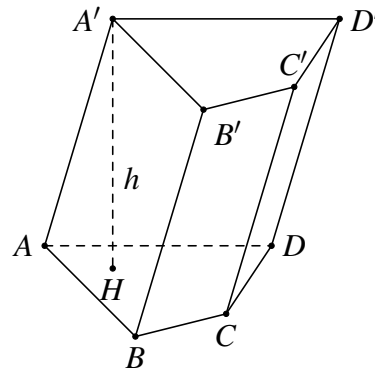
1 Thể tích khối lăng trụ

Thể tích khối lăng trụ bằng diện tích đáy nhân với đường cao của lăng trụ.

$$V = S_{\text{đáy}} \cdot h$$

Trong đó

- ① $S_{\text{đáy}}$ là diện tích đáy của khối lăng trụ;
- ② h là chiều cao của khối lăng trụ.



Hình lăng trụ tứ giác $ABCD.A'B'C'D'$

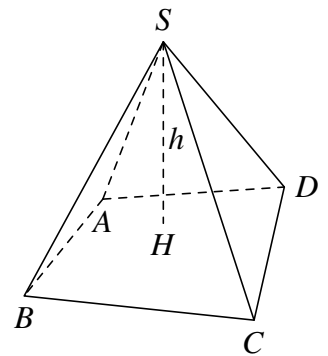
2 Thể tích khối chóp

Ta có thể tích khối chóp bằng một phần ba diện tích đáy nhân với đường cao hình chóp.

$$V_{\text{chóp}} = \frac{1}{3} \cdot S_{\text{đáy}} \cdot h$$

Trong đó

- ① $S_{\text{đáy}} = S_{ABCD}$ là diện tích mặt đáy của khối chóp.
- ② $h = SH$ là chiều cao của khối chóp.



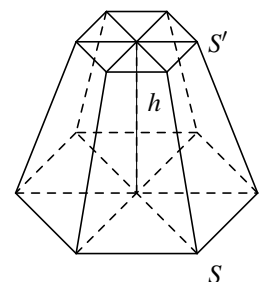
3 Thể tích khối chóp cụt đều

Thể tích của khối chóp cụt đều được tính theo công thức

$$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$$

Trong đó

- ① S là diện tích đáy lớn của khối chóp cụt đều.
- ① S' là diện tích đáy bé của khối chóp cụt đều.
- ② $h = SH$ là chiều cao của khối chóp cụt đều.





PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính thể tích khối lăng trụ

Phương pháp:

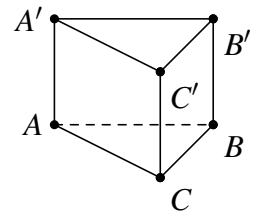
- Tính diện tích đáy $S_{\text{đáy}}$ và độ dài đường cao h của khối lăng trụ;
- Thay vào công thức $V = S_{\text{đáy}} \cdot h$.

Các trường hợp đặc biệt:

- ① Thể tích V của khối hộp chữ nhật có ba kích thước lần lượt a, b, c là $V = a \cdot b \cdot c$.
- ② Thể tích V của khối hộp lập phương có cạnh bằng a là $V = a^3$.

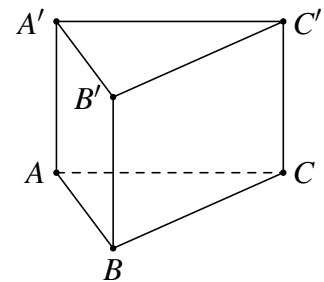
Bài 1.

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AA' = a$, tam giác ABC đều và có cạnh bằng a . Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.



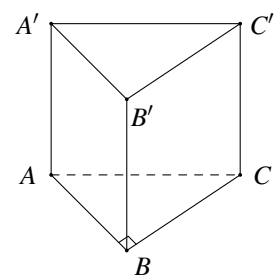
Bài 2.

Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC đều cạnh bằng a và chu vi của mặt bên $ABB'A'$ bằng $6a$. Tính thể tích của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.



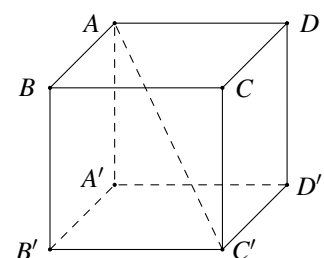
Bài 3.

Cho khối lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $BB' = a$, đáy ABC là tam giác vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$. Tính thể tích V của khối lăng trụ đã cho.



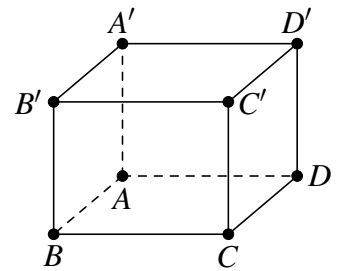
Bài 4.

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = a\sqrt{3}$. Tính thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$.

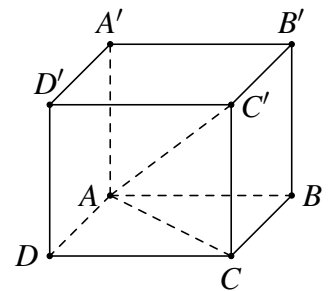


≡ Bài 5.

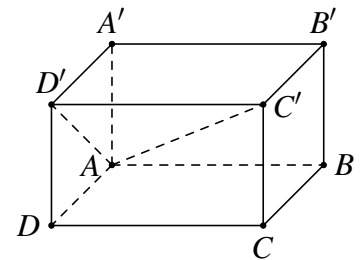
Tính thể tích của khối lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông cạnh a , $A'B = 2a$.

**≡ Bài 6.**

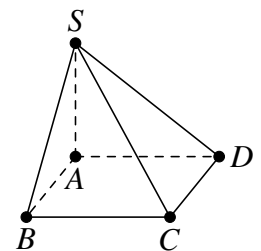
Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh đáy bằng a . Góc giữa đường chéo với đáy bằng 60° . Tính thể tích khối lăng trụ này theo a .

**≡ Bài 7.**

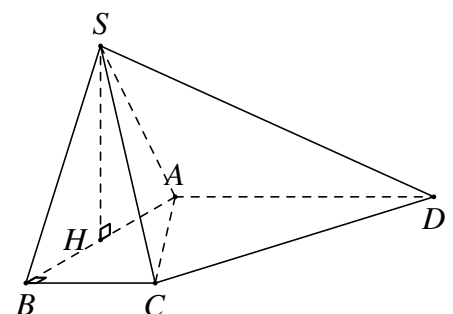
Khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài AD ; AD' ; AC' lần lượt là 1; 2; 3. Tính thể tích V của khối chóp $A.A'B'C'D'$.

**DT****2****Tính thể tích khối chóp****≡ Bài 8.**

Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Tính thể tích V của khối chóp $S.ABCD$.

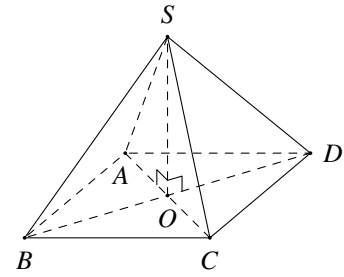
**≡ Bài 9.**

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và B , $AB = BC = \frac{AD}{2} = a$. Tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Tính thể tích V của khối chóp $S.ACD$.



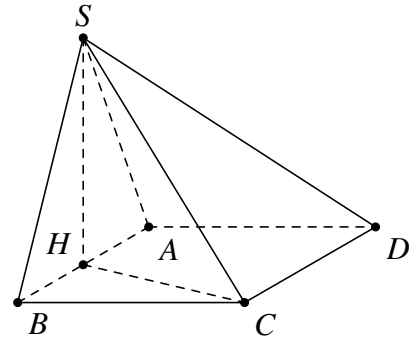
≡ Bài 10.

Cho khối chóp đều $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a , góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 60° . Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.



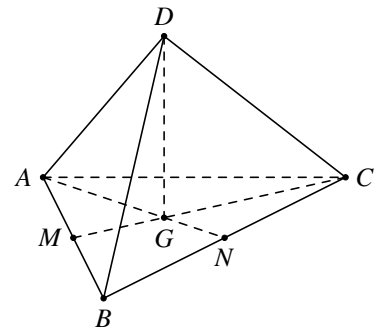
≡ Bài 11.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a, AD = a$. Hình chiếu của S lên đáy là trung điểm H của cạnh AB , góc tạo bởi SC và đáy là 45° . Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.



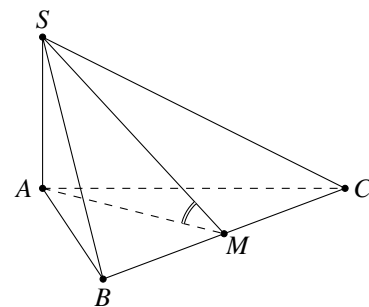
≡ Bài 12.

Tính thể tích khối tứ diện đều cạnh bằng $2a$.



≡ Bài 13.

Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với đáy (ABC) . Biết góc tạo với hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60° , tính thể tích V của khối chóp $S.ABC$.



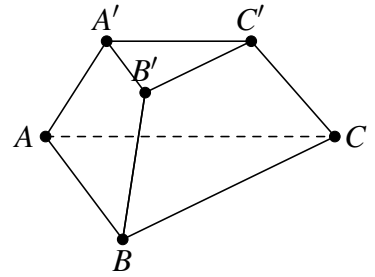
DT 3 Tính thể tích khối chóp cụt đều

☑ Phương pháp:

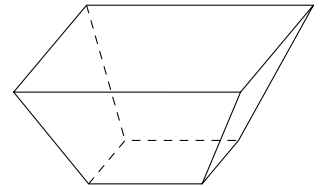
- Tính diện tích hai đáy (lớn, bé) S, S' và độ dài đường cao h của khối chóp cụt đều;
- Thay vào công thức $V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot (S + S' + \sqrt{S \cdot S'})$.

≡ Bài 14.

Tính thể tích của khối chóp cắt tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có chiều cao bằng $3a$, $AB = 4a$, $A'B' = a$.

**≡ Bài 15.**

Tính thể tích một cái sọt đựng đồ có dạng hình chóp cắt tứ giác đều, đáy lớn có cạnh bằng 80 cm, đáy nhỏ có cạnh bằng 40 cm và cạnh bên bằng 80 cm.





BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h . Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $V = \frac{1}{3}Bh$. B. $V = Bh$. C. $V = \frac{2}{3}Bh$. D. $V = \frac{1}{3}B^2h$.

Câu 2. Cho khối chóp có diện tích đáy B và thể tích bằng V . Chiều cao của khối chóp đã cho là

- A. $h = \frac{1}{3}V \cdot B$. B. $h = \frac{3V}{B}$. C. $h = \frac{V}{3B}$. D. $h = \frac{V}{B}$.

Câu 3. Cho khối chóp có diện tích đáy $B = 8a^2$ và chiều cao $h = a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $4a^3$. B. $\frac{8}{3}a^3$. C. $8a^3$. D. $\frac{4}{3}a^3$.

Câu 4. Cho khối chóp có chiều cao bằng a và đáy là hình vuông có cạnh bằng $3a$. Thể tích của khối chóp đã cho bằng

- A. $3a^3$. B. $9a^3$. C. $6a^3$. D. $27a^3$.

Câu 5. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $V = \frac{1}{3}Bh$. B. $V = Bh$. C. $V = \frac{2}{3}Bh$. D. $V = \frac{1}{3}B^2h$.

Câu 6. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy B và thể tích bằng V . Chiều cao của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $h = \frac{1}{3}V \cdot B$. B. $h = \frac{3V}{B}$. C. $h = \frac{V}{3B}$. D. $h = \frac{V}{B}$.

Câu 7. Cho khối lăng trụ có diện tích đáy $B = 7a^2$ và chiều cao $h = 2a$. Thể tích khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{14}{2}a^3$. B. $\frac{14}{3}a^3$. C. $14a^3$. D. $7a^3$.

Câu 8. Thể tích của khối lập phương cạnh $3a$ bằng

- A. a^3 . B. $3a^3$. C. $9a^3$. D. $27a^3$.

Câu 9. Thể tích khối hộp chữ nhật có ba kích thước là a, b, c bằng

- A. $V = abc$. B. $V = \frac{1}{3}abc$. C. $V = (abc)^2$. D. $V = \sqrt{abc}$.

Câu 10. Tổng số mặt của hình chóp cụt có đáy là tam giác đều là

- A. 4. B. 2. C. 3. D. 5.

Câu 11. Thể tích khối chóp cụt đều có chiều cao h , diện tích hai đáy là $S_1; S_2$ bằng

- A. $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$. B. $V = \frac{1}{3}h(S_1 \cdot S_2 \cdot \sqrt{S_1 \cdot S_2})$.
 C. $V = h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 \cdot S_2})$. D. $V = \frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 + S_2})$.

Câu 12. Thể tích khối chóp cụt đều có chiều cao $h = a$, diện tích hai đáy là $S_1 = a^2; S_2 = 9a^2$ bằng

- A. $V = 4a^3$. B. $V = \frac{13a^3}{3}$. C. $V = a^3$. D. $V = 9a^3$.

Câu 13. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , cạnh bên $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a$. Tính theo a thể tích khối chóp $S.ABCD$.

- A. $\frac{a^3}{3}$. B. a^3 . C. $\frac{a^3}{6}$. D. $\frac{a^3}{2}$.

Câu 14. Cho khối chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , $SA = a\sqrt{3}$, cạnh bên SA vuông góc với đáy. Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3}{2}$. B. $\frac{a^3}{4}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

Câu 15. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và thể tích bằng $3a^3$. Tính chiều cao h của khối chóp $S.ABC$.

- A. $h = 12\sqrt{3}a$. B. $h = 6\sqrt{3}a$. C. $h = 4\sqrt{3}a$. D. $h = 2\sqrt{3}a$.

Câu 16. Cho hình chóp $S.ABC$ có $V_{S.ABC} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36}$ và mặt bên SBC là tam giác đều cạnh a . Khoảng cách từ A đến (SBC) bằng

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{9}$. B. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. C. $\frac{a\sqrt{6}}{9}$. D. $\frac{a\sqrt{6}}{27}$.

Câu 17. Cho khối chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng a , góc giữa cạnh bên và đáy bằng 30° . Thể tích khối chóp $S.ABC$ bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$. B. $\frac{a^3\sqrt{2}}{36}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{36}$.

Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng có diện tích đáy là $\sqrt{3}a^2$, độ dài cạnh bên là $a\sqrt{2}$. Khi đó thể tích của khối lăng trụ bằng

- A. $\sqrt{2}a^3$. B. $\sqrt{6}a^3$. C. $\frac{\sqrt{6}a^3}{3}$. D. $\sqrt{3}a^3$.

Câu 19. Cho khối lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và mỗi mặt bên đều có diện tích bằng $4a^2$. Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $a^3\sqrt{6}$. B. $\frac{2a^3\sqrt{6}}{3}$. C. $2a^3\sqrt{6}$. D. $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$.

Câu 20. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $A'C'$ tạo với mặt phẳng đáy một góc 60° . Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ bằng

- A. $\frac{a^3}{4}$. B. $\frac{3a^3}{8}$. C. $\frac{3a^3}{2}$. D. $\frac{3a^3}{4}$.

Câu 21. Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AC = a\sqrt{2}$, biết góc giữa $(A'BC)$ và đáy bằng 60° . Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng

- A. $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$. B. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 22. Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có $AC' = 3a$ bằng

- A. $3\sqrt{3}a^3$. B. $9a^3$. C. $\sqrt{3}a^3$. D. $3a^3$.

Câu 23. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2$ cm, $AD = 3$ cm, $AC' = 7$ cm. Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ bằng

- A. 24 cm³. B. 42 cm³. C. 12 cm³. D. 36 cm³.

Câu 24. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a$, $AC = 2a$, tam giác $A'AC$ vuông cân tại A . Thể tích khối hộp đã cho bằng

- A. $2\sqrt{3}a^3$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{2}$. D. $\sqrt{3}a^3$.

Câu 25. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = AA' = a$, đường chéo $A'C$ tạo với mặt đáy $(ABCD)$ một góc α thỏa $\cot \alpha = \sqrt{5}$. Thể tích khối hộp đã cho bằng

- A. $2a^3$. B. $\sqrt{5}a^3$. C. $\frac{2a^3}{3}$. D. $\frac{a^3}{\sqrt{5}}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 26. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng $2a$, $SA \perp (ABCD)$, $SA = \frac{2a}{\sqrt{3}}$.

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Chiều cao của khối chóp $S.ABCD$ bằng $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.
 b) Diện tích đáy của khối chóp $S.ABCD$ bằng $2a^2$.
 c) Chiều cao AH của khối chóp $A.SCD$ bằng $a\sqrt{3}$.
 d) Thể tích của khối tứ diện $AHCD$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Câu 27. Cho khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $a\sqrt{3}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Thể tích của khối lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ bằng $3a^3\sqrt{3}$.
 b) Thể tích của khối lăng trụ $ABD.A'B'D'$ bằng $\frac{a^3}{2}$.
 c) Thể tích của khối tứ diện $B'BAC$ bằng $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.
 d) Thể tích của khối tứ diện $B'ACD'$ bằng $\frac{3a^3\sqrt{3}}{5}$.

Câu 28. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Biết rằng góc giữa $(A'BC)$ và (ABC) là 30° , tam giác $A'BC$ có diện tích bằng 18.

- a) Hình lăng trụ đã cho có đường cao $h = 3\sqrt{3}$.
 b) Diện tích đáy của hình lăng trụ đã cho là $S_{ABC} = 9\sqrt{3}$.
 c) Thể tích của khối chóp $A'.ABC$ bằng $3\sqrt{3}$.
 d) Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V_{ABC.A'B'C'} = 27\sqrt{3}$.

Câu 29. Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy, hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) vuông góc với nhau, $SB = a\sqrt{3}$, góc giữa SC và (SAB) là 45° và $\widehat{ASB} = 30^\circ$.

- a) Mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng (ABC) .
 b) Tam giác SBC vuông cân tại C .
 c) Hai đường thẳng AB và CB vuông góc với nhau.
 d) Nếu gọi thể tích khối chóp $S.ABC$ là V thì tỷ số $\frac{a^3}{V}$ bằng $\frac{3}{8}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 30. Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Mặt bên (SCD) tạo với đáy một góc 60° , $\widehat{ABC} = 60^\circ$, $SA = 3\sqrt{3}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABCD$.

KQ:

Câu 31. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC cân, $AB = 1$ và $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C')$ và mặt đáy bằng 60° . Tính thể tích V khối lăng trụ trên (kết quả làm tròn đến hàng

phần trăm).

KQ:

Câu 32. Bạn Mi muốn làm các viên nước đá có dạng khối chóp cụt tứ giác đều có đáy lớn bằng 3 cm, đáy nhỏ bằng 1,5 cm và cao 3 cm bằng cách dùng khay đá, mỗi khay sẽ tạo được 6 viên đá. Hỏi bạn An cần ít nhất bao nhiêu khay để chứa đồng thời 2 lít nước?

KQ:

Câu 33. Cho khối lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình thoi cạnh 4 cm, góc $\widehat{BAD} = 120^\circ$. Biết B' có hình chiếu trên mặt đáy $ABCD$ là tâm O của đáy và BB' tạo với đáy một góc 45° . Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

KQ:

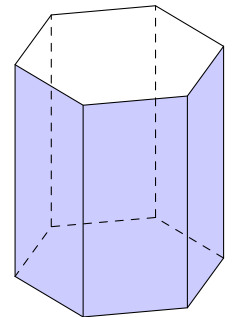
Câu 34. Cho tứ diện đều $SABC$ cạnh 10 cm. Gọi E, F, P là các điểm lần lượt thuộc các cạnh SA, SB, SC sao cho $SE = \frac{2}{3}SA, SF = \frac{2}{3}SB, SP = \frac{2}{3}SC$. Tính thể tích của khối chóp cụt đều $ABC.EFP$, (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 35.

Một chiếc lồng đèn kéo quân có hình lăng trụ lục giác đều với cạnh đáy 8 cm. Biết tổng diện tích các mặt bên của chiếc lồng đèn này bằng 1536 cm^2 . Tính thể tích của chiếc lồng đèn đó, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

KQ:



CÁC QUY TẮC TÍNH XÁC SUẤT

§1. BIẾN CỐ HỢP, BIẾN CỐ GIAO, BIẾN CỐ ĐỘC LẬP, CÔNG THỨC CỘNG VÀ CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT



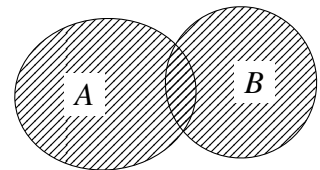
LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 PHÉP TOÁN TRÊN CÁC BIẾN CỐ

Cho hai biến cố A và B . Khi đó A, B là các tập con của không gian mẫu Ω .

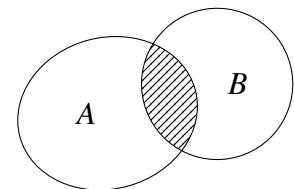
Biến cố hợp: Biến cố: “ A hoặc B xảy ra” được gọi là biến cố hợp của A và B .

- Kí hiệu là $A \cup B$.
- Biến cố hợp $A \cup B$ là tập con của không gian mẫu Ω .



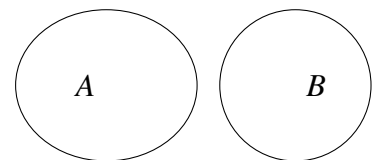
Biến cố giao: Biến cố: “Cả A và B đều xảy ra” được gọi là biến cố giao của A và B .

- Kí hiệu là $A \cap B$ hoặc AB ;
- Biến cố giao $A \cap B$ là tập con của không gian mẫu Ω .



Biến cố xung khắc: Biến cố A và biến cố B được gọi là xung khắc nếu A và B không đồng thời xảy ra. Hai biến cố A và B xung khắc khi và chỉ khi $A \cap B = \emptyset$.

⚠ Hai biến cố A và B là xung khắc khi và chỉ khi nếu biến cố này xảy ra thì biến cố kia không xảy ra.



2 CÔNG THỨC CỘNG XÁC SUẤT

Công thức cộng xác suất: Cho hai biến cố A và B . Khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Đặt biệt: Nếu hai biến cố A và B là xung khắc ($A \cap B = \emptyset$) thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

⚠ Cho biến cố A và biến cố đối \bar{A} . Ta có $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT **1** Công thức cộng xác suất của hai biến cố xung khắc

✓ Nếu hai biến cố A và B là xung khắc ($A \cap B = \emptyset$) thì

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

✓ Cho biến cố A và \bar{A} là biến cố đối của A . Khi đó, ta có

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

≡ Bài 1. Một hộp chứa 20 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 20. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 2 thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- “Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 37”;
- “Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 6”.

≡ Bài 2. Một hộp chứa 4 viên bi xanh, 5 viên bi đỏ và 3 viên bi vàng có cùng kích thước và khối lượng. Chọn ra ngẫu nhiên 4 viên bi từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:

- “Cả 4 viên bi lấy ra đều có cùng màu”;
- “Có ít nhất 3 viên bi xanh trong 4 viên bi lấy ra”.

≡ Bài 3. Trong một căn phòng có 36 người, trong đó có 25 người họ Nguyễn và 11 người họ Trần. Chọn ngẫu nhiên hai người trong phòng đó. Tính xác suất để hai người được chọn có cùng họ.

≡ Bài 4. Một hộp chứa 10 quả bóng xanh và 10 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời 5 quả bóng từ hộp. Tính xác suất của biến cố “có ít nhất 3 quả bóng xanh trong 5 quả bóng lấy ra”.

≡ Bài 5. Một lớp có 41 học sinh trong đó có 15 bạn nam và 26 bạn nữ. Cô giáo chủ nhiệm chọn ngẫu nhiên ra bốn bạn đi trực ban.

- Tính xác suất để cả bốn bạn đó đều là nữ.
- Tính xác suất để có ít nhất một bạn nam.

≡ Bài 6. Có hai hòm đựng thẻ, mỗi hòm đựng 10 thẻ đánh số từ 1 đến 10. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hòm một thẻ. Tính xác suất để trong hai thẻ lấy ra

- có ít nhất một thẻ đánh số 1.
- tổng hai số ghi trên hai thẻ khác 19.

Cho hai biến cố A và B . Khi đó

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Bài 7. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp.

- Viết các kết quả thuận lợi của không gian mẫu Ω và hai biến cố
 - A : “Có ít nhất một lần xuất hiện mặt sấp”;
 - B : “Có ít nhất một lần xuất hiện mặt ngửa”.
- Viết các kết quả thuận lợi của mỗi biến cố $A \cup B, A \cap B$.
- Tính $P(A), P(B), P(A \cup B), P(A \cap B)$.

Bài 8. Một hộp đựng 25 tấm thẻ cùng loại được đánh số từ 1 đến 25. Rút ngẫu nhiên một tấm thẻ trong hộp. Xét các biến cố P : “Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 4”; Q : “Số ghi trên tấm thẻ là số chia hết cho 6”.

- Mô tả không gian mẫu.
- Xác định các biến cố P, Q và $S = P \cap Q$.
- Tính xác suất của biến cố $P \cup Q$.

Bài 9. Lớp 11A có 44 học sinh trong đó có 14 học sinh đạt điểm tổng kết môn Hóa học loại giỏi và 15 học sinh đạt điểm tổng kết môn Vật lý loại giỏi. Biết rằng khi chọn một học sinh của lớp đạt điểm tổng kết môn Hóa học hoặc Vật lý loại giỏi có xác suất là 0,5. Số học sinh đạt điểm tổng kết giỏi cả hai môn Hóa học và Vật lý là

Bài 10. Gieo ngẫu nhiên 3 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Tính xác suất của biến cố A : “Tích số chấm xuất hiện trên mỗi con xúc xắc chia hết cho 15”.

Bài 11. Trong một công ty có 40 nhân viên, trong đó có 19 người thích chơi bóng bàn, 20 người thích chơi cầu lông, 8 người không thích chơi cả cầu lông và bóng bàn. Chọn ngẫu nhiên một nhân viên trong công ty đó. Tính xác suất để người đó

- Thích chơi ít nhất một trong hai môn bóng bàn và cầu lông.
- Thích chơi cầu lông và không thích chơi bóng bàn.
- Thích chơi bóng bàn và không thích chơi cầu lông.
- Thích chơi đúng một trong hai môn.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1. Gieo hai con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 5”, B là biến cố “Tích số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 6”.
- Hãy viết tập hợp mô tả các biến cố trên.
 - Hãy liệt kê các kết quả của phép thử làm cho cả hai biến cố A và B cùng xảy ra.
2. Tung một đồng xu cân đối và đồng chất ba lần liên tiếp. Xét các biến cố:
- A : “Đồng xu xuất hiện mặt sấp (S) ở lần tung thứ nhất”.
 - B : “Đồng xu xuất hiện mặt ngửa (N) ở lần tung thứ nhất”.
- Hai biến cố trên có xung khắc hay không? Vì sao?
3. Hai xạ thủ X, Y mỗi người bắn một viên đạn vào một mục tiêu. Xét các biến cố A : “Xạ thủ X bắn trúng”; B : “Xạ thủ Y bắn trúng”. Nêu nội dung của các biến cố $AB, A \cup B, \overline{AB}, \overline{A}B, A\overline{B}, \overline{A}\overline{B}, \overline{AB} \cup \overline{A}\overline{B}$.
4. Trong một hộp có 8 viên bi xanh và 6 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 2 viên bi trong hộp. Gọi A là biến cố: “Cả hai viên bi có màu xanh”; B là biến cố: “có một viên bi màu xanh và một viên bi màu đỏ”.
- Tính $P(A)$ và $P(B)$.
 - Tính xác suất để trong hai viên bi lấy ra có ít nhất một viên bi màu xanh.
5. Trong bình đựng có 10 viên bi, trong đó có 4 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi. Tính xác suất để trong 3 viên bi lấy được 1 hoặc 2 viên bi đỏ.
6. Một hộp chứa 40 tấm thẻ cùng loại được đánh số lần lượt từ 1 đến 40. Lấy ra ngẫu nhiên đồng thời hai thẻ từ hộp. Tính xác suất của các biến cố:
- “Tổng các số ghi trên 2 thẻ lấy ra nhỏ hơn 4 hoặc lớn hơn 76”.
 - “Tích các số ghi trên 2 thẻ lấy ra chia hết cho 10”.
7. Một lớp có 40 học sinh, trong đó có 34 em thích ăn chuối, 22 em thích ăn cam và 2 em không thích ăn cả hai loại quả đó. Chọn ngẫu nhiên một học sinh trong lớp. Tính xác suất để em đó:
- Thích ăn ít nhất một trong hai loại quả chuối hoặc cam.
 - Thích ăn cả hai loại quả chuối và cam.
8. Một nhóm có 50 người được phỏng vấn họ đã mua cành đào hay cây quất vào dịp Tết vừa qua, trong đó có 31 người mua cành đào, 12 người mua cây quất và 5 người mua cả cành đào và cây quất. Chọn ngẫu nhiên một người. Tính xác suất để người đó:
- Mua cành đào hoặc cây quất.
 - Mua cành đào và không mua cây quất.
 - Không mua cành đào và không mua cây quất.
 - Mua cây quất và không mua cành đào.
9. Một nhóm 30 bệnh nhân có 24 người điều trị bệnh X , có 12 người điều trị cả bệnh X và bệnh Y , có 26 người điều trị ít nhất một trong hai bệnh X hoặc Y . Chọn ngẫu nhiên một bệnh nhân. Tính xác suất để người đó:

- a) Điều trị bệnh Y .
- b) Điều trị bệnh Y và không điều trị bệnh X .
- c) Không điều trị cả hai bệnh X và Y .
- 10** Một nhà xuất bản phát hành hai cuốn sách A và B . Thống kê cho thấy có 50% người mua sách A ; 70% người mua sách B ; 30% người mua cả sách A và sách B . Chọn ngẫu nhiên một người mua. Tính xác suất để:
- a) Người mua đó mua ít nhất một trong hai sách A hoặc B ;
- b) Người mua đó không mua cả sách A và sách B .
- 11** Một dãy phố gồm 40 gia đình, trong đó 23 gia đình có điện thoại thông minh, 18 gia đình có laptop và 26 gia đình có ít nhất một trong hai thiết bị này. Chọn ngẫu nhiên một gia đình trong dãy phố. Tính xác suất để gia đình đó:
- a) Có điện thoại thông minh và laptop.
- b) Có điện thoại thông minh nhưng không có laptop.
- c) Không có cả điện thoại thông minh và laptop.
- 12** Tại các trường trung học phổ thông của một tỉnh, thống kê cho thấy có 63% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa A , 56% giáo viên môn Toán tham khảo bộ sách giáo khoa B và 28,5% giáo viên môn Toán tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B . Tính tỉ lệ giáo viên môn Toán các trường trung học phổ thông của tỉnh đó không tham khảo cả hai bộ sách giáo khoa A và B .



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 16. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Nếu A và B là hai biến cố xung khắc thì $P(A \cup B)$ bằng

- A.** $P(A) \cdot P(B)$. **B.** $P(A) - P(B)$. **C.** $P(A) + P(A \cap B)$. **D.** $P(A) + P(B)$.

Câu 2. Nếu A và B là hai biến cố của cùng một phép thử thì $P(A \cup B)$ bằng

- A.** $P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. **B.** $P(A) - P(B) - P(A \cap B)$.
C. $P(A) \cdot P(B) - P(A \cap B)$. **D.** $P(A) \cdot P(B) + P(A \cap B)$.

Câu 3. Một hộp có 10 viên bi màu hồng và 14 viên bi màu vàng, các viên bi có kích thước và khối lượng như nhau. Lấy ngẫu nhiên hai viên bi. Xét các biến cố:

P : "Hai viên bi được lấy ra có màu hồng";

Q : "Hai viên bi được lấy ra có màu vàng".

Khi đó, biến cố hợp của hai biến cố P và Q là:

- A.** "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu hồng". **B.** "Hai viên bi được lấy ra có cùng màu".
C. "Hai viên bi được lấy ra chỉ có màu vàng". **D.** "Hai viên bi được lấy ra có màu khác nhau".

Câu 4. Gieo 2 con xúc xắc cân đối và đồng chất. Gọi A là biến cố "Tích số chấm xuất hiện là số lẻ". Biến cố nào sau đây xung khắc với biến cố A ?

- A. “Xuất hiện hai mặt có cùng số chấm”.
 B. “Tổng số chấm xuất hiện là số lẻ”.
 C. “Xuất hiện ít nhất một mặt có số chấm là số lẻ”.
 D. “Xuất hiện hai mặt có số chấm khác nhau”.

Câu 5. Chọn ngẫu nhiên một số tự nhiên từ 1 đến 20. Xét các biến cố A : “Số được chọn chia hết cho 3”; B : “Số được chọn chia hết cho 4”. Khi đó biến cố $A \cap B$ là

- A. $\{3; 4; 12\}$.
 B. $\{3; 4; 6; 8; 9; 12; 15; 16; 18; 20\}$.
 C. $\{12\}$.
 D. $\{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$.

Câu 6. Một hộp có 30 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 30. Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp. Xét các biến cố sau:

P : “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 2”

Q : “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 4”

Biến cố $P \cap Q$ là

- A. “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 8”.
 B. “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 2”.
 C. “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 6”.
 D. “Số ghi trên thẻ được lấy là số chia hết cho 4”.

Câu 7. Cho $P(A) = \frac{1}{4}$, $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$. Biết A, B là hai biến cố xung khắc, thì $P(B)$ bằng

- A. $\frac{1}{8}$.
 B. $\frac{1}{4}$.
 C. $\frac{3}{4}$.
 D. $\frac{1}{3}$.

Câu 8. Lấy ra ngẫu nhiên 2 quả bóng từ một hộp chứa 5 quả bóng xanh và 4 quả bóng đỏ có kích thước và khối lượng như nhau. Xác suất của biến cố “Hai bóng lấy ra có cùng màu” là

- A. $\frac{1}{9}$.
 B. $\frac{2}{9}$.
 C. $\frac{4}{9}$.
 D. $\frac{5}{9}$.

Câu 9. Một thư viện có 14 cuốn truyện khoa học viễn tưởng và 13 cuốn truyện tuyển thuyết, các cuốn truyện là khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 5 cuốn truyện từ thư viện. Tính xác suất của biến cố “Cả 5 cuốn truyện được chọn đều cùng thể loại truyện”.

- A. $\frac{77}{3105}$.
 B. $\frac{11}{690}$.
 C. $\frac{11}{270}$.
 D. $\frac{11}{32400}$.

Câu 10. Trên giá sách có 4 quyển sách toán, 3 quyển sách lý, 2 quyển sách hóa. Lấy ngẫu nhiên 3 quyển sách. Tính xác suất để 3 quyển lấy ra có ít nhất 1 quyển là môn toán.

- A. $\frac{2}{7}$.
 B. $\frac{1}{21}$.
 C. $\frac{37}{42}$.
 D. $\frac{5}{42}$.

Câu 11. Một tổ có 7 nam và 3 nữ. Chọn ngẫu nhiên 2 người. Tính xác suất sao cho 2 người được chọn có ít nhất một nữ.

- A. $\frac{2}{15}$.
 B. $\frac{7}{15}$.
 C. $\frac{8}{15}$.
 D. $\frac{1}{15}$.

Câu 12. Một hộp chứa sáu quả cầu trắng và bốn quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên đồng thời bốn quả. Tính xác suất sao cho có ít nhất một quả màu trắng?

- A. $\frac{209}{210}$.
 B. $\frac{8}{105}$.
 C. $\frac{1}{21}$.
 D. $\frac{1}{210}$.

Câu 13. Trong nhóm 60 học sinh có 30 học sinh thích học Toán, 25 học sinh thích học Lý và 10 học sinh thích cả Toán và Lý. Chọn ngẫu nhiên 1 học sinh từ nhóm này. Xác suất để được học sinh này thích học ít nhất là một môn Toán hoặc Lý?

A. $\frac{1}{2}$.

B. $\frac{4}{5}$.

C. $\frac{3}{4}$.

D. $\frac{2}{3}$.

Câu 14. Một lớp học gồm 50 bạn, trong đó có 20 bạn thích chơi bóng đá, 28 bạn thích chơi bóng rổ và 8 bạn thích chơi cả hai môn. Gặp ngẫu nhiên 1 học sinh trong lớp. Xác suất của biến cố "Bạn được gặp thích chơi bóng đá hoặc bóng rổ" là

A. 0,16.

B. 0,96.

C. 0,48.

D. 0,8.

Câu 15. Một hộp đựng 10 viên bi đỏ được đánh số từ 1 đến 10 và 15 viên bi xanh được đánh số từ 1 đến 15. Các viên bi có cùng kích thước và khối lượng. Lấy ra ngẫu nhiên 1 viên bi từ trong hộp. Gọi A là biến cố "Viên bi lấy ra có màu đỏ", B là biến cố "Viên bi lấy ra ghi số chẵn". Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

A. 0,4.

B. 0,88.

C. 0,48.

D. 0,68.

Câu 16. Có 12 người xếp thành một hàng dọc (vị trí của mỗi người trong hàng là cố định). Chọn ngẫu nhiên 3 người trong hàng. Tính xác suất để 3 người được chọn không có 2 người đứng nào cạnh nhau.

A. $\frac{6}{11}$.

B. $\frac{55}{126}$.

C. $\frac{21}{55}$.

D. $\frac{7}{110}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 17 đến câu 20. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Một hộp đựng 30 tấm thẻ có đánh số từ 1 đến 30, hai tấm thẻ khác nhau đánh hai số khác nhau. Lấy ngẫu nhiên một tấm thẻ từ hộp, khi đó xác suất để lấy được

- a) thẻ đánh số chia hết cho 3 bằng $\frac{1}{3}$.
- b) thẻ đánh số chia hết cho 4 bằng $\frac{11}{30}$.
- c) thẻ đánh số chia hết cho 3 và chia hết cho 4 bằng $\frac{1}{15}$.
- d) thẻ đánh số chia hết cho 3 hoặc 4 bằng $\frac{1}{2}$.

Câu 18. Chọn ngẫu nhiên một vé số có năm chữ số được lập từ các chữ số từ 0 đến 9. Gọi A là biến cố: "Lấy được vé không có chữ số 2" và B : "Lấy được vé số không có chữ số 7".

- a) $P(A) = (0,9)^5$.
- b) $P(B) = (0,9)^4$.
- c) $P(AB) = (0,8)^4$.
- d) Xác suất của biến cố X : "Lấy được vé không có chữ số 2 hoặc chữ số 7" bằng: 0,8533.

Câu 19. Một lớp học có 40 học sinh, trong đó có 18 học sinh tham gia môn bóng đá và 10 học sinh tham gia môn bóng chuyền, trong đó có 6 học sinh tham gia cả hai môn bóng đá và bóng chuyền. Thầy giáo chọn ngẫu nhiên một học sinh từ lớp học để làm nhiệm vụ đặc biệt, gọi A là biến cố: "Chọn được một học sinh tham gia môn bóng đá", B là biến cố: "Chọn được một học sinh tham gia môn bóng chuyền". Khi đó:

- a) $P(A) = \frac{9}{20}$.
- b) $P(B) = \frac{1}{4}$.
- c) $P(AB) = \frac{7}{20}$.
- d) Xác suất để học sinh được chọn có tham gia ít nhất một trong hai môn thể thao bằng $\frac{13}{20}$.

Câu 20. Lớp 11A của một trường có 30 học sinh, trong đó có 12 bạn thích nhạc cổ điển, 11 bạn thích nhạc trẻ và 3 bạn thích cả nhạc cổ điển và nhạc trẻ. Chọn ngẫu nhiên một bạn trong lớp. Các khẳng định sau đây, khẳng định nào là đúng, khẳng định nào là sai?

- a) Biến cố bạn đó thích nhạc cổ điển và biến cố bạn đó thích nhạc trẻ là 2 biến cố xung khắc.
 b) Xác suất để bạn đó thích nhạc trẻ là $\frac{2}{5}$, xác suất để bạn đó thích nhạc cổ điển là $\frac{11}{30}$.
 c) Xác suất để bạn đó thích nhạc cổ điển hoặc nhạc trẻ là $\frac{2}{3}$.
 d) Xác suất để bạn đó không thích nhạc cổ điển và không thích nhạc trẻ là $\frac{1}{3}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 21 đến câu 25 vào ô kết quả.

Câu 21. Người ta thăm dò một số lượng người hâm mộ bóng đá tại một thành phố, nơi có hai đội bóng đá X và Y cùng thi đấu giải vô địch quốc gia. Biết rằng số lượng người hâm mộ đội bóng đá X là 22%, số lượng người hâm mộ đội bóng đá Y là 39%, trong số đó có 7% người nói rằng họ hâm mộ cả hai đội bóng trên. Chọn ngẫu nhiên một người hâm mộ trong số những người được hỏi, tính xác suất để chọn được người không hâm mộ đội nào trong hai đội bóng đá X và Y.

KQ:

Câu 22. Một khu phố có 50 hộ gia đình trong đó có 18 hộ nuôi chó, 16 hộ nuôi mèo và 7 hộ nuôi cả chó và mèo. Chọn ngẫu nhiên một hộ trong khu phố trên, tính xác suất để hộ đó nuôi chó hoặc nuôi mèo.

KQ:

Câu 23. Một hộp có chứa một số quả cầu gồm bốn màu xanh, vàng, đỏ, trắng (các quả cầu cùng màu thì khác nhau về bán kính). Lấy ngẫu nhiên một quả cầu từ hộp, biết xác suất để lấy được một quả cầu màu xanh bằng $\frac{1}{4}$, xác suất để lấy được một quả cầu màu vàng bằng $\frac{1}{3}$. Tính xác suất để lấy được một quả cầu xanh hoặc một quả cầu vàng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 24. Hai bạn Chiến và Công cùng chơi cờ với nhau. Trong một ván cờ, xác suất Chiến thắng Công là 0,3 và xác suất để Công thắng Chiến là 0,4. Hai bạn dừng chơi khi có người thắng, người thua. Tính xác suất để hai bạn dừng chơi sau hai ván cờ.

KQ:

Câu 25. Tại một trường trung học phổ thông X, có 12% học sinh học giỏi môn Tiếng Anh, 35% học sinh học giỏi môn Toán và 8% học sinh học giỏi cả hai môn Toán, Tiếng Anh. Chọn ngẫu nhiên một học sinh từ trường X, tính xác suất để chọn được một học sinh không giỏi môn nào trong hai môn Toán, Tiếng Anh.

KQ:

§2. CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT CHO HAI BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 BIẾN CỐ ĐỘC LẬP

Định nghĩa: Cho hai biến cố A và B . Hai biến cố A và B được gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biến cố này không làm ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

Chú ý: Nếu A, B là hai biến cố độc lập thì mỗi cặp biến cố sau cũng độc lập: A và \bar{B} ; \bar{A} và B ; \bar{A} và \bar{B} .

2 CÔNG THỨC NHÂN XÁC SUẤT

Nếu hai biến cố A và B là độc lập thì

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

! Nếu $P(AB) \neq P(A) \cdot P(B)$ thì A và B không độc lập.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Biến cố độc lập

Bài 1. Gieo hai đồng xu cân đối. Xét các biến cố A : “Cả hai đồng xu đều ra mặt sấp”, B : “Có ít nhất một đồng xu ra mặt sấp”. Hỏi A và B có độc lập hay không?

Bài 2. Một hộp đựng 4 viên bi màu đỏ và 5 viên bi màu xanh, có cùng kích thước và khối lượng.

a) Bạn Minh lấy ngẫu nhiên một viên bi, ghi lại màu của viên bi được lấy ra rồi trả lại viên bi vào hộp. Tiếp theo, bạn Hùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:

A : “Minh lấy được viên bi màu đỏ”;

B : “Hùng lấy được viên bi màu xanh”.

Chứng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

b) Bạn Sơn lấy ngẫu nhiên một viên bi và không trả lại vào hộp. Tiếp theo, bạn Tùng lấy ngẫu nhiên một viên bi từ hộp đó. Xét hai biến cố sau:

C : “Sơn lấy được viên bi màu đỏ”;

D : “Tùng lấy được viên bi màu xanh”.

Chứng tỏ rằng hai biến cố C và D không độc lập.

DT 2 Công thức nhân xác suất của hai biến cố độc lập

Bài 3. Cho hai biến cố độc lập A và B cùng liên quan đến một phép thử thỏa mãn $P(A) = 0,2$ và $P(B) = 0,3$. Tính xác suất của các biến cố: \bar{A} , \bar{B} , AB , $\bar{A}B$, $A\bar{B}$ và $\bar{A}\bar{B}$.

≡ Bài 4. Hai bệnh nhân cùng nhiễm một loại virus. Xác suất biến chứng nặng của bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai lần lượt là 0,2 và 0,25; khả năng bị biến chứng nặng của hai bệnh nhân là độc lập. Tính xác suất của các biến cố:

- M : “Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều bị biến chứng nặng”;
- N : “Bệnh nhân thứ nhất không bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai bị biến chứng nặng”;
- Q : “Bệnh nhân thứ nhất bị biến chứng nặng và bệnh nhân thứ hai không bị biến chứng nặng”;
- R : “Bệnh nhân thứ nhất và bệnh nhân thứ hai đều không bị biến chứng nặng”;
- S : “Có ít nhất một trong hai bệnh nhân bị biến chứng nặng”.

≡ Bài 5. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh; hộp thứ hai chứa 6 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả cầu. Tính xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ.

≡ Bài 6. Một phần mềm chuyển đổi ngôn ngữ có xác suất dịch chính xác một câu Tiếng Anh sang Tiếng Việt là 0,8. Hỏi nếu phần mềm đó dịch một văn bản 100 câu từ Tiếng Anh sang Tiếng Việt thì xác suất dịch sai hai câu là bao nhiêu?

≡ Bài 7. Hai bạn An và Bình cùng tập ném bóng rổ một cách độc lập ở hai nửa sân khác nhau. Xác suất bạn An và bạn Bình ném bóng vào rổ lần lượt là 0,6 và 0,9. Trong cùng một lần ném, tính xác suất có ít nhất một bạn ném bóng vào rổ.

≡ Bài 8. Hai bạn An và Bình không quen biết nhau và đều học xa nhà. Xác suất để bạn An về thăm nhà vào ngày Chủ nhật là 0,2 và của bạn Bình là 0,25. Dùng sơ đồ hình cây để tính xác suất vào ngày Chủ nhật mà

- cả hai bạn đều về thăm nhà.
- có ít nhất một bạn về thăm nhà.
- cả hai bạn đều không về thăm nhà.
- Chỉ có bạn An về thăm nhà.
- có đúng một bạn về thăm nhà.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Có hai chuồng nuôi thỏ. Chuồng I có 5 con thỏ đen và 10 con thỏ trắng. Chuồng II có 3 con thỏ trắng và 7 con thỏ đen. Từ mỗi chuồng bắt ngẫu nhiên ra một con thỏ. Xét hai biến cố sau:

A : “Bắt được con thỏ trắng từ chuồng I”;

B : “Bắt được con thỏ đen từ chuồng II”.

Chúng tỏ rằng hai biến cố A và B độc lập.

2 Có hai chuồng nuôi gà. Chuồng I có 9 con gà mái và 3 con gà trống. Chuồng II có 3 con gà mái và 6 con gà trống. Bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng I để đem bán rồi dồn các con gà còn lại của chuồng I vào chuồng II. Sau đó bắt ngẫu nhiên một con gà của chuồng II. Xét hai biến cố sau:

E : “Bắt được con gà trống từ chuồng I”;

F : “Bắt được con gà mái từ chuồng II”.

Chúng tỏ rằng hai biến cố E và F không độc lập.

3 Cho $P(A) = 0,4$; $P(B) = 0,5$; $P(A \cup B) = 0,6$. Hỏi A và B có độc lập hay không?

- 4 Gieo hai con xúc xắc cân đối. Xét các biến cố:
 A: “Có ít nhất một con xúc xắc xuất hiện mặt 5 chấm”;
 B: “Tổng số chấm xuất hiện trên hai con xúc xắc bằng 7”.
 Chứng tỏ rằng A và B không độc lập.
- 5 Có 3 hộp I, II, III. Mỗi hộp chứa ba tấm thẻ đánh số 1, 2, 3. Từ mỗi hộp rút ngẫu nhiên một tấm thẻ. Xét các biến cố sau:
 A: “Tổng các số ghi trên ba tấm thẻ là 6”;
 B: “Ba tấm thẻ có ghi số bằng nhau”.
- a) Tính $P(A), P(B)$.
- b) Hỏi A, B có độc lập không?
- 6 Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau.
- a) Biết $P(A) = 0,4$ và $P(\bar{A}B) = 0,3$. Tính xác suất của các biến cố B và $A \cup B$.
- b) Biết $P(\bar{A}B) = 0,4$ và $P(A \cup B) = 0,9$. Tính xác suất của các biến cố A, B và AB.
- 7 Cho A, B là hai biến cố độc lập và $P(AB) = 0,1$; $P(\bar{A}\bar{B}) = 0,4$. Tìm $P(A \cup \bar{B})$.
- 8 Một đề thi trắc nghiệm gồm 50 câu, mỗi câu có 4 phương án trả lời trong đó chỉ có 1 phương án đúng, mỗi câu trả lời đúng được 0,2 điểm. Một thí sinh làm bài bằng cách chọn ngẫu nhiên 1 trong 4 phương án của câu. Tính xác suất để thí sinh đó được 6 điểm.
- 9 Hai đội A và B thi đấu trận chung kết bóng chuyền nữ chào mừng ngày 20 - 11 (trận chung kết tối đa 5 hiệp). Đội nào thắng 3 hiệp trước thì thắng trận. Xác suất để đội A thắng mỗi hiệp là 0,4 (không có hòa). Tính xác suất P để đội A thắng trận.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Học sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hai biến cố A và \bar{B} không độc lập. B. Hai biến cố \bar{A} và \bar{B} không độc lập.
 C. Hai biến cố \bar{A} và B độc lập. D. Hai biến cố A và $A \cup B$ độc lập.

Câu 2. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,5$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- A. 0,9. B. 0,7. C. 0,5. D. 0,2.

Câu 3. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(AB) = 0,2$. Xác suất của biến cố B là

- A. 0,5. B. 0,6. C. 0,7. D. 0,8.

Câu 4. Cho A và B là hai biến cố độc lập. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(AB) = 0,2$. Xác suất của biến cố $A \cup B$ là

- A. 0,6. B. 0,7. C. 0,8. D. 0,9.

Câu 5. Hai người độc lập nhau ném bóng vào rổ. Mỗi người ném vào rổ của mình một quả bóng. Biết rằng xác suất ném bóng trúng vào rổ của từng người tương ứng là $\frac{1}{5}$ và $\frac{2}{7}$. Gọi A là biến cố: “Cả hai

cùng ném bóng trúng vào rổ”. Khi đó, xác suất của biến cố A là bao nhiêu?

- A. $P(A) = \frac{1}{25}$. B. $P(A) = \frac{4}{49}$. C. $P(A) = \frac{12}{35}$. D. $P(A) = \frac{2}{35}$.

Câu 6. Xác suất thực hiện thành công một thí nghiệm là $0,7$. Thực hiện thí nghiệm đó 2 lần liên tiếp một cách độc lập với nhau. Xác suất của biến cố "Cả 2 lần thí nghiệm đều thành công" là

- A. $0,7$. B. $0,21$. C. $0,49$. D. $1,4$.

Câu 7. Trong phòng làm việc có hai máy tính hoạt động độc lập với nhau, khả năng hoạt động tốt trong ngày của hai máy này tương ứng là $0,75$ và $0,85$. Xác suất để cả hai máy hoạt động không tốt trong ngày là

- A. $0,0675$. B. $0,0375$. C. $0,0575$. D. $0,0475$.

Câu 8. Xác suất thực hiện thành công một thí nghiệm là $0,7$. Thực hiện thí nghiệm đó 2 lần liên tiếp một cách độc lập với nhau. Xác suất của biến cố "Lần thứ nhất thí nghiệm thất bại, lần thứ hai thí nghiệm thành công" là:

- A. $0,21$. B. $0,09$. C. 1 . D. $0,42$.

Câu 9. Ba xạ thủ A_1, A_2, A_3 độc lập với nhau cùng nổ súng bắn vào mục tiêu. Biết rằng xác suất bắn trúng mục tiêu của A_1, A_2, A_3 tương ứng là $0,7; 0,6$ và $0,5$. Tính xác suất để có ít nhất một xạ thủ bắn trúng.

- A. $0,45$. B. $0,21$. C. $0,94$. D. $0,75$.

Câu 10. Có hai hộp chứa các quả cầu. Hộp thứ nhất chứa 7 quả cầu màu đỏ và 5 quả cầu màu xanh; hộp thứ hai chứa 6 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh. Lấy ngẫu nhiên từ mỗi hộp 1 quả cầu. Xác suất sao cho hai quả cầu lấy ra cùng màu đỏ bằng

- A. $\frac{7}{20}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{20}$. D. $\frac{2}{5}$.

Câu 11. Trong kì thi THPT Quốc Gia năm 2024 có môn thi bắt buộc là môn Tiếng Anh. Môn thi này thi dưới hình thức trắc nghiệm với bốn phương án trả lời A, B, C, D. Mỗi câu trả lời đúng được cộng 0,2 điểm; mỗi câu trả lời sai bị trừ 0,1 điểm. Bạn Hoa vì học rất kém môn Tiếng Anh nên chọn ngẫu nhiên cả 50 câu trả lời. Xác suất để bạn Hoa đạt được 4 điểm môn Tiếng Anh trong kì thi trên gần nhất với kết quả nào sau đây?

- A. $1,7 \cdot 10^{-7}$. B. $1,3 \cdot 10^{-7}$. C. $1,8 \cdot 10^{-7}$. D. $2,3 \cdot 10^{-7}$.

Câu 12. Một hộp có 10 quả bóng bàn trong đó có 6 quả mới. Người ta lấy ra ngẫu nhiên 5 quả để thi đấu. Tính xác suất của biến cố "lấy được ít nhất 2 quả bóng mới".

- A. $\frac{41}{42}$. B. $\frac{11}{42}$. C. $\frac{10}{42}$. D. $\frac{1}{42}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Học sinh trả lời từ câu 13 đến câu 16. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 13. Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Biết $P(A) = 0,4$ và $P(B) = 0,6$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $P(AB) = 0,24$. b) $P(\overline{AB}) = 0,16$. c) $P(\overline{AB}) = 0,24$. d) $P(\overline{AB}) = 0,24$.

Câu 14. Cho A và B là hai biến cố độc lập với nhau. Biết $P(A) = 0,6$ và $P(AB) = 0,3$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) $P(B) = 0,24$. b) $P(\overline{AB}) = 0,2$. c) $P(\overline{AB}) = 0,2$. d) $P(\overline{AB}) = 0,24$.

Câu 15. Gieo hai đồng xu A và B một cách độc lập. Đồng xu A được chế tạo cân đối. Đồng xu B được chế tạo không cân đối nên xác suất xuất hiện mặt sấp gấp 3 lần xác suất xuất hiện mặt ngửa. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Xác suất đồng xu A xuất hiện mặt ngửa bằng $\frac{1}{2}$.
- b) Xác suất đồng xu B xuất hiện mặt ngửa bằng $\frac{1}{4}$.
- c) Khi gieo hai đồng xu một lần thì xác suất cả hai đều ngửa bằng $\frac{1}{12}$.
- d) Khi gieo hai đồng xu hai lần thì xác suất cả hai đồng xu đều ngửa bằng $\frac{1}{32}$.

Câu 16. Hai bạn An và Hà của lớp 11A tham gia giải bóng bàn đơn nữ do nhà trường tổ chức. Hai bạn đó nằm ở hai bảng đấu loại khác nhau, mỗi bảng đấu loại chỉ chọn một người vào vòng chung kết. Xác suất lọt qua vòng loại để vào vòng chung kết của An và Hà lần lượt là 0,6 và 0,7.

- a) Biến cố "Bạn An lọt vào vòng chung kết" và biến cố "Bạn Hà lọt vào vòng chung kết" là hai biến cố độc lập.
- b) Xác suất cả hai bạn lọt vào vòng chung kết là 0,42.
- c) Xác suất có ít nhất một bạn lọt vào vòng chung kết là 0,8.
- d) Xác suất chỉ có bạn Hà lọt vào vòng chung kết là 0,7.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Học sinh trả lời từ câu 17 đến câu 22 vào ô kết quả.

Câu 17. Hộp A đựng 5 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 5, hộp B đựng 6 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 6, hai thẻ khác nhau ở mỗi hộp đánh hai số khác nhau. Chọn ngẫu nhiên từ hộp A một tấm thẻ và từ hộp B hai tấm thẻ. Gọi X là biến cố: "Chọn được thẻ mang số lẻ từ hộp A ", Y là biến cố: "Chọn được thẻ mang số chẵn từ hộp A ", và Z là biến cố: "Chọn được hai thẻ mang số lẻ từ hộp B ". Tính xác suất để tích số được ghi trên ba tấm thẻ thu được là số chẵn.

KQ:

Câu 18. Một lô hàng có 20 sản phẩm giống nhau trong đó có 4 sản phẩm không đạt chất lượng còn lại là sản phẩm đạt chất lượng tốt. Mỗi lần kiểm tra, người ta chọn ra ngẫu nhiên 2 sản phẩm. Tính xác suất để lấy ra được ít nhất một sản phẩm tốt (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 19. Nhà trường muốn chọn một đội văn nghệ có đủ cả nam và nữ gồm 12 em đi biểu diễn từ một nhóm học sinh gồm 10 nam sinh và 8 nữ sinh. Tính xác suất để đội văn nghệ được chọn có đúng 6 bạn nam (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

Câu 20. Một xạ thủ bắn lần lượt 2 viên đạn vào một bia. Xác suất trúng đích của viên thứ nhất và viên thứ hai lần lượt là 0,8 và 0,7. Biết rằng kết quả các lần bắn là độc lập với nhau. Tính xác suất của biến cố: "Cả hai lần bắn đều trúng đích".

KQ:

Câu 21. Một xạ thủ bắn lần lượt 2 viên đạn vào một bia. Xác suất trúng đích của viên thứ nhất và viên thứ hai lần lượt là 0,8 và 0,7. Biết rằng kết quả các lần bắn là độc lập với nhau. Tính xác suất của biến cố: "Ít nhất 1 lần bắn trúng đích".

KQ:

Câu 22. Một bệnh truyền nhiễm có xác suất lây bệnh là 0,9 nếu tiếp xúc với người bệnh mà không đeo khẩu trang; là 0,15 nếu tiếp xúc với người bệnh mà có đeo khẩu trang. Anh Hà tiếp xúc với một người bệnh hai lần, trong đó có một lần đeo khẩu trang và một lần không đeo khẩu trang. Tính xác suất anh Hà bị lây bệnh từ người bệnh mà anh tiếp xúc đó (làm tròn đến hàng phần trăm).

KQ:

§1. ĐỊNH NGHĨA VÀ Ý NGHĨA CỦA ĐẠO HÀM



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Định nghĩa: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$. Xét giới hạn $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

(1). Nếu giới hạn (1) **hữu hạn** thì kết quả đó được gọi là đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại điểm x_0 . Kí hiệu $f'(x_0)$ hay $y'(x_0)$. Tức là

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

Lưu ý:

- Đại lượng $\Delta x = x - x_0$ được gọi là số gia của biến tại x_0 .
- Đại lượng $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ được gọi là số gia tương ứng của hàm số.

Khi đó công thức (2) được viết thành

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3)$$

CHÚ Ý

Muốn tính đạo hàm tại một điểm cho trước, ta chọn một trong hai công thức (2) hoặc (3).

2 Đạo hàm trên một khoảng

Hàm số $y = f(x)$ được gọi là có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm x trên khoảng đó. Kí hiệu y' hoặc $f'(x)$

3 Ý nghĩa vật lý của đạo hàm

Vận tốc tức thời: Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $s = f(t)$ tại t_0 . Nghĩa là

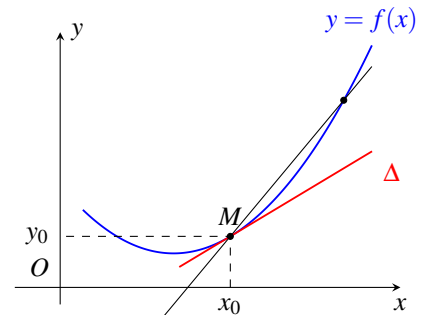
$$v(t_0) = s'(t_0) = f'(t_0).$$

Cường độ tức thời: Điện lượng Q truyền trong dây dẫn xác định bởi phương trình $Q = f(t)$, với $f(t)$ là hàm số có đạo hàm. Khi đó, cường độ tức thời của dòng điện tại thời điểm t_0 là đạo hàm của hàm số $Q = f(t)$ tại t_0 . Nghĩa là $I(t_0) = Q'(t_0) = f'(t_0)$.

4 Ý nghĩa hình học của đạo hàm

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(a; b)$ và có đạo hàm tại $x_0 \in (a; b)$. Gọi (\mathcal{C}) là đồ thị của hàm số đó. Ta có hai kết quả sau:

- ① $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến Δ của đồ thị (\mathcal{C}) tại điểm $M(x_0; y_0)$.
- ② Phương trình tiếp tuyến Δ : $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.
 - $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm;
 - $f'(x_0)$ là hệ số góc của tiếp tuyến.



5 Quan hệ giữa sự tồn tại đạo hàm và tính liên tục

Định lý: Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

Chú ý:

- Chiều đảo lại **không đúng**. Tức là, hàm số liên tục tại x_0 có thể không có đạo hàm tại x_0 .
- Hàm số không liên tục tại x_0 thì không có đạo hàm tại điểm đó.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại một điểm

Chọn một trong hai cách:

✓ Cách 1:

- Tính $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
- Nếu giới hạn này hữu hạn và có kết quả là a , thì ta kết luận $f'(x_0) = a$.

✓ Cách 2:

- Tính $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ và tính giới hạn $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$;
- Nếu giới hạn này hữu hạn và có kết quả là a , thì ta kết luận $f'(x_0) = a$.

Bài 1. Tính đạo hàm của hàm số $y = -x^2$ tại điểm $x_0 = 2$ bằng định nghĩa.

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau tại các điểm đã chỉ ra:

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = 2x^2 + x + 1$ tại $x = 2$; | b) $f(x) = x^3$ tại $x = 3$; |
| c) $f(x) = \sqrt{x}$ tại $x = 4$; | d) $f(x) = \sqrt{2x + 1}$ tại $x = 1$; |

Bài 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x-1)(x-2)\dots(x-2021)$ tại điểm $x = 0$.

Bài 4. Tính đạo hàm (nếu tồn tại) của hàm số $y = |x-1|x^2$ tại điểm $x_0 = 1$.

Bài 5. Một chất điểm chuyển động có phương trình chuyển động là: $s = f(t) = t^2 + 4t + 6$ (t được tính bằng giây, s được tính bằng mét)

- Tính đạo hàm của hàm số $f(t)$ tại điểm t_0 .
- Tính vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5$.

DT**2****Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cho trước**

Bài 6. Cho hàm số $y = (2x+1)^2$.

- Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 = -1$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $A(-1; 1)$.

Bài 7. Cho hàm số $y = x^3$.

- Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm x_0 bất kì ($x_0 \in \mathbb{R}$).
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-2; -8)$.

Bài 8. Cho hàm số $y = \sqrt{x}$.

- Bằng định nghĩa, hãy tính đạo hàm của hàm số đã cho tại điểm $x_0 > 0$ bất kì.
- Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 4.

DT**3****Ý nghĩa vật lý của đạo hàm**

- ✔ Xét chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$, trong đó s là quãng đường đi được trong thời gian t . Lúc đó, vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.
- ✔ Ý nghĩa tổng quát: Đạo hàm của một hàm số chính là đặc trưng cho tốc độ thay đổi của hàm số theo biến số của nó.

Bài 9. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t_0 = 5 \text{ s}$.

**BÀI TẬP TỰ LUYỆN**

1 Tính đạo hàm của các hàm số sau bằng định nghĩa

- $y = x^2 + 3x - 2$. Tính $y'(1)$.
- $y = x^3 - 2x + 1$. Tính $y'(1)$.
- $f(x) = \sqrt{2x+7}$. Tính $f'(1)$.
- $y = -\frac{3}{x}$ tại $x_0 = 2$.

2 Chứng minh rằng hàm số $y = |x|$ không tồn tại đạo hàm tại điểm $x = 0$.

- 3 Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{nếu } x \geq 0 \\ 1-2x & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Tính $f'(0)$.
- 4 Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số tại điểm M có hoành độ $x_0 = 1$.
- 5 Tìm tọa độ điểm M trên đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, biết hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại M bằng 3.
- 6 Một vật chuyển động có quãng đường được xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 2$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính vận tốc tức thời tại thời điểm $t = 4$.
- 7 Sau mùa lũ, tại địa phương A, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh đường ruột kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ n được xác định bởi công thức $D(n) = 45n^2 - n^3$. Hỏi tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tức thời tại thời điểm $n = 10$ là bao nhiêu?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tính số gia của hàm số $y = x^2 + 2$ tại điểm $x_0 = 2$ ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 13$. B. $\Delta y = 9$. C. $\Delta y = 5$. D. $\Delta y = 2$.

Câu 2. Tính số gia của hàm số $y = x^3 + x^2 + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia $\Delta x = 1$.

- A. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 3$. B. $\Delta y = 2x_0^3 + 3x_0^2 + 5x_0 + 2$.
C. $\Delta y = 3x_0^2 + 5x_0 + 2$. D. $\Delta y = 3x_0^2 - 5x_0 + 2$.

Câu 3. Tính số gia của hàm số $y = \frac{x^2}{2}$ tại điểm $x_0 = -1$ ứng với số gia Δx .

- A. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$. B. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.
C. $\Delta y = \frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$. D. $\Delta y = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Câu 4. Tính số gia của hàm số $y = x^2 - 4x + 1$ tại điểm x_0 ứng với số gia Δx .

- A. $\Delta y = \Delta x(\Delta x + 2x_0 - 4)$. B. $\Delta y = 2x_0 + \Delta x$.
C. $\Delta y = \Delta x(2x_0 - 4\Delta x)$. D. $\Delta y = 2x_0 - 4\Delta x$.

Câu 5. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào có $f'(-3) = 7$?

- A. $f(x) = \frac{1-2x}{x+4}$. B. $f(x) = \sqrt{x^2+40}$. C. $f(x) = x^2 - x + 8$. D. $f(x) = \frac{3x-1}{x+2}$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $y = \frac{1}{2x-1}$ tại điểm $x_0 = 1$ là

- A. 2. B. -2. C. -1. D. 1.

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = (m^3 - 3m^2 + m)x + 2017$. Tìm m để $f'(2) = 3$.

- A. $m = -1$. B. $m = 1$. C. $m = 3$. D. $m = 0$.

Câu 8. Đạo hàm của hàm số $f(x) = 3x - 1$ tại $x_0 = 1$ là

- A. 0. B. 2. C. 1. D. 3.

Câu 9. Hệ số góc của tiếp tuyến với đồ thị hàm số $f(x) = -x^3$ tại điểm $M(-2; 8)$ là

- A. 12. B. -12. C. 192. D. -192.

Câu 10. Tìm phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C): $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

- A. $y = -x - 2$. B. $y = x - 2$. C. $y = -x + 1$. D. $y = -x - 1$.

Câu 11. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm $(-1; -1)$.

- A. $y = -3x - 4$. B. $y = -1$. C. $y = 3x - 2$. D. $y = 3x + 2$.

Câu 12. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ tại điểm có hoành độ bằng -1.

- A. $x + y + 2 = 0$. B. $y = x + 2$. C. $y = x - 2$. D. $y = -x + 2$.

Câu 13. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = x^3$ tại điểm có tung độ bằng 8.

- A. $y = 8$. B. $y = -12x + 16$. C. $y = 12x - 24$. D. $y = 12x - 16$.

Câu 14. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $y = \frac{1}{x}$ biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

- A. $x + 4y - 1 = 0, x + 4y + 1 = 0$. B. $x + 4y - 4 = 0, x + 4y + 4 = 0$.
C. $y = -\frac{1}{4}x - 4, y = -\frac{1}{4}x + 4$. D. $y = -\frac{1}{4}x$.

Câu 15. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 2$ giây.

- A. 2 m/s. B. 3 m/s. C. 4 m/s. D. 5 m/s.

Câu 16. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc tức thời của chuyển động tại thời điểm $t = 5\text{s}$.

- A. 49 m/s. B. 122,5 m/s. C. 50 m/s. D. 123 m/s.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = 2x^3$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Với bất kì x_0 thì $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. b) $f'(1) = -6$.
c) $f'(0) = 0$. d) $f'(2) = 24$.

Câu 18. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2}{1-x}$ với $x \neq 1$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

- a) Với bất kì $x_0 \neq 1$, ta có $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{2}{(1-x)(1-x_0)}$.
b) $f'(2) = 2$.
c) $f'(3) = \frac{1}{3}$.
d) $f'(2) + f'(3) = \frac{5}{2}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 19. Một viên đạn được bắn lên cao theo phương trình $s(t) = 196t - 4,9t^2$ trong đó $t > 0$, t tính bằng giây kể từ thời điểm viên đạn được bắn lên cao và $s(t)$ là khoảng cách của viên đạn so với mặt đất được tính bằng mét. Tại thời điểm vận tốc của viên đạn bằng 0 thì viên đạn cách mặt đất bao nhiêu mét?

KQ:

Câu 20. Vận tốc của một chất điểm chuyển động được biểu thị bởi công thức $v(t) = 8t + 3t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $v(t)$ tính bằng mét/giây. Tìm gia tốc (m/s^2) của chất điểm tại thời điểm mà vận tốc chuyển động là 11 mét/giây.

KQ:

Câu 21. Một vật rơi tự do theo phương trình $s = \frac{1}{2}gt^2$, trong đó $g = 9,8 m/s^2$ là gia tốc trọng trường. Tìm vận tốc trung bình (m/s) của chuyển động trong khoảng thời gian từ t ($t = 5s$) đến $t + \Delta t$ với $\Delta t = 0,001s$ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

KQ:

Câu 22. Cho biết điện lượng truyền trong dây dẫn theo thời gian biểu thị bởi hàm số $Q(t) = 2t^2 + t$, trong đó t được tính bằng giây và Q được tính theo Cu-lông. Tính cường độ dòng điện tại thời điểm $t = 4$ (s).

KQ:

Câu 23. Một vật được phóng theo phương thẳng đứng lên trên từ mặt đất, biết độ cao h của nó (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi phương trình $h(t) = 24,5t - 4,9t^2$. Tìm vận tốc của vật khi nó chạm đất.

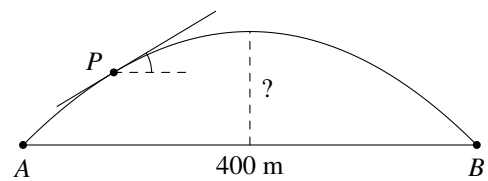
KQ:

Câu 24. Một quả bóng được thả rơi tự do từ đài quan sát trên sân thượng của toà nhà Landmark 81 (Thành phố Hồ Chí Minh) cao 461,34 m xuống mặt đất, với phương trình chuyển động $s(t) = 4,9t^2$. Tính vận tốc của quả bóng khi nó chạm đất, bỏ qua sức cản không khí. (Đơn vị m/s , kết quả gần đúng làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 25. Người ta xây dựng một cây cầu vượt giao thông hình parabol nối hai điểm có khoảng cách là 400 m. Độ dốc của mặt cầu không vượt quá 10° (độ dốc tại một điểm được xác định bởi góc giữa phương tiếp xúc với mặt cầu và phương ngang). Tính chiều cao giới hạn từ đỉnh cầu đến mặt đường (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

KQ:



§2. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM



A KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Quy tắc tính đạo hàm của tổng hiệu, tích thương

Giả sử $u = u(x)$, $v = v(x)$ là các hàm số có đạo hàm tại điểm x thuộc khoảng xác định. Ta có các quy tắc sau:

$$\textcircled{1} (u + v)' = u' + v'$$

$$\textcircled{4} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}, \text{ với } v \neq 0.$$

$$\textcircled{2} (u - v)' = u' - v'$$

$$\textcircled{5} (k \cdot u)' = k \cdot u', \text{ với } k \text{ là hằng số.}$$

$$\textcircled{3} (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\textcircled{6} \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \text{ với } v \neq 0.$$

2 Đạo hàm của hàm hợp

Cho hàm số $y = f(u)$, với $u = u(x)$. Ta có công thức sau:

$$[f(u)]' = f'(u) \cdot u'_x$$

3 Bảng đạo hàm của một số hàm số sơ cấp cơ bản và hàm hợp

STT	Đạo hàm của một số hàm sơ cấp cơ bản	Đạo hàm của hàm hợp tương ứng, với $u = u(x)$
①	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$
②	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$
③	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
④	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$
⑤	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$
⑥	$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
⑦	$(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
⑧	$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$
⑨	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$	$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$
⑩	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
⑪	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}$



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT 1 Tính đạo hàm của hàm đa thức

✔ Công thức sử dụng: Với $n \in \mathbb{N}^*$, ta có:

▶ $(x^n)' = nx^{n-1}$

→ Hàm hợp: $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$

Bài 1. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^5$;

b) $y = 2x^4$;

c) $y = \frac{1}{3}x^3 + \sqrt{3}$;

d) $y = x^3 + x^2 - 6$;

e) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$;

f) $y = x^5(3 - 2x^4)$.

Bài 2. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = (2x - 3)^2$;

b) $y = (x^2 + x)^8$;

c) $y = (x^2 - 5x^4)^6$.

Bài 3. Giải phương trình $f'(x) = 0$, với

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$;

b) $f(x) = x^3 + 3x^2$;

c) $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 3$;

d) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + 3x^2 - 4x + 4$.

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$. Giải bất phương trình $f'(x) > 0$.

Bài 5. Cho hàm số $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{x} + x$. Giải bất phương trình $f'(x) \leq 0$.

DT 2 Tính đạo hàm của hàm chứa căn thức

✔ Công thức sử dụng: Với $x > 0$, ta có:

▶ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

→ Hàm hợp: $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Bài 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 + 2\sqrt{x}$;

b) $y = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{3}$;

c) $y = x\sqrt{x}$.

Bài 7. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x + 7}$;

b) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

c) $y = \sqrt{2x^2(2 - x^2)}$.

Bài 8. Giải phương trình $f'(x) = 0$ với

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 7}$;

b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 5x + 6}$;

c) $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 5x + 6}$

DT

3

Tích đạo hàm của hàm lượng giác

✔ Công thức sử dụng:

$$\triangleright (\sin x)' = \cos x.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\sin u)' = u' \cdot \cos u.$$

$$\triangleright (\cos x)' = -\sin x.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\cos u)' = -u' \cdot \sin u.$$

$$\triangleright (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}.$$

$$\triangleright (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

≡ Bài 9. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \sin x + x;$

b) $y = \sin x + 3 \cos x;$

c) $y = \tan x - \sqrt{3} \cot x;$

d) $y = \sin(2x);$

e) $y = \sin^2 x;$

f) $y = \cos^2 4x;$

DT

4

Tích đạo hàm của hàm số mũ, hàm số lôgarit

✔ Công thức sử dụng:

$$\triangleright (e^x)' = e^x.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (e^u)' = u' \cdot e^u.$$

$$\triangleright (a^x)' = a^x \cdot \ln a.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a.$$

$$\triangleright (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\ln u)' = \frac{u'}{u}.$$

$$\triangleright (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

$$\rightarrow \text{Hàm hợp: } (\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a}.$$

≡ Bài 10. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 10^x$

b) $y = \log_5 x$

c) $y = \ln(1 + x^2)$

d) $y = e^{2x+1}$

e) $y = \log_2(x + e^x).$

f) $y = \log_8(x^2 - 3x - 4)$

≡ Bài 11. Cho hàm số $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Tính $f'(1)$.

DT

5

Tích đạo hàm dạng tích hoặc thương

✔ Các quy tắc cần nhớ:

$$\textcircled{1} (u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}, \text{ với } v \neq 0.$$

$$\textcircled{3} \left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}, \text{ với } v \neq 0.$$

✔ Công thức giải nhanh:

$$\textcircled{1} \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}.$$

$$\textcircled{2} \left(\frac{a_1x^2+b_1x+c_1}{a_2x^2+b_2x+c_2}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}x^2 + 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2}$$

• Định thức trên tử số, ta nhân theo chiều "dấu huyền" trừ cho "dấu sắc".

• Nghĩa là: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$

≡ Bài 12. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = \frac{2x+1}{x+1}$

b) $y = \frac{2x-1}{4x-3}$

c) $y = \frac{5x}{1-4x}$

d) $y = \frac{x^2-3x+7}{2x-5}$

e) $y = \frac{2x-5}{x^2+x+2}$

f) $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

≡ Bài 13. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2\sqrt{x}$.

b) $y = (x-1)\sqrt{3x+2}$.

c) $y = x\sqrt{1-x^2}$

≡ Bài 14. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x \cdot \cos x$.

b) $y = (2-x^2) \cdot \sin 3x$.

c) $y = \frac{x}{\cos x}$.

d) $y = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$.

DT 6 **Viết phương trình tiếp tuyến**

1 **Đề bài cho trước** $(x_0; y_0)$:

① Tính $f'(x_0)$.

② Thay vào công thức $y = f'(x_0)(x-x_0) + y_0$, thu gọn kết quả về dạng $y = Ax + B$.

2 **Đề bài chưa cho đầy đủ** $(x_0; y_0)$, ta thường gặp các loại sau:

① Cho biết trước x_0 hoặc y_0 . Ta chỉ việc thay giá trị đó vào hàm số $y = f(x)$, sẽ tính được đại lượng còn lại.

② Cho trước 1 điều kiện giải. Ta chỉ việc giải điều kiện đó, tìm x_0 .

• Nếu đề bài cho biết hệ số góc của tiếp tuyến $k = a$, ta giải $f'(x) = a$ tìm nghiệm x_0 . Đề bài thường cho hệ số góc tiếp tuyến dưới các dạng sau:

$$+ \text{Tiếp tuyến } d // \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = a$$

$$+ \text{Tiếp tuyến } d \perp \Delta: y = ax + b \Rightarrow k = -\frac{1}{a}$$

- Nếu đề bài cho tiếp điểm là giao điểm của hai đồ thị $y = f(x)$ và $y = g(x)$, ta giải $f(x) = g(x)$ để tìm nghiệm x_0 .

≡ Bài 15. Cho đường cong $(C): y = f(x) = \frac{x^2}{2} - 4x + 1$.

- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -2$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm có hoành độ $x_0 = -3$.
- Viết phương trình tiếp tuyến của (C) , biết tiếp tuyến có hệ số góc $k = 1$.

≡ Bài 16. Viết phương trình tiếp tuyến của đường cong $(C): y = f(x) = x(x^2 + x - 1) + 1$ tại điểm có tung độ bằng -1 .

≡ Bài 17. Cho hàm số $y = f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ có đồ thị (C) . Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta: 3x + y = 2$.

≡ Bài 18. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C): y = \frac{x-1}{x+2}$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta: 3x + y - 2 = 0$.

DT

7

Các bài toán vận dụng, thực tiễn

≡ Bài 19. Năm 2010, dân số ở một tỉnh D là 1 038 229 người. Tính đến năm 2015, dân số tỉnh đó là 1 153 600 người. Cho biết dân số của tỉnh D được ước tính theo công thức $S(N) = Ae^{Nr}$ (trong đó A là dân số của năm lấy làm mốc, S là dân số sau N năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm được làm tròn đến hàng phần nghìn). Tốc độ gia tăng dân số (người/năm) vào thời điểm sau N năm kể từ năm 2010 được xác định bởi hàm số $S'(N)$. Tính tốc độ gia tăng dân số của tỉnh D vào năm 2023 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị theo đơn vị người/năm), biết tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi.

≡ Bài 20. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 8t + 2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 5$ (s).

≡ Bài 21. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 1200 sản phẩm.



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Giải phương trình $f'(x) = 0$, biết $f(x)$ được cho bởi công thức sau:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$;

b) $f(x) = x^4 - 4x^2 + 2$;

c) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$;

d) $f(x) = (x - 1)\sqrt{2x + 1}$;

e) $f(x) = \sin x - \sqrt{3} \cos x$;

f) $f(x) = \sin^2 x - x$.

2 Cho hàm số $y = x^2 + 3x$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm có

a) Hoành độ bằng -1 ;

b) Tung độ bằng 4 .

3 Cho hàm số $y = \frac{x-3}{x+2}$ có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) trong mỗi trường hợp sau

a) d song song với đường thẳng $y = 5x - 2$;

b) d vuông góc với đường thẳng $y = -20x + 1$.

4 Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = 200(x-2)(17-x)$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 3000 sản phẩm.

5 Một vật được phóng thẳng đứng lên trên từ mặt đất với vận tốc ban đầu là v_0 (m/s) (bỏ qua sức cản của không khí) thì độ cao h của vật (tính bằng mét) sau t giây được cho bởi công thức $h = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$ (g là gia tốc trọng trường). Tìm vận tốc của vật khi chạm đất.

6 Chuyển động của một hạt trên một dây rung được cho bởi công thức $s(t) = 10 + \sqrt{2} \sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{6}\right)$, trong đó s tính bằng centimét và t tính bằng giây. Tính vận tốc của hạt sau t giây. Vận tốc cực đại của hạt là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

7 Một mạch dao động điện từ LC có lượng điện tích dịch chuyển qua tiết diện thẳng của một dây xác định bởi hàm số $Q(t) = 10^{-5} \sin\left(2000t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, Q tính bằng Coulomb. Tính cường độ dòng điện tức thời I (A) trong mạch tại thời điểm $t = \frac{\pi}{1500}$ (s). Biết $I(t) = Q'(t)$.

8 Một tài xế đang lái xe ô tô, ngay khi phát hiện có vấp cản phía trước đã phanh gấp lại nhưng vẫn xảy ra va chạm, chiếc ô tô để lại vết trượt dài 20,4 m (được tính từ lúc bắt đầu đạp phanh đến khi xảy ra va chạm). Trong quá trình đạp phanh, ô tô chuyển động theo phương trình $s(t) = 20t - \frac{5}{2}t^2$, trong đó $s(m)$ là độ dài quãng đường đi được sau khi phanh, t (s) là thời gian tính từ lúc bắt đầu phanh ($0 \leq t \leq 4$).

a) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi đạp phanh. Hãy cho biết xe ô tô trên có chạy quá tốc độ hay không, biết tốc độ giới hạn cho phép là 70 km/h.

b) Tính vận tốc tức thời của ô tô ngay khi xảy ra va chạm?



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho $u = u(x), v = v(x), v(x) \neq 0$. Hãy chọn khẳng định sai?

A. $(u+v)' = u' + v'$.

B. $(ku)' = ku'$.

C. $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v}$.

D. $(uv)' = u'v + uv'$.

Câu 2. Đạo hàm của hàm số $y = 5x^3 - x^2 - 1$ là

- A. $15x^2 - 2x$. B. $15x^2 - 2x$. C. $15x^2 - 2x - 1$. D. $-2x$.

Câu 3. Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x$.

- A. $y' = -\cos 2x$. B. $y' = -2\cos 2x$. C. $y' = \cos 2x$. D. $y' = 2\cos 2x$.

Câu 4. Tính đạo hàm của hàm số $y = 2018^x$.

- A. $y' = x \cdot 2018^{x-1}$. B. $y' = \frac{2018^x}{\ln 2018}$.
C. $y' = 2018^x \cdot \ln 2018$. D. $y' = 2018^x$.

Câu 5. Cho hàm số $y = \ln x$. Tính đạo hàm của hàm số trên khoảng $(0; +\infty)$.

- A. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$. B. $y' = x$. C. $y' = \frac{1}{x}$. D. $y' = -\frac{1}{x}$.

Câu 6. Đạo hàm của hàm số $f(x) = \log_2 x$ là

- A. $x \ln 2$. B. $\frac{\ln 2}{x}$. C. $\frac{1}{x \ln 2}$. D. $\frac{x}{\ln 2}$.

Câu 7. Tìm đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x-1}{x+2}$

- A. $y' = \frac{-5}{(x+2)^2}$. B. $y' = \frac{2}{(x+2)^2}$. C. $y' = \frac{3}{(x+2)^2}$. D. $y' = \frac{5}{(x+2)^2}$.

Câu 8. Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$.

- A. $y' = 1 + \frac{3}{(x+2)^2}$. B. $y' = \frac{x^2 + 6x + 7}{(x+2)^2}$. C. $y' = \frac{x^2 + 4x + 5}{(x+2)^2}$. D. $y' = \frac{x^2 + 8x + 1}{(x+2)^2}$.

Câu 9. Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(4x + 1)$ là

- A. $y' = \frac{4}{(4x+1)\ln 3}$. B. $y' = \frac{1}{(4x+1)\ln 3}$. C. $y' = \frac{\ln 3}{4x+1}$. D. $y' = \frac{4\ln 3}{4x+1}$.

Câu 10. Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = e^{2x-3}$.

- A. $f'(x) = 2 \cdot e^{x-3}$. B. $f'(x) = e^{2x-3}$. C. $f'(x) = -2 \cdot e^{2x-3}$. D. $f'(x) = 2 \cdot e^{2x-3}$.

Câu 11. Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x^2 - 5x}$ là

- A. $y' = \frac{2x-5}{2\sqrt{x^2-5x}}$. B. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2-5x}}$. C. $y' = \frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}$. D. $y' = -\frac{2x-5}{\sqrt{x^2-5x}}$.

Câu 12. Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng

- A. $6x^5 + 16x^3$. B. $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$. C. $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$. D. $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \ln(3x - x^2)$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x) = 0$.

- A. $S = \emptyset$. B. $S = \left\{ \frac{3}{2} \right\}$.
C. $S = \{0; 3\}$. D. $S = (-\infty; 0) \cup (3; +\infty)$.

Câu 14. Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2017$. Bất phương trình $y' < 0$ có tập nghiệm là

- A. $S = (-1; 1)$. B. $S = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
C. $(1; +\infty)$. D. $(-\infty; -1)$.

Câu 15. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

- A. $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5} \right)$. B. $\left(\frac{7}{5}; +\infty \right)$. C. $\left(-\infty; \frac{7}{5} \right)$. D. $\left(1; \frac{7}{5} \right)$.

Câu 16. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 5$ tại điểm có hoành độ $x = -1$.

- A. $y = 4x - 6$. B. $y = 4x + 2$. C. $y = 4x + 6$. D. $y = 4x - 2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{3x+2}{x+1}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $f'(x) > 0, \forall x \neq -1$.
 b) $f'(2) + f'(-3) = \frac{5}{36}$.
 c) Tích tất cả các nghiệm của phương trình $f'(x) = 25$ là $\frac{26}{25}$.
 d) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M(-2; 4)$ đi qua điểm $E(-5; 1)$.

Câu 18. Cho hàm số $f(x) = 4 \sin x + 2x + 1$.

- a) $f(0) = 1; f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\pi - 3$.
 b) Đạo hàm của hàm số đã cho là $f'(x) = -4 \cos x + 2$.
 c) Nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$ trên đoạn $[0; \pi]$ là $\frac{2\pi}{3}$.
 d) Hệ số góc tiếp tuyến của đồ thị đã cho có giá trị lớn nhất bằng 6..

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = x^2 - \ln(1 - 2x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Tập xác định của hàm số là $(-\infty; 2)$.
 b) Đạo hàm của hàm số là $f'(x) = 2x + \frac{2}{1-2x}$.
 c) Phương trình $f'(x) = 0$ có hai nghiệm phân biệt.
 d) Tiếp tuyến của đồ thị hàm số đã cho tại gốc tọa độ có hệ số góc bằng 2.

Câu 20. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 6t + 1$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau

- a) Gia tốc chuyển động của vật tại thời điểm $t = 10$ là 6 m/s^2 .
 b) Vận tốc chuyển động của vật tại thời điểm $t = 7$ là 8 m/s .
 c) Quãng đường vật đi được sau 7 giây kể từ khi bắt đầu chuyển động là 8 m .
 d) Vận tốc nhỏ nhất vật đạt được trong khoảng thời gian từ $t = 3$ đến $t = 5$ là 4 m/s .

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 21. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -\frac{1}{2}t^2 + 20t$ với t (giây) là khoảng thời gian tính từ khi vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t = 8$ giây bằng bao nhiêu m/s?

KQ:

Câu 22. Nếu số lượng sản phẩm sản xuất được của một nhà máy là x (đơn vị: trăm sản phẩm) thì lợi nhuận sinh ra là $P(x) = -200x^2 + 12800x - 74000$ (nghìn đồng). Tính tốc độ thay đổi lợi nhuận của nhà máy đó khi sản xuất 2000 sản phẩm.

KQ:

Câu 23. Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4 \cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 4$ (cm), trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 (cm/s) là $t = \frac{a}{b} + k$ ($k \in \mathbb{Z}$) (s), trong đó a, b là các số nguyên và phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính tổng $a + b$.

KQ:

Câu 24. Cho hàm số $y = \frac{9}{x}$ có đồ thị là (C) . Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3; 3)$ tạo với hai trục tọa độ một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.

KQ:

Câu 25. Cho hàm số $f(x) = \ln \frac{2018x}{x+1}$. Biết tổng $S = f'(1) + f'(2) + \dots + f'(2018) = \frac{2018}{n}$. Tìm n .

KQ:

§3. ĐẠO HÀM CẤP HAI



KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1 Định nghĩa

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại mỗi điểm $x \in (a; b)$. Khi đó hệ thức $y' = f'(x)$ xác định một hàm số mới trên khoảng $(a; b)$. Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$.

- Kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$
- Công thức tính $f''(x) = [f'(x)]'$.

2 Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai

Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động. Ta có

$$a(t) = f''(t)$$



PHÂN LOẠI, PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

DT

1

Tính đạo hàm cấp hai

Bài 1. Cho hàm số $f(x) = x^2 + 2x - 1$.

- Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại điểm $x_0 = 0, x_0 = 1$.

Bài 2. Cho hàm số $h(x) = \ln x, x > 0$.

- Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.
- Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \sqrt{2}$.

Bài 3. Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

- | | | |
|-------------------------|----------------------|-----------------------|
| a) $y = \sin x.$ | b) $y = \tan x.$ | c) $y = (x^2 + 1)^3.$ |
| d) $y = \frac{x}{x-2}.$ | e) $y = x^2 e^{-x}.$ | f) $y = \ln(2x + 3).$ |

Bài 4. Cho hàm số $f(x) = xe^{x^2} + \ln(x+1)$. Tính $f'(0)$ và $f''(0)$.

Bài 5. Cho hàm số $h(x) = 5(x+1)^3 + 4(x+1)$. Giải phương trình $h''(x) = 0$.

Bài 6. Cho hàm số $y = \sqrt{2x - x^2}$. Chứng minh rằng: $y^3 \cdot y'' + 1 = 0$.

≡ Bài 7. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 3t^2 + 5t + 4$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng mét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = 3$ (s).

≡ Bài 8. Phương trình chuyển động của một hạt được cho bởi công thức $s(t) = 10 + 0,5 \sin\left(2\pi t + \frac{\pi}{5}\right)$, trong đó s tính bằng centimét, t tính bằng giây. Gia tốc của hạt tại thời điểm $t = 5$ giây (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



BÀI TẬP TỰ LUYỆN

1 Cho hàm số $g(x) = \cos x$.

a) Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số.

b) Tính đạo hàm cấp hai của hàm số tại $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

2 Tìm đạo hàm cấp hai của các hàm số sau:

a) $y = -3x^4 + 4x^3 + 5x^2 - 2x$.

b) $y = \frac{4}{5}x^5 - 3x^2 - x + 4$.

c) $y = -\frac{1}{x}$.

d) $y = \frac{1}{x-3}$

e) $y = x \cdot \sin x$.

f) $y = e^x \cdot \sin x$.

3 Cho hàm số $f(x) = x^2 - 4x$. Giải phương trình $f'(x) = f''(x)$.

4 Cho hàm số $f(x) = \sin^3 x + x^2$. Tính giá trị $f''\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

5 Cho hàm số $y = -2 + \frac{5}{x}$. Chứng minh rằng: $\frac{2y'}{x} + y'' = 0$.

6 Cho $y = \frac{x-3}{x+4}$. Chứng minh rằng: $2(y')^2 = (y-1)y''$.

7 Cho hàm số $y = x \cos x$. Chứng minh rằng: $x \cdot y - 2(y' - \cos x) + x \cdot y'' = 0$.

8 Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Chứng minh rằng: $2y + y' \tan x + y'' - 2 = 0$.

9 Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = t^3 - 3t^2 - 9t$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc bị triệt tiêu là

10 Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 6 \sin\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimét. Tính gia tốc tức thời của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ (s).



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi học sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho hàm số $y = 3x$. Khi đó, y'' bằng bao nhiêu?

- A. 3. B. $3x$. C. $\frac{3}{2}x^2$. D. 0.

Câu 2. Cho $f(x) = (x + 10)^6$. Tính $f''(2)$.

- A. $f''(2) = 827440$. B. $f''(2) = 622080$. C. $f''(2) = 0$. D. $f''(2) = 413720$.

Câu 3. Cho $f(x) = \cos 3x$. Tính $f''(0)$.

- A. $f''(0) = -9$. B. $f''(0) = 0$. C. $f''(0) = 9$. D. $f''(0) = 1$.

Câu 4. Tìm đạo hàm cấp hai của hàm số $y = 5 \sin x - 3 \cos x$.

- A. $y'' = 5 \cos x + 3 \sin x$. B. $y'' = 5 \sin x + 3 \cos x$.
C. $y'' = -5 \sin x - 3 \cos x$. D. $y'' = -5 \sin x + 3 \cos x$.

Câu 5. Cho hàm số $y = 5 - \frac{3}{x}$. Tính giá trị biểu thức $M = xy'' + 2y'$.

- A. $M = 0$. B. $M = 1$. C. $M = 4$. D. $M = 10$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \cos 2x$ có đạo hàm là y' và y'' . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $y + y'' = 0$. B. $4y'' - y = 0$. C. $y'' + 4y = 0$. D. $y + 2y' = 0$.

Câu 7. Cho hai hàm số $f(x) = x^4 - 4x^2 + 3$ và $g(x) = 3 + 10x - 7x^2$. Nghiệm của phương trình $f''(x) + g'(x) = 0$ là

- A. $x = 1; x = \frac{1}{6}$. B. $x = -1; x = \frac{1}{6}$. C. $x = -1; x = -\frac{1}{6}$. D. $x = 1; x = -\frac{1}{6}$.

Câu 8. Một chất điểm chuyển động thẳng với phương trình $s(t) = t^3 - t^2 + 5t$ (s tính theo m , t tính theo s). Tính giá trị gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = 1s$?

- A. $a(3) = 5m/s^2$. B. $a(3) = 6m/s^2$. C. $a(3) = 0m/s^2$. D. $a(3) = 4m/s^2$.

Câu 9. Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 + 4t^2$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây và $s(t)$ tính bằng mét. Gia tốc của chuyển động tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 11 m/s là

- A. 12 m/s^2 . B. 16 m/s^2 . C. 14 m/s^2 . D. 18 m/s^2 .

Câu 10. Một chất điểm có phương trình chuyển động $s(t) = 3 \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$, trong đó $t > 0$, t tính bằng giây, $s(t)$ tính bằng centimet. Tính gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{2}$ (s).

- A. $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. B. $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $-\frac{3\sqrt{2}}{2}$. D. $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, học sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 11. Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó

- a) Tốc độ của vật tại thời điểm $t = 2$ là 7 (m/s).
b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là 6 (m/s²).
c) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng 16 (m/s) là 10 (m/s²).

d) Thời điểm $t = 1$ (s), tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 12. Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$ (C).

a) $y'(0) = -3$.

b) $y'' = \frac{6}{(x-2)^3}$.

c) Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 0$ có phương trình $y = -3x + 2$.

d) Nếu $a \leq -2$ thì qua điểm $A(0; a)$, $a \in \mathbb{R}$ sẽ kẻ được hai tiếp tuyến tới (C).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = e^{2x}$. Tính $f''(1)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 14. Cho hàm số $f(x) = \log_2(3x+1)$. Tính $f''(2)$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

KQ:

Câu 15. Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = 2t^2 + 5t + 9$, trong đó s tính bằng mét và t tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2$.

KQ:

Câu 16. Một vật chuyển động thẳng được xác định bởi phương trình $s(t) = t^3 - 2t^2 + 2t$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Tính gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của vật bằng 17 (m/s).

KQ: