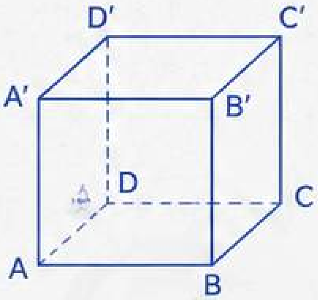
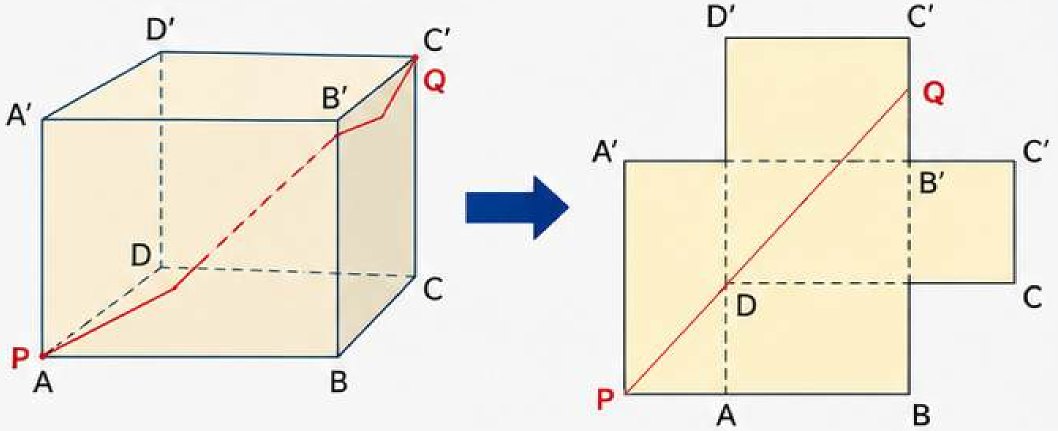


PHƯƠNG PHÁP TRẢI PHẲNG

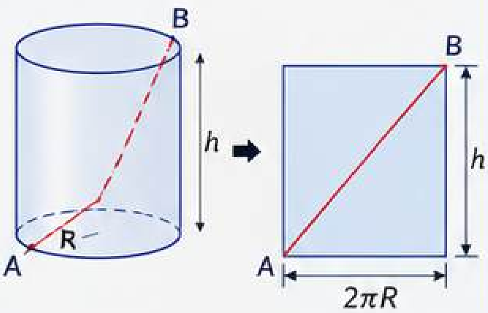
TRONG GIẢI

MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ

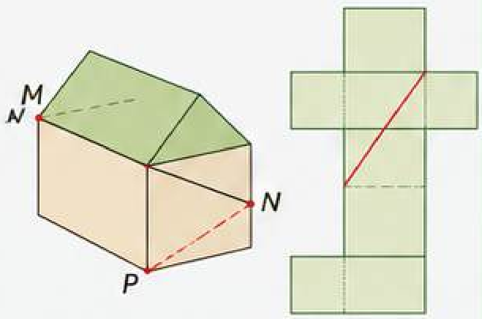


- Trực quan – Dễ hiểu
- Đơn giản – Hiệu quả
- Ứng dụng cao trong thực tiễn

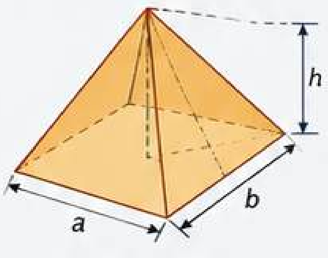
Bài toán tìm quãng đường ngắn nhất



Bài toán tối ưu trên bề mặt vật thể



Bài toán thiết kế, ứng dụng thực tế



Tính lượng vật liệu ít nhất để làm mái che

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

PHƯƠNG PHÁP TRẢI PHẲNG TRONG GIẢI MỘT SỐ BÀI TOÁN ỨNG DỤNG THỰC TẾ

A - LÝ THUYẾT

1- Khái niệm:

Trải phẳng là phương pháp biến đổi các mặt của một hình không gian về cùng một mặt phẳng nhưng vẫn giữ nguyên kích thước và mối liên hệ giữa các mặt, nhằm giúp việc quan sát và giải toán trở nên trực quan, đơn giản hơn.

2- Ứng dụng trong giải toán:

- Giải bài toán tìm quãng đường ngắn nhất trên bề mặt hình khối.
- Giải các bài toán tối ưu khoảng cách trong không gian.
- Hỗ trợ giải bài toán liên quan đến hình hộp, hình lập phương, hình trụ, hình chóp,…
- Đơn giản hóa bài toán không gian bằng cách chuyển về hình học phẳng.
- Tăng khả năng trực quan hóa và tư duy hình học cho học sinh.
- Ứng dụng trong các bài toán thiết kế, xây dựng và mô hình thực tế.
- Giúp học sinh vận dụng linh hoạt kiến thức hình học phẳng vào giải toán thực tiễn.

3- Phương pháp chung:

Bước 1: Phân tích đề bài và xác định các yếu tố liên quan

- Xác định vật thể hình học của bài toán (hình hộp chữ nhật, hình lập phương, hình trụ, …).
- Xác định vị trí các điểm đầu, điểm cuối và yêu cầu của bài toán (tìm quãng đường ngắn nhất, xác định vị trí tối ưu,…).
- Xác định đường đi phải nằm trên những mặt nào của vật thể.

Bước 2: Lựa chọn mặt cần trải

- Quan sát và xác định các mặt có chứa đường đi cần tìm.
- Chọn cách trải phù hợp để các mặt liên quan được đưa về cùng một mặt phẳng.
- Ưu tiên cách trải giúp đường đi trở thành đoạn thẳng đơn giản nhất.

Bước 3: Tiến hành trải phẳng hình

- "Mở" các mặt của hình không gian thành hình phẳng theo đúng kích thước thực tế.
- Giữ nguyên độ dài các cạnh khi trải.
- Biểu diễn chính xác vị trí các điểm trên hình trải.

Bước 4: Xác định đường đi ngắn nhất trên hình trải

- Nối hai điểm cần tìm bằng đoạn thẳng trên hình phẳng.
- Dựa vào tính chất: trong mặt phẳng, đoạn thẳng là đường ngắn nhất nối hai điểm.

Bước 5: Tính toán độ dài cần tìm

- Sử dụng các kiến thức hình học phẳng như:
  - Định lý Pitago
  - Công thức khoảng cách
  - Hệ thức lượng trong tam giác
- Tính độ dài đoạn thẳng vừa xác định.

Bước 6: Kết luận và kiểm tra tính hợp lý

- Đối chiếu kết quả với điều kiện bài toán.
- Kiểm tra xem đường đi có thực sự nằm trên bề mặt yêu cầu hay không.
- So sánh với các cách trải khác (nếu có) để chọn kết quả tối ưu.

4- Cách thức trải phẳng hình:

- Với hình lăng trụ: Cắt và mở các mặt xung quanh, hoặc mở toàn bộ hình.

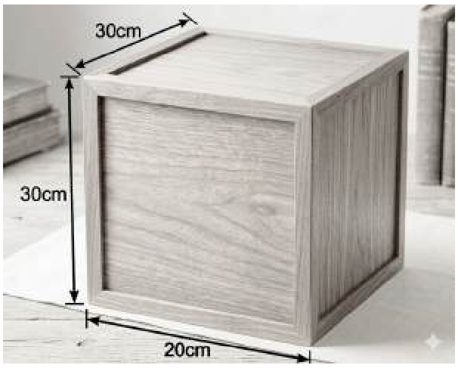
- Với hình trụ: Cắt theo đường sinh và trải thành hình chữ nhật.

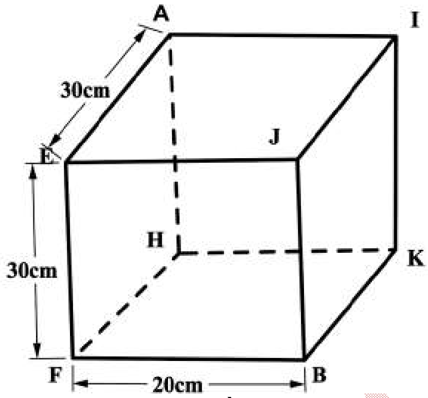
- Với hình chóp/nón: Cắt theo cạnh bên/đường sinh và trải thành hình quạt hoặc tổ hợp hình tam giác.

B - BÀI TẬP

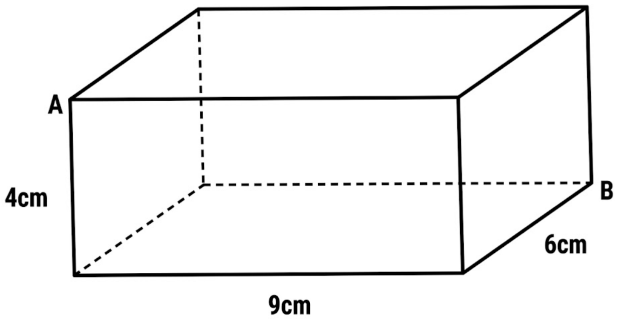
DẠNG 1: TRẢI PHẲNG MÔ HÌNH CÓ DẠNG HÌNH CHÓP, HÌNH LĂNG TRỤ.

Câu 1. Một khối gỗ hình hộp hình nhật có chiều dài, chiều rộng, chiều cao lần lượt là $30cm$, $20cm$ và 30cm (hình vẽ). Một con kiến xuất phát từ A muốn tới điểm B thì quãng đường ngắn nhất nó phải đi dài bao nhiêu cm? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



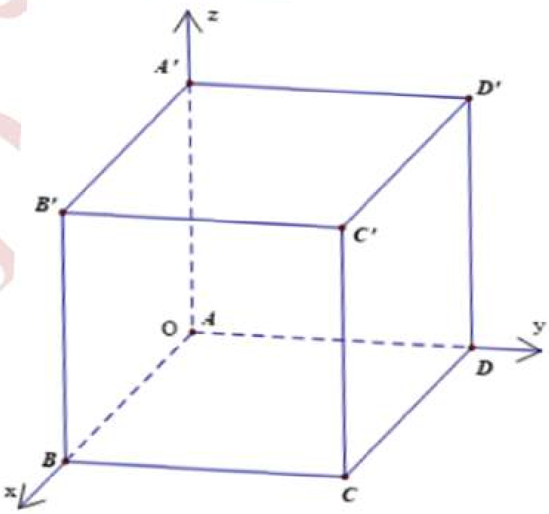


Câu 2. Cho một cái hộp hình chữ nhật có kích thước ba cạnh lần lượt là $4cm$, $6cm$, $9cm$ như hình vẽ.



Một con kiến ở vị trí A muốn đi đến vị trí B. Biết rằng con kiến chỉ có thể bò trên cạnh hay trên bề mặt của hình hộp đã cho. Gọi $x\,cm$ là quãng đường ngắn nhất con kiến đi từ A đến B. Giá trị của x là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

Câu 3. Một căn phòng hình hộp chữ nhật đặt trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (như hình vẽ) đơn vị trên trục là m, biết $AB = 6\,m;\ BC = 8\,m;\ AA' = 4\,m$. Người ta treo một cái đèn bóng tròn tại vị trí điểm A', có một giỏ hoa treo trong phòng, coi vị trí đặt giỏ hoa là 1 điểm M cách trần nhà $1m$, cách mặt phẳng $(ADD'A')$ là $1\,m$, cách mặt phẳng $(ABB'A')$ là $2\,m$, với mặt phẳng $\left(ABCD\right)$ là mặt nền nhà.



a) Tọa độ điểm $D(0;8;0)$.

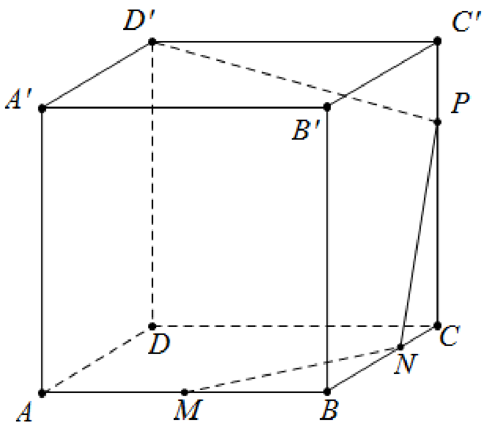
b) Tọa độ của giỏ hoa đối với hệ trục là $M(1;2;1)$.

c) Công tắc đặt tại vị trí nằm chính giữa đoạn thẳng CC'. Đoạn dây nối từ công tắc đến bóng đèn được men theo tường, khi đó đoạn dây ngắn nhất nối từ công tắc đến bóng đèn bằng là $15m$

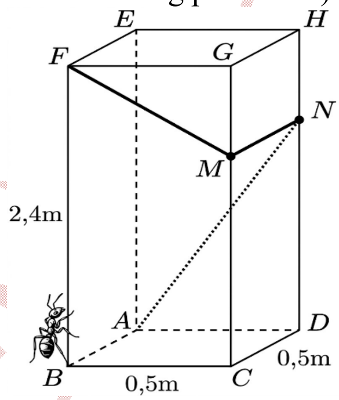
d) Khi bật đèn sáng thì ảnh của giỏ hoa lên mặt đất tại vị trí K, khi đó tọa độ $K(4;8;0)$. (Xem bóng đèn và giỏ hoa có kích thước không đáng kể)

Câu 4. Một mô hình có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB=3, BC=4, AA'=5$. M,N,P lần lượt thuộc các cạnh BB',CC',DD'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM+MN+NP+PA'$ là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

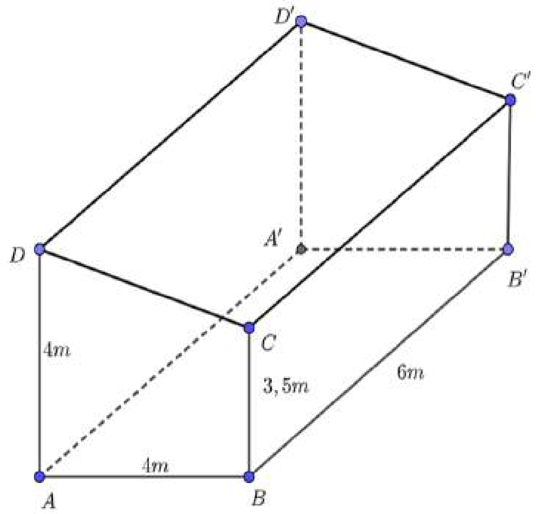
Câu 5. Một mô hình có dạng hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1, M là trung điểm của AB. Một con kiến đi từ M đến điểm N thuộc cạnh BC, từ điểm N đi thẳng tới điểm P thuộc cạnh CC', từ điểm P đi thẳng tới điểm D' (điểm N, P thay đổi tùy hướng đi của con kiến). Quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ điểm M đến điểm D' là



Câu 6. Một cột nhà có dạng hình hộp chữ nhật $ABCDEFGH$ có đáy là hình vuông cạnh $0,5$ m và chiều cao $2,4$ m. Một con kiến bò từ điểm A đến vị trí điểm F theo đường gấp khúc $ANMF$ với $M \in GC$ và $N \in HD$ như hình vẽ. Tính quãng đường (mét) ngắn nhất mà con kiến cần bò (làm tròn đến hàng phần trăm)?



Câu 7. Một ngôi nhà hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB=AD=4(m); BC=3,5(m); BB'=6(m)$ (xem hình vẽ). Ở bức tường $ADD'A'$ người ta lắp một bóng điện cách cạnh $A'D'$ một khoảng bằng $3(m)$ và cách mặt sàn một khoảng bằng $3(m)$, còn ở bức tường $BCC'B'$ người ta lắp một bóng điện cách cạnh $B'C'$ một khoảng bằng $3(m)$ và cách mặt sàn một khoảng bằng $2,5(m)$. Một bảng điều khiển được đặt tại bức tường $A'B'C'D'$ cách cạnh $A'D'$ một khoảng bằng $1(m)$ và cao $1,5(m)$ so với mặt sàn. Người ta muốn nối dây điện từ bảng điều khiển men theo các bức tường (không mắc lên mái) đến 2 bóng điện trên. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu mét dây điện? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Câu 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 mét, một công ty xây dựng đang triển khai hệ thống cấp nước thông minh trong một khu công nghiệp. Mô tả sơ đồ lắp đặt như sau:

* Bồn chứa nước A được đặt trên tầng cao của nhà máy, có tọa độ $A(6;0;7)$.

* Máy lọc nước B nằm ở một vị trí trong khu xử lý, có tọa độ $B(4;6;0)$.

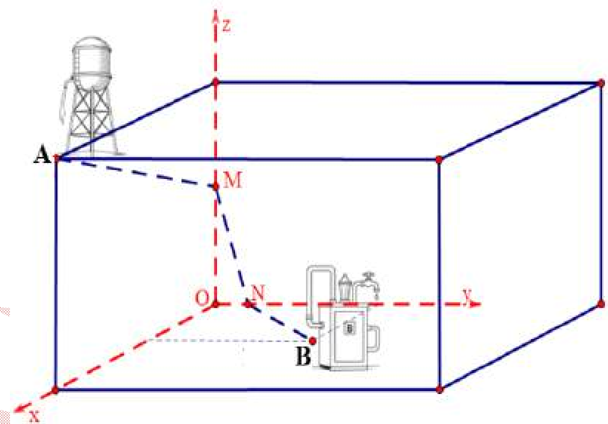
Do địa hình phức tạp, đường ống nước phải được lắp đặt gấp khúc gồm 3 đoạn:

* Đường ống từ bồn A đi qua trục Oz tại một điểm M.

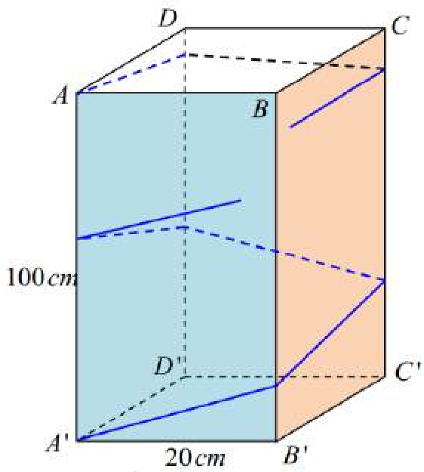
* Từ M nối ống đến trục Oy tại một điểm N.

* Cuối cùng nối tiếp đến điểm B (đường ống đi theo gấp khúc $A \to M \to N \to B$).

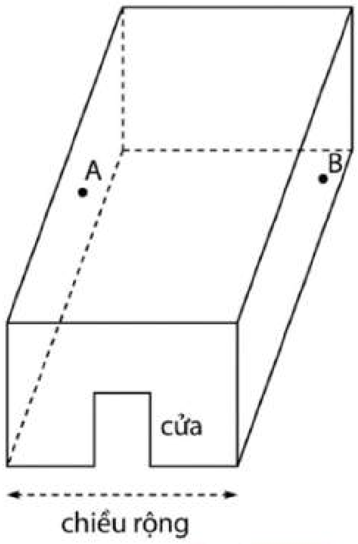
Khi đó, chiều dài tối thiểu của đường ống là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần mười).



Câu 9. Cho toà nhà đồ chơi có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng 20 cm và chiều cao bằng 100cm. Một con kiến bắt đầu từ A' di chuyển đến điểm A theo cách sẽ bám sát vào các mặt xung quanh của toà nhà luôn theo hướng chếch lên tạo với phương ngang một góc $\alpha \in \left(16^\circ;33^\circ\right)$. Biết con kiến luôn di chuyển với tốc độ bằng $\dfrac{3}{5\tan\alpha}$ cm/s. Hãy tính theo phút khoảng thời gian nhỏ nhất để con kiến bò đến điểm A (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) ?

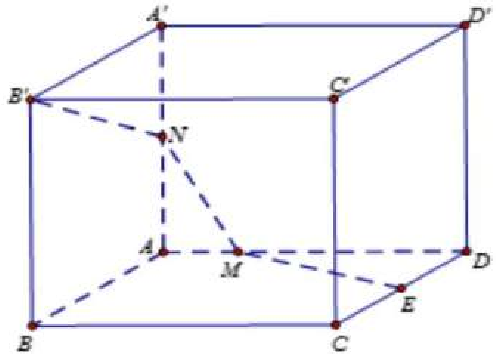


Câu 10. Hai con thằn lằn A và B đang bám ở hai bức tường đối diện của một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều rộng, chiều dài, chiều cao lần lượt là $8m, 12m, 5m$. Ban đầu thằn lằn A ở vị trí cách bức tường phía trước và trần nhà lần lượt là $7m$ và $3m$, còn thằn lằn B ở vị trí cách bức tường phía trước và trần nhà lần lượt là $9m$ và $4m$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Sau đó chúng nhìn thấy nhau và chạy lại gặp nhau. Biết rằng hai con thằn lằn chỉ chạy trên các bức tường và trần nhà, hỏi tổng quãng đường ngắn nhất hai con thằn lằn di chuyển là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

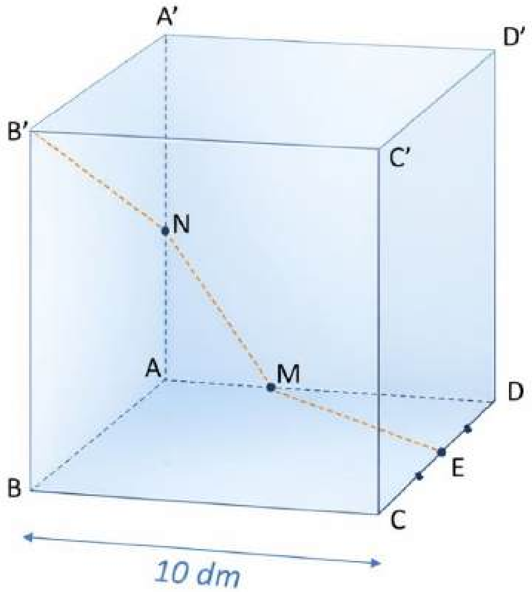


Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình lập phương $OBCD.O'B'C'D'$ có cạnh bằng 9 sao cho điểm D thuộc tia Ox, điểm B thuộc tia Oy, và điểm O' thuộc tia Oz. Điểm M thuộc cạnh $O'B'$ sao cho $O'B' = 3O'M$. Một con kiến bò từ vị trí M qua sáu mặt của hình lập phương đã cho rồi quay lại vị trí điểm M sao cho quãng đường đi được của con kiến là ngắn nhất. Hỏi với cách bò như vậy, con kiến đã bò qua bao nhiêu điểm mà điểm đó có hoành độ, tung độ và cao độ là các số nguyên dương?

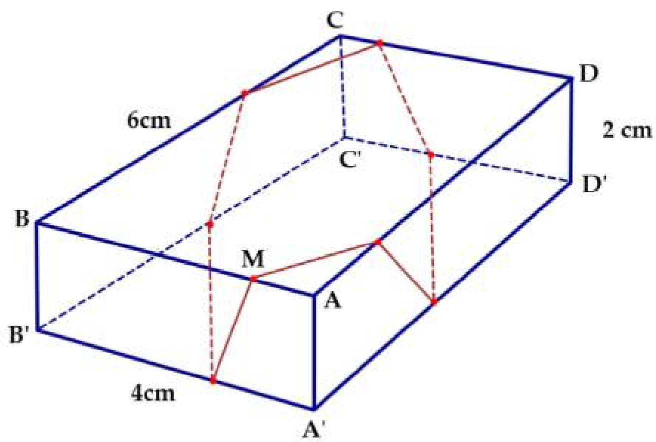
Câu 12. Một mô hình trang trí có dạng là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh bằng 10 m (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm E (là trung điểm của CD) đi qua điểm M thuộc cạnh AD, đi tiếp qua điểm N thuộc cạnh AA' rồi tới điểm B'. Biết độ dài đoạn dây điện bằng 25 m. Tính độ dài đoạn MN *(làm tròn đến hàng phần trăm).*



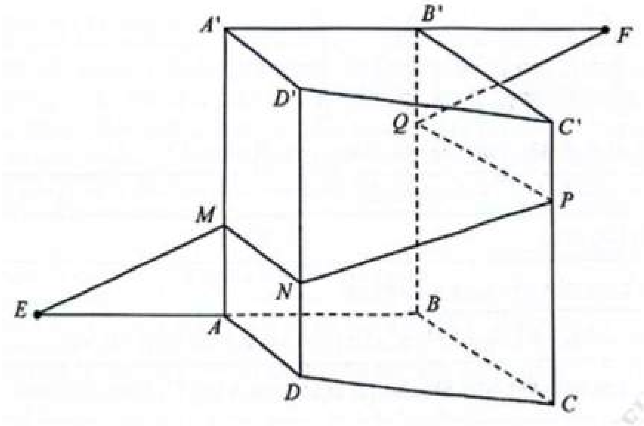
Câu 13. Một mô hình trang trí có dạng là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 10 dm (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm E (là trung điểm của CD) đi qua điểm M thuộc cạnh AD, điểm N thuộc cạnh AA' tới B'. Độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng bao nhiêu?



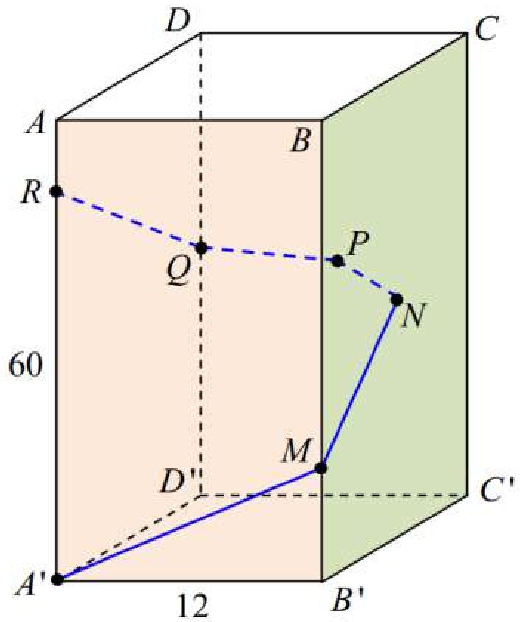
Câu 14. Chiều dài ngắn nhất của sợi dây để quấn quanh hộp quà có dạng hình hộp chữ nhật kích thước 2cm×4cm×6cm như trong hình vẽ là bao nhiêu cm. Biết rằng sợi dây bắt đầu và kết thúc tại điểm M và $AM = 1cm$.



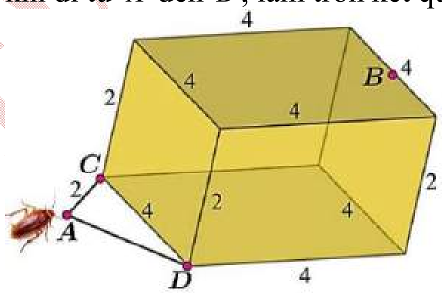
Câu 15. Cho một toà nhà mô hình dạng hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B có $AB = 40$ cm, $AD = 20$ cm, $BC = 50$ cm, $AA' = 80$ cm. Người ta đi một đường dây từ điểm E (đối xứng với B qua A) đến lần lượt các điểm M, N, P, Q trên các cạnh tương ứng là AA', DD', CC', BB', rồi đến điểm F (đối xứng với A' qua B'). Hãy tính chiều dài ngắn nhất của đường dây theo đơn vị centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?



Câu 16. $=\sqrt{200^2+80^2}=\sqrt{40000+6400}=\sqrt{46400}\approx 215,40..\approx 215$ Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh đáy bằng 12 và cạnh bên bằng 60. Dùng một sợi dây có chiều dài L quấn quanh hình lăng trụ từ điểm A’ đến điểm R như hình vẽ, sao cho các đoạn A’M,MN,PQ,QR luôn áp sát vào các mặt của lăng trụ, đoạn NP xuyên vào bên trong hình lăng trụ với N và P lần lượt là tâm các mặt bên $BCC'B'$ và $CDD'C'$, có $AR = 10$. Hãy xác định chiều dài ngắn nhất của sợi dây(làm tròn kết quả đến hàng phần mười) ?

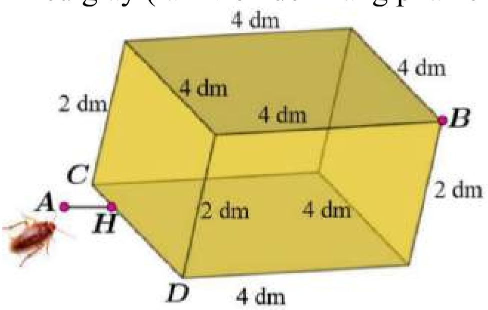


Câu 17. Một con gián từ vị trí A muốn đến vị trí B để kiếm thức ăn. Nó phải di chuyển đến cạnh CD rồi tìm cách bò lên chiếc hộp và tìm đến vị trí B (B là trung điểm một cạnh hình hộp chữ nhật như hình vẽ). Biết rằng $AC\perp AD$ và $AC=2$ dm. Tìm quãng đường ngắn nhất mà con kiến thực hiện khi đi từ A đến B, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

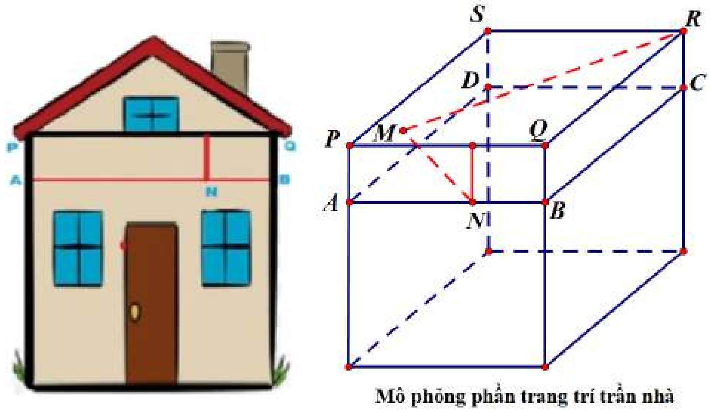


Câu 18. Một chú tiểu cường từ vị trí A muốn đến vị trí B để kiếm thức ăn. Trong hình là chiếc hộp có dạng lăng trụ đứng với tất cả các mặt đều là hình chữ nhật, mặt tiếp xúc với nền nhà là hình vuông cạnh $CD = 4$ dm, chiều cao lăng trụ bằng 2 dm. Biết $AH = 0,5$ dm, $DH = 3$ dm và $AH\perp CD$. Trên bề mặt hộp có chứa cạnh CD thì tiểu cường di chuyển với tốc độ 0,3 dm/s;phần còn lại quãng đường

(trừ đáy tiếp xúc mặt đất) thì tiểu cường luôn di chuyển 0,4 dm/s. Vì tiểu cường giỏi toán hình học không gian nên nó đã chọn con đường ngắn nhất để đi từ A đến B, hỏi thời gian tương ứng là bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần chục)?

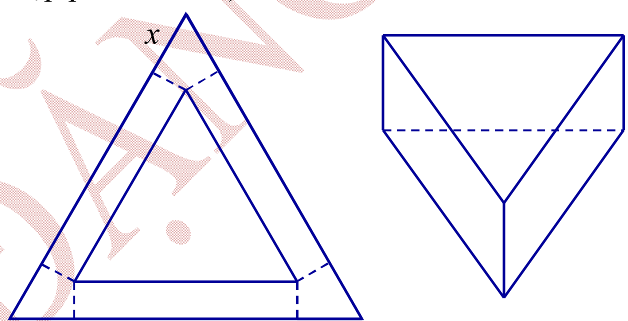


Câu 19. Một ngôi nhà được thiết kế theo một khối hộp chữ nhật với chiều cao từ mặt nền đến mặt trần $ABCD$ là $4m$, phần trang trí trần nhà là một khối hộp chữ nhật $ABCD.PQRS$, biết $AP = 0,5\left(m\right); AB = 5m; AN = 4m; BC = 6m$. Người ta cần hàn một đường gấp khúc bằng sắt NMR với M là điểm nằm trên mặt tường $\left(ADSP\right)$. Tìm độ dài ngắn nhất của đường gấp khúc NMR (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

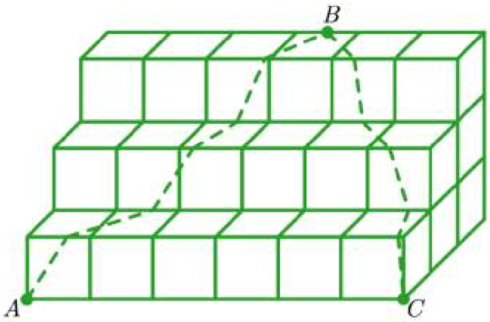


,

Câu 20. Cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng 1 các đoạn bằng $x, \left(0 < x < \dfrac{1}{2}\right)$ phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gấp các hình chữ nhật lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều như hình vẽ. Tìm độ dài x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất. (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)



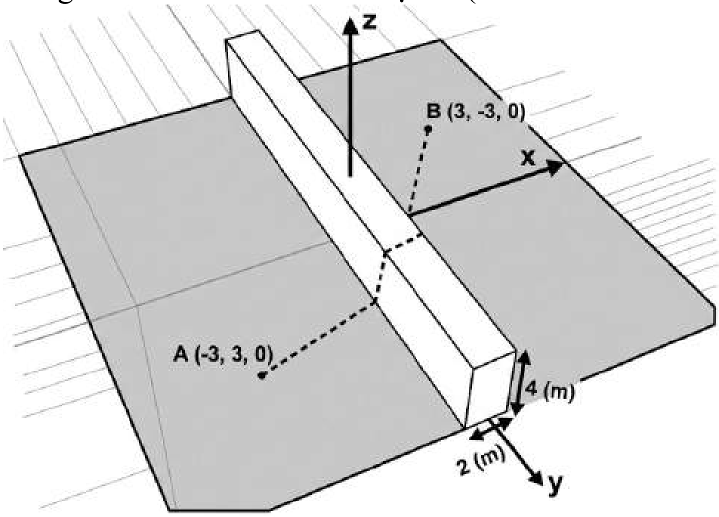
Câu 21. Một con kiến bò từ điểm A (cố định) lên điểm B (linh động) trên đỉnh của bậc thang, rồi từ B đi xuống điểm C (cố định) như hình vẽ bên. Biết rằng một ô vuông gạch của cầu thang có độ dài các cạnh bằng 2 (cm). Gọi L là độ dài đường đi của con kiến.



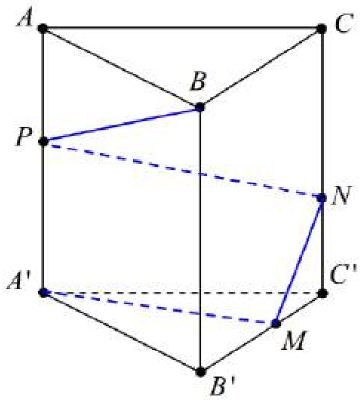
a) Giá trị nhỏ nhất của L^2 là ________ (cm).

b) Khi L là nhỏ nhất thì AB^2 ________ (cm).

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, trên mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), một con gián muốn di chuyển từ điểm $A(-3;3;0)$ trên mặt đất về với tổ của mình ở tọa độ điểm $B(3;-3;0)$. Để trở về tổ, con gián phải bò qua một bước tường có dạng hình hộp chữ nhật dọc theo trục Oy như hình vẽ, biết bức tường có độ cao bằng $4(m)$, $(0 \le z \le 4)$ và độ dày bằng $2(m)$ $(-1 \le x \le 1)$. Con gián có khả năng bám dính và di chuyển dễ dàng trên bức tường thẳng đứng. Xác định quãng đường ngắn nhất mà con gián có thể đi để trở về được tổ (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).

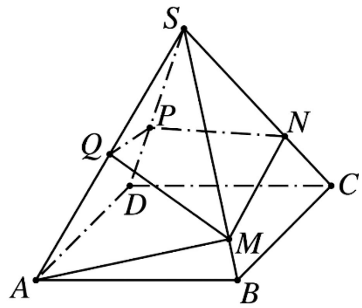


Câu 23. Cho một hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng 6 và cạnh bên bằng 24. Dùng một sợi dây có chiều dài L quấn quanh hình lăng trụ từ điểm A' đến điểm B như hình vẽ, sao cho sợi dây luôn áp sát vào các mặt. Hãy xác định chiều dài ngắn nhất của sợi dây (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

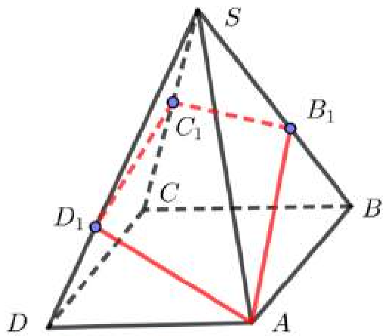


Câu 24. Bên cạnh đường trước khi vào thành phố, người ta xây một ngọn tháp đèn hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh bên $SA = 200m$, $\widehat{ASB} = 15°$.Người ta tạo ra một con đường bậc thang xung quanh

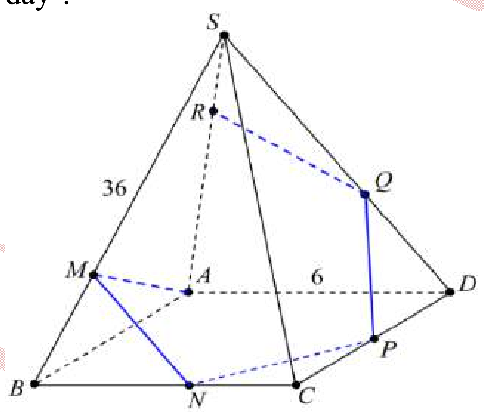
bề mặt tháp từ A đến một vị trí Q thuộc SA (con đường gồm 4 đoạn thẳng AM, MN, NP, PQ như hình vẽ) Để tiết kiệm kinh phí, kỹ sư đã nghiên cứu và xây dựng con đường có độ dài ngắn nhất. Tính độ dài ngắn nhất của con đường bậc thang (làm tròn tới hàng đơn vị)



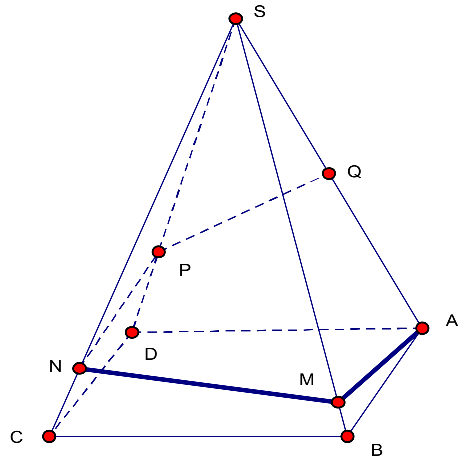
Câu 25. Có một mô hình kim tự tháp là một khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng 6 cm, cạnh đáy bằng 4 cm được đặt lên bàn trưng bày (đáy nằm trên mặt bàn). Một con kiến đang ở một đỉnh của đáy và có ý định đi một vòng qua tất cả các mặt xung quanh và trở về vị trí ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất mà con kiến có thể đi được (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).



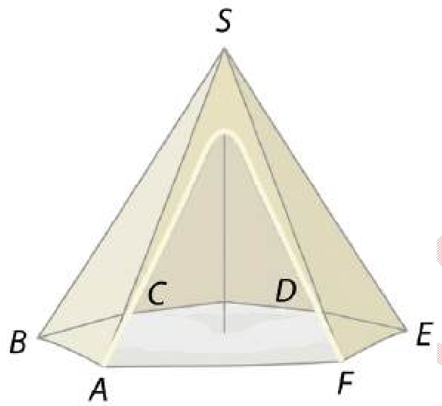
Câu 26. Cho một hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 6 và cạnh bên bằng 36. Dùng một sợi dây có chiều dài L quấn quanh hình chóp từ điểm A đến điểm R như hình vẽ, sao cho sợi dây luôn áp sát vào các mặt của hình chóp. Biết $RA = 2RS$. Hãy xác định chiều dài ngắn nhất của sợi dây ?



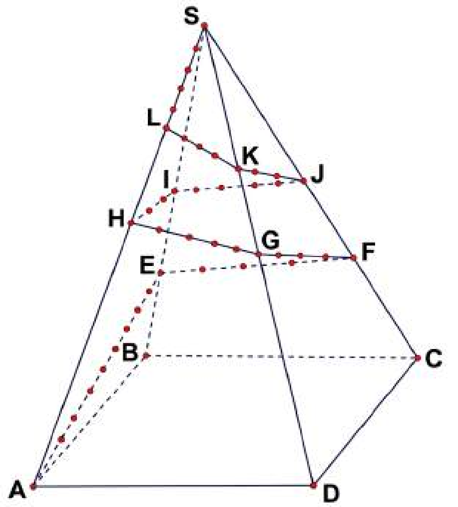
Câu 27. Bên cạnh con đường trước khi vào thành phố người ta xây một ngọn tháp đèn lộng lẫy. Ngọn tháp hình tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên $SA = 600$ mét, $\widehat{ASB} = 15°$. Do có sự cố đường dây điện tại điểm Q (là trung điểm của SA) bị hỏng, người ta tạo ra một con đường từ A đến Q gồm bốn đoạn thẳng: AM, MN, NP, PQ (hình vẽ). Để tiết kiệm kinh phí, kỹ sư đã nghiên cứu và có được chiều dài con đường từ A đến Q ngắn nhất. Tính tỷ số $k = \dfrac{AM + MN}{NP + PQ}$.



Câu 28. Một nhóm bạn trẻ tổ chức dã ngoại đã chuẩn bị các lều du mục giống nhau có dạng hình chóp $S.ABCDEF$ với đáy là lục giác đều $ABCDEF$. Vào buổi tối, nhóm bạn này muốn treo dây đèn LED xung quanh lều để trang trí bằng cách quấn dây vòng từ điểm A đến trung điểm đoạn SF cắt qua tất cả các cạnh bên. Hỏi chiều dài ngắn nhất của dây đèn LED cần chuẩn bị là bao nhiêu, biết rằng các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và dài 2,2 mét; $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSD}=\widehat{DSE}=\widehat{ESF}=\widehat{FSA}=30^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị mét).



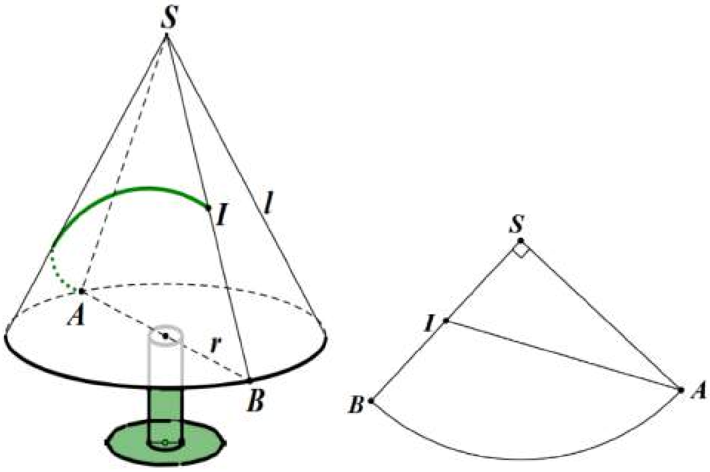
Câu 29. Người ta cần trang trí cho một kim tự tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $200\,m$, góc $\widehat{ASB}=15^0$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp $AEFGHIJKLS$. Trong đó điểm L cố định với $LS=40\,m$.



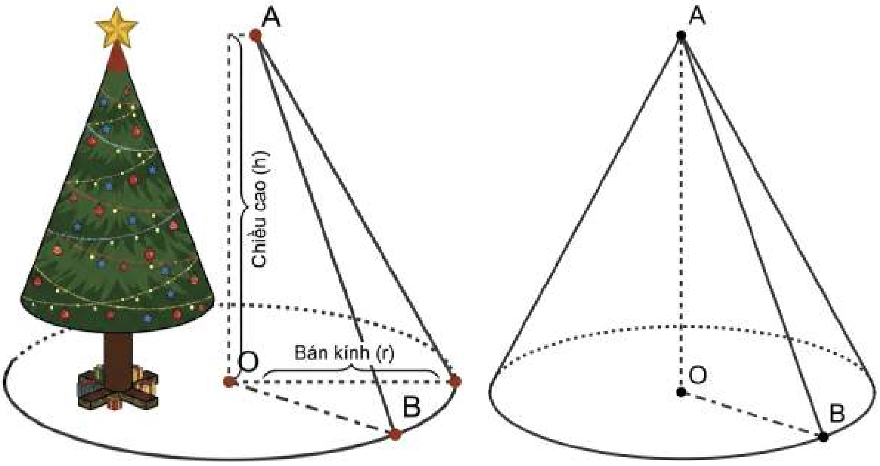
Hỏi khi đó cần dùng ít nhất bao nhiêu mét dây đèn led để trang trí? (Làm tròn đến hàng đơn vị)

DẠNG 2: TRẢI PHẲNG MÔ HÌNH CÓ DẠNG HÌNH TRÒN XOAY.

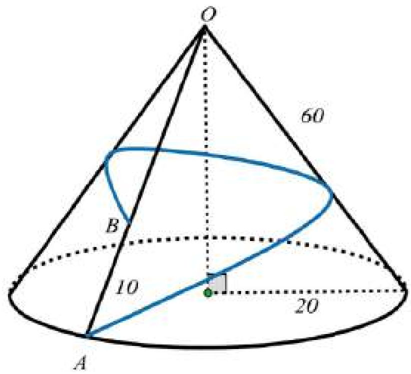
Câu 30. Phần trên của một cây thông Noel có dạng hình nón, đỉnh S, độ dài đường sinh $l = 2m$ và bán kính đáy $r = 1m$. Biết rằng AB là một đường kính đáy của hình nón và I là trung điểm đoạn thẳng SB (tham khảo hình vẽ). Để trang trí, người ta lắp một dây bóng nháy trên mặt ngoài của cây thông từ vị trí A đến I. Tính độ dài ngắn nhất của dây bóng nháy (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



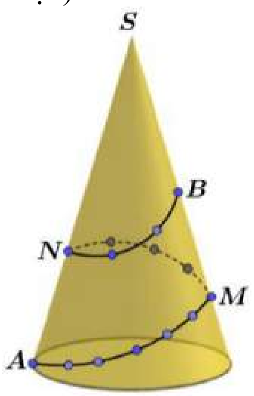
Câu 31. Một cây thông Noel có dạng hình nón với chiều dài đường sinh bằng $60cm$ và bán kính đáy $r = 10cm$. Một chú kiến bắt đầu xuất phát từ một đỉnh nằm trên mặt đáy hình nón và có dự định bò một vòng quanh cây thông sau đó quay trở lại vị trí xuất phát ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất mà chú kiến có thể đi được là bao nhiêu cm?



Câu 32. Hình vẽ dưới đây mô tả một ngọn núi có dạng hình nón có độ dài đường sinh bằng $60m$, bán kính đáy bằng $20m$. Nhà đầu tư du lịch dự định xây dựng một con đường nhằm phục vụ việc chuyên chở khách du lịch thăm quan ngắm cảnh vòng quanh ngọn núi bắt đầu từ vị trí A và dừng ở vị trí B sao cho đoạn $AB = 10m$. Biết rằng người ta đã chọn xây dựng đường đi ngắn nhất vòng quanh núi từ A đến B, đoạn đường đầu là phần lên dốc từ A và đoạn sau sẽ xuống dốc đến B. Khi đó quãng đường xuống dốc đi từ A đến B bằng $\dfrac{a}{\sqrt{b}}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $T = a + b$.

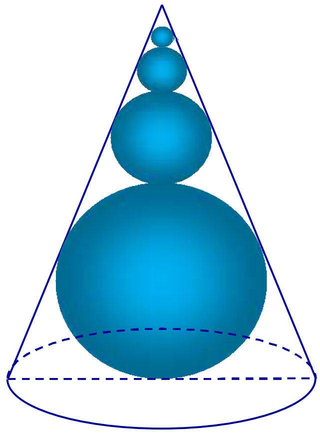


Câu 33. Một người muốn nối một dây đèn nhiều màu sắc từ vị trí A đến vị trí B trên vật trang trí có dạng hình nón với bán kính đáy bằng 2 dm và chiều cao bằng $6dm$. Thiết diện qua trục hình nón là tam giác chứa các cạnh SA, SB (S là đỉnh hình nón); dây điện được kéo từ A đến một vị trí M thuộc đường sinh SB, sau đó qua N thuộc đường sinh SA trước khi đến B. Biết rằng $SB = 2dm$. Tìm đoạn dây điện bé nhất được dùng cho việc này (tính theo dm và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

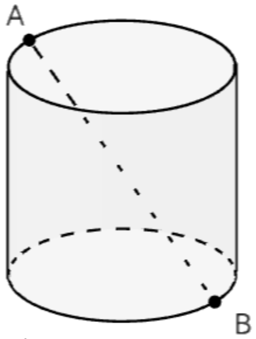


Câu 34. Người ta đặt được vào một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Bán kính đáy của hình nón đã cho là $m\sqrt{n}.a,\ \left(m,n\in\mathbb{N}^*\right)$. Giá trị của $m+n$ bằng bao nhiêu?

Câu 35. Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng 60°, độ dài đường sinh bằng 5. Dãy hình cầu $(S_1), (S_2), (S_3), ..., (S_n), ...$ thỏa mãn: (S_1) tiếp xúc với mặt đáy và các đường sinh của hình nón (N); (S_2) tiếp xúc ngoài với (S_1) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (N); (S_3) tiếp xúc ngoài với (S_2) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (N). Tổng thể tích các khối cầu $(S_1), (S_2), (S_3), ..., (S_n), ...$ bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

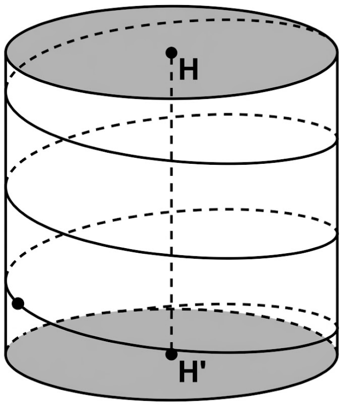


Câu 36. Một hộp sữa hình trụ tròn như hình vẽ có chu vi đáy bằng $32\,\text{cm}$ và chiều cao bằng $12\,\text{cm}$. có một lỗ đục tại điểm A như hình vẽ. Một mặt phẳng đi qua điểm A và trục của hình trụ cắt đáy không chứa điểm A tại điểm B như hình vẽ. Một con kiến tại B muốn đi đến A theo mặt ngoài của hộp sữa thì đường đi ngắn nhất của nó bằng bao nhiêu cm?

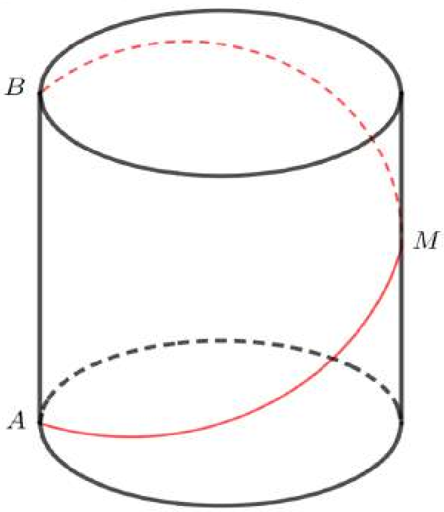


Câu 37. Để chào mừng 20 năm thành lập thành phố A, ban tổ chức quyết định trang trí cho cổng chào có hai cột hình trụ. Các kỹ thuật viên đưa ra phương án quấn xoắn từ chân cột lên đỉnh cột đúng 20 vòng đèn Led cho mỗi cột. Biết bán kính trụ cổng là 30cm và chiều cao cổng là $5\pi\left(m\right)$. Tính chiều dài dây đèn Led tối thiểu để trang trí hai cột trụ cổng. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

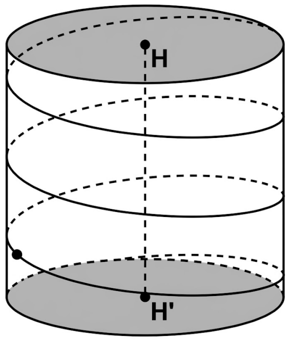
Câu 38. Để chào mừng 20 năm thành lập thành phố A, ban tổ chức quyết định trang trí cho cổng chào có hai cột hình trụ. Các kỹ thuật viên đưa ra phương án quấn xoắn từ chân cột lên đỉnh cột đúng 20 vòng đèn Led cho mỗi cột. Biết bán kính trụ cổng là 30 cm và chiều cao cổng là 5π (m). Tính chiều dài dây đèn Led tối thiểu để trang trí hai cột trụ cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



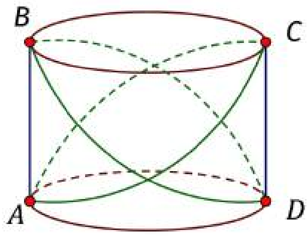
Câu 39. Một cột trụ hình trụ cao 3 m, bán kính đáy $0{,}4$ m. Người ta muốn quấn một đường dây đèn chớp chớp từ vị trí A đến M rồi từ M đến B như hình vẽ. Chiều dài ngắn nhất của 6 đường dây như thế là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



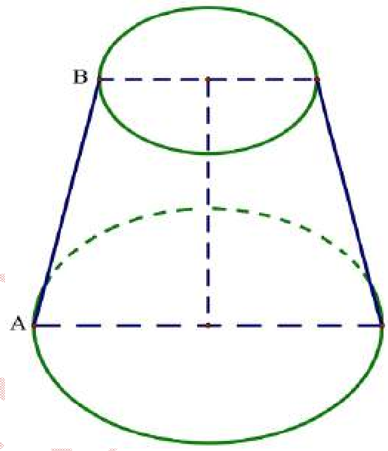
Câu 40. Một con kiến bò lên đều quanh hình trụ (từ mặt đáy dưới lên mặt đáy trên), bán kính mặt đáy hình trụ $R = \dfrac{3}{8\pi}$ và chiều cao hình trụ $h = 4$. Hỏi con kiến bò ngắn nhất bao nhiêu vòng quanh hình trụ để đoạn đường kiến đi là 1 số nguyê



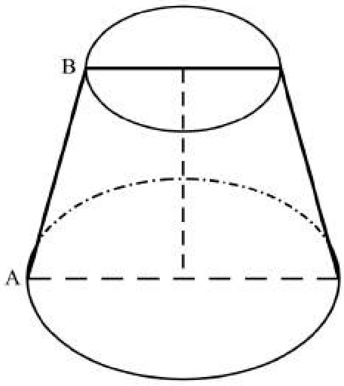
Câu 41. Một cái bánh kem hình trụ cao 15 *cm*, đường kính 24 *cm*. Người ta muốn trang trí 2 đường viền bằng socola như hình vẽ. Chiều dài ngắn nhất để tiết kiệm là bao nhiêu cm? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



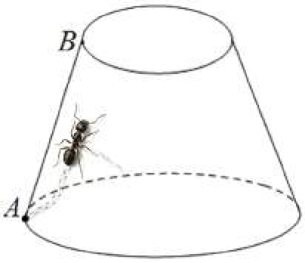
Câu 42. Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh than cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



Câu 43. Có một cái cốc úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của cốc là 30cm, bán kính đáy cốc là 3cm, bán kính miệng cốc là 5cm. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò ba vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Tính quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



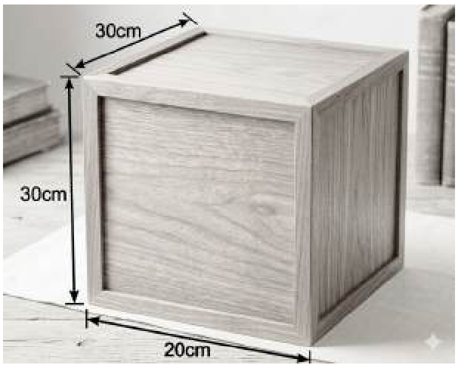
Câu 44. Một con kiến xuất phát từ A và đi hai vòng quanh hình nón cụt rồi dừng lại tại B như hình vẽ. Biết bán kính đáy lớn là $4cm$ và đáy nhỏ là $2cm$, chiều cao $\sqrt{3}cm$. Quãng đường ngắn nhất con kiến đó phải đi là bao nhiêu cm? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

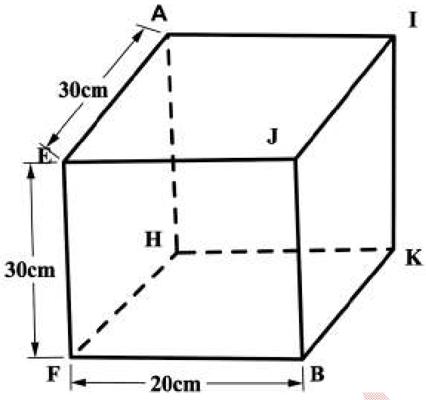


C- HƯỚNG DẪN GIẢI

DẠNG 1: TRẢI PHẲNG MÔ HÌNH CÓ DẠNG HÌNH CHÓP, HÌNH LĂNG TRỤ.

Câu 1. Một khối gỗ hình hộp hình nhật có chiều dài, chiều rộng, chiều cao lần lượt là $30cm$, $20cm$ và 30cm (hình vẽ). Một con kiến xuất phát từ A muốn tới điểm B thì quãng đường ngắn nhất nó phải đi dài bao nhiêu cm? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



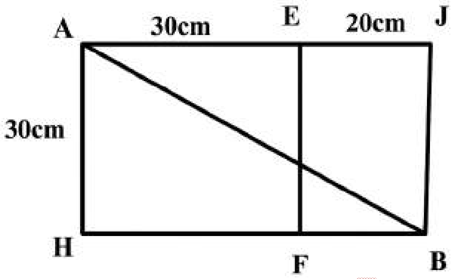


Lời giải

Trả lời: 58,3

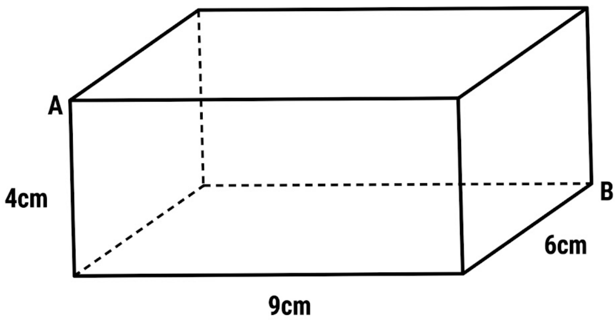
Dùng kỹ thuật giải phẳng.

Trải các mặt $AEFH$ và EFBJ ta được



Có $AB=\sqrt{AH^2+HB^2}=10\sqrt{34}$, (Tương tự trải các mặt $AEJI$, $JIKB$ và $AHKI$, $IKBJ$ đều chung một đáp số). Suy ra quãng đường ngắn nhất đi từ A đến B là $AB=10\sqrt{34}\approx 58,3$.

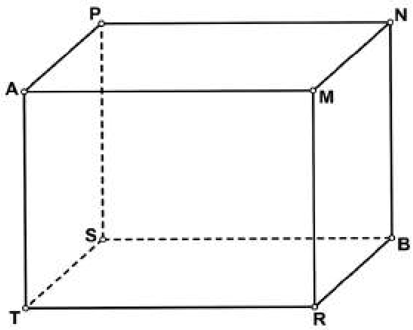
Câu 2. Cho một cái hộp hình chữ nhật có kích thước ba cạnh lần lượt là $4cm$, $6cm$, $9cm$ như hình vẽ.

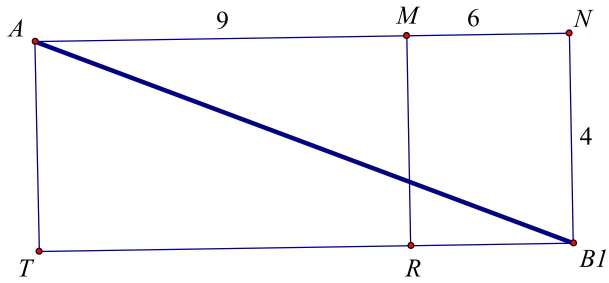


Một con kiến ở vị trí A muốn đi đến vị trí B. Biết rằng con kiến chỉ có thể bò trên cạnh hay trên bề mặt của hình hộp đã cho. Gọi $x\,cm$ là quãng đường ngắn nhất con kiến đi từ A đến B. Giá trị của x là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

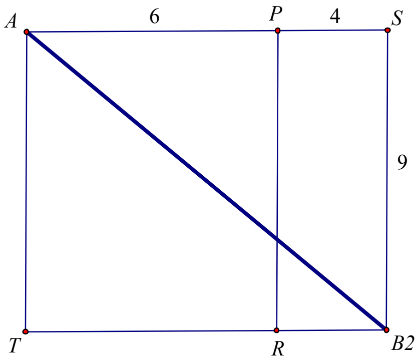
Lời giải

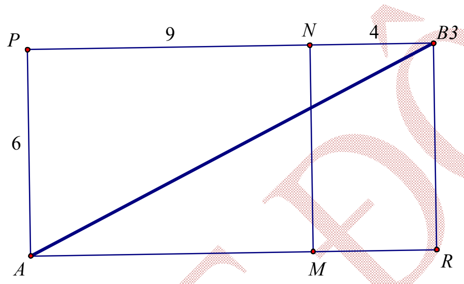
Trả lời: 13,5





Vì con kiến bò theo mặt của hình hộp từ A đến B nên khi ta vẽ hình khai triển của hình hộp chữ nhật và trải phẳng như hình vẽ thì xem như con kiến bò trên một mặt phẳng.





Khi đó B sẽ được tách thành 3 vị trí là B_1; B_2 và B_3. Quãng đường ngắn nhất sẽ là một trong ba đoạn thẳng AB_1; AB_2 hay AB_3. Ta có:

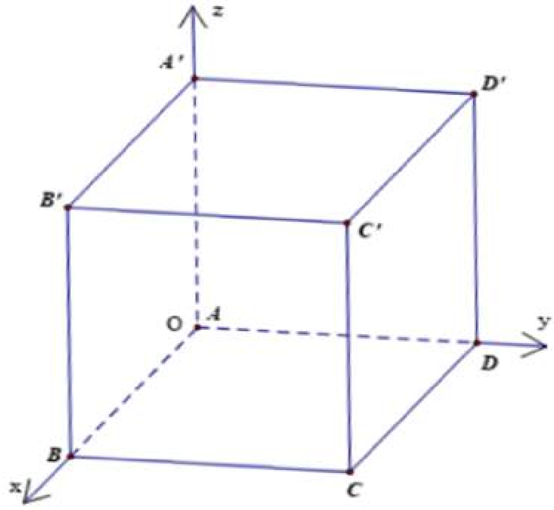
$$AB_1 = \sqrt{15^2 + 4^2} = \sqrt{241}$$

$$AB_2 = \sqrt{9^2 + 10^2} = \sqrt{181} \approx 13,5$$

$$AB_3 = \sqrt{6^2 + 13^2} = \sqrt{205}$$

Do đó quãng đường ngắn nhất là $AB_2 \approx 13,45 \in (13;14)$.

Câu 3. Một căn phòng hình hộp chữ nhật đặt trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (như hình vẽ) đơn vị trên trục là m, biết $AB = 6m$; $BC = 8m$; $AA' = 4m$. Người ta treo một cái đèn bóng tròn tại vị trí điểm A', có một giỏ hoa treo trong phòng, coi vị trí đặt giỏ hoa là 1 điểm M cách trần nhà $1m$, cách mặt phẳng $(ADD'A')$ là $1m$, cách mặt phẳng $(ABB'A')$ là $2m$, với mặt phẳng $(ABCD)$ là mặt nền nhà.



a) Tọa độ điểm $D(0;8;0)$.

b) Tọa độ của giỏ hoa đối với hệ trục là $M(1;2;1)$.

c) Công tắc đặt tại vị trí nằm chính giữa đoạn thẳng CC'. Đoạn dây nối từ công tắc đến bóng đèn được men theo tường, khi đó đoạn dây ngắn nhất nối từ công tắc đến bóng đèn bằng là $15m$

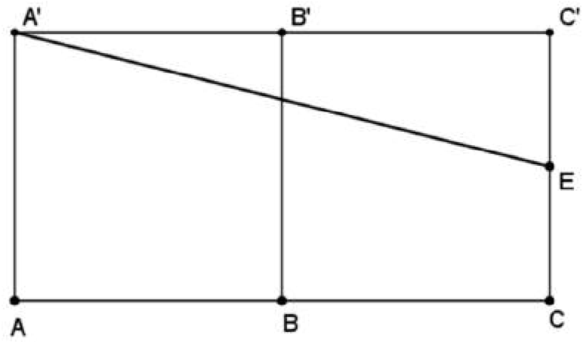
d) Khi bật đèn sáng thì ảnh của giỏ hoa lên mặt đất tại vị trí K, khi đó tọa độ $K(4;8;0)$. (Xem bóng đèn và giỏ hoa có kích thước không đáng kể)

Lời giải

(a) Đúng: $BC = AD = 8m$ nên tọa độ điểm $D(0;8;0)$.

(b) Sai: $A'(0;0;4)$, $M(1;2;3)$

(c) Sai: Gọi vị trí E là công tắc, là trung điểm CC'. Ta trải phẳng tường ra ta có hình dưới



Để đoạn dây ngắn nhất chính độ dài đoạn thẳng $A'E$. Khi đó $A'E = \sqrt{14^2 + 2^2} \approx 14,14$

(d) Đúng: Gọi $K(a;b;0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy).

Tia sáng chiếu qua chậu hoa có bóng xuống mặt phẳng (Oxy) tại điểm K nên A', M, K thẳng hàng.

Ta có: $\overrightarrow{A'M} = (1;2;-1)$; $\overrightarrow{A'K} = (a;b;-4)$

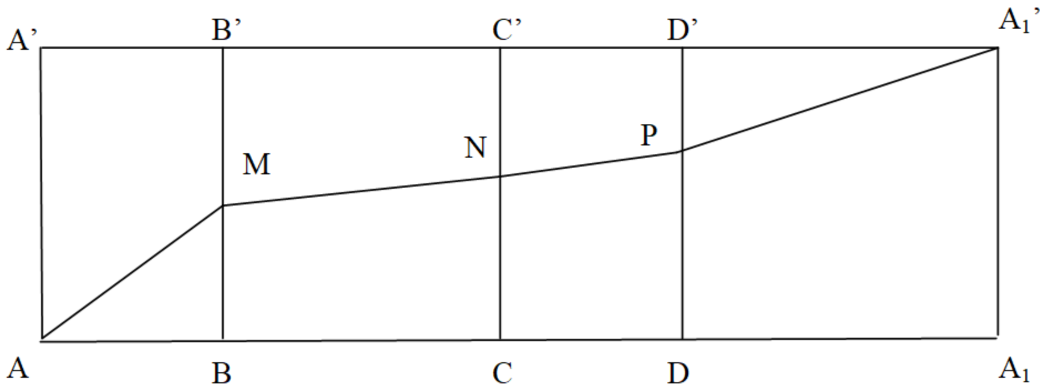
Do A', M, K thẳng hàng nên $\overrightarrow{A'M}; \overrightarrow{A'K}$ cùng phương $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2} = \dfrac{-4}{-1} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 8 \end{cases} \Rightarrow K(4;8;0)$.

Câu 4. Một mô hình có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh $AB = 3, BC = 4, AA' = 5$. M, N, P lần lượt thuộc các cạnh BB', CC', DD'. Tìm giá trị nhỏ nhất của $AM + MN + NP + PA'$ là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)

Lời giải

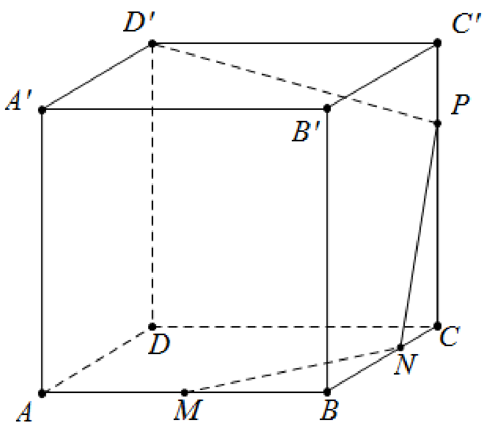
Trả lời: 14,9

Ta trải hình hộp chữ nhật thành hình chữ nhật



Từ đây ta suy ra $AM+MN+NP+PA'$ đạt giá trị nhỏ nhất khi A,M,N,P,A_1' thẳng hàng và khi đó $\left(AM+MN+NP+PA'\right)_{Min}=AA_1'=\sqrt{AA_1^2+AA'^2}=\sqrt{(14)^2+(5)^2}=\sqrt{221}$

Câu 5. Một mô hình có dạng hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1, M là trung điểm của AB. Một con kiến đi từ M đến điểm N thuộc cạnh BC, từ điểm N đi thẳng tới điểm P thuộc cạnh CC', từ điểm P đi thẳng tới điểm D' (điểm N, P thay đổi tùy hướng đi của con kiến). Quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ điểm M đến điểm D' là

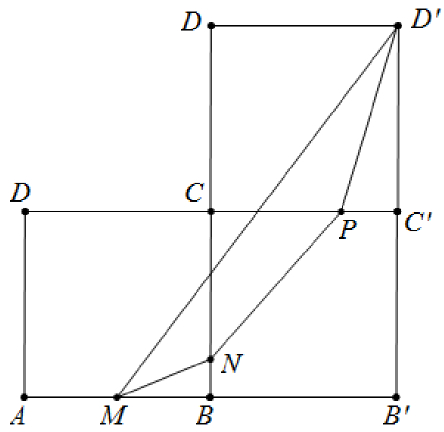


Lời giải

Trả lời: 2,5

Dùng kĩ thuật trải phẳng

Trải các mặt $(ABCD)$, $(BCC'B')$, $(CDD'C')$ trên một mặt phẳng.

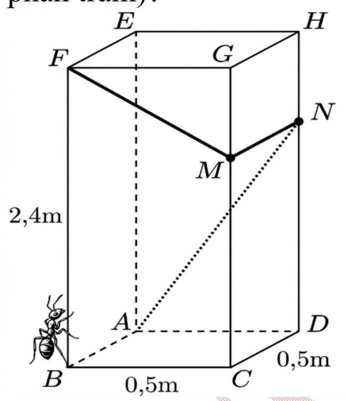


Quãng đường ngắn nhất để con kiến đi từ điểm M đến điểm D' bằng $MN + NP + PD' \geq MD'$
Đẳng thức xảy ra khi M, N, P, D' thẳng hàng.

Tam giác $B'MD'$ vuông tại B' có $B'M = \dfrac{3}{2}$, $B'D = 2$

Khi đó $MD' = \sqrt{B'M^2 + B'D^2} = \dfrac{5}{2}$

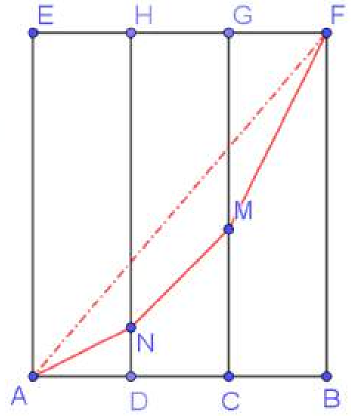
Câu 6. Một cột nhà có dạng hình hộp chữ nhật $ABCDEFGH$ có đáy là hình vuông cạnh $0,5$ m và chiều cao $2,4$ m. Một con kiến bò từ điểm A đến vị trí điểm F theo đường gấp khúc $ANMF$ với $M \in GC$ và $N \in HD$ như hình vẽ. Tính quãng đường (mét) ngắn nhất mà con kiến cần bò (làm tròn đến hàng phần trăm)?



Lời giải

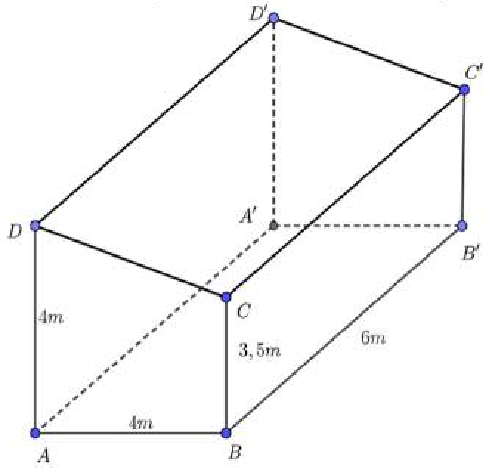
Trả lời: 2,83

Trải phẳng các mặt bên của hình hộp ta có hình vẽ:



Độ dài quãng đường $ANMF$ nhỏ nhất là $AF = \sqrt{AB^2 + BF^2} = \sqrt{1,5^2 + 2,4^2} \approx 2,83$ (m)

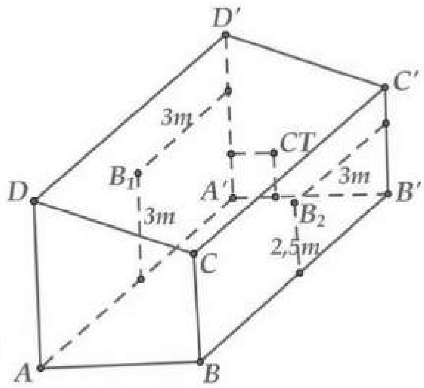
Câu 7. Một ngôi nhà hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B, $AB = AD = 4(m); BC = 3,5(m); BB' = 6(m)$ (xem hình vẽ). Ở bức tường $ADD'A'$ người ta lắp một bóng điện cách cạnh $A'D'$ một khoảng bằng $3(m)$ và cách mặt sàn một khoảng bằng $3(m)$, còn ở bức tường $BCC'B'$ người ta lắp một bóng điện cách cạnh $B'C'$ một khoảng bằng $3(m)$ và cách mặt sàn một khoảng bằng $2,5(m)$. Một bảng điều khiển được đặt tại bức tường $A'B'C'D'$ cách cạnh $A'D'$ một khoảng bằng $1(m)$ và cao $1,5(m)$ so với mặt sàn. Người ta muốn nối dây điện từ bảng điều khiển men theo các bức tường (không mắc lên mái) đến 2 bóng điện trên. Hỏi cần tối thiểu bao nhiêu mét dây điện? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



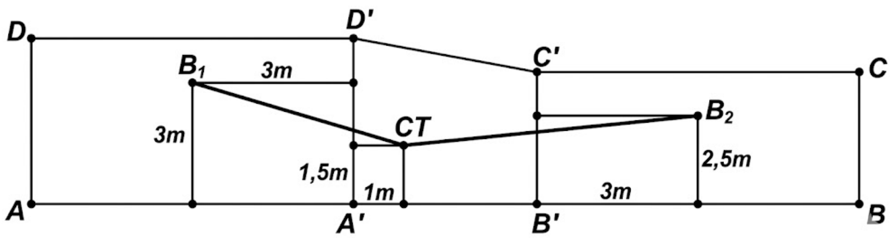
Lời giải

Trả lời: 10,4

Gọi $B_1; B_2$; CT lần lượt là vị trí bóng đèn ở các mặt $ADD'A'$, $BCC'B'$ và công tắc ở mặt $A'B'C'D'$ như hình bên dưới:



Do dây điện chỉ được đi theo các bức tường mà không đi lên mái, ta trải phẳng ba mặt phẳng $ADD'A'$, $BCC'B'$ và $A'B'C'D'$ như sau:



Để đường dây điện là ngắn nhất, sau khi trải phẳng ta thấy hai đường dây điện chính là đường thẳng nối từ công tắc tới hai bóng đèn (đường màu đỏ ở hình trên)

Khi đó độ dài đường dây điện ngắn nhất là $L_{min} = \sqrt{4^2 + 1,5^2} + \sqrt{6^2 + 1^2} \approx 10,4(m)$

Câu 8. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$, đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 mét, một công ty xây dựng đang triển khai hệ thống cấp nước thông minh trong một khu công nghiệp. Mô tả sơ đồ lắp đặt như sau:

* Bồn chứa nước A được đặt trên tầng cao của nhà máy, có tọa độ $A(6;0;7)$.

* Máy lọc nước B nằm ở một vị trí trong khu xử lý, có tọa độ $B(4;6;0)$.

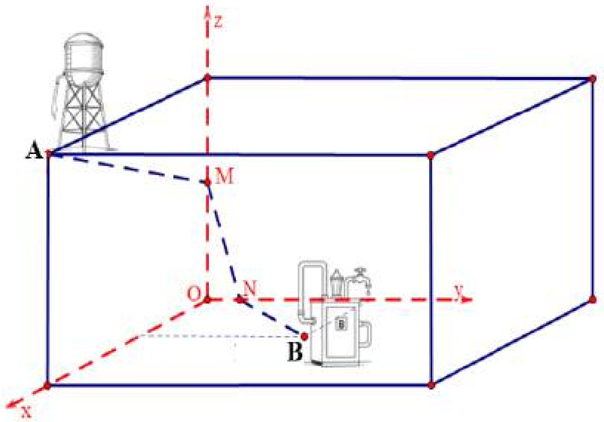
Do địa hình phức tạp, đường ống nước phải được lắp đặt gấp khúc gồm 3 đoạn:

* Đường ống từ bồn A đi qua trục Oz tại một điểm M.

* Từ M nối ống đến trục Oy tại một điểm N.

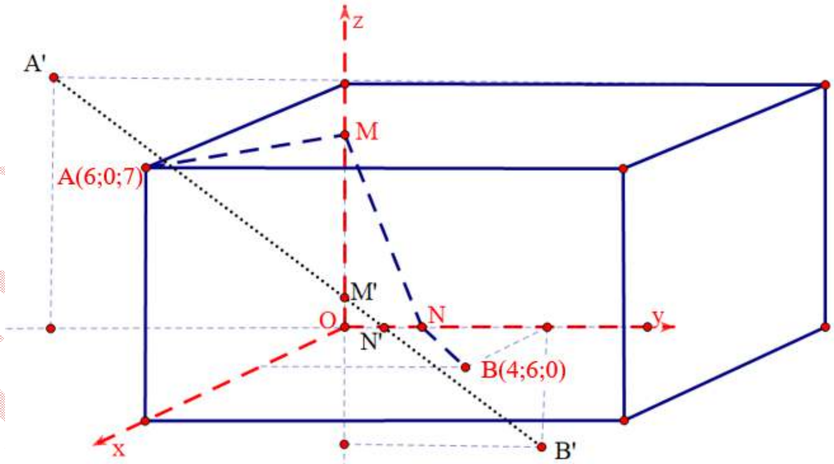
* Cuối cùng nối tiếp đến điểm B (đường ống đi theo gấp khúc $A \to M \to N \to B$).

Khi đó, chiều dài tối thiểu của đường ống là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải

Trả lời: 16,3



Để tìm độ dài ngắn nhất của đường gấp khúc $AMNB$ ta sẽ "trải" các điểm A, B về cùng 1 mặt phẳng (Oyz) với các điểm M, N và thoả mãn đoạn thẳng mới bằng với đoạn thẳng ban đầu (tức $AM = A'M; BM = BM'$) và đoạn gấp khúc ngắn nhất khi 4 điểm trên thẳng hàng.

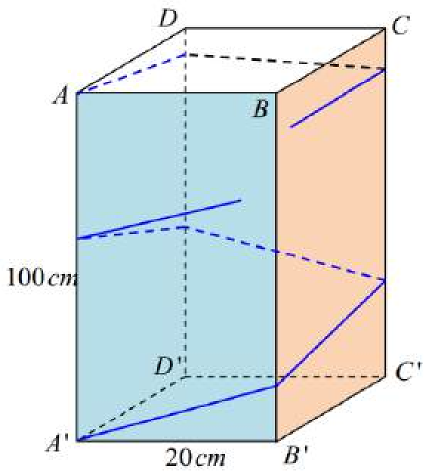
Ta quay vuông góc mặt phẳng chứa điểm $A(6;0;7)$ xuống mặt phẳng (Oyz) ta được điểm $A'(0;-6;7)$.

Dễ thấy $AM = A'M$, $BN = BN'$

Ta có độ dài đường gấp khúc $AMNB = AM + MN + NB = A'M + MN + NB'$.

Suy ra $\text{Min}\left(AM' + MN + N'B\right)$ xảy ra khi A', M, N, B' thẳng hàng và bằng đường thẳng $A'B'$ Và có độ dài là $A'B' = \sqrt{(6+6)^2 + (-4-7)^2} = \sqrt{265} \approx 16,3$

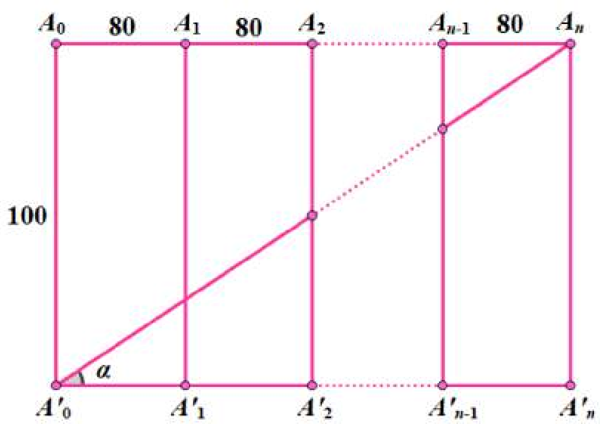
Câu 9. Cho toà nhà đồ chơi có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh bằng 20 cm và chiều cao bằng 100cm. Một con kiến bắt đầu từ A' di chuyển đến điểm A theo cách sẽ bám sát vào các mặt xung quanh của toà nhà luôn theo hướng chếch lên tạo với phương ngang một góc $\alpha \in \left(16^\circ; 33^\circ\right)$. Biết con kiến luôn di chuyển với tốc độ bằng $\dfrac{3}{5\tan\alpha}$ cm/s. Hãy tính theo phút khoảng thời gian nhỏ nhất để con kiến bò đến điểm A (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) ?



Lời giải

Trả lời: 2,91

Giả sử con kiến đi n vòng quanh lăng trụ. Con kiến đi từ A' đến A nên số vòng đi phải là số nguyên. Ta khai triển (trải phẳng) hình lăng trụ n lần như sau:



Do con kiến luôn đi chếch lên so với phương ngang góc $\alpha \in \left(16^\circ; 33^\circ\right)$ nên:

$$\tan 16^\circ < \tan\alpha = \frac{100}{80n} < \tan 33^\circ \Rightarrow 1,92 < n < 4,36 \Rightarrow 2 \le n \le 4$$

$$t = \frac{A'A}{v} = \frac{\sqrt{(80n)^2 + 100^2}}{\dfrac{3}{5\tan\alpha}} = \frac{5\tan\alpha\sqrt{6400n^2 + 10000}}{3}$$

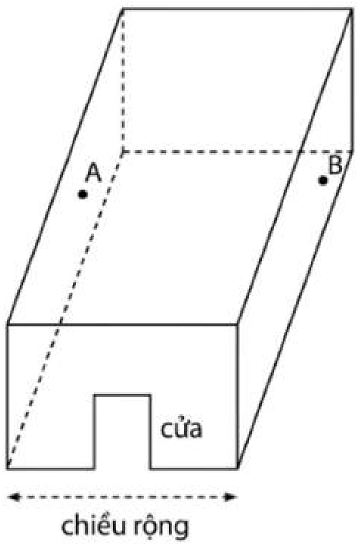
Vì $\tan\alpha = \dfrac{100}{80n}$, ta có

$$t = \frac{5}{3}\frac{100}{80n}\sqrt{6400n^2+10000} = \frac{500}{240n}\sqrt{6400n^2+10000} = \frac{25}{12n}\sqrt{6400n^2+10000}$$

$$t = \frac{25}{12n}\cdot 100\sqrt{0.64n^2+1} = \frac{2500}{12n}\sqrt{0.64n^2+1} \Rightarrow t = \frac{625}{3n}\sqrt{0.64n^2+1}$$

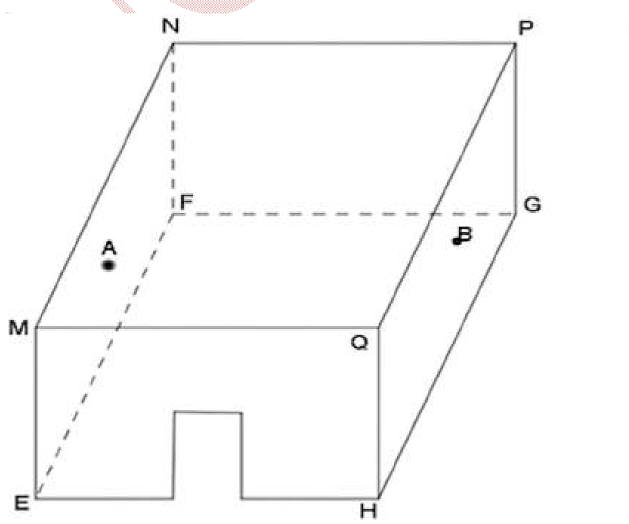
$t_{\min} \Leftrightarrow n_{\max} = 4 \Rightarrow t_{\min} \approx 2,91$ phút

Câu 10. Hai con thằn lằn A và B đang bám ở hai bức tường đối diện của một căn phòng dạng hình hộp chữ nhật với chiều rộng, chiều dài, chiều cao lần lượt là $8m, 12m, 5m$. Ban đầu thằn lằn A ở vị trí cách bức tường phía trước và trần nhà lần lượt là $7m$ và $3m$, còn thằn lằn B ở vị trí cách bức tường phía trước và trần nhà lần lượt là $9m$ và $4m$ (tham khảo hình vẽ bên dưới). Sau đó chúng nhìn thấy nhau và chạy lại gặp nhau. Biết rằng hai con thằn lằn chỉ chạy trên các bức tường và trần nhà, hỏi tổng quãng đường ngắn nhất hai con thằn lằn di chuyển là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

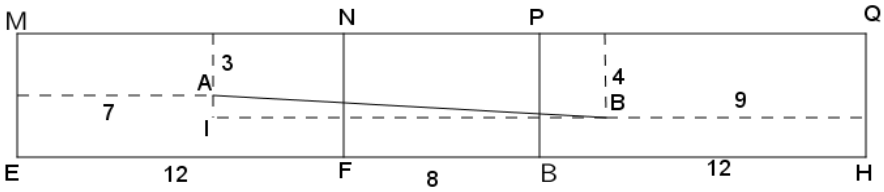


Lời giải

Trả lời: 15

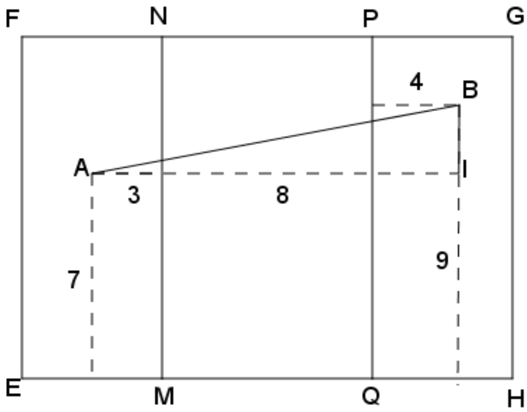


Trường hợp 1: thằn lằn chạy qua bức tường phía sau



Xét tam giác ΔABI vuông tại I có $AB=\sqrt{AI^2+BI^2}=\sqrt{(4-3)^2+(12-7+8+12-9)^2}\approx 16$

Trường hợp 2: thằn lằn chạy qua trần nhà



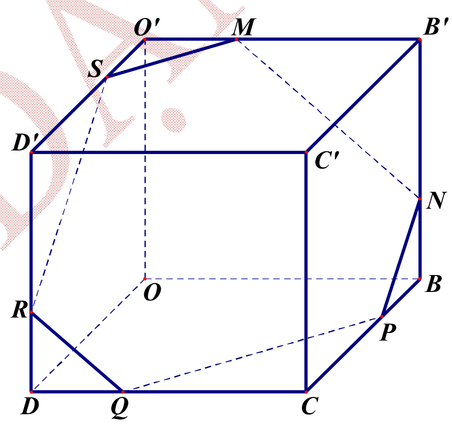
Xét tam giác ΔABI vuông tại I có $AB=\sqrt{AI^2+BI^2}=\sqrt{(3+8+4)^2+(9-7)^2}\approx 15$.

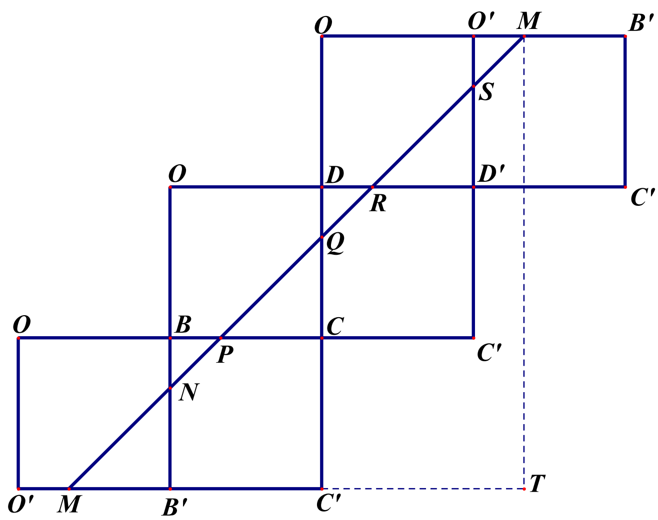
Vậy tổng quãng đường ngắn nhất hai con thằn lằn di chuyển là $15m$.

Câu 11. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình lập phương $OBCD.O'B'C'D'$ có cạnh bằng 9 sao cho điểm D thuộc tia Ox, điểm B thuộc tia Oy, và điểm O' thuộc tia Oz. Điểm M thuộc cạnh $O'B'$ sao cho $O'B'=3O'M$. Một con kiến bò từ vị trí M qua sáu mặt của hình lập phương đã cho rồi quay lại vị trí điểm M sao cho quãng đường đi được của con kiến là ngắn nhất. Hỏi với cách bò như vậy, con kiến đã bò qua bao nhiêu điểm mà điểm đó có hoành độ, tung độ và cao độ là các số nguyên dương?

Lời giải

Trả lời: 6





Trải phẳng hình lập phương $OBCD.O'B'C'D'$ như hình vẽ. Con kiến bò từ vị trí M qua sáu mặt của hình lập phương đã cho rồi quay lại vị trí điểm M sao cho quãng đường đi được của con kiến là ngắn nhất thì con kiến phải đi theo đường $MNPQRSM$ như hình vẽ trên.

Các điểm thuộc mặt phẳng (OBD) có cao độ bằng 0, các điểm thuộc mặt phẳng (OBO') có hoành độ bằng 0 và các điểm thuộc mặt phẳng (ODO') có tung độ bằng 0.

Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, ta hoàn toàn xác định được

$M(0;3;9), N(0;9;3), P(3;9;0), Q(9;3;0), R(9;0;3), S(3;0;9)$.

Các điểm mà con kiến đi qua có hoành độ, tung độ, cao độ là các số nguyên dương (nếu có) là các điểm thuộc các đoạn thẳng NP, QR, SM.

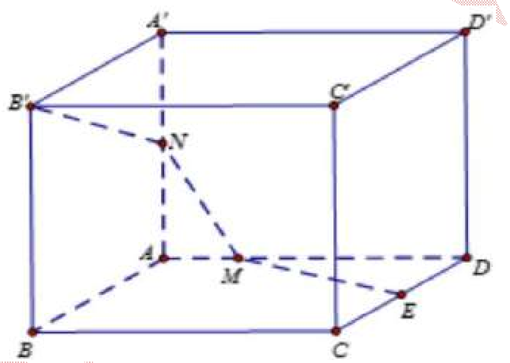
- Giả sử con kiến đi điểm X thuộc đoạn thẳng NP thoả mãn yêu cầu bài toán thì $\overrightarrow{NX} = k\overrightarrow{NP}$, với $0 < k < 1$. Suy ra $\begin{cases} x_X = 3k \\ y_X = 9 \\ z_X = 3 - 3k \end{cases}$. Do $0 < k < 1$ nên $0 < x_X < 3$. Suy ra $x_X = 1$ hoặc $x_X = 2$.

Với $x_X = 1$ thì $X_1(1;9;2)$, còn với $x_X = 2$ thì $X_2(2;9;1)$.

- Bằng cách làm tương tự thì trên đoạn thẳng QR có hai điểm thoả mãn là $Y_1(9;1;2)$ và $Y_2(9;2;1)$; còn trên đoạn thẳng SM có hai điểm thoả mãn là $Z_1(1;2;9)$ và $Z_2(2;1;9)$.

Vậy con kiến bò qua 6 điểm mà với mỗi điểm đó có hoành độ, tung độ và cao độ là các số nguyên dương.

Câu 12. Một mô hình trang trí có dạng là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, cạnh bằng 10 m (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm E (là trung điểm của CD) đi qua điểm M thuộc cạnh AD, đi tiếp qua điểm N thuộc cạnh AA' rồi tới điểm B'. Biết độ dài đoạn dây điện bằng 25 m. Tính độ dài đoạn MN *(làm tròn đến hàng phần trăm).*



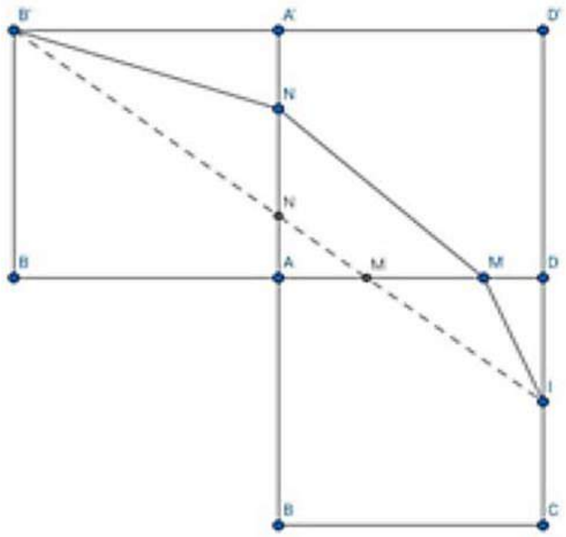
Lời giải:

Đáp án: 4,17.

Độ dài đoạn dây điện bằng tổng độ dài ba đoạn $B'N, MN$ và ME

Nghĩa là $B'N + NM + ME = 25$

Ta trải phẳng mô hình có dạng là hình lập phương ra như hình vẽ:



Xét trên hình trải phẳng.

Khi đó $B'A' = A'D' = D'D = 10(m); DE = 5(m)$ vì E là trung điểm của DC

Xét tam giác B'D'E vuông tại D' có:

$$B'E = \sqrt{(B'D')^2 + (D'E)^2} = \sqrt{(B'A' + A'D')^2 + (D'D + DE)^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$$

Suy ra $B'N + NM + ME = B'E = 25$

Suy ra 4 điểm B', M, N, E thẳng hàng trên hình trải phẳng.

Vì $MD // B'D'$ theo định lý Thales, ta có:

$$\frac{DM}{D'B} = \frac{ED}{ED'} \Rightarrow \frac{DM}{20} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \Rightarrow DM = \frac{20}{3} \Rightarrow AM = 10 - \frac{20}{3} = \frac{10}{3}$$

Xét tam giác B'D'E có:

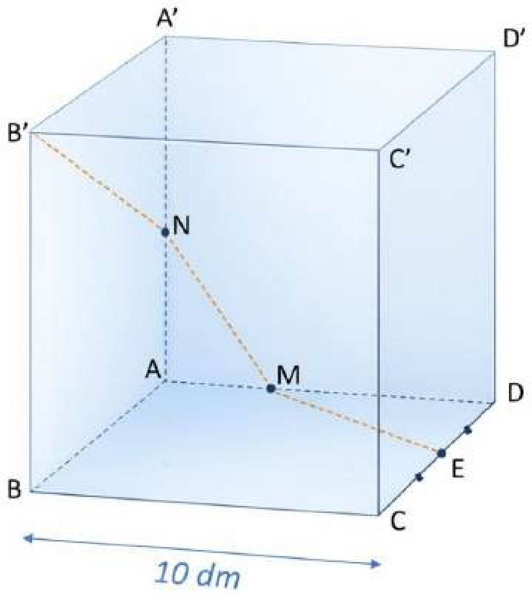
A' là trung điểm của $B'D'$ → $A'N // ED'$

Suy ra N là trung điểm của $B'E$ là đường trung bình của tam giác $B'D'E$

$$\Rightarrow A'N = \frac{1}{2}D'E = \frac{1}{2}.15 = \frac{15}{2} \Rightarrow AN = 10 - \frac{15}{2} = \frac{5}{2}.$$

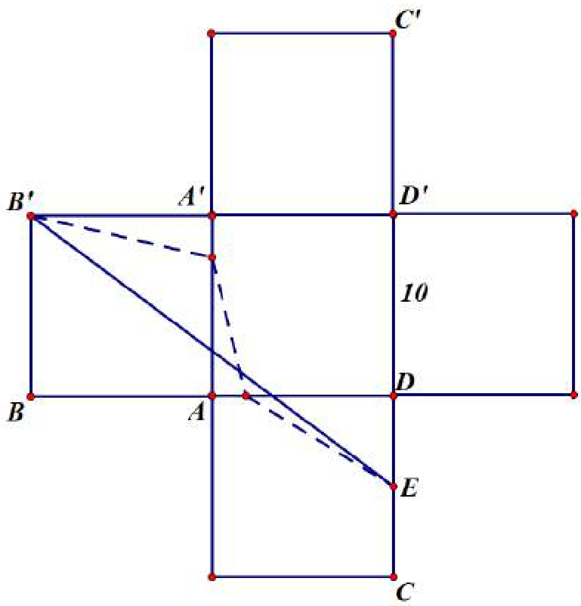
Xét tam giác AMN vuông tại A, có $MN = \sqrt{AN^2 + AM^2} = \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{10}{3}\right)^2} \approx 4,17(\text{m})$.

Câu 13. Một mô hình trang trí có dạng là hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh 10 dm (như hình vẽ). Người ta cần nối một đường dây điện đi từ điểm E (là trung điểm của CD) đi qua điểm M thuộc cạnh AD, điểm N thuộc cạnh AA' tới B'. Độ dài đoạn dây điện ngắn nhất bằng bao nhiêu?



Lời giải

Trải phẳng như hình vẽ:

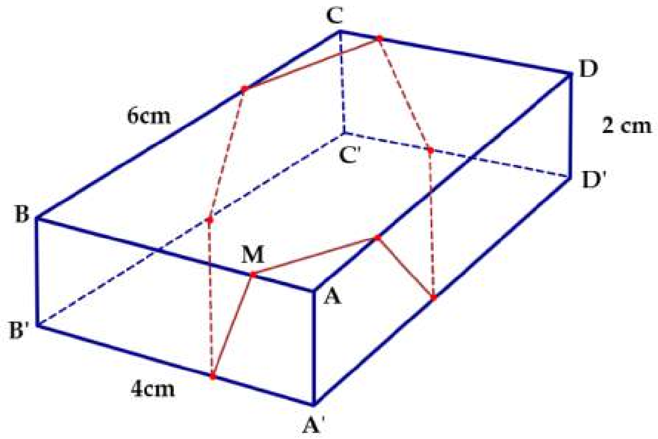


$$T = EM + MN + A'B \geq EB'$$

$$\Rightarrow T_{min} = EB' = \sqrt{D'E^2 + D'^2B^2}$$

$$= \sqrt{15^2 + 20^2} = 25$$

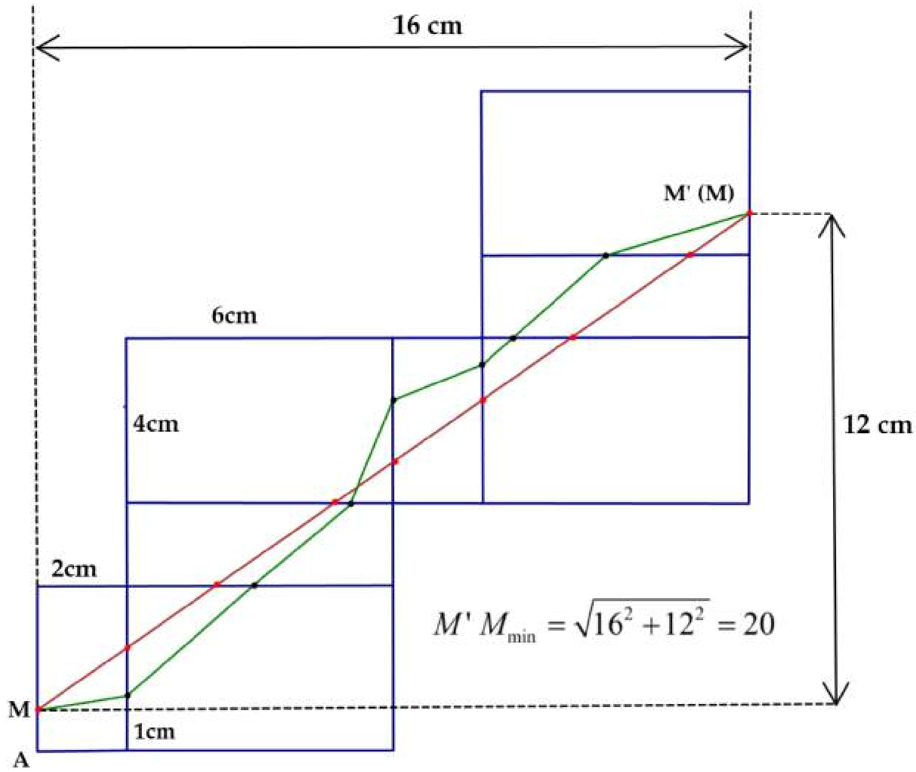
Câu 14. Chiều dài ngắn nhất của sợi dây để quấn quanh hộp quà có dạng hình hộp chữ nhật kích thước 2cm×4cm×6cm như trong hình vẽ là bao nhiêu cm. Biết rằng sợi dây bắt đầu và kết thúc tại điểm M và $AM = 1cm$.



Lời giải

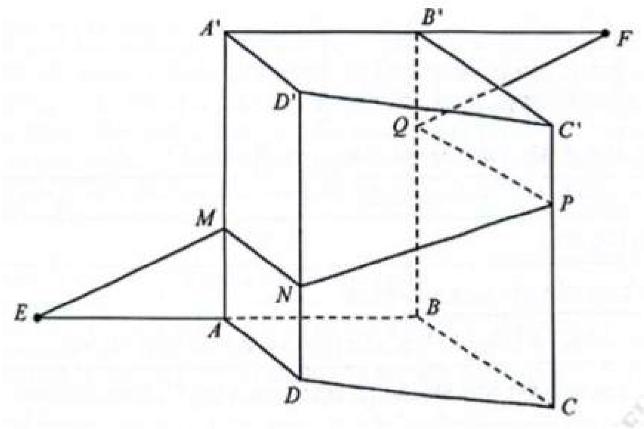
Trả lời: 20

Trải phẳng hình vẽ như bên dưới.



Điểm M' chính là điểm M ban đầu. Ta cần tìm đường đi ngắn nhất từ M đến M' sao cho sợ dây cắt qua tất cả các mặt trên hình vẽ. Dễ thấy MM' ngắn nhất khi nó là đoạn thẳng nối liền từ M đến M'. Tính được $MM' = \sqrt{16^2+12^2} = 20$

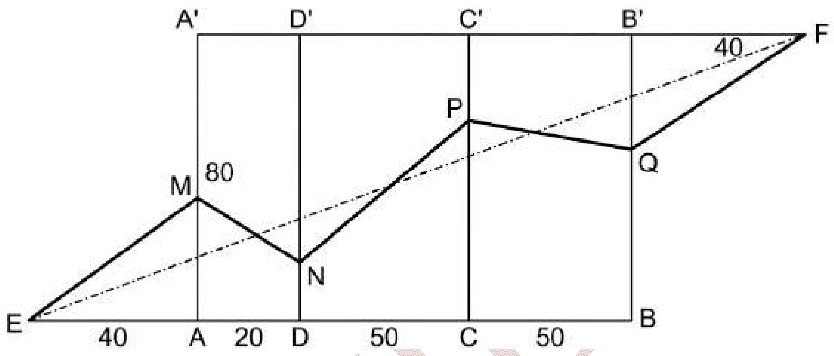
Câu 15. Cho một toà nhà mô hình dạng hình lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B có $AB = 40$ cm, $AD = 20$ cm, $BC = 50$ cm, $AA' = 80$ cm. Người ta đi một đường dây từ điểm E (đối xứng với B qua A) đến lần lượt các điểm M, N, P, Q trên các cạnh tương ứng là AA', DD', CC', BB', rồi đến điểm F (đối xứng với A' qua B'). Hãy tính chiều dài ngắn nhất của đường dây theo đơn vị centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) ?



Lời giải

Trả lời: 215

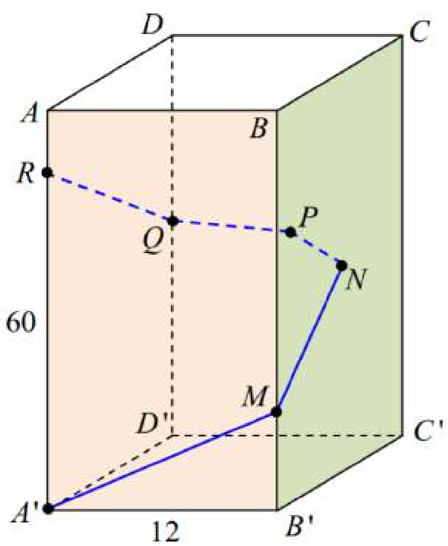
Coi như kéo phẳng hình về phía F sao cho nó phẳng và tất cả đều kéo về mặt phẳng $(ABB'A')$ cũ.



Dễ dàng tính được: $CD=\sqrt{40^2+(50-20)^2}=50$. Ta có chiều dài đường dây:

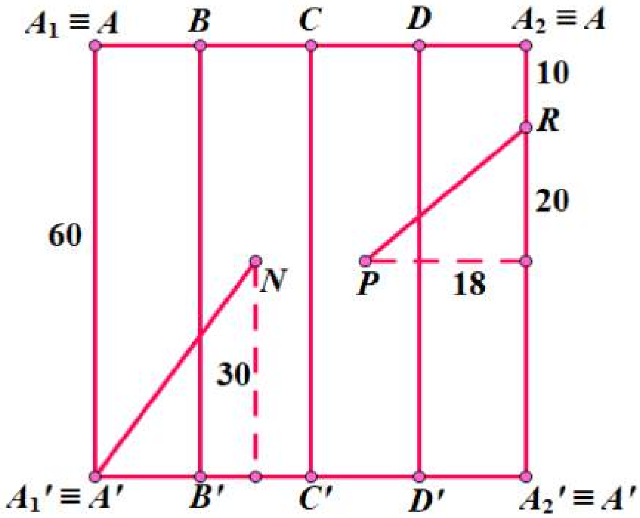
$$L=EM+MN+NP+PQ+QF\geq EF=\sqrt{(40+20+50+50+40)^2+80^2}$$

Câu 16. $=\sqrt{200^2+80^2}=\sqrt{40000+6400}=\sqrt{46400}\approx 215,40..\approx 215$ Cho hình lăng trụ đều $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh đáy bằng 12 và cạnh bên bằng 60. Dùng một sợi dây có chiều dài L quấn quanh hình lăng trụ từ điểm A' đến điểm R như hình vẽ, sao cho các đoạn A'M,MN,PQ,QR luôn áp sát vào các mặt của lăng trụ, đoạn NP xuyên vào bên trong hình lăng trụ với N và P lần lượt là tâm các mặt bên $BCC'B'$ và $CDD'C'$, có $AR=10$. Hãy xác định chiều dài ngắn nhất của sợi dây(làm tròn kết quả đến hàng phần mười) ?



Lời giải

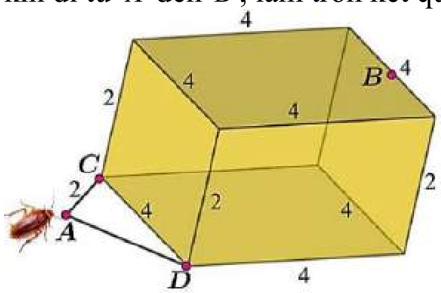
Hai điểm N, P cố định và $NP = 6\sqrt{2}$, ta trải phẳng như hình



$L = AM + MN + NP + PQ + QR \geq A'N + NP + PR$

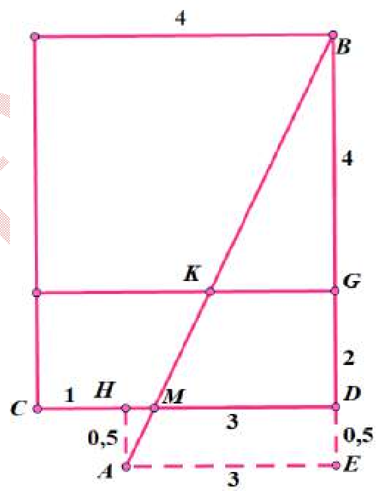
$\Rightarrow L_{min} = \sqrt{18^2 + 30^2} + 6\sqrt{2} + \sqrt{18^2 + 20^2} \approx 70{,}4$

Câu 17. Một con gián từ vị trí A muốn đến vị trí B để kiếm thức ăn. Nó phải di chuyển đến cạnh CD rồi tìm cách bò lên chiếc hộp và tìm đến vị trí B (B là trung điểm một cạnh hình hộp chữ nhật như hình vẽ). Biết rằng $AC \perp AD$ và $AC = 2$ dm. Tìm quãng đường ngắn nhất mà con kiến thực hiện khi đi từ A đến B, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của dm (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 20



Trải phẳng như hình

Ta có: $AB=\sqrt{3^2+(0,5+2+4)^2}=\dfrac{\sqrt{205}}{2}$

Các tam giác BGK, BDM, BEA đồng dạng nên:

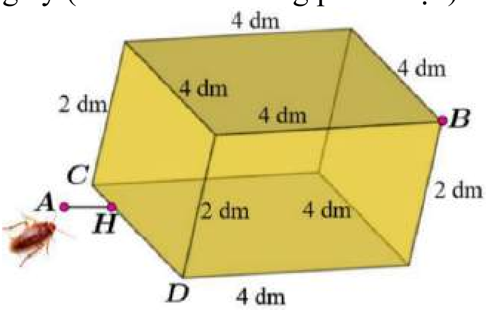
$\dfrac{BK}{BG}=\dfrac{BM}{BD}=\dfrac{BA}{BE}=\dfrac{BA}{BE}=\dfrac{\sqrt{205}}{2}$

$\Rightarrow BM=\dfrac{6\sqrt{205}}{13}$, $BK=\dfrac{4\sqrt{205}}{13}$

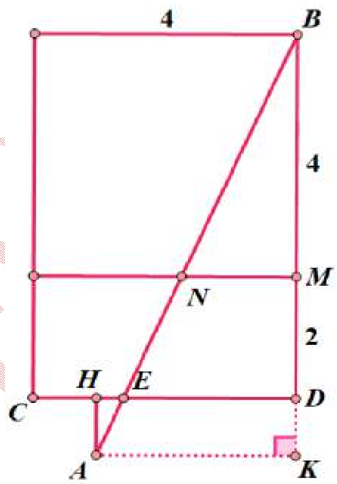
$MK=BM-BK=\dfrac{2\sqrt{205}}{13}$; $AM=AB-MK-BK=\dfrac{\sqrt{205}}{2}$

Thời gian tối thiểu là $t_{min}=\dfrac{AM+BK}{0,4}+\dfrac{MK}{0,3}\approx 19,7(s)$

Câu 18. Một chú tiểu cường từ vị trí A muốn đến vị trí B để kiếm thức ăn. Trong hình là chiếc hộp có dạng lăng trụ đứng với tất cả các mặt đều là hình chữ nhật, mặt tiếp xúc với nền nhà là hình vuông cạnh $CD=4$ dm, chiều cao lăng trụ bằng 2 dm. Biết $AH=0,5$ dm, $DH=3$ dm và $AH\perp CD$. Trên bề mặt hộp có chứa cạnh CD thì tiểu cường di chuyển với tốc độ 0,3 dm/s;phần còn lại quãng đường (trừ đáy tiếp xúc mặt đất) thì tiểu cường luôn di chuyển 0,4 dm/s. Vì tiểu cường giỏi toán hình học không gian nên nó đã chọn con đường ngắn nhất để đi từ A đến B, hỏi thời gian tương ứng là bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải



Trả lời: 19,7

Trải mặt phẳng trên ta được $AB=\sqrt{3^2+(4+2+0,5)^2}=\sqrt{9+6.5^2}=\dfrac{\sqrt{205}}{2}$

- Trải mặt bên cho ra kết quả lớn hơn nên ta bỏ qua trường hợp con kiến đi theo mặt bên

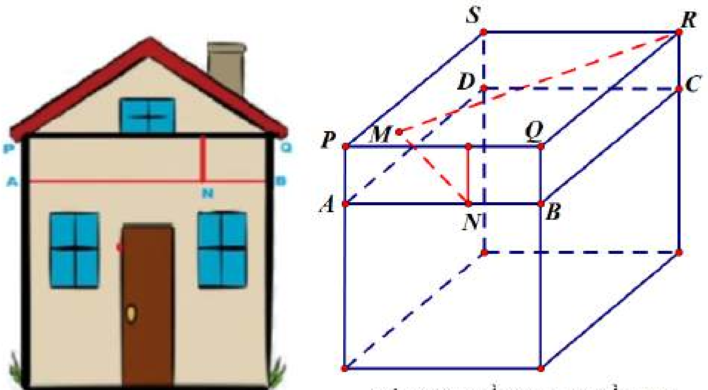
$\Delta BMN\sim\Delta BDE\sim\Delta BKA$

$$\frac{BN}{BM}=\frac{BE}{BD}=\frac{BA}{BK}=\frac{\frac{\sqrt{205}}{2}}{6,5}\Rightarrow BN=\frac{4\sqrt{205}}{13},$$

$$BE=\frac{6\sqrt{205}}{13}\Rightarrow NE=BE-BN=\frac{2\sqrt{205}}{13}$$

$$t=\frac{\frac{\sqrt{205}}{13}\cdot 2}{0,3}+\frac{\frac{\sqrt{205}}{13}\cdot 4}{0,4}\approx 19,7$$

Câu 19. Một ngôi nhà được thiết kế theo một khối hộp chữ nhật với chiều cao từ mặt nền đến mặt trần $ABCD$ là $4m$, phần trang trí trần nhà là một khối hộp chữ nhật $ABCD.PQRS$, biết $AP=0,5\left(m\right); AB=5m; AN=4m; BC=6m$. Người ta cần hàn một đường gấp khúc bằng sắt NMR với M là điểm nằm trên mặt tường $\left(ADSP\right)$. Tìm độ dài ngắn nhất của đường gấp khúc NMR (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



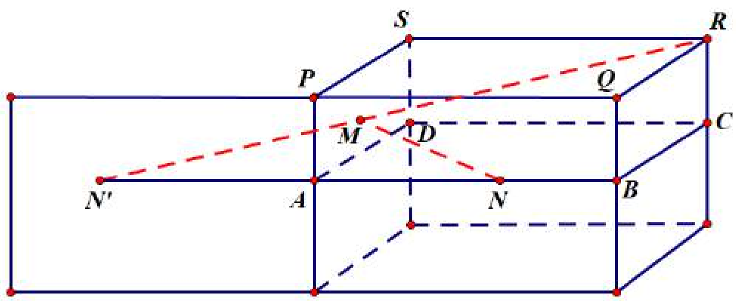
Mô phỏng phần trang trí trần nhà

,

Lời giải

Trả lời:

Trải phẳng như hình vẽ, N' đối xứng N qua AP.

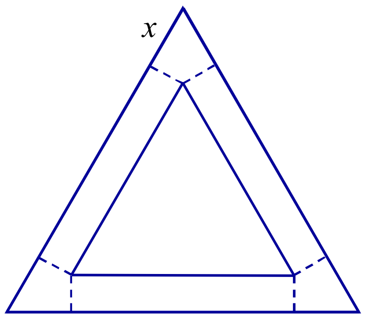


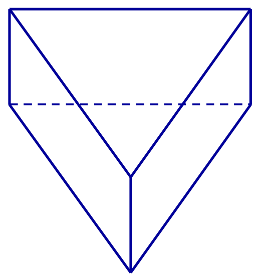
$T=RM+MN\geq RN'$ dấu = xảy ra khi $M=N'R\cap\left(ADSP\right)$

Tam giác RNB vuông tại B.

$N'R=\sqrt{BR^2+BN'^2}\approx 9,2m$

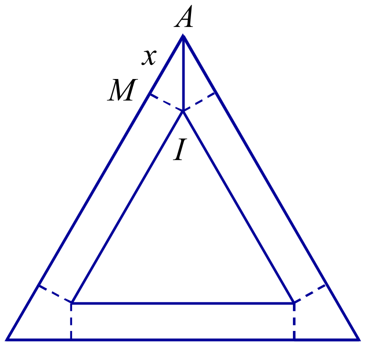
Câu 20. Cắt ba góc của một tam giác đều cạnh bằng 1 các đoạn bằng $x,\left(0<x<\frac{1}{2}\right)$ phần còn lại là một tam giác đều bên ngoài là các hình chữ nhật, rồi gấp các hình chữ nhật lại tạo thành khối lăng trụ tam giác đều như hình vẽ. Tìm độ dài x để thể tích khối lăng trụ lớn nhất. (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai)





Lời giải

Trả lời: 0,17



Xét tam giác AMI như hình vẽ, đặt $AM = x > 0$, $\widehat{MAI} = 30^\circ \Rightarrow MI = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$

Lăng trụ tam giác đều có cạnh đáy $1-2x$, $\left(0 < x < \dfrac{1}{2}\right)$, chiều cao $\dfrac{x}{\sqrt{3}}$ nên thể tích khối lăng trụ là

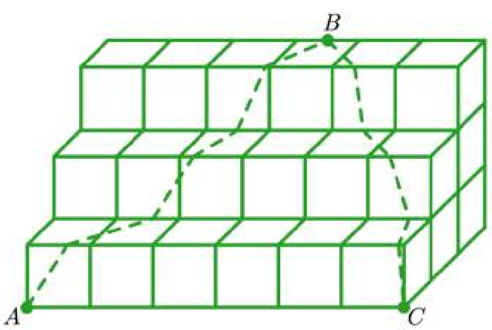
$$V = \frac{(1-2x)^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x-4x^2+4x^3}{4}$$

Ta cần tìm $x \in \left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ để thể tích V đạt giá trị lớn nhất.

Xét $f(x) = x-4x^2+4x^3$, có $f'(x) = 12x^2-8x+1 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{1}{6} \\ x=\dfrac{1}{2}\,(l) \end{array}\right.$

Thể tích V đạt giá trị lớn nhất khi $x = \dfrac{1}{6}$.

Câu 21. Một con kiến bò từ điểm A (cố định) lên điểm B (linh động) trên đỉnh của bậc thang, rồi từ B đi xuống điểm C (cố định) như hình vẽ bên. Biết rằng một ô vuông gạch của cầu thang có độ dài các cạnh bằng 2 (cm). Gọi L là độ dài đường đi của con kiến.



a) Giá trị nhỏ nhất của L^2 là ________ (cm).

b) Khi L là nhỏ nhất thì AB^2 ________ (cm).

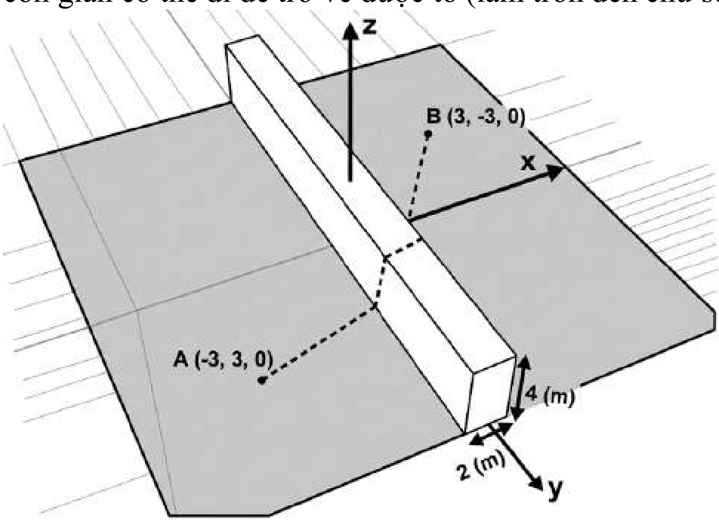
Lời giải

Trải phẳng hình ta sẽ được hình vuông AEFC cạnh 12 và B thuộc EF

Do đó: $L = AB + BC \Rightarrow L_{min} \Leftrightarrow (AB + BC)_{min} \Leftrightarrow$ B là trung điểm EF (dễ chứng minh)

$$\Rightarrow L_{min}^2 = 720; AB^2 = 180$$

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, trên mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy), một con gián muốn di chuyển từ điểm $A(-3;3;0)$ trên mặt đất về với tổ của mình ở tọa độ điểm $B(3;-3;0)$. Để trở về tổ, con gián phải bò qua một bước tường có dạng hình hộp chữ nhật dọc theo trục Oy như hình vẽ, biết bức tường có độ cao bằng $4(m)$, $(0 \le z \le 4)$ và độ dày bằng $2(m)$ $(-1 \le x \le 1)$. Con gián có khả năng bám dính và di chuyển dễ dàng trên bức tường thẳng đứng. Xác định quãng đường ngắn nhất mà con gián có thể đi để trở về được tổ (làm tròn đến chữ số hàng đơn vị).



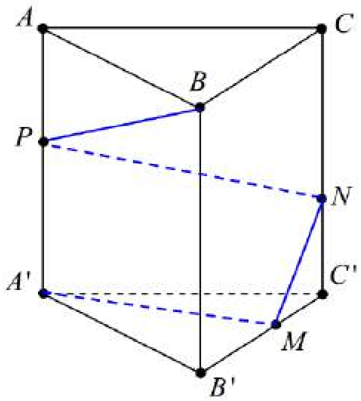
Lời giải

Trả lời: 15

Trải phẳng: Ta thấy điểm A và B đều tịnh tiến thêm 4 đơn vị

$A'(-7;3;0), B'(7;3;0) \Rightarrow Min = A'B' = \sqrt{14^2 + 6^2} = 2\sqrt{58}$

Câu 23. Cho một hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có độ dài cạnh đáy bằng 6 và cạnh bên bằng 24. Dùng một sợi dây có chiều dài L quấn quanh hình lăng trụ từ điểm A' đến điểm B như hình vẽ, sao cho sợi dây luôn áp sát vào các mặt. Hãy xác định chiều dài ngắn nhất của sợi dây (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

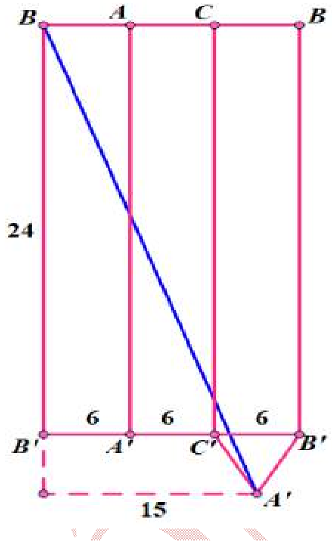


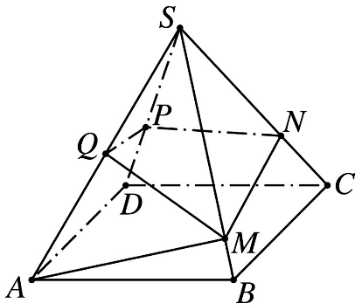
Lời giải

Trả lời: 32,8

Trải phẳng như hình:

Dễ tính được: $L_{min} = \sqrt{15^2 + (24 + 3\sqrt{3})^2} \approx 32,8$





Câu 24. Bên cạnh đường trước khi vào thành phố, người ta xây một ngọn tháp đèn hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$, cạnh bên $SA = 200m$, $\widehat{ASB} = 15°$.Người ta tạo ra một con đường bậc thang xung quanh bề mặt tháp từ A đến một vị trí Q thuộc SA (con đường gồm 4 đoạn thẳng AM, MN, NP, PQ như hình vẽ) Để tiết kiệm kinh phí, kỹ sư đã nghiên cứu và xây dựng con đường có độ dài ngắn nhất. Tính độ dài ngắn nhất của con đường bậc thang (làm tròn tới hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 173

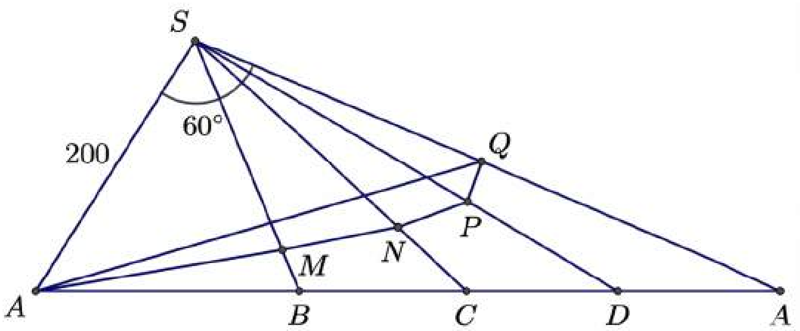
Độ dài $= \left(AM + MN + NP + PQ \right)\min$.

$AM + MN + NP + PQ \geq AQ$, $\min = AQ$

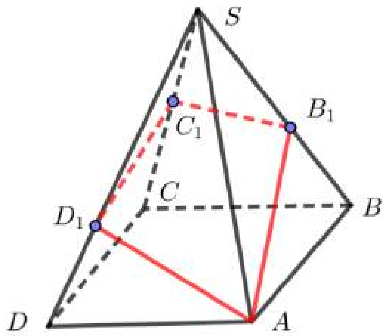
Định lý Cosin O $\triangle SAQ$

$AQ = \sqrt{SA^2 + SQ^2 - 2SA.SQ.\cos 60^\circ}$

$AQ = \sqrt{200^2 + x^2 - 2.200.x.\cos 60^\circ}$ $\rightarrow$ ĐH = O $\rightarrow$ CT $\rightarrow$ vẽ BBT$\rightarrow$ $AQ = 173$ (mét)



Câu 25. Có một mô hình kim tự tháp là một khối chóp tứ giác đều có cạnh bên bằng 6 cm, cạnh đáy bằng 4 cm được đặt lên bàn trưng bày (đáy nằm trên mặt bàn). Một con kiến đang ở một đỉnh của đáy và có ý định đi một vòng qua tất cả các mặt xung quanh và trở về vị trí ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất mà con kiến có thể đi được (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

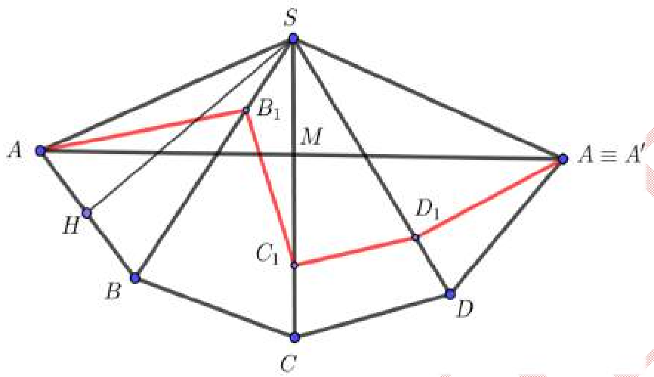


Lời giải

Trả lời: 11,7

Gọi hình chóp đều trong bài là $S.ABCD$. Không giảm tổng quát, giả sử con kiến đang ở đỉnh A của đáy và sẽ đi một vòng qua tất cả các mặt xung quanh và trở về vị trí ban đầu. Để đi như vậy, con kiến buộc phải đi qua một điểm trên mỗi cạnh bên của hình chóp giả sử là B_1, C_1, D_1 lần lượt thuộc các cạnh SB, SC, SD.

Đường đi ngắn nhất từ A đến B_1 là đường thẳng.



Đường đi ngắn nhất từ B_1 đến C_1 là đường thẳng.

Đường đi ngắn nhất từ C_1 đến D_1 là đường thẳng.

Đường đi ngắn nhất từ D_1 đến A là đường thẳng.

Cắt mặt xung quanh của hình chóp $S.ABCD$ theo cạnh bên SA và đem trải phẳng. Ký hiệu điểm A' như hình vẽ.

Ta có $AB_1 + B_1C_1 + C_1D_1 + D_1A' \geq AA'$ (không đổi).

Dấu bằng xảy ra khi A, B_1, C_1, D_1, A' thẳng hàng.

Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên các mặt bên là các tam giác cân bằng nhau.

Gọi H là trung điểm của AB, $M = AA' \cap SC \Rightarrow M$ là trung điểm của AA'.

Theo giả thiết $SA = 6, AH = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}.4 = 2$. Đặt $\widehat{HSA} = \varphi$.

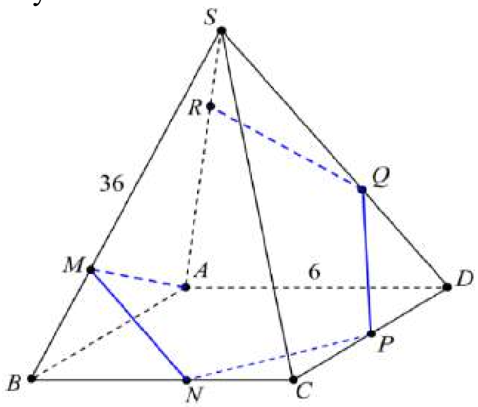
$\sin\varphi = \frac{AH}{SA} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ mà φ nhọn $\Rightarrow \cos\varphi = \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi.\cos\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{9}$ mà 2φ nhọn $\Rightarrow \cos 2\varphi = \sqrt{1-\sin^2 2\varphi} = \frac{7}{9}$.

$\sin 4\varphi = 2\sin 2\varphi.\cos 2\varphi = \frac{56\sqrt{2}}{81} \Rightarrow AA' = 2AM = 2.SA.\sin 4\varphi = 2.6.\frac{56\sqrt{2}}{81} \approx 11,7\text{cm}$.

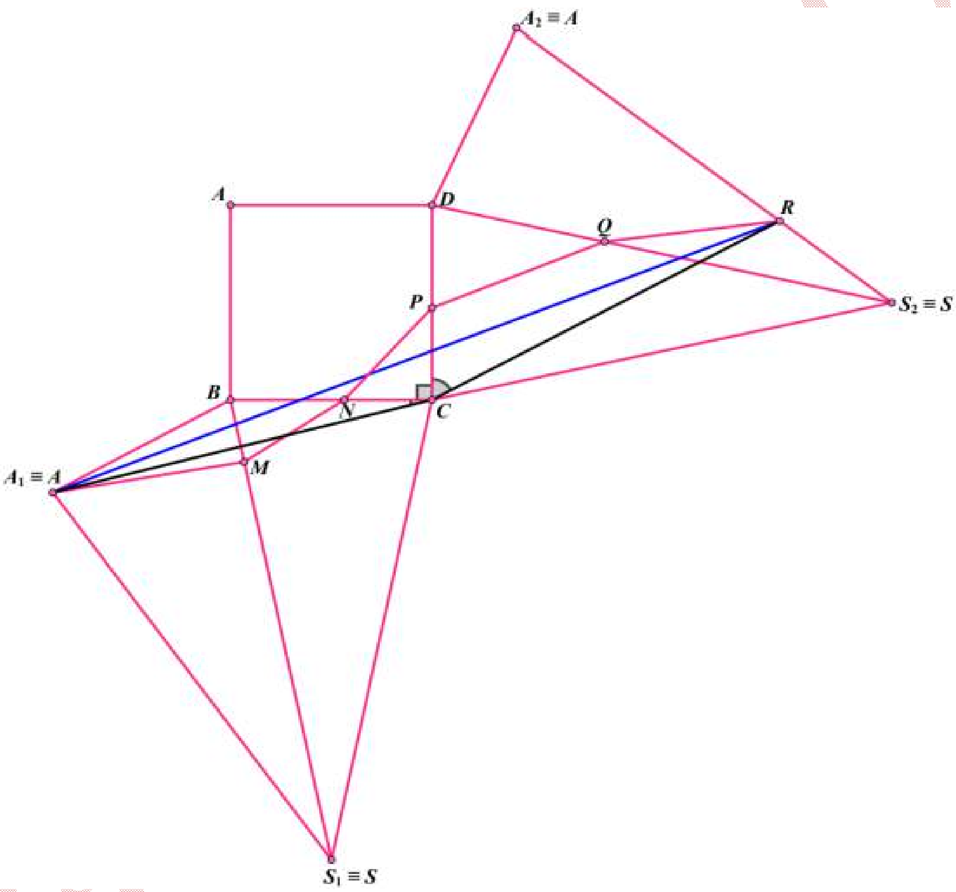
Vậy, quãng đường ngắn nhất mà con kiến có thể đi được là $11,7$ cm.

Câu 26. Cho một hình chóp đều $S.ABCD$ có độ dài cạnh đáy bằng 6 và cạnh bên bằng 36. Dùng một sợi dây có chiều dài L quấn quanh hình chóp từ điểm A đến điểm R như hình vẽ, sao cho sợi dây luôn áp sát vào các mặt của hình chóp. Biết $RA = 2RS$. Hãy xác định chiều dài ngắn nhất của sợi dây ?



Lời giải

Khai triển các mặt của hình chóp về chung một mặt phẳng với mặt đáy như hình, ta dễ dàng tính toán các số liệu:



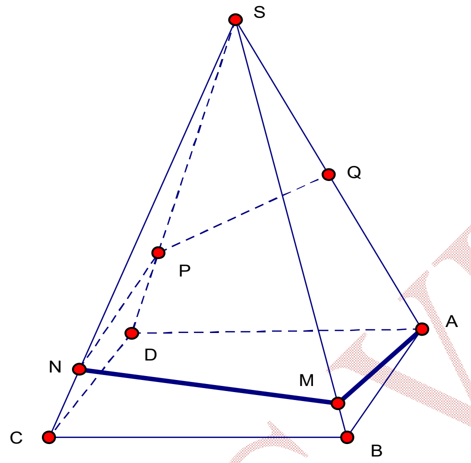
$$AC = \sqrt{2\cdot 6^2 - 2\cdot 6^2\cos\left(120^\circ\right)} = \sqrt{72 - 72\left(-\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$$

$$A_1BC = 2\cdot\cos^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) \Rightarrow \begin{cases} A_1C = \sqrt{2\cdot 6^2 - 2\cdot 6^2\cdot\dfrac{-71}{72}} = \sqrt{143} \\ A_1CB = \dfrac{180 - 2\cdot\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{12}\right)}{2} \end{cases}$$

$$A_2S_2C = 4\cdot\sin^{-1}\left(\frac{1}{12}\right) \Rightarrow \begin{cases} CR = \sqrt{12^2+36^2-2\cdot12\cdot36\cdot\cos\left(4\cdot\sin^{-1}\left(\frac{1}{12}\right)\right)} = \sqrt{\frac{1871}{3}} \\ RD = \sqrt{12^2+36^2-2\cdot12\cdot36\cdot\cos\left(2\cdot\sin^{-1}\left(\frac{1}{12}\right)\right)} = 14\sqrt{3}\ ) \\ RCD = \cos^{-1}\left(\frac{CR^2+CD^2-DR^2}{2\cdot CR\cdot CD}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{215\sqrt{3}}{36\sqrt{1871}}\right) \end{cases}$$

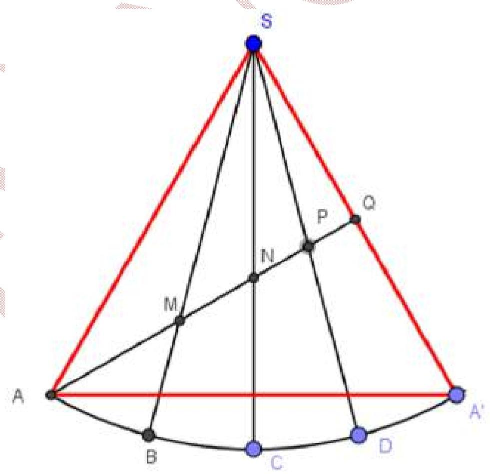
Do đó $L_{\min} = A_1R = AR = \sqrt{A_1C^2 + CR^2 - 2\cdot A_1C\cdot CR\cdot\cos\left(A_1CB + 90 + RCD\right)} \approx 36,8$

Câu 27. Bên cạnh con đường trước khi vào thành phố người ta xây một ngọn tháp đèn lộng lẫy. Ngọn tháp hình tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh bên $SA = 600$ mét, $\widehat{ASB} = 15°$. Do có sự cố đường dây điện tại điểm Q (là trung điểm của SA) bị hỏng, người ta tạo ra một con đường từ A đến Q gồm bốn đoạn thẳng: AM, MN, NP, PQ (hình vẽ). Để tiết kiệm kinh phí, kỹ sư đã nghiên cứu và có được chiều dài con đường từ A đến Q ngắn nhất. Tính tỷ số $k = \dfrac{AM+MN}{NP+PQ}$.



Lời giải

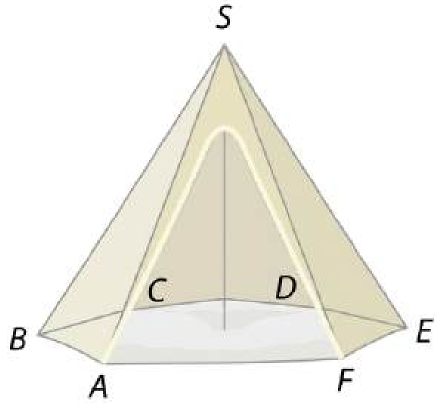
Trả lời: 2



Giả sử trải các mặt hình chóp đều trên đường tròn tâm S và bán kính $R = SA$. Ta có $\Delta SAA'$ có $\widehat{ASA'} = 15°.4 = 60° \Rightarrow \Delta SAA'$ đều.

Mà đoạn đường AQ ngắn nhất khi A, M, N, P, Q thẳng hàng.Khi đó N là trọng tâm $\Delta SAA'$

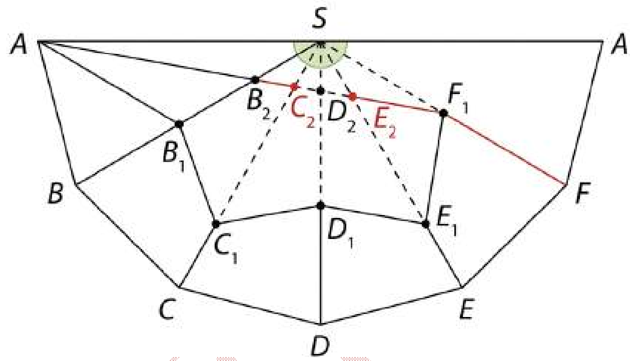
Câu 28. Một nhóm bạn trẻ tổ chức dã ngoại đã chuẩn bị các lều du mục giống nhau có dạng hình chóp $S.ABCDEF$ với đáy là lục giác đều $ABCDEF$. Vào buổi tối, nhóm bạn này muốn treo dây đèn LED xung quanh lều để trang trí bằng cách quấn dây vòng từ điểm A đến trung điểm đoạn SF cắt qua tất cả các cạnh bên. Hỏi chiều dài ngắn nhất của dây đèn LED cần chuẩn bị là bao nhiêu, biết rằng các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và dài 2,2 mét; $\widehat{ASB}=\widehat{BSC}=\widehat{CSD}=\widehat{DSE}=\widehat{ESF}=\widehat{FSA}=30^\circ$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị mét).



Lời giải

Trả lời: 3,2

Cắt hình chóp theo đường SA và trải phẳng hình chóp $S.ABCDEF$, ta được hình phẳng như hình sau:



Trong hình trên, đường gấp khúc AB_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1 là các đoạn dây đèn LED nối từ A đến trung điểm F_1 của đoạn SF.

Như vậy tổng chiều dài sợi dây là $AB_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+E_1F_1$.

Mặt khác, ta biết tổng độ dài đường gấp khúc ngắn nhất khi các điểm thẳng hàng, nghĩa là độ dài dây đèn LED ngắn nhất khi quấn dây từ A đến F_1 đi qua các điểm B_2, C_2, D_2, E_2 như hình trên (A, B_2, C_2, D_2, E_2 và F_1 thẳng hàng).

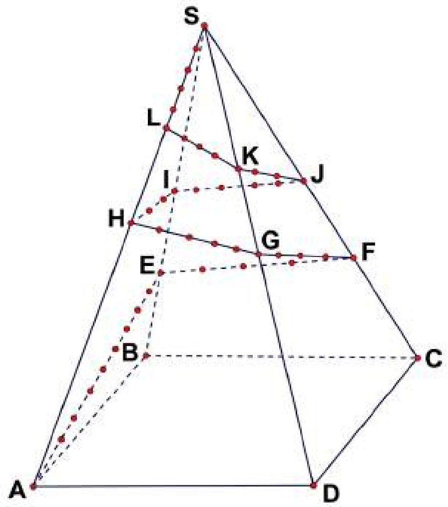
Khi đó độ dài dây ngắn nhất là AF_1.

Xét tam giác SAF_1 có $SA=2,2$; $SF_1=\frac{1}{2}SF=1,1$ và $\widehat{ASF_1}=150^\circ$, suy ra:

$$AF_1=\sqrt{SA^2+SF_1^2-2\cdot SA\cdot SF_1\cdot\cos\widehat{ASF_1}}.$$

$$=\sqrt{2,2^2+1,1^2-2\cdot 2,2\cdot 1,1\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}=\sqrt{\frac{21(5+2\sqrt{3})}{10}}\approx 3,2.$$

Câu 29. Người ta cần trang trí cho một kim tự tháp hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh bên bằng $200\,m$, góc $\widehat{ASB} = 15^0$ bằng đường gấp khúc dây đèn led vòng quanh kim tự tháp $AEFGHIJKLS$. Trong đó điểm L cố định với $LS = 40\,m$.



Hỏi khi đó cần dùng ít nhất bao nhiêu mét dây đèn led để trang trí? (Làm tròn đến hàng đơn vị)

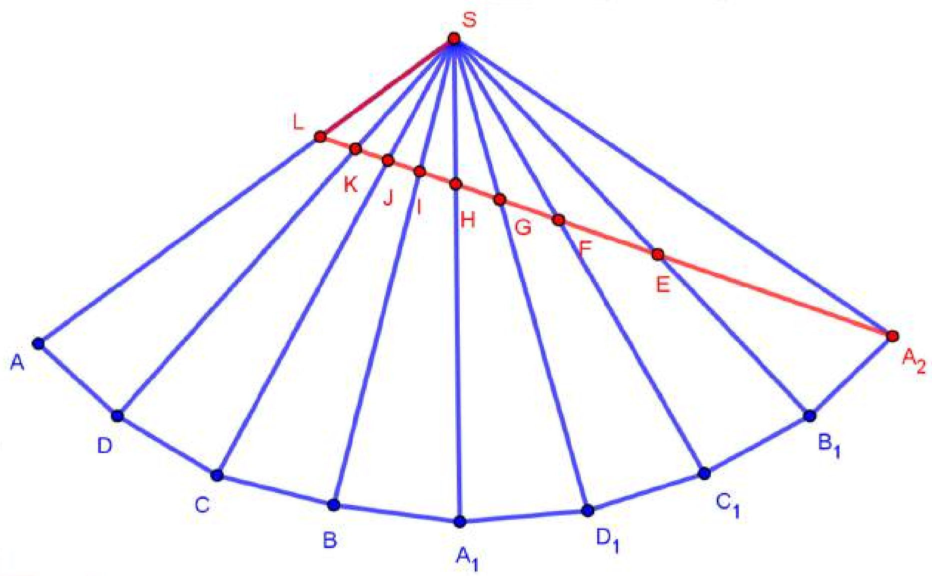
Lời giải

Trả lời: 2,63

Trải các mặt (cạnh) của hình chóp ra mặt phẳng (2 lần), ta có:

+) SA_1, SA_2 là vị trí của SA ở lần trải thứ 1 và thứ 2.

+) SD_1, SC_1, SB_1 là vị trí của SD, SC, SB ở lần trải thứ 2.



Do $\widehat{ASB} = 15^0$, nên $\widehat{ASD} = 15^0$. Suy ra $\widehat{ASA_2} = 120^0$. Khi đó, độ dài đường gấp khúc $AEFGHIJKLS$ ngắn nhất khi $A, E, F, G, H, I, J, K, L$ thẳng hàng, tức là $A_2, E, F, G, H, I, J, K, L$ thẳng hàng.

Ta có $LA_2^2 = SL^2 + SA_2^2 - 2.SL.SA_2.\cos 120^0 = 40^2 + 200^2 - 2.40.200.\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 49600$

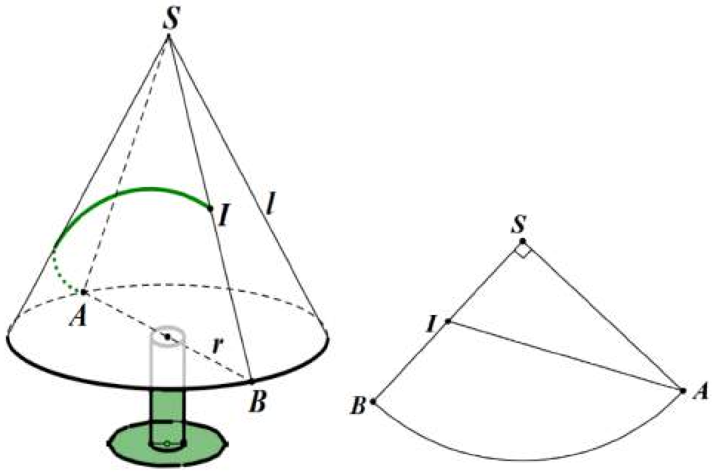
Suy ra $LA_2 = 40\sqrt{31}$.

Khi đó, độ dài ngắn nhất của đèn led là $SA_2 = SL + LA_2 = 40 + 40\sqrt{31}\,(m)$.

DẠNG 2: TRẢI PHẲNG MÔ HÌNH CÓ DẠNG HÌNH TRÒN XOAY.

Câu 30. Phần trên của một cây thông Noel có dạng hình nón, đỉnh S, độ dài đường sinh $l = 2m$ và bán kính đáy $r = 1m$. Biết rằng AB là một đường kính đáy của hình nón và I là trung điểm đoạn thẳng SB

(tham khảo hình vẽ). Để trang trí, người ta lắp một dây bóng nháy trên mặt ngoài của cây thông từ vị trí A đến I. Tính độ dài ngắn nhất của dây bóng nháy (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



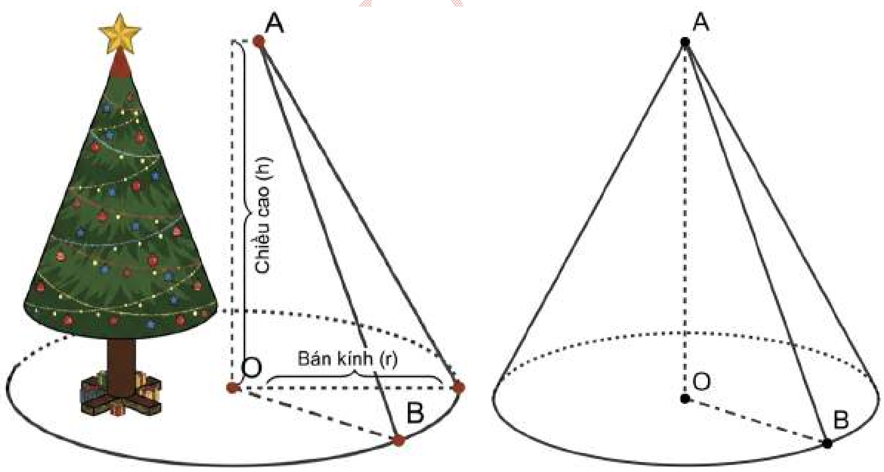
Lời giải

Trả lời: 2,2

Khi lắp dây bóng từ A đến I trên mặt nón sẽ có hai hướng, do tính đối xứng nên ta chỉ xét một hướng. Trải một nửa mặt nón lên mặt phẳng ta được một hình quạt (như hình vẽ). Độ dài ngắn nhất của dây bóng nháy bằng AI. Cung AB là nửa đường tròn đáy nên $l_{AB} = \pi r\left(m\right)$.

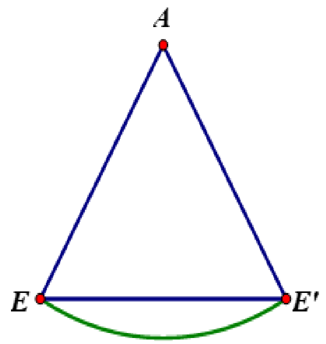
Số đo góc $ASB : \alpha = \dfrac{l_{AB}}{SA} = \dfrac{\pi r}{l} = \dfrac{\pi \cdot 1}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ ===> $AI = \sqrt{SA^2 + SI^2} = \sqrt{l^2 + (l/2)^2} = \sqrt{5}\left(m\right)$

Câu 31. Một cây thông Noel có dạng hình nón với chiều dài đường sinh bằng $60cm$ và bán kính đáy $r = 10cm$. Một chú kiến bắt đầu xuất phát từ một đỉnh nằm trên mặt đáy hình nón và có dự định bò một vòng quanh cây thông sau đó quay trở lại vị trí xuất phát ban đầu. Tính quãng đường ngắn nhất mà chú kiến có thể đi được là bao nhiêu cm?



Lời giải

Trả lời: 60

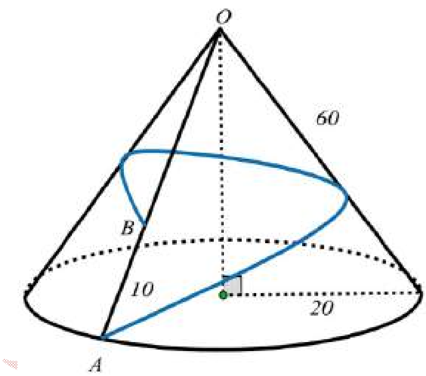


Ta "cắt" hình nón theo cạnh AE và trải hình nón ra được một hình quạt như hình vẽ bên. Ta chú ý rằng đường sinh của hình nón bằng bán kính quạt nên $R = 60cm$. Gọi là bán kính đáy nón và α là góc của cung tròn quạt khi đó chu vi của cung tròn quạt là:

$$C = 2\pi R\left(\frac{\alpha}{2\pi}\right) = 2\pi r \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{2\pi r}{R} = \frac{\pi}{3}}$$

Vậy hình quạt của ta là một phần 6 hình tròn và tam giác AEE' là tam giác đều. Quãng đường ngắn nhất mà con kiến đi được chính là bằng độ dài $EE' = 60cm$.

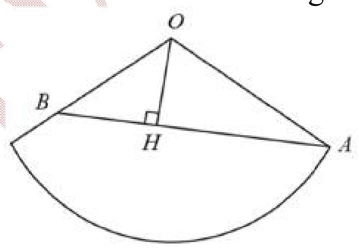
Câu 32. Hình vẽ dưới đây mô tả một ngọn núi có dạng hình nón có độ dài đường sinh bằng $60m$, bán kính đáy bằng $20m$. Nhà đầu tư du lịch dự định xây dựng một con đường nhằm phục vụ việc chuyên chở khách du lịch thăm quan ngắm cảnh vòng quanh ngọn núi bắt đầu từ vị trí A và dừng ở vị trí B sao cho đoạn $AB = 10m$. Biết rằng người ta đã chọn xây dựng đường đi ngắn nhất vòng quanh núi từ A đến B, đoạn đường đầu là phần lên dốc từ A và đoạn sau sẽ xuống dốc đến B. Khi đó quãng đường xuống dốc đi từ A đến B bằng $\frac{a}{\sqrt{b}}$ với $a, b \in \mathbb{N}^*$. Tính tổng $T = a + b$.



Lời giải

Trả lời: 491

Cắt hình nón theo đường sinh OA và trải ra mặt phẳng ta được hình quạt như hình vẽ sau.



Gọi α là số đó góc của cung tròn.

Độ dài cung tròn $l = \alpha.60 = 2\pi.20 \Rightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Vậy góc $\widehat{BOA} = 120^0$.

Con đường đi từ A đến B ngắn nhất khi AB là đoạn thẳng.

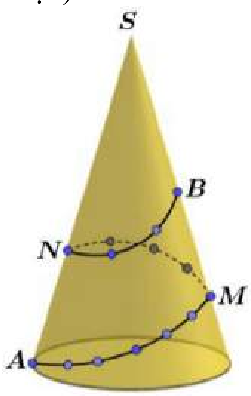
Gọi H là đỉnh dốc, khi đó H gần điểm O nhất nên H là hình chiếu của O lên đoạn thẳng AB. Đoạn xuống dốc là HB.

Ta có $AB = \sqrt{OB^2 + OA^2 - 2OA.OB.cos\left(\widehat{BOA}\right)} = 10\sqrt{91}$.

$\cos\widehat{OBA} = \dfrac{OB^2 + AB^2 - OA^2}{2.OB.AB} = \dfrac{8000}{1000\sqrt{91}} = \dfrac{8}{\sqrt{91}}$.

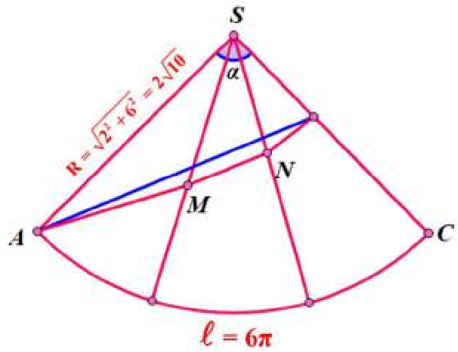
$BH = OB.\cos\widehat{OBA} = \dfrac{400}{\sqrt{91}}$. Vậy tổng $T = a + b = 400 + 91 = 491$.

Câu 33. Một người muốn nối một dây đèn nhiều màu sắc từ vị trí A đến vị trí B trên vật trang trí có dạng hình nón với bán kính đáy bằng 2 dm và chiều cao bằng $6dm$. Thiết diện qua trục hình nón là tam giác chứa các cạnh SA, SB (S là đỉnh hình nón); dây điện được kéo từ A đến một vị trí M thuộc đường sinh SB, sau đó qua N thuộc đường sinh SA trước khi đến B. Biết rằng $SB = 2dm$. Tìm đoạn dây điện bé nhất được dùng cho việc này (tính theo dm và kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Trả lời: 8,3



Ta có: $l_{AC} = \dfrac{3}{2} \times$ chu vi $= \dfrac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot 2 = 6\pi$

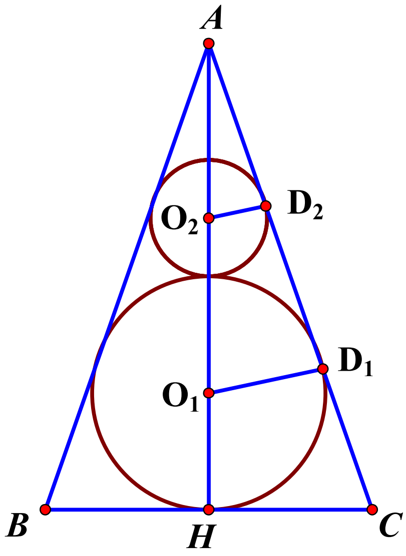
Mà $l_{AC} = R.\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{l_{AC}}{R} = \dfrac{6\pi}{\sqrt{2^2+6^2}} = \dfrac{6\pi}{\sqrt{40}} = \dfrac{6\pi}{2\sqrt{10}} = \dfrac{3\pi}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow AB_{min} = \sqrt{SA^2 + SB^2 - 2SA\cdot SB\cdot\cos\alpha} = \sqrt{(2\sqrt{10})^2 + 2^2 - 2\cdot 2\sqrt{10}\cdot 2\cdot\cos\alpha} \approx 8,3$ (dm)

Câu 34. Người ta đặt được vào một hình nón hai khối cầu có bán kính lần lượt là a và $2a$ sao cho các khối cầu đều tiếp xúc với mặt xung quanh của hình nón, hai khối cầu tiếp xúc với nhau và khối cầu lớn tiếp xúc với đáy của hình nón. Bán kính đáy của hình nón đã cho là $m\sqrt{n}.a$, $\left(m, n \in \mathbb{N}^*\right)$. Giá trị của $m + n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 4



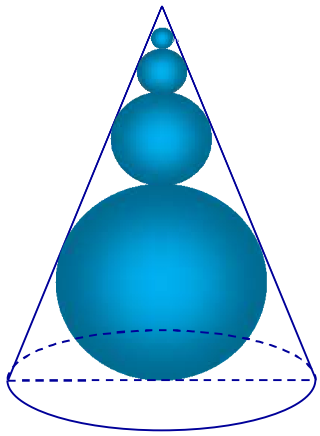
Giả sử thiết diện qua trục của hình nón là ΔABC với A là đỉnh nón, BC là đường kính đáy nón. H là tâm đáy O_1, O_2 lần lượt là tâm của mặt cầu lớn và nhỏ D_1, D_2 lần lượt là tiếp điểm của AC với (O_1) và (O_2).

Vì $O_1D_1 // O_2D_2$ và $O_1D_1 = 2O_2D_2$ nên O_2 là trung điểm $AO_1 \Rightarrow AO_1 = 2O_1O_2 = 2.3a = 6a$

$O_1D_1 = 2a, AH = AO_1 + O_1H = 8a$. Ta có $AD_1 = \sqrt{AO_1^2 - O_1D_1^2} = 4a\sqrt{2}$.

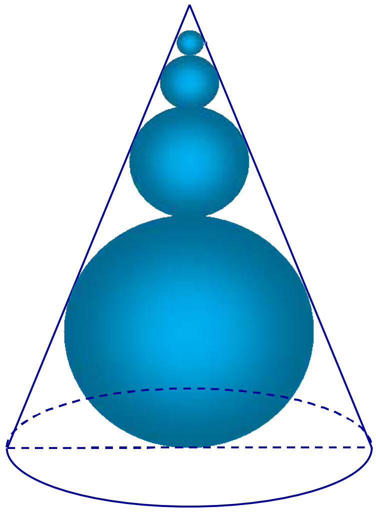
Từ $\Delta AO_1D_1 \backsim \Delta ACH \Rightarrow \dfrac{O_1D_1}{CH} = \dfrac{AD_1}{AH} \Rightarrow CH = 2\sqrt{2}a \Rightarrow r = 2\sqrt{2}a$.

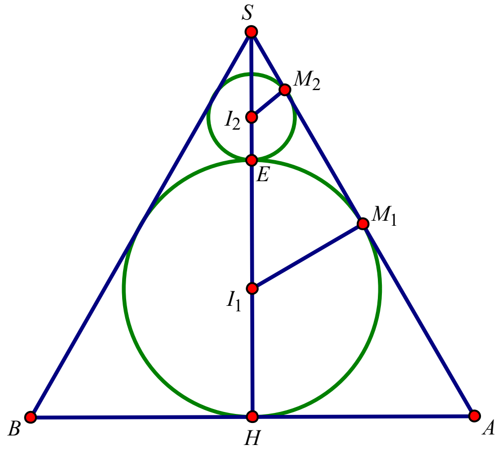
Câu 35. Cho hình nón (N) có góc ở đỉnh bằng 60°, độ dài đường sinh bằng 5. Dãy hình cầu (S_1), (S_2), (S_3),..., (S_n),... thỏa mãn: (S_1) tiếp xúc với mặt đáy và các đường sinh của hình nón (N); (S_2) tiếp xúc ngoài với (S_1) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (N); (S_3) tiếp xúc ngoài với (S_2) và tiếp xúc với các đường sinh của hình nón (N). Tổng thể tích các khối cầu (S_1), (S_2), (S_3),..., (S_n),... bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



Lời giải

Trả lời: 13,1





Gọi I_1, I_2 lần lượt là tâm của mặt cầu (S_1) và (S_2).

Gọi H là trung điểm của AB. Khi đó ta có ΔSAB đều và $R_1 = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}.\frac{5\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$.

Hạ $I_1M_1 \perp SA$, $I_2M_2 \perp SA$.

Xét ΔSI_2M_2 có $\sin 30^{\circ} = \frac{I_2M_2}{SI_2} \Rightarrow SI_2 = 2I_2M_2$. Khi đó ta có $SH = SI_2 + I_2E + EH$

$\Leftrightarrow 3r_1 = 3r_2 + 2r_1 \Leftrightarrow r_1 = 3r_2$.

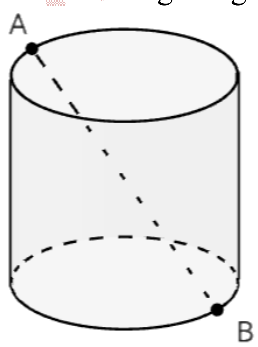
Chứng minh tương tự ta có $r_2 = 3r_3, \ldots, r_n = 3r_{n+1}$.

Do đó dãy bán kính r_1, $r_2, \ldots, r_n$,. lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $r_1 = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ và công bội $q = \frac{1}{3}$.

Suy ra dãy thể tích của các khối cầu (S_1), (S_2), …,(S_n),… lập thành một cấp số nhân lùi vô hạn với $V_1 = \frac{4}{3}\pi.\left(\frac{5\sqrt{3}}{6}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{54}\pi.5^3$ và công bội $q_1 = \frac{1}{27}$.

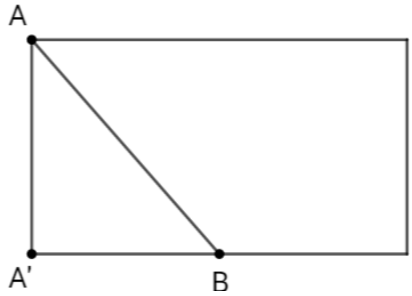
Vậy tổng thể tích của các khối cầu $(S_1),(S_2),\ldots,(S_n),\ldots$ là: $V = \frac{V_1}{1-q} = \frac{\sqrt{3}}{52}\pi.5^3 \approx 13,1$.

Câu 36. Một hộp sữa hình trụ tròn như hình vẽ có chu vi đáy bằng 32 cm và chiều cao bằng 12 cm . có một lỗ đục tại điểm A như hình vẽ. Một mặt phẳng đi qua điểm A và trục của hình trụ cắt đáy không chứa điểm A tại điểm B như hình vẽ. Một con kiến tại B muốn đi đến A theo mặt ngoài của hộp sữa thì đường đi ngắn nhất của nó bằng bao nhiêu cm?



Lời giải

Trả lời: 20



Gọi AA' là đường sinh của hình trụ.

Trải hộp sữa thành hình chữ nhật có kích thước $AA' = 12\,\text{cm}$ và một cạnh bằng $2A'B = 32\,\text{cm}$.

$\Rightarrow A'B = 16\,\text{cm}$.

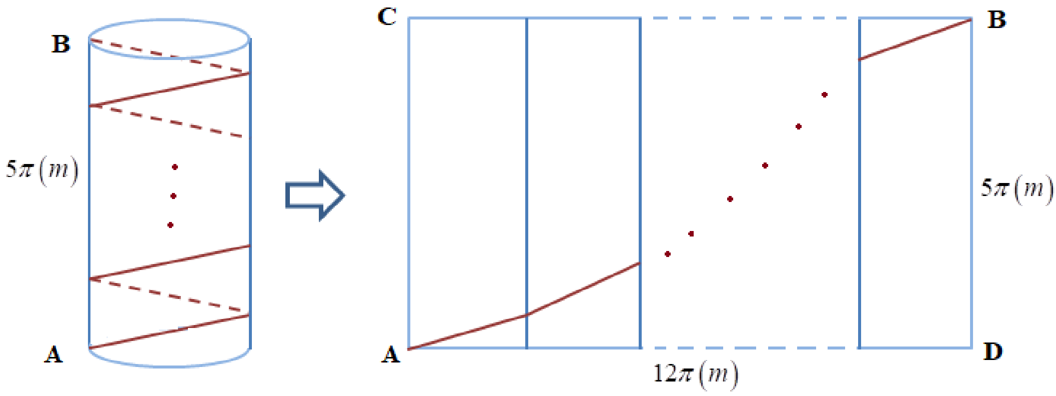
Khi đó $AB = \sqrt{12^2 + 16^2} = 20(\text{cm})$ là độ dài ngắn nhất.

Câu 37. Để chào mừng 20 năm thành lập thành phố A, ban tổ chức quyết định trang trí cho cổng chào có hai cột hình trụ. Các kỹ thuật viên đưa ra phương án quấn xoắn từ chân cột lên đỉnh cột đúng 20 vòng đèn Led cho mỗi cột. Biết bán kính trụ cổng là 30cm và chiều cao cổng là $5\pi\,(m)$. Tính chiều dài dây đèn Led tối thiểu để trang trí hai cột trụ cổng. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 82

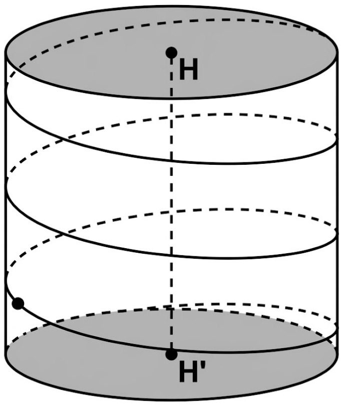
Với cách trang trí quấn xoắn từ chân cột lên đỉnh cột đúng 20 vòng đèn ta có thể trải phẳng cổng chào hình trụ đó 20 vòng để được một hình chữ nhật có chiều cao $5\pi\,(m)$ và chiều ngang là $20.2.0,3\pi = 12\pi\,(m)$ (như hình vẽ).



Dễ thấy độ dài dây đèn Led ngắn nhất bằng độ dài $AB = \sqrt{(5\pi)^2 + (12\pi)^2} = 13\pi\,(\text{m})$

Vậy để trang trí hai cột trụ cổng cần ít nhất $26\pi\,(m) \approx 82$ đèn Led

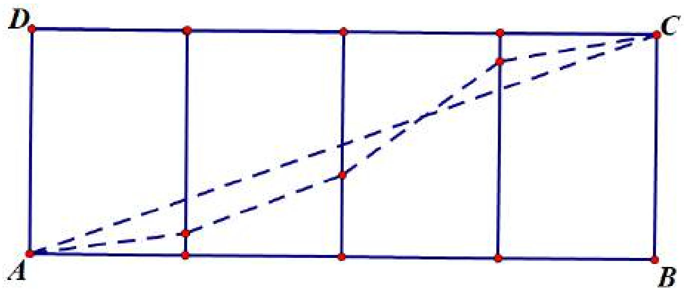
Câu 38. Để chào mừng 20 năm thành lập thành phố A, ban tổ chức quyết định trang trí cho cổng chào có hai cột hình trụ. Các kỹ thuật viên đưa ra phương án quấn xoắn từ chân cột lên đỉnh cột đúng 20 vòng đèn Led cho mỗi cột. Biết bán kính trụ cổng là 30 cm và chiều cao cổng là 5π (m). Tính chiều dài dây đèn Led tối thiểu để trang trí hai cột trụ cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Trả lời: 81,7

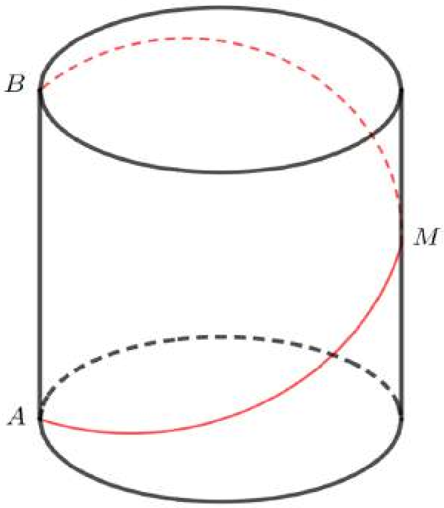
Hình sau khi đã trải phẳng:



$l_{min} = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(12\pi)^2 + (5\pi)^2} = 13\pi$

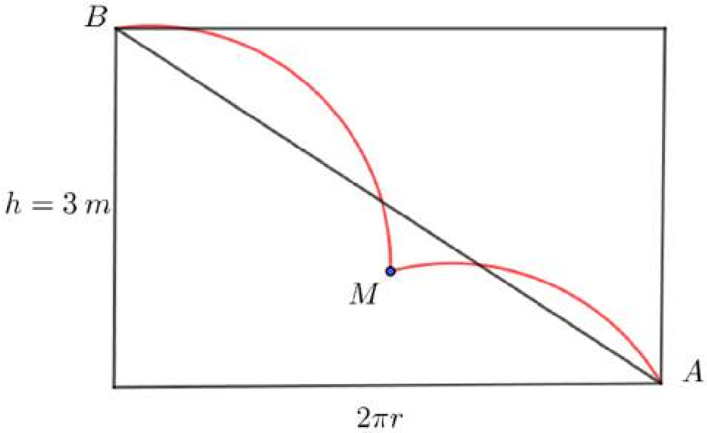
Tổng chiều dài dây đèn Led tối thiểu: $2.13\pi \approx 81,7$ m

Câu 39. Một cột trụ hình trụ cao 3 m, bán kính đáy $0,4$ m. Người ta muốn quấn một đường dây đèn chớp chớp từ vị trí A đến M rồi từ M đến B như hình vẽ. Chiều dài ngắn nhất của 6 đường dây như thế là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất)



Lời giải

Trả lời: 23,5



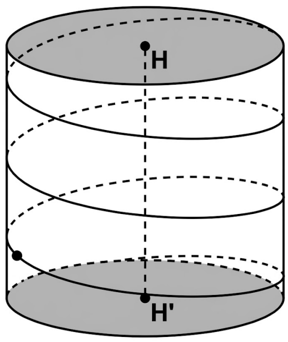
Cắt mặt xung quanh của hình trụ theo đường sinh AB rồi đem trải phẳng ta được hình chữ nhật có hai chiều là $h=3$ m, $2\pi r=2\pi.0,4=0,8\pi$ m. Đường chéo của hình chữ nhật là

$AB=\sqrt{h^2+(0,8\pi)^2}$.

Vì đường dây đèn chớp quấn quanh thân của hình trụ nên khi trải phẳng các điểm tiếp xúc giữa dây và mặt xung quanh của hình trụ luôn nằm trên mặt phẳng.
Do vậy, chiều dài ngắn nhất của đường dây bằng AB khi M thuộc đường chéo AB.

Vậy, chiều dài ngắn nhất của 6 đường dây như thế là $6AB=6\sqrt{h^2+(0,8\pi)^2}\approx 23,5$ m.

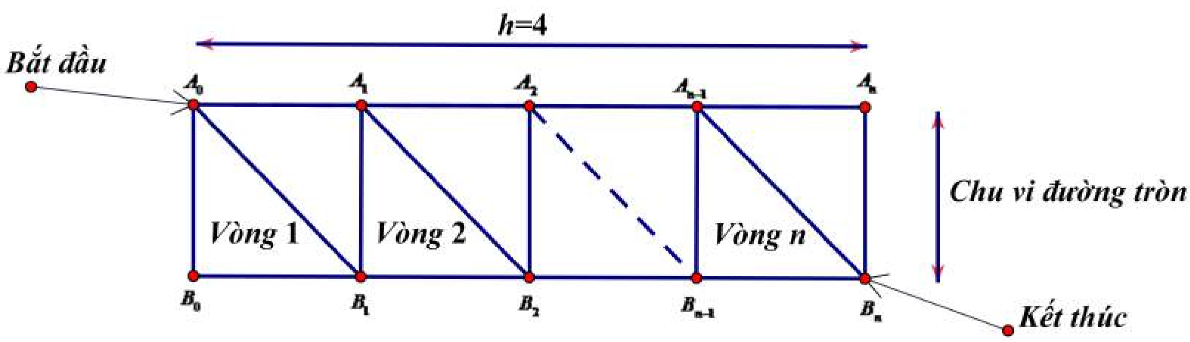
Câu 40. Một con kiến bò lên đều quanh hình trụ (từ mặt đáy dưới lên mặt đáy trên), bán kính mặt đáy hình trụ $R=\dfrac{3}{8\pi}$ và chiều cao hình trụ $h=4$. Hỏi con kiến bò ngắn nhất bao nhiêu vòng quanh hình trụ để đoạn đường kiến đi là 1 số nguyê



Lời giải

Trả lời: 4

Hình sau khi đã trải phẳng:



Gọi "điểm bắt đầu" là vị trí ở mặt đáy dưới của hình trụ mà kiến xuất phát;

"điểm kết thúc" là vị trí ở mặt đáy trên của hình trụ mà kiến kết thúc hành trình di chuyển.

Gọi $n\left(n \in N^*\right)$ là số vòng mà con kiến bò được trong suốt hành trình di chuyển.

Ta trải phẳng hình vẽ bài toán bằng cách cắt hình trụ bởi một đường thẳng đi qua “điểm bắt đầu” và “điểm kết thúc”. Ta ký hiệu các điểm như hình vẽ.

Chu vi đường tròn đáy: $A_0B_0 = A_1B_1 = \ldots = A_nB_n = 2\pi R = 2\pi\dfrac{3}{8\pi} = \dfrac{3}{4}$

Ta có: $A_0A_1 = A_1A_2 = \ldots = A_{n-1}A_n = \dfrac{h}{n} = \dfrac{4}{n}$

Khi đó độ dài đoạn đường mỗi vòng kiến đi được:

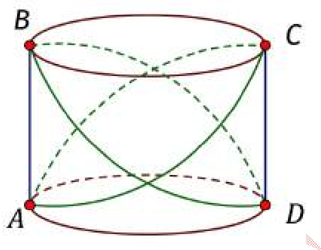
$$d = \sqrt{A_0B_0^2 + (A_0A_1)^2} = \sqrt{(\frac{3}{4})^2 + (\frac{4}{n})^2} = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{n^2}}$$

Từ đó suy ra độ dài đoạn đường kiến đi được trong suốt hành trình:

$$S = nd = n\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{n^2}} = \sqrt{\frac{9n^2}{16} + 16}$$

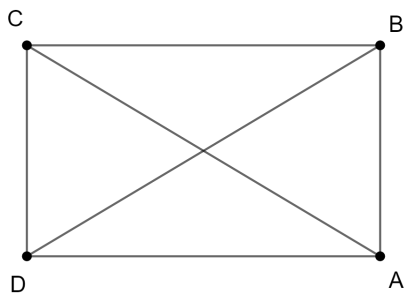
Yêu cầu bài toán tương đương với $\sqrt{\dfrac{9n^2}{16} + 16} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n = 4$

Câu 41. Một cái bánh kem hình trụ cao 15 *cm*, đường kính 24 *cm*. Người ta muốn trang trí 2 đường viền bằng socola như hình vẽ. Chiều dài ngắn nhất để tiết kiệm là bao nhiêu cm? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 162



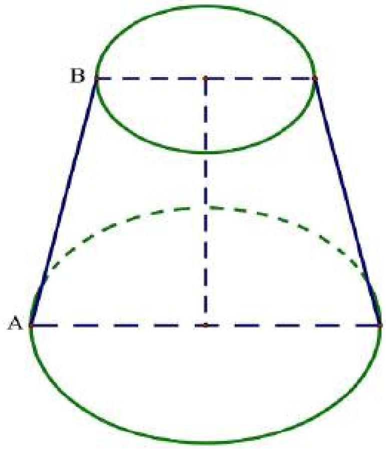
Trải phẳng nửa hình trụ, tại AB ta được hình chữ nhật AA_1B_1B với $AD = \pi R = \pi.12 \approx 37,7\ cm$, $BA = 15\ cm$.

Để vẽ được đường viền đi từ D đến B ngắn nhất thì đó phải là đường thẳng nối từ D đến B.

Áp dụng định lí Pi-ta-go, ta có $DB^2 = AB^2 + AD^2 = 37,7^2 + 15^2 \approx 1646,22 \Rightarrow DB \approx 40,57\ cm.$

Tương tự với các đường vẽ từ B đến A, từ C đến D, từ D đến C. Ta thu được chiều dài cần vẽ là $4DB \approx 162\,cm$.

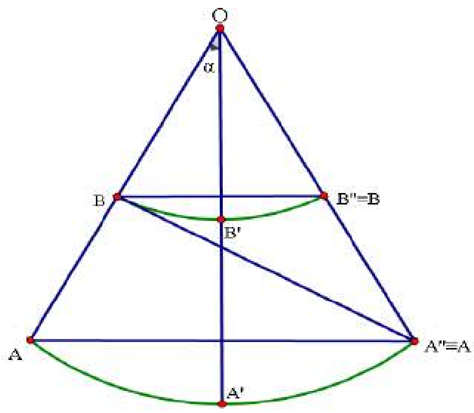
Câu 42. Có một cái cốc làm bằng giấy, được úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của chiếc cốc là $20cm$, bán kính đáy cốc là $4cm$, bán kính miệng cốc là $5cm$. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò hai vòng quanh than cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình gần đúng nhất với kết quả nào dưới đây (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



Lời giải

Trả lời: 58,8

Đặt b,a,h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta "trải" hai lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $BB''=4\pi b$ và cung lớn $AA''=4\pi a$.



Độ dài ngắn nhất của đường đi của con kiến là độ dài đoạn thẳng BA''. Áp dụng định lí hàm số cosin ta được:

$l=\sqrt{BO^2+OA''^2-2BO.OA''.\cos 2\alpha}$ (1).

$B''A''=AB=\sqrt{(a-b)^2+h^2}$. $\dfrac{a}{b}=\dfrac{4\pi a}{4\pi b}=\dfrac{l(\overset{\frown}{BB''})}{l(\overset{\frown}{AA''})}=\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{OB+AB}{OB}=1+\dfrac{AB}{\frac{2\pi b}{\alpha}}=1+\dfrac{AB.\alpha}{2\pi b}$

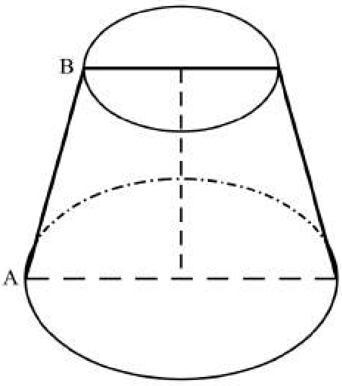
$\Rightarrow \alpha=\dfrac{2\pi(a-b)}{AB}=\dfrac{2\pi(a-b)}{\sqrt{(a-b)^2+h^2}}$ (a). $\dfrac{AB}{OB}=\dfrac{a}{b}-1=\dfrac{a-b}{b}\Rightarrow OB=\dfrac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}$ (b).

$OA''=OB+BA=\dfrac{b\sqrt{(a-b)^2+h^2}}{a-b}+\sqrt{(a-b)^2+h^2}$ (c).

Thay (a), (b), (c) vào (1) ta tìm được l.

$l \approx 58,79609cm \approx 58,8$

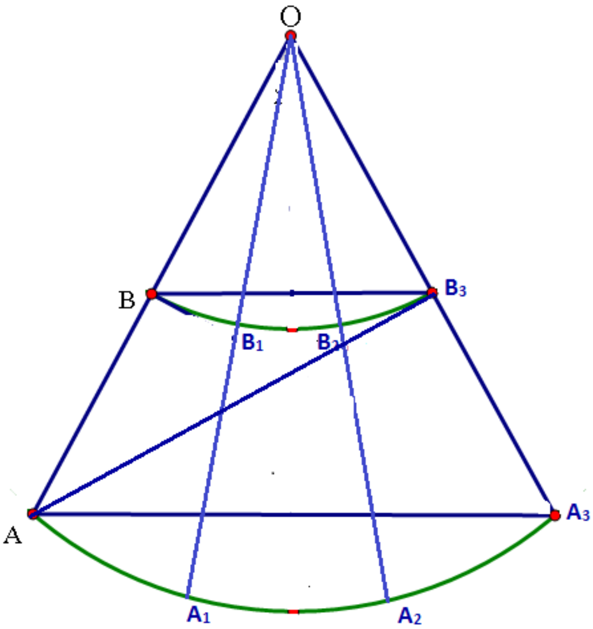
Câu 43. Có một cái cốc úp ngược như hình vẽ. Chiều cao của cốc là 30cm, bán kính đáy cốc là 3cm, bán kính miệng cốc là 5cm. Một con kiến đang đứng ở điểm A của miệng cốc dự định sẽ bò ba vòng quanh thân cốc để lên đến đáy cốc ở điểm B. Tính quãng đường ngắn nhất để con kiến có thể thực hiện được dự định của mình. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải

Trả lời: 75

Đặt r_1, r_2, h lần lượt là bán kính đáy cốc, miệng cốc và chiều cao của cốc, α là góc kí hiệu như trên hình vẽ. Ta "trải" ba lần mặt xung quanh cốc lên mặt phẳng sẽ được một hình quạt của một khuyên với cung nhỏ $l(BB_3) = 6\pi r_1 = 18\pi$ và cung lớn $l(AA_3) = 6\pi r_2 = 30\pi$.



Con kiến muốn đi từ A tới B phải vòng 3 vòng quanh cốc. Đường đi ngắn nhất là đi theo đoạn AB3, Theo định lý Côsin ta có $AB_3 = \sqrt{OA^2 + OB_3^2 - 2OA.OB_3.\cos 3\alpha}$ (1) với $\alpha = \widehat{AOA_1}$

Độ dài $AB = \sqrt{h^2 + (r_2 - r_1)^2} = 2\sqrt{226}$

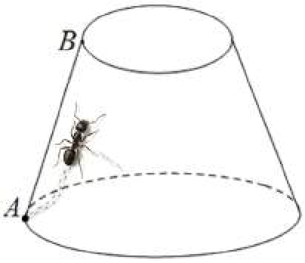
$$\frac{OB}{OA} = \frac{l(BB_3)}{l(AA_3)} = \frac{3}{5} = \frac{OB}{OB + BA} \Rightarrow OB = 3\sqrt{226}$$

$$\Rightarrow OA = OB + BA = 5\sqrt{226}$$

Lại có $l(BB_1) = OB.\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{l(BB_1)}{OB} = \dfrac{2\pi.r_1}{3\sqrt{226}} = \dfrac{2\pi}{\sqrt{226}}$

Thay vào công thức (1) có kết quả. $l \approx 74,6386cm$.

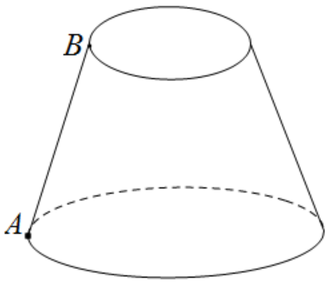
Câu 44. Một con kiến xuất phát từ A và đi hai vòng quanh hình nón cụt rồi dừng lại tại B như hình vẽ. Biết bán kính đáy lớn là $4cm$ và đáy nhỏ là $2cm$, chiều cao $\sqrt{3}cm$. Quãng đường ngắn nhất con kiến đó phải đi là bao nhiêu cm? (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai).

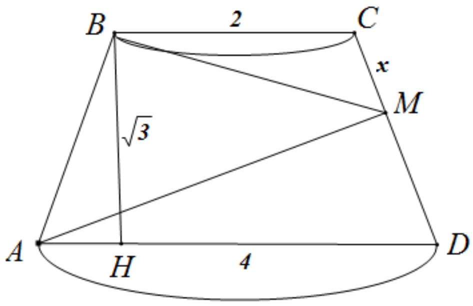


Lời giải

Trả lời: 3,73

Cắt hình nón cụt theo đường sinh AB rồi trải phẳng ta được hình vẽ với $x \geq 0$.





Khi đó, quãng đường con kiến đi là $S = AM + MB$.

Ta có $CD = \sqrt{AH^2 + BH^2} = 2(\text{cm})$

$\tan \widehat{BAH} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{BAH} = 60^0 \Rightarrow \widehat{C} = 120^0$

$BM^2 = BC^2 + CM^2 - 2BC.CM.\cos \widehat{C} = 4 + x^2 + 2x$

$AM^2 = AD^2 + MD^2 - 2AD.MD.\cos \widehat{BAH} = 16 + (2-x)^2 - 4(2-x) = x^2 + 12$

$\Rightarrow S = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + \sqrt{x^2 + 12}\ (x \geq 0)$

$\Rightarrow S' = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 12}} + \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}} > 0\ \forall x \geq 0$

Vậy $S_{\min} = S(0) = 2 + 2\sqrt{3} \approx 3,73$