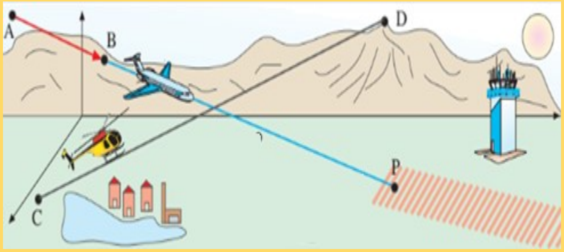
VUI CÙNG TOÁN

VÕ CÔNG TRƯỜNG
0983 900 570

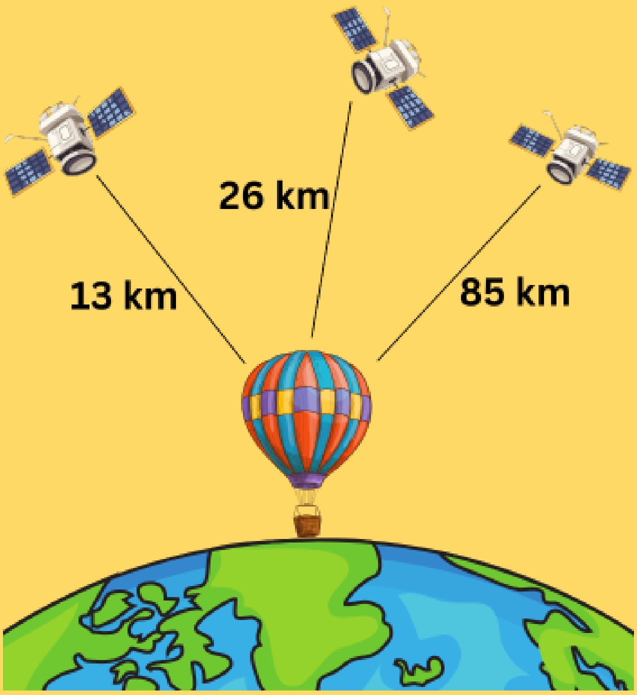


TOÁN 12

PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

BÀI TOÁN THỰC TẾ

- Hệ thống kiến thức
- Phương pháp giải toán
- Bài toán cơ bản
- Bài toán thực tế



2025-2026

MỤC LỤC

CHƯƠNG ☞ PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG, MẶT CẦU

BÀI 1. PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

1. Vectơ pháp tuyến và cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng

• Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có ***giá vuông góc*** với mặt phẳng (α) được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của mặt phẳng (α)

• Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ *không cùng phương* và *giá* của chúng *song song* hoặc *nằm trên* mặt phẳng (α) thì $\vec{a},\vec{b}$ được gọi là ***cặp vectơ chỉ phương*** của mặt phẳng (α).

Nhận xét

(1) Nếu $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của (α) thì $k\cdot\vec{n}$ $(k\neq 0)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của (α) (Nói cách khác, một mặt phẳng có vô số vectơ pháp tuyến và chúng cùng phương nhau)

(2) Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ pháp tuyến của nó, hoặc biết một điểm và một cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng đó.

2. Tích có hướng của 2 vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$.

Vectơ $\vec{n}=(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$ được gọi là ***tích có hướng*** của hai $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$

Nhận xét

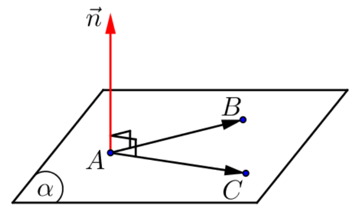
(1) Biểu thức $a_1b_2-a_2b_1$ thường được kí hiệu $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}$. Tương tự $\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}=a_2b_3-a_3b_2$, $\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix}=a_3b_1-a_1b_3$.

Như vậy: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right)$

(2) $\vec{a}$ cùng phương với $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$

(3) Nếu $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ thì vectơ $\vec{n}$ vuông góc với cả hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$

(4) Nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến.



3. Phương trình tổng quát của mặt phẳng

Định nghĩa

Trong không gian $Oxyz$, mỗi mặt phẳng đều có phương trình dạng $Ax+By+Cz+D=0$ (1), với A, B, C không đồng thời bằng 0, được gọi là ***phương trình tổng quát*** của mặt phẳng.

Nhận xét

(1) Mỗi phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ (với A, B, C không đồng thời bằng 0) đều xác định một mặt phẳng nhận $\vec{n}=(A;B;C)$ làm vectơ pháp tuyến.

(2) Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Khi đó: $N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

(Nói cách khác, Một điểm thuộc một mặt phẳng khi chỉ khi tọa độ của điểm thỏa mãn phương trình của mặt phẳng. Khái quát, Một Điểm thuộc một Hình khi chỉ khi tọa độ của Điểm thỏa mãn phương trình của Hình)

(3) Mặt phẳng(α) qua $M(x_o;y_o;z_o)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ có phương trình là

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0\ (2) \Leftrightarrow Ax+By+Cz+D=0$, với $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$

(4) *Phương trình theo đoạn chắn*

Mặt phẳng cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ có phương trình dạng: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1\ (3)\ (a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0)$ (gọi là ***phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn***)

Phương trình mặt phẳng trong các trường hợp đặc biệt

Tính chất mặt phẳng	***Phương trình***	***Hệ số***
(α) đi qua gốc O.	$(\alpha): Ax+By+Cz=0$	$D=0$
(α) song song hoặc chứa Ox.	$(\alpha): By+Cz+D=0$	$A=0$ (Chứa Ox khi $D=0$)
(α) song song hoặc chứa Oy.	$(\alpha): Ax+Cz+D=0$	$B=0$ (Chứa Oy khi $D=0$)
(α) song song hoặc chứa Oz.	$(\alpha): Ax+By+D=0$	$C=0$ (Chứa Oz khi $D=0$)
(α) song song (Oxy).	$(\alpha): Cz+D=0$	$A=B=0$
(α) song song (Oxz).	$(\alpha): By+D=0$	$A=C=0$
(α) song song (Oyz).	$(\alpha): Ax+D=0$	$B=C=0$
Phương trình các mặt phẳng tọa độ: $(Oyz): x=0$; $(Oxz): y=0$; $(Oxy): z=0$		

4. Điều kiện để hai mặt phẳng song song, vuông góc

Cho 2 mặt phẳng $(\alpha_1): A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ và $(\alpha_2): A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ lần lượt có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1=(A_1;B_1;C_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;B_2;C_2)$. Khi đó:

$(\alpha_1)\parallel(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k.\overrightarrow{n_2}\\ D_1\neq k.D_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1\neq k.D_2\end{cases}$ hay $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$, $(A_2.B_2.C_2.D_2\neq 0)$
$(\alpha_1)\equiv(\alpha_2) \Leftrightarrow \begin{cases}\overrightarrow{n_1}=k.\overrightarrow{n_2}\\ D_1=k.D_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(A_1;B_1;C_1)=k(A_2;B_2;C_2)\\ D_1=k.D_2\end{cases}$ hay $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$, $(A_2.B_2.C_2.D_2\neq 0)$
$(\alpha_1),(\alpha_2)$ cắt nhau $\Leftrightarrow \vec{n}_1$ và $\vec{n}_2$ không cùng phương
$(\alpha_1)\perp(\alpha_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1.\vec{n}_2=0 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$

5. Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách	***Cách tính và Công thức***
1. Khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ ***đến mặt phẳng*** $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$	$d(M,(\alpha))=\frac{\lvert Ax_o+By_o+Cz_o+D\rvert}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$
2. Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song: $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$ Với $(A';B';C')=k(A;B;C)$	***Cách 1:*** Bằng khoảng cách từ 1 điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia. Lấy $M(x_0;y_0;z_0)\in(\beta)$. Khi đó: $\mathrm{d}((\alpha),(\beta))=\mathrm{d}(M;(\alpha))$
	Cách 2: Đồng nhất hệ số của phương trình 2 mặt phẳng: Biến đổi 2 phương trình của 2 mặt phẳng sao cho các hệ số của x, y, z tương ứng bằng nhau. Chẳng hạn $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): Ax+By+Cz+D_0=0$

	Khi đó: $d\left((\alpha);(\beta)\right)=\dfrac{\left\|D-D_0\right\|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$

ĐẶC BIỆT

Khoảng cách từ điểm	***Đến***	***Bằng***
$M\left(x_M;y_M;z_M\right)$	Gốc tọa độ O	$\sqrt{x_M{}^2+y_M{}^2+z_M{}^2}$
	Trục tọa độ Ox	$\sqrt{y_M{}^2+z_M{}^2}$ (cho hoành độ bằng 0)
	Trục tọa độ Oy	$\sqrt{x_M{}^2+z_M{}^2}$ (cho tung độ bằng 0)
	Trục tọa độ Oz	$\sqrt{x_M{}^2+y_M{}^2}$ (cho cao độ bằng 0)
	Mặt phẳng tọa độ (Oxy)	$\sqrt{z_M{}^2}=\left\|z_M\right\|$ (cho hoành độ và tung độ bằng 0)
	Mặt phẳng tọa độ (Oxz)	$\sqrt{y_M{}^2}=\left\|y_M\right\|$ (cho hoành độ và cao độ bằng 0)
	Mặt phẳng tọa độ (Oyz)	$\sqrt{x_M{}^2}=\left\|x_M\right\|$ (cho tung độ và cao độ bằng 0)

🕮 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH VECTƠ PHÁP TUYẾN CỦA MẶT PHẲNG

(1) Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ và có giá vuông góc với mặt phẳng (α) được gọi là ***vectơ pháp tuyến*** của mặt phẳng (α)

(2) Nếu mặt phẳng (α) nhận hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ làm cặp vectơ chỉ phương thì (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ làm vectơ pháp tuyến

(3) Nếu mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$ thì vectơ $\vec{n}=(A;B;C)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α)

(4) Mặt phẳng (Oxy) có vectơ pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Mặt phẳng (Oyz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Ví dụ 1:rong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P):3x-y+2z-1=0$. Vectơ nào dưới đây **không** phải là một vectơ pháp tuyến của (P)?

A. $\overrightarrow{n_1}=(-3;1;-2)$. **B.** $\overrightarrow{n_2}=(3;1;2)$ **C.** $\overrightarrow{n_3}=(3;-1;2)$ **D.** $\overrightarrow{n_4}=(6;-2;4)$

Lời giải

Dựa vào phương trình $(P):3x-y+2z-1=0$, ta thấy vectơ pháp tuyến của (P) là: $\overrightarrow{n_3}=(3;-1;2)$

$\overrightarrow{n_1}=(-3;1;-2)=-1(3;-1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P)

$\overrightarrow{n_4}=(6;-2;4)=2(3;-1;2)$ là một vectơ pháp tuyến của (P)

Đáp án: B

Ví dụ 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;-3)$, $B(0;-2;5)$. Xác định một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng AB.

Lời giải

Đường thẳng AB là giá của $\overrightarrow{AB}$.

Do mặt phẳng (α) vuông góc với đường thẳng AB nên một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\overrightarrow{AB}=(-2;-3;8)$

Ví dụ 3: Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a}=(1;-2;3)$, $\vec{b}=(3;0;5)$. Tìm vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α).

Lời giải

Do mặt phẳng (α) song song với giá của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ nên $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là cặp vectơ chỉ phương của mặt phẳng (α)

Vậy vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) là $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-10;4;6)$.

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM THUỘC MẶT PHẲNG

Cho mặt phẳng (α) có phương trình $Ax+By+Cz+D=0$.

Khi đó: $N_0(x_0;y_0;z_0)\in(\alpha)\Leftrightarrow Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$

(***Nói cách khác***, Một điểm thuộc một mặt phẳng khi chỉ khi tọa độ của điểm thỏa mãn phương trình của mặt phẳng. Khái quát, Một Điểm thuộc một Hình khi chỉ khi tọa độ của Điểm thỏa mãn phương trình của Hình)

Ví dụ 4: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x+y+z-6=0$. Điểm nào dưới đây **không** thuộc (α)?

A. $Q(3;3;0)$. **B.** $N(2;2;2)$. **C.** $P(1;2;3)$. **D.** $M(1;-1;1)$.

Lời giải

A. Thay toạ độ $Q(3;3;0)$ vào phương trình mặt phẳng (α), ta được $3+3+0-6=0$ (đúng) $\Rightarrow Q\in(\alpha)$

B. Thay toạ độ $N(2;2;2)$ vào phương trình mặt phẳng (α), ta được $2+2+2-6=0$ (đúng) $\Rightarrow N\in(\alpha)$

C. Thay toạ độ $P(1;2;3)$ vào phương trình mặt phẳng (α), ta được $1+2+3-6=0$ (đúng) $\Rightarrow P\in(\alpha)$

D. Thay toạ độ $M(1;-1;1)$ vào phương trình mặt phẳng (α), ta được $1+(-1)+1-6=0$ (sai) $\Rightarrow M\notin(\alpha)$

Đáp án: D

Dạng toán ☞ LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Cách 1. Xác định 2 yếu tố cơ bản của mặt phẳng là Điểm đi qua và vectơ pháp tuyến.

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác (nếu cần)

Bước 2. Xác định tọa độ điểm $M(x_o;y_o;z_o)$ và tọa độ vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$ của mặt phẳng

Bước 3. Thay vào phương trình $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, Thu gọn về phương trình tổng quát

Dạng	*Điều kiện xác định mặt phẳng (α) (giả thiết cho)*	*Đi qua điểm*	*Vectơ pháp tuyến*
1	*Qua M và song song* $(\beta): Ax+By+Cz+D=0$	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{n_\beta}=(A;B;C)$
2	*Qua M và vuông góc đường thẳng AB*	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}$
	Qua M và vuông góc đường thẳng (d)	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{a_d}$
3	*Là mặt phẳng trung trực đoạn AB*	*M là trung điểm AB*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\overrightarrow{AB}$

4	*Qua 3 điểm A, B, C*	*A (hay B, hay C)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$
5	*Qua A, B và song song CD*	*A (hay B)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]$
	Qua A, B và song song (d)	*A (hay B)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{a_d}\right]$
	Chứa (d) và song song AB	*Lấy M ∈ (d)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{AB}\right]$
	Chứa (d) và song song (d')	*Lấy M ∈ (d)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{a_{d'}}\right]$
6	*Qua 2 điểm M, N và vuông góc mặt phẳng(β)*	*M (hay N)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
	Chứa (d) và vuông góc mặt phẳng (β)	*Lấy M ∈ (d)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
7	*Qua điểm M và vuông góc 2 mặt phẳng (β), (γ)*	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{n_\beta},\overrightarrow{n_\gamma}\right]$
8	*Qua điểm M và song song 2 đường thẳng (d), (d')*	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{a_{d'}}\right]$
9	*Qua điểm M, vuông góc mp(β) và song song đường thẳng (d)*	*M*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{a_d},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
10	*Chứa (d) và đi qua* $M\in(d)$	*M hay Lấy N ∈(d)*	$\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{MN},\overrightarrow{a_d}\right]$

Cách 2. Xác định hệ số

Bước 1. Gọi mặt phẳng đã cho có phương trình dạng: $Ax+By+Cz+D=0$

Bước 2. Từ giả thiết, xác định 4 hệ số *A, B, C, D* (kiểm tra điều kiện, nếu có)

Bước 3. Thay vào phương trình $Ax+By+Cz+D=0$

Đặc biệt:

Nếu mặt phẳng không qua gốc tọa độ O thì phương trình mặt phẳng được biến đổi về dạng $ax+by+cz=1$ (4).

Khi mặt phẳng được xác định bởi 3 yếu tố thì ta lập được hệ phương trình bậc nhất 3 ẩn a, b, c. Giải hệ phương trình tìm a, b, c rồi thay vào phương trình (4) và thu gọn và phương trình dạng tổng quát.

Ví dụ 5: Trong không gian $Oxyz$, lập phương trình mặt phẳng (β) qua điểm $A(-1;1;2)$ và song song với mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y+z-1=0$

Lời giải

Cách 1.

Mặt phẳng (α) có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-2;1)$

Do mặt phẳng (β) song song mặt phẳng (α) nên mặt phẳng (β) nhận $\overrightarrow{n_\alpha}=(2;-2;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Mà mặt phẳng (β) qua điểm $A(-1;1;2)$

Vậy phương trình mặt phẳng (β) là $2(x+1)-2(y-1)+1(z-2)=0 \Leftrightarrow 2x-2y+z+2=0$

Cách 2.

Do mặt phẳng (β) song song mặt phẳng (α) nên mặt phẳng (β) có phương trình dạng

$2x-2y+z+m=0$, với $m\neq -1$.

Mà (β) đi qua điểm $A(-1;1;2)$ nên $-2-2+2+m=0 \Leftrightarrow m=2$ (nhận)

Vậy phương trình mặt phẳng (β) là $2x-2y+z+2=0$.

Ví dụ 6: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (ABC), với $A(-1;0;3)$, $B(2;-1;1)$, $C(1;-1;0)$.

Lời giải

Cách 1.

Ta có $\overrightarrow{AB}=(3;-1;-2)$; $\overrightarrow{AC}=(2;-1;-3)$

Do mặt phẳng (ABC) chứa AB, AC nên mặt phẳng (ABC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right]=(-1;-5;1)$.

Mà mặt phẳng (ABC) qua $A(-1;0;3)$

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là $-(x+1)-5(y-0)+1(z-3)=0 \Leftrightarrow x+5y-z+4=0$

Cách 2.

Giả sử mặt phẳng (ABC) có phương trình dạng $ax+by+cz=1$ (*) (giả sử mặt phẳng không qua O)

Do mặt phẳng (ABC) qua A, B, C nên thay tọa độ 3 điểm A, B, C vào phương trình (*) ta có hệ phương trình: $\begin{cases}-a+0b+3c=1\\2a-b+c=1\\a-b+0c=1\end{cases} \Leftrightarrow (a;b;c)=\left(-\frac{1}{4};-\frac{5}{4};\frac{1}{4}\right)$

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là $-\frac{1}{4}x-\frac{5}{4}y+\frac{1}{4}z=1 \Leftrightarrow x+5y-z+4=0$

Ví dụ 7: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;4;1)$, $B(-1;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x-3y+2z-5=0$. Lập phương trình mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P).

Lời giải

Cách 1.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;2)$, vectơ pháp tuyến của mp(P) là $\overrightarrow{n_P}=(1;-3;2)$.

Do mặt phẳng (Q) đi qua hai điểm A, B và vuông góc với mặt phẳng (P) nên $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{n_P}$ là cặp vectơ chỉ phương của mp(Q). Suy ra, $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_P}\right]=(0;8;12)$ là vectơ pháp tuyến của mp(Q).

Mặt phẳng (Q) đi qua $A(2;4;1)$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $0(x-2)+8(y-4)+12(z-1)=0 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$.

Cách 2.

Giả sử mặt phẳng (Q) có phương trình dạng $ax+by+cz=1$ (giả sử mặt phẳng không qua O)

Ta có:

Mặt phẳng (Q) qua điểm $A(2;4;1)$ nên $2a+4b+c=1$ (1)

Mặt phẳng (Q) qua điểm $B(-1;1;3)$ nên $-a+b+3c=1$ (2)

Mặt phẳng (Q) vuông góc mặt phẳng (P) nên $a.1+b(-3)+c.2=0$ (3)

Giải hệ phương trình (1), (2), (3), ta được: $a=0$, $b=\frac{2}{11}$, $c=\frac{3}{11}$

Vậy phương trình mặt phẳng (Q) là $0.x+\frac{2}{11}y+\frac{3}{11}z=1 \Leftrightarrow 2y+3z-11=0$

Chú ý

Khi giải cách 2 mà hệ phương trình không giải được (khi đó mặt phẳng đi qua gốc O) thì ta phải giải bằng cách 1.

Dạng toán ☞ VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI MẶT PHẲNG

Phương pháp: Xem mục 4. Bài 1.

Ví dụ 8: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng $(\alpha): 2x+4y-6z-5=0$ $(\beta): x+2y-3z-2=0$.

Lời giải

Xét tỉ lệ các hệ số tương ứng: $\dfrac{2}{1}=\dfrac{4}{2}=\dfrac{-6}{-3}\neq\dfrac{-5}{-2}$

Suy ra hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ song song nhau

Ví dụ 9: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của hai mặt phẳng $(\alpha): x+2y-3z-5=0$ $(\beta): x-2y-z+3=0$.

Lời giải

Xét tỉ lệ các hệ số tương ứng: $\dfrac{1}{1}\neq\dfrac{4}{-2}\neq\dfrac{-3}{-1}$, suy ra hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ cắt nhau.

Xét tích vô hướng của hai vectơ pháp tuyến: $1\cdot1+2\cdot(-2)+(-3)\cdot(-1)=0$

Vậy hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ vuông góc nhau

Dạng toán ☞ TÍNH KHOẢNG CÁCH

Phương pháp: Xem mục 5. Bài 1.

Ví dụ 10: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x-2y+z-1=0$. Tính khoảng cách từ điểm $M(-1;2;1)$ đến mặt phẳng (P).

Lời giải

Khoảng cách từ điểm $M(-1;2;1)$ đến mặt phẳng (P) là $d(M,(P))=\dfrac{|2.(-1)-2.2+1-1|}{\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}}=2$.

Ví dụ 11: Trong không gian $Oxyz$, tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(P): x+2y+2z-10=0$ và $(Q): 2x+4y+4z-5=0$

Lời giải

Cách 1.

Lấy $A(2;1;3)\in(P)$.

Do (P) song song với (Q) nên khoảng cách giữa 2 mặt phẳng $(P),(Q)$ là

$$d((P),(Q))=d(A,(Q))=\frac{|2.2+4.1+4.3-5|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=\frac{5}{3}$$

Cách 2.

Ta có $(P): x+2y+2z-10=0 \Leftrightarrow 2x+4y+4z-20=0$ (Đồng nhất hệ số của x,y,z trong 2 phương trình)

Do mp(P) song song với mp(Q) nên khoảng cách giữa 2 mặt phẳng $(P),(Q)$ là

$$d((P),(Q))=\frac{|-20-(-5)|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=\frac{5}{3}$$

BÀI 2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG TRONG KHÔNG GIAN

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

• Vectơ $\vec{a}$ khác $\vec{0}$ và có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d được gọi là ***vectơ chỉ phương*** của đường thẳng d.

Nhận xét

(1) Nếu $\vec{a}$ là một vectơ chỉ phương của đường thẳng d thì $k.\vec{a}$ $(k \neq 0)$ cũng là một vectơ chỉ phương của d. (Nói cách khác, một đường thẳng có vô số vectơ chỉ phương và chúng cùng phương nhau)

(2) Một đường thẳng hoàn toàn được xác định khi biết một điểm và một vectơ chỉ phương của nó.

(3) Nếu đường thẳng d vuông góc với giá 2 vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ thì $\vec{a} = [\vec{u}, \vec{v}]$ là vectơ chỉ phương của d.

2. Phương trình của đường thẳng

Đường thẳng d đi qua $M(x_o; y_o; z_o)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, có:

Phương trình tham số: $\boxed{\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}}$ (1)

Phương trình chính tắc: $\boxed{\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}, (a_1.a_2.a_3 \neq 0)}$ (2)

Chú ý

Phương trình các trục tọa độ: $Ox: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ $Oy: \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$ $Oz: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}$

Nhận xét

(1) Cho đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$. Với mỗi giá trị của tham số t duy nhất xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

(2) Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x - x_0}{a_1} = \dfrac{y - y_0}{a_2} = \dfrac{z - z_0}{a_3}, (a_1.a_2.a_3 \neq 0)$. Với mỗi giá trị duy nhất của các tỉ lệ thức ta xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

3. Vị trí tương đối giữa 2 đường thẳng

Cho hai đường thẳng $(d): \begin{cases} x = x_o + a_1 t \\ y = y_o + a_2 t \\ z = z_o + a_3 t \end{cases}$ đi qua điểm $M(x_0; y_0; z_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

và $(d'): \begin{cases} x = x'_o + a'_1.t' \\ y = y'_o + a'_2.t' \\ z = z'_o + a'_3.t' \end{cases}$ đi qua điểm $M'(x'_0; y'_0; z'_0)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a'} = (a'_1; a'_2; a'_3)$

Xét hệ phương trình tương giao giữa (d) và (d'): $(I): \begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1.t' & (1) \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2.t' & (2) \\ z_o + a_3 t = z'_o + a'_3.t' & (3) \end{cases}$.

Khi đó :

Vị trí tương đối	*Điều kiện*		
	Cách 1	*Cách 2*	*Cách 3*
d và *d'* song song	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ cùng phương **và** $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương với $\vec{a}$, $\vec{a'}$	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ cùng phương **và** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ cùng phương **và** $M\in d \Rightarrow M\notin d'$
d và *d'* trùng nhau	$\vec{a}$, $\vec{a'}$, $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương	Hệ phương trình (I) có vô số nghiệm	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ cùng phương **và** $M\in d \Leftrightarrow M\in d'$
d và *d'* cắt nhau	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ không cùng phương **và** $\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}=0$	Hệ phương trình (I) có đúng 1 nghiệm $(t;t')=(t_0;t'_0)$	
d và *d'* chéo nhau	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ không cùng phương **và** $\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\neq 0$	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ không cùng phương **và** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	

Chú ý: Cách giải Hệ phương trình (I), xem phần cách giải dạng toán "Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng"

4. Góc

Cho hai đường thẳng d, d' có lần lượt vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{a'}=(a'_1;a'_2;a'_3)$ và hai mặt phẳng (α), (α') có lần lượt vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(A;B;C)$, $\vec{n'}=(A';B';C')$. Khi đó:

$$\cos(d,d')=\frac{\left|\vec{a}.\vec{a'}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{a'}\right|}=\frac{\left|a_1a'_1+a_2a'_2+a_3a'_3\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{a'^2_1+a'^2_2+a'^2_3}}$$

$$\sin(d,(\alpha))=\frac{\left|\vec{a}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|a_1A+a_2B+a_3C\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

$$\cos((\alpha),(\alpha'))=\frac{\left|\vec{n}.\vec{n'}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{n'}\right|}=\frac{\left|A.A'+B.B'+C.C'\right|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}.\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}$$

🕮 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH VECTƠ CHỈ PHƯƠNG CỦA ĐƯỜNG THẲNG

(1) Nếu đường thẳng d có phương trình tham số $\begin{cases} x=x_o+a_1t \\ y=y_o+a_2t,(t\in\mathbb{R}) \\ z=z_o+a_3t\end{cases}$ thì d có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ (tọa độ vectơ chỉ phương là các hệ số của tham số t)

(2) Nếu đường thẳng d có phương trình chính tắc $\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}=\frac{z-z_0}{a_3}$, $(a_1.a_2.a_3\neq 0)$ thì d có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ (tọa độ vectơ chỉ phương là các số ở mẫu)

(3) Trục tọa độ Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{i}=(1;0;0)$.

Trục tọa độ Oy có vectơ chỉ phương là $\vec{j}=(0;1;0)$.

Trục tọa độ Oz có vectơ chỉ phương là .$\vec{k}=(0;0;1)$

Ví dụ 12: Trong không gian $Oxyz$, xác định một vectơ chỉ phương của đường thẳng dưới đây:

a) $d_1:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$, **b)** $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$, **c)** $d_3:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{2-z}{1}$

Lời giải

a) Đường thẳng d_1 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_1}=(-1;2;1)$.

b) Đường thẳng d_2 có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_2}=(2;1;2)$.

c) Phương trình đường thẳng d_3 chưa đúng cấu trúc nên ta viết lại

$$d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{2-z}{1}\Leftrightarrow d:\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}$$

Vậy đường thẳng d_3 có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{a_3}=(2;2;-1)$.

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ ĐIỂM THUỘC ĐƯỜNG THẲNG

(1) Cho đường thẳng d có phương trình tham số: $\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_o+a_3t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$. Với mỗi giá trị của tham số t duy nhất xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

(2) Cho đường thẳng d có phương trình chính tắc: $\dfrac{x-x_0}{a_1}=\dfrac{y-y_0}{a_2}=\dfrac{z-z_0}{a_3}$, $(a_1.a_2.a_3\neq 0)$. Với mỗi giá trị duy nhất của các tỉ lệ thức ta xác định được tọa độ một điểm thuộc đường thẳng và ngược lại.

Ví dụ 13: Trong không gian $Oxyz$, xác định tọa độ hai điểm thuộc mỗi đường thẳng dưới đây:

a) $d_1:\begin{cases}x=2-t\\y=1+2t\\z=3+t\end{cases}$, **b)** $d_2:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}$,

Lời giải

a) Cho $t=0$, ta tính được $x=2-0=2;\ y=1+2.0=1;\ z=3+0=3$.

Vậy $A(2;1;3)\in d_1$ (tọa độ điểm A là các hệ số tự do trong các phương trình)

Cho $t=1$, ta tính được $x=2-1=1;\ y=1+2.1=3;\ z=3+1=4$. Vậy $A(1;3;4)\in d_1$

b) Cho $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}=0$, ta tính được $x=1+2.0=1;\ y=2+1.0=2;\ z=-1+2.0=-1$.

Vậy $C(1;2;-1)\in d_2$ (tọa độ điểm C là số đối của các hệ số tự do ở các tử thức trong phương trình)

Cho $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z+1}{2}=1$, ta tính được $x=1+2.1=3;\ y=2+1.1=3;\ z=-1+2.1=1$.

Vậy $D(3;3;1)\in d_2$

Dạng toán ☞ LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Phương pháp: Xác định yếu tố: Điểm đi qua và vectơ chỉ phương (như bảng dưới đây)

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

Bước 2. Xác định tọa độ vectơ chỉ phương và tọa độ một điểm của đường thẳng

Bước 3. Thay vào phương trình tham số hay phưng trình chính tắc

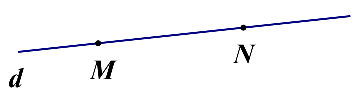
Dạng	*Điều kiện xác định đường thẳng d (giả thiết cho)*	*Đi qua điểm*	*Vectơ chỉ phương*
1	*Qua A, B*	A hay B	$\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{AB}$
2	*Qua A và song song đường thẳng Δ*	A	$\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{a_\Delta}$
3	*Qua A và vuông góc mặt phẳng* (α)	A	$\overrightarrow{a_d}=\overrightarrow{n_\alpha}$
4	*Qua A và vuông góc 2 đường thẳng* d_1, d_2	A	$\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{a_{d_1}},\overrightarrow{a_{d_2}}\right]$
5	*Qua A, song song* (α) *và* (β) *(hay song song mặt phẳng này và chứa trong mặt phẳng kia)*	A	$\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
6	*Là giao tuyến của* (α) *và* (β)	$I\in(\alpha)\cap(\beta)$	$\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_\beta}\right]$
7	*Qua A, vuông góc đường thẳng Δ và song song (hay chứa trong) mặt phẳng* (α)	A	$\overrightarrow{a_d}=\left[\overrightarrow{a_\Delta},\overrightarrow{n_\alpha}\right]$

Ví dụ 14: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình của đường thẳng d

a) Đi qua hai điểm $M(2;0;-1)$ và $N(2;-3;1)$

b) Đi qua điểm $A(2;-1;0)$ và vuông góc với mặt phẳng $(\alpha): 2x-z+5=0$

Lời giải

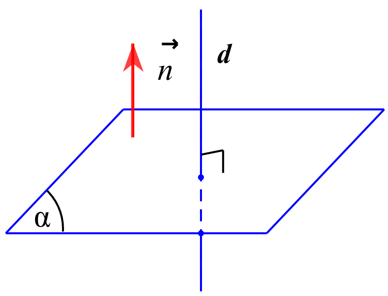


a) Do đường thẳng d đi qua M, N nên $\overrightarrow{MN}$ có giá là đường thẳng d, suy ra đường thẳng d nhận $\overrightarrow{MN}=(-1;3;2)$ làm vectơ chỉ phương.

Đường thẳng d qua M nên có phương trình tham số là $\begin{cases} x=2-t \\ y=3t \\ z=-1+2t \end{cases}$

Hay đường thẳng d qua N nên có phương trình chính tắc là $\dfrac{x}{-1}=\dfrac{y-1}{3}=\dfrac{z-3}{2}$

Nhận xét. Đường thẳng qua 2 điểm M, N nên có thể chọn điểm tọa độ điểm M hay N để thế vào phương trình.



b) Do đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) nên vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;0;-1)$ của mặt phẳng (α) có giá song song hoặc trùng với đường thẳng d, suy ra đường thẳng d nhận $\vec{n}$ làm vectơ chỉ phương.

Mà đường thẳng d đi qua điểm $A(2;-1;0)$

Vậy phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x=2+2t \\ y=-1 \\ z=-t \end{cases}$

Nhận xét. Do vectơ chỉ phương có thành phần tọa độ bằng 0 nên đường thẳng không viết được dạng phương trình chính tắc.

Dạng toán ☞ XÉT VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI CỦA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Cách 1

Cho hai đường thẳng (d) đi qua điểm M, có vectơ chỉ phương $\vec{a}$ và (d') đi qua điểm M', có vectơ chỉ phương $\vec{a'}$

Vị trí tương đối	***Điều kiện***
d và *d’* song song	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ cùng phương ***và*** $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương với $\vec{a}$, $\vec{a'}$
d và *d’* trùng nhau	$\vec{a}$, $\vec{a'}$, $\overrightarrow{MM'}$ cùng phương
d và *d’* cắt nhau	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ không cùng phương ***và*** $\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}=0$
d và *d’* chéo nhau	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ không cùng phương ***và*** $\left[\vec{a},\vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'}\neq 0$

Cách 2.

Trường hợp 1: Hai đường thẳng cho bởi phương trình tham số

Cho hai đường thẳng $(d):\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_o+a_3t\end{cases}$ đi qua điểm $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a}=\left(a_1;a_2;a_3\right)$

và $(d'):\begin{cases}x=x'_o+a'_1.t'\\y=y'_o+a'_2.t'\\z=z'_o+a'_3.t'\end{cases}$ đi qua điểm $M'\left(x'_0;y'_0;z'_0\right)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a'}=\left(a'_1;a'_2;a'_3\right)$

Phương pháp

Bước 1. Lập Hệ phương trình tương giao giữa (*d*) và (*d’*): $(I):\begin{cases}x_o+a_1t=x'_o+a'_1.t' & (1)\\y_o+a_2t=y'_o+a'_2.t' & (2)\\z_o+a_3t=z'_o+a'_3.t' & (3)\end{cases}$.

Bước 2. Dựa vào nghiệm Hệ phương trình (I), ta kết luận vị trí tương đối:

Vị trí tương đối	***Điều kiện***	
d và *d’* song song	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ cùng phương ***và*** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ cùng phương ***và*** $M\in d\Rightarrow M\notin d'$
d và *d’* trùng nhau	Hệ phương trình (I) có vô số nghiệm	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ cùng phương ***và*** $M\in d\Leftrightarrow M\in d'$
d và *d’* cắt nhau	Hệ phương trình (I) có đúng 1 nghiệm $(t;t')=(t_0;t'_0)$	
d và *d’* chéo nhau	$\vec{a}$, $\vec{a'}$ không cùng phương ***và*** Hệ phương trình (I) vô nghiệm	

Trường hợp 2: Một phương trình tham số và một phương trình chính tắc.

Trường hợp 3: Hai phương trình chính tắc.

Phương pháp: Hai trường hợp này giải phức tạp nên đưa về trường hợp 1 để giải

Cách giải Hệ bậc nhất 2 ẩn gồm 3 phương trình

$$\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1 .t' & (1) \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2 .t' & (2) \\ z_o + a_3 t = z'_o + a'_3 .t' & (3) \end{cases} \quad (I) \text{ (ẩn } t,\, t'\text{)}$$

Giải Hệ phương trình gồm 2 phương trình (thường chọn (1) và (2)) $\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1 .t' & (1) \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2 .t' & (2) \end{cases} \quad (II)$

① Nếu Hệ phương trình (II) vô nghiệm thì Hệ (*I*) vô nghiệm;

② Nếu Hệ phương trình (II) có 1 nghiệm $(t;t') = (t_0;t'_0)$ thì thế nghiệm này vào phương trình (3):

Nếu thỏa phương trình (3) thì Hệ phương trình (*I*) có 1 nghiệm $(t;t') = (t_0;t'_0)$;

Nếu không thỏa phương trình (3) thì Hệ phương trình (*I*) vô nghiệm;

③ Nếu Hệ phương trình (II) vô số nghiệm thì Giải Hệ gồm phương trình (2) và (3) (hay gồm phương trình (1) và (3)): Khi đó, nghiệm của Hệ phương trình này cũng là nghiệm của Hệ phương trình (*I*)

Ví dụ 15: Trong không gian $Oxyz$, xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:

a) $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \ (t \in \mathbb{R})$ và $d': \begin{cases} x = 2 + 2t' \\ y = 3 + 4t' \\ z = 5 - 2t' \end{cases} (t' \in \mathbb{R})$

b) $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ và $d': \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{2}$

c) $d: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ và $d': \dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+2}{-2}$

Lời giải

a) ***Dùng cách 1***

Đường thẳng d đi qua điểm $M(1;0;3)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a} = (1;2;-1)$

Đường thẳng d' đi qua điểm $M'(2;3;5)$, có vectơ chỉ phương $\vec{a'} = (2;4;-2)$

$\overrightarrow{MM'} = (1;3;2)$

Ta có: $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\vec{a'}$ suy ra $\vec{a}, \vec{a'}$ cùng phương

và $\overrightarrow{MM'} \neq k.\vec{a}, \forall k$ suy ra $\overrightarrow{MM'}$ không cùng phương với $\vec{a}, \vec{a'}$

Vậy hai đường thẳng *d* và *d’* song song

b) ***Cách 1***

Ta có: d qua $M(1;-1;5)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (2;3;1)$

d' qua $M'(1;-2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}' = (3;2;2)$

$\overrightarrow{MM'} = (0;-1;-6)$

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

Và tính được $\left[\vec{a}, \vec{a'}\right].\overrightarrow{MM'} \neq 0$

Nên hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Cách 2

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

Do d' qua $M'(1;-2;-1)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(3;2;2)$ nên $d':\begin{cases}x=1+3t'\\y=-2+2t'\ (t'\in\mathbb{R})\\z=-1+2t'\end{cases}$

Xét hệ phương trình tương giao: $\begin{cases}1+2t=1+3t' & (1)\\-1+3t=-2+2t' & (2)\\5+t=-1+2t' & (3)\end{cases}$

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases}2t-3t'=0\\3t-2t'=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{3}{5}\\t'=-\dfrac{2}{5}\end{cases}$

Thay $t=-\dfrac{3}{5}$, $t'=-\dfrac{2}{5}$ vào phương trình (3), ta được: $5+\left(-\dfrac{3}{5}\right)=-1+2\left(-\dfrac{2}{5}\right)$ (Sai)

Suy ra hệ phương trình vô nghiệm

Vậy hai đường thẳng d và d' chéo nhau.

Nhận xét. Chỉ nên dùng cách 1, nếu 2 đường thẳng cắt nhau và có yêu cầu tìm tọa độ giao điểm thì mới giải hệ phương trình tương giao.

c) ***Cách 1***

Ta có: d đi qua $M(0;1;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}=(1;-1;2)$;

d' đi qua $M'(1;2;-2)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{a}'=(5;1;-2)$.

$\overrightarrow{MM'}=(1;1;-2)$

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương (tọa độ 2 vectơ không tỉ lệ) nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau

Và tính được $\left[\vec{a},\vec{a}'\right].\overrightarrow{MM'}=0$

Nên hai đường thẳng d và d' cắt nhau.

Chú ý. Cách này không tính được tọa độ giao điểm của hai đường thẳng nên những bài toán có yêu cầu tính tọa độ giao điểm thì ta phải dùng cách 2.

Cách 2

Vì $\vec{a}$ và $\vec{a}'$ không cùng phương nên d và d' cắt nhau hoặc chéo nhau.

Phương trình tham số của d và d' lần lượt là $d:\begin{cases}x=t\\y=1-t\\z=2t\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1+5t'\\y=2+t'\\z=-2-2t'\end{cases}$

Xét hệ phương trình tương giao: $\begin{cases}t=1+5t' & (1)\\1-t=2+t' & (2)\\2t=-2-2t' & (3)\end{cases}$

Từ (1) và (2), ta có: $\begin{cases}t-5t'=1\\-t-t'=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=-\dfrac{2}{3}\\t'=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$

Thay $t=-\frac{2}{3}, t'=-\frac{1}{3}$ vào phương trình (3), ta được: $2\left(-\frac{2}{3}\right)=-2-2\left(-\frac{1}{3}\right)$ (Đúng)

Suy ra hệ phương trình có một nghiệm $t=-\frac{2}{3}, t'=-\frac{1}{3}$

Thay $t=-\frac{2}{3}$ vào phương trình đường thẳng d (hay thay $t'=-\frac{1}{3}$ vào phương trình đường thẳng d'), ta tính được $x=-\frac{2}{3}; y=\frac{5}{3}; z=-\frac{4}{3}$

Vậy hai đường thẳng d và d' cắt nhau tại điểm $I\left(-\frac{2}{3};\frac{5}{3};-\frac{4}{3}\right)$

Dạng toán ☞ *TÍNH GÓC*

Phương pháp: Dùng công thức ở mục 4.

Hay có thể Tính góc bằng máy tính cầm tay (MTCT).

Vào môi trường vector trên MTCT, tính góc giữa các cặp vectơ pháp tuyến của mặt phẳng hay vectơ chỉ phương của đường thẳng.

(1)Góc giữa hai đường thẳng d, d'

Nếu $0°\le(\vec{a},\vec{a}')\le 90°$ thì $(d,d')=(\vec{a},\vec{a}')$;

Nếu $90°<(\vec{a},\vec{a}')\le 180°$ thì $(d,d')=180°-(\vec{a},\vec{a}')$;

(2) Góc giữa hai mặt phẳng $((\alpha),(\alpha'))$

Nếu $0°\le(\vec{n},\vec{n}')\le 90°$ thì $((\alpha),(\alpha'))=(\vec{n},\vec{n}')$;

Nếu $90°<(\vec{n},\vec{n}')\le 180°$ thì $((\alpha),(\alpha'))=180°-(\vec{n},\vec{n}')$;

(3) Góc giữa đường thẳng d ***và mặt phẳng*** (α)

Nếu $0°\le(\vec{a},\vec{n})\le 90°$ thì $(d,(\alpha))=90°-(\vec{a},\vec{n})$;

Nếu $90°<(\vec{a},\vec{n})\le 180°$ thì $(d,(\alpha))=90°-\left(180°-(\vec{a},\vec{n})\right)=(\vec{a},\vec{n})-90°$

Ví dụ 16: Trong không gian $Oxyz$, tính các góc:

a) Giữa hai đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=t\\y=5-2t\\z=14-3t\end{cases}$ và $d_2:\begin{cases}x=1-4t'\\y=2+t'\\z=-1+5t'\end{cases}$.

b) Giữa đường thẳng $\Delta:\frac{x-3}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+3}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x+y+z-1=0$.

c) Giữa hai mặt phẳng $(P):x+2y+z+10=0$ và $(Q):-x+y+2z+13=0$.

Lời giải

a) Đường thẳng d_1 có một VTCP $\vec{u}_1=(1;-2;-3)$.

Đường thẳng d_2 có một VTCP $\vec{u}_2=(-4;1;5)$.

Ta có: $\cos(d_1,d_2)=\frac{|\vec{u}_1.\vec{u}_2|}{|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|}=\frac{|1.(-4)+(-2).1+(-3).5|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-3)^2}.\sqrt{(-4)^2+1^2+5^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $(d_1,d_2)=30^\circ$

Dùng Máy tính cầm tay (MTCT)

Tính góc giữa 2 vectơ chỉ phương, ta được: $\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)=150^\circ$

Vậy $(d_1,d_2)=180^\circ-\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right)=180^\circ-150^\circ=30^\circ$

b) Đường thẳng Δ có một VTCP $\vec{u}=(1;2;-1)$.

Mặt phẳng (P) có một VTPT $\vec{n}=(2;1;1)$.

Ta có: $\sin(\Delta,(P))=\dfrac{|\vec{u}.\vec{n}|}{|\vec{u}|.|\vec{n}|}=\dfrac{|1.2+2.1+(-1).1|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}.\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $(\Delta,(P))=30^\circ$

Dùng MTCT

Tính góc giữa 2 vectơ chỉ phương của đường thẳng và vectơ pháp tuyến của mặt phẳng, ta được: $(\vec{u},\vec{n})=60^\circ$

Vậy $(\Delta,(P))=90^\circ-(\vec{u},\vec{n})=90^\circ-60^\circ=30^\circ$

c) Mặt phẳng (P) có một VTPT là $\vec{n}_1=(1;2;1)$.

Mặt phẳng (Q) có một VTPT là $\vec{n}_2=(-1;1;2)$.

Ta có: $\cos((P),(Q))=\dfrac{|\vec{n}_1.\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|.|\vec{n}_2|}=\dfrac{|1.(-1)+2.1+1.2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}.\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}=\dfrac{1}{2}$

Vậy $((P),(Q))=60^\circ$

BÀI 3. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

1. Khái niệm mặt cầu

Định nghĩa

Tập hợp các điểm trong không gian cách đều điểm I cố định một khoảng không đổi R gọi là mặt cầu tâm I, bán kính R. Kí hiệu là $S(I,R)$.

Đoạn thẳng nối hai điểm trên mặt cầu và đi qua tâm gọi là đường kính của mặt cầu.

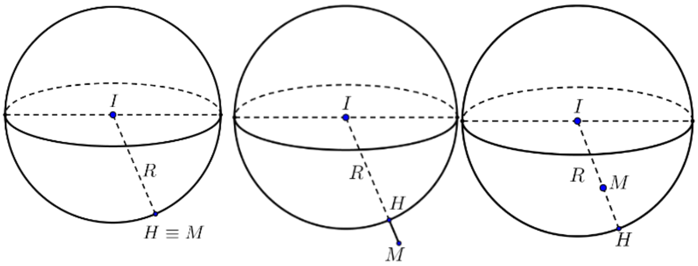
Chú ý

Cho mặt cầu $S(I,R)$

(1) Nếu $IM = R$ thì điểm M nằm trên mặt cầu

(2) Nếu $IM > R$ thì điểm M nằm ngoài mặt cầu

(3) Nếu $IM < R$ thì điểm M nằm trong mặt cầu



2. Phương trình mặt cầu

(1) Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$, bán kính R có phương trình là $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ***(1)***

(2) Phương trình dạng $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ ***(2)*** với $a^2+b^2+c^2-d>0$ là phương trình mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$

🕮 CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN

Dạng toán ☞ XÁC ĐỊNH TỌA ĐỘ TÂM VÀ BÁN KÍNH CỦA MẶT CẦU CHO BỞI PHƯƠNG TRÌNH

Ví dụ 17: Trong không gian $Oxyz$, trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình của mặt cầu và xác định tọa độ tâm, bán kính.

a) $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ **b)** $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0.$

c) $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$ **d)** $x^2+y^2+z^2+2x-2y+5=0$

Lời giải

a) Phương trình $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=9$ đúng dạng (1) và có $a=1,\ b=-2,\ c=0,\ R^2=9$

Vậy phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;-2;0)$ và bán kính $R=3$.

b) Phương trình $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z-2=0.$ đúng dạng (2) và có $a=1,\ b=-2,\ c=3,\ d=-2$ *(lấy hệ số của $x,\ y,\ z$ lần lượt chia cho -2 ta được $a,\ b,\ c$ và d là hệ số tự do)*

Kiểm tra điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d=1^2+(-2)^2+3^2-(-2)=16>0$ (thỏa điều kiện)

Vậy phương trình đã cho là phương trình của mặt cầu có tâm $I(1;-2;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2-(-2)}=4$.

c) Phương trình $x^2+y^2-z^2+2x-y+1=0$ không đúng dạng (1) và (2).

Vậy phương trình đã cho không phải là phương trình mặt cầu.

d) Phương trình $x^2+y^2+z^2+2x-2y+5=0$ đúng dạng (2) và có $a=-1,\ b=1,\ c=0,\ d=5$

Kiểm tra điều kiện: $a^2+b^2+c^2-d=(-1)^2+1^2+0^2-5=-3<0$ (không thỏa điều kiện)

Vậy phương trình đã cho là không phải phương trình của mặt cầu.

Dạng toán ☞ LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Cách 1: Xác định yếu tố: Tâm và bán kính, (như bảng dưới đây)

Bước 1. Từ giả thiết, xác định các vectơ và các yếu tố khác liên quan (nếu cần)

Bước 2. Xác định tọa độ tâm và bán kính của mặt cầu

Bước 3. Thay vào PT (1).

Xác định tâm và bán kính của các mặt cầu thường gặp

Dạng	Điều kiện xác định mặt cầu *(giả thiết cho)*	Tâm	Bán kính
Dạng 1	*Mặt cầu (S) tâm I đi qua A*	I	$R = IA$
Dạng 2	*Mặt cầu (S) đường kính AB*	*I là trung điểm AB*	$R = \frac{AB}{2}$
Dạng 3	*Mặt cầu (S) tâm I tiếp xúc mặt phẳng(α)*	I	$R = \mathrm{d}(I,(\alpha))$
Dạng 4	*Mặt cầu (S) tâm I và tiếp xúc đường thẳng Δ*	I	$R = \mathrm{d}(I,\Delta)$
Dạng 5	*Mặt cầu (S) tâm I và cắt mp* (α) *theo đường tròn có bán kính* r	I	$R = \sqrt{r^2 + d^2}$ *với* $d = \mathrm{d}(I,(\alpha))$

Cách 2: Xác định hệ số (Áp dụng cho trường hợp xác định tâm và bán kính gặp khó khăn)

Bước 1. Gọi mặt cầu đã cho có PT dạng $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, (2)

Bước 2. Từ giả thiết lập hệ 4 PT ẩn *a, b, c, d* → Giải tìm a,b,c,d

Bước 3. Thay vào PT (2)

Dạng 6: Mặt cầu (S) ngoại tiếp tứ diện ABCD (hay đi qua 4 điểm A, B, C, D)

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2)

$\Leftrightarrow 2ax + 2by + 2cz - d = x^2 + y^2 + z^2$ (2')

+ $A,\ B,\ C,\ D \in (S)$ $\Rightarrow$ Tọa độ 3 điểm *A, B, C, D* thỏa mãn PT(2) → Thay tọa độ *A, B, C, D* vào PT(2), Ta được hệ 4 phương trình 4 ẩn a,b,c,d

+ Giải hệ tìm a,b,c,d

Dạng 7: Mặt cầu (S) đi qua 3 điểm A, B, C và tâm I ∈ (α)

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a;b;c)$

+ A, *B, C* ∈ *(S)* ⇒ Tọa độ 3 điểm *A, B, C* thỏa mãn PT(2) → Thay tọa độ 3 điểm *A, B, C* vào PT(2), Ta được 3 phương trình 4 ẩn a,b,c,d

+ Tâm $I(a;b;c) \in$ (α)⇒ *a, b, c* thỏa mãn phương trình mặt phẳng(α) → Thay *a, b, c* vào phương trình mặt phẳng(α), ta được thêm 1 PT 4 ẩn a,b,c,d

+ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a,b,c,d

Dạng 8: Mặt cầu (S) đi qua 2 điểm A, B và tâm I ∈ (d)

***Cách 1**: Đường thẳng (d) cho bởi phương trình tham số*

+ $I \in (d) \Rightarrow I(x_0 + a_1t; y_0 + a_2t; z_0 + a_3t)$

+ $A,\ B \in (S) \Rightarrow AI^2 = BI^2$ → Ta được phương trình ẩn t → Giải tìm t → Thay t, tìm tọa độ điểm I

***Cách 2**: Đường thẳng (d) cho bởi phương trình chính tắc:*

+ Gọi phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ (2) $\Rightarrow$ tâm $I(a;b;c)$

+ $A,\ B \in (S) \Rightarrow$ tọa độ điểm *A, B* thỏa mãn PT(2) → Thay tọa độ *A, B* vào PT(2), Ta được 2 phương trình 4 ẩn a,b,c,d

+ Tâm $I(a,b,c)\in(d)\Rightarrow a,\ b,\ c$ thỏa mãn phương trình đường thẳng (*d*) → Thay *a, b, c* vào phương trình đường thẳng (*d*), ta được thêm 2 PT 3 ẩn *a, b, c*

+ Giải hệ 4 phương trình trên tìm a,b,c,d

Ví dụ 18: Trong không gian $Oxyz$, viết phương trình các mặt cầu (S) trong các trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$.

b) Có đường kính AB với $A(1;0;-3)$ và $B(3;2;1)$.

c) Có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc với mặt phẳng (Oxy).

d) Đi qua bốn điểm $M(2;2;2),N(4;0;2),P(4;2;0)$ và $Q(4;2;2)$

Lời giải

a) Do mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ đi qua điểm $A(1;1;2)$ nên có bán kính là $R=IA=\sqrt{0^2+1^2+1^2}=\sqrt{2}$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=2$.

b) Do mặt cầu (S) có đường kính AB nên có tâm $I(2;1;-1)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB và bán kính là $R=\dfrac{AB}{2}=\sqrt{6}$

Vậy phương trình của mặt cầu (S) là $(x-2)^2+(y-1)^2+(z+1)^2=6$.

c) Do mặt cầu (S) có tâm $I(1;-2;1)$ và tiếp xúc (Oxy) nên có bán kính $R=d\big(I;(Oxy)\big)=\sqrt{z_I^2}=\sqrt{(1)^2}=1$

Vậy phương trình mặt cầu (S) là $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-1)^2=1$.

d) Gọi phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0\ \left(a^2+b^2+c^2-d>0\right)$

$$\Leftrightarrow 2ax+2by+2cz-d=x^2+y^2+z^2\ (*)$$

Vì $M,N,P,Q\in(S)$ nên tọa độ 4 điểm thỏa mãn phương trình (*) (thay tọa độ 4 điểm vào (*))

Do đó ta có hệ phương trình: $\begin{cases}4a+4b+4c-d=2^2+2^2+2^2\\8a+0b+4c-d=4^2+0^2+2^2\\8a+4b+0c-d=4^2+2^2+0^2\\8a+4b+4c-d=4^2+2^2+2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=1\\c=1\\d=8\end{cases}$

Vậy phương trình mặt cầu $(S): x^2+y^2+z^2-6x-2y-2z+8=0$

Chú ý

Với dạng toán lập phương trình mặt cầu qua 4 điểm thì ta có thể giải trực tiếp bằng "Máy tính cầm tay":
Giải Hệ phương trình bậc nhất 4 ẩn với "5 hệ số" ở mỗi phương trình, theo quy tắc như sau:

- 3 hệ số đầu, lần lượt là các thành phần tọa độ của các điểm ***nhân 2***
- Hệ số thứ tư, luôn bằng -1
- Hệ số thứ năm (hệ số tự do ở vế phải), là ***tổng bình phương*** của các thành phần tọa độ của các điểm.

✓ BỔ SUNG MỘT SỐ KIẾN THỨC CẦN THIẾT

🕮 TÌM GIAO ĐIỂM

➢ *Giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng*

→ Lập phương trình tương giao (Lấy phương trình tham số của đường thẳng thế vào phương trình tổng quát của mặt phẳng)

→ Giải tìm được $t = t_0$

→ Thế $t = t_0$ vào phương trình tham số của đường thẳng

→ Tính được $x,\ y,\ z$ là tọa độ giao điểm.

➢ *Giao điểm của hai đường thẳng*

→ Lập Hệ phương trình tương giao giữa 2 đường thẳng $(I):\begin{cases} x_o + a_1 t = x'_o + a'_1.t' & (1) \\ y_o + a_2 t = y'_o + a'_2.t' & (2) \\ z_o + a_3 t = z'_o + a'_3.t' & (3) \end{cases}$

→ Giải như trên (Xem cách giải ở mục ***4.***): Nếu Hệ có 1 nghiệm $(t_0; t'_0)$ thì thế $t = t_0$ vào phương trình đường thẳng có tham số *t* hay thế $t' = t'_0$ vào phương trình đường thẳng có tham số t'

→ Tính được $x,\ y,\ z$ là tọa độ giao điểm.

➢ *Giao điểm của hai mặt phẳng*

→ Lập Hệ phương trình tương giao (gồm 2 phương trình của 2 mặt phẳng và có 3 ẩn $x,\ y,\ z$)

→ Cho 1 số tùy ý vào một ẩn nào đó (Thường cho $z = 0$)

→ Ta được Hệ phương trình bậc nhất 2 ẩn $x,\ y$

→ Giải tìm được nghiệm $(x_0; y_0)$

→ Tọa độ giao điểm là $(x_0; y_0; 0)$

➢ *Giao điểm của đường thẳng và mặt cầu*

→ Lập phương trình tương giao (Thế phương trình tham số của đường thẳng vào phương trình mặt cầu)

→ Giải phương trình, tìm được nghiệm $t = t_0$

→ Thế $t = t_0$ vào phương trình tham số của đường thẳng

→ Tính được $x,\ y,\ z$ là tọa độ giao điểm.

Ví dụ 19: Trong không gian $Oxyz$, tìm toa độ giao điểm của đường thẳng $d:\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = 3 + 3t \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - z + 2 = 0$

Lời giải

Thay phương trình tham số của đường thẳng d vào phương trình mặt phẳng (α), ta được:

$$2(1+t) + (2-2t) - (3+3t) + 2 = 0 \Rightarrow -3t + 3 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Thay $t = 1$ ngược lại vào phương trình đường thẳng d, ta được:

$$x = 1 + 1 = 2;\ y = 2 - 2(1) = 0;\ z = 3 + 3(1) = 6$$

Kết quả: Giao điểm là $M(2;0;6)$.

Ví dụ 20: Trong không gian $Oxyz$, tìm tọa độ giao điểm cảu mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=56$ và đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=-2t\\z=3t\end{cases}$

Lời giải

Thay phương trình tham số của đường thẳng d vào phương trình mặt cầu (S), ta được:

$(t-1)^2+(-2t+2)^2+(3t-3)^2=56$, khai triển thu gọn, ta được:

$t^2-2t-3=0$, giải phương trình ta được 2 nghiệm: $t=-1;\ t=3$

Thay t vào phương trình đường thẳng d, ta được:

Với $t=-1$: $x=-1;\ y=2;\ z=-3\Rightarrow M_1(-1;2;-3)$

Với $t=3$: $x=3;\ y=-6;\ z=9\Rightarrow M_2(3;-6;9)$

Vậy giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S) là $M_1(-1;2;-3)$ và $M_2(3;-6;9)$

TÌM HÌNH CHIẾU

Tìm hình chiếu của điểm lên mặt phẳng

Tìm tọa độ hình chiếu H của điểm M lên $mp(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$

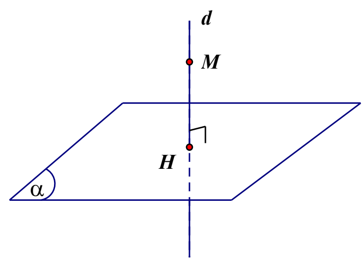
Cách 1.

→ H là hình chiếu của M lên (α) $\Leftrightarrow\begin{cases}H\in(\alpha)\\\overrightarrow{MH}=k.\overrightarrow{n_\alpha}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}Ax_H+By_H+Cz_H+D=0\\x_H-x_M=A.k\\y_H-y_M=B.k\\z_H-z_M=C.k\end{cases}$

→ Giải hệ phương trình, tìm được tọa độ điểm H

Cách 2.

→ Lập phương trình (tham số) đường thẳng (d) qua M và vuông góc mp(α): $\begin{cases}x=x_M+At\\y=y_M+Bt\\z=z_M+Ct\end{cases},(t\in\mathbb{R})$



→ Lập phương trình tương giao giữa (d) và (α):

$$A(x_M+At)+B(y_M+Bt)+C(z_M+Ct)+D=0$$

→ Giải phương trình, tìm được nghiệm $t=t_0$

→ Thế $t=t_0$ vào phương trình tham số của đường thẳng (d)

→ Tính được $x,\ y,\ z$ là tọa độ của điểm H

Tìm hình chiếu của điểm lên đường thẳng

Tìm tọa độ H là hình chiếu của M lên đường thẳng $(d):\begin{cases}x=x_o+a_1t\\y=y_o+a_2t\\z=z_o+a_3t\end{cases}$

Cách 1.

→ H là hình chiếu của M lên $(d) \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{u_d} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} H \in (d) \\ \overrightarrow{MH}.\overrightarrow{a_d} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_H = x_o + a_1 t \\ y_H = y_o + a_2 t \\ z_H = z_o + a_3 t \\ (x_H - x_M).a_1 + (y_H - y_M).a_2 + (z_H - z_M).a_3 = 0 \end{cases}$$

→ Giải hệ phương trình, tìm tọa độ điểm H.

Cách 2.

→ Lập phương trình mp(α) qua M và vuông góc đương thẳng (d):

$(x - x_M).a_1 + (y - y_M).a_2 + (z - z_M).a_3 = 0$

→Đưa về dạng: $a_1x + a_2y + a_3z + n = 0$

→ Lập phương trình tương giao giữa (d) và (α): $a_1(x_0 + a_1t) + a_2(y_0 + a_2t) + a_3(z_0 + a_3t) + n = 0$

→Giải phương trình, tìm t

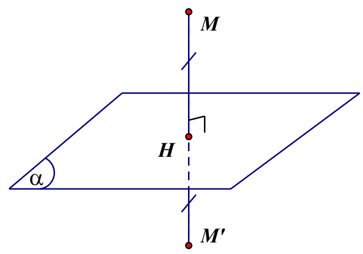
→ Thay t vào phương trình (d), Ta được tọa độ điểm H

TÌM ĐIỂM ĐỐI XỨNG

➢ Tìm điểm M' đối xứng với M qua mặt phẳng (α)

→ Tìm hình chiếu H của M lên mặt phẳng(α). Khi đó, H là trung điểm của MM'

→ Tọa độ M' là $\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$



➢ Tìm Điểm M' đối xứng với M qua đường thẳng (d)

→ Tìm hình chiếu H của M lên đường thẳng (d). Khi đó, H là trung điểm của MM'

→ Tọa độ M': $\begin{cases} x_{M'} = 2x_H - x_M \\ y_{M'} = 2y_H - y_M \\ z_{M'} = 2z_H - z_M \end{cases}$

TÍNH KHOẢNG CÁCH

➢ Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng

Khoảng cách từ điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ đến mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$ là

$$\boxed{\mathrm{d}(M, (\alpha)) = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

➢ Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cách 1.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ ***là khoảng cách từ điểm M đến hình chiếu H của M lên đường thẳng*** Δ **.**

→ Tìm điểm H là hình chiếu của M lên đường tthẳng Δ.

→ Khi đó: $\mathrm{d}(M; \Delta) = MH$

Cách 2.

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ được tính bởi công thức

$\boxed{\mathrm{d}(M,\Delta)=\dfrac{\left|\overrightarrow{M_0M}\wedge\overrightarrow{a_\Delta}\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\right|}}$, với $M_0\in\Delta$ và $\overrightarrow{a_\Delta}$ là vectơ chỉ phương của Δ

➤ *Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song*

Khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): A'x+B'y+C'z+D'=0$, với $(A';B';C')=k(A;B;C)$

Cách 1. Bằng khoảng cách từ một điểm thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

→ Lấy $M(x_0;y_0;z_0)\in(\beta)$.

→ Khi đó: $\boxed{\mathrm{d}((\alpha),(\beta))=\mathrm{d}(M;(\alpha))=\dfrac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

Cách 2.

→ Đồng nhất hệ số của phương trình 2 mặt phẳng: Biến đổi 2 phương trình của 2 mặt phẳng sao cho các hệ số của x,y,z tương ứng bằng nhau. Chẳng hạn $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ và $(\beta): Ax+By+Cz+D_0=0$

→ Khi đó: $\boxed{d((\alpha);(\beta))=\dfrac{|D-D_0|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

➤ *Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song*

Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$ song song với nhau ***bằng khoảng cách từ một điểm thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (α).***

→ Lấy $M(x_0;y_0;z_0)\in\Delta$.

→ Khi đó: $\boxed{\mathrm{d}(\Delta;(\alpha))=\mathrm{d}(M;(\alpha))=\dfrac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

➤ *Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*

Cách 1.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau ***là khoảng cách giữa đường thẳng d với mặt phẳng (α) song song chứa đường thẳng d'.***

→ Lập phương trình mặt phẳng (α) chứa Δ' và song song với Δ.

→ Lấy $M(x_0;y_0;z_0)\in\Delta$.

→ Khi đó: $\boxed{\mathrm{d}(\Delta;\Delta')=\mathrm{d}(\Delta;(\alpha))=\mathrm{d}(M;(\alpha))=\dfrac{|Ax_o+By_o+Cz_o+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}}$

Cách 2.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng Δ và Δ' chéo nhau được tính bởi công thức:

$\boxed{\mathrm{d}(\Delta,\Delta')=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{a_\Delta}\wedge\overrightarrow{a_{\Delta'}}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{a_\Delta}\wedge\overrightarrow{a_{\Delta'}}\right|}}$, với $A\in d, B\in\Delta$ và $\overrightarrow{a_\Delta}$, $\overrightarrow{a_{\Delta'}}$ là vectơ chỉ phương của Δ, Δ'

🕮 TÍNH GÓC

Xem mục 4 và Dạng toán tính góc ở Bài 3 "Phương trình Đường thẳng"

CỰC TRỊ HÌNH HỌC

Dạng 1: Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$ sao cho khoảng cách từ điểm M đến một điểm cố định A nhỏ nhất.

Khi đó, M là hình chiếu của A lên mặt phẳng (α) (Cách tìm hình chiếu xem mục phía trên)

Dạng 2: Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ điểm M đến một điểm cố định A nhỏ nhất.

Khi đó, M là hình chiếu của A lên đường thẳng Δ (Cách tìm hình chiếu xem mục phía trên)

Dạng 3: Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$ sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất.

TH1: Nếu *A, B* khác phía so với $mp(\alpha)$ thì $M = AB \cap (\alpha)$

TH2: Nếu *A, B* cùng phía so với $mp(\alpha)$ thì $M = AB' \cap (\alpha)$, với *B'* là điểm đối xúng của *B* lên $mp(\alpha)$

hay $M = A'B \cap (\alpha)$, với *A'* là điểm đối xứng của *A* lên $mp(\alpha)$

Chú ý: Vị trí tương đối của 2 điểm với mặt phẳng:

Cho hai điểm $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax+By+Cz+D=0$. Khi đó:

☝ *M* và *N* nằm cùng phía đối với $mp(\alpha) \Leftrightarrow (Ax_M+By_M+Cz_M+D)(Ax_N+By_N+Cz_N+D)>0$

✌ *M* và *N* nằm khác phía đối với $mp(\alpha) \Leftrightarrow (Ax_M+By_M+Cz_M+D)(Ax_N+By_N+Cz_N+D)<0$

Dạng 4: Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$(hay đường thẳng Δ) sao cho $k.MA^2+h.MB^2$ hay $\left|k.\overrightarrow{MA}+h.\overrightarrow{MB}\right|$ nhỏ nhất.

→ Tìm tọa độ điểm I thỏa $k.\overrightarrow{IA}+h.\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

→ M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α) (hay đường thẳng Δ)

Mở rộng:

Tìm tọa độ điểm M thuộc $mp(\alpha)$ (hay đường thẳng Δ) ***sao cho*** $k_1.MA_1^{\ 2}+k_2.MA_2^{\ 2}+...+k_n.MA_n^{\ 2}$ ***hay*** $\left|k_1.\overrightarrow{MA_1}+k_2.\overrightarrow{MA_2}+...+k_n.\overrightarrow{MA_n}\right|$ ***nhỏ nhất.***

→ Tìm tọa độ điểm I thỏa $k_1.\overrightarrow{IA_1}+k_2.\overrightarrow{IA_2}+...+k_n.\overrightarrow{IA_n}=\vec{0}$

→ Khi đó, điểm M là hình chiếu của điểm I lên mặt phẳng (α) (hay lên đường thẳng Δ)

Dạng 5: Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến một điểm cố định A nhỏ nhất (lớn nhất).

→ Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua tâm I và điểm A

→ Tìm giao điểm của (d) và (S) là M_1, M_2

→ Tính AM_1, AM_2. So sánh và kết luận.

Dạng 6: Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ điểm M đến mặt phẳng (α) nhỏ nhất (lớn nhất).

→ Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua tâm I của mặ cầu (S) và vuông góc $mp(\alpha)$

→ Tìm giao điểm của (d) và (S) là M_1, M_2

→ Tính khoảng cách từ M_1, M_2 đến mặt phẳng (α). So sánh và kết luận.

✓ BÀI TOÁN THỰC TẾ

🕮 QUY TẮC GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ VỀ MẶT PHẲNG, ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT CẦU

✅ Bước 1: Đọc hiểu và phân tích đề bài

□Xác định rõ ***đại lượng*** cần tìm (Ví dụ: Tọa độ, khoảng cách, góc, diện tích, thể tích,...).

□Xác định rõ các ***đối tượng*** cần thiết lập (Ví dụ: Điểm, mặt phẳng, đường thẳng, mặt cầu,…).

□Xác định rõ các ***quan hệ hay vị trí tương đối*** giữa các đối tượng (Ví dụ: Song song, vuông góc, cắt, chứa, trùng,...).

□Xác định ***điều kiện ban đầu***.

✅ Bước 2: Xây dựng mô hình toán học

① Thiết lập hệ trục tọa độ Oxyz phù hợp

Đây là bước quan trọng nhất. Một lựa chọn gốc tọa độ thông minh sẽ giúp các phương trình trở nên đơn giản.

- ***Chọn gốc O:*** Thường là các góc tường, chân cột, hoặc tâm của một vật thể có tính đối xứng.
- ***Chọn các trục Ox, Oy, Oz:*** Ưu tiên các cạnh vuông góc với nhau có sẵn trong thực tế (ví dụ: mép tường, cạnh bàn, phương thẳng đứng).
- ***Đơn vị:*** Thống nhất đơn vị đo (mét, centimet,...) cho tất cả các dữ kiện.

Mẹo nhỏ khi làm bài:

- Mặt đất/Sàn nhà: Luôn ưu tiên chọn là mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z=0$.
- Vật đứng yên: Coi là một Điểm.
- Vật có kích thước đáng kể (như quả bóng): Coi là Mặt cầu.
- Tia sáng/Dây căng: Coi là Đường thẳng.

② Tọa độ hóa các dữ kiện thực tế

Chuyển các vị trí, kích thước thực tế thành điểm và vectơ:

- ***Điểm:*** Vị trí một bóng đèn, một cái đinh, hoặc tâm của một quả cầu.
- ***Vectơ chỉ phương/pháp tuyến:*** Hướng của một tia sáng (đường thẳng), mặt nước biển (mặt phẳng), hoặc hướng của một cột trụ.

③ Thiết lập các phương trình toán học

Dựa vào yêu cầu bài toán, bạn sẽ lập một trong ba loại phương trình:

- ***Mặt phẳng:*** Khi nói về sàn nhà, mặt tường, mặt bàn hoặc mặt nước.
    - Cần: 1 điểm và 1 vectơ pháp tuyến $\vec{n}$.
- ***Đường thẳng:*** Khi nói về tia laser, sợi dây căng, trục của một cột trụ, hoặc quỹ đạo chuyển động thẳng.
    - Cần: 1 điểm và 1 vectơ chỉ phương $\vec{u}$.
- ***Mặt cầu:*** Khi nói về bong bóng, vệ tinh bay quanh trái đất, hoặc vùng phủ sóng của một trạm phát tín hiệu.
    - Cần: Tâm $I(a,b,c)$ và bán kính R.

✅ Bước 3: Giải mô hình toán học

Sử dụng các công thức giải tích để tìm ra kết quả:

- ***Khoảng cách:*** Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng (ví dụ: chiều cao từ đèn đến sàn).
- ***Góc:*** Góc giữa hai bức tường, góc giữa đường ống nước và sàn nhà.
- ***Giao điểm:*** Điểm chạm của tia sáng lên tường, hoặc vị trí hai đường ống cắt nhau.

✅ Bước 4: Trả lời đáp án và diễn giải kết quả

□***Kiểm tra tính hợp lý*** của kết quả (có phù hợp với bối cảnh không?).

□Diễn đạt kết quả dưới dạng ***ngôn ngữ thực tế***: Đáp án đúng câu hỏi ban đầu của đề.

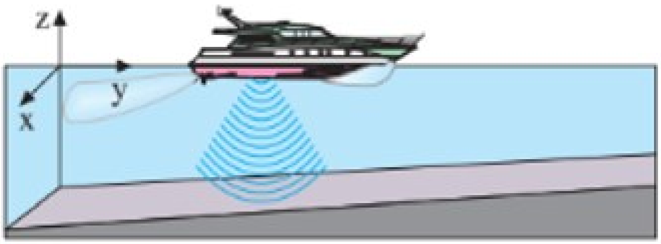
📖 CÁC DẠNG BÀI TOÁN THỰC TẾ THƯỜNG GẶP

Dạng toán ☞ VỀ KHOẢNG CÁCH , ĐỘ DÀI, CHIỀU CAO,..

Dạng này thường yêu cầu tính độ dài ngắn nhất hoặc kiểm tra xem một vật có va chạm/vượt quá giới hạn hay không.

- ***Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng:*** Tính chiều cao của một vật so với mặt đất, hoặc khoảng cách từ một bóng đèn đến bức tường đối diện.
- ***Khoảng cách từ điểm đến đường thẳng:*** Tính khoảng cách từ một vị trí (ví dụ: một trạm quan trắc) đến đường đi của một thiên thạch hoặc một tia laser.
- ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:*** Kiểm tra khoảng cách an toàn giữa hai đường dây điện hoặc hai đường ống nước chạy cắt nhau trong tòa nhà.

Ví dụ 21: Một chiếc thuyền máy di chuyển trong một vùng nước có mặt đáy phẳng nhưng hơi dốc lên. Các điểm $P(0;0;-20), Q(50;50;-15)$ và $R(0;50;-15)$ là các điểm thuộc mặt đáy. Trên thuyền có một cảm biến đo tiếng vọng đặt ở mặt nước. Khoảng cách từ cảm biến đến mặt đáy là bao nhiêu khi cảm biến ở điểm $A(50;50;0)$? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải

Phân tích đề: Bài toán quy về bài toán tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (PQR)

1. Tìm phương trình mặt phẳng đáy (PQR)

Đầu tiên, ta tính các vectơ:

- $\overrightarrow{PQ} = (50-0;50-0;-15-(-20)) = (50;50;5)$
- $\overrightarrow{PR} = (0-0;50-0;-15-(-20)) = (0;50;5)$

Vectơ pháp tuyến $\vec{n}$ của mặt phẳng (PQR) là tích có hướng của $\overrightarrow{PQ}$ và $\overrightarrow{PR}$:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}] = \left(\begin{vmatrix}50 & 5\\50 & 5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}5 & 50\\5 & 0\end{vmatrix};\begin{vmatrix}50 & 50\\0 & 50\end{vmatrix}\right) \text{ hay } \vec{n} = (0;-250;2500)$$

Để đơn giản hóa, ta chọn vectơ cùng phương $\vec{n}' = (0;-1;10)$ (chia tất cả cho 250).

Phương trình mặt phẳng (PQR) đi qua điểm $P(0;0;-20)$ với vectơ pháp tuyến $(0;-1;10)$:

$$0(x-0)-1(y-0)+10(z-(-20)) = 0 \Leftrightarrow -y+10z+200 = 0 \quad \text{hay} \quad y-10z-200 = 0$$

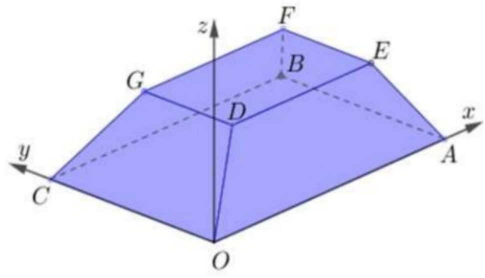
2. Tính khoảng cách từ điểm $A(50;50;0)$ ***đến mặt phẳng*** (PQR)

$$d(A,(PQR)) = \frac{|1\cdot 50-10\cdot 0-200|}{\sqrt{0^2+1^2+(-10)^2}} \approx 14,925$$

3. Kết quả cuối cùng

Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị. **Kết quả: 15**

Ví dụ 22: Hình vẽ minh họa là hình ảnh một tòa nhà trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Biết $OABC.DEFG$ là hình chóp cụt có hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song, $OABC$ là hình chữ nhật nằm trong mặt phẳng (Oxy), $OA = 100\,m$, $OC = 60\,m$ và điểm $D(10;10;8)$. Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(OCGD)$ bằng bao nhiêu mét? *(kết quả làm tròn đến hàng phần chục)*



Lời giải

1. Xác định tọa độ các điểm

Dựa vào đề bài, ta có các thông tin sau:

- Gốc tọa độ là $O(0;0;0)$.
- $OA = 100$ m nằm trên trục $Ox \Rightarrow A(100;0;0)$.
- $OC = 60$ m nằm trên trục $Oy \Rightarrow C(0;60;0)$.
- Vì $OABC$ là hình chữ nhật nên B có tọa độ là $B(100;60;0)$.
- Điểm D đã cho sẵn: $D(10;10;8)$.

2. Viết phương trình mặt phẳng $(OCGD)$

Mặt phẳng $(OCGD)$ đi qua ba điểm: $O(0;0;0)$, $C(0;60;0)$ và $D(10;10;8)$.

- Vectơ $\overrightarrow{OC} = (0;60;0)$; Vectơ $\overrightarrow{OD} = (10;10;8)$ là cặp vectơ chỉ phương

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng $(OCGD)$ là tích có hướng của $\overrightarrow{OC}$ và $\overrightarrow{OD}$:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}] = \left(\begin{vmatrix} 60 & 0 \\ 10 & 8 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 8 & 10 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 60 \\ 10 & 10 \end{vmatrix} \right) = (480;0;-600) = 120(4;0;-5)$$

Vì mặt phẳng đi qua gốc tọa độ $O(0;0;0)$ nên phương trình mặt phẳng $(OCGD)$ là

$$4(x-0) + 0(y-0) - 5(z-0) = 0 \Leftrightarrow 4x - 5z = 0$$

3. Tính khoảng cách từ $B(100;60;0)$ ***đến mặt phẳng*** $(OCGD)$

Công thức tính khoảng cách từ điểm $M(x_0;y_0;z_0)$ đến mặt phẳng $Ax + By + Cz + D = 0$ là

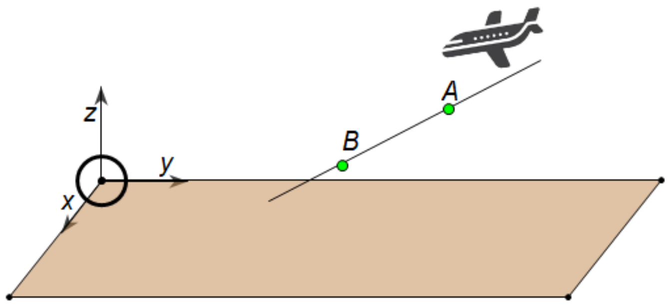
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Áp dụng vào bài toán: $d(B,(OCGD)) = \dfrac{|4(100) + 0(60) - 5(0)|}{\sqrt{4^2 + 0^2 + (-5)^2}} \approx 62.4695\ldots$

Làm tròn đến hàng phần chục theo yêu cầu đề bài

Kết quả: 62.5 m**.**

Ví dụ 23: Xét trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay đặt ở gốc toạ độ $O(0;0;0)$, đơn vị trên mỗi trục là ki-lô-mét. Một máy bay chuyển động theo đường thẳng, bay qua hai vị trí $A(-500;-300;500)$ và $B(-200;-200;450)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát không lưu nhất, toạ độ máy bay là $(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.



Lời giải

Bài toán yêu cầu chúng ta tìm điểm trên đường thẳng (đường bay) sao cho khoảng cách từ điểm đó đến gốc tọa độ $O(0;0;0)$ là ngắn nhất.

1. Tìm vectơ chỉ phương của đường bay

Máy bay bay qua hai điểm $A(-500;-300;500)$ và $B(-200;-200;450)$. Vectơ chỉ phương $\vec{u}$ của đường thẳng AB là $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(300;100;-50)$

Để tính toán gọn hơn, ta chọn vectơ chỉ phương cùng phương là $\vec{v}=\dfrac{1}{50}\vec{u}=(6;2;-1)$.

2. Phương trình tham số của đường bay

Phương trình tham số của đường thẳng đi qua $B(-200;-200;450)$ với vectơ chỉ phương $\vec{v}(6;2;-1)$ là

$$\Delta:\begin{cases}x=-200+6t\\ y=-200+2t\\ z=450-t\end{cases}$$

3. Tìm vị trí gần đài kiểm soát nhất

Gọi $M(a;b;c)$ là vị trí của máy bay, khi đó: $M(-200+6t;-200+2t;450-t)$

Máy bay ở gần đài kiểm soát (gốc tọa độ O) nhất khi vectơ $\overrightarrow{OM}$ vuông góc với vectơ chỉ phương $\vec{v}$ (hay M là hình chiếu của O laên Δ. Khi đó, tích vô hướng của chúng bằng 0, nghia là

$\overrightarrow{OM}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow 6(-200+6t)+2(-200+2t)-1(450-t)=0\Rightarrow t=50$

4. Tính tọa độ $(a;b;c)$ và giá trị P

Thay $t=50$ vào hệ phương trình tham số ở bước 2:

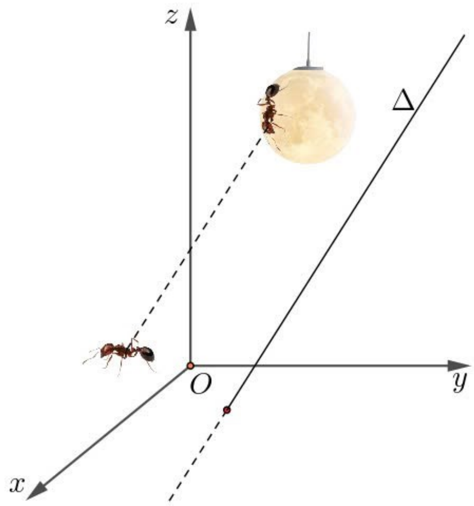
- $x=-200+6(50)=100$
- $y=-200+2(50)=-100$
- $z=450-50=400$

Vậy tọa độ máy bay khi đó là $(100;-100;400)$.

Giá trị của biểu thức $P=a+b+c$ là $P=100+(-100)+400=400$

Kết quả cuối cùng: $P=400$**.**

Ví dụ 24: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, giả sử mặt đất trùng với mặt phẳng (Oxy). Một bóng đèn trang trí dạng khối cầu có tâm $I(-1;2;4)$ và bán kính R được treo cố định lên trần nhà (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là m). Một con kiến bò tùy ý trên bóng đèn và một con kiến khác bò tùy ý trên mặt đất, giả sử vectơ tạo bởi tọa độ vị trí của 2 con kiến luôn cùng phương với đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$ (coi mỗi con kiến là một điểm). Biết lúc 2 con kiến gần nhau nhất có khoảng cách bằng $\frac{57}{10}(m)$. Bán khối cầu có độ dài bao nhiêu cm.



Lời giải

Phân tích dữ liệu:

- ***Bóng đèn:*** Tâm $I(-1;2;4)$, bán kính R (mét).
- ***Mặt đất:*** Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$.
- ***Vectơ vị trí 2 con kiến:*** Luôn cùng phương với đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;2)$.
- ***Khoảng cách ngắn nhất giữa 2 con kiến:*** $d_{min} = \frac{57}{10} = 5,7$ m.

Giải chi tiết:

1. ***Xác định vị trí kiến:***
   - Kiến 1 (A) nằm trên mặt cầu bóng đèn.
   - Kiến 2 (B) nằm trên mặt đất ($z = 0$).
   - Vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{u} = (1;2;2)$. Điều này có nghĩa là đường thẳng AB luôn có phương không đổi.
2. ***Khoảng cách ngắn nhất:***

   Khoảng cách giữa hai con kiến AB nhỏ nhất khi đường thẳng AB đi qua tâm I của bóng đèn.
   - Gọi đường thẳng d đi qua $I(-1;2;4)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;2;2)$.
   - Phương trình tham số của d : $x = -1 + t;\ y = 2 + 2t;\ z = 4 + 2t$.
   - Giao điểm B của d với mặt đất ($z = 0$): $4 + 2t = 0 \Rightarrow t = -2$.
   - Tọa độ điểm $B(-3;-2;0)$.
   - Tính đoạn IB :

   $$IB = \sqrt{(-3-(-1))^2 + (-2-2)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16+16} = 6 \text{ (m)}.$$
3. ***Tìm bán kính*** R **:**

   Kiến A nằm trên mặt cầu, kiến B nằm trên mặt đất. Khoảng cách ngắn nhất giữa chúng là:

$AB = IB - R \Rightarrow 5,7 = 6 - R \Rightarrow R = 0,3 \text{ m} = 30 \text{cm}$

Kết quả: Bán kính khối cầu là **30 cm**.

Dạng toán ☞ VỀ GÓC

Dạng này dùng để xác định độ nghiêng hoặc hướng trong xây dựng và điều khiển.

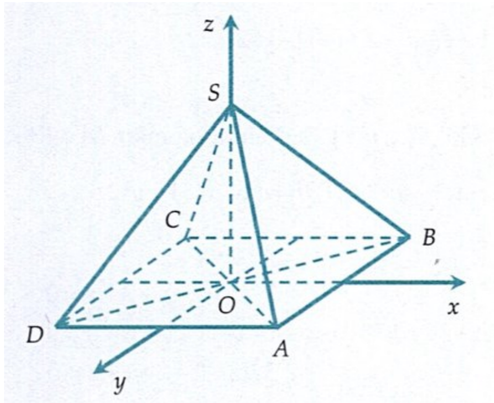
- Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng: Tính góc nghiêng của mái nhà so với phương ngang, hoặc góc của một tấm pin năng lượng mặt trời so với mặt đất để thu sáng tốt nhất.
- Góc giữa hai mặt phẳng: Tính góc giữa hai bức tường, hoặc góc giữa hai mái nhà giao nhau.
- Góc giữa hai đường thẳng: Góc lệch giữa hai trục giao thông hoặc hai hướng bay.

Ví dụ 25: Kim tự tháp Giza ở Ai Cập có dạng một hình chóp tứ giác đều. Biết rằng cạnh đáy của kim tự tháp dài 230 m và chiều cao của kim tự tháp là $146,6m$. Tính độ dốc của mặt bên kim tự tháp so với mặt phẳng nằm ngang (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của độ).

Lời giải

***1. Thiết lập hệ trục tọa độ** $Oxyz$*

Để thuận tiện, ta chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Minh họa kim tự tháp Giza bằng hình chóp tứ giác $S.ABCD$ như hình vẽ.



- Gốc tọa độ $O(0;0;0)$ tại tâm của đáy hình vuông.
- Trục Oz đi qua đỉnh S của kim tự tháp.
- Trục Ox và Oy song song với các cạnh của hình vuông đáy.

2. Xác định tọa độ các điểm

Với cạnh đáy $a = 230$ m và chiều cao $h = 146,6$ m

- Tâm đáy O: $O(0;0;0)$.
- Đỉnh S nằm trên trục Oz: $S(0;0;146,6)$.
- Xét một mặt bên, chẳng hạn mặt bên chứa cạnh song song với trục Oy. Một điểm M là trung điểm của cạnh đáy này sẽ có tọa độ là: $M(115;0;0)$ (với $115 = 230:2$).
- Khi đó, hai đỉnh của cạnh đáy này sẽ là $B(115;115;0)$ và $C(115;-115;0)$.

Như vậy, mặt bên (SBC) đi qua 3 điểm: $S(0;0;146,6)$, $B(115;115;0)$, và $C(115;-115;0)$.

3. Tính toán vectơ

- Vectơ pháp tuyến của mặt đáy (Oxy): $\vec{n}_{đáy} = (0;0;1)$.
- Vectơ pháp tuyến của mặt bên (SBC):

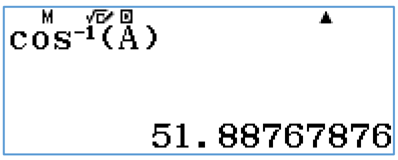
  Cặp vectơ chỉ phương: $\overrightarrow{SB} = (115;115;-146,6)$, $\overrightarrow{SC} = (115;-115;-146,6)$.

  Suy ra vectơ pháp tuyến: $\vec{n}_{bên} = [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (0;-33718;-26450) = -2(0;16859;13225)$.

4. Tính góc giữa mặt bên và mặt đáy

Gọi β là góc giữa mặt bên và mặt đáy. Ta có công thức:

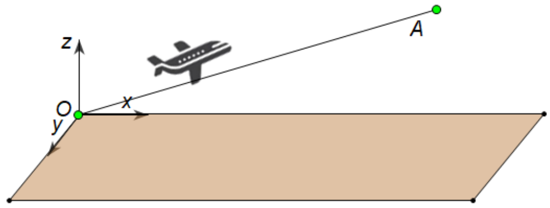
$\cos\beta = \dfrac{|\vec{n}_{đáy} \cdot \vec{n}_{bên}|}{|\vec{n}_{đáy}| \cdot |\vec{n}_{bên}|} = \dfrac{|0 \cdot 0 + 0 \cdot 16859 + 1 \cdot 13225|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \cdot \sqrt{0^2 + 16859^2 + 13225^2}}$ (bấm máy tính lưu kết quả vào biến A)



Suy ra $\beta \approx 51,887...^\circ$

Làm tròn đến hàng đơn vị theo yêu cầu, ***Kết quả:*** 52°.

Ví dụ 26: Một máy bay cất cánh tại một sân bay, sau khi bắt đầu cất cánh trong thời gian ngắn máy bay sẽ bay theo một đường thẳng và sân bay nơi máy bay cất cánh được coi là một mặt phẳng. Chọn hệ tọa độ $Oxyz$, đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 km. Biết rằng, máy bay bắt đầu cất cánh tại điểm $O(0;0;0)$ và sau một thời gian ngắn máy bay bay đến điểm $A(2;5;1,2)$ và sân bay máy bay cất cánh nằm trên mặt phẳng (Oxy). Góc tạo bởi đường bay của máy bay cất cánh và sân bay bằng bao nhiêu độ? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải

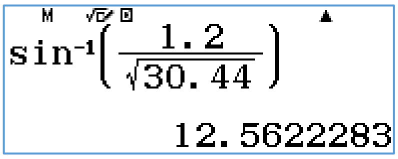
Dựa vào đề bài ta có thể thấy góc tạo bởi đường bay của máy bay cất cánh và sân bay chính là góc của $\overrightarrow{OA}$ và mặt phẳng (Oxy).

1. Xác định các vectơ:

- Vectơ chỉ phương của đường bay OA: $\vec{u} = \overrightarrow{OA} = (2;5;1,2)$.
- Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng sân bay (Oxy): $\vec{n} = (0;0;1)$.

2. Thiết lập công thức tính góc α:

$\sin\alpha = \dfrac{|\vec{u}\cdot\vec{n}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n}|} = \dfrac{|(2\cdot 0)+(5\cdot 0)+(1,2\cdot 1)|}{\sqrt{2^2+5^2+(1,2)^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \dfrac{1,2}{\sqrt{30,44}}$ (có thể dùng máy tính cầm tay bấm kết quả rồi lưu vào biến A)



Suy ra $\alpha = \arcsin\left(\dfrac{1,2}{\sqrt{30,44}}\right) \approx 12,5596...^\circ$.

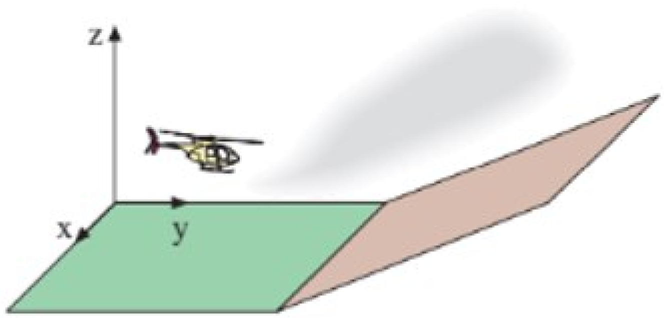
3. Kết quả cuối cùng:

Làm tròn đến hàng đơn vị theo yêu cầu. ***Kết luận:*** Góc tạo bởi đường bay và sân bay là 13°.

Ví dụ 27: Một chiếc trực thăng bay trong điều kiện tầm nhìn kém tiến về phía một sườn núi dốc lên, được mô tả bởi các điểm $P(0;5;0)$, $Q(5;10;2)$, $R(10;10;2)$.

Trực thăng bay qua các điểm $A(1;6;1)$ và $B(2;7;1)$ (đơn vị km).

Nếu trực thăng tiếp tục giữ nguyên hướng bay hiện tại, sẽ va vào sườn núi. Vì thế để tránh tai nạn, tại điểm B phi công giữ nguyên hướng theo phương $x-y$ nhưng bay lên với góc nâng sao cho đường bay song song với sườn núi. Tính góc mà phi công đã thay đổi hướng bay tại điểm B (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ)



Lời giải

Phân tích đề bài: Tính góc thay đổi hướng bay tại điểm B để trực thăng bay song song với sườn núi.

- **Vectơ hướng bay cũ:** Trực thăng bay qua $A(1;6;1)$ và $B(2;7;1)$ nên vectơ hướng ban đầu là $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{AB}=(1;1;0)$.

- **Vectơ pháp tuyến sườn núi:** Sườn núi đi qua $P(0;5;0), Q(5;10;2), R(10;10;2)$.

  $\overrightarrow{PQ}=(5;5;2)$; $\overrightarrow{PR}=(10;5;2)$.

  Vectơ pháp tuyến mặt phẳng sườn núi: $\vec{n}=[\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{PR}]=(0;10;-25)$, chọn $\vec{n}'=(0;2;-5)$.

- **Vectơ hướng bay mới:** Hướng bay mới $\overrightarrow{v_2}=(a;b;c)$ phải song song với sườn núi và giữ nguyên hướng hình chiếu $x-y$.

  Vì giữ nguyên hướng $x-y$ (giống $\overrightarrow{AB}$), ta có $a=1, b=1$.

  Vì song song với sườn núi nên $\overrightarrow{v_2}\cdot\vec{n}'=0 \Leftrightarrow (1\cdot 0)+(1\cdot 2)+c\cdot(-5)=0 \Rightarrow c=0,4$.

  Vậy $\overrightarrow{v_2}=(1;1;0,4)$.

- **Tính góc thay đổi:** Gọi α là góc giữa $\overrightarrow{v_1}$ và $\overrightarrow{v_2}$.

  $$\cos\alpha=\frac{\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2}}{|\overrightarrow{v_1}|\cdot|\overrightarrow{v_2}|}=\frac{1+1+0}{\sqrt{1^2+1^2+0}\cdot\sqrt{1^2+1^2+0,4^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2,16}}\approx 0,96225$$

  Suy ra $\alpha\approx 15,79^\circ$.

Kết quả: Góc thay đổi hướng bay xấp xỉ **15,8°**.

Dạng toán ☞ BÀI TOÁN CHUYỂN ĐỘNG VÀ QUỸ ĐẠO

➢ Xác định phương trình chuyển động thẳng đều

Loại 1. Xác định phương trình chuyển động của một vật đi từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ với vận tốc không đổi $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$.

1. Phân tích bài toán

- Điểm xuất phát: $M_0(x_0;y_0;z_0)$ tại thời điểm ban đầu (thường chọn $t=0$).

- Vận tốc: $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$. Vì vận tốc là đại lượng có hướng, nó đóng vai trò là vectơ chỉ phương của đường thẳng quỹ đạo.
- Thời gian: Gọi t là thời gian chuyển động $(t\geq 0)$.

2. Thiết lập phương trình chuyển động

- Tại thời điểm t, vật ở vị trí $M(x;y;z)$. Theo công thức chuyển động thẳng đều, ta có: $\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{v}$
- Khai triển theo từng tọa độ, ta có hệ phương trình tham số của chuyển động: $\begin{cases}x=x_0+v_1t\\ y=y_0+v_2t\\ z=z_0+v_3t\end{cases}$

3. Ví dụ minh họa

Nếu vật xuất phát từ $M_0(1;2;3)$ với vận tốc $\vec{v}=(4;-1;5)$ thì phương trình chuyển động là $\begin{cases}x=1+4t\\ y=2-t\\ z=3+5t\end{cases}$

Loại 2. Xác định phương trình chuyển động của một vật đi từ điểm $M_0(x_0;y_0;z_0)$ theo hướng $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ với tốc độ v

Bước 1: Tìm vectơ vận tốc thực: $\vec{v}=\dfrac{v}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u}=\left(\dfrac{v\cdot u_1}{|\vec{u}|};\dfrac{v\cdot u_2}{|\vec{u}|};\dfrac{v\cdot u_3}{|\vec{u}|}\right)$

Bước 2: Viết phương trình chuyển động (đây thực chất là phương trình tham số của đường thẳng theo thời gian t):

$$\begin{cases}x=x_0+\dfrac{v\cdot u_1}{|\overrightarrow{u}|}\cdot t\\ y=y_0+\dfrac{v\cdot u_2}{|\overrightarrow{u}|}\cdot t\\ z=z_0+\dfrac{v\cdot u_3}{|\overrightarrow{u}|}\cdot t\end{cases}$$

Ví dụ minh họa

Một vật xuất phát từ $M_0(1;2;3)$ với theo hướng $\vec{u}=(4;-4;2)$ với tốc độ 30 km/h. Xác định phương trình chuyển động của vật.

Bước 1: Xác định vectơ vận tốc $\vec{v}$

Tính độ dài của vectơ hướng $\vec{u}$: $|\vec{u}|=\sqrt{4^2+(-4)^2+2^2}=\sqrt{16+16+4}=\sqrt{36}=6$

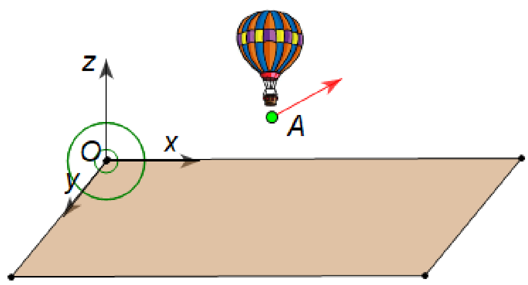
Vectơ vận tốc $\vec{v}$ cùng hướng với $\vec{u}$ và có độ dài bằng 30. Công thức xác định là: $\vec{v}=\dfrac{v}{|\vec{u}|}\cdot\vec{u}$

Thay số vào: $\vec{v}=\dfrac{30}{6}\cdot(4;-4;2)=5\cdot(4;-4;2)=(20;-20;10)$

Bước 2: Viết phương trình chuyển động

Sử dụng tọa độ điểm $M_0(1;2;3)$ và vectơ vận tốc $\vec{v}(20;-20;10)$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} x = 1 + 20t \\ y = 2 - 20t \; (t \geq 0) \\ z = 3 + 10t \end{cases}$

Ví dụ 28: Trong không gian $Oxyz$, một khinh khí cầu ở tọa độ $A\left(-16;-10;10\right)$ bắt đầu bay với vectơ vận tốc không đổi $\vec{v} = \left(4;3;-1\right)$ (đơn vị vận tốc là km/h) và dự kiến bay trong thời gian 10 giờ. Biết trạm kiểm soát không lưu đặt ở vị trí gốc tọa độ O kiểm soát được các vật thể cách trạm một khoảng tối đa bằng 12km. Thời gian kể từ khi trạm kiểm soát không lưu phát hiện ra khinh khí cầu đến khi khinh khí cầu ra khỏi vùng kiểm soát là bao nhiêu phút?



Lời giải

1. Thiết lập phương trình chuyển động của khinh khí cầu

Gọi $M(x;y;z)$ là vị trí của khinh khí cầu tại thời điểm t (giờ, $0 \leq t \leq 10$).

Khinh khí cầu bắt đầu bay từ điểm $A(-16;-10;10)$ với vận tốc không đổi $\vec{v} = (4;3;-1)$.

Phương trình tham số chuyển động của khinh khí cầu là $\begin{cases} x = -16 + 4t \\ y = -10 + 3t \\ z = 10 - t \end{cases}$

2. Xác định điều kiện để khinh khí cầu nằm trong vùng kiểm soát

Trạm kiểm soát đặt tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$ và kiểm soát được các vật thể trong khoảng cách tối đa $R = 12$ km. Khinh khí cầu nằm trong vùng kiểm soát khi và chỉ khi khoảng cách $OM \leq 12$ suy ra $OM^2 \leq 12^2$ tương đương $x^2 + y^2 + z^2 \leq 144$

Thay các biểu thức của x, y, z theo t vào bất phương trình, ta được:

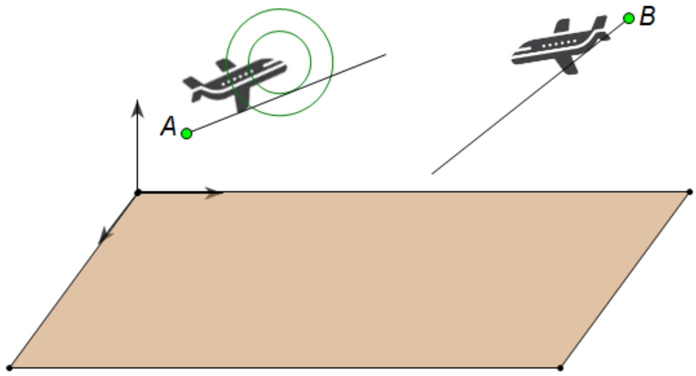
$(-16+4t)^2 + (-10+3t)^2 + (10-t)^2 \leq 144 \Leftrightarrow 26t^2 - 208t + 312 \leq 0 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 6$

3. Tính thời gian khinh khí cầu nằm trong vùng kiểm soát

- Thời điểm bắt đầu phát hiện: $t = 2$ giờ.
- Thời điểm ra khỏi vùng kiểm soát: $t = 6$ giờ.
- Tổng thời gian nằm trong vùng kiểm soát: $\Delta t = 6 - 2 = 4$ (giờ) = 240 (phút)

Kết luận: Thời gian kể từ khi trạm kiểm soát không lưu phát hiện ra khinh khí cầu đến khi nó ra khỏi vùng kiểm soát là **240 phút**.

Ví dụ 29: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, mỗi đơn vị trên hệ trục ứng với 10 km, trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Máy bay thứ nhất ban đầu ở tọa độ $A\left(25;-10;1\right)$ và bay theo hướng vectơ $\overrightarrow{v_1} = \left(-3;-4;0\right)$ với tốc độ không đổi là 750 km/h. Máy bay thứ hai ban đầu ở tọa độ $B\left(30;-25;1,1\right)$ và bay theo hướng vectơ $\overrightarrow{v_2} = \left(-4;3;0\right)$ với tốc độ không đổi là 900 km/h. Trên máy bay thứ nhất có gắn radar tránh va chạm với bán kính hoạt động là 50 km. Hỏi thời gian máy bay thứ hai xuất hiện trên màn hình của radar máy bay thứ nhất là bao nhiêu phút (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Sử dụng đơn vị km, giờ. Khi đó:

- Tọa độ điểm $A = 10(25;-10;1) = (250;-100;10)$
- Tọa độ điểm $B = 10(30;-25;1,1) = (300;-250;11)$

1. Xác định vectơ vận tốc thực

- Máy bay 1: $\vec{v_1} = (-3;-4;0) \Rightarrow |\vec{v_1}| = 5$

  Vectơ chỉ phương của máy bay 1 (vectơ vận tốc thực) là $\vec{V_1} = \left(-\dfrac{3\cdot 750}{5};-\dfrac{4\cdot 750}{5};0\right) = (-450;-600;0)$.

- Máy bay 2: $\vec{v_2} = (-4;3;0) \Rightarrow |\vec{v_2}| = 5$.

  Vectơ chỉ phương của máy bay 2 (vectơ vận tốc thực) là $\vec{V_2} = \left(-\dfrac{4\cdot 900}{5};\dfrac{3\cdot 900}{5};0\right) = (-720;540;0)$.

2. Thiết lập phương trình chuyển động

- Máy bay 1 bay từ A và có vectơ chỉ phương $\vec{V_1}$, phương trình đường thẳng máy bay 1 là

  $$\begin{cases} x = 250 - 450t \\ y = -100 - 600t \\ z = 10 \end{cases}.$$

- Máy bay 2 bay từ B và có vectơ chỉ phương $\vec{V_2}$, phương trình đường thẳng máy bay 2 là

  $$\begin{cases} x = 300 - 720t \\ y = -250 + 540t \\ z = 11 \end{cases}.$$

3. Thiết lập phương trình khoảng cách

Tọa độ của hai máy bay tại thời điểm t (giờ) là

- $M_1(t) = (250-450t;-100-600t;10)$
- $M_2(t) = (300-720t;-250+540t;11)$

Khoảng cách giữa hai máy bay tại thời điểm t là $M_1M_2 = \sqrt{(50-270t)^2 + (-150+1140t)^2 + 1}$.

Để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì $M_1M_2 \le 50 \Rightarrow 1372500t^2 - 369000t + 22501 \le 0$

$\Rightarrow 0,09348 \le t \le 0,17537$ (xấp xỉ).

Vậy thời gian máy bay thứ hai xuất hiện trên màn hình radar của máy bay thứ nhất là xấp xỉ $0,17537 - 0,09384 \approx 0,08189$ (giờ) $\approx 0,08189 \times 60 \approx 4,9134$ (phút)

4. Kết quả cuối cùng

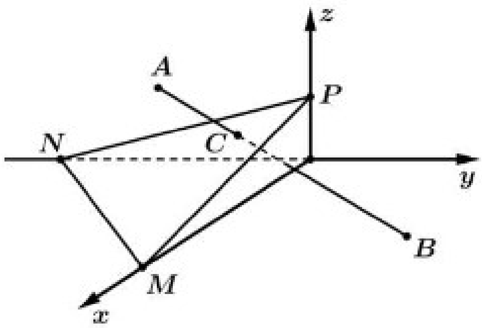
Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm. **Kết quả: 4,91**

Dạng toán ☞ VỀ GIAO ĐIỂM VÀ VỊ TRÍ TƯƠNG ĐỐI (Sự tương giao)

Dạng này xác định điểm chạm hoặc vùng ảnh hưởng.

- Giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng: Tìm vị trí tia laser chiếu lên tường, hoặc vị trí một cái cọc khi cắm xuống mặt đất nghiêng.
- Vị trí tương đối của điểm so với mặt cầu: Kiểm tra xem một con tàu/máy bay có nằm trong vùng phủ sóng của trạm phát tín hiệu hay không (Vùng phủ sóng thường là hình cầu).
- Giao của mặt cầu và mặt phẳng: Xác định hình dạng mặt cắt khi một quả bóng bị cắt bởi một mặt phẳng (kết quả là một hình tròn).

Ví dụ 30: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(3;-2;1)$ và sẽ hạ cánh ở vị trí $B(4;6,5;0)$ trên đường băng (như hình vẽ). Có một lớp mây được mô phỏng bởi mặt phẳng (α) đi qua ba điểm $M(8;0;0); N(0;-8;0); P(0;0;0,8)$. Độ cao của máy bay khi máy bay xuyên qua đám mây để hạ cánh là bao nhiêu km (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Lời giải

1. Viết phương trình mặt phẳng (α) (lớp mây)

Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm nằm trên ba trục tọa độ: $M(8;0;0)$, $N(0;-8;0)$, và $P(0;0;0,8)$. Ta sử dụng phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn:

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{-8}+\frac{z}{0,8}=1 \Leftrightarrow x-y+10z=8 \quad \text{hay} \quad x-y+10z-8=0 \quad (\alpha)$$

2. Viết phương trình đường thẳng AB: Máy bay bay từ $A(3;-2;1)$ đến $B(4;6,5;0)$.

- Véc tơ chỉ phương: $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(4-3;6,5-(-2);0-1)=(1;8,5;-1)$.
- Phương trình tham số của đường thẳng AB: $\begin{cases} x=3+t \\ y=-2+8,5t \\ z=1-t \end{cases}$

3. Tìm giao điểm của máy bay và lớp mây

Máy bay xuyên qua đám mây tại điểm I, là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (α). Thay tọa độ tham số của đường thẳng vào phương trình mặt phẳng:

$$(3+t)-(-2+8,5t)+10(1-t)-8=0 \Leftrightarrow 3+t+2-8,5t+10-10t-8=0$$

$$\Leftrightarrow -17,5t+7=0 \Leftrightarrow t=\frac{7}{17,5}=0,4$$

4. Tính độ cao của máy bay tại điểm xuyên qua

Độ cao của máy bay chính là giá trị cao độ z tại giao điểm I. Với $t=0,4$, ta có:

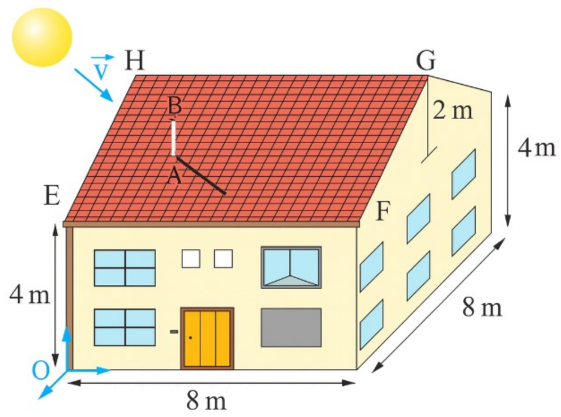
$z_I=1-t=1-0,4=0,6$ (km)

Kết luận: Độ cao của máy bay khi xuyên qua đám mây là **0,60 km**.

Ví dụ 31: Cho ngôi nhà như hình bên phải (các kích thước tính theo mét). Một ăng-ten trên mái nhà có hai điểm đầu mút: $A(-2;2;5)$, $B(-2;2;6)$.

Chiếu ánh sáng song song theo hướng của véc-tơ $\vec{v}=(2;8;-3)$ vào ăng-ten, bóng của ăng-ten sẽ đổ xuống mặt phẳng mái $EFGH$.

Tính chiều dài bóng của ăng-ten trên mái nhà bằng bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

***1. Xác định phương trình mặt phẳng mái nhà** $(EFGH)$*

Dựa vào các kích thước ngôi nhà, ta xác định được:

- $E(0;0;4)$: Điểm thấp bên trái.
- $F(8;0;4)$: Điểm thấp bên phải.
- $H(0;4;6)$: Điểm cao phía trên bên trái.

Ta có các vectơ:

- $\overrightarrow{EF}=(8;0;0)$.
- $\overrightarrow{EH}=(0-0;4-0;6-4)=(0;4;2)$.

Vectơ pháp tuyến của mặt phẳng mái nhà: $\vec{n}=[\overrightarrow{EF},\overrightarrow{EH}]=(0;-16;32)$

Chọn vectơ pháp tuyến rút gọn là $\vec{n}'=(0;1;-2)$.

Phương trình mặt phẳng $(EFGH)$ qua H là $0(x-0)+1(y-0)-2(z-4)=0 \Leftrightarrow y-2z+8=0$

***2. Tìm tọa độ bóng của** A **và** B :*

Ăng-ten đi qua $A(-2;2;5), B(-2;2;6)$ và hướng tia sáng $\vec{v}=(2;8;-3)$.

- **Bóng của** A :

  Do điểm A nằm trên mặt phẳng mái nhà $(EFGH)$ nên bóng A cũng chính là điểm A

- **Bóng của** B **:** B' là giao điểm của đường thẳng qua B theo hướng tia sáng và mặt phẳng mái nhà

  Phương trình đường thẳng qua B theo hướng tia sáng $\vec{v}=(2;8;-3)$: $x=-2+2t;\ y=2+8t;\ z=6-3t$

  Thay vào phương trình $y-2z+8=0$:

  $$(2+8t)-2(6-3t)+8=0 \Leftrightarrow 2+8t-12+6t+8=0 \Leftrightarrow 14t-2=0 \Rightarrow t=\frac{1}{7}$$

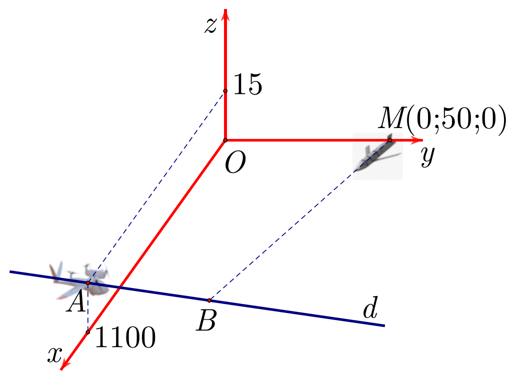
  Tọa độ $B'=\left(-2+\frac{2}{7};2+\frac{8}{7};6-\frac{3}{7}\right)=\left(-\frac{12}{7};\frac{22}{7};\frac{39}{7}\right)$.

3. Tính chiều dài bóng $A'B'$

Chiều dài bóng chính là đoạn AB': $AB'=\sqrt{\left(-\frac{12}{7}-(-2)\right)^2+\left(\frac{22}{7}-2\right)^2+\left(\frac{39}{7}-5\right)^2}=\frac{2\sqrt{21}}{7}\approx 1,31$

Kết luận: Chiều dài bóng của ăng-ten trên mái nhà là **1.31 m** (làm tròn đến hàng phần trăm).

Ví dụ 32: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mô hình phòng không như sau: rada đặt tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$, tên lửa phòng không đặt tại điểm $M(0;50;0)$, mỗi đơn vị tương ứng với 10m, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Oz vuông góc mặt đất và hướng lên. Giả sử UAV (phương tiện bay không người lái) và tên lửa đều chuyển động thẳng đều. Tại thời điểm $t=0$(s), rađa phát hiện ra UAV A ở toạ độ $A_0(1100;0;15)$. Tại thời điểm $t=1s$, rađa theo dõi thấy UAV A ở tọa độ $A_1(1095;1;14,5)$ trên đường thẳng d. Tại thời điểm $t=6$(s), một tên lửa được phóng lên và chuyển động thẳng đều với tốc độ 1300(m/s), va chạm và phá huỷ UAV A tại điểm B trên d. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ lúc được phóng lên thì tên lửa va chạm với UAV (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm của giây)?



Lời giải

Để giải bài toán này, chúng ta cần tìm thời điểm tên lửa va chạm với UAV tại điểm B trên đường thẳng d.

1. Xác định phương trình chuyển động của UAV

UAV chuyển động thẳng đều qua hai điểm $A_0(1100;0;15)$ tại $t=0$ và $A_1(1095;1;14,5)$ tại $t=1$.

- Vectơ vận tốc của UAV ($\vec{v}$): $\vec{v}=\overrightarrow{A_0A_1}=(1095-1100;1-0;14,5-15)=(-5;1;-0,5)$
- Phương trình đường bay của UAV là $d:\begin{cases}x=1100-5t\\y=t\\z=15-0,5t\end{cases}$
- Tọa độ của UAV tại thời điểm t bất kỳ: $A(t)=(1100-5t;t;15-0,5t)$

2. Thiết lập phương trình va chạm

Gọi T là thời gian tên lửa bay cho đến khi va chạm (tính từ lúc phóng là $t=6s$).

Vậy thời điểm va chạm xảy ra là $t_{vc}=6+T$.

- Tọa độ điểm va chạm B**:** Thay $t=6+T$ vào phương trình chuyển động của UAV:

$B=(1100-5(6+T);6+T;15-0,5(6+T))$ hay $B=(1070-5T;6+T;12-0,5T)$

- Khoảng cách từ bệ phóng $M(0;50;0)$ đến B:

Tên lửa bay với vận tốc 1300 m/s. Vì mỗi đơn vị tương ứng 10m, nên vận tốc tên lửa theo đơn vị tọa độ là $v_m=\frac{1300}{10}=130$ (đơn vị/s).

Quãng đường tên lửa bay được là $S=130T$.

3. Giải phương trình tìm T

Ta có phương trình khoảng cách: $MB^2 = (130T)^2$

$\Leftrightarrow (1070-5T-0)^2+(6+T-50)^2+(12-0,5T-0)^2=(130T)^2$

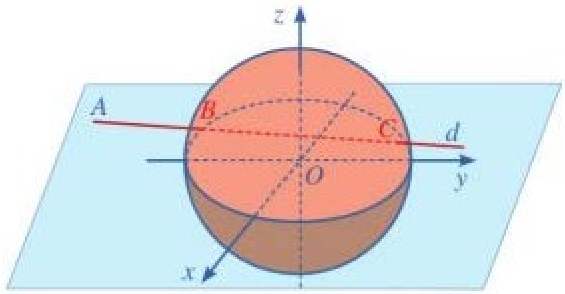
$\Leftrightarrow (1070-5T)^2+(T-44)^2+(12-0,5T)^2=16900T^2 \Leftrightarrow 16873,75T^2+10800T-1146980=0$

Giải phương trình bậc hai này (lấy nghiệm $T>0$), ta được: $T \approx 7,9319...$

Kết luận

Làm tròn đến hàng phần trăm, thời gian kể từ lúc phóng đến khi va chạm là: $T \approx 7,93$ **giây.**

Ví dụ 33: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay có tọa độ $O(0;0;0)$,mỗi đơn vị trên trục ứng với 1 km. Máy bay trong phạm vi cách đài kiểm soát 417 km sẽ hiển thị trên màn hình ra đa. Một máy bay đang ở vị trí $A(222;565;8)$ chuyển động theo đường thẳng d có véctơ chỉ phương $\vec{u}(91;75;0)$ và hướng về đài kiểm soát không lưu (như hình vẽ). Tọa độ của vị trí sớm nhất mà máy bay xuất hiện trên màn hình ra đa là $M(a;b;c)$. Khi đó $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Chúng ta cần tìm điểm M là giao điểm đầu tiên của đường thẳng quỹ đạo máy bay và vùng phủ sóng của rada (hình cầu).

1. Phân tích dữ kiện đề bài

- Đài kiểm soát (Gốc tọa độ): $O(0;0;0)$.
- Vùng phủ sóng rada: Là hình cầu tâm O, bán kính $R=417$ km.
- Vị trí máy bay ban đầu: $A(222;565;8)$.
- Vectơ chỉ phương của đường thẳng d: $\vec{u}(91;75;0)$.
- Lưu ý quan trọng: Máy bay bay hướng về đài kiểm soát.

2. Thiết lập phương trình đường thẳng d ***và phương trình vùng phủ sóng rada*** (S)

- Đường thẳng d đi qua $A(222;565;8)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}(91;75;0)$ có phương trình tham số:

$$\begin{cases} x = 222+91t \\ y = 565+75t \\ z = 8 \end{cases}$$

- Mặt cầu giới hạn vùng phủ sóng rada có tâm $O(0;0;0)$ và bán kính $R=417$ có phương trình: $x^2+y^2+z^2=417^2$

3. Tìm giao điểm M với vùng phủ sóng

- Điểm M là giao điểm của đường thẳng d và mặt cầu (S). Thay phương trình đường thẳng d vào phương trình mặt cầu (S), ta được: $(222+91t)^2+(565+75t)^2+8^2=173889 \Leftrightarrow$ $13906t^2+125154t+194684=0$

Giải phương trình bậc hai này, ta được hai nghiệm: $t=-2$ và $t=-7$

4. Xác định điểm M và tính tổng $a+b+c$

- $t=-2$: $M(40;415;8)$, $AM^2=55624$, điểm bắt đầu vào vùng phủ sóng
- $t=-7$: $M(-415;40;8)$, $AM^2=681395$, điểm cuối cùng trong vùng phủ sóng

Vậy tọa độ điểm M là $(40;415;8)$.

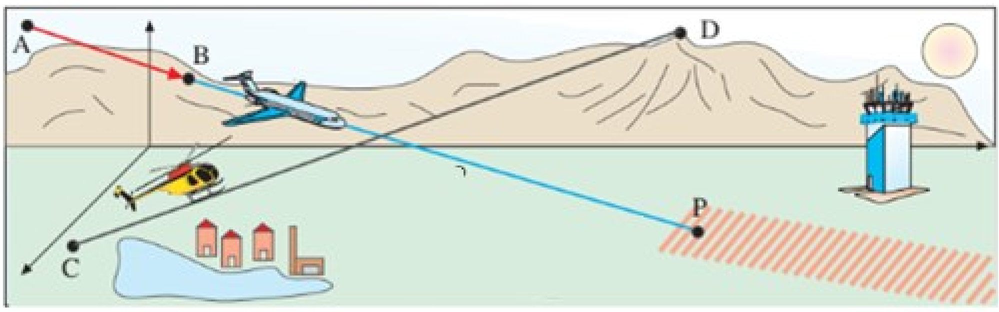
Tính tổng: $a+b+c=40+415+8=463$

Kết quả cuối cùng: Giá trị $a+b+c$ bằng **463**.

Ví dụ 34: Một máy bay đang bay với tốc độ không đổi trong quá trình tiếp cận đường băng. (Các giá trị tọa độ tính bằng km).

Lúc 16:00, máy bay ở vị trí $A(4;0;6)$. Một phút sau, máy bay ở vị trí $B(5;3;4,5)$ và sẽ bay tiếp đến điểm P trên đường băng (mặt phẳng $z=0$).

Cùng lúc bắt đầu tiếp cận ở A, một trực thăng khởi hành từ giàn khoan dầu $C(12;0;0)$ theo hướng tới trạm trên núi $D(-2;14;7)$. Thời gian dự kiến cho chuyến bay này là đúng 5 phút. Ta chứng minh được quỹ đạo bay của trực thăng và máy bay sẽ cắt nhau tại một điểm M nhưng sẽ không xảy ra tai nạn vì thời gian đi qua điểm M của trực thăng và máy bay chênh lệch nhau. Tìm thời gian chênh lệch đó là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

1. Phương trình chuyển động của máy bay

Máy bay bay với tốc độ không đổi, đi từ $A(4;0;6)$ lúc 16:00. Sau 1 phút ($t=1$), nó đến $B(5;3;4,5)$.

- Vectơ chỉ phương: $\overrightarrow{u_1}=\overrightarrow{AB}=(5-4;3-0;4,5-6)=(1;3;-1,5)$.
- Vectơ vận tốc (chia cho 1 phút): $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{AB}=(1;3;-1,5)$.

- Phương trình tham số (với t là thời gian tính bằng phút): $\begin{cases} x = 4 + t \\ y = 3t \\ z = 6 - 1,5t \end{cases}$

2. Phương trình chuyển động của trực thăng

Trực thăng khởi hành từ $C(12;0;0)$ cùng lúc với máy bay ($t = 0$) và dự kiến đến $D(-2;14;7)$ sau đúng 5 phút.

- Vectơ chỉ phương: $\overrightarrow{CD} = (-2-12;14-0;7-0) = (-14;14;7)$.
- Vectơ vận tốc (chia cho 5 phút): $\overrightarrow{v_2} = \frac{1}{5}\overrightarrow{CD} = (-2,8;2,8;1,4)$.
- Phương trình tham số (với t' là thời gian tính bằng phút): $\begin{cases} x = 12 - 2,8t' \\ y = 2,8t' \\ z = 1,4t' \end{cases}$

3. Tìm thời điểm máy bay và trực thăng đi qua điểm giao nhau M

Để tìm điểm giao nhau M, ta giải hệ phương trình bằng cách cho các tọa độ x, y, z bằng nhau, ta được:

- $4 + t = 12 - 2,8t'$ (1)
- $3t = 2,8t'$ (2)
- $6 - 1,5t = 1,4t'$ (3)

Từ phương trình (1) và (2), ta có: $t = 2;\ t' = \frac{15}{7}$. Thay vào phương trình (3): $6 - 1,5\cdot 2 = 1,4\cdot\frac{15}{7} = 3$ (Đúng)

Hệ phương trình trên có nghiệm: $t = 2;\ t' = \frac{15}{7}$

Suy ra, quỹ đạo bay của trực thăng và máy bay sẽ cắt nhau tại một điểm $M(6;6;3)$

Thời gian tới điểm chung: máy bay $t = 2$ phút, trực thăng $t' = \frac{15}{7}$ phút.

4. Tính khoảng thời gian chênh lệch

Sự chênh lệch thời gian giữa hai phương tiện tại điểm M là:

- $\Delta t = |t' - t| = \left|\frac{15}{7} - 2\right| = \frac{1}{7}$ (phút) $= \frac{60}{7} \approx 8,751428$ (giây)

Làm tròn đến hàng phần trăm theo yêu cầu của đề bài:

Kết quả: Khoảng thời gian chênh lệch là 8,57 giây.

Dạng toán *☞ TỐI ƯU HÓA (Cực trị hình học)*

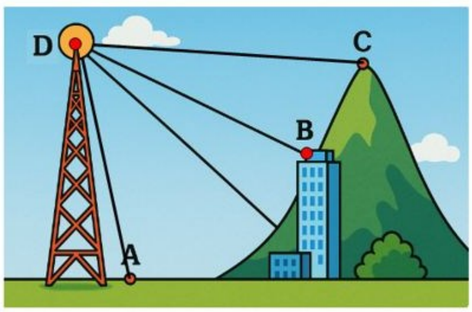
- Tìm vị trí một điểm trên mặt đất (mặt phẳng) sao cho tổng khoảng cách đến hai vị trí khác là ngắn nhất (Bài toán đặt trạm tiếp sóng, nối dây điện).
- Tìm vị trí đặt camera trên trần nhà để có góc nhìn rộng nhất.

Ví dụ 35: Trong không gian ba chiều $Oxyz$, tọa độ các khu vực được xác định như sau:

Khu vực $A(30;20;0)$ nằm trên mặt đất, cách trung tâm thành phố $3\,km$.

Khu vực $B(70;50;40)$ nằm trên tòa nhà cao tầng và ở độ cao $40\,m$

Khu vực $C(50;80;70)$ nằm trên một đỉnh đồi ở độ cao $70m$.



Gọi vị trí lắp đặt trạm phát sóng là $D(a;b;c)$ sao cho khoảng cách từ D đến ba khu vực kể trên là bằng nhau và có khoảng cách đến chúng là nhỏ nhất. Tính $T=a+b+c$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

1. Phân tích điều kiện $DA=DB=DC$

Tập hợp các điểm cách đều ba điểm A,B,C là một **đường thẳng** Δ đi qua tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với mặt phẳng (ABC).

Thiết lập hệ phương trình từ $DA^2=DB^2$ ***và*** $DA^2=DC^2$

- $DA^2=(a-30)^2+(b-20)^2+c^2$
- $DB^2=(a-70)^2+(b-50)^2+(c-40)^2$
- $DC^2=(a-50)^2+(b-80)^2+(c-70)^2$

Từ $DA^2=DB^2$:

$(a-30)^2+(b-20)^2+c^2=(a-70)^2+(b-50)^2+(c-40)^2$

$\Leftrightarrow -60a+900-40b+400=-140a+4900-100b+2500-80c+1600$

$\Leftrightarrow 80a+60b+80c=7700 \Leftrightarrow 8a+6b+8c=770$ (1)

Từ $DA^2=DC^2$:

$(a-30)^2+(b-20)^2+c^2=(a-50)^2+(b-80)^2+(c-70)^2$

$\Leftrightarrow -60a+900-40b+400=-100a+2500-160b+6400-140c+4900$

$\Leftrightarrow 40a+120b+140c=12500 \Leftrightarrow 4a+12b+14c=1250$ (2)

2. Tìm điểm D ***có khoảng cách nhỏ nhất***

Khoảng cách từ D đến A,B,C nhỏ nhất khi D chính là **tâm đường tròn ngoại tiếp** tam giác ABC. Khi đó, D phải nằm trong mặt phẳng (ABC).

Viết phương trình mặt phẳng (ABC)

- $\overrightarrow{AB}=(40;30;40)\Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{u_1}=(4;3;4)$
- $\overrightarrow{AC}=(20;60;70)\Rightarrow$ chọn $\overrightarrow{u_2}=(2;6;7)$
- Vectơ pháp tuyến $\vec{n}=[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}]=(-3;-20;18)$

Phương trình mặt phẳng (ABC) đi qua $A(30;20;0)$: $-3(x-30)-20(y-20)+18(z-0)=0$

$\Leftrightarrow 3x+20y-18z-490=0$

Điểm $D(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (ABC) nên $3a+20b-18c-490=0$ (3)

3. Giải hệ phương trình và tính T

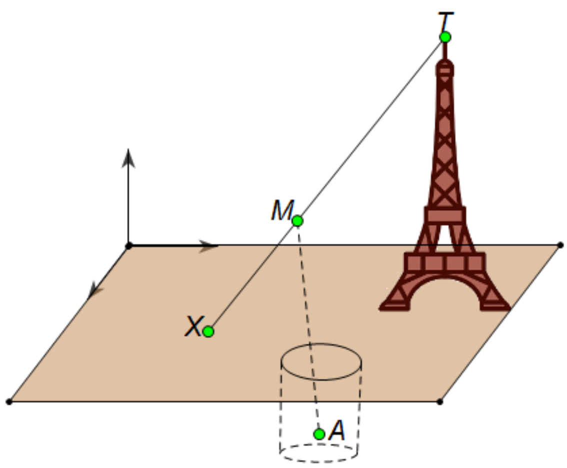
Giải hệ gồm (1), (2), và (3): $8a+6b+8c=770$; $4a+12b+14c=1250$ và $3a+20b-18c=490$

Ta được: $a=\dfrac{36520}{757}$; $b=\dfrac{32655}{757}$; $c=\dfrac{13925}{757}$

Tính $T=a+b+c=\dfrac{83100}{757}\approx 109,775$:

Kết quả: Làm tròn đến hàng đơn vị theo yêu cầu: $T=110$.

Ví dụ 36: Người ta thiết kế một dây cáp chạy thẳng từ điểm X ở trên mặt đất tới đỉnh T của một tòa tháp. Giả sử tọa độ của các điểm là $T(40;60;150)$ và $X(100;-40;0)$ trong hệ tọa độ không gian $Oxyz$, với O là gốc tọa độ đặt tại mặt đất. Người ta muốn nối điểm $A(40;30;-20)$ nằm dưới một cái hố tới một điểm $M(a;b;c)$ nằm trên dây cáp sao cho khoảng cách MA này là nhỏ nhất. Tính $a+b+c$.



Lời giải

Đây là một bài toán tìm hình chiếu vuông góc của một điểm lên một đường thẳng trong không gian $Oxyz$. Để khoảng cách MA là nhỏ nhất, điểm M trên dây cáp phải là hình chiếu vuông góc của điểm A lên đường thẳng XT

1. Lập phương trình đường thẳng chứa dây cáp XT

- Dây cáp đi qua hai điểm $X(100;-40;0)$ và $T(40;60;150)$.
- Vectơ chỉ phương: $\overrightarrow{XT}=(40-100;60-(-40);150-0)=(-60;100;150)$.
- Rút gọn vectơ chỉ phương cho đơn giản: $\vec{u}=\dfrac{1}{10}\overrightarrow{XT}=(-6;10;15)$.
- Phương trình tham số của đường thẳng XT: $\begin{cases}x=100-6t\\y=-40+10t\\z=15t\end{cases}$

2. Xác định tọa độ điểm M ***theo tham số*** t

Vì M nằm trên dây cáp XT nên tọa độ của M có dạng: $M(100-6t;-40+10t;15t)$.

Khi đó, vectơ $\overrightarrow{AM}$ với $A(40;30;-20)$ là:

$\overrightarrow{AM}=(100-6t-40;-40+10t-30;15t-(-20))$ thu gọn, ta được $\overrightarrow{AM}=(60-6t;10t-70;15t+20)$

3. Điều kiện để khoảng cách MA ***nhỏ nhất***

Khoảng cách MA nhỏ nhất khi và chỉ khi $AM\perp XT$. Điều này tương đương với tích vô hướng của $\overrightarrow{AM}$ và vectơ chỉ phương $\vec{u}$ bằng 0:

$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{u}=0 \Leftrightarrow -6(60-6t)+10(10t-70)+15(15t+20)=0 \Leftrightarrow -360+36t+100t-700+225t+300=0$

$\Leftrightarrow 361t-760=0 \Rightarrow t=\dfrac{760}{361}=\dfrac{40}{19}$

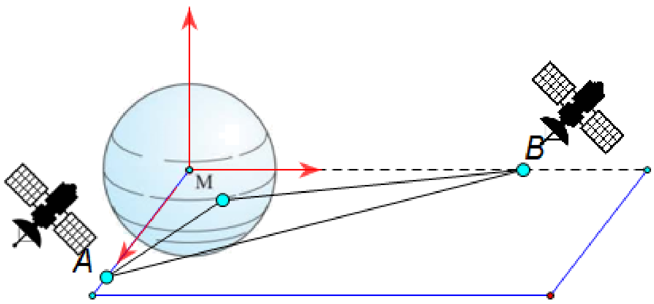
4. Tính tọa độ $M(a;b;c)$ ***và tổng*** $a+b+c$

Thay $t=\dfrac{40}{19}$ vào biểu thức tọa độ của M:

- $a=100-6\cdot\dfrac{40}{19}$; $b=-40+10\cdot\dfrac{40}{19}$; $c=15\cdot\dfrac{40}{19}$
- Tổng $a+b+c=100$

Kết quả cuối cùng: $a+b+c=100$.

Ví dụ 37: Hệ thống định vị toàn cầu GPS (*Global Positioning System*) hiện tại có 24 vệ tinh, mỗi vệ tinh cách trái đất $20000\,km$, ta coi trái đất là khối cầu có bán kính $R=6$ (nghìn km). Với một hệ tọa độ $Oxyz$ đã chọn, O là tâm trái đất và đơn vị trên mỗi trục là nghìn km, hai vệ tinh có tọa độ $A(26;0;0)$, $B(0;26;0)$. Xét điểm $M(x;y;z)$ thuộc bề mặt trái đất. Tính giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ theo đơn vị nghìn km (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Chúng ta cần tìm điểm M trên mặt cầu (Trái Đất) sao cho tổng khoảng cách đến hai điểm A và B là nhỏ nhất.

1. Phân tích đề bài

- Trái Đất: Là mặt cầu tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=6$. Phương trình mặt cầu là: $x^2+y^2+z^2=36$.
- Vệ tinh A: Tọa độ $A(26;0;0)$.
- Vệ tinh B: Tọa độ $B(0;26;0)$.
- Điểm M: Nằm trên mặt cầu, tức là $OM=6$.

2. Thiết lập biểu thức cần tối thiểu hóa

Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của $S=MA+MB$.

Do tính đối xứng của bài toán qua mặt phẳng phân giác của góc AOB (mặt phẳng $x=y$), điểm M làm cho $MA+MB$ nhỏ nhất sẽ nằm trong mặt phẳng chứa O,A,B và phải nằm giữa "hướng" của A và B để tổng khoảng cách là ngắn nhất.

Mặt phẳng (OAB) chính là mặt phẳng Oxy $(z=0)$. Khi đó M sẽ có tọa độ dạng $(x;y;0)$.

Vì M thuộc mặt cầu nên $x^2+y^2=6^2=36$.

Để $MA+MB$ nhỏ nhất, theo tính đối xứng, M phải cách đều A và B, suy ra $x=y$.

Thay vào phương trình mặt cầu: $x^2+x^2=36 \Rightarrow 2x^2=36 \Rightarrow x^2=18 \Rightarrow x=y=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Vậy tọa độ điểm M là $(3\sqrt{2};3\sqrt{2};0)$.

3. Tính toán giá trị nhỏ nhất

Tính khoảng cách MA: $MA=\sqrt{(26-3\sqrt{2})^2+(0-3\sqrt{2})^2+(0-0)^2}\approx 22{,}167$

Vì M cách đều A và B nên $MA=MB$.

$S=MA+MB=2\cdot MA\approx 44{,}33$

4. Kết luận

Làm tròn đến hàng đơn vị theo yêu cầu đề bài: **Giá trị nhỏ nhất của $MA+MB$ là 44 (nghìn km).**

➤ BÀI TOÁN TRONG ĐỀ THI TỐT NGHIỆP NĂM 2025

Ví dụ 38: Mô hình toán học sau đây được sử dụng trong quan sát chuyển động của một vật. Trong không gian cho hệ toạ độ $Oxyz$ có $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị trên các trục Ox, Oy, Oz và độ dài của mỗi vectơ đơn vị đó bằng 1 mét. Cho hai điểm A và B, trong đó điểm A có tọa độ là $(7;7;0)$. Một vật (coi như là một hạt) chuyển động thẳng với tốc độ phụ thuộc thời gian t (giây) theo công thức $v(t)=\beta t+300$ (m/giây), trong đó β là hằng số dương và $0\le t\le 6$. Ở thời điểm ban đầu $(t=0)$ vật đi qua điểm A với tốc độ 300 m/giây và hướng tới B. Sau 2 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đi được quãng đường 606 mét. Gọi $\vec{u}=(a;b;c)$ là vectơ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{AB}$. Biết rằng $|\vec{u}|=1$ và góc giữa vectơ $\vec{u}$ lần lượt với các vectơ $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ có số đo tương ứng bằng $60°,60°,45°$.

a) $a=\cos 60°$.

b) Phương trình đường thẳng AB là $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z}{2}$.

c) $\beta=3$.

d) Giả sử sau 5 giây kể từ thời điểm ban đầu, vật đến điểm $B(x_B;y_B;z_B)$. Khi đó $x_B>776$.

Lời giải

1. *Vectơ chỉ phương $\vec{u}$:*

- $\vec{u}=(a;b;c)$ có độ dài $|\vec{u}|=1$ và $\vec{i}(1;0;0)$, $\vec{j}(0;1;0)$, $\vec{k}(0;0;1)$
- Góc giữa $\vec{u}$ và các trục tọa độ lần lượt là $60^\circ,60^\circ,45^\circ$.

Ta có :

$$\cos(\vec{u},\vec{i})=\frac{\vec{u}.\vec{i}}{|\vec{u}||\vec{i}|}\Leftrightarrow \cos 60°=\frac{a\cdot 1+b\cdot 0+c\cdot 0}{1\cdot 1}=a\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$$

$$\cos(\vec{u},\vec{j})=\frac{\vec{u}.\vec{j}}{|\vec{u}||\vec{j}|}\Leftrightarrow \cos 60°=\frac{a\cdot 0+b\cdot 1+c\cdot 0}{1\cdot 1}=b\Leftrightarrow b=\frac{1}{2},$$

$$\cos(\vec{u};\vec{k})=\frac{\vec{u}.\vec{k}}{|\vec{u}||\vec{k}|}\Leftrightarrow \cos 45°=\frac{a\cdot 0+b\cdot 0+c\cdot 1}{1\cdot 1}=c\Leftrightarrow c=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Vậy $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. *Phương trình đường thẳng AB*

- Đường thẳng AB đi qua $A(7;7;0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- Để đơn giản hóa vectơ chỉ phương, ta có thể chọn $\vec{v}=2\vec{u}=(1;1;\sqrt{2})$.
- Phương trình chính tắc phải là: $\dfrac{x-7}{1}=\dfrac{y-7}{1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$.

3. *Hằng số β:*

- Tốc độ $v(t)=\beta t+300$.
- Quãng đường đi được sau 2 giây là 606 m:

$S(2)=\int_0^2(\beta t+300)dt=\left[\frac{\beta t^2}{2}+300t\right]_0^2=2\beta+600$

- Theo đề bài: $2\beta+600=606\Rightarrow 2\beta=6\Rightarrow \beta=3$.

4. Quãng đường vật đi được sau 5 giây là $AB=\int\limits_0^5(3t+300)\,\mathrm{d}t=\frac{3075}{2}$.

Ta có $\overrightarrow{AB}=k\vec{u}$ với $k>0$ suy ra $AB=k.1=k$ hay $k=\frac{3075}{2}$.

Vậy $\overrightarrow{AB}=\frac{3075}{2}\vec{u}$,

Với $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-7;\,y_B-7;\,z_B\right)=\left(\frac{3075}{4};\frac{3075}{4};\frac{3075}{2\sqrt{2}}\right)\Rightarrow x_B-7=\frac{3075}{4}\Rightarrow x_B=775,75<776$

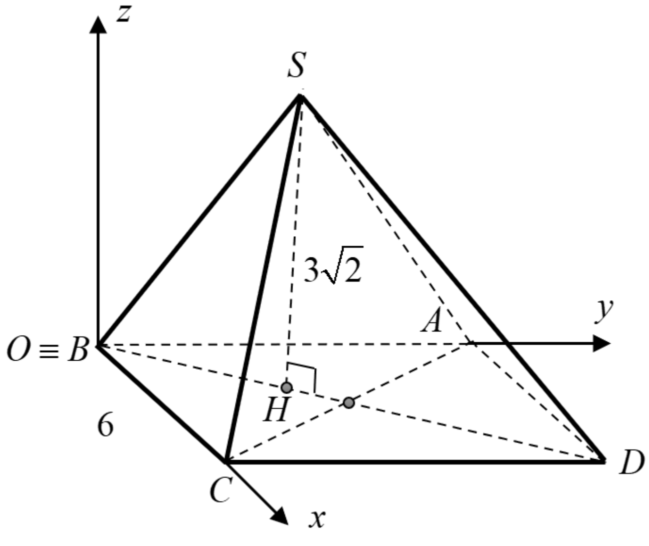
Đánh giá các câu hỏi: ***a)* Đúng.** ***b)* Sai.** ***c)* Đúng.** ***d)* Sai.**

Ví dụ 39: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông với $AB=6$. Biết rằng hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là trọng tâm H của tam giác ABC và $SH=3\sqrt{2}$. Khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và SD bằng bao nhiêu ? *(Không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm)*

Lời giải

Đáp án: 2,55

Cách 1: Tọa độ hóa



Đặt hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ bên.

$A(0;6;0)$, $C(6;0;0)$, $B(0;0;0)$, $H(2;2;0)$, $S\left(2;2;3\sqrt{2}\right)$, $D(6;6;0)$

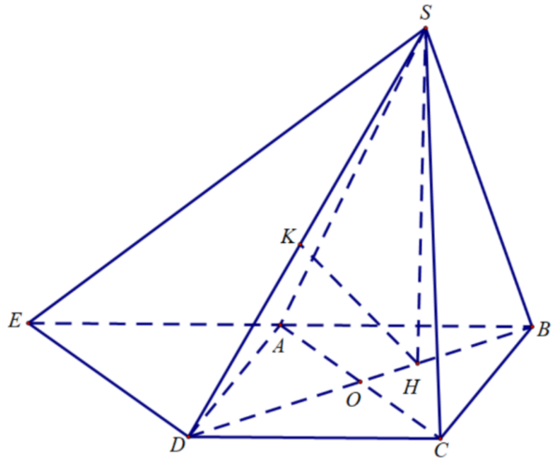
Áp dụng cộng thức: $d(AC,SD)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{AD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD}\right]\right|}$

Ta có: $\overrightarrow{AC}=(6;-6;0)$, $\overrightarrow{SD}=\left(4;4;-3\sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{AD}=(6;0;0)$.

$\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD}\right]=\left(18\sqrt{2};18\sqrt{2};48\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AC},\overrightarrow{SD}\right].\overrightarrow{AD}=108\sqrt{2}$

$$\Rightarrow d\left(AC,SD\right)=\frac{\left|108\sqrt{2}\right|}{\sqrt{\left(18\sqrt{2}\right)^2+\left(18\sqrt{2}\right)^2+48^2}}\approx 2,55$$

***Cách 2:* Làm theo phương pháp lớp 11.**



Gọi $O=AC\cap DB$. Dựng hình bình hành $ACDE$.

Vì H là trọng tâm ΔABC nên $\frac{BH}{BO}=\frac{2}{3}\Rightarrow\frac{BH}{BD}=\frac{1}{3}$ hay $\frac{DH}{DB}=\frac{2}{3}$.

Vì $AC//DE\ \Rightarrow\ AC//\left(SDE\right)$.

Mà $SD\subset\left(SDE\right)$ nên $d\left(AC;SD\right)=d\left(AC;\left(SDE\right)\right)=d\left(O;\left(SDE\right)\right)$.

Trong ΔSHD kẻ $HK\perp SD$ ở K.

Ta có: $DE\perp SH;DE\perp DB$ (do $AC\perp DB;AC//DE$) $\Rightarrow DE\perp\left(SDH\right)\Rightarrow DE\perp HK$.

Mặt khác $HK\perp SD\ \Rightarrow HK\perp\left(SDE\right)\Rightarrow d\left(H;\left(SDE\right)\right)=HK$

Ta có: $\frac{1}{HK^2}=\frac{1}{SH^2}+\frac{1}{DH^2}$

Trong đó $SH=3\sqrt{2}$; $DH=\frac{2}{3}DB=\frac{2}{3}\left(6\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}$.

Do đó $HK=\frac{12\sqrt{2}}{5}\Rightarrow d\left(H,\left(SDE\right)\right)=\frac{12\sqrt{2}}{5}$.

Ta có: $\frac{d\left(H,\left(SDE\right)\right)}{d\left(O;\left(SDE\right)\right)}=\frac{HD}{OD}=\frac{\frac{2}{3}DB}{\frac{1}{2}DB}=\frac{4}{3}$.

$$\Rightarrow d\left(O;\left(SDE\right)\right)=\frac{3}{4}d\left(H;\left(SDE\right)\right)=\frac{3}{4}.\frac{12\sqrt{2}}{5}=\frac{9\sqrt{2}}{5}.$$

Vậy $d\left(AC;SD\right)=d\left(O;\left(SDE\right)\right)=\frac{9\sqrt{2}}{5}\approx 2,55$.

✓ BÀI TẬP THAM KHẢO

☞ PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẲNG

Câu 1. Phần mềm điều khiển máy in 3D cho biết đầu in phun của máy đang đặt tại điểm $M\left(13;5;8\right)$(đơn vị cm). Tính khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật in có phương trình $x-3=0$?

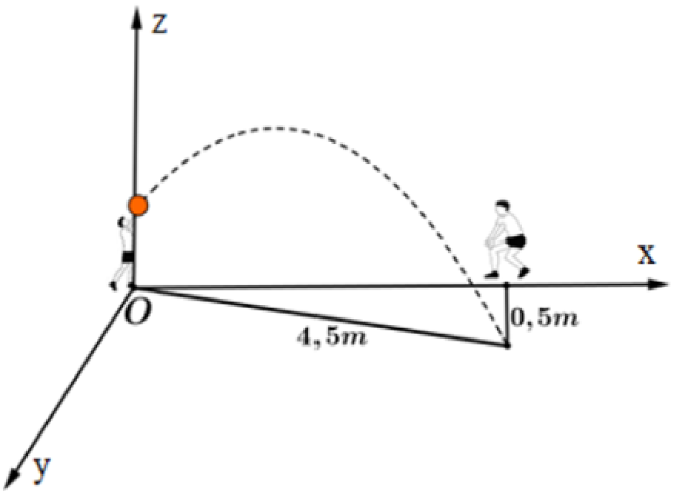
Đáp án: 10

Lời giải

Ta có phương trình mặt phẳng là $\left(P\right):x-3=0$

Khoảng cách từ đầu in đến khay đặt vật là: $d\left(M;\left(P\right)\right)=\dfrac{\left|13-3\right|}{1}=10$

Câu 2. Trong giờ thể dục học về kỹ thuật chuyền bóng hơi, Bình và An tập chuyền bóng cho nhau. Ở một động tác Bình chuyền bóng cho An, quả bóng bay lên cao nhưng lại lệch sang bên trái của An và rơi xuống vị trí cách chỗ An đứng $0,5\,\text{m}$ và cách chỗ Bình $4,5\,\text{m}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ O tại vị trí của Bình, vị trí của An nằm trên tia Ox và mặt phẳng Oxy là mặt đất (tham khảo hình vẽ)



Biết rằng quỹ đạo của quả bóng nằm trong mặt phẳng $\left(\alpha\right):x+by+cz+d=0$ và $\left(\alpha\right)$ vuông góc với mặt đất. Khi đó, giá trị của $-5b^2-c^2+3d^2$ bằng bao nhiêu?

Đáp án: –400.

Lời giải

Quả bóng rơi xuống tại điểm $A\left(\sqrt{20};0,5;0\right)$.

Mặt phẳng $\left(\alpha\right):x+by+cz+d=0$ đi qua O nên $d=0$, điểm $A\left(\sqrt{20};0,5;0\right)$ thuộc $\left(\alpha\right)$ nên có $\sqrt{20}+0,5b=0\Leftrightarrow b=-4\sqrt{5}$.

Mặt khác $\left(\alpha\right)$ vuông góc với mặt đất nên $\vec{n}_{(\alpha)}\perp\vec{n}_{(Oxy)}\Leftrightarrow\vec{n}_{(\alpha)}.\vec{k}=0\Leftrightarrow c=0$.

Vậy mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ có phương trình là $\left(\alpha\right):x-4\sqrt{5}y=0$.

$-5b^2-c^2+3d^2=-400$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét), một ngôi nhà như hình vẽ dưới đây có sàn nhà nằm ngang trên mặt phẳng $\left(\alpha\right):2x+y-3z+18=0$. Hai mái nhà lần lượt nằm trên các mặt phẳng $\left(P\right):x-y=0$, $\left(Q\right):x+y-2z=0$. Hỏi chiều cao của ngôi nhà tính từ sàn nhà đến nóc nhà (điểm cao nhất của mái nhà) là bao nhiêu? (làm tròn đến hàng phần chục)

.

Đáp án: 4,8.

Lời giải

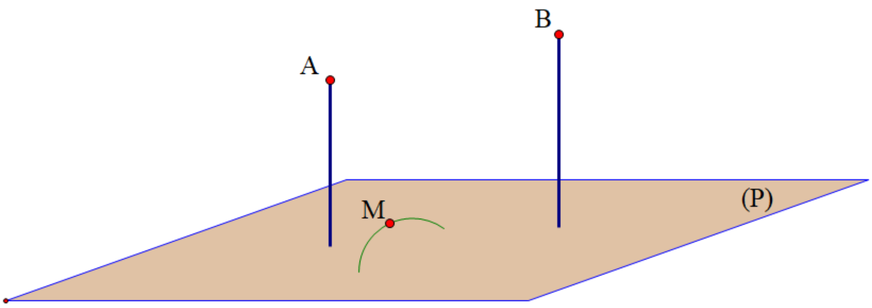
Cần tìm tọa độ một điểm thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

Cho $y=0$, ta giải hệ phương trình: $\begin{cases} x=0 \\ x-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$

Do đó gốc tọa độ $O(0;0;0)$ thuộc đường thẳng giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q)

Khi đó chiều cao từ sàn nhà đến nóc nhà là $d(O;(P))=\dfrac{18}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}=\dfrac{9\sqrt{14}}{7}\approx 4,8m$

Câu 4. Trong hệ toạ độ Oxy (đơn vị độ dài trên mỗi trục tính là mét), một vườn hoa nằm trên mặt phẳng $(P):2x+2y-z-12=0$. Có hai bóng đèn chiếu sáng cố định được đặt tại các điểm $A(40;-40;12)$, $B(-40;50;38)$. Để đảm bảo kĩ thuật chiếu sáng, các kỹ sư muốn thiết kế trên mặt vườn một đường ray để lắp đặt một đèn chiếu sáng M di động trên đường ray ấy. Yêu cầu kĩ thuật đặt ra là góc tạo bởi MA với mặt vườn và góc tạo bởi MB với mặt vườn phải luôn bằng nhau. Độ dài đường ray là bao nhiêu mét? *(kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).*



Đáp án: 1720

Lời giải

Gọi A_1,B_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B lên mặt phẳng (P)

Khi đó yêu cầu bài toán đặt ra $AMA_1=BMB_1$

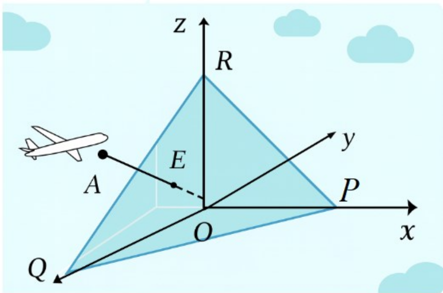
Ta có $AMA_1=BMB_1 \Rightarrow \tan AMA_1=\tan BMB1 \Rightarrow \dfrac{MA_1}{MB_1}=\dfrac{AA_1}{BB_1}=\dfrac{d(A,(P))}{d(B,(P))}=\dfrac{4}{5}$

Xét điểm $I,J:\begin{cases} \overrightarrow{IA_1}=-\dfrac{4}{5}\overrightarrow{IB_1} \\ \overrightarrow{JA_1}=\dfrac{4}{5}\overrightarrow{JB_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I,J\in(P) \\ IMJ=90^\circ \end{cases} \Rightarrow M$ thuộc đường tròn đường kính IJ

Mặt khác ta có $\begin{cases} AA_1 = 8 \\ BB_1 = 10 \\ AB = \sqrt{15176} \end{cases} \Rightarrow A_1B_1 = \sqrt{15172} \Rightarrow IJ = \dfrac{40\sqrt{15172}}{9}$

Vậy điểm M chuyển động trên đường tròn đường kính bằng $\dfrac{20\sqrt{15172}}{9} \Rightarrow$ độ dài của đường day là $2\pi.\dfrac{20\sqrt{15172}}{9} \approx 1720(m)$

Câu 5. Mô phỏng trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục số là kilômét), một máy bay đang ở vị trí $A(6;-8;-1)$ và sẽ hạ cánh ở điểm có tọa độ $O(0;0;0)$ trên đường băng. Có một lớp mây mỏng được mô phỏng bởi một mặt phẳng đi qua ba điểm $P(12;0;0), Q(0;-12;0)$ và $R(0;0;1,2)$. Tính khoảng cách giữa máy bay và đường băng ngay khi máy bay bay xuyên qua lớp mây (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm của kilômét).



Đáp án: 5,02.

Lời giải

Mặt phẳng (PQR) đi qua ba điểm $P(12;0;0), Q(0;-12;0), R(0;0;1,2)$ nên phương trình đoạn chắn của mặt phẳng (PQR) là $\dfrac{x}{12} + \dfrac{y}{-12} + \dfrac{z}{1,2} = 1 \Leftrightarrow x - y + 10z - 12 = 0$

Gọi $M(x_0; y_0; z_0)$ là giao điểm của OA và (PQR). Khi đó, do $\overrightarrow{OM}$ và $\overrightarrow{OA}$ cùng phương nên tồn tại số thực $t \in [0;1]$ sao cho $\overrightarrow{OM} = t\overrightarrow{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6t \\ y_0 = -8t \\ z_0 = t \end{cases}$

Do $M \in (PQR)$ nên ta có

$$x_0 - y_0 + 10z_0 - 12 = 0 \Leftrightarrow 6t - (-8t) + 10t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$$

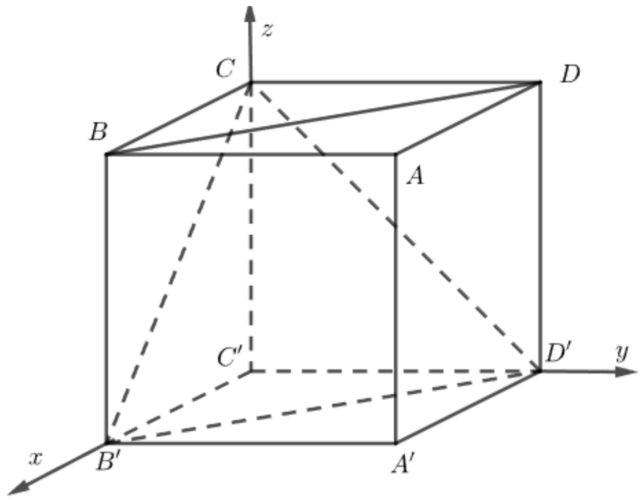
Suy ra $\begin{cases} x_0 = 3 \\ y_0 = -4 \\ z_0 = 0,5 \end{cases} \Rightarrow M(3;-4;0,5)$

Do đó khoảng cách giữa máy bay và đường băng ngay khi máy bay bay xuyên qua lớp mây là $OM = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (0,5)^2} = \sqrt{25,25} \approx 5,02$

Câu 6. Trong một trò chơi mô phỏng bắn súng, một người chơi đặt điểm ngắm tại điểm O là giao điểm của AC và BD trong căn phòng hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có kích thước $AB = 15(m), AD = 20(m), AA' = 25(m)$. Người chơi di chuyển trên đoạn BD có nhiệm vụ bắn trúng một mục tiêu di động trên mặt phẳng $(CB'D')$ Tính khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đó đến mục tiêu (làm tròn đến chữ số thập phân thứ 2).

Đáp án: 10,8

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có $B'(20;0;0), D'(0;15;0), C(0;0,25)$ và $B(20;0;25)$

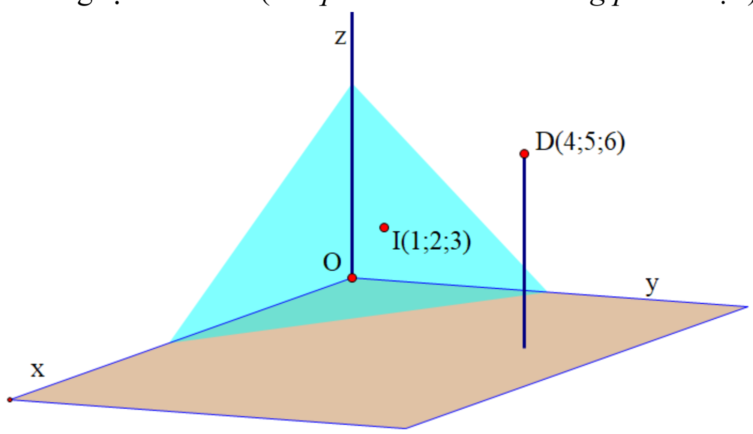
Phương trình mặt phẳng $(B'CD'): \frac{x}{20}+\frac{y}{15}+\frac{z}{25}=1$

Do $BD//(B'CD') \Rightarrow d(BD,(B'CD'))=d(B,(B'CD'))=d(C',(B'CD'))$. Khoảng cách ngắn nhất từ điểm bắn đến mục tiêu chính là khoảng cách từ BD đến mặt phẳng $(B'CD')$. Do vậy ta có

$$d(C',(B'CD'))=\frac{|1|}{\sqrt{\frac{1}{20^2}+\frac{1}{15^2}+\frac{1}{25^2}}}\approx 10,8$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất từ điểm ngắm đến mục tiêu là khoảng $10,8$ mét.

Câu 7. Một nhóm chuyên gia đang nghiên cứu dựng một tấm kính cường lực hình tam giác để đặt vào một góc tường. Biết ba mặt của góc tường đôi một vuông góc và giao tuyến của chúng lần lượt là các tia Ox, Oy, Oz sao cho (Oxy) trùng với mặt phẳng sàn nhà, mỗi đơn vị trong hệ trục tọa độ ứng với $1m$ thực tế. Mặt phẳng kính luôn đi qua điểm I, điểm này cách các mặt phẳng $(Oxy),(Oyz),(Oxz)$ lần lượt là $1m,\ 3m,\ 2m$. Khi khoảng cách từ chiếc đèn có tọa độ $D(4;5;6)$ tới mặt phẳng kính lớn nhất, tính diện tích tấm kính cường lực theo m^2 (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục*)?



Đáp án: 77,3

Lời giải

Từ giả thiết: điểm I cách các mặt phẳng $(Oxy),(Oyz),(Oxz)$ lần lượt là $1m,\ 3m,\ 2m$.

$\Rightarrow$ Điểm I có tọa độ $I(3;2;1)$.

Giả sử A, B, C lần lượt là giao điểm của mặt phẳng chứa kính cường lực (P) với các tia Ox, Oy, Oz.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm D trên mặt phẳng (P).

Ta có: $DH \le ID = \sqrt{35}$.

Dấu “=” xảy ra khi H trùng với I.

Khi đó ID vuông góc với mặt phẳng (P).

Ta có $(P):\begin{cases} \text{qua } I(3;2;1) \\ VTPT\ \vec{n} = \overrightarrow{ID} = (1;3;5) \end{cases} \Rightarrow (P): x+3y+5z-14=0$.

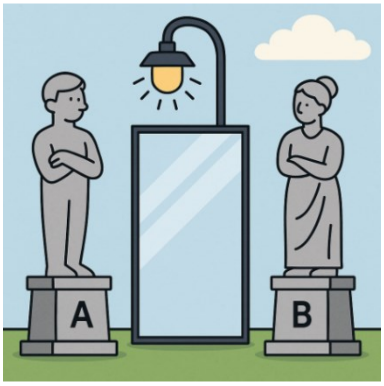
Gọi A,B,C lần lượt là giao điểm của (P) với các tia Ox,Oy,Oz, suy ra:

$A(14;0;0), B\left(0;\frac{14}{3};0\right), C\left(0;0;\frac{14}{5}\right)$.

Diện tích của tấm kính cường lực: $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right| = \frac{196\sqrt{35}}{15} \approx 77,3$

Vậy khi khoảng cách từ chiếc đèn có tọa độ $D(4;5;6)$ tới mặt phẳng kính lớn nhất, diện tích tấm kính cường lực xấp xỉ bằng $77,3\ m^2$.

Câu 8. Trong một quảng trường, có hai bức tượng nghệ thuật được đặt cố định tại các vị trí $A(1;2;-1)$ và $B(-2;1;0)$.



Một trụ đèn chiếu sáng thông minh được lắp đặt trên một tấm kính lớn cố định, có phương trình: $(P): x-2y+z+4=0$. Gọi tọa độ điểm đặt trụ đèn là $M(a;b;c)$.

Để tạo hiệu ứng ánh sáng đối xứng hoàn hảo giữa hai bức tượng, qua tính toán người thiết kế yêu cầu trụ đèn phải cách đều hai điểm A và B sao cho $MA^2 = MB^2 = 2,75$

Tính giá trị của $a+b+c$.

Đáp án: 0,5

Lời giải

Đưa bài toán về thuần $Oxyz$ ta được: cho $A(1;2;-1), B(-2;1;0)$ điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng $(P): x-2y+z+4=0$ sao cho $MA = MB = \frac{\sqrt{11}}{2}$. Tìm giá trị của $a+b+c$

+ Gọi (Q) là mặt phẳng trung trực của đoạn AB, khi đó (Q) qua điểm $I\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$ và có vec tơ pháp tuyến $\overrightarrow{AB}(-3;-1;1)$, nên có phương trình là: $-3\left(x+\frac{1}{2}\right)-\left(y-\frac{3}{2}\right)+\left(z+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow -3x-y+z+\frac{1}{2}=0$.

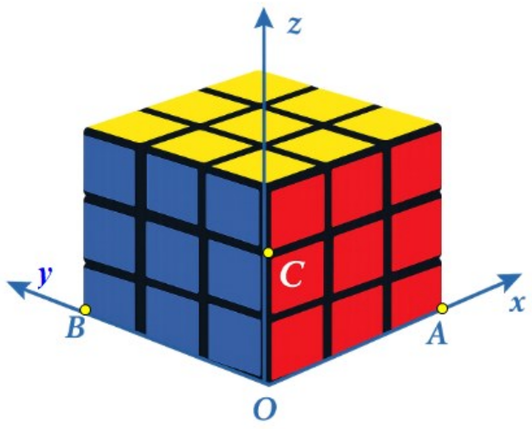
+ Vì $MA = MB$ nên M thuộc mặt phẳng (Q), do đó thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} x-2y+z+4=0 \\ -3x-y+z+\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} -2y+z=-x-4 \\ -y+z=3x-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4x+\frac{7}{2} \\ z=7x+3 \end{cases} \Rightarrow M\left(x;4x+\frac{7}{2};7x+3\right).$$

+ Có $MA = \frac{\sqrt{11}}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(4x+\frac{3}{2}\right)^2 + (7x+4)^2 = \frac{11}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$

+ Vậy $a+b+c = \frac{1}{2}$.

Câu 9. Khối rubik được gắn với hệ toạ độ $Oxyz$ có đơn vị bằng độ dài cạnh của hình lập phương nhỏ (hình vẽ). Xét bốn điểm $A(3;0;0), B(0;3;0), C(0;0;2), D(3k;3k;2k)$ (với $k>0$) đồng phẳng. Biết rằng tọa độ điểm $D(a;b;c)$. Khi đó giá trị $a+2b+3c$ bằng bao nhiêu?



Đáp án: 5

Lời giải

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}+\frac{z}{2}=1$.

Vì $D(3k;3k;2k)$ thuộc mặt phẳng (ABC) nên $\frac{3k}{3}+\frac{3k}{3}+\frac{2k}{2}=1$

$\Leftrightarrow 3k=1 \Leftrightarrow k=\frac{1}{3}$. Vậy $D\left(1;1;\frac{2}{3}\right)$. Khi đó giá trị $a+2b+3c=5$.

Câu 10. Hình vẽ minh họa một khu nhà đang xây dựng được gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên các trục là mét). Mỗi cột bê tông có dạng hình lăng trụ tứ giác đều và tâm của mặt đáy trên lần lượt là các điểm $A(2;1;3), B(4;3;3), C(6;3;2,5), D(4k;0;3k)$. Biết rằng 4 điểm A,B,C,D đồng phẳng, tính giá trị của k (viết kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Đáp án: 0,8.

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(2;2;0)\neq\vec{0}, \overrightarrow{AC}=(4;2;-0,5)\neq\vec{0}$.

Xét: $[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}]=\left(\begin{vmatrix}2 & 0\\ 2 & -0,5\end{vmatrix};\begin{vmatrix}0 & 2\\ -0,5 & 4\end{vmatrix};\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 2\end{vmatrix}\right)=(-1;1;-4)$.

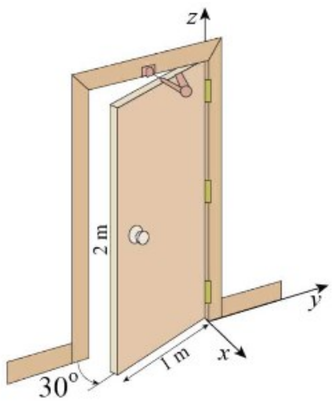
Hay $\vec{n}=(1;-1;4)$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (ABC).

Phương trình mặt phẳng (ABC) là: $1(x-2)-1(y-1)+4(z-3)=0 \Leftrightarrow x-y+4z-13=0$.

Vì A,B,C,D đồng phẳng nên $D\in(ABC)$ thay tọa độ điểm D vào phương trình mặt phẳng (ABC) ta được $4k-0+4.3k-13=0$

$\Leftrightarrow 16k = 13 \Leftrightarrow k = \dfrac{13}{16} \approx 0,8.$

Câu 11. Hình ảnh bên minh hoạ một cánh cửa hình chữ nhật có chiều rộng 1 m và chiều cao 2 m khi đang mở. Chọn hệ toạ độ như hình vẽ, biết cánh cửa tạo với bức tường một góc 30°, bờ tường vuông góc với mặt sàn. Bỏ qua bề dày của cánh cửa thì phương trình mặt phẳng chứa cánh cửa là $x + by + cz + d = 0$. Tính giá trị $9b^2 + 3c^2 + d$.



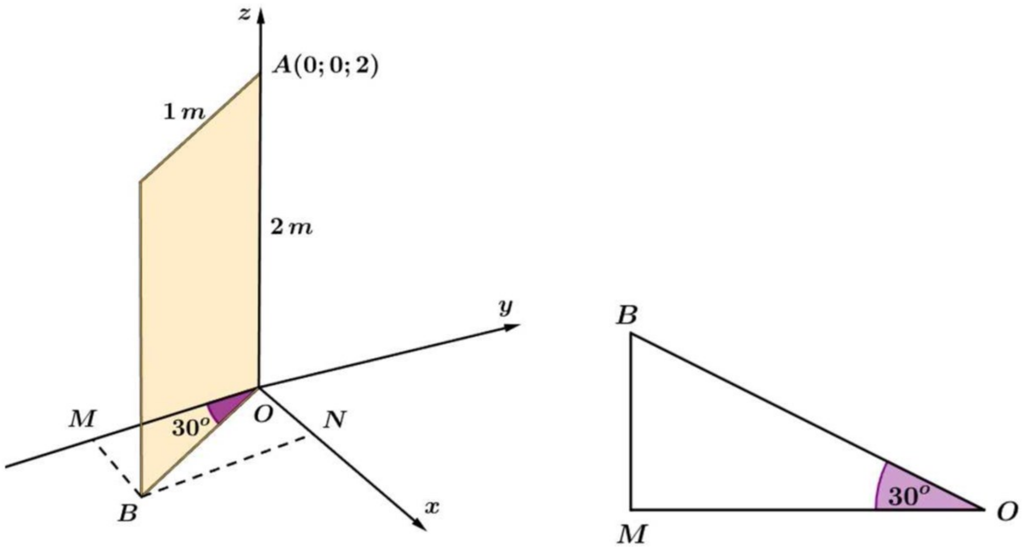
Đáp án: 3.

Lời giải

Giả sử $(H): x + by + cz + d = 0$.

Vì ta đã có dạng của phương trình mặt phẳng chứa cánh cửa (chứa 3 ẩn b, c, d) nên để viết được phương trình mặt phẳng (H), ta cần đi tìm được 3 điểm thuộc mặt phẳng đó.

Ta vẽ lại hình như và kí hiệu các điểm như hình sau:



Với A, B, O là các điểm thuộc mặt phẳng (H). Kẻ $\begin{cases} BM \perp Oy \\ BN \perp Ox \end{cases}$.

Dựa vào hình vẽ, ta thấy mặt phẳng cần tìm đi qua các điểm $A(0;0;2), O(0;0;0), B(BM; -OM; 0)$.

Trong tam giác OBM vuông tại M, ta có

$$\cos BOM = \frac{OM}{OB} \Rightarrow OM = OB \cdot \cos BOM = 1 \cdot \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin BOM = \frac{BM}{OB} \Rightarrow BM = OB \cdot \sin BOM = 1 \cdot \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

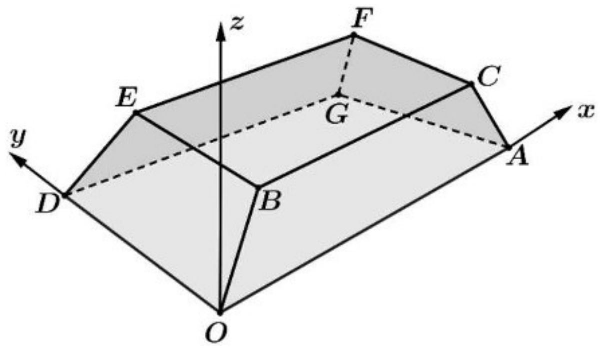
Suy ra $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Vì $A(0;0;2), O(0;0;0), B\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ đều thuộc mặt phẳng (H) nên ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 2c+d=0 \\ d=0 \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}b+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ d=0 \\ b=\frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}.$$

Vậy $9b^2+3c^2+d=9\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=3$.

Câu 12. Một sân vận động được xây dựng theo mô hình là hình chóp cụt $OAGD\cdot BCFE$ có hai đáy song song với nhau. Mặt sân $OAGD$ là hình chữ nhật và được gắn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Mặt sân $OAGD$ có chiều dài $OA=100\,m$, chiều rộng $OD=60\,m$ và tọa độ điểm $B(10;10;8)$. Giả sử phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ có dạng $ax+y+cz+d=0$. Tính giá trị biểu thức $4(a+c+d)$.



Đáp án: –5.

Lời giải

Từ giả thiết, ta có $O(0;0;0); B(10;10;8)$;

$\begin{cases} A\in Ox \\ OA=100\,m \end{cases} \Rightarrow A(100;0;0); \begin{cases} D\in Oy \\ OD=60\,m \end{cases} \Rightarrow D(0;60;0);$

$\oplus\, \overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}=(100;60;0)\Rightarrow G(100;60;0)$

Do $\overrightarrow{OA}=(100;0;0), \overrightarrow{OB}=(10;10;8)\Rightarrow \vec{n}=[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}]=(0;-800;1000)=-200(0;4;-5)$

Suy ra mặt phẳng $(OACB)$ có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_1}=(0;4;-5)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(OACB)$ là $4y-5z=0$.

$\Leftrightarrow y-\frac{5}{4}z=0.$

Do đó $a=d=0, c=-\frac{5}{4}$. Vậy $4(a+c+d)=4\left(0-\frac{5}{4}+0\right)=-5$.

Câu 13. Trong một khung lưới ô vuông gồm các hình lập phương, người ta đưa ra một cách kiểm tra bốn nút lưới (đỉnh hình lập phương) bất kì có đồng phẳng hay không bằng cách gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ vào khung lưới ô vuông và lập phương trình mặt phẳng đi qua ba nút lưới trong bốn nút lưới đã cho. Giả sử có ba nút lưới mà toạ độ lần lượt là $(1;1;10),(4;3;1),(3;2;5)$ và mặt phẳng đi qua ba nút lưới đó có phương trình $x+my+nz+p=0$. Giá trị của $m+n+p$ là bao nhiêu?

Đáp án: –10

Lời giải

Xét các điểm $A(1;1;10), B(4;3;1), C(3;2;5)$.

Khi đó, ta có $\begin{cases} \overrightarrow{AB} = (3;2;-9) \\ \overrightarrow{AC} = (2;1;-5) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (-1;-3;-1)$.

Gọi $\vec{n}$ là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C.

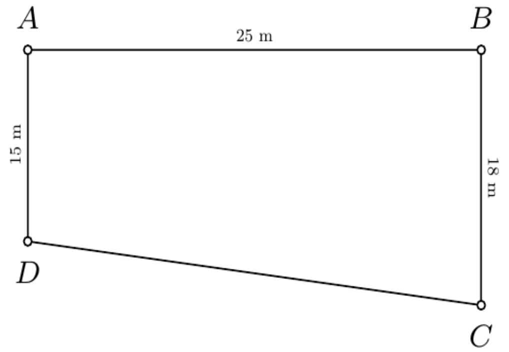
Chọn $\vec{n} = (1;3;1)$.

Suy ra phương trình của mặt phẳng đi qua ba nút lưới là

$1\cdot(x-1) + 3\cdot(y-1) + 1\cdot(z-10) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + z - 14 = 0$

Vậy $m = 3, n = 1, p = -14$ nên $m + n + p = -10$.

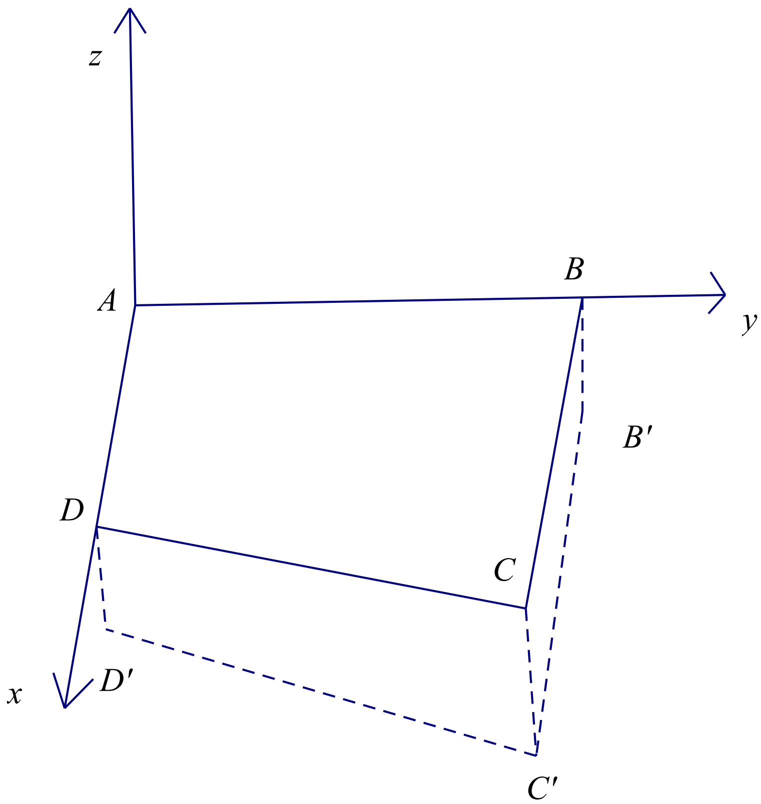
Câu 14. Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D, như hình vẽ.



Bước đầu chúng được lấy " thăng bằng" để có cùng độ cao. Biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25\,\text{m}$, $AD = 15\,\text{m}$, $BC = 18\,\text{m}$. Do yêu cầu kĩ thuật, khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A lần lượt là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng sao cho bốn điểm A, B', C', D' đồng phẳng. Giá trị của a là

Đáp án: 17,2

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $O \equiv A$, tia $Ox \equiv AD$; tia $Oy \equiv AB$.

Khi đó, $A(0;0;0)$; $B(0;2500;0)$; $C(1800;2500;0)$; $D(1500;0;0)$.

Khi hạ độ cao các điểm ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10\,\text{cm}$, $a\,\text{cm}$, $6\,\text{cm}$ tương ứng ta có các điểm mới $B'(0;2500;-10)$; $C'(1800;2500;-a)$; $D'(1500;0;-6)$.

Theo bài ra có bốn điểm A; B'; C'; D' đồng phẳng.

Phương trình mặt phẳng $(AB'D'): x+y+250z=0$.

Do $C'(1800;\,2500;-a)\in(AB'D')$ nên có: $1800+2500-250a=0 \Leftrightarrow a=17,2$.

Vậy $a=17,2\,\text{cm}$.

Câu 15. Một công trình đang xây dựng được gắn hệ trục $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Ba bức tường lần lượt thuộc các mặt phẳng (P), (Q), (R) (như hình vẽ) của tòa nhà lần lượt có phương trình: $(P): 2x+2y-4z+15=0$, $(Q): x+y+z-12=0$, $(R): x+y-2z=0$.

Độ rộng của bức tường thuộc mặt phẳng (Q) của tòa nhà bằng bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần chục).

Đáp án: 3,1

Lời giải

Ta có:

$(P): 2x+2y-4z+15=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P=(2;2;-4)$.

$(Q): x+y+z-12=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_Q=(1;1;1)$.

$(R): x+y-2z=0$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_R=(1;1;-2)$.

Ta có: $\vec{n}_P=2\vec{n}_R$; $\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}=\dfrac{-2}{-4}\neq\dfrac{0}{15}$ nên hai bức tường (P) và (R) song song với nhau.

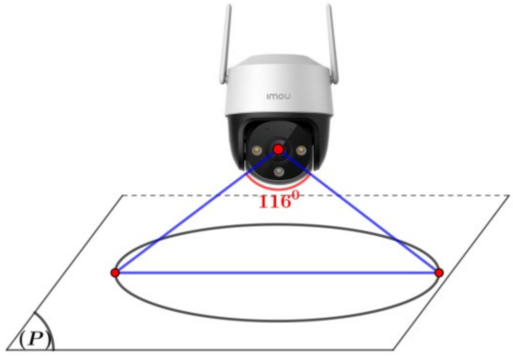
$\vec{n}_R.\vec{n}_Q=1.1+1.1+(-2).1\Rightarrow \vec{n}_R\perp\vec{n}_Q$ nên bức tường (Q) vuông góc với hai bức tường (P) và (R).

Chọn điểm $O(0;0;0)\in(R)$. Do hai bức tường (P) và (R) song song nhau nên:

$$d\big((P),(R)\big)=d\big(O,(P)\big)=\frac{|2.0+2.0-4.0+15|}{\sqrt{2^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{5\sqrt{6}}{4}\approx 3,1 \text{ m}.$$

Vậy độ rộng bức tường (Q) của tòa nhà là $3,1\,m$.

Câu 16. Biết góc quan sát ngang của một camera là $116°$. Trong không gian $Oxyz$, camera được đặt tại điểm $A(2;1;5)$ và chiếu thẳng về phía mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 13 = 0$. Hỏi vùng quan sát được trên mặt phẳng (P) của camera là hình tròn có diện tích bằng bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng phần chục).

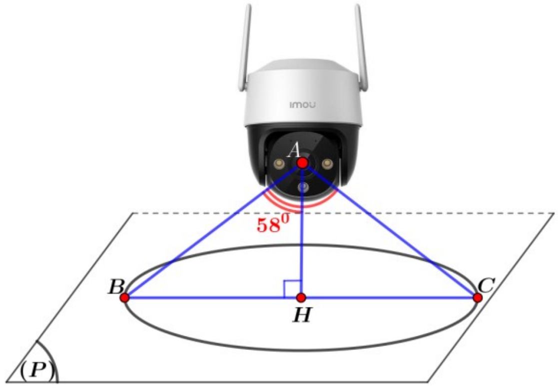


Đáp án: 32,2

Lời giải

Gọi A, B, C là các điểm như hình vẽ bên dưới và H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P).

Hình vẽ



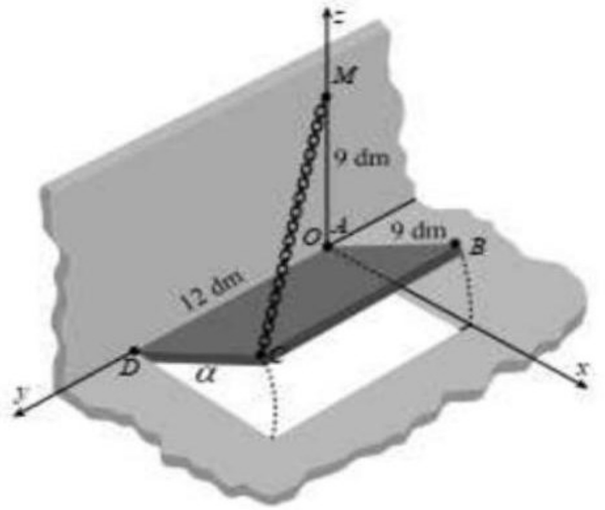
Theo đề $BAC = 116° \Rightarrow BAH = 58°$.

Khi đó $AH = \mathrm{d}\left(A,(P)\right) = \dfrac{|2\cdot 2 - 1 - 2\cdot 5 + 13|}{\sqrt{4+1+4}} = 2$ (đvđd).

Xét tam giác ABH vuông tại H, ta có: $\tan BAH = \dfrac{BH}{AH} \Rightarrow BH = \tan 58° \cdot 2 = 2\tan 58°$ (đvđd).

Vậy vùng quan sát của camera trên mặt phẳng (P) là hình tròn có diện tích $S = \pi r^2 = \pi\left(2\tan 58°\right)^2 \approx 32,2$ (đvdt).

Câu 17. Một nắp bể nước hình chữ nhật $ABCD$ nằm cạnh bờ tường có kích thước $9\text{dm} \times 12\text{dm}$ được kéo dài ra từ mặt sàn, do tác dụng của trọng lực nên nắp bể không thể mở ra được nếu không có người giữ. Người ta dùng một sợi dây xích dài 15 dm và kéo căng nối đỉnh C của hình chữ nhật với điểm M nằm phía trên bờ tường sao cho $AM = 9\text{dm}$ và AM vuông góc với mặt sàn. Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ, khi đó nắp bể mở ra và tạo với mặt sàn một góc α (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng dm). Bỏ qua độ dày của nắp bể.



Phương trình mặt phẳng chứa nắp bể sau khi kéo lên là $x+by+cz+d=0$. Tính $b+c^2-2d=?$

Đáp án : 3

Lời giải

Điểm M nằm trên mặt phẳng (Oyz) với $AM=9\text{dm}\Rightarrow M(0;0;9)\notin z=0$.

Chiếu C lần lượt lên các mặt phẳng ta được $C(9\cos\alpha;12;9\sin\alpha)$.

Ta có: $CM=15\Leftrightarrow CM^2=15^2\Leftrightarrow(9\cos\alpha)^2+12^2+(9\sin\alpha-9)^2=15^2$

$\Leftrightarrow 81\cos^2\alpha+144+81\sin^2\alpha-162\sin\alpha+81=225\Leftrightarrow\cos^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha+1=1$

$\Leftrightarrow 1-2\sin\alpha+1=1\Leftrightarrow\sin\alpha=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\alpha=30^\circ$.

Mặt phẳng kéo lên $(ABCD)$ qua điểm $A(0;0;0)$ chứa AB và AD

Ta có: $\overrightarrow{AD}=(0;12;0)$ và $\overrightarrow{AC}=\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2};12;\dfrac{9}{2}\right)$

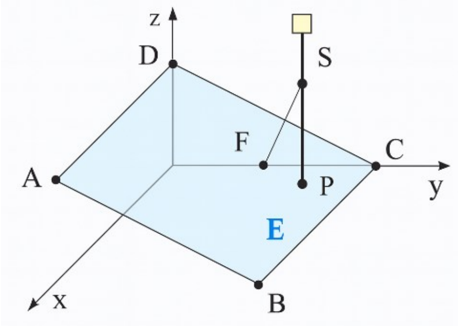
Vecto pháp tuyến của mặt $(ABCD)$ là $\left[\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD}\right]=\left(54;0;-54\sqrt{3}\right)=54\left(1;0;-\sqrt{3}\right)$

Vậy phương trình mặt phẳng chứa nắp pể sau khi kéo lên là $x-\sqrt{3}z=0$. Cách2: Mặt phẳng kéo lên $(ABCD)$ đi qua trục Oy nên có phương trình tổng quát là $x+az=0$.

Mặt phẳng kéo lên $(ABCD)$ đi qua $C\left(\dfrac{9\sqrt{3}}{2};12;\dfrac{9}{2}\right)$ nên $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}+a\cdot\dfrac{9}{2}=0\Rightarrow a=-\sqrt{3}$.

Vậy phương trình mặt phẳng chứa nắp bể sau khi kéo lên là $x-\sqrt{3}z=0$.

Câu 18. Trên sườn dốc E được xác định bởi các điểm $A(12;0;5),B(12;10;0),C(0;10;0)$ và $D(0;0;5)$, tại điểm $P(4;8;1)$ có đặt một ăng-ten.



Tại điểm $S(4;8;6)$ sẽ lắp một thanh chống, sao cho thanh này vuông góc và chạm vào sườn dốc tại điểm F.

Hãy tính chiều dài của thanh chống đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Đáp án: 4,47

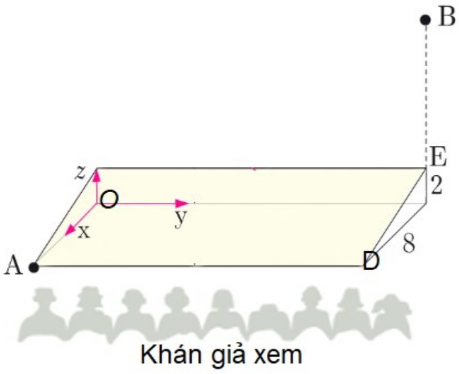
Lời giải

Vì $A(12;0;5), D(0;0;5)$ (cùng $y=0 \Rightarrow z=5$) và $B(12;10;0), C(0;10;0)$ (cùng $y=10 \Rightarrow z=0$), suy ra phương trình mặt phẳng $(E): 2z+y-10=0 \quad (\vec{n}=(0;1;2))$

Thanh chống từ $S(4;8;6)$ vuông góc mặt phẳng

Chiều dài thanh chống $|SF| = d(S,(E)) = \dfrac{|2.6+8-10|}{\sqrt{4+1}} = 2\sqrt{5} \approx 4,47m.$

Câu 19. Một buổi biểu diễn sân khấu diễn ra trên một sân khấu nghiêng về phía khán giả.



Cuối buổi biểu diễn, nữ diễn viên chính rời sân khấu trong một chiếc ghế treo trên dây, di chuyển từ điểm $A(8;0;0)$ đến điểm $B(0;20;10)$. Sau khi đi được $\dfrac{3}{4}$ quãng đường, cô ấy dừng lại để thực hiện động tác cuối. Hãy tính khoảng cách của cô ấy đến mặt phẳng sân khấu tại thời điểm đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Đáp án: 5,82

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, ta có: $A(8;0;0)$, $D(8;20;0)$ và $E(0;20;2)$

Mặt phẳng sân khấu

Vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(40;0;160)$ rút gọn được $(1;0;4)$.

Phương trình mặt phẳng qua $A(8;0;0)$: $1(x-8)+0(y-0)+4(z-0)=0 \Rightarrow E: x+4z-8=0$

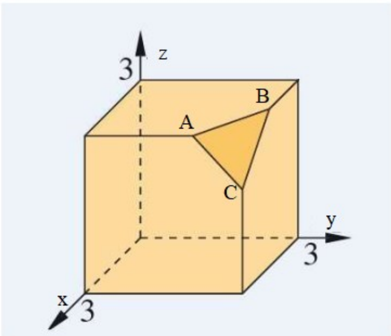
Di chuyển treo dây từ $A(8;0;0)$ đến $B(0;20;10)$; dừng ở $\dfrac{3}{4}$ quãng đường

Điểm dừng: $\overrightarrow{AC} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB} \Rightarrow C(2;15;7,5)$

Khoảng cách vuông góc đến mặt phẳng sân khấu: $d(C,E) = \dfrac{|2+4.7,5-8|}{\sqrt{1+4^2}} = \dfrac{24}{\sqrt{17}} \approx 5,82$

Câu 20. Do có ánh kim loại và màu vàng óng, pyrit (FeS_2) còn được gọi là vàng găm. Thường gặp dưới dạng lập phương hoặc bát diện hoàn hảo, đôi khi nhiều tinh thể dính liền nhau. Thỉnh thoảng cũng thấy các khối lập phương pyrit bị mất một góc, tạo thành một hình chóp tam giác đều.

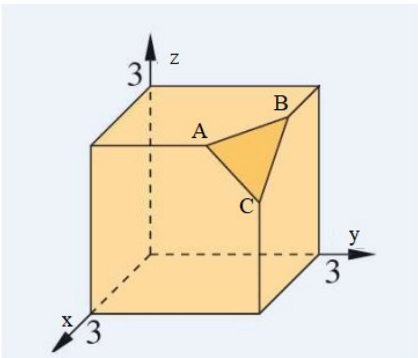
Xét một khối lập phương pyrit cạnh 3 cm, bị mất một góc dưới dạng hình chóp tam giác đều có các cạnh bên dài 1 cm.



Phương trình của mặt phẳng vỡ có dạng $ax+by+cz+2=0$. Tìm $a+b+c$

Đáp án: –1

Lời giải



Ta có $A(3;2;3), B(2;3;3), C(3;3;2)$

$\overrightarrow{AB}=(2-3;3-2;3-3)=(-1;1;0)$

$\overrightarrow{AC}=(3-3;3-2;2-3)=(0;1;-1)$

$\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(1;-1;-1)$

Phương trình mặt phẳng đi qua điểm $A(3;2;3)$

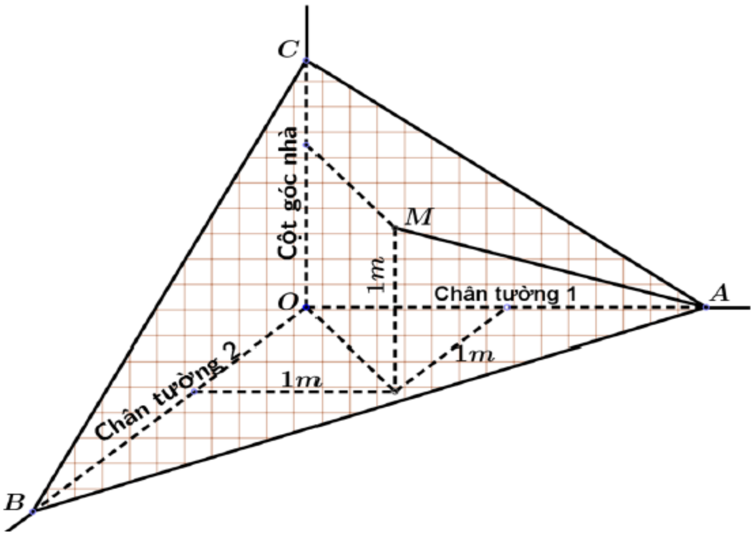
$1(x-3)-1(y-2)-1(z-3)=0$

$\Rightarrow x-3-y+2-z+3=0$

$\Leftrightarrow x-y-z+2=0$

Câu 21. Trong quá trình ông An xây nhà thì phải đổ bê tông cho một mái vát để lợp ngói. Ông tính toán việc ghép cốt pha đi qua điểm B trên một chân tường và điểm C trên cột góc nhà và tận dụng một chiếc cột có sẵn cách đều hai bức tường $1m$ và chiều cao $1m$ (đỉnh cột là điểm M) để chống mặt ghép, đồng thời mặt ghép cốt pha phải đi qua điểm A trên một chân tường còn lại cách điểm O một khoảng $4m$ (tham khảo hình vẽ). Biết rằng hai bức tường được xây vuông góc với nhau, mỗi bức tường đều vuông góc với sàn mái nhà.

Diện tích nhỏ nhất của khung ghép cốt pha ABC là bao nhiêu mét vuông (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Đáp án: 8,34

Lời giải

Gọi mặt phẳng đi qua $A(4;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c); b, c > 0$ có phương trình là $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$. Mặt khác ta có (ABC) đi qua điểm $M(1;1;1) \Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{4}$.

Từ $\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{3}{4} \Rightarrow 3bc=4(b+c) \Rightarrow 3bc \geq 8\sqrt{bc} \Rightarrow bc \geq \frac{64}{9}$.

Mặt khác $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{(bc)^2+16(b^2+c^2)}$

và từ $3bc=4(b+c) \Rightarrow 16(b^2+c^2)=9(bc)^2-32bc$.

Khi đó $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{10(bc)^2-32bc}, bc \geq \frac{64}{9}$. Xét $f(x)=10x^2-32x, x \geq \frac{64}{9} \Rightarrow Minf(x)=f\left(\frac{64}{9}\right)$.

Vậy $\min(S_{\Delta ABC})=\frac{1}{2}\sqrt{f\left(\frac{64}{9}\right)} \approx 8,338$.

Làm tròn đến hàng phần trăm ta có $\min(S_{\Delta ABC})=\frac{1}{2}\sqrt{f\left(\frac{64}{9}\right)}=8,34$.

Câu 22. Trong hoạt động quay phim và chụp ảnh chuyên nghiệp, tấm hắt sáng là một công cụ không thể thiếu. Một ê-kíp nhận dự án chụp hình cho một căn hộ phục vụ cho mục đích quảng cáo. Tấm hắt sáng được đặt trên một bề mặt gỗ mỏng hình tam giác, mỗi đỉnh của mặt gỗ đặt trên một chiếc cọc lần lượt cao 2m, 1m và 0,5m. Cọc cao nhất đặt ở góc tường, cọc cao 1m sẽ đặt ở tường sau nhà, cách tường trái 2m, cọc còn lại đặt ở tường bên trái, cách tường sau 1m. Để đảm bảo sự chắc chắn, người ta chống một chiếc cọc vuông góc mặt đất và đỡ phía dưới mặt gỗ, cách mỗi bức tường 0,5m (chân cọc chống đỡ ở mặt đất).

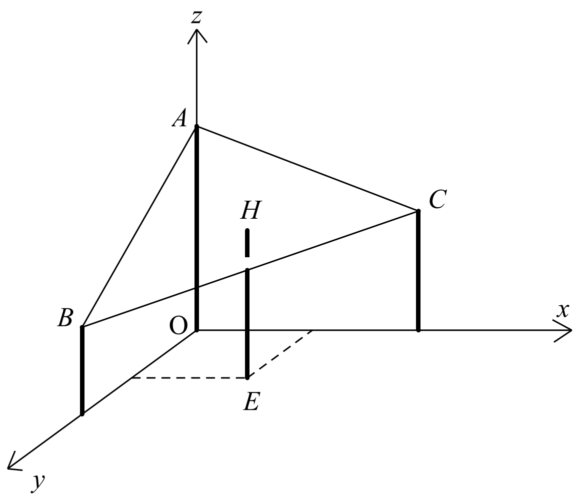
Hỏi chiếc cọc chống đỡ này có chiều dài bao nhiêu mét?

Đáp án: 1

Lời giải

Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ vào phía góc tường, điểm $O(0;0;0)$ trùng với góc tường, trục cao Oz trùng với cọc cao nhất và hai trục Ox, Oy lần lượt là hai đường chân tường. Mỗi đơn vị ứng với 1 mét thực tế.

Đỉnh của các cọc có chiều cao giảm dần lần lượt là các điểm A, C, B. Chiếc cọc chống đặt tại điểm E và điểm tiếp xúc giữa mặt gỗ và cọc chống là điểm H.



Theo đề bài, ta được các điểm: $A(0;0;2)$; $C(2;0;1)$; $B\left(0;1;\frac{1}{2}\right)$; $E\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$.

Khi đó chiều dài cọc chống chính là độ dài đoạn thẳng HE và H là điểm thỏa mãn nằm trên $mp(ABC)$ sao cho $\overrightarrow{EH}$ cùng phương với $\overrightarrow{OA}$.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=\left(0;1;-\frac{3}{2}\right)$; $\overrightarrow{AC}=(2;0;-1)$.

Mặt phẳng (ABC) nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-3;-2)$ là vectơ pháp tuyến.

Mặt phẳng (ABC) qua $A(0;0;2)$ có phương trình:

$-1(x-0)-3(y-0)-2(z-2)=0 \Leftrightarrow x+3y+2z-4=0$.

Gọi $H(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{EH}=\left(x-\frac{1}{2};y-\frac{1}{2};z\right)$

Có $\overrightarrow{OA}=(0;0;2)$. Mà $\overrightarrow{EH}$ cùng phương với $\overrightarrow{OA} \Rightarrow \overrightarrow{EH}=k\overrightarrow{OA}$.

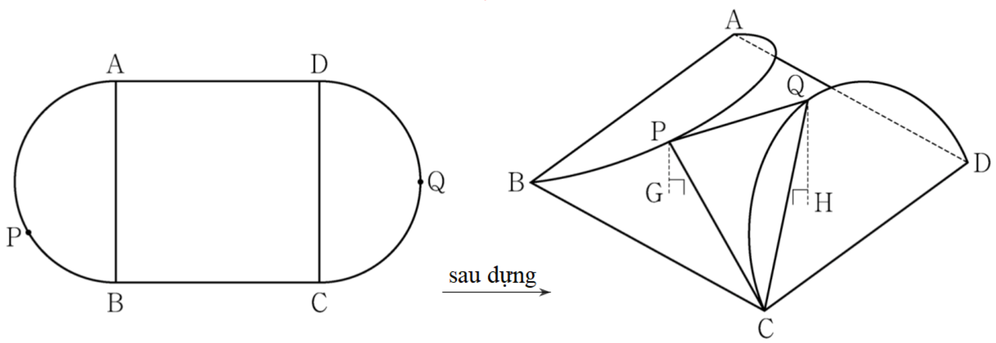
$$\overrightarrow{EH}=(0;0;2k)\Rightarrow\begin{cases}x-\frac{1}{2}=0\\ y-\frac{1}{2}=0\\ z=2k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{2}\\ y=\frac{1}{2}\\ z=2k\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};2k\right).$$

Lại có $H\in(ABC)\Rightarrow\frac{1}{2}+3.\frac{1}{2}+2.2k-4=0\Rightarrow k=\frac{1}{2}\Rightarrow H\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};1\right)$.

Khi đó $\overrightarrow{EH}=(0;0;1)\Rightarrow EH=1$.

Như vậy chiều dài cọc chống đỡ này là 1 mét.

Câu 23. Cho tờ giấy có hình dạng như sau: một hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 8, ở hai cạnh đối diện AB và CD lần lượt gắn hai nửa đường tròn có đường kính là mỗi cạnh ấy. Trên cung tròn AB, lấy 2 điểm chia thành ba đoạn bằng nhau, lấy điểm gần B là P. Trên cung tròn CD, lấy điểm Q chia thành hai đoạn bằng nhau. Gấp tờ giấy lên theo hai đường thẳng AB và CD sao cho hai nửa đường tròn dựng đứng (cùng phía) lên khỏi mặt phẳng $ABCD$. Khi đó, từ hai điểm P và Q ta hạ các đường vuông góc xuống mặt phẳng $(ABCD)$ được các hình chiếu là G và H.



Người ta cho biết G và H nằm bên trong hình vuông $ABCD$ sao cho $PG=\sqrt{3};QH=2\sqrt{3}$. Gọi θ là góc giữa mặt phẳng (PCQ) và mặt phẳng $(ABCD)$. Hỏi giá trị của $70\cos^2\theta$ bằng bao nhiêu?

Đáp án: 40

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$, sao cho $O\equiv C(0;0;0)$, tia $Ox\equiv CD$, tia $Oy\equiv CB$, tia Oz thẳng đứng lên.

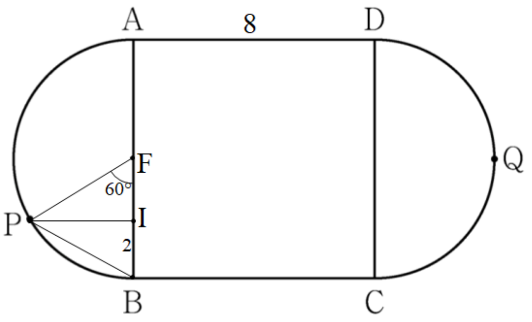
Gọi $E(4;0;0)$ là trung điểm của CD, khi đó $QE=4, EH=\sqrt{QE^2-QH^2}=2$

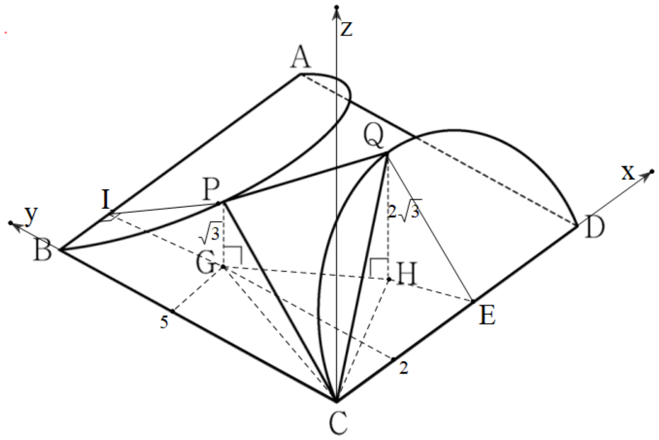
Suy ra tọa độ $H(4;2;0)$ và $Q(4;2;2\sqrt{3})$

Gọi F là trung điểm AB, khi đó tam giác PFB là tam giác đều có cạnh dài bằng 4.

Kẻ $PI\perp AB$ tại I, khi đó $PI=2\sqrt{3}$, từ đó ta suy ra được $IG=\sqrt{PI^2-PG^2}=3$

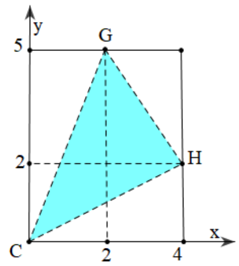
Suy ra tọa độ $G(2;5;0)$ và $P(2;5;\sqrt{3})$





Xét ΔPCQ có: $\begin{cases} PC = 4\sqrt{2} \\ CQ = 4\sqrt{2} \\ PQ = 4 \end{cases}$ là một tam giác cân tại C, suy ra $S_{\Delta PCQ} = \dfrac{1}{2}.2\sqrt{7}.4 = 4\sqrt{7}$

Xét $\Delta CGH \in (Oxy)$ ta có: $G(2;5); H(4;2)$



Suy ra $S_{\Delta GCH} = 20 - (5+3+4) = 8$

Ta dễ thấy được CGH là hình chiếu vuông góc của tam giác CPQ lên mặt phẳng $ABCD$ nên: $\cos\theta = \dfrac{S_{\Delta GCH}}{S_{\Delta PCQ}} = \dfrac{8}{4\sqrt{7}} \Rightarrow 70\cos^2\theta = 70.\left(\dfrac{2}{\sqrt{7}}\right)^2 = 40$

Lời bình của mình sau khi giải bài này

Ở bài này, đối với một số bạn học sinh, sau khi tìm được tọa độ, các bạn sẽ tìm vecto pháp tuyến, rồi tìm góc, nhưng tính toán sẽ dài và dễ sai. Cho bên mình giải theo cách này sẽ đẹp mắt hơn!

☛ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Câu 24. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5;\ 0;\ 5)$ đến vị trí $B(10;\ 10;\ 3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a;\ b;\ 0)$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu (viết kết quả dưới dạng số thập phân)?

Đáp án: 42,5.

Lời giải

Phương trình đường thẳng AB là: $\dfrac{x-5}{5}=\dfrac{y}{10}=\dfrac{z-5}{-2}$.

Vì M thuộc AB nên tồn tại số thực t sao cho $M(5t+5;\ 10t;\ -2t+5)$.

Ngoài ra, M thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $-2t+5=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{5}{2}$.

Suy ra $M(17,5;\ 25;\ 0)$. Vậy $a+b=17,5+25=42,5$.

Câu 25. Một phần mềm mô phỏng vận động viên tập bắn bia mục tiêu có kích thước nhỏ $(42\,\text{cm}\times 42\,\text{cm})$ trong không gian $Oxyz$ (giả sử $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1\,\text{cm}$). Cho biết vận động viên đó sử dụng thước ngắm 3 và đứng cách xa bia mục tiêu là 100 m, trục d của nòng súng và cọc đỡ bia d' lần lượt có phương trình $d:\begin{cases}x=t\\y=2\\z=4\end{cases}$ và $d':\begin{cases}x=1\\y=2\\z=1+3t'\end{cases}$. Để bắn trúng hồng tâm (thang điểm 10) thì vận động viên phải ngắm bắn vào điểm $N(a;b;c)\in d'$ và cách giao điểm của d và d' một khoảng 6 cm. Khi $c<0$, tính giá trị biểu thức $2a-b+3c$.

Đáp án: –6.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của d và d'. Giải hệ $\begin{cases}t=1\\2=2\\4=1+3t'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t=1\\t'=1\end{cases} \Rightarrow I(1;2;4)$.

Vì $N(a;b;c)\in d' \Rightarrow N(1;2;1+3t')$ và N cách giao điểm I một khoảng 6 cm nên $IN=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{(1-1)^2+(2-2)^2+(3t'-3)^2}=6$

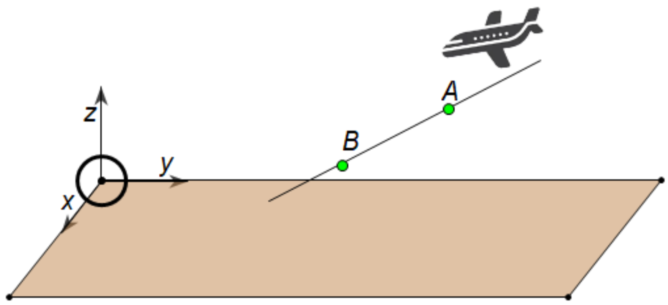
$\Leftrightarrow |3t'-3|=6 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}3t'-3=6\\3t'-3=-6\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t'=3\\t'=-1\end{array}\right.$.

Với $t'=3 \Rightarrow N(1;2;10)$ (không thỏa yêu cầu đề bài).

Với $t'=-1 \Rightarrow N(1;2;-2)$ (thỏa yêu cầu đề bài).

Vậy $a=1$; $b=2$; $c=-2 \Rightarrow 2a-b+3c=2.1-2+3.(-2)=-6$.

Câu 26. Xét trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay đặt ở gốc toạ độ $O(0;0;0)$, đơn vị trên mỗi trục là ki-lô-mét. Một máy bay chuyển động theo đường thẳng, bay qua hai vị trí $A(-500;-300;500)$ và $B(-200;-200;450)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát không lưu nhất, toạ độ máy bay là $(a;b;c)$. Tính giá trị của biểu thức $P=a+b+c$.



Đáp án: 400.

Lời giải

Máy bay chuyển động theo đường thẳng Δ đi qua hai điểm A,B nên sẽ ở gần đài kiểm soát không lưu nhất khi nó ở vị trí H là hình chiếu vuông góc của gốc O lên đường thẳng Δ.

+ Đường thẳng Δ đi qua A,B nên có VTCP là $\overrightarrow{AB}(300;100;-50)$ do đó phương trình tham số là $\begin{cases} x=-500+6t \\ y=-300+2t \\ z=500-t \end{cases}$.

+ Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên Δ thì

$H(-500+6t;-300+2t;500-t) \Rightarrow \overrightarrow{OH}(-500+6t;-300+2t;500-t)$, khi đó

$OH \perp \Delta$ nên $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AB}=0 \Leftrightarrow 300(-500+6t)+100(-300+2t)-50(500-t)=0$

$\Leftrightarrow t=100$, suy ra $H(100;-100;400)$.

Vậy $P=a+b+c=400\ (km)$.

Câu 27. Khi khắc phục hậu quả của thiên tai, bão lũ, một trong những giải pháp nhằm tiếp tế hàng cứu trợ đến những nơi khó tiếp cận là sử dụng flycam để xác định vị trí chính xác của người cần cứu trợ, sau đó sử dụng drone để vận chuyển các vật dụng thiết yếu thả xuống cho người này, giúp họ có thể cầm cự trong khi chờ đợi lực lượng cứu hộ đến nơi. Hai chiếc drone làm nhiệm vụ chuyển hàng cứu trợ bay lên từ cùng một địa điểm. Chiếc thứ nhất bay đến điểm cách điểm xuất phát 2,5km về phía nam và 1,5km về phía đông, đồng thời cách mặt đất 60m. Chiếc thứ hai bay đến điểm cách điểm xuất phát 3km về phía bắc và 2,5km về phía tây, đồng thời cách mặt đất 40m.Trong không gian, xét hệ tọa độ $Oxyz$ với gốc tọa độ O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (được coi là mặt phẳng). Giả sử trong trường hợp khẩn cấp cần tìm một vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng cứu trợ cho hai drone sao cho tổng khoảng cách từ vị trí tiếp nhiên liệu tới hai drone nhỏ nhất. Vị trí cần tìm cách gốc tọa độ a km theo hướng bắc và b km theo hướng tây. Khi đó $a+b$ bằng bao nhiêu?

Đáp án: 1,7.

Lời giải

Ta có: $60m=0,06km$; $40m=0,04km$

Chọn hệ trục toạ độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai drone, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox có hướng trùng với hướng nam, trục Oy có hướng trùng với hướng đông, trục Oz vuông góc với mặt đất hướng lên bầu trời, đơn vị trên mỗi trục tính theo km.

Chiếc drone thứ nhất bay đến điểm $A(2,5;1,5;0,06)$, chiếc drone thứ hai bay đến điểm $B(-3;-2,5;0,04)$

Gọi $C(x;y;0)$ là vị trí trên mặt đất để tiếp nhiên liệu và các vật dụng.

Điểm đối xứng với A qua mặt phẳng (Oxy) là $A'(2,5;1,5;-0,06)$. Khi đó: $AC+CB=A'C+CB$

Vì A',C,B khác phía so với (Oxy) nên $A'C+CB$ nhỏ nhất khi A',C,B thẳng hàng.

$\Rightarrow C=A'B\cap(Oxy)$

Ta có $\overrightarrow{BA'}=(5,5;4;-0,1)$

Phương trình đường thẳng BA': $\begin{cases}x=-3+5,5t\\y=-2,5+4t\\z=0,04-0,1t\end{cases}$

Phương trình mặt phẳng (Oxy): $z=0$

Giao điểm của $A'B$ với (Oxy) là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=-3+5,5t\\y=-2+4t\\z=0,04-0,1t\\z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=\dfrac{2}{5}\\x=-\dfrac{4}{5}\\y=-\dfrac{9}{10}\\z=0\end{cases}\Rightarrow C\left(-\dfrac{4}{5};-\dfrac{9}{10};0\right)$

Suy ra $a=\dfrac{4}{5};b=\dfrac{9}{10}\Rightarrow a+b=\dfrac{17}{10}=1,7$.

Câu 28. Đường ống dẫn trên không là hệ thống đường ống được treo trên các giá đỡ hoặc cột cao, dùng để vận chuyển dầu thô hoặc các sản phẩm dầu mỏ từ nơi này đến nơi khác mà không cần chôn dưới lòng đất. Hệ thống này thường được sử dụng trong các khu vực có địa hình khó khăn, vùng băng giá, rừng rậm,… những nơi mà việc đào đường ống ngầm không khả thi.

Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, đơn vị trên mỗi trục là mét, người ta thiết lập một đường ống dẫn dầu trên không dọc theo đường thẳng $d:\begin{cases}x=t\\y=0\\z=16\end{cases}$ (t là tham số). Vì địa hình phức tạp, người ta đành chọn điểm $A(12;10;15)$ cạnh vách núi để làm điểm trung chuyển từ mặt đất (mặt phẳng Oxy) đến đường ống này. Dựa vào kinh nghiệm của mình họ phải chọn vị trí B thuộc đường ống và vị trí C thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài các đoạn đường AB,BC,AC là bé nhất, tìm giá trị bé nhất đó theo đơn vị mét, làm tròn đến hàng phần chục.

Đáp án: 42,6.

Lời giải

Vì điểm $A(12;10;15)$ và đường thẳng d cố định, nên khoảng cách từ A đến d không đổi

Vậy khoảng cách từ điểm A đến điểm B nhỏ nhất bằng khoảng cách từ A đến đường thẳng d.

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d, (α) nhận $\vec{n}=(1;0;0)$ làm vectơ pháp tuyến (α): $x-12=0$

Khi đó B là giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow B(12;0;16)$

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua mặt phẳng $(Oxy) \Rightarrow A'(12;10;-15)$ và $CA=CA'$

Ta có $AB+AC+BC=AB+BC+A'C$

Để tổng độ dài các đoạn đường AB,BC,AC là bé nhất thì B,C,A' thẳng hàng

$\Rightarrow AB+BC+A'C=AB+BA'$

Mà $\overrightarrow{AB}(0;-10;1)$; $\overrightarrow{BA'}(12;10;-15)$

$\Rightarrow AB+BC+A'C=AB+BA'=\sqrt{10^2+31^2}+\sqrt{10^2+1^2}\approx 42,6$

Câu 29. Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh.

Với hệ trục toạ độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), toạ độ của A và B lần lượt là $A(3;2,5;15)$ và $B(21;27,5;10)$. Khi du khách khi ở độ cao 12 mét thì tọa độ của du khách lúc đó là $M(a;b;c)$. Tính giá trị biểu thức $T=a+b+c$.

Đáp án: 43,3.

Lời giải

Phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline là đường thẳng AB.

Ta có: $A(3;2,5;15)$, $B(21;27,5;10) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(18;25;-5)$

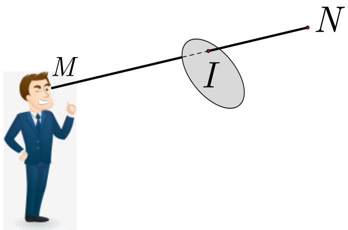
Phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline là $\begin{cases} x=3+18t \\ y=2,5+25t \\ z=15-5t \end{cases} (t\in\mathbb{R})$.

Khi du khách khi ở độ cao 12 mét $\Rightarrow z=12 \Rightarrow 15-5t=12 \Rightarrow t=\dfrac{3}{5}$

Thay $t=\dfrac{3}{5}$ vào phương trình đường thẳng AB ta được $\begin{cases} x=13,8 \\ y=17,5 \\ z=12 \end{cases} \Rightarrow M(13,8;17,5;12)$

Vậy $T=a+b+c=13,8+17,5+12=43,3$.

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt tại điểm $M(1;2;3)$ và vật cần quan sát đặt tại điểm $N(2;3;-12)$. Một tấm bìa cứng có dạng hình tròn thuộc mặt phẳng Oxy tâm đặt tại gốc tọa độ, bán kính R che khuất tầm nhìn của người quan sát. Khi đó bán kính của tấm bìa nhỏ nhất là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Đáp án: 2,51.

Lời giải

Giả sử người quan sát không nhìn thấy vật khi và chỉ khi người quan sát không nhìn thấy điểm N, hay tấm bìa cứng che khuất điểm N. Khi đó, đoạn thẳng MN cắt tấm bìa cứng tại điểm I thuộc mặt phẳng Oxy.

Phương trình đường thẳng $MN:\begin{cases} x=1+t \\ y=2+t \\ z=3-15t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

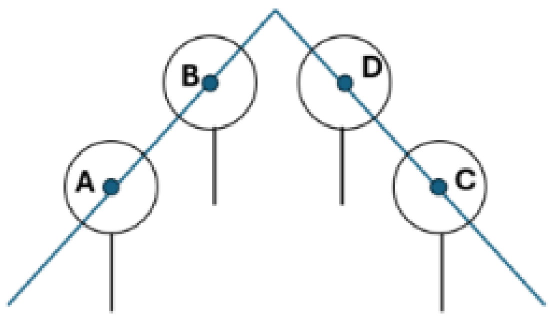
$I=MN\cap Oxy: z=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{5}\Rightarrow I\left(\dfrac{6}{5};\dfrac{11}{5};0\right)$.

Vì $z_M.z_N=-36<0$ nên M,N nằm về hai phía của I hay tấm bìa có thể che khuất vật.

Mặt khác, tấm bìa hình tròn có tâm là gốc tọa độ nên tấm bìa muốn che khuất vật khi và chỉ khi

$R\ge OI=\sqrt{\left(\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(\dfrac{11}{5}\right)^2+0^2}=\dfrac{\sqrt{157}}{5}\approx 2,51.$

Câu 31. Trong một đợt diễn tập quốc phòng, hai người ở vị trí khác nhau cùng ngắm bắn một mục tiêu cố định trên không. Người ta gắn một hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét), mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất. Người thứ nhất bắn một viên đạn đi qua hai điểm $A(5;7;10)$ và $B(6;9;12)$. Người thứ hai bắn một viên đạn đi qua hai điểm $C(15;17;5)$ và D (điểm D ở độ cao $26\,\text{m}$ so với mặt đất). Biết rằng sau một thời gian rời khỏi nòng súng, hai viên đạn chạm với nhau tại vị trí cách điểm A một khoảng $150\,\text{m}$ (tham khảo hình vẽ)



Hỏi D cách C một khoảng bao nhiêu mét? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục.

Đáp án: 28,8

Lời giải

Gọi $E(x;y;z)$ là điểm va chạm của hai viên đạn.

Ta có: $\overrightarrow{AB}=(1;2;2)\Rightarrow AB=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=3$.

Theo bài ra, ta có: $AE=150$; $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AE}$ cùng hướng.

Do đó: $\overrightarrow{AE}=\dfrac{150}{3}\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\begin{cases} x-5=50.1 \\ y-7=50.2 \\ z-10=50.2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=55 \\ y=107 \\ z=110 \end{cases}\Rightarrow E(55;107;110)$.

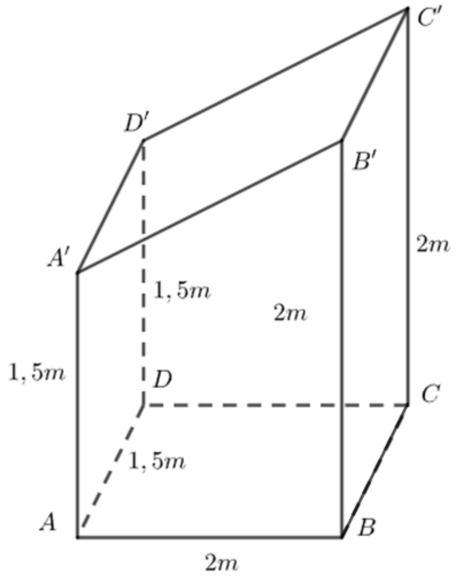
Ta có: $\overrightarrow{CE}=(40;90;105)\Rightarrow\vec{u}=(8;18;21)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng CE.

Phương trình đường thẳng CE là: $\begin{cases} x = 15 + 8t \\ y = 17 + 18t \\ z = 5 + 21t \end{cases}$.

Theo bài ra ta có: $D(a;b;26) \in CE$, nên: $\begin{cases} a = 15 + 8t \\ b = 17 + 18t \\ 26 = 5 + 21t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 23 \\ b = 35 \\ t = 1 \end{cases} \Rightarrow D(23;35;26)$.

Vậy $CD = \sqrt{(23-15)^2 + (35-17)^2 + (26-5)^2} = \sqrt{829} \approx 28,8$.

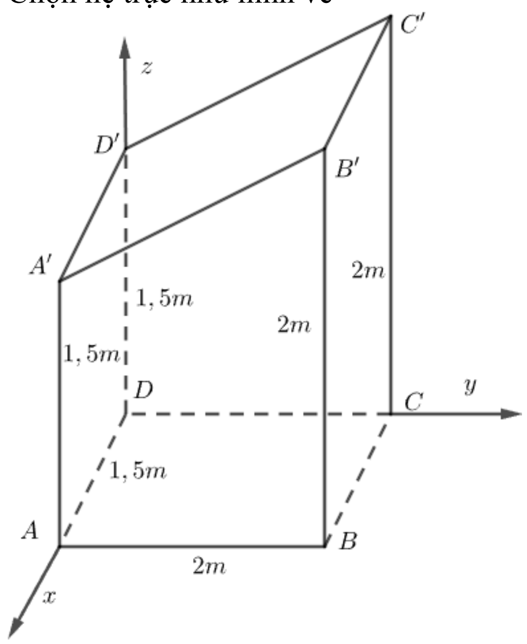
Câu 32. Một hộ gia đình muốn làm chiếc lều như hình vẽ. Đáy nằm trên nền đất phẳng, các cột vuông góc với đáy có chiều cao $AA' = DD' = 1,5m$, $BB' = CC' = 2m$, đáy là hình chữ nhật có $AB = 2m, AD = 1,5m$ (Tham khảo hình vẽ minh hoạ). Góc tạo bởi mái nhà và nền nhà là bao nhiêu độ (làm tròn đến hàng đơn vị)



Đáp án: 14

Lời giải

Chọn hệ trục như hình vẽ



Khi đó ta có $D'(0;0;1,5), A'(1,5;0;1,5)$ $B'(1,5;2;2)$.

$\overrightarrow{D'A'} = (1,5;0;0) = 1,5(1;0;0), \overrightarrow{D'B'} = (1,5;2;0,5) = 0,5(3;4;1)$.

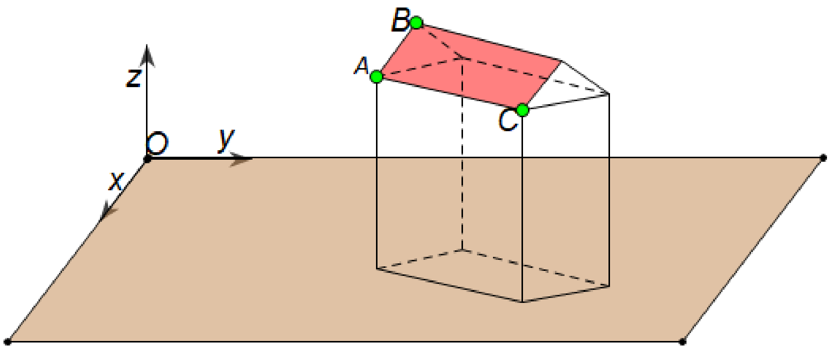
$\left[\overrightarrow{D'A'},\overrightarrow{D'B'}\right]=(0;-1;-4)=-(0;1;4)$ là vecto pháp tuyến của $(A'B'C'D')$.

Mặt $(ABCD)$ có vecto pháp tuyến là $\vec{k}=(0;0;1)$.

Ta có

$$\cos\left((ABCD),(A'B'C'D')\right)=\frac{|4|}{1.\sqrt{17}}=\frac{4}{\sqrt{17}}\Rightarrow\left((ABCD),(A'B'C'D')\right)\approx 14^0$$

Câu 33. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo mét) vào một căn nhà sao cho nền nhà thuộc mặt phẳng (Oxy), người ta coi mỗi mái nhà là một phần của mặt phẳng và thấy ba vị trí A,B,C ở mái nhà bên trái lần lượt có toạ độ $(2;0;4),(4;0;3)$ và $(4;9;3)$. Góc giữa mái nhà bên trái và nền nhà bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Đáp án: 27

Lời giải

Ta gọi α là góc giữa mái nhà bên trái và nền nhà.

Khi đó $\alpha=((ABC);(Oxy))$.

Với (ABC) nhận vectơ $\vec{n}=[\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}]$ với $\overrightarrow{AB}=(2;0;-1)$ và $\overrightarrow{AC}=(2;9;-1)$.

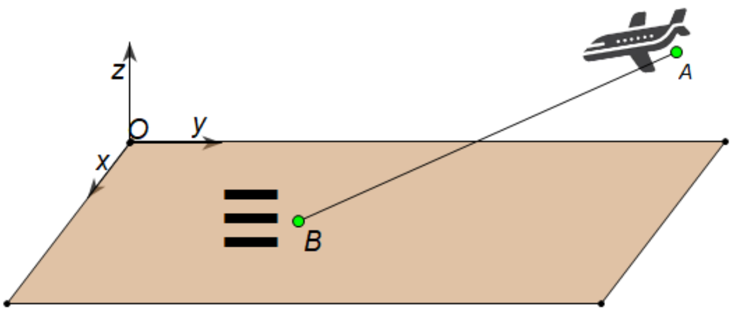
Khi đó $\vec{n}=(9;0;18)$.

Với (Oxy) do $Oz\perp(Oxy)$ nên mặt phẳng (Oxy) nhận $\vec{k}=(0;0;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy $\cos\alpha=\dfrac{\left|\vec{n}\cdot\vec{k}\right|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{k}|}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$.

Suy ra $\alpha\approx 27^{\circ}$.

Câu 34. Khi gắn hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilomét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay ở vị trí $A(3;2;-3)$ sẽ hạ cánh tới vị trí $B(8;8;0)$. Góc giữa đường bay (một phần của đường thẳng AB) và sân bay (một phần của mặt phẳng (Oxy)) bằng bao nhiêu độ (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Đáp án: 21

Lời giải

Gọi α là góc giữa đường bay và sân bay. Khi đó $\alpha=(AB,(Oxy))$.

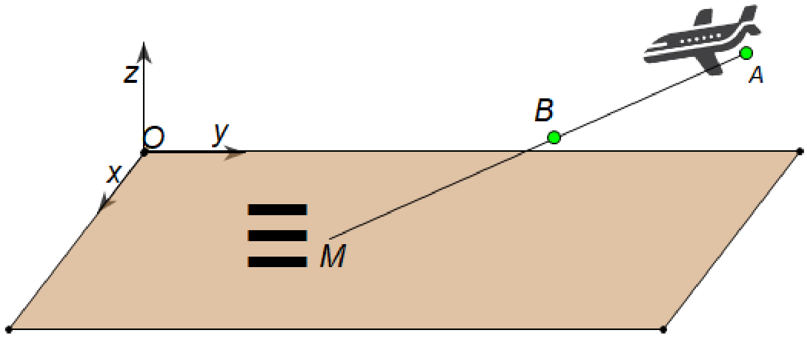
Với đường thẳng AB, nhận vectơ $\overrightarrow{AB}=(5;6;3)$ làm vectơ chỉ phương.

Với (Oxy) do $Oz\perp(Oxy)$ nên mặt phẳng (Oxy) nhận $\vec{k}=(0;0;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Khi đó ta có $\sin\alpha=\dfrac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot\vec{k}\right|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{k}|}=\dfrac{3\sqrt{70}}{70}$.

Vậy $\alpha\approx 21^\circ$.

Câu 35. Khi gắn hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào một sân bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay. Một máy bay bay theo đường thẳng từ vị trí $A(5;0;5)$ đến vị trí $B(10;10;3)$ và hạ cánh tại vị trí $M(a;b;0)$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu (làm tròn đến hàng phần chục)?



Đáp án: 42,5.

Lời giải

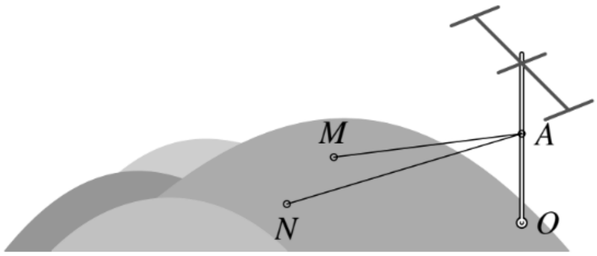
$\overrightarrow{AB}=(5;10;-2)$.

Đường thẳng AB có vecto chỉ phương $\vec{u}=(5;\ 10;\ -2)$ nên có phương trình tham số dạng $AB:\begin{cases}x=5+5t\\ y=10t\\ z=5-2t\end{cases}$

Vị trí máy bay hạ cánh là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng $(Oxy)\Rightarrow z=0$, ta được $t=\dfrac{5}{2}\Rightarrow x=\dfrac{35}{2}=17,5;\ y=25$

Vậy toạ độ điểm $M(17,5;\ 25;\ 0)$ nên $a+b=17,5+25=42,5$.

Câu 36. Người ta muốn dựng một cột ăngten trên một sườn đồi. Ăngten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăngten và M,N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ).



Cho biết tọa độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0), A(0;0;8), M(4;-6;3)$, $N(-4;-3;2)$. Góc tạo bởi sợi dây cáp MA với mặt phẳng sườn đồi (Làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị độ).

Đáp án: 53

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA}=(-4;6;5)$, $\overrightarrow{OM}=(4;-6;3), \overrightarrow{ON}=(-4;-3;2)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]=(-3;-20;-36)$.

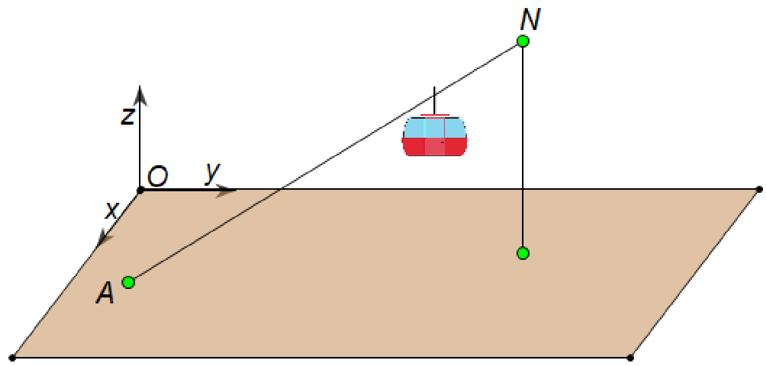
Mặt phẳng sườn đồi (OMN) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}\right]=(-3;-20;-36)$.

Ta có: $\sin\left(MA,(OMN)\right)=\left|\cos\left(\overrightarrow{MA},\vec{n}\right)\right|=\dfrac{\left|\overrightarrow{MA}.\vec{n}\right|}{\left|\overrightarrow{MA}\right|.\left|\vec{n}\right|}=\dfrac{\left|-4.(-3)+6.(-20)+5.(-36)\right|}{\sqrt{(-4)^2+6^2+5^2}.\sqrt{(-3)^2+(-20)^2+(-36)^2}}$

$=\dfrac{288}{\sqrt{131285}}\Rightarrow\alpha\approx 53^\circ$.

Câu 37. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(-8;-6;0)$ với tốc độ là $10\,m/s$ (Đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).

Giả sử sau $t(s)$ kể từ lúc xuất phát $(t\ge 0)$, cabin đến điểm N. Một người đứng tại điểm $O(0;0;0)$ quan sát cabin chạy trên cáp treo, sau thời gian bao nhiêu giây thì khoảng cách giữa người quan sát và cabin gần nhau nhất (đơn vị giây)?



Đáp án: 0,98

Lời giải

Do tốc độ của cabin là $10\,m/s$ nên độ dài $AN=10t\,m$.

Do hai véc tơ $\overrightarrow{AN}$ và $\vec{u}$ cùng phương nên $\overrightarrow{AN}=k\vec{u}$ với k là số thực dương nào đó.

Suy ra: $\left|\overrightarrow{AN}\right|=k\left|\vec{u}\right|=k\sqrt{(-8)^2+(-6)^2}=10k$.

Suy ra $t=k$, vì thế $\overrightarrow{AN}=k\vec{u}=t\vec{u}=(-8t;-6t;0)$.

Gọi $N(a;b;c)\Rightarrow\overrightarrow{AN}=(a-10;b-3;c)$.

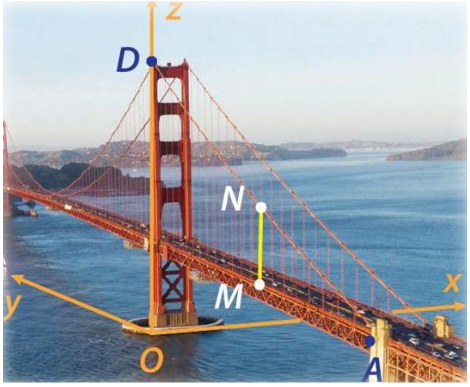
Ta có $\begin{cases}a-10=-8t\\b-3=-6t\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=10-8t\\b=3-6t\\c=0\end{cases}\Rightarrow N(10-8t;3-6t;0)$.

Khoảng cách giữa người quan sát và cabin bằng độ dài đoạn

$ON=\sqrt{(10-8t)^2+(3-6t)^2}=\sqrt{100t^2-196t+109}$.

Ta có $100t^2-196t+109$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $t=\dfrac{196}{2.100}=\dfrac{49}{50}=0,98\,s$.

Câu 38. Cầu Cổng Vàng *(The Golden Gate Bridge)* ở Mỹ. Xét hệ trục toạ độ $Oxyz$ với O là bệ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ.



Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng (Oyz), trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $326\,m$, điểm A cách mặt nước $82\,m$ và cách trục Oz $352\,m$ .Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước $82\,m$ và MN song song với cột trụ. Tính độ dài đoạn MN, biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng $250\,m$ (Kết quả làm tròn đến hàng đơn phần chục).

Đáp án: 70,7

Lời giải

Ta có $A\in(Oyz)$ và A cách mặt nước $82\,m$ và cách trục Oz một khoảng $352\,m \Rightarrow A(0;352;82)$.

Điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước $326\,m \Rightarrow D(0;0;326) \Rightarrow \overrightarrow{AD}=(0;-352;244)$.

Phương trình đường thẳng AD là $\begin{cases} x=0 \\ y=-352t \\ z=326+244t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$.

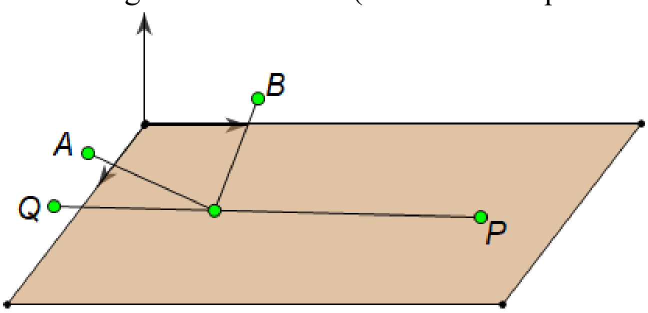
Vì $N\in AD \Rightarrow N(0;-352t;326+244t)$.

Điểm M trên thành cầu, M cách mặt nước $82\,m$ và cách trục Oz một khoảng bằng $250\,m$ nên tọa độ điểm M là $M(0;250;82) \Rightarrow \overrightarrow{MN}=(0;-352t-250;244+244t)$.

MN song song với cột trụ $\Rightarrow MN\perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN}.\vec{j}=0 \Rightarrow -352t-250=0 \Leftrightarrow t=-\dfrac{125}{176}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN}=\left(0;0;\dfrac{3111}{44}\right) \Rightarrow MN=\dfrac{3111}{44}\approx 70,7\,m$.

Câu 39. Chuẩn bị đến ngày sinh nhật, bạn Bình muốn trang trí căn phòng trọ của mình đẹp hơn. Trước khi trang trí, Bình gắn 2 móc treo vào các vị trí $P,Q,$ rồi căng một sợi dây từ P đến Q. Tiếp theo, bạn gắn 2 móc treo vào các vị trí A và B, sau đó lấy một điểm M nằm giữa đoạn thẳng PQ rồi tiếp tục căng dây từ M đến A và từ M đến B. Xét một hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $P(1;1;0)$, $Q(3;0;1)$ $A(1;0;-1)$, $B(2;1;1)$ đơn vị trên mỗi trục là mét. Khi tổng độ dài các đoạn dây mà Bình sử dụng là ngắn nhất thì khoảng cách từ M đến P bằng bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Đáp án: 0,8.

Lời giải

Cách 1:

Dễ thấy P,Q,A,B cùng thuộc mặt phẳng $(PQA): x+y-z-2=0$ và A,B nằm về hai phía của PQ. Khi đó $AB\cap PQ=M\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$ thỏa tổng độ dài các đoạn dây là ngắn nhất.

$PM=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0,8$.

Cách 2:

Gọi $(\alpha),(\beta)$ là hai mặt phẳng lần lượt qua A và B cùng vuông góc với PQ.

$$\overrightarrow{PQ}=(2;-1;1)\Rightarrow PQ:\begin{cases}x=1+2t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow M(1+2t;1-t;t).$$

$(\alpha): 2x-y+z-1=0\Rightarrow PQ\cap(\alpha)=A'(1;1;0)\equiv P$.

$(\beta): 2x-y+z-4=0\Rightarrow PQ\cap(\beta)=B'\left(2;\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\Rightarrow PB'+B'Q=PQ$ hay B' thuộc đoạn PQ. Khi đó:

$$\min(MA+MB)=\sqrt{\mathrm{d}^2\left((\alpha),((\beta))\right)+\left[\mathrm{d}(A,PQ)+\mathrm{d}(B,PQ)\right]^2}$$

$\mathrm{d}\left((\alpha),(\beta)\right)=\frac{4-1}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ và $\mathrm{d}(A,PQ)=\sqrt{2},\mathrm{d}(B,PQ)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tổng độ dài ngắn nhất là:

$$l=PQ+MA+MB=\sqrt{6}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2\sqrt{6}\approx 4,9.$$

Lúc đó ta có:

$$\frac{AP}{AP+\mathrm{d}(B,PQ)}=\frac{PM}{\mathrm{d}\left((\alpha),(\beta)\right)}\Rightarrow PM=\frac{AP.\mathrm{d}\left((\alpha),(\beta)\right)}{AP+\mathrm{d}(B,PQ)}=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0,8.$$

Cách 3:

Ta có

$$\overrightarrow{PQ}=(2;-1;1)\Rightarrow PQ:\begin{cases}x=1+2t\\ y=1-t\\ z=t\end{cases}\Rightarrow M(1+2t;1-t;t).$$

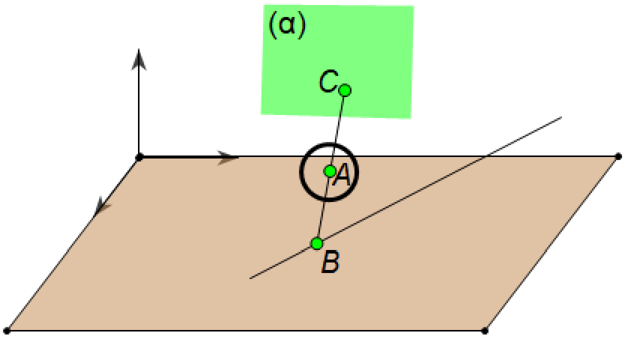
$$MA+MB=\sqrt{6t^2+2}+\sqrt{6t^2-6t+2}=\sqrt{\left(\sqrt{6}t\right)^2+\left(\sqrt{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}.$$

Suy ra: $MA+MB\ge\sqrt{\left(\sqrt{6}t+\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right)^2+\left(\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\sqrt{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\sqrt{6}t.\frac{\sqrt{2}}{2}=\left(\frac{\sqrt{6}}{2}-\sqrt{6}t\right).\sqrt{2}\Leftrightarrow t=\frac{1}{3}\Rightarrow M\left(\frac{5}{3};\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$.

Vậy $PM=\frac{\sqrt{6}}{3}\approx 0,8$.

Câu 40. Trong một trung tâm nghiên cứu robot bay, người ta bố trí một thiết bị định vị tại điểm cố định $A(1;0;2)$ trong không gian ba chiều với hệ toạ độ $Oxyz$ (các đơn vị tọa độ được tính bằng mét). Thiết bị này giao tiếp đồng thời với hai cảm biến: Cảm biến thứ nhất di chuyển dọc theo đường thẳng $\Delta:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-4}{-1}$, cảm biến thứ hai được gắn trên mặt phẳng $(\alpha):2x-y+z+1=0$. Giữa hai cảm biến được kết nối bằng một đường truyền BC, trong đó B nằm trên đường thẳng Δ, C nằm trên mặt phẳng (α) và thiết bị định vị tại A là trung điểm của đoạn BC. Biết rằng đường thẳng BC có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}=(-2;a;b)$, hãy tính giá trị $a+2b$.



Đáp án: –1,5

Lời giải

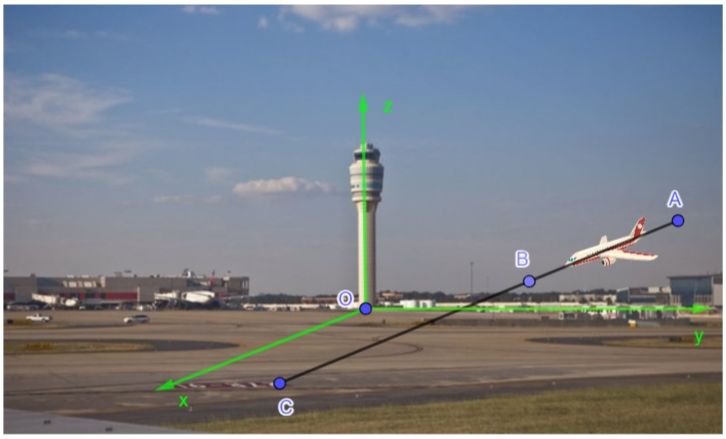
Gọi $B=(3+t;-1+2t;4-t)\in\Delta$

Do A là trung điểm của BC nên

$C=(-1-t;1-2t;t)\in(\alpha)\Leftrightarrow 2(-1-t)-(1-2t)+t+1=0\Leftrightarrow t=2\Rightarrow B(5;3;2)$

Suy ra $\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(4;3;0)=-2\left(-2;-\dfrac{3}{2};0\right)\Rightarrow a=-\dfrac{3}{2};b=0\Rightarrow a+2b=-1,5$

Câu 41. Tại một sân bay, người ta chọn hệ tọa độ $Oxyz$ có gốc O tại vị trí chân của đài quan sát, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt sân bay (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính theo kilomét). Trên màn hình Rađa người ta quan sát một máy bay đang hạ cánh theo đường thẳng từ vị trí $A(4;0;10)$ đến vị trí $B(5;5;6)$ và tiếp đất tại vị trí $C(a;b;0)$. Hỏi vị trí tiếp đất của máy bay cách chân đài quan sát bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn một chữ số thập phân)



Đáp án: 14,1

Lời giải

Đường bay của máy bay là đường thẳng AB đi qua $A(4;0;10)$ và có véctơ chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(1;5;-4)$.

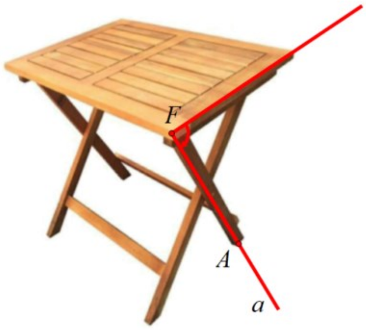
$\Rightarrow AB:\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{5}=\dfrac{z-10}{-4}$.

Vì $C(a;b;0) \in AB$ nên $\dfrac{a-4}{1} = \dfrac{b}{5} = \dfrac{0-10}{-4} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{13}{2} \\ b = \dfrac{25}{2} \end{cases} \Rightarrow C\left(\dfrac{13}{2};\dfrac{25}{2};0\right)$.

Ta có $OC = \sqrt{\left(\dfrac{13}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{25}{2}\right)^2 + 0^2} = \dfrac{\sqrt{794}}{2} \approx 14,1$.

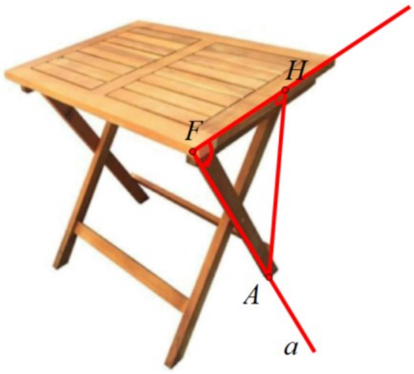
Vậy vị trí tiếp đất của máy bay cách chân đài quan sát khoảng 14,1 km.

Câu 42. Một chiếc bàn gấp gọn đã được thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$. Điểm A là chân bàn tiếp xúc với mặt đất thuộc đường thẳng $a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ cắt mặt bàn $(P): x + y - 2z + 6 = 0$ tại điểm F. Độ dài chân bàn $FA = 40\sqrt{3}\,cm$, khi đó độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là là bao nhiêu cm?



Đáp án: 40

Lời giải



Đường thẳng $a: \begin{cases} x = -3 + t \\ y = 1 + t \\ z = -2 + 4t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1;1;4)$.

Mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 6 = 0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1;1;-2)$.

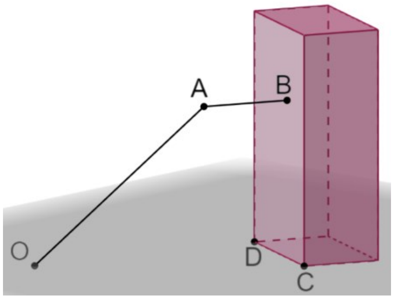
$\sin(a,(P)) = \left|\cos\left(\vec{u},\vec{n}\right)\right| = \dfrac{\left|\vec{u}.\vec{n}\right|}{\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{n}\right|} = \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \sin\varphi$.

Độ cao của mặt bàn tính từ mặt đất là khoảng cách từ chân bàn A đến mặt phẳng (P)

Suy ra $d(A,(P)) = AH = FA.\sin\varphi = 40\sqrt{3}.\sqrt{\dfrac{1}{3}} = 40\,cm$.

Câu 43. Một công ty logistics đang thử nghiệm hệ thống giao hàng tự động bằng máy bay không người lái (drone).

Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị trên các trục tương ứng với 1 mét trên thực tế. Mặt ngoài của một tòa nhà cao tầng được xem là một phần của mặt phẳng (P) thẳng đứng, đi qua hai điểm $C(10;50;0)$ và $D(30;10;0)$. Vị trí giao hàng là điểm B nằm trên mặt phẳng (P). Drone bắt đầu bay từ kho hàng tại gốc tọa độ $O(0;0;0)$. Ban đầu, nó bay theo một đường thẳng đến vị trí $A(30;40;120)$. Từ vị trí A, drone thay đổi đường bay, di chuyển theo phương vuông góc với mặt phẳng (P) đến vị trí giao hàng B. Tính khoảng cách từ O đến B (làm tròn đến hàng đơn vị).



Đán án: 126

Lời giải

$\overrightarrow{CD}=(20;-40;0)=20.\vec{u};$ với $\vec{u}=(1;-2;0)$.

(P) là mặt phẳng thẳng đứng qua C và D nên nhận vec tơ $\vec{u}=(1;-2;0)$ và $\vec{k}=(0;0;1)$ làm cặp vectơ chỉ phương nên vectơ pháp tuyến của (P) là $\vec{n}=\left[\vec{u};\vec{k}\right]=(2;1;0)$

$(P):2(x-10)+1(y-50)+0(z-0)=0\Leftrightarrow 2x+y-70=0$

Đường thẳng AB vuông góc với (P) nên nhận vectơ pháp tuyến của (P) là vectơ chỉ phương $\overrightarrow{u_{AB}}=(2;1;0)$. Phương trình đường thẳng AB:

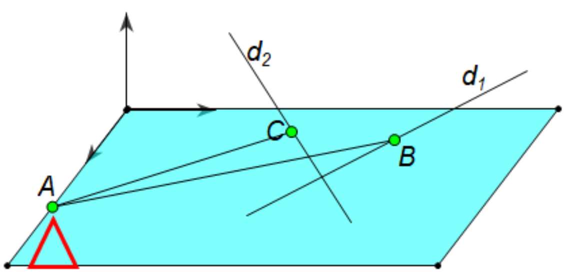
$$\begin{cases}x=30+2t\\y=40+t\\z=120\end{cases}$$

B là giao điểm của đường thẳng AB và mặt phẳng (P) nên ta có

$60+4t+40+t-70=0\Leftrightarrow 5t=-30\Leftrightarrow t=-6$

$\Rightarrow B(18;34;120)\Rightarrow OB=\sqrt{18^2+34^2+120^2}=126$

Câu 44. Trạm tàu cứu hộ được đặt tại vị trí $A(5;0;0)$ trên một hòn đảo nhỏ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục được tính bằng km), được sử dụng làm trạm cứu hộ, cứu nạn trên biển.



Tàu du lịch B đang di chuyển (tốc độ không đổi) trên tuyến đường được mô tả bởi đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=0\end{cases}$. Tàu chở hàng C đang di chuyển (tốc độ không đổi) trên tuyến đường vận tải được mô tả bởi đường thẳng $d_2:\begin{cases}x=2-s\\y=11+s\\z=0\end{cases}$. Do thời tiết xấu, nên hai tàu B và C gặp sự cố và cần được tiếp cận khẩn cấp. Trạm cứu hộ điều một tàu cứu hộ xuất phát từ A để lần lượt tiếp cận tàu du lịch B trước, sau đó đến tàu chở hàng C. Xét vị trí tối ưu của tàu du lịch B dừng lại và tàu chở hàng C dừng lại sao cho tổng quãng đường tàu cứu hộ cần đi $T=AB+BC+CA$ là nhỏ nhất. Khi đó $P_{\min}=\sqrt{a}\ \ (km)$, hãy tính $a+2025$?

Đán án: 2269

Lời giải

Chúng ta cần tìm vị trí tối ưu của tàu du lịch B (tương ứng với điểm B) và tàu chở hàng C (tương ứng với điểm C) sao cho tổng quãng đường cứu hộ $T=AB+BC+CA$ là nhỏ nhất.

Trong không gian $Oxyz$, ta có:

+ Hai đường thẳng d_1,d_2 cùng nằm trong mặt phẳng $(\alpha):z=0$ và $A\in(\alpha)$.

+ d_1 có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}_1=(1;-2;0)$; d_2 có một véc tơ chỉ phương $\vec{u}_2=(-1;1;0)$.

Do $[\vec{u}_1,\vec{u}_2]\neq\vec{0}$ nên d_1 cắt d_2.

+ Gọi A_1,A_2 lần lượt là điểm đối xứng của A qua d_1 và d_2.

+ Gọi (P) là mặt phẳng qua A và vuông góc với d_1 $\Rightarrow(P):x-2y-5=0$.

+ Gọi $I=(P)\cap d_1$, thì tọa độ của I là nghiệm của hệ $d_1:\begin{cases}x=2+t\\y=1-2t\\z=0\\x-2y-5=0\end{cases}\Rightarrow I(3;-1;0)\Rightarrow A_1(1;-2;0)$.

+ Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và vuông góc với $d_2\Rightarrow(Q):-x+y+5=0$.

+ Gọi $J=(Q)\cap d_2$, thì tọa độ của J là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=2-s\\y=11+s\\z=0\\-x+y+5=0\end{cases}\Rightarrow J(9;4;0)\Rightarrow A_2(13;8;0)$.

+ Khi đó $T=AB+BC+CA=A_1B+BC+CA_2\geq A_1A_2$

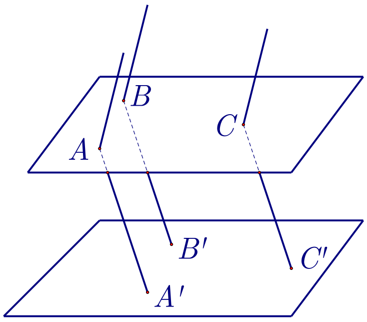
$\Rightarrow T$ đạt GTNN khi $T=A_1A_2\Rightarrow P_{\min}=A_1A_2=\sqrt{244}\ \ (km)$. Vậy $a+2025=2269$

Dấu bằng xảy ra khi B,C,A_1,A_2 thẳng hàng.

Câu 45. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai lớp kính lần lượt là hai mặt phẳng có phương trình $(\alpha):2x-2y-z+3\sqrt{3}=0,(\beta):-4x+4y+2z+12\sqrt{3}=0.$ Một nguồn sáng được chiếu vào hai tấm kính là tập hợp các đường thẳng có vectơ chỉ phương là $\vec{u}=(1;1;1)$ và đi qua các điểm $M(3;0;0),N(1;1;1)$ và $P(3;5;-5)$. Biết rằng các giao điểm của các đường thẳng nói trên với hai tấm kính (α) và (β) là 6 đỉnh của một khối đa diện. Thể tích V của khối đa diện tạo bởi 6 điểm đó có kết quả là $a\sqrt{b}$ với a,b nguyên dương và b là số nguyên tố. Tính giá trị của $a+b$.

Đáp án: 138.

Lời giải



Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các đường thẳng qua M, N, P và có vec tơ chỉ phương $\vec{u}$. Khi đó, ta được

$$d_1:\begin{cases} x=3+t \\ y=t \\ z=t \end{cases};d_2:\begin{cases} x=1+s \\ y=1+s \\ z=1+s \end{cases};d_3:\begin{cases} x=3+l \\ y=5+l \\ z=-5+l \end{cases}.$$

Gọi A, B, C lần lượt là giao điểm của d_1, d_2, d_3 với mặt phẳng $(\alpha): 2x-2y-z+3\sqrt{3}=0$.

Khi đó, giải tìm các tham số ta được:

$A=d_1\cap(\alpha)\Rightarrow t=6+3\sqrt{3}\Rightarrow A\left(9+3\sqrt{3};6+3\sqrt{3};6+3\sqrt{3}\right)$

$B=d_2\cap(\alpha)\Rightarrow s=-1+3\sqrt{3}\Rightarrow B\left(3\sqrt{3};3\sqrt{3};3\sqrt{3}\right)$

$C=d_3\cap(\alpha)\Rightarrow l=1+3\sqrt{3}\Rightarrow C\left(4+3\sqrt{3};6+3\sqrt{3};-4+3\sqrt{3}\right)$.

Ta có

$\overrightarrow{AB}=(-9;-6;-6), \overrightarrow{AC}=(-5;0;-10)\Rightarrow S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=45$

$(\alpha): 2x-2y-z+3\sqrt{3}=0, (\beta): -4x+4y+2z+12\sqrt{3}=0 \Leftrightarrow 2x-2y-z-6\sqrt{3}=0.$

Ta thấy $(\alpha)/\!/(\beta)$ và mỗi lớp kính là một mặt phẳng nên đoạn khúc xạ trong mỗi tấm kính là không đáng kể. Mặt khác, các tia tới song song nên tia khúc xạ cũng song song. Do đó, mỗi lớp kính có độ khúc xạ bằng bao nhiêu đi nữa thì thể tích lăng trụ được tạo thành đều có thể tích không đổi và bằng

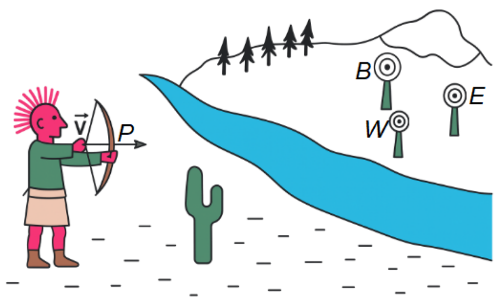
$V=S_{\Delta ABC}.\mathrm{d}((\alpha),(\beta))$.

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ là: $d=\dfrac{3\sqrt{3}+6\sqrt{3}}{\sqrt{4+4+1}}=3\sqrt{3}$

Thể tích lăng trụ là: $V=S_{\Delta ABC}.d=45.3\sqrt{3}=135\sqrt{3}\Rightarrow a=135, b=3$.

Vậy $a+b=135+3=138$.

Câu 46. Một cung thủ ngắm từ điểm $P(0;0;15)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v}=(-1;3;0,5)$ để bắn trúng một trong ba bia được đặt trên vùng núi. (1 đơn vị $=1\ dm$)



Tọa độ các bia:
- Bia gấu: $B(-155;465;85)$
- Bia sói: $W(-155;465;92,5)$

- Bia nai: $E(-160;640;95)$

Giả sử mũi tên bay theo đường thẳng, tính tốc độ của mũi tên là bao nhiêu m/s, nếu thời gian bay là 1 giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Đáp án: 49,6

Lời giải

Điểm bắn: $P(0;0;15)$. Hướng bắn: $\vec{v}=(-1;3;0,5)$.

Phương trình tham số của tia bắn: $\begin{cases} x=-t \\ y=3t \\ z=15+0,5t \end{cases} \quad (t\ge 0)$

Xác định bia trúng

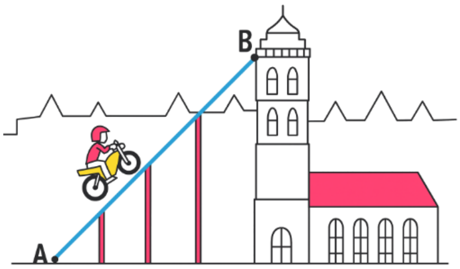
- $B(-155;465;85)$: từ $x=-t\Rightarrow t=155$. Khi đó $z=15+0,5\cdot 155=92,5\ne 85\Rightarrow$ không trúng.
- $W(-155;465;92,5)$: với $t=155$ ta có $z=15+0,5\cdot 155=92,5\Rightarrow$ trúng bia sói W.
- $E(-160;640;95)$: không có t thỏa đồng thời x,y.

Độ dài quỹ đạo bay $PW=\left|\overrightarrow{PW}\right|=\sqrt{(-155)^2+465^2+77,5^2}=\dfrac{155\sqrt{41}}{2}(dm)\approx 496,242dm$

Tức khoảng 49,624 m.

- Tốc độ: $v=\dfrac{PW}{1s}\approx 496,242dm/s\approx 49,6m/s$.

Câu 47. Một nghệ sĩ đi dây dự định chạy xe mô tô theo đường thẳng từ điểm $A(20;20;0)$ lên tháp nhà thờ tại điểm $B(220;420;80)$ (với 1 đơn vị = 1m).



Sợi cáp được chống đỡ bởi ba cột thẳng đứng có đỉnh tại:

$S_1(70;120;20),\quad S_2(120;220;30),\quad S_3(170;300;60)$.

Hãy tìm tổng hoành độ các cột phù hợp để làm trụ đỡ

Đáp án: 70

Lời giải

Từ đề ta có: $A(20;20;0), B(220;420;80)\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(200;400;80)=40(5;10;2)$

Phương trình tham số của dây cáp AB: $\begin{cases} x=20+200t \\ y=20+400t \ (0\le t\le 1) \\ z=80t, \end{cases}$

Ba đỉnh cột: $S_1(70;120;20), S_2(120;220;30), S_3(170;300;60)$.

Đánh giác các cột có phù hợp không?

Một cột "phù hợp" khi điểm đỉnh của nó nằm trên đường thẳng AB (vì dây căng thẳng).

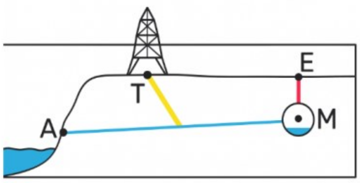
- S_1: $t_x=\dfrac{70-20}{200}=0,25, t_y=\dfrac{120-20}{400}=0,25, t_z=\dfrac{20-0}{80}=0,25\Rightarrow$ trùng nhau.

Nên S_1 nằm trên $AB\Rightarrow$ phù hợp.

- S_2: $t_x=t_y=0,5\Rightarrow$ tại vị trí này dây có độ cao $z=80\cdot 0,5=40(m)$, nhưng đỉnh cột có $z=30$ suy ra chưa phù hợp
- S_3: $t_x=0,75, t_y=0,7$ (không bằng nhau) suy ra chưa phù hợp

Vậy có cột S_1 thì phù hợp nên **đáp án bằng 70**

Câu 48. Tại các vị trí M có một hồ chứa nước (để trữ nước sau đó hút nước đưa lên mặt đất tại điểm E). Một kênh tràn k dẫn nước từ M đến A. Từ điểm T trên mặt đất, một mũi khoan thông khí b được khoan theo hướng của véc tơ $\vec{v}=(1;1;-4)$



(1 đơn vị = 100m)

Các tọa độ: $M(8;12;-6)$, $N(14;2;-10)$, $A(11;0;-9)$, $T(8;2;0)$

Hỏi chiều dài mũi khoan cần là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Đáp án: 849

Lời giải

- Kênh tràn k từ M đến A: $\overrightarrow{MA}=(3;-12;-3)=3(1;-4;-1)$.

Vậy phương trình đường thẳng $k:\begin{cases}x=8+t\\y=12-4t\\z=-6-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

- Mũi khoan b qua T, theo $\vec{v}=(1;1;-4)$:

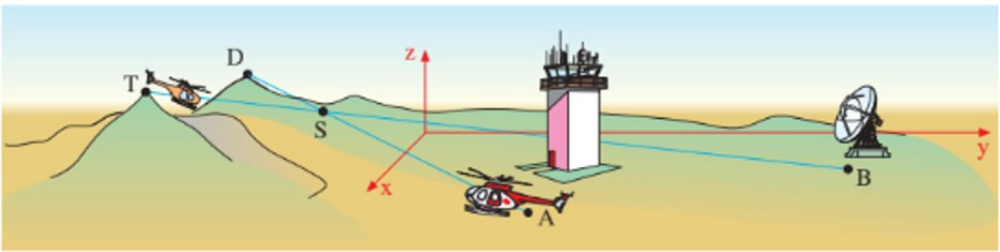
Vậy phương trình đường thẳng $b:\begin{cases}x=8+s\\y=2+s\\z=-4s\end{cases}\quad(s\in\mathbb{R})$

Giải hệ $8+t=8+s, 12-4t=2+s, -6-t=-4s \Rightarrow t=s=2$.

Giao điểm $P(10;4;-8)$.

Chiều dài cần khoan từ T đến P: $TP=2\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}=2\sqrt{18}=6\sqrt{2}$ (đơn vị) $600\sqrt{2}\,m\approx 849m$

Câu 49. Trực thăng cứu hộ Alpha cất cánh lúc 10 giờ 00 từ điểm xuất phát Adlerhorst $A(10;6;0)$. Nó bay thẳng với tốc độ $300\,km/h$ tới đỉnh núi Mount Devil $D(4;-3;3)$, nơi xảy ra tai nạn. (Tọa độ tính bằng km).



Cùng lúc đó, trực thăng Beta cất cánh từ đỉnh núi Tempelberg $T(7;-8;3)$ để đưa du khách về điểm $B(4;16;0)$. Tốc độ của nó là $350\,km/h$.

Người ta chứng minh được rằng hai trực thăng có đường bay giao nhau tại S. Khi Alpha tới S thì Beta đã đi qua trước đó một khoảng thời gian (tính bằng giây), hãy tìm khoảng thời gian đó? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Đáp án: 6,4

Lời giải

Phương trình đường bay của Alpha

Điểm $A(10;6;0)$, hướng $\overrightarrow{AD}=(-6;-9;3)$: $\begin{cases}x=10-6t\\y=6-9t\\z=0+3t\end{cases}$

Phương trình đường bay của Beta

Điểm $T(7;-8;3)$, hướng $\overrightarrow{TB}=(-3;24;-3)$: $\begin{cases} x=7-3s \\ y=-8+24s \\ z=3-3s \end{cases}$

- Giao điểm đường bay:

Giải hệ cho $r=\dfrac{2}{3}, s=\dfrac{1}{3}$, được giao điểm $S(6;0;2)$

- Tính quãng đường tới điểm S:

$|AS|=\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+2^2}=\sqrt{56}\approx 7,48\,km$

$|TS|=\sqrt{(-1)^2+8^2+(-1)^2}=\sqrt{66}\approx 8,12\,km$

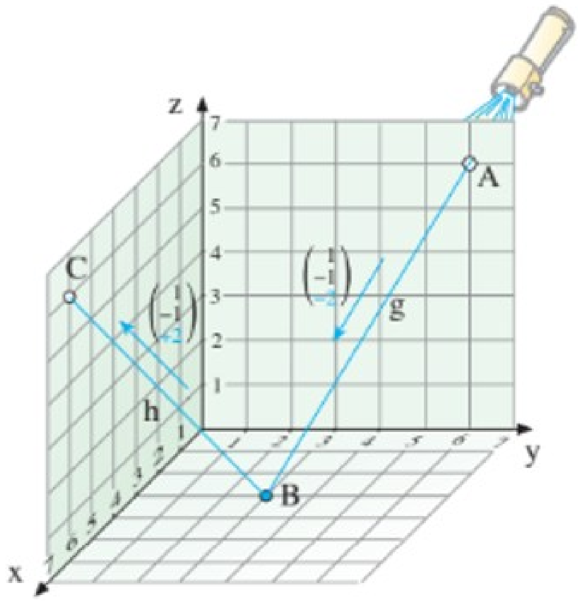
- Tính thời gian bay tới S:

Alpha: $t_\alpha=\dfrac{7,48}{300}h\approx 0,025h\approx 1,50$ phút

Beta: $t_\beta=\dfrac{8,12}{350}h\approx 0,023h\approx 1,39$ phút

Vậy Alpha tới S muộn hơn Beta khoảng 0,11 phút $\approx 6,4s$.

Câu 50. Quỹ đạo của một tia sáng được theo dõi. Tia sáng xuất phát từ điểm $A(0;6;6)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v}=(1;-1;-2)$ và đi tới mặt phẳng xOy, tại đó nó bị phản xạ.



Tia sáng phản xạ cắt mặt phẳng xOz tại điểm $C(a;b;c)$ tính $a+b+c$?

Đáp án: 12

Lời giải

- Phương trình tia sáng g

Điểm $A(0;6;6)$, véc tơ chỉ phương $(1;-1;-2)$: $\begin{cases} x=0+t \\ y=6-t \\ z=6-2t \end{cases}$

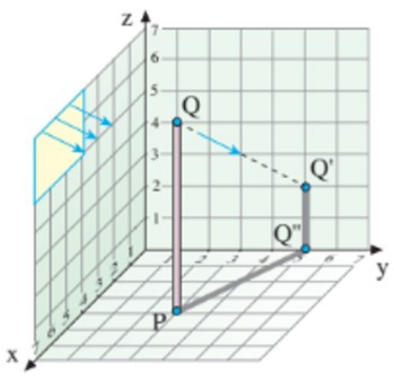
Giao điểm với mặt phẳng $xOy(z=0)$: $6-2t=0\Rightarrow t=3\Rightarrow B(3;3;0)$

- Phương trình tia phản xạ h

Tại $B(3;3;0)$, đổi dấu hệ số z của véc tơ (từ -2 thành +2): $\begin{cases} x = 3 + s \\ y = 3 - s \\ z = 0 + 2s \end{cases}$

Giao điểm với mặt phẳng $xOz(y = 0)$: $3 - s = 0 \Rightarrow s = 3 \Rightarrow C(6;0;6)$

Câu 51. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, có đoạn thẳng đứng PQ với: $P(4;3;0), Q(4;3;6)$.



Ánh sáng song song theo hướng của véc-tơ $\vec{v} = (-2;1;-2)$ chiếu vào đoạn thẳng (như hình). Hãy tính tổng độ dài đoạn chiếu bóng $PQ'' + Q'Q''$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Đáp án: 6,9

Lời giải

Kết quả là một bóng gãy khúc, được xác định bằng cách xét tia sáng đi qua điểm Q.

1. Phương trình tham số của đường thẳng g qua Q: $g: \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = 6 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$

2. Giao điểm Q' của g với mặt phẳng $x = 0$ (mặt phẳng yOz): $4 - 2t = 0 \Rightarrow t = 2$

Thay vào: $Q'(0;5;2)$

3. Hình chiếu vuông góc của Q' xuống trục Oy:

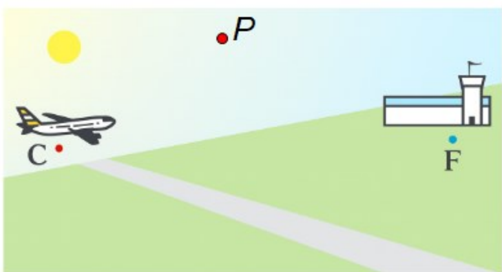
Điều kiện trên trục $Oy: x = 0, z = 0$, giữ nguyên $y = 5$

Nên $Q''(0;5;0)$

Khi đó: $PQ'' + Q'Q'' = \sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} + 2 = 2 + 2\sqrt{6} \approx 6,9$

Câu 52. Máy bay Beta hướng tới điểm $C(10;-10;5)$ theo hướng của véc tơ $\vec{v} = (-2;2;-1)$

Khi qua điểm C, máy bay Beta nhận lệnh từ đài kiểm soát bay đổi hướng bay theo véc tơ $\vec{w} = (-5;4;-1)$. Ở điểm P có độ cao 1000 m, máy bay Beta sẽ thực hiện một lần đổi hướng cuối cùng theo vecto $\vec{u}$ để hạ cánh xuống sân bay F. Tính cosin góc của hai vecto $\vec{u}$ và $\vec{w}$. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Sân bay F nằm trên mặt phẳng Oxy. Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ tương ứng 1 km.

Đáp án: 0,95

Lời giải

Sau khi qua C, Beta bay theo $\vec{w}=(-5;4;-1)$: $\begin{cases} x=10-5\lambda \\ y=-10+4\lambda \\ z=5-\lambda \end{cases}$

Ở cao $1000m=1km: 5-\lambda=1 \Rightarrow \lambda=4$.
Điểm đổi hướng cuối: $P(-10;6;1)$.

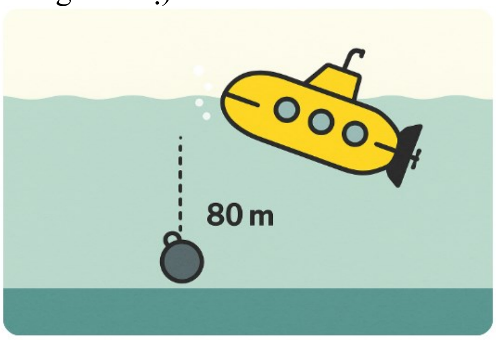
Chặng cuối hướng về $F(-12;7;0)$ có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{PF}=\vec{u}=(-2;1;-1)$.

Khi đó $\cos\theta=\dfrac{\vec{w}.\vec{u}}{|\vec{w}|.|\vec{u}|}=\dfrac{10+4+1}{\sqrt{42}.\sqrt{6}}=\dfrac{15}{\sqrt{252}}\approx 0,95$

Câu 53. Một tàu ngầm bắt đầu lặn tại điểm $P(100;200;0)$ với tốc độ 11,1 hải lý/giờ theo hướng tới mục tiêu $Z(500;600;-80)$ cho đến khi đạt độ sâu 80 m.

(1 hải lý/giờ sắp xỉ 1,852 km /h)

Sau đó, tàu tiếp tục di chuyển ngang hướng theo vectơ $\vec{u}=(1;1;0)$ với tốc độ 11 hải lý/giờ. Một quả cầu T được thả đồng thời khi tàu ngầm bắt đầu lặn, từ tàu nghiên cứu $S(700;800;0)$ và rơi thẳng đứng xuống với tốc độ $0,5m/s$. Tính khoảng cách tàu ngầm với quả cầu khi tàu ngầm đi đến thẳng dưới S (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Đáp án: 5

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{PZ}=(400;400;-80)$.

- Đoạn lặn $P\to Z$ (dừng ở độ sâu 80 m): $\begin{cases} x=100+400t \\ y=200+400t \quad 0\le t\le 1 \\ z=0-80t \end{cases}$

- Chuyển động ngang từ Z theo vectơ $\vec{u}=(1;1;0)$: $\begin{cases} x=500+s \\ y=600+s \quad s\ge 0 \\ z=-80 \end{cases}$

- Quả cầu rơi thẳng đứng từ S : $\begin{cases} x=700 \\ y=800 \quad \tau\ge 0 \\ z=-0,5\tau \end{cases}$

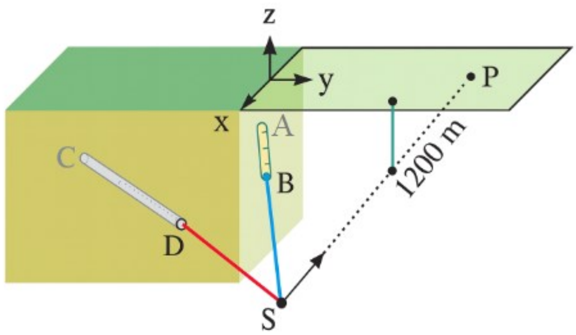
- Tàu đi đến thẳng dưới S khi $x=700, y=800 \Rightarrow s=200$.

- Thời gian: lặn $P\to Z: t_1=\dfrac{|\overrightarrow{PZ}|}{11,1}=\dfrac{80\sqrt{51}}{5,7103}\approx 100,05s$;

- Thời gian đi ngang tới dưới $S: t_2=\dfrac{200\sqrt{2}}{11}=\dfrac{200\sqrt{2}}{5,6589}\approx 49,98s$.

- Lúc đó quả cầu có $z=-0,5(t_1+t_2)\approx -75m$, còn tàu ở $z=-80m$, vậy khoảng cách giữa tàu ngầm với quả cầu bằng $5m$

Câu 54. Từ điểm $A(-7;-3;-8)$ qua điểm $B(-2;0;-9)$ một đường hầm thẳng tên Kuckucksloch sẽ được đào xuyên vào núi.



Tương tự, từ điểm $C(4;-6;-6)$ qua điểm $D(7;-1;-8)$ một đường hầm thẳng tên Morgenstern cũng sẽ được xây dựng. Sau khi khoang xong 2 đường hầm sẽ gặp nhau tại điểm S. Từ điểm S, đường hầm Kuckucksloch tiếp tục đào theo hướng véc tơ $(2;1;2)$, cho đến khi đến điểm P trên mặt đất mà đường hầm sẽ chạm tới. Trên đoạn SP, cách P một khoảng 1200 m sẽ đào một lối thoát hiểm thẳng đứng. Tính độ sâu cần đào bằng bao nhiêu mét?

(Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ tương ứng 100 m. Mặt đất là mặt phẳng xOy)

Đáp án: 800

Lời giải

- Hầm Kuckucksloch qua $A,B:\overrightarrow{AB}=(5;3;-1)$: $k:\begin{cases}x=-7+5t\\y=-3+3t\\z=-8-t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

- Hầm Morgenstern qua $C,D:\overrightarrow{CD}=(3;5;-2)$: $m:\begin{cases}x=4+3s\\y=-6+5s\\z=-6-2s\end{cases}\quad(s\in\mathbb{R})$

Giải hệ $k=m: t=4, s=3\Rightarrow S(13;9;-12)$.

-Từ S đào theo $\vec{u}=(2;1;2)$. Điểm chạm mặt đất P

Đường thẳng: $SP:\begin{cases}x=13+2\lambda\\y=9+\lambda\\z=-12+2\lambda\end{cases}\quad(\lambda\ge 0)$

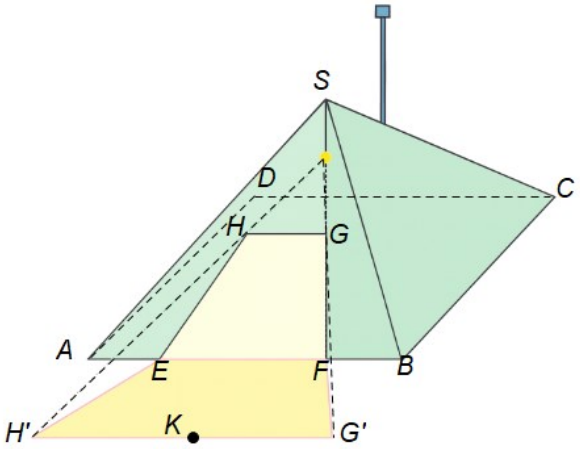
Giao với $z=0\Rightarrow -12+2\lambda=0\Rightarrow\lambda=6$ suy ra $P(25;15;0)$;

-Gọi Q là điểm trong lòng núi nằm trên đoạn SP, sao cho Q cách P $1200\,m$ hay $QP=12$ đơn vị. Ta có $SP=18$. Suy ra $Q=(17;11;-8)$. Ta được:

Vị trí trên mặt đất để khoan thẳng đứng: $G(17;11;0)$.

Độ sâu cần khoan: $|z_Q|=8dv=800\,m$.

Câu 55. Một cái lều có dạng hình chóp tứ giác đều, đáy rộng 8 m và cao 3 m.



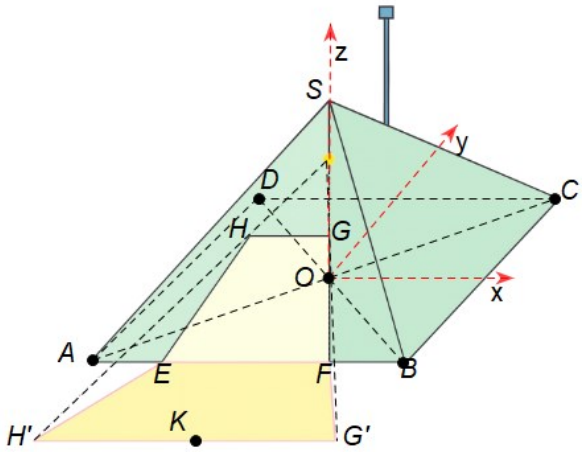
Cửa vào là hình thang $EFGH$ trong đó đoạn $AE = FB$, với $|EF| = 4m, G$ và H lần lượt là trung điểm của các đoạn ES và FS. Một nguồn sáng đặt cách đỉnh S $1m$ ở phía dưới. Ánh sáng chiếu ra ngoài qua cửa vào, tạo thành một vùng được chiếu sáng $EFG'H'$.

Ở giữa cạnh sau CD của lều có gắn một camera trên một cột thẳng đứng. Camera phải đặt ở độ cao ít nhất là bao nhiêu mét để quan sát được điểm K là trung điểm của $H'G'$?

Đáp án: 4,5

Lời giải

Gọi O là giao điểm của AC và BD. Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta đặt hệ trục $Oxyz$ như hình: khi đó: $O(0;0;0)$

$A(-4;-4;0), B(4;-4;0), C(4;4;0), D(-4;4;0), S(0;0;3)$, $E(-2;-4;0), F(2;-4;0)$

G, H là trung điểm của $SE, SF \Rightarrow G(-1;-2;1,5), H(1;-2;1,5)$.

Nguồn sáng $L(0;0;2)$ ở trên trục SO. Chiếu xuyên cửa lên mặt đất $z = 0$.

Đường chiếu qua G có phương trình: $\begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = 2 - 0,5t \end{cases}$ giao $z = 0 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow G'(-4;-8;0)$.

Tương tự $H'(4;-8;0)$.

-Trung điểm M của $CD: M(0;4;0)$.

-Trung điểm K của $G'H' : K(0;-8;0)$.

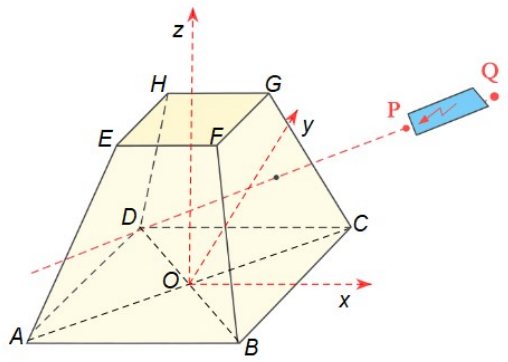
Đặt camera tại $C_m(0;4;H)$ trên cột thẳng đứng. Muốn nhìn tới K phải vừa lướt qua đỉnh $S(0;0;3)$.

Phương trình tham số đường C_mK : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4 - 12t, \quad (0 \le t \le 1) \\ z = H - Ht \end{cases}$

Cho $y=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}$. Yêu cầu $z=3\Rightarrow H\left(1-\frac{1}{3}\right)=3\Rightarrow H=4,5m$.

Vậy đặt camera cao $4,5m$ ở giữa cạnh CD thì thấy được điểm K

Câu 56. Một khối thép không gỉ có dạng hình chóp cụt tứ giác đều.



- Độ dài cạnh đáy lớn: 8 cm
- Độ dài cạnh đáy nhỏ: 4 cm
- Chiều cao: 8 cm

Gốc tọa độ $O(0;0;0)$ đặt tại tâm đáy lớn.

Tia laser khoan theo đoạn PQ với: $P(-3,5;9,5;6)$, $Q(-6;16;8)$

Tính độ dài kênh khoan biết đầu vào nằm trong mặt $CDHG$ và đầu ra nằm trong mặt $ABFE$

Đáp án: 7,25

Lời giải

Ta quy ước gốc $O(0;0;0)$ tại tâm đáy lớn, trục Oz vuông góc đáy; đáy lớn (cạnh 8) là hình vuông $A(-4;-4;0)$, $B(4;-4;0)$, $C(4;4;0)$, $D(-4;4;0)$,

đáy nhỏ (cạnh 4) song song và ở $z=8$: $E(-2;-2;8)$, $F(2;-2;8)$, $G(2;2;8)$, $H(-2;2;8)$.

(đơn vị: cm)

Tia khoan đi theo đường thẳng qua $P(-3,5;9,5;6), Q(-6;16;8)$ với véc tơ $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=(-2,5;6,5;2)$.

Phương trình tham số: $\ell:\begin{cases}x=-3,5-2,5t,\\ y=9,5+6,5t,\\ z=6+2t\end{cases}$ $(t\in\mathbb{R})$. Suy ra phương trình các mặt:

$ABFE:-4y+z-16=0, CDHG:4y+z-16=0$

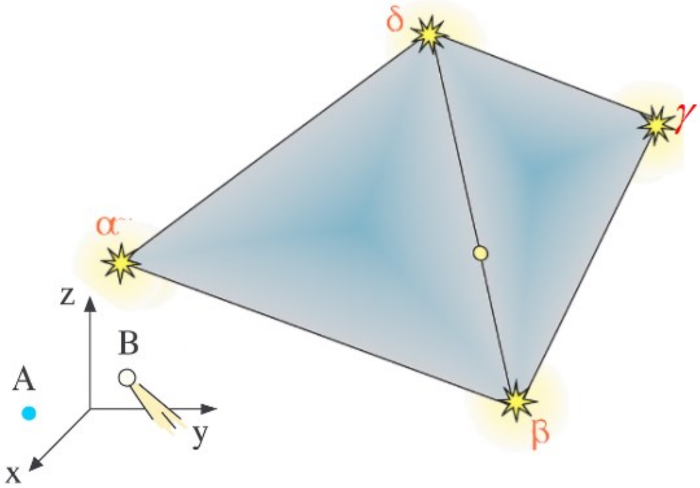
- Với $CDHG:4y+z-16=0\Rightarrow t=-1\ \Rightarrow I=\ell(-1)=(-1;3;4)$ nằm trong mặt $CDHG\Rightarrow$ điểm vào $I(-1;3;4)$.

- Với $ABFE:-4y+z-16=0\Rightarrow t=-2\Rightarrow O=\ell(-2)=\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{2};2\right)$ nằm trong mặt $ABFE$

$\Rightarrow$ điểm ra $O\left(\frac{3}{2};-\frac{7}{2};2\right)$.

Chiều dài kênh khoan $IO=\sqrt{\left(\frac{3}{2}+1\right)^2+\left(-\frac{7}{2}-3\right)^2+(2-4)^2}=\frac{\sqrt{210}}{2}cm\approx 7,25cm.$

Câu 57. Bốn ngôi sao $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ tạo thành một vùng không gian hình chóp tứ giác. Tọa độ các ngôi sao là: $\alpha(4;4;8)$, $\beta(0;20;0)$, $\gamma(-16;16;4)$, $\delta(-8;12;12)$



Một sao chổi bay theo đường thẳng qua hai điểm $A(10;3;1)$ và $B(4;7;3)$. Người ta thấy rằng sao chổi đi vào vùng không gian tại điểm S thuộc tam giác $\alpha\beta\gamma$ và tại đó sao chổi rời khỏi vùng không gian hình chóp này tại điểm T. Tính độ đường đi ST bằng bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị). (1 đơn vị $=1000km$)

Đáp án: 7483

Lời giải

Dữ kiện $\vec{u}_{AB}=(-6;4;2)$

Mặt phẳng $(\alpha\beta\gamma)$ có $\vec{n}_{\alpha\beta\gamma}=\left[\overrightarrow{\beta\alpha},\overrightarrow{\gamma\alpha}\right]=(2;9;17)$, nên phương trình tổng quát:

$2x+9y+17z-180=0.$

Tìm điểm S - giao của quỹ đạo và tam giác $\alpha\beta\gamma$

Đường thẳng qua $A(10;3;1),B(4;7;3)$ (dạng tham số): $\begin{cases} x=10-6t \\ y=3+4t \quad (t\in\mathbb{R}) \\ z=1+2t \end{cases}$

Giao với $(\alpha\beta\gamma):2x+9y+17z-180=0$: $2(10-6t)+9(3+4t)+17(1+2t)-180=0\Rightarrow t=2\Rightarrow S(-2;11;5)$.

Tìm điểm T - nơi sao chổi rời khối chóp

Pháp tuyến các mặt còn lại: $\vec{n}_{\alpha\beta\delta}=(8;7;10)$, $\vec{n}_{\alpha\gamma\delta}=(5;8;-1)$, $\vec{n}_{\beta\gamma\delta}=(-1;10;6)$.

Ta có $\vec{u}_{AB}\cdot\vec{n}_{\alpha\beta\delta}=0$ và $\vec{u}_{AB}\cdot\vec{n}_{\alpha\gamma\delta}=0$

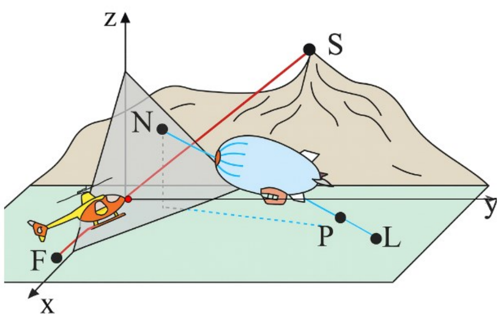
$\Rightarrow$ đường thẳng song song hai mặt này, không cắt chúng.

Mặt $(\beta\gamma\delta)$ có phương trình: $-x+10y+6z-200=0$

Giao với đường thẳng: $-(10-6t)+10(3+4t)+6(1+2t)-200=0\Rightarrow t=3\Rightarrow T(-8;15;7)$.

Suy ra: $ST=2\sqrt{14}.1000\approx 7483\,\text{km}$

Câu 58. Một khinh khí cầu l xuất phát từ sân bay $L(24;52;0)$ và sau đó được xác định tại $P(20;42;2)$.



Một trực thăng h bay thẳng đều cùng thời điểm trong ngày, xuất phát từ sân bay quân sự $F(20;-8;0)$ hướng về đỉnh núi $S(-4;32;16)$.

Bức tường sương mù được mô tả bởi mặt phẳng E_{ABC} với $A(16;0;0)$, $B(0;16;0)$, $C(0;0;16)$.
Gọi T là vị trí mà quỹ đạo bay của khinh khí cầu l và trực thăng h cắt nhau.
Trên quỹ đạo bay tiếp theo, khinh khí cầu l đi vào tường sương mù tại N.
Tính khoảng cách TN (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) (các kích thước tính theo km).

Đáp án: 11

Lời giải

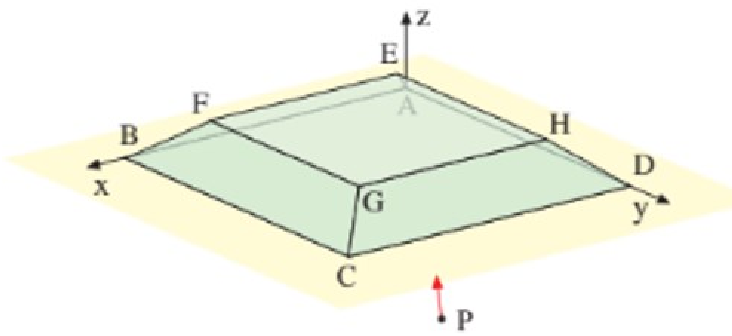
Từ đề bài ta xác định được:

Đường thẳng $l:\begin{cases}x=24-4t\\y=52-10t\\z=2t\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R})$

Đường thẳng $h:\begin{cases}x=20-3s\\y=-8+5s\\z=2s\end{cases}\quad(s\in\mathbb{R})$

Giải hệ $24-4t=20-3s, 52-10t=-8+5s, 2t=2s \Rightarrow t=s=4 \Rightarrow T(8;12;8)$.
Vì $t=s=4>0$ (cùng thời điểm kể từ lúc xuất phát) nên hai quỹ đạo có thể va chạm tại T.
Khinh khí cầu l gặp tường sương mù
Mặt phẳng E_{ABC}: $\vec{n}=(1;1;1)$, $x+y+z-16=0$.
Giao với l:
$(24-4t)+(52-10t)+\ 2t-16=0 \Rightarrow 76-12t-16=0 \Rightarrow t=5$
$\Rightarrow N(4;2;10)$
Khi đó: $TN\approx 11$ km

Câu 59. Cho các điểm $A(0;0;0), B(12;0;0), C(12;12;0)$ và $D(0;12;0)$ là các đỉnh của đáy hình chóp cụt bằng kính (xem hình bên).



Các đỉnh của mặt trên là $E(2;2;3), F(10;2;3), G(10;10;3)$ và $H(2;10;3)$.
Tại điểm $P(14;20;0)$ đặt một tia laser, bắn theo hướng vecto $\vec{v}=(-3;-3;0,5)$. Tia laser sẽ cắt mặt phẳng CDH tại điểm $T(a;b;c)$, tính $a+b+2c$?

Đáp án: 19

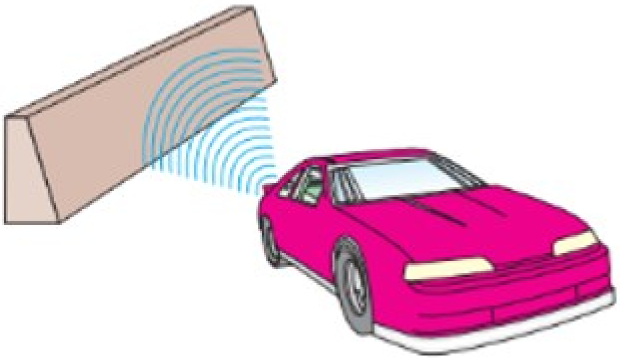
Lời giải

Mặt phẳng CDH (chứa mặt bên $CDHG$)
$\overrightarrow{CD}=(-12;0;0)$, $\overrightarrow{CH}=(-10;-2;3)$.
$\vec{n}=\left[\overrightarrow{CD}\times\overrightarrow{CH}\right]=(0;36;24)$
Suy ra phương trình tổng quát CDH: $3y+2z-36=0$
Tia laser từ $P(14;20;0)$ theo $\vec{v}=\left(-3;-3;\frac{1}{2}\right)$

Suy ra phương trình đường thẳng: $\begin{cases} x = 14 - 3t \\ y = 20 - 3t \quad (t \geq 0) \\ z = \dfrac{1}{2}t \end{cases}$

Giao với mặt phẳng $3y + 2z - 36 = 0$: $3(20 - 3t) + 2\left(\dfrac{1}{2}t\right) - 36 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow T\left(5;11;\dfrac{3}{2}\right)$.

Câu 60. Khi phát triển hệ thống hỗ trợ đỗ xe ô tô, các nhà nghiên cứu sinh học đã sao chép hệ thống định vị của loài dơi và tích hợp các cảm biến tương ứng vào cản sau của xe. Các cảm biến được cài đặt sao cho chúng sẽ phát tín hiệu khi khoảng cách đến vật cản nhỏ hơn $0,3m$.



Một người lái xe đang lùi thẳng về phía một mặt phẳng nghiêng, được cho bởi phương trình: E: $6x + 2y + 3z = 49$. Xác định được điểm $R(a;b;c)$ trên đoạn PQ trong đó $P(6;3;1)$ và $Q(6;4;1)$ mà tại đó cảm biến bắt đầu báo động. Tính $a - b + c$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Đáp án: 3,05

Lời giải

Điểm R trên đoạn PQ khi cảm biến bắt đầu báo động

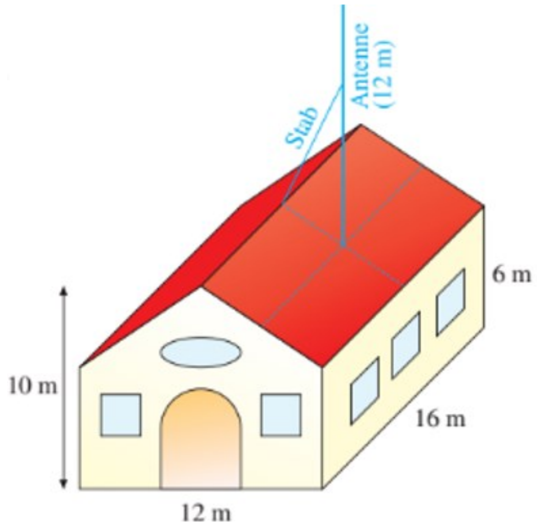
Đường thẳng PQ (dạng tham sô): $\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 + t, \quad (0 \leq t \leq 1) \\ z = 1 \end{cases}$

Khoảng cách đến E: $d = \dfrac{|36 + 2(3 + t) + 3 - 49|}{7} = \dfrac{|-4 + 2t|}{7}$.

Cảm biến bắt đầu báo động nên $4 - 2t = \dfrac{21}{10} \Rightarrow t = \dfrac{19}{20}$.

Suy ra $R\left(6;3 + \dfrac{19}{20};1\right) = \left(6;\dfrac{79}{20};1\right) \approx (6;3,95;1)$.

Câu 61. Chính giữa mặt bên phải của mái nhà (như hình minh họa) có một ăng-ten cao 12 m nhô ra. Ăng-ten được cố định bởi một thanh thép, đầu trên của thanh được gắn ở điểm cách đỉnh ăng-ten 4 m và đầu dưới được bắt vít tại chính giữa đỉnh mái.

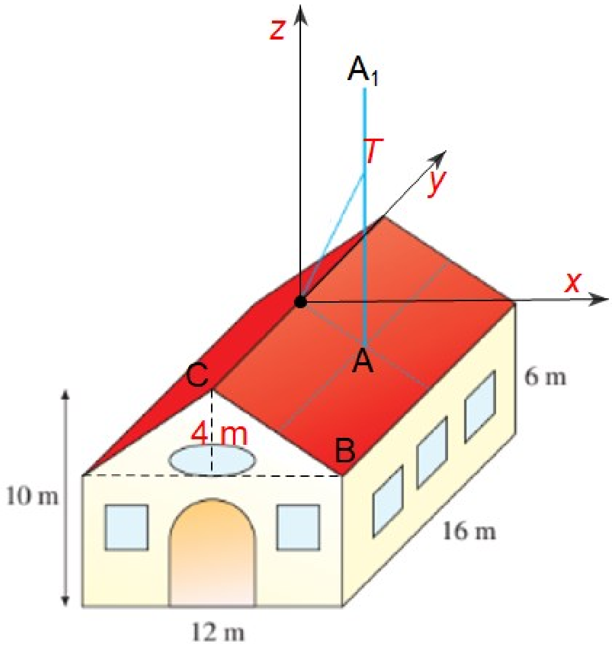


Tính góc giữa thanh thép giữa thanh thép và mặt phẳng mái nhà (gắn ăng-ten) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười, đơn vị độ)

Đáp án: 82,7

Lời giải

Đặt gốc O tại trung điểm đỉnh mái (đường nóc), Oy dọc theo đỉnh mái (chiều dài 16 m), Ox vuông góc đỉnh mái hướng sang mái phải (nửa bề rộng 6 m), Oz thẳng đứng lên. (như hình dưới)



Khi đó: Chân ăng-ten tại $A(3;0;-2)$, đỉnh $C(0;-8;0)$ và $B(6;-8;-4)$

Suy ra phương trình tổng quát của mặt phẳng mái phải: $(P): 2x+3z=0 \quad (\vec{n}=(2;0;3))$

Đầu trên của thanh thép cách đỉnh ăng-ten $4m \Rightarrow$ điểm gắn trên ăng-ten: $T(3;0;6)$.

Đầu dưới của thanh bắt tại chính giữa đỉnh mái: $O(0;0;0)$.

Hướng thanh thép: $\vec{w}=\overrightarrow{OT}=(3;0;6)$.

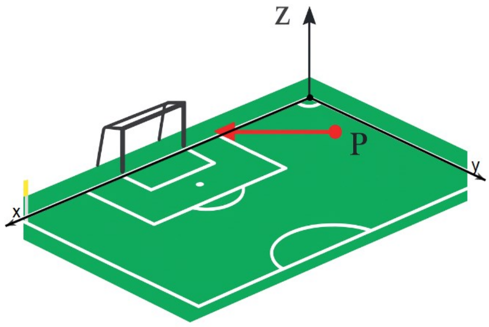
Khi đó góc thanh thép với mặt phẳng mái:

$$\sin\beta=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{w}|}{|\vec{n}|.|\vec{w}|}=\frac{|(2;0;3)\cdot(3;0;6)|}{\sqrt{13}\cdot 3\sqrt{5}}=\frac{8}{\sqrt{65}}\Rightarrow \beta=\arcsin\frac{8}{\sqrt{65}}\approx 82,7^{\circ}.$$

Góc giữa hướng bay $\vec{v}=(-4;4;2)$ và mặt phẳng ngang $z=const$ (pháp tuyến $\vec{n}=(0;0;1)$):

$$\sin\alpha=\frac{|\vec{n}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{n}\|\|\vec{v}\|}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\Rightarrow \alpha=\arcsin\frac{1}{3}\approx 19,47^{\circ}.$$

Câu 62. Một sân bóng đá rộng 60 m. Trong một quả đá phạt, bóng được sút từ vị trí $P(3;9;0)$ theo hướng của vectơ $\vec{v}=(18;-6;1)$ về phía khung thành rộng $7,20m$, cao $2,40m$. Quỹ đạo bay được giả sử là một đường thẳng. Tốc độ bóng ước tính $28,5m/s$.



Tính thời gian bóng bay tới khung thành.

Đáp án: 1

Lời giải

- Quỹ đạo bóng từ $P(3;9;0)$ theo $\vec{v}=(18;-6;1)$: $\begin{cases} x=3+18t \\ y=9-6t \\ z=t \end{cases} \quad (t\geq 0)$

$|\vec{v}|=\sqrt{18^2+(-6)^2+1^2}=19m.$

- Mặt phẳng khung thành (biên ngang): $y=0$.

Điểm chạm mặt phẳng khung thành $y=0\Rightarrow 9-6t=0\Rightarrow t=\dfrac{3}{2}$ hay $Q(30;0;1,5)$.

Khung thành rộng $7,20m$, tâm ở giữa sân rộng $60m\Rightarrow x\in[30-3,6;30+3,6]$, cao $2,40m\Rightarrow 0\leq z\leq 2,40$. Tại $Q: x=30$ và $z=1,5\Rightarrow$ nằm trong khung thành

Thời gian bóng bay tới khung

Quãng đường $s=|\vec{v}|t=19\cdot\dfrac{3}{2}=28,5m$.

Tốc độ $28,5m/s\Rightarrow t_{\text{bay}}=\dfrac{28,5}{28,5}=1s$.

Câu 63. Một tàu ngầm nghiên cứu bị mất tích. Được hai tàu trên mặt biển tìm kiếm phát hiện tàu ngầm cùng lúc.

- Tàu 1 phát hiện tàu ngầm theo hướng của vectơ $\vec{v_1}=(-1;3;-1)$.

- Tàu 2 phát hiện tàu ngầm cùng lúc theo hướng của vectơ $\vec{v_2}=(4;2;-1)$.

Tàu 1 ở vị trí $P(6;2;0)$, còn tàu 2 ở vị trí $Q(-4;4;0)$ đang neo đậu.

Bốn phút sau, các tàu lại đo hướng và xác định rằng tàu ngầm hiện đang ở vị trí $B(6;10;-1)$ (1 đơn vị độ dài $=100m$).

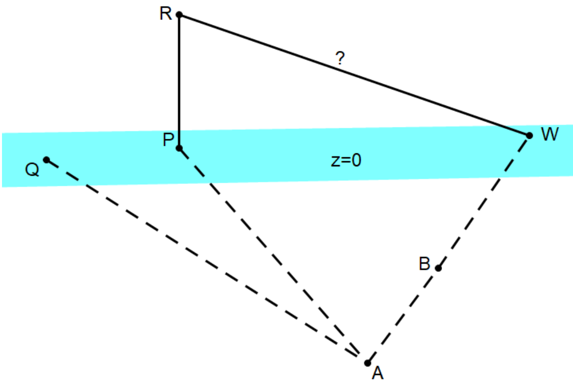
Tàu ngầm tiếp tục di chuyển thẳng từ B cho đến khi nổi lên mặt nước (tức $z=0$).

Tại thời điểm xác định vị trí B, một trực thăng rời khỏi tàu 1, bay thẳng đứng lên tới độ cao 1100 m (vị trí R), rồi hướng thẳng tới vị trí nổi W của tàu ngầm. Tốc độ của trực thăng là $20\,m/s$. Tính thời gian bay của trực thăng để đến W là bao nhiêu giây?

Đáp án: 130

Lời giải

Vẽ lại mô hình bài toán



Ta tìm được phương trình đường duy chuyển của tầu 1 và 2 lần lượt là:

$$P:\begin{cases}x=6-t\\y=2+3t,(t\ge 0)\\z=-t\end{cases};Q:\begin{cases}x=-4+4s\\y=4+2s\\z=-s\end{cases}.(s\ge 0)$$

Giải $\Rightarrow t=s=2\Rightarrow A(4;8;-2)$.

Suy ra hướng duy chuyển của tàu ngầm là $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$

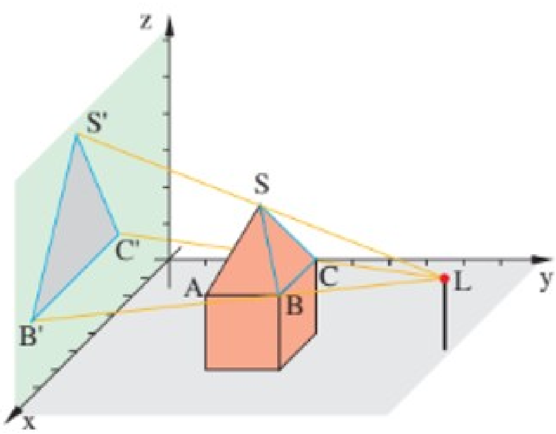
Đi thẳng theo hướng $\overrightarrow{AB}=(2;2;1)$ ta có được phương trình đường thẳng duy chuyển của tàu ngầm là: $\begin{cases}x=6+2u\\y=10+2u\\z=-1+u\end{cases},u\in\mathbb{R}$. Khi nổi lên mặt biển $z=0\Rightarrow u=1\Rightarrow W(8;12;0)$

Trực thăng rời tàu 1, bay thẳng đứng lên 1100 m (điểm R) rồi bay thẳng đến W với $v=20\,m/s$

Tàu 1 ở $P(6;2;0)\Rightarrow R(6;2;11)$, suy ra $|RW|=\sqrt{(2)^2+(10)^2+(-11)^2}=15(dv)=1500\,m.$

Thời gian: $t_{\uparrow}=\dfrac{1100}{20}=55s,\quad t_{RW}=\dfrac{1500}{20}=75s\Rightarrow\sum t=130s.$

Câu 64. Trong một cảnh dựng phim có một ngôi nhà, mái nhà là một hình chóp tứ giác đều với đáy là hình vuông có các đỉnh: $A(6;4;2)$, $B(6;6;2)$, $C(4;6;2)$, $D(4;4;2)$ và đỉnh chóp là S. Chiều cao của hình chóp mái là 2 m.



Một đèn chiếu tại $L(5;10;2)$ chiếu sáng ngôi nhà từ phía bên phải.

Trong mặt phẳng xOz có một tấm màn, trên đó sẽ xuất hiện bóng của ngôi nhà.

Biết rằng các đỉnh B, C và S có các điểm chiếu lần lượt là: B' và C' và S'

Tính $S'B' + S'C'$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Đáp án: 9,4

Lời giải

Các đỉnh đáy (hình vuông, nằm trên $z=2$): $A(6;4;2)$, $B(6;6;2)$, $C(4;6;2)$, $D(4;4;2)$

Tâm đáy $O(5;5;2)$. Đèn chiếu $L(5;10;2)$. Màn chiếu là mặt phẳng xOz: $y=0$

Tìm đỉnh chóp S

Chiều cao mái $=2$ vuông góc với đáy $z=2 \Rightarrow$ $S(5;5;4)$

Hình chiếu S' của S lên màn $y=0$ theo đèn L

Phương trình đường thẳng LS: $\begin{cases} x=5 \\ y=10-5t \\ z=2+2t \end{cases}$

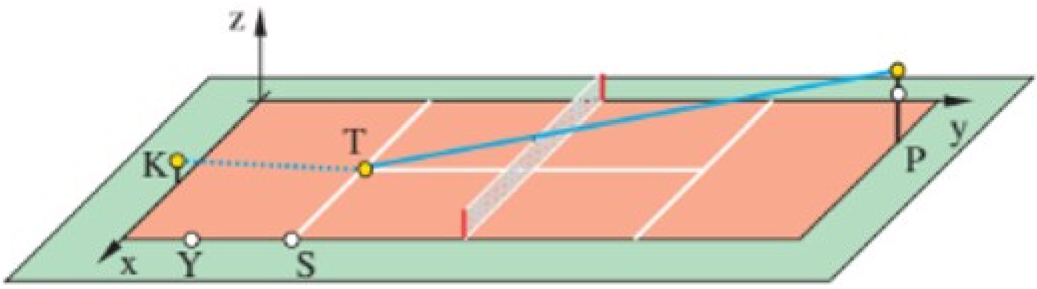
Giao với $y=0$ suy ra $t=2 \Rightarrow S'(5;0;6)$

Tương tự ta tìm được $B'(7,5;0;2), C'(2,5;0;2)$

$\overrightarrow{S'B'} = (-2,5;0;4), \overrightarrow{S'C'} = (2,5;0;4)$

$$\Rightarrow |S'B'| = |S'C'| = \sqrt{(2,5)^2 + 4^2} = \frac{\sqrt{89}}{2} \Rightarrow S'B' + S'C' = \sqrt{89} \approx 9,4$$

Câu 65. Sân quần vợt được mô hình hóa lý tưởng, có chiều dài 24 m và chiều rộng 10 m. Các ô giao bóng dài 6 m và rộng 5 m. Lưới cao liên tục 1 m. Mọi cú đánh đều bay theo đường thẳng.



Một vận động viên đứng ở vạch cuối sân tại điểm $P(3;24;0)$ và cố gắng đánh quả bóng với tốc độ 144 km/h ở độ cao $3{,}10\,m$ sao cho bóng rơi đúng vào điểm $T(5;6;0)$ của ô giao bóng. Sau khi chạm đất, bóng phản xạ theo góc α (giữ nguyên tốc độ, không đổi hướng ngang). Tại vị trí K trên vạch cuối sân bên kia đối thủ sẽ đánh trả, hãy tính thời gian đối thủ có để phản ứng là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Đáp án: 0,15

Lời giải

Quỹ đạo từ A đến T: $\begin{cases} x=3+2t \\ y=24-18t \\ z=3{,}10-3{,}1t \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$ (hướng $\vec{v} = (2;-18;-3{,}1)$).

Sau nảy bóng: phản xạ giữ nguyên tốc độ, không đổi hướng ngang.

Hướng mới: $\vec{v}' = (2;-18;3{,}1)$. Vậy phương trình mới của quả bóng là $\begin{cases} x=5+2s \\ y=6-18s, (s \in \mathbb{R}) \\ z=3{,}1s \end{cases}$

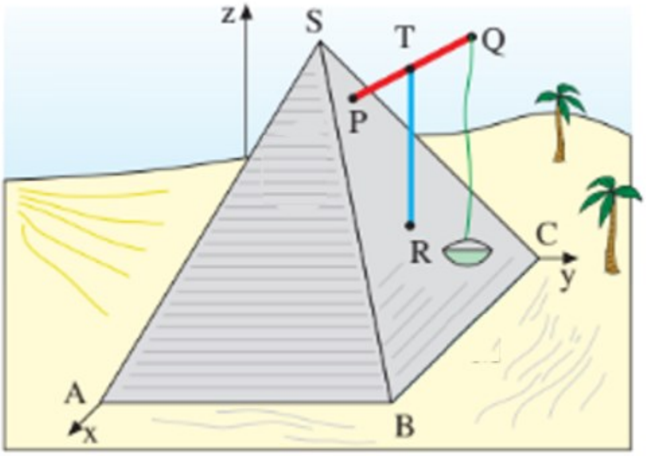
Điểm K trên vạch cuối sân bên kia thuộc mặt phẳng $y=0$: Suy ra

$6-18s=0 \Rightarrow s=\dfrac{1}{3} \Rightarrow K(\dfrac{17}{3};0;\dfrac{31}{30})$.

Quãng đường $TK=\sqrt{\left(\frac{17}{3}-5\right)^2+6^2+\left(\frac{31}{30}\right)^2}=\frac{7\sqrt{689}}{30}$.

Tốc độ $144\,km/h=40\,m/s \Rightarrow$ thời gian đối thủ có để phản ứng: $t=\frac{TK}{40}\approx 0,15\,s$.

Câu 66. Một kim tự tháp cổ có các đỉnh $A(100;0;0), B(100;100;0), C(0;100;0), D(0;0;0)$ và đỉnh $S(50;50;100)$. Từ mặt bên BCS nhô ra một thanh PQ thẳng đứng (là một phần của cơ cấu nâng), trung điểm T của thanh PQ được đỡ bởi cột thẳng đứng RT. Biết $P(50;60;80), Q(50;100;100)$ .Tính chiều dài cột TR.



Đáp án: 50

Lời giải

Mặt phẳng $(BCS):\overrightarrow{BC}=(-100;0;0),\overrightarrow{BS}=(-50;-50;100),\vec{n}=\left[\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BS}\right]=(0;10000;5000)\sim(0;2;1)$

Vậy phương trình tổng quát: $(BCS):2y+z-200=0$.

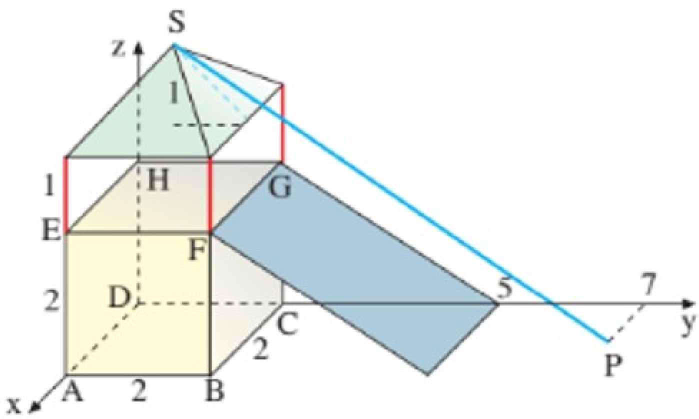
Trung điểm T của $PQ: T(50;80;90)$.

Cột RT thẳng đứng (song song Oz) có phương trình $g:\begin{cases}x=50\\y=80\\z=90+\lambda\end{cases},(\lambda\in\mathbb{R})$

Giao với $(BCS):2\cdot 80+(90+\lambda)-200=0\Rightarrow\lambda=-50$.

Suy ra $R(50;80;40)\Rightarrow TR=50$.

Câu 67. Tháp gồm một khối lập phương, trên đó gắn thêm một khung hộp chữ nhật, và phía trên là một khối chóp tứ giác đều. Tại độ cao bằng chiều cao khối lập phương, có gắn một mặt phẳng trượt hình chữ nhật (xem hình, các kích thước tính bằng mét).



Từ đỉnh S có buộc một sợi dây xuống điểm $P(1;7;0)$ làm dây leo.

Trên mặt phẳng trượt, có một đứa trẻ đứng thẳng tại vị trí chính giữa tấm trượt và với thẳng tay (vuông góc với mặt đất) nắm được dây leo. Tính chiều cao tay vịn của đứa trẻ tính từ mặt đất.

Đáp án: 1,6

Lời giải

Ta xác định được tọa độ các điểm như sau

$D(0;0;0), A(2;0;0), B(2;2;0), C(0;2;0); H(0;0;2), E(2;0;2), F(2;2;2), G(0;2;2), S(1;1;4)$

Phương trình đường thẳng $SP:\begin{cases} x=1, \\ y=1+6t, \\ z=4-4t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$

Ta thấy được mặt phẳng trượt đi qua $F, G, K(0;5;0)$ nên phương trình mặt phẳng trượt là: $2y+3z-10=0$

Điểm chính giữa tấm trượt có tọa độ: $I(1;3,5;1)$

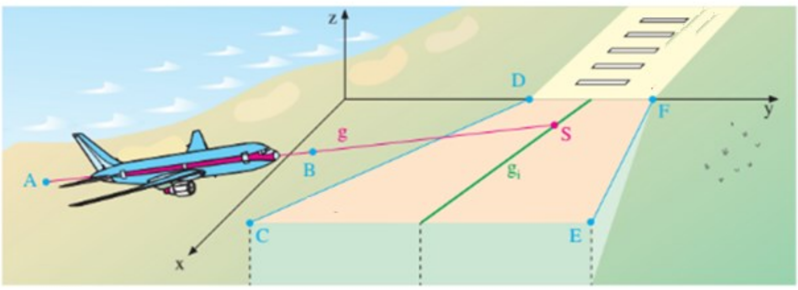
Đứa trẻ đứng thẳng tại vị trí chính giữa tấm trượt và với thẳng tay (vuông góc với mặt đất) thuột đường thẳng có vecto chỉ phương là $(0;0;1)$ và đi qua $I(1;3,5;1)$:

Phương trình $\Delta:\begin{cases} x=1 \\ y=3,5 \\ z=1+k \end{cases}, (k\in\mathbb{R})$

Tìm giao điểm Δ với $SP:\begin{cases} 1=1 \\ 3,5=1+6t \\ 1+k=4-4t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=2,4 \\ k=0,6 \end{cases}$

Suy ra chiều cao tay vịn của đứa trẻ tính từ mặt đất là 1,6m

Câu 68. Một máy bay đang trong giai đoạn tiếp cận để hạ cánh. Nó bay theo đường thẳng g đi qua hai điểm $A(25;2;5)$ và $B(15;7;3)$.



Khu vực tiếp cận hạ cánh được giới hạn bởi hai đường thẳng g_1 và g_2, lần lượt đi qua các điểm $C(10;4;2), D(0;10;0)$ và $E(10;20;2), F(0;14;0)$ (các số đo tính bằng km).

Đường thẳng g_i đi ở giữa khu vực tiếp cận được coi là đường lý tưởng cho hạ cánh. Xác định phương trình g_i. Đường bay g của máy bay cắt đường g_i tại S. Biết tốc độ của máy bay là $500\,km/h$. Tính thời gian từ khi máy bay ở điểm A cho đến khi chạm đường lý tưởng g_i là bao nhiêu giây? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Đáp án: 164

Lời giải

Đường bay g của máy bay (qua A, B): $g:\begin{cases} x=25-10t \\ y=2+5t \\ z=5-2t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{R})$ (hướng $\vec{v}=(-10;5;-2)$).

"Đường lý tưởng" g_i đi giữa khu vực tiếp cận: hay g_i đi qua trung điểm CE, DF (điểm đầu $(10;12;2)$, cuối $(0;12;0)$).

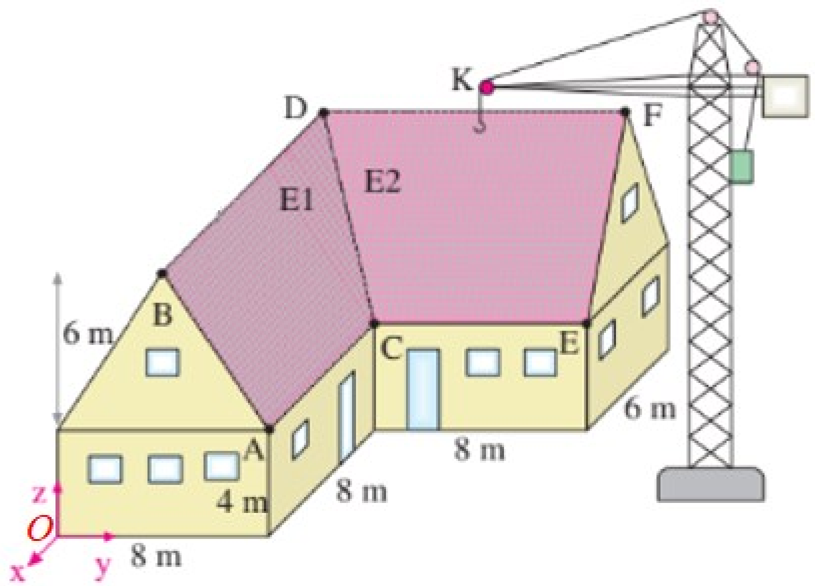
Ta được phương trình: $g_i:\begin{cases}x=10-10u\\y=12\\z=2-2u\end{cases}\quad(u\in\mathbb{R})$

Giao $g\cap g_i$: có $2+5t=12\Rightarrow t=2\Rightarrow S(5;12;1)$. Vậy g cắt g_i tại $S(5;12;1)$

Ta có $SA=\sqrt{(5-25)^2+(12-2)^2+(1-5)^2}=2\sqrt{129}$

Thời gian bay (tốc độ $500\,km/h$) là: $t=\dfrac{2\sqrt{129}}{500}.3600\approx164$ (giây)

Câu 69. Một ngôi nhà góc có kích thước như hình bên.



Đầu tay cần cẩu có tọa độ $K(11;12;26)$. Từ đó kéo một sợi dây tới mái E_2 và xoay qua tiếp tục kéo một sợi dây khác với mái E_1. Tính tổng chiều dài tối thiểu các sợi dây đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Đáp án: 48,2

Lời giải

$O(0;0;0),A(0;8;4),B(0;4;10),C(-8;8;4),E(-8;16;4),F(-11;16;10)$

$\overrightarrow{AB}=(0,-4,6),\overrightarrow{AC}=(-8,0,0)\Rightarrow\vec{n}_{E_1}=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(0,3,2)\Rightarrow E_1:3y+2z-32=0.$

$\overrightarrow{CE}=(0,8,0),\overrightarrow{CF}=(-3,8,6)\Rightarrow\vec{n}_{E_2}=(2,0,1)\Rightarrow E_2:2x+z+12=0.$

- Trên E_1 đường nóc g_{BD} đi qua B và vectơ chỉ phương là $(1;0;0)$

$\rightarrow$ đường nóc: $g_{BD}:\begin{cases}x=t,\\y=4,\\z=10\end{cases}\quad(t\in\mathbb{R}).$

- Trên E_2 đường nóc g_{BD} đi qua F và vectơ chỉ phương là $(0;1;0)$

$\rightarrow$ đường nóc: $g_{FD}:\begin{cases}x=-11,\\y=s,\\z=10\end{cases}\quad(s\in\mathbb{R}).$

Giao điểm hai đường nóc tại D

Giải hai hệ trên: $x=-11, y=4, z=10 \Rightarrow D(-11;4;10)$.

Ta tìm được hình chiếu của K lên E_1 là $K_1=\left(11,-\frac{12}{13},\frac{226}{13}\right)$

có $y<4 \Rightarrow$ ngoài tứ giác $\Rightarrow$ độ dài ngắn nhất xảy ra trên biên.

- Khoảng cách từ K đến các cạnh đạt min tại đỉnh $B(0,4,10)$:

$KB=\sqrt{(11-0)^2+(12-4)^2+(26-10)^2}=\sqrt{441}=21m.$

- Ta tìm được hình chiếu của K lên E_2 là $K_2=(-13,12,14)$

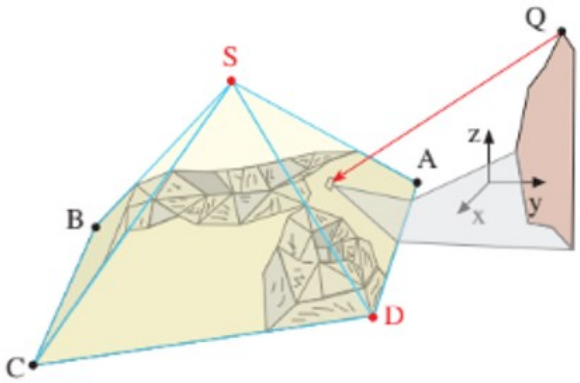
có $x=-13<-11 \Rightarrow$ nằm ngoài tứ giác $\Rightarrow$ độ dài ngắn nhất xảy ra trên biên.

- Xét cạnh $DF:\begin{cases}x=-11\\ y=4+12t, 0\le t\le 1\\ z=10\end{cases}$.

Ta có: Khoảng cách từ K đến $DF=\sqrt{22^2+(12-4-12t)^2+16^2}$ nhỏ nhất khi $t=\frac{2}{3}\Rightarrow R=(-11,12,10)$, suy ra $KR=\sqrt{22^2+0^2+16^2}=2\sqrt{185}\approx 27,2m.$

Tổng độ dài tối thiểu hai sợi dây $L_{\min}\approx 48,2m.$

Câu 70. Các điểm $A(0;-1;0), B(1;-4;0)$ và $C(4;-3;0)$ là các đỉnh thu được của đáy một kim tự tháp khối chóp tứ giác đều, đã bị sụp một phần và cần được phục dựng. Mỗi đơn vị trong hệ tọa độ ứng với 100 m.



Gọi tâm M của hình vuông và tọa độ đỉnh D còn thiếu. Trên đỉnh M theo phương thẳng đứng là đỉnh S của kim tự tháp, với chiều cao 200 m. Theo mô tả, ánh sáng mặt trời vuông góc với mặt bên DAS chiếu qua điểm $Q\left(\frac{1}{2};\frac{5}{3};\frac{7}{2}\right)$ vào một lối vào bí mật của kim tự tháp. Xác định được tọa độ điểm $P(a;b;c)$ là vị trí ban đầu của lối vào bí mật này. Tính $2a+3b+c$

Đáp án: 0

Lời giải

Vì A,B,C là ba đỉnh liên tiếp của hình vuông, $D=(3,0,0)$

Tâm hình vuông: $M=(2,-2,0)$.

Cao kim tự tháp $=200m=2$ (đv) theo phương thẳng đứng $\Rightarrow$ $S(2,-2,2)$

Có $\overrightarrow{DA}=(-3,-1,0), \overrightarrow{DS}=(-1,-2,2). \Rightarrow$ pháp tuyến $\vec{n}=\left[\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DS}\right]=(-2,6,5)$

Suy ra phương trình mặt phẳng $(DAS): -2x+6y+5z+6=0$

Vì ánh sáng mặt trời vuông góc với mặt DAS nên hướng tia là $\vec{n}=(-2,6,5)$

Đường thẳng đi qua Q, vuông góc với DAS có phương trình: $\ell:\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}-2t \\ y=\dfrac{5}{3}+6t, t\in\mathbb{R} \\ z=\dfrac{7}{2}+5t \end{cases}$

Giao với $DAS:-2x+6y+5z+6=0$ cho $t=-\dfrac{1}{2}$.

Suy ra $P\left(\dfrac{3}{2},-\dfrac{4}{3},1\right)$.

Câu 71. Tháp đôi Puerta de Europa, Tây Ban Nha có mặt tiền nghiêng, được mô hình hóa bởi mặt phẳng $(P): x-y+z+1=0$ trong hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị mét). Chủ tòa nhà muốn treo một biển quảng cáo lên mặt tường này, nhưng vì vị trí có cửa sổ thông gió nên phải dùng cơ cấu giàn giáo như sau:

1. Khoan lỗ và cắm thanh sắt

- Khoan hai lỗ trên tường, cắm vào đó hai thanh sắt cố định sao cho đầu mút của mỗi thanh nhô ra phía ngoài.
- Gọi hai đầu mút lần lượt là điểm A và điểm B, với tọa độ $A(1;-2;0), B(2;1;-1)$.

2. Nối khung ngang

- Hàn một thanh sắt ngang nối từ A đến B. Đây là thanh chịu lực chính để treo biển.

3. Gắn biển quảng cáo

- Hàn khung biển vào thanh ngang, xem biển như một tấm bản mỏng nằm trên cùng mặt phẳng (Q).

Để biển áp sát tường nhất - vừa tăng tính thẩm mỹ, vừa giảm lực gió - ta cần điều chỉnh sao cho góc θ giữa mặt phẳng biển (Q) và mặt phẳng tường (P) là nhỏ nhất.

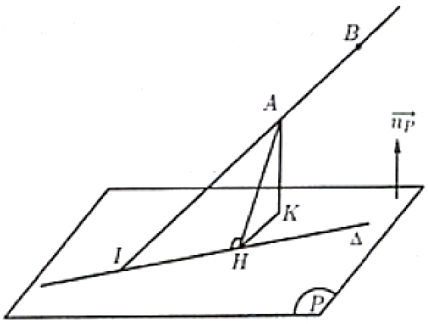
Giả sử phương trình tổng quát của biển hiệu là $(Q): ax+by+cz+d=0, (a;b;c;d\in\mathbb{R})$.

Hãy tính tổng $a+b+c+d$

Đáp án: 3

Lời giải

Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;-2;0)$ và $B(2;1;-1)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x-y+z+1=0$. Biết mặt phẳng (Q) đi qua A, B đồng thời tạo với (P) một góc nhỏ nhất có phương trình là $ax+by+cz+d=0$ với $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. Tính giá trị đại lượng $a+b+c+d$.



Ta có $\overrightarrow{AB}=(1;3;-1)$ là véc tơ chỉ phương của AB.

Véc tơ pháp tuyến $\overrightarrow{n_P}$ của (P) là $\overrightarrow{n_p}=(1;-1;1)$.

Vậy $\overrightarrow{n_P}\cdot\overrightarrow{AB}=-3\neq 0\Rightarrow$ đường thẳng AB cắt (P) tại điểm I.

Gọi $\Delta = P\cap Q$. Giả sử H và K lần lượt là hình chiếu của A trên (P) và Δ.

Ta có AKH là góc giữa (Q) và (P). Lại thấy $\tan AKH=\dfrac{AH}{AK}\geq\dfrac{AH}{AI}=$ const

Vậy AKH min $\Leftrightarrow\tan AKH$ min $\Leftrightarrow\tan AKH=\dfrac{AH}{AI}\Leftrightarrow K\equiv I\Leftrightarrow\Delta\perp AB$

Vì $\Delta\perp AB;\Delta\perp\overrightarrow{n_p}$ vậy $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_p}\right]$ là véc tơ chỉ phương của Δ.

Dễ thấy $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{n_p}\right]=\left(\begin{vmatrix}3&-1\\-1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-1&1\\1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&3\\1&-1\end{vmatrix}\right)=(2;-2;-4)//(1;-1;-2)=\vec{u}$

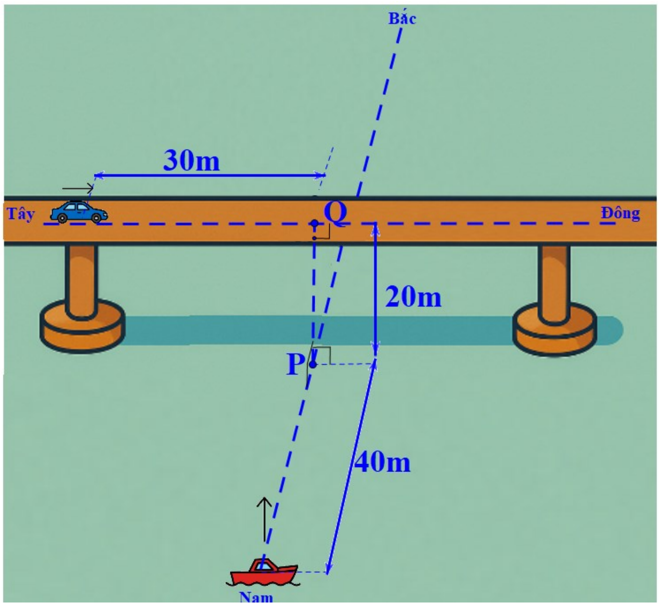
Vậy (Q) nhận $\vec{u},\overrightarrow{AB}$ làm cặp véc tơ chỉ phương

$\Rightarrow\overrightarrow{n_Q}=[\vec{u},\overrightarrow{AB}]=\left(\begin{vmatrix}-1&-2\\3&-1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}-2&1\\-1&1\end{vmatrix};\begin{vmatrix}1&-1\\1&3\end{vmatrix}\right)=(7;-1;4)$

Mặt khác $A\in Q\Rightarrow(Q):7(x-1)-(y-3)+4(z+1)=0$ hay $(Q):7x-y+4z-9=0$

Theo đề bài $Q:ax+by+cz+d=0\Rightarrow a=7;b=1;c=4;d=-9\Rightarrow a+b+c+d=3$

Câu 72. Một chiếc thuyền đang chuyển động đều với tốc độ 10 m/s theo hướng từ Nam lên Bắc trên mặt hồ. Trên cây cầu nằm cách mặt hồ 20m theo phương thẳng đứng, có một chiếc ô tô chuyển động đều với tốc độ 20m/s theo hướng từ Tây sang Đông.



Như hình vẽ, tại thời điểm hiện tại, thuyền ở vị trí cách điểm P (*nằm dưới cầu*) 40 m theo phương Nam, còn ô tô ở vị trí cách Q (*trên cầu*) 30 m theo phương Tây.

(Bỏ qua kích thước của thuyền và ô tô; đoạn thẳng PQ luôn vuông góc với hướng chuyển động của cả thuyền và ô tô)

Hỏi: Khoảng cách giữa thuyền và ô tô đạt giá trị nhỏ nhất bằng bao nhiêu mét?

Đáp án: 30

Lời giải

Chọn hệ tọa độ như sau trên mặt phẳng ngang (trục x hướng Đông, trục y hướng Bắc, gốc O tại điểm P ngay trên mặt nước, bên dưới điểm Q trên cầu):

- Điểm B_1 là vị trí thuyền lúc $t=0$ có tọa độ $(0;-40;0)$ vì thuyền cách P $40\,m$ theo phương Nam

- Điểm C_1 vị trí ô tô lúc $t=0$ có tọa độ $(-30;0;20)$ vì ô tô cách Q $30m$ về phía Tây và cao 20m so với mặt nước.

Khi t giây trôi qua:

- Thuyền đi lên Bắc với tốc độ $10m/s \Rightarrow$ vị trí $B(t)=(0;-40+10t;0)$
- Ô tô chạy về Đông với tốc độ $20m/s \Rightarrow$ vị trí $C(t)=(-30+20t;0;20)$.

Khoảng cách bình phương giữa thuyền và ô tô là

$D^2(t)=(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2+(z_C-z_B)^2=(-30+20t)^2+(0-(-40+10t))^2+(20-0)^2.$

Do đó $D^2(t)=400t^2-1200t+900+100t^2-800t+1600+400=500t^2-2000t+2900.$

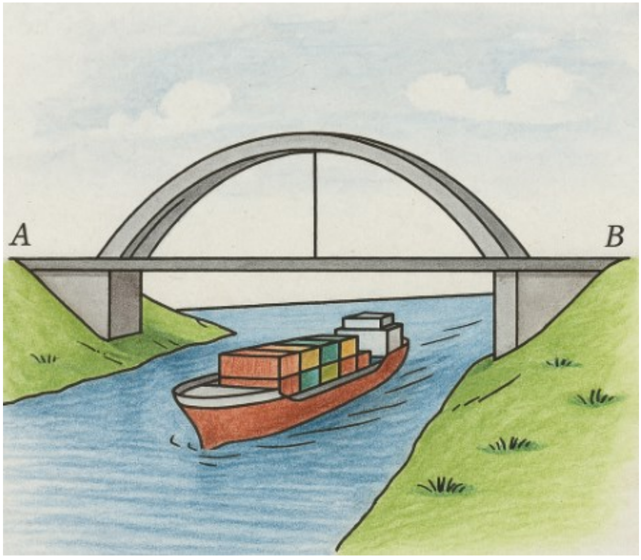
Hàm $D^2(t)$ là hàm bậc hai nên đạt cực tiểu tại $t_0=\dfrac{-(-2000)}{2\cdot 500}=\dfrac{2000}{1000}=2$ (giây).

Giá trị nhỏ nhất: $D^2_{\min}=500\cdot(2)^2-2000\cdot 2+2900=2000-4000+2900=900 \to D_{\min}=\sqrt{900}=30(m).$

Vậy khoảng cách nhỏ nhất là 30m.

Câu 73. Một cây cầu được thiết kế theo dạng parabol đối xứng, bắc ngang con sông. Trong đó:

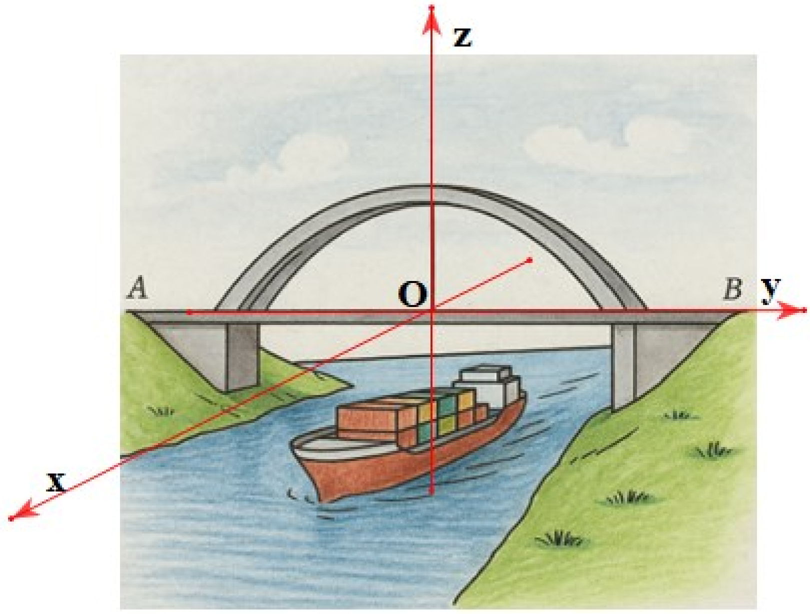
- Dòng sông chảy theo trục Ox, mặt nước sông nằm trong mặt phẳng $z=0$,
- Cầu nằm trong mặt phẳng yOz, nối từ: $A(0;-5;0)$ (bờ trái sông) đến $B(0;5;0)$ (bờ phải sông)
- Cầu có dạng parabol đối xứng qua trục Oz, với đỉnh tại $H(0;0;h)$



- Trên sông có tàu container cao 6 mét, thân tàu rộng 4 mét và cần ít nhất 1 mét khoảng trống chiều cao an toàn, tức yêu cầu chiều cao cầu tối thiểu là 7 mét tại đoạn giữa sông từ $y=-2$ đến $y=2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của h để đảm bảo chiều cao cầu từ $y=-2$ đến $y=2$ luôn lớn hơn hoặc bằng 7 (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Đáp án: 8,33

Lời giải



Vì cầu nằm trong mặt phẳng yOz, ta xét phương trình: $z = ay^2 + by + c$

Do parabol đối xứng qua trục Oz, nên $b = 0 \Rightarrow z = ay^2 + h(*)$

Vì cầu đi qua hai điểm: $A(0;-5;0)$, $B(0;5;0)$

Thay vào phương trình (*), ta được: $\begin{cases} 0 = a(-5)^2 + h = 25a + h \\ 0 = a(5)^2 + h = 25a + h \end{cases} \Rightarrow 25a + h = 0 \Rightarrow a = -\dfrac{h}{25}$

Suy ra $z = -\dfrac{h}{25}y^2 + h$

Để tàu đi qua được cầu thì: $z(y) = -\dfrac{h}{25}y^2 + h \ge 7$ với $y \in [-2;2]$

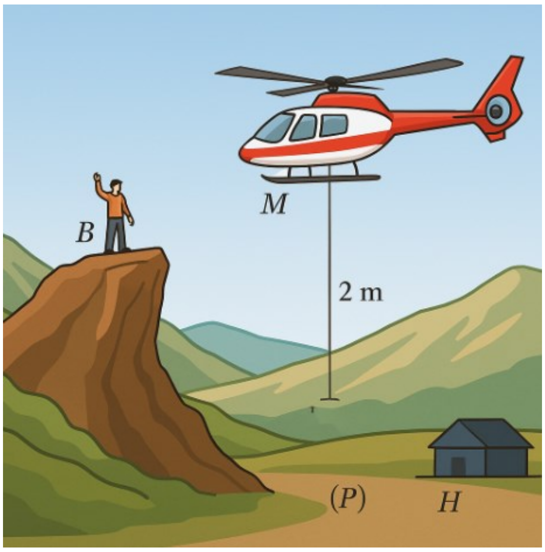
Vì $z(y)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $y = \pm 2 \Rightarrow z_{\min} = -\dfrac{h}{25}\cdot 4 + h = \dfrac{21h}{25}$

Hay $\dfrac{21h}{25} \ge 7 \Rightarrow h \ge \dfrac{7\cdot 25}{21} = \dfrac{175}{21} \Rightarrow h \ge \dfrac{175}{21} \approx 8,33(m)$

Câu 74. Một vùng núi được mô phỏng bằng mặt phẳng địa hình: (P): $x + 2y - z = 0$

Một người bị nạn đang đứng tại điểm $B(2;1;6)$ không nằm trên mặt đất, mà đứng trên một mỏm đá cao.

Một trực thăng xuất phát từ căn cứ tại điểm $H(1082;-809;1624)$, bay theo đường thẳng hướng đến người bị nạn. Tuy nhiên, để đảm bảo an toàn, trực thăng chỉ được phép dừng lại tại một điểm M trên đường bay, sao cho: M cách mặt phẳng địa hình (P) đúng 2 mét. Sau đó từ điểm M (trong đó hoành độ, tung độ và cao độ được làm tròn đến hàng phần trăm), trực thăng thả cáp cứu hộ hỗ trợ người bị nạn



Hãy **tính độ dài đoạn bay** từ căn cứ H đến điểm tiếp cận M (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Đáp án: 2104

Lời giải

Ta có: $\vec{u}=\overrightarrow{HB}=(2-1082;1+809;6-1624)=(-1080;810;-1618)$

Phương trình tham số của đường thẳng: $\begin{cases} x=1082-1080t \\ y=-809+810t, \quad t\in\mathbb{R} \\ z=1624-1618t \end{cases}$

Công thức khoảng cách từ điểm $M(x,y,z)$ đến mặt phẳng $x+2y-z=0$:

$$d=\frac{|x+2y-z|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{|x+2y-z|}{\sqrt{6}}=2\Rightarrow |x+2y-z|=2\sqrt{6}$$

Thay tọa độ điểm $M\in d$: $x+2y-z=\left(1082-1080\,t\right)+2\left(-809+810\,t\right)-\left(1624-1618\,t\right)$

$=1082-1080\,t-1618+1620\,t-1624+1618\,t=-2160+2158\,t$

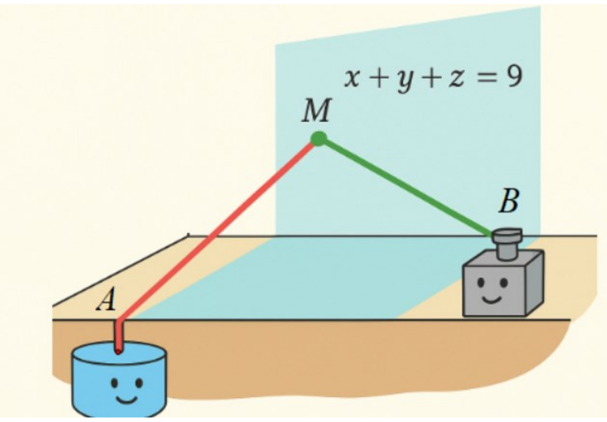
$\rightarrow |2158t-2160|=2\sqrt{6}\Rightarrow 2158t-2160=\pm2\sqrt{6}\Rightarrow t=\dfrac{2160\pm2\sqrt{6}}{2158}$

Chọn nghiệm nhỏ hơn (vì M nằm giữa H và B): $t=\dfrac{2160-2\sqrt{6}}{2158}$

Tại đây ta tìm được tọa độ điểm đã được làm tròn đến hàng phần trăm là: $M(3,45;-0,09;8,17)$

Suy ra: $HM\approx 2104$

Câu 75. Một nhà máy cần nối một đường ống nước thẳng từ **bồn chứa tại điểm** $A\left(0;0;0\right)$ đến **máy xử lý đặt tại điểm** $B\left(4;3;1\right)$. Do địa hình bị chắn giữa hai điểm, đường ống bắt buộc phải đi **qua một điểm** M nằm trên mặt phẳng: $\left(P\right): x+y+z=9$ rồi mới đến điểm B.

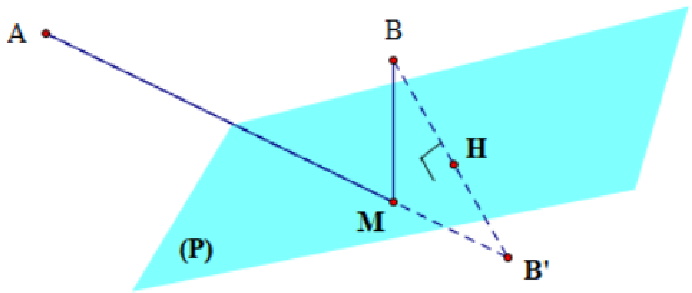


Biết rằng hệ trục tọa độ $Oxyz$ được gắn trong mô hình nhà máy với mỗi đơn vị tương ứng 1 mét. Hỏi chiều dài ống nước nhỏ nhất mà nhà máy cần nối bằng bao nhiêu mét?

Đáp án: 6,16

Lời giải

Tổng độ dài hai đoạn thẳng $AM+MB$ là ngắn nhất khi điểm M nằm trên đường thẳng AB', với B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (P).



Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (P).

Khi đó toạ độ điểm B' là: $(4;3;1)+\frac{2}{3}(1;1;1)=\left(\frac{14}{3};\frac{11}{3};\frac{5}{3}\right)$

Ta có: $AB':\begin{cases} x=\frac{14}{3}t \\ y=\frac{11}{3}t \\ z=\frac{5}{3}t \end{cases}$, gọi $M\in AB'\Rightarrow M\left(\frac{14}{3}t;\frac{11}{3}t;\frac{5}{3}t\right)$, vì $M\in P$ nên $\frac{14t}{3}+\frac{11t}{3}+\frac{5t}{3}=9\Rightarrow t=\frac{9}{10}$. Vậy $M\left(\frac{21}{5};\frac{33}{10};\frac{3}{2}\right)$

Khi đó: $AM=\sqrt{\frac{3078}{100}};BM=\sqrt{\frac{38}{100}}$ ta có: $\sqrt{\frac{3078}{100}}+\sqrt{\frac{38}{100}}\approx 6{,}16\,(\text{m})$

☞ PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Câu 76. Khi gắn hệ toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tính theo kilômét) vào không gian, người ta thấy rằng một không gian phủ sóng điện thoại có dạng một hình cầu (S) (tập hợp những điểm nằm trên và nằm trong mặt cầu tương ứng). Biết mặt cầu có phương trình $x^2+y^2+z^2-4x-6y-2z+5=0$. Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là bao nhiêu kilômét?

Đáp án: 6.

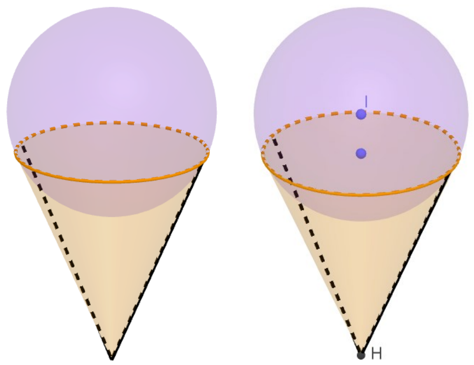
Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;3;1)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+3^2+1^2-5}=3$.

Gọi A, B là hai điểm thuộc vùng phủ sóng. Khi đó A, B có khoảng cách xa nhất khi đoạn AB là đường kính của mặt cầu.

Vậy khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là 6 kilômét.

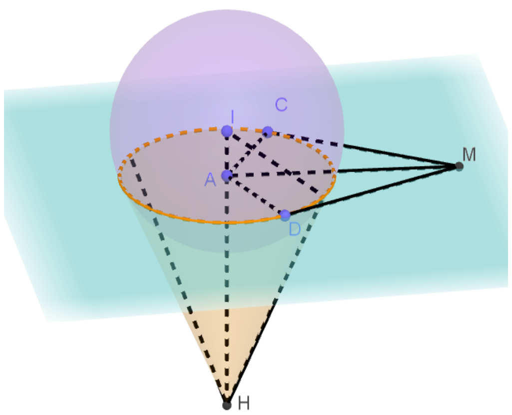
Câu 77. Một cơ sở sản xuất Kem làm một mô hình Kem ốc quế lớn gồm 2 phần: Phần Kem có dạng hình cầu, phần ốc quế có dạng hình nón (như hình vẽ bên). Chủ cơ sở sản xuất muốn gắn một chiếc đèn Led lớn chiếu thẳng cây kem vào buổi tối, biết rằng chiếc đèn nằm trên mặt phẳng chứa đường tròn (C) là phần tiếp xúc giữa phần Kem và phần ốc quế. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian thỏa mãn



phần Kem hình cầu có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R_c=3$ và phần đỉnh của hình nón là điểm $H(0;1;-2)$ đáy là đường tròn có bán kính $R_N=\sqrt{6}$. Để tối ưu hóa lượng ánh sáng chiếc đèn có thể chiếu vào cây kem người ta tính toán rằng chiếc đèn Led sẽ phải ở vị trí $M(a;b;2), a\in\mathbb{Z}$ và từ điểm M kẻ được 2 tiếp tuyến với đường tròn (C) sao cho góc giữa 2 tiếp tuyến đó không bé hơn 60°. Có bao nhiêu vị trí đặt chiếc đèn Led thỏa mãn yêu cầu của chủ cơ sở.

Đáp án: 5.

Lời giải



Gọi A là tâm của đường tròn (C) và MC, MD là hai tiếp tuyến kẻ từ M đến (C)

* Ta có: $\overrightarrow{IH}=(-1;-1;-5)$

$IH=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-5)^2}=3\sqrt{3}$

$IA=\sqrt{R_c^2-R_N^2}=\sqrt{3^2-6}=\sqrt{3}$

$$\overrightarrow{IH}=3\overrightarrow{IA}\Rightarrow\begin{cases}0-1=3\left(x_A-1\right)\\1-2=3\left(y_A-2\right)\\-2-3=3\left(z_A-3\right)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2}{3}\\y=\dfrac{5}{3}\\z=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

Vậy hình nón có đáy là đường tròn có tâm $A\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{5}{3};\dfrac{4}{3}\right)$

* Gọi mặt phẳng (P) chứa đường tròn (C).

Phương trình mặt phẳng $(P):\left(x-\dfrac{2}{3}\right)+\left(y-\dfrac{5}{3}\right)+5\left(z-\dfrac{4}{3}\right)=0\Leftrightarrow x+y+5z-9=0$

Điểm $M\in(P)\Rightarrow a+b+5.2-9=0\Leftrightarrow b=-a-1$

hay $M\left(a;-a-1;2\right)\in(P)$

* Từ điểm M kẻ được hai tiếp tuyến $\Rightarrow AM>\sqrt{6}$

$\Rightarrow AM^2>6\Rightarrow\left(a-\dfrac{2}{3}\right)^2+\left(-a-1-\dfrac{5}{3}\right)^2+\left(2-\dfrac{4}{3}\right)^2>6$

$\Rightarrow 2x^2+4x+8>6\Rightarrow x\neq-1\,(1)$

* Góc giữa hai tiếp tuyến không bé hơn $60^\circ\Rightarrow\sin CMA\geq\sin 30^\circ$

$\Rightarrow\sin CMA\geq\dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow\frac{AC}{AM}\geq\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-a-1-\frac{5}{3}\right)^2+\left(1-\frac{4}{3}\right)^2}}\geq\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-a-1-\frac{5}{3}\right)^2+\left(1-\frac{4}{3}\right)^2}\leq2\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-a-1-\frac{5}{3}\right)^2+\left(1-\frac{4}{3}\right)^2\leq24$$

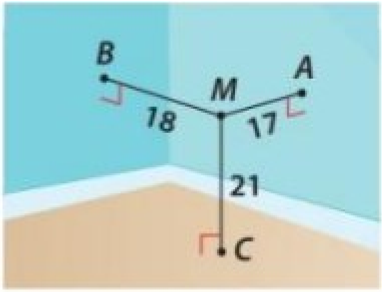
$$\Rightarrow2x^2+4x-\frac{49}{3}\leq0$$

$$\Rightarrow-1-\frac{\sqrt{330}}{6}\leq a\leq-1+\frac{\sqrt{330}}{6}\ (2)$$

* Từ $(1),(2)$ và $a\in\mathbb{Z}\Rightarrow a\in\{-4;-3;-2;0;1;2\}$.

Vậy có 5 giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

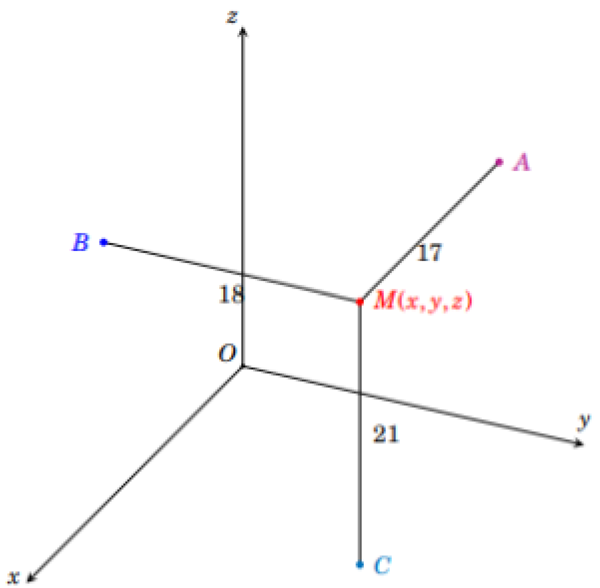
Câu 78. Bạn Bình đố bạn Nam tìm được đường kính của quả bóng rổ, biết rằng nếu đặt quả bóng ở một góc căn phòng hình hộp chữ nhật, sao cho quả bóng chạm (tiếp xúc) với hai bức tường và nền nhà của căn phòng đó (khi đó khoảng cách từ tâm quả bóng đến hai bức tường và nền nhà đều bằng bán kính của quả bóng) thì có một điểm M) trên quả bóng với khoảng cách lần lượt đến hai bức tường và nền nhà là 17 cm, 18 cm và 21 cm (Hình bên dưới). Tính đường kính của quả bóng rổ đó, biết rằng loại bóng rổ tiêu chuẩn có đường kính từ 23 cm đến 24,5 cm (kết quả làm tròn đến hàng phần chục, đơn vị là cm).



Đáp án: 23,9.

Lời giải

Xét quả bóng tiếp xúc với các bức tường và chọn hệ trục Oxyz như hình vẽ:



Gọi $I(a;a;a)$ là tâm của mặt cầu và $r = a > 0$.

Phương trình mặt cầu của quả bóng là

$(S):(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2=a^2$.

Giả sử $M(x;y;z)$ nằm trên mặt cầu (bề mặt của quả bóng) sao cho

Câu 1: $\mathrm{d}(M,(Oxy))=21,\ \mathrm{d}(M,(Oxz))=18,\ \mathrm{d}(M,(Oyz))=17.$

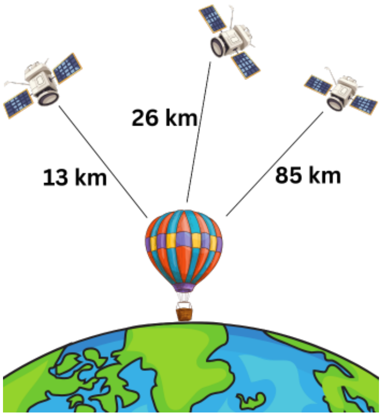
Khi đó $z=21, y=18, x=17$. Khi đó ta có phương trình

Câu 2: $(17-a)^2+(18-a)^2+(21-a)^2=a^2$

Câu 3: $\Leftrightarrow 2a^2-112a+1054=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a\approx 11,97 \\ a\approx 44,03(\mathrm{L}) \end{array}\right.$

Vậy đường kính của quả bóng rổ là $2a \approx 23,9$ cm.

Câu 79. Một khinh khí cầu nghiên cứu khí tượng được phóng lên để thu thập dữ liệu trong tầng bình lưu. Khí cầu này có thiết bị định vị sử dụng tín hiệu từ các vệ tinh của công ty S để xác định vị trí trong không gian. Tại thời điểm quan sát, khí cầu đang bay ở độ cao 50 km và nhận được tín hiệu từ ba vệ tinh S có toạ độ trong không gian $Oxyz$ (đơn vị km) như sau: Vệ tinh A tại vị trí $A(103; 204; 62)$, vệ tinh B tại vị trí $B(106; 208; 74)$, vệ tinh C tại vị trí $C(105; 212; 134)$. Từ thời gian truyền tín hiệu, hệ thống xác định rằng khoảng cách từ vị trí M của khinh khí cầu đến các vệ tinh là: $MA = 13$ km, $MB = 26$ km, $MC = 85$ km. Tính khoảng cách từ khinh khí cầu đến gốc toạ độ O. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của km).



Đáp án: 229

Lời giải

Gọi $M(x;y;z)$. Ta có:

$MA = 13 \Leftrightarrow M \in (S_1)$ là mặt cầu tâm A, bán kính $R_1 = 13$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 206x - 408y - 124z + 55900 = 0$ (1)

$MB = 26 \Leftrightarrow M \in (S_2)$ là mặt cầu tâm B, bán kính $R_2 = 26$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 212x - 416y - 148z + 59300 = 0$ (2)

$MC = 85 \Leftrightarrow M \in (S_3)$ là mặt cầu tâm C bán kính $R_3 = 85$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 210x - 424y - 268z + 66700 = 0$ (3)

Lấy (2) trừ (1) ta được $6x + 8y + 24z - 3400 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y + 12z - 1700 = 0$ (4)

Lấy (2) trừ (3) ta được $2x - 8y - 120z + 7400 = 0 \Leftrightarrow x - 4y - 60z + 3700 = 0$ (5)

Nhận xét các phương trình (4) và (5) đều là phương trình mặt phẳng.

Suy ra điểm M thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng $(P): 3x + 4y + 12z - 1700 = 0$ và $(Q): x - 4y - 60z + 3700 = 0$.

Ta có $\begin{cases} \vec{n}_{(P)} = (3;4;12) \\ \vec{n}_{(Q)} = (1;-4;-60) \end{cases} \Rightarrow \vec{u}_d = \left[\vec{n}_{(P)}, \vec{n}_{(Q)}\right] = (-192;192;-16) = -16(12;-12;1)$

Chọn điểm $T(-500;800;0)$ vừa thuộc (P), vừa thuộc $(Q) \Rightarrow T \in d$

Phương trình tham số của d là $\begin{cases} x = -500 + 12t \\ y = 800 - 12t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Mà $M \in d \Rightarrow M(-500 + 12m; 800 - 12m; m)$ với $m \in \mathbb{R}$.

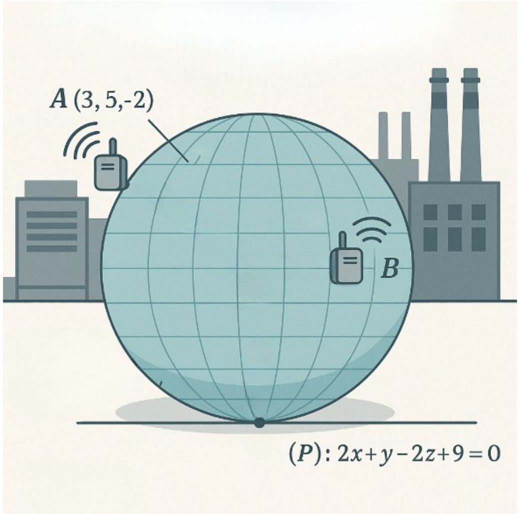
Thay $(x; y; z) = (-500 + 12m; 800 - 12m; m)$ vào phương trình (1) ta được

$(12m - 500)^2 + (800 - 12m)^2 + m^2 = 206(12m - 500) + 408(800 - 12m) + 124m - 55900$

$\Leftrightarrow 289m^2 - 28900m + 722500 = 0 \Leftrightarrow m = 50$.

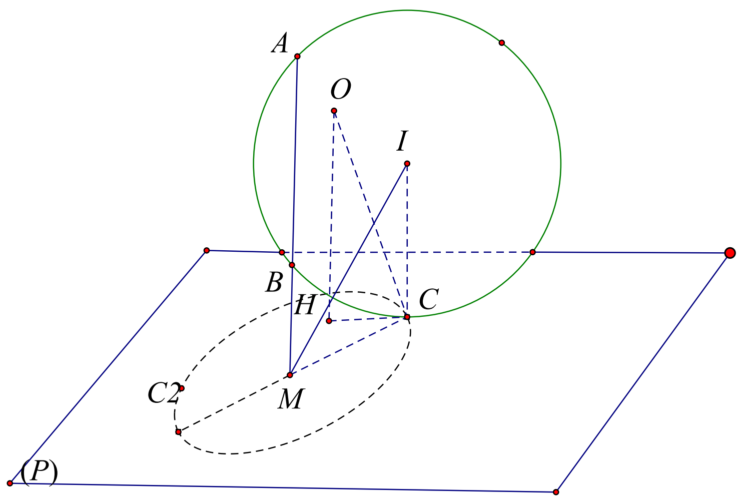
Vậy toạ độ M là $M(100; 200; 50) \Rightarrow OM = 50\sqrt{21} \approx 229$ (km).

Câu 80. **(Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025)** Một công ty xây dựng một hệ thống Giám sát môi trường tại khu công nghiệp. Hai cảm biến không dây được đặt tại hai vị trí A, B trong không gian 3 chiều để thu thập dữ liệu không khí. Để đảm bảo tín hiệu truyền giữa hai cảm biến ổn định, công ty thiết kế một bóng bảo vệ tín hiệu hình cầu di động nhưng luôn đi qua cả hai cảm biến A và B. Bóng này cần tiếp xúc với mặt đất để đảm bảo tính ổn định. Giả sử trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, toạ độ các điểm là $A(3;5;-2)$, $B(-1;3;2)$ và mặt đất được mô tả bằng mặt phẳng: $(P): 2x+y-2z+9=0$. Trong quá trình mô phỏng, điểm tiếp xúc giữa bóng bảo vệ và mặt đất (gọi là C) thay đổi. Kỹ sư cần xác định khoảng cách từ gốc tọa độ $O(0,0,0)$ đến điểm tiếp xúc C để đánh giá mức độ ảnh hưởng từ vị trí đặt thiết bị. Gọi m_1 là giá trị lớn nhất, và m_2 là giá trị nhỏ nhất của độ dài OC. Tính giá trị $m_1^2+m_2^2$.



Đáp án: 76

Lời giải



$\begin{cases} \overrightarrow{AB}=(-4;-2;4)=-2(2;1;-2) \\ \overrightarrow{n_P}=(2;1;-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_P}$ cùng phương nên $\overrightarrow{AB} \perp (P)$, $AB=6$

$d(A;(P))=\dfrac{|2.3+5-2.(-2)+9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=8$ và $d(B;(P))=\dfrac{|2.(-1)+3-2.2+9|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=2$

$AB \cap (P)=M \Rightarrow M$ cố định

Do (P) tiếp xúc với mặt cầu (S) tại C nên $MC \perp IC$ tại C

$\Rightarrow MA.MB=MC^2$, ta có: $\begin{cases} MA=d(A;(P))=8 \\ MB=d(B;(P))=2 \end{cases} \Leftrightarrow MC^2=16 \Leftrightarrow MC=4$

$\Rightarrow C$ thuộc đường tròn tâm M bán kính $r=MC=4$

Ta có: $AB: \begin{cases} x=3+2t \\ y=5+t \\ z=-2-2t \end{cases}$, $M=AB \cap (P) \Rightarrow M\left(-\dfrac{7}{3};\dfrac{7}{3};\dfrac{10}{3}\right)$

Gọi H là hình chiếu của O lên mặt phẳng (P) $\Rightarrow d(O(P))=3$, $OH:\begin{cases}x=2t\\y=t\\z=-2t\end{cases}$

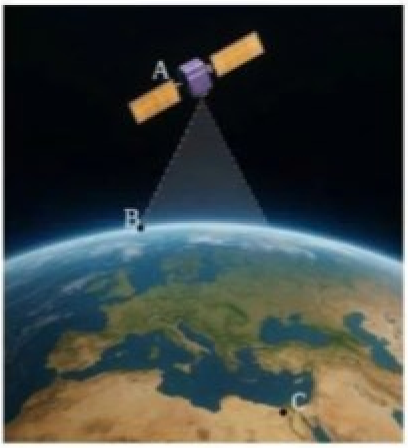
$H=OH\cap(P)\Leftrightarrow H(-2;-1;2)$, $HM=\sqrt{13}<4$ nên H nằm trong đường tròn tâm M bán kính $r=MC=4$. Suy ra $OC=\sqrt{OH^2+HC^2}=\sqrt{9+HC^2}$

$\Rightarrow OC$ đạt min hoặc max $\Leftrightarrow HC$ đạt min hoặc max

$$\begin{cases}HC_{\min}=|HM-r|=4-\sqrt{13}\\HC_{\max}=HM+r=4+\sqrt{13}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}OC_{\min}=\sqrt{9+\left(4-\sqrt{13}^2\right)}=m_2\\OC_{\max}=\sqrt{9+\left(4+\sqrt{13}\right)^2}=m_1\end{cases}$$

Vậy $m_1^2+m_2^2=76$

Câu 81. Hệ thống định vị toàn cầu (tên tiếng Anh là: Global Positioning System, viết tắt là GPS) là một hệ thống cho phép xác định chính xác vị trí của một vật thể bất kì trong không gian. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ thích hợp, một vệ tinh đang ở vị trí tọa độ $A(-1;-3;-5)$ thường xuyên truyền tín hiệu đến các trạm thu ở các vị trí $B(-1;1;-1)$ và $C(1;-1;-1)$ trên mặt đất. Biết rằng mặt đất được mô hình hóa bởi phương trình mặt cầu $(S):x^2+y^2+z^2=3$. Người ta xác định được tọa độ điểm $M(a;b;c)$ thuộc mặt đất sao cho tổng độ dài $MA+MB+MC$ nhỏ nhất. Tính giá trị $a+b+c$ và làm tròn đến hàng phần chục.



Đáp án: –2,1

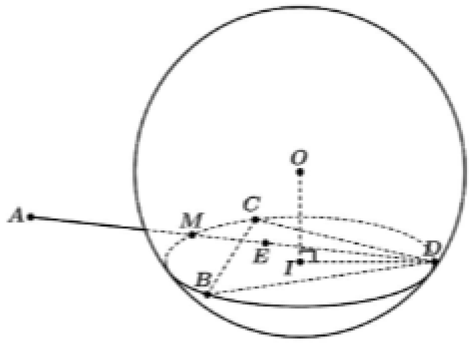
Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính $R=\sqrt{3}$.

Ta có $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=(0;4;4)\\\overrightarrow{AC}=(2;2;4)\end{cases}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(8;8;-8)=8(1;1;-1)$.

$\Rightarrow(ABC):x+y-z-1=0$.

Do $d(O,(ABC))=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt cầu (S) theo giao tuyến là một đường tròn (C) bán kính bằng $r=\sqrt{R^2-d^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$.



Chọn điểm D thuộc (C) sao cho ΔBCD đều, suy ra $D(1;1;1)$.

Xét điểm M thuộc cung nhỏ BC, lấy E thuộc đoạn DM sao cho $MC = ME$ (1).

Mặt khác $CME = CBD = 60°$ (góc nội tiếp cùng chắn cung CD). Vì vậy tam giác CME đều.

Xét hai tam giác CMB và CED có $\begin{cases} CM = CE, CB = CD \\ CBM = CDE \end{cases}$. Do đó hai tam giác CMB, CED bằng nhau, suy ra $MB = ED$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MA + MB + MC = MA + ED + ME \geq AD = 2\sqrt{14}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $M = AD \cap (S)$ hay $M = AD \cap (C)$.

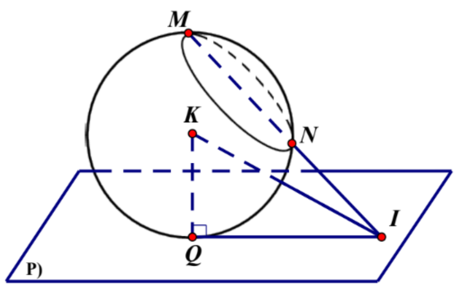
Ta có: phương trình tham số của đường thẳng AD là $AD: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + 3t \end{cases}$.

Thay phương trình AD vào phương trình (S) thì $(1+t)^2 + (1+2t)^2 + (1+3t)^2 = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = -\frac{6}{7} \end{array}\right.$.

Với $t = 0$ ta có điểm $D(1;1;1)$.

Với $t = -\frac{6}{7}$ ta có điểm $M\left(\frac{1}{7}; -\frac{5}{7}; -\frac{11}{7}\right)$; suy ra $a + b + c = -\frac{15}{7} \approx -2,1$.

Câu 82. Một robot khảo sát không gian hoạt động trong môi trường 3D có một cảm biến hình cầu, được lập trình để di chuyển sao cho cảm biến này tiếp xúc tại một điểm Q trên một bức tường nghiêng có phương trình là mặt phẳng $x + y - z - 3 = 0$ để đo đạc. Trong lúc khảo sát, cảm biến luôn phải đi qua hai điểm chuẩn đã cố định sẵn trong không gian là điểm $M(1;1;1)$ - *vị trí cảm biến tại lần đo đầu tiên* và điểm $N(-3;-3;-3)$ *vị trí cảm biến tại lần đo tiếp theo*. Để tối ưu hoá phần mềm điều hướng, kỹ sư muốn xác định rằng: Dù cảm biến (hình cầu) có di chuyển sao cho tiếp xúc ở đâu trên bức tường, điểm tiếp xúc đó luôn nằm trên một đường tròn cố định. Tính bán kính của đường tròn cố định đó, từ đó giúp lập trình robot dò tìm tiếp điểm dễ dàng hơn trong các lần đo tiếp theo.



Đáp án: 6.

Lời giải

* Đường thẳng MN có phương trình tham số là $\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1+t \end{cases}$.

* Gọi $I=MN\cap(P)$ khi đó tọa độ điểm I ứng với t thỏa mãn:

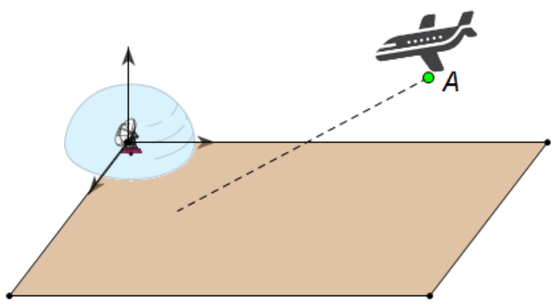
$1+t+1+t-1-t-3=0 \Leftrightarrow t-2=0 \Leftrightarrow t=2 \Rightarrow I(3;3;3) \Rightarrow IM=2\sqrt{3}, IN=6\sqrt{3}.$

Do mặt cầu (S) đi qua M, N và tiếp xúc với đường thẳng IQ tại điểm Q nên ta có:

$IQ^2=IM\cdot IN=KI^2-R^2 \Rightarrow IQ^2=IM\cdot IN=36 \Leftrightarrow IQ=6$

Vậy Q luôn thuộc đường tròn tâm I bán kính $R=6$.

Câu 83. Trong không gian với hệ trục toạ độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là kilômét), đài kiểm soát không lưu sân bay ở vị trí $O(0;0;0)$ và được thiết kế phát hiện máy bay ở khoảng cách tối đa 500 km. Một máy bay đang ở vị trí $A(-1000;-185;30)$ và chuyển động với tốc độ không đổi theo quỹ đạo là đường thẳng d có vectơ chỉ phương $\vec{u}=(100;80;0)$. Tính khoảng cách từ vị trí A đến khi đài kiểm soát không lưu phát hiện được máy bay (đơn vị km, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Đáp án: 761.

Lời giải

Gọi M là giao điểm của đường thẳng d với mặt cầu (S) tâm O bán kính $R=500$ km. Khi đó, yêu cầu bài toán là tính độ dài đoạn AM.

Ta có: $(S): x^2+y^2+z^2=500^2, d: \begin{cases} x=-1000+100t \\ y=-185+80t \\ z=30 \end{cases} \Rightarrow AM=20\sqrt{41}.t$

Tìm M:

$(-1000+100t)^2+(-185+80t)^2+30^2=250000$

$\Leftrightarrow 16400t^2-229600t+785125=0$

$\Leftrightarrow 656t^2-9184t+31405=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1148+\sqrt{30299}}{164} \Rightarrow AM\approx 1032 \\ t=\dfrac{1148-\sqrt{30299}}{164} \Rightarrow AM\approx 761 \end{array}\right.$

Vậy $AM\approx 761$ km.

Câu 84. Trong trong không gian Oxyz, bề mặt Trái Đất có phương trình: $x^2+y^2+z^2=1$.(1 đơn vị dài trong không gian Oxyz tương ứng với 6 371 krn trên thực tế); vị trí P có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha°N, \beta°E(0<\alpha<90, 0<\beta<180)$ có toạ độ $P(\cos\alpha°\cos\beta°;\cos\alpha°\sin\beta°;\sin\alpha°)$. Ứng dụng Google Maps cho phép xác định khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất khi biết vĩ độ và kinh độ của chúng. Khoảng cách giữa hai vị trí P và Q trên bề mặt Trái Đất là độ dài cung nhỏ PQ của đường tròn có tâm O và đi qua hai điểm P, Q. Tính khoảng cách trên mặt đất giữa hồ Hoàn Kiếm (Hà Nội) ở vị trí $21°02'N, 105°51'E$ và đảo Trường Sa ở vị trí $8°39'N, 111°56'E$ (đơn vị: km, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Đáp án: 1524.

Lời giải

Gọi P và Q lần lượt là vị trí tương ứng với hồ Hoàn Kiếm và đảo Trường Sa

Ta có $P(\cos 21°02'\cos 105°51'; \cos 21°02'\sin 105°51'; \sin 21°02')$, $Q(\cos 8°39'\cos 111°56'; \cos 8°39'\cos 111°56'; \sin 8°39')$

Suy ra

$\overrightarrow{OP} = (\cos 21°02'\cos 105°51'; \cos 21°02'\sin 105°51'; \sin 21°02')$,

$\overrightarrow{OQ} = (\cos 8°39'\cos 111°56'; \cos 8°39'\cos 111°56'; \sin 8°39')$.

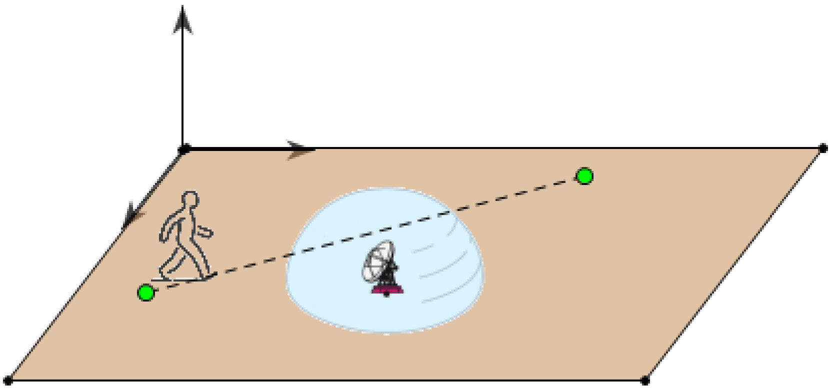
Do đó $\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ} \approx 0,9715384942$ vì P, Q thuộc mặt đất nên $|\overrightarrow{OP}| = |\overrightarrow{OQ}| = 1$

Do đó $\cos POQ = \dfrac{\overrightarrow{OP}.\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}|.|\overrightarrow{OQ}|} \approx 0,97154$. Suy ra $POQ \approx 13,70257035°$

Mặt khác, mặt cầu tâm O, đi qua P, Q có bán kính 1 nên cung nhỏ PQ của đường tròn đó có độ dài xấp xỉ bằng $\dfrac{13,70257035\pi}{180} \approx 0,2391549686$.

Do 1 đơn vị dài trong không gian Oxyz tương ứng với 6 371 km trên thực tế, nên khoảng cách trên mặt đất giữa hai vị trí P, Q xấp xỉ bằng $0,2391549686 \cdot 6371 = 1523,656305 \approx 1524$ (km).

Câu 85. Một trạm X có chức năng thu - phát sóng điện thoại. Bán kính phủ sóng của trạm X là 2 km. Chọn hệ trục tọa $Oxyz$ sao cho O trùng với trạm X và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1 km. Từ một nơi nằm ngoài vùng phủ sóng của trạm X, bạn An đi xuyên qua khu vực trạm X phủ sóng và đi trên một con đường dạng đường thẳng có phương trình: $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = \sqrt{3} \end{cases}$. Quãng đường bạn An đi vào vùng phủ sóng của trạm X bao nhiêu kílômét? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Đáp án: 1,4.

Lời giải

Phương trình vùng phủ sóng là: $x^2 + y^2 + z^2 \le 2^2$.

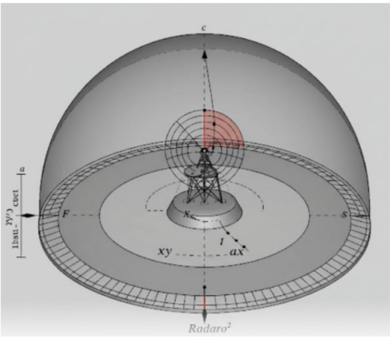
Quảng đường bạn An đi trong vùng phủ sóng là đoạn AB với A, B là hai giao điểm của

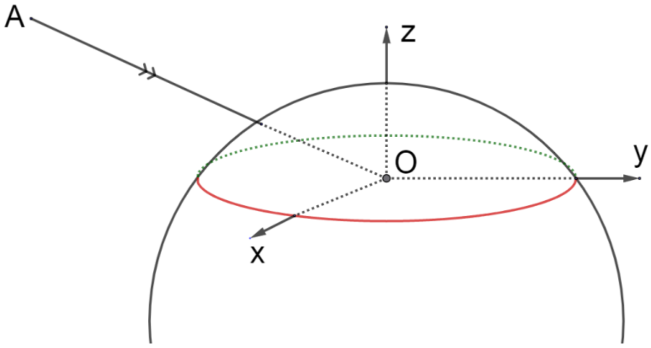
$d:\begin{cases} x=t \\ y=1-t \\ z=\sqrt{3} \end{cases},(S):x^2+y^2+z^2=4$.

Ta có phương trình

$t^2+(1-t)^2+(\sqrt{3})^2=4 \Leftrightarrow 2t^2-2t=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \Rightarrow A(0;1;\sqrt{3}) \\ t=1 \Rightarrow B(1;0;\sqrt{3}) \end{array}\right. \Rightarrow AB=\sqrt{2}\approx 1,4$ km.

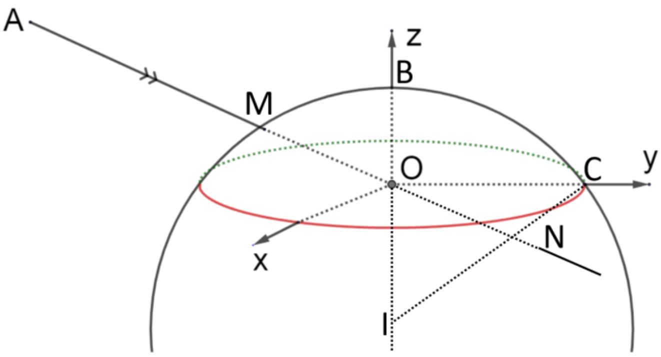
Câu 86. Hình chỏm cầu có một đáy là một phần của hình cầu bị chia bởi một mặt phẳng. Một rađa có thể phát hiện các mục tiêu trong khu vực của một hình chỏm cầu với chiều rộng trên mặt đất là một hình tròn với bán kính 450 km và chiều cao 30 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với mặt phẳng Oxy là mặt đất (xem mặt đất là mặt phẳng), trục Oz hướng lên cao và gốc tọa độ O trùng với vị trí của rađa (tham khảo hình vẽ bên), mỗi đơn vị trên trục là 1 km. Một tên lửa được phóng lên cao, bắt đầu từ vị trí $A(30;-780;60)$, dự định bay thẳng với tốc độ không đổi 7 km/ giây hướng thẳng đến vị trí của rađa. Thời gian dự kiến từ khi tên lửa bị rađa phát hiện đến khi nó bắn trúng rađa là bao nhiêu giây? (làm tròn đến hàng đơn vị)





Đáp án: 37.

Lời giải



Giả sử trục Oz cắt mặt cầu tại điểm $B(0;0;30)$; trục Oy cắt mặt cầu tại điểm $C(0;450;0)$ như hình vẽ.

Gọi mặt cầu là (S) và có tâm là $I(0;0;a)$ với $a<0$.

Ta có $IB^2=IC^2 \Leftrightarrow (30-a)^2=450^2+a^2 \Leftrightarrow a=-3360$. Suy ra mặt cầu (S) có tâm $I(0;0;-3360)$ và $R=3390$ nên có phương trình là $x^2+y^2+(z+3360)^2=3390^2$.

Đường thẳng AO có phương trình là $\begin{cases} x=-30t \\ y=780t \\ z=-60t \end{cases}$.

Thay $x=-30t; y=780t; z=-60t$ vào phương trình mặt cầu ta được

$\left(-30t\right)^2+\left(780t\right)^2+\left(-60t+3360\right)^2=3390^2 \Leftrightarrow 681t^2-448t-225=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{3} \\ t=\dfrac{225}{227} \end{array}\right.$.

Khi đó đường thẳng AO cắt mặt cầu tại 2 điểm M và N. Tên lửa bị rađa phát hiện tại điểm M thỏa mãn A,M cùng phía so với mặt phẳng Oxy. Khi đó cao độ $z_M>0$ nên tọa độ điểm M ứng với $t=-\dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow M\left(10;-260;20\right) \Rightarrow MO=10\sqrt{681}$.

Thời gian dự kiến từ khi tên lửa bị rađa phát hiện đến khi nó bắn trúng rađa là

$\dfrac{MO}{7}=\dfrac{10\sqrt{681}}{7}\approx 37$ (giây).

Câu 87. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một thiết bị phát sóng wifi được đặt tại vị trí $I\left(3;4;2\right)$. Vùng phủ sóng của thiết bị là một hình cầu có bán kính $R=10m$. Một người sử dụng điện thoại đứng ở vị trí $K\left(x-7;7;1\right)$. Sau đó, người đó di chuyển đến vị trí $H\left(x+11;7;1\right)$. Tìm giá trị nguyên của x sao cho cả hai vị trí K và H đều có thể bắt được tín hiệu wifi từ thiết bị.

Đáp án: 1.

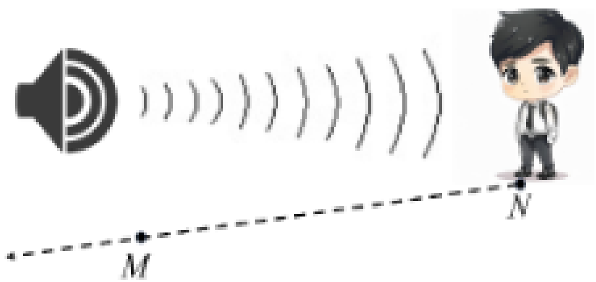
Lời giải

Cả hai vị trí K và H đều có thể bắt được tín hiệu wifi từ thiết bị $\Leftrightarrow \begin{cases} IK\le 10 \\ IH\le 10 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x-10\right)^2+3^2+\left(-1\right)^2\le 100 \\ \left(x+8\right)^2+3^2+\left(-1\right)^2\le 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-20x+10\le 0 \\ x^2+16x-26\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10-3\sqrt{10}\le x\le 10+3\sqrt{10} \\ -8-3\sqrt{10}\le x\le -8+3\sqrt{10} \end{cases}$

$10-3\sqrt{10}\le x\le -8+3\sqrt{10}$ $\left(0,5131\le x\le 1,4868\right)$. Do x nguyên nên $x=1$.

Câu 88. Một nguồn âm phát ra sóng âm là sóng cầu (mặt đầu sóng là mặt cầu). Khi gắn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với đơn vị trên mỗi trục là mét, vị trí nguồn âm có tọa độ $\left(0;-3;-1\right)$, cường độ âm chuẩn phát ra có bán kính là 10 mét. Một bạn học sinh di chuyển theo phương thẳng từ vị trí $N\left(7;10;-4\right)$ đến vị trí $M\left(5;0;2\right)$ để nhận nguồn âm. Khi bạn học sinh đó di chuyển từ N đến M thì vị trí đầu tiên nhận được nguồn âm là $A\left(x_0;y_0;z_0\right)$.Tính tổng $x_0+y_0+z_0$.



Đáp án: 10.

Lời giải

Phương trình mặt cầu mô tả sóng âm phát ra từ nguồn âm là

$\left(S\right): x^2+\left(y+3\right)^2+\left(z+1\right)^2=100$

$\overrightarrow{NM}=\left(-2;-10;6\right)$, phương trình đường thẳng MN là

$\begin{cases} x = 7 - t \\ y = 10 - 5t \\ z = -4 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$

Tọa độ giao điểm của mặt cầu (S) và đường thẳng MN là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 7 - t \\ y = 10 - 5t \\ z = -4 + 3t \\ x^2 + (y+3)^2 + (z+1)^2 = 100 \end{cases}$$

$\Rightarrow (7-t)^2 + (13-5t)^2 + (-3+3t)^2 = 100$

$\Leftrightarrow 35t^2 - 162t + 127 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{127}{35} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} A_1(6;5;-1) \\ A_2\left(\dfrac{118}{35};-\dfrac{57}{7};\dfrac{241}{35}\right) \end{array}\right.$

Các giao điểm là $A_1(6;5;-1)$ và $A_2\left(\dfrac{118}{35};-\dfrac{57}{7};\dfrac{241}{35}\right)$

Câu 4: $NA_1 = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$;

$NA_2 = \sqrt{\left(\dfrac{118}{35} - 7\right)^2 + \left(-\dfrac{57}{7} - 10\right)^2 + \left(\dfrac{241}{35} + 4\right)^2} \approx 21,5$.

Ta có $NA_1 < NA_2$ nên $A_1(6;5;-1)$ là vị trí đầu tiên nhận được nguồn âm. Khi đó $x_0 + y_0 + z_0 = 10$

Câu 89. Trong một tiết thực hành về quan sát quả địa cầu có một nhóm học sinh cầm một quả địa cầu sao cho nó không chạm vào mặt bàn. Trên mặt bàn có một tờ giấy hình tam giác ABC. Xét trong không gian $Oxyz$, tam giác ABC có $A(3;0;0), B(0;5;0), C(0;5;1)$. Giả sử bề mặt quả địa cầu là mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z-3)^2 = \dfrac{49}{20}$. Cô giáo khẳng định trên quả địa cầu (S) tồn tại duy nhất một điểm $M(a;b;c)$ sao cho biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị lớn nhất và yêu cầu nhóm học sinh đó đi tìm điểm M nêu trên. Tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?(Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Đáp án: 2,40

Lời giải

\+ Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có $G\left(1;\dfrac{10}{3};\dfrac{1}{3}\right)$ khi đó:

$T = MA^2 + MB^2 + MC^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2 + 3MG^2$. Do đó biểu thức $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi GM lớn nhất.

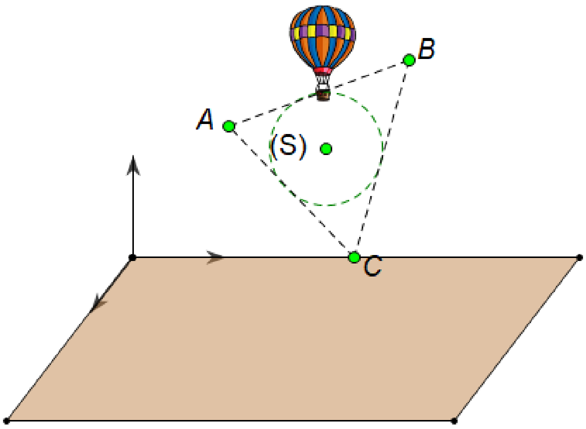
+ Ta có $\overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}(3;10;-8)$ trong đó $I(0;0;3)$ là tâm mặt cầu (S). Khi đó đường thẳng $IG:\begin{cases}x=3t\\y=10t\\z=3-8t\end{cases}$

+ Thay $x=3t;y=10t;z=3-8t$ vào phương trình mặt cầu ta có $t=\pm\frac{7}{\sqrt{3460}}$. Hay đường thẳng IG cắt mặt cầu (S) tại hai điểm $M_1\left(\frac{21}{\sqrt{3460}};\frac{70}{\sqrt{3460}};3-\frac{56}{\sqrt{3460}}\right),M_2\left(\frac{-21}{\sqrt{3460}};\frac{-70}{\sqrt{3460}};3+\frac{56}{\sqrt{3460}}\right)$.

+ Dễ thấy $\overrightarrow{IG};\overrightarrow{IM_1}$ cùng hướng nên GM lớn nhất khi $M\equiv M_2$ hay $M\left(\frac{-21}{\sqrt{3460}};\frac{-70}{\sqrt{3460}};3+\frac{56}{\sqrt{3460}}\right)$.

Khi đó $a+b+c=\frac{-21-70+56}{\sqrt{3460}}+3\approx 2,40$.

Câu 90. Tại lễ Tri ân và trưởng thành của học sinh khối 12 của một trường THPT CPV. Kết thúc buổi lễ, một học sinh khối 12 đại diện cho các bạn thả một khinh khí cầu với khát vọng bay cao và vươn xa. Trong không gian $Oxyz$, mỗi đơn vị ứng với 1m, giả sử khinh khí cầu đang ở vị trí có phương trình là $(S):(x-1)^2+(y-2)^2+(z-10)^2=2$. Cùng thời điểm đó có ba chiếc flycam A,B,C cách nhau 3m, 4m, 5m và tạo thành một tam giác ABC có ba cạnh tiếp xúc với mặt cầu (S), biết rằng mặt phẳng (ABC) song song với mặt phẳng $(P):2x-y+2z-17=0$ và có phương trình dạng $2x+ay+bz+c=0$. Tổng giá trị của $T=a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Đáp án: –22

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;10),R=\sqrt{2}$.

Gọi (C) có bán kính r là đường tròn giao tuyến giữa mặt phẳng (ABC) với mặt cầu (S).

Ta có đường tròn (C) nội tiếp tam giác (ABC).

Vì tam giác ABC có độ dài ba cạnh 3m, 4m, 5m nên tam giác ABC vuông.

Ta có $S_{ABC}=p.r\Rightarrow r=\frac{S_{ABC}}{p}=\frac{\frac{1}{2}.3.4}{\frac{3+4+5}{2}}=1$.

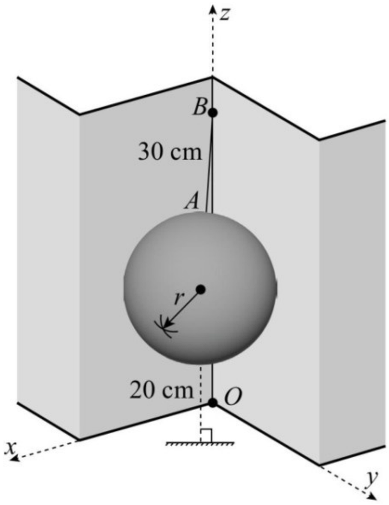
Khoảng cách từ tâm mặt cầu đến mặt phẳng (ABC) là $d=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{2-1}=1$.

Do mặt phẳng (ABC) song song với $(P):2x-y+2z-17=0$ nên phương trình mặt phẳng (ABC) có dạng: $(P):2x-y+2z+c=0$ với $c\neq -17$

$d\left(I,\left(ABC\right)\right)=1\Leftrightarrow\dfrac{\left|2.1-2+2.10+c\right|}{\sqrt{2^2+\left(-1\right)^2+2^2}}=1\Leftrightarrow\left|20+c\right|=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=-17(l)\\c=-23\end{array}\right.$.

Vậy phương trình $\left(ABC\right)$ là $2x-y+2z-23=0\Rightarrow a=-1;b=2;c=-23\Rightarrow T=a+b+c=-22$.

Câu 91. Một quả bóng hình cầu có bán kính r đang được treo trong một góc của tường nhà (hai bờ tường vuông góc với nhau). Một điểm B cố định nằm trên mép hai bờ tường và cách mặt đất 80 cm, sợi dây treo quả bóng có độ dài AB = 30 cm và đây cũng là độ dài ngắn nhất nối điểm B với mặt xung quanh của quả bóng. Biết rằng quả bóng tiếp xúc với hai bên bờ tường và điểm thấp nhất của quả bóng cách mặt đất 20 cm. Hỏi quả bóng có đường kính là bao nhiêu cm ? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Đáp án: 38.

Lời giải

Gọi tâm quả bóng hình cầu là $I\left(a;b;c\right)$ bán kính r. Dựa vào hình vẽ ta có $a;b;c>0$ và điểm $B\left(0;0;80\right)$.

Ta có $AB\geq\left|IB-IA\right|=IB-r$. Do đó $IB-r=30\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2+\left(c-80\right)^2}=r+30$ (1)

Quả bóng tiếp xúc với hai bên bờ tường nên $d\left(I,\left(Oxz\right)\right)=d\left(I,\left(Oyz\right)\right)=r\Leftrightarrow b=a=r$ (2)

Điểm thấp nhất của quả bóng cách mặt đất 20 cm nên $d\left(I,\left(Oxy\right)\right)=r+20\Leftrightarrow c=r+20$ (3)

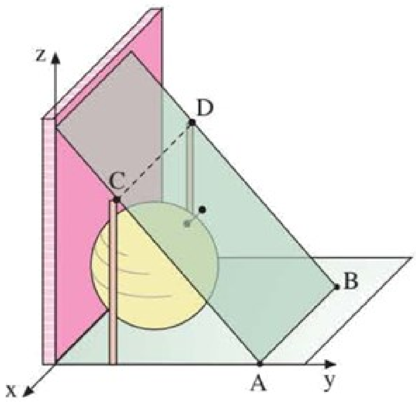
Vì dây treo quả bóng nên điểm I phải thấp hơn điểm B. Do đó $c<80$ nên $r+20<80\Rightarrow r<60$.

Thế (2), (3) vào (1) ta có $\sqrt{r^2+r^2+\left(r+20-80\right)^2}=r+30\Leftrightarrow 3r^2-120r+3600=r^2+60r+900$

$\Leftrightarrow 2r^2-180r+2700=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}r=45+15\sqrt{3}\approx 70,98076\\r=45-15\sqrt{3}\approx 19,01924\end{array}\right.$.

Đối chiếu $r<60$ thì $r=45-15\sqrt{3}$. Vậy đường kính quả cầu là $r=90-30\sqrt{3}\approx 38,038$

Câu 92. Một bồn chứa khí hình cầu K có đường kính 10 m tiếp xúc trực tiếp với một bức tường thẳng đứng tại điểm $T(-6;0;5)$.



Bồn được che chắn bằng một tấm chắn nghiêng, cố định xuống mặt đất tại các điểm $A(0;16,25;0)$ và $B(-12;16,25;0)$, đồng thời được chống đỡ bởi các thanh thẳng đứng tại các điểm $C(0;5;15)$ và $D(-12;5;15)$. Khoảng cách an toàn giữa tấm chắn E và mặt cầu K là bao nhiêu mét?

Đáp án: 1

Lời giải

- Tường thẳng đứng là mặt phẳng $y=0$.
- Mặt cầu bán kính $r=5m$, tiếp xúc tường tại $T(-6;0;5) \Rightarrow$ tâm $O(-6;5;5)$.
- Tấm chắn hiện tại E đi qua $A(0;16,25;0), B(-12;16,25;0), C(0;5;15)$ và $D(-12;5;15)$

Phương trình mặt cầu K $(x+6)^2+(y-5)^2+(z-5)^2=25$.

Phương trình mặt phẳng tấm chắn E

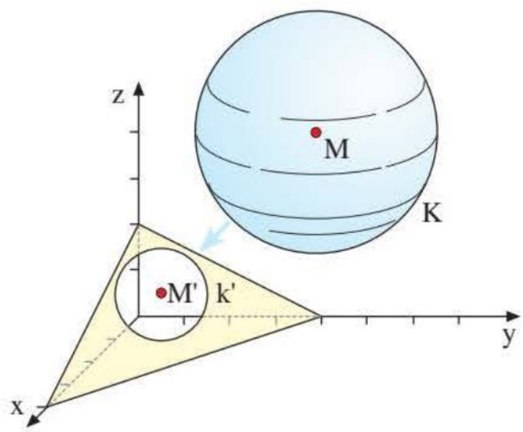
$\overrightarrow{AB}=(-12;0;0), \overrightarrow{AC}=(0;-11,25;15) \Rightarrow \vec{n}=(0;12;9) \sim (0,4,3)$.

$E: 4y+3z-65=0$.

"Khoảng cách an toàn" giữa E và mặt cầu $d(O,E)=\dfrac{|4\cdot5+3\cdot5-65|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{30}{5}=6m$.

Khoảng hở giữa bề mặt: $d-r=6-5=1m$.

Câu 93. Cho tam giác ABC với: $A(4;0;0), B(0;4;0), C(0;0;2)$. Bên trong tam giác có một lỗ tròn tâm $M'(1;1;1)$, bán kính $r'=1$.



Trong lỗ này đặt một quả cầu K bán kính $r=\sqrt{10}$. Tâm của quả cầu K là $M(a;b;c)(a,b,c>0)$. Tính $a+b-c$

Đáp án: 1

Lời giải

Mặt phẳng tam giác ABC:

$(ABC): \dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{2}=1 \Leftrightarrow x+y+2z-4=0,$ véc tơ pháp tuyến $\vec{n}=(1;1;2)$.

Trong mặt phẳng (ABC) có một vòng tròn tâm $M'(1,1,1)$, bán kính $r'=1$.

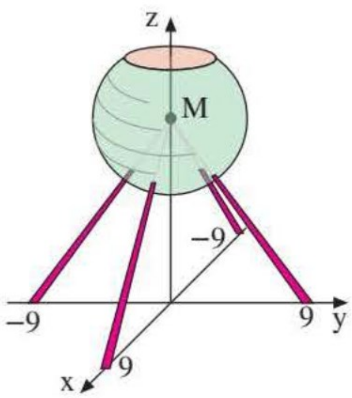
Quả cầu K bán kính $r=\sqrt{10}$ cắt (ABC) theo vòng tròn ấy, nên tâm M của cầu cách (ABC) một khoảng $d=\sqrt{r^2-\left(r'\right)^2}=\sqrt{10-1}=3$ và M nằm trên đường thẳng d vuông góc (ABC) qua M'.

Phương trình đường thẳng $d:\begin{cases}x=1+t\\ y=1+1\\ z=1+2t\end{cases},(t\in\mathbb{R})$

Khi đó: $d\left(M,(ABC)\right)=\dfrac{|1+t+1+t+2(1+2t)-4|}{\sqrt{6}}=\dfrac{|6t|}{\sqrt{6}}=3\Rightarrow t=\pm\dfrac{3}{\sqrt{6}}$

Do đó $M=\left(1+\dfrac{\sqrt{6}}{2};1+\dfrac{\sqrt{6}}{2};1+\sqrt{6}\right)$

Câu 94. Một trạm quan sát hình cầu có đường kính 10 m và tâm $M(0;0;12)$ được đỡ bởi bốn cột thép như hình vẽ.



Các cột thép này chạy dọc theo các cạnh của một hình chóp tứ giác đều, với đỉnh M.

Vị trí các điểm cột nối với mặt cầu khi nối lại sẽ tạo thành 1 đa giác. Tính diện tích của đa giác đó.

Đáp án: 18

Lời giải

Ta đặt hệ $Oxyz$ như hình. Quả cầu tâm $M(0;0;12)$, bán kính $R=5$ (đường kính 10 m). Bốn cột thép trùng với bốn cạnh của một chóp tứ giác đều đỉnh M có chân ở mặt đất tại

$A(9;0;0),B(0;9;0),C(-9;0;0),D(0;-9;0)$.

Vị trí các điểm cột nối với mặt cầu

Lấy cạnh MA làm mẫu: có $\overrightarrow{MA}=(9;0;-12)$. Suy ra $MA:\begin{cases}x=9t\\ y=0\\ z=12-12t\end{cases},\quad t\in[0,1]$.

Điểm A_1 trên đường MA này thuộc mặt cầu khi $MA_1=R\Leftrightarrow t\sqrt{9^2+12^2}=5\Leftrightarrow t=\dfrac{1}{3}$.

Suy ra điểm nối là $A_1=(3;0;8)$.

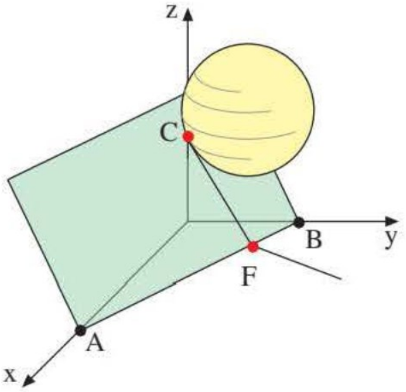
Tương tự cho ba cạnh còn lại: $B_1(0;3;8),C_1(-3;0;8),D_1(0;-3;8)$

Tứ giác $A_1(3;0;8),B_1(0;3;8),C_1(-3;0;8),D_1(0;-3;8)$ nằm trên mặt phẳng $z=8$, nên ta tính diện tích trên mặt phẳng Oxy với bốn điểm $(3;0),(0;3),(-3;0),(0;-3)$.

Ta dễ chứng minh được đây là hình vuông $A_1B_1=3\sqrt{2}$

Diện tích: $S=\left(3\sqrt{2}\right)^2=18$.(đơn vị diện tích)

Câu 95. Mô hình quả cầu



Một nhà sản xuất ổ bi đã đặt một mô hình quả cầu khổng lồ trên mái nghiêng của nhà xưởng. Mặt mái có thể được mô tả bằng mặt phẳng $E: x+2y+2z=10$. Trong đó A,B,C là giao điểm của mặt phẳng E với các trục tọa độ. Một mô hình quả cầu bán kính $r=3$ được đặt tiếp xúc với mặt phẳng E tại điểm C. Từ C kẻ đường vuông góc với AB tại F. Khi thay thế quả cầu, nó lăn trên đường thẳng CF cho đến khi quả cầu vừa tiếp xúc với mặt phẳng Oxy tại $P(a;b;0)$ thì dừng lại. Tính $a+b$

Đáp án: 7,8

Lời giải

Mái: $E: x+2y+2z=10$.

Giao A,B,C của E với các trục

* Với trục Ox ($y=z=0$) $\Longrightarrow x=10 \Longrightarrow A(10;0;0)$.

* Với trục Oy ($x=z=0$) $\Longrightarrow 2y=10 \Longrightarrow B(0;5;0)$.

* Với trục Oz ($x=y=0$) $\Longrightarrow 2z=10 \Longrightarrow C(0;0;5)$.

Có $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=(-10;5;0), AB: \begin{cases} x=10-10t \\ y=0+5t \\ z=0 \end{cases}$

Điều kiện $\overrightarrow{CF}\perp\vec{v}$: $(10-10t_0;5t_0;-5)\cdot(-10;5;0)=0 \Rightarrow -100+125t_0=0 \Rightarrow t_0=\dfrac{4}{5}$.

$\Rightarrow F(2;4;0)$.

Vì quả cầu tiếp xúc với E tại C nên $\vec{n}(1;2;2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng đi qua tâm quả cầu, khi đó đường thẳng tìm được là $\begin{cases} x=s \\ y=2s \\ z=5+2s \end{cases} \quad (s>0)$

Khi đó $MC=3 \Leftrightarrow s^2+4s^2+4s^2=9 \Leftrightarrow s=1$ suy ra $M(1;2;7)$

Quả cầu lăn theo đường thẳng qua C và F, nhận $\overrightarrow{CF}=(2;4;-5)$ làm vecto chỉ phương

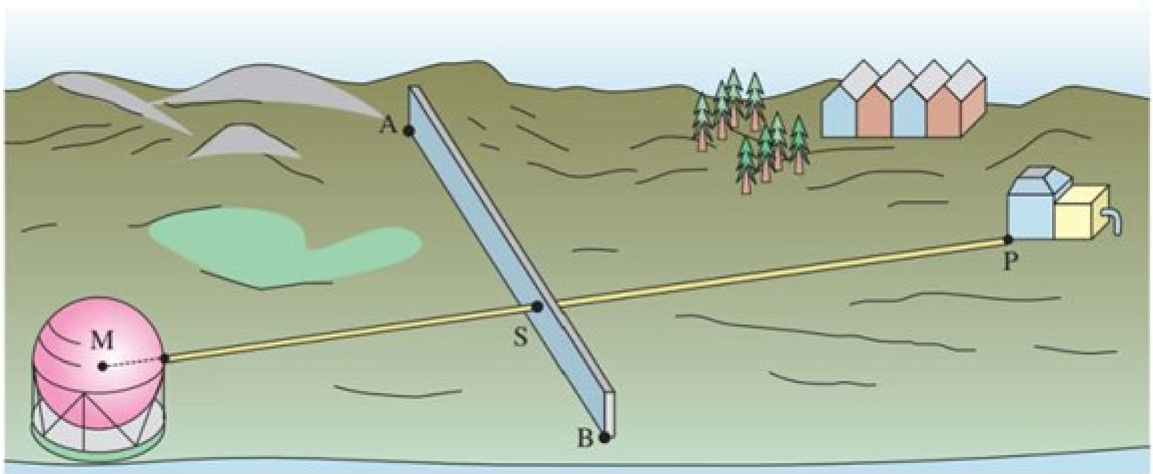
Vậy quỹ đạo tâm: $d_M: \begin{cases} x=1+2t \\ y=2+4t \; (t\in\mathbb{R}). \\ z=7-5t \end{cases}$

Cuối cùng quả cầu đặt xuống mặt phẳng Oxy ($z=3$)

Khi tiếp xúc Oxy: $z=r=3 \Rightarrow 7-5t=3 \Rightarrow t=0,8$.

Vậy $P\left(\dfrac{13}{5};\dfrac{26}{5};0\right)$ là điểm tiếp xúc với Oxy.

Câu 96. Một bồn chứa khí hình cầu đặt ở ven sông



Tâm $M(22;-8;8)$, bán kính $r=7$ (các số đo tính bằng mét).
Từ trạm bơm $P(-2;4;0)$ có một đường ống dẫn khí theo hướng về tâm M.
Trên đoạn thẳng AB với $A(6;-10;0)$ và $B(14;6;0)$ dựng một bức tường chắn thẳng đứng.
Xác định điểm mà đường ống dẫn khí cắt bức tường cách mặt đất (Oxy) bao nhiêu mét?

Đáp án: 4

Lời giải

Đường ống từ P hướng về M

Véc tơ chỉ phương: $\vec{v}=\overrightarrow{PM}=(24;-12;8)$.

Phương trình đường thẳng: $g(t):\begin{cases}x=-2+24t\\ y=4-12t \quad (t\geq 0)\\ z=8t\end{cases}$

Bức tường thẳng đứng qua $A(6;-10;0)$, $B(14;6;0)$ khi đó: $\overrightarrow{AB}=(8;16;0)$, $\vec{k}=(0;0;1)$.

$\vec{n}=\left[\overrightarrow{AB},\vec{k}\right]=(16;-8;0)\sim(2;-1;0)$. Mặt phẳng tường: $2x-y-22=0$

Thay $g(t)$ vào $2x-y-22=0\Rightarrow t=\dfrac{1}{2}\Rightarrow S(10;-2;4)$

PHỤ LỤC

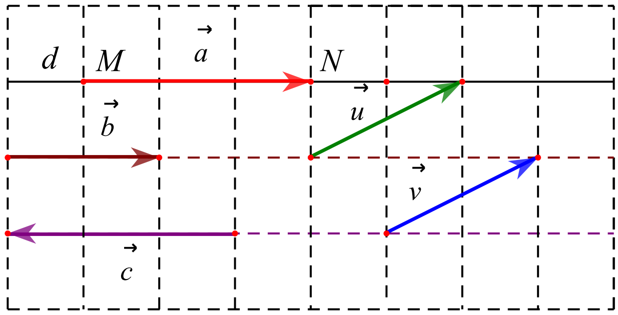
➢ VECTƠ VÀ HỆ TOẠ ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 1. VECTO VÀ CÁC PHÉP TOÁN TRONG KHÔNG GIAN

1.Vectơ trong không gian

Vectơ trong không gian là một đoạn thẳng có hướng.

Các khái niệm liên quan đến vectơ trong không gian được định nghĩa tương tự như vectơ trong mặt phẳng:



□***Độ dài*** vectơ là khoảng cách từ điểm đầu đến điểm cuối của vectơ đó.

□***Giá vectơ*** là đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ.

□Hai vectơ được gọi là ***cùng phương*** nếu giá của chúng song song hoặc trùng nhau.

□Hai vectơ cùng phương thì chúng ***cùng hướng*** hoặc ***ngược hướng***.

□Hai vectơ được gọi là ***bằng nhau*** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

□Hai vectơ được gọi là ***đối nhau*** nếu chúng ngược hướng và cùng độ dài.

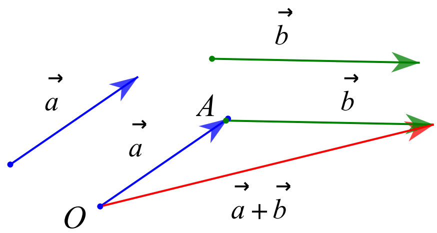
□Vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối được gọi là ***vectơ-không***. Vectơ-không cùng phương, cùng hướng với mọi vectơ.

2.Tổng và hiệu của hai vectơ. tích của vectơ với một số.

Tổng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Lấy điểm O bất kì và hai điểm A, Bbsao cho $\overrightarrow{OA}=\vec{a},\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Ta gọi $\overrightarrow{OB}$ là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}+\vec{b}$.

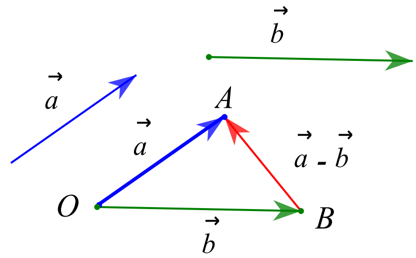
Phép lấy tổng của hai vectơ được gọi là phép cộng vectơ.



Hiệu của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{a},\vec{b}$. Ta gọi $\vec{a}+(-\vec{b})$ là hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a}-\vec{b}$.

Phép lấy hiệu của hai vectơ được gọi là phép trừ vectơ.



Tích của vectơ với một số

Trong không gian, cho số thực $k\neq 0$ và vectơ $\vec{a}\neq\vec{0}$.

Tích của số k với vectơ $\vec{a}$ là một vectơ, kí hiệu $k\vec{a}$, cùng hướng với $\vec{a}$ nếu $k>0$, ngược hướng với $\vec{a}$ nếu $k<0$ và có độ dài bằng $|k|.|\vec{a}|$.

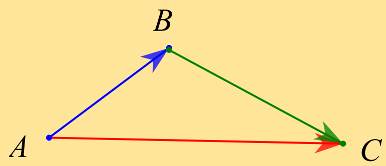
Chú ý:

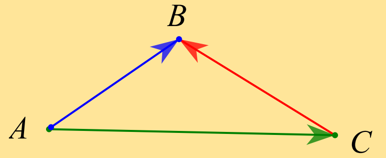
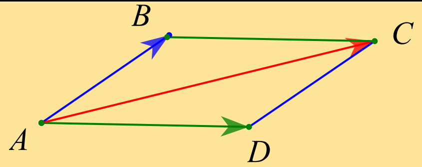
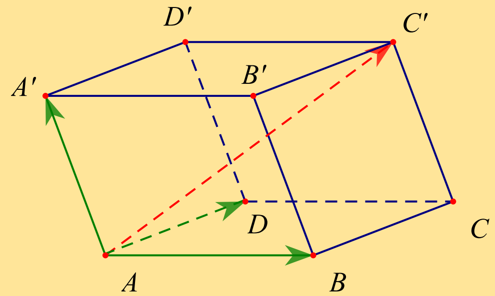
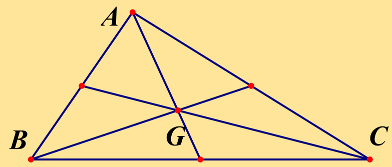
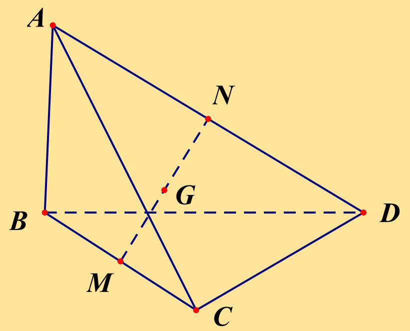
(1) Các tính chất về phép toán vectơ trong không gian tương tự như trong mặt phẳng

(2) Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ ($\vec{b}$ khác $\vec{0}$) cùng phương khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{a}=k\vec{b}$.

(3) Ba điểm phân biệt A,B,C thẳng hàng khi và chi khi có số k khác 0 để $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.

Các quy tắc về phép toán vectơ.

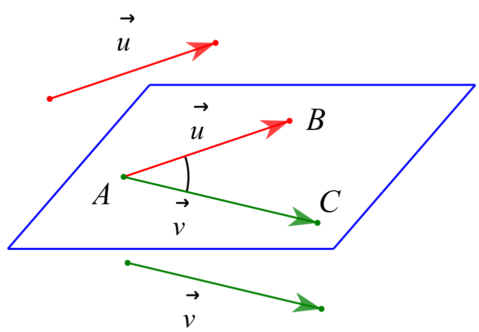
1. Quy tắc ba điểm	Với ba điểm A,B,C. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$. Quy ba điểm dùng để cộng hai vectơ có điểm cuối của vectơ này trùng với điểm đầu của vectơ kia	

2. Quy tắc hiệu vectơ	Với ba điểm A,B,C. Ta có: $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{CB}.$ Quy tắc hiệu vectơ dùng để trừ hai vectơ có cùng điểm đầu (hay trùng điểm cuối)	
3. Quy tắc hình bình hành	Nếu $ABCD$ là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.$	
4. Quy tắc hình hộp	Cho hình hộp $ABCD\cdot A'B'CD'$. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{AC'}.$	
5. Quy tắc trung điểm đoạn thẳng	Nếu M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì (1) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$; (2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=2.\overrightarrow{IM}$ (với điểm I tùy ý)	
6. Quy tắc trọng tâm tam giác	Nếu G là trọng tâm của tam giác ABC thì (1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$; (2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=3.\overrightarrow{IG}$ (với điểm I tùy ý)	
7. Quy tắc trọng tâm tứ giác (hay tứ diện)	Cho tứ giác (hay tứ diện) $ABCD$, gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC và G là trung điểm của MN. Khi đó, điểm G gọi là trọng tâm của tứ giác (hay tứ diện) $ABCD$. Nếu G là trọng tâm của tứ giác (hay tứ diện) $ABCD$ thì (1) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$; (2) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=4.\overrightarrow{IG}$ (với điểm I tùy ý)	

3.Tích vô hướng của hai vectơ

Góc giữa hai vectơ trong không gian

Trong không gian, cho $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là hai vectơ khác $\vec{0}$. Lấy một điểm A bất kì, gọi B và C là hai điểm sao cho $\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}$. Khi đó, ta gọi BAC là góc giữa hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, kí hiệu $(\vec{u},\vec{v})$.



Nhận xét:

(1) $0^\circ \le (\vec{u},\vec{v}) \le 180^\circ$

(2) Nếu $(\vec{u},\vec{v})=90^\circ$ thì ta nói $\vec{u}$ và $\vec{v}$ vuông góc với nhau, kí hiệu $\vec{u}\perp\vec{v}$.

Tích vô hướng của hai vectơ

Trong không gian, cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ là một số, kí hiệu $\vec{u}\cdot\vec{v}$, được xác định bởi công thức

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})$.

Chú ý:

(1) Trong trường hợp $\vec{u}=\vec{0}$ hoặc $\vec{v}=\vec{0}$, ta quy ước $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

(2) $\vec{u}\cdot\vec{u}=\vec{u}^2=|\vec{u}|^2;\vec{u}^2\ge 0;\vec{u}^2=0\Leftrightarrow\vec{u}=\vec{0}$

(3) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$.

(4) Với hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác $\vec{0}$, ta có $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}\cdot\vec{v}=0$.

Nhận xét:

Tương tự như trong mặt phẳng, tích vô hướng của hai vectơ trong không gian cũng có các tính chất sau:

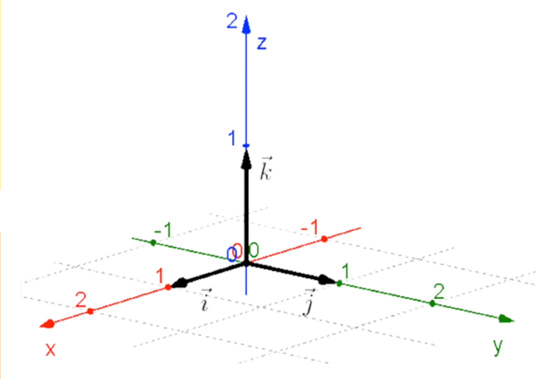
Với ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ và số k, ta có:

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ **(2)** $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ **(3)** $(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b})=\vec{a}\cdot(k\vec{b})$.

BÀI 2. TOẠ ĐỘ CỦA VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

1.Hệ tọa độ trong không gian

Trong không gian, cho ba trục Ox,Oy,Oz đôi một vuông góc. Gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ lần lượt là ba vectơ đơn vị trên các trục Ox,Oy,Oz. Hệ ba trục như vậy được gọi là hệ trục tọa độ Descartes vuông góc $Oxyz$ trong không gian hay gọi đơn giản là hệ tọ độ $Oxyz$.



Nhận xét:

(1) Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

(2) Các trục Ox,Oy,Oz được gọi là các trục tọa độ.

(3) Các mặt phẳng $(Oxy),(Oyz),(Ozx)$ đôi một vuông góc với nhau được gọi là các mặtphẳng toạ dộ.

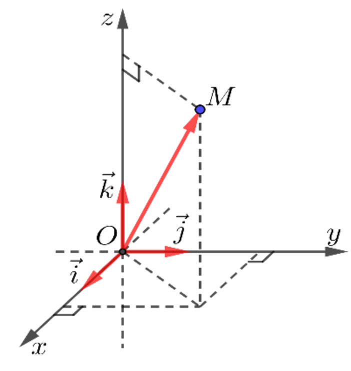
(4) Không gian với hệ toạ độ $Oxyz$ còn được gọi là không gian $Oxyz$.

(5) Vì $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là ba vectơ đơn vị đôi một vuông góc với nhau nên $\vec{i}^2=\vec{j}^2=\vec{k}^2=1$ và $\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$.

2.Tọa độ của điểm và vectơ

Tọa độ của điểm

Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M. Nếu $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(x;y;z)$ là tọa độ của điểm M đối với hệ trục toạ độ $Oxyz$ và viết $M=(x;y;z)$ hoặc $M(x;y;z)$; x là hoành độ, y là tung độ, z là cao độ của điểm M.



Toạ độ của vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\vec{a}$. Nếu $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ thì ta gọi bộ ba số $(a_1;a_2;a_3)$ là toạ độ của vectơ $\vec{a}$ đối với hệ tọa độ $Oxyz$ và viết $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ hoặc $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$.

Nhận xét:

(1) Điểm O có tọa độ $(0;0;0)$

(2) Toạ độ của điểm M là tọa độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$, tức là $M=(x;y;z)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=(x;y;z)$.

(3) Cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Khi đó: $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$

TỌA ĐỘ CÁC ĐIỂM ĐẶC BIỆT

Điểm thuộc trục tọa độ	***Điểm thuộc mặt phẳng tọa độ***
$M\in Ox\Leftrightarrow M(x;0;0)$ $M\in Oy\Leftrightarrow M(0;y;0)$ $M\in Oz\Leftrightarrow M(0;0;z)$	$M\in(Oxy)\Leftrightarrow M(x;y;0)$ $M\in(Oxz)\Leftrightarrow M(x;0;z)$ $M\in(Oyz)\Leftrightarrow M(0;y;z)$
Hình chiếu của điểm lên trục tọa độ	***Hình chiếu của điểm lên mặt phẳng tọa độ***
Hình chiếu của điểm $M(x;y;z)$ lên: ☞ Trục tọa độ Ox là điểm $H(x;0;0)$ ☞ Trục tọa độ Oy là điểm $H(0;y;0)$ ☞ Trục tọa độ Oz là điểm $H(0;0;z)$	Hình chiếu của điểm $M(x;y;z)$ lên: ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oxy) là điểm $H(x;y;0)$ ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oxz) là điểm $H(x;0;z)$ ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oyz) là điểm $H(0;y;z)$
Điểm đối xứng của điểm qua trục tọa độ	***Điểm đối xứng của điểm qua mặt phẳng tọa độ***
Điểm đối xứng của điểm $M(x;y;z)$ qua: ☞ Trục tọa độ Ox là điểm $M'(x;-y;-z)$ ☞ Trục tọa độ Oy là điểm $M'(-x;y;-z)$ ☞ Trục tọa độ Oz là điểm $M'(-x;-y;z)$	Điểm đối xứng của điểm $M(x;y;z)$ qua: ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oxy) là điểm $M'(x;y;-z)$ ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oxz) là điểm $M'(x;-y;z)$ ☞ Mặt phẳng tọa độ (Oyz) là điểm $M'(-x;y;z)$
Điểm đối xứng của điểm $M(x;y;z)$ qua gốc tọa độ O là điểm $M'(-x;-y;-z)$	

BÀI 3. BIỂU THỨC TOẠ ĐỘ CỦA CÁC PHÉP TOÁN VECTO

1.Biểu thức tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ và tích của một số với một vectơ

Trong không gian $Oxyz$, cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ và số thực k. Khi đó:

(1) $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1;a_2+b_2;a_3+b_3)$	**(2)** $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1;a_2-b_2;a_3-b_3)$	**(3)** $k\vec{a}=(ka_1;ka_2;ka_3)$

Nhận xét:

Cho hai vecto $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3),\vec{b}\neq\vec{0}$.

Hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho $\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}$

hay $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},\ (b_1.b_2.b_3\neq0)$

2.Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trong không gian $Oxyz$, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ được xác định bởi công thức $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$.

Nhận xét:

(1) $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$, $(\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0})$

(2) $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$

(3) $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$, $(\vec{a},\vec{b}$ khác $\vec{0})$.

3.Vận dụng

(1) $\overrightarrow{AB}=\left(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A\right)$

(2) $AB=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(x_B-x_A\right)^2+\left(y_B-y_A\right)^2+\left(z_B-z_A\right)^2}$.

(3) Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\dfrac{x_A+x_B}{2};\dfrac{y_A+y_B}{2};\dfrac{z_A+z_B}{2}\right)$.

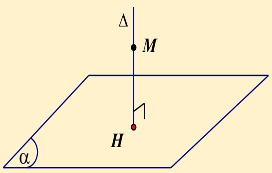
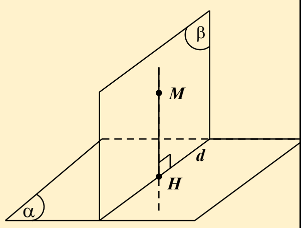
(4) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là $G\left(\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3};\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3};\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$.

(5) Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ cùng phương ***hay*** $\overrightarrow{AB}=k.\overrightarrow{AC}$, $k\in\mathbb{R}$

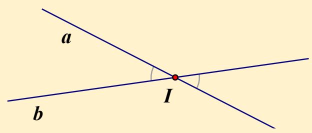
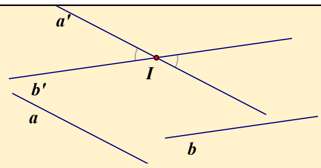
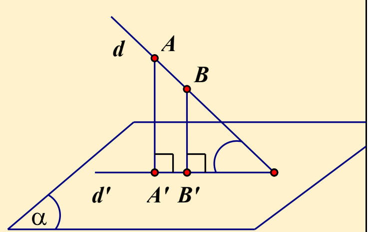
➢ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN TỔNG HỢP

☞ TÌM HÌNH CHIẾU CỦA ĐIỂM LÊN MẶT PHẲNG

• ***Định nghĩa:*** H là hình chiếu của M lên $(\alpha)\Leftrightarrow MH\perp(\alpha)$ tại H.

Trường hợp 1: Có đường thẳng Δ đi qua điểm M và vuông góc mặt phẳng (α) tại H → H là hình chiếu của M lên (α) 	***Trường hợp 2:*** Chưa có sẵn đường thẳng Δ như trường hợp 1.. • Tìm mặt phẳng (β) qua M và $(\beta)\perp(\alpha)$ • Tìm $d=(\alpha)\cap(\beta)$ • Vẽ $MH\perp d$ tại H $\Rightarrow$ $MH\perp(\alpha)$ tại H $\Rightarrow$ H là hình chiếu của M lên (α) 

☞ GÓC

1. Góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau		
ĐN: Góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau là góc có số đo nhỏ nhất (góc nhọn) trong 4 góc tạo thành.		
2. Góc giữa 2 đường thẳng bất kì		
ĐN: Góc giữa 2 đường thẳng bất kì là góc giữa 2 đường thẳng cắt nhau lần lượt song song với 2 đường thẳng đó.	$\begin{cases}a\parallel a'\\b\parallel b'\end{cases}\Rightarrow(a;b)=(a';b')$	
3. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng		
ĐN: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng là góc giữa đường thẳng với hình chiếu của nó trên mặt phẳng. $(d,(\alpha))=(d,d')$	Lấy $A,\ B\in d$ Tìm $A',\ B'$ lần lượt là hình chiếu của $A,\ B$ lên (α) → d' (hay $A'B'$) là hình chiếu của d lên (α)	

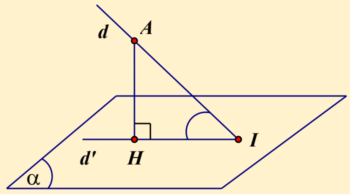
Với d' là hình chiếu của d lên (α)

→ $(d,(\alpha))=(d,d')$

Đặc biệt: Nếu d cắt (α) tại I thì:

$$\begin{cases} AI\cap(\alpha)=I \\ AH\perp(\alpha) \text{ taïi } H \end{cases}$$

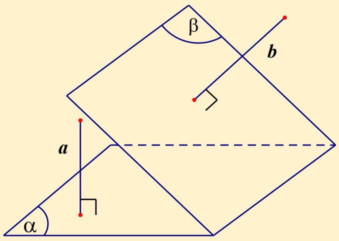
$$\Rightarrow \left(AI,(\alpha)\right)=AIH$$



4. Góc giữa hai mặt phẳng

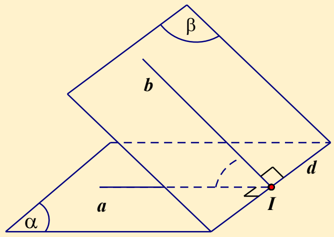
ĐN: Góc giữa hai mặt phẳng là góc giữa 2 đường thẳng lần lượt vuông góc với 2 mặt phẳng đó.

$$\boxed{\begin{cases} a\perp(\alpha) \\ b\perp(\beta) \end{cases} \Rightarrow ((\alpha),(\beta))=(a,b)}$$



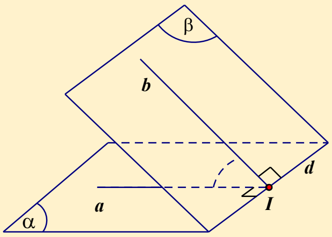
Cách xác định thường dùng: Góc giữa hai mặt phẳng bằng góc giữa 2 đường thẳng lần lượt chứa trong 2 mặt phẳng và cùng vuông góc với giao tuyến của 2 mặt phẳng đó.

$$\boxed{\begin{cases} (\alpha)\cap(\beta)=d \\ a\subset(\alpha); b\subset(\beta) \Rightarrow \left((\alpha),(\beta)\right)=(a,b) \\ a\perp d;\quad b\perp d \end{cases}}$$



5. Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

ĐN: Góc nhị diện (hay nhị diện) là hình tạo bởi hai nửa mặt phẳng và giao tuyến của hai nửa mặt phẳng đó.



Góc nhị diện $[\alpha,d,\beta]$

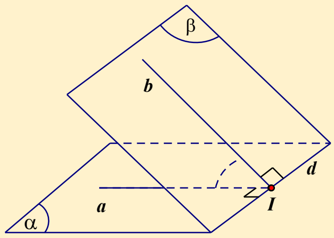
Hai nửa mặt phẳng α, β là hai mặt của nhị diện; d là cạnh của nhị diện

ĐN: Góc phẳng nhị diện của một góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và cùng vuông góc với cạnh của nhị diện

Cách xác định góc phẳng nhị diện:

$$\begin{cases} (\alpha)\cap(\beta)=d \\ a\subset(\alpha); b\subset(\beta) \\ a\perp d;\quad b\perp d \\ a\cap b=I \end{cases}$$

$$\Rightarrow [\alpha,d,\beta]=aIb$$



☞ KHOẢNG CÁCH

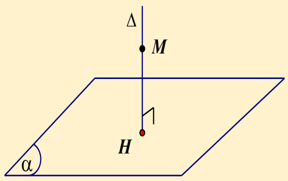
1. Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng

ĐN: Khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng là khoảng cách từ điểm đó đến hình chiếu của nó lên mặt phẳng.

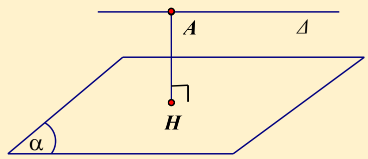
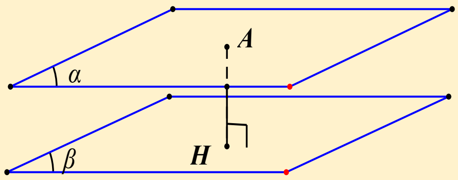
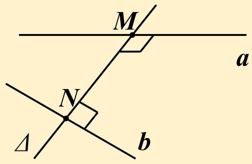
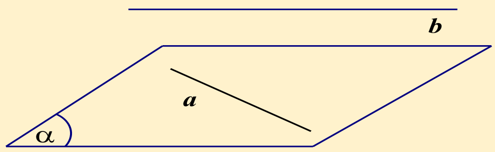
Tìm H là hình chiếu của A lên (α).

Khi đó:

$d(A,(\alpha))=AH$



2. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song

ĐN: Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc đường thẳng đến mặt phẳng.	Lấy $A \in \Delta$. Khi đó: $d(\Delta,(\alpha)) = d(A,(\alpha))$	
3. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song		
ĐN: Khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song là khoảng cách từ 1 điểm bất kì thuộc mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.	Lấy $A \in (\alpha)$. Khi đó: $d((\alpha),(\beta)) = d(A,(\beta))$	
4. Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau		
ĐN: Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là độ dài đoạn vuông góc chung của 2 đường thẳng đó.	Tìm đường thẳng Δ cùng vuông góc *a* tại *M* và vuông góc với *b* tại *N*. Khi đó: $d(a,b) = MN$	
Cách khác: ***Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau*** là khoảng cách giữa đường thẳng này với mặt phẳng song song chứa đường thẳng còn lại.	$\begin{cases}(\alpha) \supset a \\ (\alpha) // b\end{cases}$ $\Rightarrow d(a,b) = d(b,(\alpha))$	
Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau là khoảng cách giữa 2 mặt phẳng song song lần lượt chứa 2 đường thẳng đó.	$\begin{cases}(\alpha) \supset a, (\beta) \supset b \\ (\alpha) // (\beta)\end{cases}$ $\Rightarrow d(a,b) = d((\alpha),(\beta))$