Phan Nhật Linh

QUAN HỆ SONG SONG

TRONG KHÔNG GIAN

Biên soạn theo chương trình GDPT 2018
và cấu trúc mới của BGD 2025

2025

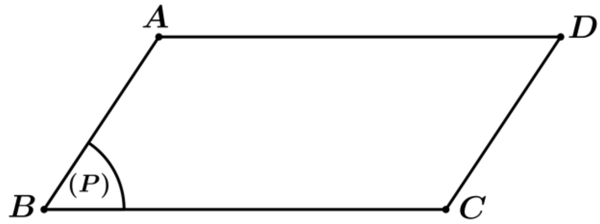
CHƯƠNG 4 QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 01 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

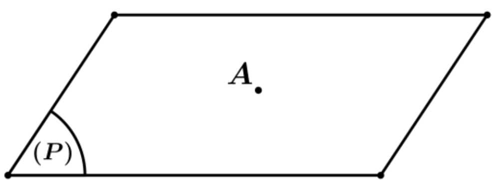
1 Khái niệm mở đầu

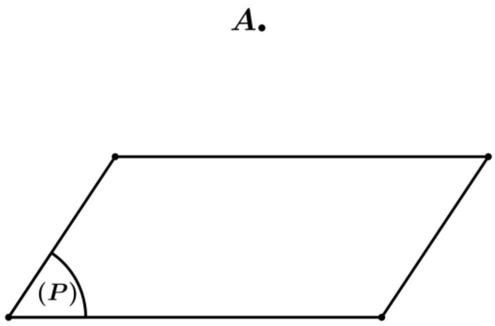
Mặt phẳng: Người ta thường biểu diễn một mặt phẳng bằng một hình bình hành và dùng các chữ cái đặt trong dấu ngoặc đơn để đặt tên cho mặt phẳng ấy. Ví du: mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β),…



Điểm thuộc mặt phẳng: Với mỗi điểm A và mặt phẳng (P), chỉ xảy ra một trong hai khả năng sau:

- Điểm A thuộc mặt phẳng (P), ta kí hiệu $A \in (P)$
- Điểm A không thuộc mặt phẳng (P) hay A nằm ngoài (P), ta kí hiệu $A \notin (P)$





Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

a) Hình được vẽ trong mặt phẳng để giúp ta hình dung được về một hình trong không gian gọi là hình biểu diễn của hình không gian đó.

b) Quy tắc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian: Để việc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian được thuận lợi và thống nhất, ta quy ước như sau:

- Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.
- Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
- Hình biểu diễn giữ nguyên tính liên thuộc giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng.
- Những đường nhìn thấy được vẽ bằng nét liền, những đường không nhìn thấy được vẽ bằng nét đứt.

2 Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Do thực tiễn, kinh nghiệm và quan sát, người ta thừa nhận một số tính chất sau của hình học không gian

- **Tính chất 1:** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.
- **Tính chất 2:** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.
- **Tính chất 3:** Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
- **Tính chất 4:** Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- **Tính chất 5:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

  Nhận xét: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
- **Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3 Một số cách xác định mặt phẳng

Định lý 1: Cho điểm A không thuộc đường thẳng d. Khi đó qua điểm A và đường thẳng d có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu mp (A,d) hoặc (A,d).

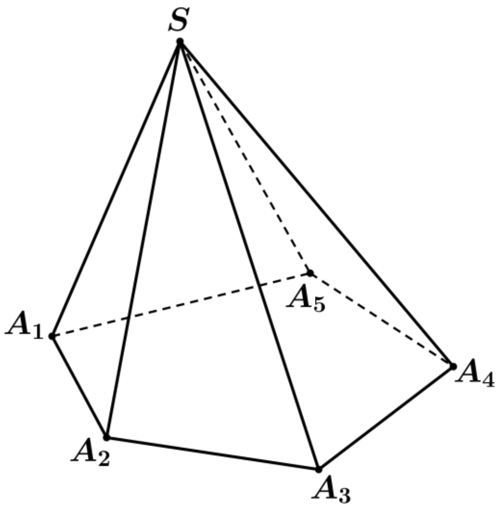
Định lý 2: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Khi đó qua a và b có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu là mp (a,b).

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:

- Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

4 Hình chóp và hình tứ diện

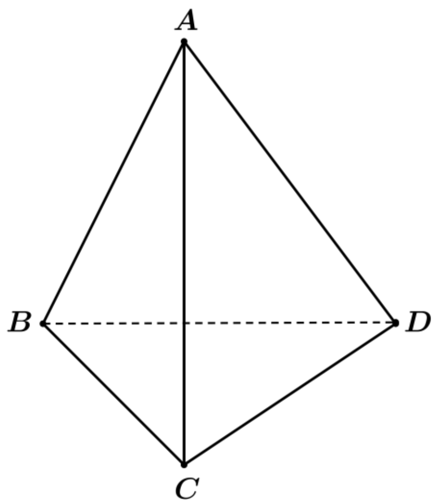
Hình chóp: Trong mặt phẳng (α) cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $(n \geq 3)$. Lấy điểm S nằm ngoài (α). Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1, A_2, ..., A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$



Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy, các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các mặt bên.

Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác,…thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,…

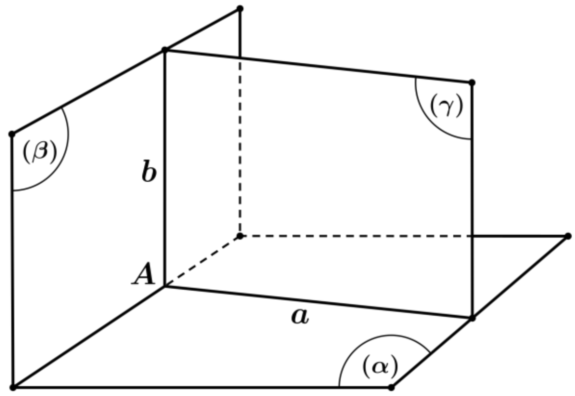
Tứ diện: Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Hình gồm bốn tam giác $ABC, ABD,$ ACD và BCD được gọi là hình tứ diện $ABCD$ (hay gọi tắt là tứ diện), kí hiệu là $ABCD$.



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp: Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.



Lưu ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường được tìm như sau:

- Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt thuộc (α) và (β), đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng (γ) nào đó; giao điểm $M = a \cap b$ là điểm chung của (α) và (β).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD).

c) (MBC) và (SAD) d) (SAB) và (SCD).

Bài tập 2: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác BCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trung điểm của SD, J là điểm trên SC và không trùng trung điểm SC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AIJ).

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN)

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết điều nào sau đây?

A. Một đường thẳng và một điểm thuộc nó. **B.** Ba điểm mà nó đi qua.
C. Ba điểm không thẳng hàng. **D.** Hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.

Câu 2: Trong các tính chất sau, tính chất nào **không** đúng?

A. Có hai đường thẳng phân biệt cùng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.
B. Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
C. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.
D. Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì cheo nhau.
B. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
D. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.

Câu 4: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b

A. $0.$. **B.** Vô số. **C.** $2.$. **D.** $1.$

Câu 5: Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số cạnh là

A. 9 cạnh. **B.** 10 cạnh. **C.** 6 cạnh. **D.** 5 cạnh.

Câu 6: Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là

A. 5 mặt, 5 cạnh. **B.** 6 mặt, 5 cạnh. **C.** 6 mặt, 10 cạnh. **D.** 5 mặt, 10 cạnh.

Câu 7: Hình chóp có 16 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

A. 10. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M,N,K,E lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC,BC. Bốn điểm nào sau đây đồng phẳng?

A. M,K,A,C. **B.** M,N,A,C. **C.** M,N,K,C. **D.** M,N,K,E.

Câu 9: Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng, có thể xác định nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đó?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SAD) là

A. Đường thẳng SC. **B.** Đường thẳng SB. **C.** Đường thẳng SD. **D.** Đường thẳng SA.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của (SMN) và (SAC) là

A. SK (K là trung điểm của AB).
B. SO (O là tâm của hình bình hành $ABCD$).
C. SF (F là trung điểm của CD).
D. SD.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

A. SA. **B.** AC. **C.** SO. **D.** SD.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. SA. **B.** SB. **C.** SC. **D.** AC.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD // BC)$. Gọi M là trung điểm của CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

A. SP với P là giao điểm của AB và CD. **B.** SI với I là giao điểm của AC và BM.
C. SO với O là giao điểm của AC và BD. **D.** SJ với J là giao điểm của AM và BD.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$, biết AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại O. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

A. SO. **B.** SM. **C.** SA. **D.** SC.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SA và SB. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $(SAB) \cap (IBC) = IB$. **B.** $IJCD$ là hình thang.

C. $(SBD) \cap (JCD) = JD$. **D.** $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$).

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC \cap BD = M$, $AB \cap CD = N$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là:

A. SM. **B.** SA. **C.** MN. **D.** SN.

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$, M là trung điểm của AB, N là điểm trên AC mà $AN = \frac{1}{4}AC$, P là điểm trên đoạn AD mà $AP = \frac{2}{3}AD$. Gọi E là giao điểm của MP và BD, F là giao điểm của MN và BC. Khi đó giao tuyến của (BCD) và (CMP) là

A. CP. **B.** NE. **C.** MF. **D.** CE.

Câu 19: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm hai đoạn thẳng AD và BC. IK là giao tuyến của cặp mặt phẳng nào sau đây ?

A. (IBC) và (KBD). **B.** (IBC) và (KCD). **C.** (IBC) và (KAD). **D.** (ABI) và (KAD).

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và AC. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GMN) và (BCD) là đường thẳng:

A. qua M và song song với AB. **B.** Qua N và song song với BD.
C. qua G và song song với CD. **D.** qua G và song song với BC.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $\left(AB \,//\, CD\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBD\right)$ là SO (O là giao điểm của AC và BD).

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAD\right)$ và $\left(SBC\right)$ là SI (I là giao điểm của AD và BC).

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SAD\right)$ là đường trung bình của $ABCD$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, biết AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F trong mặt phẳng đáy. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng EF nằm trong mặt phẳng $\left(ABCD\right)$.

b) AB là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(ABCD\right)$.

c) SF là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAB\right)$ và $\left(SCD\right)$, SE là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBD\right)$.

d) Gọi $G = EF \cap AD$ khi đó, SG giao tuyến của mặt phẳng $\left(SEF\right)$ và mặt phẳng $\left(SAD\right)$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC, M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC. Khi đó:

a) IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(IBC\right), \left(JAD\right)$.

b) ND là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(MND\right), \left(ADC\right)$.

c) BI là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(BCI\right), \left(ABD\right)$.

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(IBC\right), \left(DMN\right)$ song song với đường thẳng IJ.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm trên cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho MN không song song với BC. Gọi P là điểm nằm trong ΔBCD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $MN = \left(MNP\right) \cap \left(ABC\right)$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(MNP\right), \left(BCD\right)$ là đường thẳng cắt BC

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(MNP\right), \left(ABD\right)$ là đường thẳng cắt AB và DC

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(MNP\right), \left(ACD\right)$ là đường thẳng cắt AB và DC

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Số điểm chung của hai mặt phẳng (BCD) và (CMN) là bao nhiêu?

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm ΔSAB. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG)

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song. Gọi $O = AC \cap BD, F = BC \cap AD$. Điểm M thuộc cạnh SA, tìm giao tuyến (d) của cặp mặt phẳng (MBC) và (SAD)

Câu 4: Cho hình chóp $O.PQRS$, có đáy $PQRS$ là hình thang, đáy lớn PQ. Gọi E, F, G lần lượt là các điểm trên các cạnh OP, PQ, QR. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) với mặt phẳng (OPQ).

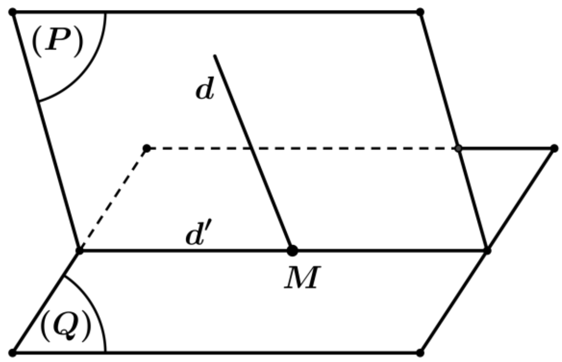
Câu 5: Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$ tâm O, S là một điểm không thuộc (α). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Đường thẳng MN cắt AB, AD, AC lần lượt tại M_1, N_1, O_1. Nối O_1P cắt SA tại P_1, nối M_1P_1 cắt SB tại M_2, nối N_1P_1 cắt SD tại N_2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) với (SAD)

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng nhau và bằng a. Gọi E là trung điểm AB, F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF = 2FC$, G là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG = 2GD$. Gọi N là giao điểm của AD với mặt phẳng (EFG). Tính độ dài đoạn giao tuyến NG của mặt phẳng (EFG) với mặt phẳng (ACD) theo a.

----------------HẾT----------------

Dạng 2: Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta cần lưu ý một số trường hợp sau:



Trường hợp 1: Nếu trong (P) có sẵn một đường thẳng d' cắt d tại M, khi đó:

$$\begin{cases} M \in d \\ M \in d' \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow M = d \cap (P)$$

Trường hợp 2: Nếu trong (P) chưa có sẵn d' cắt d thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Chọn một mặt phẳng (Q) chứa d
- **Bước 2:** Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$
- **Bước 3:** Trong (Q) gọi $M = d \cap \Delta$ thì M chính là giao điểm của $d \cap (P)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ giác $ABCD$ (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng (α). S là điểm không nằm trên (α).

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD. Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC).

c) Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB. Chứng minh rằng bốn điểm M, N, Q, R đồng phẳng.

Bài tập 2: Trong mặt phẳng (α), cho tứ giác $ABCD$. Gọi S là điểm không thuộc (α), M là điểm nằm trong tam giác SCD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD).

b) Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

Bài tập 3: Cho tứ diện $SABC$. Trên cạnh SA lấy điểm M, trên cạnh SC lấy điểm N, sao cho MN không song song với AC. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD.

a) Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có AD và BC không song song với nhau. Lấy I thuộc SA sao cho $SA=3IA$, J thuộc SC và M là trung điểm của SB.

a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC)

b) Tìm giao điểm E của AB và (IJM)

c) Tìm giao điểm F của BC và (IJM)

d) Tìm giao điểm N của SD và (IJM)

e) Gọi H là giao điểm của MN và BD. Chứng minh rằng H,E,F thẳng hàng.

Bài tập 6: Cho hình chóp , có đáy là hình thang, cạnh đáy lớn AB. Gọi I,J,K là ba điểm lần lượt trên SA,AB,BC.

a) Tìm giao điểm của IK và (SBD).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (IJK) với SD và SC.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, giao điểm của BD và AC là O. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD). Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $I\in SO$. **B.** $I\in SC$. **C.** $I\in(SBD)$. **D.** $I\in(SAC)$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA, mặt phẳng (α) cắt SC tại K. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $SK=3KC$. **B.** $SK=KC$. **C.** $SK=\frac{1}{2}KC$. **D.** $SK=2KC$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của SC. Giao điểm của BC với mặt phẳng (ADM) là:

A. Giao điểm của BC và AD. **B.** Giao điểm của BC và SD.
C. Giao điểm của BC và AM. **D.** Giao điểm của BC và DM

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $\frac{AM}{AD}=\frac{3}{4}$. Gọi E là trung điểm của cạnh SA, F là giao điểm của MN và BD. Tìm giao điểm của đường thẳng MG và (BDE).

A. Giao điểm của MG và HF **B.** Giao điểm của BC và SD.
C. Giao điểm của BG và AM. **D.** Giao điểm của BC và DM

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M,N,P lần lượt là các điểm trên các đoạn SA,SB,SC sao cho $SA=5SM, SB=3SN, 2SC=3SP$. Mặt phẳng (MNP) cắt đoạn SD tại điểm Q. Khi đó tỉ số $\dfrac{SD}{SQ}$ bằng

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{15}{8}$. **D.** $\dfrac{8}{15}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc đoạn SD, N là trọng tâm ΔSAB. Đường thẳng MN cắt mặt phẳng $(ABCD)$ tại điểm I sao cho $\dfrac{IN}{IM}=\dfrac{2}{3}$. Tính tỉ số $\dfrac{SM}{MD}$.

A. $\dfrac{1}{2}$. **B.** $\dfrac{3}{4}$. **C.** 1. **D.** $\dfrac{2}{3}$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm AB và $CD; P$ là điểm trên cạnh AD sao cho $AP=\dfrac{1}{4}AD$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt BD tại I. Tỉ số $\dfrac{IB}{ID}$ bằng:

A. $\dfrac{1}{3}$. **B.** $\dfrac{3}{10}$. **C.** $\dfrac{3}{8}$. **D.** $\dfrac{2}{5}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB. P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP=2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt SC tại N. Tỉ số $\dfrac{CN}{SN}$ bằng

A. $\dfrac{3}{2}$. **B.** $\dfrac{2}{3}$. **C.** $\dfrac{8}{5}$. **D.** $\dfrac{7}{5}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và G là trung điểm của đoạn MN. Gọi O là giao điểm của SG và (ABC). Khẳng định nào sau đây đúng?

A. O là tâm đường tròn tam giác ABC.
B. O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.
C. O là trực tâm tam giác ABC.
D. O là trọng tâm tam giác ABC.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB. Đường thẳng DM cắt mặt phẳng (SAC) tại N. Mặt phẳng (CDM) cắt SA tại K. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Ba điểm S, N, O thẳng hàng. **B.** Ba điểm C, N, K thẳng hàng.
C. $KM // CD$. **D.** N là trung điểm của đoạn thẳng CK.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây sai?

A. J là trung điểm AM. **B.** $AJ=(ABG)\cap(ACD)$.
C. $DJ=(BDJ)\cap(ACD)$. **D.** A, J, M thẳng hàng.

Câu 12: Cho bốn điểm A,B,C,D không đồng phẳng. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP=2PD.$ Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

A. CD và NP. **B.** CD và MN. **C.** CD và MP. **D.** CD và AP.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C, $K=AM\cap SO$. Khi đó:

a) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (ABC)

b) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)

c) Giao điểm của đường thẳng SO với mặt phẳng (ABM) là điểm K

d) Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM) là điểm N thuộc đường thẳng AK

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ với M là một điểm trên cạnh SC,N là một điểm trên cạnh BC. Gọi $O=AC\cap BD$ và $K=AN\cap CD$. Khi đó:

a) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên cạnh SO.

c) KM là giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD).

d) Giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (AMN) là điểm nằm trên cạnh KM

Câu 3: Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, các điểm M,N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB,SC. Gọi $O=AC\cap BD$

a) SO giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Giao điểm của I của đường thẳng AN và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên đường thẳng SO

c) Giao điểm của J của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên đường thẳng SD

d) Ba điểm I,J,B thẳng hàng.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi I giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD). Khi đó:

a) $AM\cap SO=I$.

b) $IA=3IM$.

c) Giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) là điểm thuộc đường thẳng BI

d) Gọi N là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB. Khi đó giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) là điểm thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(SBD),(SNC)$

Câu 5: Cho tứ diện $SABC$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC. Khi đó:

a) Đường thẳng MN cắt đường thẳng AC

b) Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là giao điểm của MN và AC.

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC.

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và BD; M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD; P thuộc đọan SC và không là trung điểm của SC. Khi đó:

a) Giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của MN và SO.

b) Giao điểm Q đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của PE và SO.

c) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Vậy I, J, K thẳng hàng.

d) Gọi I, J, K lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Vậy I, J, K không thẳng hàng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm P sao cho $BP = 2DP$. Gọi F là giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP). Tính $\frac{FA}{FD}$.

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC, N là trên cạnh BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SC. Điểm N thuộc cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{2}{3}$. Gọi Q là giao điểm của cạnh SD và mặt phẳng (MNP). Tính tỷ số $\frac{SQ}{SD}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC. Gọi I là giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD). Tính tỷ số $\frac{IA}{IM}$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC. Gọi P là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CP = 2PD$ và Q là điểm thuộc cạnh AD sao cho bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng. Tính tỷ số $\frac{AQ}{DQ}$

----------------HẾT----------------

Dạng 3: Xác định thiết diện

Phương pháp: Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang $(AD // BC, AD > BC)$. Gọi M, N lần lượt là các điểm thuộc các cạnh SB, SC sao cho $SM = 2MB, SN = 2NC.$

a) Gọi $K = AB \cap CD.$ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (KMN).

b) Cho $AD = 2BC.$ Tính tỉ số diện tích của tam giác KMN và diện tích thiết diện vừa tìm ở câu trên.

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ và M là một điểm trên cạnh SC, N và P lần lượt là trung điểm của AB và $AD.$ Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Bài tập 3: Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh bằng $a.$ Kéo dài BC một đoạn $CE = a$. Kéo dài BD một đoạn $DF = a.$ Gọi M là trung điểm của $AB.$

a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF).

b) Tính diện tích của thiết diện.

Bài tập 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB)

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và P là một điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm của BC). Tìm thiết diện của tứ diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$, G là điểm nằm trong tam giác SCD. E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (EFG).

Bài tập 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a $(a > 0)$. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng bao nhiêu?

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là trung điểm của SA, F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh BC, $CD(CF < FB, GC < GD)$. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB) là hình gì?

A. Tam giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

A. Tam giác IBC. **B.** Hình thang $IJCB$ (J là trung điểm SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB). **D.** Tứ giác $IBCD$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là ba điểm trên các cạnh AD, CD, SO. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Câu 7: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD. Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:

A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.

B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và $HK // MN$.

C. Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.

D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB // CD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (SG_1G_2) và hình chóp $S.ABCD$ là:

A. Tam giác có một đỉnh là G_1.
B. Tam giác có cạnh là G_1G_2.

C. Tam giác có một đỉnh là S.
D. Tứ giác.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, BC, điểm I thuộc cạnh SA thỏa mãn $SI = 3IA$. Mặt phẳng (α) đi qua P và song song với mặt phẳng (IMN) cắt hình chóp theo một thiết diện là hình gì?

A. Tứ giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Lục giác. **D.** Tam giác.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB // CD, AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm SB và SC.

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng SL với L là giao điểm của của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

b) Giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ) là điểm M với M là giao điểm của SD và AK

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (SCD) là đường thẳng MJ

d) Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) là một tam giác.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC. Lấy một điểm N thuộc miền trong tam giác SCD.

a) Giao điểm của MN với (SAC) là I với I là giao điểm của hai đường thẳng MN và SO.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SEF) là đường thẳng là đường thẳng SO với F là giao điểm của hai đường thẳng SN và CD.

c) Giao điểm của SC với (AMN) là điểm J với J là giao điểm của hai đường thẳng AI và SC.

d) Ta có thể xác định được ba thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (AMN).

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB, G là trọng tâm tam giác SAD.

a) Giao điểm I của GM với $(ABCD)$ cũng là giao điểm của hai đường thẳng MG và BN. Khi đó $2IC = ID$.

b) Giao điểm của hai đường thẳng AD và OI là J và nó cũng là giao điểm của mặt phẳng (OMG) với AD. Khi đó $JA = 2JD$.

c) Điểm K là giao điểm của (OMG) với SA cũng là giao điểm của hai đường thẳng SA và GJ. Khi đó $KA = \frac{1}{2}KS$

d) Thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$ là một ngũ giác

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và OC.

a) Giao tuyến của (MNP) với (SAC) là đường thẳng PI với I là giao điểm của hai đường thẳng MN và SO.

b) Giao điểm của SA và (MNP) là R với R là giao điểm của hai đường thẳng PI và SA

c) Gọi $T = d \cap BC, Q = d \cap CD$. Khi đó thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MTQNR$.

d) Tỉ số $\frac{SR}{RA} = 3$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M, N, P tương ứng là trung điểm của AB, BC, CD. Mặt phẳng (MNP) tạo với hình tứ diện một thiết diện có diện tích là S. Khi $a = 2$ thì giá trị của S bằng bao nhiêu?

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng a, M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $2MC = MA$. N là trung điểm AD, E là điểm nằm trong tam giác BCD sao cho $(MNE)//AB$. Gọi S là diện tích của thiết diện của hình tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNE). Khi đó giá trị biểu thức $\frac{5a^2\sqrt{51}}{S}$ bằng bao nhiêu?

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SC. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNQ) là đa giác có bao nhiêu cạnh?

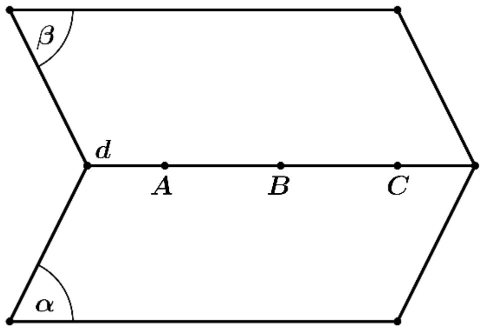
Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD; P là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AP = 2PC$. Gọi S_{MNP} là diện tích tam giác MNP và S_{td} là diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi (MNP). Tỉ số $\dfrac{S_{MNP}}{S_{td}}$ bằng bao nhiêu?

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Khi đó $T = a + b + c$ bằng bao nhiêu?

-----------------HẾT-----------------

Dạng 4: Ba điểm thẳng hàng và ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp: Để chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàngm ta cần chứng minh ba điểm này lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β). Nghĩa là chúng cùng thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.

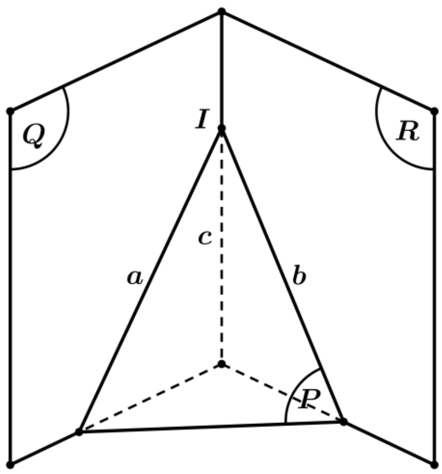


Để chứng minh ba đường thẳng a,b,c đồng quy ta làm theo các bước sau:

- Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b.
- Tìm mặt phẳng (Q) chứa a và (R) chứa b sao cho $(Q)\cap(R)=c \Rightarrow I\in c$.

Suy ra ba đường thẳng a,b,c đồng quy tại I.

- Nghĩa là: $\begin{cases} a\subset(P), b\subset(P), I=a\cap b \\ a=(P)\cap(Q) \\ b=(P)\cap(R) \\ c=(Q)\cap(R) \end{cases} \Rightarrow a,b,c$ đồng quy tại I.



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ diện $S.ABC$. Trên các cạnh SA,SB,SC lầm lượt lấy các điểm M,N,P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K. Chứng minh rằng ba điểm I,J,K thẳng hàng

Bài tập 2: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD.

a) Xác định giao tuyến của (ADN) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD, điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm của SO với (MNP).

b) Tìm giao điểm Q của SA với mặt phẳng (MNP).

c) Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD.

a) Tìm giao điểm N của SC với (ADM).

b) Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O và AB cắt CD tại P. Điểm M thuộc cạnh SA (M khác S, M khác A). Gọi N là giao điểm của MP và SB, I là giao điểm của MC và DN. Chứng minh rằng S, O, I thẳng hàng.

Bài tập 7: Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI).

b) Gọi G là giao điểm của AM và BN. Chứng minh rằng: $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$.

c) Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng CP, DQ cùng đi qua điểm G và $\frac{GP}{GC} = \frac{GQ}{GD} = \frac{1}{3}$.

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD. Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD.

a) Tìm giao điểm N của SD với (MAB).

b) Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC. Gọi N là giao điểm của SB và (ADM). Gọi O là giao điểm AC và BD. Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng quy.

Bài tập 10: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M, N, P lần lượt trên các cạnh AB, AC, BD sao cho MN cắt BC tại I, MP cắt AD tại J. Chứng minh: PI, NJ, CD đồng quy.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C. **B.** I, B, D. **C.** I, A, B. **D.** I, C, D.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC. Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. K, I, J. **B.** M, I, J. **C.** N, I, J. **D.** M, K, J.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm ở trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM = (ACD) \cap (ABG)$. **B.** A, J, M thẳng hàng.

C. J là trung điểm của AM. **D.** $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F, G là các điểm lần lượt thuộc các cạnh AB, AC, BD sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

A. CD, EF, EG. **B.** CD, IG, HF. **C.** AB, IG, HF. **D.** AC, IG, BD.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M. Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB). Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một song song.

B. Ba đường thẳng AB, CD, MN đôi một cắt nhau.

C. Ba đường thẳng AB, CD, MN đồng quy.

D. Ba đường thẳng AB, CD, MN cùng thuộc một mặt phẳng.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AD // BC, AD > BC)$. Gọi I là giao điểm của AB và DC, M là trung điểm của SC và DM cắt (SAB) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A. Ba điểm S, I, J thẳng hàng.

B. Đường thẳng JM thuộc mặt phẳng (SAB).

C. Đường thẳng SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

D. Đường thẳng DM thuộc mặt phẳng (SCI).

Câu 7: Cho hình tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BD. Các điểm G, H lần lượt trên cạnh AC, CD sao cho NH cắt MG tại I. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. A, C, I thẳng hàng **B.** B, C, I thẳng hàng.

C. N, G, H thẳng hàng. **D.** B, G, H thẳng hàng.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD // BC, AD > BC)$. Gọi I là giao điểm của AB và DC; M là trung điểm của SC và DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Đường thẳng SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

B. Đường thẳng JM thuộc mặt phẳng (SAB).

C. Ba điểm S, I, J thẳng hàng.

D. Đường thẳng DM thuộc mặt phẳng (SCI).

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Các đường thẳng MP, NQ, SO đồng qui.

B. Các đường thẳng MP, NQ, SO chéo nhau.

C. Các đường thẳng MP, NQ, SO đôi một song song.

D. Các đường thẳng MP, NQ, SO trùng nhau.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng (P) bất kì cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lầm lượt tại $A'; B'; C'; D'$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây?

A. Các đường thẳng $AB, CD, C'D'$ đồng quy **B.** Các đường thẳng $AB, CD, A'B'$ đồng quy

C. Các đường thẳng $A'C', B'D', SI$ đồng quy. **D.** Các đường thẳng $SB, AD, B'C'$ đồng quy

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC. Mặt phẳng (P) đi qua EF cắt AD, CD lần lượt tại H và G. Biết EH cắt FG tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, B. **B.** I, C, B. **C.** I, D, B. **D.** I, C, D.

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Khẳng định nào **đúng**?

A. Các đường thẳng MN, PQ, SO đồng quy.

B. Các đường thẳng MP, NQ, SO đồng quy.

C. Các đường thẳng MQ, PN, SO đồng quy.

D. Các đường thẳng MQ, PQ, SO đồng quy.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.

a) Giao tuyến của (SAC) và (SBD) cũng là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD.

b) Giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MNP) cũng là giao điểm của hai đường thẳng SD và NJ.

c) Gọi $H = MN \cap PQ$. Khi đó ba điểm S, H, E thẳng hàng.

e) Ba đường thẳng SK,QM,NP đồng quy tại một điểm

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$ với I trung điểm của SA, J là trung điểm của BC. Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC.

a) Giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng (SAB) cũng là giao điểm của hai đường thẳng CM bà BI

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMP) và (ABC) là điểm H với H là giao điểm của hai đường thẳng SP và AD.

c) Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC) cũng là giao điểm của MN và CJ

d) Gọi $F = IN \cap AC$ thì khi đó đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M,N di động.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K là trung điểm của AB và CD. Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD = 3JD$. Gọi F là giao điểm của đường thẳng IJ và mặt phẳng (BCD).

a) Gọi E là giao điểm của mặt phẳng (IJK) và đường thẳng BC. Khi đó $\frac{EB}{EC} = \frac{1}{2}$.

c) Ba đường thẳng AC,KJ,IE đồng quy tại điểm H. Khi đó $\frac{HC}{HA} = 2$.

d) Hai đường thẳng $EJ // HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HC.

e) Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD. Khi đó ba điểm A,O,G thẳng hàng và tỉ số $\frac{OA}{OG} = 3$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB,AC,BD lần lượt lấy ba điểm E,F,G sao cho $AB = 3AE; AC = 2AF; DB = 4DG$.

a) Gọi H là giao điểm của đường thẳng CD với (EFG). Khi đó tỉ số $\frac{HC}{HD} = \frac{3}{2}$.

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AD và (EFG). Khi đó tỉ số $\frac{IA}{ID} = \frac{2}{3}$.

c) Ba đường thẳng FI,GM,CD đồng quy tại một điểm

d) Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K. Khi đó tỉ số $\frac{AK}{AJ} = \frac{3}{2}$.

-----------------HẾT-----------------

BÀI 02 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

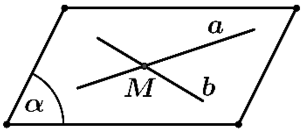
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

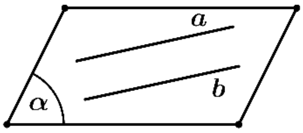
Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói a và b đồng phẳng. Khi đó, a và b có thể cắt nhau, song song với nhau hoặc trùng nhau.

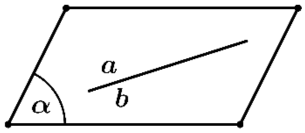
Nếu a và b không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói a và b chéo nhau. Khi đó, ta cũng nói a chéo với b, hoặc b chéo với a.



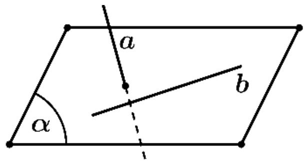
$a \cap b = M$



$a // b$



$a \equiv b$

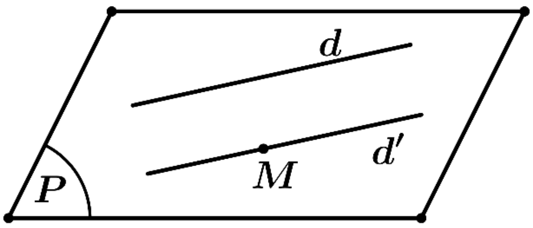


Nhận xét:

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
- Hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể song song hoặc chéo nhau.

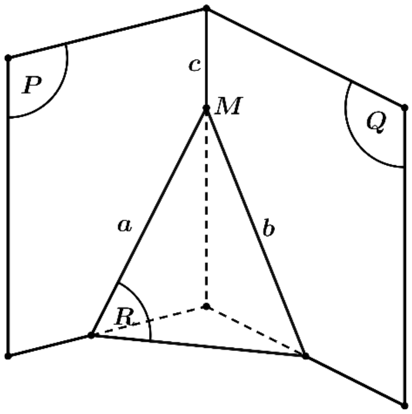
2 Tính chất của hai đường thẳng song song

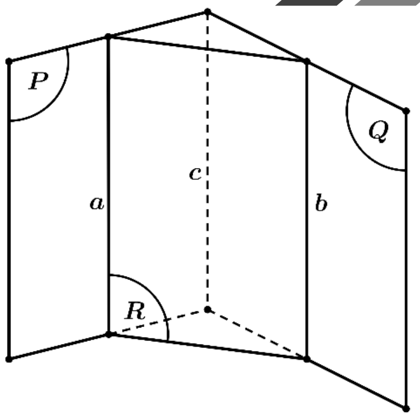
Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.



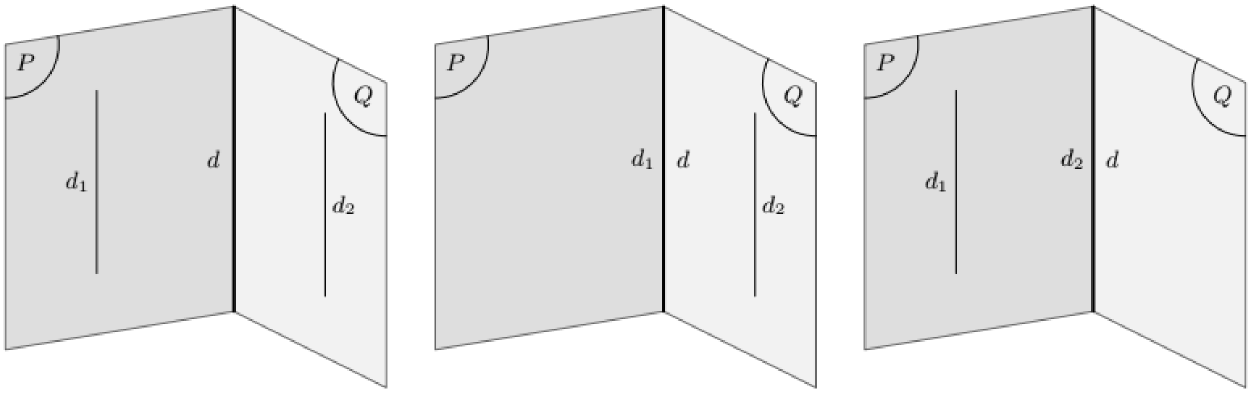
Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Tính chất 3: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.





Nhận xét: Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Nhận biết và chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Ta sẽ sử dụng một trong các cách sau:

- Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (Đường trung bình, Định lí Ta-lét đảo,.)
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

$$\begin{cases} a\,//\,b \\ a\,//\,c \Rightarrow b\,//\,c \\ b \neq c \end{cases}$$

- Áp dụng định lí về giao tuyến song song.
- **Áp dụng hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

$$\begin{cases} d' \subset (\alpha) \\ d'' \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ d'\,//\,d'' \end{cases} \Rightarrow d\,//\,d'', d\,//\,d'$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

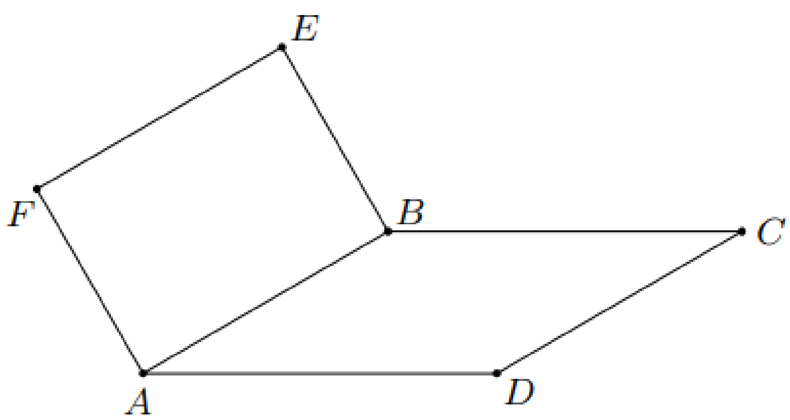
Bài tập 1: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

a) MN và BC b) AN và CD c) MN và CD.

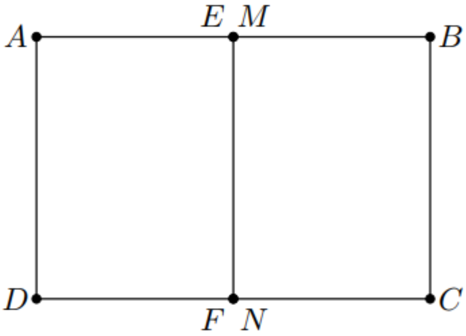
Bài tập 2: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

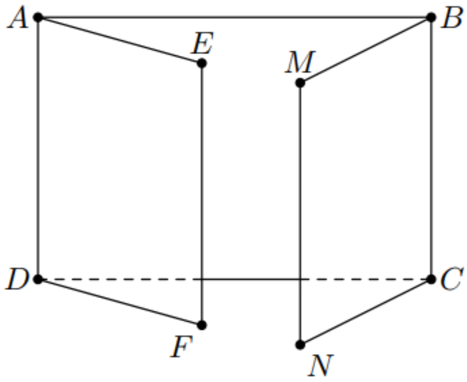
a) Quan sát bốn đường thẳng AB, BC, CD, DA. Chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau, các cặp đường thẳng song song.

b) Trong ba đường thẳng AB, AF, BE có hai đường thẳng nào chéo nhau hay không?

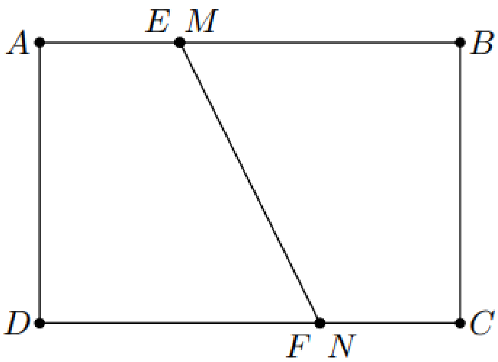


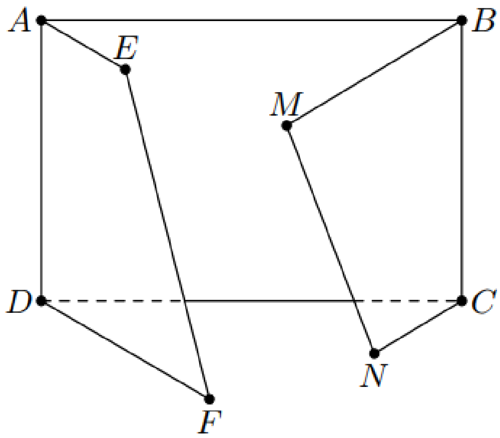
Bài tập 3: Khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau. Hãy giải thích tại sao.





Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang thì có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau hay không?

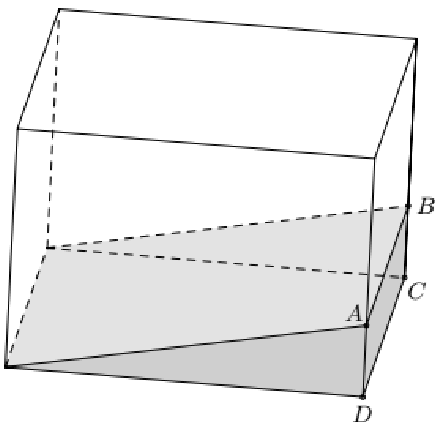




Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SC. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, BC sao cho $\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}=\frac{1}{3}$. Chứng minh rằng MN song song với PQ.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SD và P là một điểm nằm trên cạnh AB (P khác A và B). Đường thẳng CD cắt mặt phẳng (MNP) tại điểm Q. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ.

Bài tập 6: Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như hình bên. Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.



Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ làhình thang $(AB//CD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB. Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA, SB, SC, SD. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài tập 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và DBC. Chứng minh rằng $MN//AD$.

Bài tập 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC, (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD cắt các cạnh BD, AD, AC lần lượt tại N, P, Q. Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?

A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.
C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.
D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.
B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Câu 5: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng AD và BC?

A. Có thể song song hoặc cắt nhau. **B.** Cắt nhau.
C. Song song với nhau. **D.** Chéo nhau.

Câu 6: Cho ba mặt phẳng phân biệt (α), (β), (γ) có $(\alpha)\cap(\beta)=d_1;(\beta)\cap(\gamma)=d_2;(\alpha)\cap(\gamma)=d_3$ Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3:

A. Đôi một cắt nhau. **B.** Đôi một song song.
C. Đồng quy. **D.** Đôi một song song hoặc đồng quy.

Câu 7: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c, biết $a//b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c:

A. Trùng nhau hoặc chéo nhau. **B.** Cắt nhau hoặc chéo nhau.
C. Chéo nhau hoặc song song. **D.** Song song hoặc trùng nhau.

Câu 8: Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a // b$. Khẳng định nào sau đây **sai**?
A. Nếu $a // c$ thì $b // c$.
B. Nếu c cắt a thì c cắt b.
C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.
D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b.

Câu 9: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?
A. IJ song song với CD. **B.** IJ song song với AB.
C. IJ chéo CD. **D.** IJ cắt AB.

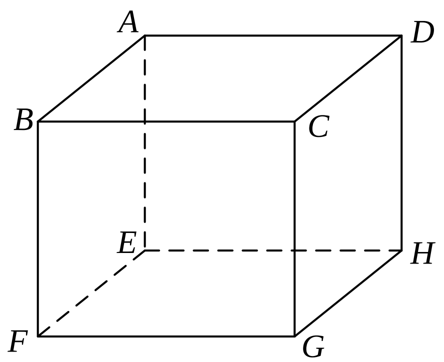
Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD. Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?
A. MP và RT. **B.** MQ và RT. **C.** MN và RT. **D.** PQ và RT.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J, E, F lần lượt là trung điểm SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ?
A. EF. **B.** DC. **C.** AD. **D.** AB.

Câu 13: Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó
A. đồng quy. **B.** tạo thành tam giác.
C. trùng nhau. **D.** cùng song song với một mặt phẳng.

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đường thẳng AG cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?
A. MN. **B.** CM. **C.** DN. **D.** CD.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. BG và HD chéo nhau. **B.** BF và AD chéo nhau.
C. AB song song với HG. **D.** CG cắt HE.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC. Đường thẳng IJ song song với đường nào?

A. AB. **B.** CD. **C.** BC. **D.** AD.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xác định vị trí tương đối của MQ và NP.

A. MQ cắt NP. **B.** $MQ \,//\, NP$. **C.** $MQ \equiv NP$. **D.** MQ, NP chéo nhau.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Đường thẳng IJ song song với đường thẳng nào?

A. BC. **B.** AC. **C.** SO. **D.** BD.

Câu 19: Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Bx, Cy, Dz song song với nhau, nằm cùng phía với mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A, cắt Bx, Cy, Dz tương ứng tại B', C', D' sao cho $BB' = 2$, $DD' = 4$. Tính CC'.

A. 6. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC. Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. $GE//CD$. **B.** GE cắt AD.

C. GE cắt CD. **D.** GE và CD chéo nhau.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{AN}{AD} = \dfrac{1}{3}$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh CD, CB. Mệnh đề nào sau đây đúng

A. Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang.

B. Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

C. Bốn điểm M, N, P, Q không đồng phẳng.

D. Tứ giác $MNPQ$ không có các cặp cạnh đối nào song song.

Câu 22: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b. Khẳng định nào sau đây **đúng** khi nói về hai đường thẳng AD và BC ?

A. Có thể song song hoặc cắt nhau. **B.** Cắt nhau.

C. Song song nhau. **D.** Chéo nhau.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Tìm điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi.

A. $AB = BC$. **B.** $BC = AD$. **C.** $AC = BD$. **D.** $AB = CD$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD. Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào không song song với $A'B'$?

A. AB. **B.** CD. **C.** $C'D'$. **D.** SC.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm BD, AD. Các điểm H, G lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD; ACD. Đường thẳng HG chéo với đưởng thẳng nào sau đây?

A. MN. **B.** CD. **C.** CN. **D.** AB.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD = a, BC = b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. MN song sonng với PQ. **B.** MN chéo với PQ.

C. MN cắt với PQ. **D.** MN trùng với PQ.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biết tính đúng sai của mỗi phát biểu sau (xét trong không gian):

a) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song với nhau.

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng chéo nhau.

c) Hai đường thẳng có điểm chung thì chúng cắt nhau.

d) Hai đường thẳng không thể cùng nằm trên một mặt phẳng thì chúng chéo nhau.

Câu 2: Trong không gian cho ba đường thẳng a, b và c phân biệt. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

b) Nếu hai đường thẳng cùng chéo nhau với đường thẳng thứ ba thì chúng chéo nhau.

c) Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b và đường thẳng c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng c chéo nhau hoặc cắt nhau.

d) Nếu đường thẳng a cắt b, hai đường thẳng b và c chéo nhau thì a và c chéo nhau hoặc song song với nhau.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) AB song song CD

b) SA cắt SC

c) SA song song BC.

d) SC chéo nhau AB.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, BD. Gọi (P) là mặt phẳng qua I, J và cắt các cạnh AC, AD lần lượt tại hai điểm M, N. Khi đó:

a) $IJ = \frac{1}{2}CD$

b) MN cắt DC

c) $IJNM$ là một hình thang.

d) Để $IJNM$ là hình bình hành thì M là trung điểm của đoạn AC.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA. Gọi M', N', E', F' lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hai đường thẳng MN và $M'N'$ song song với nhau.

b) Hai đường thẳng MN và EF chéo nhau với nhau.

c) Hai đường thẳng MF và NE chéo nhau với nhau.

d) Tứ giác $MNEF$ là hình chữ nhật.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AD. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hai đường thẳng AD và BC song song với nhau

b) Điểm I nằm trên đường thẳng PQ

c) Hai đường thẳng MN và BC chéo nhau

d) Hai đường thẳng MN và PQ song song với nhau

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M và N. Cho $AB = 3$ khi đó hãy tính độ dài đoạn thẳng MN.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Cho $PR // AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S. Khi đó $AD = kDS$. Tìm giá trị của k.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và G là trọng tâm tam giác SBD. Mặt phẳng (MNG) cắt SC tại điểm H. Tính $\dfrac{SH}{SC}$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$**.** Bên trong tam giác ABC ta lấy một điểm O bất kỳ. Từ O ta dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng $(SBC), (SCA), (SAB)$ theo thứ tự tại A', B', C'. Khi đó tổng tỉ số $T = \dfrac{OA'}{SA} + \dfrac{OB'}{SB} + \dfrac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu?

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, OB. Gọi I là giao điểm của SD và mặt phẳng (AMN). Khi đó tỉ số $\dfrac{SI}{DI} = \dfrac{a}{b}$ với $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a + b$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $A'A = \dfrac{1}{2}A'S$. Qua A' kẻ đường thẳng song song với AC cắt SC tại C'. Mặt phẳng (α) chứa $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Tính giá trị của biểu thức $T = \dfrac{SB}{SB'} + \dfrac{SD}{SD'}$.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Xác định giao tuyến và thiết diện của hình chóp

Phương pháp xác định giao tuyến: Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ngoài phương pháp "Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng", ta còn có thể tìm bằng cách sau:

- **Bước 1:** Chỉ ra rằng mặt phẳng α,β lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b.
- **Bước 2:** Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.
- **Bước 3:** Khi đó $(\alpha)\cap(\beta)=Mx//a//b$.

Phương pháp xác định thiết diện:
Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

- Tìm một điểm chung S của hai mặt phẳng (α) và (β).
- Hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt chứa hai đường thẳng d_1,d_2 mà $d_1//d_2$.

Khi đó giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng Sx song song với d_1,d_2.
b) Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình (H) ta tìm giao điểm của các cạnh của hình (H) với mặt phẳng (α). Đa giác tạo bởi các giao điểm tìm được chính là thiết diện cần tìm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB // CD$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB // CD)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD).

b) Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB). Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD.

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,CD và P là một điểm thuộc cạnh AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD.

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD,M$ là điểm thuộc cạnh AC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD. Tìm giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD).

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo; M là trung điểm của SC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA)

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

Bài tập 8: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M tùy ý trên cạnh BC. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với cạnh AD, AC. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α).

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M là trung điểm cạnh AB. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với cạnh BD, SA. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α)

Bài tập 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, SB.

a) Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.

b) Tìm giao điểm của (MNP) với BC.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

d) Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD.I$ và J theo thứ tự là trung diểm của AD,G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

A. Qua I và song song với AB.
B. Qua J và song song với BD.
C. Qua G và song song với CD.
D. Qua G và song song với BC.

Câu 2: Nếu mặt phẳng (α) chứa đường thẳng a và mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b, sao cho $a//b$. Khi đó giao tuyến của (α) và (β) là

A. Đường thẳng c song song với a và b.
B. Đường thẳng c song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng a và b.
C. Đường thẳng c trùng với một trong hai đường thẳng a và b.
D. Dường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là

A. Đường thẳng qua S và song song với AB.
B. Đường thẳng SO.
C. Đường thẳng qua S và song song với AD.
D. Không có giao tuyến.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB,AC,AD. Đường thẳng MN song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (PCD). **B.** (ABC). **C.** (BCD). **D.** (BCD).

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của BC,AD,SA. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (MNP).

A. Đường thẳng qua P và song song với AB. **B.** Đường thẳng qua S và song song với AB.
C. Đường thẳng qua M và song song với SC. **D.** Đường thẳng qua PM.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và I là trung điểm của AB. Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho $AD = 3AM$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại J, đường thẳng JG không song song với mặt phẳng

A. (SCD). **B.** (SAD). **C.** (SBC). **D.** (SAC).

Câu 7: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Cho G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

A. SC. **B.** Đường thẳng qua S và song song với AB.
C. Đường thẳng qua G và song song với DC. **D.** Đường thẳng qua G và cắt BC.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung diểm AC, BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng

A. KD. **B.** Qua K và song song AB.
C. KI. **D.** Qua I và song song với JK.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi I là trung diềm cạnh SC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Đường thẳng IO song song với $\text{mp}(SAD)$.

B. Đường thẳng IO song song với $\text{mp}(SAB)$.

C. Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến OI.

D. Mặt phẳng (IBD) cắt (SBD) theo giao tuyến OI.

Câu 10: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF.M$ là trung điểm của CD. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. MO_2 cắt (BEC). **B.** O_1O_2 song song với (BEC).

C. O_1O_2 song song với (EFM). **D.** O_1O_2 song song với (AFD).

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AD \parallel BC, AD > BC)$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với SA và BC. Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì

A. Ngũ giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Tam giác. **D.** Hình thang.

Câu 12: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P).

A. $\dfrac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **B.** $\dfrac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. **C.** $\dfrac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. **D.** $\dfrac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng đi qua M và song song với BC và AD, thiết diện thu được là hình gì?

A. Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Ngũ giác.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B. Cạnh SA vuông góc với đáy. M là một điểm nằm trên cạnh AB. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với SA và AD. Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì

A. Hình bình hành. **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là điểm nằm trong tam giác SCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD (tham khảo hình vẽ). Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) là hình gì

A. Hình tam giác. **B.** Hình tứ giác. **C.** Hình ngũ giác. **D.** Hình lục giác.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là trung điểm của OC. Mặt phẳng (α) qua M và song song với SA và BD. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (α) là hình gì?

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình ngũ giác.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB. Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng qua M và song song với hai cạnh BC và AD. Thiết diện thu được là hình gì

A. Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình ngũ giác.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và BC. Gọi E là giao điểm của (MNP) với cạnh SA. Tính tỉ số $\frac{SE}{SA}$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng qua O, song song với AB và SC là hình gì?

A. Hình chữ nhật. **B.** Hình thang. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình vuông.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB \parallel CD)$, cạnh $AB = 3a$, $AD = CD = a$. Tam giác SAB cân tại S, $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SD, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q. Đặt $AM = x(0 < x < a)$. Biết x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn, bán kính đường tròn đó là

A. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\frac{a\sqrt{7}}{6}$. **C.** $\frac{3a}{4}$. **D.** a.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA, điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $EF//AC$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AC

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) đường thẳng qua M và song song với BC

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) là đường thẳng qua M và song song với AC

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm của tam giác BCD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $IJ//CD$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng qua G và song song với BC

c) Cho biết $CD = 6$. Biết GIJ cắt BC, BD lần lượt tại M và N. Khi đó $2IJ + 3MN = 17$.

d) Cho biết $CD = 6$. Biết GIJ cắt BC, BD lần lượt tại M và N. Khi đó $3IJ + 2MN = 18$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm M là giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (ICD)

b) Ta có $SN = \frac{2}{3}SB$

c) Cho $AB = a$ thì $MN = \frac{a}{2}$

d) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM. Khi đó SK và BC chéo nhau

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD. K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE) là điểm thuộc đường thẳng KE

b) Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N. Tứ giác $EFNM$ là hình bình hành

c) Các đường thẳng AM, DN, SK cùng đi qua một điểm

d) Cho biết $AD = 2BC$. Tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF bằng $\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{2}{3}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB và SD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) SO là giao tuyến của (SAC) và (SBD)

b) Giao điểm J của SA với (CKB) thuộc đường thẳng đi qua K và song song với DC

c) Giao tuyến của (OIA) và (SCD) là đường thẳng đi qua C và song song với SD

d) $CD // IJ$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh SB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC. Kẻ $MK \parallel SC, (K \in BC)$, $NP \parallel SC, (P \in SD)$ và $EH \parallel SC, (H \in SA)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) MK là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD).

b) NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

c) EH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC).

d) Thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MKNPH$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Tính tỉ số $\dfrac{GA}{GA'}$.

Câu 2: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S, $SB = 8$. Gọi S là diện tích thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$. Tính $\dfrac{S}{\sqrt{2}}$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$. có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB. Biết tứ giác tạo bởi các giao tuyến của (IJG) và các mặt hình chóp là một hình bình hành, $AB = 6$. Khi đó, tính độ dài cạnh CD.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng nhau và bằng 10. Gọi E là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AE = 2EB$, F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF = 2FC$ và G là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG = 2GD$. Độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (EFG) và mặt bên ACD bằng

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang và $AD \parallel BC$, $AB = 2$, $AD = 8$, $BC = 4$, $BAD = 60°$. Mặt phẳng (α) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $\dfrac{SA}{SM} = 3$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và BC, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 6. Gọi M,N lần lượt là trung điểm CA,CB và P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP=2PD$, tính diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (MNP)?

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M,N lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $AM=CP=x$ $(0<x<a)$. Mặt phẳng (α) qua MP, song song với CD cắt tứ diện theo thiết diện có diện tích nhỏ nhất bằng bao nhiêu khi $a=10$?

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{2}{3}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với AB và AD. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$. Tính diện tích thiết diện này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

----------------HẾT----------------

BÀI 03 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

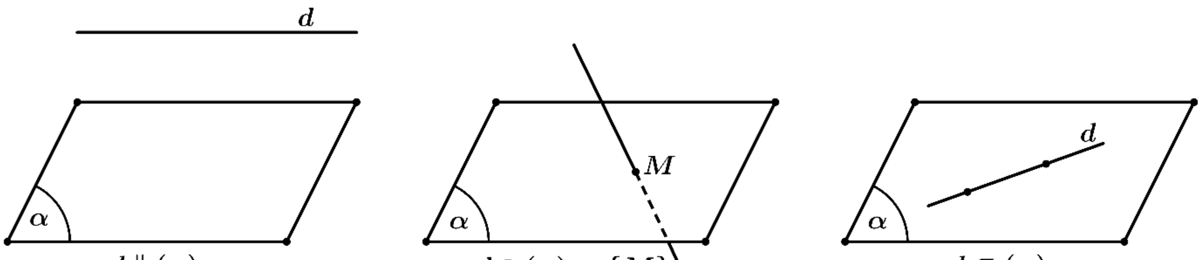
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường thẳng song song với mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Nếu d và (α) không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d và kí hiệu là $d \,/\!/\, (\alpha)$ hay $(\alpha) \,/\!/\, d$.

Ngoài ra:

- Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
- Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.



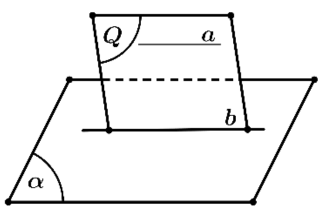
$d \parallel (\alpha)$ $\quad$ $d \cap (\alpha) = \{M\}$ $\quad$ $d \subset (\alpha)$

Nhận xét:

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
- Hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể song song hoặc chéo nhau.

2 Điều kiện và tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng

Tính chất 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nằm trong (P) thì a song song với (P).

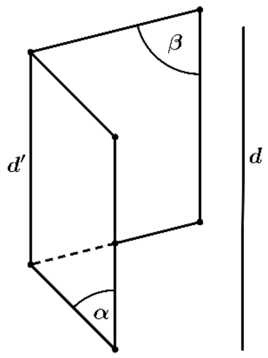


Kí hiệu: $\begin{cases} a \,//\, d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \,//\, (P)$

Tính chất 2: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a.

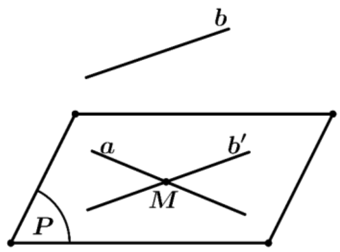
Kí hiệu: $\begin{cases} a \,//\, (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \,//\, b$

Chú ý 1: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.



Kí hiệu: $\begin{cases} d \,//\, (\alpha) \\ d \,//\, (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d \,//\, d'$

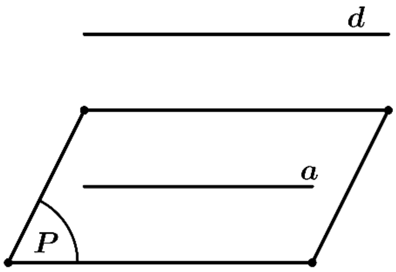
Chú ý 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Nhận biết và chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

Phương pháp: Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng a nào đó nằm trong (P).



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $AB//(SCD)$

Bài tập 2: Cho ba đường thẳng a,b,c đôi một song song với nhau và không cùng nằm trong một mặt phẳng Chứng minh rằng đường thẳng a song song với mặt phẳng (b,c).

Bài tập 3: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng. Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt với các đường thẳng CD, BD và BN

Bài tập 4: Cho hai điểm A, B cùng thuộc mặt phẳng (P) và một điểm C không thuộc (P). Vẽ đường thẳng d_1 đi qua A, B; d_2 đi qua C và song song AB. Tìm số điểm chung của mỗi đường thẳng vừa vẽ với (P). Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) lần lượt đối với các đường thẳng d_1, d_2, d_3.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh $G_1G_2//(SAB)$.

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA, (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

b) Vẽ đường thẳng b qua B và $b//SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SB và AD lần lượt lấy các điểm N, P sao cho $\dfrac{SN}{SB} = \dfrac{PD}{AD}$. Chứng minh $NP//(SCD)$

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, SA (hình dưới). Chứng minh rằng

a) MN song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b) SB và SC song song với mặt phẳng (MNE).

Bài tập 9: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng, xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABMN)$ với các đường thẳng CD, BD và BN.

Bài tập 10: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không cùng nằm trong một phẳng. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACF).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a /\!/ b$, $b /\!/ (\alpha)$. Khi đó:

A. $a /\!/ (\alpha)$.
B. $a \subset (\alpha)$.
C. a cắt (α).
D. $a /\!/ (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Câu 3: Cho $d /\!/ (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d /\!/ d'$. **B.** d cắt d'. **C.** d và d' chéo nhau. **D.** $d \equiv d'$.

Câu 4: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Câu 5: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \| (\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

A. $a \| b$.
B. a, b chéo nhau.
C. $a \| b$ hoặc a, b chéo nhau.
D. a, b cắt nhau.

Câu 6: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $b \| (\alpha)$ thì $b \| a$.

B. Nếu b cắt (α) thì b cắt a.

C. Nếu $b \| a$ thì $b \| (\alpha)$.

D. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và b.

Câu 7: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \| (\alpha)$ và $b \| (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a và b không có điểm chung.
B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.
C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.
D. a và b chéo nhau.

Câu 8: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b.

B. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b.

C. Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b.

D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.

B. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.

C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b.

D. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

Câu 10: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

A. Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q). **B.** Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).

C. Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P). **D.** Vô số mặt phẳng (P) và (Q).

Câu 11: Cho $d // (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. d cắt d'. **B.** $d // d'$. **C.** d và d' chéo nhau. **D.** $d \equiv d'$.

Câu 12: Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P).

B. Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau.

C. Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P).

D. Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng AD song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

A. (SBC). **B.** $(ABCD)$. **C.** $SAC)$. **D.** (SAB).

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Đường thẳng $A'B'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAB). **B.** (SBC). **C.** (SCD). **D.** (SAD).

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $G_1G_2 \parallel (SAB)$. **B.** $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$.

C. $G_1G_2 \parallel (ABC)$. **D.** Ba đường BG_1, AG_2, CD đồng quy.

Câu 16: Cho hai mặt phẳng $(\alpha), (\beta)$ cắt nhau và cùng song song với đường thẳng d. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$ trùng với d.

B. Giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$ song song hoặc trùng với d.

C. Giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$ cắt d.

D. Giao tuyến của $(\alpha), (\beta)$ song song với d.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (ACD). **B.** (BCD). **C.** (ABD). **D.** (ABC).

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = 3MC$. Lấy N trên cạnh $C'D$ sao cho $C'N = xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

A. $x = \frac{2}{3}$. **B.** $x = \frac{1}{3}$. **C.** $x = \frac{1}{4}$. **D.** $x = \frac{1}{2}$.

Câu 19: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

A. Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q). **B.** Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).

C. Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P). **D.** Vô số mặt phẳng (P) và (Q).

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MN // (ABCD)$. **B.** $MN // (SAB)$. **C.** $MN // (SCD)$. **D.** $MN // (SBC)$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

A. MN nằm trên $(ABCD)$. **B.** MN cắt $(ABCD)$.

C. MN song song $(ABCD)$. **D.** MN và $(ABCD)$ chéo nhau.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MN // (BCD)$. **B.** $GQ // (BCD)$.

C. MN cắt (BCD). **D.** Q thuộc mặt phẳng (CDP).

Câu 23: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $OO_1 // (BEC)$. **B.** $OO_1 // (AFD)$.

C. $OO_1 // (EFM)$. **D.** MO_1 cắt (BEC).

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC. Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

A. P, Q, R, S. **B.** M, P, R, S. **C.** M, R, S, N. **D.** M, N, P, Q.

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt song song, cùng hướng nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Mặt phẳng (α) song song với AB, và cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tại các điểm A', B', C', D'. Biết O là tâm hình bình hành $ABCD$, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $A'B'C'D'$ là hình bình hành. **B.** $(AA'B'B) // C'D'$.

C. $AA' = CC'$ và $BB' = DD'$. **D.** $OO' // AA'$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a mà không chứa đường thẳng b

b) Nếu mặt phẳng (P) song song với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng song song với đường thẳng b.

c) Nếu mặt phẳng (P) cắt đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng cắt đường thẳng b.

d) Nếu mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng chứa đường thẳng b.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD, P là trung điểm cạnh SA. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $MN \parallel (SBC)$

b) $MN \parallel (SAD)$

c) SB cắt với mặt phẳng (MNP)

d) SC cắt với mặt phẳng (MNP)

Câu 3: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng và có tâm lần lượt là O và O'. Gọi M,N lần lượt là hai điểm nằm trên các cạnh AE,BD sao cho $AM=\frac{1}{3}AE$ và $BN=\frac{1}{3}BD$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) OO' song song với mặt phẳng (ADF)

b) OO' cắt mặt phẳng (BCE)

c) $\frac{BN}{BD}=\frac{2}{3}$

d) MN song song với mặt phẳng $(CDFE)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I,J lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SCD; E,F lần lượt là trung điểm của AB và CD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\frac{SJ}{SF}=\frac{2}{3}$

b) $IJ \parallel (ABCD)$.

b) BC song song với các mặt phẳng $(SAD),(SEF)$

d) BC cắt mặt phẳng (AIJ)

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE, I$ là trung điểm AD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) OI song song với mặt phẳng (SAB)

b) OI song song với mặt phẳng (SCD)

c) IE song song với AC

d) $GE \parallel (SBC)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. Điểm M thuộc cạnh SB. Biết $OM \parallel (SCD)$. Tính tỉ số của $\dfrac{SM}{MB}$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA, mặt phẳng (α) cắt SC tại K. Biết rằng $SK = m.KC$ thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn. Biết $AB = 5a, CD = 2a$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB thỏa mãn $\dfrac{ES}{EB} = \dfrac{m}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng CE song song với mặt phẳng (SAD). Giá trị của $2m + 3n$ bằng

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và E là điểm thuộc cạnh SA thỏa mãn $SE = \dfrac{m}{n}.SA$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng GE song song với mặt phẳng (SCD). Giá trị của $m.n$ bằng

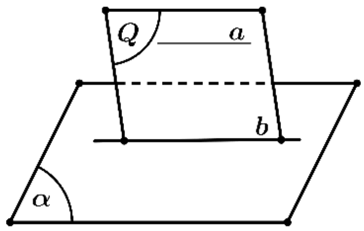
Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi E là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BC = 4BE$. Lấy F thuộc cạnh SA sao cho $FA = k.FS$. Biết rằng EF song song với mặt phẳng (SCD). Khi đó giá trị của k bằng. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC. Một mặt phẳng song song với AC và BD cắt SA, SB lần lượt tại M và N. Tỉ số $\dfrac{MN}{AB}$ bằng. (làm tròn đến hàng phần trăm)

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.



Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α). Ta cần tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến là đường thẳng Δ. Khi đó giao điểm của đường thẳng a và Δ chính là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có M là trung điểm của AB. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với $SA, (Q)$ là mặt phẳng chứa CM và song song với SA.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

b) Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SCD) và NG song song với mặt phẳng (SAC).

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau, điểm G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua G và song song với hai cạnh BC, AC. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD).

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Biết mặt phẳng (α) chứa BG và song song với AC. Tìm giao điểm K của AD và mặt phẳng (α).

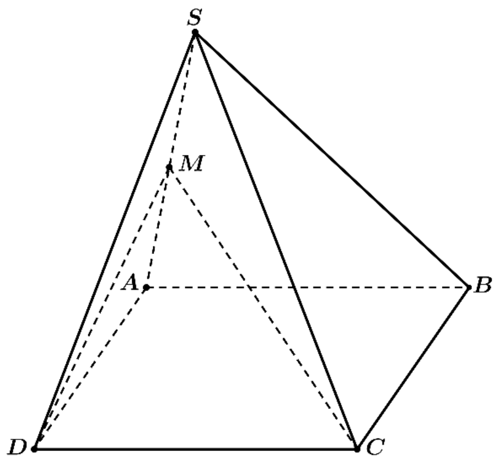
Bài tập 7: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA. Tìm giao điểm K của mặt phẳng (α) và SC.

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Gọi M là một điểm trên CD và (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC. Tìm giao điểm Q của SC và mặt phẳng (α).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

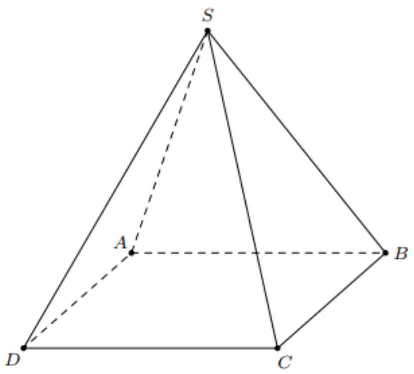
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) là:



A. Không có giao điểm.
B. Giao điểm của đường thẳng SB và MC.
C. Giao điểm của đường thẳng SB và MD.
D. Trung điểm của đoạn thẳng SB.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).



A. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O của đáy.
B. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC.
C. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB.
D. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là

A. SO với O là tâm hình bình hành $ABCD$.
B. SD.

C. SG với G là trung điểm AB.
D. SF với F là trung điểm CD.

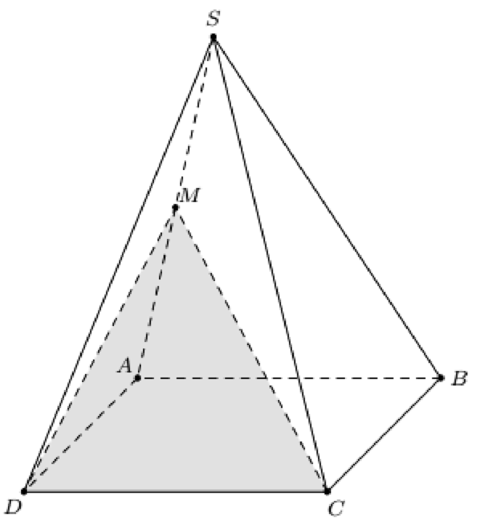
Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$, có độ dài các cạnh đôii một khác nhau. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh AB,AC,CD. Mặt phẳng (MNP) cắt BD tại điểm Q. Phát biểu nào sau đây sai?

A. $MN = MQ$. **B.** $MQ = NP$. **C.** $PQ // (ABC)$. **D.** $MQ // (ACD)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O,M là trung điểm đoạn SB,G là trọng tâm tam giác SAD. Gọi J là giao điểm của AD với (OMG) khi đó $\frac{JD}{AD}$ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) là



A. Không có giao điểm. **B.** Giao điểm của đường thẳng SB và MC.
C. Giao điểm của đường thẳng SB và MD. **D.** Trung điểm của đoạn thẳng SB.

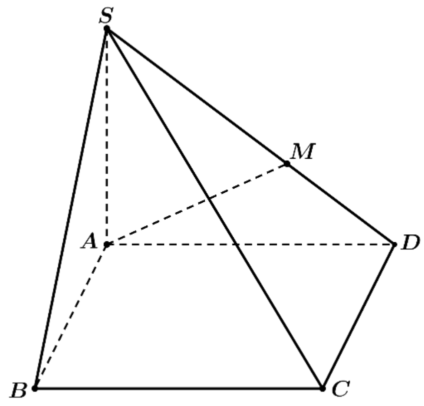
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm AO. Mặt phẳng (α) qua M và song song với BD; SA và mặt phẳng (α) cắt SC tại N. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $SN = \frac{1}{4}NC$. **B.** $SN = NC$. **C.** $SN = \frac{1}{3}NC$. **D.** $SN = \frac{1}{2}NC$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là một điểm thuộc đoạn SA sao cho $2MA = SM$, điểm N là điểm thuộc tia đối của tia OS sao cho $3ON = SO$, G là trọng tâm tam giác SCD. Gọi $K = SD \cap (GMN)$. Biết rằng $\frac{SK}{KD} = \frac{a}{b} (a,b \in \mathbb{N})$ và $(a,b) = 1$. Tính $S = a + b$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SM = \frac{2}{3}SD$. Mặt phẳng chứa AM và song song với BD cắt cạnh SC tại K. Tỷ số $\frac{SK}{SC}$ bằng



A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC, F là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM). Tính tỉ số $\frac{SF}{SD}$.

A. 1. **B.** $\frac{1}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có G,K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC, gọi E là trung điểm của AC. Mặt phẳng (GEK) cắt SC tại M. Tỉ số $\frac{MS}{MC}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SD, G là trọng tâm tam giác SAB, K là giao điểm của GM với mặt phẳng $ABCD$. Tỉ số $\frac{KB}{KC}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD=3AM$. Gọi G,N theo thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, ABC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AC, BD

b) $\frac{DN}{DB}=\frac{1}{3}$

c) MN song song với mặt phẳng (SCD)

d) NG cắt với mặt phẳng (SAC).

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của ΔSAB và ΔSBC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $AC // (SIJ)$.

b) HK cắt IJ

c) $HK // (SAC)$.

d) Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng đi qua B và song song với AC.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Điểm $M \in SC$ (M không trùng với S và C). Gọi I là giao điểm của AM và SO. Mặt phẳng (P) chứa AM song song với BD. Gọi N là giao điểm của SD với mặt phẳng (P). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng BD nằm trong mặt phẳng (SBD)

b) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SBD) là đường thẳng đi qua I và song song với BD

c) N là giao điểm của SD và đường thẳng qua IM.

d) N là giao điểm của SD và đường thẳng qua I song song với BD.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm đoạn thẳng SC và I là giao điểm của AM và SO. Trong mặt phẳng (SCD) đường thẳng đi qua điểm I và song với BD cắt SB và SD lần lượt tại E và F. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng MO song song với mặt phẳng (SAD).

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(AEMF)$ và $(ABCD)$.

c) $\dfrac{IO}{SO} = \dfrac{3}{4}$

c) Gọi S_{SEM} và S_{SBC} lần lượt là diện tích của ΔSEM và ΔSBC thì tỉ số $\dfrac{S_{SEM}}{S_{SBC}} = \dfrac{1}{3}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn. Biết $AB = 5a, CD = 2a$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB thỏa mãn $\dfrac{ES}{EB} = \dfrac{m}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng CE song song với mặt phẳng (SAD). Giá trị của $2m + 3n$ bằng bao nhiêu?

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và E là điểm thuộc cạnh SA thỏa mãn $SE = \dfrac{m}{n}.SA$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng GE song song với mặt phẳng (SCD). Giá trị của $m.n$ bằng bao nhiêu?

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD song song với BC và $AD = 2BC$. Gọi E là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BC = 4BE$. Lấy F thuộc cạnh SA sao cho $FA = k.FS$. Biết rằng EF song song với mặt phẳng (SCD). Khi đó giá trị của k bằng bao nhiêu?

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD và M là điểm thuộc cạnh BC sao cho GM song song với mặt phẳng (SCD). Khi đó tỉ số diện tích của hai tam giác MAB và MAC bằng bao nhiêu?

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi E là trung điểm của BC, F là điểm thuộc cạnh CD sao cho $EAF = 45^\circ$ và G thuộc cạnh SA. Biết FG song song với mặt phẳng (SBC). Khi đó tỉ số $\dfrac{GA}{GS}$ bằng bao nhiêu?

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, ΔSBD đều cạnh a. Gọi M,P là hai điểm lần lượt di động trên cạnh SA, SC (không trùng với S) sao cho $\dfrac{SA}{SM}+\dfrac{SC}{SP}=3$ và (α) là mặt phẳng di động chứa M,P cắt SB,SD lần lượt tại N,Q. Diện tích tam giác SNQ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\dfrac{a^2\sqrt{m}}{n}$ với $m,n\in\mathbb{Z}$. Tính $4m+n$.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 3: Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Phương pháp: Để tìm thiết diện của mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với hai cạnh a,b của hình chóp ta làm như sau:

Bước 1: Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh a.

Bước 2: Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với a.

Bước 3: Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh b.

Bước 4: Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với b.

Nối các đoạn giao tuyến lại ta được thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh AB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SA. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh SB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E là điểm nằm giữa A, C. Mặt phẳng (P) qua E và song song với hai đường thẳng AB,CD. Xác giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Bài tập 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Mặt phẳng (P) qua điểm M trên đoạn IJ và song song với AB; CD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành. Một mặt phẳng (P) qua O đồng thời song song với SA và CD. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp.

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh BC. Mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với AB; CD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Bài tập 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh AB. Mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với BC; AD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Bài tập 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh AD; N là điểm bất kì nằm trên cạnh BC. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng MN và song song với CD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AC, E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED=3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình:

A. Tam giác **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang. **D.** Hình chữ nhật.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác T. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. T là hình thang.

B. T là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.

C. T là hình chữ nhật.

D. T là tam giác.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, M là trung điểm cạnh SA, N là điểm trên cạnh SC sao cho $SN=3SC$. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với SB cắt hình chóp theo thiết diện là

A. Tam giác MNK với K thuộc SD.

B. Tam giác MNP với P là trung điểm của AB.

C. Hình thang.

D. Ngũ giác.

Câu 4: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M,N lần lượt là trung điểm đoạn SC,BC. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN song song với BD là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Lục giác. **D.** Tứ giác.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng qua G, song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (P) là

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình tam giác. **D.** Tam giác đều.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB, điểm M là trung điểm CD. Mặt phẳng (α) qua M và song song với cả SA,BC, cắt hình chóp theo một thiết diện là

A. hình tam giác. **B.** hình bình hành. **C.** hình thoi. **D.** hình thang.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.

C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.

D. (P) không cắt hình chóp.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A, M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Hình vuông **B.** Hình chữ nhật **C.** Hình tam giác **D.** Hình bình hành

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi I là trung điểm cạnh SC. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).

B. Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).

C. Mặt phẳng (IBD) cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến OI.

D. Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là tứ giác.

Câu 10: Gọi (P) là mặt phẳng qua H, song song với CD và SB. Thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Ngũ giác.

B. Hình bình hành.

C. Tứ giác không có cặp cạnh đối nào song song.

D. Hình thang.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình thang. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\frac{MA}{AD}=\frac{NC}{CB}=\frac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD. Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là:

A. một tam giác.

B. một hình bình hành.

C. một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.

D. một hình thang với đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB. Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Tam giác

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình bình hành. **B.** Tam giác. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình thang.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. (P) không cắt hình chóp.

B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.

C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.

D. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA.Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với SC và AD. Thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình thang cân. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình bình hành.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M nằm trong tam giác ABC. Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với các đường thẳng AB và CD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình ngũ giác.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

A. $AB = 3CD$. **B.** $AB = \frac{1}{3}CD$. **C.** $AB = \frac{3}{2}CD$. **D.** $AB = \frac{2}{3}CD$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).

b) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

c) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm G là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (α) qua G và song song với AB và CD. Đồng thời (α) cắt trung tuyến AM của tam giác ACD tại K. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là một hình tam giác.

b) $\frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$.

c) $AK = \frac{1}{3}AM$.

d) Giao tuyến của (α) và (ABD) cắt CD.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD. Khi đó:

a) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB

b) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD

c) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB

d) Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình thang

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2 và M là một điểm thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAB) là đường thẳng đi qua M và song song với AB

b) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAD) là đường thẳng đi qua M và song song với SD

c) $\frac{SM}{SA}=\frac{1}{3}$

d) Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác có diện tích bằng $\frac{16}{9}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD=9\,\text{cm}$, $CB=6\,\text{cm}$ và M là điểm bất kì trên cạnh CD. Mặt phẳng (α) là mặt phẳng qua M và song song với $AD,\ BC$. Nếu thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thoi thì cạnh của hình thoi đó bằng bao nhiêu?

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=6, CD=8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{a^2m\sqrt{m}}{n}$ với $m,n\in\mathbb{Z}$. Tính $m+2n$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB=a$, $CD=b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, giả sử $AB\perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD. Biết $IM=\frac{1}{3}IJ$ thì diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) là $S=\frac{m}{n}.ab$ với $m,n\in\mathbb{Z}$. Tính $2n+m$

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC$ $(0<x<1)$. mp(P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC, DB, AD, AC tại M, N, P, Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB // CD)$, cạnh $AB=3a$, $AD=CD=a$. Tam giác SAB cân tại $S, SA=2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SC, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q. Đặt $AM=x(0<x<a)$. Gọi x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được đường tròn, bán kính đường tròn đó khi $a=6\sqrt{7}$ là bao nhiêu?

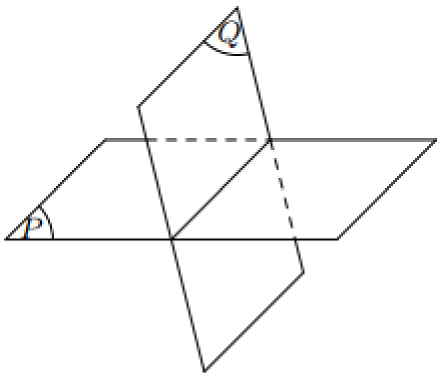
----------------HẾT----------------

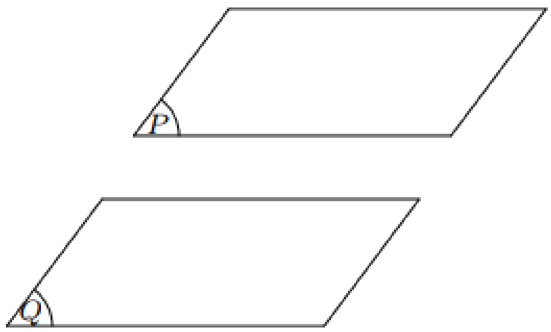
BÀI 04 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hai mặt phẳng song song

Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Có hai khả năng xảy ra:



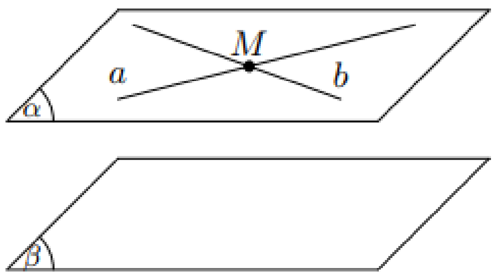


$(P),(Q)$ có một điểm chung: $(P)\cap(Q)=a$ $(P),(Q)$ không có điểm chung: $(P)\parallel(Q)$

Định nghĩa: Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

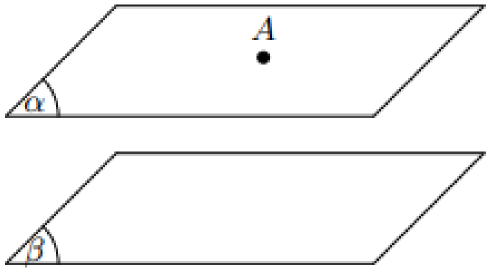
2 Điều kiện và tính chất của hai mặt phẳng song song

Tính chất 1: (Dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song). Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a,b và a,b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).



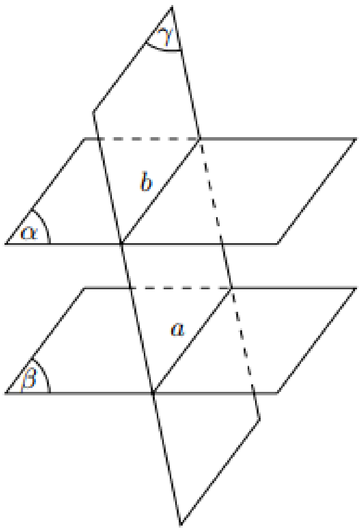
- Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đuờng thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.
- Muốn chứng minh đường thẳng $a\parallel(Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng $(P)\parallel(Q)$.

Tính chất 2: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

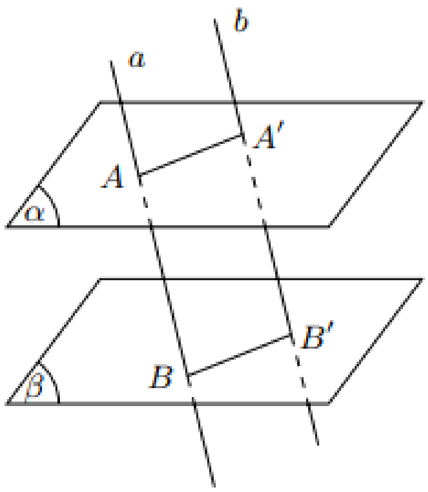


- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α). Do đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\alpha) /\!/ (\beta) \Rightarrow d /\!/ (\alpha)$.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

Tính chất 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến đó song song với nhau.

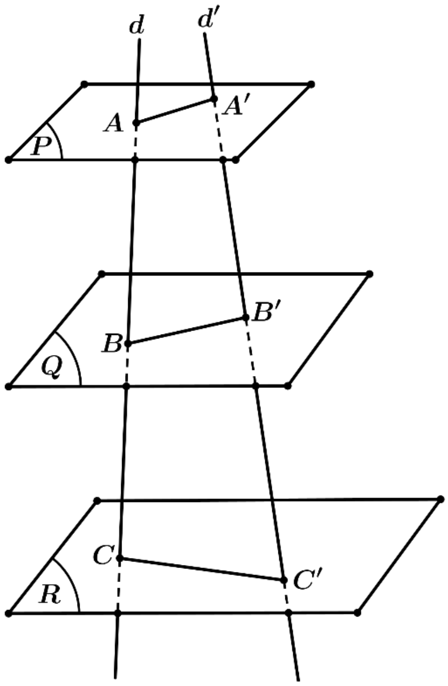


- Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



3 Định ký Thales

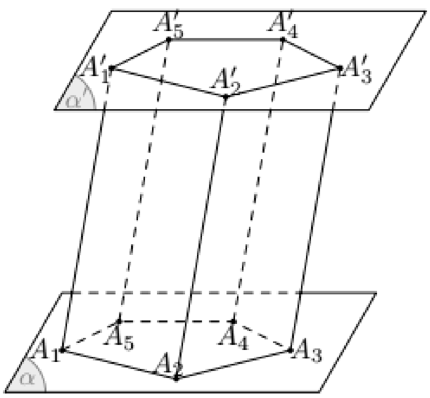
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Nếu hai cát tuyến d và d' cắt ba mặt phẳng song song $(P) // (Q) // (R)$ lần lượt tại các giao điểm A, B, C và A', B', C' thì $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$.

4 Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa hình lăng trụ: Trên mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$, từ các đỉnh của đa giác dựng các đường thẳng song song cắt mặt phẳng (α') song song với (α) tại các điểm $A_1', A_2', .., A_n'$. Hình hợp bởi hai miền đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1', A_2', .., A_n'$ với các hình chữ nhật $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$,. được gọi là hình lăng trụ.

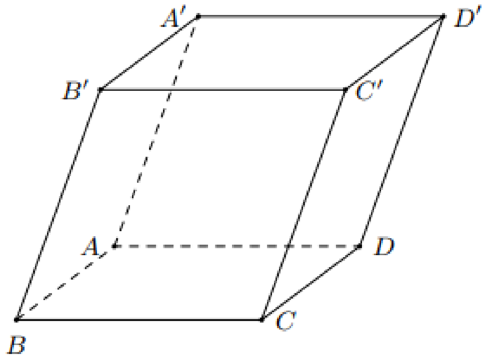


Tính chất:

- Các hình bình hành được gọi là các mặt bên, hai miền đa giác gọi là hai mặt đáy của lăng trụ.

- Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.
- Các đoạn thẳng $A_1A_1', A_2A_2', ...$ được gọi là các cạnh bên. Các cạnh bên của lăng trụ song song và bằng nhau.
- Ta gọi lăng trụ theo tên của đa giác đáy, tức là nếu đáy là tam giác thì gọi là lăng trụ tam giác, nếu đáy là tứ giác thì gọi là lăng trụ tứ giác.

Định nghĩa hình hộp: Hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



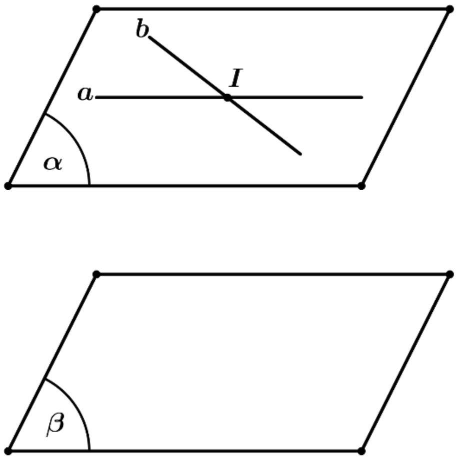
Tính chất:

- Hình hộp có sáu mặt đều là những hình bình hành.
- Hai mặt song song với nhau gọi là hai mặt đối diện, hình hộp có ba cặp mặt đối diện.
- Hai đỉnh của hình hộp được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào.
- Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện được gọi là các đường chéo. Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.
- Hai cạnh gọi là đối nhau nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên một mặt của hình chóp.
- Mặt chéo của hình hộp là hình bình hành có hai cạnh là hai cạnh đối diện của hình hộp.
- Tổng bình phương các đường chéo của một hình hộp bằng tổng các bình phương của tất cả các cạnh của hình hộp đó.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

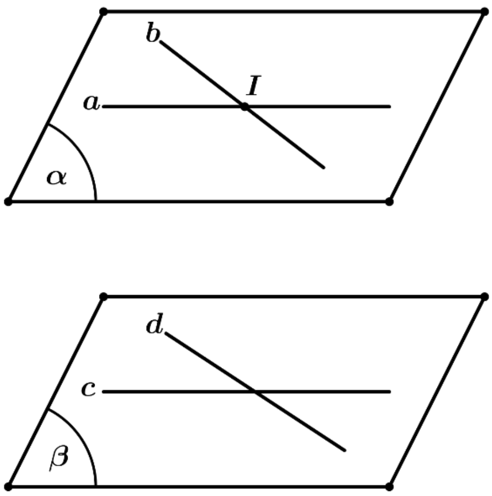
Dạng 1: Nhận biết và chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp: Để chứng minh hai mặt phẳng song song $(\alpha) // (\beta)$ ta chứng minh mặt phẳng (α) có hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt song song với mặt phẳng (β).



Cụ thể: $\begin{cases} a // (\beta) \\ b // (\beta) \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$

Ngoài ra, dựa vào phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, ta còn có thể chứng minh hai mặt phẳng song song như sau: chứng minh hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng này, song song với hai đường thẳng (cắt nhau) nằm trong mặt phẳng kia.



Cụ thể: $\begin{cases} a // c \\ b // d \\ a, b \subset (\alpha) \\ c, d \in (\beta) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SB,SC. Chứng minh rằng $(MNP)//(ABC)$.

Bài tập 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Lấy các điểm M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SB, SC.

a) Chứng minh rằng $(MNP)//(ABCD)$.

b) Giả sử mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q. Chứng minh rằng Q là trung điểm của SD.

Bài tập 3: Cho hai hình bình hành $ABCD, ABMN$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng $(ADN)//(BCM)$.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh SA,SB,SC và K là điểm bất kỳ trên cạnh MN. Chứng minh rằng $(MNP)//(ABC)$. Từ đó suy ra $PK//(ABC)$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Chứng minh $(OMN)//(SCD)$.

b) Gọi K là điểm bất kỳ trên MN. Chứng minh $OK//(SCD)$.

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD gấp đôi đáy bé BC. Gọi $O=AC\cap BD, M$ thuộc cạnh SA sao cho $AM=2MS$ và N thuộc cạnh SB sao cho $2BN=NS$

a) Chứng minh rằng $(OMN)//(SCD)$.

b) Gọi $d=(OMN)\cap(ABCD), P=d\cap AD, Q=d\cap BC$. Chứng minh tứ giác $PQCD$ là hình bình hành.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD//BC$ và $AD=2BC$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và AD. Chứng minh: $(BMN)//(SCD)$ từ đó suy ra $BM//(SCD)$

Bài tập 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M,N,M' lần lượt là trung điểm các cạnh AB,AC và $A'B'$

a) Chứng minh $(MNM')//(BCC'B')$.

b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM'). Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABC$, trên cạnh SA lấy hai điểm A_1,A_2 sao cho $A_2A_1=2A_1A$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng lần lượt đi qua A_1,A_2, đồng thời cùng song song với (ABC). Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1,C_1; mặt phẳng (Q) lần lượt cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại B_2,C_2. Chứng minh $B_2B_1=2B_1B$ và $C_2C_1=2C_1C$.

Bài tập 10: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G_1,G_2,G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC,ACD,ADB

a) Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3)//(BCD)$.

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ với mặt phẳng (ABC).

Bài tập 11: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng $(AFD)//(BEC)$.

b) Gọi M là trọng tâm của tam giác ABE. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD). Lấy N là giao điểm của (P) và AC. Tính $\dfrac{AN}{NC}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Qua một điểm có vô số mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.

B. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

C. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

D. Qua một điểm tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.

Câu 2: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β), a là đường thẳng bất kì. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Nếu a cắt $\text{mp}(\alpha)$ thì a cắt $\text{mp}(\beta)$.

B. Nếu $a \subset (\alpha)$ thì a song song với $\text{mp}(\beta)$.

C. Nếu $a \subset (\beta)$ thì a song song với $\text{mp}(\alpha)$.

D. Nếu a song song với $\text{mp}(\alpha)$ thì a song song với $\text{mp}(\beta)$.

Câu 3: Cho một đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với (P).

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Câu 4: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước có một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Câu 5: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β), đường thẳng $a // (\alpha)$. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (β)?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Câu 6: Cho các mệnh đề sau:

1) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.

2) Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

3) Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề sai là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 2.

Câu 7: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) dều song song với (β).

B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β).

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(\alpha)//(\beta)$

D. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong (α).

Câu 8: Chọn khẳng định sai:

A. Hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

B. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

C. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) đều phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song nhau.

D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Câu 9: Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

A. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.

B. Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.

C. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.

D. Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, AD. Mặt phẳng (MNO) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SBC). **B.** (SAB). **C.** (SAD). **D.** (SCD).

Câu 11: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $(\alpha)\,//\,(\beta)$?

A. $(\alpha)\,//\,a$ và $(\alpha)\,//\,b$ với a,b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β).

B. $(\alpha)\,//\,a$ và $(\alpha)//b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β).

C. $(\alpha)\,//\,a$ và $(\alpha)\,//\,b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β).

D. $(\alpha)\,//\,\gamma$ và $(\beta)\,//\,(\gamma)$ là mặt phẳng nào đó).

Câu 12: Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I,J,K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD,ACD,ABC và M, N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh BD,CD,BC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $(DJK)\,//\,(ABC)$. **B.** $(IJK)\,//\,(BCD)$.

C. $(KMN)\,//\,(ABC)$. **D.** $(IJK)\,//\,(AMD)$.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D', AC$ cắt BD tại O còn $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O'. Khi đó $(AB'D')$ sẽ song song mặt phẳng nào dưới đây?

A. $(A'OC')$. **B.** (BDA'). **C.** (BDC'). **D.** (BCD).

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD'. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $(AA'B'B) // (DD'C'C)$. **B.** $(BA'D') // (ADC')$.

C. $A'B'CD$ là hình bình hành. **D.** $BB'D'D$ là một tứ giác.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB // CD)$ và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD)?

A. (BCI). **B.** (BIJ). **C.** (CIJ). **D.** (SJC).

Câu 16: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$, gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle ACC'$ và $\triangle AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK)?

A. $(BC'A)$. **B.** $(AA'B)$. **C.** $(BB'C)$. **D.** $(CC'A)$.

Câu 17: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N, P là 3 điểm lần lượt nằm trên ba đoạn $AB', AC', B'C$ sao cho $\frac{AM}{AB'} = \frac{C'N}{AC'} = \frac{CP}{CB'} = x$. Để $(MNP) // (A'BC')$ thì x bằng bao nhiêu?

A. $x = \frac{1}{2}$. **B.** $x = \frac{1}{3}$. **C.** $x = \frac{2}{3}$. **D.** $x = \frac{1}{4}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O và $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD đều. Gọi (P) là mặt phăng di động đi qua điểm I trên đoạn OC, song song với (SBD). Đặt $AI = x\left(\frac{a}{2} < x < a\right)$, cắt các cạnh BC, CD, SC lần lượt tại E, F, G. Diện tích tam giác EFG bằng

A. $\frac{b^2(a-x)^2\sqrt{2}}{a^2}$ **B.** $\frac{b^2(a+x)^2\sqrt{3}}{a^2}$. **C.** $\frac{b^2(a+x)^2}{a^2\sqrt{3}}$ **D.** $\frac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song nhau, nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (AA', BB') song song với mặt phẳng (CC', DD').

b) $A'B' // C'D'$

c) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang

d) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó $OO' // AA'$.

Câu 2: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I,K,G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC,A'B'C',ACC'$. Gọi M,M' lần lượt là trung điểm của $BC,B'C'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $AMM'A'$ là hình bình hành

b) $\frac{AI}{AM}=\frac{AG}{AN}=\frac{1}{3}$

c) Mặt phẳng (IKG) cắt $(BCC'B')$

d) $(A'KG)\,//\,(AIB')$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H,I,K lần lượt là trung điểm của SA,SB,SC. Gọi M là giao điểm của AI và KD,N là giao điểm của DH và CI. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $HI\,//\,(ABCD)$

b) $(HIK)\,//\,(ABCD)$.

c) SM và HI chéo nhau

d) (SMN) cắt (HIK)

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $MN\,//\,(SBC)$

b) $(OMN)\,//\,(SBC)$.

c) Gọi E là trung điểm đoạn AB và F là một điểm thuộc đoạn ON. Khi đó EF cắt với mặt phẳng (SBC).

d) Gọi G là một điểm trên mặt phẳng $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Khi đó GN cắt (SAB)

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1,G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD,B'D'C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $A'D'CB$ là hình bình hành

b) $(A'BD)\,//\,(B'D'C)$

c) G_1,G_2 cùng thuộc AC'

d) $G_1G_2=\frac{2}{3}AC'$

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là trọng tâm ΔABE. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt (ADF). Gọi N là giao điểm của (P) và AC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $EFDC$ là hình thang

b) $FD\,//\,EC$

c) $(ADF)//(BCE)$.

d) $\dfrac{AN}{NC}=3$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) ON chéo nhau với SB

b) $(OMN)//(SBC)$.

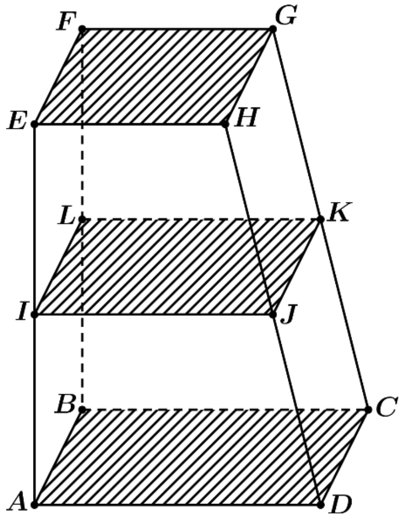
c) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Khi đó PQ cắt (SBC)

d) Gọi R là trung điểm AD. Khi đó $(MOR)//(SCD)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB=AC=4,\ BAC=30^\circ.$ Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM=2MA.$ Gọi P là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh $SC.$ Tính tỉ số $\dfrac{SP}{SC}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Câu 2: Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE=100$ cm, $CG=120$ cm và muốn đóng thêm mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên, tầng dưới và $EI=42$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng KG



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, AC sao cho $\dfrac{BM}{MS}=\dfrac{CN}{NA}=x,\ (0<x\neq 1)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tìm x để $(MNG)//(SAD)$.

Câu 4: Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tương ứng tại A', B', C', D' sao cho $AA'=3$, $BB'=5$, $CC'=4$. Tính DD'.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB // CD$ và $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Lấy E thuộc cạnh SA, F thuộc cạnh SC sao cho $\frac{SE}{SA} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng (BEF). Gọi P là giao điểm của SD với (α). Tính tỉ số $\frac{SP}{SD}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Câu 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên ba cạnh AA', BB', CC', sao cho $AM = \frac{1}{2}AA'$, $BN = \frac{1}{3}BB'$, $CP = \frac{1}{4}CC'$. Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng DD'. Khi đó tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$ bằng bao nhiêu?(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng bằng cách kẻ song song

Phương pháp: Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng ta sử dụng tính chất $\begin{cases}(\alpha) \parallel (\beta) \\ (\gamma)\cap(\alpha)=a \Rightarrow a \parallel b \\ (\gamma)\cap(\beta)=b\end{cases}$

- Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P). Ta cần tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng Δ. Khi đó giao điểm của đường thẳng a và Δ chính là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P).

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H. Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB). Tìm giao tuyến của:

a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ trên AB. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SBC). Tìm giao tuyến của (α) với cắt mặt của hình chóp.

Bài tập 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AD, A'D'$. Xác định giao tuyến của (MNP) và các mặt $(A'B'C'D'),(AA'B'B)$.

Bài tập 4: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Biết mặt phẳng (α) chứa BG và song song với đường thẳng AC. Tìm giao điểm K của AD và mặt phẳng (α).

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn là AB. Gọi M là một điểm trên CD và (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC. Tìm giao điểm Q của SC và (α).

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SB.

a) Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.

b) Tìm giao điểm của (MNP) với BC.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình thang với đáy lớn là cạnh AD. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA.

a) Xác định giao điểm Q của cạnh SD với (MNP).

b) Chứng minh SB, SC cùng song song với (MNP).

c) Chứng minh MP và NQ cắt nhau. Chứng minh giao điểm của MP và NQ, giao điểm của AB và CD và điểm S thẳng hàng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P) thì trong (P) có duy nhất một đường thẳng a song song với d.

B. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì d song song với mọi đường thẳng nằm trong (P).

C. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì trong (P) tồn tại đường thẳng a song song với d.

D. Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P), đường thẳng a bất kỳ nằm trong (P) thì a và d chéo nhau.

Câu 2: Trong không gian, đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu

A. $a \not\subset (P)$. **B.** $\begin{cases} a // b \\ b \subset (P) \end{cases}$. **C.** $\begin{cases} a // b \\ b \not\subset (P) \end{cases}$. **D.** $\begin{cases} a // b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{cases}$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AC. **B.** DC. **C.** BD. **D.** AD.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là đường nào sau đây?

A. Đường thẳng d đi qua A và $d // BC$.

B. Đường thẳng d đi qua A và $d // BD$.

C. Đường thẳng d đi qua A và $d // CD$.

D. Đường thẳng d đi qua A và giao điểm của IJ và CD.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên cạnh các AB, CD, BC (không trùng với các đỉnh của tứ diện $ABCD$) sao cho $PR // AC$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. BD. **B.** CD. **C.** CB. **D.** AC.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và $AB.$ Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (NOM) cắt (OPM). **B.** $(MON)//(SBC)$.

C. $(PON)\cap(MNP) = NP.$ **D.** $(NMP)//(SBD)$.

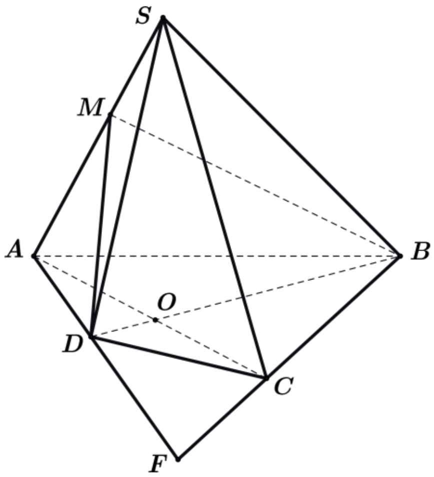
Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang $(AB//CD)$. Gọi M là trung diểm của SB. Mặt phẳng qua DM, song song với AB cắt đường thẳng SC tại Q. Tính tỉ số $\dfrac{SC}{SQ}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G,G' lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$. Khẳng định nào sau đây là sai?

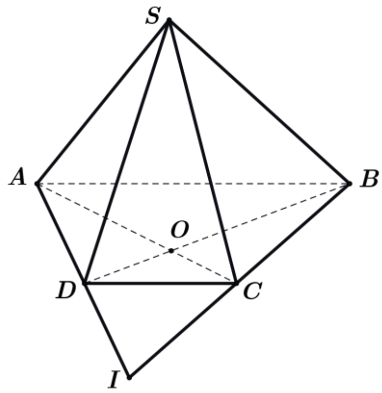
A. $GG' /\!/ (ACD)$. **B.** $GG' /\!/ BD$. **C.** $GG' /\!/ (ABC)$. **D.** $GG' /\!/ AC$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song. Gọi $O = AC \cap BD, F = BC \cap AD$. Điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến (d) của cặp mặt phẳng (MBD) và (SAC)



A. $d = SO$. **B.** $d = SF$. **C.** $d = MO$. **D.** $d = MF$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB/\!/CD)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AD và BC. Khẳng định nào sau đây **sai**?



A. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là SC.

B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO.

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI.

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SID) và (SCO) là SB.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AD,BC,SC,SD. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng (SAB). Giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) lần lượt là

A. MN và PN **B.** MN và PQ. **C.** QP và QM **D.** NP và MQ.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SB, mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) cắt SA, SC lần lượt tại N, P. Khẳng định nào đúng?

A. (α) không trùng với (MNP). **B.** MP cắt BC.

C. MN cắt AC. **D.** $MP \parallel BC$.

Câu 13: Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC'. Đường thẳng qua đi qua trọng tâm I của tam giác ABC cắt $A'B$ và MN lần lượt tại P, Q. Khi đó tỉ số $\frac{IP}{IQ}$ bằng

A. $\frac{3}{5}$. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{5}{3}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB//CD$ và $AB = 2CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, H là giao điểm của DG và (SAC). Tỉ số $\frac{GH}{GD}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang và $AB \parallel CD$. Gọi M là trung điểm của SD và (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (SCD)

b) Đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P)

c) Đường thẳng CD cũng song song với mặt phẳng (P)

d) Giao điểm của (P) và SC là điểm N với N là trung điểm của SC

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H. Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$ là EF với E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD.

b) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) là EK với K là trung điểm của SD

c) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAD) là FI với I là trung điểm của FE

d) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) là đường thẳng KE

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC, lấy điểm $P \in SA$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AC và BD.

b) Giao điểm SD và (MNP) là R với $R = QN \cap SD$

c) Ba đường thẳng $PR; MN; AD$ đôi một song song

d) $OJ \parallel (SAD)$.

Câu 4: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $II' \parallel BB'$

b) $AA'I'I$ là hình bình hành

c) IA' song song $\left(AB'C'\right)$.

d) Giao tuyến của $\left(AB'C'\right)$ và $\left(A'BC'\right)$ là đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng $AI', A'I$

-----------------HẾT-----------------

Dạng 3: Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Phương pháp: Để xác định được thiết diện của một hình chóp hoặc hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P) ta thường dựng các đoạn giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp hoặc hình lăng trụ đó. Khi ấy, ta sử dụng định lí sau:

- Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cuang cắt mặt phẳng kia theo hai giao tuyến song song với nhau.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S \cdot ABC$. Gọi M là trung điểm SA. Xác định thiết diện của hình chớp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC).

Bài tập 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Tìm thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng $(A'C'C)$. Thiết diện là hình gì?

Bài tập 3: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $\frac{AM}{MD} = \frac{CN}{NC'}$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng qua MN và song song với (ACB')

Bài tập 4: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi K là trung điểm CD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C' và song song với $(A'AK)$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P).

Bài tập 5: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AD = 3a, AB = BC = a$. Mặt bên (SAD) là tam giác cân đỉnh S với $SA = 2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AB và không trùng với A, B. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (SAD). Xác định thiết diện của chóp với mặt phẳng (α). Thiết diện là hình gì?

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC, AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm AD và O giao điểm của AC và BE; I là một điểm di động trên AC khác A và C. Qua I vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBE). Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a, b và $x = AI$.

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, tam giác SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc cạnh $AB, AM = x$ với $0 < x < a$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với (SAD). Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P).

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Mặt phẳng (α) qua M song song với (SBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình tam giác. **B.** Hình vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình thang.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm bất kì trên đoạn thẳng SO. Mặt phẳng (α) qua M và song song với $(ABCD)$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình tam giác. **C.** Hình ngũ giác. **D.** Hình thang cân.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O, AB=8, SA=SB=6$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và song song với (SAB). Tính diện tích của thiết diện của (P) và hình chóp $S \cdot ABCD$.

A. 12. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** 13.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của cạnh $AB, (\alpha)$ là mặt phẳng đi qua I và song song với mặt phẳng (BDD'). Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình ngũ giác. **D.** Hình thang.

Câu 5: Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$ là

A. Tam giác cân tại M. **B.** Hình bình hành. **C.** Tam giác đều. **D.** Hình thoi.

Câu 6: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a và G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua G và song song với mặt phẳng (BCD) thì diện tích thiết diện bằng bao nhiêu?

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{18}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Tam giác đều.
C. Tam giác vuông. **D.** Tam giác cân không đều.

Câu 8: Cho tứ diện đều $S.ABC$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và SC. Xét M là một điểm di động trên đoạn thẳng AI. Qua M kẻ mặt phẳng (α) song song với (CIJ). Khi đó thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện $S.ABC$ là hình gì?

A. Tam giác đều. **B.** Hình bình hành.
C. Tam giác cân tại M. **D.** Hình thang cân.

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S\cdot ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

A. $\frac{20}{3}$. **B.** $\frac{400}{9}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC=3$. Hai đáy $AB=8$ và $CD=4$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA=3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và điểm M nằm giữa hai điểm A và B. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng $(AB'D')$. Mặt phẳng (P) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình tứ giác. **B.** Hình tam giác. **C.** Hình lục giác. **D.** Hình ngũ giác.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD, AB//CD, AB=2CD, M$ là điểm thuộc cạnh $AD, (\alpha)$ là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB). Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB, tính tỉ số $x=\frac{MA}{MD}$.

A. $x=1$. **B.** $x=\frac{2}{3}$. **C.** $x=\frac{3}{2}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a, các cạnh bên đều bằng $2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng (SBC). Tính chu vi P của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$.

A. $P=\frac{7a}{2}$. **B.** $P=\frac{11a}{2}$. **C.** $P=\frac{9a}{2}$. **D.** $P=\frac{5a}{2}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD, AB//CD, AB=2CD.M$ là điểm thuộc cạnh $AD, (\alpha)$ là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB). Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB. Tính tỉ số $x=\frac{MA}{MD}$.

A. $x=1$. **B.** $x=\frac{3}{2}$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAD đều. Đáy $ABCD$ là hình thang có $AD \parallel BC$ và $AB = BC = CD = 1, AD = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm M nằm trên cạnh AB và song song với (SAD). Đặt $BM = x$ với $(0 < x < 1)$. Tìm x để thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác SAD

a) Thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là một mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (SAD).

b) Thiết diện cần tìm là một lục giác đều

c) Qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt CD tại N thì $MN = 1 - x$

d) Để thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác SAD thì giá trị của $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AG. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua O đồng thời song song với mặt phẳng (ABC) và diện tích tam giác ABC. Gọi I là trung điểm BC. Trong mặt phẳng (AID) qua O kẻ đường thẳng song song với AI cắt AD tại P và cắt DI tại J. Qua J kẻ đường thẳng song song với MN, cắt CD tại N và cắt BD tại M. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Thiết diện cần tìm là một hình thang

b) $\dfrac{JD}{ID} = \dfrac{6}{5}$

c) $\dfrac{MN}{BC} = \dfrac{5}{6}$

d) $\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{25}{26}$

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi I là trung điểm đoạn CD và M là điểm nằm trên đoạn BC (M khác B và C). Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (ABI). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của (α) và mặt phẳng (BCD) là MP với $P \in CD$

b) Giao tuyến của (α) và mặt phẳng (ACD) là MQ với $Q \in AC$

c) $PQ = (\alpha) \cap (ABC)$

d) Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (α) là một tam giác cân

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A, $SA = a\sqrt{3}$, $SB = 2a$. Điểm M nằm trên đoạn AD sao cho $AM = 2MD$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

a) Giao tuyến của mặt phẳng (P) với $(ABCD)$ là MN với $N \in BC$

b) Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là một hình bình hành.

c) Độ dài của cạnh $AB = a$

d) Diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{8}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có M di động trên cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = k$, với $(0 < k < 1, k \in \mathbb{R})$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC). Khi $k = \dfrac{\sqrt{m}}{n}$ với m, n nguyên dương thì mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABC$ theo một thiết diện có diện tích bằng nửa diện tích của tam giác ABC. Tính $m + n$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $AB \parallel CD, AB = 2CD$. Điểm M thuộc cạnh AD (M không trùng với A và D) sao cho $\dfrac{MA}{MD} = x$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Tìm x để diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng một nửa diện tích tam giác SAB.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $BAC = 30°$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6$, $CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi M là một điểm trên cạnh AD, mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N. Đặt $AM = x\ (0 \le x \le a)$. Tìm giá trị của x để diện tích thiết diện $HKMN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $AB = 4$. Trên các cạnh $AA', B'C', CD$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $MA = NB' = PC = x$ $(2 \le x < 4)$. Khi thiết diện được tạo bởi mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương có diện tích bằng $11\sqrt{3}$ thì giá trị x bằng bao nhiêu?

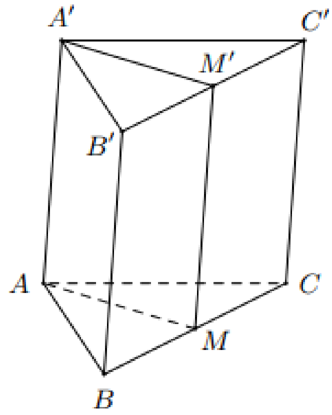
----------------HẾT----------------

Dạng 4: Hình lăng trụ và hình hộp

BÀI TẬP TỰ LUẬN

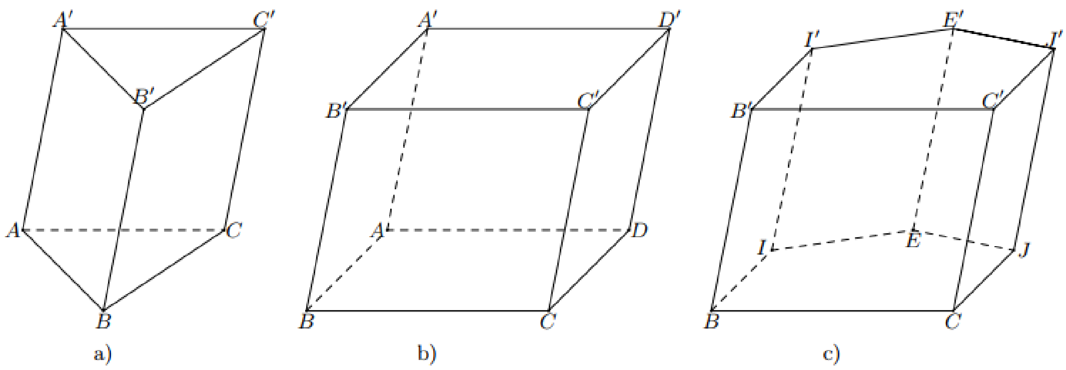
Bài tập 1: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi M và M' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC và $B'C'$. Chứng minh rằng

a) $AA' \parallel (BCC'B')$ b) $AM \parallel A'M$.

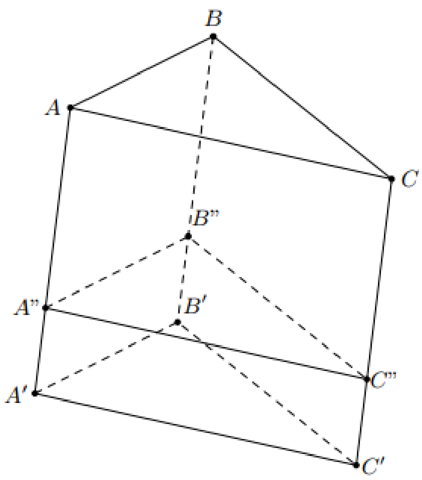


Bài tập 2: a) Gọi tên các hình lăng trụ trong các hình sau đây.

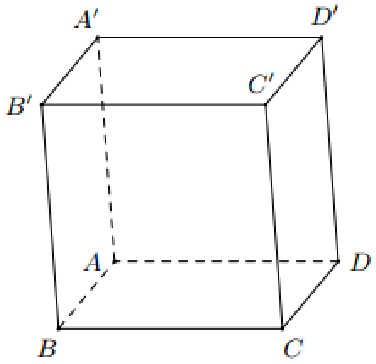
b) Gọi tên các thành phần của hình lăng trụ trong hình đầu tiên.



Bài tập 3: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ (hình vẽ bên). Một mặt phẳng song song với mặt đáy của hình lăng trụ cắt các cạnh bên của hình lăng trụ lần lượt tại A'', B'', C''. Chứng minh rằng $ABC.A''B''C''$ là hình lăng trụ.



Bài tập 4: Hãy liệt kê các cặp mặt đối diện, các cặp cạnh đối diện và các cặp đỉnh đối diện của hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$.



Lời giải

Trong hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có

Ba cặp mặt đối diện: $(ABCD)$ và $(A'B'C'D')$;$(ABB'A')$ và $(DCC'D')$;$(ADD'A')$ và $(BCC'B')$.

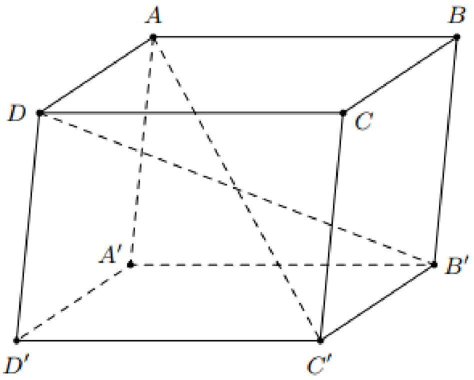
Sáu cặp cạnh đối diện: AB và $D'C'$;BC và $A'D'$;CD và $B'A'$;DA và $C'B'$;AA' và CC';BB' và DD'.

Bốn cặp đỉnh đối diện: A và C';B và D';C và A';D và B'.

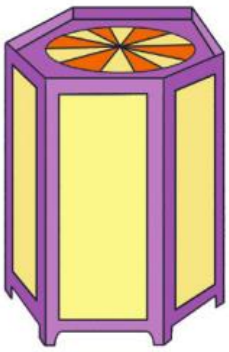
Bài tập 5: Chứng minh rằng bốn đường chéo của hình hộp cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

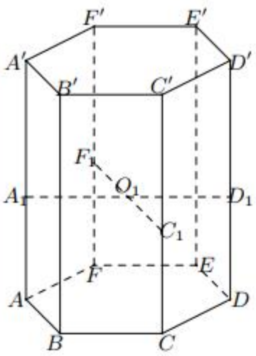
Bài tập 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Chứng minh (BDA') và $(B'D'C)$ là các mặt phẳng song song

Bài tập 7: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên). Chứng minh rằng các đường chéo AC', BD', CA' và DB' của hình hộp cùng đi qua trung điểm của mỗi đường.



Bài tập 8: Để làm một khung lồng đèn kéo quân hình lăng trụ lúc giác $ABCDEF.A'B'C'D'E'F'$. Bình gắn hai thanh tre A_1D_1, F_1C_1 song song với mặt phẳng đáy và cắt nhau tại O_1 (hình bên dưới).

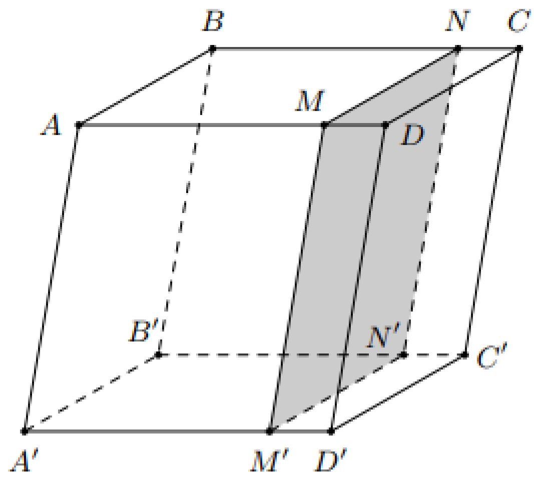




a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng $\left(A_1D_1,F_1C_1\right)$ với các mặt bên của lăng trụ.

b) Cho biết $A'A_1=6AA_1$ và $AA'=70$ cm, tính CC_1 và C_1C'.

Bài tập 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Một mặt phẳng song song với mặt bên $\left(ABB'A'\right)$ của hình hộp và cắt các cạnh $AD,BC,A'D',B'C'$ lần lượt tại M,N,M',N'. Khi đó hãy chứng minh rằng $ABNMA'B'N'M'$ là hình hộp.



BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

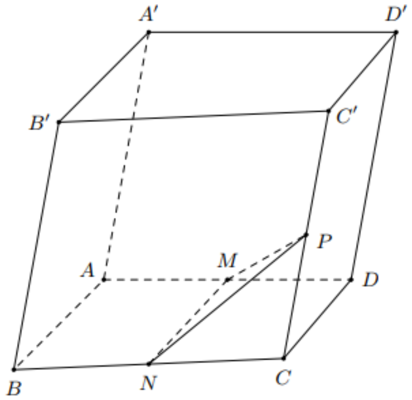
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình lăng trụ tam giác (xem hình bên), chọn khẳng định sai?

A. Các cạnh bên song song với nhau. **B.** Các mặt bên là các hình chữ nhật.

C. Hai tam giác đáy bằng nhau. **D.** Hai đáy nằm trên hai mặt phẳng song song.

Câu 2: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có hai đáy là các hình bình hành. Các điểm M,N,P lần lượt là trung điểm của cạnh AD,BC,CC' (tham khảo hình vẽ). Xét các khẳng định sau:



a) Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh $A'D'$.

b) Mặt phẳng (MNP) cắt cạnh DD' tại trung điểm của DD'.

c) Mặt phẳng (MNP) song song với mặt phẳng $(ABC'D')$.

Trong các khẳng định trên, số khẳng định đúng là:

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Câu 3: Trong các mệnh đều sau, mệnh đề nào sai?

A. Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau.

B. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành bằng nhau.

C. Các cạnh bên của hình lăng trụ bằng nhau và song song với nhau.

D. Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành.

Câu 4: Lăng trụ tam giác có bao nhiêu mặt?

A. 3. **B.** 9. **C.** 5. **D.** 6.

Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi I,J,K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC $ACC',A'B'C'$ như hình vẽ. Mặt phẳng nào sau đây song song với mặt phẳng (IJK)?

A. (ABB'). **B.** (ACC'). **C.** (ABC'). **D.** $(BB'C')$.

Câu 6: Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi G,G' lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $A'B'C',M$ là điểm trên cạnh AC sao cho $AM=2MC$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $GG' \parallel (ABB'A')$.

B. $GG' \parallel (ACC'A')$.

C. Đường thẳng MG' cắt mặt phẳng $(BCC'B')$.

D. $(MGG') \parallel (BCC'B')$.

Câu 7: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của $A'B'$. Mặt phẳng (IBD) cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình chữ nhật.

C. Tam giác. **D.** Hình bình hành.

Câu 8: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của AB. Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là

A. Tam giác. **B.** Hình bình hành.

C. Hình chữ nhật. **D.** Hình thang.

Câu 9: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD'. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $A'B'CD$ là hình bình hành. **B.** $(AA'B'B) // (DD'C'C)$.

C. $(BA'D') // (ADC')$. **D.** $BB'D'D$ là một tứ giác.

Câu 10: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi O, O' lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây sai?

A. $(BA'D') // (ADC')$. **B.** $(ABB') // (CDD')$.

C. $(ABO') // (OC'D')$. **D.** $(B'AC) // (DA'C')$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (BDC'). **B.** (BCA'). **C.** (BDA'). **D.** $(A'C'C)$

Câu 12: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt phẳng $(AB'D')$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. $(BA'C')$. **B.** (ACD'). **C.** (BDA'). **D.** $(C'BD)$.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua một cạnh của hình hộp và cắt hình hộp theo thiết diện là một tứ giác T. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. T là hình thoi. **B.** T là hình chữ nhật.

C. T là hình vuông. **D.** T là hình bình hành.

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $AM = \frac{1}{2}AD$, $CN = \frac{1}{2}CC'$. Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với mặt phẳng (ACB') là

A. Hình lục giác. **B.** Hình tam giác.

C. Hình tứ giác. **D.** Hình ngũ giác.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Mệnh đề nào sau đây là sai?

A. $(BDD'B') // (ACC'A')$. **B.** $(ABCD) // (A'B'C'D')$.

C. $(ABB'A') // (CDD'C')$. **D.** $(AA'D'D) // (BCC'B')$.

Câu 16: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của AB, mặt phẳng $(MA'C')$ cắt cạnh BC tại N. Tính tỉ số $k = \frac{MN}{A'C'}$.

A. $k = \frac{1}{2}$. **B.** $k = \frac{1}{3}$. **C.** $k = \frac{2}{3}$. **D.** $k = 1$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi E,F lần lượt là trung diểm của các cạnh AC và $A'B'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu gọi M là trung điểm của $B'C'$ thì $FM=\frac{1}{2}A'C'$

b) $EF\,/\!/\left(BCC'B'\right)$.

c) Nếu gọi K là trung điểm của AB thì tứ giác $CC'FK$ là hình thang vuông

b) Gọi $I=CF\cap\left(AC'B\right)$ thì khi đó I là trung điểm đoạn thẳng CF.

Câu 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G,G' lần lượt là giao điểm của BD' với các mặt phẳng $\left(ACB'\right)$ và $\left(A'C'D\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\left(ACB'\right)/\!/\left(A'C'D\right)$.

b) Điểm G và G' là giao điểm của BD' với các mặt phẳng $\left(ACB'\right)$ và $\left(A'C'D\right)$.

c) Hai điểm G,G' lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ACB' và $A'C'D$.

d) $BG=GG'=D'G'$

Câu 3: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,AA' $C'D'$, AD'. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $NQ\,/\!/\,A'D'$ và $NQ=\frac{1}{2}A'D'$

b) Tứ giác $MNQC$ là hình bình hành

c) $MN\,/\!/\left(ACD'\right)$

d) $\left(MNP\right)/\!/\left(ACD'\right)$

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của $\Delta B'D'A$ và $\Delta BDC'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng $A'Q$ đi qua trọng tâm của tam giác $\Delta BDC'$

b) Đường thẳng CQ đi qua trọng tâm của tam giác $\Delta B'D'A$

c) $\frac{CG'}{CQ}=\frac{2}{3}$

d) $A'G=GG'=G'C=\frac{1}{3}A'C$

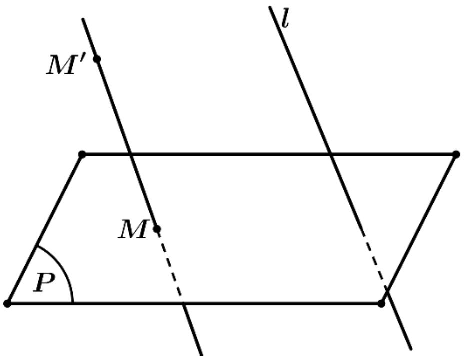
----------------HẾT----------------

BÀI 05 PHÉP CHIẾU SONG SONG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Phép chiếu song song

Định nghĩa: Cho mặt phẳng (P) và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Phép đặt tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' của mạt phẳng (P) sao cho MM' song song hoặc trùng với ℓ gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (P) theo phương ℓ. Mặt phẳng (P) gọi là mặt phẳng chiếu, đường thẳng ℓ gọi là phương chiếu, điểm M' gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của điểm M qua phép chiếu song song nói trên.



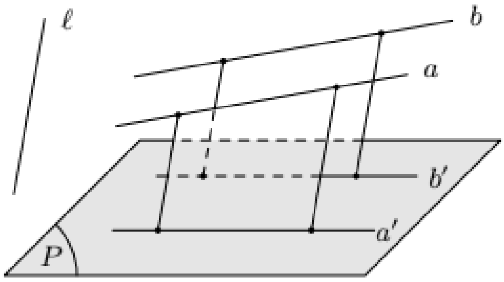
Cho hình H. Tập hợp H' gồm hình chiếu song song của tất cả các điểm thuộc H gọi là hình chiếu song song (hoặc ảnh) của hình H qua phép chiếu song song nói trên.

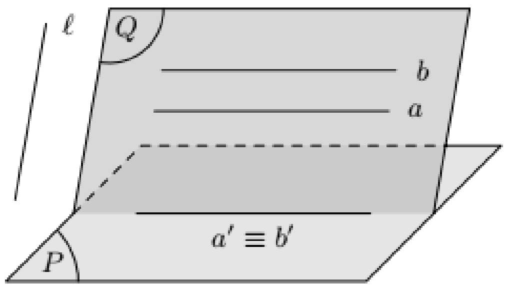
Tính chất 1:

- Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự ba điểm đó.
- Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng; biến tia thành tia; biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.

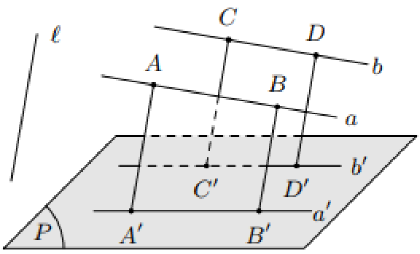
Tính chất 2:

- Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau

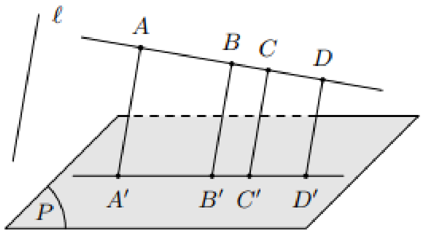




- Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.



$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$



$$\frac{AB}{CD}=\frac{A'B'}{C'D'}$$

Chú ý: Đối với hình chiếu song song của đường tròn, người ta chứng minh được rằng: Hình chiếu song song của một đường tròn trên một mặt phẳng theo phương ℓ cho truớc là một đuờng elip hoặc một đường tròn, hoặc đặc biệt có thể là một đoạn thẳng.

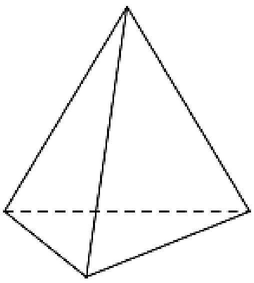
2 Hình biểu diễn của một hình học không gian

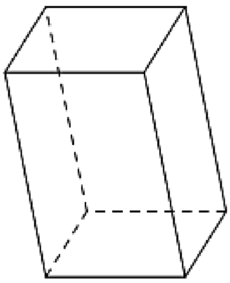
Định nghĩa: Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của hình H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.

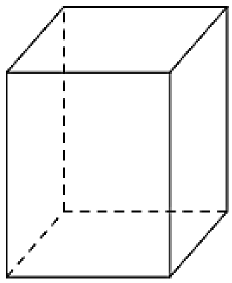
Muốn vẽ đúng hình biểu diễn của một hình không gian ta phải áp dụng các tính chất của phép chiếu song song.

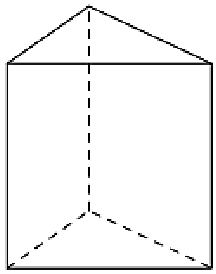
3 Hình biểu diễn của một số hình khối đơn giản

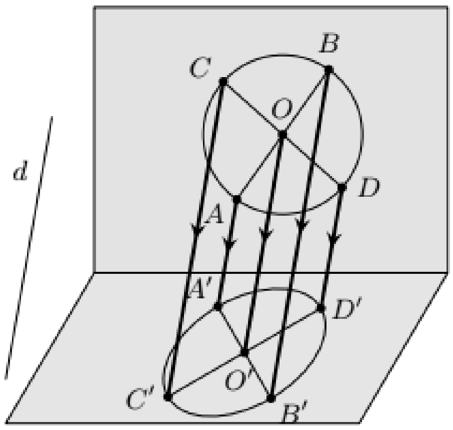
Các hình sau đây thường được sử dụng làm hình biểu diễn của: hình tứ diện (Hình a); hình hộp (Hình b); hình hộp chữ nhật (Hình c); hình lăng trụ tam giác (Hình d).


a)


b)


c)


d)



- Một tam giác bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một tam giác có dạng tuỳ ý cho trước (có thể là tam giác đều, tam giác cân, tam giác vuông, ...).
- Một hình bình hành bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn của một hình bình hành tuỳ ý cho trước (có thể là hình bình hành, hình vuông, hình thoi, hình chữ nhật, ...).
- Một hình thang bất kì bao giờ cũng có thể coi là hình biểu diễn cho một hình thang tuỳ ý cho trước, sao cho tỉ số độ dài hai đáy của hình biểu diễn phải bằng tỉ số độ dài hai đáy của hình thang ban đầu.
- Ta thường dùng đường elip làm hình biểu diễn của đường tròn, tâm của elip biểu diễn cho tâm của đường tròn.

Phép chiếu song song nói chung không giữ nguyên tỉ số của hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song (hay không cùng nằm trên một đường thẳng) và không giữ nguyên độ lớn của một góc. Từ đó suy ra nếu trên hình H có hai đoạn thẳng không nằm trên hai đường thẳng song song thì tỉ số của chúng không nhất thiết phải giữ nguyên trên hình biểu diễn. Cũng như vậy, độ lớn của một góc trên hình H không nhất thiết được giữ nguyên trên hình biểu diễn.

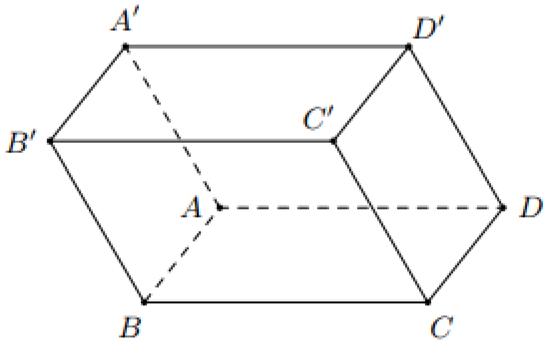
B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Hình biểu diễn của một hình không gian

Phương pháp: Sử dụng phần lý thuyết đã nêu

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định ảnh của các điểm A', B', C', D' qua phép chiếu song song lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương $A'A$.



Bài tập 2: Cho mặt phẳng (P) có đoạn thẳng AB và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P). Giả sử đường thẳng AB không song song với ℓ. Nêu cách xác định hình chiếu song song của đoạn thẳng AB trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ.

Bài tập 3: Cho mặt phẳng (P), tam giác ABC và đường thẳng ℓ cắt mặt phẳng (P) sao cho các đường thẳng AB, BC, CA đều không song song hoặc trùng với đường thẳng ℓ. Xác định hình chiếu song song của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) theo phương ℓ trong mỗi trường hợp sau:

a) Mặt phẳng (ABC) không song song với ℓ

b) Mặt phẳng (ABC) song song hoặc chứa ℓ

Bài tập 4: Nếu tam giác $A'B'C'$ là hình chiếu của tam giác ABC qua một phép chiếu song song thì tam giác ABC có phải là hình chiếu của tam giác $A'B'C'$ qua một phép chiếu song song hay không? Hãy giải thích.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Qua phép chiếu song song, tính chất nào không được bảo toàn?
A. Chéo nhau. **B.** Đồng quy. **C.** Song song. **D.** Thẳng hàng.

Câu 2: Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?
A. Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thảnh đoạn thẳng.
B. Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành hai đường thẳng song song.
C. Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

Câu 3: Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng a và b có hình chiếu là hai đường thẳng song song a' và b'. Khi đó:
A. a và b phải song song với nhau.
B. a và b phải cắt nhau.
C. a và b có thể chéo nhau hoặc song song với nhau.
D. a và b không thể song song.

Câu 4: Qua phép chiếu song song lên mặt phẳng (P), hai đường thẳng chéo nhau a và b có hình chiếu là 2 đường thẳng a' và b'. Mệnh đề nào sau đây đúng?
A. a' và b' luôn cắt nhau.
B. a' và b' có thể trùng nhau.
C. a' và b' không thể song song.
D. a' và b' có thể cắt nhau hoặc song song với nhau.

Câu 5: Phép chiếu song song theo phương l không song song với a hoặc b, mặt phẳng chiếu là (P), hai đường thẳng a và b biến thành a' và b'. Quan hệ nào giữa a và b không được bảo toàn trong phép chiếu song song?
A. Cắt nhau. **B.** Trùng nhau. **C.** Song song. **D.** Chéo nhau.

Câu 6: Qua phép chiếu song song, trong các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?
A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.
B. Một đường thẳng có thể trùng với hình chiếu của nó.
C. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể trùng nhau.
D. Một tam giác bất kỳ đều có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

Câu 7: Phép chiếu song song biến ba đường thẳng song song
A. Thành ba đường thẳng đôi một song song với nhau.
B. Thành một đường thẳng.
C. Thành hai đường thẳng song song.
D. Thành một đường thẳng hoặc hai đường thẳng song song hoặc thành ba đường thẳng đôi một song song với nhau.

Câu 8: Qua phép chiếu song song, các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?
A. Một đường thẳng luôn cắt hình chiếu của nó.

B. Một tam giác bất kỳ đề có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác cân.

C. Một đường thẳng có thể song song với hình chiếu của nó

D. Hình chiếu song song của hai đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

Câu 9: Qua phép chiếu song song, các mệnh đề sau mệnh đề nào sai?

A. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể song song với nhau.

B. Một tam giác bất kỳ đề có thể xem là hình biểu diễn của một tam giác vuông.

C. Một đường thẳng có thể cắt hình chiếu của nó.

D. Hình chiếu song song của hai đường thẳng cắt nhau có thể trùng nhau.

Câu 10: Qua phép chiếu song song, mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hình chiếu song song của 2 đường thẳng chéo nhau có thể song song với nhau.

B. Hình chiếu song song của 2 đường thẳng cắt nhau thì song song.

C. Hình chiếu song song của 1 hình vuông là 1 hình vuông.

D. Hình chiếu song song của 1 lục giác đều là 1 lục giác đều.

Câu 11: Qua phép chiếu song song, mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Hình chiếu song song của 2 đường thẳng cắt nhau là 2 đường thẳng song song.

B. Hình chiếu song song của 1 hình bình hành là 1 hình bình hành.

C. Phép chiếu song song biến 1 tam giác thành 1 tam giác nếu mặt phẳng chứa tam giác không cùng phương với phương chiếu.

D. Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của 2 đoạn thẳng.

Câu 12: Hình chiếu của hình chữ nhật không thể là hình nào trong các hình sau?

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình thoi.

Câu 13: Hình chiếu của hình vuông không thể là hình nào trong các hình sau?

A. Hình vuông. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình thang. **D.** Hình thoi.

Câu 14: Hình chiếu song song của hình thang $ABCD$ không thể là hình nào dưới đây?

A. Hình bình hành. **B.** Hình tam giác cân.

C. Đoạn thẳng. **D.** Bốn điểm thẳng hàng.

Câu 15: Qua phép chiếu song song, khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình tam giác.

B. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một đoạn thẳng.

C. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một hình chóp cụt.

D. Hình chiếu song song của một hình chóp cụt có thể là một điểm.

Câu 16: Cho 4 diểm không đồng phẳng A,B,C,D có hình chiếu song song lên mặt phẳng (P) lần lượt là 4 điểm A',B',C',D'. Những khẳng định nào sau đây không xảy ra?

A. A',B',C',D' là 4 dỉnh của 1 hình bình hành.

B. D' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$.

C. D' là trung điểm cạnh $A'B'$.

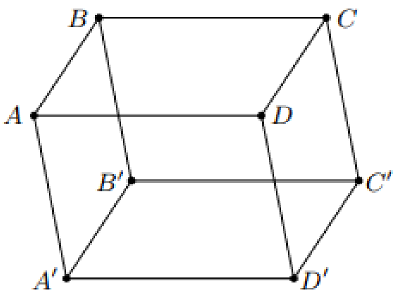
D. Hai điểm B',C' nằm giữa 2 điểm A' và D'.

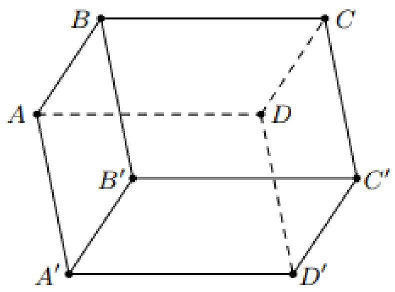
Câu 17: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, qua phép chiếu song song đường thẳng CC', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến M thành M'. Trong đó M là trung điểm của BC. Chọn mệnh đề đúng?

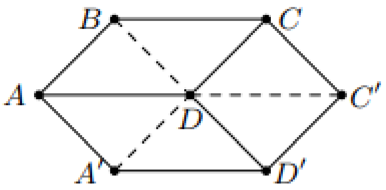
A. M' là trung điểm của $A'B'$. **B.** M' là trung điểm của $B'C'$.

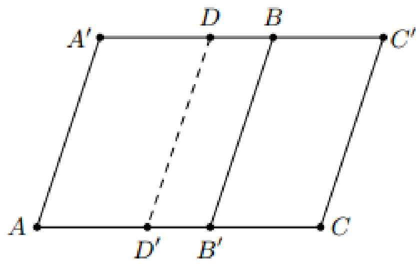
C. M' là trung diểm của $A'C'$. **D.** Cả ba đáp án trên đều sai.

Câu 18: Hình vẽ nào sau đây không phải là hình biểu diễn của hình hộp?

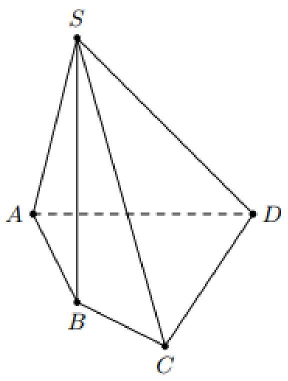
A. 

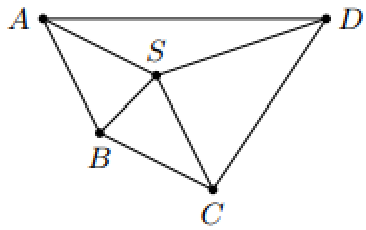
B. 

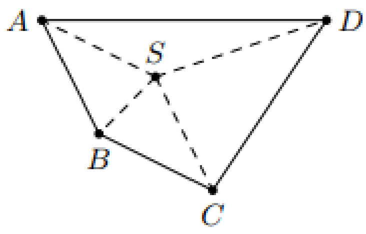
C. 

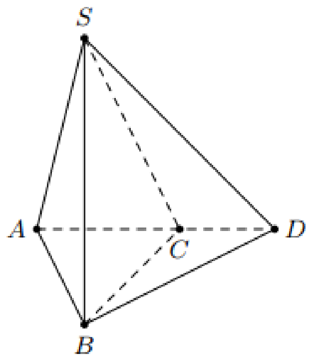
D. 

Câu 19: Hình vẽ nào sau đây không phải là hình biểu diễn của hình chóp tứ giác $S.ABCD$?

A. 

B. 

C. 

D. 

Câu 20: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, gọi I, I' lần lượt là trung điểm của $AB, A'B'$. Qua phép chiếu song song đường thẳng AI', mặt phẳng chiếu $(A'B'C')$ biến I thành điểm nào sau đây?

A. A'. **B.** B'. **C.** C'. **D.** I'.

Câu 21: Cho tam giác ABC ở trong mặt phẳng (α) và phương l. Biết hình chiếu (theo phương l) của tam giác ABC lên mặt phẳng (P) là một đoạn thẳng. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $(\alpha) \mathbin{//} (P)$.

B. $(\alpha) \equiv (P)$.

C. $(\alpha) \mathbin{//} l$ hoặc $(\alpha) \supset l$.

D. A, B, C đều sai.

Câu 22: Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình bình hành.

B. Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình vuông.

C. Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là hình thoi.

D. Hình chiếu song song của hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ theo phương AA' lên mặt phẳng $(ABCD)$ là một tam giác.

Câu 23: Nếu đường thẳng a cắt mặt phẳng chiếu (P) tại điểm A thì hình chiếu của a sẽ là

A. điểm A.
B. trùng với phương chiếu.
C. đường thẳng đi qua A.
D. đường thẳng đi qua A hoặc chính A.

Câu 24: Giả sử tam giác ABC là hình biểu diễn của một tam giác đều. Hình biểu diễn của tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều là

A. giao điểm của hai đường trung tuyến của tam giác ABC.
B. giao điểm của hai đường trung trực của tam giác ABC.
C. giao điểm của hai đường đường cao của tam giác ABC.
D. giao điểm của hai đường phân giác của tam giác ABC.

Câu 25: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC. Hình chiếu song song của điểm M theo phương AB lên mặt phẳng (SAD) là điểm nào sau đây?

A. S. **B.** Trung điểm của SD.
C. A. **D.** D.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Hình chiếu song song của điểm A theo phương AB lên mặt phẳng (SBC) là điểm nào sau đây?

A. S. **B.** Trung điểm của BC.
C. B. **D.** C.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Xét tính đúng sai trong các khẳng định sau. Nếu khẳng định đó sai thì hãy phát biểu lại cho đúng.

a) Hình biểu diễn của một hình bình hành là một hình bình hành hoặc là một đoạn thẳng.

b) Hình biểu diễn của một hình chữ nhật là một hình chữ nhật hoặc là một đoạn thẳng.

c) Hình biểu diễn của một hình vuông là một hình vuông hoặc là một đoạn thẳng.

d) Hình biểu diễn của một hình thoi là một hình thoi hoặc là một đoạn thẳng.

Câu 2: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $AA' \parallel CC'$

b) A' hình chiếu của A trên mặt phẳng $(A'B'C')$ qua phép chiếu song song theo phương CC'.

c) Gọi M là một điểm trên đoạn thẳng AB. Hình chiếu của M trên mặt phẳng $(A'B'C')$ qua phép chiếu song song theo phương BB' là điểm $M' \in A'B'$

d) Gọi O là tâm của hình bình hành $BCC'B'$. Ảnh của O qua phép chiếu song song theo phương AA' trên mặt phẳng $(A'B'C')$ là trung điểm của $B'C'$.

Câu 3: Cho các đoạn thẳng và đường thẳng không song song hoặc không trùng với phương chiếu. Cho biết tính đúng sai của các mệnh đề sau, nếu mệnh đề sai thì phát biểu lại cho đúng.

a) Phép chiếu song song bảo toàn thứ tự ba điểm thẳng hàng.

b) Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng.

c) Hình chiếu của hai đường thẳng song song là hai đường thẳng song song hoặc trùng nhau.

d) Hình chiếu song song của một đường thẳng là một đường thẳng.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho $MA = 2MS$. Một phép chiếu song song theo phương MO lên mặt phẳng $(ABCD)$ biến điểm S thành điểm N.

a) N là hình chiếu song song của S lên mặt phẳng $(ABCD)$ theo phương OM.

b) $\frac{AO}{AN} = \frac{1}{3}$

c) $\frac{AN}{AC} = 4$

d) $\frac{CN}{CA} = \frac{1}{4}$

Câu 5: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Điểm I và I' lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB và $A'B'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $AI' \parallel IB'$

b) Hình chiếu song song của I trên mặt phẳng $(A'B'C')$ phương $A'I$ là điểm C'.

c) Trong mặt phẳng $(A'B'C')$ vẽ hình bình hành $A'C'MI'$ nên $ACMI'$ là hình bình hành.

d) M là hình chiếu song song của C theo phương AI' trên mặt phẳng $(A'B'C')$.

-----------------HẾT-----------------

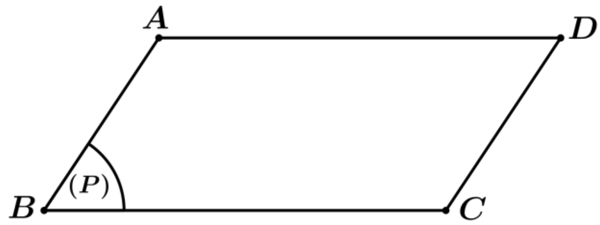
CHƯƠNG 4 QUAN HỆ SONG SONG TRONG KHÔNG GIAN

BÀI 01 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

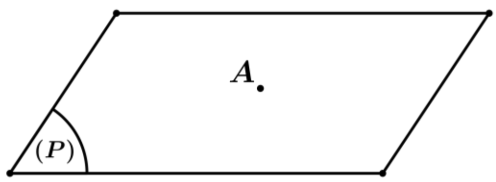
1 Khái niệm mở đầu

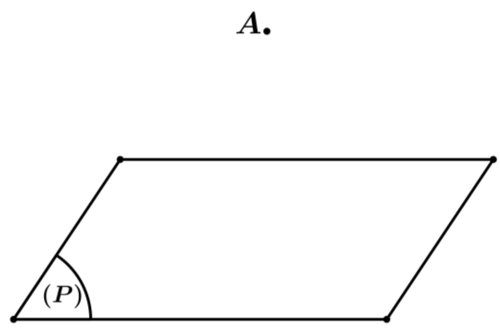
Mặt phẳng: Người ta thường biểu diễn một mặt phẳng bằng một hình bình hành và dùng các chữ cái đặt trong dấu ngoặc đơn để đặt tên cho mặt phẳng ấy. Ví du: mặt phẳng (P), mặt phẳng (Q), mặt phẳng (α), mặt phẳng (β),…



Điểm thuộc mặt phẳng: Với mỗi điểm A và mặt phẳng (P), chỉ xảy ra một trong hai khả năng sau:

- Điểm A thuộc mặt phẳng (P), ta kí hiệu $A \in (P)$
- Điểm A không thuộc mặt phẳng (P) hay A nằm ngoài (P), ta kí hiệu $A \notin (P)$





Hình biểu diễn của một hình trong không gian:

a) Hình được vẽ trong mặt phẳng để giúp ta hình dung được về một hình trong không gian gọi là hình biểu diễn của hình không gian đó.

b) Quy tắc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian: Để việc vẽ hình biểu diễn của một hình trong không gian được thuận lợi và thống nhất, ta quy ước như sau:

- Đường thẳng được biểu diễn bởi đường thẳng. Đoạn thẳng được biểu diễn bởi đoạn thẳng.
- Hai đường thẳng song song (hoặc cắt nhau) được biểu diễn bởi đường thẳng song song (hoặc cắt nhau).
- Hình biểu diễn giữ nguyên tính liên thuộc giữa điểm với đường thẳng hoặc với đoạn thẳng.
- Những đường nhìn thấy được vẽ bằng nét liền, những đường không nhìn thấy được vẽ bằng nét đứt.

2 Các tính chất thừa nhận của hình học không gian

Do thực tiễn, kinh nghiệm và quan sát, người ta thừa nhận một số tính chất sau của hình học không gian

- **Tính chất 1:** Có một và chỉ một đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.
- **Tính chất 2:** Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.
- **Tính chất 3:** Tồn tại bốn điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.
- **Tính chất 4:** Nếu một đường thẳng có hai điểm phân biệt cùng thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.
- **Tính chất 5:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng còn có một điểm chung khác nữa.

  Nhận xét: Nếu hai mặt phẳng phân biệt có một điểm chung thì chúng có một đường thẳng chung đi qua điểm chung ấy. Đường thẳng đó được gọi là giao tuyến của hai mặt phẳng.
- **Tính chất 6:** Trên mỗi mặt phẳng các, kết quả đã biết trong hình học phẳng đều đúng.

3 Một số cách xác định mặt phẳng

Định lý 1: Cho điểm A không thuộc đường thẳng d. Khi đó qua điểm A và đường thẳng d có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu mp $\left(A,d\right)$ hoặc $\left(A,d\right)$.

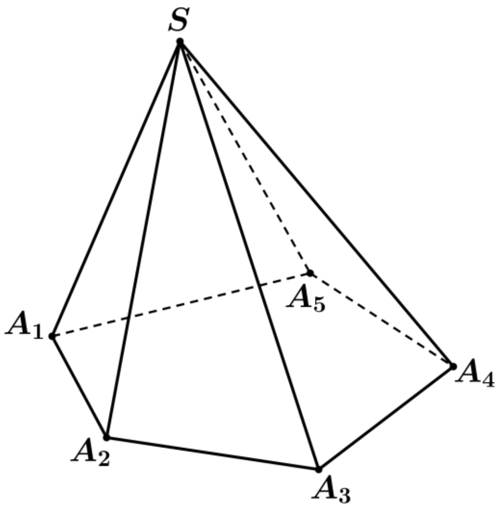
Định lý 2: Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau. Khi đó qua a và b có một và chỉ một mặt phẳng, kí hiệu là mp $\left(a,b\right)$.

Một mặt phẳng hoàn toàn xác định khi biết:

- Nó đi qua ba điểm không thẳng hàng.
- Nó đi qua một điểm và một đường thẳng không đi qua điểm đó.
- Nó chứa hai đường thẳng cắt nhau.

4 Hình chóp và hình tứ diện

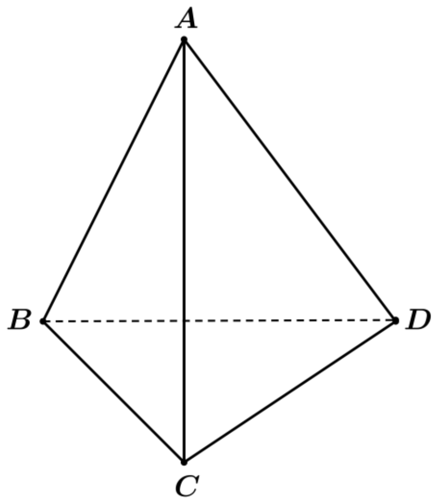
Hình chóp: Trong mặt phẳng $\left(\alpha\right)$ cho đa giác lồi $A_1A_2...A_n$ $\left(n\geq 3\right)$. Lấy điểm S nằm ngoài $\left(\alpha\right)$. Lần lượt nối S với các đỉnh $A_1,A_2,...,A_n$ ta được n tam giác $SA_1A_2,SA_2A_3,...,SA_nA_1$. Hình gồm đa giác $A_1A_2...A_n$ và n tam giác $SA_1A_2,SA_2A_3,...,SA_nA_1$ được gọi là hình chóp, kí hiệu là $S.A_1A_2...A_n$



Ta gọi S là đỉnh, đa giác $A_1A_2...A_n$ là đáy, các đoạn $SA_1, SA_2, ..., SA_n$ là các cạnh bên, $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$ là các cạnh đáy, các tam giác $SA_1A_2, SA_2A_3, ..., SA_nA_1$ là các mặt bên.

Nếu đáy của hình chóp là một tam giác, tứ giác, ngũ giác,…thì hình chóp tương ứng gọi là hình chóp tam giác, hình chóp tứ giác, hình chóp ngũ giác,…

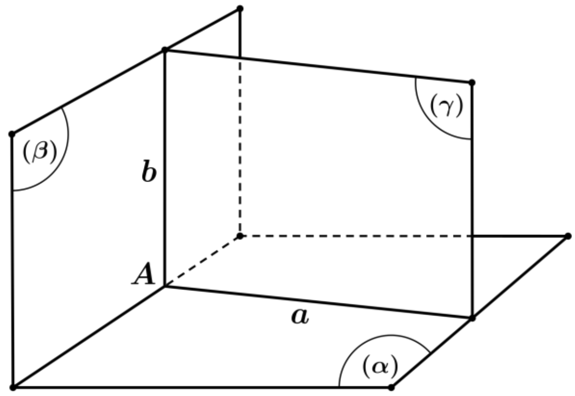
Tứ diện: Cho bốn điểm A, B, C, D không cùng nằm trong một mặt phẳng. Hình gồm bốn tam giác ABC, ABD, ACD và BCD được gọi là hình tứ diện $ABCD$ (hay gọi tắt là tứ diện), kí hiệu là $ABCD$.



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng

Phương pháp: Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng, ta tìm hai điểm chung của chúng. Đường thẳng đi qua hai điểm chung đó là giao tuyến.



Lưu ý: Điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β) thường được tìm như sau:

- Tìm hai đường thẳng a,b lần lượt thuộc (α) và (β), đồng thời chúng cùng nằm trong mặt phẳng (γ) nào đó; giao điểm $M = a \cap b$ là điểm chung của (α) và (β).

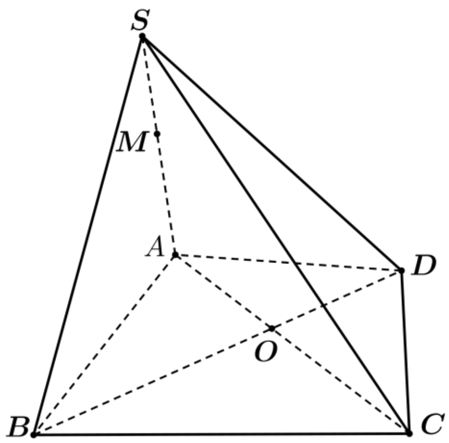
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song, điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau đây:

a) (SAC) và (SBD) b) (SAC) và (MBD).

c) (MBC) và (SAD) d) (SAB) và (SCD).

Lời giải



a) Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$

Lại có $S \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) $O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (MBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (MBD)$.

Và $M \in (SAC) \cap (MBD) \Rightarrow OM = (SAC) \cap (MBD)$.

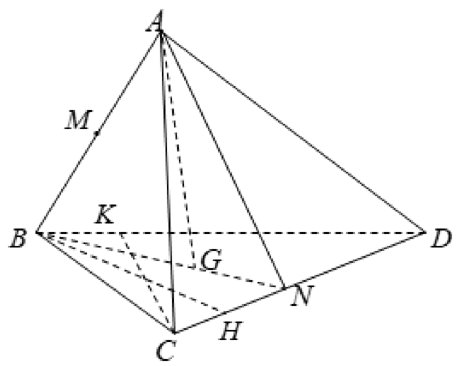
c) Trong $(ABCD)$ gọi $F = BC \cap AD \Rightarrow \begin{cases} F \in BC \subset (MBC) \\ F \in AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow F \in (MBC) \cap (SAD)$

Và $M \in (MBC) \cap (SAD) \Rightarrow FM = (MBC) \cap (SAD)$

d) Trong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$ ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Bài tập 2: Cho tứ diện $ABCD$. G là trọng tâm tam giác BCD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Lời giải



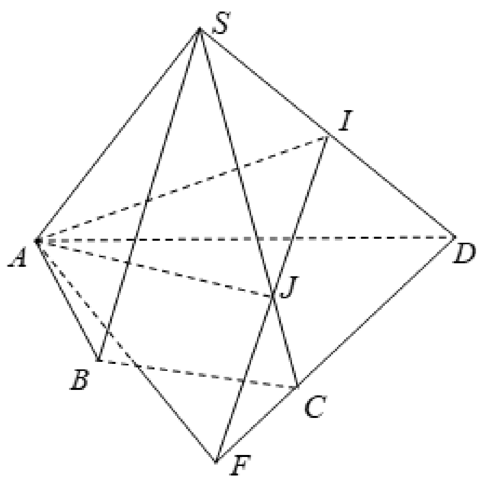
Ta có: A là điểm chung thứ nhất của (ACD) và (GAB)

Mặt khác: G là trọng tâm tam giác BCD, N là trung điểm CD nên $N \in BG$ nên N là điểm chung thứ hai của (ACD) và (GAB).

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB) là AN.

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi I là trung điểm của SD, J là điểm trên SC và không trùng trung điểm SC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (AIJ).

Lời giải



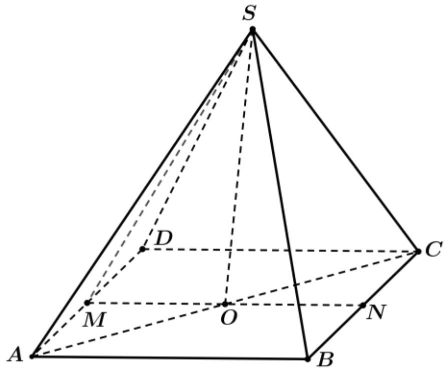
Ta có: A là điểm chung thứ nhất của $(ABCD)$ và (AIJ)

Hai đường thẳng IJ và CD cắt nhau tại F, còn IJ không cắt BC, AD, AB nên F là điểm chung thứ hai của $(ABCD)$ và (AIJ).

Vậy giao tuyến của $(ABCD)$ và (AIJ) là AF.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).

Lời giải



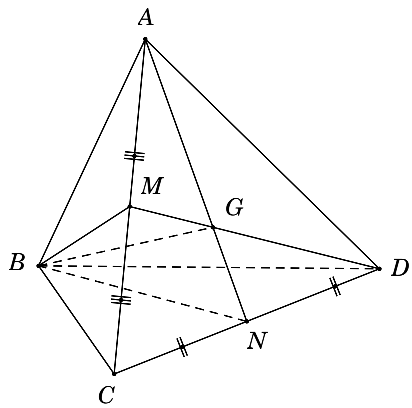
Ta có: S là điểm chung thứ nhất của (SMN) và (SAC).

Mặt kh$O$ là giao điểm của AC và MN nên $O \in AC, O \in MN$ do đó O là điểm chung thứ hai của (SMN) và (SAC).

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là SO.

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MBD) và (ABN)

Lời giải



B là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN).

Vì M, N lần lượt là trung điểm của AC, CD nên suy ra AN, DM là hai trung tuyến của tam giác ACD. Gọi $G = AN \cap DM$

$\Rightarrow \begin{cases} G \in AN \subset (ABN) \Rightarrow G \in (ABN) \\ G \in DM \subset (MBD) \Rightarrow G \in (MBD) \end{cases} \Rightarrow G$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (MBD) và (ABN). Vậy $(ABN) \cap (MBD) = BG$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết điều nào sau đây?

A. Một đường thẳng và một điểm thuộc nó. **B.** Ba điểm mà nó đi qua.

C. Ba điểm không thẳng hàng. **D.** Hai đường thẳng thuộc mặt phẳng.

Lời giải

Một mặt phẳng hoàn toàn được xác định nếu biết ba điểm không thẳng hàng.

Câu 2: Trong các tính chất sau, tính chất nào **không** đúng?

A. Có hai đường thẳng phân biệt cùng đi qua hai điểm phân biệt cho trước.

B. Tồn tại 4 điểm không cùng thuộc một mặt phẳng.

C. Có một và chỉ một mặt phẳng đi qua ba điểm không thẳng hàng.

D. Nếu một đường thẳng đi qua hai điểm thuộc một mặt phẳng thì mọi điểm của đường thẳng đều thuộc mặt phẳng đó.

Lời giải

Có hai đường thẳng phân biệt cùng đi qua hai điểm phân biệt cho trước là không đúng.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **đúng**?

A. Hai đường thẳng phân biệt không song song thì cheo nhau.

B. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.

C. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.

D. Hai đường thẳng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng phân biệt thì chéo nhau.

Lời giải

Đáp án C đúng, vì hai đường thẳng chéo nhau là hai đường thẳng không cùng nằm trong mặt phẳng nên chúng không có điểm chung.

Câu 4: Cho hai đường thẳng a và b chéo nhau. Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với b

A. $0.$. **B.** Vô số. **C.** $2.$. **D.** 1.

Lời giải

Trong không gian hai đường thẳng a và b chéo nhau, có một và chỉ một mặt phẳng đi qua a và song song với b.

Câu 5: Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số cạnh là

A. 9 cạnh. **B.** 10 cạnh. **C.** 6 cạnh. **D.** 5 cạnh.

Lời giải

Hình chóp có số cạnh bên bằng số cạnh đáy nên số cạnh của hình chóp là: $5+5=10$.

Câu 6: Một hình chóp có đáy là ngũ giác có số mặt và số cạnh là

A. 5 mặt, 5 cạnh. **B.** 6 mặt, 5 cạnh. **C.** 6 mặt, 10 cạnh. **D.** 5 mặt, 10 cạnh.

Lời giải

Hình chóp có đáy là ngũ giác có:

6 mặt gồm 5 mặt bên và 1 mặt đáy.

10 cạnh gồm 5 cạnh bên và 5 cạnh đáy.

Câu 7: Hình chóp có 16 cạnh thì có bao nhiêu mặt?

A. 10. **B.** 8. **C.** 7. **D.** 9.

Lời giải

Hình chóp $S.A_1A_2...A_n$, $(n \ge 3)$ có n cạnh bên và n cạnh đáy nên có $2n$ cạnh.

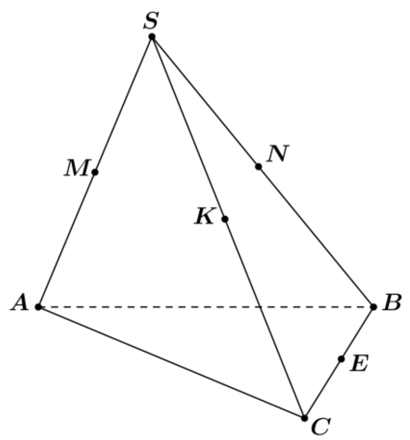
Ta có: $2n = 16 \Leftrightarrow n = 8$.

Vậy khi đó hình chóp có 8 mặt bên và 1 mặt đáy nên nó có 9 mặt.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, K, E lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC, BC. Bốn điểm nào sau đây đồng phẳng?

A. M, K, A, C. **B.** M, N, A, C. **C.** M, N, K, C. **D.** M, N, K, E.

Lời giải



Ta thấy M, K cùng thuộc mặt phẳng (SAC) nên bốn điểm $M; K; A; C$ đồng phẳng.

Câu 9: Trong không gian cho bốn điểm không đồng phẳng, có thể xác định nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng phân biệt từ các điểm đó?

A. 3. **B.** 4. **C.** 2. **D.** 6.

Lời giải

Trong không gian, bốn điểm không đồng phẳng tạo thành một hình tứ diện. Vì vậy xác định nhiều nhất bốn mặt phẳng phân biệt.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ với $ABCD$ là hình bình hành. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SAD) là

A. Đường thẳng SC. **B.** Đường thẳng SB. **C.** Đường thẳng SD. **D.** Đường thẳng SA.

Lời giải

Ta thấy $(SAC) \cap (SAD) = SA$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và BC. Giao tuyến của (SMN) và (SAC) là

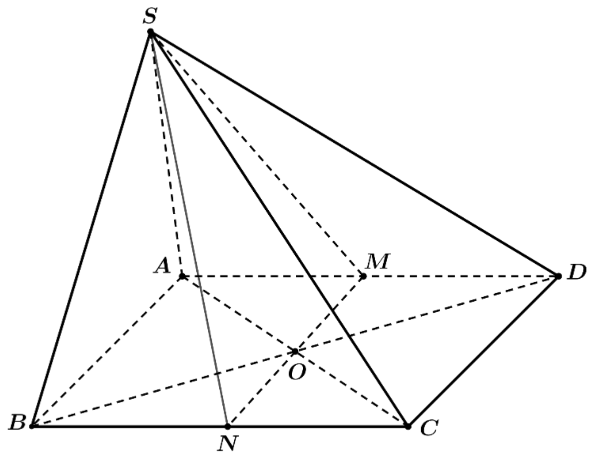
A. SK (K là trung điểm của AB).

B. SO (O là tâm của hình bình hành $ABCD$).

C. SF (F là trung điểm của CD).

D. SD.

Lời giải

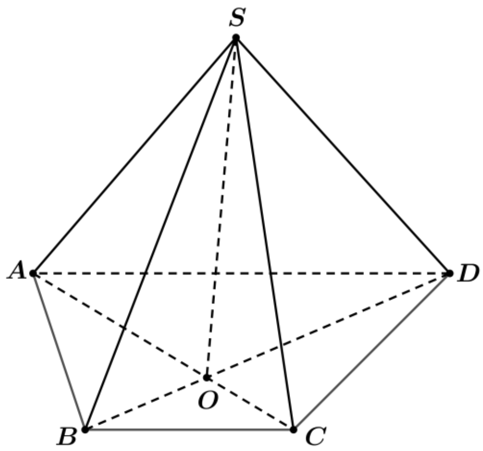


Gọi O là tâm hbh $ABCD$ $\Rightarrow O = AC \cap MN \Rightarrow SO = (SMN) \cap (SAC)$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, $AD = 2BC$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

A. SA. **B.** AC. **<u>C</u>.** SO. **D.** SD.

Lời giải



Ta có: $S \in (SAC) \cap (SBD)$ suy ra $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$.

Nên $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

Câu 13: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) là

A. SA. **<u>B</u>.** SB. **C.** SC. **D.** AC.

Lời giải

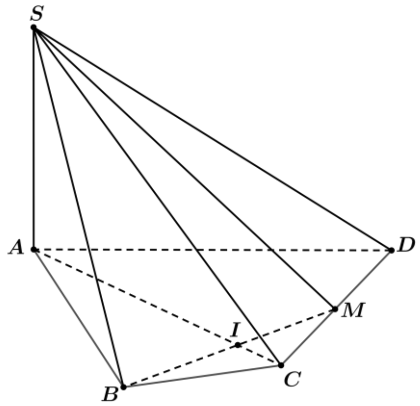
Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SBC) \\ B \in (SAB) \cap (SBC) \end{cases} \Rightarrow SB$ là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SBC).

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ ($AD // BC$). Gọi M là trung điểm của CD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là:

A. SP với P là giao điểm của AB và CD. **B.** SI với I là giao điểm của AC và BM.

C. SO với O là giao điểm của AC và BD. **D.** SJ với J là giao điểm của AM và BD.

Lời giải

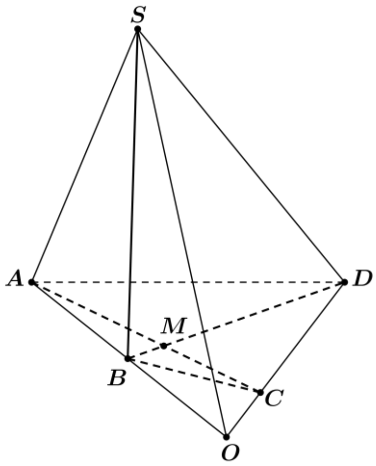


Giao tuyến của hai mặt phẳng (MSB) và (SAC) là SI với I là giao điểm của AC và BM.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$, biết AC cắt BD tại M, AB cắt CD tại O. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

A. SO. **B.** SM. **C.** SA. **D.** SC.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} O = AB \cap CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAB) \cap (SCD)$.

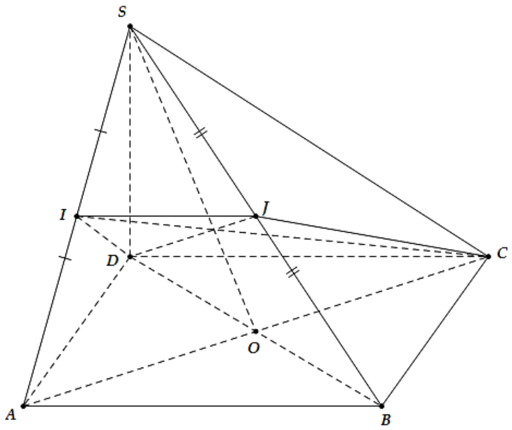
Lại có: $S \in (SAB) \cap (SCD); S \neq O$. Khi đó $(SAB) \cap (SCD) = SO$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của SA và SB. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $(SAB) \cap (IBC) = IB$. **B.** $IJCD$ là hình thang.

C. $(SBD) \cap (JCD) = JD$. **D.** $(IAC) \cap (JBD) = AO$ (O là tâm $ABCD$).

Lời giải

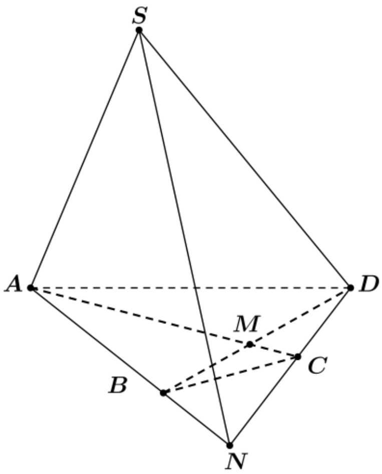


Ta có: $(IAC)\cap(JBD)=(SAC)\cap(SBD)=SO$.

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AC\cap BD=M$, $AB\cap CD=N$. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là:

A. SM. **B.** SA. **C.** MN. **D.** SN.

Lời giải



Ta có: S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Vì $AB\cap CD=N$ nên $\begin{cases} N\in AB\subset(SAB) \\ N\in CD\subset(SCD)\end{cases}$.

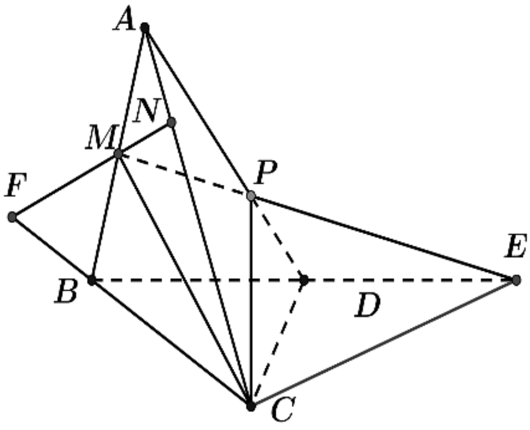
Do đó N là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng trên.

Vậy SN là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Câu 18: Cho tứ diện $ABCD$, M là trung điểm của AB, N là điểm trên AC mà $AN=\frac{1}{4}AC$, P là điểm trên đoạn AD mà $AP=\frac{2}{3}AD$. Gọi E là giao điểm của MP và BD, F là giao điểm của MN và BC. Khi đó giao tuyến của (BCD) và (CMP) là

A. CP. **B.** NE. **C.** MF. **D.** CE.

Lời giải



Ta có $C \in (BCD) \cap (CMP)$ (1).

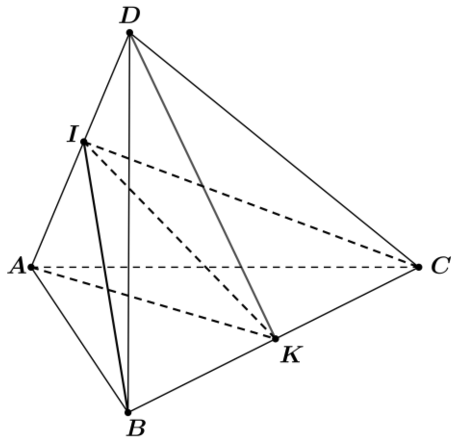
Lại có $BD \cap MP = E \Rightarrow \begin{cases} E \in BD \Rightarrow E \in (BCD) \\ E \in MP \Rightarrow E \in (CMP) \end{cases}$ (2).

Từ (1) và $(2) \Rightarrow (BCD) \cap (CMP) = CE$.

Câu 19: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi I, K lần lượt là trung điểm hai đoạn thẳng AD và BC. IK là giao tuyến của cặp mặt phẳng nào sau đây ?

A. (IBC) và (KBD). **B.** (IBC) và (KCD). **C.** (IBC) và (KAD). **D.** (ABI) và (KAD).

Lời giải



$\begin{cases} I \in AD \subset (KAD) \\ I \in (IBC) \end{cases} \Rightarrow I$ là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

$\begin{cases} K \in BC \subset (IBC) \\ K \in (KAD) \end{cases} \Rightarrow K$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (IBC) và (KAD).

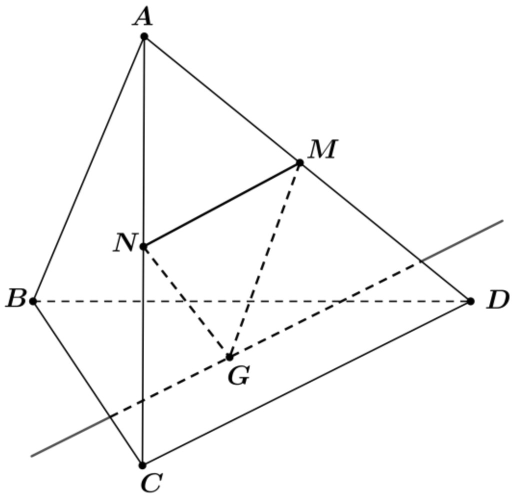
Vậy $(IBC) \cap (KAD) = IK$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và AC. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GMN) và (BCD) là đường thẳng:

A. qua M và song song với AB. **B.** Qua N và song song với BD.

C. qua G và song song với CD. **D.** qua G và song song với BC.

Lời giải

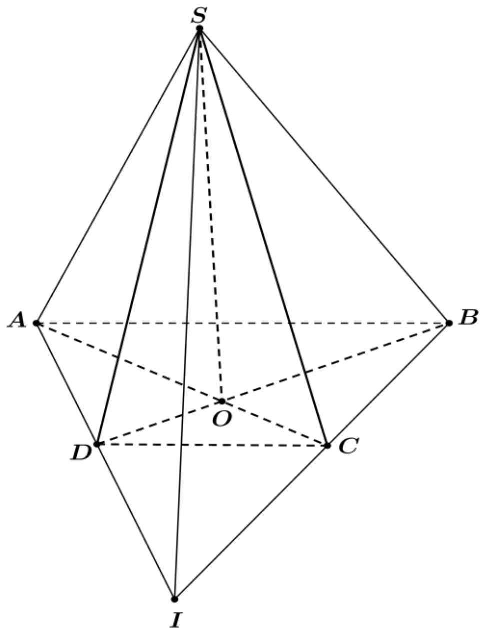


Ta có MN là đường trung bình tam giác ACD nên $MN // CD$.

Ta có $G \in (GMN) \cap (BCD)$, hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) lần lượt chứa DC và MN nên giao tuyến của hai mặt phẳng (GMN) và (BCD) là đường thẳng đi qua G và song song với CD.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB // CD)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO (O là giao điểm của AC và BD).

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI (I là giao điểm của AD và BC).

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) là đường trung bình của $ABCD$.

Lời giải

a) Đúng: Hình chóp $S.ABCD$ có 4 mặt bên: $(SAB),(SBC),(SCD),(SAD)$.

b) Đúng: S là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

$\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (SAC) và $(SBD) \longrightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

c) Đúng: Tương tự, ta có $(SAD) \cap (SBC) = SI$.

d) Sai: $(SAB) \cap (SAD) = SA$ mà SA không phải là đường trung bình của hình thang $ABCD$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$, biết AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F trong mặt phẳng đáy. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng EF nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$.

b) AB là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$.

c) SF là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD), SE là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

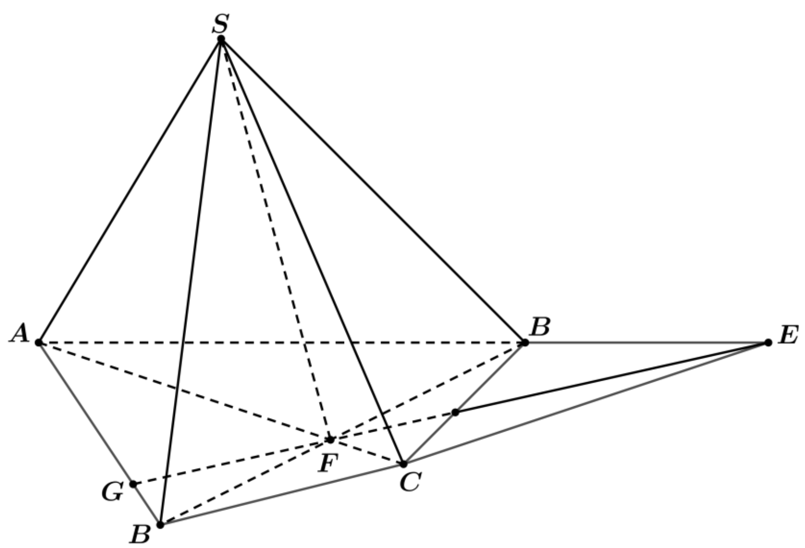
d) Gọi $G = EF \cap AD$ khi đó, SG giao tuyến của mặt phẳng (SEF) và mặt phẳng (SAD).

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $E = AB \cap CD \Rightarrow E \in AB, AB \subset (ABCD) \Rightarrow E \in (ABCD)$.

Tương tự: $F = AC \cap BD \Rightarrow F \in AC, AC \subset (ABCD) \Rightarrow F \in (ABCD)$. Vậy $EF \subset (ABCD)$.

b) Đúng: Dễ thấy A là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$, B cũng là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và $(ABCD)$. Suy ra $AB = (SAB) \cap (ABCD)$.



c) Sai: Tìm giao tuyến của (SAB) và (SCD):

Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

Ta có: $\begin{cases} E \in AB, AB \subset (SAB) \\ E \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow E \in (SAB) \cap (SCD)$. Vậy $SE = (SAB) \cap (SCD)$.

Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD):

Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Ta có: $\begin{cases} F \in AC, AC \subset (SAC) \\ F \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow F \in (SAC) \cap (SBD)$. Vậy $SF = (SAC) \cap (SBD)$.

d) Đúng: Tìm giao tuyến của (SEF) với (SAD):

Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SEF) và (SAD).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $G = EF \cap AD$.

Ta có: $\begin{cases} G \in EF, EF \subset (SEF) \\ G \in AD, AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow G \in (SEF) \cap (SAD)$. Vậy $SG = (SEF) \cap (SAD)$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC, M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC. Khi đó:

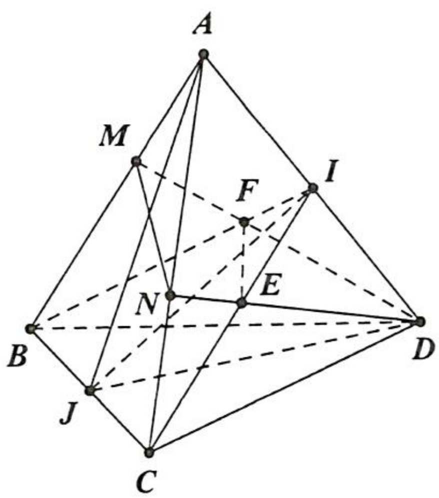
a) IJ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (JAD)$.

b) ND là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MND), (ADC)$.

c) BI là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BCI), (ABD)$.

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(IBC), (DMN)$ song song với đường thẳng IJ.

Lời giải



a) Đúng: Ta có: $I \in AD, AD \subset (JAD) \Rightarrow I \in (JAD) \Rightarrow IJ \subset (JAD)$;

$J \in BC, BC \subset (IBC) \Rightarrow J \in (IBC) \Rightarrow IJ \subset (IBC)$. Vậy $(IBC) \cap (JAD) = IJ$.

b) Đúng: ND là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MND),(ADC)$.

c) Đúng: BI là giao tuyến của hai mặt phẳng $(BCI),(ABD)$.

d) Sai: Gọi $E = DN \cap CI$ (trong (ACD)) và $F = DM \cap BI$ (trong (ABD)).

Ta có: $\begin{cases} E \in DN, DN \subset (DMN) \\ E \in IC, IC \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow E \in (DMN) \cap (IBC)\ (1)$

Tương tự: $\begin{cases} F \in DM, DM \subset (DMN) \\ F \in BI, BI \subset (IBC) \end{cases} \Rightarrow F \in (DMN) \cap (IBC)\ (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $(DMN) \cap (IBC) = EF$. Khi đó EF cắt IJ

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm trên cạnh AB, N là điểm thuộc cạnh AC sao cho MN không song song với BC. Gọi P là điểm nằm trong ΔBCD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $MN = (MNP) \cap (ABC)$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNP),(BCD)$ là đường thẳng cắt BC

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNP),(ABD)$ là đường thẳng cắt AB và DC

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNP),(ACD)$ là đường thẳng cắt AB và DC

Lời giải

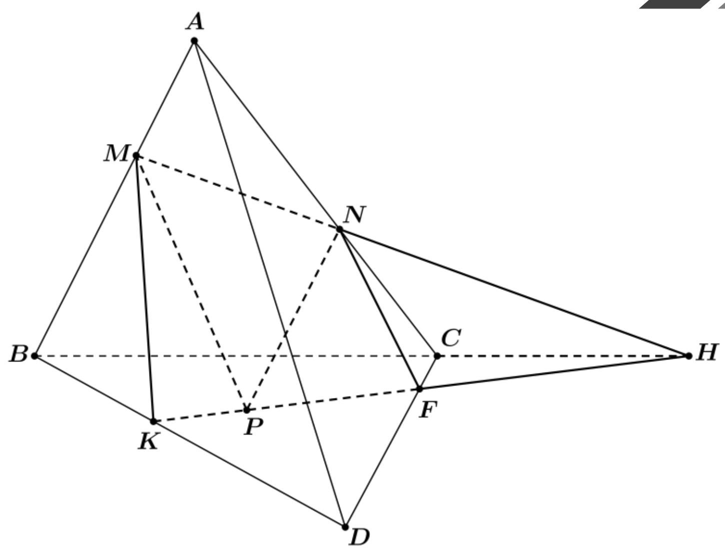
a) Đúng: $MN = (MNP) \cap (ABC)$

b) Đúng: Trong (ABC) gọi $H = MN \cap BC$.

Ta có: $\begin{cases} H \in MN \subset (MNP) \\ H \in BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (MNP) \cap (BCD)\ (1)$

Lại có: $\begin{cases} P \in (MNP) \\ P \in (BCD) \end{cases} \Rightarrow P \in (MNP) \cap (BCD)\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $HP = (MNP) \cap (BCD)$



c) Sai: Trong (BCD) gọi $K = HP \cap BD$

Ta có: $\begin{cases} K \in BD \subset (ABD) \\ K \in HP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow K \in (MNP) \cap (ABD)\ (1)$

Lại có: $\begin{cases} M \in (MNP) \\ M \in AB \subset (ABD) \end{cases} \Rightarrow M \in (MNP) \cap (ABD)\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $MK \in (MNP) \cap (ABD)$.

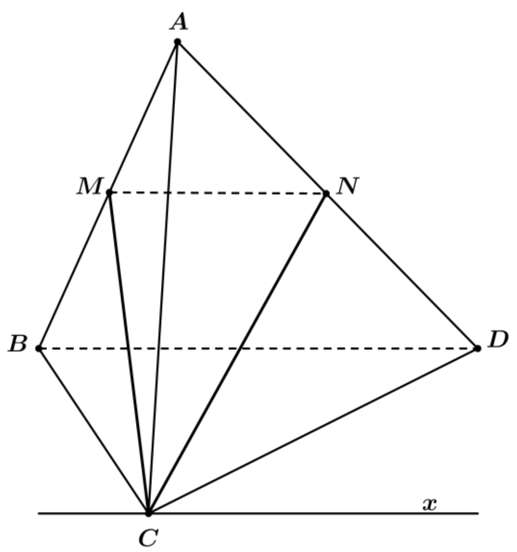
d) Sai: Trong (BCD) gọi $F = HK \cap DC$.

Trình bày tương tự như hai câu trên ta được $NF = (MNP) \cap (ACD)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD. Số điểm chung của hai mặt phẳng (BCD) và (CMN) là bao nhiêu?

Lời giải



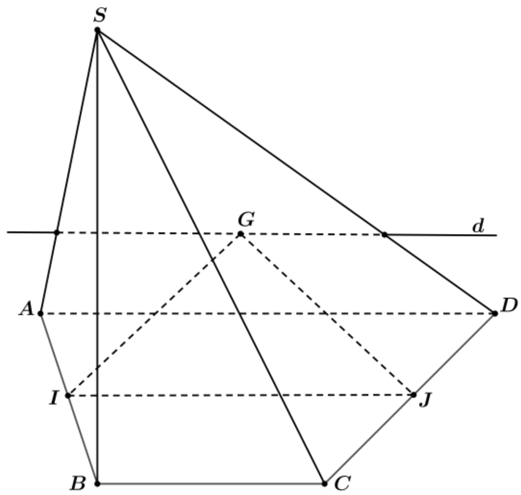
Ta có M,N lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD. Nên MN là đường trung bình tam giác ABD suy ra $MN // BD$ (1). Mặt khác: $C \in (BCD) \cap (CMN)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(BCD) \cap (CMN) = Cx$ với Cx là đường thẳng qua C và song song với các đường thẳng BD, MN.

Vậy Số điểm chung của hai mặt phẳng (BCD) và (CMN) là vô số.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC, G là trọng tâm ΔSAB. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG)

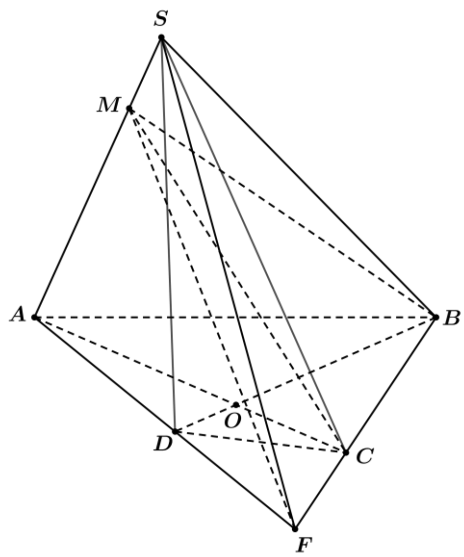
Lời giải



Ta có: G là điểm chung của hai mặt phẳng (SAB) và (IJG). Khi đó $AB \subset (SAB), IJ \subset (IJG)$ và $IJ // AB // DC \Rightarrow (SAB) \cap (IJG) = d$ đi qua G và song song với DC.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song. Gọi $O = AC \cap BD, F = BC \cap AD$. Điểm M thuộc cạnh SA, tìm giao tuyến (d) của cặp mặt phẳng (MBC) và (SAD)

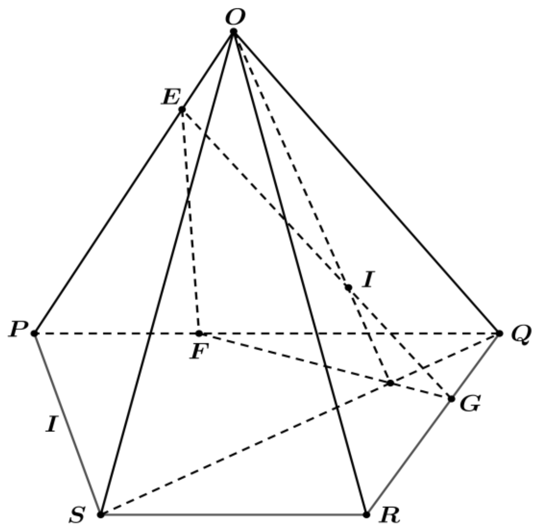
Lời giải



Ta có: $\begin{cases} M \in (SAD) \cap (MBC) \\ F \in (SAD) \cap (MBC)\ (F = AD \cap BC) \end{cases} \Rightarrow FM = (SAD) \cap (MBC)$.

Câu 4: Cho hình chóp $O.PQRS$, có đáy $PQRS$ là hình thang, đáy lớn PQ. Gọi E, F, G lần lượt là các điểm trên các cạnh OP, PQ, QR. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) với mặt phẳng (OPQ).

Lời giải

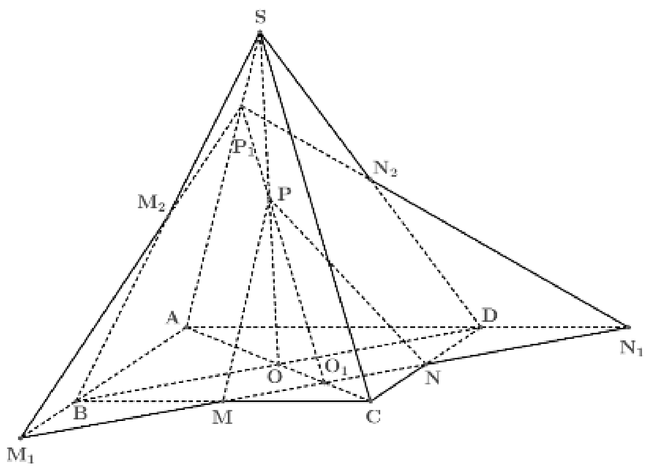


Ta có $\begin{cases} E \in (EFG) \\ E \in OP \subset (OPQ) \end{cases} \Rightarrow E \in (EFG) \cap (OPQ)$

Tương tự $\begin{cases} F \in (EFG) \\ F \in PQ \subset (OPQ) \end{cases} \Rightarrow F \in (EFG) \cap (OPQ)$. Vậy $(EFG) \cap (OPQ) = EF$.

Câu 5: Trong mặt phẳng (α) cho hình bình hành $ABCD$ tâm O, S là một điểm không thuộc (α). Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Đường thẳng MN cắt AB, AD, AC lần lượt tại M_1, N_1, O_1. Nối O_1P cắt SA tại P_1, nối M_1P_1 cắt SB tại M_2, nối N_1P_1 cắt SD tại N_2. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) với (SAD)

Lời giải



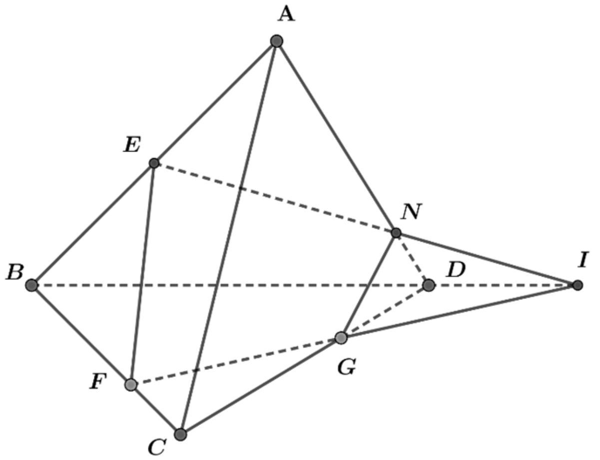
Ta có $\begin{cases} N_2 \in SD \subset (SAD) \\ N_2 \in P_1N_1 \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow N_2 \in (SAD) \cap (MNP)$.

$\begin{cases} P_1 \in SA \subset (SAD) \\ P_1 \in PO \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow P_1 \in (SAD) \cap (MNP)$.

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (MNP) là đường thẳng N_2P_1.

Câu 6: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng nhau và bằng a. Gọi E là trung điểm AB, F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF = 2FC$, G là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG = 2GD$. Gọi N là giao điểm của AD với mặt phẳng (EFG). Tính độ dài đoạn giao tuyến NG của mặt phẳng (EFG) với mặt phẳng (ACD) theo a.

Lời giải



Trong mặt phẳng (BCD) ta gọi $I = FG \cap BD$, trong mặt phẳng (ADB) ta gọi $N = IE \cap AD$.

Khi đó: $NG = (EFG) \cap (ACD)$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác BCD với ba điểm I, G, F thẳng hàng ta có:

$\frac{ID}{IB}.\frac{FB}{FC}.\frac{GC}{GD} = 1 \Rightarrow \frac{ID}{IB} = \frac{1}{4}$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác ABD với ba điểm I, N, E thẳng hàng ta có:

$\frac{ND}{NA}.\frac{EA}{EB}.\frac{IB}{ID} = 1 \Rightarrow \frac{ND}{NA} = \frac{1}{4} \Rightarrow ND = \frac{a}{5}$.

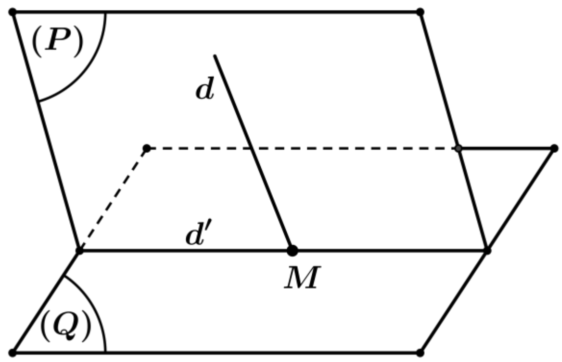
Áp dụng định lý Cosin vào tam giác NDG ta có: $NG^2 = ND^2 + DG^2 - 2.DN.DG.\cos 60°$

$= \frac{a^2}{25} + \frac{a^2}{9} - \frac{a^2}{15} = \frac{19a^2}{225} \Rightarrow NG = \frac{\sqrt{19}a}{15}$.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 2: Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Để tìm giao điểm của đường thẳng d và mặt phẳng (P) ta cần lưu ý một số trường hợp sau:



Trường hợp 1: Nếu trong (P) có sẵn một đường thẳng d' cắt d tại M, khi đó:

$$\begin{cases} M \in d \\ M \in d' \subset (P) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M \in d \\ M \in (P) \end{cases} \Rightarrow M = d \cap (P)$$

Trường hợp 2: Nếu trong (P) chưa có sẵn d' cắt d thì ta thực hiện theo các bước sau:

- **Bước 1:** Chọn một mặt phẳng (Q) chứa d
- **Bước 2:** Tìm giao tuyến $\Delta = (P) \cap (Q)$
- **Bước 3:** Trong (Q) gọi $M = d \cap \Delta$ thì M chính là giao điểm của $d \cap (P)$.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ giác $ABCD$ (không có cặp cạnh đối nào song song) nằm trong mặt phẳng (α). S là điểm không nằm trên (α).

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SAB) và (SCD).

b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của các cạnh SC và SD. Tìm giao điểm P của đường thẳng BN với mặt phẳng (SAC).

c) Gọi Q và R lần lượt là trung điểm của SA và SB. Chứng minh rằng bốn điểm M,N,Q,R đồng phẳng.

Lời giải

a) Giao tuyến của mặt phẳng (SAC) và (SBD): Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

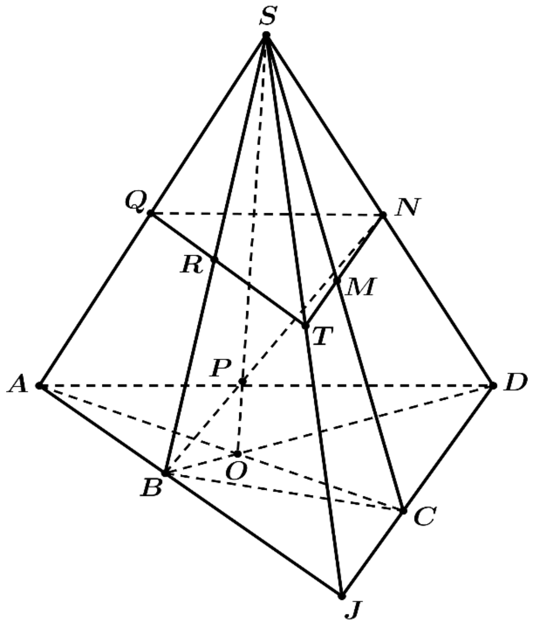
Ta có: $\begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in (SAC) \cap (SBD)$ (1)

Từ (1) suy ra S là điểm chung thứ nhất của (SAC) và (SBD)

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}O\in AC\\ AC\subset(SAC)\end{array}\right\}\Rightarrow O\in(SAC)\\ \left.\begin{array}{l}O\in BD\\ BD\subset(SBD)\end{array}\right\}\Rightarrow O\in(SBD)\end{array}\right\}\Rightarrow O\in(SAC)\cap(SBD)\ (2)$$

Từ (2) suy ra O là điểm chung thứ hai của (SAC) và (SBD).

Vậy $SO=(SAC)\cap(SBD)$.



Giao tuyến của (SAB) và (SCD): Gọi E là giao điểm của AB và CD. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}S\in(SAB)\\ S\in(SCD)\end{array}\right\}\Rightarrow S\in(SAB)\cap(SCD)\ (3)$$

Từ (3) suy ra S là điểm chung thứ nhất của (SAB) và (SCD).

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}E\in AB\\ AB\subset(SAB)\end{array}\right\}\Rightarrow E\in(SAB)\\ \left.\begin{array}{l}E\in CD\\ CD\subset(SCD)\end{array}\right\}\Rightarrow E\in(SCD)\end{array}\right\}\Rightarrow E\in(SAB)\cap(SCD)\ (4)$$

Từ (4) suy ra E là điểm chung thứ hai của (SAB) và (SCD).

Vậy $SE=(SAB)\cap(SCD)$.

b) Trong (SBD), hai đường thẳng SO, BN cắt nhau tại P, ta có:

$$\begin{cases}P\in BN\\ P\in SO\subset(SAC)\Rightarrow P\in(SAC)\end{cases}\Rightarrow P \text{ là giao điểm của } BN \text{ và } (SAC).$$

Vậy P là giao điểm cần tìm.

c) Chứng minh bốn điểm M,N,Q,R đồng phẳng:

Trong (SCD), gọi T là giao điểm của MN và SE. Ta có MN là đường trung bình của tam giác SCD nên $MN//CD$. Xét tam giác SDE, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} M//CD \\ N\ la\ trung\ diem\ cua\ SD \end{array}\right\} \Rightarrow T \text{ là trung điểm của } SE.$$

Tương tự, QR là đường trung bình của tam giác SAB nên $QR//AB$. Xét tam giác SAE, ta có:

$$\left.\begin{array}{l} QR//AB \\ Q\ la\ trung\ diem\ cua\ SA \end{array}\right\} \Rightarrow QR \text{ đi qua trung điểm } T \text{ của } SE.$$

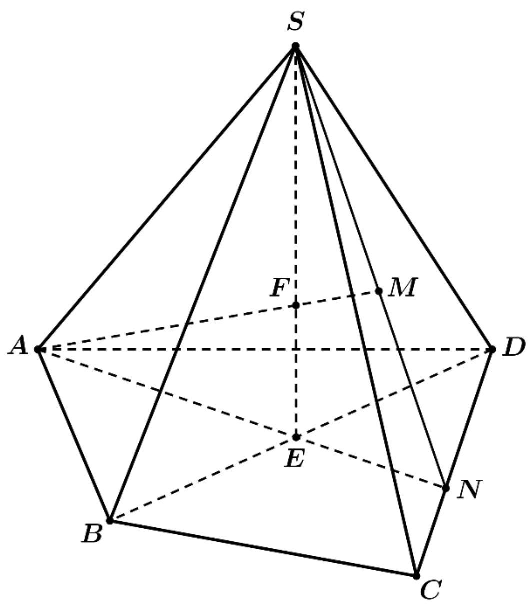
Như vậy, bốn điểm M,N,Q,R nằm trong mặt phẳng tạo bởi hai đường thẳng cắt nhau TN và TQ nên chúng đồng phẳng.

Bài tập 2: Trong mặt phẳng (α), cho tứ giác $ABCD$. Gọi S là điểm không thuộc (α), M là điểm nằm trong tam giác SCD.

a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD).

b) Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD).

Lời giải



a) Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAM) và (SBD):

Gọi N là giao điểm của SM và CD, gọi E là giao điểm của AN và BD.

Rõ ràng $(SAM)\equiv(SAN)$. Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} E\in AN \Rightarrow E\in(SAM) \\ E\in BD \Rightarrow E\in(SBD) \end{array}\right\} \Rightarrow E\in(SAM)\cap(SBD) \quad (1)$$

Mặt khác: $S\in(SAM)\cap(SBD) \qquad (2)$

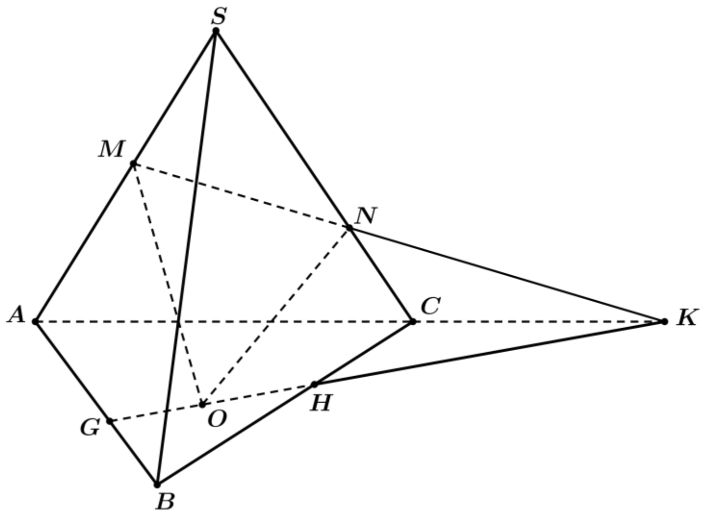
Từ (1) và (2) suy ra: $SE=(SAM)\cap(SBD)$.

b) Xác định giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD). Ta có:

$$\left.\begin{array}{l}(SAM)\supset AM\\(SAM)\cap(SBD)=SE\\F\in AM\cap SE\subset(SAM)\end{array}\right\}\Rightarrow F=AM\cap(SBD)$$

Bài tập 3: Cho tứ diện $SABC$. Trên cạnh SA lấy điểm M, trên cạnh SC lấy điểm N, sao cho MN không song song với AC. Cho điểm O nằm trong tam giác ABC. Tìm giao điểm của mặt phẳng (OMN) với các đường thẳng AC, BC và AB.

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAC): $MN\cap AC=\{K\}$ mà $MN\subset(OMN)$ nên $\{K\}=AC\cap(OMN)$.

Trong mặt phẳng (ABC): $OK\cap BC=\{H\}$, mà $OK\subset(OMN)$ nên $\{H\}=BC\cap(OMN)$.

Ta có: $OK\cap AB=\{G\}$, mà $OK\subset(OMN)$ nên $\{G\}=AB\cap(OMN)$.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$. Gọi E và F là hai điểm lần lượt nằm trên hai cạnh SB và CD.

a) Tìm giao điểm của EF với mặt phẳng (SAC).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (AEF) với các đường thẳng BC và SC.

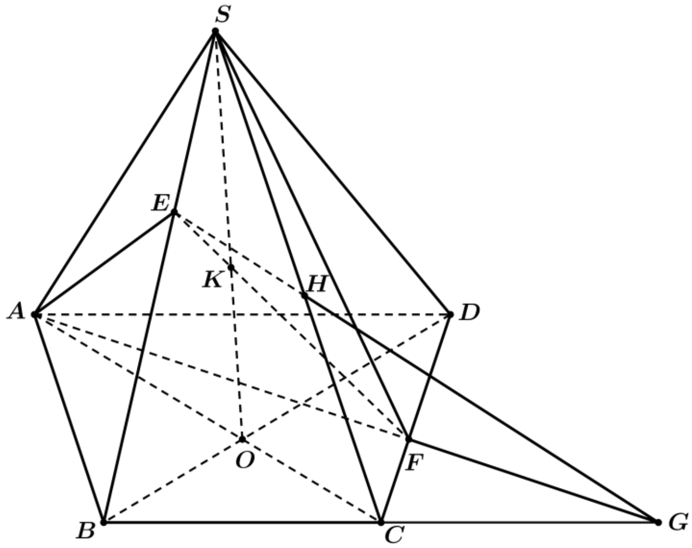
Lời giải

a) Ta có $EF\subset(SBF)$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $BF\cap AC=\{O\}$ suy ra $(SAC)\cap(SBF)=SO$.

Trong mặt phẳng (SBF) $EF\cap SO=\{K\}$ mà $SO\subset(SAC)$ suy ra $\{K\}=EF\cap(SAC)$.

b) Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $AF\cap BC=\{G\}$ mà $AF\subset(AEF)$ suy ra $\{G\}=BC\cap(AEF)$.



Khi đó: $(AEF) \equiv (AEG)$.

Trong mặt phẳng (SBC): $EG \cap SC = \{H\}$ mà $EG \subset (AEF)$ suy ra $\{H\} = SC \cap (AEF)$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ có AD và BC không song song với nhau. Lấy I thuộc SA sao cho $SA = 3IA$, J thuộc SC và M là trung điểm của SB.

a) Tìm giao tuyến của (SAD) và (SBC)

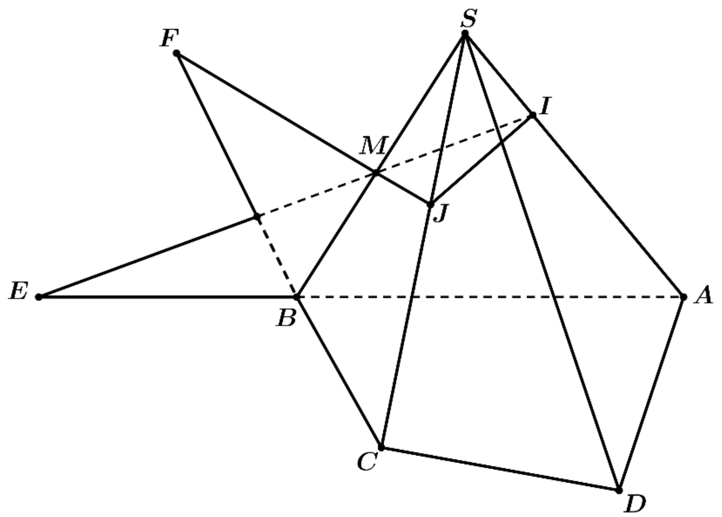
b) Tìm giao điểm E của AB và (IJM)

c) Tìm giao điểm F của BC và (IJM)

d) Tìm giao điểm N của SD và (IJM)

e) Gọi H là giao điểm của MN và BD. Chứng minh rằng H, E, F thẳng hàng.

Lời giải



a) O là giao điểm của và BC nên SO là giao tuyến của (SAD) và (SBC).

b) Trong (SAB) kẻ IM giao với AB tại E nên E là giao điểm của AB và (IJM).

c) Trong (SBC): MJ giao với BC tại F nên F là giao điểm của BC và (IJM).

d) Trong $(ABCD)$: EF giao với AD tại P.

Trong (SAD): IP giao với SD tại N nên N là giao điểm của SD và (IJM).

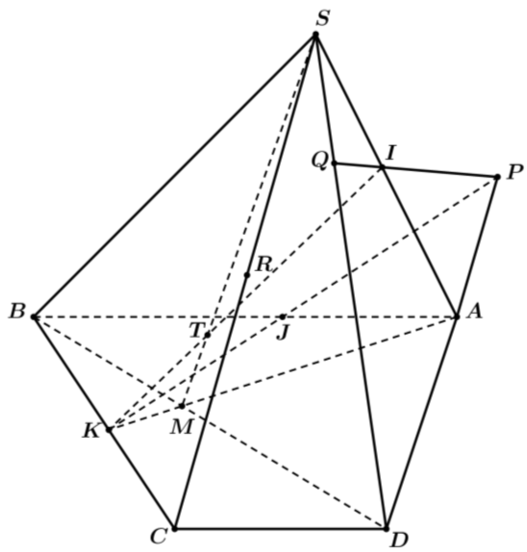
e) H là giao điểm của MN và BD. Dễ thấy 3 điểm H, E, F đồng thời nằm trên hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (IJM) nên 3 điểm này thuộc giao tuyến của 2 mặt phẳng trên hay 3 điểm đó thẳng hàng. $S.ABCD$

Bài tập 6: Cho hình chóp , có đáy là hình thang, cạnh đáy lớn AB. Gọi I, J, K là ba điểm lần lượt trên SA, AB, BC.

a) Tìm giao điểm của IK và (SBD).

b) Tìm giao điểm của mặt phẳng (IJK) với SD và SC.

Lời giải



a) Trong $(ABCD)$ có BD giao AK tại M.

Trong (SAK) có SM giao IK tại T $\Rightarrow T$ là giao điểm của IK và (SBD).

b) Lấy R là trung điểm của SC.

Dễ dàng chứng minh được RK và IJ song song với nhau (song song và bằng $\frac{BD}{2}$) nên $R \in (IKJ) \Rightarrow R$ là giao điểm của SC với mp(IJK).

Trong $(ABCD)$ có KJ cắt AD tại P.

Trong (SAD) có IP cắt SD tại Q $\Rightarrow Q$ là giao điểm của SD với mp(IJK).

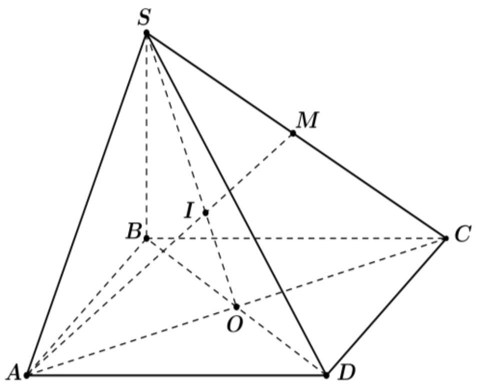
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, giao điểm của BD và AC là O. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi I là giao điểm của AM với mặt phẳng (SBD). Mệnh đề nào dưới đây sai?

A. $I \in SO$. **B.** $I \in SC$. **C.** $I \in (SBD)$. **D.** $I \in (SAC)$.

Lời giải



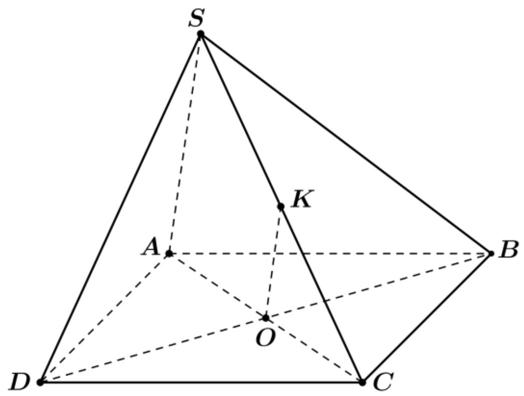
Trong (SAC), gọi $I = AM \cap SO$, mà $SO \subset (SBD) \Rightarrow I = AM \cap (SBD)$.

Vậy I là giao điểm của AM với mặt phẳng $(SBD) \Rightarrow I \in SO$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA, mặt phẳng (α) cắt SC tại K. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. $SK = 3KC$. **B.** $SK = KC$. **C.** $SK = \frac{1}{2}KC$. **D.** $SK = 2KC$.

Lời giải



Gọi O là tâm của hình bình hành $ABCD$, khi đó O là một điểm chung của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAC).

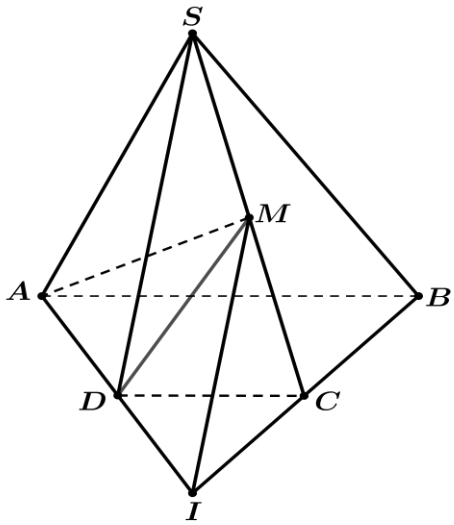
Mặt khác SA song song với mặt phẳng (α) nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và mặt phẳng (SAC) là đường thẳng d đi qua O và song song với SA.

Trong mặt phẳng (SAC): d song song với SA và cắt SC tại K, suy ra OK là đường trung bình của tam giác SAC nên K là trung điểm của SC. Vậy $SK = KC$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn AB. Gọi M là trung điểm của SC. Giao điểm của BC với mặt phẳng (ADM) là:

A. Giao điểm của BC và AD. **B.** Giao điểm của BC và SD.
C. Giao điểm của BC và AM. **D.** Giao điểm của BC và DM

Lời giải



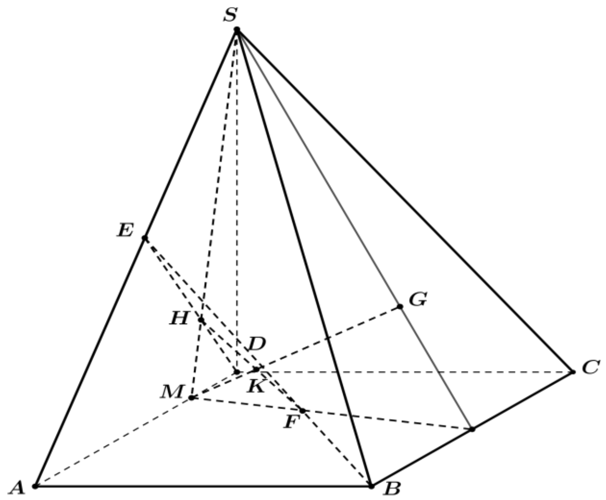
Gọi I là giao điểm cuả AD và BC. Khi đó: $\begin{cases} I \in AD \\ AD \subset (ADM) \end{cases} \Rightarrow I \in (ADM)$

Vậy $I = BC \cap (ADM)$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC. M là điểm thuộc cạnh AD sao cho $\frac{AM}{AD} = \frac{3}{4}$. Gọi E là trung điểm của cạnh SA, F là giao điểm của MN và BD. Tìm giao điểm của đường thẳng MG và (BDE).

A. Giao điểm của MG và HF **B.** Giao điểm của BC và SD.
C. Giao điểm của BG và AM. **D.** Giao điểm của BC và DM

Lời giải



Gọi N là trung điểm của BC.

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SM \cap ED$ và trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $F = MN \cap BD$.

Ta có: $\begin{cases} H \in SM \subset (SMN) \\ H \in ED \subset (BDE) \end{cases} \Rightarrow H \in (SMN) \cap (BDE) \ (1)$.

$\begin{cases} F \in MN \subset (SMN) \\ F \in BD \subset (BDE) \end{cases} \Rightarrow F \in (SMN) \cap (BDE) \ (2)$.

Từ (1) và (2) ta có $HF = (SMN) \cap (BDE)$.

Trong mặt phẳng (SMN) gọi $K = MG \cap HF$.

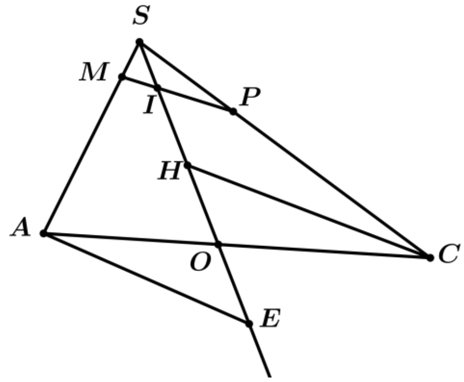
Khi đó $\begin{cases} K \in MG \\ K \in HF \subset (BDE) \end{cases} \Rightarrow K = MG \cap (BDE)$.

Vậy K là giao điểm của đường thẳng MG và (BDE).

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm trên các đoạn SA, SB, SC sao cho $SA = 5SM$, $SB = 3SN$, $2SC = 3SP$. Mặt phẳng (MNP) cắt đoạn SD tại điểm Q. Khi đó tỉ số $\dfrac{SD}{SQ}$ bằng

A. $\dfrac{7}{2}$. **B.** $\dfrac{13}{2}$. **C.** $\dfrac{15}{8}$. **D.** $\dfrac{8}{15}$.

Lời giải



Gọi O là trung điểm của AC và $SO \cap MP$ tại I. Ta kẻ $\begin{cases} AE // MP \\ CH // MP \end{cases}$

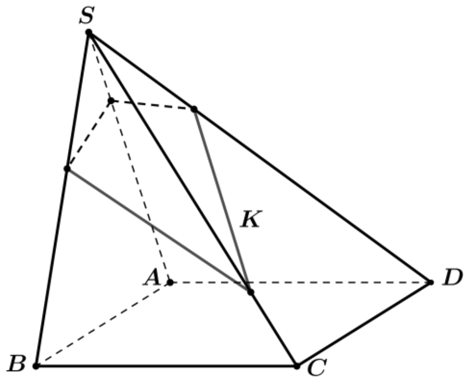
Hai tam giác $\Delta OEA = \Delta OHC\left(g.c.g\right) \Rightarrow OE = OH$

Theo định lí Talet ta có: $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{SI}{SE} = \dfrac{SI}{SO+OE}$; $\dfrac{SP}{SC} = \dfrac{SI}{SH} = \dfrac{SI}{SO-OH}$

Suy ra $\dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{SO}{SI} + \dfrac{OE}{SI} + \dfrac{SO}{SI} - \dfrac{OH}{SI} = 2\dfrac{SO}{SI}$ (1)

Chứng minh tương tự ta có: $\dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SQ} = 2\dfrac{SO}{SI}$ (2)

Từ (1) và (2) ta được: $\dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SQ}$



Từ giả thiết ta có: $\dfrac{SA}{SM} = 5; \dfrac{SB}{SN} = 3; \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{3}{2}$.

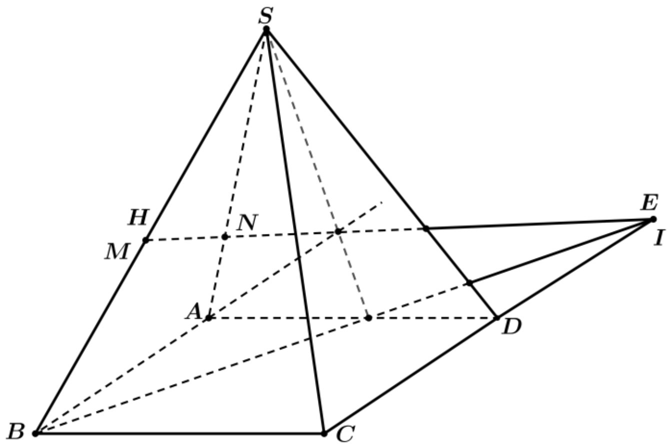
4 điểm $M,\ N,\ P,\ Q$ cùng thuộc một mặt phẳng, nên ta có đẳng thức: $\dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP} = \dfrac{SB}{SN} + \dfrac{SD}{SQ}$

$\Leftrightarrow \dfrac{SD}{SQ} = \dfrac{SA}{SM} + \dfrac{SC}{SP} - \dfrac{SB}{SN} = 5 + \dfrac{3}{2} - 3 = \dfrac{7}{2}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc đoạn SD, N là trọng tâm ΔSAB. Đường thẳng MN cắt mặt phẳng $(ABCD)$ tại điểm I sao cho $\frac{IN}{IM}=\frac{2}{3}$. Tính tỉ số $\frac{SM}{MD}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{4}$. **C.** 1. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải



Gọi K là trung điểm của AB. Theo tính chất trọng tâm tam giác SAB ta có: $\frac{SN}{SK}=\frac{2}{3}(1)$.

Trong mặt phẳng (SDK), kéo dài DK cắt BC tại điểm E.

Xét tam giác ΔSDE ta có: EH và SK là hai đường trung tuyến của tam giác (2).

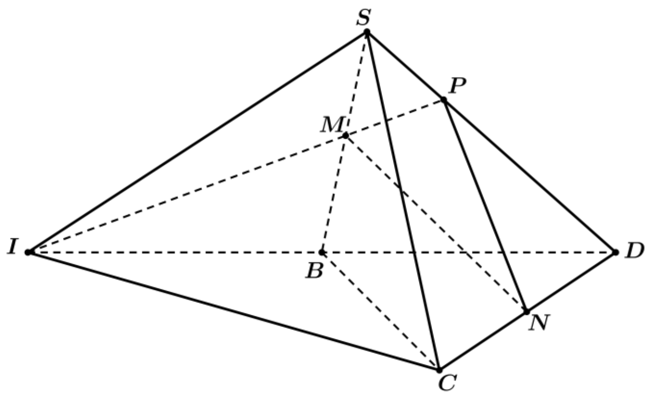
Từ (1) và (2) ta suy ra N là trọng tâm tam giác $\Delta SDE \Rightarrow H, N, E$ thẳng hàng.

Mặc khác: $\frac{IN}{IM}=\frac{2}{3} \Rightarrow M \equiv H$ và $I \equiv E \Rightarrow$ M là trung điểm $SD \Rightarrow \frac{SM}{MD}=1$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB và $CD; P$ là điểm trên cạnh AD sao cho $AP=\frac{1}{4}AD$. Biết mặt phẳng (MNP) cắt BD tại I. Tỉ số $\frac{IB}{ID}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{3}{10}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{2}{5}$.

Lời giải

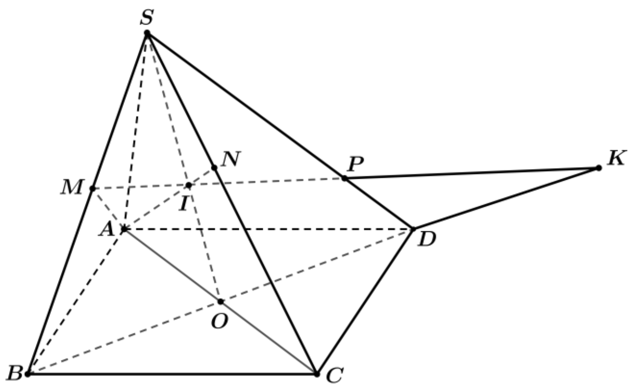


Theo định lý Menelaus ta có: $\frac{PA}{PD}.\frac{ID}{IB}.\frac{MB}{MA}=1\Rightarrow\frac{1}{3}.\frac{ID}{IB}.\frac{1}{1}=1\Rightarrow\frac{ID}{IB}=3\Rightarrow\frac{IB}{ID}=\frac{1}{3}$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SB. P là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SP=2DP$. Mặt phẳng (AMP) cắt SC tại N. Tỉ số $\frac{CN}{SN}$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{8}{5}$. **D.** $\frac{7}{5}$.

Lời giải



Gọi $O=AC\cap BD$; $I=SO\cap MP$; $N=AI\cap SC$ suy ra $N=(AMP)\cap SC$.

Gọi $K=BD\cap MP$. Xét tam giác SBK có $\frac{MS}{MB}.\frac{KB}{KD}.\frac{PD}{PS}=1\Leftrightarrow 1.\frac{KB}{KD}.\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\frac{KB}{KD}=2$

Và $\frac{IS}{IO}.\frac{KO}{KB}.\frac{MB}{MS}=1\Leftrightarrow\frac{IS}{IO}.\frac{3}{4}.\frac{1}{1}=1\Leftrightarrow\frac{IS}{IO}=\frac{4}{3}$

Xét tam giác SAC có $\frac{NC}{NS}.\frac{IS}{IO}.\frac{AO}{AC}=1\Leftrightarrow\frac{NC}{NS}.\frac{4}{3}.\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\frac{NC}{NS}=\frac{3}{2}$.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, BC và G là trung điểm của đoạn MN. Gọi O là giao điểm của SG và (ABC). Khẳng định nào sau đây đúng?

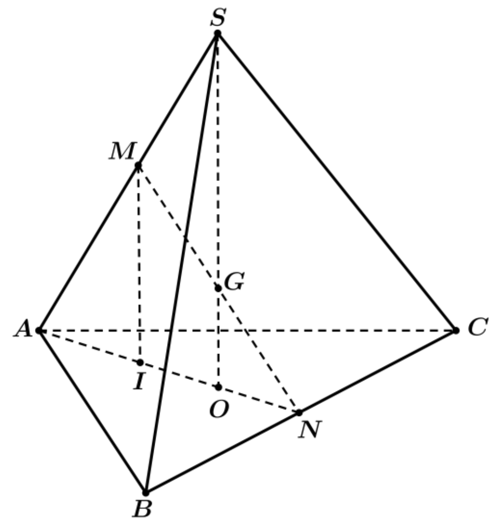
A. O là tâm đường tròn tam giác ABC.

B. O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

C. O là trực tâm tam giác ABC.

D. O là trọng tâm tam giác ABC.

Lời giải



Mặt phẳng (SAN) cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến AN.

Mà $SG\subset(SAN)$ suy ra SG cắt AN tại điểm O.

Qua M dựng $MI // SO$ với $M\in AN$.

Có M là trung điểm của SA suy ra I là trung điểm $AO\Rightarrow AI=IO$ (1).

Tam giác MNI có $MI//GO$ và G là trung điểm của MN.

Suy ra, O là trung điểm của $IN\Rightarrow IO=NO$ (2).

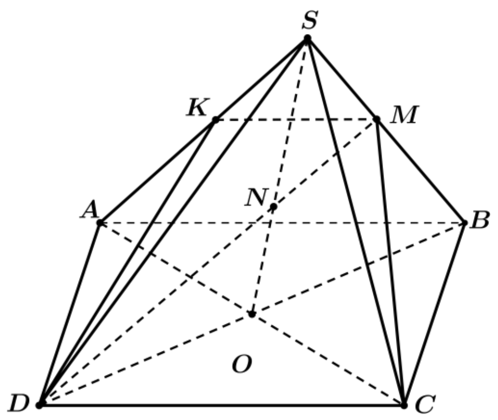
Từ $(1),(2)$ suy ra $AI=IO_1=ON\Rightarrow \dfrac{AO}{AN}=\dfrac{2}{3}$ mà N là trung điểm của BC.

Do đó, O là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB. Đường thẳng DM cắt mặt phẳng (SAC) tại N. Mặt phẳng (CDM) cắt SA tại K. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Ba điểm S, N, O thẳng hàng.
B. Ba điểm C, N, K thẳng hàng.
C. $KM // CD$.
<u>D</u>. N là trung điểm của đoạn thẳng CK.

Lời giải



Trong mặt phẳng (SBD), $DM\cap SO=N$ mà $SO\subset(SAC)$ nên $DM\cap(SAC)=N$.

Vậy ba điểm S, N, O thẳng hàng.

Trong mp (SAC), $CN \cap SA = K$. Mà $CN \subset (CDM)$ nên $SA \cap (CDM) = K$.

Vậy ba điểm C, N, K thẳng hàng.

Ta có N là trọng tâm ΔSBD nên $\frac{SN}{SO} = \frac{2}{3}$. Mà ΔSAC có đường trung tuyến SO và $\frac{SN}{SO} = \frac{2}{3}$ nên N là trọng tâm ΔSAC.

Vậy K là trung điểm của SA do đó $KM \parallel AB \parallel CD$.

Vì N là trọng tâm ΔSAC nên $\frac{CN}{CK} = \frac{2}{3}$. Do đó N không phải là trung điểm của đoạn thẳng CK

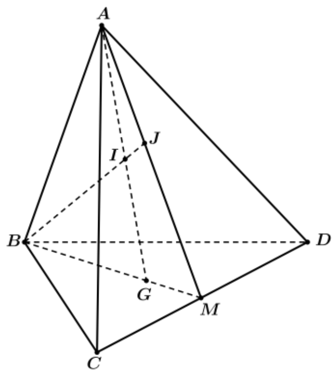
Ngoài ra, ta có thể lập luận giao tuyến của (CDM) và (SAB) là đường thẳng đi qua M và song song với AB, CD, đường thẳng này cắt SA tại K.

Do đó suy ra $KM \parallel AB \parallel CD$ và K là trung điểm của SA.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$, G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây sai?

A. J là trung điểm AM.
B. $AJ = (ABG) \cap (ACD)$.
C. $DJ = (BDJ) \cap (ACD)$.
D. A, J, M thẳng hàng.

Lời giải



Vì I di chuyển trên AG nên J cũng di chuyển trên AM

Ta có: A là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Do $BG \cap CD = \{M\} \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases}$

$\Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai của hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

$\Rightarrow AM = (ACD) \cap (GAB)$ hay $AJ = (ABG) \cap (ACD)$.

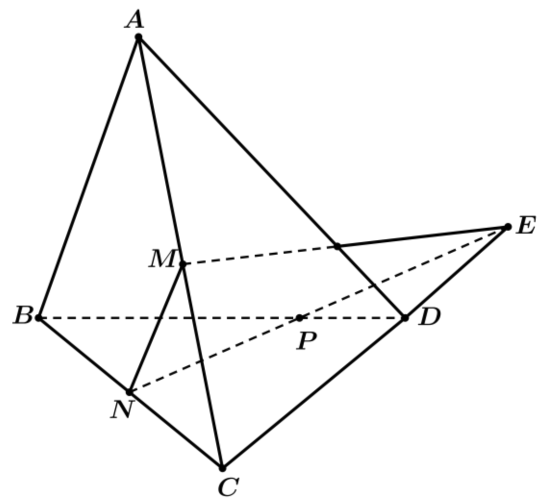
$\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (BDJ) \cap (ACD).$

$\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABM) \equiv (ABG) \end{cases} \Rightarrow AM, BI$ đồng phẳng $\Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M$ thẳng hàng.

Câu 12: Cho bốn điểm A, B, C, D không đồng phẳng. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên đoạn BD lấy điểm P sao cho $BP = 2PD$. Giao điểm của đường thẳng CD và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của

A. CD và NP. **B.** CD và MN. **C.** CD và MP. **D.** CD và AP.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} N \in BC \\ P \in BD \end{cases} \Rightarrow NP \subset (BCD)$ suy ra NP, CD đồng phẳng

Gọi E là giao điểm của NP và CD mà $NP \subset (MNP) \Rightarrow CD \cap (MNP) = E.$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho tứ giác $ABCD$ có AC và BD giao nhau tại O và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$. Trên đoạn SC lấy một điểm M không trùng với S và C, $K = AM \cap SO$. Khi đó:

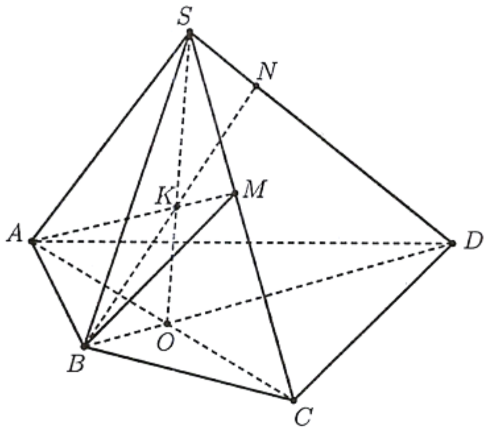
a) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (ABC)

b) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD)

c) Giao điểm của đường thẳng SO với mặt phẳng (ABM) là điểm K

d) Giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng $\left(ABM\right)$ là điểm N thuộc đường thẳng AK

Lời giải



a) Sai: SO là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(ABC\right)$

b) Đúng: SO là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBD\right)$

c) Đúng: Tìm giao điểm của SO và $\left(ABM\right)$. Trong mặt phẳng $\left(SAC\right)$ gọi $K = AM \cap SO$.

Vì $\begin{cases} K \in AM, AM \subset \left(ABM\right) \\ K \in SO \end{cases} \Rightarrow K = SO \cap \left(ABM\right).$

d) Sai: Tìm giao điểm của SD và $\left(ABM\right)$. Xét mặt phẳng phụ $\left(SBD\right)$ chứa SD.

Dễ thấy B là điểm chung của hai mặt phẳng $\left(SBD\right)$ và $\left(ABM\right)$.

Ta có: $\begin{cases} K \in AM, AM \subset \left(ABM\right) \\ K \in SO, SO \subset \left(SBD\right) \end{cases} \Rightarrow K \in \left(SBD\right) \cap \left(ABM\right)$ do đó $BK = \left(SBD\right) \cap \left(ABM\right)$.

Trong mặt phẳng $\left(SBD\right)$ gọi $N = BK \cap SD$.

Do $\begin{cases} N \in SD \\ N \in BK, BK \subset \left(ABM\right) \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap \left(ABM\right).$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ với M là một điểm trên cạnh SC, N là một điểm trên cạnh BC. Gọi $O = AC \cap BD$ và $K = AN \cap CD$. Khi đó:

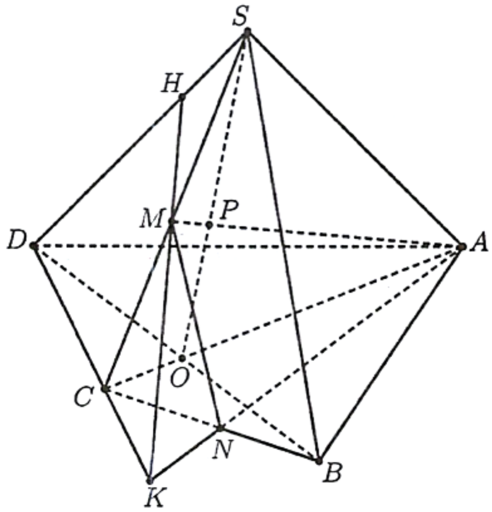
a) SO là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(SAC\right)$ và $\left(SBD\right)$.

b) Giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng $\left(SBD\right)$ là điểm nằm trên cạnh SO.

c) KM là giao tuyến của hai mặt phẳng $\left(AMN\right)$ và $\left(SCD\right)$.

d) Giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng $\left(AMN\right)$ là điểm nằm trên cạnh KM

Lời giải



a) Đúng: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD):

Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$. Vậy $SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) Đúng: Tìm giao điểm của AM và mặt phẳng (SBD):

Trong mặt phẳng (SAC), gọi $P = AM \cap SO$.

Ta có: $\begin{cases} P \in AM \\ P \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow P = AM \cap (SBD)$.

c) Đúng: Xét mặt phẳng phụ (SCD) chứa SD. Ta tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (SCD).

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $K = AN \cap CD$.

Khi đó: $\begin{cases} K \in AN, AN \subset (AMN) \\ K \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow K \in (AMN) \cap (SCD)$.

Mặt khác: $M \in SC, SC \subset (SCD) \Rightarrow M \in (SCD) \Rightarrow M \in (SCD) \cap (AMN)$.

Vậy $KM = (SCD) \cap (AMN)$.

d) Đúng: Trong mặt phẳng (SCD) gọi $H = KM \cap SD$.

Ta có: $\begin{cases} H \in SD \\ H \in KM, KM \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow H = SD \cap (AMN)$.

Câu 3: Cho hình bình hành $ABCD$ và một điểm S không thuộc mặt phẳng $(ABCD)$, các điểm M, N lần lượt là trung điểm của đoạn thẳng AB, SC. Gọi $O = AC \cap BD$

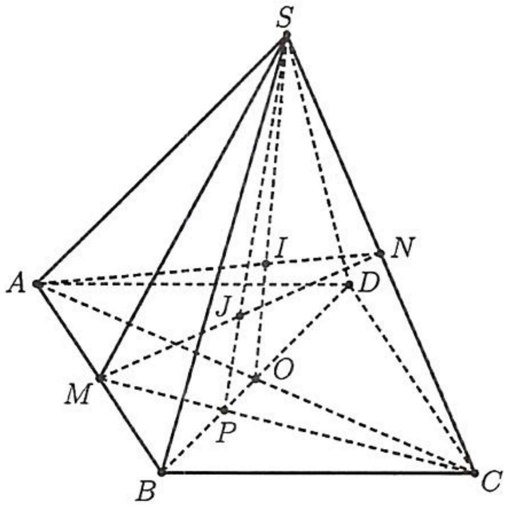
a) SO giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Giao điểm của I của đường thẳng AN và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên đường thẳng SO

c) Giao điểm của J của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) là điểm nằm trên đường thẳng SD

d) Ba điểm I, J, B thẳng hàng.

Lời giải



a) Đúng: SO giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

b) Đúng: Tìm giao điểm I của AN và mặt phẳng (SBD):

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$;

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $I = SO \cap AN$.

Ta có: $\begin{cases} I \in AN \\ I \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I = AN \cap (SBD)$.

c) Sai: Tìm giao điểm J của MN và mặt phẳng (SBD):

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $P = CM \cap BD$;

Trong mặt phẳng (SCM) gọi $J = MN \cap SP$;

Ta có: $\begin{cases} J \in MN \\ J \in SP, SP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J = MN \cap (SBD)$.

d) Đúng: Chứng minh I, J, B thẳng hàng:

Dễ thấy $B \in (ABN) \cap (SBD)$ (1)

Ta có: $\begin{cases} I \in AN, AN \subset (ABN) \\ I \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (ABN) \cap (SBD)$ (2)

Tương tự: $\begin{cases} J \in MN, MN \subset (ABN) \\ J \in SP, SP \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in (ABN) \cap (SBD)$ (3)

Từ (1); (2);(3) suy ra B, I, J cùng thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng (ABN) và (SBD) nên ba điểm này thẳng hàng.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC. Gọi I giao điểm của đường thẳng AM và mặt phẳng (SBD). Khi đó:

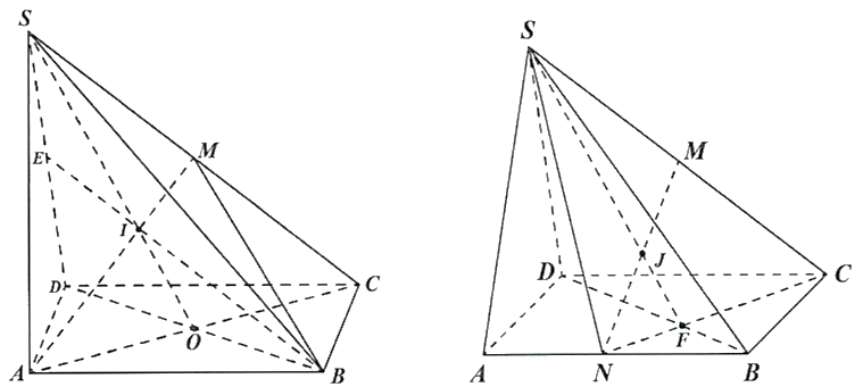
a) $AM \cap SO = I$.

b) $IA = 3IM$.

c) Giao điểm E của đường thẳng SD và mặt phẳng (ABM) là điểm thuộc đường thẳng BI

d) Gọi N là một điểm tuỳ ý trên cạnh AB. Khi đó giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SBD) là điểm thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(SBD), (SNC)$

Lời giải



a) Đúng: Trong (SAC): $AM \cap SO = I$

b) Sai: Ta có $\begin{cases} I \in AM \\ I \in SO \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in AM \cap (SBD)$.

Tam giác SAC có hai đường trung tuyến AM và SO cắt nhau tại I suy ra I là trọng tâm của tam giác SAC. Từ đó ta có $IA = 2IM$.

c) Đúng: Trong (SBD): $BI \cap SD = E$. Ta có $\begin{cases} E \in SD \\ E \in BI \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow I \in SD \cap (ABM)$.

d) Trong $(ABCD)$: $CN \cap BD = F$. Trong (SNC): $SF \cap MN = J$.

Ta có $\begin{cases} J \in MN \\ J \in SF \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow J \in MN \cap (SBD)$.

Câu 5: Cho tứ diện $SABC$. Gọi M và N lần lượt là hai điểm trên hai cạnh AB và BC sao cho MN không song song với AC. Khi đó:

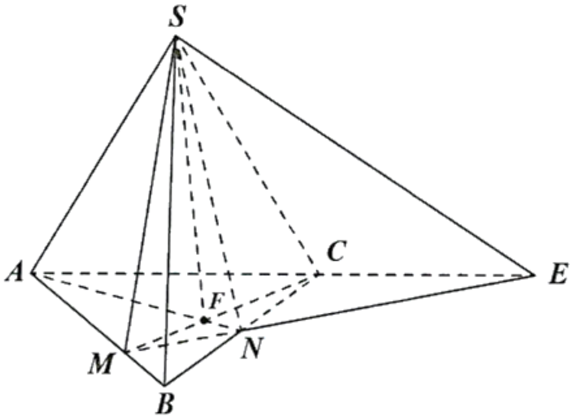
a) Đường thẳng MN cắt đường thẳng AC

b) Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) là giao điểm của MN và AC.

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC.

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAN) và (SCM) là đường thẳng đi qua giao điểm của MN và AC.

Lời giải



a) Đúng: Đường thẳng MN cắt đường thẳng AC

b) Đúng: Trong mặt phẳng (ABC) vẽ giao điểm E của MN và AC.

Ta có $E \in AC$ suy ra $E \in (SAC)$.

Vậy E là giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC).

c) Đúng: Ta có S và E là hai điểm chung của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC).

Suy ra $(SMN) \cap (SAC) = SE$.

d) Sai: Trong mặt phẳng (ABC), vẽ giao điểm F của AN và MC.

Ta có S và F là hai điểm chung của (SAN) và $(SCM) \Rightarrow (SAN) \cap (SCM) = SF$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của AC và $BD; M, N$ lần lượt là trung điểm của $SB, SD; P$ thuộc đọan SC và không là trung điểm của SC. Khi đó:

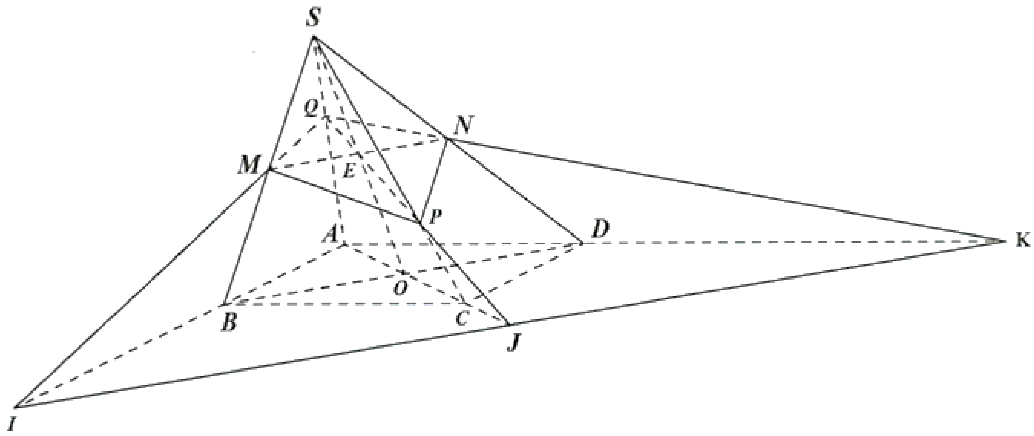
a) Giao điểm E của đường thẳng SO và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của MN và SO.

b) Giao điểm Q đường thẳng SA và mặt phẳng (MNP) là giao điểm của PE và SO.

c) Gọi I,J,K lần lượt là giao điểm của QM và AB,QP và AC,QN và AD. Vậy I,J,K thẳng hàng.

d) Gọi I,J,K lần lượt là giao điểm của QM và AB,QP và AC,QN và AD. Vậy I,J,K không thẳng hàng.

Lời giải



a) Đúng: Trong $(SBD): SO \cap MN = E$. Ta có $\begin{cases} E \in SO \\ E \in MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow E \in SO \cap (MNP)$.

b) Sai: Trong $(SAC): PE \cap SA = Q$. Ta có $\begin{cases} Q \in SA \\ Q \in PE \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q \in SA \cap (MNP)$.

c) Đúng: Từ giả thiết ta có $\begin{cases} I \in QM \subset (MNP) \\ J \in QP \subset (MNP) \\ K \in QN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow I,J,K \in (MNP) (1)$

Mặt khác $\begin{cases} I \in AB \subset (ABCD) \\ J \in AC \subset (ABCD) \\ K \in AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow I,J,K \in (ABCD) \ (2)$

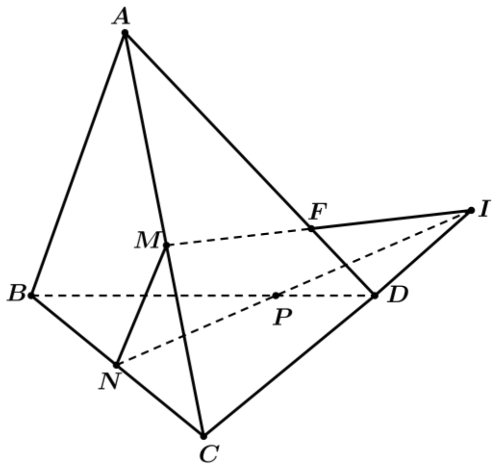
Từ (1) và (2) suy ra $I,J,K \in (MNP) \cap (ABCD)$. Suy ra I,J,K thẳng hàng.

d) Sai: Gọi I,J,K lần lượt là giao điểm của QM và AB,QP và AC,QN và AD. Vậy I,J,K không thẳng hàng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AC và BC. Trên cạnh BD lấy điểm P sao cho $BP = 2DP$. Gọi F là giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP). Tính $\dfrac{FA}{FD}$.

Lời giải



Trong (BCD) ta có $\dfrac{BN}{BC}=\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{BP}{BD}=\dfrac{2}{3}$ suy ra NP không song song với CD.

Gọi $I=NP\cap CD$ và $F=MI\cap AD$.

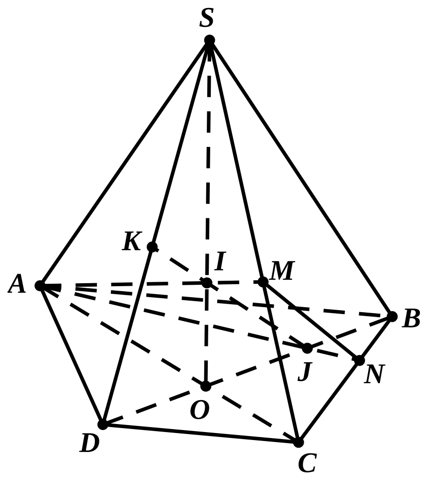
Dễ thấy F là giao điểm của AD với mặt phẳng (MNP).

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác BCD có $\dfrac{ID}{IC}.\dfrac{CN}{CB}.\dfrac{PB}{PD}=1\Rightarrow \dfrac{ID}{IC}.\dfrac{1}{2}.2=1\Leftrightarrow \dfrac{ID}{IC}=1$.

Áp dụng định lí Menelaus trong tam giác ACD có $\dfrac{FA}{FD}.\dfrac{ID}{IC}.\dfrac{MC}{MA}=1\Rightarrow \dfrac{FA}{FD}.\dfrac{1}{2}.1=1\Leftrightarrow \dfrac{FA}{FD}=2$

Câu 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, M là một điểm trên cạnh SC, N là trên cạnh BC. Tìm giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMN).

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O=AC\cap BD, J=AN\cap BD$.

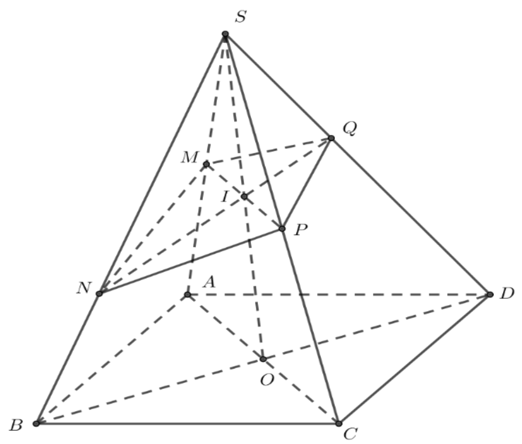
Trong (SAC) gọi $I=SO\cap AM$ và $K=IJ\cap SD$.

Ta có $I\in AM\subset(AMN), J\in AN\subset(AMN)\Rightarrow IJ\subset(AMN)$.

Do đó $K\in IJ\subset(AMN)\Rightarrow K\in(AMN)$. Vậy $K=SD\cap(AMN)$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và SC. Điểm N thuộc cạnh SB sao cho $\frac{SN}{SB}=\frac{2}{3}$. Gọi Q là giao điểm của cạnh SD và mặt phẳng (MNP). Tính tỷ số $\frac{SQ}{SD}$.

Lời giải



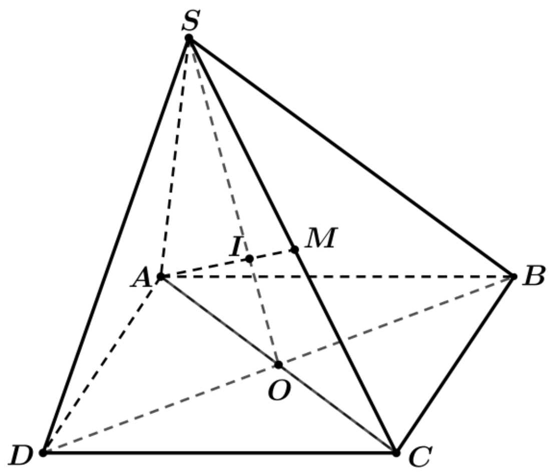
Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của MP và SO thì Q là giao điểm của NI với SD. I là trung điểm của SO.

Đặt $\frac{SD}{SQ}=x$. Do $2\overrightarrow{SO}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$ nên $4\overrightarrow{SI}=\frac{3}{2}\overrightarrow{SN}+x\overrightarrow{SQ}\Rightarrow x=4-\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$.

Vậy $\frac{SQ}{SD}=\frac{2}{5}$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. M là trung điểm của SC. Gọi I là giao điểm của đường thẳng AM với mặt phẳng (SBD). Tính tỷ số $\frac{IA}{IM}$

Lời giải



Gọi $AC\cap BD=O$ thì $(SAC)\cap(SBD)=SO$.

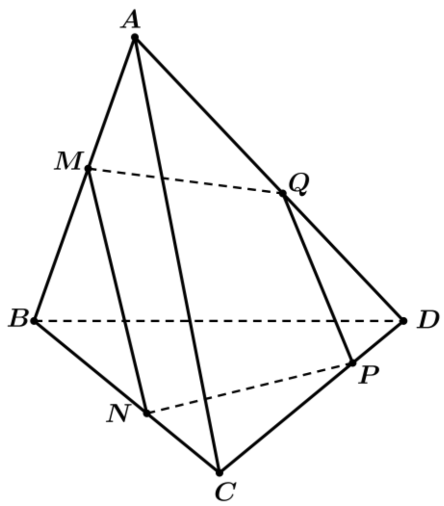
Trong mặt phẳng (SAC), lấy $AM\cap SO=I$ $\Rightarrow I=AM\cap(SBD)$.

Do trong ΔSAC, AM và SO là hai đường trung tuyến, nên I là trọng tâm ΔSAC.

Vậy $IA = 2IM$ hay $\dfrac{IA}{IM} = 2$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC. Gọi P là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CP = 2PD$ và Q là điểm thuộc cạnh AD sao cho bốn điểm M, N, P, Q đồng phẳng. Tính tỷ số $\dfrac{AQ}{DQ}$

Lời giải



Theo giải thiết, M, N theo thứ tự là trung điểm của AB, BC nên $MN // AC$.

Hai mặt phẳng (MNP) và (ACD) có $MN // AC$ và P là điểm chung thứ nhất của hai mặt phẳng nên giao tuyến của hai mặt phẳng là đường thẳng PQ đi qua P và song song với AC; cắt AD tại Q.

Mặt khác, trong tam giác ACD có $\begin{cases} CP = 2PD \\ PQ // AC \end{cases}$ nên $AQ = 2DQ$ hay $\dfrac{AQ}{DQ} = 2$.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 3: Xác định thiết diện

Phương pháp: Ta tìm các đoạn giao tuyến nối tiếp nhau của mặt phẳng (α) với các mặt của hình chóp cho đến khi khép kín thành một đa giác phẳng. Đa giác đó là thiết diện cần tìm và các đoạn giao tuyến chính là các cạnh của thiết diện.

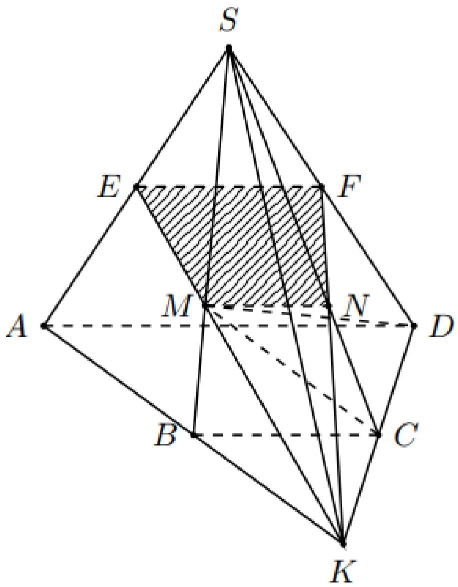
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình thang $(AD // BC, AD > BC)$. Gọi M, N lần lươt là các điểm thuộc các cạnh SB, SC sao cho $SM = 2MB, SN = 2NC.$

a) Gọi $K = AB \cap CD.$ Tìm thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (KMN).

b) Cho $AD = 2BC.$ Tính tỉ số diện tích của tam giác KMN và diện tích thiết diện vừa tìm ở câu trên.

Lời giải



a) Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (KMN).

Tromg mp(SCD), gọi $F = KN \cap SD$ thì mặt phẳng (KMN) cắt hình hình chóp theo thiết diện là tứ giác $MNFE$.

b. Tỉ số diện tích của tam giác KMN và diện tích thiết diện vừa tìm ở câu trên.

Khi $AD = 2BC$ thì BC là đường trung bình của tam giác KAD

$\Rightarrow M$ là trọng tâm tam giác SAK và E là trung điểm SA.

Tương tự F là trung điểm cạnh SD

Khi đó EF là đường trung bình của tam giác SAD $\Rightarrow EF = \frac{1}{2}AD.$

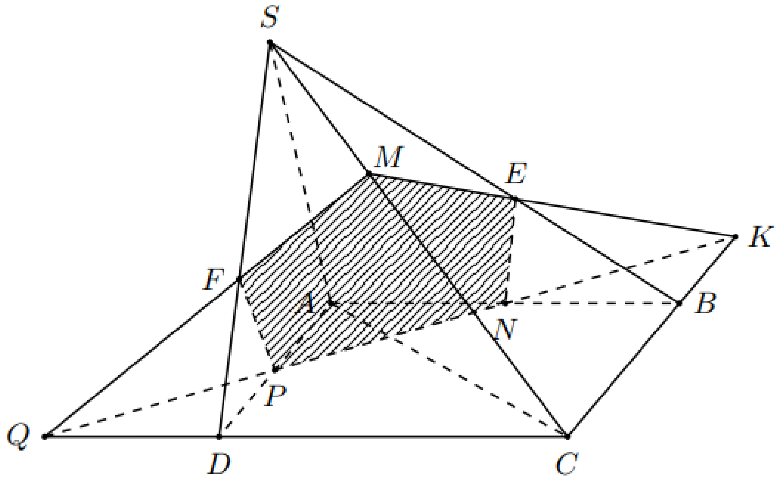
Mặt khác theo giả thiết, ta có $SM = 2MB, SN = 2NC$ $\Rightarrow MN = \frac{2}{3}BC = \frac{1}{3}AD$

Vì $\frac{MN}{EF} = \frac{2}{3}$ nên $\frac{S_{KMN}}{S_{KEF}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow S_{KMN} = \frac{4}{9}S_{KEF}; S_{MNFE} = \frac{5}{9}S_{KEF}$

Vậy $\frac{S_{KMN}}{S_{MNFE}} = \frac{4}{5}.$

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ và M là một điểm trên cạnh SC, N và P lần lượt là trung điểm của AB và $AD.$ Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $Q = NP \cap CD$ và $K = NP \cap BC$

Trong mặt phẳng (SBC) gọi $E = SB \cap KM$, trong mặt phẳng (SAD) gọi $F = SD \cap QM$.

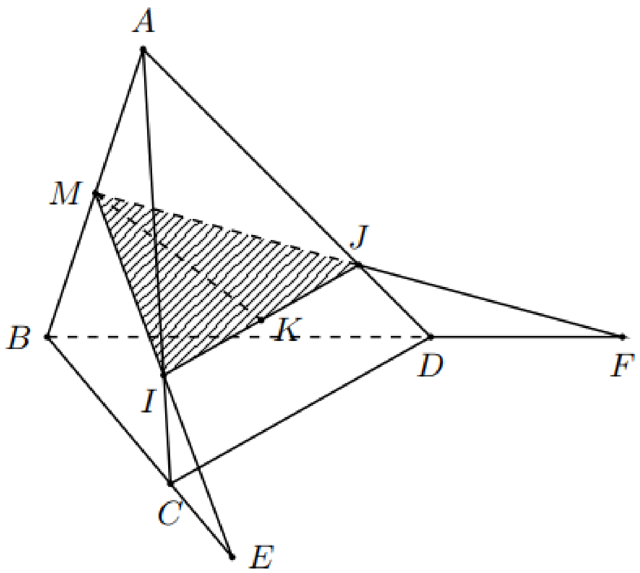
Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $NEMFP.$

Bài tập 3: Cho tứ diện đều $ABCD$, cạnh bằng $a.$ Kéo dài BC một đoạn $CE = a$. Kéo dài BD một đoạn $DF = a.$ Gọi M là trung điểm của $AB.$

a) Tìm thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF).

b) Tính diện tích của thiết diện.

Lời giải



a) Trong mặt phẳng (ABC): Dựng ME cắt AC tại $I.$

Trong mặt phẳng (ABD): Dựng MF cắt AD tại $J.$

Từ đó thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (MEF) là ΔMIJ .

b) Theo cách dựng thì I và J lần lượt là trọng tâm tam giác ABE và ABF

$$\Rightarrow \begin{cases} AI = \dfrac{2}{3}AC = \dfrac{2a}{3} \\ AJ = \dfrac{2}{3}AD = \dfrac{2a}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{ tam giác } AIJ \text{ đều } \Rightarrow IJ = \dfrac{2a}{3}.$$

Mặt khác $AI = AJ$ nên $\Delta AMI = \Delta AMJ \Rightarrow MI = MJ$.

Trong $\Delta AMI, MI = \sqrt{MA^2 + IA^2 - 2MA.IA.\cos A} = \dfrac{a\sqrt{13}}{6}$.

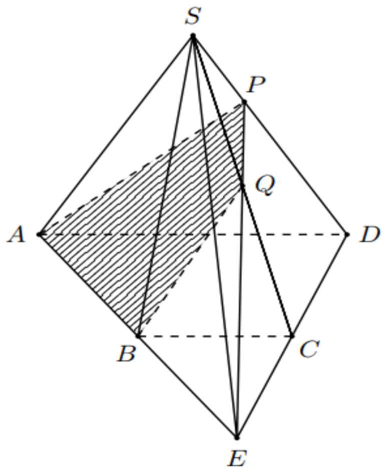
$$S_{\Delta MJI} = \frac{1}{2}IJ.MK = \frac{1}{2}.\frac{2a}{3}.2\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}\right)^2 - \left(\frac{a}{3}\right)^2} = \frac{a^2}{6}.$$

Bài tập 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD.

a) Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB)

b) Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP).

Lời giải

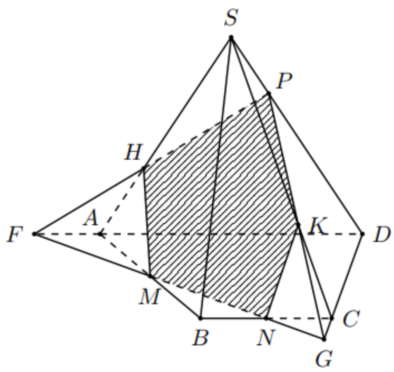


a) Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E = AB \cap CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q = SC \cap EP$.

Ta có $E \in AB$ nên $EP \subset (ABP) \Rightarrow Q \in (ABP)$, do đó $Q = SC \cap (ABP)$.

Thiết diện là tứ giác $ABQP$.



b)Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F,G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SA \cap FP$

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = SC \cap PG$.

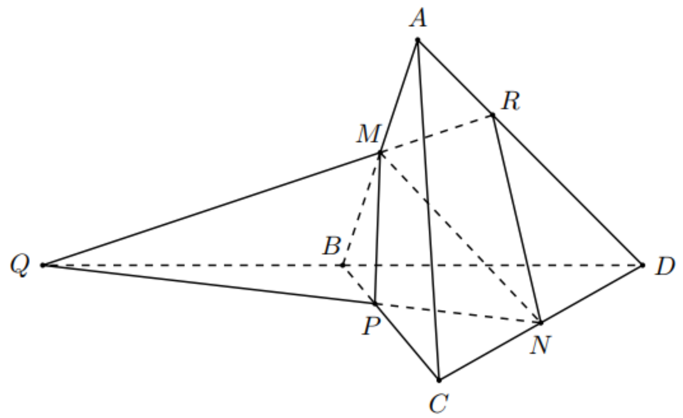
Ta có $F \in MN \Rightarrow F \in (MNP)$, $\Rightarrow FP \subset (MNP) \Rightarrow H \in (MNP)$

Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap (MNP)$ Tương tự $K = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD và P là một điểm thuộc cạnh BC (P không là trung điểm của BC). Tìm thiết diện của tứ diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNP).

Lời giải

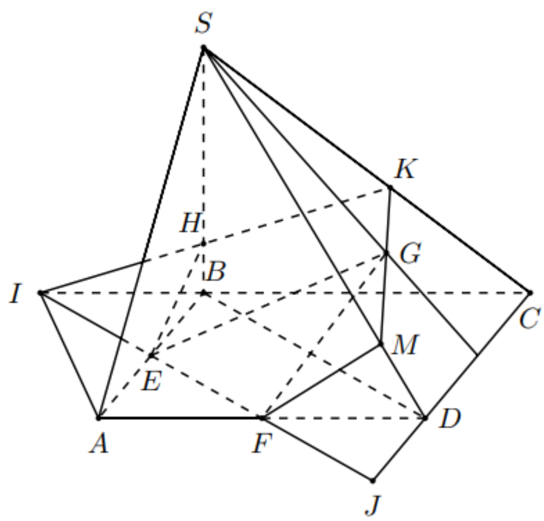


Gọi $Q = NP \cap BD$. Gọi $R = QM \cap AD$. Suy ra: $Q \in (MNP)$ và $R \in (MNP)$.

Vậy thiết diện của tứ diện bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là tứ giác $MRNP$.

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$, G là điểm nằm trong tam giác SCD. E, F lần lượt là trung điểm của AB và AD. Tìm thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (EFG).

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$: $EF \cap BC = I$; $EF \cap CD = J$

Trong mặt phẳng $(SCD): GJ \cap SC = K; GJ \cap SD = M$

Trong mặt phẳng $(SBC): KI \cap SB = H$

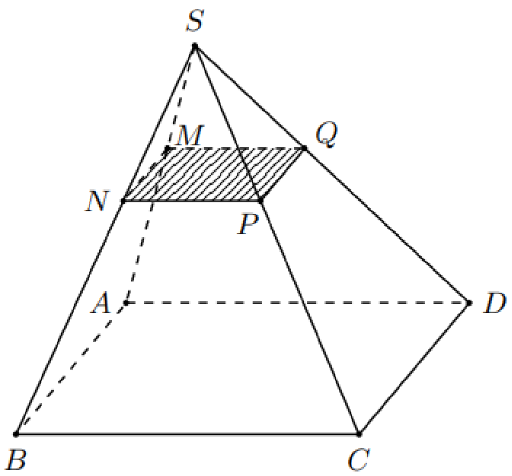
Ta có: $(GEF) \cap (ABCD) = EF$, $(GEF) \cap (SAD) = FM$, $(GEF) \cap (SCD) = MK$

$(GEF) \cap (SBC) = KH$, $(GEF) \cap (SAB) = HE$

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) là ngũ giác $EFMKH$.

Bài tập 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a $(a > 0)$. Các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp theo một thiết diện có diện tích bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi Q là trung điểm của SD.

Tam giác SAD có M, Q lần lượt là trung điểm của SA, SD suy ra $MQ // AD$.

Tam giác SBC có N, P lần lượt là trung điểm của SB, SC suy ra $NP // BC$.

Mặt khác $AD // BC$ suy ra $MQ // NP$ và $MQ = NP \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông.

Khi đó M, N, P, Q đồng phẳng $\Rightarrow (MNP)$ cắt SD tại Q và $MNPQ$ là thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (MNP).

Vậy diện tích hình vuông $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = \dfrac{S_{ABCD}}{4} = \dfrac{a^2}{4}$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

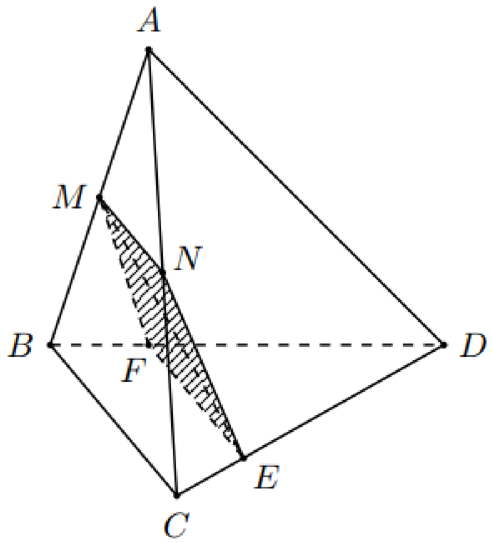
A. Tam giác MNE.

B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.

C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

Lời giải.



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow MN // BC$.

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF // BC$.

Do đó $MN // EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, E là trung điểm của SA, F, G lần lượt là các điểm thuộc cạnh BC, CD $(CF < FB, GC < GD)$. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (EFG) là:

A. Tam giác. **B.** Tứ giác. **C.** Ngũ giác. **D.** Lục giác.

Lời giải

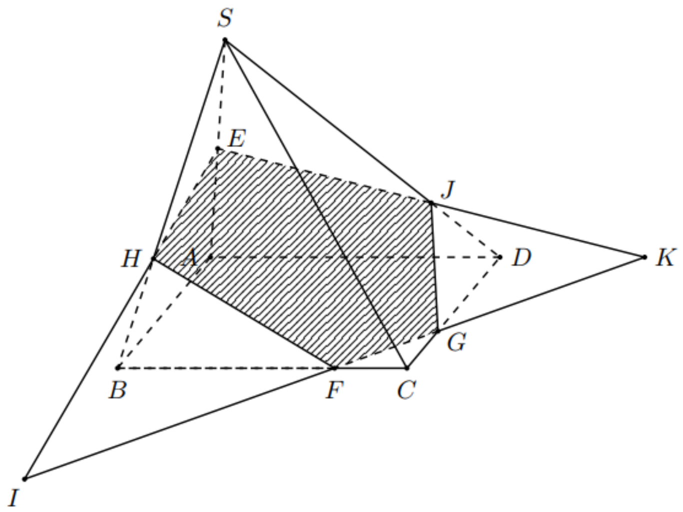
Trong $(ABCD)$, gọi $I = FG \cap AB; K = FG \cap AD$

Trong (SAB), gọi $H = IE \cap SB$.

Trong (SAD), gọi $J = EK \cap SD$.

$(EFG)\cap(ABCD)=FG$,$(EFG)\cap(SCD)=JG$,$(EFG)\cap(SAD)=JE$,
$(EFG)\cap(SAB)=HE$, $(EFG)\cap(SBC)=HF$.

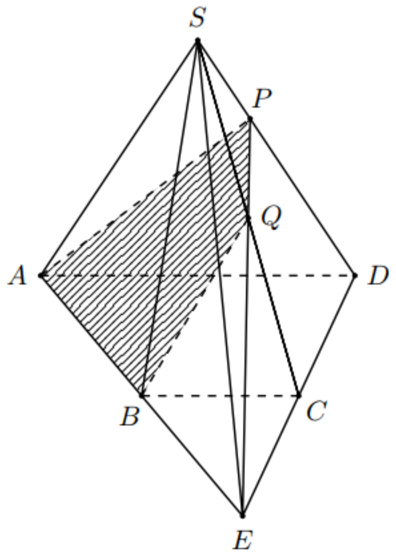
Do đó thiết diện là ngũ giác $EJGFH$.



Câu 3: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD . Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (PAB) là hình gì?

A. Tam giác **<u>B</u>.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $E=AB\cap CD$.

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $Q=SC\cap EP$.

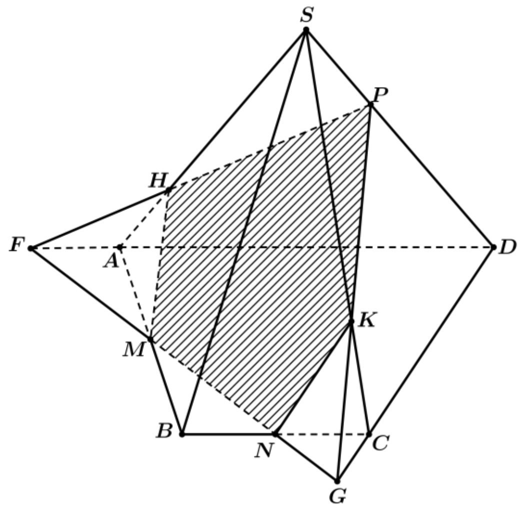
Ta có $E\in AB$ nên $EP\subset(ABP)\Rightarrow Q\in(ABP)$, do đó $Q=SC\cap(ABP)$.

Thiết diện là tứ giác $ABQP$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy là hình thang với AD là đáy lớn và P là một điểm trên cạnh SD . Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,BC . Thiết diện của hình chóp cắt bởi (MNP) là hình gì?

<u>A</u>. Ngũ giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi F,G lần lượt là các giao điểm của MN với AD và CD

Trong mặt phẳng (SAD) gọi $H = SA \cap FP$

Trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = SC \cap PG$.

Ta có $F \in MN \Rightarrow F \in (MNP)$, $\Rightarrow FP \subset (MNP) \Rightarrow H \in (MNP)$

Vậy $\begin{cases} H \in SA \\ H \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = SA \cap (MNP)$ Tương tự $K = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNKPH$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I là trung điểm SA. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (IBC) là:

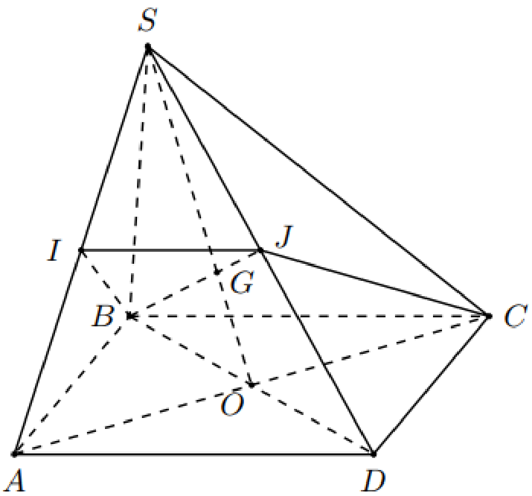
A. Tam giác IBC.

B. Hình thang $IJCB$ (J là trung điểm SD).

C. Hình thang $IGBC$ (G là trung điểm SB).

D. Tứ giác $IBCD$.

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD, G là giao điểm của CI và SO.

Khi đó G là trọng tâm tam giác SAC. Suy ra G là trọng tâm tam giác SBD.

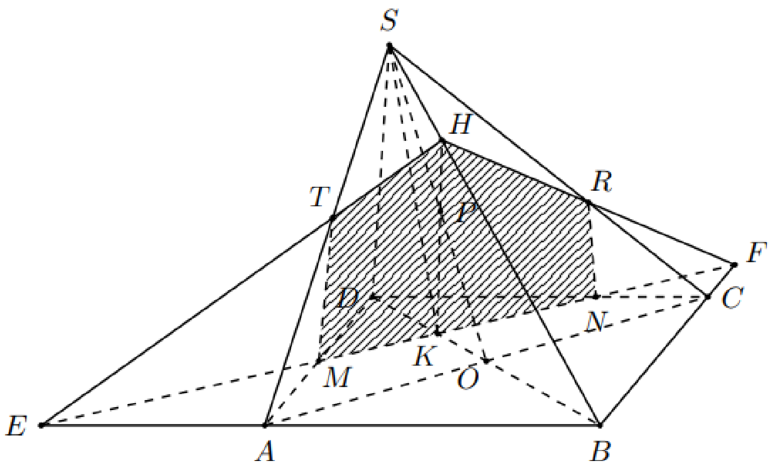
Gọi $J = BG \cap SD$. Khi đó J là trung điểm SD.

Do đó thiết điện của hình chóp cắt bởi (IBC) là hình thang $IJCB$ (J là trung điểm SD).

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P là ba điểm trên các cạnh AD, CD, SO. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là hình gì?

A. Ngũ giác **B.** Tứ giác **C.** Hình thang **D.** Hình bình hành

Lời giải



Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E, K, F lần lượt là giao điểm của MN với DA, DB, DC.

Trong mặt phẳng (SDB) gọi $H = KP \cap SB$

Trong mặt phẳng (SAB) gọi $T = EH \cap SA$

Trong mặt phẳng (SBC) gọi $R = FH \cap SC$.

Ta có $\begin{cases} E \in MN \\ H \in KP \end{cases} \Rightarrow EH \subset (MNP)$, $\begin{cases} T \in SA \\ T \in EH \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow T = SA \cap (MNP)$.

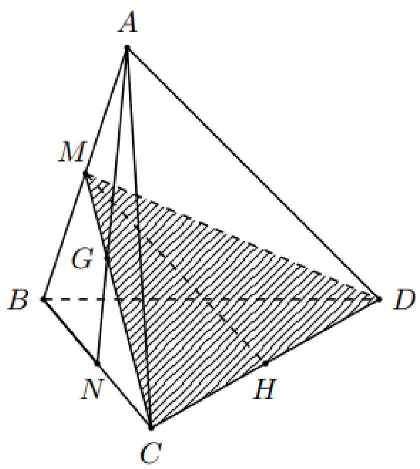
Lí luận tương tự ta có $R = SC \cap (MNP)$.

Thiết diện là ngũ giác $MNRHT$.

Câu 7: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Mặt phẳng (GCD) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$. **D.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC suy ra $AN \cap MC = G$.

Dễ thấy mặt phẳng (GCD) cắt đường thẳng AB tại điểm M.

Suy ra tam giác MCD là thiết diện của mặt phẳng (GCD) và tứ diện $ABCD$.

Tam giác ABD đều, có M là trung điểm AB suy ra $MD=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Tam giác ABC đều, có M là trung điểm AB suy ra $MC=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là trung điểm của $CD \Rightarrow MH \perp CD \Rightarrow S_{\Delta MCD}=\dfrac{1}{2}.MH.CD$

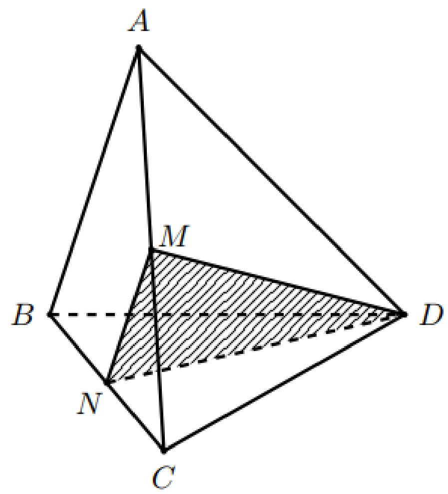
Với $MH=\sqrt{MC^2-HC^2}=\sqrt{MC^2-\dfrac{CD^2}{4}}=\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$.

Vậy $S_{\Delta MCD}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{a\sqrt{2}}{2}.a=\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ có độ dài các cạnh bằng $2a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AC, BC; P là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (MNP) cắt tứ diện theo một thiết diện có diện tích là:

A. $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{2}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{2}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{11}}{4}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải.



Trong tam giác BCD có: P là trọng tâm, N là trung điểm BC. Suy ra N, P, D thẳng hàng.

Vậy thiết diện là tam giác MND.

Xét tam giác MND, ta có $MN=\dfrac{AB}{2}=a$; $DM=DN=\dfrac{AD\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$.

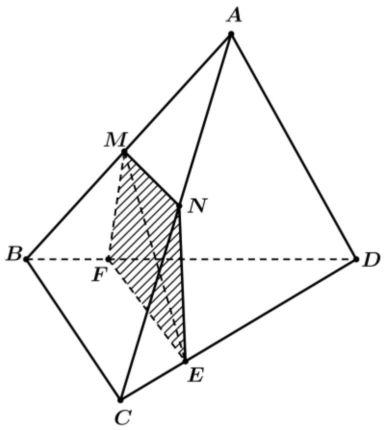
Do đó tam giác MND cân tại D. Gọi H là trung điểm MN suy ra $DH \perp MN$.

Diện tích tam giác $S_{\Delta MND}=\dfrac{1}{2}MN.DH=\dfrac{1}{2}MN.\sqrt{DM^2-MH^2}=\dfrac{a^2\sqrt{11}}{4}$.

Câu 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và AC, E là điểm trên cạnh CD với $ED = 3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là:

A. Tam giác MNE.
B. Tứ giác $MNEF$ với F là điểm bất kì trên cạnh BD.
C. Hình bình hành $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.
D. Hình thang $MNEF$ với F là điểm trên cạnh BD mà $EF // BC$.

Lời giải



Tam giác ABC có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow MN // BC$.

Từ E kẻ đường thẳng d song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF // BC$.

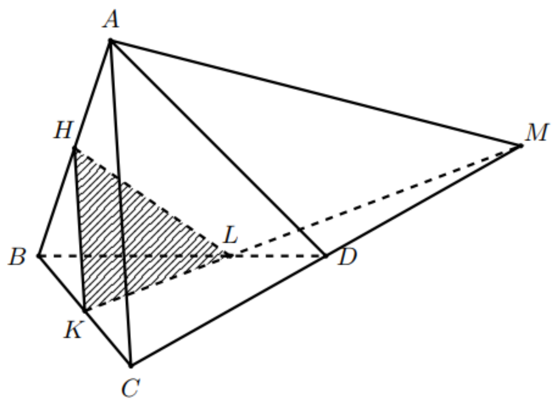
Do đó $MN // EF$ suy ra bốn điểm M, N, E, F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC. Trên đường thẳng CD lấy điểm M nằm ngoài đoạn CD. Thiết diện của tứ diện với mặt phẳng (HKM) là:

A. Tứ giác $HKMN$ với $N \in AD$.
B. Hình thang $HKMN$ với $N \in AD$ và $HK // MN$.
C. Tam giác HKL với $L = KM \cap BD$.
D. Tam giác HKL với $L = HM \cap AD$.

Lời giải



Ta có HK, KM là đoạn giao tuyến của (HKM) với (ABC) và (BCD).

Trong mặt phẳng (BCD), do KM không song song với BD nên gọi $L = KM \cap BD$.

Vậy thiết diện là tam giác HKL.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB//CD$. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (SG_1G_2) và hình chóp $S.ABCD$ là:

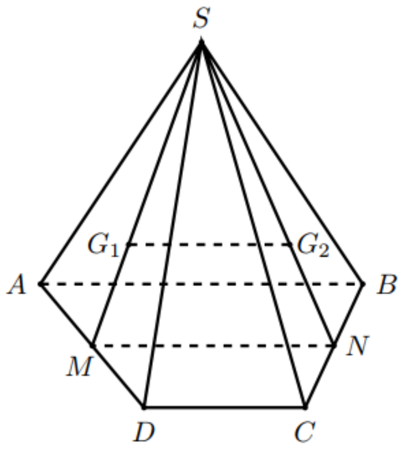
A. Tam giác có một đỉnh là G_1.

B. Tam giác có cạnh là G_1G_2.

C. Tam giác có một đỉnh là S.

D. Tứ giác.

Lời giải



(SG_1G_2) cắt (SAD) theo giao tuyến SM, với M là trung điểm của AD

(SG_1G_2) cắt (SBC) theo giao tuyến SN, với N là trung điểm của BC

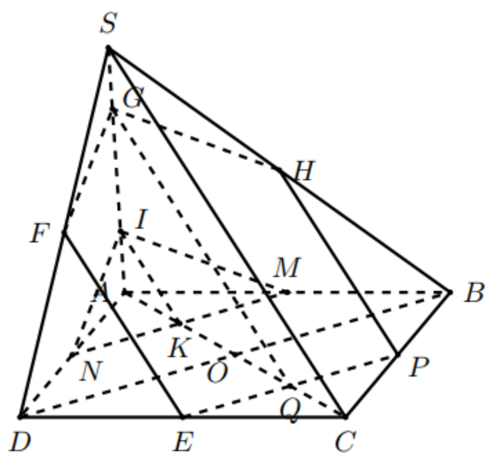
(SG_1G_2) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến MN

Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (SG_1G_2) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác SMN

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AD, BC, điểm I thuộc cạnh SA thỏa mãn $SI = 3IA$. Mặt phẳng (α) đi qua P và song song với mặt phẳng (IMN) cắt hình chóp theo một thiết diện là hình gì?

A. Tứ giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Lục giác. **D.** Tam giác.

Lời giải



P là một điểm chung của (α) và mặt phẳng $(ABCD)$ nên giao tuyến của (α) và mặt phẳng $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua P và song song với MN, giao tuyến này cắt CD và AC lần lượt tại E và Q.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi K là giao điểm của AC và MN.

Q là một điểm chung của (α) và mặt phẳng (SAC) nên giao tuyến của (α) và mặt phẳng (SAC) là đường thẳng đi qua Q và song song với IK, giao tuyến này cắt SA tại G.

G là một điểm chung của (α) và mặt phẳng (SAB) nên giao tuyến của (α) và mặt phẳng (SAB) là đường thẳng đi qua G và song song với IM, giao tuyến này cắt SB tại H.

G là một điểm chung của (α) và mặt phẳng (SAD) nên giao tuyến của (α) và mặt phẳng (SAD) là đường thẳng đi qua G và song song với IN, giao tuyến này cắt SD tại F.

Vậy thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mp(α) là ngũ giác $EFGHP$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB//CD, AB > CD$. Gọi I, J theo thứ tự là trung điểm SB và SC.

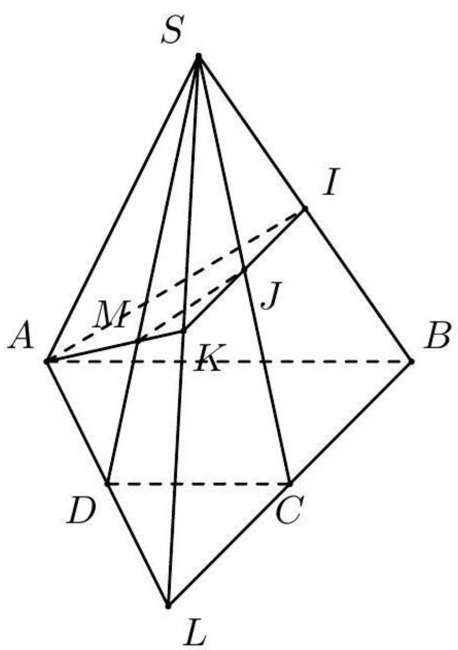
a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng SL với L là giao điểm của của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC)

b) Giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ) là điểm M với M là giao điểm của SD và AK

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (SCD) là đường thẳng MJ

d) Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (AIJ) là một tam giác.

Lời giải



a) Đúng: Xác định giao tuyến của (SAD) và (SBC)

Ta có: $S \in (SAD) \cap (SBC)$ (1)

Trong mặt phẳng $(ABCD)$, gọi $N = AD \cap BC \Rightarrow L \in (SAD) \cap (SBC)$ (2)

Từ $(1),(2)$ ta có $SL = (SAD) \cap (SBC)$.

b) Tìm giao điểm của đường thẳng SD với (AIJ).

Trong mặt phẳng (SBC), gọi $K = SL \cap IJ$.

Trong mặt phẳng (SAD), gọi $M = SD \cap AK \Rightarrow M \in SD \cap (AIJ)$.

c) Đúng: Ta có: $AM = (AIJ) \cap (SAD)$

$MJ = (AIJ) \cap (SCD); IJ = (AIJ) \cap (SBC); IA = (AIJ) \cap (SAB)$.

d) Sai: Xác định thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bở mặt phẳng (AIJ).

Vậy thiết diện là tứ giác $AMJI$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$. Lấy một điểm M thuộc miền trong tam giác SBC. Lấy một điểm N thuộc miền trong tam giác SCD.

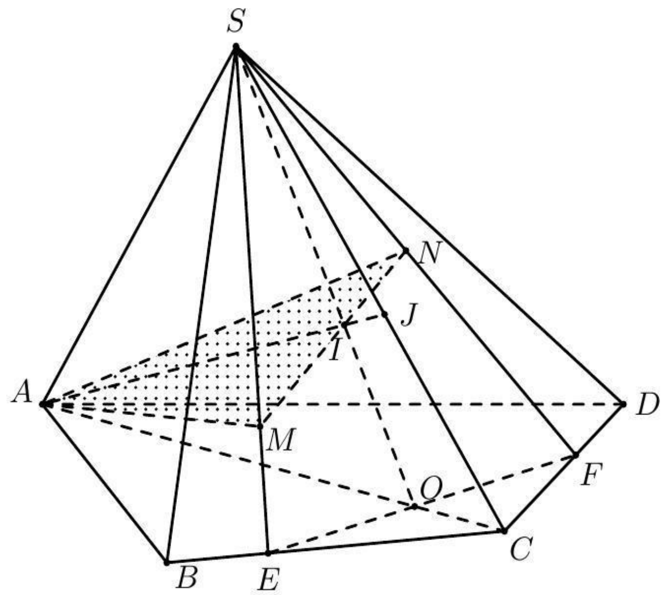
a) Giao điểm của MN với (SAC) là I với I là giao điểm của hai đường thẳng MN và SO.

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SEF) là đường thẳng là đường thẳng SO với F là giao điểm của hai đường thẳng SN và CD.

c) Giao điểm của SC với (AMN) là điểm J với J là giao điểm của hai đường thẳng AI và SC.

d) Ta có thể xác định được ba thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với mặt phẳng (AMN).

Lời giải



a) Đúng: Tìm giao diểm của MN với (SAC).

Gọi E là giao điểm của đường thẳng SM và cạnh BC, F là giao điểm của đường thẳng SN và cạnh CD và gọi O là giao điểm của EF và AC. Chọn mặt phẳng phụ chứa MN là (SEF).

b) Đúng: Ta có: $(SAC) \cap (SEF) = SO$.

Trong mặt phẳng (SEF) hai đường thẳng MN và SO phải cắt nhau, gọi giao điểm này là I thì I chính là giao điểm của MN với (SAC).

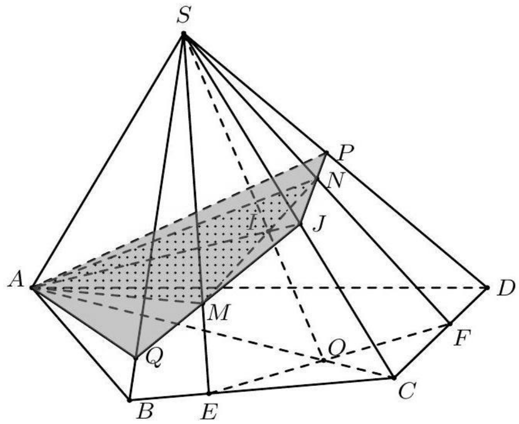
c) Đúng: Tìm giao điểm của SC với (AMN). Chọn mặt phẳng phụ chứa SC là (AMN).

Ta có: $(SAC)\cap(AMN)=AI$.

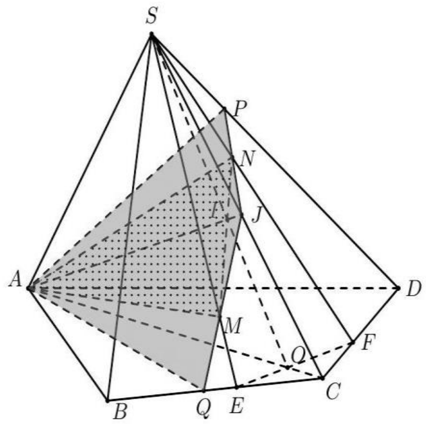
Trong mặt phẳng (SAC) hai đường thẳng AI và SC phải cắt nhau, gọi giao điểm này là J thì J chính là giao điểm của SC với (AMN).

c) Đúng: Tìm thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ với (AMN).

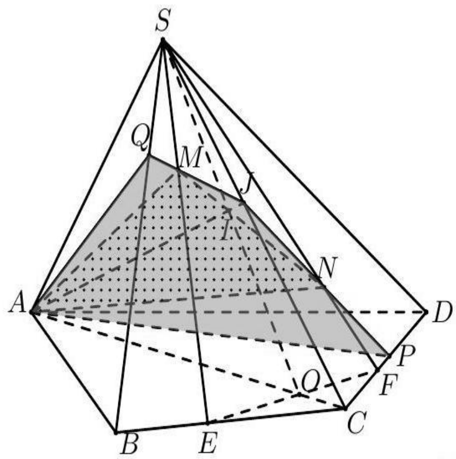
Trường hợp 1: Đường thẳng MJ cắt cạnh SB tại Q và đường thẳng JN cắt cạnh SD tại P . Ta thấy thiết diện là tứ giác $AQJP$.



Trường hợp 2: Đường thẳng MJ cắt cạnh BC tại Q và đường thẳng JN cắt cạnh SD tại P . Ta thấy thiết diện là tứ giác $AQJP$.



Trường hợp 3: Đường thẳng MJ cắt cạnh SB tại Q và đường thẳng JN cắt cạnh CD tại P . Ta thấy thiết diện là tứ giác $AQJP$.



Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm của SB,G là trọng tâm tam giác SAD.

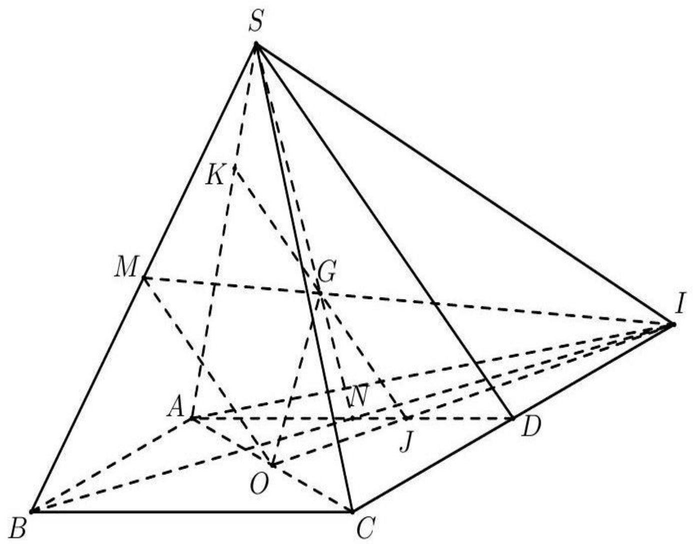
a) Giao điểm I của GM với $(ABCD)$ cũng là giao điểm của hai đường thẳng MG và BN. Khi đó $2IC = ID$.

b) Giao điểm của hai đường thẳng AD và OI là J và nó cũng là giao điểm của mặt phẳng (OMG) với AD. Khi đó $JA = 2JD$.

c) Điểm K là giao điểm của (OMG) với SA cũng là giao điểm của hai đường thẳng SA và GJ. Khi đó $KA = \frac{1}{2}KS$

d) Thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$ là một ngũ giác

Lời giải



a) Gọi N là trung điểm của AD. Chọn mặt phẳng phụ chứa MG là (SBN)

Ta có: $(SBN)\cap(ABCD) = BN$ và MG và BN đồng phẳng $\Rightarrow \frac{SM}{SB} = \frac{1}{2} \neq \frac{SG}{GN} = \frac{2}{3}$.

Suy ra hai đường thẳng MG và BN phải cắt nhau. Đó chính là giao điểm I của MG với $(ABCD)$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SBN với ba điểm thẳng hàng M,G,I ta có:

$\frac{SM}{MB}\cdot\frac{BI}{IN}\cdot\frac{NG}{GS} = 1 \Leftrightarrow \frac{BI}{IN} = 2 \Leftrightarrow BI = 2BN$ suy ra N là trung diểm của BE.

Gọi E là điểm đối xứng với C qua D thì $EC = 2ED$ đồng thời N là trung điểm của BE.
Do đó, hai điểm I và E trùng nhau. Vậy ta có $IC = 2ID$.

b) Đặt $JA = k.JD$. Chọn mặt phẳng phụ chứa AD là $(ABCD)$ ta có $(ABCD)\cap(OMG) = OI$.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ hai đoạn thẳng AD và OI phải cắt nhau, đó là giao điểm J của AD với (OMG).

Tam giác ACI có IO và AD là hai đường trung tuyến, J là giao điểm của hai đoạn thẳng này nên J là trọng tâm suy ra $JA = 2JD$

c) Đúng: Chọn mặt phẳng phụ chứa SA là (SAD). Ta có $(SAD)\cap(OMG) = GJ$.

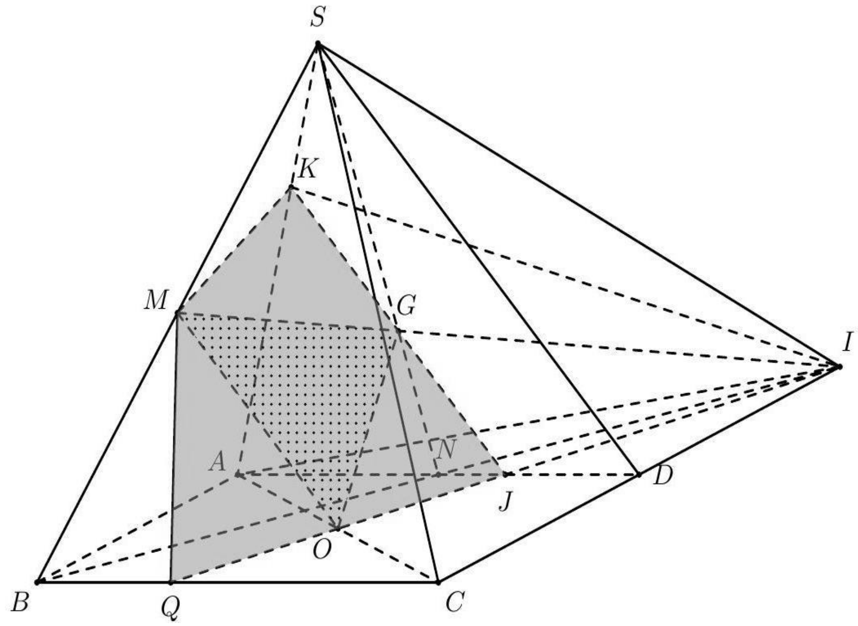
Trong mặt phẳng (SAD) hai đường thẳng SA và GJ phải cắt nhau, đó là giao điểm K của SA với (OMG).

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SAN với ba điểm thẳng hàng K,G,J ta có

$$\frac{SK}{KA}\cdot\frac{AJ}{JN}\cdot\frac{NG}{GS}=1\Leftrightarrow\frac{SK}{KA}=\frac{1}{2}$$

d) Sai: Tìm thiết diện tạo bởi (OMG) với hình chóp $S.ABCD$.

Gọi Q là giao điểm của đường thẳng OI và cạnh BC. Thiết diện mà mặt phẳng (OMG) cắt hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $QMKJ$



Câu 4: Cho hình chóp $S.\ ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của SB,SD và OC.

a) Giao tuyến của (MNP) với (SAC) là đường thẳng PI với I là giao điểm của hai đường thẳng MN và SO.

b) Giao điểm của SA và (MNP) là R với R là giao điểm của hai đường thẳng PI và SA

c) Gọi $T=d\cap BC, Q=d\cap CD$. Khi đó thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP) là ngũ giác $MTQNR$.

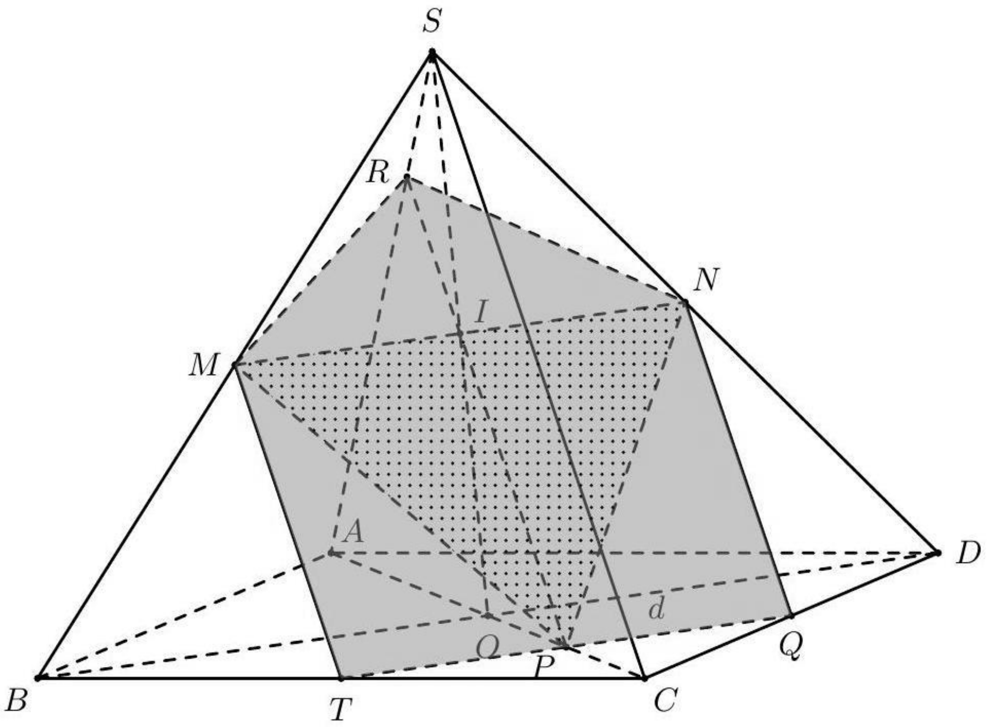
d) Tỉ số $\dfrac{SR}{RA}=3$

Lời giải

a) Đúng: Tìm giao tuyến của (MNP) và (SAC).

P là điểm chung thứ nhất của (MNP) và (SAC).

Trong tam giác SAC, hai đoạn thẳng MN và SO phải cắt nhau. Gọi giao điểm này là I thì I là điểm chung thứ hai của (MNP) và (SAC). Vậy $(MNP)\cap(SAC)=PI$.



b) Đúng: Chọn mặt phẳng phụ chứa SA là (SAC). Khi đó ta có $(SAC)\cap(MNP)=PI$.

Trong mặt phẳng (SAC) hai đường thẳng PI và SA phải cắt nhau, gọi giao điểm này là R thì R chính là giao điểm của SA với (MNP).

c) Đúng: Xác định thiết diện của hình chóp với (MNP). Tính tỉ số mà (MNP) chia các cạnh SA, BC và CD.

Gọi $T = d \cap BC, Q = d \cap CD$. Ta thấy, thiết diện mà mặt phẳng (MNP) cắt hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MTQNR$.

d) Sai: Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác SAO với ba điểm thẳng hàng R, I, P ta có

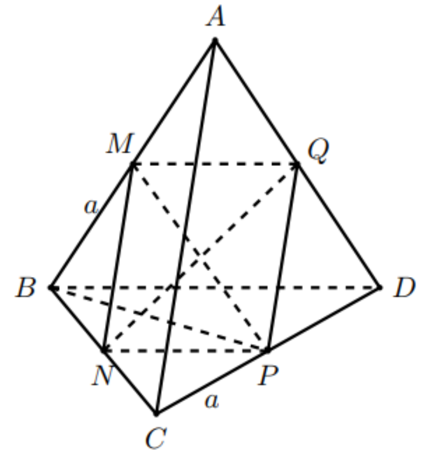
$$\frac{SR}{RA}\cdot\frac{AP}{PO}\cdot\frac{OI}{IS}=1 \Leftrightarrow \frac{SR}{RA}=\frac{1}{3}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M,N,P tương ứng là trung điểm của AB,BC,CD. Mặt phẳng (MNP) tạo với hình tứ diện một thiết diện có diện tích là S. Khi $a=2$ thì giá trị của S bằng bao nhiêu?

Lời giải

Do M,N,P tương ứng là trung điểm của AB,BC,CD suy ra $MN//AC, NP//BD$ nên mặt phẳng (MNP) cắt AD tại Q và có $MQ//BD, PQ//AC$.



Ta có $MN=PQ=\frac{1}{2}AC=\frac{a}{2}; MQ=NP=\frac{1}{2}BD=\frac{a}{2}\Rightarrow MNPQ$ là hình thoi.

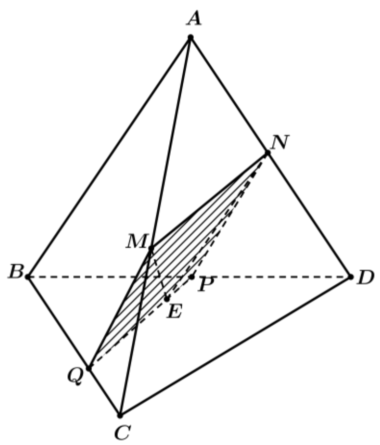
Vì các tam giác BCD, ACD đều cạnh a nên đường cao $BP=AP=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Khi đó tam giác ABP cân tại P nên đường cao $MP=\sqrt{BP^2-BM^2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tương tự ta tính được $NQ=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Do đó diện tích thiết diện là $S=\frac{1}{2}MP.NQ=\frac{a^2}{4}\xrightarrow{a=2}S=1$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh cùng bằng a, M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $2MC=MA$. N là trung điểm AD, E là điểm nằm trong tam giác BCD sao cho $(MNE)//AB$. Gọi S là diện tích của thiết diện của hình tứ diện cắt bởi mặt phẳng (MNE). Khi đó giá trị biểu thức $\frac{5a^2\sqrt{51}}{S}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có:

$$\left.\begin{array}{l} N\in(MNE)\cap(ABD)\\ AB//(MNE)\\ AB\subset(ABD)\end{array}\right\}\Rightarrow(MNE)\cap(ABD)=\Delta.$$

$\Delta\cap BD=P$ nên $(MNE)\cap(ABD)=NP$ đồng thời P là trung điểm BD.

Gọi $Q=PE\cap BC$. Do đó, $(MNE)\cap(BCD)=PQ$.

$(MNE)\cap(ABC)=MQ$

$(MNE)\cap(ACD)=MN$

Khi đó, thiết diện hình chóp cắt bới (MNE) là tứ giác $MNPQ$.

Mặt khác, $NP//MQ$ nên $MNPQ$ là hình thang.

Lại có: $AM=\frac{1}{3}AB=\frac{2a}{3}$, $AN=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$, $PN=\frac{1}{2}AB=\frac{a}{2}$, $MQ=\frac{1}{3}AB=\frac{a}{3}$.

$$MN=\sqrt{AM^2+AN^2-2AM.AN.\cos MAN}=\sqrt{\left(\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2-2.\frac{2a}{3}.\frac{a}{2}.\cos 60^0}=\frac{a\sqrt{13}}{6}.$$

Mà $\Delta MAN=\Delta QBP$ nên $MN=PQ=\frac{a\sqrt{13}}{6}$.

Kẻ $MI\perp NP$, $QH\perp NP$. Vì $\Delta MNI=\Delta PQH$ nên $MI=HQ=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-\frac{a}{3}\right)=\frac{a}{12}$.

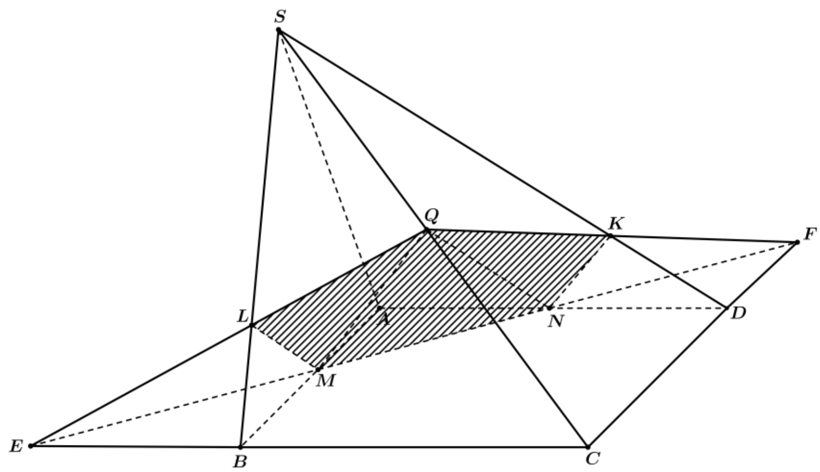
$$NI=\sqrt{MN^2-MI^2}=\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{13}}{6}\right)^2-\left(\frac{a}{12}\right)^2}=\frac{a\sqrt{51}}{12}.$$

Vì vậy, diện tích thiết diện là $S=\frac{1}{2}(NP+MQ).NI=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}+\frac{a}{3}\right).\frac{a\sqrt{51}}{12}=\frac{5a^2\sqrt{51}}{144}$.

Khi đó $S=\frac{5a^2\sqrt{51}}{144}\Rightarrow\frac{5a^2\sqrt{51}}{S}=144$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB,AD,SC. Thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNQ) là đa giác có bao nhiêu cạnh?

Lời giải



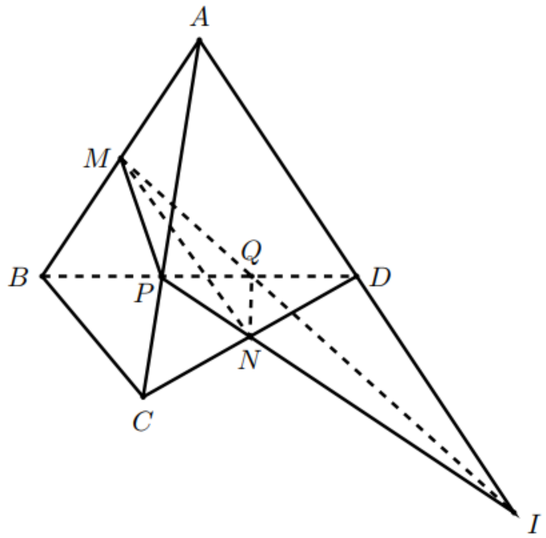
Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi E, F lần lượt là giao điểm của MN với BC, CD.

Trong mặt phẳng (SBC) gọi $L = EQ \cap SB$ và trong mặt phẳng (SCD) gọi $K = QF \cap SD$.

Suy ra thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNQ) là ngũ giác $MNKQL$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD; P là điểm thuộc cạnh AC sao cho $AP = 2PC$. Gọi S_{MNP} là diện tích tam giác MNP và S_{td} là diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi (MNP). Tỉ số $\frac{S_{MNP}}{S_{td}}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Trong mặt phẳng (ACD), $PN \cap AD = I$.

Trong mặt phẳng (ABD), $MI \cap BD = Q$.

Thiết diện của tứ diện cắt bởi (MNP) là tứ giác $MPNQ$.

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác ACD với ba điểm P, N, I thẳng hàng ta có

$$\frac{DI}{IA}.\frac{AP}{PC}.\frac{CN}{ND} = 1 \Leftrightarrow \frac{DI}{IA} = \frac{1}{2}$$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác IAP với ba điểm D, N, C thẳng hàng ta có

$$\frac{IN}{NP}.\frac{PC}{CA}.\frac{AD}{DI} = 1 \Leftrightarrow \frac{IN}{NP} = 3 \Rightarrow \frac{NP}{IP} = \frac{1}{4} \text{ và } \frac{IN}{IP} = \frac{3}{4}$$

Áp dụng định lí Menelaus cho tam giác IAM với ba điểm B, Q, D thẳng hàng ta có

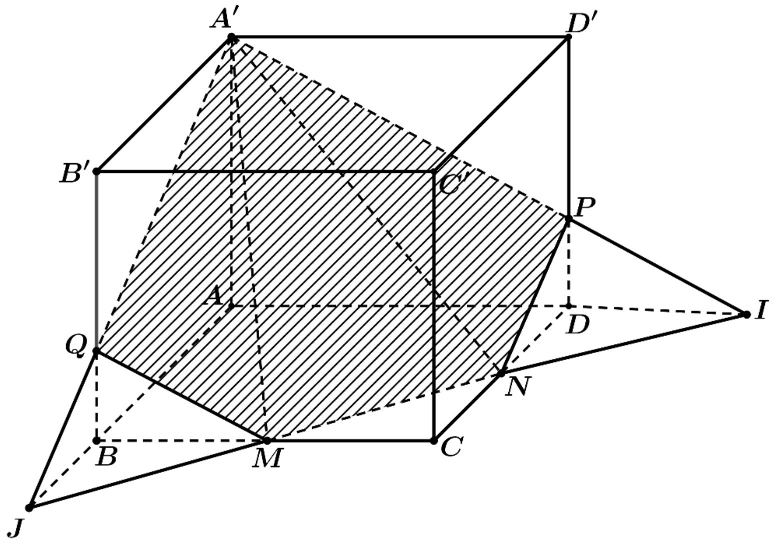
$$\frac{IQ}{QM}.\frac{MB}{BA}.\frac{AD}{DI} = 1 \Leftrightarrow \frac{IQ}{QM} = 2 \Rightarrow \frac{IQ}{IM} = \frac{2}{3}$$

Ta có: $\frac{S_{MNP}}{S_{MIP}} = \frac{NP}{IP} = \frac{1}{4}(1)$ và $\frac{S_{INQ}}{S_{IPM}} = \frac{IN}{IP}.\frac{IQ}{IM} = \frac{3}{4}.\frac{2}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{S_{td}}{S_{IPM}} = \frac{1}{2}(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\dfrac{S_{MNP}}{S_{td}}=\dfrac{1}{2}=0,5$.

Câu 5: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng 2. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD. Diện tích thiết diện của hình lập phương khi cắt bởi mặt phẳng $(A'MN)$ bằng $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$ với a,b,c là các số nguyên dương. Khi đó $T=a+b+c$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



$MN\cap AD=I, MN\cap AB=J, A'I\cap DD'=P, A'J\cap BB'=Q$.

Suy ra thiết diện là ngũ giác $A'PNMQ$.

$\Delta DNI=\Delta CMN=\Delta BMJ \Rightarrow JB=ID=BM=DN=1 \Rightarrow PD=BQ=\dfrac{1}{3}AA'=\dfrac{2}{3}$;

Ta có $QJ=QM=\dfrac{\sqrt{13}}{3}, JM=\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta QJM}=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$ (áp dụng công thức Heron)

Tương tự $PN=PI=\dfrac{\sqrt{13}}{3}, NI=\sqrt{2} \Rightarrow S_{\Delta PNI}=\dfrac{\sqrt{17}}{6}$.

Mặt khác $A'I=A'J=\sqrt{13}, JI=\sqrt{18} \Rightarrow S_{\Delta A'JI}=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}$

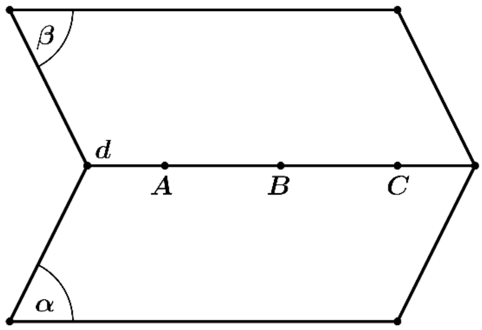
Từ đó suy ra $S_{A'PNMQ}=S_{\Delta A'JI}-S_{\Delta QJM}-S_{\Delta PNI}=\dfrac{3\sqrt{17}}{2}-\dfrac{\sqrt{17}}{6}-\dfrac{\sqrt{17}}{6}=\dfrac{7\sqrt{17}}{6}$

Vậy $a=7;b=17;c=6 \Rightarrow T=a+b+c=7+17+6=30$.

----------------HẾT----------------

Dạng 4: Ba điểm thẳng hàng và ba đường thẳng đồng quy

Phương pháp: Để chứng minh ba điểm A,B,C thẳng hàngm ta cần chứng minh ba điểm này lần lượt thuộc hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β). Nghĩa là chúng cùng thuộc giao tuyến d của hai mặt phẳng (α) và (β) nên chúng thẳng hàng.

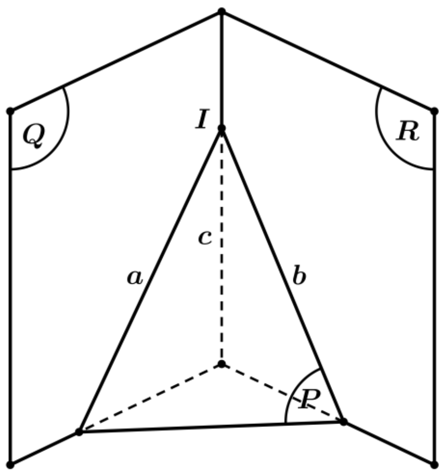


Để chứng minh ba đường thẳng a,b,c đồng quy ta làm theo các bước sau:

- Chọn mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a và b.
- Tìm mặt phẳng (Q) chứa a và (R) chứa b sao cho $(Q)\cap(R)=c \Rightarrow I\in c$.

Suy ra ba đường thẳng a,b,c đồng quy tại I.

- Nghĩa là: $\begin{cases} a\subset(P), b\subset(P), I=a\cap b \\ a=(P)\cap(Q) \\ b=(P)\cap(R) \\ c=(Q)\cap(R) \end{cases} \Rightarrow a,b,c$ đồng quy tại I.

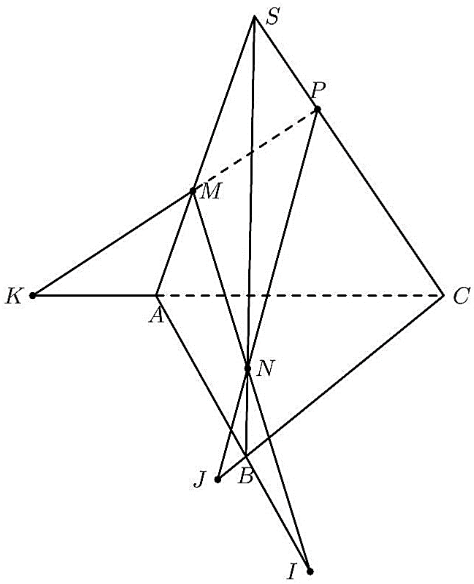


BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho tứ diện $S.ABC$. Trên các cạnh SA,SB,SC lầm lượt lấy các điểm M,N,P sao cho MN cắt AB tại I, NP cắt BC tại J và MP cắt AC tại K. Chứng minh rằng ba điểm I,J,K thẳng hàng

Lời giải

Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (ABC).



Ta có $K = MP \cap AC \Rightarrow \begin{cases} K \in MP, MP \subset (MNP) \Rightarrow K \in (MNP) \\ K \in AC, AC \subset (ABC) \Rightarrow K \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow K \in d \quad (1)$

Tương tự: $I = MN \cap AB \Rightarrow \begin{cases} I \in MN, MN \subset (MNP) \Rightarrow I \in (MNP) \\ I \in AB, AB \subset (ABC) \Rightarrow I \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (2)$

Lại có: $J = NP \cap BC \Rightarrow \begin{cases} J \in NP, NP \subset (MNP) \Rightarrow J \in (MNP) \\ J \in BC, BC \subset (ABC) \Rightarrow J \in (ABC) \end{cases} \Rightarrow J \in d \quad (3)$

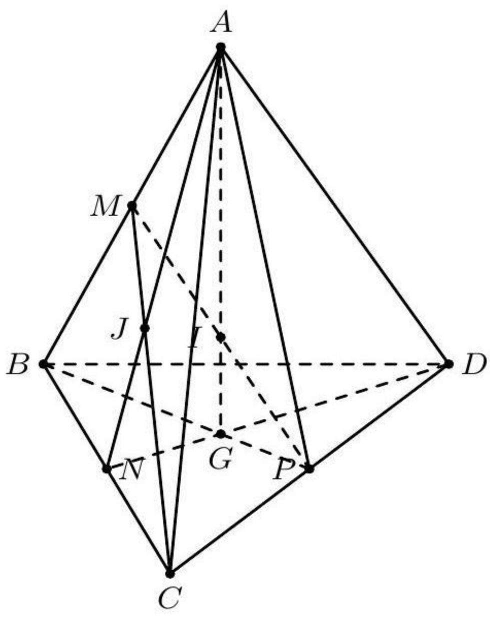
Từ $(1),(2),(3)$ suy ra I, J, K cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm I, J, K thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 2: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD.

a) Xác định giao tuyến của (ADN) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $\begin{cases} A \in (ADN) \\ A \in (ABP) \end{cases} \Rightarrow A \in (ADN) \cap (ABP) \quad (1)$

Tương tự:

$G = BP \cap DN \Rightarrow \begin{cases} G \in DN, DN \subset (ADN) \Rightarrow G \in (ADN) \\ G \in BP, BP \subset (ABP) \Rightarrow G \in (ABP) \end{cases} \Rightarrow G \in (ADN) \cap (ABP) \quad (2)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $(ADN) \cap (ABP) = AG$.

b) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DCM) và (ADN).

Ta có $\begin{cases} D \in (DCM) \\ D \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow D \in d \quad (3)$

Tương tự: $I = AG \cap MP \Rightarrow \begin{cases} I \in AG, AG \subset (ADN) \Rightarrow I \in (ADN) \\ I \in MP, MP \subset (DCM) \Rightarrow I \in (DCM) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (4)$

Lại có: $J = CM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} J \in CM, CM \subset (DCM) \Rightarrow J \in (DCM) \\ J \in AN, AN \subset (ADN) \Rightarrow J \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow J \in d \quad (5)$

Từ $(3),(4),(5)$ suy ra D, I, J cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm D, I, J thẳng hàng (đpcm).

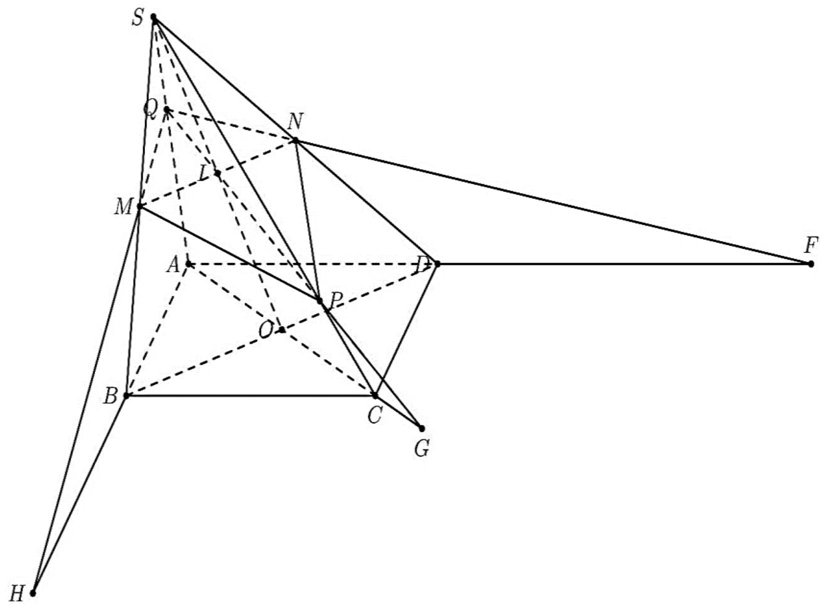
Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, hai điểm M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD, điểm P thuộc SC và không là trung điểm của SC.

a) Tìm giao điểm của SO với (MNP).

b) Tìm giao điểm Q của SA với mặt phẳng (MNP).

c) Gọi F, G, H lần lượt là giao điểm của QM và AB, QP và AC, QN và AD. Chứng minh ba điểm F, G, H thẳng hàng.

Lời giải



a) Trong (SBD) ta có $\begin{cases} SO \cap MN = \{I\} \\ MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow SO \cap (MNP) = \{I\}$.

b) Chọn mặt phẳng (SAC) chứa SA. Ta có $(SAC) \cap (MNP) = PI$. Kẻ $PI \cap SA = \{Q\}$.

Suy ra $SA \cap (MNP) = \{Q\}$.

c) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng $(MNPQ)$ và $(ABCD)$. Ta có

$$F = QM \cap AB \Rightarrow \begin{cases} F \in QM, QM \subset (MNPQ) \Rightarrow F \in (MNPQ) \\ F \in AB, AB \subset (ABCD) \Rightarrow F \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow F \in d \quad (1)$$

$$G = PQ \cap AC \Rightarrow \begin{cases} G \in PQ, PQ \subset (MNPQ) \Rightarrow G \in (MNPQ) \\ G \in AC, AC \subset (ABCD) \Rightarrow G \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow G \in d \quad (2)$$

$$H = NQ \cap AD \Rightarrow \begin{cases} H \in NQ, NQ \subset (MNPQ) \Rightarrow H \in (MNPQ) \\ H \in AD, AD \subset (ABCD) \Rightarrow H \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow H \in d \quad (3)$$

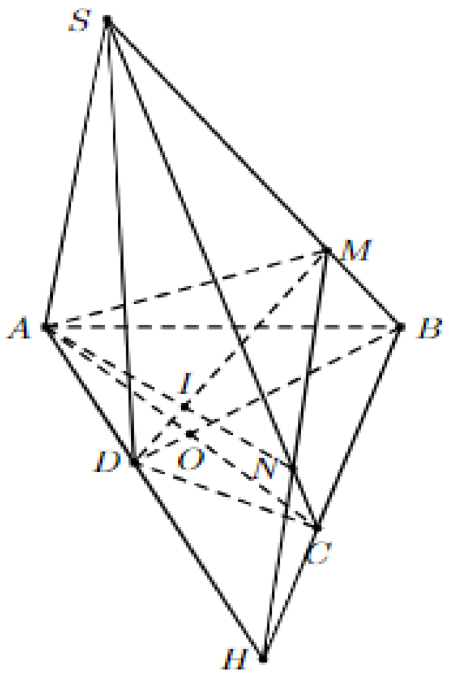
Từ $(1),(2),(3)$ suy ra F, G, H cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm F, G, H thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Lấy M thuộc SB và O là giao điểm AC với BD.

a) Tìm giao điểm N của SC với (ADM).

b) Gọi $I = AN \cap DM$. Chứng minh S, I, O thẳng hàng.

Lời giải



a) Chọn mặt phẳng (SBC) chứa SC. Gọi $H = AD \cap BC$.

Ta có $(SBC) \cap (ADM) = MH$. Kẻ $MH \cap SC = N$. Suy ra $SC \cap (ADM) = N$.

b) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD).

Ta có $\begin{cases} S \in (SAC) \\ S \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow S \in d \quad (1)$

Tương tự: $I = AN \cap SO \Rightarrow \begin{cases} I \in AN, AN \subset (SAC) \Rightarrow I \in (SAC) \\ I \in SO, SO \subset (SBD) \Rightarrow I \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (2)$

$O = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in d \ (3)$

Từ $(1),(2),(3)$ suy ra S, I, O cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm S, I, O thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD.

a) Tìm giao tuyến của (ADN) và (ABP).

b) Gọi $I = AG \cap MP$ và $J = CM \cap AN$. Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

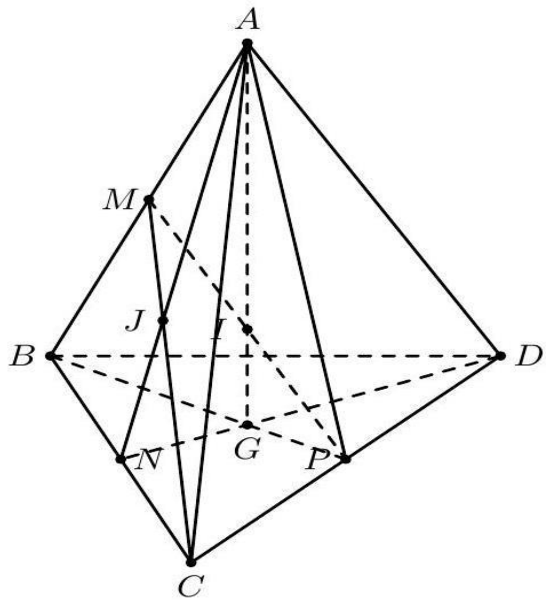
Lời giải

a) Ta có $\begin{cases} A \in (ADN) \\ A \in (ABP) \end{cases} \Rightarrow A \in (ADN) \cap (ABP)$

Tương tự:

$G = BP \cap DN \Rightarrow \begin{cases} G \in BP, BP \subset (ABP) \Rightarrow G \in (ABP) \\ G \in DN, DN \subset (ADN) \Rightarrow G \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow G \in (ADN) \cap (ABP) \ (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow (ADN) \cap (ABP) = AG$.



b) Gọi đường thẳng d là giao tuyến của hai mặt phẳng (DMC) và (ADN).

Ta có $\begin{cases} D \in (DMC) \\ D \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow D \in d \quad (3)$

Tương tự: $I = AG \cap MP \Rightarrow \begin{cases} I \in AG, AG \subset (ADN) \Rightarrow I \in (ADN) \\ I \in MP, MP \subset (DMC) \Rightarrow I \in (DMC) \end{cases} \Rightarrow I \in d \quad (4)$

$J = CM \cap AN \Rightarrow \begin{cases} J \in CM, CM \subset (DMC) \Rightarrow J \in (DMC) \\ J \in AN, AN \subset (ADN) \Rightarrow J \in (ADN) \end{cases} \Rightarrow J \in d \quad (5)$

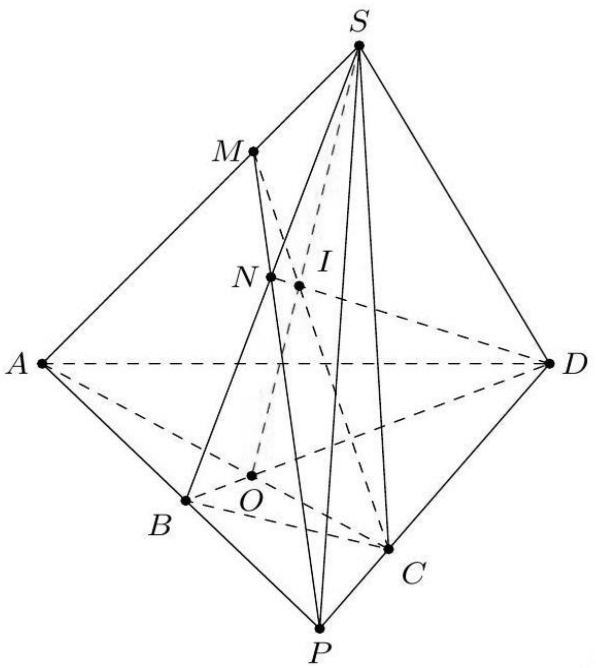
Từ $(3),(4),(5)$ suy ra D, I, J cùng thuộc $d \Rightarrow$ ba điểm D, I, J thẳng hàng (đpcm).

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AC cắt BD tại O và AB cắt CD tại P. Điểm M thuộc cạnh SA (M khác S, M khác A). Gọi N là giao điểm của MP và SB, I là giao điểm của MC và DN. Chứng minh rằng S, O, I thẳng hàng.

Lời giải

Ta có $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SDB) \\ O \in (SAC) \cap (SDB) \end{cases}$ suy ra $SO = (SAC) \cap (SDB)$.

Xét $(MPD), I \in MC \cap DN \Rightarrow \begin{cases} I \in MC, MC \subset (SAC) \\ I \in DN, DN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SDB)$ hay $I \in SO$.



Vậy S, O, I thẳng hàng.

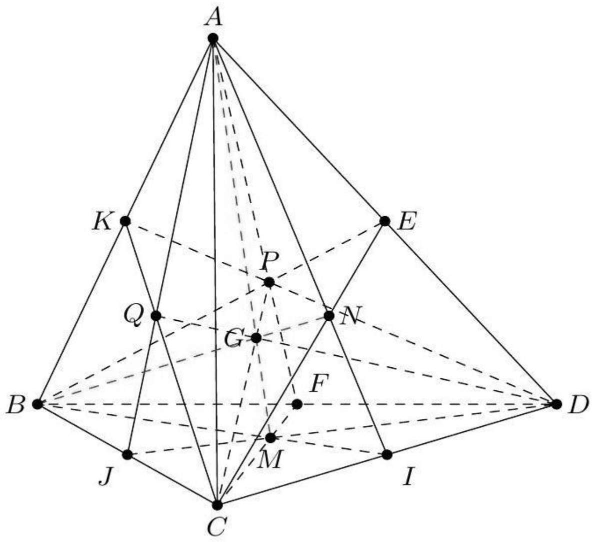
Bài tập 7: Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I là trung điểm cạnh CD. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA.

a) Chứng minh rằng các điểm M, N thuộc mặt phẳng (ABI).

b) Gọi G là giao điểm của AM và BN. Chứng minh rằng: $\dfrac{GM}{GA} = \dfrac{GN}{GB} = \dfrac{1}{3}$.

c) Gọi P, Q lần lượt là trọng tâm các tam giác DAB, ABC. Chứng minh rằng các đường thẳng CP, DQ cùng đi qua điểm G và $\dfrac{GP}{GC} = \dfrac{GQ}{GD} = \dfrac{1}{3}$.

Lời giải



a) Xét tam giác BCD có BI là đường trung tuyến và M là trọng tâm nên $M \in BI$.

Xét tam giác CDA có AI là đường trung tuyến và N là trọng tâm nên $N \in AI$.

Từ (1) và (2) suy ra $M, N \in (ABI)$.

b) Xét ΔABI có $\frac{IN}{IA} = \frac{IM}{IB} = \frac{1}{3}$ (vì M, N lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD, CDA) suy ra $MN // AB$ (định lý Ta-let đảo). Do đó $\frac{GM}{GA} = \frac{GN}{GB} = \frac{1}{3}$ (định lý Ta-let).

c) Xét ΔAJD có $\frac{JQ}{JA} = \frac{JM}{JD} = \frac{1}{3}$ (vì Q, M lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD) suy ra $QM // AD$ (định lý Ta-let đảo).

Xét (AJD) gọi $G' = AM \cap DQ$. Ta có $\frac{G'M}{G'A} = \frac{QM}{AD} = \frac{JM}{JD} = \frac{1}{3}$ suy ra $G' \equiv G$.

Do đó DQ đi qua G .

Xét ΔEBC có $\frac{EP}{EB} = \frac{EN}{EC} = \frac{1}{3}$ (vì P, N lần lượt là trọng tâm các tam giác ABD, ACD) suy ra $PN // BC$ (định lý Ta-let đảo).

Xét (EBC) gọi $G'' = CP \cap BN$. Ta có $\frac{G''N}{G''B} = \frac{PN}{BC} = \frac{EN}{EC} = \frac{1}{3}$ suy ra $G'' \equiv G$.

Do đó CP đi qua G .

Từ (3) và (4) suy ra CP, DQ cùng đi qua điểm G .

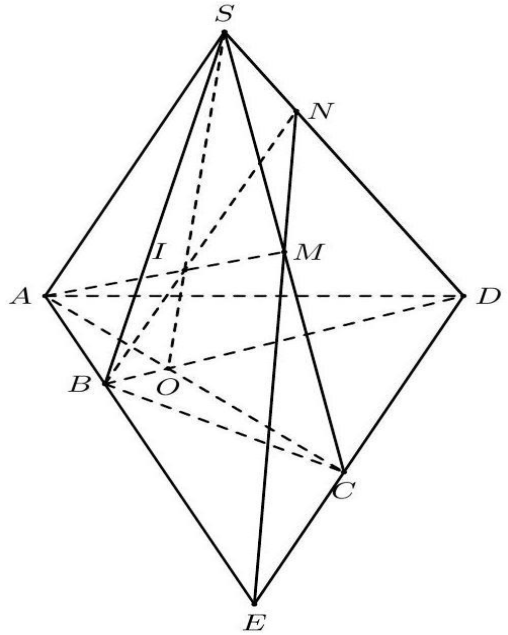
Xét ΔKCD có $\frac{GP}{GC} = \frac{GQ}{GD} = \frac{PQ}{CD} = \frac{KQ}{KD} = \frac{1}{3}$ (vì P, Q lần lượt là trọng tâm các ΔABD , ΔABC) .

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AB không song song CD. Gọi M là trung điểm SC và O là giao điểm AC với BD.

a) Tìm giao điểm N của SD với (MAB).

b) Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

Lời giải



a) Tìm giao điểm N của SD với (MAB). Chọn mặt phẳng phụ (SCD) chứa SD.

Xét (SCD) và (MAB)

Tong $(ABCD)$ gọi $E = AB \cap CD$ thì ta có: $\begin{cases} E \in AB, AB \subset (ABM) \Rightarrow E \in (ABM) \\ E \in CD, CD \subset (SCD) \Rightarrow E \in (SCD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (ABM) \cap (SCD) \quad (1)$

Mặt khác $\begin{cases} M \in (ABM) \\ M \in SC, SC \subset (SCD) \Rightarrow M \in (SCD) \end{cases} \Rightarrow M \in (ABM) \cap (SCD) \ (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow (ABM) \cap (SCD) = EM$.

Trong (SCD) gọi $N = SD \cap EM$ khi đó $\begin{cases} N \in SD \\ N \in EM, EM \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow N = SD \cap (ABM)$.

b) Chứng minh ba đường thẳng SO, AM, BN đồng quy.

Nhận xét: $AM \subset (SAC), BN \subset (SBD)$ nên ta quan tâm đến hai mặt phẳng này.

Xét (SAC) và (SBD) có $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (3)

Ta có: $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD) \quad (4)$

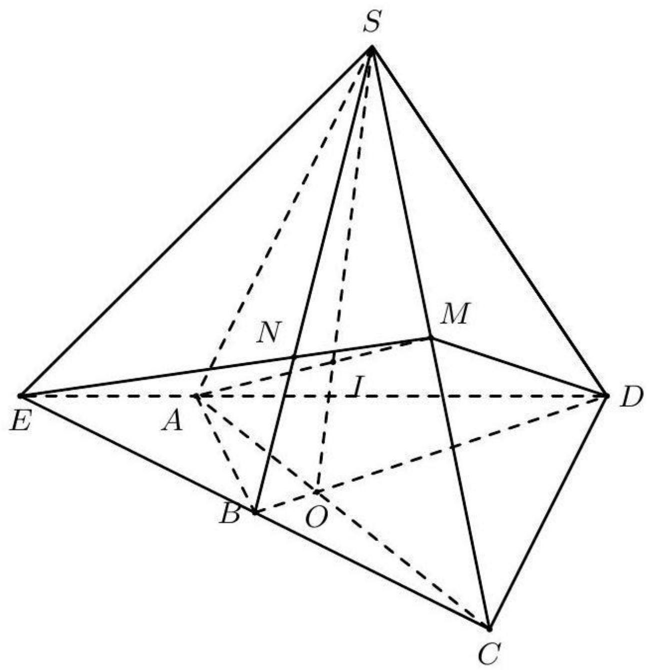
Từ $(3),(4) \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Mặt khác, trong (ABM) gọi $I = AM \cap BN$

$\Rightarrow \begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in BN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow I \in SO$ do đó SO, AM, BN đồng quy.

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Lấy M trên cạnh SC. Gọi N là giao điểm của SB và (ADM). Gọi O là giao điểm AC và BD. Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng quy.

Lời giải



Tìm N là giao điểm của SB và (ADM). Chọn mặt phẳng phụ (SBC) chứa SB.

Xét (SBC) và (ADM):

Trong $(ABCD)$, gọi $E = AD \cap BC$ thì ta có: $\begin{cases} E \in BC, BC \subset (SBC) \Rightarrow E \in (SBC) \\ E \in AD, AD \subset (ADM) \Rightarrow E \in (ADM) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SBC) \cap (ADM)$ (1)

Mặt khác: $\begin{cases} M \in (ADM) \\ M \in SC, SC \subset (SBC) \Rightarrow M \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (SBC) \cap (ADM)$ (2)

Từ $(1),(2) \Rightarrow (SBC) \cap (ADM) = EM$.

Trong (SBC) gọi $N = SB \cap EM$ khi đó: $\begin{cases} N \in SB \\ N \in EM, EM \subset (ADM) \end{cases} \Rightarrow N = SB \cap (ADM)$.

Chứng minh rằng SO, AM, DN đồng quy.

Nhận xét: $AM \subset (SAC), DN \subset (SBD)$ nên ta quan tâm đến hai mặt phẳng này.

Xét (SAC) và (SBD) có: $S \in (SAC) \cap (SBD)$ (3)

Ta có: $\begin{cases} O \in AC, AC \subset (SAC) \Rightarrow O \in (SAC) \\ O \in BD, BD \subset (SBD) \Rightarrow O \in (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAC) \cap (SBD)$ (4)

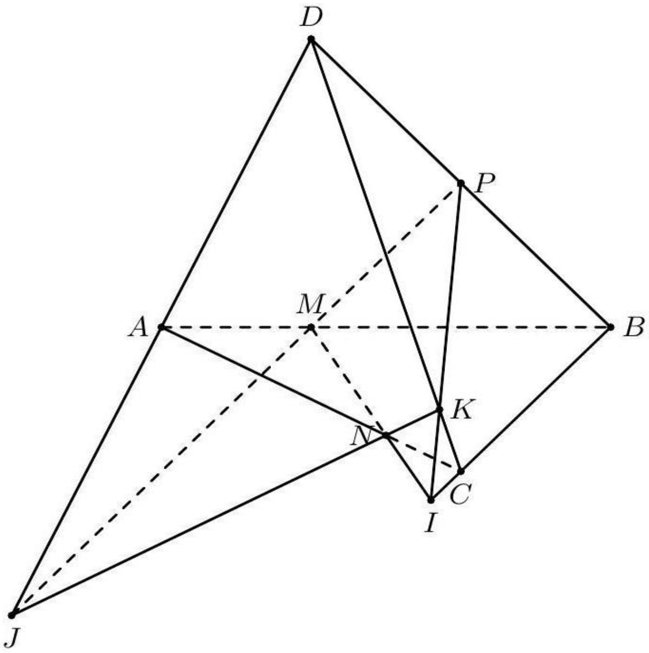
Từ $(3),(4) \Rightarrow (SAC) \cap (SBD) = SO$.

Mặt khác, trong (ADM), gọi $I = AM \cap DN$.

$\begin{cases} I \in AM \subset (SAC) \\ I \in DN \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAC) \cap (SBD) \Rightarrow I \in SO$ do đó SO, AM, DN đồng quy.

Bài tập 10: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy M,N,P lần lượt trên các cạnh AB,AC,BD sao cho MN cắt BC tại I,MP cắt AD tại J. Chứng minh: PI,NJ,CD đồng quy.

Lời giải



Trong (BCD) gọi $K = CD \cap IP$ khi đó: $\begin{cases} K \in CD \subset (ACD) \\ K \in PI \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow K \in (ACD) \cap (MNP)$ (1)

Lại có: $\begin{cases} N \in AC \subset (ACD) \\ N \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow K \in (ACD) \cap (MNP)$ (2)

Mặt khác: $\begin{cases} J \in AD \subset (ACD) \\ J \in MP \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow J \in (ACD) \cap (MNP)$ (3)

Từ (1),(2) và (3) suy ra J,N,K thẳng hàng hay ba đường thẳng PI,NJ,CD đồng quy.

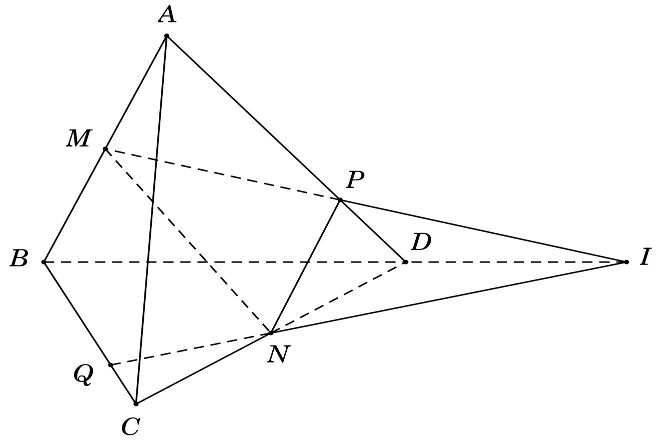
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Mặt phẳng (α) qua MN cắt AD, BC lần lượt tại P và Q. Biết MP cắt NQ tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, C. **B.** I, B, D. **C.** I, A, B. **D.** I, C, D.

Lời giải



Ta có $(ABD)\cap(BCD)=BD$.

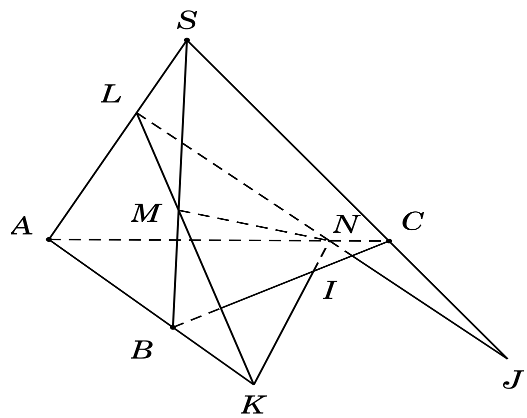
Lại có $\begin{cases} I\in MP\subset(ABD) \\ I\in NQ\subset(BCD)\end{cases} \Rightarrow I$ thuộc giao tuyến của (ABD) và (BCD)

$\Rightarrow I\in BD \Rightarrow I, B, D$ thẳng hàng.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$. Gọi L, M, N lần lượt là các điểm trên các cạnh SA, SB và AC sao cho LM không song song với AB, LN không song song với SC. Mặt phẳng (LMN) cắt các cạnh AB, BC, SC lần lượt tại K, I, J. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. K, I, J. **B.** M, I, J. **C.** N, I, J. **D.** M, K, J.

Lời giải



Ta có: $M \in SB$ suy M là điểm chung của (LMN) và (SBC).

I là điểm chung của (LMN) và (SBC).

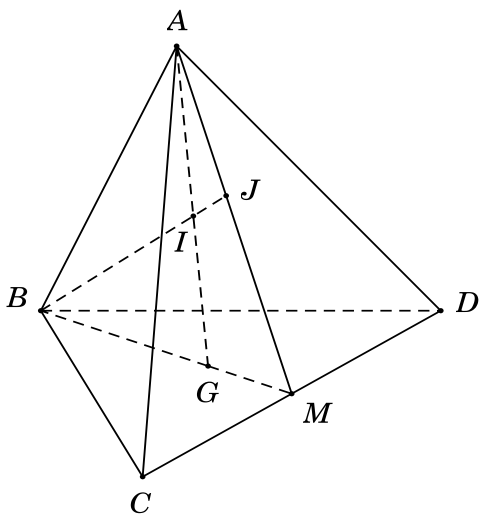
J là điểm chung của (LMN) và (SBC).

Vậy M, I, J thẳng hàng vì cùng thuộc giao tuyến của (LMN) và (SBC).

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD, M là trung điểm CD, I là điểm ở trên đoạn thẳng AG, BI cắt mặt phẳng (ACD) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $AM = (ACD) \cap (ABG)$.
B. A, J, M thẳng hàng.
C. J là trung điểm của AM.
D. $DJ = (ACD) \cap (BDJ)$.

Lời giải



Ta có A là điểm chung thứ nhất giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

Do $BG \cap CD = M \Rightarrow \begin{cases} M \in BG \subset (ABG) \Rightarrow M \in (ABG) \\ M \in CD \subset (ACD) \Rightarrow M \in (ACD) \end{cases} \Rightarrow M$ là điểm chung thứ hai giữa hai mặt phẳng (ACD) và (GAB).

$\Rightarrow (ABG) \cap (ACD) = AM$

Ta có $\begin{cases} BI \subset (ABG) \\ AM \subset (ABM) \\ (ABG) \equiv (ABM) \end{cases} \Rightarrow AM, BI$ đồng phẳng.

$\Rightarrow J = BI \cap AM \Rightarrow A, J, M$ thẳng hàng

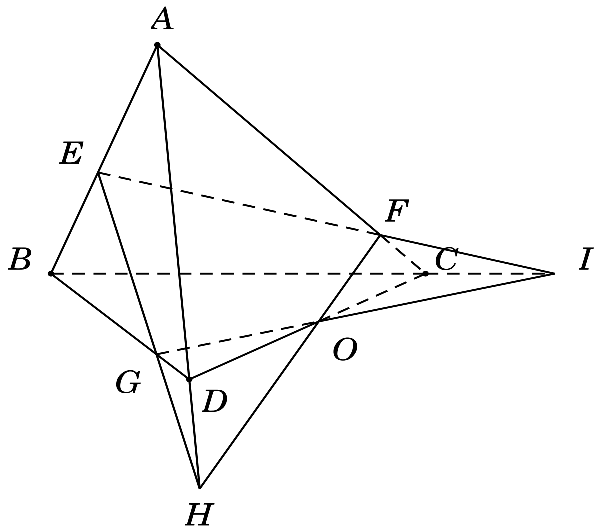
Ta có $\begin{cases} DJ \subset (ACD) \\ DJ \subset (BDJ) \end{cases} \Rightarrow DJ = (ACD) \cap (BDJ)$

Điểm I di động trên AG nên J có thể không phải là trung điểm của AM

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi $E,\ F,\ G$ là các điểm lần lượt thuộc các cạnh $AB,\ AC,\ BD$ sao cho EF cắt BC tại I, EG cắt AD tại H. Ba đường thẳng nào sau đây đồng quy?

A. $CD,\ EF,\ EG.$ **B.** $CD,\ IG,\ HF.$ **C.** $AB,\ IG,\ HF$. **D.** $AC,\ IG,\ BD.$

Lời giải



Phương pháp: Để chứng minh ba đường thẳng $d_1,\ d_2,\ d_3$ đồng quy ta chứng minh giao điểm của hai đường thẳng d_1 và d_2 là điểm chung của hai mặt phẳng (α) và (β); đồng thời d_3 là giao tuyến (α) và (β).

Gọi $O = HF \cap IG$ ta có $O \in HF$ mà $HF \subset (ACD)$ suy ra $O \in (ACD)$.

Mà $O \in IG$ mà $IG \subset (BCD)$ suy ra $O \in (BCD)$ do đó $O \in (ACD) \cap (BCD)$. (1)

Mặt khác: $(ACD) \cap (BCD) = CD$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $O \in CD$. Vậy ba đường thẳng $CD,\ IG,\ HF$ đồng quy.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ không phải là hình thang. Trên cạnh SC lấy điểm M. Gọi N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB). Mệnh đề nào sau đây đúng?

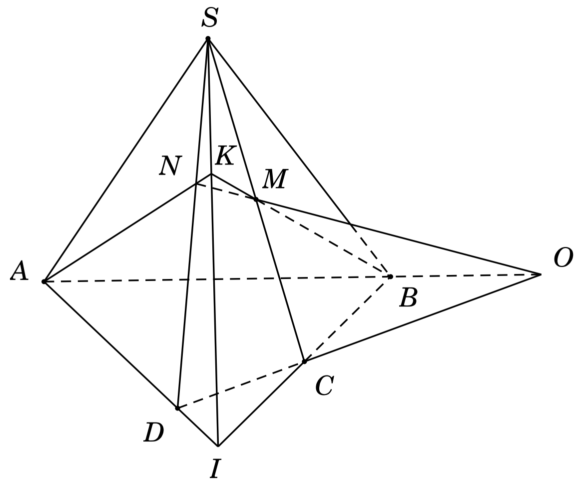
A. Ba đường thẳng $AB,\ CD,\ MN$ đôi một song song.

B. Ba đường thẳng $AB,\ CD,\ MN$ đôi một cắt nhau.

C. Ba đường thẳng $AB,\ CD,\ MN$ đồng quy.

D. Ba đường thẳng $AB,\ CD,\ MN$ cùng thuộc một mặt phẳng.

Lời giải



Gọi $I = AD \cap BC$. Trong mặt phẳng (SBC), gọi $K = BM \cap SI$. Trong mặt phẳng (SAD), gọi $N = AK \cap SD$.

Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (AMB).

Gọi $O = AB \cap CD$ ta có $O \in AB$ mà $AB \subset (AMB)$ suy ra $O \in (AMB)$.

Mà $O \in CD$ mà $CD \subset (SCD)$ suy ra IJ, MN, SE.

Do đó $O \in (AMB) \cap (SCD)$ (1) mà $(AMB) \cap (SCD) = MN$. (2)

Từ (1) và (2), suy ra $O \in MN$. Vậy ba đường thẳng $AB,\ CD,\ MN$ đồng quy.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AD // BC, AD > BC)$. Gọi I là giao điểm của AB và DC, M là trung điểm của SC và DM cắt (SAB) tại J. Khẳng định nào sau đây **sai?**

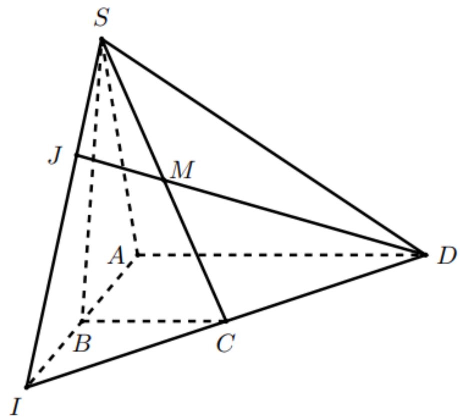
A. Ba điểm S, I, J thẳng hàng.

B. Đường thẳng JM thuộc mặt phẳng (SAB).

C. Đường thẳng SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

D. Đường thẳng DM thuộc mặt phẳng (SCI).

Lời giải



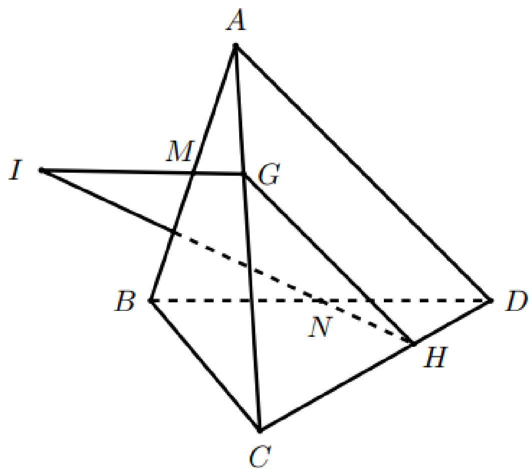
Trong (SCD) $DM \cap SI = J$ khi đó $J = DM \cap (SAB)$.

Câu 7: Cho hình tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, BD. Các điểm G, H lần lượt trên cạnh AC, CD sao cho NH cắt MG tại I. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

A. A, C, I thẳng hàng **B.** B, C, I thẳng hàng.

C. N, G, H thẳng hàng. **D.** B, G, H thẳng hàng.

Lời giải



Do NH cắt MG tại I nên bốn điểm M,N,H,G cùng thuộc mặt phẳng (α).

Xét ba mặt phẳng (ABC), (BCD), (α) phân biệt đồng thời $\begin{cases}(\alpha)\cap(ABC)=MG\\(\alpha)\cap(BCD)=NH\\(ABC)\cap(BCD)=BC\end{cases}$

Mà $MG\cap NH=I$ suy ra MG, NH, BC đồng quy tại I nên B, C, I thẳng hàng.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AD\,//\,BC,\, AD>BC)$. Gọi I là giao điểm của AB và DC; M là trung điểm của SC và DM cắt mặt phẳng (SAB) tại J. Khẳng định nào sau đây sai?

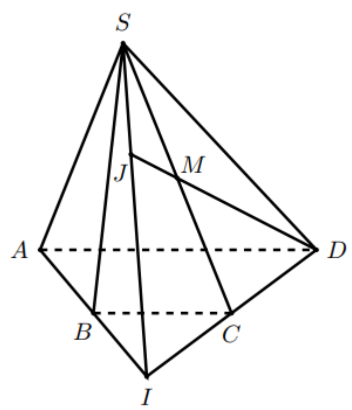
A. Đường thẳng SI là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

B. Đường thẳng JM thuộc mặt phẳng (SAB).

C. Ba điểm S, I, J thẳng hàng.

D. Đường thẳng DM thuộc mặt phẳng (SCI).

Lời giải



Ta có $M \notin (SAB)$ nên đường thẳng JM không thuộc mặt phẳng (SAB).

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Khẳng định nào sau đây đúng?

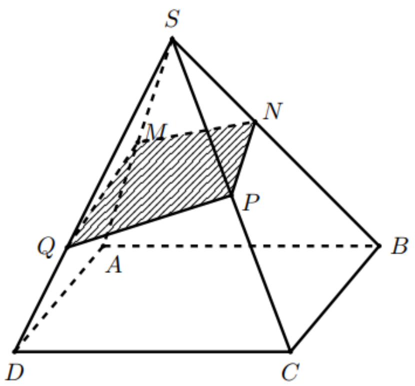
A. Các đường thẳng $MP,\ NQ,\ SO$ đồng qui.

B. Các đường thẳng $MP,\ NQ,\ SO$ chéo nhau.

C. Các đường thẳng $MP,\ NQ,\ SO$ đôi một song song.

D. Các đường thẳng $MP,\ NQ,\ SO$ trùng nhau.

Lời giải



Ta có M, N, P, Q đồng phẳng và tạo thành tứ giác $MNPQ$ nên hai đường MP và NQ cắt nhau.

Mặt khác: $\begin{cases} (MNPQ) \cap (SAC) = MP \\ (MNPQ) \cap (SBD) = NQ \\ (SAC) \cap (SBD) = SO \end{cases}$

Từ đó suy ra các đường thẳng $MP,\ NQ,\ SO$ đồng quy.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$. Một mặt phẳng (P) bất kì cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lầm lượt tại $A'; B'; C'; D'$. Gọi I là giao điểm của AC và BD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định dưới đây?

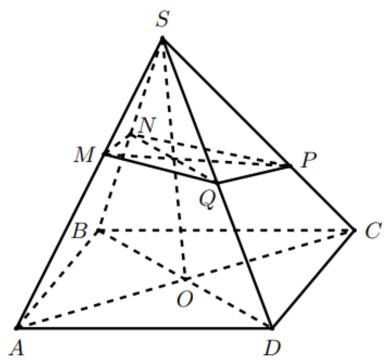
A. Các đường thẳng $AB, CD, C'D'$ đồng quy

B. Các đường thẳng $AB, CD, A'B'$ đồng quy

C. Các đường thẳng $A'C', B'D', SI$ đồng quy.

D. Các đường thẳng $SB, AD, B'C'$ đồng quy

Lời giải



Hai mặt phẳng (P) và (SAC) cắt nhau theo giao tuyến $A'C'$.

Hai mặt phẳng (P) và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến $B'D'$.

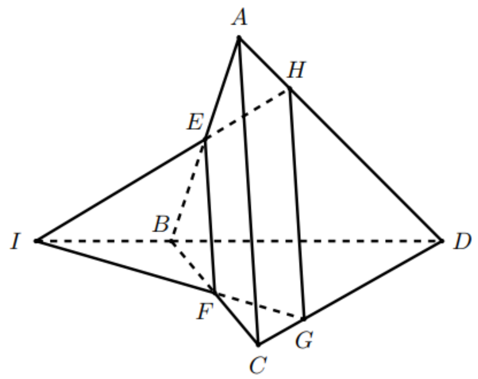
Hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) cắt nhau theo giao tuyến SI.

Vậy ba đường thẳng $A'C', B'D', SI$ đồng quy.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của cạnh AB, BC. Mặt phẳng (P) đi qua EF cắt AD, CD lần lượt tại H và G. Biết EH cắt FG tại I. Ba điểm nào sau đây thẳng hàng?

A. I, A, B. **B.** I, C, B. **C.** I, D, B. **D.** I, C, D.

Lời giải



$$I = EH \cap FG \Rightarrow \left.\begin{matrix} I \in EH \subset (ABD) \\ I \in FG \subset (ABC) \end{matrix}\right\} \Rightarrow I \in (ABD) \cap (ABC) = BD$$. Vậy I, D, B thẳng hàng.

Câu 12: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$, gọi O là giao điểm của AC và BD. Một mặt phẳng (α) cắt các cạnh bên SA, SB, SC, SD tương ứng tại các điểm M, N, P, Q. Khẳng định nào **đúng**?

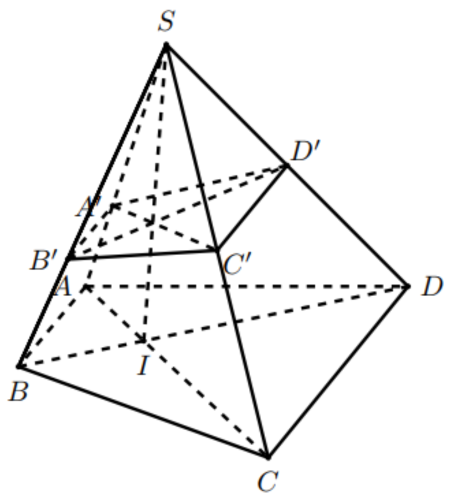
A. Các đường thẳng MN, PQ, SO đồng quy.

B. Các đường thẳng MP, NQ, SO đồng quy.

C. Các đường thẳng MQ, PN, SO đồng quy.

D. Các đường thẳng MQ, PQ, SO đồng quy.

Lời giải



Ta có: $MP \subset (SAC)$; $NQ \subset (SBD)$ và $(SAC) \cap (SBD) = SO$

Gọi $I = MP \cap NQ$ thì khi đó $I \in SO$ nên $MP,\ NQ,\ SO$ đồng quy.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $AB \cap CD = E$ và $AD \cap BC = K$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC.

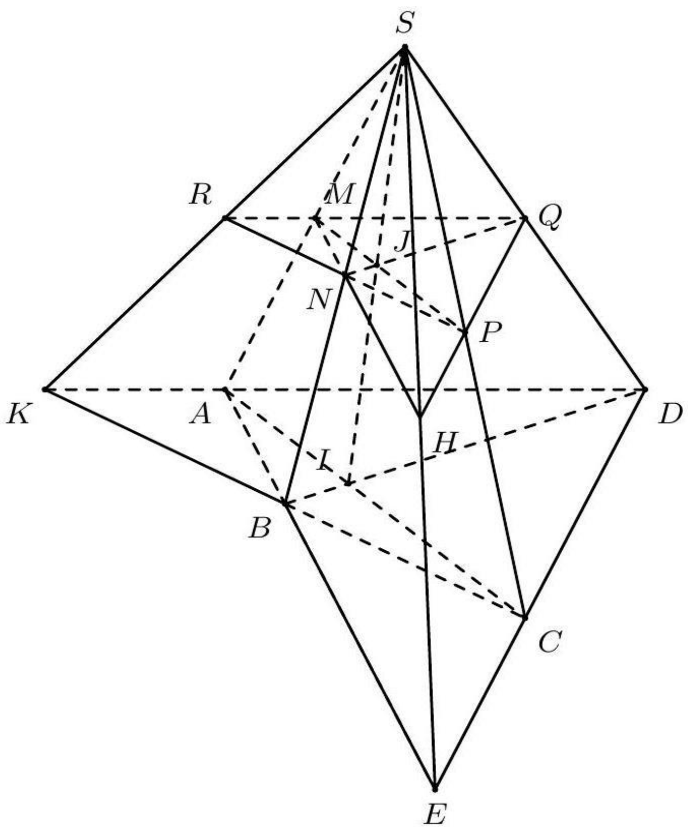
a) Giao tuyến của (SAC) và (SBD) cũng là giao điểm của hai đường thẳng AC và BD.

b) Giao điểm của đường thẳng SD và mặt phẳng (MNP) cũng là giao điểm của hai đường thẳng SD và NJ.

c) Gọi $H = MN \cap PQ$. Khi đó ba điểm S, H, E thẳng hàng.

e) Ba đường thẳng SK, QM, NP đồng quy tại một điểm

Lời giải



a) Đúng: Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

Ta có: $S \in (SBD) \cap (SAC)$

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $I = AC \cap BD \Rightarrow \begin{cases} I \in BD \subset (SBD) \\ I \in AC \subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow I \in (SBD) \cap (SAC)$

b) Đúng: Từ (1) và (2) suy ra $(SBD) \cap (SAC) = SI$

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $J = MP \cap SI$

Tìm giao điểm của Q của SD và (MNP). Trong mặt phẳng (SBD), gọi $Q = SD \cap NJ$

$\Rightarrow \begin{cases} Q \in SD \\ Q \in NJ \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow Q = SD \cap (MNP)$

c) Đúng: Gọi $H = MN \cap PQ$. Ta có $SE = (SAB) \cap (SCD)$. Theo giả thuyết có $H = MN \cap PQ$

$\Rightarrow \begin{cases} H \in MN \subset (SAB) \\ H \in PQ \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow H \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow H \in SE$

Suy ra ba điểm điểm S, H, E thẳng hàng.

d) Đúng: Có $SK = (SAD) \cap (SBC)$

Theo giả thuyết có $R = MQ \cap NP \Rightarrow \begin{cases} R \in MQ \subset (SAD) \\ R \in NP \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow R \in (SAD) \cap (SBC) \Rightarrow R \in SK$

Suy ra ba đường thẳng SK, MQ, NP đồng quy tại điểm R.

Câu 2: Cho tứ diện $SABC$ với I trung điểm của SA, J là trung điểm của BC. Gọi M là điểm di động trên IJ và N là điểm di động trên SC.

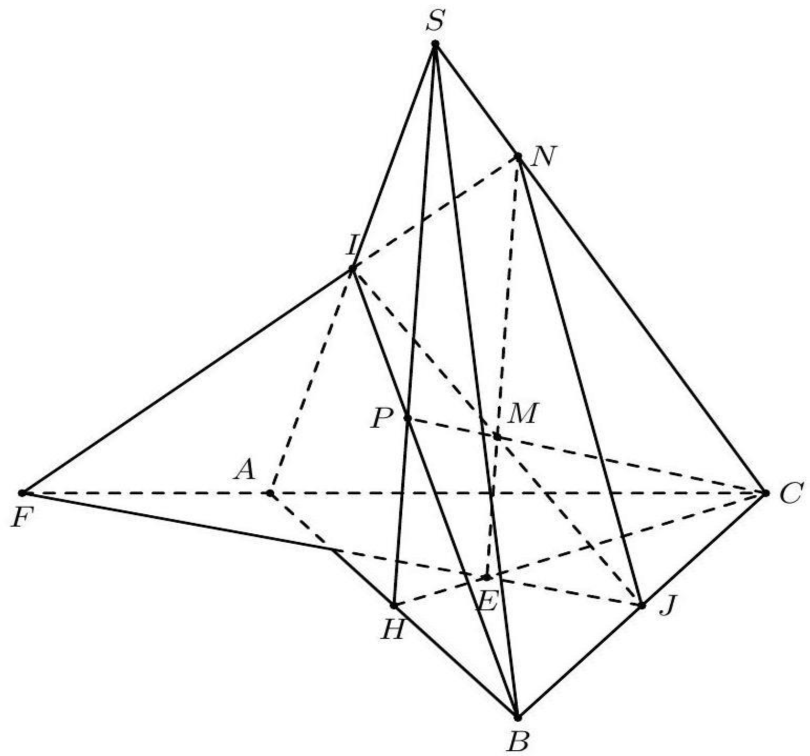
a) Giao điểm của đường thẳng MC và mặt phẳng (SAB) cũng là giao điểm của hai đường thẳng CM bà BI

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMP) và (ABC) là điểm H với H là giao điểm của hai đường thẳng SP và AD.

c) Giao điểm của đường thẳng MN và mặt phẳng (ABC) cũng là giao điểm của MN và CJ

d) Gọi $F = IN \cap AC$ thì khi đó đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định khi M, N di động.

Lời giải



a) Đúng: Xác định giao điểm P của MC và (SAB).

Chọn mặt phẳng (BCI) chứa MC có $IB=(SAB)\cap(BCI)$

Trong mặt phẳng (BCI), gọi $P=CM\cap BI \Rightarrow \begin{cases} P\in CM \\ P\in BI\subset(SAB)\end{cases} \Rightarrow P=CM\cap(SAB)$.

b) Sai: Tìm giao tuyến của (SMP) và (ABC) ta có: $\begin{cases} C\in(ABC) \\ C\in PM\subset(SMP)\end{cases}$ (1)

Trong mặt phẳng (SAB) gọi $H=SP\cap AB \Rightarrow \begin{cases} H\in SP\subset(SMP) \\ H\in AB\subset(ABC)\end{cases}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $(ABC)\cap(SMP)=CH$.

c) Sai: Tìm giao điểm E của MN và (ABC).

Trong mặt phẳng (SHC), gọi $E=MN\cap CH \Rightarrow \begin{cases} E\in MN \\ E\in CH\subset(ABC)\end{cases} \Rightarrow E=MN\cap(ABC)$.

d) Đúng: Ta có: $F=IN\cap AC$ (3)

Ta có: $E=MN\cap CH \Rightarrow \begin{cases} E\in MN\subset(IJN) \\ E\in CH\subset(ABC)\end{cases} \Rightarrow E\in(IJN)\cap(ABC)$ (4).

Từ (3) và (4) suy ra $(IJN)\cap(ABC)=EF$.

Ngoài ra có: $J\in(IJN)\cap(ABC)$ hay $J\in EF$.

Kết luận đường thẳng EF luôn đi qua điểm J cố định khi M,N thay đổi.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I và K là trung điểm của AB và CD. Gọi J là một điểm trên đoạn AD sao cho $AD=3JD$. Gọi F là giao điểm của đường thẳng IJ và mặt phẳng (BCD).

a) Gọi E là giao điểm của mặt phẳng (IJK) và đường thẳng BC. Khi đó $\frac{EB}{EC}=\frac{1}{2}$.

c) Ba đường thẳng AC, KJ, IE đồng quy tại điểm H. Khi đó $\frac{HC}{HA}=2$.

d) Hai đường thẳng $EJ//HF$ và đường thẳng IK đi qua trung điểm của đoạn HC.

e) Gọi O là trung điểm IK và G là trọng tâm của tam giác BCD. Khi đó ba điểm A,O,G thẳng hàng và tỉ số $\frac{OA}{OG}=3$.

Lời giải

a) Sai: Tìm giao điểm F của IJ và (BCD).

Trong mặt phẳng (ABD), gọi $F=IJ\cap BD$ có $\begin{cases} F\in IJ \\ F\in BD\subset(BCD)\end{cases} \Rightarrow F=IJ\cap(BCD)$

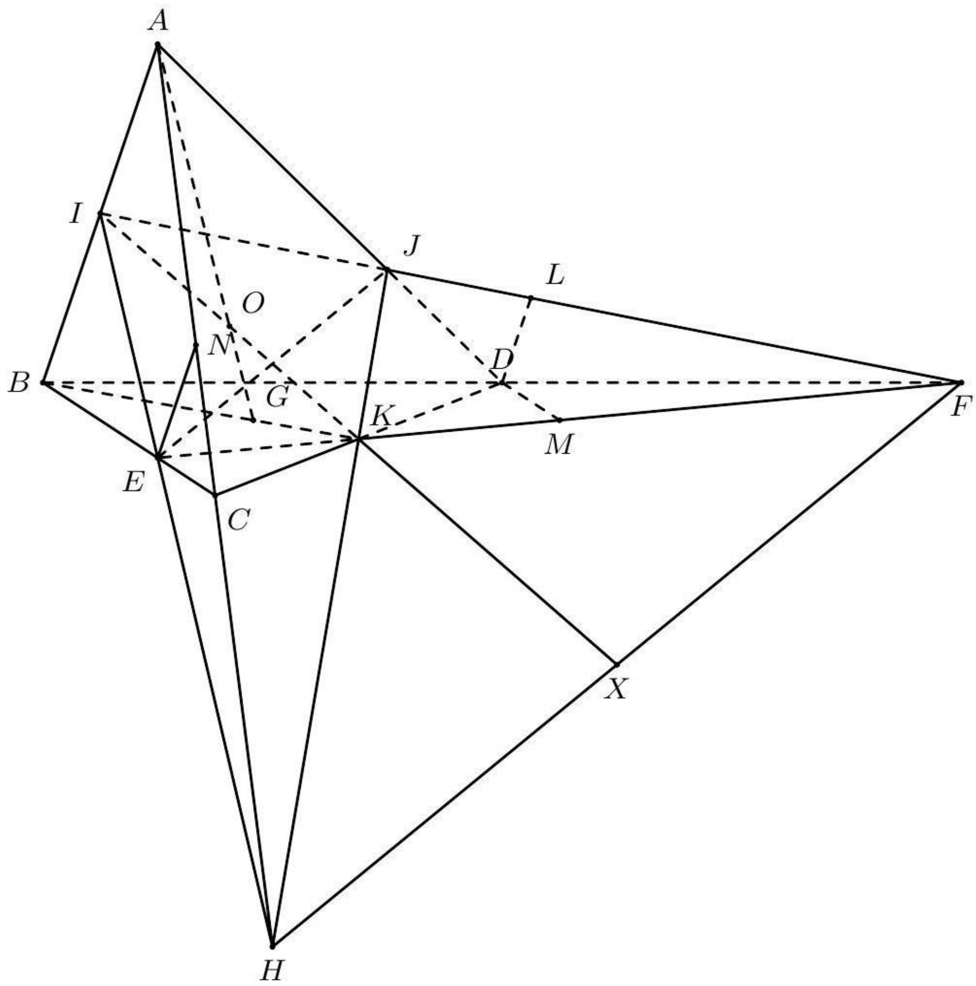
Tìm giao điểm E của (IJK) và đường thẳng BC. Tính tỉ số: $\frac{EB}{EC}$.

Trong mặt phẳng (BCD), gọi $E=JK\cap BC$ có $\begin{cases} E\in BC \\ E\in FK\subset(IJK)\end{cases} \Rightarrow E=BC\cap(IJK)$.

Trong mặt phẳng (ABD) dựng $DL//AB, L \in IJ$ ta có $\Delta JAI \backsim \Delta JDL$ (g-g)

$\Rightarrow \dfrac{AI}{DL} = \dfrac{JA}{JD} = 2 \Rightarrow AI = 2DL$

Trong ΔBIF có $\overrightarrow{DL} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BI} \Rightarrow D$ trung diểm của BF.



Trong mặt phẳng (BCD) dựng $DM//BC, M \in EF \Rightarrow BE = 2DM$.

Ngoài ra có $\Delta KDM = \Delta KCE$ (g-c-g)$\Rightarrow CE = DM$. Vậy $\dfrac{EB}{EC} = 2$.

b) Sai: Trong mặt phẳng (IJK) gọi $H = JK \cap IE$, có

$\begin{cases} H \in IE \subset (ABC) \\ H \in JK \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow H \in (ABC) \cap (ACD)$.

Hay H thuộc giao tuyến AC của mặt phẳng (ABC) với mặt phẳng (ACD).

Kết luận 3 đường thẳng AC, JK và IE đồng quy tại điểm H.

Trong mặt phẳng (ABC) dựng $EN//AB, N \in AC$.

Trong ΔABC có $\dfrac{CE}{CB} = \dfrac{EN}{AB} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{EN}{AI} = \dfrac{2}{3}$.

Trong ΔHAI có $\dfrac{HE}{HI} = \dfrac{EN}{AI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow E$ là trọng tâm của $\triangle ABH$. Vậy $\dfrac{HC}{HA} = \dfrac{1}{2}$.

c) Sai: Trong ΔIHF có $\frac{IJ}{IE}=\frac{IE}{IH}=\frac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm) $\Rightarrow EJ\,//\,EH$ (định lý đảo Thalet).

Gọi X là giao điểm của IK và HF. Theo định lý Ceva ta có: $\frac{EI}{EH}\cdot\frac{XH}{XF}\cdot\frac{JF}{JI}=1\Rightarrow\frac{XH}{XF}=1$

Vậy X là trung điểm của HF hay IK qua trung điểm của HF.

d) Đúng: Ta có: $\overrightarrow{AG}==\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BK}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$ (1)

Lại có: $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AK}\right)$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AO}$.

Kết luận ba điểm A,O,G thẳng hàng và $\frac{OA}{OG}=3$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB,AC,BD lần lượt lấy ba điểm E,F,G sao cho $AB=3AE;AC=\ 2AF;DB=4DG$.

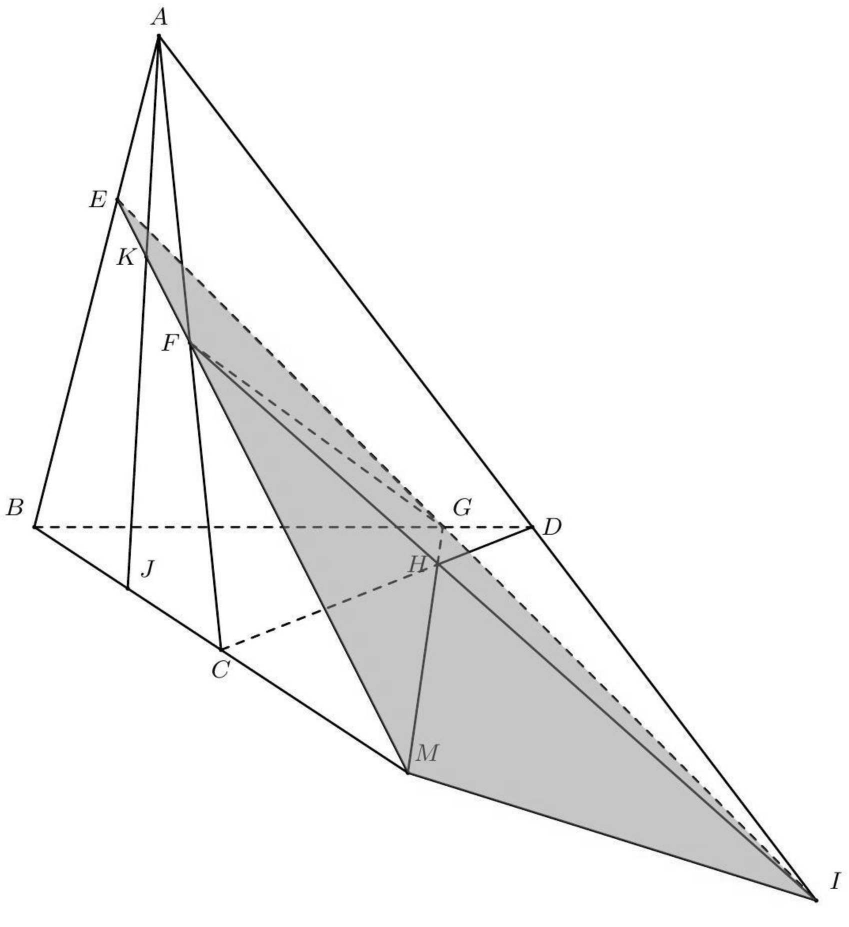
a) Gọi H là giao điểm của đường thẳng CD với (EFG). Khi đó tỉ số $\frac{HC}{HD}=\frac{3}{2}$.

b) Gọi I là giao điểm của đường thẳng AD và (EFG). Khi đó tỉ số $\frac{IA}{ID}=\frac{2}{3}$.

c) Ba đường thẳng FI,GM,CD đồng quy tại một điểm

d) Gọi J là trung điểm của BC,AJ cắt EF tại K. Khi đó tỉ số $\frac{AK}{AJ}=\frac{3}{2}$.

Lời giải



a) Đúng: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (EFG) và (BCD) ta có $G \in (EFG) \cap (BCD)$.

Ta có: $\frac{AE}{AB} \neq \frac{AF}{AC} \Rightarrow$ EF cắt BC tại $M \Rightarrow M \in (EFG) \cap (BCD)$

Vậy $MG = (EFG) \cap (BCD)$.

Trong (BCD) gọi $H = MG \cap CD \Rightarrow H = CD \cap (EFG)$.

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔBCA với ba điểm thẳng hàng M, E, F ta có:

$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1 \Rightarrow \frac{BM}{MC} = 2$.

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔBCD với ba điểm thẳng hàng M, H, G ta có:

$\frac{DG}{DB} \cdot \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CH}{HD} = 1 \Rightarrow \frac{CH}{HD} = \frac{3}{2}$.

b) Sai: Tìm giao điểm I của đường thẳng AD và (EFG). Tính tỉ số $\frac{IA}{ID}$.

Ta có $\frac{BE}{BA} \neq \frac{BG}{BD} \Rightarrow EG$ cắt AD tại điểm $I \Rightarrow I = AD \cap (EFG)$.

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABD với ba điểm thẳng hàng E, G, I ta có:

$\frac{BE}{EA} \cdot \frac{AI}{ID} \cdot \frac{DG}{GB} = 1 \Rightarrow \frac{AI}{ID} = \frac{3}{2}$.

c) Đúng: Chứng minh ba đường thẳng FI, GM, CD đồng quy.

$F \in (EFG) \cap (ACD)$; $H \in (EFG) \cap (ACD)$; $I \in (EFG) \cap (ACD)$.

Suy ra ba điểm F, H, I thẳng hàng. Vậy ba đường thẳng FI, GM, CD đồng quy.

d) Sai: Gọi J là trung điểm của BC, AJ cắt EF tại K. Tính tỉ số $\frac{AK}{AJ}$.

Áp dụng định lý Menelaus trong ΔABJ với ba điểm thẳng hàng E, F, M ta có:

$\frac{AE}{EB} \cdot \frac{BM}{MJ} \cdot \frac{JK}{KA} = 1 \Rightarrow \frac{JK}{KA} = \frac{3}{2}$. Vậy $\frac{AK}{AJ} = \frac{2}{3}$.

----------------HẾT----------------

BÀI 02 HAI ĐƯỜNG THẲNG SONG SONG

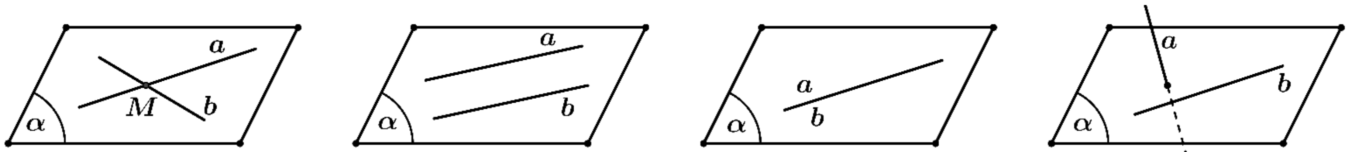
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho hai đường thẳng a và b trong không gian.

Nếu a và b cùng nằm trong một mặt phẳng thì ta nói a và b đồng phẳng. Khi đó, a và b có thể cắt nhau, song song với nhau hoặc trùng nhau.

Nếu a và b không cùng nằm trong bất kì mặt phẳng nào thì ta nói a và b chéo nhau. Khi đó, ta cũng nói a chéo với b, hoặc b chéo với a.



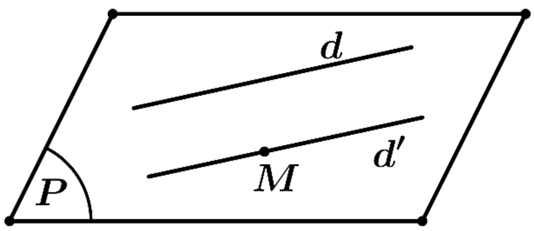
$a \cap b = M$ $\quad a // b$ $\quad a \equiv b$

Nhận xét:

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
- Hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể song song hoặc chéo nhau.

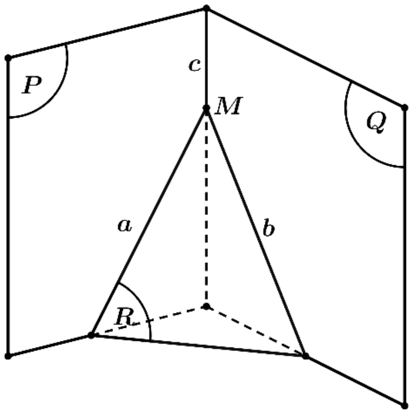
2 Tính chất của hai đường thẳng song song

Tính chất 1: Trong không gian, qua một điểm nằm ngoài một đường thẳng có một và chỉ một đường thẳng song song với đường thẳng đó.

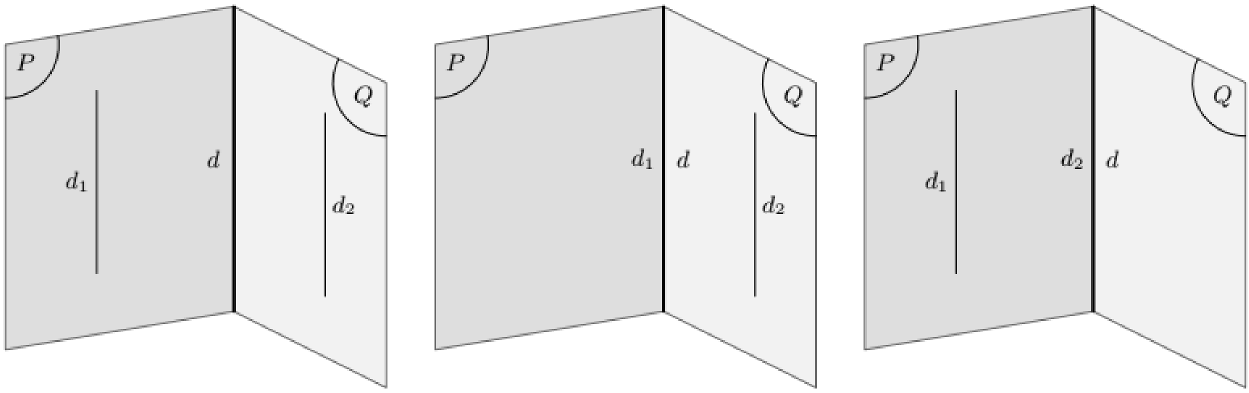


Tính chất 2: Hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Tính chất 3: Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyến ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.



Nhận xét: Nếu hai mặt phẳng lần lượt đi qua hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) song song với hai đường thẳng đó (hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó).



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Nhận biết và chứng minh hai đường thẳng song song

Phương pháp: Ta sẽ sử dụng một trong các cách sau:

- Chứng minh hai đường thẳng đó đồng phẳng rồi áp dụng phương pháp chứng minh song song trong hình học phẳng (Đường trung bình, Định lí Ta-lét đảo,.)
- Chứng minh hai đường thẳng đó cùng song song với một đường thẳng thứ ba.

$$\begin{cases} a//b \\ a//c \Rightarrow b//c \\ b \neq c \end{cases}$$

- Áp dụng định lí về giao tuyến song song.
- **Áp dụng hệ quả:** Nếu hai mặt phẳng phân biệt lần lượt chứa hai đường thẳng song song thì giao tuyến của chúng (nếu có) cũng song song với hai đường thẳng đó hoặc trùng với một trong hai đường thẳng đó.

$$\begin{cases} d' \subset (\alpha) \\ d'' \subset (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d \\ d'//d'' \end{cases} \Rightarrow d//d'', d//d'$$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

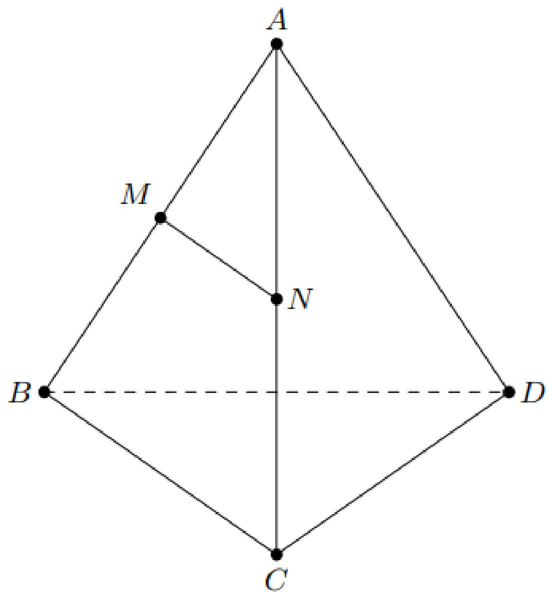
Bài tập 1: Cho tứ diện $ABCD$ có M, N lần lượt là trung điểm của AB, AC. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây:

a) MN và BC

b) AN và CD

c) MN và CD.

Lời giải



a) Trong mặt phẳng (ABC) ta có MN là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow MN//BC$

b) Trong mặt phẳng (ACD) ta có AN cắt CD tại điểm C.

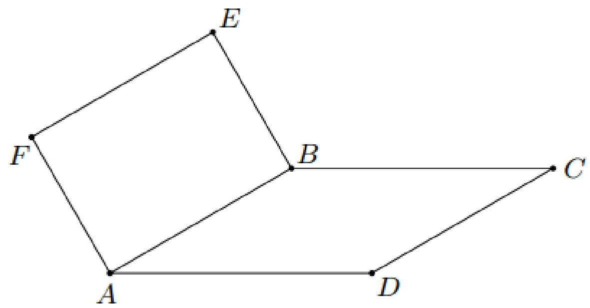
c) Giả sử MN và CD cùng nằm trong một mặt phẳng (P) nên đường thẳng NC nằm trong (P) suy ra (P) chứa điểm A. Tương tự ta cũng có AM nằm trong (P) suy ra (P) chứa điểm B. Suy ra (P) chứa cả bốn đỉnh của tứ diện $ABCD$ (vô lý)

Vậy hai đường thẳng MN và CD không nằm trong cùng bất kỳ mặt phẳng nào suy ra MN chéo với CD.

Bài tập 2: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Quan sát bốn đường thẳng AB, BC, CD, DA. Chỉ ra các cặp đường thẳng cắt nhau, các cặp đường thẳng song song.

b) Trong ba đường thẳng AB, AF, BE có hai đường thẳng nào chéo nhau hay không?

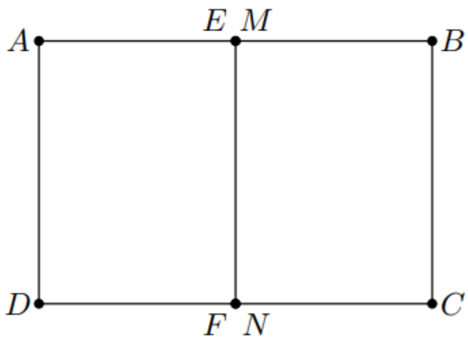


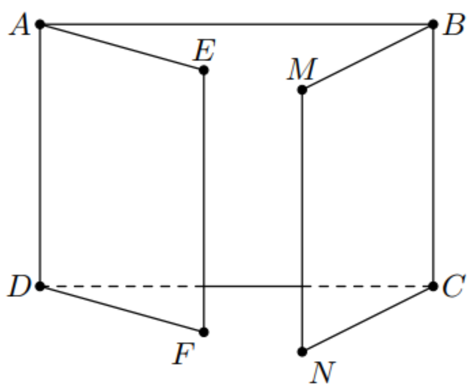
Lời giải

a) Các cặp đường thẳng cắt nhau là AB và BC, AB và DA, BC và CD, CD và DA. Các cặp đường thẳng song song là AB và CD, DA và BC.

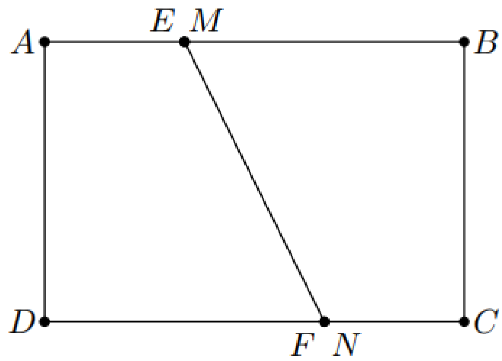
b) Các đường thẳng AB, AF, BE cùng nằm trong mặt phẳng $(ABEF)$ nên trong ba đường thẳng đó không có hai đường thẳng nào chéo nhau.

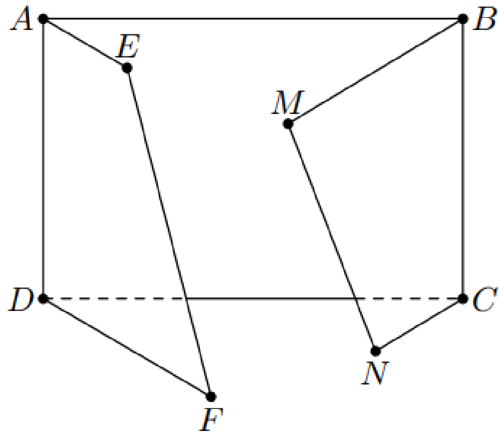
Bài tập 3: Khi hai cánh cửa sổ hình chữ nhật được mở, dù ở vị trí nào, thì hai mép ngoài của chúng luôn song song với nhau. Hãy giải thích tại sao.



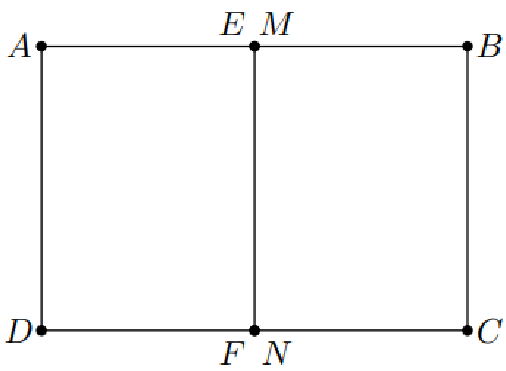


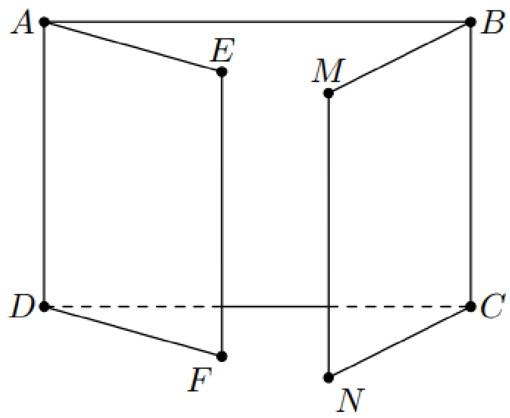
Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang thì có vị trí nào của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau hay không?





Lời giải

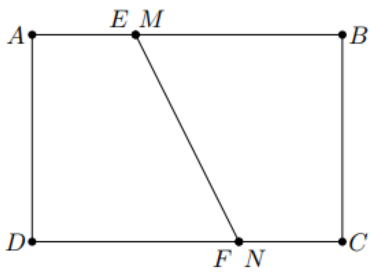




Ta có hai mép ngoài của cánh cửa sổ là EF và MN, hai cạnh bản lề của cánh cửa là AD và BC

Với 4 đường thẳng phân biệt AD, EF, MN, BC ta luôn có $\begin{cases} EF\,//\,AD \\ MN\,//\,BC \Rightarrow EF\,//\,MN \\ AD\,//\,BC \end{cases}$

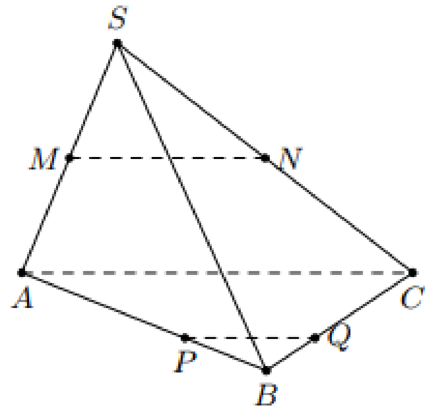
Điều này chứng tỏ hai mép ngoài của hai cánh cửa sổ hình chữ nhật luôn song song với nhau.



Nếu hai cánh cửa sổ có dạng hình thang thì có một vị trí của hai cánh cửa để hai mép ngoài của chúng song song với nhau, đó là khi mặt phẳng chứa mỗi cánh cửa trùng với mặt phẳng khung cửa sổ.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng SA, SC. Lấy các điểm P, Q lần lượt thuộc các đoạn thẳng AB, BC sao cho $\frac{BP}{BA} = \frac{BQ}{BC} = \frac{1}{3}$. Chứng minh rằng MN song song với PQ.

Lời giải

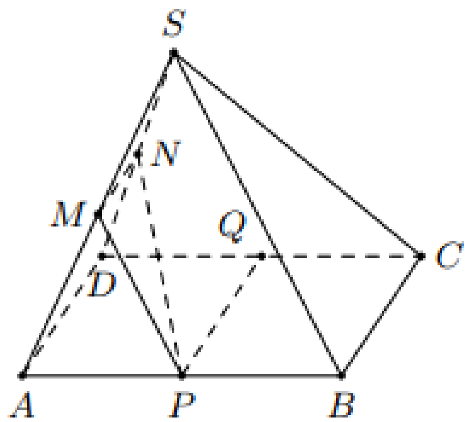


Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAC nên $MN//AC$.

Xét tam giác ABC có $\frac{BP}{BA}=\frac{BQ}{BC}=\frac{1}{3}$. Theo định lí Ta-lét đảo ta có $PQ//AC$.

Từ (1) và (2) suy ra $MN//PQ$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SD và P là một điểm nằm trên cạnh AB (P khác A và B). Đường thẳng CD cắt mặt phẳng (MNP) tại điểm Q. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ.



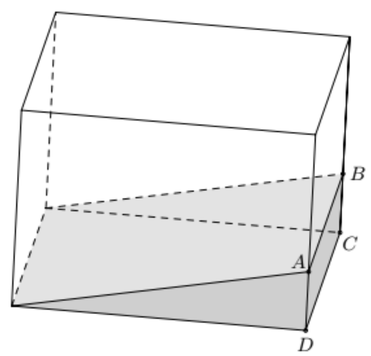
Lời giải

Ba mặt phẳng $(SAD),(ABCD),(MNP)$ đôi một cắt nhau theo các giao tuyến AD,MN,PQ.

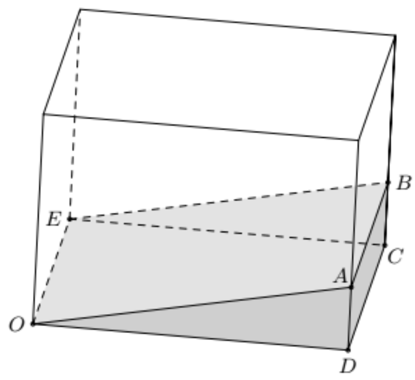
Trong tam giác SAD ta có MN là đường trung bình nên $MN//AD$ do đó theo định lí ta suy ra ba đường thẳng AD,MN,PQ đôi một song song.

Vậy đường thẳng MN song song với đường thẳng PQ.

Bài tập 6: Một bể kính chứa nước có đáy là hình chữ nhật được đặt nghiêng như hình bên. Giải thích tại sao đường mép nước AB song song với cạnh CD của bể nước.



Lời giải

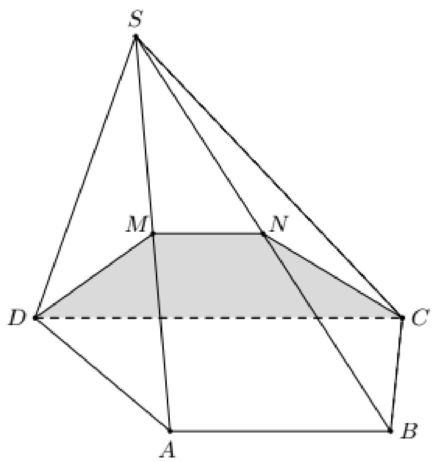


Ta có ba mặt phẳng lần lượt là $(ABEO),(CDOE),(ABCD)$ cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt AB,OE,CD.

Mặt khác: $OE//CD$ nên $AB//CD$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ làhình thang $(AB//CD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA,SB. Chứng minh rằng tứ giác $MNCD$ là hình thang.

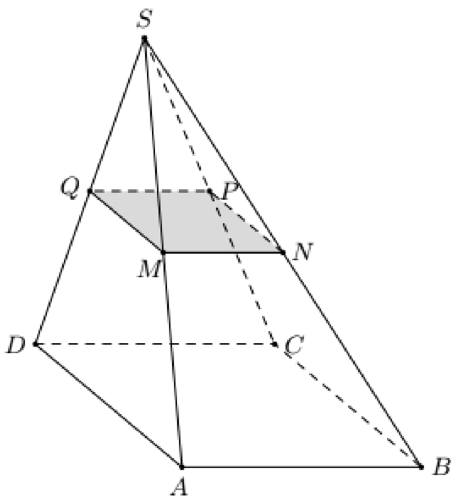
Lời giải



Ta có $\begin{cases} MN//AB \\ AB//CD \end{cases} \Rightarrow MN//CD$. Vậy tứ giác $MNCD$ là hình thang.

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M,N,P,Q lần lượt là trung điểm của các cạnh bên SA,SB,SC,SD. Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải

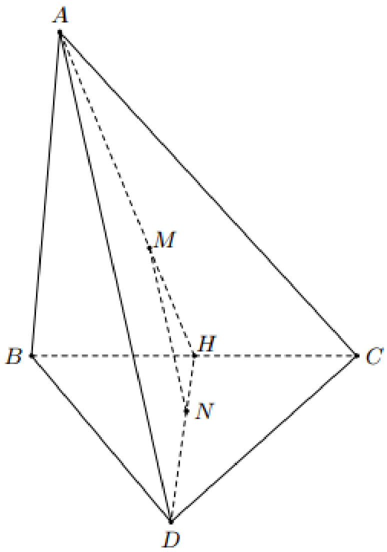


Ta có: $MN//AB$ và $MN=\frac{1}{2}AB$; $PQ//CD$ và $PQ=\frac{1}{2}CD$.

$AB//CD$ và $AB=CD \Rightarrow MN//PQ$ và $MN=PQ \Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Bài tập 9: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và DBC. Chứng minh rằng $MN//AD$.

Lời giải

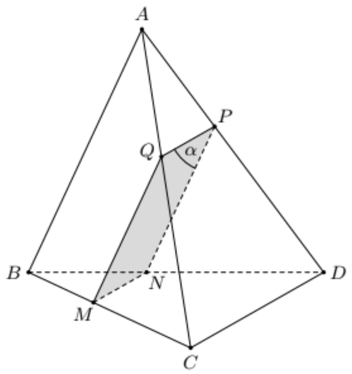


Gọi H là trung điểm của BC, ta có: $M\in AH, N\in DH$.

Do đó: $\frac{HM}{HA}=\frac{HN}{HD}=\frac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm tam giác)$\Rightarrow MN//AD$ (định lý Ta-lét đảo).

Bài tập 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là một điểm bất kì trên cạnh BC, (α) là mặt phẳng qua M và song song với AB và CD cắt các cạnh BD,AD,AC lần lượt tại N,P,Q. Chứng minh rằng $MNPQ$ là hình bình hành.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AB//(\alpha) \\ (ABC)\supset AB \\ (ABC)\cap(\alpha)=MQ \end{cases} \Rightarrow MQ // AB$. Tương tự ta có $NP//AB \Rightarrow MQ//NP$ (1).

Lại có $\begin{cases} CD\,||\,(\alpha) \\ (ACD)\supset CD \\ (ACD)\cap(\alpha)=PQ \end{cases} \Rightarrow MN//CD$. Tương tự ta có $PQ//CD \Rightarrow MN//PQ$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào **sai**?
A. Hai đường thẳng không có điểm chung thì chéo nhau.
B. Hai đường thẳng chéo nhau thì không có điểm chung.
C. Hai đường thẳng phân biệt không cắt nhau và không song song thì chéo nhau.
D. Hai đường thẳng phân biệt không chéo nhau thì hoặc cắt nhau hoặc song song.

Lời giải

Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song (khi chúng đồng phẳng) hoặc chéo nhau (khi chúng không đồng phẳng).

Câu 2: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. Hai đường thẳng có một điểm chung thì chúng có vô số điểm chung khác.
B. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không điểm chung.
C. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.
D. Hai đường thẳng chéo nhau khi và chỉ khi chúng không đồng phẳng.

Lời giải

A sai. Trong trường hợp 2 đường thẳng cắt nhau thì chúng chỉ có 1 điểm chung.

B và C sai. Hai đường thẳng song song khi và chỉ khi chúng đồng phẳng và không có điểm chung.

Câu 3: Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
A. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.
B. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì trùng nhau.
C. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.
D. Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì chúng lần lượt nằm trên hai mặt phẳng song song.

Lời giải

Hai đường thẳng cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau hoặc trùng nhau.

Câu 4: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?
A. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng có điểm chung.
B. Hai đường thẳng không có điểm chung là hai đường thẳng song song hoặc chéo nhau.
C. Hai đường thẳng song song với nhau khi chúng ở trên cùng một mặt phẳng.
D. Khi hai đường thẳng ở trên hai mặt phẳng phân biệt thì hai đường thẳng đó chéo nhau.

Lời giải

A sai. Hai đường thẳng chéo nhau thì chúng không có điểm chung.

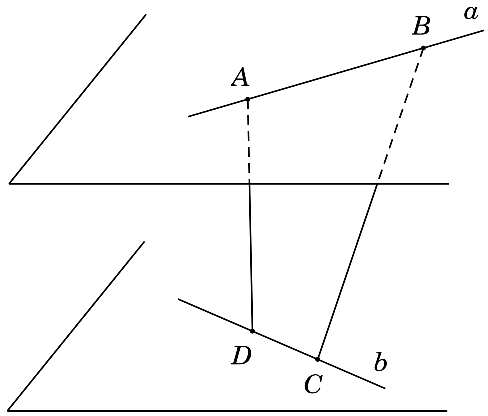
C sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó hoặc cắt nhau hoặc trùng nhau.

D sai. Có thể xảy ra trường hợp hai đường thẳng đó song song.

Câu 5: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b. Khẳng định nào sau đây đúng khi nói về hai đường thẳng AD và BC?

A. Có thể song song hoặc cắt nhau.
B. Cắt nhau.
C. Song song với nhau.
D. Chéo nhau.

Lời giải



Theo giả thiết, a và b chéo nhau $\Rightarrow$ a và b không đồng phẳng.

Giả sử AD và BC đồng phẳng.

Nếu $AD \cap BC = I \Rightarrow I \in (ABCD) \Rightarrow I \in (a;b)$. Mà a và b không đồng phẳng, do đó, không tồn tại điểm I.

Nếu $AD // BC \Rightarrow$ a và b đồng phẳng (Mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy điều giả sử là sai. Do đó AD và BC chéo nhau.

Câu 6: Cho ba mặt phẳng phân biệt (α), (β), (γ) có $(\alpha) \cap (\beta) = d_1$; $(\beta) \cap (\gamma) = d_2$; $(\alpha) \cap (\gamma) = d_3$. Khi đó ba đường thẳng d_1, d_2, d_3:

A. Đôi một cắt nhau.
B. Đôi một song song.
C. Đồng quy.
D. Đôi một song song hoặc đồng quy.

Lời giải

Nếu ba mặt phẳng đôi một cắt nhau theo ba giao tuyến phân biệt thì ba giao tuyền ấy hoặc đồng quy hoặc đôi một song song.

Câu 7: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c, biết $a // b$, a và c chéo nhau. Khi đó hai đường thẳng b và c:

A. Trùng nhau hoặc chéo nhau.
B. Cắt nhau hoặc chéo nhau.
C. Chéo nhau hoặc song song.
D. Song song hoặc trùng nhau.

Lời giải

Giả sử $b // c \Rightarrow c // a$ (mâu thuẫn với giả thiết).

Câu 8: Trong không gian, cho ba đường thẳng phân biệt a, b, c trong đó $a // b$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. Nếu $a // c$ thì $b // c$.

B. Nếu c cắt a thì c cắt b.

C. Nếu $A \in a$ và $B \in b$ thì ba đường thẳng a, b, AB cùng ở trên một mặt phẳng.

D. Tồn tại duy nhất một mặt phẳng qua a và b.

Lời giải

Nếu c cắt a thì c cắt b hoặc c chéo b.

Câu 9: Trong không gian, cho 3 đường thẳng a, b, c chéo nhau từng đôi. Có nhiều nhất bao nhiêu đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng ấy?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** Vô số.

Lời giải

Gọi M là điểm bất kì nằm trên a.

Giả sử d là đường thẳng qua M cắt cả b và c. Khi đó, d là giao tuyến của mặt phẳng tạo bởi M và b với mặt phẳng tạo bởi M và c.

Với mỗi điểm M ta được một đường thẳng d.

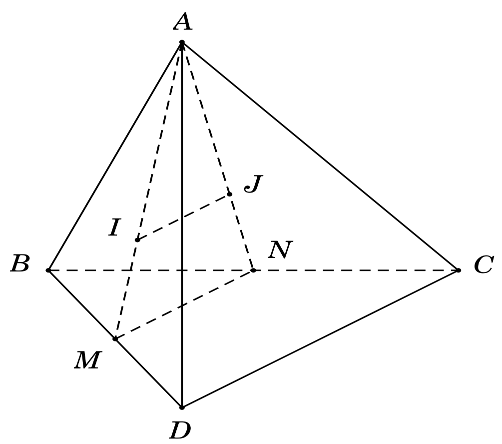
Vậy có vô số đường thẳng cắt cả 3 đường thẳng a, b, c.

Câu 10: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và ABD. Chọn khẳng định đúng trong các khẳng định sau?

A. IJ song song với CD. **B.** IJ song song với AB.

C. IJ chéo CD. **D.** IJ cắt AB.

Lời giải



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, BD.

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN // CD$ (1)

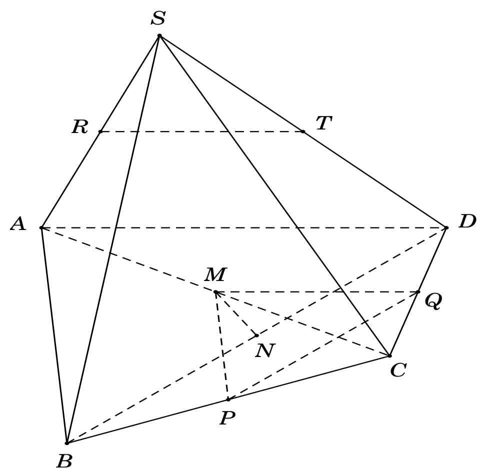
I, J lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $ABD \Rightarrow \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AJ}{AN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IJ \mathbin{/\mkern-5mu/} MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IJ \mathbin{/\mkern-5mu/} CD$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có AD không song song với BC. Gọi M, N, P, Q, R, T lần lượt là trung điểm AC, BD, BC, CD, SA, SD. Cặp đường thẳng nào sau đây song song với nhau?

A. MP và RT. **B.** MQ và RT. **C.** MN và RT. **D.** PQ và RT.

Lời giải



Ta có: M,Q lần lượt là trung điểm của AC,CD

$\Rightarrow MQ$ là đường trung bình của tam giác $CAD \Rightarrow MQ \parallel AD$ (1)

Ta có: R,T lần lượt là trung điểm của SA,SD

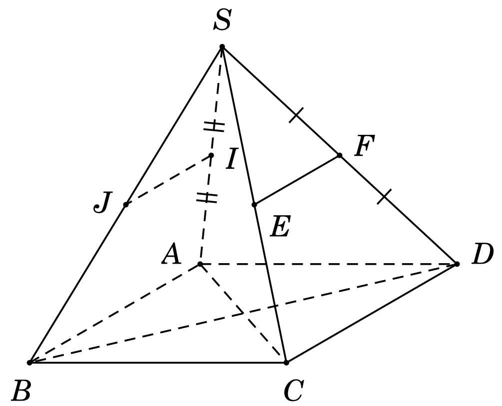
$\Rightarrow RT$ là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow RT \parallel AD$ (2)

Từ $(1),(2)$ suy ra: $MQ \parallel RT$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I,J,E,F lần lượt là trung điểm SA,SB,SC,SD. Trong các đường thẳng sau, đường thẳng nào không song song với IJ?

A. EF. **B.** DC. **<u>C</u>.** AD. **D.** AB.

Lời giải



Ta có $IJ \parallel AB$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SAB) và $EF \parallel CD$ (tính chất đường trung bình trong tam giác SCD).

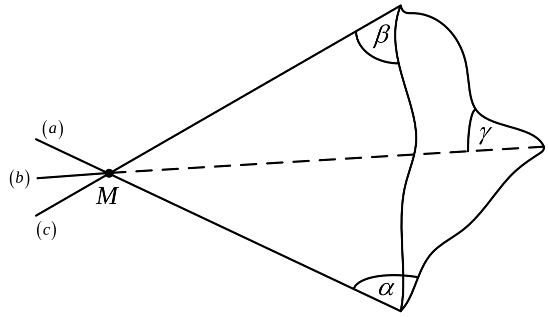
Mà $CD \parallel AB$ (đáy là hình bình hành) $\Rightarrow CD \parallel AB \parallel EF \parallel IJ$.

Câu 13: Nếu ba đường thẳng không cùng nằm trong một mặt phẳng và đôi một cắt nhau thì ba đường thẳng đó

<u>A</u>. đồng quy. **B.** tạo thành tam giác.

C. trùng nhau. **D.** cùng song song với một mặt phẳng.

Lời giải



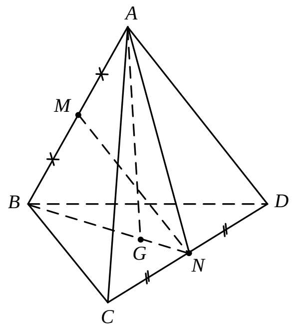
Đặt $(\alpha)\equiv(a;b)$; $(\beta)\equiv(a;c)$; $(\gamma)\equiv(b;c)$

Ta thấy, ba mặt phẳng $(\alpha);(\beta);(\gamma)$ cắt nhau theo ba giáo tuyến phân biệt và ba giao tuyến (a); (b); (c) đôi một cắt nhau nên chúng đồng quy tại M .

Câu 14: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M và N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD. Gọi G là trọng tâm tam giác BCD. Đường thẳng AG cắt đường thẳng nào trong các đường thẳng dưới đây?

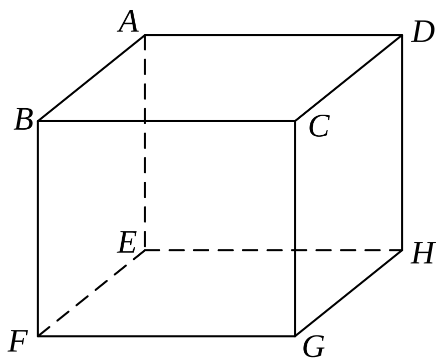
A. MN . **B.** CM . **C.** DN . **D.** CD.

Lời giải



Do AG và MN cùng nằm trong mặt phẳng (ABN) nên hai đường thẳng cắt nhau.

Câu 15: Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?



A. BG và HD chéo nhau. **B.** BF và AD chéo nhau.

C. AB song song với HG . **D.** CG cắt HE .

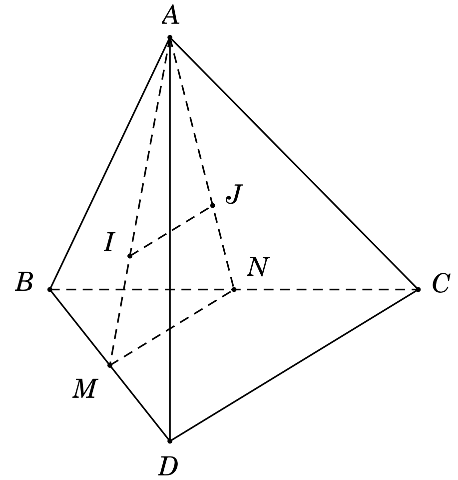
Lời giải

Do CG và HE không cùng nằm trong một mặt phẳng nên hai đường thẳng này chéo nhau.

Câu 16: Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Đường thẳng IJ song song với đường nào?

A. AB . **B.** CD. **C.** BC . **D.** AD .

Lời giải



Gọi N, M lần lượt là trung điểm của $BC, BD.$

$\Rightarrow MN$ là đường trung bình của tam giác $BCD \Rightarrow MN \parallel CD$ (1)

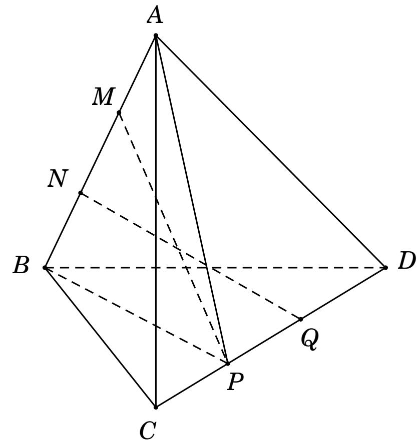
$J; I$ lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC và $ABD \Rightarrow \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AJ}{AN} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow IJ \parallel MN$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $IJ \parallel CD.$

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng AB; P, Q là hai điểm phân biệt cùng thuộc đường thẳng CD. Xác định vị trí tương đối của MQ và NP.

A. MQ cắt NP. **B.** $MQ \parallel NP$. **C.** $MQ \equiv NP$. **D.** MQ, NP chéo nhau.

Lời giải



Xét mặt phẳng (ABP). Ta có: M, N thuộc $AB \Rightarrow M, N$ thuộc mặt phẳng (ABP).

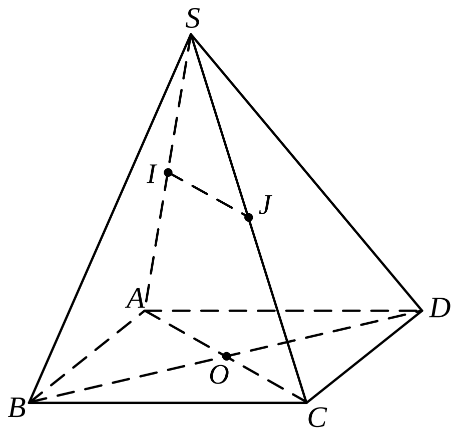
Mặt khác: $CD \cap (ABP) = P.$

Mà $Q \in CD \Rightarrow Q \notin (ABP) \Rightarrow M, N, P, Q$ không đồng phẳng $\Rightarrow MQ$ và NP chéo nhau.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SA và SC. Đường thẳng IJ song song với đường thẳng nào?

A. BC . **B.** AC . **C.** SO . **D.** BD .

Lời giải

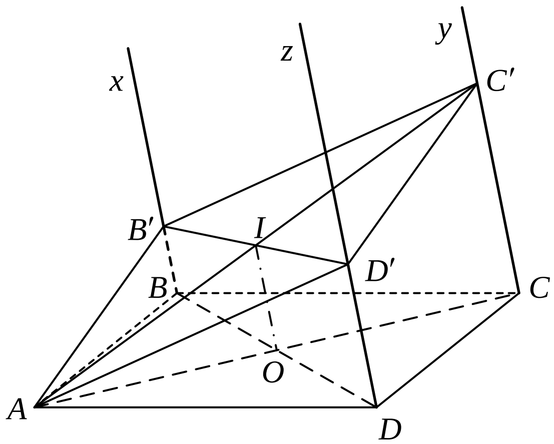


Dễ dàng thấy được: IJ là đường trung bình của tam giác SAC $\Rightarrow IJ \,//\, AC$.

Câu 19: Trong mặt phẳng (P), cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Bx, Cy, Dz song song với nhau, nằm cùng phía với mặt phẳng $(ABCD)$, đồng thời không nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$. Một mặt phẳng đi qua A, cắt Bx, Cy, Dz tương ứng tại B', C', D' sao cho $BB' = 2$, $DD' = 4$. Tính CC'.

A. 6 . **B.** 8 . **C.** 2 . **D.** 3 .

Lời giải



Ta có: $AB'C'D'$ là hình bình hành. $AC' \cap BD' = I$ và $AC \cap BD = O$ $\Rightarrow OI$ là đường trung bình của tam giác ACC' $\Rightarrow CC' = 2OI$.

$BB'D'D$ là hình thang có OI là đường trung bình $\Rightarrow OI = \dfrac{BB' + DD'}{2} = 3$.

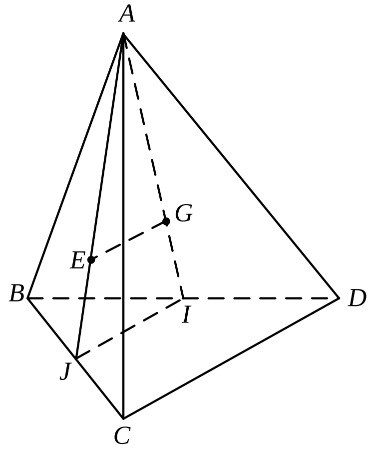
Vậy $CC' = 6$.

Câu 20: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G và E lần lượt là trọng tâm của tam giác ABD và ABC . Mệnh đề nào dưới đây **đúng** ?

A. $GE // CD$. **B.** GE cắt AD .

C. GE cắt CD . **D.** GE và CD chéo nhau.

Lời giải



Ta có: $\dfrac{AG}{AI}=\dfrac{AE}{AJ}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow EG\,//\,IJ$ mà $IJ\,//\,CD\Rightarrow EG\,//\,CD$.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AB, AD lần lượt lấy các điểm M, N sao cho $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AD}=\dfrac{1}{3}$. Gọi P, Q lần lượt là trung điểm các cạnh CD, CB. Mệnh đề nào sau đây đúng

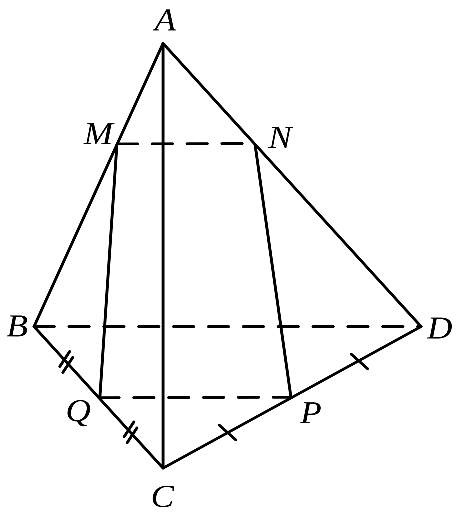
A. Tứ giác $MNPQ$ là một hình thang.

B. Tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

C. Bốn điểm M, N, P, Q không đồng phẳng.

D. Tứ giác $MNPQ$ không có các cặp cạnh đối nào song song.

Lời giải



Xét tam giác ABD có : $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AD}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow MN\,//\,BD$

Xét tam giác BCD có : PQ là đường trung bình của tam giác $\Rightarrow PQ\,//\,BD$

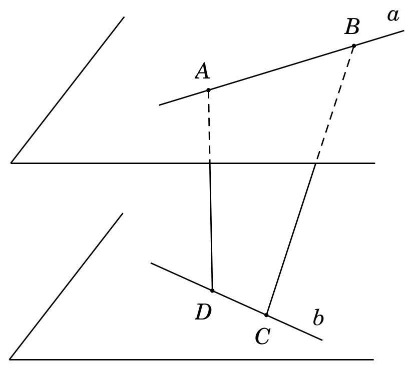
Vậy $PQ\,//\,MN\Rightarrow MNPQ$ là hình thang.

Câu 22: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Lấy A, B thuộc a và C, D thuộc b. Khẳng định nào sau đây **đúng** khi nói về hai đường thẳng AD và BC?

A. Có thể song song hoặc cắt nhau. **B.** Cắt nhau.

C. Song song nhau. **D.** Chéo nhau.

Lời giải



Theo giả thiết, a và b chéo nhau $\Rightarrow$ a và b không đồng phẳng.

Giả sử AD và BC đồng phẳng.

Nếu $AD \cap BC = I \Rightarrow I \in (ABCD) \Rightarrow I \in (a;b)$. Mà a và b không đồng phẳng, do đó, không tồn tại điểm I .

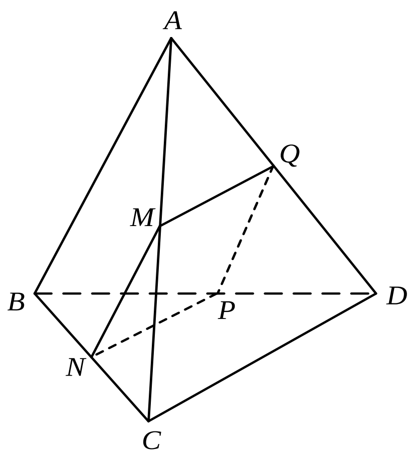
Nếu $AD // BC \Rightarrow$ a và b đồng phẳng.

Vậy điều giả sử là sai. Do đó AD và BC chéo nhau.

Câu 23: Cho tứ diện $ABCD$ với M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, BC, BD, AD. Tìm điều kiện để $MNPQ$ là hình thoi.

A. $AB = BC$. **B.** $BC = AD$. **C.** $AC = BD$. **D.** $AB = CD$.

Lời giải



Xét tam giác ABC có: $MN = \dfrac{1}{2}AB$

Xét tam giác ABD có: $PQ = \dfrac{1}{2}AB \Rightarrow MN = PQ$

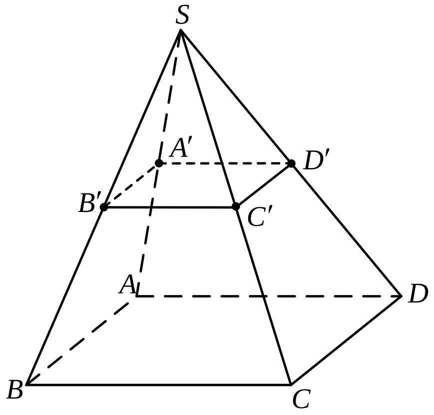
Chứng minh tương tự, ta có: $MQ = NP$. Vậy $MNPQ$ là hình bình hành

Để $MNPQ$ là hình thoi $\Leftrightarrow MN = NP \Leftrightarrow AB = CD$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi A', B', C', D' lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD . Trong các đường thẳng sau đây, đường thẳng nào không song song với $A'B'$?

A. AB. **B.** CD. **C.** $C'D'$. **D.** SC.

Lời giải

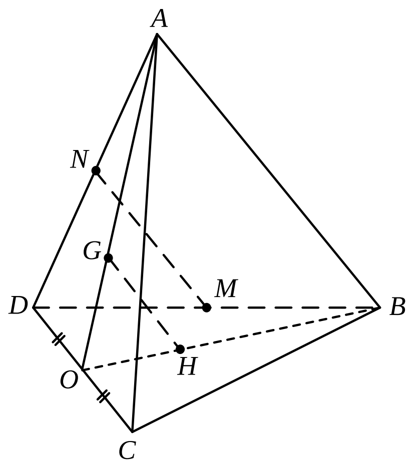


Do $A'B'$ và SC không đồng phẳng nên $A'B'$ và SC không song song nhau.

Câu 25: Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm M, N lần lượt là trung điểm BD, AD. Các điểm H, G lần lượt là trọng tâm các tam giác BCD; ACD. Đường thẳng HG chéo với đưởng thẳng nào sau đây?

A. MN. **B.** CD. **C.** CN. **D.** AB.

Lời giải



Do $\dfrac{OG}{OA}=\dfrac{OH}{OB}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow HG\parallel AB$. Xét tam giác ABD có: $MN\parallel AB\Rightarrow HG\parallel MN$

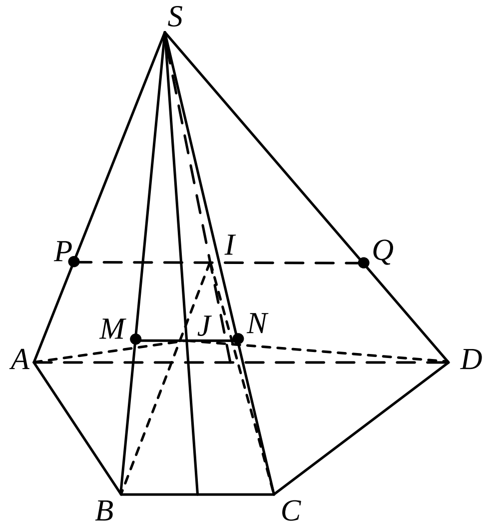
Ta lại có: $HG\cap CN=G$ nên HG và CD chéo nhau.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy AD và BC. Biết $AD=a,BC=b$. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB,SC lần lượt tại M,N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA,SD tại P,Q. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. MN song sonng với PQ. **B.** MN chéo với PQ.

C. MN cắt với PQ. **D.** MN trùng với PQ.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} MN = (ADJ) \cap (SBC) \\ AD \subset (JAD);\ BC \subset (SBC) \Rightarrow MN \,//\, AD \,//\, BC \\ AD \,//\, BC \end{cases}$

Tương tự: $\begin{cases} PQ = (IBC) \cap (SAD) \\ AD \subset (SAD);\ BC \subset (IBC) \Rightarrow PQ \,//\, AD \,//\, BC \\ AD \,//\, BC \end{cases}$. Vậy $MN \,//\, PQ$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biết tính đúng sai của mỗi phát biểu sau (xét trong không gian):

a) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng song song với nhau.

b) Hai đường thẳng không có điểm chung thì chúng chéo nhau.

c) Hai đường thẳng có điểm chung thì chúng cắt nhau.

d) Hai đường thẳng không thể cùng nằm trên một mặt phẳng thì chúng chéo nhau.

Lời giải

a), b) Sai: hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể là chúng chéo nhau hoặc song song với nhau.

c) Sai: hai đường có điểm chung thì chúng có thể cắt nhau hoặc trùng nhau.

d) Đúng: Hai đường thẳng không thể cùng nằm trên một mặt phẳng thì chúng chéo nhau theo tính chất cơ bản.

Câu 2: Trong không gian cho ba đường thẳng a,b và c phân biệt. Xét tính đúng sai của các phát biểu sau:

a) Nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

b) Nếu hai đường thẳng cùng chéo nhau với đường thẳng thứ ba thì chúng chéo nhau.

c) Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b và đường thẳng c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng c chéo nhau hoặc cắt nhau.

d) Nếu đường thẳng a cắt b, hai đường thẳng b và c chéo nhau thì a và c chéo nhau hoặc song song với nhau.

Lời giải

a) Đúng: Nếu hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.

b) Sai:Vì nếu hai đường a,c chéo nhau và hai đường b,c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng b có đến ba khả năng: chéo nhau, song song hoặc cắt nhau.

c) Đúng: Nếu đường thẳng a song song với đường thẳng b, đường thẳng b và đường thẳng c chéo nhau thì đường thẳng a và đường thẳng c chéo nhau hoặc cắt nhau.

d) Sai: vì đường thẳng a có thể cắt cả hai đường chéo nhau là b và c, tức là đường thẳng a có thể cắt đường thẳng c.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

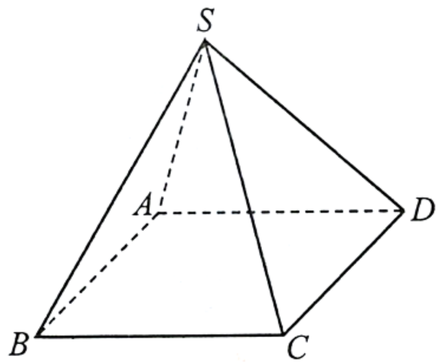
a) AB song song CD

b) SA cắt SC

c) SA song song BC.

d) SC chéo nhau AB.

Lời giải



a) Đúng: Ta có AB và CD cùng nằm trong một mặt phẳng và không có điểm chung nên AB song song với CD (hai cạnh đối của hình bình hành thì song song với nhau).

b) Đúng: Hai đường thẳng SA và SC cắt nhau tại S.

c) Sai: Hai đường thẳng SA và BC không đồng phẳng, vì vậy SA và BC là hai đường thẳng chéo nhau.

d) Đúng: SC chéo nhau AB.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có I, J theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, BD. Gọi (P) là mặt phẳng qua I, J và cắt các cạnh AC, AD lần lượt tại hai điểm M, N. Khi đó:

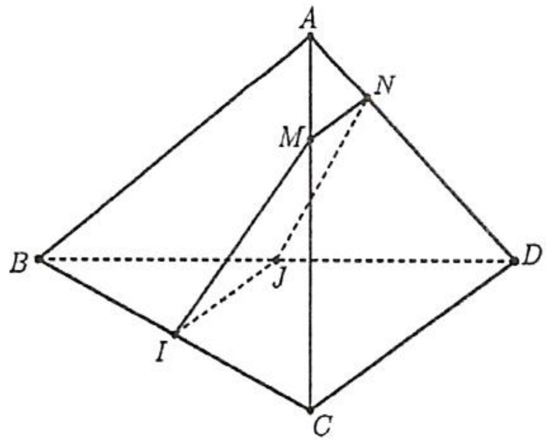
a) $IJ = \dfrac{1}{2}CD$

b) MN cắt DC

c) $IJNM$ là một hình thang.

d) Để $IJNM$ là hình bình hành thì M là trung điểm của đoạn AC.

Lời giải



a) Đúng: Ta có IJ là đường trung bình của tam giác BCD nên $IJ//CD, IJ = \frac{1}{2}CD$.

b) Sai: Khi đó: $\begin{cases}(P)\cap(ACD) = MN \\ IJ \subset (P), CD \subset (ACD) \\ IJ//CD\end{cases} \Rightarrow MN//IJ//CD$ nên MN song song với CD

c) Đúng: Khi đó: $\begin{cases}(P)\cap(ACD) = MN \\ IJ \subset (P), CD \subset (ACD) \\ IJ//CD\end{cases} \Rightarrow MN//IJ//CD$ vì vậy $IJNM$ là một hình thang.

d) Đúng: Theo câu a) ta có: $IJ//MN$ vì vậy $IJNM$ là hình bình hành khi và chỉ khi $IJ = MN$.

Khi đó $MN = \frac{1}{2}CD, MN//CD$.

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ACD hay M là trung điểm của đoạn AC.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật. Gọi M, N, E, F lần lượt là trọng tâm các tam giác SAB, SBC, SCD và SDA. Gọi M', N', E', F' lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hai đường thẳng MN và $M'N'$ song song với nhau.

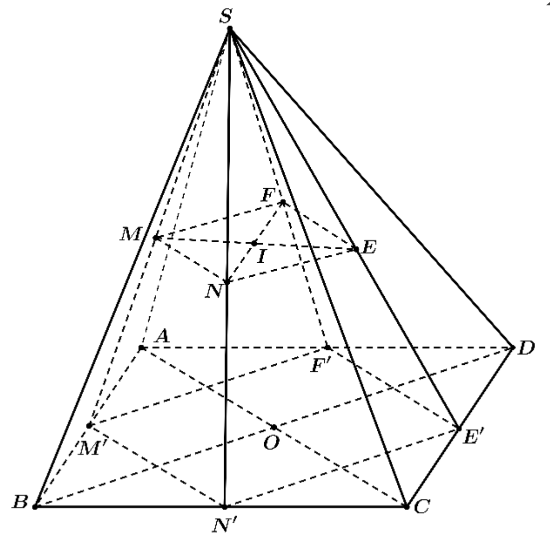
b) Hai đường thẳng MN và EF chéo nhau với nhau.

c) Hai đường thẳng MF và NE chéo nhau với nhau.

d) Tứ giác $MNEF$ là hình chữ nhật.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\frac{SM}{SM'} = \frac{2}{3}; \frac{SN}{SN'} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{SM}{SM'} = \frac{SN}{SN'} \Rightarrow MN//M'N'$ (1).



b) Sai: Tương tự $\frac{SE}{SE'}=\frac{SF}{SF'}=\frac{2}{3}\Rightarrow EF\,//\,E'F'$ (2) và $\begin{cases} M'N'\,//\,AC \\ E'F'\,//\,AC \end{cases}\Rightarrow M'N' \parallel E'F'$ (3)

Từ $(1),(2)$ và (3) suy ra $MN\,//\,EF$

c) Đúng: Chứng minh hoàn toàn tương tự như trên ta có $MN\,//\,M'F'; M'F'\,//\,N'E'; N'E'\,//\,NE$ nên $MF\,//\,NE$

d) Sai: Tứ giác $MNEF$ có $\begin{cases} MN\,//\,EF \\ MF\,//\,NE \end{cases}$ nên $MNEF$ là hình bình hành.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình thang với đáy lớn AD. Gọi I và J lần lượt là trọng tâm các tam giác SAD và SBC. Mặt phẳng (ADJ) cắt SB, SC lần lượt tại M, N. Mặt phẳng (BCI) cắt SA, SD tại P, Q. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

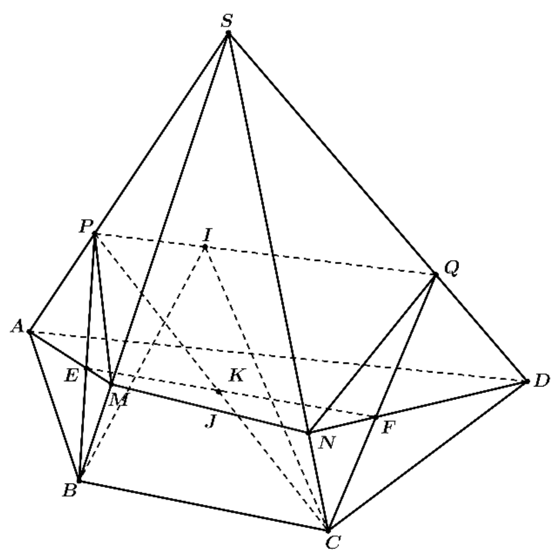
a) Hai đường thẳng AD và BC song song với nhau

b) Điểm I nằm trên đường thẳng PQ

c) Hai đường thẳng MN và BC chéo nhau

d) Hai đường thẳng MN và PQ song song với nhau

Lời giải



a) Đúng: Ta có $I \in (SAD) \Rightarrow I \in (SAD) \cap (IBC)$ nên $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (IBC) \\ AD \parallel BC \\ (SAD) \cap (IBC) = PQ \end{cases}$

b) Đúng: $\Rightarrow PQ \parallel AD \parallel BC \quad (1)$ và $I \in PQ$

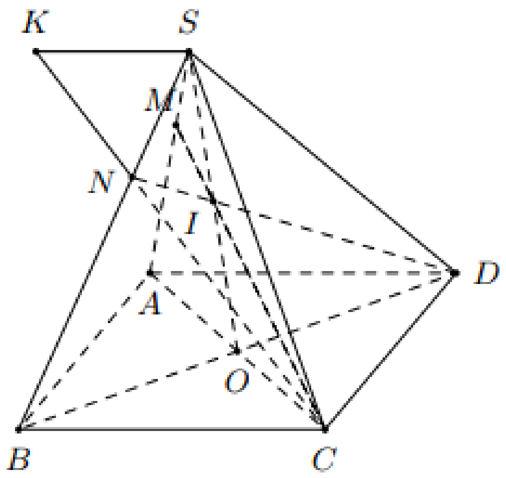
c) Sai: Tương tự $J \in (SBC) \Rightarrow J \in (SBC) \cap (ADJ)$ nên $\begin{cases} AD \subset (ADJ) \\ BC \subset (SBC) \\ AD \parallel BC \\ (SBC) \cap (ADJ) = MN \end{cases}$

d) Đúng: $MN \parallel AD \parallel BC$ và $J \in MN$ suy ra $MN \parallel PQ$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm của SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M và N. Cho $AB = 3$ khi đó hãy tính độ dài đoạn thẳng MN.

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAC) ta kéo dài CI cắt SA tại M; trong mặt phẳng (SBD) ta kéo dài DI cắt SB tại N.

Từ O kẻ đường thẳng song song với IM, cắt SA tại H.

Tam giác SHO có I là trung điểm SO và $IM // HO$ nên IM là đường trung bình của ΔSHO

Suy ra M là trung diểm SH hay $SM = MH$.

Tương tự: OH là đường trung bình của tam giác ACM nên H là trung điểm của AM

Suy ra $MH = HA$.

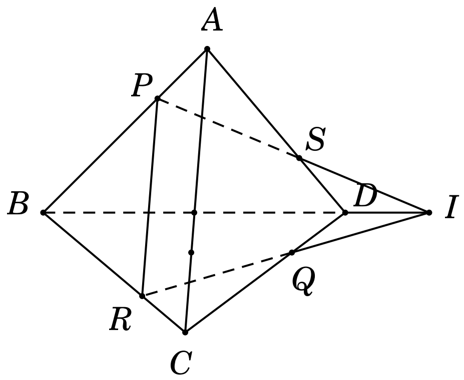
Từ đó ta được $SM = MH = HA$ nên $SM = \dfrac{1}{3}SA$.

Chứng minh tương tự ta cũng được: $SN = \frac{1}{3}SB$.

Áp dụng định lý Talet trong tam giác SAB ta được $MN//AB$ và $MN = \frac{1}{3}AB = 1$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt lấy trên ba cạnh AB, CD, BC. Cho $PR // AC$ và $CQ = 2QD$. Gọi giao điểm của AD và (PQR) là S. Khi đó $AD = kDS$. Tìm giá trị của k.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của BD và RQ. Nối P với I, cắt AD tại S.

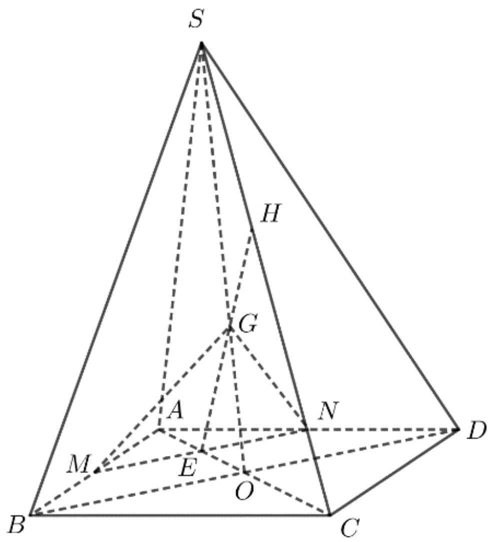
Ta có $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC}.\frac{CQ}{QD} = 1$ mà $\frac{CQ}{QD} = 2$ suy ra $\frac{DI}{IB}.\frac{BR}{RC} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}.\frac{RC}{BR}$.

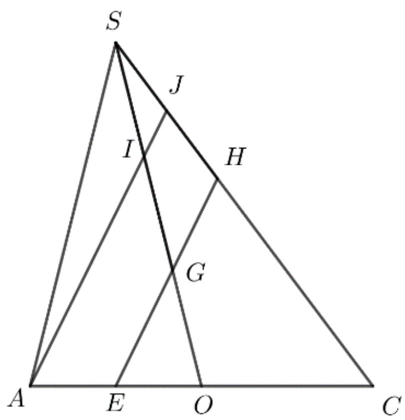
Vì PR song song với AC suy ra $\frac{RC}{BR} = \frac{AP}{PB} \Rightarrow \frac{DI}{IB} = \frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}$.

Lại có $\frac{SA}{SD}.\frac{DI}{IB}.\frac{BP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{SA}{SD}.\frac{1}{2}.\frac{AP}{PB}.\frac{BP}{PA} = 1 \Leftrightarrow \frac{SA}{SD} = 2 \longrightarrow AD = 3DS$ nên $k = 3$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, AD và G là trọng tâm tam giác SBD. Mặt phẳng (MNG) cắt SC tại điểm H. Tính $\frac{SH}{SC}$

Lời giải





Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $E = MN \cap AC$.

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $H = EG \cap SC$.

Ta có: $\begin{cases} H \in EG; EG \subset (MNG) \\ H \in SC \end{cases} \Rightarrow H = SC \cap (MNG)$.

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SG và SH.

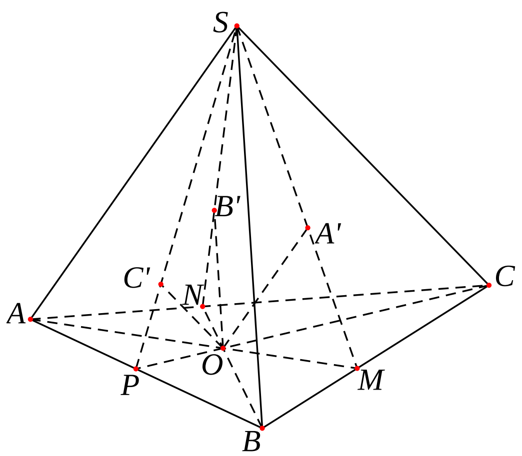
Ta có $\begin{cases} IJ \,//\, HG \\ IA \,//\, GE \end{cases} \Rightarrow A, I, J$ thẳng hàng

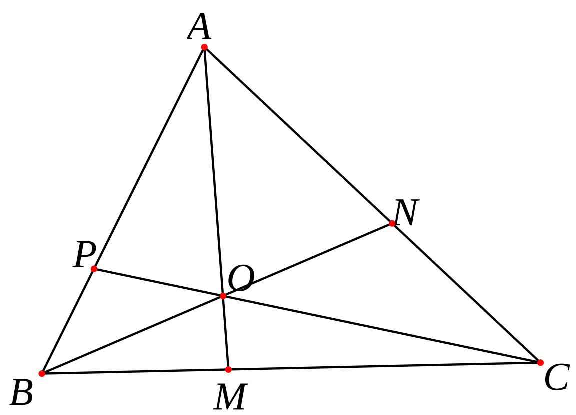
Xét ΔACJ có $EH \,//\, AJ \Rightarrow \dfrac{CH}{HJ} = \dfrac{CE}{EA} = 3 \Rightarrow CH = 3HJ$.

Lại có $SH = 2HJ$ nên $SC = 5HJ$. Vậy $\dfrac{SH}{SC} = \dfrac{2}{5} = 0,4$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABC$**.** Bên trong tam giác ABC ta lấy một điểm O bất kỳ. Từ O ta dựng các đường thẳng lần lượt song song với SA, SB, SC và cắt các mặt phẳng $(SBC),(SCA),(SAB)$ theo thứ tự tại A', B', C'. Khi đó tổng tỉ số $T = \dfrac{OA'}{SA} + \dfrac{OB'}{SB} + \dfrac{OC'}{SC}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải





Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của AO và BC, BO và AC, CO và AB.

Ta có $\dfrac{OA'}{SA} = \dfrac{MO}{MA} = \dfrac{S_{CMO}}{S_{CMA}} = \dfrac{S_{BMO}}{S_{BMA}} = \dfrac{S_{CMO} + S_{BMO}}{S_{CMA} + S_{BMA}} = \dfrac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$

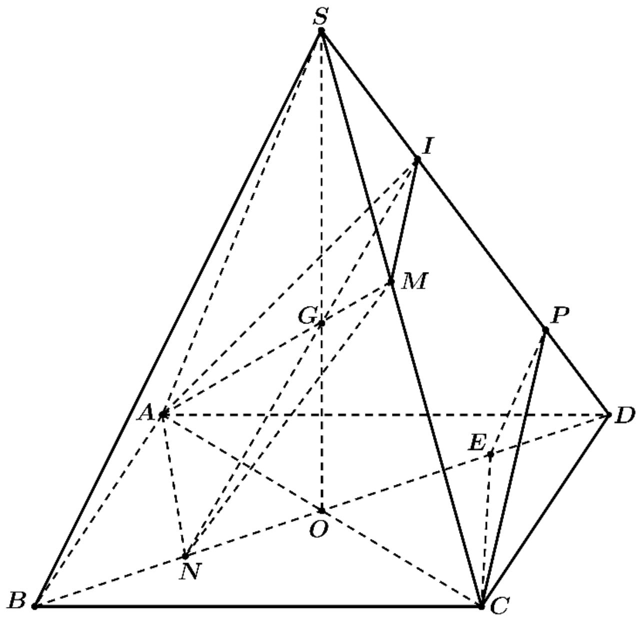
$\dfrac{OB'}{SB} = \dfrac{NO}{NB} = \dfrac{S_{ANO}}{S_{ANB}} = \dfrac{S_{CNO}}{S_{CNB}} = \dfrac{S_{ANO} + S_{CNO}}{S_{ANB} + S_{CNB}} = \dfrac{S_{OAC}}{S_{ABC}}$.

$\dfrac{OC'}{SC} = \dfrac{PO}{PC} = \dfrac{S_{APO}}{S_{APC}} = \dfrac{S_{BPO}}{S_{BPC}} = \dfrac{S_{APO} + S_{BPO}}{S_{APC} + S_{BPC}} = \dfrac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$

Từ đó $T = \dfrac{OA'}{SA} + \dfrac{OB'}{SB} + \dfrac{OC'}{SC} = \dfrac{S_{OBC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{OAC}}{S_{ABC}} + \dfrac{S_{OAB}}{S_{ABC}} = \dfrac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SC, OB. Gọi I là giao điểm của SD và mặt phẳng (AMN). Khi đó tỉ số $\frac{SI}{DI}=\frac{a}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a,b\in\mathbb{Z}$. Tính giá trị biểu thức $a+b$.

Lời giải



Trong (SAC) gọi $G=SO\cap AM$.

Trong (SBD) gọi $I=NG\cap SD \Rightarrow I=SD\cap(AMN)$.

Trong (SCD) kẻ $CP//MI\ (1) \Rightarrow MI$ là đường trung bình của $\Delta SCP \Rightarrow SI=IP\ (3)$.

Trong (SBD) kẻ $PE//NI\ (2)$ nên từ (1) và $(2)\Rightarrow(PEC)//(ANMI)$.

Mà $(ABCD)\cap(CPE)=CE$ và $(ABCD)\cap(ANMI)=AN \Rightarrow CE//AN \Rightarrow \frac{OE}{ON}=\frac{OA}{OC}=1$.

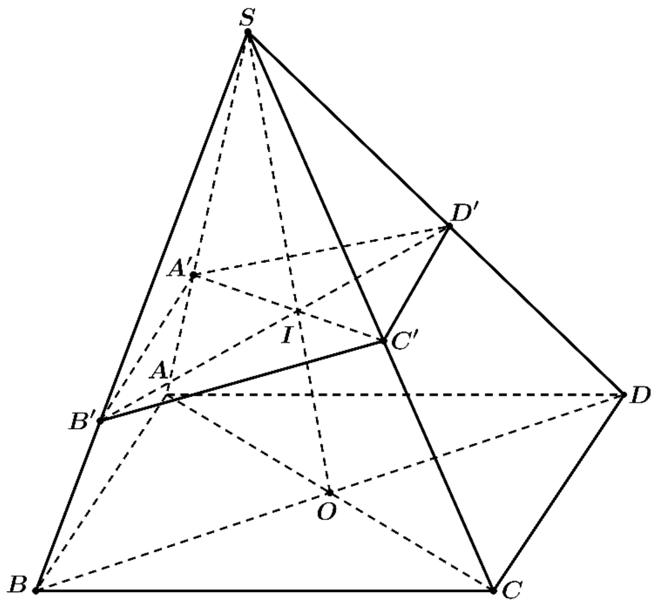
$\Rightarrow OE=NO=\frac{1}{2}OB=\frac{1}{2}OD \Rightarrow E$ là trung điểm của OD và $DN=3DE$.

Xét ΔNID có $PE//NI \Rightarrow \frac{DP}{DI}=\frac{DE}{DN}=\frac{1}{3} \Rightarrow DP=\frac{1}{3}DI \Rightarrow IP=\frac{2}{3}DI\ (4)$.

Từ (3) và $(4)\Rightarrow SI=\frac{2}{3}DI \Rightarrow \frac{SI}{DI}=\frac{2}{3}$ nên $a=2;b=3 \Rightarrow T=a+b=2+3=5$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi A' là điểm trên SA sao cho $A'A=\frac{1}{2}A'S$. Qua A' kẻ đường thẳng song song với AC cắt SC tại C'. Mặt phẳng (α) chứa $A'C'$ cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại B', D'. Tính giá trị của biểu thức $T=\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}$.

Lời giải



Gọi O là giao của AC và BD thì ta có O là trung điểm của đoạn thẳng AC và BD.

Các đoạn thẳng SO, $A'C'$, $B'D'$ đồng quy tại I.

Ta có: $S_{SA'I}+S_{SC'I}=S_{SA'C'} \Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{S_{SAC}}+\frac{S_{SC'I}}{S_{SAC}}=\frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}} \Leftrightarrow \frac{S_{SA'I}}{2S_{SAO}}+\frac{S_{SC'I}}{2S_{SCO}}=\frac{S_{SA'C'}}{S_{SAC}}$

$\Leftrightarrow \frac{SA'}{2SA}.\frac{SI}{SO}+\frac{SC'}{2SC}.\frac{SI}{SO}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \frac{SI}{2SO}\left(\frac{SA'}{SA}+\frac{SC'}{SC}\right)=\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC} \Leftrightarrow \frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=2.\frac{SO}{SI}$.

Tương tự: $\frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=2.\frac{SO}{SI}$

Ta có: $A'C'//AC \Rightarrow \frac{SA}{SA'}=\frac{SC}{SC'}=\frac{3}{2} \Rightarrow \frac{SB}{SB'}+\frac{SD}{SD'}=\frac{SA}{SA'}+\frac{SC}{SC'}=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}=3$.

----------------HẾT----------------

Dạng 2: Xác định giao tuyến và thiết diện của hình chóp

Phương pháp xác định giao tuyến: Để tìm giao tuyến của hai mặt phẳng, ngoài phương pháp "Tìm hai điểm chung của hai mặt phẳng", ta còn có thể tìm bằng cách sau:

- **Bước 1:** Chỉ ra rằng mặt phẳng α, β lần lượt chứa hai đường thẳng song song a và b.
- **Bước 2:** Tìm một điểm chung M của hai mặt phẳng.
- **Bước 3:** Khi đó $(\alpha)\cap(\beta) = Mx\,//\,a\,//\,b$.

Phương pháp xác định thiết diện:
Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β).

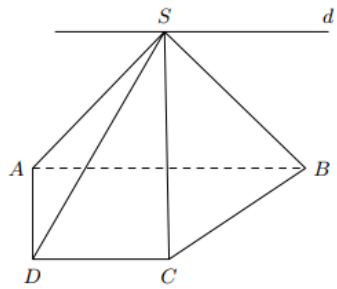
- Tìm một điểm chung S của hai mặt phẳng (α) và (β).
- Hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ lần lượt chứa hai đường thẳng d_1, d_2 mà $d_1\,//\,d_2$.

Khi đó giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng Sx song song với d_1, d_2.
b) Tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình (H) ta tìm giao điểm của các cạnh của hình (H) với mặt phẳng (α). Đa giác tạo bởi các giao điểm tìm được chính là thiết diện cần tìm.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB\,//\,CD$. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

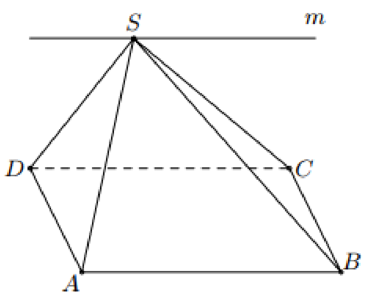
Lời giải



Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng AB và CD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD.

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

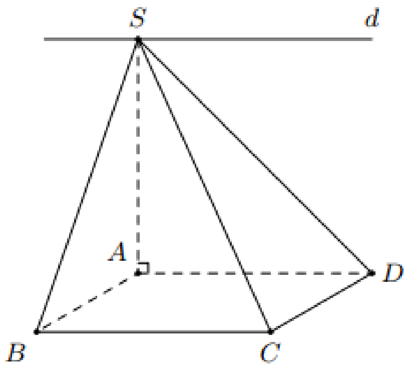
Lời giải



Hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) có điểm chung S và chứa hai đường thẳng song song là AB và CD. Do đó, giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng m đi qua S và song song với AB, CD.

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Lời giải



Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung S và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song BC và AD, suy ra theo hệ quả của định lí 2 , giao tuyến của (SBC) và (SAD) là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD.

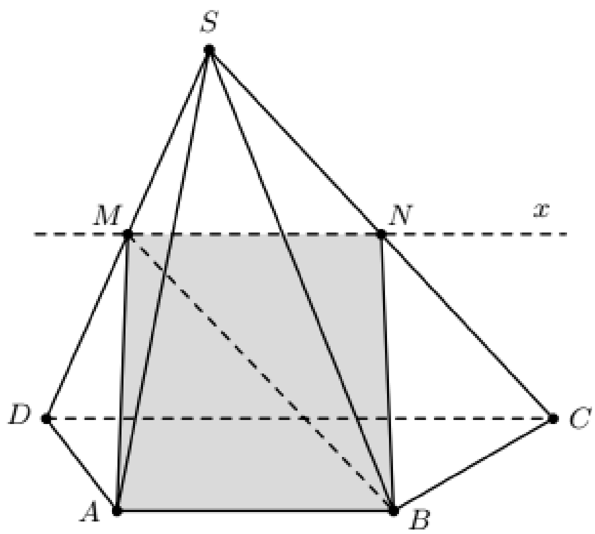
Ta đã biết trong cùng một mặt phẳng, hai đường thẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thứ ba thì song song với nhau.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB // CD)$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng SD.

a) Xác định giao tuyến của mặt phẳng (MAB) và (SCD).

b) Gọi N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB). Chứng minh rằng MN là đường trung bình của tam giác SCD.

Lời giải



a) Ta có $M \in SD \subset (SCD)$ và $M \in (MAB) \Rightarrow M \in (SCD) \cap (MAB)$ và ta có $\begin{cases} CD \subset (SCD) \\ AB \subset (MAB) \\ CD // AB \end{cases}$

Vậy $(MAB) \cap (SCD) = Mx // AB // CD$.

b) Theo đề bài, ta có N là giao điểm của đường thẳng SC và mặt phẳng (MAB).

Suy ra $N \in (MAB)$ và $N \in SC \subset (SCD)$ mà $(MAB) \cap (SCD) = Mx // AB // CD$.

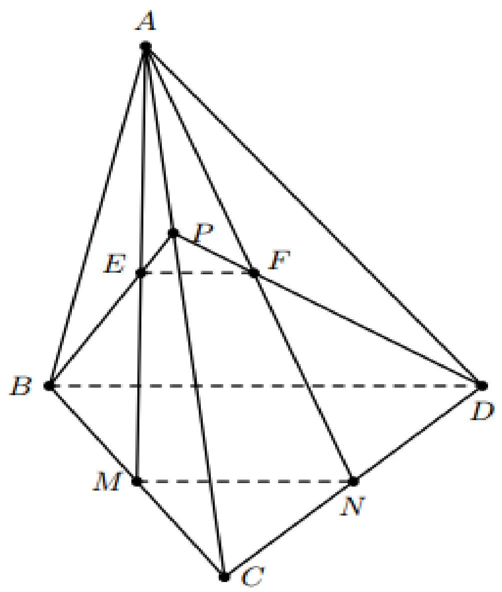
Suy ra $N \in Mx$ hay $MN // AB // CD$.

Xét tam giác (SDC) ta có $\begin{cases} MS = MD \\ MN // CD \end{cases} \Rightarrow NS = NC$.

Vậy MN là đường trung bình của tam giác SCD.

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD và P là một điểm thuộc cạnh AC. Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (AMN) và (BPD) và chứng minh giao tuyến đó song song với BD.

Lời giải



Trong (AMN) gọi $E = AM \cap BP$. Khi đó $\begin{cases} E \in BP \subset (BPD) \\ E \in AM \subset (AMN) \end{cases} \Rightarrow E \in (AMN) \cap (BPD)$ (1).

Trong (ACD) gọi $F = AN \cap PD$. Khi đó $\begin{cases} F \in AN \subset (AMN) \\ F \in PD \subset (BPD) \end{cases} \Rightarrow F \in (AMN) \cap (BPD)$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $(AMN) \cap (BPD) = EF$.

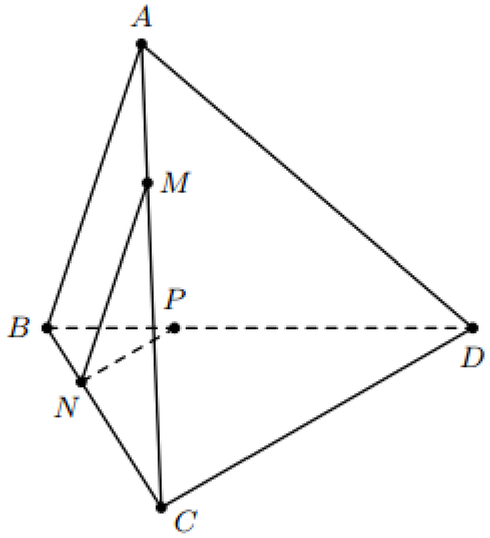
Xét tam giác BCD, có M, N lần lượt là trung điểm của BC và CD $\Rightarrow MN // BD$

Mặt khác: $BD \subset (BDP); MN \subset (AMN)$ và $(BDP) \cap (AMN) = EF$

Vậy $MN // EF // BD$.

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD, M$ là điểm thuộc cạnh AC. Gọi (P) là mặt phẳng qua M song song với AB và CD. Tìm giao tuyến của (P) với mặt phẳng (BCD).

Lời giải



Ta có $\begin{cases} M \in (P) \cap (ABC) \\ (P) \parallel AB \\ AB \subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (ABC) = Mx \parallel AB$.

Gọi $Mx \cap BC = N \Rightarrow (P) \cap (ABC) = MN$ mà $\begin{cases} N \in (P) \cap (ABC) \\ (P) \parallel CD \\ CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (P) \cap (BCD) = Ny \parallel CD$.

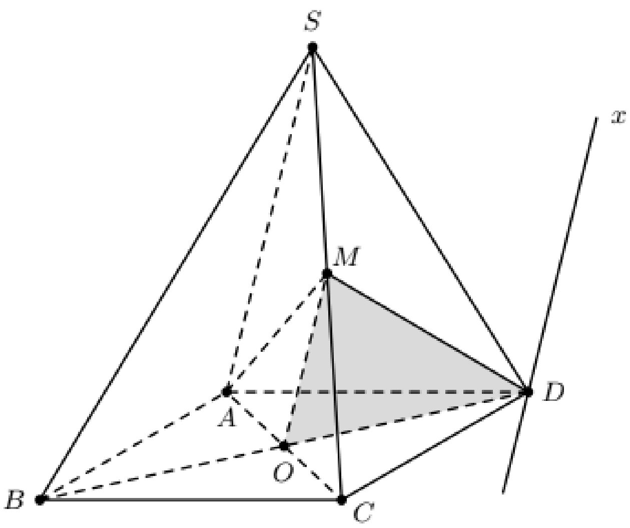
Gọi $Ny \cap BD = P$. Vậy $(P) \cap (BCD) = NP$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo; M là trung điểm của SC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA)

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

Lời giải



a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA).

Xét tam giác SAC, ta có O, M lần lượt là trung điểm của AC và SC nên OM là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OM // SA$ mà $SA \subset (SAD)$ và $SA \subset (SBA)$.

Vậy $OM // (SAD)$ và $OM // (SBA)$.

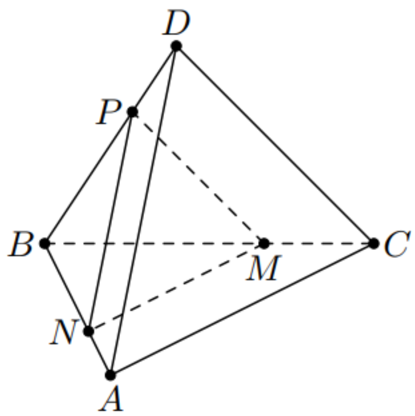
b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

Ta có $SA \subset (SAD)$ và $OM \subset (OMD)$ mà $SA // OM$ và $D \in (SAD) \cap (OMD)$.

Vậy $(SAD) \cap (OMD) = Dx // SA // OM$.

Bài tập 8: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M tùy ý trên cạnh BC. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với cạnh AD, AC. Xác định thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α).

Lời giải



Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ACB) \\ AC \parallel (\alpha) \\ AC \subset (ABC) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và (ABC) là đường thẳng đi qua M, song song với AC, cắt AB tại N.

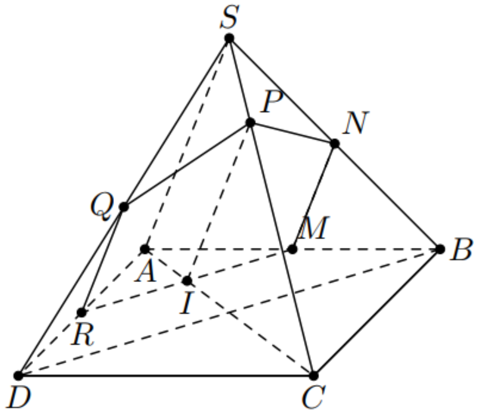
Tương tự, giao tuyến của (α) và (ABD) là đường thẳng đi qua N, song song với AD, cắt BD tại P.

Vì $\begin{cases} (\alpha) \cap (ACB) = MN \\ (\alpha) \cap (ABD) = MN \\ (\alpha) \cap (ABD) = PM \end{cases}$ nên thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác MNP.

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M là trung điểm cạnh AB. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với cạnh BD, SA. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α)

Lời giải

Ta có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAB) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và (SAC) là đường thẳng đi qua M, song song với SA, cắt SB tại N.



Lại có $\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ BD \parallel (\alpha) \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng đi qua M, song song với BD, cắt BD và AC tại R và I.

Tương tự, giao tuyến của (α) và (SAD) là đường thẳng đi qua R, song song với SA, cắt SD tại Q.

Mặt khác $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (SAC) \\ SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) và (SAC) là đường thẳng đi qua I, song song với SA, cắt SC tại P.

Ta có $\begin{cases} (\alpha) \cap (SAB) = MN \\ (\alpha) \cap (SBC) = NP \\ (\alpha) \cap (SCD) = PQ \\ (\alpha) \cap (SAD) = QR \\ (\alpha) \cap (ABCD) = RM \end{cases}$ nên thiết diện của hình chóp cắt bởi (α) là ngũ giác $MNPQR$.

Bài tập 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AD, SB.

a) Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.

b) Tìm giao điểm của (MNP) với BC.

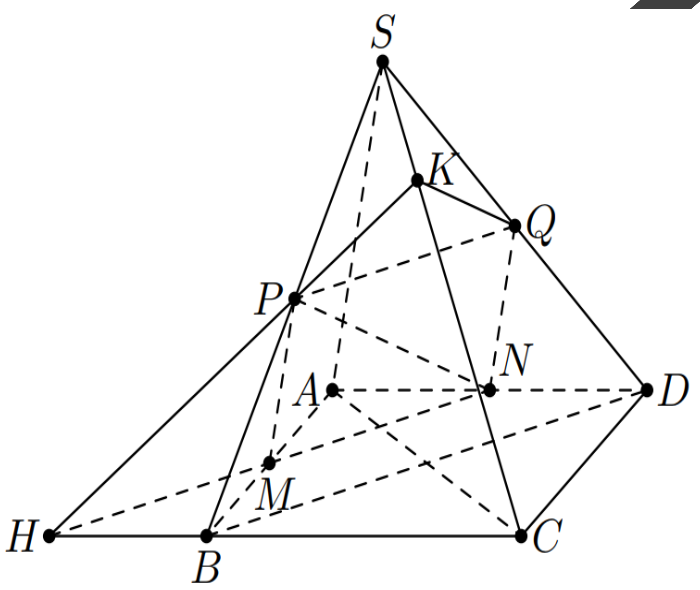
c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

d) Tìm thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (MNP).

Lời giải

a) Tam giác ABD có MN là đường trung bình nên $MN \parallel BD$ và $MN = \dfrac{1}{2}BD$.

Ta có $\begin{cases} BD \parallel MN \\ BD \not\subset (MNP) \\ MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow BD \parallel (MNP)$.



b) Trong $(ABCD)$ dựng $H = MN \cap BC$ ta có $\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = BC \cap (MNP)$.

c) Ta có $\begin{cases} P \in SB, SB \subset (SBD) \Rightarrow P \in (SBD) \\ P \in MP, MP \subset (MNP) \Rightarrow P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in (SBD) \cap (MNP)$.

Mặt khác $\begin{cases} P \in (SBD) \cap (MNP) \\ MN \parallel BD \\ BD \subset (SBD) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (SBD) và (MNP) là đường thẳng đi qua P, song song với BD, cắt SD tại Q. Vậy $(SBD) \cap (MNP) = PQ$.

d) Trong (SBC) dựng $K = HP \cap SC$, giao tuyến của (MNP) với các mặt phẳng $(ABCD)$, (SAB), (SBC), (SCD), (SAD) lần lượt là MN, PM, PK, KQ, QN.

Vậy thiết diện của hình chóp với (MNP) là ngũ giác $PMNQK$.

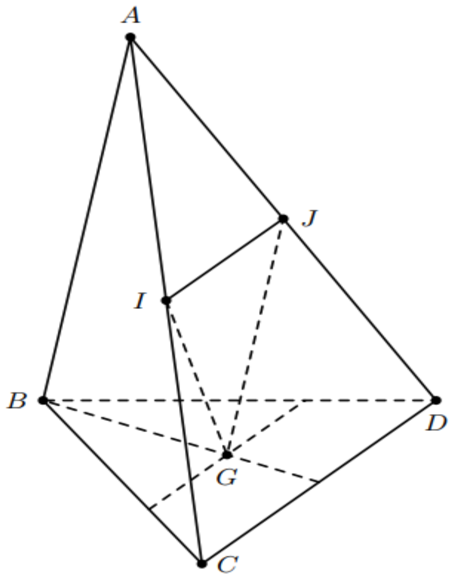
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD.I$ và J theo thứ tự là trung điểm của AD,G là trọng tâm tam giác BCD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng

A. Qua I và song song với AB.
B. Qua J và song song với BD.
C. Qua G và song song với CD.
D. Qua G và song song với BC.

Lời giải



Gọi d là giao tuyến của (GIJ) và (BCD). Khi đó ta có $\begin{cases} G \in (GIJ) \cap (BCD) \\ IJ \, / / CD \\ IJ \subset (GIJ) \end{cases}$

Suy ra d đi qua G và song song với CD.

Câu 2: Nếu mặt phẳng (α) chứa đường thẳng a và mặt phẳng (β) chứa đường thẳng b, sao cho $a / / b$. Khi đó giao tuyến của (α) và (β) là

A. Đường thẳng c song song với a và b.
B. Đường thẳng c song song hoặc trùng với một trong hai đường thẳng a và b.
C. Đường thẳng c trùng với một trong hai đường thẳng a và b.
D. Dường thẳng c cắt hai đường thẳng a và b.

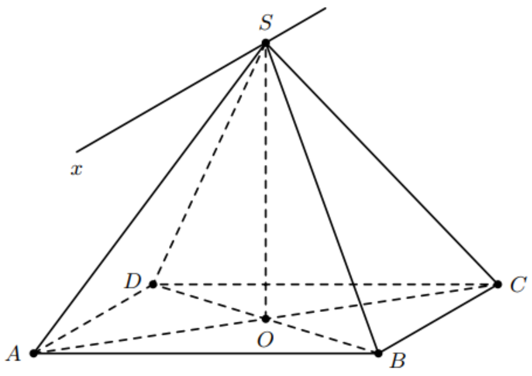
Lời giải

Đường thẳng c song song với a và b.

Câu 3: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là

A. Đường thẳng qua S và song song với AB.
B. Đường thẳng SO.
<u>C</u>. Đường thẳng qua S và song song với AD.
D. Không có giao tuyến.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBD) \\ AD//BC \\ S \in (SAD) \cap (SBC) \end{cases}$. Vậy $(SAD) \cap (SBC) = Sx//AD//BC$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, AC, AD. Đường thẳng MN song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng sau đây?

A. (PCD). **B.** (ABC). **<u>C</u>.** (BCD). **D.** (BCD).

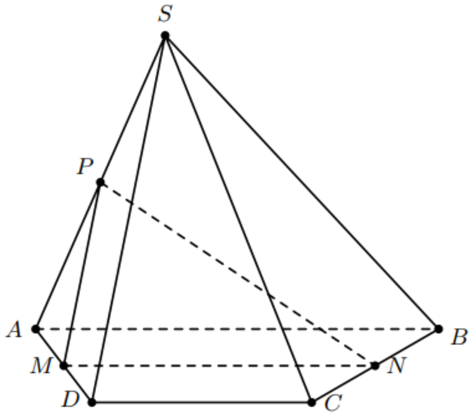
Lời giải

Theo đề bài, ta có MN là đường trung bình của tam giác AB nên MN song song với BC, MN không nằm trong (BCD) nên đường thẳng MN song song với (BCD).

Câu 5: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, AD, SA. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (MNP).

<u>A</u>. Đường thẳng qua P và song song với AB.
B. Đường thẳng qua S và song song với AB.
C. Đường thẳng qua M và song song với SC.
D. Đường thẳng qua PM.

Lời giải

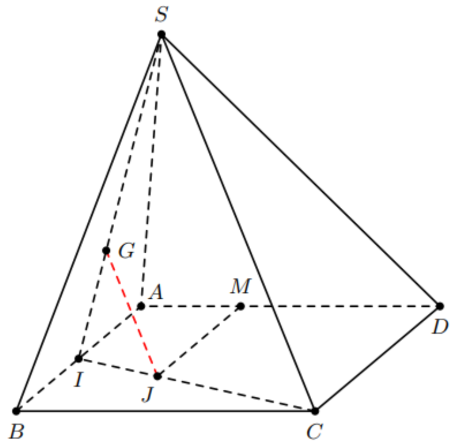


Ta có $\begin{cases} P \in SA \subset (SAB) \\ P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in (SAD) \cap (SBC)$. Mà $MN//AB$ nên giao tuyến của (SAB) và (MNP) là đường thẳng qua P và song song với AB.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAB và I là trung điểm của AB. Lấy điểm M trên đoạn AD sao cho $AD = 3AM$. Đường thẳng qua M và song song với AB cắt CI tại J, đường thẳng JG không song song với mặt phẳng

A. (SCD). **B.** (SAD). **C.** (SBC). **D.** (SAC).

Lời giải



Ta có $AI//CD \Rightarrow \frac{AM}{AD} = \frac{JI}{IC} = \frac{1}{3}$ mà $\frac{GI}{SI} = \frac{1}{3}$ nên $\frac{GI}{SI} = \frac{JI}{IC} = \frac{1}{3} \Rightarrow GJ//SC$.

Hơn nữa, $SC \subset (SCD),(SBC),(SAC)$ nên $JG//(SCD),(SBC),(SAC)$.

Câu 7: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC. Cho G là trọng tâm của tam giác SAB. Giao tuyến của (SAB) và (IJG) là

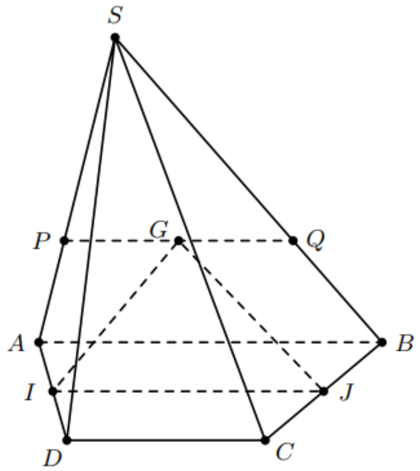
A. SC.

B. Đường thẳng qua S và song song với AB.

C. Đường thẳng qua G và song song với DC.

D. Đường thẳng qua G và cắt BC.

Lời giải



Xét hình thang $ABCD$, ta có I là trung điểm của AD và J là trung điểm của BC

Suy ra IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD$ $\Rightarrow IJ//AB//CD$

Ta có: $G \in (SAB) \cap (IJG)$. Hơn nữa $\begin{cases} AB \subset (SAB) \\ IJ \subset (IJG) \\ AB//IJ \end{cases}$

Vậy $(SAB) \cap (IJG) = Gy//AB//IJ$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J và K lần lượt là trung điểm AC, BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng

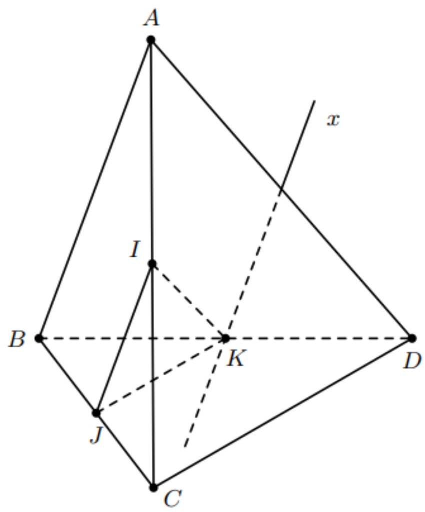
A. KD.

B. Qua K và song song AB.

C. KI.

D. Qua I và song song với JK.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} K \in BD \subset (ABD) \\ K \subset (IJK) \end{cases} \Rightarrow K \in (ABD) \cap (IJK)$

Xét tam giác ΔCAB, ta có $\begin{cases} I \text{ laø trung ñieåm cuûa } AC \\ J \text{ laø trung ñieåm cuûa } BC \end{cases}$

Suy ra IJ là đường trung bình của tam giác $ABC \Rightarrow IJ//AB$ mà $IJ \subset (IJK)$ và $AB \subset (ABD)$

Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (ABD) và (IJK) là đường thẳng đi qua điểm K và song song với AB.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi I là trung diềm cạnh SC. Mệnh đề nào sau đây sai?

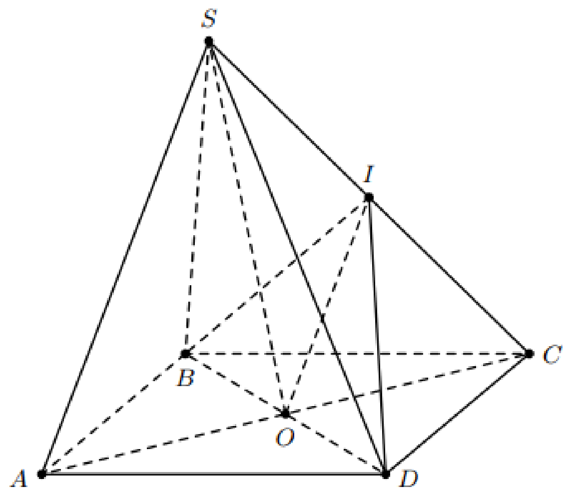
A. Đường thẳng IO song song với mp(SAD).

B. Đường thẳng IO song song với mp(SAB).

C. Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến OI.

D. Mặt phẳng (IBD) cắt (SBD) theo giao tuyến OI.

Lời giải



Trong tam giác SAC có O là trung điểm AC, I là trung điểm SC nên $IO//SA \Rightarrow IO//(SAB)$ và (SAD).

Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến IO.

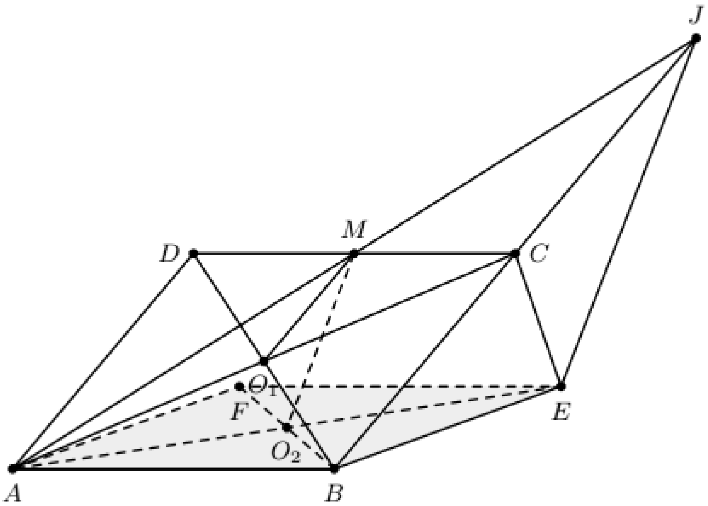
Mặt phẳng (IBD) cắt (SBD) theo giao tuyến BD.

Câu 10: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O_1, O_2 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF.M$ là trung điểm của CD. Chọn khẳng định sai trong các khẳng định sau:

A. MO_2 cắt (BEC). **B.** O_1O_2 song song với (BEC).

C. O_1O_2 song song với (EFM). **D.** O_1O_2 song song với (AFD).

Lời giải



Gọi J là giao điểm của AM và BC. Ta có: $MO_1//AD//BC \Rightarrow MO_1//CJ$.

Mà O_1 là trung điểm của AC nên M là trung điểm của AJ do đó $MO_2//EJ$.

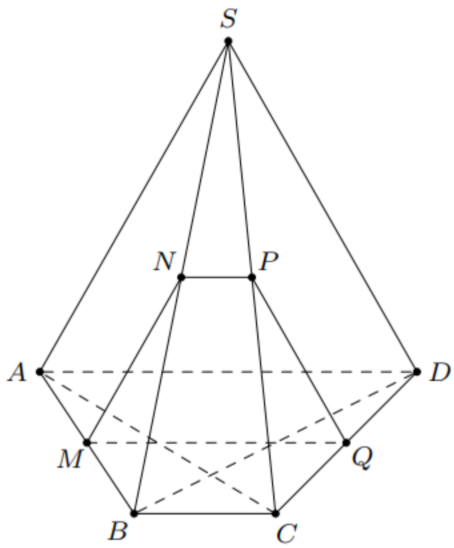
Từ đó suy ra $MO_2//(BEC)$ (vì dễ nhận thấy MO_2 không nằm trên (BEC)).

Vậy MO_2 không cắt (BEC).

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AD \parallel BC, AD > BC)$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với SA và BC. Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì

A. Ngũ giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Tam giác. **D.** Hình thang.

Lời giải



Gọi N là giao điểm của SB và (P), suy ra $MN \parallel SA \Rightarrow N$ là trung điểm của SB.

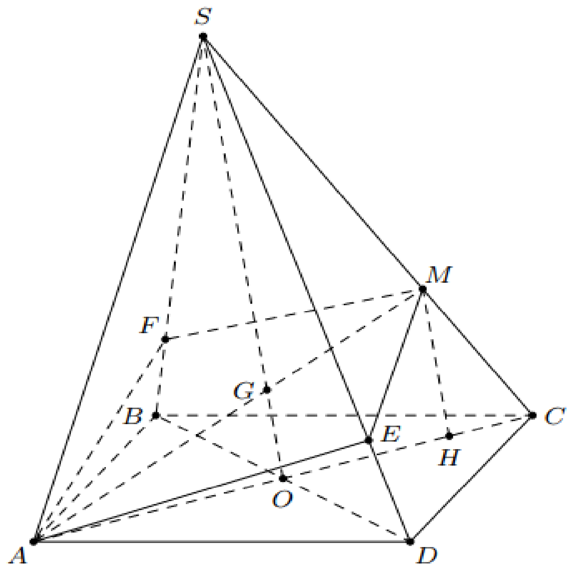
Gọi P,Q là giao điểm của SC,SD và (P), tương tự ta có được P,Q là trung điểm của SC,SD

Suy ra $NP \parallel MQ$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Câu 12: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng a. Gọi M là điểm thuộc cạnh SC sao cho $SM = 2MC$. Mặt phẳng (P) chứa AM và song song với BD. Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P).

A. $\frac{\sqrt{3}a^2}{5}$. **B.** $\frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$. **C.** $\frac{4\sqrt{26}a^2}{15}$. **D.** $\frac{2\sqrt{3}a^2}{5}$.

Lời giải



Gọi $O = AC \cap BD$, $G = SO \cap AM$, trong mặt phẳng (SBD) kẻ đường thẳng d đi qua G và song song với BD cắt SB, SD lần lượt tại E và F. Ta có thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (P) là tứ giác $AEMF$.

Ta có $\begin{cases} BD \perp SO \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

$\Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp AM$.

Kẻ $MH \parallel SO, (H \in AC)$. Ta có $\frac{CH}{CO} = \frac{CM}{CS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{CH}{CA} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{OG}{MH} = \frac{AO}{AH} = \frac{3}{5}$.

$\Rightarrow OG = \frac{3}{5}MH = \frac{3}{5}.\frac{1}{3}SO = \frac{1}{5}SO.$ Suy ra $\frac{EF}{BD} = \frac{SG}{SO} = \frac{4}{5} \Rightarrow EF = \frac{4}{5}BD = \frac{4\sqrt{2}a}{5}$.

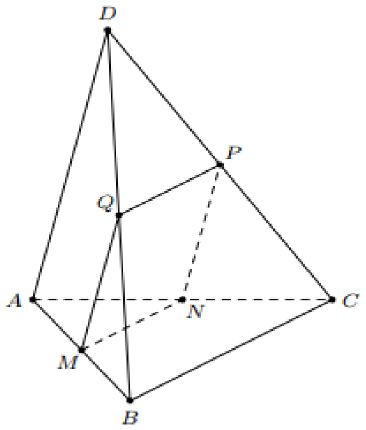
Dễ thấy tam giác SAC vuông cân tại S nên $AM = \sqrt{SA^2 + SM^2} = \frac{a\sqrt{13}}{3}$.

Suy ra $S_{AEMF} = \frac{1}{2}AM.EF = \frac{1}{2}.\frac{a\sqrt{13}}{3}.\frac{4\sqrt{2}a}{5} = \frac{2\sqrt{26}a^2}{15}$.

Câu 13: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm cạnh AB. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng đi qua M và song song với BC và AD, thiết diện thu được là hình gì?

A. Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Ngũ giác.

Lời giải



Gọi (α) mặt phẳng đi qua M và song song với BC và AD. Giả sử N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) với AC, CD và BD.

Vì $(\alpha)\cap(ABC)=MN$ và $BC \parallel (\alpha) \Rightarrow MN \parallel BC$. Tương tự ta có $PQ \parallel BC$ do đó $MN \parallel PQ$.

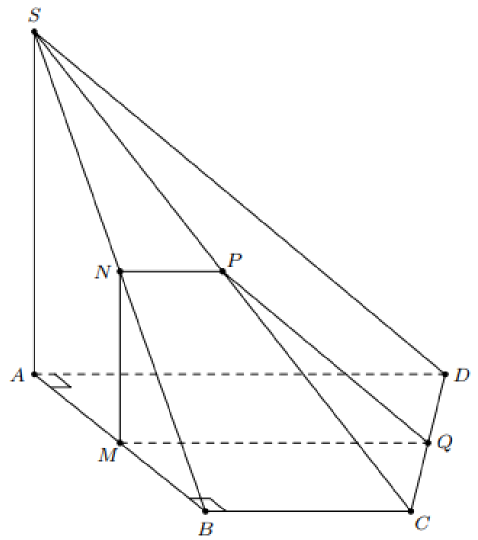
Vì $(\alpha)\cap(ACD)=NP$ và $AD \parallel (\alpha) \Rightarrow NP \parallel AD$. Tương tự ta có $QM \parallel AD$ do đó $MQ \parallel NP$.

Vậy tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A, B. Cạnh SA vuông góc với đáy. M là một điểm nằm trên cạnh AB. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với SA và AD. Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là hình gì

A. Hình bình hành. **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang vuông. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải



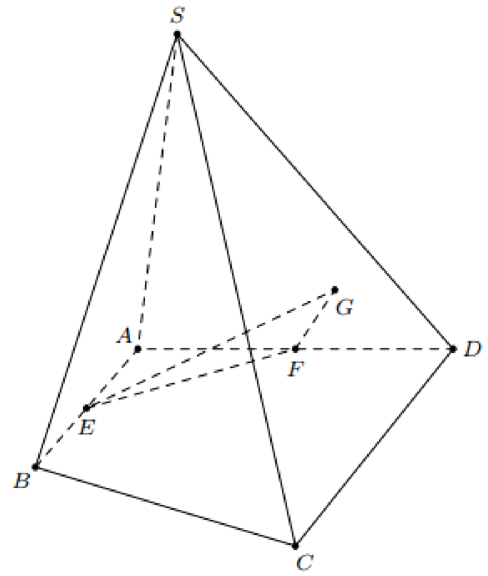
Ta có: $\begin{cases}(P) \parallel SA \\ M \in (P)\cap(SAB)\end{cases} \Rightarrow (P)\cap(SAB)=MN, (N \in SB; MN \parallel SA)$.

$\begin{cases}(P) \parallel AD \\ M \in (P)\cap(ABCD)\end{cases} \Rightarrow (P)\cap(ABCD)=MQ, (Q \in BC; MQ \parallel AD)$.

$\begin{cases}(P)\parallel AD \\ N\in(P)\cap((SBC)\end{cases}\Rightarrow (P)\cap(SBC)=NP,(P\in SC;NP\parallel AD\parallel BC)$.

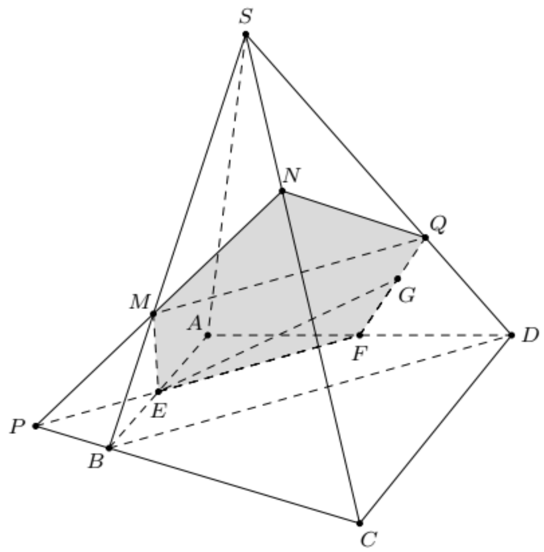
Do $SA\perp AB\Rightarrow MN\perp MQ$. Thiết diện là hình thang vuông $MNPQ$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có G là điểm nằm trong tam giác SCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD (tham khảo hình vẽ). Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (EFG) là hình gì



A. Hình tam giác. **B.** Hình tứ giác. **<u>C</u>.** Hình ngũ giác. **D.** Hình lục giác.

Lời giải



Vì E, F lần lượt là trung điểm của AB, AD nên $EF\parallel BD$. Kéo dài EF cắt BC tại P.

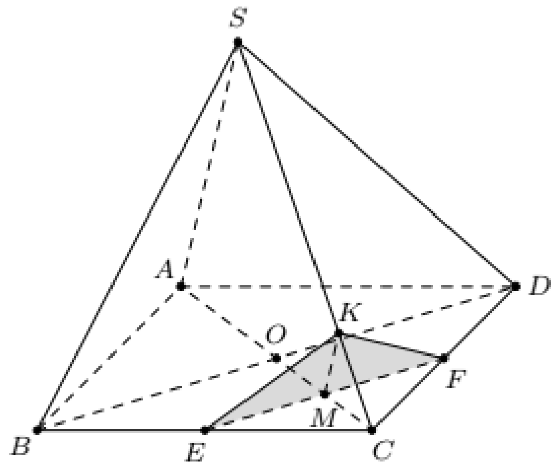
Gọi Q là giao điểm của FG và SD. Kẻ $QM\parallel BD(M\in SB)$. Nối PM cắt SC tại N.

Khi đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi (EFG) là ngũ giác $EMNQF$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O. Gọi M là trung điểm của OC. Mặt phẳng (α) qua M và song song với SA và BD. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ và mặt phẳng (α) là hình gì?

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình ngũ giác.

Lời giải



Thiết diện là tam giác EFK như hình vẽ.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của AB. Cắt tứ diện $ABCD$ bởi mặt phẳng qua M và song song với hai cạnh BC và AD. Thiết diện thu được là hình gì

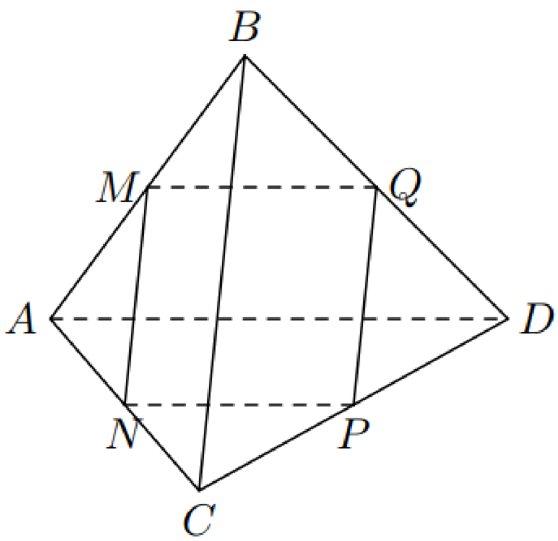
A. Tam giác đều. **B.** Tam giác vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình ngũ giác.

Lời giải

Gọi N, P, Q lần lượt là trung điểm của AC, CD và BD.

Thiết diện cắt bởi mặt phẳng qua M và song song với hai cạnh BC và AD là tứ giác $MNPQ$.

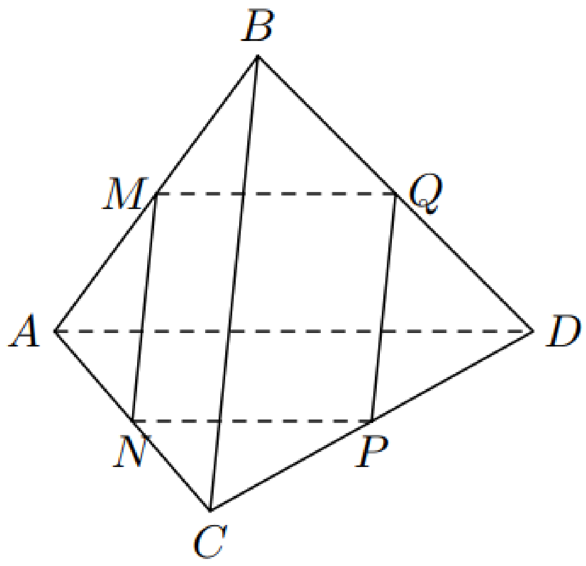
Do MN cùng song song và bằng một nửa BC. Suy ra $MNPQ$ là hình bình hành.



Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, SD và BC. Gọi E là giao điểm của (MNP) với cạnh SA. Tính tỉ số $\frac{SE}{SA}$.

A. $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải



Mặt phẳng (MNP) song song với BD nên cắt DC tại trung điểm K của cạnh DC.

Kẻ KP cắt AC tại I, kẻ MN cắt SO tại J.

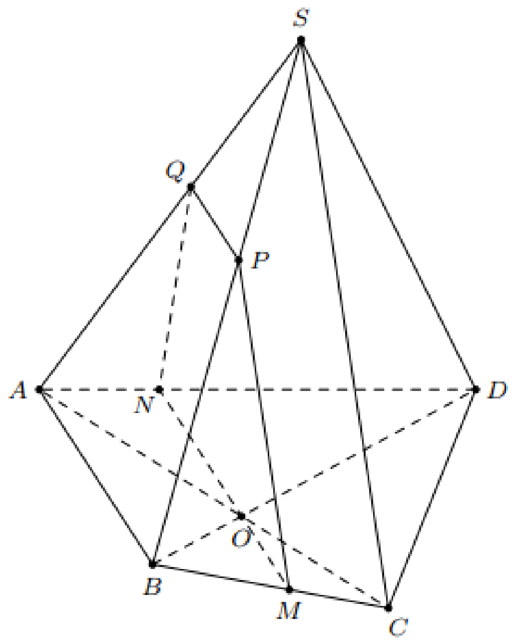
Trong mặt phẳng (SAC), kẻ IJ cắt SA tại E.

Vì $(MNP) \parallel SC \Rightarrow IJ \parallel SC \Rightarrow \dfrac{SE}{SA} = \dfrac{IC}{AC} = \dfrac{1}{4}$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tứ giác lồi. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng qua O, song song với AB và SC là hình gì?

A. Hình chữ nhật. **B.** Hình thang. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình vuông.

Lời giải



Qua O kẻ đường thẳng song song với AB cắt BC, AD lần lượt tại M, N.

Qua M kẻ đường thẳng song song với SC cắt SB tại P.

Qua P kẻ đường thẳng song song với AB cắt SA tại Q.

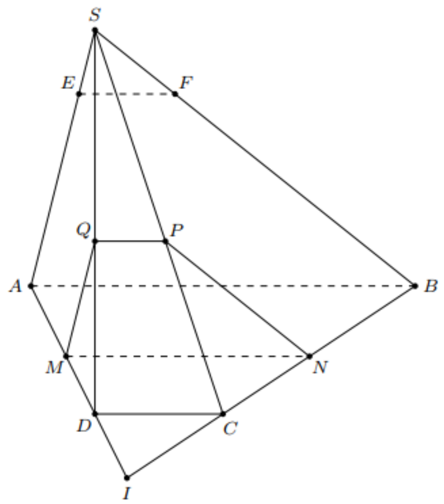
Ta được thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Vì QP, MN cùng song song với AB nên $QP \parallel MN$. Vậy $MNPQ$ là hình thang.

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB \parallel CD)$, cạnh $AB = 3a$, $AD = CD = a$ .Tam giác SAB cân tại S, $SA = 2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SD, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q. Đặt $AM = x(0 < x < a)$. Biết x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được một đường tròn, bán kính đường tròn đó là

A. $\dfrac{a\sqrt{7}}{4}$. **B.** $\dfrac{a\sqrt{7}}{6}$. **C.** $\dfrac{3a}{4}$. **D.** a.

Lời giải



Vì (P) song song với SA, AB cắt các cạnh AD, BC, SD, SD theo thứ tự tại M, N, P, Q nên $MN \parallel AB \parallel PQ$, $MQ \parallel SA$, $NP \parallel SB$.

Theo công thức Hê-rông, diện tích tam giác SAB là $S_{SAB} = \dfrac{3\sqrt{7}}{4}a^2$.

Gọi r_1 là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác SAB, suy ra $r_1 = \dfrac{S}{p} = \dfrac{3\sqrt{7}}{14}a$.

Gọi E, F nằm trên cạnh SA, SB sao cho $EF \parallel AB$ và tiếp xúc vơi đường tròn nội tiếp ΔSAB.

Khi đó khoảng cách giữa EF, AB là $d = 2r_1 = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}a$.

Gọi h là đường cao ΔSAB ta có $h = \sqrt{SA^2 - \dfrac{AB^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$. $\Rightarrow \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{SE}{SA} = \dfrac{h-d}{h} = \dfrac{1}{7}$.

Ta có $\dfrac{AM}{AD} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{QP}{DC} \Rightarrow QP = AM = x$.

Mặt khác, gọi I là giao điểm của AD và BC ta có: $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{IM}{IA} = \dfrac{3a-2x}{3a} \Rightarrow MN = 3a - 2x$.

Điều kiện để hình thang $MNPQ$ ngoại tiếp đường tròn là hai hình thang $MNPQ$ và $ABEF$ đồng dạng với nhau, khi đó $\dfrac{QP}{MN} = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow \dfrac{x}{3a-2x} = \dfrac{1}{7} \Rightarrow x = \dfrac{a}{3}$.

Gọi r_2 là bán kính đường tròn nội tiếp hình thang $MNPQ$.

Ta có: $\dfrac{r_2}{r_1} = \dfrac{MN}{AB} = \dfrac{3a-2x}{3a} = \dfrac{7}{9} \Rightarrow r_2 = \dfrac{a\sqrt{7}}{6}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Điểm M thuộc cạnh SA, điểm E và F lần lượt là trung điểm của AB và BC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

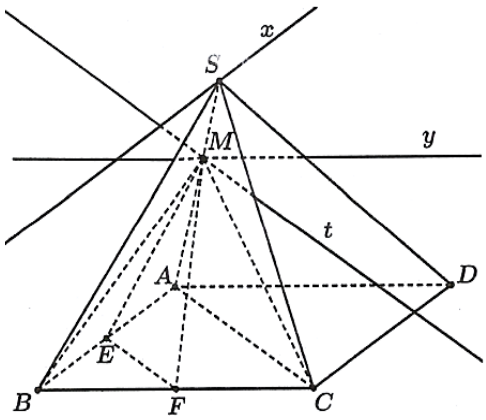
a) $EF\,//\,AC$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng qua S và song song với AC

c) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD) đường thẳng qua M và song song với BC

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC) là đường thẳng qua M và song song với AC

Lời giải



a) Đúng: $EF\,//\,AC$

b) Sai: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD):

Ta có: $\begin{cases} S \in (SAB)\cap(SCD) \\ AB \subset (SAB); CD \subset (SCD). \\ AB\,//\,CD \end{cases}$

Suy ra $Sx = (SAB)\cap(SCD)$, với Sx là đường thẳng qua S và $Sx\,//\,AB\,//\,CD$.

c) Đúng: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MBC) và (SAD)

Ta có: $\begin{cases} M \in SA, SA \subset (SAD) \\ M \in (MBC) \end{cases} \Rightarrow M \in (MBC)\cap(SAD)$.

Khi đó: $\begin{cases} M \in (MBC)\cap(SAD) \\ BC \subset (MBC); AD \subset (SAD). \\ BC\,//\,AD \end{cases}$

Suy ra $My = (MBC)\cap(SAD), My$ là đường thẳng qua M và $My\,//\,BC\,//\,AD$.

d) Đúng: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (MEF) và (SAC):

Ta có: $\begin{cases} M \in SA, SA \subset (SAC) \\ M \in (MEF) \end{cases} \Rightarrow M \in (MEF) \cap (SAC)$.

Xét tam giác ABC, ta có EF là đường trung bình $\Rightarrow EF // AC$.

Khi đó: $\begin{cases} M \in (MEF) \cap (SAC) \\ EF \subset (MEF); AC \subset (SAC) \\ EF // AC \end{cases}$

Suy ra $Mt = (MEF) \cap (SAC), Mt$ là đường thẳng qua M và $Mt // EF // AC$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$, gọi I và J lần lượt là trung điểm của AD và AC, G là trọng tâm của tam giác BCD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

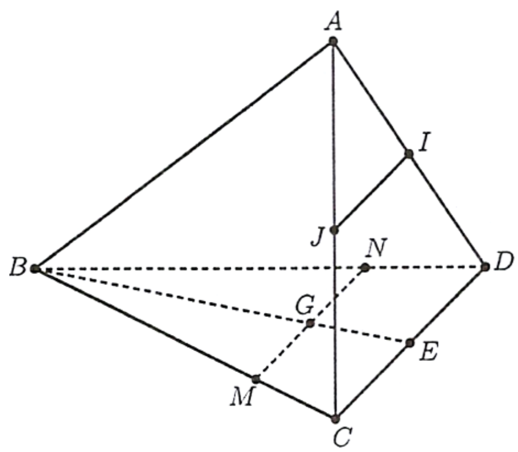
a) $IJ // CD$

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD) là đường thẳng qua G và song song với BC

c) Cho biết $CD = 6$. Biết GIJ cắt BC, BD lần lượt tại M và N. Khi đó $2IJ + 3MN = 17$.

d) Cho biết $CD = 6$. Biết GIJ cắt BC, BD lần lượt tại M và N. Khi đó $3IJ + 2MN = 18$.

Lời giải



a) Đúng: $IJ // CD$

b) Sai: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng (GIJ) và (BCD):

Vì IJ là đường trung bình của tam giác ACD nên $IJ // CD$.

Ta có: $\begin{cases} G \in (GIJ) \cap (BCD) \\ IJ // CD \\ IJ \subset (GIJ), CD \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow Gx = (GIJ) \cap (BCD)$, trong đó Gx là đường thẳng qua G và $Gx // IJ // CD$.

c) Sai: Trong mặt phẳng (BCD), kẻ Gx song song CD cắt BC tại M, cắt BD tại N.

Gọi E là trung điểm CD, theo định lí Thalet, ta có: $\dfrac{BM}{BC} = \dfrac{BG}{BE} = \dfrac{2}{3}; \dfrac{MN}{CD} = \dfrac{BM}{BC}$

Suy ra $\frac{MN}{CD} = \frac{2}{3}$ hay $MN = \frac{2}{3}CD = \frac{2}{3}.6 = 4$.

Vì IJ là đường trung bình tam giác ACD nên $IJ = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}.6 = 3$.

Do đó $2IJ + 3MN = 2.3 + 3.4 = 18$.

d) Sai: $3IJ + 2MN = 3.3 + 2.4 = 17$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành, AC và BD cắt nhau tại O. Gọi I là trung điểm SO. Mặt phẳng (ICD) cắt SA, SB lần lượt tại M, N. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

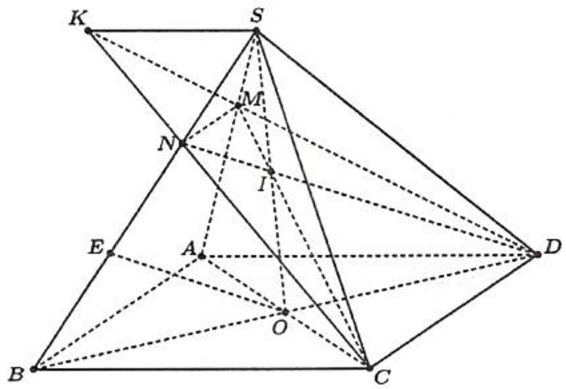
a) Điểm M là giao điểm của đường thẳng SA với mặt phẳng (ICD)

b) Ta có $SN = \frac{2}{3}SB$

c) Cho $AB = a$ thì $MN = \frac{a}{2}$

d) Trong mặt phẳng $(CDMN)$, gọi K là giao điểm của CN và DM. Khi đó SK và BC chéo nhau

Lời giải



a) Đúng: Trong mặt phẳng (SAC) kẻ CI cắt SA tại M;

Trong mặt phẳng (SBD) kẻ DI cắt SB tại N.

Vì $\begin{cases} M \in CI, CI \subset (ICD) \\ M \in SA \end{cases} \Rightarrow M = SA \cap (ICD)$.

b) Sai: Tương tự: $\begin{cases} N \in DI, DI \subset (ICD) \\ N \in SB \end{cases} \Rightarrow N = SB \cap (ICD)$.

Gọi E là trung điểm BN, OE là đường trung bình của tam giác $BDN \Rightarrow OE // DN$.

Trong tam giác SOE, ta có NI qua trung điểm I của SO và $NI // OE, N$ là trung điểm của SE. Vậy $SN = NE = EB$ hay $SN = \frac{1}{3}SB$.

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $SM = \frac{1}{3}SA$.

Khi đó hai tam giác SMN, SAB đồng dạng vì có góc S chung và $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$.

c) Sai: Xét tam giác SAB, theo định lí Thales, ta có: $\frac{MN}{AB} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{AB}{3} = \frac{a}{3}$.

d) Sai: Chứng minh $SK // BC // AD$:

Dễ thấy S là điểm chung của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Ta có: $\begin{cases} K \in CN, CN \subset (SBC) \\ K \in DM, DM \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow K \in (SBC) \cap (SAD)$.

Vì vậy $SK = (SBC) \cap (SAD)$. Khi đó: $\begin{cases} SK = (SBC) \cap (SAD) \\ BC \subset (SBC), AD \subset (SAD) \Rightarrow SK // BC // AD. \\ BC // AD \end{cases}$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang (AD là đáy lớn, BC là đáy nhỏ). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SA và SD. K là giao điểm của các đường thẳng AB và CD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

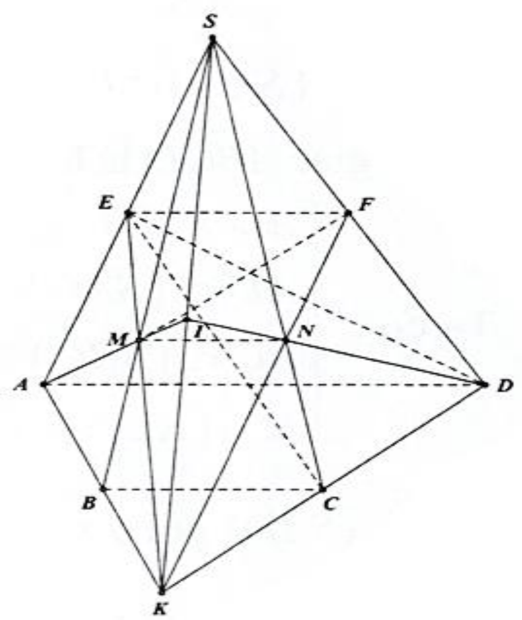
a) Giao điểm M của đường thẳng SB và mặt phẳng (CDE) là điểm thuộc đường thẳng KE

b) Đường thẳng SC cắt mặt phẳng (EFM) tại N. Tứ giác $EFNM$ là hình bình hành

c) Các đường thẳng AM, DN, SK cùng đi qua một điểm

d) Cho biết $AD = 2BC$. Tỉ số diện tích của hai tam giác KMN và KEF bằng $\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{2}{3}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có: $SK = (SAB) \cap (SCD)$.

Trong (SAB) gọi $M = KE \cap SB$ thì ta có $KE \subset (CDE)$ do đó $SB \cap (CDE) = M$.

b) Sai: Trong (SCD) gọi $N = KF \cap SC$ thì ta có $KF \subset (EFM)$ do đó $SC \cap (EFM) = N$.

$$\Rightarrow \begin{cases} MN = (EFK) \cap (SBC) \\ EF \,//\, BC; EF \subset (EFK), BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow MN \,//\, EF \,//\, BC.$$

Suy ra tứ giác $EFNM$ là hình thang.

c) Đúng: $(ADNM)$ gọi $I = AM \cap DN$ mà $\begin{cases} I \in AM, AM \subset (SAB) \\ I \in CD, CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow I \in (SAB) \cap (SCD)$,

Hay $I \in SK$ nên 3 đường thẳng AM, DN, SK đồng quy tại điểm I.

d) Sai: Khi $AD = 2BC$ dễ dàng chứng minh được B, C lần lượt là trung điểm của KA và KD. Suy ra M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác SAK và SDK.

Do đó $MN = \frac{2}{3}EF$, gọi h_1, h_2 lần lượt là độ dài đường cao xuất phát từ đỉnh K xuống hai đáy MN và EF, dễ thấy $h_1 = \frac{2}{3}h_2$. Vậy $\frac{S_{\Delta KMN}}{S_{\Delta KEF}} = \frac{\frac{1}{2}MN \cdot h_1}{\frac{1}{2}EF \cdot h_2} = \frac{\frac{2}{3}EF \cdot \frac{2}{3}h_2}{EF \cdot h_2} = \frac{4}{9}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là một hình bình hành tâm O. Gọi I, K lần lượt là trung điểm của SB và SD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

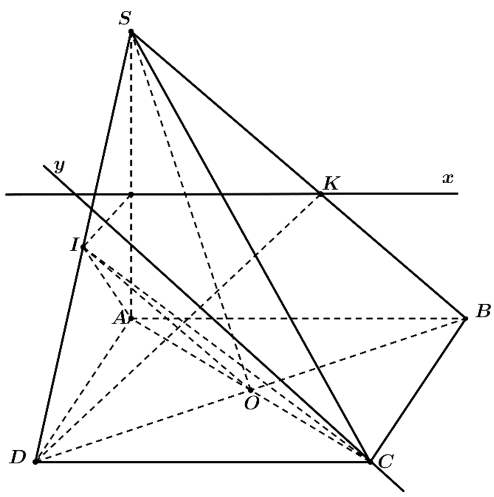
a) SO là giao tuyến của (SAC) và (SBD)

b) Giao điểm J của SA với (CKB) thuộc đường thẳng đi qua K và song song với DC

c) Giao tuyến của (OIA) và (SCD) là đường thẳng đi qua C và song song với SD

d) $CD \,//\, IJ$

Lời giải



a) Đúng: $\begin{cases} O \in AC \subset (SAC) \\ O \in BD \subset (SBD) \end{cases} \Rightarrow O \in (SAB) \cap (SCD)$

$S \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SBD)$.

b) Sai: Tứ giác $ABCD$ là hình bình hành nên $AB//CD; AD//BC$.

Ta có: $\begin{cases} AD//CB \\ AD \subset (SAD) \\ BC \subset (SBC) \\ K \in (KBC) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Kx = (KBC) \cap (SAD) \\ Kx//AD//BC \end{cases}$.

Trong (SAD) gọi $J = Kx \cap SA$ ta có $\Rightarrow \begin{cases} J \in SA \\ J \in Kx \subset (BKC) \end{cases} \Rightarrow J = SA \cap (BKC)$

c) Đúng: Ta có OI là đường trung bình của $\Delta SBD \Rightarrow OI//SD$.

Ta có: $\begin{cases} OI//SD \\ OI \subset (OIA) \\ SD \subset (SCD) \\ C \in (OIA) \cap (SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Cy = (OIA) \cap (SCD) \\ Cy//SD//OI \end{cases}$.

d) Đúng: Ta có: $IJ//AB$ (IJ là đường trung bình của ΔSAB)

Mặt khác: $AB//CD$ (tứ giác $ABCD$ là hình bình hành) $\Rightarrow CD//IJ$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh SB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC. Kẻ $MK \parallel SC, (K \in BC)$, $NP \parallel SC, (P \in SD)$ và $EH \parallel SC, (H \in SA)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

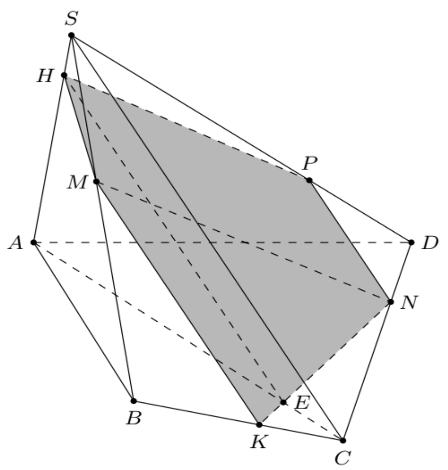
a) MK là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD).

b) NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

c) EH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC).

d) Thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MKNPH$.

Lời giải



a) Sai: Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC.

Kẻ $MK \parallel SC, (K \in BC)$ thì MK là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

b) Sai: Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC.

Kẻ $NP \parallel SC, (P \in SD)$ thì NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD).

Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap NK \Rightarrow E \in (P)$.

c) Đúng: Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC.

Kẻ $EH \parallel SC, (H \in SA)$ thì EH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC).

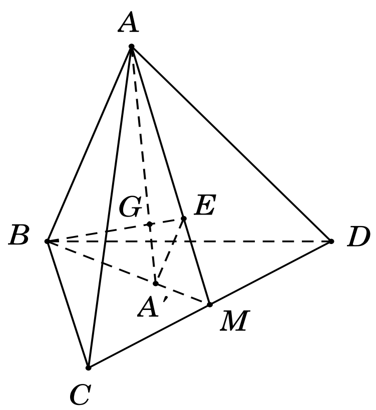
d) Đúng: Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (SAD) với (P) là PM, giao tuyến của mặt phẳng (SAB) với (P) là HM.

Vậy thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MKNPH$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi G là trọng tâm tứ diện $ABCD$. Gọi A' là trọng tâm của tam giác BCD. Tính tỉ số $\dfrac{GA}{GA'}$.

Lời giải



Gọi E là trọng tâm của tam giác ACD, M là trung điểm của CD.

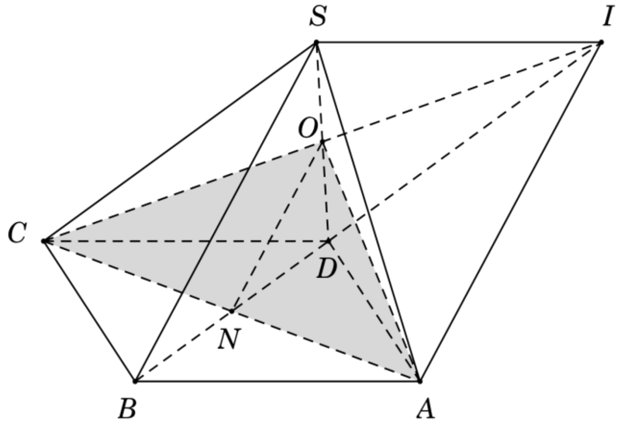
Nối BE cắt AA' tại G suy ra G là trọng tâm tứ diện.

Xét tam giác MAB, có $\dfrac{ME}{MA} = \dfrac{MA'}{MB} = \dfrac{1}{3}$ suy ra $A'E \,//\, AB \Rightarrow \dfrac{A'E}{AB} = \dfrac{1}{3}$.

Khi đó, theo định lí Talet suy ra $\dfrac{A'E}{AB} = \dfrac{A'G}{AG} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{GA}{GA'} = 3$.

Câu 2: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $CDIS$ không thuộc một mặt phẳng và cạnh bằng 4. Biết tam giác SAC cân tại S, $SB = 8$. Gọi S là diện tích thiết diện của mặt phẳng (ACI) và hình chóp $S.ABCD$. Tính $\dfrac{S}{\sqrt{2}}$

Lời giải



Gọi $O = SD \cap CI$; $N = AC \cap BD \Rightarrow O, N$ lần lượt là trung điểm của $DS, DB \Rightarrow ON = \dfrac{1}{2}SB = 4.$

Thiết diện của $mp\left(ACI\right)$ và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác $\Delta OCA.$

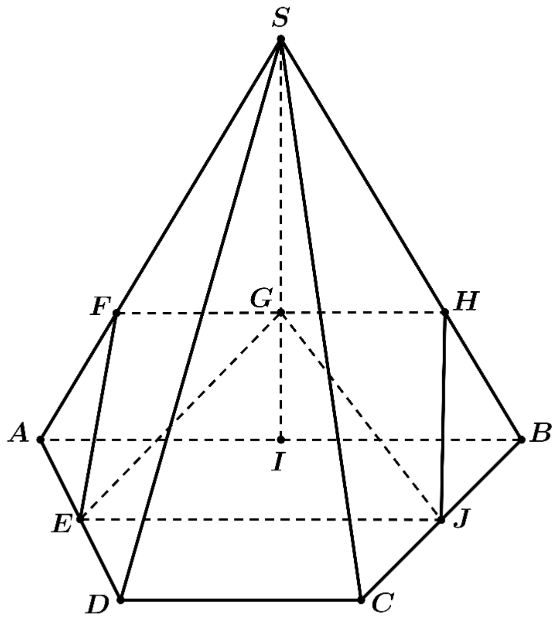
Tam giác ΔSAC cân tại $S \Rightarrow SC = SA \Rightarrow \Delta SDC = \Delta SDA$

$\Rightarrow CO = AO$ (cùng là đường trung tuyến của 2 định tương ứng) $\Rightarrow \Delta OCA$ cân tại O

$\Rightarrow S_{\Delta OCA} = \dfrac{1}{2}ON.AC = \dfrac{1}{2}.4.4\sqrt{2} = 8\sqrt{2} \Rightarrow \dfrac{S}{\sqrt{2}} = 8.$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$. có đáy $ABCD$ là hình thang với các cạnh đáy là AB và CD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC và G là trọng tâm của tam giác SAB. Biết tứ giác tạo bởi các giao tuyến của $\left(IJG\right)$ và các mặt hình chóp là một hình bình hành, $AB = 6$. Khi đó, tính độ dài cạnh CD.

Lời giải



Kẻ đường thẳng qua G song song với AB cắt SA tại F, cắt SB tại H. Khi đó $IJHF$ là tứ giác tạo bởi các giao tuyến của $\left(IJG\right)$ và các mặt hình chóp $\Rightarrow IJHF$ là hình bình hành.

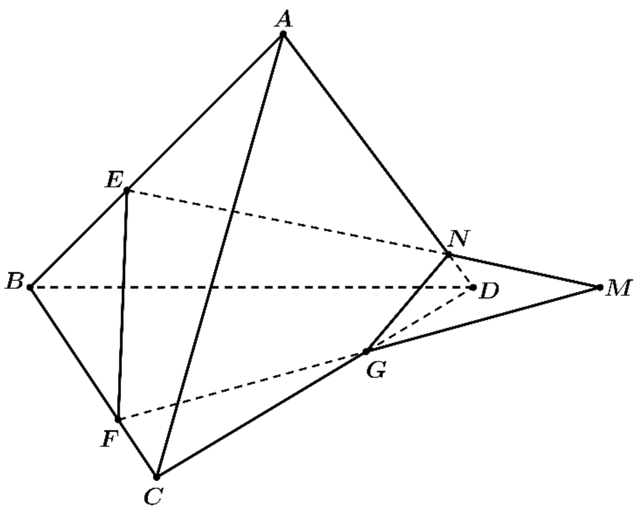
Gọi E là trung điểm của $AB \Rightarrow \dfrac{SG}{SE} = \dfrac{2}{3}$.

Vì I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và BC nên IJ là đường trung bình của hình thang $ABCD \Rightarrow FH \parallel IJ \parallel AB \Rightarrow \dfrac{FH}{AB} = \dfrac{SG}{SE} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow FH = \dfrac{2}{3}.AB = 4 \Rightarrow IJ = 4$.

Ta lại có: $IJ = \dfrac{AB + CD}{2} \Rightarrow CD = 2IJ - AB = 2$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh bằng nhau và bằng 10. Gọi E là điểm thuộc cạnh AB sao cho $AE = 2EB$, F là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BF = 2FC$ và G là điểm thuộc cạnh CD sao cho $CG = 2GD$. Độ dài đoạn giao tuyến của mặt phẳng (EFG) và mặt bên ACD bằng

Lời giải



Gọi $\{M\} = FG \cap BD$ và $\{N\} = EM \cap AD$. Suy ra $NG = (EFG) \cap (ACD)$.

Theo định lí Menelaus cho tam giác BDC với 3 điểm F, G, M thẳng hàng ta có: $\dfrac{MD}{MB}.\dfrac{FB}{FC}.\dfrac{GC}{GD} = 1 \Rightarrow \dfrac{MD}{MB}.2.2 = 1 \Rightarrow \dfrac{MD}{MB} = \dfrac{1}{4}$.

Tương tự, ta có $\dfrac{MB}{MD}.\dfrac{ND}{NA}.\dfrac{EA}{EB} = 1 \Rightarrow 4.2.\dfrac{ND}{NA} = 1 \Rightarrow \dfrac{ND}{NA} = \dfrac{1}{8}$.

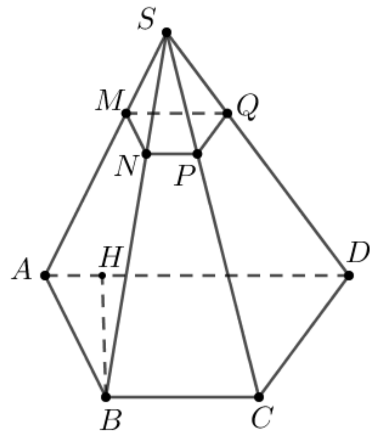
$\Rightarrow 8ND = NA \Rightarrow 9ND = 10 \Rightarrow ND = \dfrac{10}{9}$.

Xét tam giác đều NDG, ta có

$$NG = \sqrt{ND^2 + DG^2 - 2ND.DG.\cos 60^\circ} = \sqrt{\frac{10^2}{81} + \frac{10^2}{9} - 2.\frac{10}{9}.\frac{10}{3}.\frac{1}{2}} = \frac{5\sqrt{7}}{9} \approx 1,47.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang và $AD \parallel BC$, $AB = 2$, $AD = 8$, $BC = 4$, $BAD = 60^\circ$. Mặt phẳng (α) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $\dfrac{SA}{SM} = 3$. Tính diện tích của thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của B lên cạnh AD. Suy ra $BH = AB.\sin 60° = \sqrt{3}$.

Ta có $S_{ABCD} = \dfrac{(AB+BC).BH}{2} = \dfrac{(8+4).\dfrac{2\sqrt{3}}{2}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (α) và các cạnh SB, SC, SD.

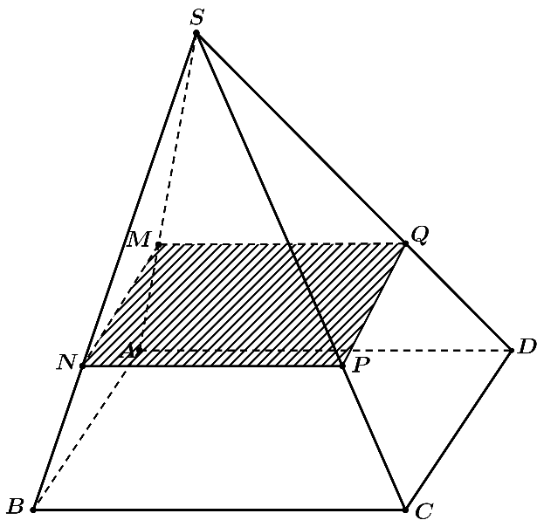
Vì $(\alpha) // (ABCD)$ nên (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là hình thang $MNPQ$ đồng dạng với hình thang $ABCD$.

Vì $(\alpha) // (ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{QM}{AD} = \dfrac{1}{3} = k$.

Đến đây, diện tích của $MNPQ$ là $S_{MNPQ} = k^2.S_{ABCD} = \dfrac{1}{9}S_{ABCD} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \approx 1,15$.

Câu 6: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. M là điểm trên SA sao cho $\dfrac{SM}{SA} = \dfrac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và BC, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

Lời giải



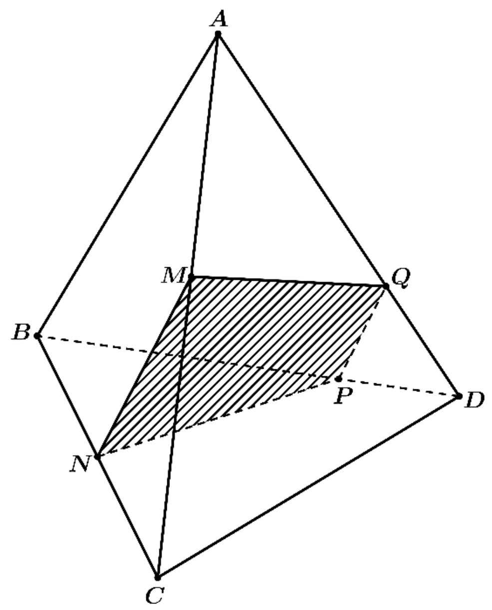
Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với AB nên từ M kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại N, từ N kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P.

Từ P kẻ đường thẳng song song với CD cắt SD tại Q. Khi đó mặt phẳng (α) cắt hình chóp theo tứ giác $MNPQ$.

Ta có tứ giác $MNPQ$ là hình vuông có cạnh $MN = \frac{2}{3}AB = \frac{20}{3}$. Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ là $S = \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{400}{9} \approx 44,4$.

Câu 7: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh bằng 6. Gọi M, N lần lượt là trung điểm CA, CB và P là điểm trên cạnh BD sao cho $BP = 2PD$, tính diện tích S thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (MNP)?

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} MN \parallel AB \\ \{P\} = (MNP) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow (MNP) \cap (ABD)$ là đương thẳng qua P, song song AB cắt AD tại Q $\Rightarrow MNPQ$ là hình thang nên $\frac{DP}{DB} = \frac{1}{3} = \frac{DQ}{DA} = \frac{PQ}{AB} \Rightarrow DQ = 2, BP = 4, PQ = 2$.

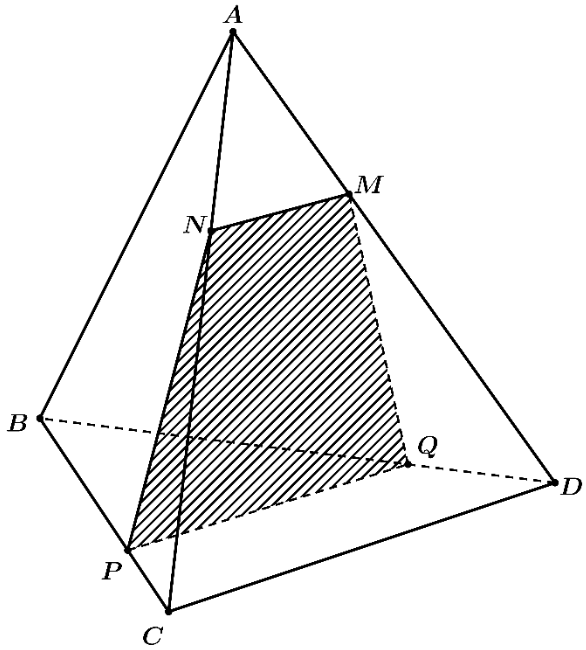
Hai tam giác $\Delta MAQ = \Delta NBP \Rightarrow NP = MQ \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

Ta có: $MQ^2 = AM^2 + AQ^2 - 2AQ.AM.\cos 60^0 = 13 \Rightarrow MQ = NP = \sqrt{13}$.

Suy ra: $PH = \sqrt{NP^2 - NH^2} = \frac{\sqrt{51}}{2}$. Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}(PQ + MN)PH = \frac{5\sqrt{51}}{4} \approx 8,93$.

Câu 8: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng a. Gọi M, N lần lượt là hai điểm di động trên các cạnh AD và BC sao cho $AM = CP = x$ $(0 < x < a)$. Mặt phẳng (α) qua MP, song song với CD cắt tứ diện theo thiết diện có diện tích nhỏ nhất bằng bao nhiêu khi $a = 10$?

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (BCD) \\ \{P\} = (BCD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (BCD) \cap (\alpha)$ là đường thẳng qua P song song CD và cắt BD tại Q.

Ta có: $\begin{cases} CD \parallel (\alpha) \\ CD \subset (ACD) \\ \{M\} = (ACD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (ACD) \cap (\alpha)$ là đường thẳng qua M song song CD và cắt AC tại N

Vậy thiết diện của tứ diện khi cắt bởi (α) là hình thang $MNPQ$.

Vì tứ diện đều $ABCD$ cạnh bằng $a \Rightarrow BC = BD = AC = AD$.

Theo Talet: $\dfrac{PC}{BC} = \dfrac{QD}{BD} \Rightarrow PC = QD = x; \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{AN}{AC} \Rightarrow AM = AN = MN = x$.

Suy ra $BP = BQ = NC = MD = PQ = a - x$.

$\Delta PCN = \Delta QDM\,(c-g-c) \Rightarrow MP = NQ = \sqrt{CP^2 + CN^2 - 2CP.CN.\cos 60^\circ} = \sqrt{a^2 - 3ax + 3x^2}$.

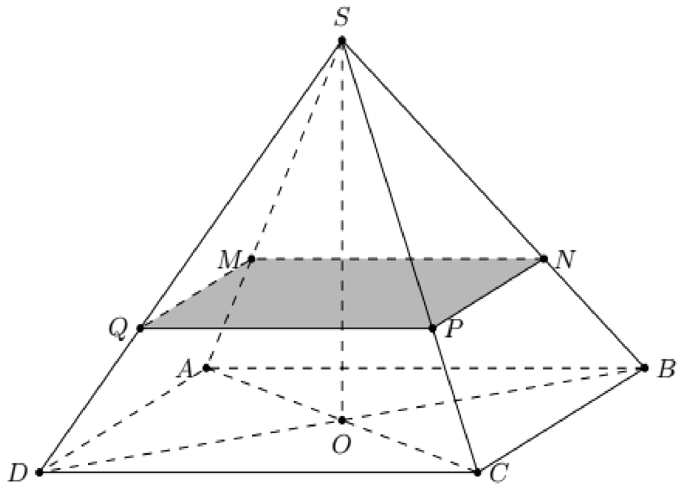
$ME = \sqrt{8x^2 - 8ax + 3x^2}$

$S_{MNPQ} = \dfrac{1}{2}(MN + QP)ME = \dfrac{a}{2}\sqrt{8x^2 - 8ax + 3x^2} = \dfrac{a}{2}\sqrt{8\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + a^2} \geq \dfrac{a^2}{2}$

Vậy $\min S_{MNPQ} = \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{10^2}{2} = 50$

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với AB và AD. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$. Tính diện tích thiết diện này (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Mặt phẳng (SAB) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAB) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB. Qua M kẻ $MN \parallel AB, (N \in SB)$ thì MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAB).

Mặt phẳng (SAD) chứa đường thẳng AD và song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD. Qua M kẻ $MQ \parallel AD, (Q \in SD)$ thì MQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAD).

Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng $BC \parallel AD$ và song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC. Qua N kẻ $NP \parallel BC, (P \in SC)$ thì NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

Khi đó PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SDC).

Tứ giác $MNPQ$ có $PN \parallel QM$ (vì cùng song song với BC) và $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với AB) nên nó là hình bình hành.

Mặt khác $AB \perp AD \Rightarrow MN \perp MQ; \frac{MN}{AB}=\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3} \Rightarrow MN=\frac{20}{3}$.

Tương tự tính được $MQ=\frac{20}{3}$.

Vậy $MNPQ$ là hình vuông có diện tích là $\frac{20}{3}.\frac{20}{3}=\frac{400}{9} \approx 44,44$.

----------------HẾT----------------

BÀI 03 ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG SONG SONG

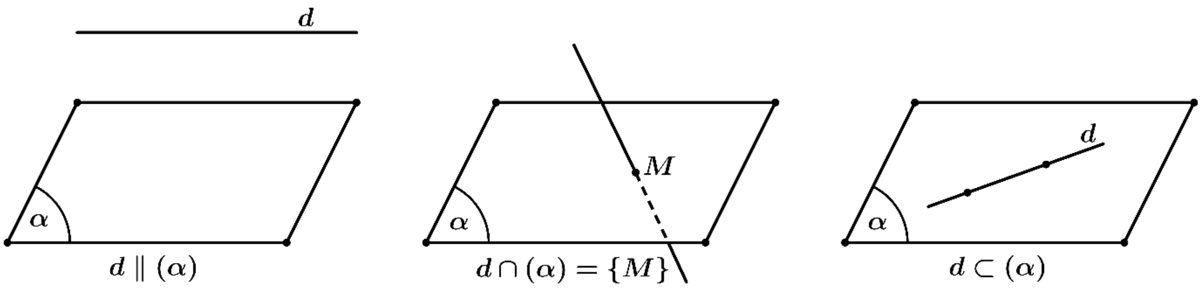
A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Đường thẳng song song với mặt phẳng

Cho đường thẳng d và mặt phẳng (α). Nếu d và (α) không có điểm chung thì ta nói d song song với (α) hay (α) song song với d và kí hiệu là $d \parallel (\alpha)$ hay $(\alpha) \parallel d$.

Ngoài ra:

- Nếu d và (α) có một điểm chung duy nhất M thì ta nói d và (α) cắt nhau tại điểm M và kí hiệu $d \cap (\alpha) = \{M\}$ hay $d \cap (\alpha) = M$.
- Nếu d và (α) có nhiều hơn một điểm chung thì ta nói d nằm trong (α) hay (α) chứa d và kí hiệu $d \subset (\alpha)$ hay $(\alpha) \supset d$.

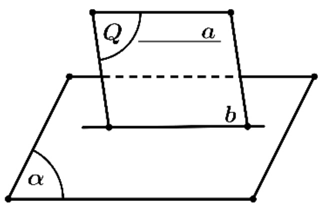


Nhận xét:

- Hai đường thẳng song song là hai đường thẳng đồng phẳng và không có điểm chung.
- Có đúng một mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song.
- Hai đường thẳng không có điểm chung thì có thể song song hoặc chéo nhau.

2 Điều kiện và tính chất của đường thẳng song song với mặt phẳng

Tính chất 1: Nếu đường thẳng a không nằm trong mặt phẳng (P) và song song với một đường thẳng nằm trong (P) thì a song song với (P).

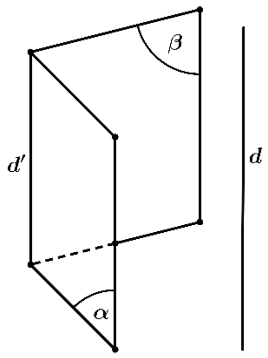


Kí hiệu: $\begin{cases} a \,//\, d \\ d \subset (P) \end{cases} \Rightarrow a \,//\, (P)$

Tính chất 2: Cho đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (P) theo giao tuyến b thì b song song với a.

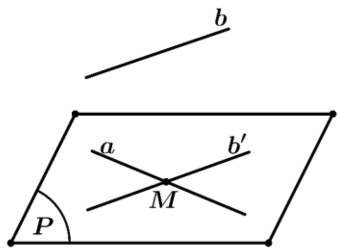
Kí hiệu: $\begin{cases} a \,//\, (P) \\ a \subset (Q) \\ (P) \cap (Q) = b \end{cases} \Rightarrow a \,//\, b$

Chú ý 1: Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì giao tuyến của chúng cũng song song với đường thẳng đó.



Kí hiệu: $\begin{cases} d \,//\, (\alpha) \\ d \,//\, (\beta) \\ (\alpha) \cap (\beta) = d' \end{cases} \Rightarrow d \,//\, d'$

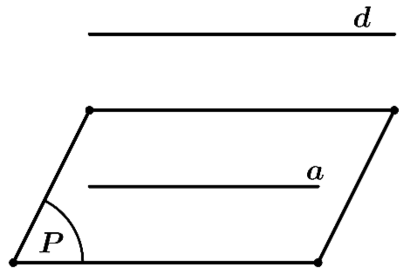
Chú ý 2: Cho hai đường thẳng chéo nhau. Có duy nhất một mặt phẳng chứa đường thẳng này và song song với đường thẳng kia.



B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

Dạng 1: Nhận biết và chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng

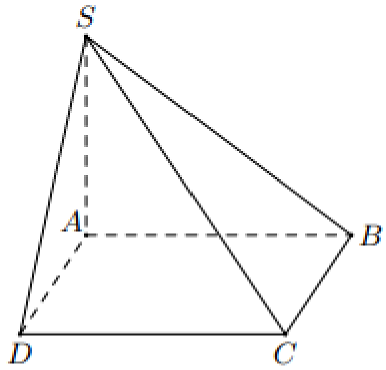
Phương pháp: Để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) ta chứng minh d không nằm trong (P) và song song với một đường thẳng a nào đó nằm trong (P).



BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Chứng minh rằng $AB // (SCD)$

Lời giải



Nếu đường thẳng AB và mặt phẳng (SCD) có điểm chung là M thì điểm M nằm trên cả hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SCD) suy ra điểm M nằm trên CD.

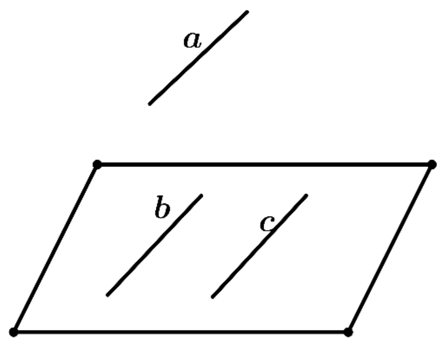
Do đó M là điểm chung của hai đường thẳng AB và CD.

Điều này không xảy ra vì $AB // CD$.

Vậy $AB // (SCD)$.

Bài tập 2: Cho ba đường thẳng a, b, c đôi một song song với nhau và không cùng nằm trong một mặt phẳng Chứng minh rằng đường thẳng a song song với mặt phẳng (b, c).

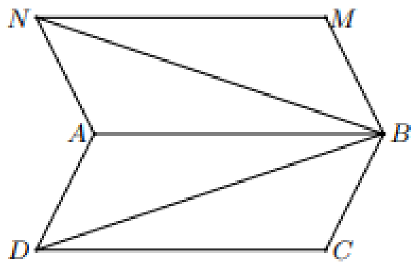
Lời giải



Ba đường thẳng a,b,c không cùng nằm trong một mặt phẳng nên đường thẳng a không nằm trong $mp(b,c)$. Vì đường thẳng a song song với đường thẳng b và đường thẳng b nằm trong $mp(b,c)$ nên đường thẳng a song song với mặt phẳng (b,c).

Bài tập 3: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng. Xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt với các đường thẳng CD, BD và BN

Lời giải



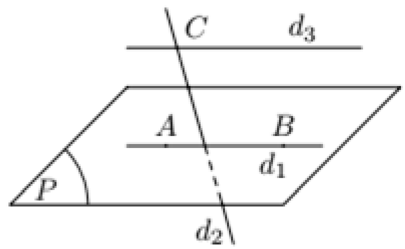
Nếu CD có điểm chung O với $(ABMN)$ thì O thuộc giao tuyến AB của hai mp $(ABCD)$ và $(ABMN)$ suy ra CD cắt AB (mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là hình bình hành).

BD có một điểm chung duy nhất B với $(ABMN)$ suy ra BD cắt $(ABMN)$ tại B

BN có hai điểm chung B và N với $(ABMN)$ suy ra $BN \subset (ABMN)$.

Bài tập 4: Cho hai điểm A, B cùng thuộc mặt phẳng (P) và một điểm C không thuộc (P). Vẽ đường thẳng d_1 đi qua A, B; d_2 đi qua C và song song AB. Tìm số điểm chung của mỗi đường thẳng vừa vẽ với (P). Xét vị trí tương đối của mặt phẳng (P) lần lượt đối với các đường thẳng d_1, d_2, d_3.

Lời giải



Đường thẳng d_1 chứa hai điểm A, B thuộc (P), vậy $d_1 \subset (P)$.

Đường thẳng d_2 không nằm trong (P), vì có chứa điểm C không thuộc (P). Mặt khác , d_2 lại có điểm A chung với (P), suy ra d_2 cắt (P) tại A.

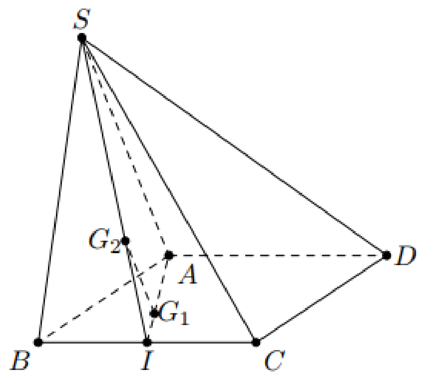
Đường thẳng d_3 không nằm trong (P) và song song với đường thẳng d_1 nằm trong (P), suy ra $d_3 // (P)$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và SBC. Chứng minh $G_1G_2 // (SAB)$.

Lời giải

Gọi I là trung điểm BC.

Xét tam giác SIA ta có: $\dfrac{IG_1}{IA} = \dfrac{IG_2}{IS} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 // SA$



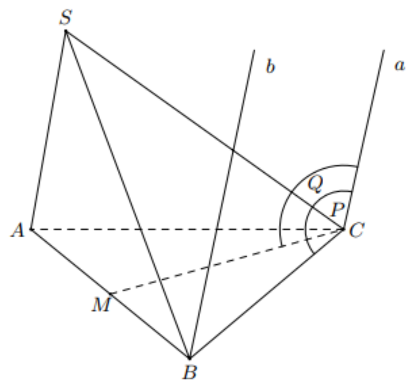
Do đó $\begin{cases} G_1G_2 \not\subset (SAB) \\ G_1G_2 // SA \\ SA \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow G_1G_2 // (SAB)$.

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có M là trung điểm của AB. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với SA, (Q) là mặt phẳng chứa CM và song song với SA.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

b) Vẽ đường thẳng b qua B và $b // SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

Lời giải

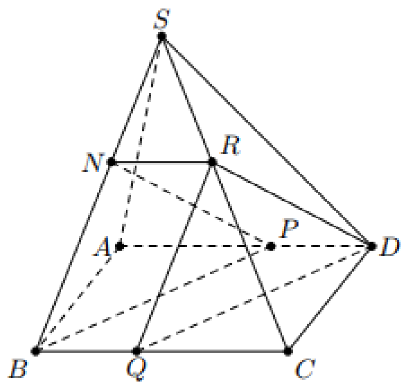


a) Ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng có điểm chung C và cùng song song với SA, suy ra giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng a đi qua C và $a // SA$.

b) Ta có: $SA // (P)$ và $B \in (P)$, b là đường thẳng đi qua B và $b // SA$ suy ra $b \subset (P)$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Trên các cạnh SB và AD lần lượt lấy các điểm N, P sao cho $\frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$. Chứng minh $NP // (SCD)$

Lời giải



Trong mặt phẳng (SBC) kẻ $NR//BC$ với $R \in SC$ và kẻ $RQ//SB$ với $Q \in BC$ thì ta có:

$\frac{SN}{SB} = \frac{SR}{SC}$ và $\frac{SR}{SC} = \frac{BQ}{BC}$.

Kết hợp với giả thiết $\frac{SN}{SB} = \frac{PD}{AD}$ ta được $\frac{BQ}{BC} = \frac{PD}{AD}$ suy ra $BQ = PD$ do $BC = AD$.

Lại có $NR = BQ$ suy ra $NR = PD$. Hơn nữa ta có $\begin{cases} NR//BQ \\ PD//BQ \end{cases}$ suy ra $NR//PD$.

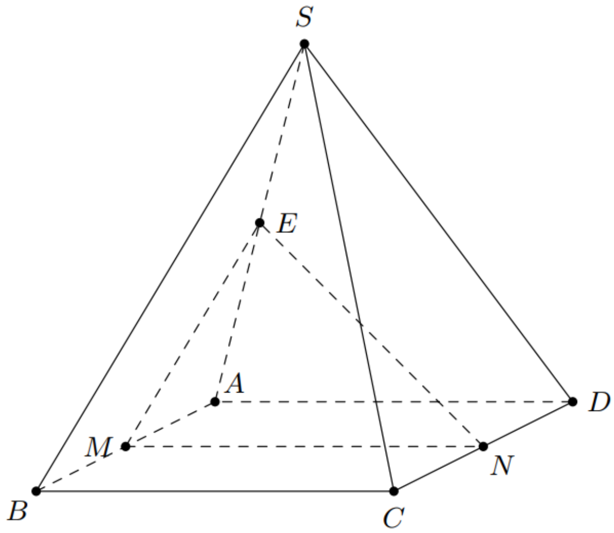
Do đó $PDRN$ là hình bình hành nên $NP//DR$. Ta có: $\begin{cases} NP \not\subset (SCD) \\ NP//DR \\ DR \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow NP//(SCD)$

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành và M, N, E lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AB, CD, SA (hình dưới). Chứng minh rằng

a) MN song song với hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

b) SB và SC song song với mặt phẳng (MNE).

Lời giải



a) Do M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD suy ra $MN//BC, MN//AD$.

Ta có MN không nằm trong (SBC) và song song với BC nằm trong (SBC)

Suy ra $MN//(SBC)$ và chứng minh tương tự $MN//(SAD)$.

b) Do M, E lần lượt là trung điểm của AB, SA suy ra ME là đường trung bình tam giác SAB hay $MN//SB$.

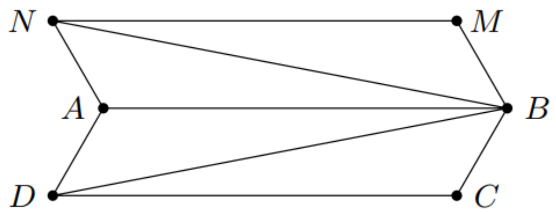
Ta có SB không nằm trong (MNE) và song song với ME nằm trong $(MNE) \Rightarrow SB//(MNE)$.

Gọi O là giao điểm của AC và BD do $ABCD$ là hình bình hành nên O là trung điểm của AC mà E là trung điểm của SA nên OE là đường trung bình của tam giác $SAC \Rightarrow OE // SC$

Ta có SC không nằm trong (MNE) và song song với OE nằm trong $(MNE) \Rightarrow SC//(MNE)$.

Bài tập 9: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không đồng phẳng, xác định vị trí tương đối của mặt phẳng $(ABMN)$ với các đường thẳng CD, BD và BN.

Lời giải



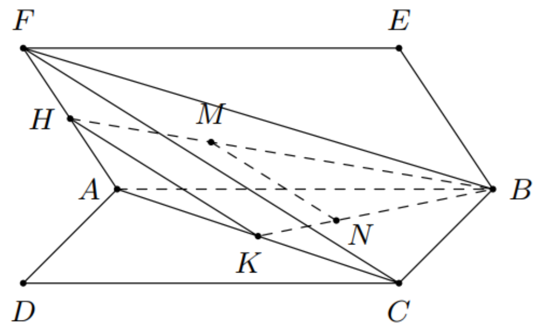
Nếu CD có điểm chung O với mặt phẳng $(ABMN)$ thì O thuộc giao tuyến AB của hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABMN)$, suy ra AB cắt CD (Mâu thuẫn với giả thiết $ABCD$ là hình bình hành). Vậy $CD//(ABMN)$

Đường thẳng BD có một điểm chung duy nhất B với $(ABMN) \Rightarrow BD$ cắt $(ABMN)$ tại B.

Đường thẳng BN có hai điểm chung với $(ABMN)$ nên $BN \subset (ABMN)$.

Bài tập 10: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABMN$ không cùng nằm trong một phẳng. Gọi M, N lần lượt là trọng tâm của hai tam giác ABF và ABC. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với mặt phẳng (ACF).

Lời giải



Gọi H, K lần lượt là trung điểm của AF, AC

Ta có $\dfrac{BM}{BH} = \dfrac{BN}{BK} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MN//HK$

Mà $HK \subset (ACF)$ và $MN \not\subset (ACF)$ nên suy ra $MN//(ACF)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) trong không gian. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (P)?

A. 2. **B.** 3. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải

Có 3 vị trí tương đối: a nằm trong (P), a song song với (P) và a cắt (P).

Câu 2: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a \,//\, b$, $b \,//\, (\alpha)$. Khi đó:

A. $a \,//\, (\alpha)$.

B. $a \subset (\alpha)$.

C. a cắt (α).

D. $a \,//\, (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Lời giải

Ta có: $a \,//\, (\alpha)$ hoặc $a \subset (\alpha)$.

Câu 3: Cho $d // (\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $d // d'$. **B.** d cắt d'. **C.** d và d' chéo nhau. **D.** $d \equiv d'$.

Lời giải

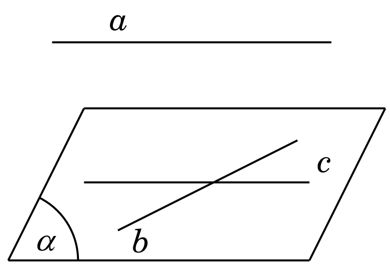
Ta có: $d' = (\alpha) \cap (\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d || d'$.

Nếu d cắt d'. Khi đó, d cắt (α). Vậy $d || d'$.

Câu 4: Có bao nhiêu mặt phẳng song song với cả hai đường thẳng chéo nhau?

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** Vô số.

Lời giải



Gọi a và b là 2 đường thẳng chéo nhau, c là đường thẳng song song với a và cắt b.

Gọi $(\alpha) \equiv (b, c)$ do $a || c \Rightarrow a || (\alpha)$. Giả sử $(\beta) || (\alpha)$ mà $b \in (\alpha) \Rightarrow b || (\beta)$.

Mặt khác: $a || (\alpha) \Rightarrow a || (\beta)$.

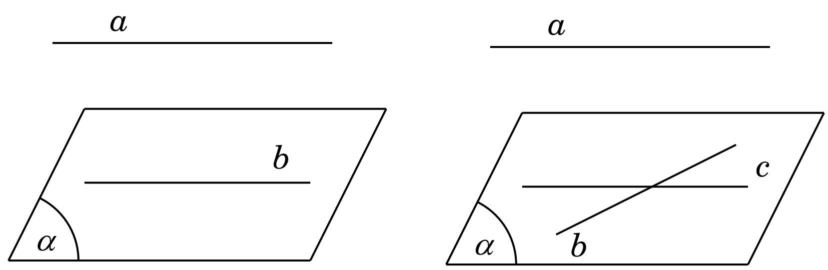
Có vô số mặt phẳng $(\beta) || (\alpha)$. Vậy có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Câu 5: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a||(\alpha)$, $b \subset (\alpha)$. Khi đó:

A. $a||b$. **B.** a, b chéo nhau.

C. $a||b$ hoặc a, b chéo nhau. **D.** a, b cắt nhau.

Lời giải.



Vì $a||(\alpha)$ nên tồn tại đường thẳng $c \subset (\alpha)$ thỏa mãn $a||c.$ Suy ra b, c đồng phẳng và xảy ra các trường hợp sau:

Nếu b song song hoặc trùng với c thì $a||b$.

Nếu b cắt c thì b cắt $(\beta) \equiv (a, c)$ nên a, b không đồng phẳng. Do đó a, b chéo nhau.

Câu 6: Cho đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (α). Giả sử $b \not\subset (\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. Nếu $b||(\alpha)$ thì $b||a.$

B. Nếu b cắt (α) thì b cắt $a.$

C. Nếu $b||a$ thì $b||(\alpha).$

D. Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt cả a và $b.$

Lời giải

A sai: Nếu $b||(\alpha)$ thì $b||a$ hoặc a, b chéo nhau.

B sai: Nếu b cắt (α) thì b cắt a hoặc a, b chéo nhau.

D sai: Nếu b cắt (α) và (β) chứa b thì giao tuyến của (α) và (β) là đường thẳng cắt a hoặc song song với a .

Câu 7: Cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (α). Giả sử $a||(\alpha)$ và $b||(\alpha)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

A. a và b không có điểm chung.

B. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau.

C. a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

D. a và b chéo nhau.

Lời giải

Ta có: a và b hoặc song song hoặc chéo nhau hoặc cắt nhau.

Câu 8: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Nếu (P) song song với a thì (P) cũng song song với b.

B. Nếu (P) cắt a thì (P) cũng cắt b.

C. Nếu (P) chứa a thì (P) cũng chứa b.

D. Các khẳng định A, B, C đều sai.

Lời giải.

Gọi $(Q)\equiv(a,b)$.

A sai: Khi $b=(P)\cap(Q)\Rightarrow b\subset(P)$.

C sai: Khi $(P)\neq(Q)\Rightarrow b//(P)$.

Xét khẳng định B, giả sử (P) không cắt b khi đó $b\subset(P)$ hoặc $b//(P)$. Khi đó, vì $b||a$ nên $a\subset(P)$ hoặc a cắt (P).

Câu 9: Cho hai đường thẳng chéo nhau a và b. Khẳng định nào sau đây sai?

A. Có duy nhất một mặt phẳng song song với a và b.

B. Có duy nhất một mặt phẳng qua a và song song với b.

C. Có duy nhất một mặt phẳng qua điểm M, song song với a và b.

D. Có vô số đường thẳng song song với a và cắt b.

Lời giải.

Có có vô số mặt phẳng song song với 2 đường thẳng chéo nhau.

Câu 10: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

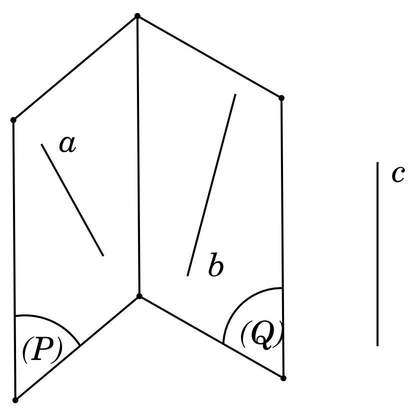
A. Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q).

B. Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).

C. Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P).

D. Vô số mặt phẳng (P) và (Q).

Lời giải.



Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c//(P)$ và $c//(Q)$.

Khi đó, (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c, mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c.

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 11: Cho $d//(\alpha)$, mặt phẳng (β) qua d cắt (α) theo giao tuyến d'. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. d cắt d'. **B.** $d//d'$. **C.** d và d' chéo nhau. **D.** $d \equiv d'$.

Lời giải

Ta có $d' = (\alpha)\cap(\beta)$. Do d và d' cùng thuộc (β) nên d cắt d' hoặc $d//d'$.

Nếu d cắt d' thì d cắt (α) (mâu thuẫn với giả thiết).

Vậy $d//d'$.

Câu 12: Trong không gian, cho hai đường thẳng phân biệt a, b và mặt phẳng (P). Những mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P).

B. Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau.

C. Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P).

D. Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b.

Lời giải

Mệnh đề "Nếu a và (P) có điểm chung thì a không song song với (P)" đúng.

Mệnh đề "Nếu a và (P) có điểm chung thì a và (P) cắt nhau" sai.

Mệnh đề "Nếu a song song với b và b nằm trong (P) thì a song song với (P)" sai vì a và b có thể cùng thuộc (P).

Mệnh đề "Nếu a và b song song với (P) thì a song song với b" sai.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Đường thẳng AD song song với mặt phẳng nào trong các mặt phẳng dưới đây?

A. (SBC). **B.** $(ABCD)$. **C.** $SAC)$. **D.** (SAB).

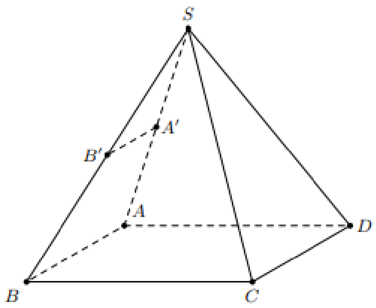
Lời giải

Do $AD \parallel BC, AD \not\subset (SBC), BC \subset (SBC)$ nên $AD \parallel (SBC)$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi A', B' lần lượt là trung điểm của SA, SB. Đường thẳng $A'B'$ song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SAB). **B.** (SBC). **C.** (SCD). **D.** (SAD).

Lời giải



Vì $A'B'$ song song với AB và AB song song với CD nên $A'B'$ song song với $CD.$

Hơn nữa, $A'B'$ không chứa trong (SCD) nên $A'B'$ song song với $(SCD).$

Câu 15: Cho tứ diện $ABCD.$ Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và $ACD.$ Mệnh đề nào sau đây **sai**?

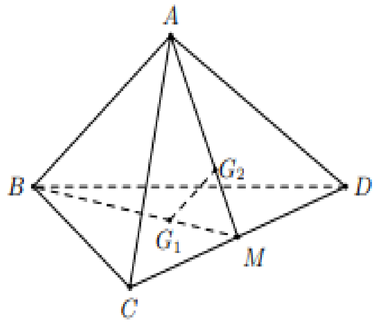
A. $G_1G_2 \parallel (SAB).$

B. $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$.

C. $G_1G_2 \parallel (ABC).$

D. Ba đường BG_1, AG_2, CD đồng quy.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của $CD.$

Do G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm tam giác BCD và ACD nên ta có

$$\frac{MG_1}{MB} = \frac{MG_2}{MC} = \frac{1}{3} \Rightarrow G_1G_2 \parallel AB, \frac{G_1G_2}{AB} = \frac{1}{3}$$

Do $G_1G_2 \parallel AB \Rightarrow G_1G_2 \parallel (ABD)$ và $G_1G_2 \parallel (ABC).$

Dễ thấy, ba đường BG_1, AG_2, CD đồng quy tại M. Vậy mệnh đề "$G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AB$" là mệnh đề sai.

Câu 16: Cho hai mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ cắt nhau và cùng song song với đường thẳng d. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. Giao tuyến của $(\alpha),(\beta)$ trùng với d.

B. Giao tuyến của $(\alpha),(\beta)$ song song hoặc trùng với d.

C. Giao tuyến của $(\alpha),(\beta)$ cắt d.

D. Giao tuyến của $(\alpha),(\beta)$ song song với d.

Lời giải

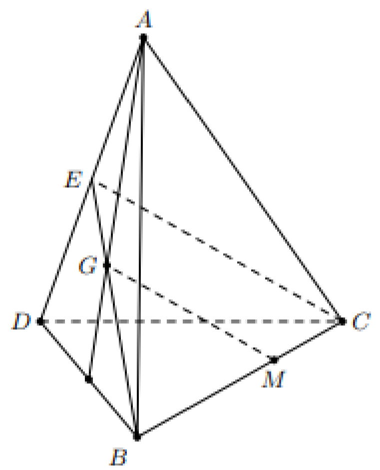
Do d không nằm trên mặt phẳng $(\alpha),(\beta)$ nên giao tuyến không thể trùng với d.

Theo tính chất giao tuyến, ta có giao tuyến song song với d.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABD. M là điểm trên cạnh BC sao cho $MB = 2MC$. Khi đó đường thẳng MG song song với mặt phẳng nào dưới đây?

A. (ACD). **B.** (BCD). **C.** (ABD). **D.** (ABC).

Lời giải

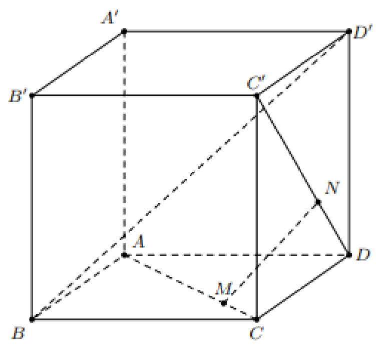


Gọi E là trung điểm AD. Xét tam giác BCE có $\frac{BG}{BE} = \frac{BM}{BC} = \frac{2}{3}$ nên suy ra $MG \parallel (ACD)$.

Câu 18: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là điểm trên cạnh AC sao cho $AM = 3MC$. Lấy N trên cạnh $C'D$ sao cho $C'N = xC'D$. Với giá trị nào của x thì $MN \parallel BD'$.

A. $x = \frac{2}{3}$. **B.** $x = \frac{1}{3}$. **C.** $x = \frac{1}{4}$. **D.** $x = \frac{1}{2}$.

Lời giải



Từ giả thiết, ta có M là trọng tâm tam giác BCD.

Gọi O, I lần lượt là trung điểm của AC và DD'. Khi đó, ta có $BD' \parallel (IAC)$.

Trong $(CDD'C')$ gọi $N' = CI \cap C'D$ khi đó N' là trọng tâm tam giác CDD'.

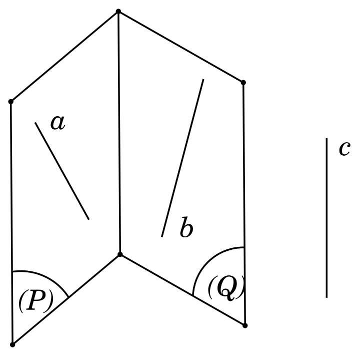
Do đó $\frac{CM}{CO} = \frac{2}{3} = \frac{CN'}{CI} \Rightarrow MN' \parallel OI$ mà $OI \parallel BD'$ nên $MN \parallel BD'$. Vậy $N' \equiv N$ và $x = \frac{2}{3}$.

Câu 19: Cho ba đường thẳng đôi một chéo nhau a, b, c. Gọi (P) là mặt phẳng qua a, (Q) là mặt phẳng qua b sao cho giao tuyến của (P) và (Q) song song với c. Có nhiều nhất bao nhiêu mặt phẳng (P) và (Q) thỏa mãn yêu cầu trên?

A. Một mặt phẳng (P), một mặt phẳng (Q). **B.** Một mặt phẳng (P), vô số mặt phẳng (Q).

C. Một mặt phẳng (Q), vô số mặt phẳng (P). **D.** Vô số mặt phẳng (P) và (Q).

Lời giải



Vì c song song với giao tuyến của (P) và (Q) nên $c // (P)$ và $c // (Q)$.

Khi đó (P) là mặt phẳng chứa a và song song với c, mà a và c chéo nhau nên chỉ có một mặt phẳng như vậy.

Tương tự cũng chỉ có một mặt phẳng (Q) chứa b và song song với c.

Vậy có nhiều nhất một mặt phẳng (P) và một mặt phẳng (Q) thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 20: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SA và SC. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MN // (ABCD)$. **B.** $MN // (SAB)$. **C.** $MN // (SCD)$. **D.** $MN // (SBC)$.

Lời giải

Xét tam giác SAC có M, N lần lượt là trung điểm của SA, SC.

Suy ra $MN // AC$ mà $AC \subset (ABCD) \Rightarrow MN // (ABCD)$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M và N là hai điểm trên SA, SB sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{1}{3}$. Vị trí tương đối giữa MN và $(ABCD)$ là:

A. MN nằm trên $(ABCD)$. **B.** MN cắt $(ABCD)$.

C. MN song song $(ABCD)$. **D.** MN và $(ABCD)$ chéo nhau.

Lời giải

Theo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB}$ suy ra MN song song với AB.

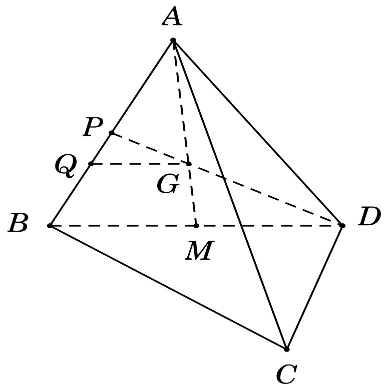
Mà AB nằm trong mặt phẳng $(ABCD)$ suy ra $MN // (ABCD)$.

Câu 22: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABD, Q thuộc cạnh AB sao cho $AQ = 2QB$, P là trung điểm của AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $MN // (BCD)$. **B.** $GQ // (BCD)$.

C. MN cắt (BCD). **D.** Q thuộc mặt phẳng (CDP).

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BD. Vì G là trọng tâm tam giác $ABD \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{2}{3}$.

Điểm $Q \in AB$ sao cho $AQ = 2QB \Leftrightarrow \frac{AQ}{AB} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{AG}{AM} = \frac{AQ}{AB} \Rightarrow GQ // BD$.

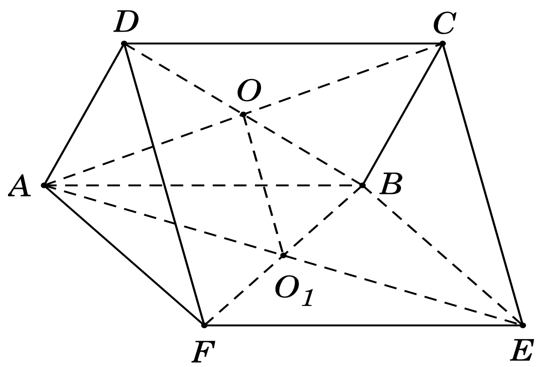
Mặt khác BD nằm trong mặt phẳng (BCD) suy ra $GQ // (BCD)$.

Câu 23: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Gọi O, O_1 lần lượt là tâm của $ABCD, ABEF$. M là trung điểm của CD. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $OO_1 // (BEC)$. **B.** $OO_1 // (AFD)$.

C. $OO_1 // (EFM)$. **D.** MO_1 cắt (BEC).

Lời giải



Xét tam giác ACE có O, O_1 lần lượt là trung điểm của AC, AE.

Suy ra OO_1 là đường trung bình trong tam giác $ACE \Rightarrow OO_1 // EC$.

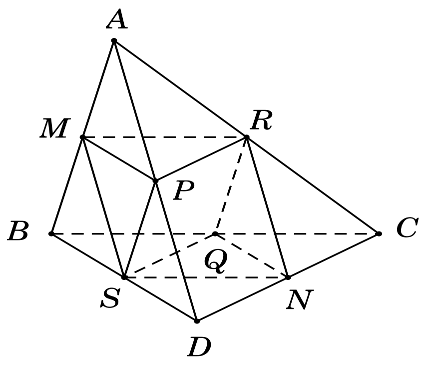
Tương tự, OO_1 là đường trung bình của tam giác BFD nên $OO_1 // FD$.

Vậy $OO_1 // (BEC)$, $OO_1 // (AFD)$ và $OO_1 // (EFC)$. Chú ý rằng: $(EFC) = (EFM)$.

Câu 24: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N, P, Q, R, S theo thứ tự là trung điểm của các cạnh AC, BD, AB, CD, AD, BC. Bốn điểm nào sau đây không đồng phẳng?

A. P, Q, R, S. **B.** M, P, R, S. **C.** M, R, S, N. **D.** M, N, P, Q.

Lời giải



Theo tính chất của đường trung bình của tam giác ta có

$PS \,//\, AC \,//\, QR$ suy ra P, Q, R, S đồng phẳng

Tương tự, ta có được $PM \,//\, BC \,//\, NQ$ suy ra P, M, N, Q đồng phẳng.

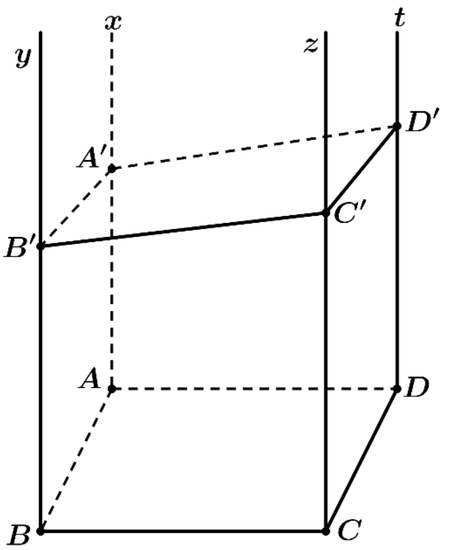
Và $NR \,//\, CD \,//\, SN$ suy ra M, R, S, N đồng phẳng.

Câu 25: Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các tia Ax, By, Cz, Dt song song, cùng hướng nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Mặt phẳng (α) song song với AB, và cắt Ax, By, Cz, Dt lần lượt tại các điểm A', B', C', D'. Biết O là tâm hình bình hành $ABCD$, O' là giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khẳng định nào sau đây **sai**?

A. $A'B'C'D'$ là hình bình hành. **B.** $(AA'B'B) \,//\, C'D'$.

C. $AA' = CC'$ và $BB' = DD'$. **D.** $OO' \,//\, AA'$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} \alpha \,//\, AB \\ \alpha \cap (ABB'A') = A'B' \end{cases} \Rightarrow A'B' \,//\, AB \,//\, CD$

$$\Rightarrow \begin{cases} A'B' \ // \ CD \\ \alpha \cap (DD'C'C) = C'D' \end{cases} \Rightarrow C'D' \ // \ A'B' \Rightarrow C'D' \ // \ (AA'B'B)$$

Dễ thấy $C'D' \ // \ A'B' \ // \ AB \ // \ CD$ theo câu A mà $AA' \ // \ BB' \ // \ CC' \ // \ DD'$

$\Rightarrow$ $AA'B'B, CC'D'D, ABCD$ là các hình bình hành

$\Rightarrow$ $A'B' \ // \ C'D', A'B' = C'D'$ suy ra $A'B'C'D'$ là hình bình hành

Mặt khác: O, O' lần lượt là trung điểm của $AC, A'C'$ nên OO' là đường trung bình trong hình thang $AA'C'C$ do đó $OO' // AA'$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho mặt phẳng (P) và hai đường thẳng song song a và b. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a mà không chứa đường thẳng b

b) Nếu mặt phẳng (P) song song với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng song song với đường thẳng b.

c) Nếu mặt phẳng (P) cắt đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng cắt đường thẳng b.

d) Nếu mặt phẳng (P) chứa đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng chứa đường thẳng b.

Lời giải

a) Đúng: Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a mà không chứa đường thẳng b

b) Sai: Nếu mặt phẳng (P) song song với đường thẳng a thì mặt phẳng (P) có thể song song hoặc chứa đường thẳng b.

c) Đúng: Nếu mặt phẳng (P) cắt đường thẳng a thì mặt phẳng (P) cũng cắt đường thẳng b.

d) Sai: Có vô số mặt phẳng chứa đường thẳng a mà không chứa đường thẳng b (a, b là hai đường thẳng song song).

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD, P là trung điểm cạnh SA. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

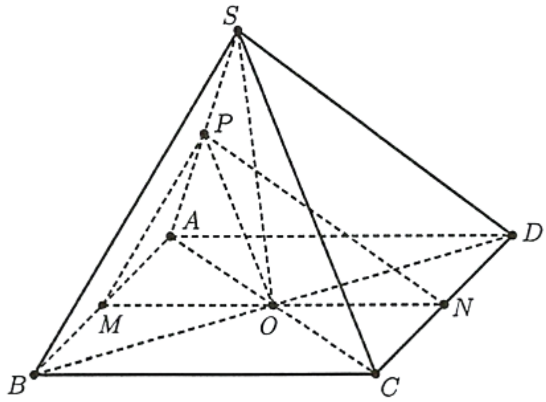
a) $MN \ // \ (SBC)$

b) $MN \ // \ (SAD)$

c) SB cắt với mặt phẳng (MNP)

d) SC cắt với mặt phẳng (MNP)

Lời giải



a) Đúng: Vì MN là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ nên $MN // BC$

Mặt khác: $BC \subset (SBC) \Rightarrow MN // (SBC)$.

b) Đúng: Tương tự: $MN // AD, AD \subset (SAD) \Rightarrow MN // (SAD)$.

c) Sai: Ta có MP là đường trung bình của tam giác SAB nên $SB // MP$

Mặt khác: $MP \subset (MNP)$ nên $SB // (MNP)$.

d) Sai Tương tự OP là đường trung bình của tam giác SAC nên $SC // OP$

Mặt khác: $OP \subset (MNP)$ nên $SC // (MNP)$.

Câu 3: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng và có tâm lần lượt là O và O'. Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên các cạnh AE, BD sao cho $AM = \frac{1}{3}AE$ và $BN = \frac{1}{3}BD$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

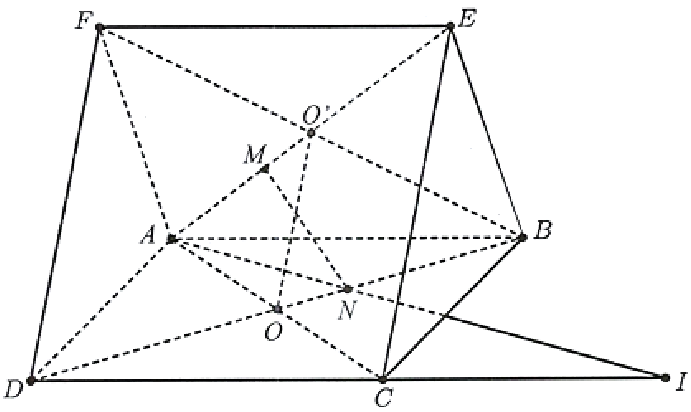
a) OO' song song với mặt phẳng (ADF)

b) OO' cắt mặt phẳng (BCE)

c) $\frac{BN}{BD} = \frac{2}{3}$

d) MN song song với mặt phẳng $(CDFE)$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có OO' là đường trung bình của tam giác BDF nên $OO' // DF$

Mặt khác $DF \subset (ADF)$ suy ra $OO' // (ADF)$

b) Sai: Tương tự OO' là đường trung bình của tam giác ACE nên $OO' // CE$ mà $CE \subset (BCE)$ suy ra $OO' // (BCE)$

c) Sai: Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $I = AN \cap CD$. Do $AB // CD$ nên $\frac{AN}{AI} = \frac{BN}{BD} = \frac{1}{3}$.

d) Đúng: Mặt khác: $\frac{AM}{AE} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{AN}{AI} = \frac{AM}{AE} \Rightarrow MN // IE$ mà $IE \subset (CDFE) \Rightarrow MN // (CDFE)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và $SCD; E, F$ lần lượt là trung điểm của AB và CD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

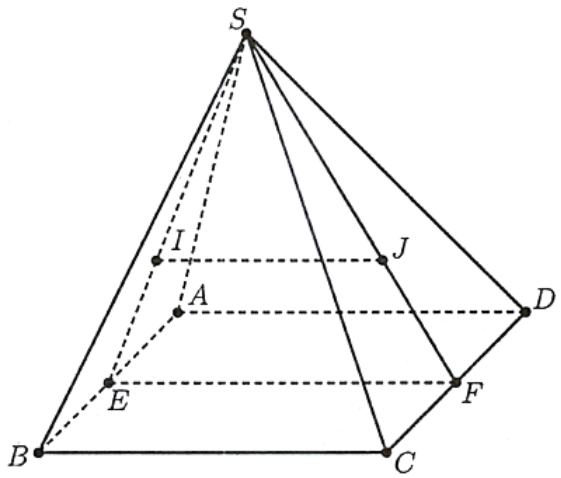
a) $\frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3}$

b) $IJ // (ABCD)$.

b) BC song song với các mặt phẳng $(SAD),(SEF)$

d) BC cắt mặt phẳng (AIJ)

Lời giải



a) Đúng: Do I, J lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB và SCD nên

$\frac{SI}{SE} = \frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ // EF$ mà $EF \subset (ABCD) \Rightarrow IJ // (ABCD)$

b) Đúng: $\frac{SI}{SE} = \frac{SJ}{SF} = \frac{2}{3} \Rightarrow IJ // EF$ mà $EF \subset (ABCD) \Rightarrow IJ // (ABCD)$

c) Đúng: Vì $BC // AD, AD \subset (SAD) \Rightarrow BC // (SAD)$.

d) Sai: Vì EF là đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ nên $BC // EF$, $EF \subset (SEF)$

$\Rightarrow BC /\!/ (SEF)$.

Ta có: $IJ /\!/ EF, EF /\!/ BC \Rightarrow BC /\!/ IJ$ mà $IJ \subset (AIJ) \Rightarrow BC /\!/ (AIJ)$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật. Gọi G là trọng tâm tam giác SAD và E là điểm trên cạnh DC sao cho $DC = 3DE, I$ là trung điểm AD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

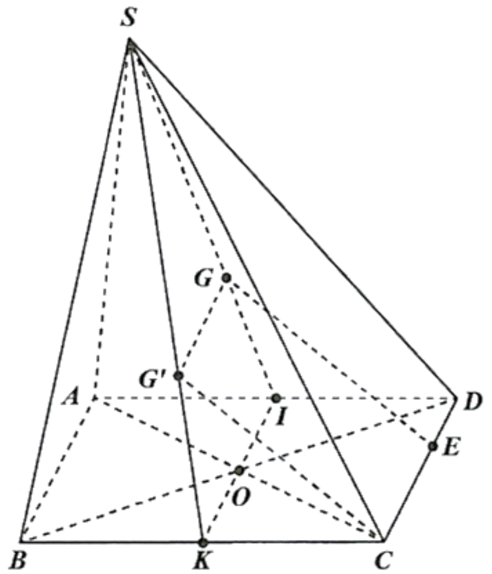
a) OI song song với mặt phẳng (SAB)

b) OI song song với mặt phẳng (SCD)

c) IE song song với AC

d) $GE /\!/ (SBC)$

Lời giải



a) Đúng: Ta có $\begin{cases} OI \not\subset (SAB), AB \subset (SAB) \\ OI /\!/ AB \end{cases} \Rightarrow OI /\!/ (SAB)$

Tương tự $\begin{cases} OI \not\subset (SCD), CD \subset (SCD) \\ OI /\!/ CD \end{cases} \Rightarrow OI /\!/ (SCD)$.

b) Đúng: Vì $\frac{DI}{DA} = \frac{1}{2} \neq \frac{1}{3} = \frac{DE}{DC}$ nên IE không song song với AC. Trong hình chữ nhật $ABCD$ ta gọi $P = IE \cap BC \Rightarrow P = IE \cap (SBC)$.

Gọi K là trung điểm của BC và G' là trọng tâm tam giác SBC.

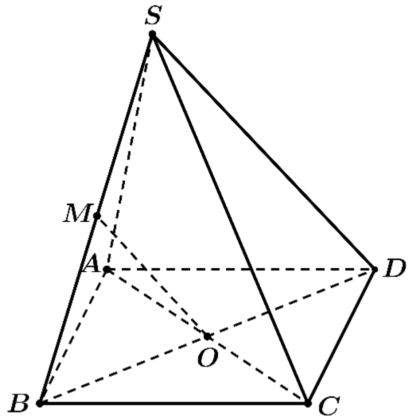
Khi đó $\frac{SG'}{SK} = \frac{SG}{SI} = \frac{G'G}{KI} = \frac{2}{3}$ suy ra $G'G /\!/ KI /\!/ CE \Rightarrow G'G = \frac{2}{3}KI = \frac{2}{3}CD = CE$.

Do đó tứ giác $G'GEC$ là hình bình hành suy ra $CG' /\!/ CE \Rightarrow CG /\!/ (SBC)$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O. Điểm M thuộc cạnh SB. Biết $OM \parallel (SCD)$. Tính tỉ số của $\dfrac{SM}{MB}$.

Lời giải



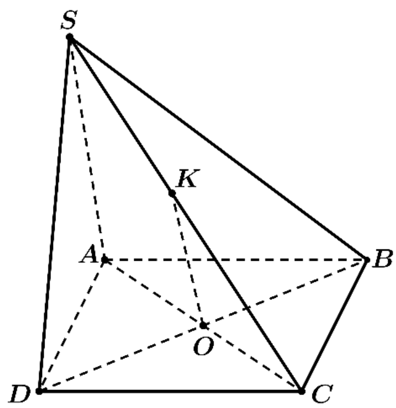
Trong mặt phẳng (SBD) xét hai đường thẳng OM và SD.

Vì $SD \subset (SCD)$ và $OM \parallel (SCD)$ nên $OM \cap SD = \varnothing$ hay $OM \parallel SD$.

Suy ra OM là đường trung bình của tam giác SBD nên M là trung điểm SB hay $\dfrac{SM}{MB} = 1$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA, mặt phẳng (α) cắt SC tại K. Biết rằng $SK = m.KC$ thì giá trị của m bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi O là giao điểm của AC và BD. Do mặt phẳng (α) qua BD nên $O \in (\alpha)$.

Trong tam giác SAC kẻ OK song song SA $(K \in SC)$.

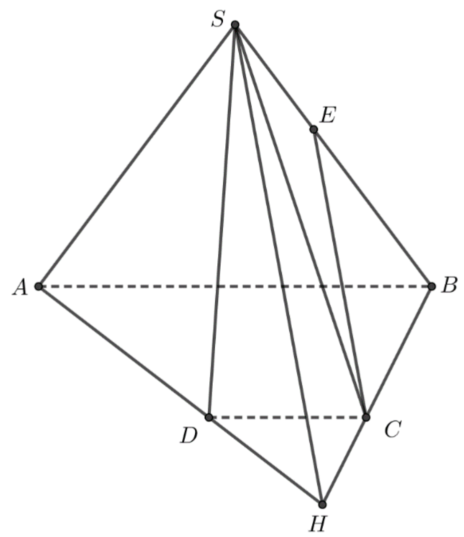
Do $\begin{cases} (\alpha) \parallel SA \\ OK \parallel SA \Rightarrow OK \subset (\alpha) \Rightarrow SC \cap (\alpha) = \{K\}. \\ O \in (\alpha) \end{cases}$

Trong tam giác SAC ta có $\begin{cases} OK \,//\, SA \\ OA = OC \end{cases} \Rightarrow OK$ là đường trung bình của ΔSAC.

Vậy $SK = KC$ nên khi đó $m = 1$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn. Biết $AB = 5a, CD = 2a$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB thỏa mãn $\dfrac{ES}{EB} = \dfrac{m}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng CE song song với mặt phẳng (SAD). Giá trị của $2m + 3n$ bằng

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AD và BC trong mặt phẳng $(ABCD)$.

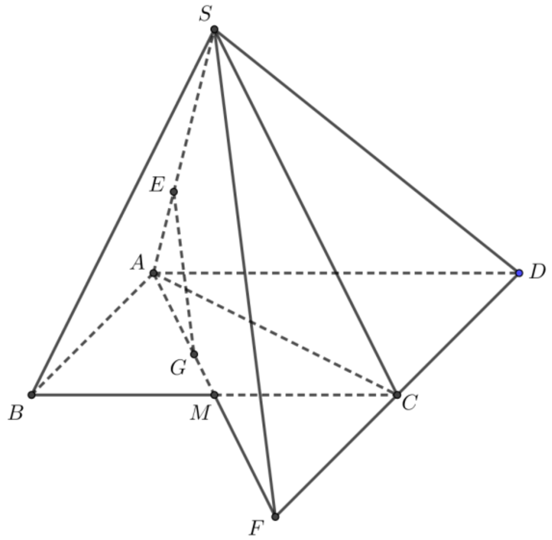
Theo hệ quả Talet ta có: $\dfrac{HC}{HB} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{2}{5}$

Ta có: $\begin{cases} CE \subset (SBH) \\ CE \,//\, (SAD) \\ (SBH) \cap (SAD) = SH \end{cases} \Rightarrow CE \,//\, SH \Rightarrow \dfrac{SE}{SB} = \dfrac{HC}{HB} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow SE = \dfrac{2}{5} SB$

$\Rightarrow \dfrac{ES}{EB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 2m + 3n = 13$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và E là điểm thuộc cạnh SA thỏa mãn $SE = \dfrac{m}{n}.SA$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng GE song song với mặt phẳng (SCD). Giá trị của $m.n$ bằng

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, F là giao điểm của AM và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo định lý Talet, ta có: $\dfrac{MA}{MF}=\dfrac{MB}{MC}=1 \Rightarrow MA=MF \Rightarrow M$ là trung điểm của AF

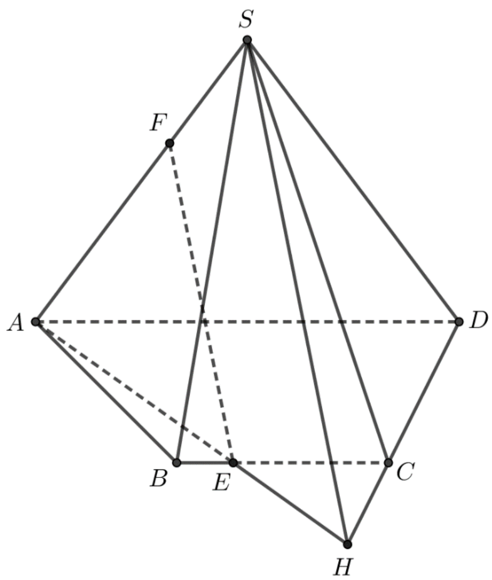
$\Rightarrow \dfrac{AG}{AF}=\dfrac{AG}{2AM}=\dfrac{1}{3}$

Ta có: $\begin{cases} GE \subset (SAF) \\ GE \,//\, (SCD) \\ (SAF)\cap(SCD)=SF \end{cases} \Rightarrow GE \,//\, SF \Rightarrow \dfrac{AE}{AS}=\dfrac{AG}{AF}=\dfrac{1}{3} \Rightarrow AE=\dfrac{1}{3}AS$

$\Rightarrow SE=\dfrac{2}{3}SA \Rightarrow \dfrac{m}{n}=\dfrac{2}{3} \Rightarrow m.n=6$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AD \,//\, BC$ và $AD=2BC$. Gọi E là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BC=4BE$. Lấy F thuộc cạnh SA sao cho $FA=k.FS$. Biết rằng EF song song với mặt phẳng (SCD). Khi đó giá trị của k bằng. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AE và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

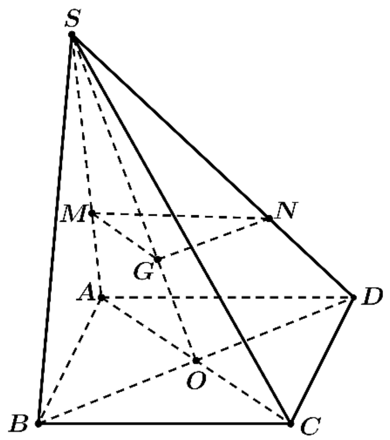
Theo hệ quả Talet, ta có: $\dfrac{HE}{HA}=\dfrac{CE}{AD}=\dfrac{3}{8}$

Ta có: $\begin{cases} EF\subset(SAH) \\ EF\ /\!/\ (SCD) \\ (SAH)\cap(SCD)=SH \end{cases} \Rightarrow EF\ /\!/\ SH \Rightarrow \dfrac{SF}{SA}=\dfrac{HE}{HA}=\dfrac{3}{8}\Rightarrow SF=\dfrac{3}{8}SA$

$\Rightarrow FA=\dfrac{5}{3}FS\Rightarrow k=\dfrac{5}{3}\approx 1,67$

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAC. Một mặt phẳng song song với AC và BD cắt SA,SB lần lượt tại M và N. Tỉ số $\dfrac{MN}{AB}$ bằng. (làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải



Do $\begin{cases} (MNG)\ /\!/\ AC \\ MG\subset(SAC) \end{cases} \Rightarrow MG\ /\!/\ AC \Rightarrow \dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SG}{SO}=\dfrac{2}{3}$.

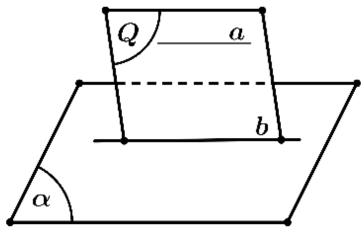
Tương tự do $\begin{cases} (MNG)\ /\!/\ BD \\ NG\subset(SBD) \end{cases} \Rightarrow NG\ /\!/\ OD \Rightarrow \dfrac{SN}{SD}=\dfrac{SG}{SO}=\dfrac{2}{3}$.

Xét tam giác SAD có $\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{SN}{SD}=\dfrac{2}{3}\Rightarrow MN\ /\!/\ AD \Rightarrow \dfrac{MN}{AD}=\dfrac{SM}{SA}=\dfrac{2}{3}$.

----------------**HẾT**----------------

Dạng 2: Xác định giao tuyến của hai mặt phẳng. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng

Phương pháp: Cho đường thẳng a và mặt phẳng (α) song song với nhau. Nếu mặt phẳng (Q) chứa a và cắt (α) theo giao tuyến b thì b song song với a.



Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α). Ta cần tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (α) theo giao tuyến là đường thẳng Δ. Khi đó giao điểm của đường thẳng a và Δ chính là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (α).

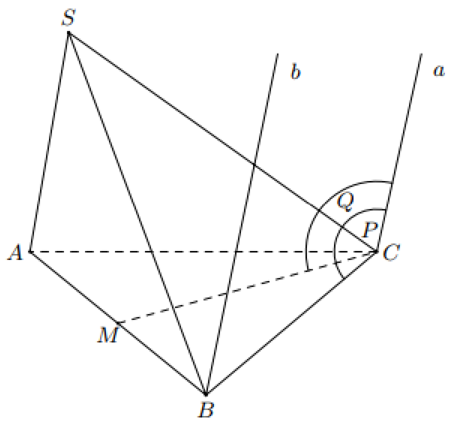
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S \cdot ABC$ có M là trung điểm của AB. Gọi (P) là mặt phẳng chứa CB và song song với $SA, (Q)$ là mặt phẳng chứa CM và song song với SA.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

b) Vẽ đường thẳng b qua B và $b \parallel SA$. Chứng minh $b \subset (P)$.

Lời giải

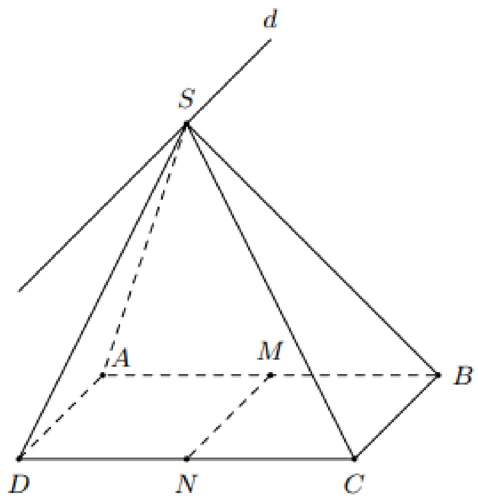


a) Ta có hai mặt phẳng (P) và (Q) cùng có điểm chung C và cùng song song với SA, suy ra giao tuyến của (P) và (Q) là đường thẳng a đi qua C và $a // SA$.

b) Ta có $SA // (P)$ và B thuộc $(P), b$ là đường thẳng đi qua B và $b // SA$ suy ra $b \subset (P)$.

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Chứng minh rằng đường thẳng MN song song với giao tuyến d của hai mặt phẳng (SBC) và (SAD).

Lời giải



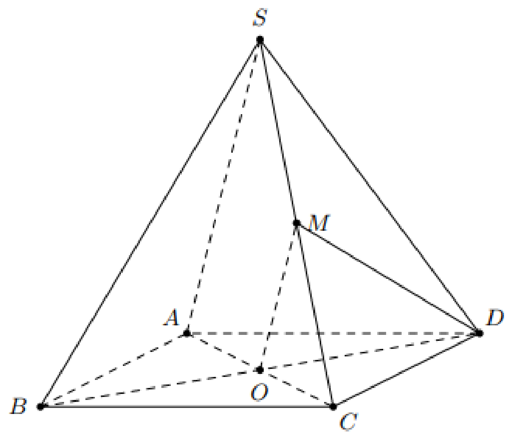
Hai mặt phẳng (SBC) và (SAD) có điểm chung là S và lần lượt chứa hai đường thẳng BC và AD song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng đó là đường thẳng d đi qua S và song song với BC và AD. Ta lại có $MN \parallel AD \parallel BC$ nên suy ra $MN \parallel d$.

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành có O là giao điểm hai đường chéo. Cho M là trung điểm của SC.

a) Chứng minh đường thẳng OM song song với hai mặt phẳng (SAD) và (SBA).

b) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD).

Lời giải



a) Ta có OM là đường trung bình của tam giác SAC, suy ra $OM // SA$.

OM không nằm trong mặt phẳng (SAD) và OM song song với SA nằm trong (SAD) suy ra $OM \parallel (SAD)$.

Tương tự OM không nằm trong mặt phẳng (SBA) và $OM \parallel SA$ nằm trong (SBA) suy ra $OM \parallel (SBA)$.

b) Hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) có điểm chung D và lần lượt đi qua hai đường thẳng song song OM và SA.

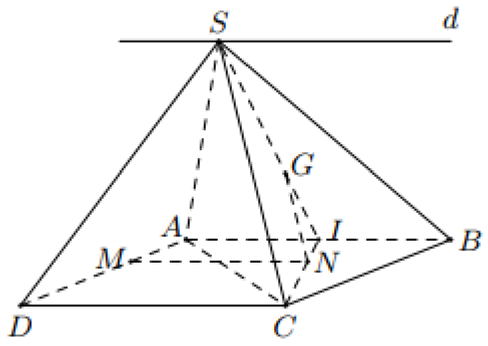
Suy ra giao tuyến của hai mặt phẳng (OMD) và (SAD) là đường thẳng d qua D và song song với SA và OM.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N lần lượt là trọng tâm của tam giác SAB, ABC.

a) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD).

b) Chứng minh rằng MN song song với mặt phẳng (SCD) và NG song song với mặt phẳng (SAC).

Lời giải



a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD.

b) Gọi I là trung điểm của AB.

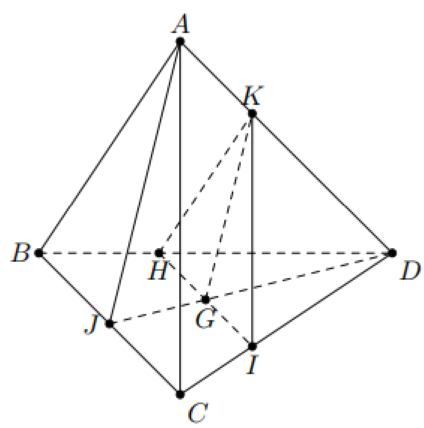
Xét hình bình hành $ABCD$ có $\dfrac{DM}{DA} = \dfrac{CN}{CI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow MN \parallel CD.$

Mà $CD \subset (SCD)$ và $MN \not\subset (SCD)$ nên $MN \parallel (SCD)$.

Ta có $\dfrac{IG}{IS} = \dfrac{IN}{IC} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow NG \parallel SC$ mà $SC \subset (SAC)$ và $NG \not\subset (SAC)$ nên $NG \parallel (SAC)$.

Bài tập 5: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau, điểm G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua G và song song với hai cạnh BC, AC. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD).

Lời giải



Ta có $\begin{cases} G \in (BCD) \cap (P) \\ BC \parallel (P) \\ BC \subset (BCD) \end{cases} \Rightarrow (BCD) \cap (P) = Gx \parallel BC.$

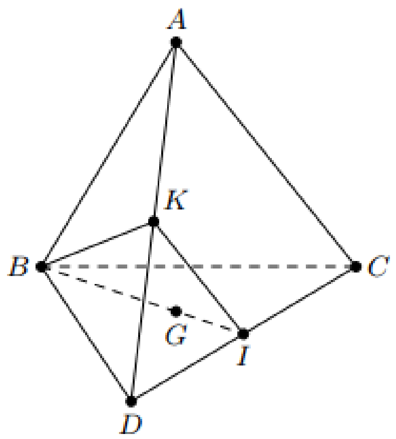
Gọi H, I lần lượt là giao điểm của Gx với BD và DC.

Ta có $\begin{cases} I \in (ACD) \cap (P) \\ AC \,//\, (P) \\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (ACD) \cap (P) = IK \,//\, BC$ với $K \in AD$.

Ta thấy H, K là hai điểm chung của mặt phẳng (P) và (ABD). Do đó $(P) \cap (ABD) = HK$.

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Biết mặt phẳng (α) chứa BG và song song với AC. Tìm giao điểm K của AD và mặt phẳng (α).

Lời giải



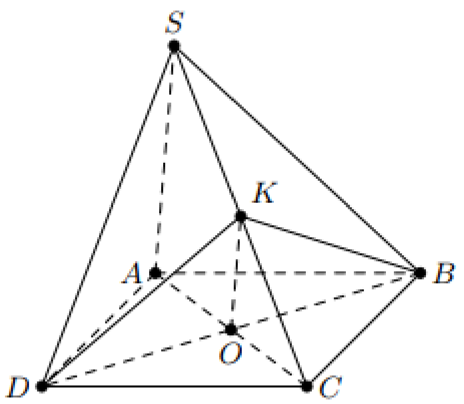
Gọi I là trung điểm của CD. Ta có $\begin{cases} I \in (\alpha) \cap (ACD) \\ AC \,//\, (\alpha) \\ AC \subset (ACD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ACD) = Ix \,//\, AC$.

Trong mặt phẳng (ACD) gọi $Ix \cap AD = K$.

Ta có $\begin{cases} K \in AD \\ K \in Ix \subset (\alpha) \Rightarrow K \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow K = AD \cap (\alpha)$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Mặt phẳng (α) qua BD và song song với SA. Tìm giao điểm K của mặt phẳng (α) và SC.

Lời giải



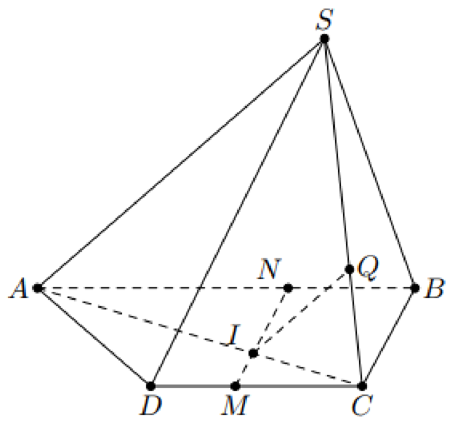
Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$. Khi đó, $O \in (\alpha) \cap (SAC)$.

Ta có $\begin{cases} SA \,//\, (\alpha) \\ SA \subset (ASC) \\ O \in (\alpha) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow Ox \,//\, SA$. Trong mặt phẳng (SAC), gọi $K = SC \cap Ox$.

Khi đó $\begin{cases} K \in SC \\ K \in Ox \subset (\alpha) \Rightarrow K \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (\alpha)$.

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang đáy lớn AB. Gọi M là một điểm trên CD và (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC. Tìm giao điểm Q của SC và mặt phẳng (α).

Lời giải



Ta có $\begin{cases} (\alpha) \,//\, BC, BC \subset (ABCD) \\ M \in (\alpha) \cap (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN \,//\, BC$ và $N \in AB)$.

Gọi I là giao điểm của AC và MN ta có $\begin{cases} SA \,//\, (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \\ I \in (\alpha) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = Ix \,//\, SA.$

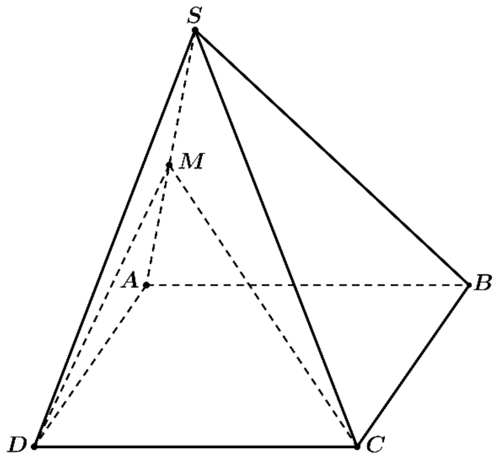
Trong mặt phẳng (SAC) gọi Q là giao điểm của Ix và SC.

Ta có $\begin{cases} Q \in SC \\ Q \in Ix \subset (\alpha) \Rightarrow I \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (\alpha)$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

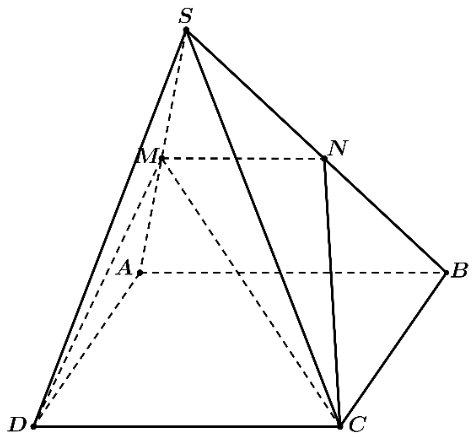
PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) là:



A. Không có giao điểm.
B. Giao điểm của đường thẳng SB và MC.
C. Giao điểm của đường thẳng SB và MD.
D. Trung điểm của đoạn thẳng SB.

Lời giải

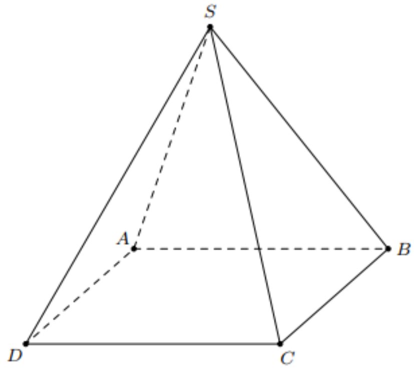


Ta có: $\begin{cases} AB // CD \\ M \in (CMD) \cap (SAB) \\ CD \subset (CMD), AB \subset (SAB) \end{cases}$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (CMD) và (SAB) là đường thẳng $MN // AB // CD$ với $N \in SB$.

Khi đó N là giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD).

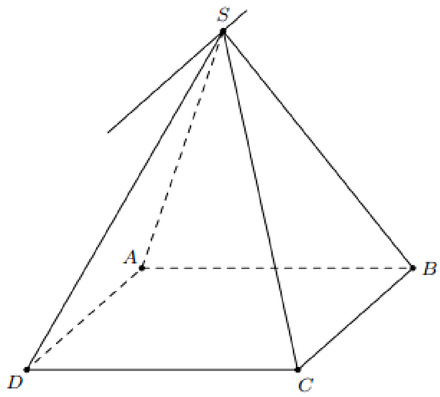
Xét tam giác ΔSAB có M là trung điểm SA và $MN // AB \Rightarrow N$ là trung điểm SB.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC).



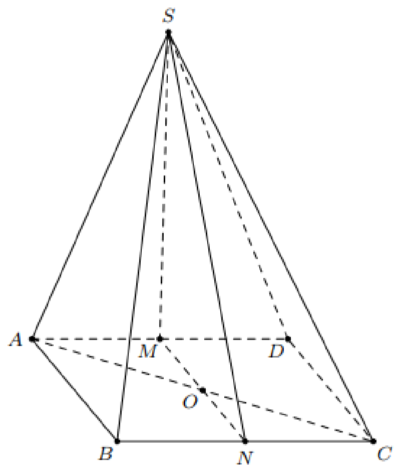
A. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và tâm O của đáy.
B. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC.
C. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng AB.
D. Là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BD.

Lời giải



Do hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) có chung điểm S và có hai đường thẳng AD, BC song song với nhau nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng đi qua đỉnh S và song song với đường thẳng BC.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SMN) và (SAC) là



A. SO với O là tâm hình bình hành $ABCD$.
B. SD.
C. SG với G là trung điểm AB.
D. SF với F là trung điểm CD.

Lời giải

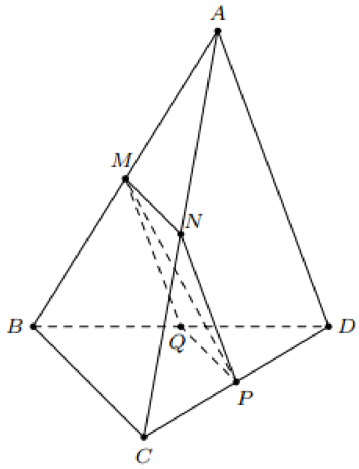
Gọi O là giao điểm AC và MN ta có $\begin{cases} S \in (SAC) \cap (SMN) \\ O \in (SAC) \cap (SMN) \end{cases} \Rightarrow SO = (SAC) \cap (SMN)$.

Vì $MN \,//\, AB$ và N là trung điểm BC nên O là trung điểm $AC \Rightarrow O$ là tâm hình bình hành $ABCD$.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$, có độ dài các cạnh đôii một khác nhau. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC, CD. Mặt phẳng (MNP) cắt BD tại điểm Q. Phát biểu nào sau đây sai?

A. $MN = MQ$. **B.** $MQ = NP$. **C.** $PQ \,//\, (ABC)$. **D.** $MQ \,//\, (ACD)$.

Lời giải

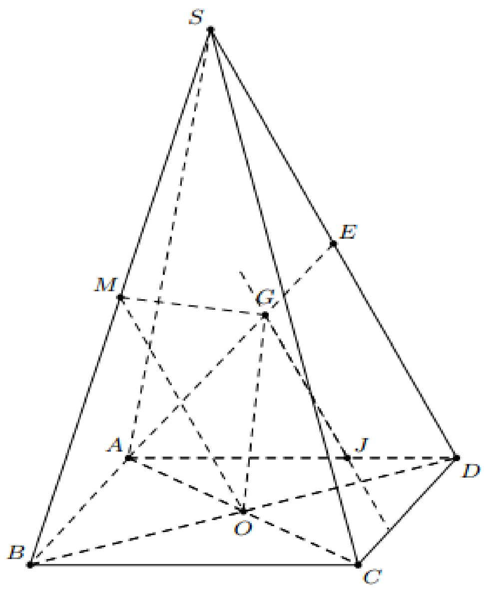


Ta có: $MN = \frac{1}{2}BC$; $MQ = \frac{1}{2}AD \Rightarrow MQ \neq MN$ do $BC \neq AD$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm đoạn SB, G là trọng tâm tam giác SAD. Gọi J là giao điểm của AD với (OMG) khi đó $\frac{JD}{AD}$ bằng

A. $\frac{2}{5}$. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải



Ta có MO là đường trung bình của tam giác SBD suy ra $MO \,//\, SD$.

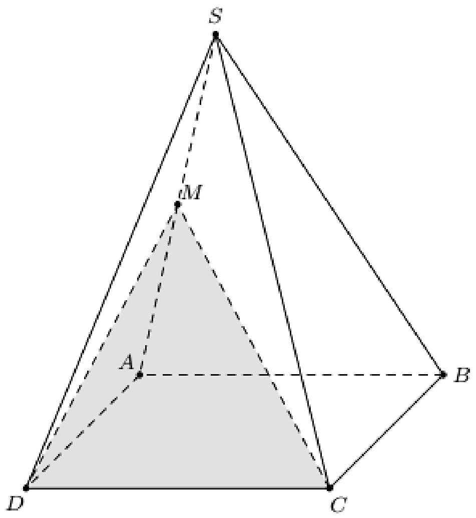
Ta có $\begin{cases} MO \,//\, SD \\ G \in (OMG) \cap (SAD) \end{cases} \Rightarrow (OMG) \cap (SAD) = Gx \,//\, SD \,//\, MO \Rightarrow Gx \cap AD = J$.

Ta có: $J \in Gx \subset (OMG) \Rightarrow J = AD \cap (OMG)$.

Gọi E là trung điểm SD với G là trọng tâm ta có $\dfrac{AG}{AE} = \dfrac{2}{3}$.

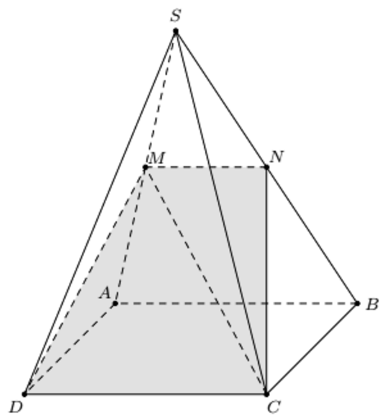
Do $GJ \,//\, MO \,//\, SD$ áp dụng định lý Talet trong tam giác AED ta có $\dfrac{GE}{AE} = \dfrac{JD}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SA. Giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD) là



A. Không có giao điểm.
B. Giao điểm của đường thẳng SB và MC.
C. Giao điểm của đường thẳng SB và MD.
D. Trung điểm của đoạn thẳng SB.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} AB \,//\, CD \\ M \in (CMD) \cap (SAB) \\ CD \subset (CMD), AB \subset (SAB) \end{cases}$

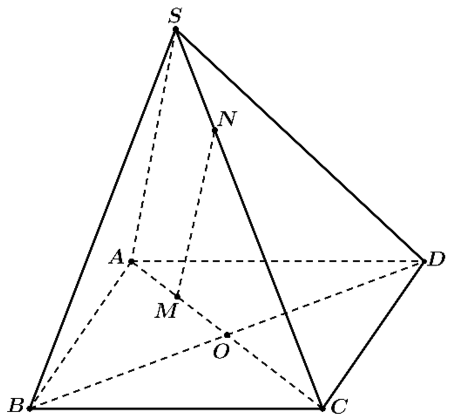
Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (CMD) và (SAB) là đường thẳng $MN \,//\, AB \,//\, CD$ với $N \in SB \Rightarrow N$ là giao điểm của đường thẳng SB và mặt phẳng (CMD).

Xét tam giác ΔSAB có M là trung điểm SA và $MN \,//\, AB \Rightarrow N$ là trung điểm SB.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm AO. Mặt phẳng (α) qua M và song song với BD; SA và mặt phẳng (α) cắt SC tại N. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng**?

A. $SN = \frac{1}{4}NC$. **B.** $SN = NC$. **C.** $SN = \frac{1}{3}NC$. **D.** $SN = \frac{1}{2}NC$.

Lời giải



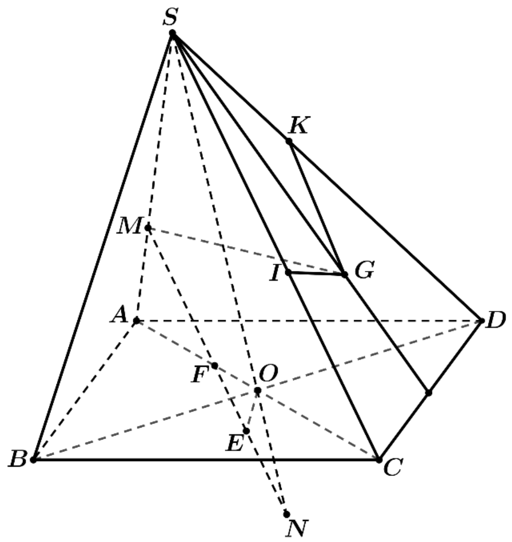
Vì $\begin{cases} SA /\!/ (\alpha) \\ (SAC)\cap(\alpha) = MN \end{cases} \Rightarrow MN /\!/ SA$. Xét tam giác SAC có $\frac{SN}{NC} = \frac{AM}{MC}$

Mặt khác: do tứ giác $ABCD$ là hình bình hành tâm O kết hợp với M là trung điểm AO dẫn đến $ABCD$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, M là một điểm thuộc đoạn SA sao cho $2MA = SM$, điểm N là điểm thuộc tia đối của tia OS sao cho $3ON = SO$, G là trọng tâm tam giác SCD. Gọi $K = SD \cap (GMN)$. Biết rằng $\frac{SK}{KD} = \frac{a}{b}(a,b \in \mathbb{N})$ và $(a,b) = 1$. Tính $S = a + b$.

A. 3. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải



Trong (SAC) từ O dựng đường thẳng d song song với SA, cắt MN tại E.

Ta có $OE//SM \Rightarrow \frac{OE}{SM}=\frac{ON}{SN}=\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{OE}{2MA}=\frac{1}{4}\Rightarrow \frac{OE}{MA}=\frac{1}{2}$

Trong (SAC) gọi $F=MN\cap AC$ ta có $OE//MA\Rightarrow \frac{OE}{MA}=\frac{OF}{AF}=\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{AF}{AO}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}$

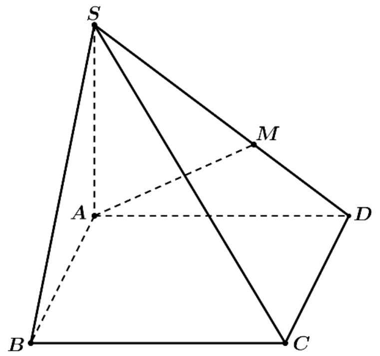
Ta có $\frac{AM}{SA}=\frac{AF}{AC}=\frac{1}{3}\Rightarrow MN//SC$

Ta có: $\begin{cases} G\in(GMN)\cap(SCD) \\ MN//SC \\ MN\subset(GMN), SC\subset(SCD) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xGx'=(GMN)\cap(SCD) \\ xGx'//SC(//MN) \end{cases}$

Gọi $K=xGx'\cap SD\Rightarrow \begin{cases} K\in xGx', xGx'\subset(GMN) \\ K\in SD \end{cases}\Rightarrow K=SD\cap(GMN)$

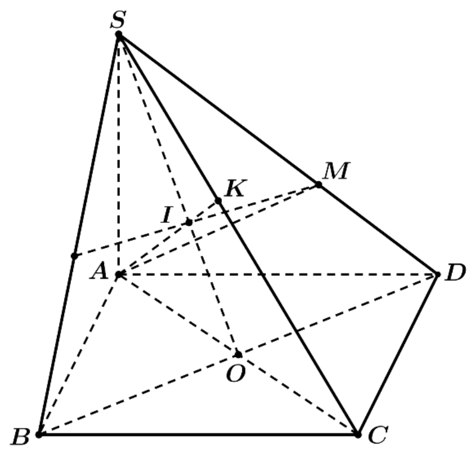
Ta có: $GK//SC\Rightarrow \frac{DK}{SD}=\frac{DG}{DI}=\frac{2}{3}\Rightarrow \frac{SK}{KD}=\frac{1}{2}\Rightarrow a=1, b=2\Rightarrow a+b=3$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm thuộc cạnh SD sao cho $SM=\frac{2}{3}SD$. Mặt phẳng chứa AM và song song với BD cắt cạnh SC tại K. Tỷ số $\frac{SK}{SC}$ bằng



A. $\frac{1}{3}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải



Nối BD

Trong mặt phẳng (SBD) qua M vẽ đường thẳng song song với BD cắt SB tại N.

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ gọi $O = AC \cap BD$

Trong mặt phẳng (SBD) gọi $I = SO \cap MN$

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $K = AI \cap SC \Rightarrow \begin{cases} K \in AI \subset (AMN) \\ K \in SC \end{cases} \Rightarrow K = SC \cap (AMN)$

Tam giác ΔSOD có $MI // DO \Rightarrow \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{SM}{SD} = \dfrac{2}{3}$

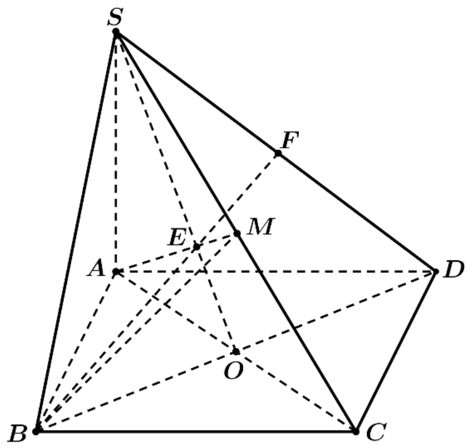
Xét ΔSAC có SO là trung tuyến và $\dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow I$ là trọng tâm tam giác ΔSAC

Nên AK là đường trung tuyến của ΔSAC do đó K là trung điểm của SC $\Rightarrow \dfrac{SK}{SC} = \dfrac{1}{2}$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm SC, F là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (ABM). Tính tỉ số $\dfrac{SF}{SD}$.

A. 1. **B.** $\dfrac{1}{3}$. **C.** $\dfrac{2}{3}$. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải



Chọn mặt phẳng (SBD) chứa SD

Tìm giao tuyến của mặt phẳng (SBD) và mặt phẳng (ABM):

Lấy điểm $B \in (SBD) \cap (ABM)$ và gọi $O = AC \cap BD$

Trong mặt phẳng (SAC) gọi $E = AM \cap SO$ thì $\begin{cases} E \in AM, AM \subset (ABM) \\ E \in SO, SO \subset (SBD) \end{cases}$

$\Rightarrow E \in (SBD) \cap (ABM) \Rightarrow BE = (SBD) \cap (ABM)$

Trong mặt phẳng (SBD) gọi $F = SD \cap BE$ thì $\begin{cases} F \in SD \\ F \in BE, BE \subset (ABM) \end{cases} \Rightarrow F = SD \cap (ABM)$

Vì O là trung điểm AC, M là trung điểm SC nên E là trọng tâm tam giác SAC

Suy ra $\frac{SE}{SO}=\frac{2}{3}$

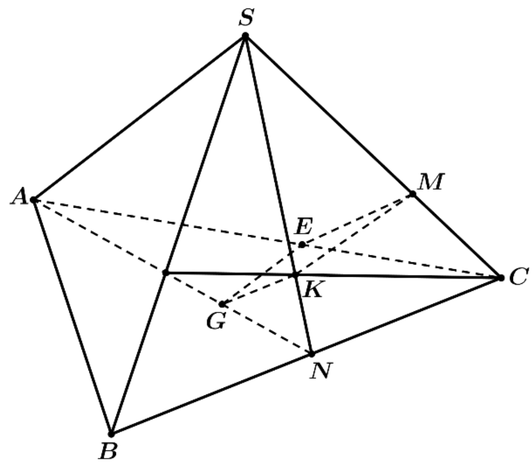
Trong tam giác SBD có SO là trung tuyến và $\frac{SE}{SO}=\frac{2}{3}$ nên E là trọng tâm tam giác SBD

Suy ra BF là trung tuyến của tam giác SBD do đó F là trung điểm SD, suy ra $\frac{SF}{SD}=\frac{1}{2}$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có G,K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC, gọi E là trung điểm của AC. Mặt phẳng (GEK) cắt SC tại M. Tỉ số $\frac{MS}{MC}$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** $\frac{1}{2}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của BC, theo đầu bài ta có G,K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC nên ta có $\frac{NK}{NS}=\frac{NG}{NA}=\frac{1}{3}\Rightarrow GK\,//\,SA\Rightarrow(GEK)\,//\,SA$.

Từ trên mặt phẳng (SAC), ta dựng đường thẳng đi qua E và song song với SA cắt SC tại M.

$\begin{cases}EM\,//\,SA\\GK\,//\,SA\end{cases}\Rightarrow EM\,//\,GK\Rightarrow M\in(EGK)$ vậy $(EGK)\cap SC=M$.

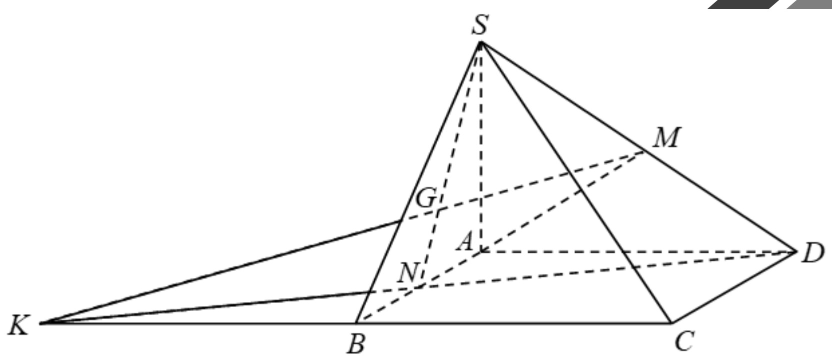
Do E là trung điểm của AC, $EM\,//\,SC\Rightarrow EM$ là đường trung bình của tam giác SAC

Vậy tỉ số $\frac{MS}{MC}=1$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SD, G là trọng tâm tam giác SAB, K là giao điểm của GM với mặt phẳng $ABCD$. Tỉ số $\frac{KB}{KC}$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{2}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Gọi N là trung điểm của AB.

Trong mặt phẳng (SDN), $GM \cap DN = \{K\}$.

Ta có: $\begin{cases} K \in GM \\ K \in DN \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow GM \cap (ABCD) = K$.

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác SND với ba điểm M, G, K thẳng hàng ta có

$\frac{NK}{KD}.\frac{DM}{MS}.\frac{SG}{GN} = 1 \Leftrightarrow \frac{NK}{KD}.1.2 = 1 \Leftrightarrow \frac{NK}{KD} = \frac{1}{2} \Rightarrow N$ là trung điểm của KD.

Mà N cũng là trung điểm của AB nên tứ giác $ADBK$ là hình bình hành

$\Rightarrow KB = AD = BC \Rightarrow \frac{KB}{KC} = \frac{1}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Lấy điểm M trên cạnh AD sao cho $AD = 3AM$. Gọi G, N theo thứ tự là trọng tâm các tam giác SAB, ABC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAB) và (SCD) là đường thẳng đi qua S và song song với AC, BD

b) $\frac{DN}{DB} = \frac{1}{3}$

c) MN song song với mặt phẳng (SCD)

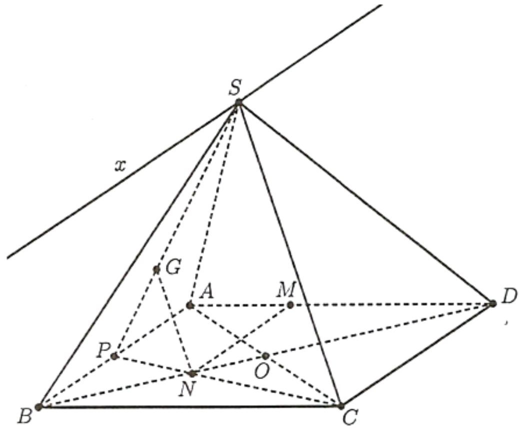
d) NG cắt với mặt phẳng (SAC).

Lời giải

a) Sai: $\begin{cases} S \in (SAB) \cap (SCD) \\ AB \,//\, CD \\ AB \subset (SAB), CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (SCD) = Sx$ (với Sx qua S và $Sx \,//\, AB \,//\, CD$).

b) Sai: Gọi O là tâm hình bình hành $ABCD$.

Vì N là trọng tâm của ΔABC nên $BN = \frac{2}{3}BO = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}BD = \frac{1}{3}BD \Rightarrow \frac{DN}{DB} = \frac{2}{3}$.



c) Đúng: ta có $AD = 3AM \Rightarrow \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{2}{3}$.

Xét tam giác ADB ta có: $\dfrac{DM}{DA} = \dfrac{DN}{DB} = \dfrac{2}{3}$ nên $MN \parallel AB \Rightarrow MN \parallel CD$

Mặt khác: $CD \subset (SCD) \Rightarrow MN \parallel (SCD)$.

d) Sai: Gọi P là trung điểm AB và ΔSPC có: $\dfrac{PG}{PS} = \dfrac{PN}{PC} = \dfrac{1}{3}$ (tính chất trọng tâm)

$\Rightarrow NG \parallel SC, SC \subset (SAC) \Rightarrow NG \parallel (SAC)$

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và BC. Gọi H, K lần lượt là trọng tâm của ΔSAB và ΔSBC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

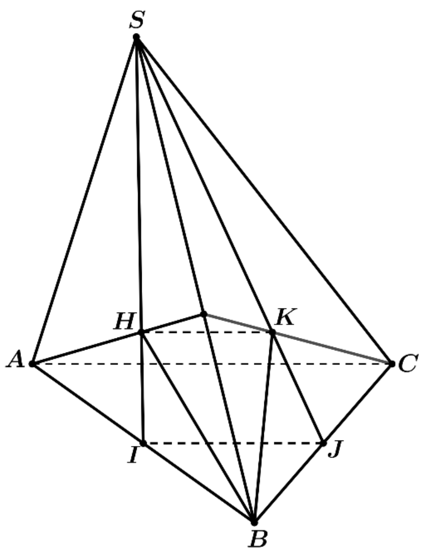
a) $AC \parallel (SIJ)$.

b) HK cắt IJ

c) $HK \parallel (SAC)$.

d) Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng đi qua B và song song với AC.

Lời giải



a) Đúng: Vì IJ là đường trung bình ΔABC nên $IJ \parallel AC$. Ta có: $\begin{cases} AC \parallel IJ \\ IJ \subset (SIJ) \\ AC \not\subset (SIJ) \end{cases} \Rightarrow AC \parallel (SIJ)$.

b) Sai: Ta có $\frac{SH}{HI} = \frac{SK}{KJ} = 2$($H, K$ lần lượt là trọng tâm ΔSAB và ΔSAC) $\Rightarrow HK \parallel IJ$

Lại có $\begin{cases} HK \parallel AC (HK \parallel IJ, AC \parallel IJ) \\ AC \subset (SAC) \\ HK \not\subset (SAC) \end{cases} \Rightarrow HK \parallel (SAC)$

c) Đúng: Ta có $\begin{cases} HK \parallel AC \\ HK \subset (BHK) \\ AC \subset (ABC) \\ B \in (BHK) \cap (ABC) \end{cases}$

d) Đúng: Giao tuyến của (BHK) và (ABC) là đường thẳng Bx đi qua B và song song với AC và HK.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Điểm $M \in SC$ (M không trùng với S và C). Gọi I là giao điểm của AM và SO. Mặt phẳng (P) chứa AM song song với BD. Gọi N là giao điểm của SD với mặt phẳng (P). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

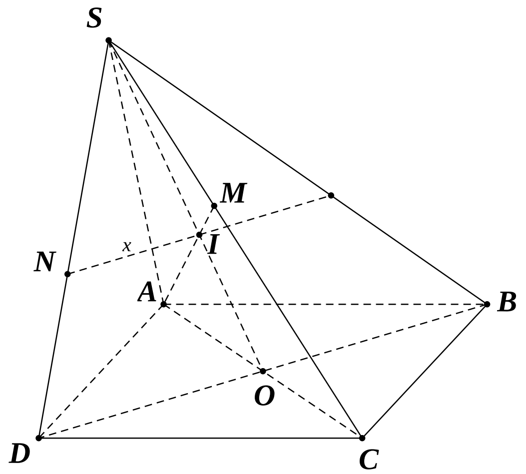
a) Đường thẳng BD nằm trong mặt phẳng (SBD)

b) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SBD) là đường thẳng đi qua I và song song với BD

c) N là giao điểm của SD và đường thẳng qua IM.

d) N là giao điểm của SD và đường thẳng qua I song song với BD.

Lời giải



Chọn (SBD) chứa SD. Xét (P) và (SBD) có đỉnh I chung

Mặt khác mặt phẳng $(P)//BD$ (giả thiết) và $BD\subset(SBD)\Rightarrow(P)\cap(SBD)=Ix$ với $Ix//BD$.

Trong (SBD) khi đó $Ix\cap SD=N$.

Vậy N là giao điểm của SD và đường thẳng qua I song song với BD.

a) Đúng: Đường thẳng BD nằm trong mặt phẳng (SBD)

b) Đúng: Giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SBD) là đường thẳng đi qua I và song song với BD

c) Sai: N là giao điểm của SD và đường đi qua I và song song với BD

d) N là giao điểm của SD và đường thẳng qua I song song với BD.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M là trung điểm đoạn thẳng SC và I là giao điểm của AM và SO. Trong mặt phẳng (SCD) đường thẳng đi qua điểm I và song với BD cắt SB và SD lần lượt tại E và F. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

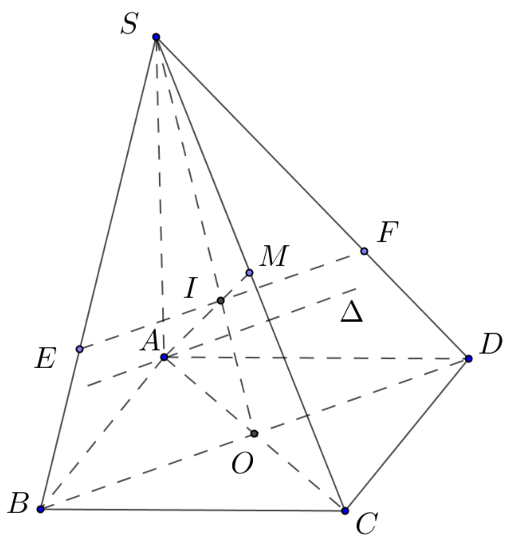
a) Đường thẳng MO song song với mặt phẳng (SAD).

b) Giao tuyến của hai mặt phẳng $(AEMF)$ và $(ABCD)$.

c) $\dfrac{IO}{SO}=\dfrac{3}{4}$

c) Gọi S_{SEM} và S_{SBC} lần lượt là diện tích của ΔSEM và ΔSBC thì tỉ số $\dfrac{S_{SEM}}{S_{SBC}}=\dfrac{1}{3}$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có M là trung điểm của SC, O là trung điểm của AC nên OM là đường trung bình của tam giác SAC.

Khi đó: $\begin{cases}OM // SA\\ SA\subset(SAD)\end{cases}\Rightarrow OM//(SAD)$

b) Đúng: Ta có: $\left.\begin{array}{l}A\in(AEMF)\\ A\in(ABCD)\end{array}\right\}\Rightarrow$ A là điểm chung của hai mặt phẳng $(AEMF)$ và $(ABCD)$.

$\begin{cases} EF // BD \\ EF \subset (AEMF) \Rightarrow (AEMF) \cap (ABCD) = \Delta, \text{ với } \Delta \text{ qua } A \text{ và } // BD // EF. \\ BD \subset (ABCD) \end{cases}$

c) Sai: Ta có I là giao điểm của hai đường trung tuyến AM và SO của tam giác SAC.

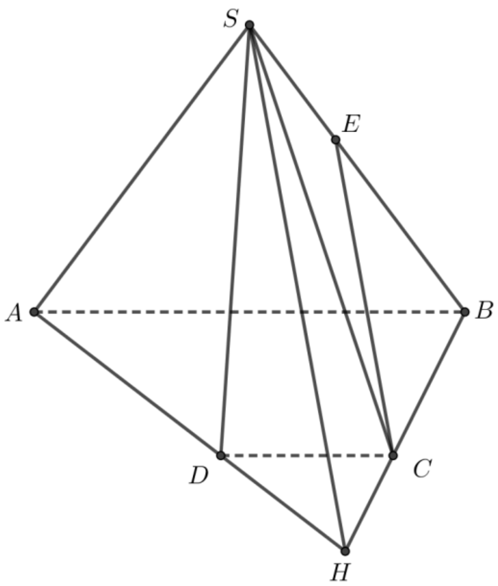
$\Rightarrow I$ là trọng tâm của tam giác SAC. Và do $EI // OB \Rightarrow \dfrac{SE}{SB} = \dfrac{SI}{SO} = \dfrac{2}{3}$.

d) Sai: $\dfrac{S_{SEM}}{S_{SBC}} = \dfrac{\frac{1}{2}SE.SM.\sin S}{\frac{1}{2}SB.SC.\sin S} = \dfrac{SE.SM}{SB.SC} = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AB là đáy lớn. Biết $AB = 5a, CD = 2a$. Gọi E là điểm thuộc cạnh SB thỏa mãn $\dfrac{ES}{EB} = \dfrac{m}{n}$ với $\dfrac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng CE song song với mặt phẳng (SAD). Giá trị của $2m + 3n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AD và BC trong mặt phẳng $(ABCD)$.

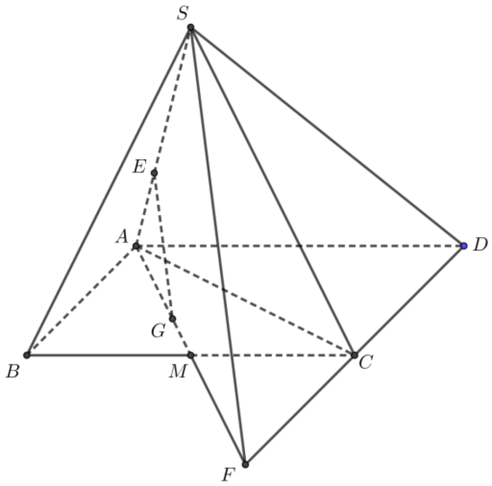
Theo hệ quả Talet ta có: $\dfrac{HC}{HB} = \dfrac{CD}{AB} = \dfrac{2}{5}$

Ta có: $\begin{cases} CE \subset (SBH) \\ CE // (SAD) \\ (SBH) \cap (SAD) = SH \end{cases} \Rightarrow CE // SH \Rightarrow \dfrac{SE}{SB} = \dfrac{HC}{HB} = \dfrac{2}{5} \Rightarrow SE = \dfrac{2}{5}SB$

$\Rightarrow \dfrac{ES}{EB} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow 2m + 3n = 13$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC và E là điểm thuộc cạnh SA thỏa mãn $SE=\frac{m}{n}.SA$ với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Biết rằng GE song song với mặt phẳng (SCD). Giá trị của $m.n$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, F là giao điểm của AM và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

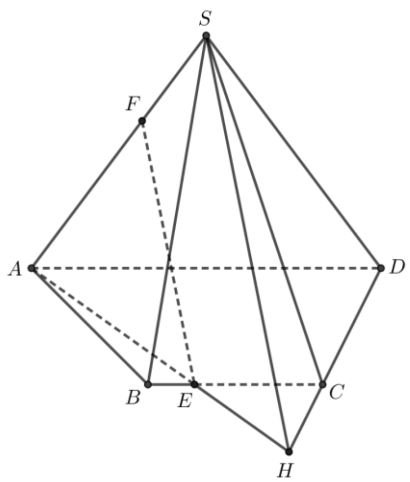
Theo định lý Talet, ta có: $\frac{MA}{MF}=\frac{MB}{MC}=1\Rightarrow MA=MF\Rightarrow M$ là trung điểm của AF

$\Rightarrow \frac{AG}{AF}=\frac{AG}{2AM}=\frac{1}{3}$. Ta có: $\begin{cases} GE\subset (SAF) \\ GE//(SCD) \\ (SAF)\cap (SCD)=SF \end{cases} \Rightarrow GE//SF\Rightarrow \frac{AE}{AS}=\frac{AG}{AF}=\frac{1}{3}\Rightarrow AE=\frac{1}{3}AS$

$\Rightarrow SE=\frac{2}{3}SA\Rightarrow \frac{m}{n}=\frac{2}{3}\Rightarrow m.n=6$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với AD song song với BC và $AD=2BC$. Gọi E là điểm thuộc cạnh BC sao cho $BC=4BE$. Lấy F thuộc cạnh SA sao cho $FA=k.FS$. Biết rằng EF song song với mặt phẳng (SCD). Khi đó giá trị của k bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi H là giao điểm của AE và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

Theo hệ quả Talet, ta có: $\frac{HE}{HA}=\frac{CE}{AD}=\frac{3}{8}$

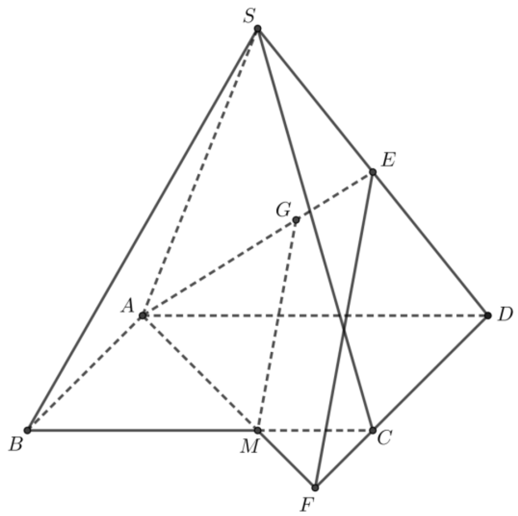
Ta có: $\begin{cases} EF\subset(SAH) \\ EF//(SCD) \\ (SAH)\cap(SCD)=SH \end{cases} \Rightarrow EF//SH \Rightarrow \frac{SF}{SA}=\frac{HE}{HA}=\frac{3}{8}\Rightarrow SF=\frac{3}{8}SA$

$\Rightarrow FA=\frac{5}{3}FS\Rightarrow k=\frac{5}{3}\approx 1,67$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi G là trọng tâm của tam giác SAD và M là điểm thuộc cạnh BC sao cho GM song song với mặt phẳng (SCD). Khi đó tỉ số diện tích của hai tam giác MAB và MAC bằng bao nhiêu?

Lời giải

Cách 1:



Gọi E là trung điểm của SD, F là giao điểm của AM và CD trong mặt phẳng $(ABCD)$.

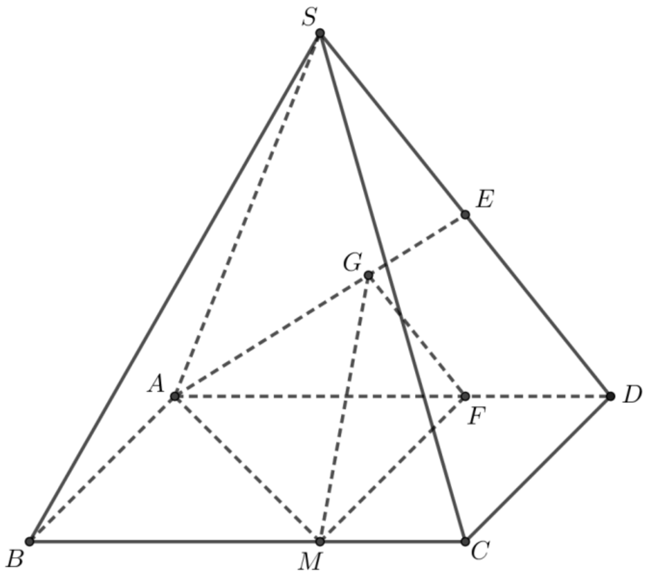
Ta có: $\begin{cases} GM\subset(AEF) \\ GM//(SCD) \\ (AEF)\cap(SCD)=EF \end{cases} \Rightarrow GM//EF \Rightarrow \frac{FM}{FA}=\frac{EG}{EA}=\frac{1}{3}$

Theo hệ quả Talet, ta có: $\frac{MC}{AD}=\frac{FM}{FA}=\frac{1}{3}\Rightarrow MC=\frac{1}{3}AD=\frac{1}{3}BC\Rightarrow\frac{MB}{MC}=2$

Nhận xét: ΔMAB và ΔMAC có chung đường cao kẻ từ A

Do đó: $\frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta MAC}}=\frac{MB}{MC}=2$.

Cách 2: Sử dụng 2 mặt phẳng song song



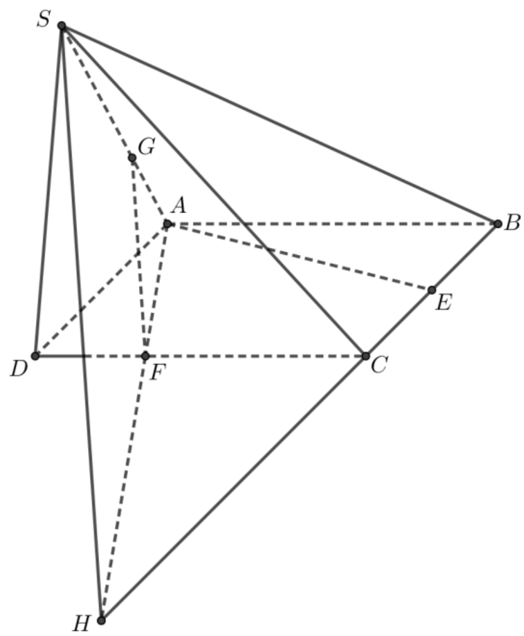
Gọi E là trung điểm của SD và vẽ GF song song với SD $(F \in AD)$.

Ta chứng minh được: $(GMF)//(SCD) \Rightarrow MF//CD$

Từ đó suy ra được: $\dfrac{MC}{BC} = \dfrac{FD}{AD} = \dfrac{EG}{EA} = \dfrac{1}{3} \Rightarrow MC = \dfrac{1}{3}BC$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông. Gọi E là trung điểm của BC, F là điểm thuộc cạnh CD sao cho $EAF = 45°$ và G thuộc cạnh SA. Biết FG song song với mặt phẳng (SBC). Khi đó tỉ số $\dfrac{GA}{GS}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có: $BAE + EAF + DAF = 90° \Rightarrow BAE + DAF = 45° \Rightarrow \tan\left(BAE + DAF\right) = 1$

$\Rightarrow \dfrac{\tan BAE + \tan DAF}{1 - \tan BAE.\tan DAF} = 1$ mà $\tan BAE = \dfrac{BE}{BA} = \dfrac{1}{2}$

Nên $\tan DAF = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{DF}{DA} = \frac{1}{3} \Rightarrow DF = \frac{1}{3}DA = \frac{1}{3}DC$

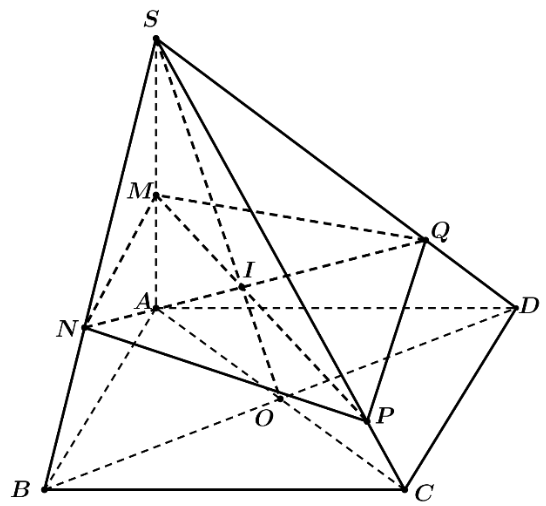
Gọi H là giao điểm của AF và BC trong mặt phẳng $(ABCD)$

Ta có: $\begin{cases} GF \subset (SAH) \\ GF//(SBC) \\ (SAH) \cap (SBC) = SH \end{cases} \Rightarrow GF//SH \Rightarrow \frac{AG}{AS} = \frac{AF}{AH}$ mà $\frac{AF}{AH} = \frac{DF}{DC} = \frac{1}{3}$

Suy ra $\frac{AG}{AS} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{GA}{GS} = \frac{1}{2}$.

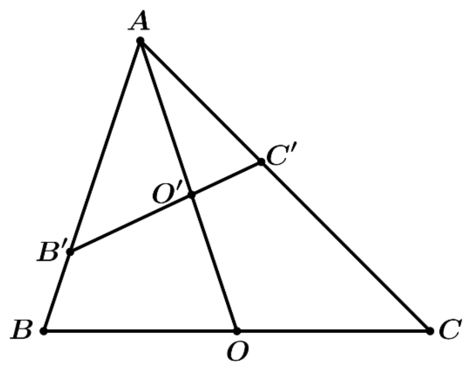
Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, ΔSBD đều cạnh a. Gọi M, P là hai điểm lần lượt di động trên cạnh SA, SC (không trùng với S) sao cho $\frac{SA}{SM} + \frac{SC}{SP} = 3$ và (α) là mặt phẳng di động chứa M, P cắt SB, SD lần lượt tại N, Q. Diện tích tam giác SNQ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $\frac{a^2\sqrt{m}}{n}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính $4m + n$.

Lời giải



Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng SO, MP.

Giao tuyến của (α) và mặt phẳng (SBD) là đường thẳng đi qua I cắt SB, SD lần lượt tại N, Q



Xét bài toán phụ:

Cho tam giác ABC và O là trung điểm của BC, O' thuộc đoạn AO (không trùng với O). Một đường thẳng thay đổi qua O' cắt cạnh AB, AC lần lượt tại B', C'. Chứng minh rằng:

$\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}=2\frac{AO}{AO'}$.

Thật vậy do $\frac{S_{AB'O'}}{S_{ABO}}=\frac{AB'}{AB}.\frac{AO'}{AO},\frac{S_{AC'O'}}{S_{ACO}}=\frac{AC'}{AC}.\frac{AO'}{AO},\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC},S_{ABO}=S_{ACO}=\frac{1}{2}S_{ABC}$ nên

$\frac{S_{AB'O'}}{S_{ABO}}+\frac{S_{AC'O'}}{S_{ACO}}=\frac{AB'}{AB}.\frac{AO'}{AO}+\frac{AC'}{AC}.\frac{AO'}{AO}\Leftrightarrow\frac{S_{AB'O'}}{S_{ABO}}+\frac{S_{AC'O'}}{S_{ACO}}=\frac{AO'}{AO}\left(\frac{AB'}{AB}+\frac{AC'}{AC}\right)$

$\Leftrightarrow\frac{2S_{AB'O'}}{S_{ABC}}+\frac{2S_{AC'O'}}{S_{ABC}}=\frac{AO'}{AO}\left(\frac{AB'}{AB}+\frac{AC'}{AC}\right)\Leftrightarrow\frac{2S_{AB'C'}}{S_{ABC}}=\frac{AO'}{AO}\left(\frac{AB'}{AB}+\frac{AC'}{AC}\right)$

$\Leftrightarrow 2\frac{AO}{AO'}=\frac{AB'.AC+AC'.AB}{AB'.AC'}\Leftrightarrow 2\frac{AB'}{AB}.\frac{AC'}{AC}=\frac{AO'}{AO}.\frac{AB'.AC+AC'.AB}{AB.AC}$

$\Leftrightarrow 2\frac{AO}{AO'}=\frac{AC}{AC'}+\frac{AB}{AB'}$.

Áp dụng bài toán trên ta có: $\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}=2\frac{SO}{SI}=\frac{SA}{SM}+\frac{SC}{SP}=3$.

Ta có: $\frac{S_{SBD}}{S_{SNQ}}=\frac{SB.SD}{SN.SQ}\le\frac{1}{4}\left(\frac{SB}{SN}+\frac{SD}{SQ}\right)^2=\frac{9}{4}$.

Suy ra $S_{SNQ}\le\frac{4}{9}S_{SBD}=\frac{4}{9}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^2\sqrt{3}}{9}$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{SB}{SN}=\frac{SD}{SQ}=\frac{3}{2}\Leftrightarrow(\alpha)\,//\,BD$.

Khi đó $m=3;\, n=9\Rightarrow 4m+n=4.3+9=19$

-----------------HẾT-----------------

Dạng 3: Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

Phương pháp: Để tìm thiết diện của mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với hai cạnh a,b của hình chóp ta làm như sau:

Bước 1: Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh a.

Bước 2: Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với a.

Bước 3: Xét các mặt của hình chóp chứa cạnh b.

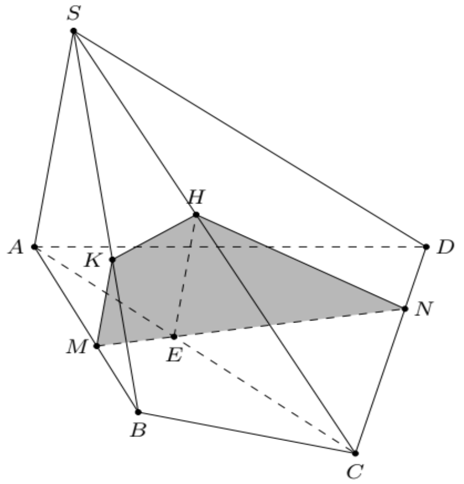
Bước 4: Trong mặt phẳng đang xét, từ M vẽ đường thẳng song song với b.

Nối các đoạn giao tuyến lại ta được thiết diện của mặt phẳng (P) với hình chóp.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh AB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SA. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Lời giải



Ta có $\begin{cases} M \in (P) \cap (SAB) \\ SA \parallel (P) \\ SA \subset (SAB) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SAB) là đường thẳng đi qua M song song với SA và cắt SB tại K.

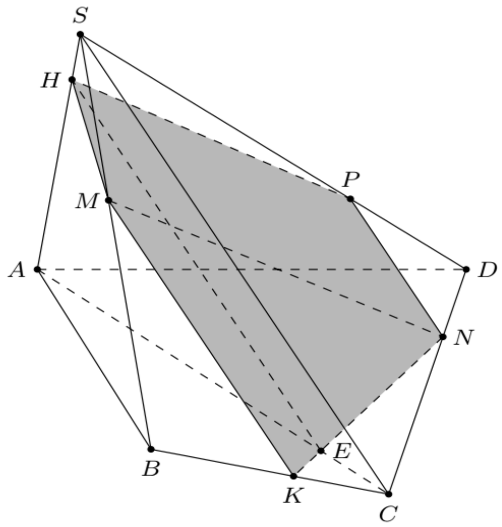
Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap MN \Rightarrow E \in (P)$.

Ta có $\begin{cases} E \in (P) \cap (SAC) \\ SA \parallel (P) \\ SA \subset (SAC) \end{cases}$ nên giao tuyến của mặt phẳng (P) và (SAC) là đường thẳng đi qua E song song với SA và cắt SC tại H.

Vì $\begin{cases} (P) \cap (ABCD) = MN \\ (P) \cap (SAB) = MK \\ (P) \cap (SBC) = KH \\ (P) \cap (SCD) = HN \end{cases}$ nên thiết diện của hình chóp cắt bởi (P) là tứ giác $MNHK$.

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi M, N là hai điểm trên cạnh SB, CD. Mặt phẳng (P) qua MN và song song với SC. Xác định thiết diện của (P) với hình chóp.

Lời giải



Mặt phẳng (SBC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SBC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC.

Kẻ $MK \parallel SC, (K \in BC)$ thì MK là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC.

Kẻ $NP \parallel SC, (P \in SD)$ thì NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD).

Trong $(ABCD)$ gọi $E = AC \cap NK \Rightarrow E \in (P)$.

Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SC.

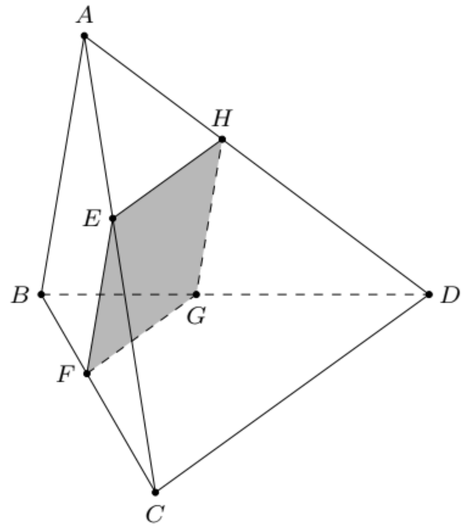
Kẻ $EH \parallel SC, (H \in SA)$ thì EH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC).

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (SAD) với (P) là PM, giao tuyến của mặt phẳng (SAB) với (P) là HM.

Vậy thiết diện của (P) với hình chóp $S.ABCD$ là ngũ giác $MKNPH$.

Bài tập 3: Cho hình chóp $S.ABCD$. Gọi E là điểm nằm giữa A, C. Mặt phẳng (P) qua E và song song với hai đường thẳng AB, CD. Xác giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp. Hình tạo bởi các giao tuyến là hình gì?

Lời giải



Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB.

Kẻ $EF \parallel AB, (F \in BC)$ thì EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC).

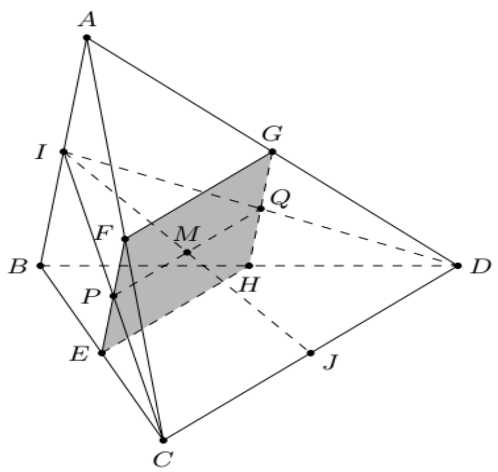
Hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) cùng chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD. Kẻ EH, FG lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) và hai mặt phẳng (ACD) và (BCD). Khi đó GH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD).

Mặt phẳng (ABD) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên $GH \parallel AB$.

Tứ giác $EFGH$ có $EF \parallel GH$ (vì cùng song song với AB) và $EH \parallel FG$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình bình hành.

Bài tập 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD. Mặt phẳng (P) qua điểm M trên đoạn IJ và song song với AB; CD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện.

Lời giải



Mặt phẳng (IDC) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (IDC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD.

Qua M kẻ $PQ \parallel CD, (P \in IC, Q \in ID)$ thì PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (IDC).

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB.

Qua P kẻ $EF \parallel AB, (E \in BC, F \in AC)$ thì EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC).

Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD.

Kẻ $FG \parallel CD, (G \in AD)$ thì FG là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD).

Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD.

Kẻ $EH \parallel CD, (H \in BD)$ thì EH là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD).

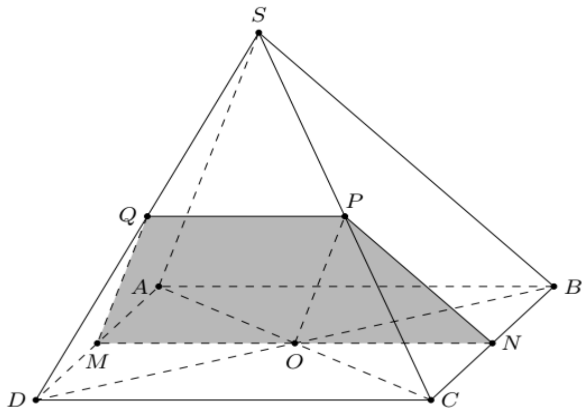
Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (ABD) với mặt phẳng (P) là GH.

Ta có $Q \in (ABD) \cap (P) \Rightarrow Q \in GH$, $EF \parallel GH; EH \parallel FG$.

Vậy thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành $EFGH$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo hình bình hành. Một mặt phẳng (P) qua O đồng thời song song với SA và CD. Tìm thiết diện tạo bởi mặt phẳng (P) và hình chóp.

Lời giải



Mặt phẳng (SAC) chứa đường thẳng SA song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SAC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với SA.

Qua O kẻ $OP \parallel SA, (P \in SC)$ thì PO là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAC).

Mặt phẳng $(ABCD)$ chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng $(ABCD)$ cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD.

Qua O kẻ $MN \parallel CD, (M \in AD, N \in BC)$ thì MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

Mặt phẳng (SCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (SCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD.

Kẻ $PQ \parallel CD, (Q \in SD)$ thì PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SCD).

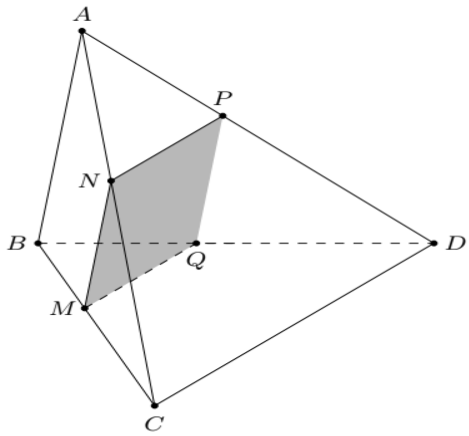
Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (SAD) với mặt phẳng (P) là QM .

Khi đó giao tuyến của mặt phẳng (SCB) với mặt phẳng (P) là PN .

Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình thang.

Bài tập 6: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh BC. Mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với AB; CD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải



Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB .

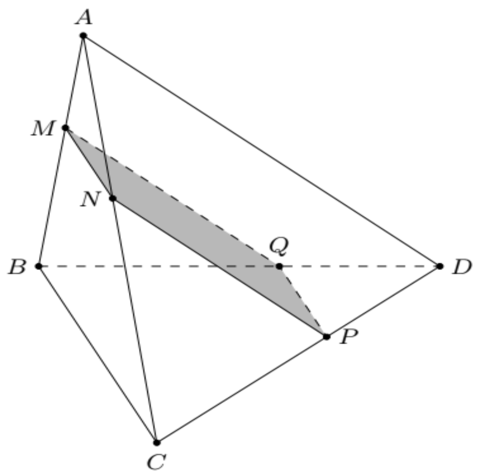
Qua M kẻ $MN \parallel AB, (N \in AC)$ thì MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC)

Hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) cùng chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD. Kẻ NP, MQ lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) và hai mặt phẳng (ACD) và (BCD). Khi đó PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD).

Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với AB) và $NP \parallel MQ$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình bình hành.

Bài tập 7: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh AB. Mặt phẳng (P) qua điểm M và song song với BC; AD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải



Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng BC song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với BC.

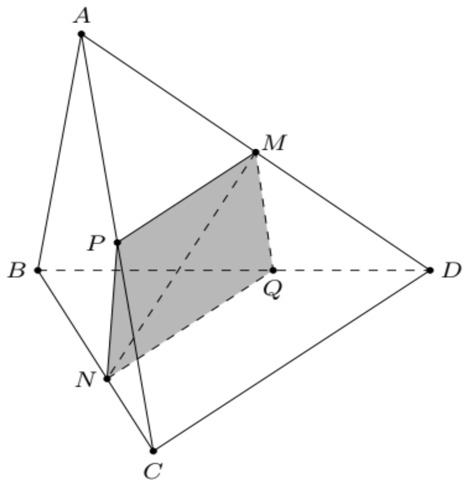
Qua M kẻ $MN \parallel BC, (N \in AC)$ thì MN là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC)

Hai mặt phẳng (ACD) và (ABD) cùng chứa đường thẳng AD song song với mặt phẳng (P) nên cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AD. Kẻ NP, MQ lần lượt là giao tuyến của mặt phẳng (P) và hai mặt phẳng (ACD) và (ABD). Khi đó PQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD).

Tứ giác $MNPQ$ có $MN \parallel PQ$ (vì cùng song song với BC) và $NP \| MQ$ (cùng $\parallel AD$) nên nó là hình bình hành.

Bài tập 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là điểm bất kì nằm trên cạnh AD; N là điểm bất kì nằm trên cạnh BC. Mặt phẳng (P) chứa đường thẳng MN và song song với CD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

Lời giải



Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD.

Qua M kẻ $MP \parallel CD, (P \in AC)$ thì MP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD)

Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD. Qua N kẻ $MQ \| CD, (Q \in BD)$ thì NQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD).

Khi đó MQ là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD); NP là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC)

Tứ giác $MNPQ$ có $MP \parallel NQ$ (vì cùng song song với CD) nên nó là hình thang.

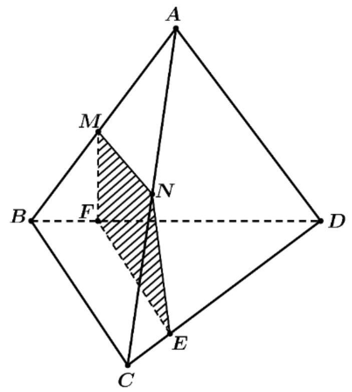
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và AC, E là điểm trên cạnh CD sao cho $ED=3EC$. Thiết diện tạo bởi mặt phẳng (MNE) và tứ diện $ABCD$ là hình:

A. Tam giác **B.** Hình vuông. **C.** Hình thang. **D.** Hình chữ nhật.

Lời giải



Tam giác ABC có M,N lần lượt là trung điểm của AB và AC

Suy ra MN là đường trung bình của tam giác ABC $\Rightarrow MN//BC$

Từ E kẻ đường thẳng song song với BC và cắt BD tại $F \Rightarrow EF//BC$

Do đó $MN//EF$ suy ra bốn điểm M,N,E,F đồng phẳng và $MNEF$ là hình thang.

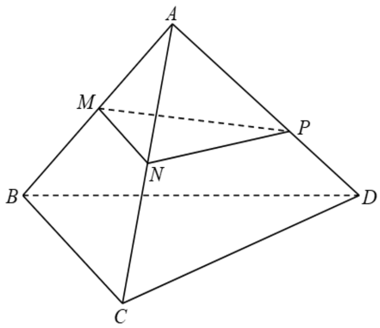
Vậy hình thang $MNEF$ là thiết diện cần tìm.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$, M và N lần lượt là trung điểm của AB và AC. Mặt phẳng (α) qua MN cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là đa giác T. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. T là hình thang.
B. T là tam giác hoặc hình thang hoặc hình bình hành.
C. T là hình chữ nhật.
D. T là tam giác.

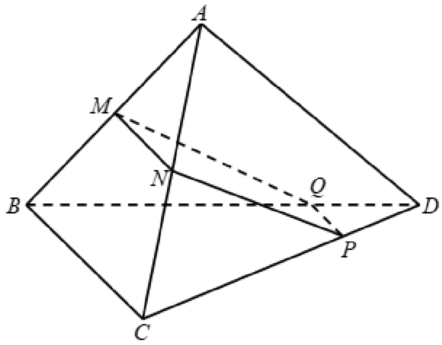
Lời giải

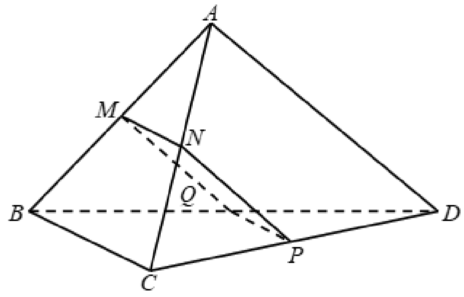
Trường hợp 1: Mặt phẳng (α) qua MN và cắt đoạn AD tại điểm $P \Rightarrow$ Thiết diện là tam giác MNP.



Trường hợp 2: Mặt phẳng (α) qua MN và cắt mặt phẳng (BCD) theo giao tuyến là PQ

Thiết diện là hình thang $MNPQ$ hoặc hình bình hành $MNPQ$.





Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn AD, M là trung điểm cạnh SA, N là điểm trên cạnh SC sao cho $SN = 3SC$. Mặt phẳng (α) chứa MN và song song với SB cắt hình chóp theo thiết diện là

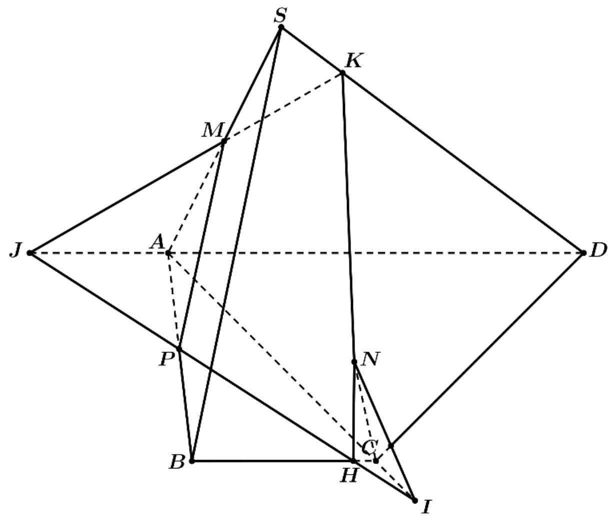
A. Tam giác MNK với K thuộc SD.

B. Tam giác MNP với P là trung điểm của AB.

C. Hình thang.

D. Ngũ giác.

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAC) vì MN không song song với AC nên gọi $I = MN \cap AC$.

$(\alpha) // AB$ nên $(\alpha) \cap (SAB) = MP$ với $MP // SB$ và $P \in AB$ suy ra P là trung điểm của AB.

Trong $(ABCD)$ đường thẳng IP cắt AD và BC lần lượt tại J và H.

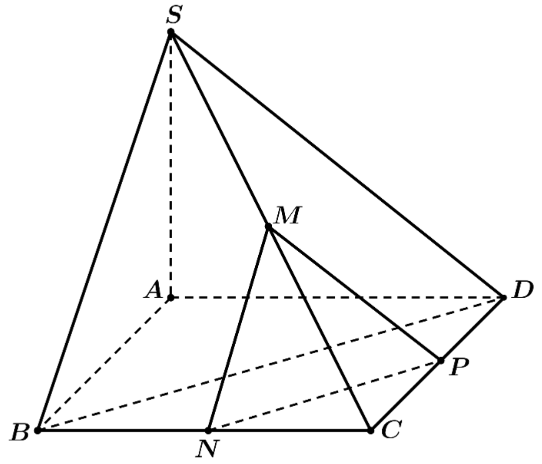
Trong mặt phẳng (SAD), JM cắt SD tại K.

Ta có $\begin{cases} MP = (\alpha) \cap (SAB) \\ PH = (\alpha) \cap (ABCD) \\ HN = (\alpha) \cap (SBC) \\ NK = (\alpha) \cap (SCD) \\ KM = (\alpha) \cap (SDA) \end{cases}$. Vậy thiết diện cần tìm là ngũ giác $MPHNK$.

Câu 4: Trong không gian, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, M,N lần lượt là trung điểm đoạn SC,BC. Thiết diện của hình chóp khi cắt bởi mặt phẳng (α) qua MN song song với BD là hình gì?

A. Tam giác. **B.** Ngũ giác. **C.** Lục giác. **D.** Tứ giác.

Lời giải



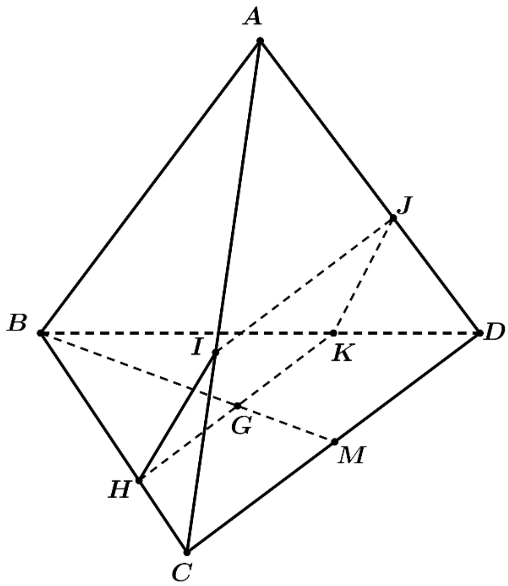
Gọi $(\alpha)\cap CD=P\Rightarrow NP\,//\,CD\Rightarrow(\alpha)\cap(SCD)=PM;(\alpha)\cap(SBC)=MN$

Suy ra, ta được thiết diện cần tìm là tam giác MNP.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi (P) là mặt phẳng qua G, song song với AB và CD. Thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi (P) là

A. Hình thang. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình tam giác. **D.** Tam giác đều.

Lời giải



Gọi Δ là giao tuyến của (P) và (BCD). Khi đó Δ đi qua G và song song với CD.

Gọi H, K lần lượt là giao điểm của Δ với BC và BD.

Giả sử (P) cắt (ABC) và (ABD) theo các giao tuyến là HI và KJ.

Ta có $(P)\cap(ABC)=HJ$, $(P)\cap(ABD)=KJ$ mà $AB\,//\,(P)$ nên $HI\,//\,AB\,//\,KJ$.

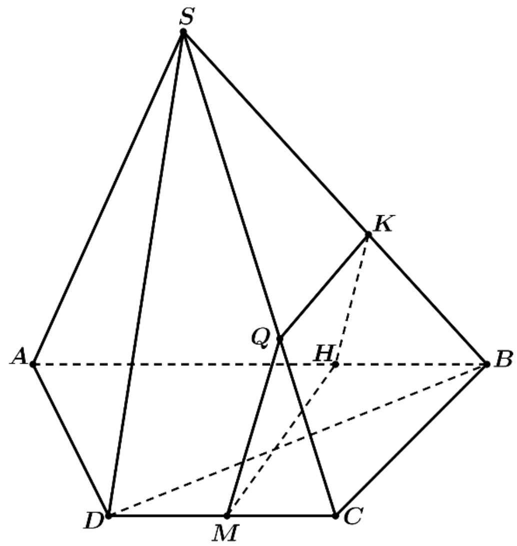
Theo định lí Thalet, ta có $\dfrac{BH}{HC}=\dfrac{BK}{KD}=2$ suy ra $\begin{cases}\dfrac{HI}{AB}=\dfrac{CH}{CB}=\dfrac{1}{3}\\ \dfrac{KJ}{AB}=\dfrac{DK}{DB}=\dfrac{1}{3}\end{cases}\Rightarrow HI=KJ$.

Vậy thiết diện của (P) và tứ diện $ABCD$ là hình bình hành $HIJK$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với đáy lớn là AB, điểm M là trung điểm CD. Mặt phẳng (α) qua M và song song với cả SA, BC, cắt hình chóp theo một thiết diện là

A. hình tam giác. **B.** hình bình hành. **C.** hình thoi. **D.** hình thang.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases}M\in(\alpha)\cap(ABCD)\\ BC//(\alpha)\\ BC\subset(ABCD)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(ABCD)=MH\,(MH//BC, H\in AB)$.

Ta có: $\begin{cases}H\in(\alpha)\cap(SAB)\\ \text{SA}//(\alpha)\\ SA\subset(SAB)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SAB)=HK\,(HK//SA, K\in SB)$.

Ta có: $\begin{cases}K\in(\alpha)\cap(SBC)\\ \text{BC}//(\alpha)\\ BC\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SBC)=KQ\,(KQ//BC, Q\in SC)$.

Ta có: $\begin{cases}Q\in(\alpha)\cap(SCD)\\ M\in(\alpha)\cap(SCD)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(SCD)=QM$.

Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) hình thang $HKQM$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

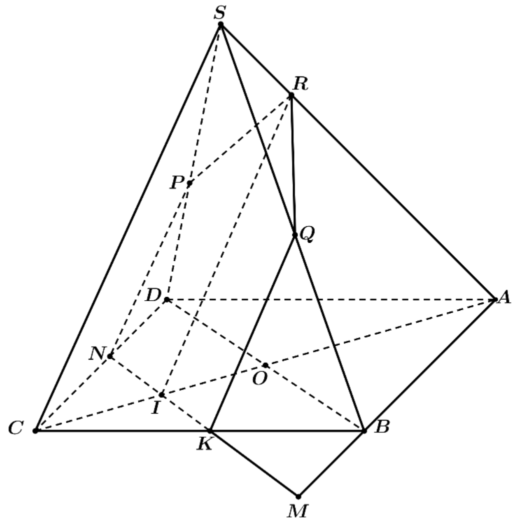
A. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.

C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.

D. (P) không cắt hình chóp.

Lời giải



Trong $(ABCD)$, kẻ đường thẳng qua M và song song với BD cắt BC, CD, CA tại K, N, I.

Trong (SCD), kẻ đường thẳng qua N và song song với SC cắt SD tại P.

Trong (SCB), kẻ đường thẳng qua K và song song với SC cắt SB tại Q.

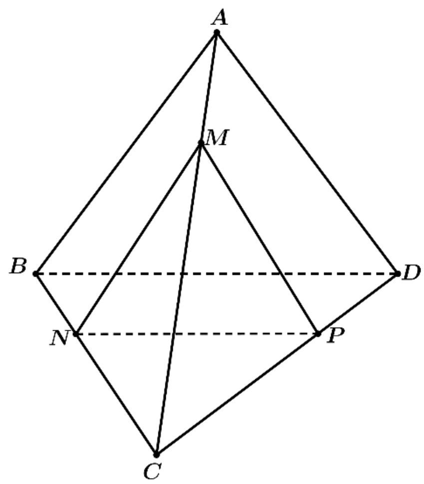
Trong (SAC), kẻ đường thẳng qua I và song song với SC cắt SA tại R.

Thiết diện là ngũ giác $KNPRQ$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm M thuộc đoạn AC (M khác A, M khác C). Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD. Thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình gì?

A. Hình vuông **B.** Hình chữ nhật **C.** Hình tam giác **D.** Hình bình hành

Lời giải



Ta có $\left.\begin{matrix}(\alpha)//AB\\ AB\subset(ABC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)\cap(ABC)=MN$ với $MN//AB$ và $N\in BC$.

Ta có $\left.\begin{matrix}(\alpha)//AD\\ AD\subset(ADC)\end{matrix}\right\}\Rightarrow(\alpha)\cap(ADC)=MP$ với $MP//AD$ và $P\in CD$.

$(\alpha)\cap(BCD)=NP$.

Do đó thiết diện của (α) với tứ diện $ABCD$ là hình tam giác MNP.

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, gọi I là trung điểm cạnh SC. Mệnh đề nào sau đây sai?

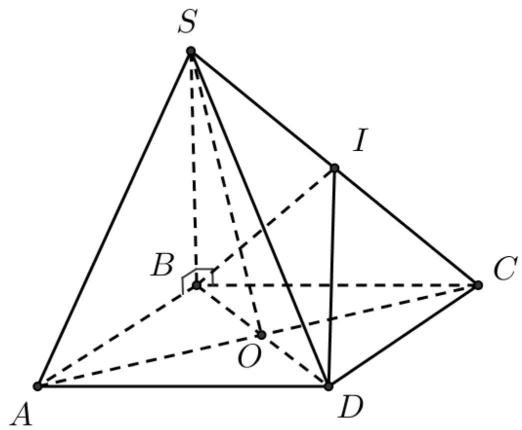
A. Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).

B. Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).

C. Mặt phẳng (IBD) cắt mặt phẳng (SAC) theo giao tuyến OI.

D. Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo một thiết diện là tứ giác.

Lời giải



Trong tam giác SAC có O là trung điểm AC, I là trung điểm SC nên $IO // SA$

$\Rightarrow IO$ song song với hai mặt phẳng (SAB) và (SAD).

Mặt phẳng (IBD) cắt (SAC) theo giao tuyến IO.

Mặt phẳng (IBD) cắt (SBC) theo giao tuyến BI, cắt (SCD) theo giao tuyến ID, cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến BD $\Rightarrow$ thiết diện tạo bởi mặt phẳng (IBD) và hình chóp $S.ABCD$ là tam giác IBD.

Câu 10: Gọi (P) là mặt phẳng qua H, song song với CD và SB. Thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Ngũ giác.
B. Hình bình hành.
C. Tứ giác không có cặp cạnh đối nào song song.
D. Hình thang.

Lời giải

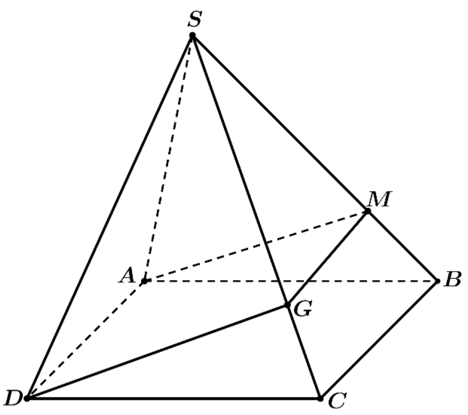
(P) là mặt phẳng qua H, song song với CD và SB nên (P) cắt $(ABCD)$ theo giao tuyến qua H song song CD cắt BC, AD lần lượt tại F, E; (P) cắt (SBC) theo giao tuyến $FI // SB$ ($I \in SC$); (P) cắt (SCD) theo giao tuyến $JI // CD$ ($J \in SD$).

Khi đó thiết diện tạo bởi (P) và hình chóp $S.ABCD$ là hình thang vì $JI // FE$, $FI // SB$, $JE // SA$ nên FI không song song với JE.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB. Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình thang. **B.** Hình chữ nhật. **C.** Hình bình hành. **D.** Tam giác.

Lời giải

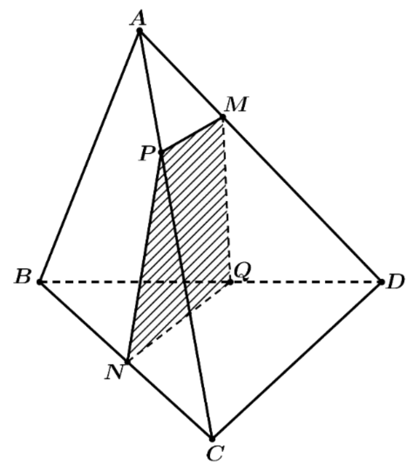


Do $BC // AD$ nên mặt phẳng (ADM) và (SBC) có giao tuyến là đường thẳng MG song song với BC nên thiết diện là hình thang $AMGD$.

Câu 12: Cho tứ diện $ABCD$. Trên các cạnh AD, BC theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho $\frac{MA}{AD} = \frac{NC}{CB} = \frac{1}{3}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD. Khi đó thiết diện của tứ diện $ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là:

A. một tam giác.
B. một hình bình hành.
C. một hình thang với đáy lớn gấp 2 lần đáy nhỏ.
D. một hình thang với đáy lớn gấp 3 lần đáy nhỏ.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ACD) từ M kẻ $MP // CD$ $(P \in AC)$.

Trong mặt phẳng (BCD) từ M kẻ $NQ // CD$ $(Q \in BD)$.

Khi đó ta có $MPNQ$ là thiết diện của mặt phẳng (P) và tứ diện $ABCD$.

Ta có $\begin{cases} MP // CD \\ MP = \dfrac{1}{3}CD \end{cases}$; $\begin{cases} NQ // CD \\ NQ = \dfrac{2}{3}CD \end{cases}$ nên ta suy ra $\begin{cases} NQ // MP \\ MP = \dfrac{1}{2}NQ \end{cases}$.

Vậy $MPNQ$ là hình thang có đáy lớn bằng hai lần đáy nhỏ.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm AB. Mặt phẳng $(IB'D')$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình thang. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Tam giác

Lời giải

Ta có $(IB'D')$ và $ABCD$ có I là một điểm chung.

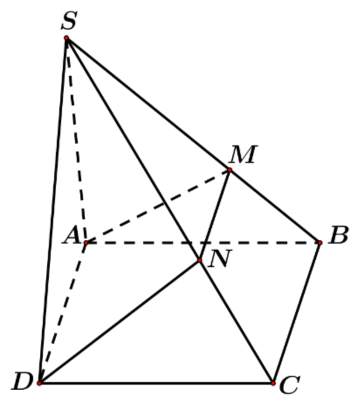
$$\left.\begin{array}{l} B'D' \subset (IBD) \\ BD \subset (ABCD) \\ B'D' // BD \end{array}\right\} \Rightarrow (IBD) \cap (ABCD) = IJ // BD \ (J \in AD)$$

Thiết diện là hình thang $IJD'B'$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. M là một điểm thuộc đoạn SB (M khác S và B). Mặt phẳng (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình bình hành. **B.** Tam giác. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình thang.

Lờigiải



Ta có M là một điểm thuộc đoạn SB với M khác S và B.

Suy ra $\begin{cases} M \in (ADM) \cap (SBC) \\ AD \subset (ADM) \\ BC \subset (SBC) \\ AD // BC \end{cases} \Rightarrow (ADM) \cap (SBC) = Mx // BC // AD$.

Gọi $N = Mx \cap SC$ thì (ADM) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $AMND$.

Vì $MN // AD$ và MN với AD không bằng nhau nên tứ giác $AMND$ là hình thang.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MA}=3\overrightarrow{MB}$. Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD. Mệnh đề nào sau đây đúng?

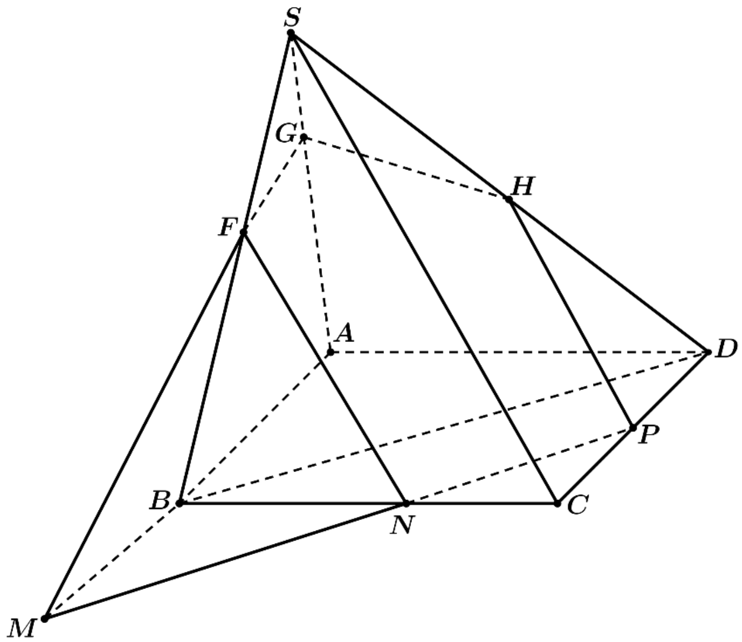
A. (P) không cắt hình chóp.

B. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tứ giác.

C. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một tam giác.

D. (P) cắt hình chóp theo thiết diện là một ngũ giác.

Lời giải



Mặt phẳng (P) qua M và song song với hai đường thẳng SC, BD

$(P)\cap(ABCD)=Mx\,/\!/\,BD, Mx\cap BC=N, Mx\cap CD=P.$

$(P)\cap(SBC)=Ny\,/\!/\,SC, Ny\cap SB=F.$

$(P)\cap(SCD)=Pt\,/\!/\,SC, Pt\cap SD=H.$

Trong $(SAB): MF\cap SA=G$.

$(P)\cap(ABCD)=NP$; $(P)\cap(SCD)=PH$; $(P)\cap(SAD)=HG.$

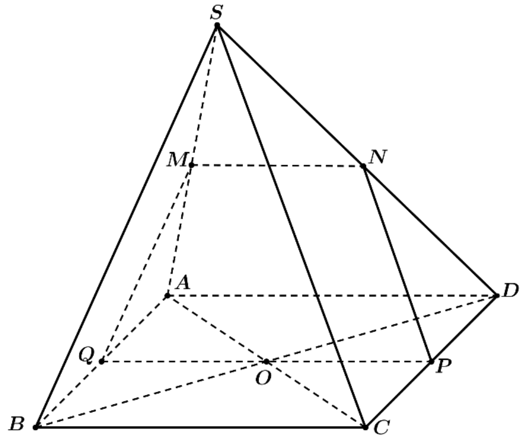
$(P)\cap(SAB)=GF$; $(P)\cap(SBC)=FN.$

Vậy (P) cắt hình chóp theo thiết diện là ngũ giác $NPHGF$.

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, M là trung điểm SA.Gọi (α) là mặt phẳng đi qua M, song song với SC và AD. Thiết diện của (α) với hình chóp $S.ABCD$ là hình gì?

A. Hình thang. **B.** Hình thang cân. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình bình hành.

Lời giải



$\begin{cases} M \in (\alpha) \cap (SAD) \\ (\alpha)//AD; AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = MN//AD(N \in SD) \quad (1)$.

$\begin{cases} N \in (\alpha) \cap (SCD) \\ (\alpha)//SC; SC \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = NP//SC(P \in CD)$.

$\begin{cases} P \in (\alpha) \cap (ABCD) \\ (\alpha)//AD; AD \subset (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = PQ//AD(Q \in AB) \ (2)$.

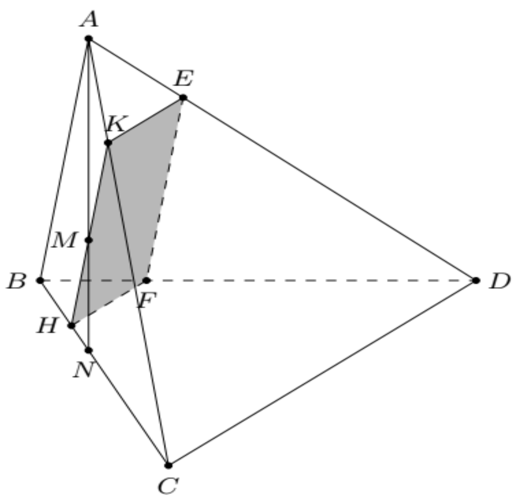
$(\alpha) \cap (SAB) = MQ$

Từ (1) và (2) suy ra $MN//PQ//AD \Rightarrow$ thiết diện $MNPQ$ là hình thang.

Câu 17: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M nằm trong tam giác ABC. Mặt phẳng (P) đi qua M và song song với các đường thẳng AB và CD. Xác định thiết diện của (P) với tứ diện $ABCD$.

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình chữ nhật. **D.** Hình ngũ giác.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) gọi $N = AM \cap BC$.

Mặt phẳng (ABC) chứa đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ABC) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với AB.

Qua M kẻ $HK // AB,(H \in BC, K \in AC)$ thì HK là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABC).

Mặt phẳng (ACD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (ACD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD.

Qua K kẻ $KE // CD,(E \in AD)$ thì KE là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ACD)

Mặt phẳng (BCD) chứa đường thẳng CD song song với mặt phẳng (P) nên mặt phẳng (BCD) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến song song với CD.

Qua H kẻ $HF // CD,(F \in BD)$ thì HF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (BCD)

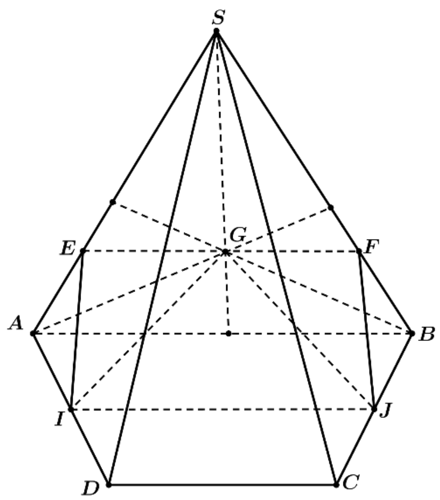
Khi đó EF là giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (ABD).

Tứ giác $KEFH$ có $KE // HF$ (vì cùng song song với CD) và $HK // FE$ (vì cùng song song với AB) nên nó là hình bình hành.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC và G là trọng tâm tam giác SAB. Biết thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (IJG) là hình bình hành. Hỏi khẳng định nào sao đây đúng?

A. $AB = 3CD$. **B.** $AB = \frac{1}{3}CD$. **C.** $AB = \frac{3}{2}CD$. **D.** $AB = \frac{2}{3}CD$.

Lời giải



Từ giả thiết suy ra $IJ // AB // CD$ và $IJ = \frac{AB + CD}{2}$.

Xét 2 mặt phẳng $(IJG),(SAB)$ có G là điểm chung nên giao tuyến của chúng là đường thẳng EF đi qua G và $EF // AB // CD // IJ$ với $E \in SA$, $F \in SB$.

Nối các đoạn thẳng EI, FJ ta được thiết diện là tứ giác $EFJI$, là hình thang vì $EF // IJ$.

Vì G là trọng tâm của tam giác SAB và $EF // AB$ nên theo định lí Ta lét ta có: $EF = \frac{2}{3}AB$

Nên để thiết diện là hình bình hành ta cần: $EF = IJ \Leftrightarrow \frac{AB + CD}{2} = \frac{2AB}{3} \Leftrightarrow AB = 3CD$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O, I là trung điểm cạnh SC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

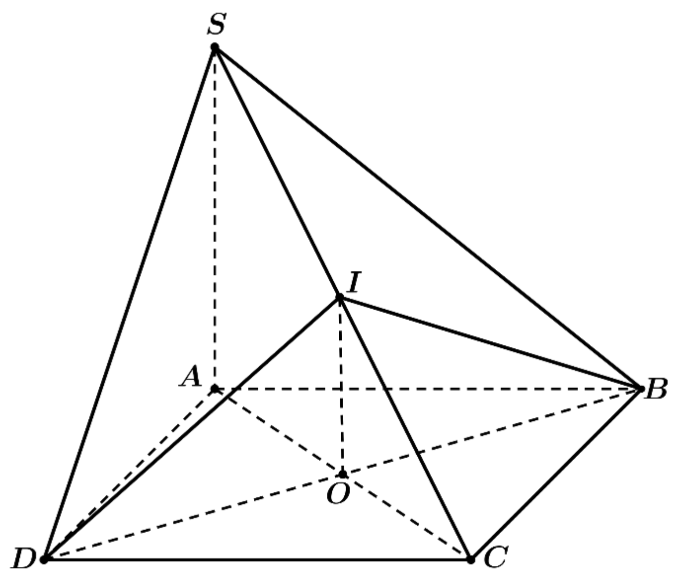
a) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAD).

b) Mặt phẳng (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là một tứ giác.

c) Đường thẳng IO song song với mặt phẳng (SAB).

d) Giao tuyến của hai mặt phẳng (IBD) và (SAC) là IO.

Lời giải



a) Đúng: $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAD)$.

b) Sai: (IBD) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tam giác IBD.

c) Đúng: $IO \parallel SA \Rightarrow IO \parallel (SAB)$.

d) Đúng: $(IBD) \cap (SAC) = IO$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$. Điểm G là trọng tâm tam giác BCD. Mặt phẳng (α) qua G và song song với AB và CD. Đồng thời (α) cắt trung tuyến AM của tam giác ACD tại K. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

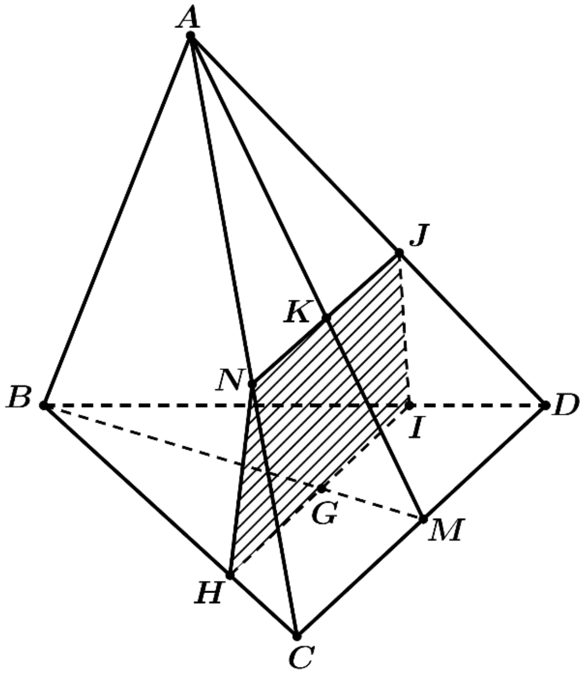
a) (α) cắt tứ diện $ABCD$ theo thiết diện là một hình tam giác.

b) $\dfrac{BI}{BC} = \dfrac{2}{3}$.

c) $AK = \dfrac{1}{3} AM$.

d) Giao tuyến của (α) và (ABD) cắt CD.

Lời giải



a) Sai: Xác định thiết diện: (α) qua G song song với $CD \Rightarrow (\alpha)\cap(BCD) = HI$

Tương tự ta được $(\alpha)\cap(ABD) = IJ\,(JI \,/\!/\, AB)$

$(\alpha)\cap(ACD) = JN\,(JN \,/\!/\, CD)$; $(\alpha)\cap(ABC) = HN$ nên (α) là một tứ giác

b) Đúng: Vì G là trọng tâm tam giác BCD mà $IG \,/\!/\, CD$ nên $\frac{BG}{BM} = \frac{BI}{BC} = \frac{2}{3}$

Mặt khác IJ song song AB nên $\frac{BI}{BC} = \frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3}$

c) Sai: Lại có JK song song DM nên $\frac{AK}{AM} = \frac{AJ}{AD} = \frac{2}{3}$ nên $AK = \frac{2}{3}AM$

d) Sai: Giao tuyến của (α) và (ABD) không cắt CD.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$. Giả sử M thuộc đoạn thẳng BC. Mặt phẳng (α) qua M song song với AB và CD. Khi đó:

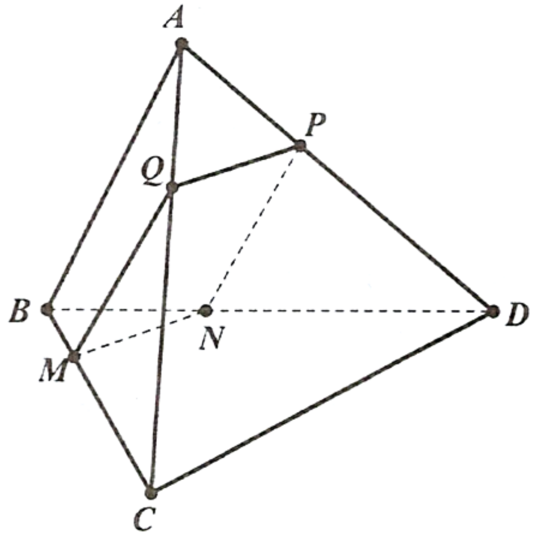
a) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB

b) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD

c) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB

d) Hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình thang

Lời giải



a) Đúng: Vì $(\alpha) // AB$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (ABC) là đường thẳng đi qua M và song song với AB và cắt AC tại Q.

b) Đúng: Vì $(\alpha) // CD$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (BCD) là đường thẳng đi qua M và song song với CD và cắt BD tại N.

c) Đúng: Vì $(\alpha) // AB$ nên giao tuyến của mặt phẳng (α).với mặt phẳng (ABD) là đường thẳng đi qua N và song song với AB và cắt AD tại P.

Ta có $MN // PQ // CD, MQ // PN // AB$.

d) Sai: Vậy hình tạo bởi các giao tuyến của mặt phẳng (α) với các mặt của tứ diện (ta gọi là thiết diện) là hình bình hành $MNPQ$.

Câu 4: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng 2 và M là một điểm thuộc cạnh SA sao cho $\frac{SM}{SA} = \frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

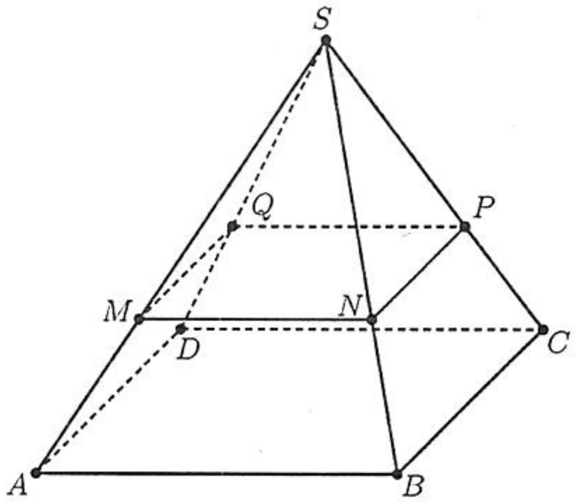
a) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAB) là đường thẳng đi qua M và song song với AB

b) Giao tuyến của mặt phẳng (α) với mặt phẳng (SAD) là đường thẳng đi qua M và song song với SD

c) $\frac{SM}{SA} = \frac{1}{3}$

d) Mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt các mặt của hình chóp theo hình là một tứ giác có diện tích bằng $\frac{16}{9}$.

Lời giải



a) Đúng: Vì $\begin{cases} M \in (SAB) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel AB, AB \subset (SAB) \end{cases} \Rightarrow (SAB) \cap (\alpha) = MN$ với $MN \parallel AB, N \in SB$

b) Sai: Mặt khác: $\begin{cases} M \in (SAD) \cap (\alpha) \\ (\alpha) // AD, AD \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (\alpha) = MQ$ với $MQ \parallel AD, Q \in SD$

Vì $BC \parallel AD \parallel MQ$ và $BC \not\subset (\alpha), MQ \subset (\alpha)$ nên $BC \parallel (\alpha)$.

Khi đó, ta có: $\begin{cases} N \in (SBC) \cap (\alpha) \\ (\alpha) \parallel BC, BC \subset (SBC) \end{cases} \Rightarrow (SBC) \cap (\alpha) = NP$ (với $NP \parallel BC, P \in SC$).

Nối các đỉnh M, N, P, Q ta được một tứ giác.

c) Sai: Ta có: $MN \parallel AB, MQ \parallel AD, NP \parallel BC, PQ \parallel CD$ nên theo định lí Thales, ta có:

$\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{SQ}{SD} = \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{MQ}{AD} = \frac{2}{3}$.

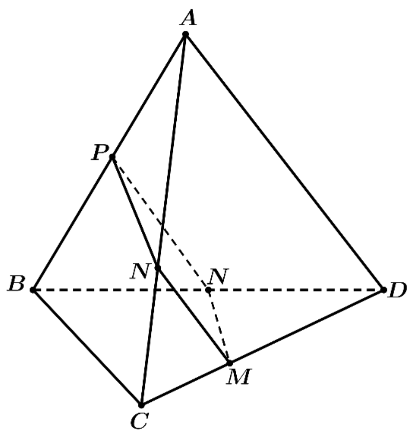
Suy ra $MN = NP = PQ = MQ = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}$ (đáy hình của chóp là hình vuông cạnh 2).

d) Đúng: Dễ thấy $MNPQ$ là một hình vuông có cạnh bằng $\frac{4}{3}$ nên có diện tích bằng $\frac{16}{9}$ (đơn vị diện tích).

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho tứ diện $ABCD$ có $AD = 9\,\text{cm}$, $CB = 6\,\text{cm}$ và M là điểm bất kì trên cạnh CD. Mặt phẳng (α) là mặt phẳng qua M và song song với $AD,\ BC$. Nếu thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng (α) là hình thoi thì cạnh của hình thoi đó bằng bao nhiêu?

Lời giải



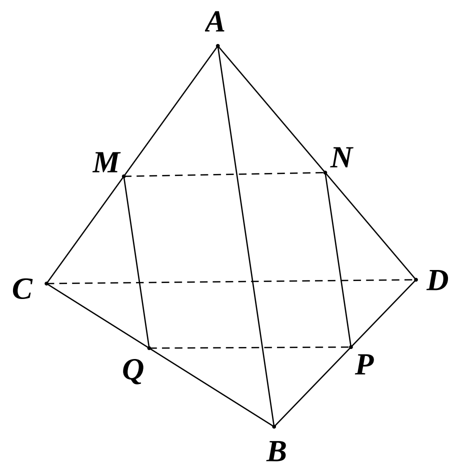
Thiết diện là hình bình hành $MNPQ$.

Ta có $\frac{MN}{BC} = \frac{DN}{BD} \Leftrightarrow \frac{MN}{6} = \frac{DN}{BD}$ và $\frac{PN}{AD} = \frac{BN}{BD} \Leftrightarrow \frac{PN}{9} = \frac{BN}{BD}$ suy ra $\frac{MN}{6} + \frac{PN}{9} = 1$.

Khi thiết diện là hình thoi thì $MN = PN$ nên $\frac{MN}{9} + \frac{MN}{6} = 1 \Leftrightarrow MN = \frac{18}{5} = 3,6$

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = 6, CD = 8$. Cắt tứ diện bởi một mặt phẳng song song với AB, CD để thiết diện thu được là một hình thoi. Cạnh của hình thoi đó bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Giả sử một mặt phẳng song song với AB, CD cắt tứ diện $ABCD$ theo một thiết diện là hình thoi $MNPQ$ như hình vẽ trên. Khi đó ta có $\begin{cases} MQ \parallel NP \parallel AB \\ MN \parallel CD \parallel PQ \\ MQ = PQ \end{cases}$

Theo định lí Talet ta có: $\dfrac{CQ}{CB}=\dfrac{CM}{CA}=\dfrac{MQ}{AB}=k_1 \Rightarrow MQ=k_1.AB=6k_1$

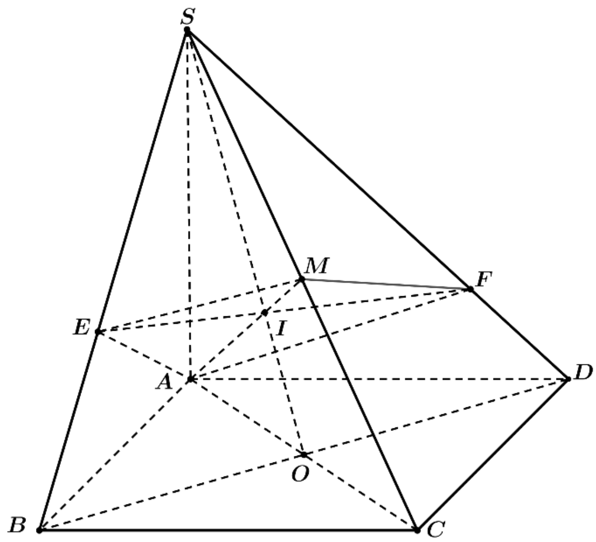
$\dfrac{BQ}{BC}=\dfrac{BP}{BD}=\dfrac{PQ}{CD}=k_2 \Rightarrow PQ=k_2.CD=8k_2$

Ta có $k_1+k_2=\dfrac{CQ}{CB}+\dfrac{BQ}{BC}=1\ (*)$ và $MP=PQ \Rightarrow 6k_1=8k_2\ (**)$

Từ $(*)$ và $(**)$ suy ra $k_1=\dfrac{4}{7}, k_2=\dfrac{3}{7} \Rightarrow MQ=6.\dfrac{4}{7}=\dfrac{24}{7}=3,42$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với mặt đáy, $ABCD$ là hình vuông cạnh $a\sqrt{2}$, $SA=2a$. Gọi M là trung điểm cạnh SC, (α) là mặt phẳng đi qua A, M và song song với đường thẳng BD. Diện tích thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\dfrac{a^2m\sqrt{m}}{n}$ với $m,n\in\mathbb{Z}$. Tính $m+2n$.

Lời giải



Gọi $O=AC\cap BD$, $I=SO\cap AM$. Trong mặt phẳng (SBD) qua I kẻ $EF \,//\, BD$, khi đó ta có $(AEMF)\equiv(\alpha)$ là mặt phẳng chứa AM và song song với BD. Do đó thiết diện của hình chóp bị cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $AEMF$.

Ta có: $\begin{cases} FE \,//\, BD \\ BD\perp(SAC)\end{cases} \Rightarrow FE\perp(SAC) \Rightarrow FE\perp AM$.

Mặt khác ta có: $AC=2a=SA$ nên tam giác SAC vuông cân tại A suy ra $AM=a\sqrt{2}$.

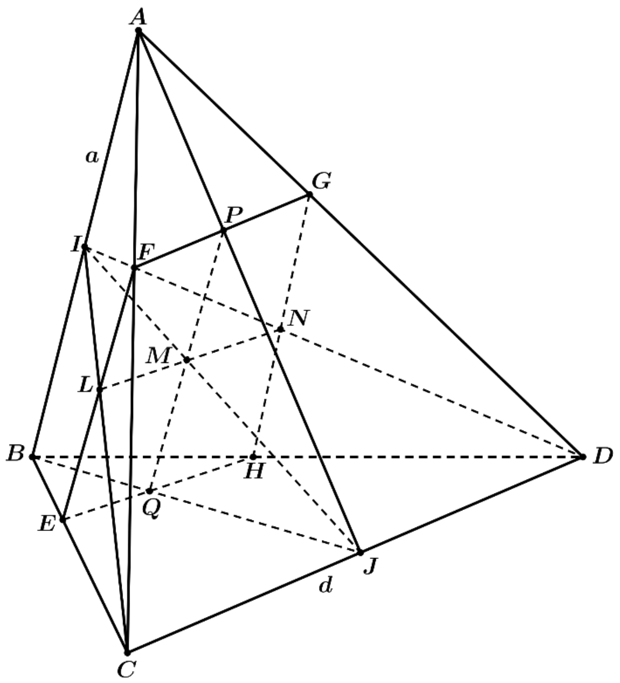
I là trọng tâm tam giác SAC, mà $EF \,//\, BD$ nên tính được $EF=\dfrac{2}{3}BD=\dfrac{4a}{3}$.

Tứ giác $AEMF$ có hai đường chéo $FE\perp AM$ nên $S_{AEMF}=\dfrac{1}{2}FE.AM=\dfrac{2a^2\sqrt{2}}{3}$.

Khi đó $m=2;n=3$ nên $m+2n=2+2.3=8$

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$ có $AB = a$, $CD = b$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB và CD, giả sử $AB \perp CD$. Mặt phẳng (α) qua M nằm trên đoạn IJ và song song với AB và CD. Biết $IM = \frac{1}{3}IJ$ thì diện tích thiết diện của tứ diện $ABCD$ với mặt phẳng (α) là $S = \frac{m}{n}.ab$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính $2n + m$

Lời giải



Ta có $\begin{cases} (\alpha) // CD \\ CD \subset (ICD) \\ M \in (\alpha) \cap (ICD) \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (ICD) là đường thẳng qua M và

song song với CD cắt IC tại L và ID tại N.

$\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (JAB) \\ M \in (\alpha) \cap (JAB) \end{cases} \Rightarrow$ giao tuyến của (α) với (JAB) là đường thẳng qua M và song song

với AB cắt JA tại P và JB tại Q.

Ta có $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABC) \\ L \in (\alpha) \cap (ABC) \end{cases} \Rightarrow EF // AB$

Tương tự $\begin{cases} (\alpha) // AB \\ AB \subset (ABD) \\ N \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases} \Rightarrow HG // AB \Rightarrow EF // HG // AB$

Ta có $\begin{cases}(\alpha)//CD \\ CD\subset(ACD) \\ P\in(\alpha)\cap(ACD)\end{cases}\Rightarrow FG//CD$

Tương tự $\begin{cases}(\alpha)//CD \\ CD\subset(BCD) \\ Q\in(\alpha)\cap(BCD)\end{cases}\Rightarrow EH//CD\Rightarrow FG//EH//CD$.

Suy ra $EFGH$ là hình bình hành. Mà $AB\perp CD$ nên $EFGH$ là hình chữ nhật.

Xét tam giác ICD có: $LN//CD\Rightarrow \frac{LN}{CD}=\frac{IN}{ID}$.

Xét tam giác ICD có: $MN//JD\Rightarrow \frac{IN}{ID}=\frac{IM}{IJ}$.

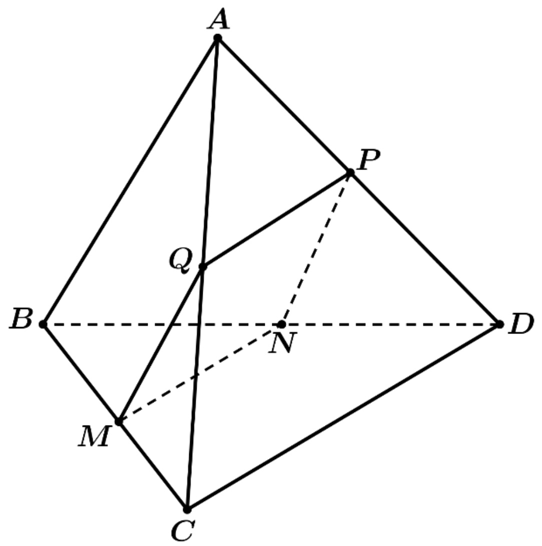
Do đó $\frac{LN}{CD}=\frac{IM}{IJ}=\frac{1}{3}\Rightarrow LN=\frac{1}{3}CD=\frac{b}{3}$.

Tương tự $\frac{PQ}{AB}=\frac{JM}{JI}=\frac{2}{3}\Rightarrow PQ=\frac{2}{3}AB=\frac{2a}{3}$.

Vậy $S_{EFGH}=PQ.LN=\frac{2ab}{9}$.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ có AB vuông góc với CD, $AB=CD=6$. M là điểm thuộc cạnh BC sao cho $MC=x.BC$ $(0<x<1)$. mp(P) song song với AB và CD lần lượt cắt BC,DB,AD,AC tại M,N,P,Q. Diện tích lớn nhất của tứ giác bằng bao nhiêu?

Lời giải



Xét tứ giác $MNPQ$ có $\begin{cases}MQ//NP//AB \\ MN//PQ//CD\end{cases}\Rightarrow MNPQ$ là hình bình hành.

Mặt khác $AB\perp CD\Rightarrow MQ\perp MN$. Do đó, $MNPQ$ là hình chữ nhật.

Vì $MQ//AB$ nên $\dfrac{MQ}{AB}=\dfrac{CM}{CB}=x\Rightarrow MQ=x.AB=6x$.

Theo giả thiết $MC=x.BC\Rightarrow BM=(1-x)BC$.

Vì $MN//CD$ nên $\dfrac{MN}{CD}=\dfrac{BM}{BC}=1-x\Rightarrow MN=(1-x).CD=6(1-x)$.

Diên tích hình chữ nhật $MNPQ$ là

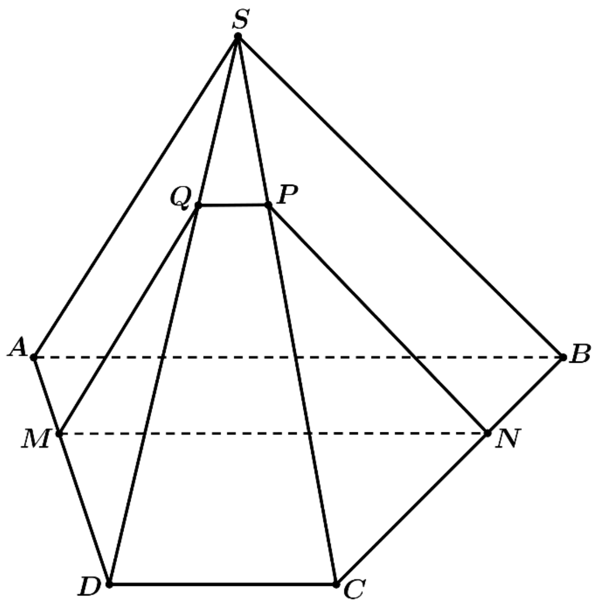
$$S_{MNPQ}=MN.MQ=6(1-x).6x=36.x.(1-x)\le 36\left(\frac{x+1-x}{2}\right)^2=9.$$

Ta có $S_{MNPQ}=9$ khi $x=1-x\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Vậy diện tích tứ giác $MNPQ$ lớn nhất bằng 9 khi M là trung điểm của BC.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang $(AB//CD)$, cạnh $AB=3a$, $AD=CD=a$. Tam giác SAB cân tại $S,SA=2a$. Mặt phẳng (P) song song với SA,AB cắt các cạnh AD,BC,SC,SD theo thứ tự tại M,N,P,Q. Đặt $AM=x(0<x<a)$. Gọi x là giá trị để tứ giác $MNPQ$ ngoại tiếp được đường tròn, bán kính đường tròn đó khi $a=6\sqrt{7}$ là bao nhiêu?

Lời giải



$(P)//SA\Rightarrow MQ//SA;(P)//AB\Rightarrow MN//AB;$

$(P)//AB\Rightarrow(P)//CD\Rightarrow PQ//CD\Rightarrow PQ//MN$

Tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

$(P)//SA;(P)//AB\Rightarrow(P)//(SAB)\Rightarrow PN//SB\Rightarrow\dfrac{PN}{SB}=\dfrac{CN}{CB}$.

$MQ // SA \Rightarrow \dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA}$.

$MN // AB \Rightarrow \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{CN}{CB} \Rightarrow \dfrac{PN}{SB} = \dfrac{QM}{SA} \Rightarrow PN = QM \Rightarrow MNPQ$ là hình thang cân.

$MQ // SA \Rightarrow \dfrac{MQ}{SA} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow MQ = 2(a-x)$

$PQ // CD \Rightarrow \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{SQ}{SD} = \dfrac{AM}{AD} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow PQ = x$

Gọi $E = MN \cap BD \Rightarrow \dfrac{ME}{AB} = \dfrac{DM}{DA} = \dfrac{a-x}{a} \Rightarrow ME = 3(a-x); \dfrac{EN}{CD} = \dfrac{BN}{BC} = \dfrac{AM}{AB} = \dfrac{x}{a} \Rightarrow EN = x$

$\Rightarrow MN = ME + EN = 3a - 2x$.

Hình thang cân $MNPQ$ có đường tròn nội tiếp $\Rightarrow MN + PQ = MQ + NP$

$\Rightarrow 3a - 2x + x = 4(a-x) \Rightarrow x = \dfrac{a}{3}$

$MN = \dfrac{7a}{3}; PQ = \dfrac{a}{3}; QM = \dfrac{4a}{3} \Rightarrow MF = \dfrac{1}{2}MN - \dfrac{1}{2}PQ = a$

$\Rightarrow QF = \sqrt{MQ^2 - MF^2} = \sqrt{\dfrac{16a^2}{9} - a^2} = \dfrac{a\sqrt{7}}{3}$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp hình thang $MNPQ$ là $R = \dfrac{1}{2}QF = \dfrac{a\sqrt{7}}{6} \xrightarrow{a=6\sqrt{7}} R = 7$

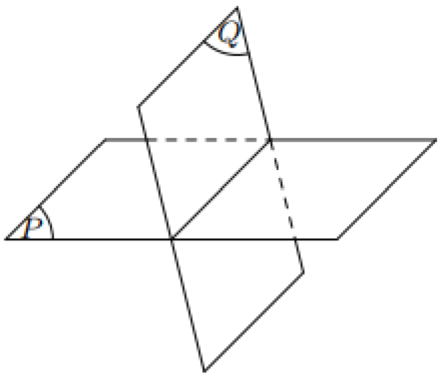
-----------------**HẾT**-----------------

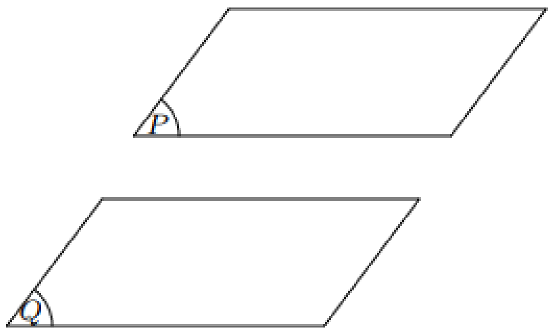
BÀI 04 HAI MẶT PHẲNG SONG SONG

A LÝ THUYẾT CẦN NHỚ

1 Hai mặt phẳng song song

Cho hai mặt phẳng phân biệt (P) và (Q). Có hai khả năng xảy ra:



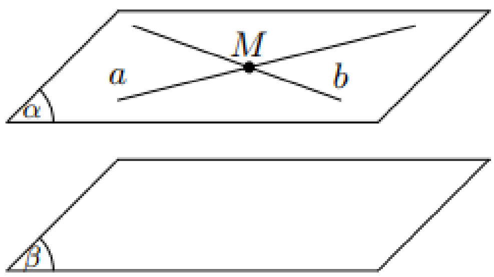


$(P),(Q)$ có một điểm chung: $(P)\cap(Q)=a$ $\quad$ $(P),(Q)$ không có điểm chung: $(P)\mathbin{/\!/}(Q)$

Định nghĩa: Hai mặt phẳng được gọi là song song nếu chúng không có điểm chung.

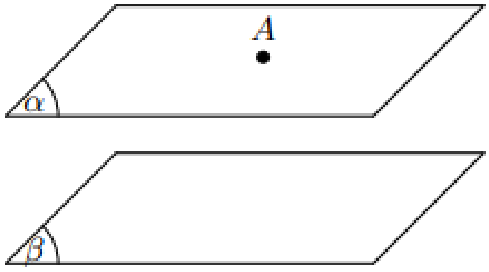
2 Điều kiện và tính chất của hai mặt phẳng song song

Tính chất 1: (Dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song). Nếu mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng cắt nhau a,b và a,b cùng song song với mặt phẳng (β) thì (α) song song với (β).



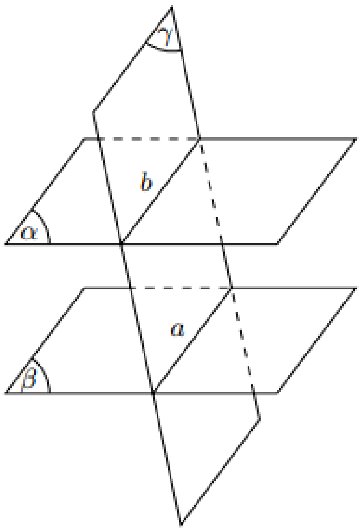
- Muốn chứng minh hai mặt phẳng song song, ta phải chứng minh có hai đuờng thẳng cắt nhau thuộc mặt phẳng này lần lượt song song với mặt phẳng kia.
- Muốn chứng minh đường thẳng $a \mathbin{/\!/} (Q)$, ta chứng minh đường thẳng a nằm trong mặt phẳng $(P)\mathbin{/\!/}(Q)$.

Tính chất 2: Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng cho trước có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

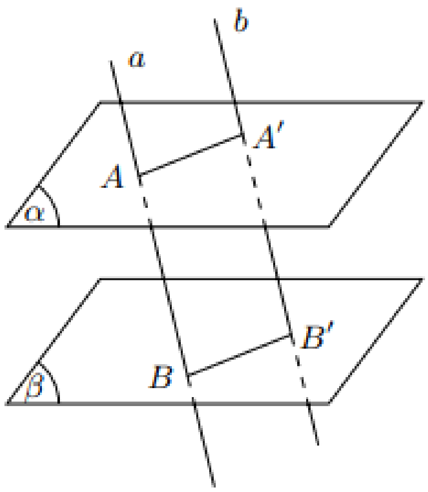


- Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì trong (α) có một đường thẳng song song với d và qua d có duy nhất một mặt phẳng song song với (α). Do đó đường thẳng d song song với (α) ta phải chứng minh d thuộc mặt phẳng (β) và có $(\alpha) \mathbin{/\!/} (\beta) \Rightarrow d \mathbin{/\!/} (\alpha)$.
- Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với mặt phẳng thứ ba thì song song với nhau.
- Cho điểm A không nằm trên mặt phẳng (α). Mọi đường thẳng đi qua A và song song với (α) đều nằm trong mặt phẳng đi qua A và song song với (α).

Tính chất 3: Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cũng cắt mặt phẳng kia và hai giao tuyến đó song song với nhau.

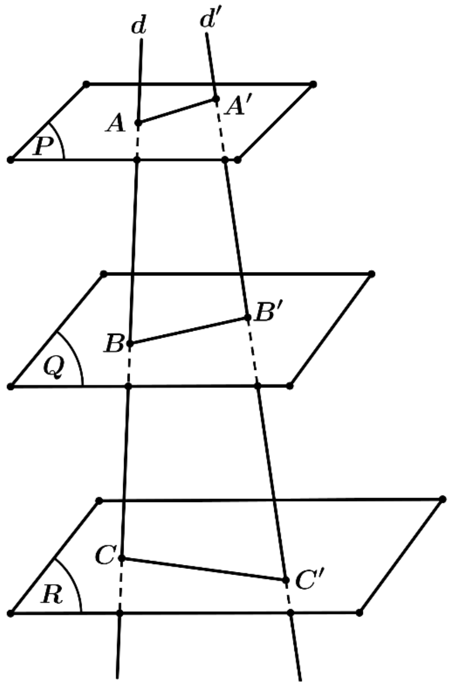


- Hai mặt phẳng song song chắn trên hai cát tuyến song song những đoạn thẳng bằng nhau.



3 Định ký Thales

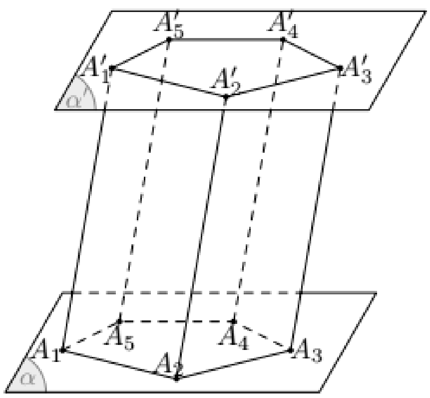
Ba mặt phẳng đôi một song song chắn trên hai cát tuyến bất kì những đoạn thẳng tương ứng tỉ lệ.



Nếu hai cát tuyến d và d' cắt ba mặt phẳng song song $(P)//(Q)//(R)$ lần lượt tại các giao điểm A,B,C và A',B',C' thì $\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{CA}{C'A'}$.

4 Hình lăng trụ và hình hộp

Định nghĩa hình lăng trụ: Trên mặt phẳng (α) cho đa giác $A_1A_2...A_n$, từ các đỉnh của đa giác dựng các đường thẳng song song cắt mặt phẳng (α') song song với (α) tại các điểm $A_1',A_2',..,A_n'$. Hình hợp bởi hai miền đa giác $A_1A_2...A_n$ và $A_1',A_2',..,A_n'$ với các hình chữ nhật $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$,.. được gọi là hình lăng trụ.

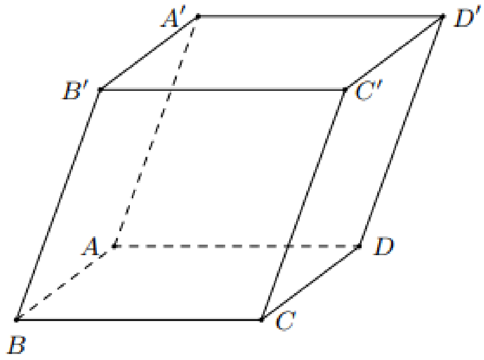


Tính chất:

- Các hình bình hành được gọi là các mặt bên, hai miền đa giác gọi là hai mặt đáy của lăng trụ.

- Hai đáy của lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trên hai mặt phẳng song song với nhau.
- Các đoạn thẳng $A_1A_1', A_2A_2', \ldots$ được gọi là các cạnh bên. Các cạnh bên của lăng trụ song song và bằng nhau.
- Ta gọi lăng trụ theo tên của đa giác đáy, tức là nếu đáy là tam giác thì gọi là lăng trụ tam giác, nếu đáy là tứ giác thì gọi là lăng trụ tứ giác.

Định nghĩa hình hộp: Hình lăng trụ tứ giác có đáy là hình bình hành được gọi là hình hộp.



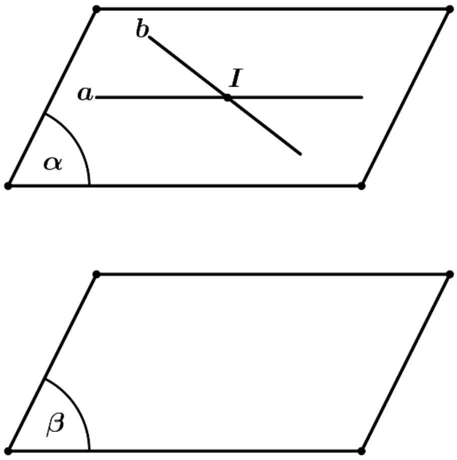
Tính chất:

- Hình hộp có sáu mặt đều là những hình bình hành.
- Hai mặt song song với nhau gọi là hai mặt đối diện, hình hộp có ba cặp mặt đối diện.
- Hai đỉnh của hình hộp được gọi là hai đỉnh đối diện nếu chúng không cùng nằm trên một mặt nào.
- Các đoạn thẳng nối hai đỉnh đối diện được gọi là các đường chéo. Bốn đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, điểm đó gọi là tâm của hình hộp.
- Hai cạnh gọi là đối nhau nếu chúng song song nhưng không cùng nằm trên một mặt của hình chóp.
- Mặt chéo của hình hộp là hình bình hành có hai cạnh là hai cạnh đối diện của hình hộp.
- Tổng bình phương các đường chéo của một hình hộp bằng tổng các bình phương của tất cả các cạnh của hình hộp đó.

B PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI TOÁN

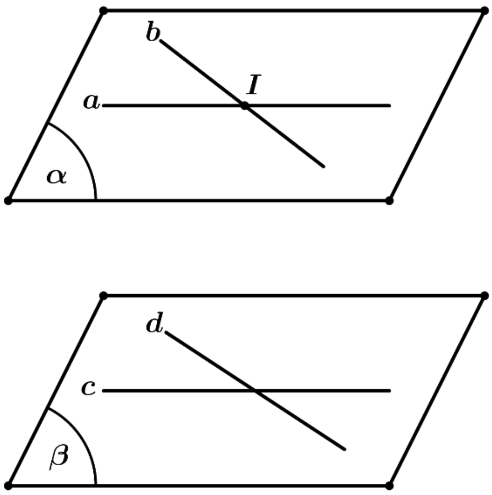
Dạng 1: Nhận biết và chứng minh hai mặt phẳng song song

Phương pháp: Để chứng minh hai mặt phẳng song song $(\alpha) /\!/ (\beta)$ ta chứng minh mặt phẳng (α) có hai đường thẳng cắt nhau và lần lượt song song với mặt phẳng (β).



Cụ thể: $\begin{cases} a /\!/ (\beta) \\ b /\!/ (\beta) \\ a, b \subset (\alpha) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) /\!/ (\beta)$

Ngoài ra, dựa vào phương pháp chứng minh đường thẳng song song với mặt phẳng, ta còn có thể chứng minh hai mặt phẳng song song như sau: chứng minh hai đường thẳng cắt nhau nằm trong mặt phẳng này, song song với hai đường thẳng (cắt nhau) nằm trong mặt phẳng kia.

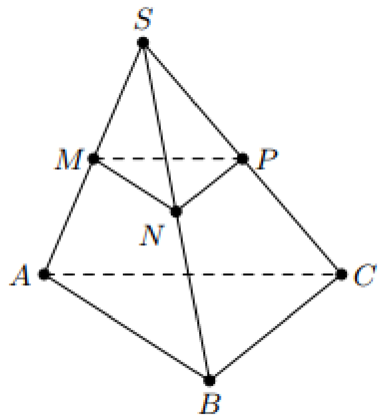


Cụ thể: $\begin{cases} a /\!/ c \\ b /\!/ d \\ a, b \subset (\alpha) \\ c, d \in (\beta) \\ a \cap b = I \end{cases} \Rightarrow (\alpha) /\!/ (\beta)$

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC. Chứng minh rằng $(MNP) // (ABC)$.

Lời giải



Nếu hai mặt phẳng $(MNP), (ABC)$ có một điểm chung thì chúng có đường thẳng chung d.

Vì $MN // AB$ nên $d // AB$ hoặc d trùng với AB.

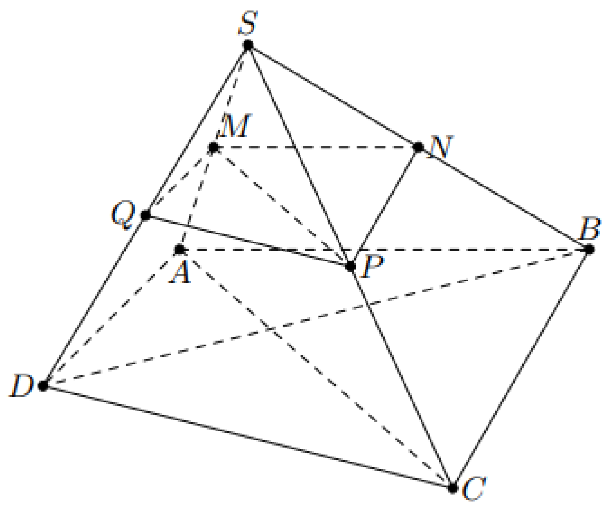
Tương tự, do $MP // AC$ nên $d // AC$ hoặc d trùng với AC mà điều này là không thể xảy ra vì AB cắt AC tại A.

Bài tập 2: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$. Lấy các điểm M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC.

a) Chứng minh rằng $(MNP) // (ABCD)$.

b) Giả sử mặt phẳng (MNP) cắt SD tại Q. Chứng minh rằng Q là trung điểm của SD.

Lời giải



a) Vì MN là đường trung bình của tam giác SAB nên $MN // AB$.

Vì $AB \subset (ABCD)$ nên $MN // (ABCD)$. Chứng minh tương tự ta có: $NP // (ABCD)$ mà MN cắt NP nên ta có: $(MNP) // (ABCD)$.

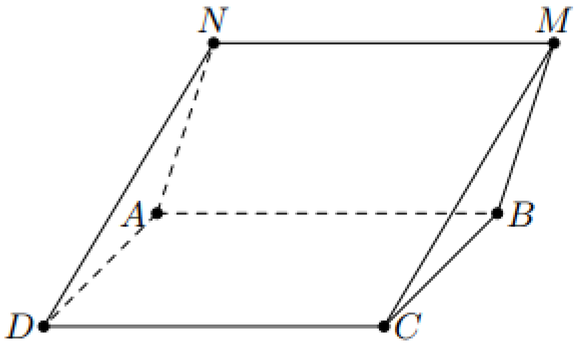
b) Vì Q là giao điểm của SD và $(MNP), M$ là điểm chung của hai mặt phẳng (SAD) và (MNP) nên MQ là giao tuyến của (MNP) và (SAD).

Do $(MNP)//(ABCD), MQ=(MNP)\cap(SAD), AD=(SAD)\cap(ABCD)$ nên ta có: $MQ // AD$.

Trong tam giác SAD, M là trung điểm của SA và $MQ // AD$ nên Q là trung điểm của SD.

Bài tập 3: Cho hai hình bình hành $ABCD, ABMN$ không cùng nằm trong một mặt phẳng. Chứng minh rằng $(ADN)//(BCM)$.

Lời giải

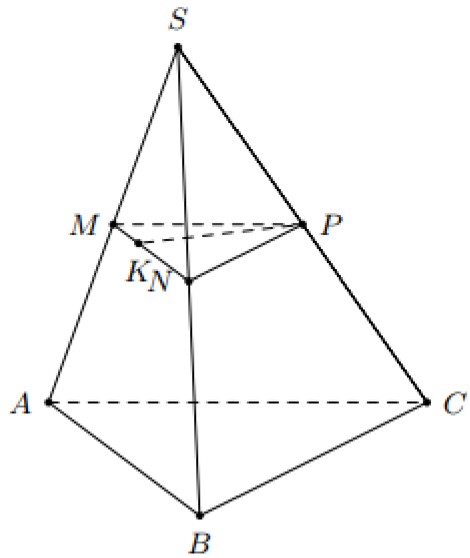


Vì $ABCD$ là hình bình hành nên $AD // BC$ mà AD không thuộc mặt phẳng (BCM) suy ra $AD // (BCM)$. Tương tự, do $ABMN$ là hình bình hành nên $AN // BM$ suy ra $AN // (BCM)$.

Mà AD, AN cắt nhau và nằm trong mặt phẳng (ADN) nên ta có $(ADN)//(BCM)$.

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh SA, SB, SC và K là điểm bất kỳ trên cạnh MN. Chứng minh rằng $(MNP)//(ABC)$. Từ đó suy ra $PK // (ABC)$.

Lời giải



Ta có MN là đường trung bình của ΔSAB nên $MN // AB$.

Khi đó $\begin{cases} MN // AB \\ AB \subset (ABC) \Rightarrow MN // (ABC) \\ MN \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow MN // (ABC)$

Tương tự $\begin{cases} NP // BC \\ BC \subset (ABC) \\ NP \not\subset (ABC) \end{cases} \Rightarrow NP // (ABC)$.

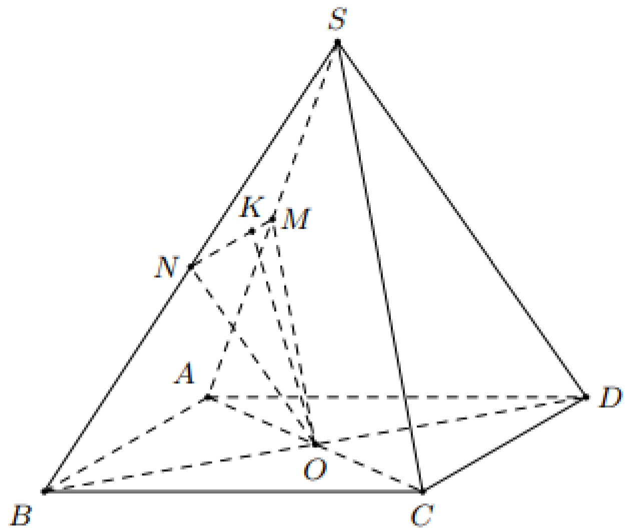
Vậy $\begin{cases} MN // (ABC) \\ NP // (ABC) \\ MN, NP \subset (MNP) \\ MN \cap NP = N \end{cases} \Rightarrow (MNP) // (ABC)$. Mặt khác do $PK \subset (MNP)$ nên $PK // (ABC)$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SB.

a) Chứng minh $(OMN) // (SCD)$.

b) Gọi K là điểm bất kỳ trên MN. Chứng minh $OK // (SCD)$.

Lời giải



a) Chứng minh $(OMN) // (SCD)$.

Ta có OM là đường trung bình của ΔSAC nên $OM // SC$.

Khi đó $\begin{cases} OM // SC \\ SC \subset (SCD) \\ OM \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow OM // (SCD)$. Tương tự $\begin{cases} ON // SD \\ SD \subset (SCD) \\ ON \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow ON // (SCD)$.

Vậy $\begin{cases} OM, ON // (SCD) \\ OM, ON \subset (OMN) \\ OM \cap ON = O \end{cases} \Rightarrow (OMN) // (SCD)$.

b) Chứng minh $OK // (SCD)$. Ta có $\begin{cases} (OMN) // (SCD) \\ OK \subset (OMN) \end{cases} \Rightarrow OK // (SCD)$.

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn AD gấp đôi đáy bé BC. Gọi $O = AC \cap BD, M$ thuộc cạnh SA sao cho $AM = 2MS$ và N thuộc cạnh SB sao cho $2BN = NS$

a) Chứng minh rằng $(OMN) // (SCD)$.

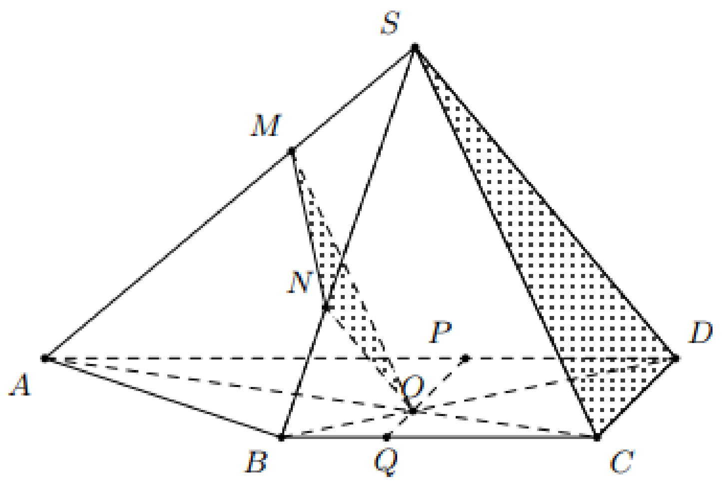
b) Gọi $d = (OMN) \cap (ABCD), P = d \cap AD, Q = d \cap BC$. Chứng minh tứ giác $PQCD$ là hình bình hành.

Lời giải

a) Chứng minh rằng $(OMN)\,//\,(SCD)$.

Ta có $AM = 2MS \Rightarrow \dfrac{AM}{AS} = \dfrac{2}{3}$ và $2BN = NS \Rightarrow \dfrac{BN}{BS} = \dfrac{1}{3}$.

Xét ΔOAB và ΔOBC có $\begin{cases} AD\,//\,BC \\ AD = 2BC \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = 2OC \\ OD = 2OB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{2}{3} \\ \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$



Trong tam giác SAC có $\dfrac{AM}{AS} = \dfrac{AO}{AC} = \dfrac{2}{3}$ nên $OM\,//\,SC$.

Trong tam giác SBD có $\dfrac{BN}{BS} = \dfrac{BO}{BD} = \dfrac{1}{3}$ nên $ON\,//\,SD$.

Như vậy $\begin{cases} OM\,//\,SC \\ ON\,//\,SD \\ OM, ON \subset (OMN) \Rightarrow (OMN)\,//\,(SCD) \\ SC, SD \subset (SCD) \\ OM \cap ON = O \end{cases}$

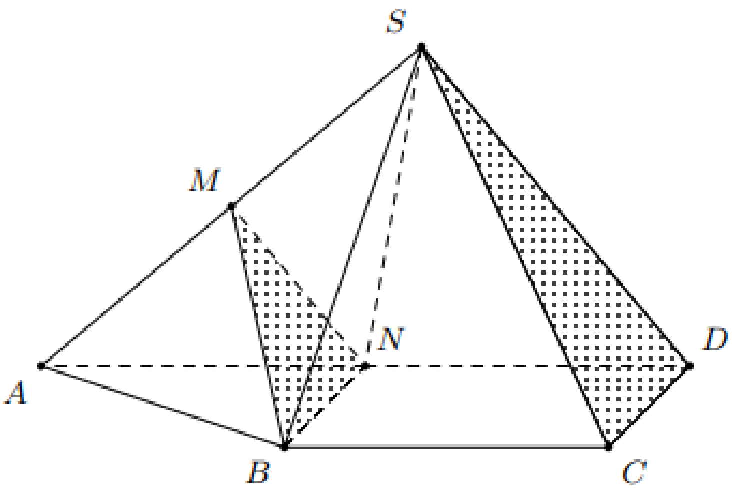
b) Chứng minh tứ giác $PQCD$ là hình bình hành.

Ta có $\begin{cases} (OMN)\,//\,(SCD) \\ (ABCD) \cap (SCD) = CD \Rightarrow d\,//\,CD, \text{ trong đó } d \text{ đi qua } O \in (ABCD) \cap (OMN). \\ (ABCD) \cap (OMN) = d \end{cases}$

Xét tứ giác $PQCD$ có $\begin{cases} PQ\,//\,CD \\ PD\,//\,CQ \end{cases} \Rightarrow PQCD$ là hình bình hành.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình thang mà $AD \parallel BC$ và $AD = 2BC$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và AD. Chứng minh: $(BMN) \parallel (SCD)$ từ đó suy ra $BM \parallel (SCD)$

Lời giải



Ta có: M, N lần lượt là trung điểm của SA và $AD \Rightarrow MN$ là đường trung bình của $\Delta SAD \Rightarrow MN \parallel SD$. Ta có $\begin{cases} MN \parallel SD \\ SD \subset (SCD) \\ MN \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MN \parallel (SCD)$

Mà có $2ND = AD = 2BC$ và $ND // BC$ nên suy ra $BNDC$ là hình bình hành $\Rightarrow BN \parallel CD$.

Ta có: $\begin{cases} NB \parallel CD \\ CD \subset (SCD) \\ NB \not\subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow NB \parallel (SCD)$. Khi đó: $\begin{cases} MN, NB \parallel (SCD) \\ MN, NB \subset (BMN) \\ MN \cap NB = N \end{cases} \Rightarrow (BMN) \parallel (SCD)$.

Mặt khác do $BM \subset (BMN)$ nên $BM \parallel (SCD)$.

Bài tập 8: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi M, N, M' lần lượt là trung điểm các cạnh AB, AC và $A'B'$

a) Chứng minh $(MNM') \parallel (BCC'B')$.

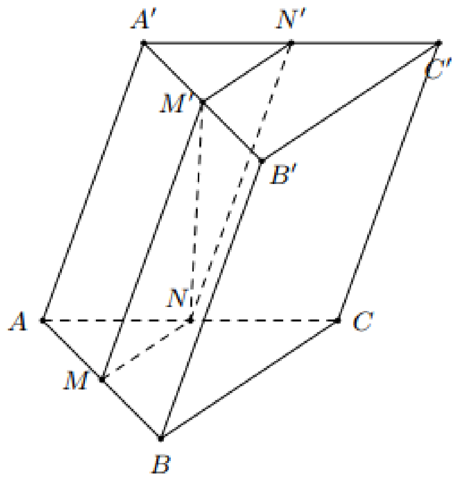
b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM'). Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?

Lời giải

a) Chứng minh $(MNM') \parallel (BCC'B')$.

Ta có: $\begin{cases} MM' \parallel BB' \\ MN \parallel BC \\ MM', MN \subset (MNM') \\ BB', BC \subset (BB'C'C) \\ MN \cap MM' = M \end{cases} \Rightarrow (MNM') \parallel (BCC'B')$

b) Tìm giao điểm N' của $A'C'$ và (MNM'). Tứ giác $MNN'M'$ là hình gì?



Ta có $\begin{cases}(MNM')\,//\,(BCC'B')\\(A'B'C')\cap(BCC'B')=B'C'\\M'\in(A'B'C')\cap(MNM')\end{cases}$ suy ra $(A'B'C')\cap(MNM')=x'M'x\,//\,B'C'$.

Trong $(A'B'C')$, gọi $N'=A'C'\cap x'M'x\Rightarrow\begin{cases}N'\in A'C'\\N'\in x'M'x\subset(MNM')\end{cases}\Rightarrow N'=A'C'\cap(MNM')$.

Suy ra $M'N'$ là đường trung bình tam giác $A'B'C'\Rightarrow M'N'=\frac{1}{2}B'C'$.

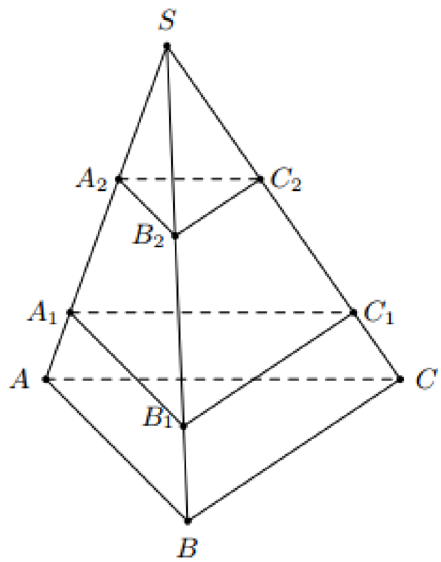
Mà MN là đường trung bình tam giác ABC nên $MN\,//\,BC$ và $MN=\frac{1}{2}BC$.

Lại do $BC\,//\,B'C'$ và $BC=B'C'$ nên $MN\,//\,M'N'$ và $MN=M'N'$.

Vậy tứ giác $MNN'M'$ là hình bình hành.

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABC$, trên cạnh SA lấy hai điểm A_1,A_2 sao cho $A_2A_1=2A_1A$. Gọi (P) và (Q) là hai mặt phẳng lần lượt đi qua A_1,A_2, đồng thời cùng song song với (ABC). Mặt phẳng (P) cắt các cạnh SB, SC lần lượt tại B_1,C_1; mặt phẳng (Q) lần lượt cắt các cạnh SB,SC lần lượt tại B_2,C_2. Chứng minh $B_2B_1=2B_1B$ và $C_2C_1=2C_1C$.

Lời giải



Áp dụng định lý Thales cho ba mặt phẳng đôi một song song $(P),(Q),(ABC)$ và hai cát tuyến SA, SB ta được $\dfrac{A_2A_1}{A_1A}=\dfrac{B_2B_1}{B_1B}$

Vì $\dfrac{A_2A_1}{A_1A}=2$ (do $A_2A_1=2A_1A$) nên $\dfrac{B_2B1}{B_1B}=2 \Rightarrow B_2B_1=2B_1B$.

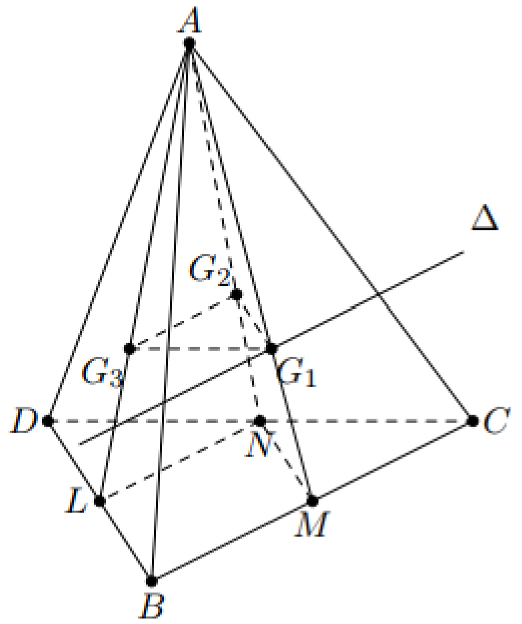
Chứng minh tương tự ta được $C_2C_1=2C_1C$.

Bài tập 10: Cho tứ diện $ABCD$. Lấy G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB

a) Chứng minh rằng $(G_1G_2G_3) /\!/ (BCD)$.

b) Xác định giao tuyến của mặt phẳng $(G_1G_2G_3)$ với mặt phẳng (ABC).

Lời giải



a) Gọi M, N, L lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CD, BD.

Ta có $\dfrac{AG_1}{AM}=\dfrac{AG_2}{AN}=\dfrac{AG_3}{AL}=\dfrac{2}{3}$ suy ra $\begin{cases} G_1G_2 /\!/ MN \\ G_2G_3 /\!/ NL \end{cases}$

Mà $\begin{cases} MN \subset (BCD) \\ NL \subset (BCD) \end{cases}$ nên $\begin{cases} G_1G_2 /\!/ (BCD) \\ G_2G_3 /\!/ (BCD) \end{cases}$ suy ra $(G_1G_2G_3)//(BCD)$.

b) Từ $(G_1G_2G_3) /\!/ (BCD)$ suy ra $BC /\!/ (G_1G_2G_3)$.

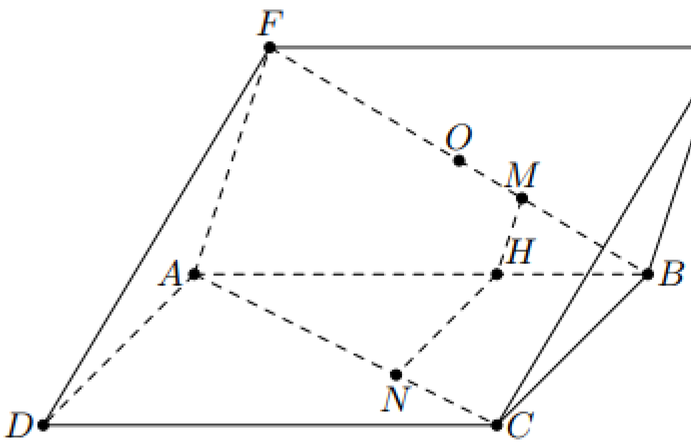
Ta có $\begin{cases} G_1 \in (ABC) \cap (G_1G_2G_3) \\ BC \subset (ABC) \\ BC // (G_1G_2G_3) \end{cases} \Rightarrow (ABC) \cap (G_1G_2G_3) = \Delta /\!/ BC$ với Δ qua G_1.

Bài tập 11: Cho hai hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Chứng minh rằng $(AFD) // (BEC)$.

b) Gọi M là trọng tâm của tam giác ABE. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (AFD). Lấy N là giao điểm của (P) và AC. Tính $\dfrac{AN}{NC}$.

Lời giải



a) Ta có $AD // BC$, suy ra $AD // (BCE)$. Tương tự $AF // (BCE)$.

Khi đó $(ADF) // (BCE)$.

b) Ta có $(P) // (AFD)$ nên $(P) \cap (ABF) = MH$ với $M \in AB$ và $MH // AF$.

Vì M là trọng tâm của tam giác ABE nên $\dfrac{BM}{BO} = \dfrac{2}{3}$ với O là tâm hình bình hành $ABEF$.

Vì $ABEF$ là hình bình hành nên $\dfrac{BO}{BF} = \dfrac{1}{2}$. Suy ra $\dfrac{BM}{BD} = \dfrac{1}{3}$. Do đó $\dfrac{BM}{MF} = \dfrac{1}{2}$.

Khi đó $\dfrac{BH}{AH} = \dfrac{1}{2}$ (vì $AF // MH$) mà $(P) // (AFD)$ nên $(P) \cap (ABC) = NH$ với $N \in AC$ và $NH // AD$.

Do đó $\dfrac{AN}{NC} = \dfrac{AH}{BH} = 2$.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng?

A. Qua một điểm có vô số mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.

B. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có vô số mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

C. Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với mặt phẳng đã cho.

D. Qua một điểm tồn tại duy nhất một mặt phẳng song song với một mặt phẳng cho trước.

Lời giải

Qua một điểm nằm ngoài một mặt phẳng, có một và chỉ một mặt phẳng song song với mặt phẳng đó.

Câu 2: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β), a là đường thẳng bất kì. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau:

A. Nếu a cắt mp(α) thì a cắt mp(β).

B. Nếu $a \subset (\alpha)$ thì a song song với mp(β).

C. Nếu $a \subset (\beta)$ thì a song song với mp(α).

D. Nếu a song song với mp(α) thì a song song với mp(β).

Lời giải

Nếu a song song với mp(α) thì a song song với mp(β).

Câu 3: Cho một đường thẳng a song song với mặt phẳng (P). Có bao nhiêu mặt phẳng chứa a và song song với (P).

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Có duy nhất một mặt phẳng chứa a và song song với (P).

Câu 4: Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau đây:

A. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với mọi đường thẳng nằm trong (β).

C. Nếu hai đường thẳng song song với nhau lần lượt nằm trong hai mặt phẳng phân biệt (α) và (β) thì (α) và (β) song song với nhau.

D. Qua một điểm nằm ngoài mặt phẳng cho trước có một và chỉ một đường thẳng song song với mặt phẳng cho trước đó.

Lời giải

Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) đều song song với (β).

Câu 5: Cho hai mặt phẳng song song (α) và (β), đường thẳng $a//(\alpha)$. Có bao nhiêu vị trí tương đối của a và (β)?

A. 1. **<u>B</u>.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Vì $\begin{cases}(\alpha)//(\beta)\\ a//(\alpha)\end{cases}$ nên a và (β) chỉ có thể có 2 vị trí tương đối: $(\alpha)//(\beta)$ hoặc a nằm trên (β).

Câu 6: Cho các mệnh đề sau:

1) Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau.
2) Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau.
3) Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại.

Số mệnh đề sai là

A. 0. **B.** 1. **C.** 3. **<u>D</u>.** 2.

Lời giải

Mệnh đề " Hai mặt phẳng phân biệt cùng song song với một đường thẳng thì chúng song song với nhau." là một khẳng định sai vì chúng có thể cắt nhau.
Mệnh đề "Hai mặt phẳng cùng song song với một mặt phẳng thứ ba thì chúng song song với nhau." là một mệnh đề sai vì hai mặt này có thể trùng nhau.
Mệnh đề "Bất kì đường thẳng nào cắt một trong hai mặt phẳng song song thì nó cũng cắt mặt phẳng còn lại." là một mệnh đề đúng.

Câu 7: Trong các mệnh đề dưới đây, mệnh đề nào đúng?

<u>A</u>. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) dều song song với (β).

B. Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì bất kì đường thẳng nào nằm trong (α) cũng song song với bất kì đường thẳng nào nằm trong (β).

C. Nếu hai đường thẳng phân biệt a và b song song lần lượt nằm trong hai mặt phẳng (α) và (β) phân biệt thì $(\alpha)//(\beta)$

D. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (α) thì nó song song với mọi đường thẳng nằm trong (α).

Lời giải

Mệnh đề: "Nếu hai mặt phẳng (α) và (β) song song với nhau thì mọi đường thẳng nằm trong (α) dều song song với (β)."'là đúng.

Câu 8: Chọn khẳng định sai:

A. Hai mặt phẳng song song thì mọi đường thẳng nằm trên mặt phẳng này đều song song với mặt phẳng kia.

B. Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) và (Q) song song với nhau.

C. Nếu hai mặt phẳng (P) và (Q) song song nhau thì mặt phẳng (R) đã cắt (P) đều phải cắt (Q) và các giao tuyến của chúng song song nhau.

D. Nếu một đường thẳng cắt một trong hai mặt phẳng song song thì sẽ cắt mặt phẳng còn lại.

Lời giải

Theo định lý 1 (dấu hiệu nhận biết hai mặt phẳng song song): Nếu mặt phẳng (P) chứa hai đường thẳng cắt nhau a,b và a,b cùng song song với mặt phẳng (Q) thì (P) song song với (Q).

Câu 9: Đặc điểm nào sau đây là đúng với hình lăng trụ?

A. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên bằng nhau.

B. Đáy của hình lăng trụ là hình bình hành.

C. Hình lăng trụ có tất cả các mặt bên là hình bình hành.

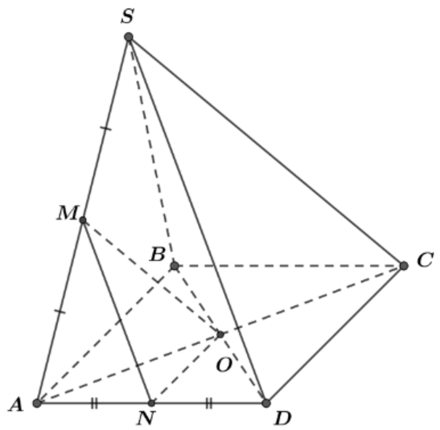
D. Hình lăng trụ có tất cả các mặt là hình bình hành.

Lời giải

Hình lăng trụ là một đa diện có hai mặt đáy là các đa giác bằng nhau và những mặt bên là các hình bình hành.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O, gọi M, N lần lượt là trung điểm SA, AD. Mặt phẳng (MNO) song song với mặt phẳng nào sau đây?

A. (SBC). **B.** (SAB). **C.** (SAD). **D.** (SCD).



Lời giải

Vì MN là đường trung bình của tam giác $SAD \Rightarrow MN // SD$.

Ta có $\begin{cases} MN // SD \\ MN \not\subset (SCD) \\ SD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow MN // (SCD)..$

Tương tự $ON//(SCD)$.

Ta có $\begin{cases} MN//(SCD), ON//(SCD) \\ MN \subset (MNO), ON \subset (MNO) \Rightarrow (MNO)//(SCD). \\ MN \cap ON = \{N\} \end{cases}$

Câu 11: Trong các điều kiện sau, điều kiện nào kết luận $(\alpha) // (\beta)$?

A. $(\alpha) // a$ và $(\alpha) // b$ với a,b là hai đường thẳng cắt nhau thuộc (β).

B. $(\alpha) // a$ và $(\alpha) / /b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt thuộc (β).

C. $(\alpha) // a$ và $(\alpha) // b$ với a,b là hai đường thẳng phân biệt cùng song song với (β).

D. $(\alpha) // \gamma$ và $(\beta) // (\gamma)$ là mặt phẳng nào đó).

Lời giải

Ta có $\begin{cases} a // (\alpha) \\ b // (\alpha) \\ a \times b \subset (\beta) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) // (\beta)$.

Câu 12: Cho hình tứ diện $ABCD$. Gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABD, ACD, ABC và M , N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BD, CD, BC. Khẳng định nào sau đây là đúng?

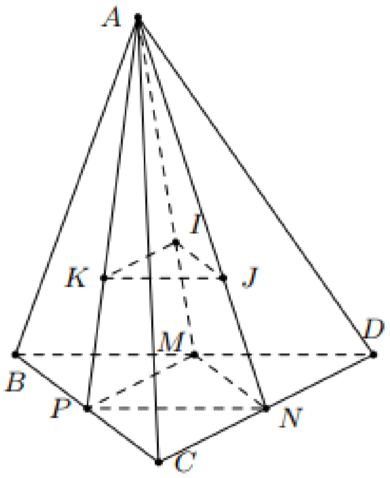
A. $(DJK) // (ABC)$.

B. $(IJK) // (BCD)$.

C. $(KMN) // (ABC)$.

D. $(IJK) // (AMD)$.

Lời giải



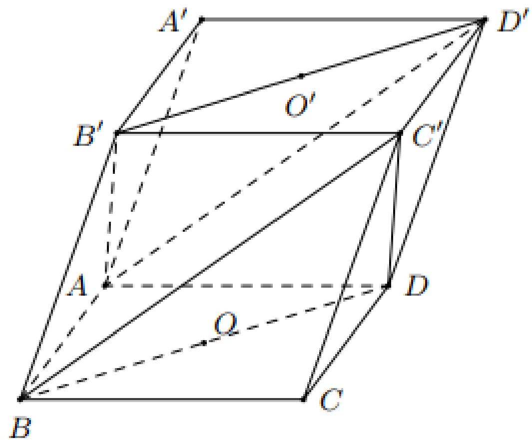
Ta có $\dfrac{AK}{AP} = \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{AJ}{AN} = \dfrac{2}{3}$ nên $KJ // PN$ và $IJ // MN$.

Khi đó $\begin{cases} KJ // PN \\ IJ // MN \\ KJ, IJ \subset (KIJ) \\ PN, MN \subset (BCD) \\ KJ \cap IJ = J \end{cases}$ suy ra $(KIJ) // (BCD)$.

Câu 13: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D', AC$ cắt BD tại O còn $A'C'$ cắt $B'D'$ tại O'. Khi đó $\left(AB'D'\right)$ sẽ song song mặt phẳng nào dưới đây?

A. $\left(A'OC'\right)$. **B.** $\left(BDA'\right)$. **C.** $\left(BDC'\right)$. **D.** $\left(BCD\right)$.

Lời giải



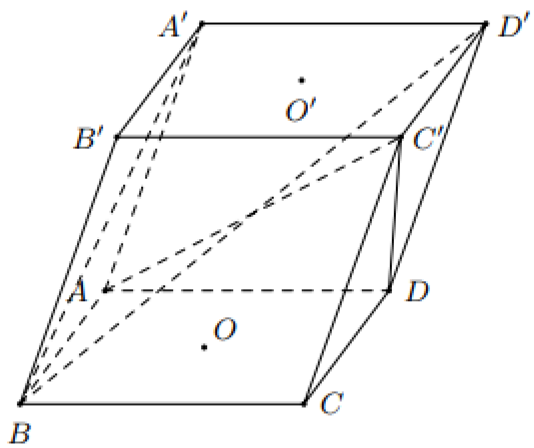
Ta có $\begin{cases} B'D' \,/\!/\, BD \\ AB' \,/\!/\, DC' \\ B'D', AB' \subset \left(AB'D'\right) \\ DC', BD \subset \left(BDC'\right) \\ B'D' \cap AB' = B' \end{cases} \Rightarrow \left(AB'D'\right) /\!/ \left(BDC'\right).$

Câu 14: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có các cạnh bên AA', BB', CC', DD'. Khẳng định nào dưới đây sai?

A. $\left(AA'B'B\right) /\!/ \left(DD'C'C\right)$. **B.** $\left(BA'D'\right) /\!/ \left(ADC'\right)$.

C. $A'B'CD$ là hình bình hành. **D.** $BB'D'D$ là một tứ giác.

Lời giải

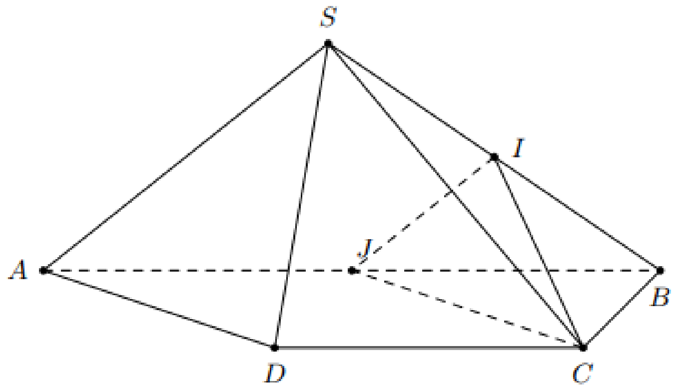


Ta có $\begin{cases} BD' \subset \left(BA'D'\right) \\ AC' \subset \left(ADC'\right) \\ AC' \cap BD' \neq \varnothing \end{cases} \Rightarrow \left(BA'D'\right) /\!/ \left(ADC'\right).$

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $(AB // CD)$ và $AB = 2CD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB. Mặt phẳng nào song song với mặt phẳng (SAD)?

A. (BCI). **B.** (BIJ). **C.** (CIJ). **D.** (SJC).

Lời giải



Vì I, J lần lượt là trung điểm của SB và AB nên $IJ // SA$.

Do J là trung điểm AB và $AB = 2CD$ nên $AJ = CD$.

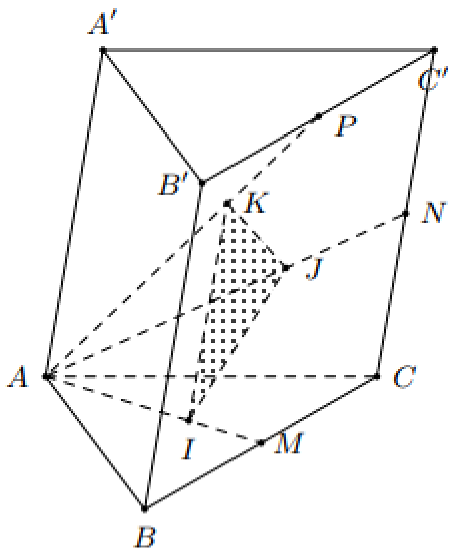
Mà $AJ // CD$ nên $AJCD$ là hình bình hành nên $CJ // AD$.

Ta có: $\begin{cases} IJ // SA \\ IC // AD \\ IJ, IC \subset (CIJ) \Rightarrow (CIJ) // (SAD) \\ SA, AD \subset (SAD) \\ CI \cap IJ = I \end{cases}$

Câu 16: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$, gọi I, J, K lần lượt là trọng tâm $\triangle ABC, \triangle ACC'$ và $\triangle AB'C'$. Mặt phẳng nào sau đây song song với (IJK)?

A. $(BC'A)$. **B.** $(AA'B)$. **C.** $(BB'C)$. **D.** $(CC'A)$.

Lời giải



Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm BC, CC' và $B'C'$.

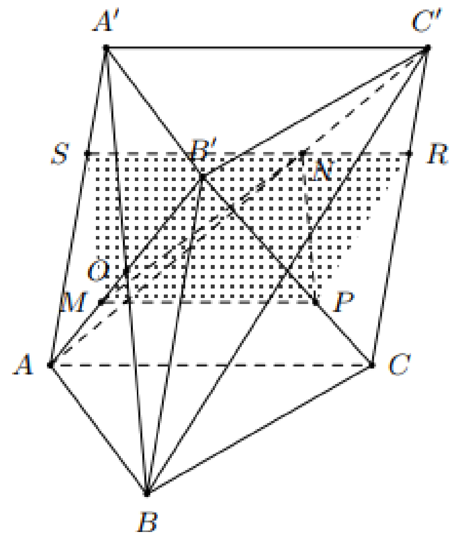
Ta có $\dfrac{AK}{AP} = \dfrac{AJ}{AN} = \dfrac{AI}{AM} = \dfrac{2}{3}$ suy ra $IK//PM$ và $KJ//PN$.

Khi đó $\begin{cases} IK//PM \\ KJ//PN \\ IK, KJ \subset (IJK) \\ PM, PN \subset (BCC'B') \\ IK \cap KJ = K \end{cases}$ suy ra $(IJK)//(BCC'B')$ hay $(IJK)//(BB'C)$.

Câu 17: Cho hình lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N, P là 3 điểm lần lượt nằm trên ba đoạn $AB', AC', B'C$ sao cho $\dfrac{AM}{AB'} = \dfrac{C'N}{AC'} = \dfrac{CP}{CB'} = x$. Để $(MNP) // (A'BC')$ thì x bằng bao nhiêu?

A. $x = \dfrac{1}{2}$. **B.** $x = \dfrac{1}{3}$. **C.** $x = \dfrac{2}{3}$. **D.** $x = \dfrac{1}{4}$.

Lời giải



Gọi $O = AB' \cap A'B$.

Ta có $\dfrac{AM}{AB'} = \dfrac{CP}{CB'} = x$ suy ra $MP // AC // A'C'$, do đó $(MNP) \cap (ACC')$ là đường thẳng qua N và song song với $A'C'$ cắt CC', AA' lần lượt tại R, S.

Vậy (MNP) chính là mặt phẳng $(MPRS)$.

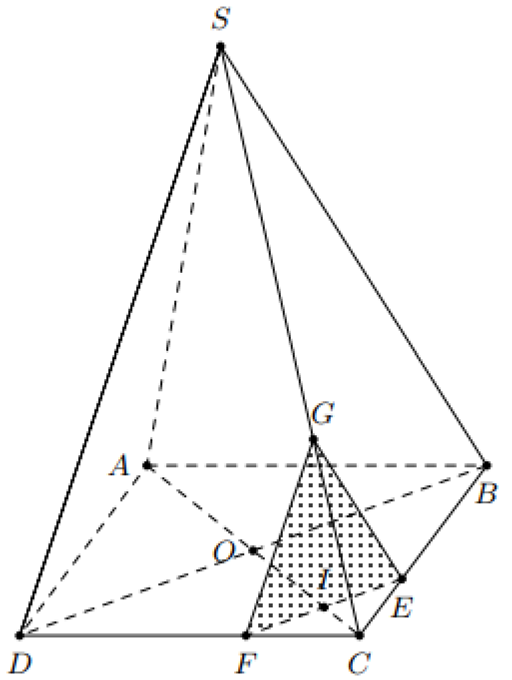
Để $(MNP) // (A'BC')$ thì cần $MS // A'B$ suy ra $\dfrac{AM}{AO} = \dfrac{AS}{AA'}$ mà $\begin{cases} \dfrac{AM}{AO} = 2 \cdot \dfrac{AM}{AB'} = 2x \\ \dfrac{AS}{AA'} = 1 - x \end{cases}$.

Do đó ta có $2x = 1 - x \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O và $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD đều. Gọi (P) là mặt phăng di động đi qua điểm I trên đoạn OC, song song với (SBD). Đặt $AI = x\left(\dfrac{a}{2} < x < a\right)$, cắt các cạnh BC, CD, SC lần lượt tại E, F, G. Diện tích tam giác EFG bằng

A. $\dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{2}}{a^2}$ **B.** $\dfrac{b^2(a+x)^2\sqrt{3}}{a^2}$. **C.** $\dfrac{b^2(a+x)^2}{a^2\sqrt{3}}$ **D.** $\dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases}(P) \parallel (SBD) \\ (P) \cap (ABCD) = EF \\ (SBD) \cap (ABCD) = EF\end{cases} \Rightarrow EF \parallel BD$ suy ra $\dfrac{EF}{BD} = \dfrac{CE}{CB} = \dfrac{CF}{CD}$.

Chứng minh tương tự ta được $\begin{cases}EG \parallel SB \Rightarrow \dfrac{EG}{SB} = \dfrac{CE}{CB} \\ GF \parallel SD \Rightarrow \dfrac{GF}{SD} = \dfrac{CF}{CD}.\end{cases}$ suy ra $\dfrac{EF}{BD} = \dfrac{EG}{SB} = \dfrac{GF}{SD}$.

Lại do $SB = SD = BD$ nên $EG = GF = EF$ hay tam giác GEF đều.

Ta có $\dfrac{EF}{BD} = \dfrac{CI}{CO} \Rightarrow EF = \dfrac{CI}{CO} \cdot BD = \dfrac{2(a-x)}{a} \cdot b$.

Vậy $S_{GEF} = \dfrac{EF^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{b^2.(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong mặt phẳng (P) cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ các nửa đường thẳng song song nhau, nằm về một phía đối với mặt phẳng (P) và đi qua các điểm A, B, C, D. Một mặt phẳng (Q) cắt bốn nửa đường thẳng nói trên tại A', B', C', D'. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

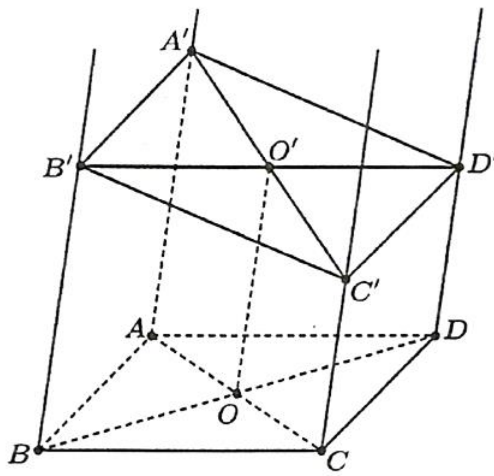
a) Mặt phẳng (AA', BB') song song với mặt phẳng (CC', DD').

b) $A'B' \parallel C'D'$

c) Tứ giác $A'B'C'D'$ là hình thang

d) Gọi O và O' lần lượt là giao điểm của hai đường chéo của $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Khi đó $OO' \parallel AA'$.

Lời giải



a) Đúng: Ta có $AA' \parallel DD'$ và $AB \parallel CD$ nên $mp(AA', BB') \parallel mp(CC', DD')$.

b) Đúng: Chứng minh $A'B'C'D'$ là hình bình hành:

Ta có: $\begin{cases} \text{mp}(AA', BB') \parallel mp(CC', DD') \\ (Q) \cap mp(AA', BB') = A'B' \\ (Q) \cap mp(CC', DD') = C'D' \end{cases} \Rightarrow A'B' \parallel C'D' \quad (1)$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $A'D' \parallel B'C' \quad (2)$

c) Sai: Từ (1) và (2) suy ra $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

d) Đúng: Ta có $\begin{cases} (ACC'A') \cap (BDD'B') = OO' \\ AA' \subset (ACC'A'), BB' \subset (BDD'B') \\ AA' // BB' \end{cases} \Rightarrow OO' \parallel AA' \parallel BB'$ hay $OO' \parallel AA'$.

Câu 2: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có I, K, G lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C', ACC'$. Gọi M, M' lần lượt là trung điểm của $BC, B'C'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

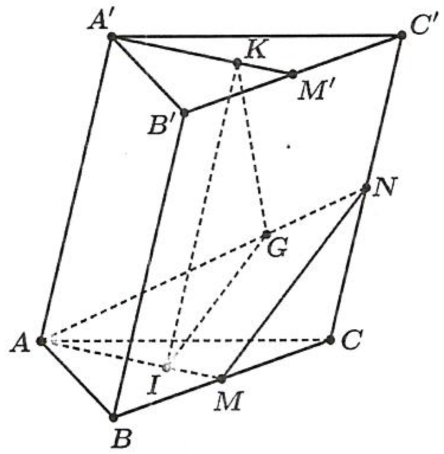
a) $AMM'A'$ là hình bình hành

b) $\dfrac{AI}{AM}=\dfrac{AG}{AN}=\dfrac{1}{3}$

c) Mặt phẳng (IKG) cắt $(BCC'B')$

d) $(A'KG)\,//\,(AIB')$.

Lời giải



MM' là đường trung bình của hình bình hành $BCC'B'$ nên

a) Đúng: $\begin{cases} MM'\,//\,BB' \\ MM'=BB' \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} MM'\,//\,AA' \\ MM'=AA' \end{cases} \Rightarrow AMM'A'$ là hình bình hành

Vì I,K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác $ABC, A'B'C'$ nên

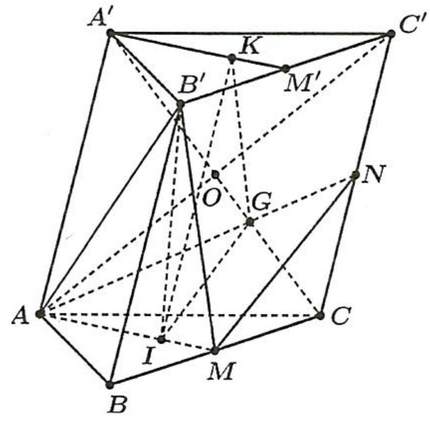
$IM=KM'=\dfrac{1}{3}A'M'=\dfrac{1}{3}AM$, mà $IM\,//\,KM'$ nên $IKM'M$ là hình bình hành.

Suy ra $IK\,//\,MM', MM'\subset(BCC'B')\Rightarrow IK\,//\,(BCC'B')$.(1)

b) Sai: Gọi N là trung điểm của CC' tam giác AMN có $\dfrac{AI}{AM}=\dfrac{AG}{AN}=\dfrac{2}{3}$ (tính chất trọng tâm)

Suy ra $IG\,//\,MN$ mà $MN\subset(BCC'B')$ nên $IG\,//\,(BCC'B')$ (2)

c) Sai: Từ (1) và (2) suy ra $(IKG)\,//\,(BCC'B')$.



Vì $(A'KG) \equiv (A'M'C), (AIB') \equiv (AMB')$ ta cần chứng minh $(A'M'C) \,//\, (AMB')$.

Dễ thấy $AMM'A'$ là hình bình hành nên $AM \,//\, A'M'$ mà $A'M' \subset (A'M'C)$ nên $AM \,//\, (A'M'C)$ (3)

Ta có: $\begin{cases} CM \,//\, B'M' \\ CM = B'M' \end{cases} \Rightarrow CMB'M'$ là hình bình hành

Suy ra $B'M \,//\, CM', CM' \subset (A'M'C) \Rightarrow B'M \,//\, (A'M'C)$.(4)

d) Đúng: Từ (3) và (4) suy ra $(A'M'C) \,//\, (AMB')$ hay $(A'KG) \,//\, (AIB')$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi H, I, K lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC. Gọi M là giao điểm của AI và KD, N là giao điểm của DH và CI. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

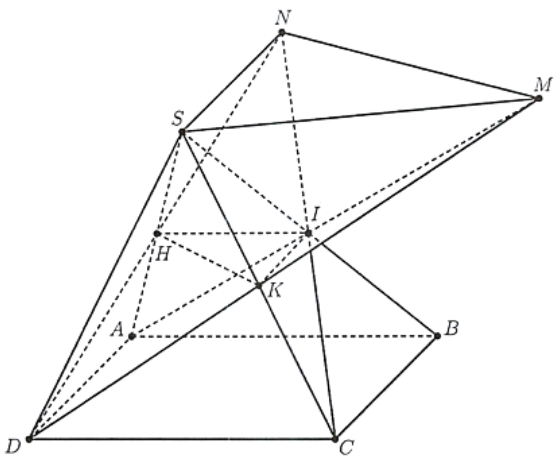
a) $HI \,//\, (ABCD)$

b) $(HIK) \,//\, (ABCD)$.

c) SM và HI chéo nhau

d) (SMN) cắt (HIK)

Lời giải



a) Đúng: Vì HI là đường trung bình của ΔSAB nên $HI \,//\, AB$ mà $AB \subset (ABCD)$

$\Rightarrow HI \,//\, (ABCD)$ (1)

b) Đúng: Tương tự ta có: $KI \,//\, BC, BC \subset (ABCD) \Rightarrow KI \,//\, (ABCD)$ (2)

Mặt khác: $HI \subset (HKI), KI \subset (HKI), HI \cap KI = I$ (3)

Từ $(1), (2)$ và (3) suy ra $(HIK) \,//\, (ABCD)$.

c) Sai: $\begin{cases} M \in AI, AI \subset (SAB) \\ M \in DK, DK \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow M \in (SAB) \cap (SCD) \Rightarrow SM = (SAB) \cap (SCD)$

Khi đó: $\begin{cases}(SAB)\cap(SCD)=SM\\ AB\subset(SAB),CD\subset(SCD)\Rightarrow SM\ //\ AB\ //\ CD\Rightarrow SM\ //\ HI\ (1)\\ AB\ //\ CD\end{cases}$

Vì $\begin{cases}N\in DH,DH\subset(SAD)\\ N\in CI,CI\subset(SBC)\end{cases}\Rightarrow N\in(SAD)\cap(SBC)\Rightarrow SN=(SAD)\cap(SBC)$

Khi đó ta có: $\begin{cases}(SAD)\cap(SBC)=SN\\ AD\subset(SAD),BC\subset(SBC)\Rightarrow SN\ //\ AD\ //\ BC\Rightarrow SN\ //\ KI\,(2)\\ AD\ //\ BC\end{cases}$

Mặt khác ba điểm S,M,N không thẳng hàng (3)

d) Đúng: Từ $(1),(2),(3)$ suy ra $(SMN)\ //\ (HIK)$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $MN\ //\ (SBC)$

b) $(OMN)\ //\ (SBC)$.

c) Gọi E là trung điểm đoạn AB và F là một điểm thuộc đoạn ON. Khi đó EF cắt với mặt phẳng (SBC).

d) Gọi G là một điểm trên mặt phẳng $(ABCD)$ cách đều AB và CD. Khi đó GN cắt (SAB)

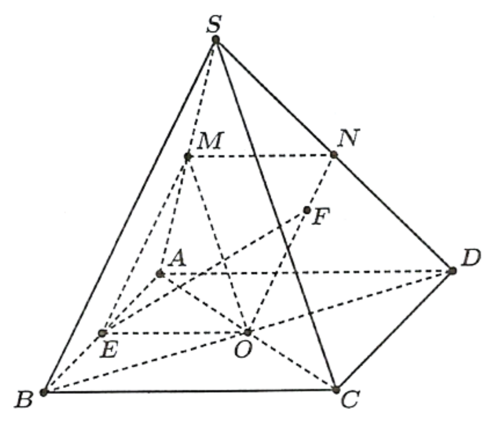
Lời giải

a) Đúng: Vì MN là đường trung bình của tam giác SAD nên $MN\ //\ AD\Rightarrow MN\ //\ BC$

$\Rightarrow MN\ //\ (SBC)\ (1)$

b) Đúng: Tương tự ta có O,N theo thứ tự là trung điểm của BD,SD nên ON là đường trung bình của tam giác $SBD\Rightarrow ON\ //\ SB\Rightarrow ON\ //\ (SBC)\ (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $(OMN)\ //\ (SBC)$.

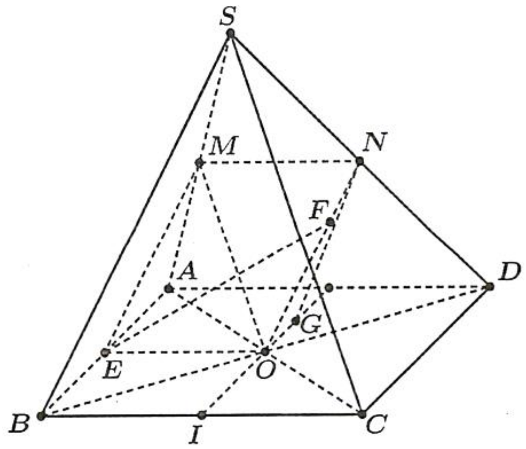


c) Sai: Ta có OE là đường trung bình của tam giác ABD nên $OE\ //\ AD\Rightarrow OE\ //\ MN$.

Do đó $E \in (OMN)$ mà $F \in ON, ON \subset (OMN) \Rightarrow F \in (OMN)$.

Ta có: $\begin{cases} EF \subset (OMN) \\ (OMN) \parallel (SBC) \end{cases} \Rightarrow EF \parallel (SBC)$.

d) Sai: Vì G thuộc mặt phẳng $(ABCD)$ và cách đều AB, CD nên G thuộc đường trung bình của hình bình hành $ABCD$ (ứng với hai cạnh AB, CD).



Gọi I là trung điểm BC thì I, O, G thẳng hàng.

Ta có OI là đường trung bình của ΔABC nên $OI \parallel AB \Rightarrow OI \parallel (SAB)$ (3)

Tương tự ta có $ON \parallel SB \Rightarrow ON \parallel (SAB)$ (4)

Từ $(3),(4)$ suy ra $(OIN) \parallel (SAB)$ mà $NG \subset (OIN)$ nên $NG \parallel (SAB)$.

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác $A'BD, B'D'C$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

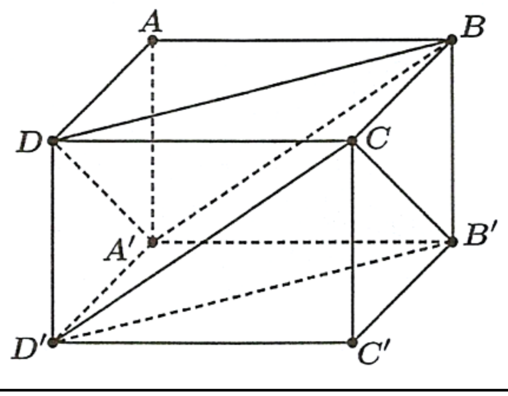
a) $A'D'CB$ là hình bình hành

b) $(A'BD) \parallel (B'D'C)$

c) G_1, G_2 cùng thuộc AC'

d) $G_1G_2 = \dfrac{2}{3}AC'$

Lời giải



a) Đúng: Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp nên $\begin{cases} A'D' \parallel BC \\ A'D' = BC \end{cases} \Rightarrow A'D'CB$ là hình bình hành.

Suy ra $A'B \parallel CD' \Rightarrow A'B \parallel (B'D'C)$ (1)

Tương tự ta có: $\begin{cases} A'B' \parallel CD \\ A'B' = CD \end{cases} \Rightarrow A'B'CD$ là hình bình hành.

Suy ra $A'D \parallel B'C \Rightarrow A'D \parallel (B'D'C)$ (2)

b) Đúng: Từ (1) và (2) suy ra $(A'BD) \parallel (B'D'C)$.

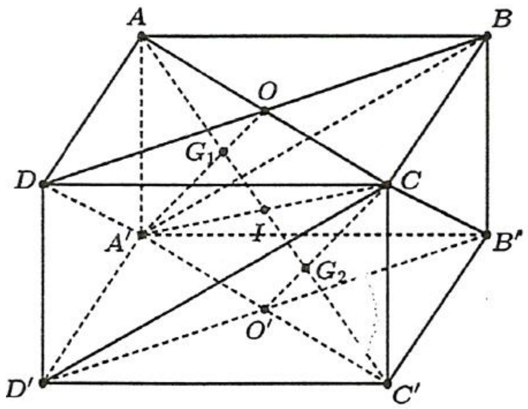
c) Đúng: Gọi O, O', I theo thứ tự là tâm của các hình bình hành $ABCD, A'B'C'D'$, $ACC'A'$.

Vì G_1 là trọng tâm tam giác $AB'D$ nên $\dfrac{A'G_1}{A'O} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow G_1$ là trọng tâm tam giác $A'AC$ nên suy ra $G_1 = AI \cap A'O$ (3)

Tương tự, G_2 là trọng tâm tam giác $B'D'C$ nên $\dfrac{CG_2}{CO'} = \dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow G_2$ là trọng tâm tam giác $A'C'C$ suy ra $G_2 = C'I \cap CO'$ (4)

Từ (3) và (4) suy ra G_1, G_2 cùng thuộc AC'.



Ta có: $\dfrac{AG_1}{AI} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{AG_1}{AC'} = \dfrac{1}{3}; \dfrac{C'G_2}{C'I} = \dfrac{2}{3} \Rightarrow \dfrac{C'G_2}{AC'} = \dfrac{1}{3}$.

d) Sai: Do vậy $AG_1 = G_1G_2 = G_2C' = \dfrac{1}{3}AC'$.

Vậy G_1, G_2 cùng thuộc AC', đồng thời chia AC' thành ba phần bằng nhau.

Câu 6: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là trọng tâm ΔABE. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt (ADF). Gọi N là giao điểm của (P) và AC. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

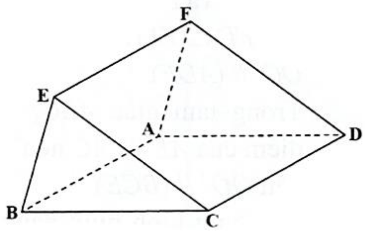
a) $EFDC$ là hình thang

b) $FD \parallel EC$

c) $\left(ADF\right) /\!/ \left(BCE\right)$.

d) $\dfrac{AN}{NC}=3$

Lời giải

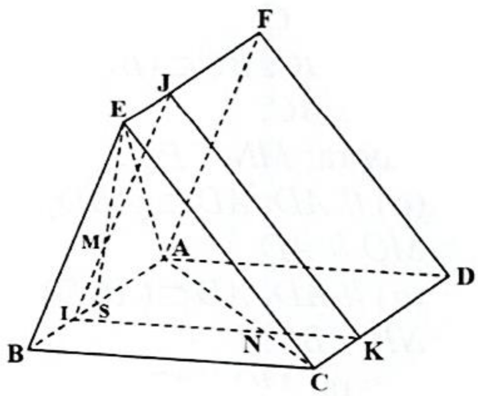


a) Sai: Cho hình bình hành $ABCD$ và $ABEF$ nằm ở hai mặt phẳng khác nhau

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} EF /\!/ CD\left(/\!/ AB\right) \\ EF = CD\left(=AB\right) \end{cases} \Rightarrow EFDC$ là hình bình hành $\Rightarrow FD /\!/ EC$.

c) Đúng: Ta có $\begin{cases} AD /\!/ BC; AF /\!/ BE \\ AD, AF \subset \left(ADF\right); AD \cap AF = A \\ BC, BE \subset \left(BEC\right); BC \cap BE = B \end{cases} \Rightarrow \left(ADF\right) /\!/ \left(BCE\right)$

d) Sai: Tính $\dfrac{AN}{NC}$.



Vẽ mặt phẳng $\left(P\right)$ chứa M và $\left(P\right) /\!/ \left(ADF\right)$ cắt AB, AC, CD, EF lần lượt tại I, N, K, J.

Ta có: $\dfrac{AI}{BI}=\dfrac{AN}{NC}\left(IN /\!/ BC\right)$ và $\dfrac{EJ}{IS}=\dfrac{ME}{MS}=2\left(IS /\!/ JE\right)$

Mặt khác: $BI = EJ$ (tứ giác $BIJE$ là hình bình hành)

$\Rightarrow \dfrac{BI}{IS}=2 \Rightarrow \dfrac{BI}{2}=\dfrac{IS}{1}=\dfrac{BI+IS}{2+1}=\dfrac{BS}{3} \Rightarrow BI=\dfrac{2}{3}BS; IS=\dfrac{1}{3}BS$

Ta có: $AI = AS + AI = BS + \dfrac{1}{3}BS = \dfrac{4}{3}BS \Rightarrow> \dfrac{AI}{BI}=\dfrac{\dfrac{4}{3}BS}{\dfrac{2}{3}BS}=2 \Rightarrow \dfrac{AN}{NC}=2$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của SA và SD. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

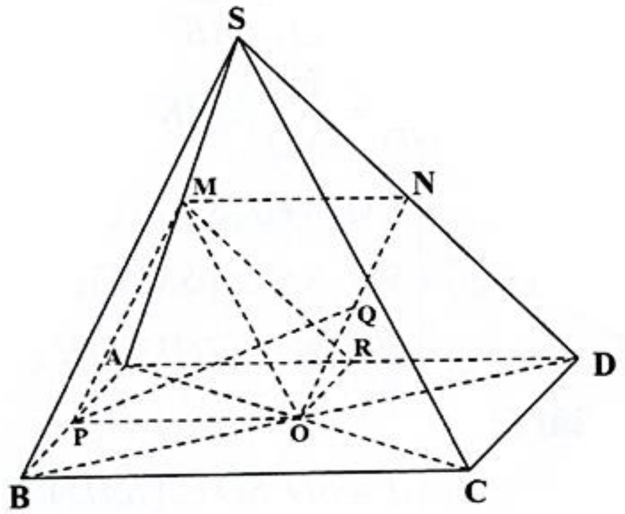
a) ON chéo nhau với SB

b) $(OMN)\parallel(SBC)$.

c) Gọi P và Q là trung điểm của AB và ON. Khi đó PQ cắt (SBC)

d) Gọi R là trung điểm AD. Khi đó $(MOR)\parallel(SCD)$.

Lời giải



a) Sai: Ta có $OM \parallel SC$ (đường trung bình tam giác SAC). Ta có $ON \parallel SB$ (đường trung bình tam giác SBD).

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} ON \parallel SB; OM \parallel SC \\ OM, ON \subset (OMN), OM \cap ON = O \\ SB, SC \subset (SBC), SB \cap SC = S \end{cases} \Rightarrow (OMN)\parallel(SBC)$

c) Sai: Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của AB và ON. Chứng minh: $PQ \parallel (SBC)$

Ta có $\begin{cases} OP \parallel AB \\ AB \parallel MN \end{cases} \Rightarrow OP \parallel MN \Rightarrow OMPN$ là hình thang $\Rightarrow P \in (OMN)$.

Ta có $\begin{cases} NP \subset (OMN) \\ (OMN)\parallel(SBC) \end{cases} \Rightarrow NP \parallel (SBC)$

d) Đúng: Gọi R là trung điểm AD. Chứng minh $(MOR)\parallel(SCD)$.

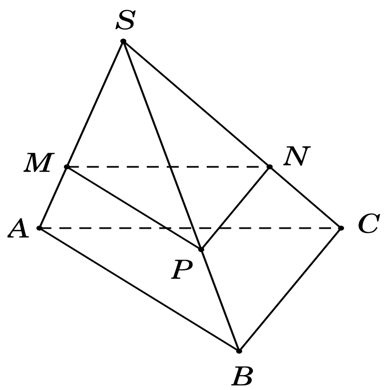
Ta có $OR \parallel CD$ (đường trung bình của tam giác ACD)

Ta có $\begin{cases} OM \parallel SC \\ OR \parallel CD \\ OM, OR \subset (MOR), OM \cap OR = O \\ SC, SD \subset (SCD), SC \cap SD = S \end{cases} \Rightarrow (MOR)\parallel(SCD)$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4$, $BAC = 30°$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Gọi P là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SC. Tính tỉ số $\frac{SP}{SC}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

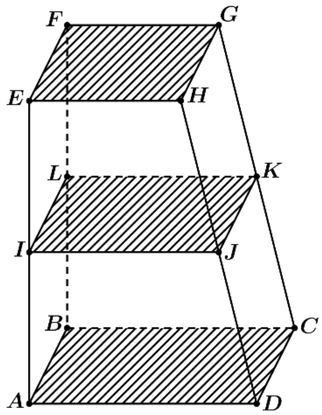


Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}.4.4.\sin 30^0 = 4.$

Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh $SB, SC.$

Vì $(P)//(ABC)$ nên theoo định lí Talet ta có : $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3} \approx 0,67$

Câu 2: Một kệ để đồ bằng gỗ có mâm tầng dưới $(ABCD)$ và mâm tầng trên $(EFGH)$ song song với nhau. Bác thợ mộc đo được $AE = 100$ cm, $CG = 120$ cm và muốn đóng thêm mâm tầng giữa $(IJKL)$ song song với hai mâm tầng trên, tầng dưới và $EI = 42$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng KG



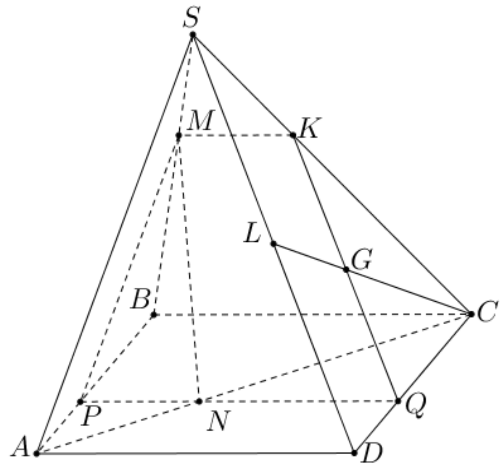
Lời giải

Áp dụng định lý Thales trong không gian, ta có $\frac{KG}{EI} = \frac{GC}{EA} \Leftrightarrow KG = \frac{42.120}{100} = 50,4$

Vậy $KG = 50,4$ cm.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh SB, AC sao cho $\frac{BM}{MS}=\frac{CN}{NA}=x,\ (0<x\neq 1)$. Gọi G là trọng tâm tam giác SCD. Tìm x để $(MNG)//(SAD)$.

Lời giải



Gọi các giao điểm của (MNG) với các cạnh hình chóp như hình vẽ.

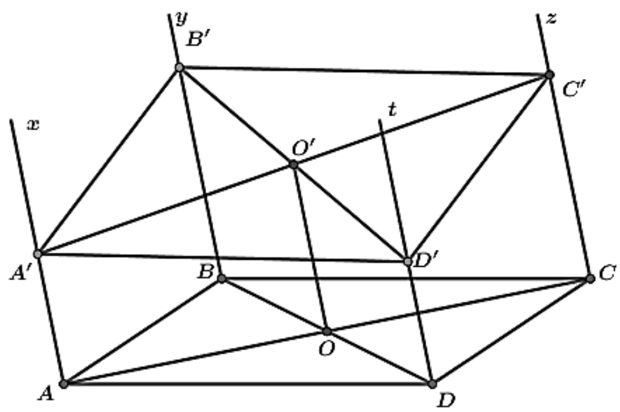
Ta có $\frac{BM}{MS}=\frac{CN}{NA}=x,\ (0<x\neq 1)$ nên $BC,\ MN,\ SA$ lần lượt nằm trên ba mặt phẳng song song, suy ra $MN//(SAD),\ \forall x\in(0<x\neq 1)$. Do đó

$(MNG)//(SAD)\Leftrightarrow NQ//AD\Leftrightarrow \frac{NC}{NA}=\frac{QC}{QD}\Leftrightarrow \frac{NC}{NA}=\frac{GC}{GL}=2$.

Vậy với $x=2$ thì $(MNG)//(SAD)$.

Câu 4: Cho hình bình hành $ABCD$. Qua A, B, C, D lần lượt vẽ các nửa đường thẳng Ax, By, Cz, Dt ở cùng phía so với mặt phẳng $(ABCD)$, song song với nhau và không nằm trong $(ABCD)$. Một mặt phẳng (P) cắt Ax, By, Cz, Dt tương ứng tại A', B', C', D' sao cho $AA'=3$, $BB'=5$, $CC'=4$. Tính DD'.

Lời giải



Do (P) cắt mặt phẳng (Ax, By) theo giao tuyến $A'B'$; cắt mặt phẳng (Cz, Dt) theo giao tuyến $C'D'$, mà hai mặt phẳng (Ax, By) và (Cz, Dt) song song nên $A'B'//C'D'$.

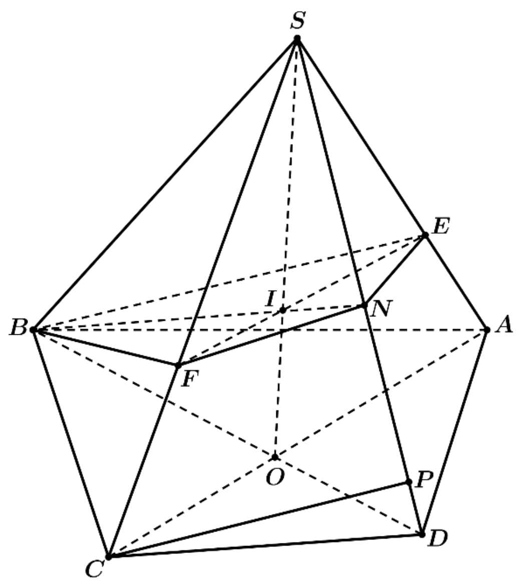
Tương tự có $A'D'//B'C'$ nên $A'B'C'D'$ là hình bình hành.

Gọi O, O' lần lượt là tâm $ABCD$ và $A'B'C'D'$. Dễ dàng có OO' là đường trung bình của hai hình thang $AA'C'C$ và $BB'D'D$ nên $OO' = \dfrac{AA' + CC'}{2} = \dfrac{BB' + DD'}{2}$.

Từ đó ta có $DD' = 2$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang, $AB // CD$ và $AB = 2CD$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Lấy E thuộc cạnh SA, F thuộc cạnh SC sao cho $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{2}{3}$. Gọi (α) là mặt phẳng qua O và song song với mặt phẳng (BEF). Gọi P là giao điểm của SD với (α). Tính tỉ số $\dfrac{SP}{SD}$ (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Vì $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SC} = \dfrac{2}{3}$ nên đường thẳng $EF // AC$. Mà $EF \subset (BEF)$, $AC \not\subset (BEF)$ nên AC song song với mặt phẳng (BEF).

Vì AC qua O và song song với mặt phẳng (BEF) nên $AC \subset (\alpha)$.

Trong (SAC), gọi $I = SO \cap EF$, trong (SBD), gọi $N = BI \cap SD$. Suy ra N là giao điểm của đường thẳng SD với mặt phẳng (BEF).

Hai mặt phẳng song song (BEF) và (α) bị cắt bởi mặt phẳng thứ ba là (SCD) theo hai giao tuyến lần lượt là FN và Ct nên hai giao tuyến đó song song nhau, tức là $Ct // FN$.

Trong (SCD), Ct cắt SD tại P. Khi đó P là giao điểm của SD với (α).

Trong hình thang $ABCD$, do $AB // CD$ và $AB = 2CD$ nên $\frac{BO}{OD} = \frac{AB}{CD} = 2 \Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{2}{3}$.

Trong tam giác SAC, có $EF // AC$ nên $\frac{SE}{SA} = \frac{SI}{SO} = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{IS}{IO} = 2$.

Xét tam giác SOD với cát tuyến NIB, ta có: $\frac{NS}{ND}.\frac{BD}{BO}.\frac{IO}{IS} = 1 \Rightarrow \frac{NS}{ND} = \frac{BO}{BD}.\frac{IS}{IO} = \frac{2}{3}.2 = \frac{4}{3}$.

Suy ra: $\frac{SN}{SD} = \frac{4}{7}$ và ta lại có $\frac{SN}{SP} = \frac{SF}{SC} = \frac{2}{3}$ nên suy ra $\frac{SP}{SD} = \frac{6}{7} \approx 0,86$.

Câu 6: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên ba cạnh AA', BB', CC', sao cho $AM = \frac{1}{2}AA'$, $BN = \frac{1}{3}BB'$, $CP = \frac{1}{4}CC'$. Gọi Q là giao điểm của mặt phẳng (MNP) với đường thẳng DD'. Khi đó tỉ số $\frac{D'Q}{DD'}$ bằng bao nhiêu?(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải

Lấy M', N' lần lượt trên các cạnh DD' và CC' sao cho $M'D = MA$, $N'C = NB$.

Ta có: $\begin{cases} (ABB'A') // (CDD'C') \\ (\alpha) \cap (ABB'A') = MN \\ (\alpha) \cap (CDD'C') = PQ \end{cases} \Rightarrow MN // PQ$

Khi đó: $D'Q = D'M' + QM' = \frac{DD'}{2} + (N'C - PC) = \frac{DD'}{2} + \left(\frac{DD'}{3} - \frac{DD'}{4}\right) = \frac{7DD'}{12}$

Vậy $\frac{D'Q}{DD'} = \frac{7}{12} \approx 0,58$.

----------------HẾT----------------

Dạng 2: Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng. Xác định giao điểm của đường thẳng và mặt phẳng bằng cách kẻ song song

Phương pháp: Để xác định giao tuyến của hai mặt phẳng ta sử dụng tính chất $\begin{cases}(\alpha)\,/\!/\,(\beta)\\(\gamma)\cap(\alpha)=a\Rightarrow a\,/\!/\,b\\(\gamma)\cap(\beta)=b\end{cases}$

- Để tìm giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P). Ta cần tìm một mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng a và cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là đường thẳng Δ. Khi đó giao điểm của đường thẳng a và Δ chính là giao điểm của đường thẳng a và mặt phẳng (P).

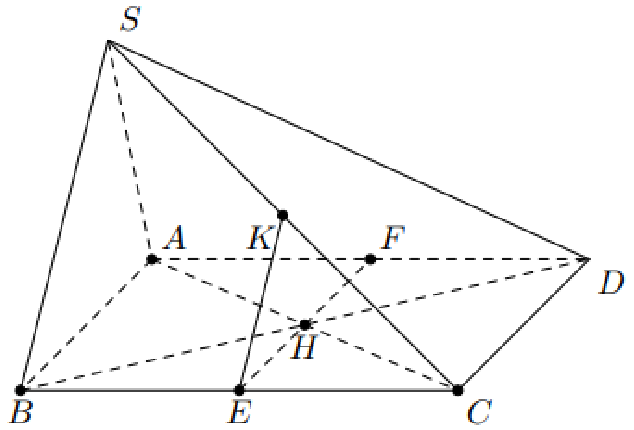
BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H. Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB). Tìm giao tuyến của:

a) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

Lời giải



a) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$.

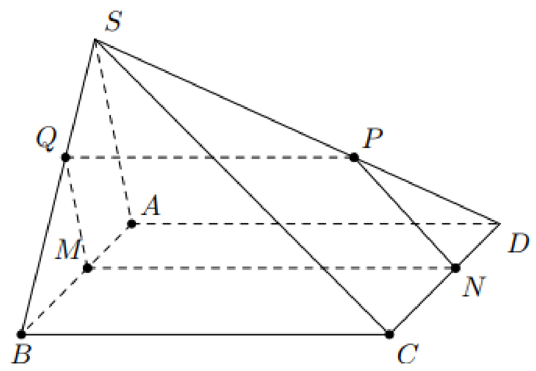
Ta có: $\begin{cases}(P)\,/\!/\,(SAB)\\(ABCD)\cap(SAB)=AB\Leftrightarrow(P)\cap(ABCD)=EF\\(P)\cap(ABCD)=H\end{cases}$ với $\begin{cases}EF \text{ qua } H\\EF\,/\!/\,AB\\E\in BC, F\in AD\end{cases}$

b) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC).

Ta có: $\begin{cases}(P)\,/\!/\,(SAB)\\(SBC)\cap(SAB)=SB\Leftrightarrow(P)\cap(ABCD)=EK\\(P)\cap(SBC)=E\end{cases}$ với $\begin{cases}EK\cap SC=K\\EK\,/\!/\,SB\end{cases}$

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là điểm bất kỳ trên AB. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SBC). Tìm giao tuyến của (α) với cắt mặt của hình chóp.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases}(\alpha)//(SBC)\\(SBC)\cap(ABCD)=BC\\(\alpha)\cap(ABCD)=M\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha)\cap(ABCD)=MN$ với $\begin{cases}MN\cap CD=N\\MN // BC\end{cases}$.

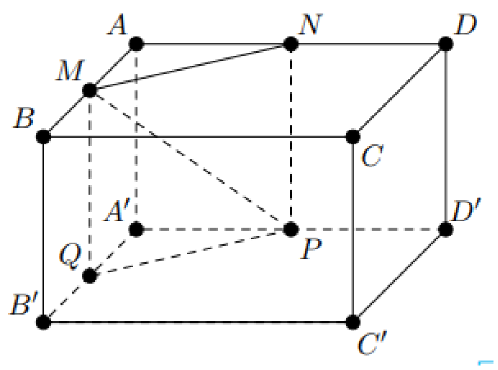
Mặt khác $\begin{cases}(\alpha)//(SBC)\\(SBC)\cap(SCD)=SC\\(\alpha)\cap(SCD)=N\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha)\cap(SCD)=NP$ với $\begin{cases}NP\cap SD=P\\NP // SC\end{cases}$.

Hơn nữa $\begin{cases}(\alpha)//(SBC)\\(SBC)\cap(SAB)=SB\\(\alpha)\cap(SAB)=M\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha)\cap(SAB)=MQ$ với $\begin{cases}MQ\cap SA=Q\\MQ // BC\end{cases}$.

Suy ra $(P)\cap(SAD)=PQ$.

Bài tập 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, AD, A'D'$. Xác định giao tuyến của (MNP) và các mặt $(A'B'C'D'),(AA'B'B)$.

Lời giải



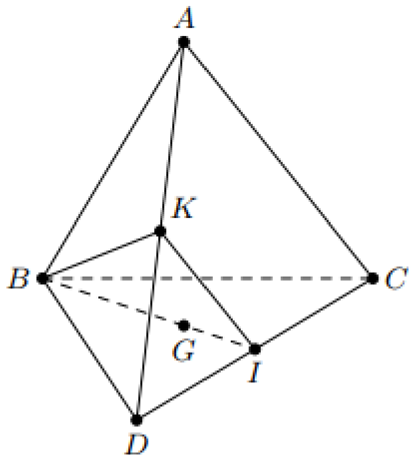
Ta có M,N,P lần lượt là trung điểm các cạnh $AB, AD, A'D'$.

$\Rightarrow \begin{cases}MN // BD // B'D'\\NP // AA' // DD'\end{cases} \Rightarrow (MNP)//(BDD'B')$

Khi đó: $\begin{cases}(MNP)\parallel(BDD'B')\\(BDD'B')\cap(A'B'C'D')=B'D'\\(MNP)\cap(A'B'C'D)=P\end{cases}\Leftrightarrow(MNP)\cap(A'B'C'D')=PQ$ với $\begin{cases}PQ\cap A'B'=Q\\PQ\parallel B'D'\end{cases}$.

Bài tập 4: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm tam giác BCD. Biết mặt phẳng (α) chứa BG và song song với đường thẳng AC. Tìm giao điểm K của AD và mặt phẳng (α).

Lời giải

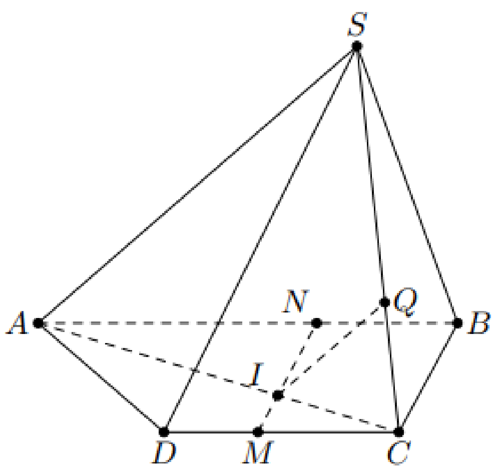


Gọi I là trung điểm của CD. Ta có $\begin{cases}I\in(\alpha)\cap(ACD)\\AC\parallel(\alpha)\\AC\subset(ACD)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(ACD)=Ix\parallel AC$.

Trong mặt phẳng (ACD) gọi $Ix\cap AD=K$. Ta có $\begin{cases}K\in AD\\K\in Ix\subset(\alpha)\Rightarrow K\in(\alpha)\end{cases}\Rightarrow K=AD\cap(\alpha)$

Bài tập 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang có đáy lớn là AB. Gọi M là một điểm trên CD và (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC. Tìm giao điểm Q của SC và (α).

Lời giải



Ta có $\begin{cases}(\alpha)\parallel BC, BC\subset(ABCD)\\M\in(\alpha)\cap(ABCD)\end{cases}\Rightarrow(\alpha)\cap(ABCD)=MN\parallel BC$ và $N\in AB$.

Gọi I là giao điểm của AC và MN ta có $\begin{cases} SA \parallel (\alpha) \\ SA \subset (SAC) \\ I \in (\alpha) \cap (SAC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAC) = Ix \parallel SA$.

Trong mặt phẳng (SAC) gọi Q là giao điểm của Ix và SC.

Ta có $\begin{cases} Q \in SC \\ Q \in Ix \subset (\alpha) \Rightarrow I \in (\alpha) \end{cases} \Rightarrow Q = SC \cap (\alpha)$.

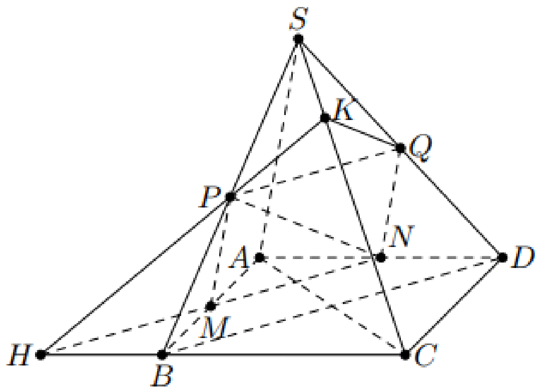
Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AD, SB.

a) Chứng minh $BD \parallel (MNP)$.

b) Tìm giao điểm của (MNP) với BC.

c) Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (MNP) và (SBD).

Lời giải



a) ΔABD có MN là đường trung bình nên $MN \parallel BD$ và $MN = \dfrac{1}{2}BD$

Ta có: $\begin{cases} BD \parallel MN \\ MN \subset (MNP) \Rightarrow BD \parallel (MNP) \\ BD \not\subset (MNP) \end{cases}$

b) Trong $(ABCD)$ dựng $H = MN \cap BC$

Ta có $\begin{cases} H \in BC \\ H \in MN, MN \subset (MNP) \end{cases} \Rightarrow H = (MNP) \cap BC$

c) Gọi $\Delta = (MNP) \cap (SBD)$ ta có $\begin{cases} P \in (SBD) \\ P \in (MNP) \end{cases} \Rightarrow P \in \Delta$.

Ta có: $\begin{cases} MN \parallel BD \\ MN \subset (MNP), (BD) \subset (SBD) \Rightarrow \Delta \parallel MN \\ (MNP) \cap (SBD) = \Delta \end{cases}$

Vậy Δ là đường thẳng qua P và song song với MN.

Gọi $Q = \Delta \cap SD$ ta được $(MNP) \cap (SBD) = PQ$.

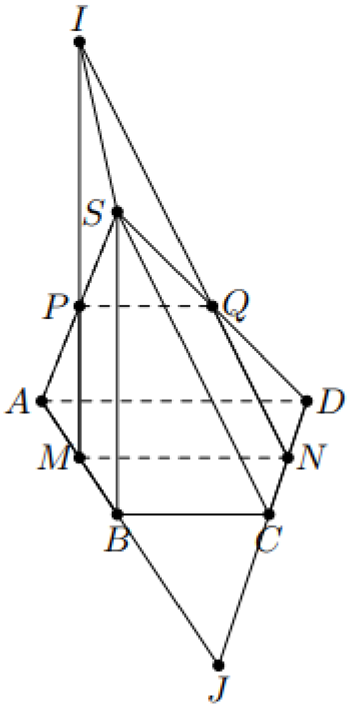
Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là một hình thang với đáy lớn là cạnh AD. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của AB, CD, SA.

a) Xác định giao điểm Q của cạnh SD với (MNP).

b) Chứng minh SB, SC cùng song song với (MNP).

c) Chứng minh MP và NQ cắt nhau. Chứng minh giao điểm của MP và NQ, giao điểm của AB và CD và điểm S thẳng hàng.

Lời giải



a) Ta có $AD \,//\, MN$ nên $AD \,//\, (MNP)$ mà $AD \subset (SAD)$

Khi đó giao tuyến của (MNP) và (SAD) là đường thẳng qua P, song song với AD, cắt SD tại $Q \Rightarrow Q$ là giao điểm của SD và (MNP).

b) Tam giác SAB có MP là đường trung bình nên $SB \,//\, MP$ do đó $SB \,//\, (MNP)$.

Theo cách dựng điểm Q suy ra Q là trung điểm của SD.

Do đó NQ là đường trung bình của tam giác SCD suy ra $SC \,//\, NQ$. Suy ra $SC \,//\, (MNP)$.

c) Ta có $MN \,//\, PQ$ (vì cùng song song với AD).

Mặt khác ta có $PQ = \dfrac{1}{2}AD$, $MN = \dfrac{AD+BC}{2} > \dfrac{AD}{2} = PQ$ nên $MNQP$ là hình thang.

Vậy MP và NQ có thể cắt nhau tại I.

Theo cách dựng thì I là một điểm chung của (SAB) và (SCD). Tương tự, giao điểm J của AB và CD cũng là điểm chung của (SAB) và (SCD). Do đó I, S và J cùng thuộc giao tuyến của (SAB) và (SCD). Vậy I, S, J thẳng hàng.

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là đúng?

A. Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P) thì trong (P) có duy nhất một đường thẳng a song song với d.

B. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì d song song với mọi đường thẳng nằm trong (P).

C. Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì trong (P) tồn tại đường thẳng a song song với d.

D. Nếu đường thẳng d song song mặt phẳng (P), đường thẳng a bất kỳ nằm trong (P) thì a và d chéo nhau.

Lời giải

Khẳng định đúng là "Nếu đường thẳng d song song với mặt phẳng (P) thì trong (P) tồn tại đường thẳng a song song với d ".

Câu 2: Trong không gian, đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) nếu

A. $a \not\subset (P)$.
B. $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \end{cases}$.
C. $\begin{cases} a \parallel b \\ b \not\subset (P) \end{cases}$.
D. $\begin{cases} a \parallel b \\ b \subset (P) \\ a \not\subset (P) \end{cases}$.

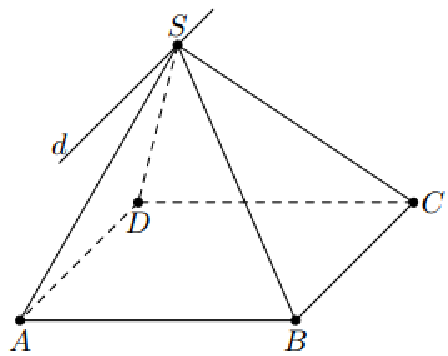
Lời giải

Đường thẳng a song song với mặt phẳng (P) khi và chỉ khi a không nằm trong (P), đồng thời a song song với một đường thẳng b nằm trong (P).

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình bình hành. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng song song với đường thẳng nào sau đây?

A. AC.
B. DC.
C. BD.
D. AD.

Lời giải



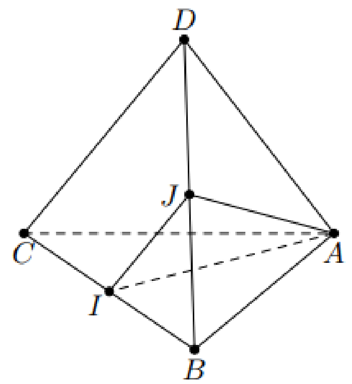
Giao tuyến của 2 mặt phẳng chứa 2 đường thẳng song song với nhau là đường thẳng đi qua 1 điểm chung của 2 mặt phẳng đó và song song với 2 đường thẳng song song trên.

Mà $AD \parallel BC$ nên giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là đường thẳng qua S và song song với AD.

Câu 4: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD. Giao tuyến của hai mặt phẳng (AIJ) và (ACD) là đường nào sau đây?

A. Đường thẳng d đi qua A và $d \parallel BC$.
B. Đường thẳng d đi qua A và $d \parallel BD$.
C. Đường thẳng d đi qua A và $d \parallel CD$.
D. Đường thẳng d đi qua A và giao điểm của IJ và CD.

Lời giải



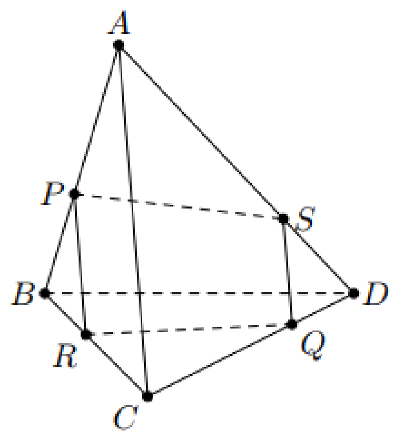
Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và BD nên $IJ \parallel CD$.

Do đó giao tuyến của (AIJ) với (ACD) là đường thẳng đi qua A và song song với CD.

Câu 5: Cho tứ diện $ABCD$ và ba điểm P, Q, R lần lượt nằm trên cạnh các AB, CD, BC (không trùng với các đỉnh của tứ diện $ABCD$) sao cho $PR // AC$. Khi đó giao tuyến của hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) song song với đường thẳng nào trong các đường thẳng sau?

A. BD. **B.** CD. **C.** CB. **D.** AC.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} Q \in (PQR) \cap (ACD) \\ PR \subset (PQR) \\ AC \subset (ACD) \\ PR \parallel AC \end{cases}$ nên $(PQR) \cap (ACD) = Qx \parallel AC$

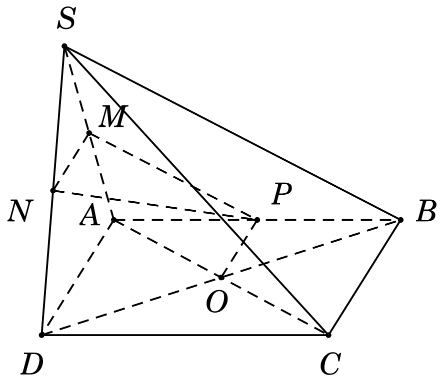
Vậy giao tuyến của hai mặt phẳng (PQR) và (ACD) song song với đường thẳng AC.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của SA, SD và AB. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. (NOM) cắt (OPM). **B.** $(MON)//(SBC)$.

C. $(PON)\cap(MNP)=NP$. **D.** $(NMP)//(SBD)$.

Lời giải



Ta có MN là đường trung bình của tam giác SAD suy ra $MN // AD$. (1)

Và OP là đường trung bình của tam giác BAD suy ra $OP // AD$. (2)

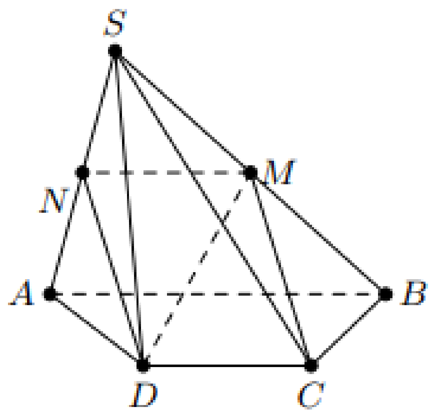
Từ $(1),(2)$ suy ra $MN // OP // AD \Rightarrow M, N, O, P$ đồng phẳng.

Lại có $MP // SB$, $OP // BC$ suy ra $(MNOP)//(SBC)$ hay $(MON)//(SBC)$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy là hình thang $(AB//CD)$. Gọi M là trung điểm của SB. Mặt phẳng qua DM, song song với AB cắt đường thẳng SC tại Q. Tính tỉ số $\frac{SC}{SQ}$.

A. $\frac{1}{2}$. **B.** 2. **C.** 1. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải



Gọi (α) là mặt phẳng qua DM và song song với AB.

Vì $AB // (\alpha)$ và $AB \subset (ABCD)$ nên giao tuyến của (α) và $(ABCD)$ là đường thẳng qua D và song song với AB.

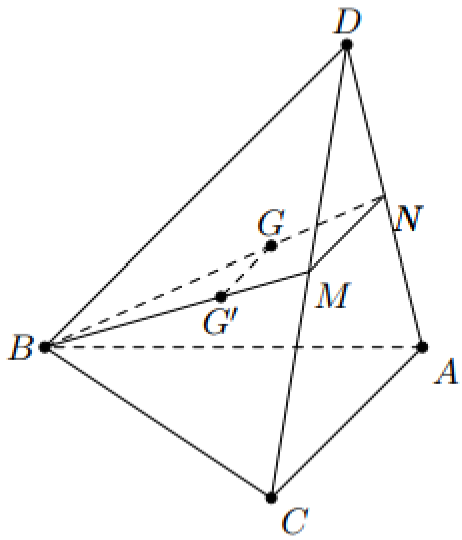
Ta có $DC \parallel AB$ nên DC chính là giao tuyến của (α) và $(ABCD)$.

Do đó (α) cắt SC tại C tức là Q trùng với C nên $\frac{SC}{SQ}=1$.

Câu 8: Cho tứ diện $ABCD$. Gọi G,G' lần lượt là trọng tâm $\triangle ABD$ và $\triangle BCD$. Khẳng định nào sau đây là sai?

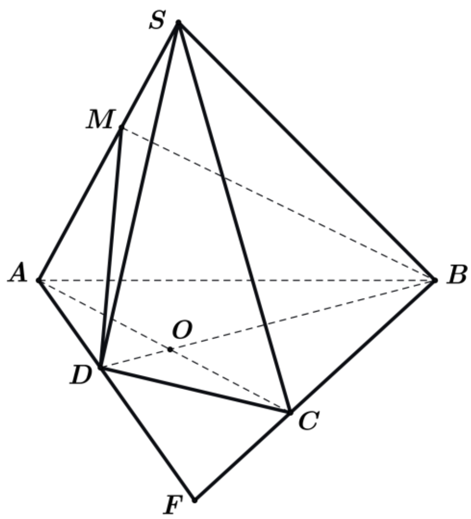
A. $GG' \parallel (ACD)$. **B.** $GG' \parallel BD$. **C.** $GG' \parallel (ABC)$. **D.** $GG' \parallel AC$.

Lời giải



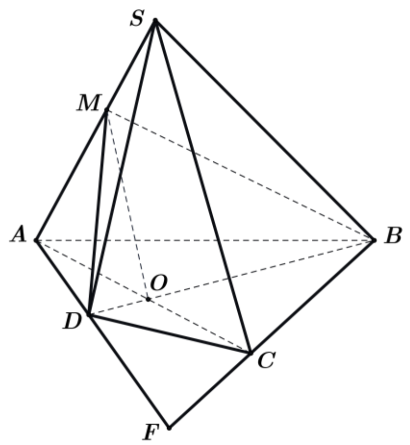
Ta có GG' cắt mặt phẳng (ABD) tại G. Do đó GG' không thể song song được với BD nằm trong mặt phẳng (ABD).

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là tứ giác có các cặp cạnh đối không song song. Gọi $O = AC \cap BD, F = BC \cap AD$. Điểm M thuộc cạnh SA. Tìm giao tuyến (d) của cặp mặt phẳng (MBD) và (SAC)



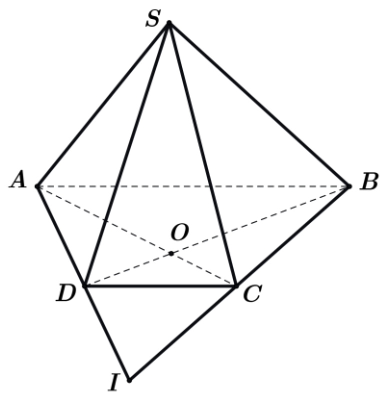
A. $d = SO$. **B.** $d = SF$. **C.** $d = MO$. **D.** $d = MF$.

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} M \in (SAC) \cap (MBD) \\ O \in (SAC) \cap (MBD) \ (O = AC \cap BD) \end{cases} \Rightarrow MO = (SAC) \cap (MBD)$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ $(AB//CD)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của AD và BC. Khẳng định nào sau đây **sai**?



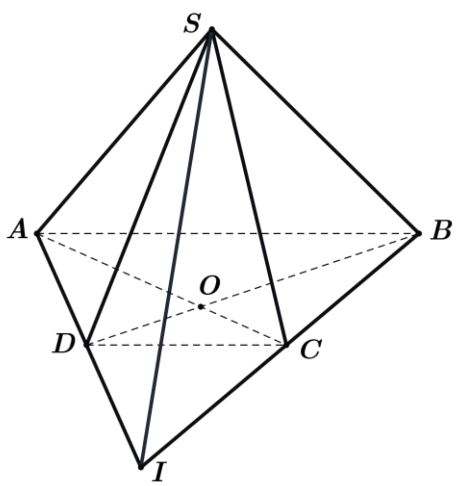
A. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) là SC.

B. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAC) và (SBD) là SO.

C. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SBC) là SI.

D. Giao tuyến của hai mặt phẳng (SID) và (SCO) là SB.

Lời giải



Ta có: S, C là hai điểm chung của (SAC) và (SBC) nên A đúng.

S, O là hai điểm chung của (SAC) và (SBD) nên B đúng.

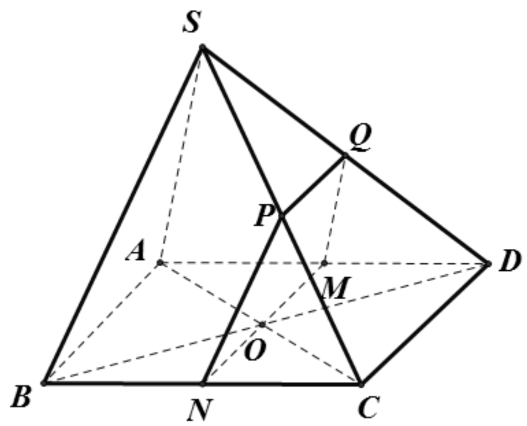
S, I là hai điểm chung của (SAD) và (SBC) nên C đúng.

S, A là hai điểm chung của (SID) và (SCO) nên D sai.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, SC, SD. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng (SAB). Giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) lần lượt là

A. MN và PN **B.** MN và PQ. **C.** QP và QM **<u>D</u>.** NP và MQ.

Lời giải



Vì $(\alpha) \parallel (SAB) \Rightarrow (\alpha) \parallel AB; (\alpha) \parallel SB; (\alpha) \parallel SA$.

Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC, SC, SD nên
$MN \parallel AB;\ NP \parallel SB;\ MQ \parallel SA$

Ta có: $\begin{cases} (\alpha) \parallel AB \\ AB \subset (ABCD) \\ O \in (\alpha), O \in (ABCD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (ABCD) = MN$ qua O

$$\begin{cases} (\alpha) \parallel SB \\ SB \subset (SBC) \\ N \in (\alpha), N \in (SBC) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SBC) = NP \parallel SB$$

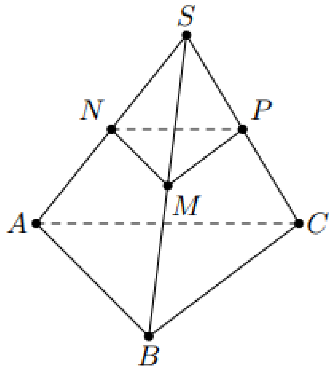
$$\begin{cases} (\alpha) \parallel SA \\ SA \subset (SAD) \\ M \in (\alpha), M \in (SAD) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = MQ \parallel SA$$

Vậy giao tuyến của (α) với các mặt phẳng (SBC) và (SAD) lần lượt là NP và MQ.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$. Gọi M là trung điểm của SB, mặt phẳng (α) đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC) cắt SA, SC lần lượt tại N, P. Khẳng định nào đúng?

A. (α) không trùng với (MNP).
B. MP cắt BC.
C. MN cắt AC.
D. $MP \,//\, BC$.

Lời giải

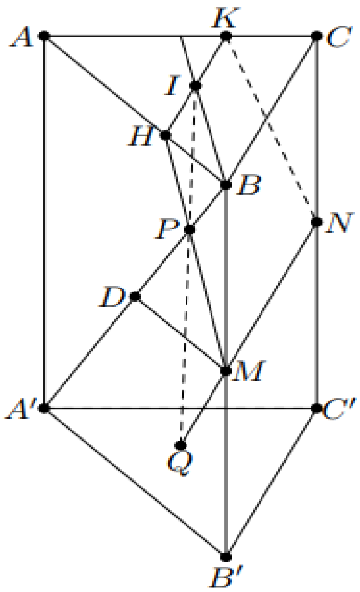


Theo cách xác định mặt phẳng (α) ta có $MP \,//\, BC$.

Câu 13: Cho lăng trụ tam giác $ABC \cdot A'B'C'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BB', CC'. Đường thẳng qua đi qua trọng tâm I của tam giác ABC cắt $A'B$ và MN lần lượt tại P, Q. Khi đó tỉ số $\frac{IP}{IQ}$ bằng

A. $\frac{3}{5}$.
B. $\frac{5}{2}$.
C. $\frac{2}{5}$.
D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải



Qua I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AC, AB tại H, K.
Suy ra $KH \,//\, MN$ do đó M, N, K, H, I đồng phẳng. Gọi $P = A'B \cap MH, Q = IP \cap MN$.

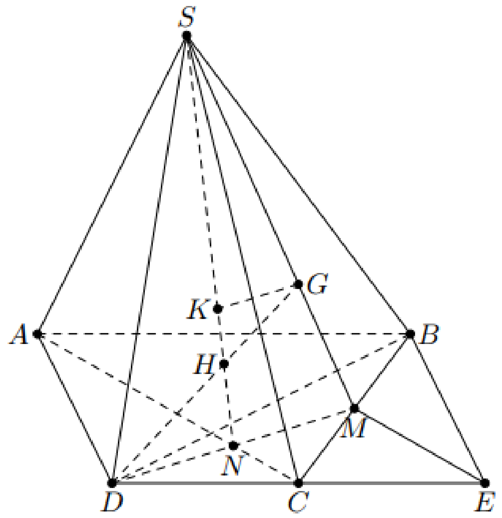
Kẻ $MD \,//\, A'B' \left(D \in A'B\right)$ ta được $\frac{HP}{PM} = \frac{HB}{DM} = \frac{\frac{1}{3} \cdot AB}{\frac{1}{2} \cdot A'B'} = \frac{2}{3}$.

Do đó $\frac{IP}{PQ}=\frac{HP}{PM}=\frac{2}{3}$ nên $\frac{IP}{PQ}=\frac{2}{5}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang với $AB//CD$ và $AB=2CD$. Gọi G là trọng tâm của tam giác SBC, H là giao điểm của DG và (SAC). Tỉ số $\frac{GH}{GD}$ bằng

A. $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{2}{5}$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của AC và MD.

Khi đó, $(SMD)\cap(SAC)=SN$.

Vì $DG\subset(SMD)$ và $DG\cap(SAC)=H$ nên $H\in SN$.

Gọi E là điểm đối xứng với D qua C thì tứ giác $ABED$ là hình bình hành. Suy ra $EM//AC$. Do đó, N là trung điểm của MD.

Dựng đường thẳng đi qua G song song với MN và cắt SN tại K.

Khi đó, $\frac{SG}{SM}=\frac{KG}{NM}$ và $\frac{HD}{HG}=\frac{DN}{KG}$.

Suy ra $\frac{SG}{SM}\cdot\frac{NM}{ND}\cdot\frac{HD}{HG}=\frac{KG}{NM}\cdot\frac{NM}{ND}\cdot\frac{ND}{KG}=1$.

Mặt khác $\frac{SG}{SM}=\frac{1}{3}$ và $\frac{NM}{ND}=1$ nên $\frac{2}{3}\cdot1\cdot\frac{HD}{HG}=1\Leftrightarrow\frac{HD}{HG}=\frac{3}{2}$.

Vậy $\frac{GH}{GD}=\frac{2}{5}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang và $AB // CD$. Gọi M là trung điểm của SD và (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

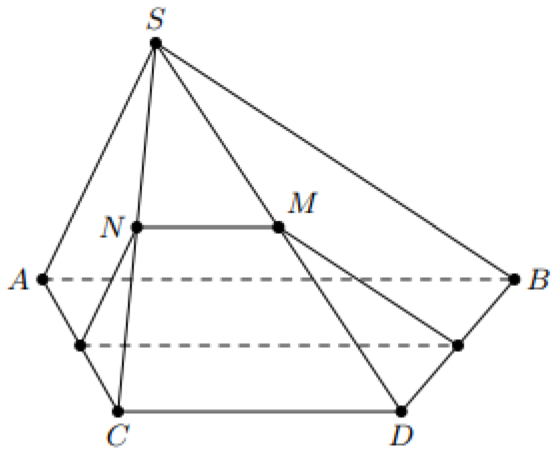
a) Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng (SCD)

b) Đường thẳng AB song song với mặt phẳng (P)

c) Đường thẳng CD cũng song song với mặt phẳng (P)

d) Giao điểm của (P) và SC là điểm N với N là trung điểm của SC

Lời giải



a) Sai: Mặt phẳng (P) cắt mặt phẳng (SCD)

b) Đúng: Hai mặt phẳng (P) và (SCD) có điểm M chung. Giả sử (P) cắt SC tại điểm N.
Khi đó $MN = (P) \cap (SCD)$ mà $(P) // (SAB)$ nên $AB // (P)$.

c) Đúng: Lại có $CD // AB, CD \not\subset (P)$ nên $CD // (P)$.

d) Đúng: Từ đó suy ra $MN // CD$, mà M là trung điểm của SD nên N là trung điểm của SC.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm H. Mặt phẳng (P) đi qua H và song song với (SAB). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$ là EF với E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD.

b) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) là EK với K là trung điểm của SD

c) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SAD) là FI với I là trung điểm của FE

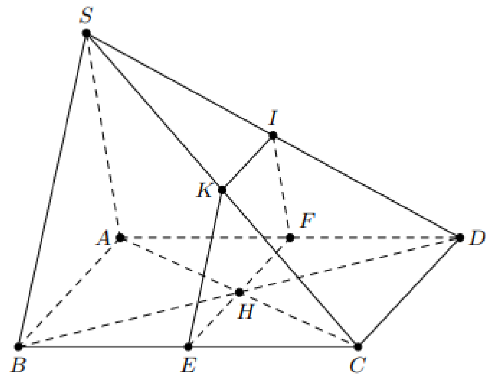
d) Giao tuyến của mặt phẳng (P) và mặt phẳng (SBC) là đường thẳng KE

Lời giải

a) Đúng: Ta có H là một điểm chung của mặt phẳng (P) và mặt phẳng $(ABCD)$, $(P) // (SAB)$ $(ABCD) \cap (SAB) = AB$ nên giao tuyến của (P) và $(ABCD)$ là đường thẳng qua H, song song với AB, cắt BC và AD lần lượt tại E, F.
Do H là tâm hình bình hành $ABCD$ nên E, F là trung điểm của BC và AD.

b) Sai: Theo cách dựng trên ta có (P) và (SBC) có điểm chung E.

Mặt phẳng $(P) // (SAB), (SBC) \cap (SAB) = SB$ nên giao tuyến của (P) và (SBC) là đường thẳng qua E, song song với SB, cắt SC tại K. Khi đó EK là đường trung bình của tam giác SBC nên K là trung điểm của SC.



c) Sai: Tương tự ta có giao tuyến của (P) và (SAD) là đường thẳng qua F, song song với SA và cắt SD tại I. Khi đó I là trung điểm của SD.

d) Đúng: Từ các kết quả trên ta có $(P) \cap (ABCD) = EF, (P) \cap (SAD) = FI$, $(P) \cap (SCD) = IK$ $(P) \cap (SBC) = KE$

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và SC, lấy điểm $P \in SA$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

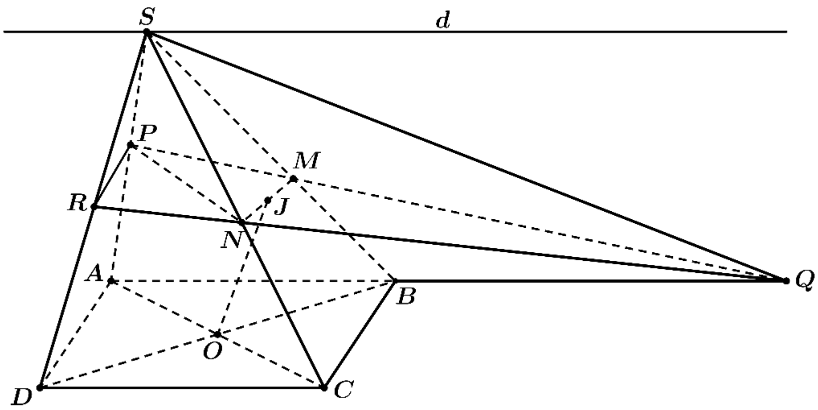
a) Giao tuyến (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AC và BD.

b) Giao điểm SD và (MNP) là R với $R = QN \cap SD$

c) Ba đường thẳng $PR; MN; AD$ đôi một song song

d) $OJ // (SAD)$.

Lời giải



a) Sai: Do AB song song với CD nên giao tuyến của (SAB) và (SCD) là đường thẳng d đi qua S và song song với AB và CD.

b) Đúng: Trong mặt phẳng (SAB) kéo dài PM cắt AB tại Q, trong mặt phẳng $(PMQR)$, kéo dài QN cắt SD tại R, giao điểm của SD và (MNP) là R.

c) Đúng: Do 3 mặt phẳng $(MNP); (ABC); (SAD)$ cắt nhau theo 3 giao tuyến là $PR; MN; AD$ nên chúng song song hoặc đồng quy.

Mặt khác : $MN \,//\, AD \Rightarrow MN \,//\, AD \,//\, PR$

d) Đúng: Ta có OM là đường trung bình trong tam giác $SBD \Rightarrow OM \,//\, SD$.

Tương tự ta có: $ON \,//\, SA \Rightarrow (OMN) \,//\, (SAD)$.

Mặt khác $OJ \subset (OMN) \Rightarrow OJ \,//\, (SAD)$.

Câu 4: Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Gọi I và I' lần lượt là trung điểm của BC và $B'C'$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

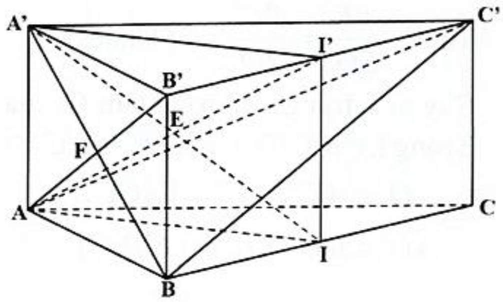
a) $II' \,//\, BB'$

b) $AA'I'I$ là hình bình hành

c) IA' song song $(AB'C')$.

d) Giao tuyến của $(AB'C')$ và $(A'BC')$ là đường thẳng đi qua giao điểm của hai đường thẳng $AI', A'I$

Lời giải



a) Đúng: Ta có I', I lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và BC.

Suy ra II' là đường trung bình của hình bình hành $BB'C'C$.

Suy ra $II' = BB'$ và $II' \,//\, BB'$.

b) Đúng: Ta có $\begin{cases} II' \,//\, AA'(\,//\, BB') \\ II' = AA'(= BB') \end{cases} \Rightarrow AA'I'I$ là hình bình hành. $\Rightarrow AI \,//\, A'I'$.

c) Sai: Trong $(IAA'I')$ gọi $E = AI' \cap A'I \Rightarrow \begin{cases} E \in AI'; AI' \subset (AB'C') \\ E \in A'I \end{cases} \Rightarrow E = A'I \cap (AB'C')$

d) Đúng: Trong $(AA'B'B)$ gọi $F = AB' \cap A'B$

$\Rightarrow \begin{cases} F \in AB'; AB' \subset (AB'C') \\ F \in A'B; A'B \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow F \in (AB'C') \cap (A'BC')$ (1)

Ta có $E = AI' \cap A'I \Rightarrow \begin{cases} E \in AI'; AI' \subset (AB'C') \\ E \in A'I; A'I \subset (A'BC') \end{cases} \Rightarrow E \in (AB'C') \cap (A'BC')$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $EF = (AB'C') \cap (A'BC')$.

-----------------HẾT-----------------

Dạng 3: Xác định thiết diện bằng cách kẻ song song

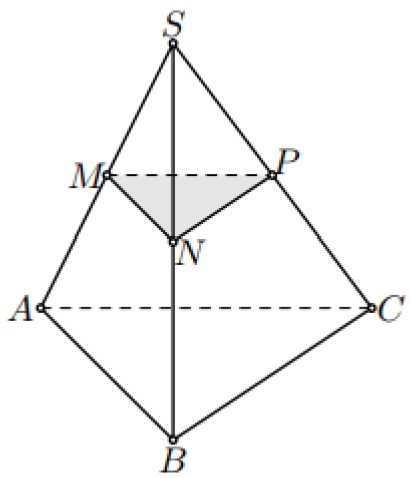
Phương pháp: Để xác định được thiết diện của một hình chóp hoặc hình lăng trụ cắt bởi mặt phẳng (P) ta thường dựng các đoạn giao tuyến của (P) với các mặt của hình chóp hoặc hình lăng trụ đó. Khi ấy, ta sử dụng định lí sau:

- Cho hai mặt phẳng song song. Nếu một mặt phẳng cắt mặt phẳng này thì cuang cắt mặt phẳng kia theo hai giao tuyến song song với nhau.

BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S\cdot ABC$. Gọi M là trung điểm SA. Xác định thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC).

Lời giải



Ta có M là một điểm chung của (P) và (SAB)

Do $\begin{cases}(P)\,/\!/\,(ABC)\\(SAB)\cap(ABC)\end{cases}=AB$ nên giao tuyến của (P) và (SAB) là đường thẳng đi qua M song song với AB và cắt SB tại trung điểm N của SB.

Tương tự, giao tuyến của (P) và (SAC) là đường thẳng đi qua M, song song với AC và cắt SC tại trung điểm P của SC.

Vậy thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác MNP.

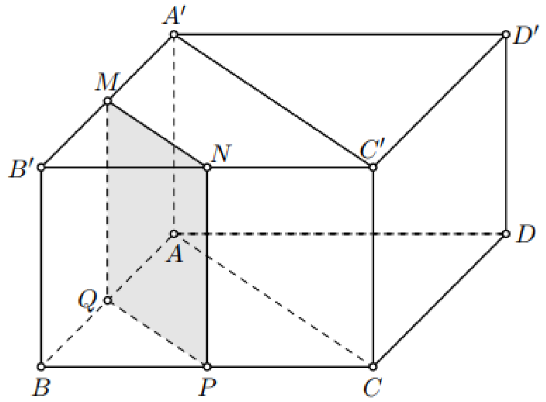
Bài tập 2: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Tìm thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P) đi qua M và song song với mặt phẳng $(A'C'C)$. Thiết diện là hình gì?

Lời giải

Vì (P) song song với $(A'C'C)$ nên (P) song song với $(A'C'CA)$.

Suy ra giao tuyến của (P) với $(A'B'C'D')$ là đường thẳng đi qua M, song song với $A'C'$ và cắt $B'C'$ tại trung diểm N của $B'C'$.

Tương tự, giao tuyến của (P) với $(B'C'CB)$ là đường thẳng di qua N, song song với $C'C$ và cắt BC tại trung diểm P của BC.



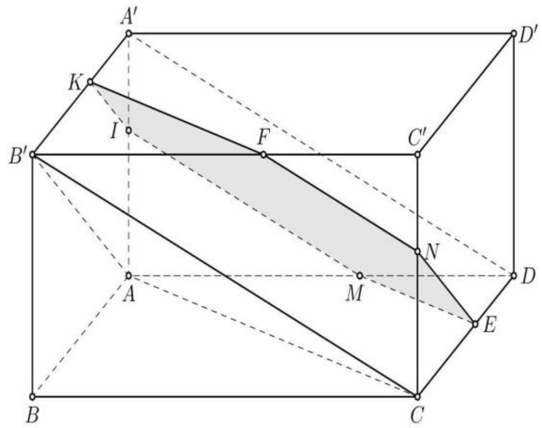
Giao tuyến của (P) với $(A'B'BA)$ là đường thẳng đi qua M, song song với $A'A$ và cắt AB tại trung điểm Q của AB.

Vậy thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$.

Do NP song song và bằng $CC'; MQ$ song song và bằng AA' nên tứ giác $MNPQ$ là hình bình hành.

Bài tập 3: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Hai điểm M, N lần lượt nằm trên hai cạnh AD, CC' sao cho $\dfrac{AM}{MD} = \dfrac{CN}{NC'}$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng qua MN và song song với (ACB')

Lời giáii



Gọi I là điểm trên AA' sao cho $\dfrac{AI}{IA'} = \dfrac{AM}{MD}$ suy ra $IM \,//\, A'D$ suy ra $IM \,//\, CB'$

Lại có $\dfrac{AI}{IA'} = \dfrac{CN}{NC'}$ suy ra $IN \,//\, AC$ suy ra $(MNI) \,//\, (ACB')$.

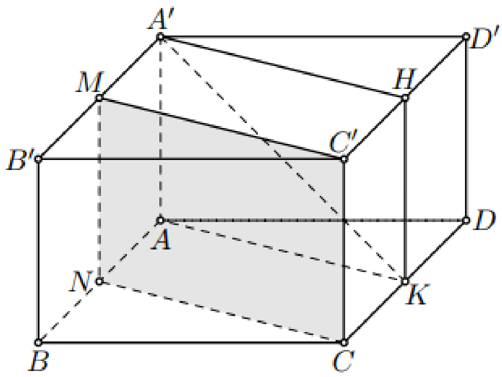
Do đó mặt phẳng (MNI) là mặt phẳng đi qua M, N và song song vưới mặt phẳng (ACB').

Qua M kẻ $ME \,//\, AC$; qua N kẻ $NF \,//\, B'C'$, qua F kẻ $FK \,//\, A'C'$.

Khi đó thiết diện cần tìm là đa giác $MENFKI$.

Bài tập 4: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi K là trung điểm CD. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua C' và song song với $(A'AK)$. Xác định thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (P).

Lời giải



Gọi H là trung điểm $C'D' \Rightarrow KH // AA' \Rightarrow H \in (A'AK)$.

Qua C' kẻ đường thẳng song song với $A'H$, cắt $A'B'$ tại M.

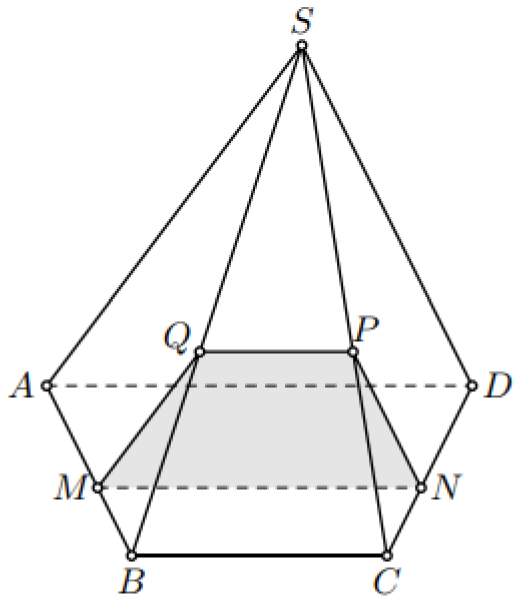
Qua C kẻ đường thẳng song song với AK, cắt AB tại N.

Suy ra mặt phẳng $(CC'MN)$ là mặt phẳng đi qua C' và song song với $(A'AK)$.

Thiết diện cần tìm là hình bình hành $CC'MN$.

Bài tập 5: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình thang, đáy lớn $AD = 3a, AB = BC = a$. Mặt bên (SAD) là tam giác cân đỉnh S với $SA = 2a$, gọi M là điểm thuộc cạnh AB và không trùng với A, B. Mặt phẳng (α) đi qua M và song song với (SAD). Xác định thiết diện của chóp với mặt phẳng (α). Thiết diện là hình gì?

Lời giải



Qua M kẻ đường thẳng song song với AD, cắt CD tại N.

Qua M kẻ đường thẳng song song với SA, cắt SB tại Q.

Qua Q kẻ đường thẳng song song với BC, cắt SC tại P.

Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng qua M và song song với (SAD).

Do đó, thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.

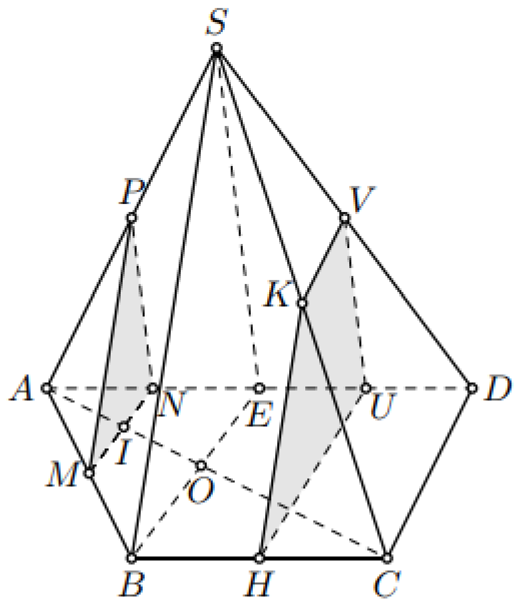
Bởi vì MN và PQ cùng song song với BC (hoặc AD) nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Áp dụng định lí Thales trong các tam giác SAB, SBC, SCD ta được $\frac{BM}{BA} = \frac{MQ}{SA} = \frac{BQ}{BS} = \frac{CP}{CS} = \frac{CN}{CD} = \frac{NP}{SD} \Rightarrow \frac{MQ}{SA} = \frac{NP}{SD}$ mà tam giác SAD cân tại S do đó $MQ = NP$.

Vậy $MNPQ$ là hình thang cân.

Bài tập 6: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD$ có $AD \parallel BC, AD = 2BC$. Gọi E là trung điểm AD và O giao điểm của AC và BE; I là một điểm di động trên AC khác A và C. Qua I vẽ mặt phẳng (α) song song với (SBE). Tìm thiết diện tạo bởi (α) và hình chóp $S.ABCD$.

Lời giải



Trường hợp 1: Điểm I nằm giữa A và O.

Qua I kẻ đường thẳng song song với BE cắt AB, AD lần lượt tại M và N.

Qua M kẻ đường thẳng song song với SB cắt SA tại P.

Suy ra (MNP) là mặt phẳng đi qua I và song song với (SBE).

Do đó, thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tam giác MNP.

Trường hợp 2: Điểm I nằm giữa C và O.

Qua I kẻ đường thẳng song song với BE cắt BC, AD lần lượt tại H và U.

Qua H kẻ đường thẳng song song với SB cắt SC tại K.

Qua U kẻ đường thẳng song song với SE cắt SD tại V.

Suy ra $(HKVU)$ là mặt phẳng đi qua I và song song với (SBE).

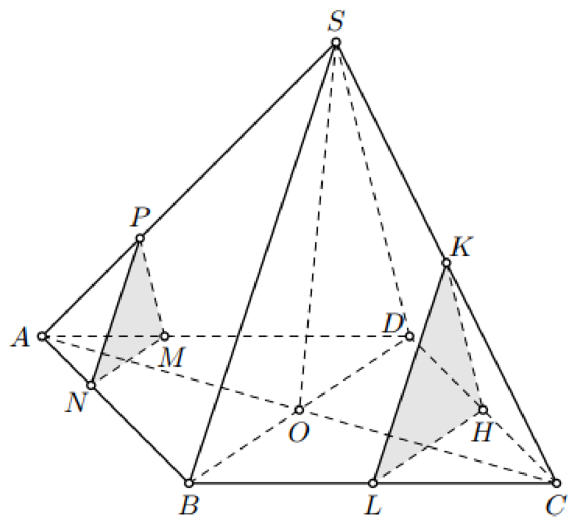
Do đó thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) là tứ giác $HKVU$.

Bài tập 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình bình hành tâm O có $AC = a, BD = b$. Tam giác SBD là tam giác đều. Một mặt phẳng (α) di động song song với mặt phẳng (SBD) và đi qua điểm I trên đoạn AC.

a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

b) Tính diện tích thiết diện theo a,b và $x = AI$.

Lời giải



a) Xác định thiết diện của hình chóp với mặt phẳng (α).

Nếu $I \in OA$ thì ta có $\begin{cases} (\alpha) /\!/ (SBD) \\ (ABD) \cap (SBD) = BD \Rightarrow (\alpha) \cap (ABD) = MN \\ I \in (\alpha) \cap (ABD) \end{cases}$ với MN qua I và $MN /\!/ BD$.

Tương tự (α) cắt (SAB) theo đoạn giao tuyến MP song song với SB cắt (SAD) theo đoạn giao tuyến $NP /\!/ SD$. Thiết diện là tam giác đều MNP (vì đồng dạng với tam giác đều SBD)

Nếu $I \in OC$ thì thiết diện là tam giác đều HKL có các cạnh tương ứng song song với cạnh tam giác SBD.

b) Tính diện tích thiết diện theo a,b và $x = AI$. Ta có $S_{\Delta BCD} = \dfrac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

Nếu I nằm giữa O và A thì $0 < x < \dfrac{a}{2}$.

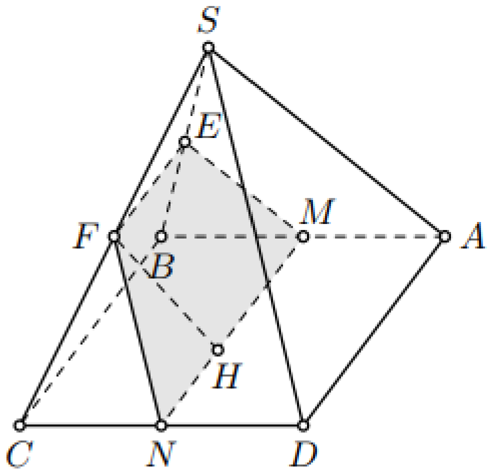
Khi đó $\dfrac{S_{\Delta MNP}}{S_{\Delta BCD}}=\left(\dfrac{MN}{BD}\right)^2$. Do $MN\,//\,BD$ suy ra $\dfrac{MN}{BD}=\dfrac{AI}{AO}=\dfrac{2x}{a}\Rightarrow S_{\Delta MNP}=\dfrac{b^2x^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Nếu I nằm giữa O và C thì $\dfrac{a}{2}<x<a$.

Khi đó $\dfrac{S_{\Delta HKL}}{S_{\Delta BCD}}=\left(\dfrac{HL}{BD}\right)^2$. Do $HL\,//\,BD\Rightarrow\dfrac{HL}{BD}=\dfrac{CI}{CO}=\dfrac{2(a-x)}{a}\Rightarrow S_{\Delta MNP}=\dfrac{b^2(a-x)^2\sqrt{3}}{a^2}$.

Bài tập 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a, tam giác SAD là tam giác đều. Gọi M là một điểm thuộc cạnh $AB, AM=x$ với $0<x<a$. Mặt phẳng (P) đi qua M song song với (SAD). Tính diện tích thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P).

Lời giải



Do mặt phẳng (P) đi qua điểm M và song song với (SAD) nên cắt các cạnh của hình chóp bằng các giao tuyến đi qua M và song song với mặt phẳng (SAD).

Do $ABCD$ là hình thoi và tam giác SAD đều nên thiết diện thu được là hình thang cân $MNFE$ với $MN\,//\,EF, ME=NF$.

Khi đó $MN=a, \dfrac{EF}{BC}=\dfrac{SF}{SC}=\dfrac{MA}{AB}=\dfrac{x}{a}\Rightarrow EF=x$ và $MF=a-x$.

Kẻ đường cao $FH, H\in MN$ ta có $FH=\sqrt{MF^2-\left(\dfrac{MN-EF}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(a-x)$.

Vậy diện tích hình thang là $S=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(a^2-x^2\right)$.

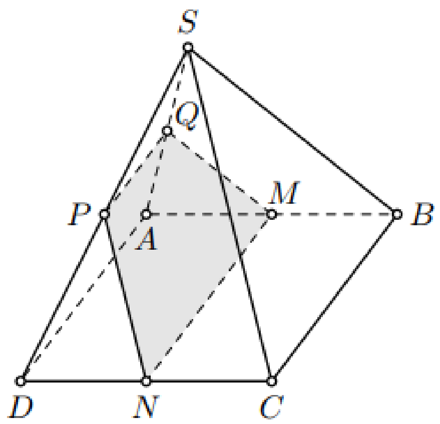
BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho hình vuông $ABCD$ và tam giác đều SAB nằm trong hai mặt phẳng khác nhau. Gọi M là điểm di động trên đoạn AB. Mặt phẳng (α) qua M song song với (SBC) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là

A. Hình tam giác. **B.** Hình vuông. **C.** Hình bình hành. **D.** Hình thang.

Lời giải



Do $(\alpha)//(SBC)$ nên (α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến $MN//BC,(N\in CD)$.

Hoàn toàn tương tự, ta có (α) cắt các mặt phẳng (SAB) và (SCD) theo các giao tuyến MQ,NP ở đó $Q\in SA$ và $MQ//SB; P\in SD$ và $NP//SC$.

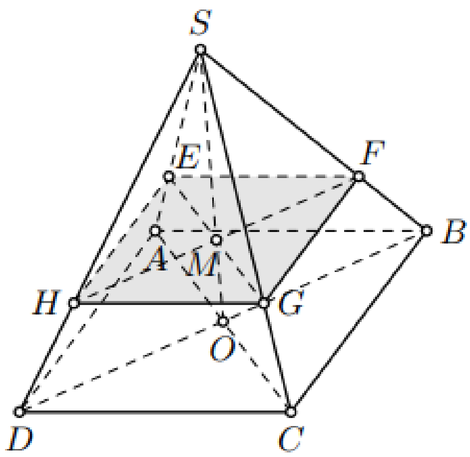
Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Dễ thấy $PQ//AD, PQ\neq AD$ từ đó suy ra $MNPQ$ là hình thang.

Câu 2: Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Gọi M là điểm bất kì trên đoạn thẳng SO. Mặt phẳng (α) qua M và song song với $(ABCD)$. Thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

A. Hình bình hành. **B.** Hình tam giác. **C.** Hình ngũ giác. **D.** Hình thang cân.

Lời giải



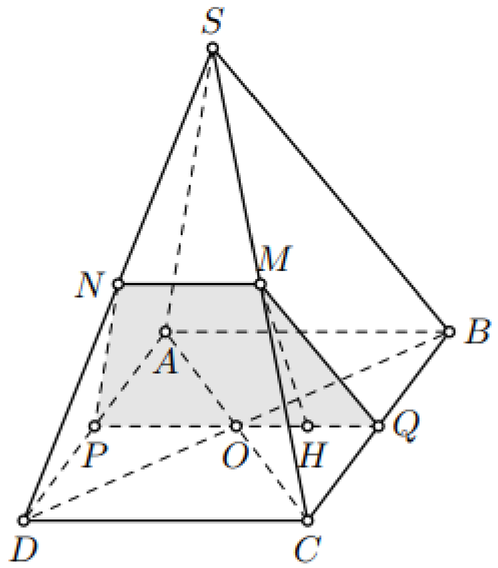
Xét mặt phẳng (SAC) và mặt phẳng (α) có M là điểm chung và $AC // (\alpha)$ nên giao tuyến là đường thẳng đi qua M và song song với AC cắt SA, SC lần lượt tại E, G. Tương tự (α) cắt SB, SD lần lượt tại F, H. Khi đó thiết diện cần tìm là tứ giác $EFGH$.

Ta có $EF // GH$ và $FG // EH$ nên thiết diện là hình bình hành.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm $O, AB = 8, SA = SB = 6$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua O và song song với (SAB). Tính diện tích của thiết diện của (P) và hình chóp $S \cdot ABCD$.

A. 12. **B.** $5\sqrt{5}$. **C.** $6\sqrt{5}$. **D.** 13.

Lời giải



Qua O dựng đường thẳng $PQ // AB \Rightarrow P, Q$ lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Qua P dựng đường thẳng $PN // SA \Rightarrow N$ là trung điểm của SD.

Qua Q dựng đường thẳng $QM // SB \Rightarrow M$ là trung điểm của SC.

Nối M và $N \Rightarrow$ thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ là tứ giác $MNPQ$.

Vì $PQ // CD, MN // CD \Rightarrow PQ // MN$ nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Ta có $PQ = AB = 8, MN = \frac{1}{2}AB = 4, MQ = NP = \frac{1}{2}SA = 3$ suy ra $MNPQ$ là hình thang cân.

Gọi H là chân đường cao hạ từ đỉnh M của hình thang $MNPQ$.

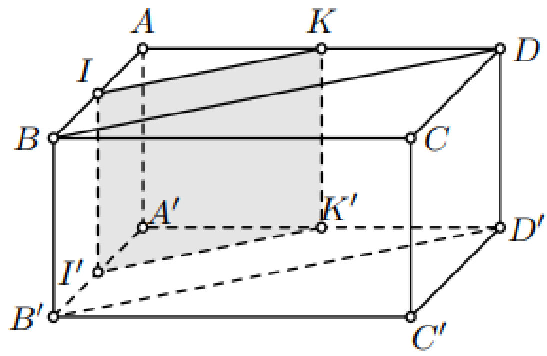
Khi đó ta có $HQ = \frac{1}{4}PQ = 2 \Rightarrow MH = \sqrt{MQ^2 - HQ^2} = \sqrt{5}$.

Vậy diện tích của thiết diện cần tìm là: $S = \frac{(MN + PQ) \cdot MH}{2} = 6\sqrt{5}$.

Câu 4: Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Gọi I là trung điểm của cạnh $AB, (\alpha)$ là mặt phẳng đi qua I và song song với mặt phẳng (BDD'). Thiết diện của hình hộp cắt bởi mặt phẳng (α) là hình gì?

A. Hình tam giác. **B.** Hình bình hành. **C.** Hình ngũ giác. **D.** Hình thang.

Lời giải



Qua I kẻ đường thẳng song song với BD cắt AD tại K.

Qua K kẻ đường thẳng song song với DD' cắt $A'D'$ tại K'.

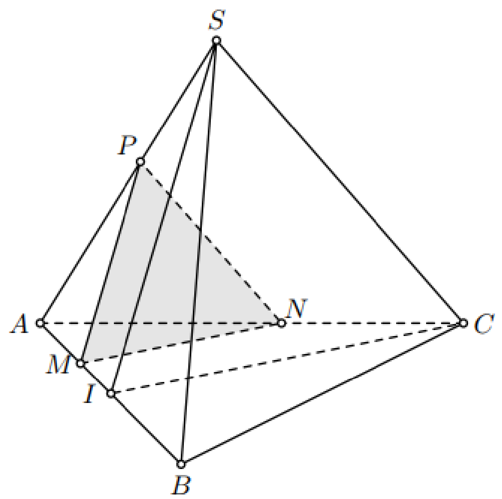
Qua I kẻ đường thẳng song song với BB' cắt $A'B'$ tại I'.

Thiết diện cần tìm là hình bình hành $IKK'I'$.

Câu 5: Cho tứ diện đều $SABC$. Gọi I là trung điểm của đoạn AB, M là điểm di động trên đoạn AI. Qua M vẽ mặt phẳng (α) song song với (SIC). Thiết diện tạo bởi (α) với tứ diện $SABC$ là

A. Tam giác cân tại M. **B.** Hình bình hành. **C.** Tam giác đều. **D.** Hình thoi.

Lời giải



Trong mặt phẳng (SAB) qua M kẻ đường thẳng song song với SI cắt SA tại P.

Trong mặt phẳng (ABC) qua M kẻ đường thẳng song song với IC cắt AC tại N.

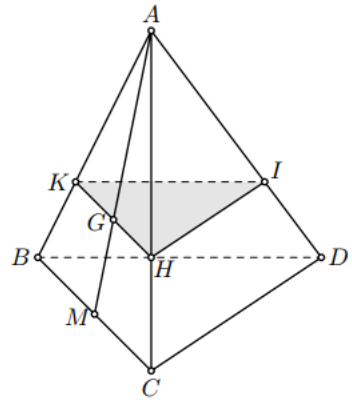
Thiết diện là tam giác MNP. Ta có $\dfrac{MP}{SI}=\dfrac{MN}{CI}\Rightarrow MP=MN$ (vì $SI=CI$)

Vậy thiết diện là tam giác MNP cân tại M.

Câu 6: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a và G là trọng tâm tam giác ABC. Cắt tứ diện bởi mặt phẳng (P) qua G và song song với mặt phẳng (BCD) thì diện tích thiết diện bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{16}$. **B.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. **C.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{9}$. **D.** $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{18}$.

Lời giải



Trong mặt phẳng (ABC) kẻ đường thẳng qua G và song song với BC cắt AC, AB lần lượt tại H, K.

Trong mặt phẳng (ACD) kẻ đường thẳng qua H và song song với CD cắt AD tại I.

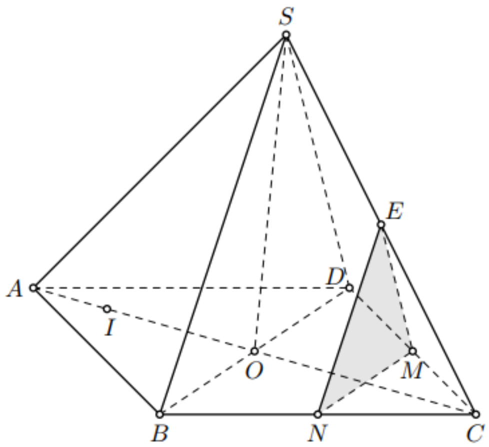
Thiết diện cần tìm là tam giác KHI. Ta có: $\Delta HKI \backsim \Delta BCD$ theo tỉ số đồng dạng bằng $\frac{2}{3}$.

Do đó: $S_{KHI} = \frac{4}{9} S_{BCD} = \frac{4}{9} \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{9}$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành tâm O. Tam giác SBD đều. Một mặt phẳng (P) song song với (SBD) và qua điểm I thuộc cạnh AC (không trùng với A hoặc C). Thiết diện của (P) và hình chóp là hình gì?

A. Hình bình hành.
B. Tam giác đều.
C. Tam giác vuông.
D. Tam giác cân không đều.

Lời giải



Trường hợp 1: Điểm I thuộc đoạn OC. Gọi M, N, E lần lượt là giao điểm của (P) với các đường thẳng CD, BC, SC. Ta có thiết diện của (P) và hình chóp là tam giác EMN.

$$\begin{cases} (P) \parallel (SBD) \\ (ABCD) \cap (SBD) = BD \\ (P) \cap (ABCD) = MN \end{cases} \Rightarrow MN \parallel BD \Rightarrow \frac{MN}{BD} = \frac{CM}{CD} = t \Rightarrow MN = t.BD$$

$$\begin{cases}(P)/\!/(SBD)\\(SCD)\cap(SBD)=SD\\(P)\cap(SCD)=ME\end{cases}\Rightarrow ME/\!/SD\Rightarrow\frac{ME}{SD}=\frac{CM}{CD}=t\Rightarrow ME=t.SD.$$

Tương tự $EN//SB$ và $EN=t\cdot SB$

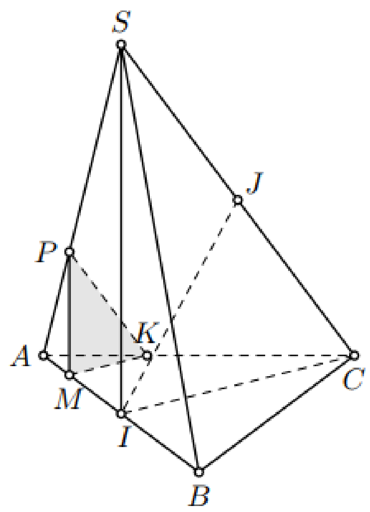
Mà $SB=BD=SD\Rightarrow MN=EM=EN$, suy ra tam giác MNE là tam giác đều.

Trường hợp 2: Điểm I thuộc OA. Làm tương tự như trên ta được thiết diện của (P) và hình chóp cũng là một tam giác đều.

Câu 8: Cho tứ diện đều $S\cdot ABC$. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của AB và SC. Xét M là một điểm di động trên đoạn thẳng AI. Qua M kẻ mặt phẳng (α) song song với (CIJ). Khi đó thiết diện của mặt phẳng (α) và tứ diện $S.ABC$ là hình gì?

A. Tam giác đều. **B.** Hình bình hành.
C. Tam giác cân tại M. **D.** Hình thang cân.

Lời giải



Nhận xét mặt phẳng (CIJ) chính là mặt phẳng (SCI).

Qua M kẻ đường thẳng song song với IC cắt AC tại K.

Qua M kẻ đường thẳng song song với SI cắt SA tại P.

Thiết diện là tam giác MPK.

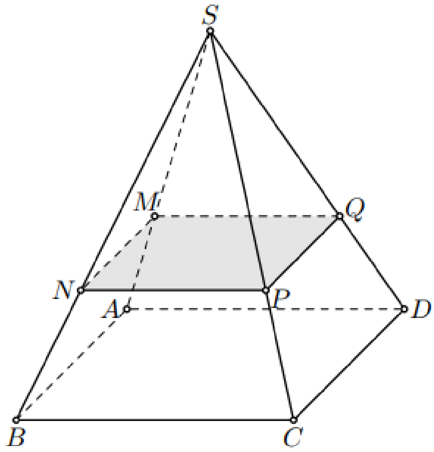
Ta có: $CI=SI\neq SC$ nên tam giác SCI cân tại I mà $\Delta PKM\sim\Delta SCI$.

Do đó tam giác PKM cân tại M.

Câu 9: Cho hình chóp tứ giác đều $S\cdot ABCD$ có cạnh đáy bằng 10. Gọi M là điểm trên SA sao cho $\frac{SM}{SA}=\frac{2}{3}$. Một mặt phẳng (α) đi qua M song song với AB và AD, cắt hình chóp theo một tứ giác có diện tích là

A. $\frac{20}{3}$. **B.** $\frac{400}{9}$. **C.** $\frac{4}{9}$. **D.** $\frac{16}{9}$.

Lời giải



$\begin{cases} AB \,//\, (\alpha) \\ AB \subset (SAB) \\ M \in (SAB) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAB) = Mx \,//\, AB$

$\begin{cases} AD \,//\, (\alpha) \\ AD \subset (SAD) \\ M \in (SAD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SAD) = My \,//\, AD$.

Hai tia Mx, My cắt SB, SD lần lượt tại N, Q và $\begin{cases} CD \,//\, (\alpha) \\ CD \subset (SCD) \\ Q \in (SCD) \cap (\alpha) \end{cases} \Rightarrow (\alpha) \cap (SCD) = Qz \,//\, CD$

Tia Qz cắt SC tại P nên thiết diện cần tìm là tứ giác $MNPQ$.

Dễ thấy $\frac{2}{3} = \frac{SM}{SA} = \frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{QM}{DA} \Rightarrow MN = NP = PQ = QM = \frac{20}{3}$.

Mặt khác $MN \,//\, AB, NP \,//\, BC \Rightarrow (MN, NP) = (AB, BC) = 90° \Rightarrow MNPQ$ là hình vuông với cạnh $\frac{20}{3} \Rightarrow S_{MNPQ} = \left(\frac{20}{3}\right)^2 = \frac{400}{9}$.

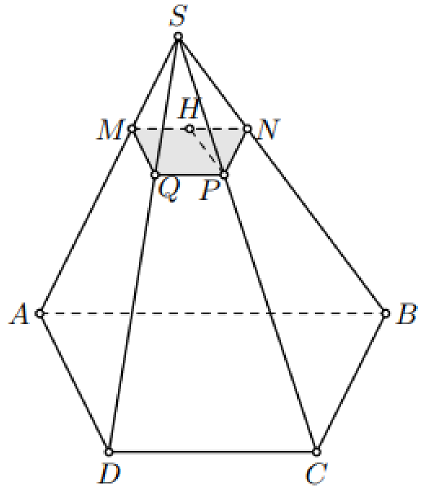
Câu 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 3$. Hai đáy $AB = 8$ và $CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với mặt phẳng $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

A. $\frac{2\sqrt{5}}{9}$. **B.** $\frac{2\sqrt{5}}{3}$. **C.** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$. **D.** $\frac{7\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của (P) với các cạnh SB, SC, SD. Suy ra thiết diện của (P) với hình chóp là tứ giác $MNPQ$.

Do $(P) \,//\, (ABCD)$ nên $\frac{MN}{AB} = \frac{NP}{BC} = \frac{PQ}{CD} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{3} \Rightarrow MN = \frac{8}{3}, NP = 1, PQ = \frac{4}{3}, QM = 1$.



Gọi H là hình chiếu của P trên cạnh MN. Do $MNPQ$ là hình thang cân nên

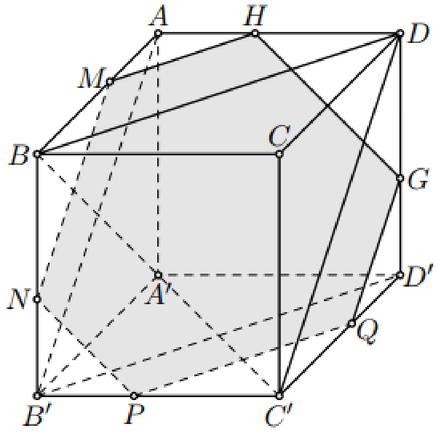
$$HN = \frac{MN - PQ}{2} = \frac{2}{3} \Rightarrow PH = \sqrt{PN^2 - HN^2} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Vậy $S_{MNPQ} = \frac{1}{2}.PH.\left(MN + PQ\right) = \frac{2\sqrt{5}}{3}$.

Câu 11: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ và điểm M nằm giữa hai điểm A và B. Gọi $\left(P\right)$ là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng $\left(AB'D'\right)$. Mặt phẳng $\left(P\right)$ cắt hình hộp theo thiết diện là hình gì?

A. Hình tứ giác. **B.** Hình tam giác. **C.** Hình lục giác. **D.** Hình ngũ giác.

Lời giải



Nhận thấy $\left(BC'D\right)//\left(AB'D'\right) \Rightarrow \left(BC'D\right)//\left(AB'D'\right)//\left(P\right)$ (1)

Do (1) ta giả sử $\left(P\right)$ cắt BB' tại N suy ra $\left(P\right) \cap \left(ABB'A'\right) = MN$

Mà $\left(AB'D'\right) \cap \left(ABB'A'\right) = AB'$ suy ra $MN \,//\, AB'$ suy ra N thuộc cạnh BB'.

Tương tự giả sử $\left(P\right) \cap B'C' = P$ suy ra $\left(P\right) \cap \left(BCC'B'\right) = NP$ kết hợp với (1) suy ra $NP \,//\, BC'$

Tương tự $\left(P\right) \cap C'D' = Q$ sao cho $PQ \,//\, B'D'; \left(P\right) \cap DD' = G$ sao cho $QG \,//\, C'D$

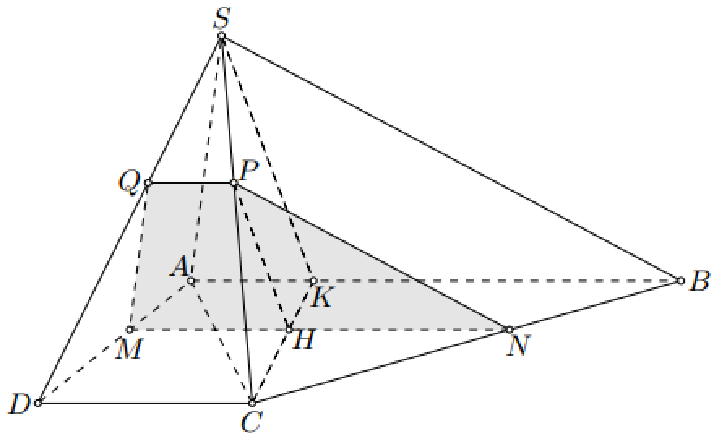
Hơn nữa $\left(P\right) \cap AD = H$ sao cho $GH \,//\, AD'$.

Từ đó suy ra thiết diện là lục giác $MNPQGH$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD, AB//CD, AB=2CD, M$ là điểm thuộc cạnh $AD, (\alpha)$ là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB). Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB, tính tỉ số $x=\frac{MA}{MD}$.

A. $x=1$. **B.** $x=\frac{2}{3}$. **C.** $x=\frac{3}{2}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

Lời giải



Ta có $\begin{cases}(\alpha)//(SAB)\\(ABCD)\cap(SAB)=AB\\M\in(\alpha)\cap(ABCD)\end{cases}$ với AB, đường thẳng này cắt BC tại N.

Tương tự giao tuyến của (α) và (SBC) là đường thẳng qua N song song SB cắt SC tại P, giao tuyến của (α) và (SCD) là đường thẳng qua P song song CD cắt SD tại Q. Thiết diện của $S.ABCD$ khi cắt bởi (α) là hình thang $MNPQ$.

Đặt $CD=a$ ta có $\frac{PQ}{CD}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}=\frac{x}{x+1}\Leftrightarrow PQ=\frac{ax}{x+1}$.

Trong hình thang $ABCD$ ta có $MN=\frac{x}{x+1}CD+\frac{1}{x+1}AB=\frac{a(x+2)}{x+1}$.

Gọi K là hình chiếu của S lên AB, H là giao của MN và CK khi đó $PH // SK$

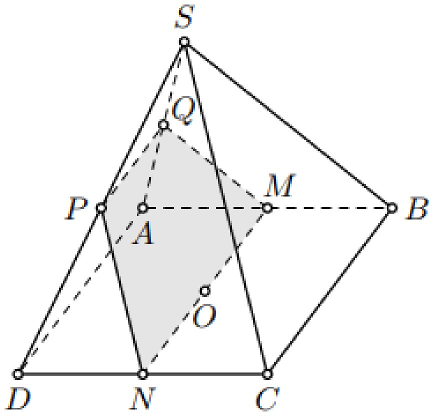
Do đó $PH\perp MN$ và $\frac{PH}{SK}=\frac{CH}{CK}=\frac{DM}{DA}=\frac{1}{x+1}$ nên $\frac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}}=\frac{(PQ+MN).PH}{SK.AB}=\frac{1}{x+1}$.

Theo giả thiết $\frac{1}{x+1}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Câu 13: Cho hình chóp $S\cdot ABCD$ có đáy là hình vuông tâm O, cạnh a, các cạnh bên đều bằng $2a$. Gọi (α) là mặt phẳng đi qua O và song song với mặt phẳng (SBC). Tính chu vi P của thiết diện tạo bởi mặt phẳng (α) và hình chóp $S.ABCD$.

A. $P=\frac{7a}{2}$. **B.** $P=\frac{11a}{2}$. **C.** $P=\frac{9a}{2}$. **D.** $P=\frac{5a}{2}$.

Lời giải



Do $(\alpha)\,//\,(SBC)$ nên (α) cắt mặt phẳng $(ABCD)$ theo giao tuyến đi qua O song song với BC và cắt AB tại M, cắt CD tại N.

Hoàn toàn tương tự ta có (α) cắt các mặt phẳng (SAB) và (SCD) theo các giao tuyến MQ, NP ở đó $Q\in SA$ và $MQ\,//\,SB; P\in SD$ và $NP\,//\,SC$.

Mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABCD$ theo thiết diện là tứ giác $MNPQ$.

Lại có O là trung điểm AC nên M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, CD, SD, SA.

Suy ra $MN=a, NP=\frac{1}{2}SC=a, MQ=\frac{1}{2}SB=a, PQ=\frac{1}{2}AD=\frac{a}{2}$.

Vậy chu vi của thiết diện là $P=MN+NP+PQ+QM=a+a+\frac{a}{2}+a=\frac{7a}{2}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $ABCD, AB//CD, AB=2CD. M$ là điểm thuộc cạnh $AD, (\alpha)$ là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAB). Biết diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng $\frac{2}{3}$ diện tích tam giác SAB. Tính tỉ số $x=\frac{MA}{MD}$.

A. $x=1$. **B.** $x=\frac{3}{2}$. **C.** $x=\frac{2}{3}$. **D.** $x=\frac{1}{2}$.

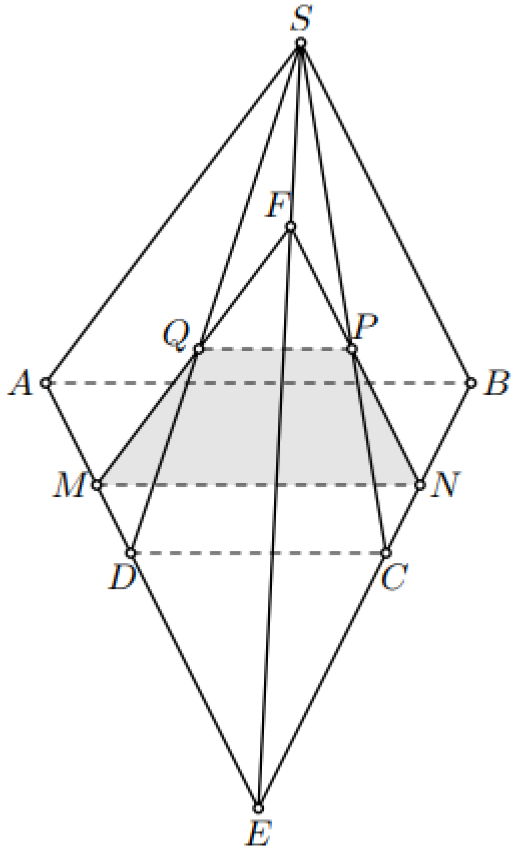
Lời giải

Dễ thấy, thiết diện là hình thang $MNPQ$ (như hình vẽ)

Khi đó: $MN\,//\,AB$, $MQ\,//\,SA, PQ\,//\,CD, NP\,//\,SB$.

Gọi $E=AD\cap BC$ và $F=MQ\cap NP$. Đặt $MD=1$ vì $x=\frac{MA}{MD}$ nên $MA=x, AD=x+1$.

$$\frac{QP}{DC}=\frac{SQ}{SD}=\frac{AM}{AD}=\frac{x}{x+1}\Rightarrow\frac{QP}{AB}=\frac{x}{2(x+1)} \text{ mà } \frac{MN}{AB}=\frac{EM}{EA}=\frac{x+2}{2x+2}\Rightarrow\frac{QP}{MN}=\frac{x}{x+2}.$$



$$\frac{S_{FPQ}}{S_{FMN}}=\frac{FQ}{FM}\cdot\frac{FP}{FN}=\left(\frac{QP}{MN}\right)^2=\left(\frac{x}{x+2}\right)^2=\frac{x^2}{(x+2)^2}.$$

$$\frac{S_{FMN}}{S_{SAB}}=\frac{FM}{SA}\cdot\frac{FN}{SB}=\frac{EM}{EA}\cdot\frac{EN}{EB}=\left(\frac{MN}{AB}\right)^2=\left(\frac{x+2}{2x+2}\right)^2\Rightarrow S_{FMN}=\frac{(x+2)^2}{(2x+2)^2}\cdot S_{\Delta SAB}.$$

$$\Rightarrow\frac{S_{FPQ}}{S_{SAB}}=\left(\frac{x}{x+2}\right)^2\cdot\left(\frac{x+2}{2x+2}\right)^2=\frac{x^2}{(2x+2)^2}\Rightarrow S_{FPQ}=\frac{x^2}{(2x+2)^2}\cdot S_{SAB}\Rightarrow S_{MNPQ}=S_{FMN}-S_{FPQ}$$

$$=\left[\frac{(x+2)^2}{(2x+2)^2}-\frac{x^2}{(2x+2)^2}\right]\cdot S_{\Delta SAB}=\frac{4x+4}{(2x+2)^2}\cdot S_{\Delta SAB}\Rightarrow\frac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}}=\frac{4x+4}{(2x+2)^2}.$$

Theo đề bài ta có $\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{SAB}}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{4x+4}{(2x+2)^2}=\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow 8x^2+4x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{2}\\ x=-1\end{array}\right.$.

Vì $x>0$ nên $x=\dfrac{1}{2}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tam giác SAD đều. Đáy $ABCD$ là hình thang có $AD \parallel BC$ và $AB = BC = CD = 1, AD = 2$. Gọi (P) là mặt phẳng qua điểm M nằm trên cạnh AB và song song với (SAD). Đặt $BM = x$ với $(0 < x < 1)$. Tìm x để thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác SAD

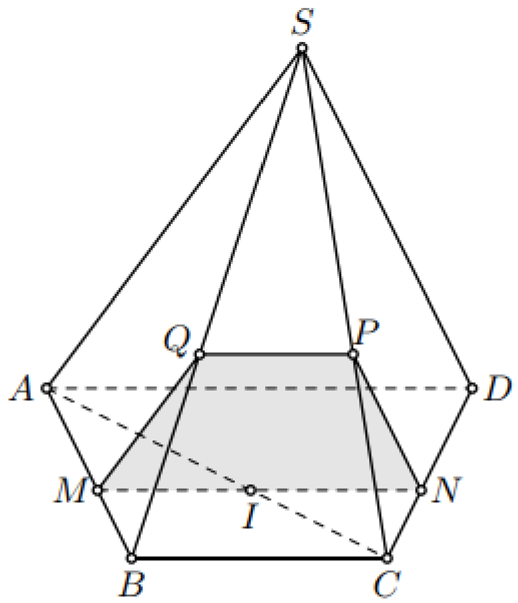
a) Thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là một mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (SAD).

b) Thiết diện cần tìm là một lục giác đều

c) Qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt CD tại N thì $MN = 1 - x$

d) Để thiết diện của $S.ABCD$ cắt bởi (P) có diện tích bằng một nửa diện tích tam giác SAD thì giá trị của $x = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Lời giải



a) Đúng: Qua M kẻ đường thẳng song song với AD cắt CD tại N.

Qua M kẻ đường thẳng song song với SA cắt SB tại Q.

Qua Q kẻ đường thẳng song song với BC cắt SC tại P.

Suy ra $(MNPQ)$ là mặt phẳng qua M và song song với (SAD).

b) Sai: Do đó thiết diện của hình chóp $S.ABCD$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tứ giác $MNPQ$.

c) Sai: Bởi vì MN và PQ cùng song song với BC (hoặc AD) nên tứ giác $MNPQ$ là hình thang.

Tam giác SAD đều, cạnh $AD = 2$ nên $SA = SD = 2$.

Áp dụng định lí Thales trong các tam giác SAB, SBC, SCD ta được:

$x=\frac{BM}{BA}=\frac{MQ}{SA}=\frac{BQ}{BS}=\frac{CP}{CS}=\frac{CN}{CD}=\frac{NP}{SD}$ và $\frac{PQ}{BC}=\frac{SQ}{SB}=\frac{AM}{AB}=1-x$.

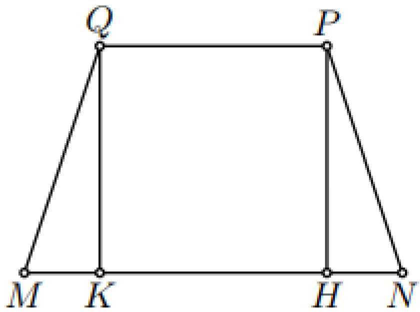
Suy ra $MQ=NP=2x, CN=x$ và $PQ=1-x$.

Tiếp tục áp dụng định lí Thales trong các tam giác ABC, ACD ta được:

$1-x=\frac{AM}{BC}=\frac{MI}{BC}, x=\frac{CN}{CD}=\frac{IN}{AD}, \Rightarrow MI=1-x$ và $IN=2x \Rightarrow MN=x+1$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của P, Q trên MN.

Ta có $MK=HN=\frac{MN-PQ}{2}=\frac{(x+1)-(1-x)}{2}=x$.



$\Rightarrow QK=\sqrt{QM^2-MK^2}=\sqrt{4x^2-x^2}=x\sqrt{3}$

$\Rightarrow S_{MNPQ}=\frac{(PQ+MN).QK}{2}=\frac{(1-x+1+x).\sqrt{3}x}{2}=\sqrt{3}x$.

d) Sai: Từ giả thiết: $S_{MNPQ}=\frac{1}{2}S_{SBD} \Leftrightarrow \sqrt{3}x=\frac{1}{2}\frac{(2x)^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow \sqrt{3}x=\frac{x^2\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Vậy $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ do $(0<x<1)$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có G là trọng tâm của tam giác BCD. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AG. Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích thiết diện của tứ diện cắt bởi mặt phẳng đi qua O đồng thời song song với mặt phẳng (ABC) và diện tích tam giác ABC. Gọi I là trung điểm BC. Trong mặt phẳng (AID) qua O kẻ đường thẳng song song với AI cắt AD tại P và cắt DI tại J. Qua J kẻ đường thẳng song song với MN, cắt CD tại N và cắt BD tại M. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

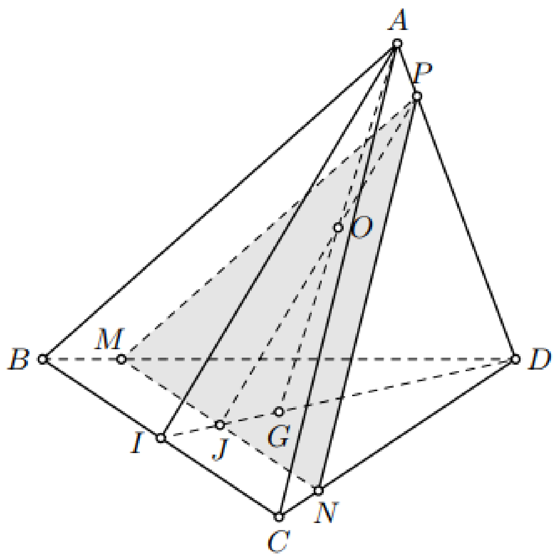
a) Thiết diện cần tìm là một hình thang

b) $\frac{JD}{ID}=\frac{6}{5}$

c) $\frac{MN}{BC}=\frac{5}{6}$

d) $\frac{S_1}{S_2}=\frac{25}{26}$

Lời giải



a) Sai: Gọi I là trung điểm BC. Trong mặt phẳng (AID) qua O kẻ đường thẳng song song với AI cắt AD tại P và cắt DI tại J.

Qua J kẻ đường thẳng song song với MN, cắt CD tại N và cắt BD tại M.

Thiết diện cần tìm là tam giác MNP.

b) Sai: Trong tam giác AIG có $OJ /\!/ AI$ hơn nữa O là trung diểm AG nên J là trung điểm IG

Do đó $IJ = \frac{1}{2}IG = \frac{1}{6}ID \Rightarrow \frac{JD}{ID} = \frac{5}{6}$.

c) Đúng: Suy ra hai tam giác MNP và BCA đồng dạng theo tỉ số $k = \frac{MN}{BC} = \frac{JD}{ID} = \frac{5}{6}$.

d) Đúng: Vậy $\frac{S_1}{S_2} = k^2 = \frac{25}{36}$.

Câu 3: Cho tứ diện $ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi I là trung điểm đoạn CD và M là điểm nằm trên đoạn BC (M khác B và C). Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (ABI). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Giao tuyến của (α) và mặt phẳng (BCD) là MP với $P \in CD$

b) Giao tuyến của (α) và mặt phẳng (ACD) là MQ với $Q \in AC$

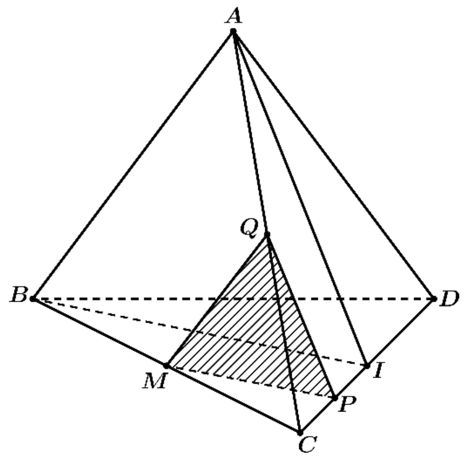
c) $PQ = (\alpha) \cap (ABC)$

d) Thiết diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (α) là một tam giác cân

Lời giải

a) Đúng: Theo giả thiết ta có $IA = IB$ suy ra ΔAIB cân tại I. Do (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (ABI) nên:

Trong (BCD) kẻ $MP \parallel BI, P \in CD$ suy ra $MP = (\alpha) \cap (BCD)$.



b) Sai: Trong (ACD) kẻ $PQ \parallel AI, Q \in AC$ suy ra $PQ = (\alpha) \cap (ACD)$.

c) Sai: Khi đó $MQ = (\alpha) \cap (ABC)$

d) Đúng: Thiết diện diện của tứ diện $ABCD$ khi cắt bởi (α) là ΔMPQ thì theo cách dựng ta suy ra ΔMPQ đồng dạng với ΔBIA suy ra ΔMPQ cân tại P.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành, mặt bên SAB là tam giác vuông tại A, $SA = a\sqrt{3}$, $SB = 2a$. Điểm M nằm trên đoạn AD sao cho $AM = 2MD$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Tính diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P).

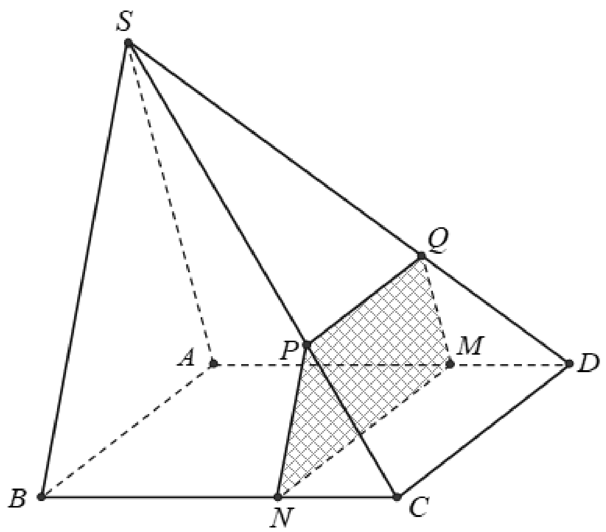
a) Giao tuyến của mặt phẳng (P) với $(ABCD)$ là MN với $N \in BC$

b) Thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) là một hình bình hành.

c) Độ dài của cạnh $AB = a$

d) Diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (P) bằng $\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{8}$

Lời giải



a) Đúng: Ta có: $\begin{cases}(P)//(SAB)\\ M\in AD, M\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(P)\cap(ABCD)=MN\\ (P)\cap(SCD)=PQ\end{cases}$ và $MN//PQ//AB$

Lại có $\begin{cases}(P)//(SAB)\\ M\in AD, M\in(P)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(P)\cap(SAD)=MQ\\ (P)\cap(SBC)=NP\end{cases}$ và $\begin{cases}MQ//SA\\ NP//SB\end{cases}$

Mà tam giác SAB vuông tại A nên $SA\perp AB\Rightarrow MN\perp MQ$

b) Sai : Từ đó suy ra (P) cắt hình chóp theo thiết diện là hình thang vuông tại M và Q.

c) Đúng : Mặt khác $MQ//SA\Rightarrow\dfrac{MQ}{SA}=\dfrac{DM}{DA}=\dfrac{DQ}{DS}\Rightarrow MQ=\dfrac{1}{3}SA$ và $\dfrac{DQ}{DS}=\dfrac{1}{3}$.

$PQ//CD\Rightarrow\dfrac{PQ}{CD}=\dfrac{SQ}{SD}\Rightarrow PQ=\dfrac{2}{3}AB$, với $AB=\sqrt{SB^2-SA^2}=a$

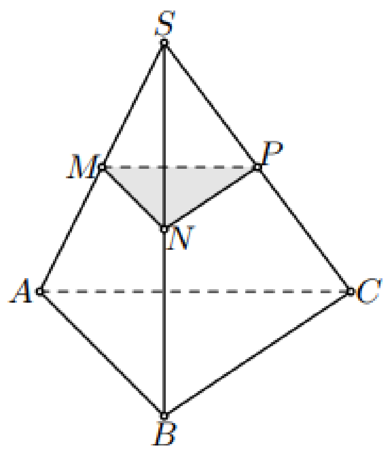
d) Sai: Khi đó $S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}MQ.(PQ+MN)\Leftrightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}\dfrac{SA}{3}.\left(\dfrac{2AB}{3}+AB\right)\Leftrightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{18}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có M di động trên cạnh SA sao cho $\dfrac{SM}{SA}=k$, với $(0<k<1, k\in\mathbb{R})$.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M và song song với mặt phẳng (ABC). Khi $k=\dfrac{\sqrt{m}}{n}$ với m,n nguyên dương thì mặt phẳng (α) cắt hình chóp $S.ABC$ theo một thiết diện có diện tích bằng nửa diện tích của tam giác ABC. Tính $m+n$

Lời giải



Qua M kẻ đường thẳng song song với AB cắt SB tại N.

Qua M kẻ đường thẳng song song với AC cắt SC tại P.

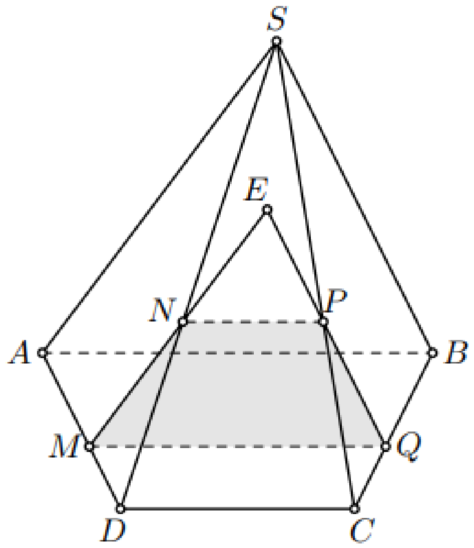
Thiết diện của hình chóp $S.ABC$ cắt bởi mặt phẳng (P) là tam giác MNP.

Ta có hai tam giác MNP và ABC đồng dạng theo tỉ số $\dfrac{MN}{AB}=\dfrac{SM}{SA}=k$.

Suy ra $\dfrac{S_{MNP}}{S_{ABC}}=k^2=\dfrac{1}{2}\Rightarrow k=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow m=n=2\Rightarrow m+n=4$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang $AB\,//\,CD, AB=2CD$. Điểm M thuộc cạnh AD (M không trùng với A và D) sao cho $\dfrac{MA}{MD}=x$. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với (SAB). Tìm x để diện tích thiết diện của hình chóp cắt bởi mặt phẳng (α) bằng một nửa diện tích tam giác SAB.

Lời giải



Dễ thấy thiết diện là hình thang $MNPQ$ (như hình vẽ)

Khi đó $MN\,//\,SA$, $NP\,//\,CD, PQ\,//\,SB, QM\,//\,AB$.

Gọi E là giao điểm của MN và PQ.

Ta có: $QM=\dfrac{MD}{AD}.AB+\dfrac{AM}{AD}.CD=\dfrac{1}{x+1}AB+\dfrac{x}{x+1}.CD=\dfrac{x+2}{2(x+1)}.AB$.

Hai tam giác SAB và EMQ đồng dạng nên $\dfrac{S_{EMQ}}{S_{SAB}}=\left(\dfrac{MQ}{AB}\right)^2=\dfrac{(x+2)^2}{4(x+1)^2}$.

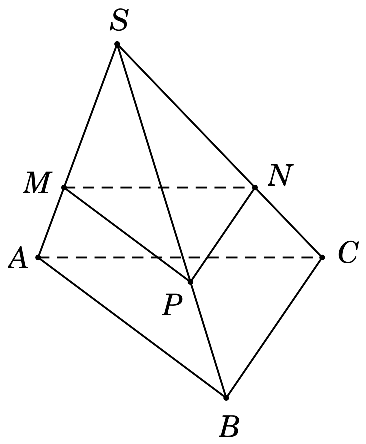
Vì $\dfrac{NP}{CD}=\dfrac{NS}{SD}=\dfrac{AM}{AD}=\dfrac{x}{x+1}$ suy ra $NP=\dfrac{x}{x+1}CD=\dfrac{x}{2(x+1)}AB$.

Do đó $\dfrac{NP}{QM}=\dfrac{x}{x+2}$ và $\dfrac{S_{EPN}}{S_{EMQ}}=\left(\dfrac{NP}{MQ}\right)^2=\dfrac{x^2}{(x+2)^2}\Rightarrow\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{EMQ}}=1-\dfrac{x^2}{(x+2)^2}=\dfrac{4x+4}{(x+2)^2}$.

Từ đó suy ra $\dfrac{S_{MNPQ}}{S_{ABC}}=\dfrac{4x+4}{4(x+1)^2}=\dfrac{1}{x+1}\Rightarrow S_{MNPQ}=\dfrac{1}{2}S_{SAB}\Leftrightarrow\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=1$.

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác ABC thỏa mãn $AB = AC = 4,\ BAC = 30°$. Mặt phẳng (P) song song với (ABC) cắt đoạn SA tại M sao cho $SM = 2MA$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABC$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải



Diện tích tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}.AB.AC.\sin BAC = \frac{1}{2}.4.4.\sin 30° = 4$.

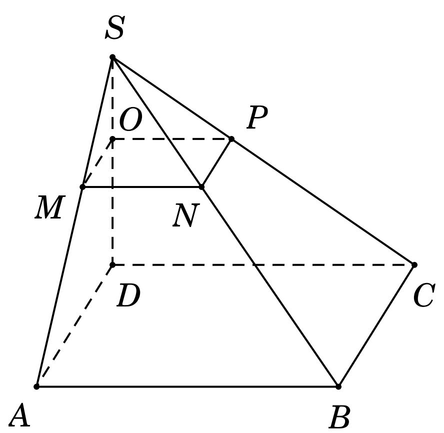
Gọi N, P lần lượt là giao điểm của mặt phẳng (P) và các cạnh SB, SC.

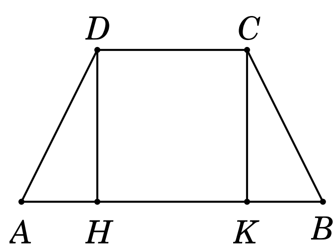
Vì $(P) // (ABC)$ nên theoo định lí Talet, ta có $\frac{SM}{SA} = \frac{SN}{SB} = \frac{SP}{SC} = \frac{2}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp $S.ABC$ theo thiết diện là tam giác MNP đồng dạng với tam giác ABC theo tỉ số $k = \frac{2}{3}$. Vậy $S_{\Delta MNP} = k^2.S_{\Delta ABC} = \left(\frac{2}{3}\right)^2.4 = \frac{16}{9} \approx 1,78$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân với cạnh bên $BC = 2$, hai đáy $AB = 6$, $CD = 4$. Mặt phẳng (P) song song với $(ABCD)$ và cắt cạnh SA tại M sao cho $SA = 3SM$. Diện tích thiết diện của (P) và hình chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu? (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

Lời giải





Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D, C trên AB

$ABCD$ là hình thang cân $\Rightarrow \begin{cases} AH = BK;\ CD = HK \\ AH + HK + BK = AB \end{cases} \Rightarrow BK = 1$.

Tam giác BCK vuông tại K, có $CK = \sqrt{BC^2 - BK^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$.

Suy ra diện tích hình thang $ABCD$ là $S_{ABCD} = CK.\dfrac{AB + CD}{2} = \sqrt{3}.\dfrac{4+6}{2} = 5\sqrt{3}$.

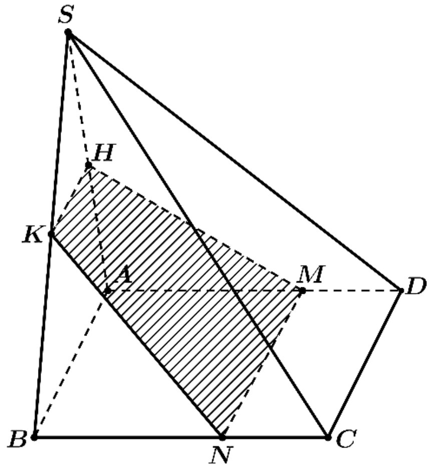
Gọi N, P, Q lần lượt là giao điểm của (P) và các cạnh SB, SC, SD.

Vì $(P) \,//\, (ABCD)$ nên theo định lí Talet, ta có $\dfrac{MN}{AB} = \dfrac{NP}{BC} = \dfrac{PQ}{CD} = \dfrac{QM}{AD} = \dfrac{1}{3}$.

Khi đó (P) cắt hình chóp theo thiết diện $MNPQ$ có diện tích $S_{MNPQ} = k^2.S_{ABCD} = \dfrac{5\sqrt{3}}{9} \approx 0,96$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a, tam giác SAB đều, $SC = SD = a\sqrt{3}$. Gọi H, K lần lượt là trung điểm của SA, SB. Gọi M là một điểm trên cạnh AD, mặt phẳng (HKM) cắt BC tại N. Đặt $AM = x\ (0 \le x \le a)$. Tìm giá trị của x để diện tích thiết diện $HKMN$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải



Mặt phẳng (HKM) và $(ABCD)$ chứa hai đường thẳng song song HK và AB nên giao tuyến của chúng là MN cũng song song với HK và AB. Xét hai tam giác HAM và KBN có:

$BN = AM$; $BK = AH$; $KBN = MAH$ nên $\Delta HAM = \Delta KBN$.

Từ đó suy ra: $MH = KN$. $MHKN$ là hình thang cân có hai đáy $MN = a; HK = \dfrac{a}{2}$.

Sử dụng định lý hàm số cos cho tam giác SAD ta tính được $\cos HAD = -\dfrac{1}{2}$.

Ta tính được: $HM^2 = HA^2 + AM^2 - 2HA.AM.\left(-\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{a^2 + 4x^2 + 2ax}{4}$.

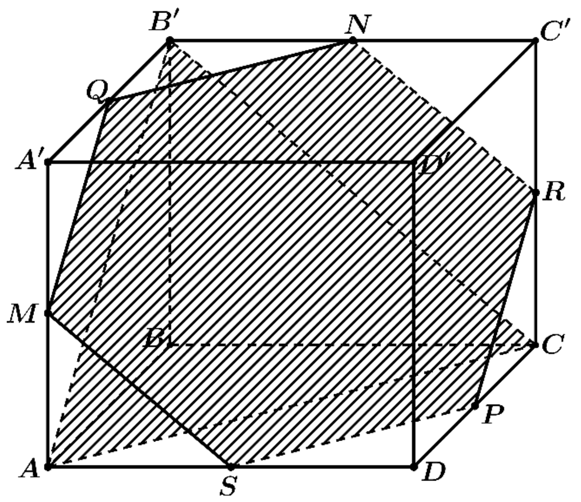
Đường cao của hình thang cân được tính bằng công thức:

$$\sqrt{HM^2-\left(\frac{MN-HK}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{16x^2+8ax+3a^2}.$$

Do hai đáy có độ dài không đổi nên diện tích thiết diện bé nhất khi đường cao bé nhất đạt khi $x=0$

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh $AB=4$. Trên các cạnh $AA', B'C', CD$ lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $MA=NB'=PC=x$ $(2\le x<4)$. Khi thiết diện được tạo bởi mặt phẳng (MNP) cắt hình lập phương có diện tích bằng $11\sqrt{3}$ thì giá trị x bằng bao nhiêu?

Lời giải



Ta có: $\frac{MA}{MA'}=\frac{NB'}{NC'}\Rightarrow MN, AB', A'C'$ thuộc ba mặt phẳng song song hay $MN//(\alpha)$ do chứa AB' và song song với $A'C'\Rightarrow(\alpha)\equiv(AB'C)$.

Lại có $\frac{MA}{MA'}=\frac{PC}{PD}\Rightarrow MP, AC, A'D$ thuộc ba mặt phẳng song song hay $MP//(\beta)$ do chứa AC và $A'D\Rightarrow(\beta)\equiv(AB'C)$.

Khi đó $\begin{cases}MN//(AB'C)\\MP//(AB'C)\\MN\cap MP\end{cases}\Rightarrow(MNP)//(AB'C)$.

Ta lại có: $\begin{cases}(MNP)//(AB'C)\\(AA'B'B)\cap(AB'C)=AB'\\M\in(MNP)\cap(AA'B'B)\end{cases}\Rightarrow(MNP)\cap(AA'B'B)=d\Rightarrow d\cap A'B'=Q$.

Tương tự ta xác định được các giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt $ABCD$ và $BB'C'C$ của hình lập phương. Từ đó, thiết diện của hình lập phương bị cắt bởi mặt phẳng (MNP) là lục giác $MQNRPS$ như hình vẽ.

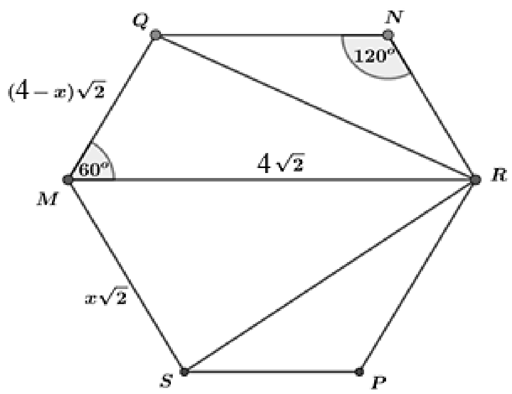
Tam giác $AB'C$ đều và $(QM,QN)=(AB',AC)=60^\circ$. Từ đó dễ thấy lục giác $MQNRPS$ có tất cả các góc bằng 120°.

Tam giác AMS vuông cân tại A nên $MS=AM.\sqrt{2}=x\sqrt{2}$ và tương tự $PR=QN=x\sqrt{2}$.

Tam giác $A'MQ$ vuông cân tại A' nên $MQ=A'M.\sqrt{2}=(4-x)\sqrt{2}$

Tương tự ta có: $NR=SP=(4-x)\sqrt{2}$.

$\begin{cases}(MNP)//AC\\(MNP)\cap(AA'C'C)=MR\\AC\subset(AA'C'C)\end{cases}\Rightarrow MR//AC\Rightarrow MRCA$ là hình bình hành $\Rightarrow MR=AC=4\sqrt{2}$.



$$S_{MQNRPS}=S_{MQRS}+2S_{QNR}=\frac{4\sqrt{2}.4\sqrt{2}.\sin 60^\circ}{2}+(4-x)\sqrt{2}.x\sqrt{2}.\sin 120^\circ=8\sqrt{3}+\sqrt{3}(4-x)x.$$

$$S_{MQNRPS}=11\sqrt{3}\Leftrightarrow(4-x)x=3\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right..$$

Đối chiếu điều kiện lấy $x=3$.

-----------------HẾT-----------------